HAL
open science

Contribution au développement d'une analogie vibroacoustique pour la modélisation du bruit d'origine aérodynamique

Ronan Serré

To cite this version:

Ronan Serré. Contribution au développement d'une analogie vibroacoustique pour la modélisation du bruit d'origine aérodynamique. Acoustique [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2014. Français. NNT : 2014ENAM0052 . tel-01132929

HAL Id: tel-01132929

https://pastel.hal.science/tel-01132929v1

Submitted on 18 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2014-ENAM-0052

École doctorale n° 432 : Science des Métiers de l'ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Acoustique "

présentée et soutenue publiquement par

Ronan SERRÉ

le 17 décembre 2014

CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT D'UNE ANALOGIE VIBROACOUSTIQUE POUR LA MODÉLISATION DU BRUIT D'ORIGINE AÉRODYNAMIQUE

Directeur de thèse : **Jean-Christophe ROBINET**
Co-encadrement de la thèse : **Florent MARGNAT**

Jury

M. Yves AURÉGAN, Directeur de recherche CNRS, LAUM, Université du Maine, Le Mans	Président
M. Régis MARCHIANO, Professeur, IJRA, Université Pierre et Marie Curie, Paris	Rapporteur
M. Jean-Philippe BRAZIER, Ingénieur de recherche, ONERA DMAE, Toulouse	Rapporteur
M. Yves GERVAIS, Professeur, Institut Pprime, Université de Poitiers, Poitiers	Examinateur
M. Jean-Christophe ROBINET, Professeur, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech, Paris	Examinateur
M. Florent MARGNAT, Maître de conférences, Institut Pprime, Université de Poitiers, Poitiers	Examinateur

T H È S E

Arts et Métiers ParisTech - Centre de Paris
Laboratoire DynFluid

« Personne ne peut vous remplacer sur le chemin de la Connaissance.

Il y a forcément un moment où il faut y aller soi–même,

aussi difficile que cela paraisse. »

J. Krishnamurti

Remerciements

Je voudrais remercier en premier lieu Alain Lerat pour m'avoir permis d'effectuer ma thèse dans son laboratoire lorsqu'il en était le directeur en octobre 2011, Farid Bakir qui en est le directeur actuel, ainsi que les personnes de l'école doctorale pour leur aide et pour leur accompagnement des doctorants. Merci à Anthony pour le soutien informatique.

Je remercie tous les collègues du laboratoire DynFluid. La cohésion d'une entité si riche de diversité d'opinions et de caractères est source d'admiration et de sympathie. Les joutes oratoires et les discussions passionnées resteront de bons souvenirs. Pour cette ambiance familiale, je remercie les permanents du laboratoire. Merci à Xavier Gloerfelt pour avoir toujours accepté le partage de son immense connaissance de l'aéroacoustique.
Pour avoir été là à mes débuts et m'avoir guidé sur le chemin, je remercie les anciens ; ceux–là mêmes que l'on a vu soutenir en rêvant au jour où l'on se battra à leur place : Rocio, Karim, Guillaume, Jérémy, Song, Pierre-Yves et Junior. Je leur souhaite une excellente réussite dans ce qu'ils font.
Je remercie les nouveaux pour leur enthousiasme et leur gentillesse : Corentin (tu as oublié quelque chose), Elie et Miloud ; et l'équipe italienne : Elio, Luca, Mario et Mirco. Je suis sûr qu'ils feront des étincelles, qu'ils défenderont brillamment leur thèse et que leur séjour au laboratoire sera fait de bons moments.
Je remercie également les camarades croisés ou rencontrés dans l'équipe d'à côté : Michael, Sofiane, Florent, Charles et Benjamin. Ben, tu peux encore changer de thèse. Après tout, on mérite tous une troisième chance ! Je remercie aussi Ivan pour les manip' surannées mais toujours au top.
Je remercie Ignacio et Ifanila, les amis rencontrés en conférence.
Je remercie les compagnons d'aventure. Grégoire, tu seras peut–être président ou maître du monde un jour alors, on reste copain. Leslie, j'espère que tu arriveras à parler français, quand tu auras laissé tomber ton accent plein de Soleil. Matthieu, je te souhaite de trouver ton petit coin de paradis, entre Nantes et Macao. Florian, j'espère que tu trouveras ce après quoi tu cours, ne serait–ce qu'un pot de mayonnaise ou une gorgée de bière. J'aimerais que tu gardes à l'esprit cette réponse que donnait Churchill lorsqu'on lui demandait le secret de sa longévité : « Le sport ! Je n'en fais jamais ». Je sais que tu as toujours raison, mais il faut t'y faire, le sport, c'est mauvais pour la santé.

Je remercie aussi les stagiaires passés au laboratoire et notamment Ronan et Florent, ainsi que les étudiants que j'ai pu avoir en cours ou en tutorat. La pédagogie, ça s'apprend et ça prend du temps. Les étudiants vous renvoient une image de

vous–même et de la connaissance que vous prétendez transmettre.

Une petite pensée pour les copains de fac. Ceux avec qui je me suis débattu pour ne pas me noyer dans les cours amiantés de Jussieu. Can, tu es notre maître à tous. Mejdi, tu as basculé dans le mauvais côté de la mécanique, là où il n'y a rien que l'on peut appeler un écoulement. On peut dire que nous sommes allé au bout, pas vrai camarade ? Cyril, Gaya, vous y êtes presque, courage ! Je remercie les gadz'arts qui ont partagés nos amphis. Marko, un petit *raki* ? Gari, tu as choisi d'aller là où se lève le Soleil, j'espère que tu ne seras pas *désorienté*. Tu vas dans la bonne direction.

Je remercie le groupe Guillemet, la soupape en cuivre et les amis voyageurs, Guillaume et Émilien.

Je remercie les vieux potes pour leur soutien, leur patience et leur compréhension ; qu'ils soient dans le coin, dans une autre région ou dans un autre pays.

Je remercie ma famille pour les mêmes raisons. Elle a été un pilier solide en de nombreuses occasions.

Je remercie mes encadrants. Jean–Christophe, merci pour ta pédagogie et ta compréhension. La rigueur et l'esprit scientifique qui t'animent font chaud au cœur. Florent, ta vision des choses et ton humanisme m'ont donné beaucoup d'énergie. Tu crois en ce que tu fais et j'ai apprécié y croire avec toi. Je suis heureux que nous ayons débroussaillé ensemble le terrain de l'analogie vibroacoustique.

Enfin, je remercie les membres du jury pour avoir accepté de juger mon travail et particulièrement Jean–Philippe Brazier et Régis Marchiano pour en avoir été rapporteurs.

D'une manière générale, ces remerciements sont la condensation de mes pensées orientées vers tous ceux croisés sur la route, qui ont fait de moi la personne que je suis aujourd'hui.

Alors, un tout grand merci.

Table des matières

Avant–propos . . . 11
1 Problématique scientifique . . . 17
1.1 Concept d'onde acoustique . . . 18
1.1.1 L'équation d'onde . . . 18
1.1.2 Caractérisation de l'aspect acoustique d'une onde . . . 19
1.1.3 Le bruit du vent . . . 19
1.2 Excitation des ondes acoustiques . . . 20
1.2.1 Notion de terme source . . . 20
1.2.2 Analogies acoustiques . . . 21
1.2.3 Conditions aux limites . . . 23
1.2.4 Formalisme intégral et distributions . . . 23
1.3 Trois symboles aéroacoustiques . . . 25
1.3.1 La paire de tourbillons co–rotatifs . . . 25
1.3.2 Vibration du domaine fluide . . . 26
1.3.3 Efficacité d'une excitation « air–air » . . . 28
1.4 Synthèse . . . 29
2 L'énergie acoustique et son transport . . . 31
2.1 Problématique de l'énergie acoustique . . . 32
2.2 Définition usuelle de l'énergie acoustique . . . 33
2.2.1 Tentative de description à l'ordre deux . . . 36
2.2.2 Prise en compte d'un écoulement en mouvement uniforme . . . 37
2.2.3 Expressions pour le potentiel des vitesses . . . 37
2.3 L'approche eulérienne . . . 39
2.4 L'approche dissipative . . . 44
2.4.1 Théorie potentielle . . . 46
2.4.2 Le rôle des fluctuations de vorticité . . . 54
2.4.3 Un théorème exact . . . 55
2.4.4 Un cas d'application numérique . . . 57
2.4.5 Enthalpie ou exergie ? . . . 60
2.4.6 Première unification . . . 64
2.5 L'approche lagrangienne . . . 65
2.6 Synthèse . . . 69
3 Formalismes d'excitation surfacique . . . 75
3.1 Discussion de l'approche de Lighthill . . . 76
3.2 Les méthodes d'extrapolation . . . 77
3.2.1 Le formalisme de Ffowcs Williams et Hawkings . . . 78
3.2.2 Le formalisme de Kirchhoff . . . 81

3.3 Distributions sur une surface plane . . . 82
3.3.1 Surface en sollicitation de pression . . . 83
3.3.2 Surface en sollicitation de vitesse . . . 84
3.3.3 Formulation de Farassat et Myers . . . 86
3.4 Applications du formalisme de Farassat et Myers . . . 90
3.4.1 La sphère pulsante . . . 90
3.4.2 Extrapolation d'une onde acoustique sphérique . . . 92
3.4.3 Le piston vibrant . . . 93
3.4.4 Remarque sur l'évaluation aux temps retardés . . . 94
3.5 Synthèse . . . 96
4 Réponse acoustique à une excitation aérodynamique . . . 97
4.1 Discussion préliminaire . . . 98
4.2 Sollicitation par une onde de pression . . . 99
4.2.1 Étude analytique . . . 101
4.2.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation . . . 110
4.3 Extension à un milieu propagatif en mouvement uniforme . . . 114
4.3.1 Étude analytique en milieu convecté . . . 114
4.3.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation avec convection . . . 116
4.4 Sollicitation par vitesse normale de vibration . . . 119
4.4.1 Étude analytique . . . 120
4.4.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation . . . 124
4.5 Extension à un milieu propagatif en mouvement uniforme . . . 126
4.5.1 Étude analytique en milieu convecté . . . 126
4.5.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation avec convection . . . 127
4.6 Résumé – synthèse . . . 129
5 Modélisation vibroacoustique du rayonnement d'une couche de mélange . . . 135
5.1 Rayonnement acoustique d'une couche de mélange . . . 136
5.1.1 Discussion préliminaire . . . 136
5.1.2 Simulation acoustique directe de la couche de mélange . . . 137
5.1.3 Implantation du formalisme intégral . . . 138
5.1.4 Influence de la position de la surface de contrôle . . . 143
5.2 L'analogie de Liepmann . . . 144
5.2.1 Concept d'épaisseur de déplacement . . . 144
5.2.2 Sollicitation de l'acoustique par l'épaisseur de déplacement . . . 145
5.3 Application à la couche de mélange . . . 147
5.3.1 Adaptation du concept d'épaisseur de déplacement . . . 147
5.3.2 Intégration numérique de l'épaisseur de déplacement . . . 148
5.4 Sollicition par ligne de courant . . . 153
5.5 Correction de l'impédance de rayonnement . . . 155
5.6 Synthèse . . . 157
Conclusion . . . 159
Bibliographie . . . 163
A Transformation en coordonnées curvilignes . . . 173
B Solutions analytiques des surfaces déformables . . . 177
C Méthode de la phase stationnaire . . . 181
D Méthode de Simpson en maillage irrégulier . . . 185
E Rappel des principales fonctions de Green . . . 187

Avant–propos

"And those who were seen dancing were thought to be insane
by those who could not hear the music."
F. Nietzsche

L'aphorisme de Nietzsche choisi pour figurer en exergue de cet avant–propos est une invitation au voyage. Voyage vers une démarche scientifique issue de l'écoute d'une musique intérieure. Toute musique étant en substance une vibration, elle peut imprimer un mouvement. C'est la transmission d'une énergie d'une partie à une autre. Ce mémoire se veut à l'image du sujet qu'il étudie, propager ce qui est l'esprit d'origine de notre démarche ; et pour que l'on comprenne pourquoi l'on danse, faire entendre la musique. Cette digression initiale rappelle que ce que la science nomme acoustique a une forte dimension irrationnelle dans l'imaginaire collectif faisant appel aux sens. La musique, la parole sont une partie intégrante de toutes les cultures humaines. Mais le son est un objet d'études « entièrement rationnel, clairement défini et se conformant précisément aux lois rationnelles de la mécanique »[54]. Et c'est justement parce que la description du phénomène sonore est chargée de sens que l'acoustique est une discipline très attirante ; elle évoque la transmission de l'information par la parole et le plaisir musical. Le processus de description rationnelle de l'acoustique en tant que phénomène physique observable a débuté avec la Renaissance et la physique classique moderne. Le son — et le bruit au sens large — est une vibration des particules du milieu environnant. Lorsqu'une structure est en vibration, elle imprime son mouvement aux particules voisines. Selon leur capacité de réaction à cette sollicitation, ces particules transmettent à leur tour et propagent l'information qu'elles ont reçue. Que la structure en vibration soit un corps solide ou un écoulement fluide, le milieu répond. D'une manière et en proportion différentes, mais il répond toujours. Le canal de communication réel de la structure à ses particules adjacentes est encore un sujet ouvert. Et parce que les grandes découvertes ont moins été accompagnées d'un « Euréka ! » que d'un « tiens, c'est bizarre . . . », c'est le mystère entourant le transfert d'énergie entre une certaine excitation et son rayonnement acoustique qui sert de contexte à ce mémoire.

Si une première question concerne le transfert d'énergie entre l'aérodynamique et l'acoustique, une seconde question se pose sur la nature du phénomène propre à exciter le champ acoustique, celui qui détermine ce transfert d'énergie. L'aéroacoustique est la discipline scientifique dont l'une des tâches est d'étudier le cas d'excitations apportées par le milieu aérodynamique. Tout le monde a pu remarquer à quel point un avion en vol ou un train en marche font du bruit. Le bruit occasionné par les

transports est un enjeu sociétal et environnemental. C'est également un défi scientifique. L'interaction de l'écoulement aérodynamique avec des structures comme les trains d'atterrissage [96] ou les cavités de pantographe [122] est une puissante source sonore. Grâce aux avancées en mécanique des fluides, la topologie de l'écoulement peut être connue. Mais l'aéroacousticien hérite de la tâche difficile de faire le tri dans cette topologie bien souvent complexe. Car toutes les structures en évolution dans un écoulement aérodynamique ne participent pas au rayonnement acoustique. Ainsi, malgré diverses ressources issues de l'acoustique ou de la mécanique des fluides, on verra que les choses deviennent floues lorsqu'on cherche à savoir exactement la nature du phénomène propre à exciter le milieu acoustique. Si l'aéroacoustique dispose de nombreux moyens — dont le calcul direct ou les analogies — pour prédire le rayonnement sonore avec précision, l'investissement nécessaire en de telles simulations numériques peut restreindre l'utilisation de ces dernières. Plus d'attention mérite d'être portée du côté de la modélisation. Les calculs directs peuvent permettre de constituer une base de données sur des cas d'écoulements variés. En s'appuyant sur de tels cas, on peut en faire l'analyse. Une analyse pour esquisser une meilleure modélisation. En prenant un cas bien documenté on peut effectuer ce tri, décomposer les phénomènes et tester leur impact, leur rôle dans le processus acoustique. Le rôle de leur forme, de leur mouvement ou même de leur nature.

Reprenons en exemple le bruit d'un avion, dont le contrôle et la suppression font actuellement l'objet de beaucoup d'études, tant dans les laboratoires de recherches universitaires que dans les bureaux d'études industriels. Beaucoup de phénomènes aérodynamiques participent à la génération du bruit d'un avion. À l'atterrissage, le bruit est majoritairement issu des trains d'atterrissage ou des dispositifs de sustentation. Mais au décollage ou lorsque l'avion est en phase de croisière, le son caractéristique est ce qu'on appelle le *bruit de jet*. Lorsque l'air chaud sort propulsé des réacteurs, l'interaction avec l'air ambiant entraîne un écoulement cisaillé. Pour simplifier l'écoulement de jet, on le représente par une *couche de mélange*, où deux écoulements parallèles de différentes vitesses sont en contact. Il se développe à l'interface des structures cohérentes tourbillonnaires. L'interaction de ces structures entre elles et leur appariement est aujourd'hui une source acoustique avérée [58, 85, 118, 130]. La prédominance de ce phénomène sur d'autres sources acoustiques est suggérée [9, 103], comme l'illustre la figure 1. Elle représente les fluctuations de pression et l'activité tourbillonnaire dans un écoulement de couche de mélange d'après les calculs de Moser *et al.* [117]. En voyant sur la figure 1 l'importance que semble avoir l'appariement tourbillonnaire sur la production acoustique, on peut se demander de manière plus formelle quelles sont les caractéristiques d'un écoulement qui entrent en jeu pour la production acoustique et pilotent le taux d'énergie qu'il transmet à l'acoustique.

Ce sont ces questions qui nous accompagneront tout au long de ces pages. Pour y répondre, nous adoptons une démarche que l'on veut schématiser par la figure 2, qui peut se décomposer en plusieurs problématiques élémentaires. C'est une approche originale et prospective dans un but de modélisation. La problématique du transfert d'énergie entre l'aérodynamique et l'acoustique peut être suivie en une seule approche, si les mécanismes de ce transfert peuvent être identifiés et définis sans ambiguïté comme on le représente par le bloc supérieur. Ensuite, nous allons décomposer la partie dynamique de l'écoulement par une étude paramétrique sur différents phénomènes excitateurs, pour mettre en évidence le critère pour la transmission de

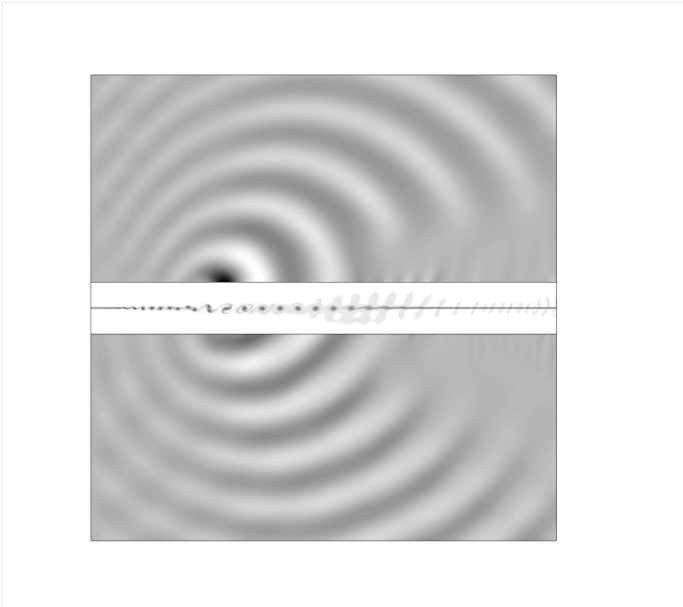


FIGURE 1 – Représentation d'un écoulement de couche de mélange d'après une base de données issue des calculs de Moser *et al.* [117]. Niveaux de pression fluctuante et vorticité (au centre).

l'énergie acoustique. Autrement dit, suivre la voie inférieure de la figure 2, c'est regarder comment réagit le milieu acoustique à un certain type de sollicitation comme le montre le bloc inférieur droit. Une tentative de modélisation est ensuite menée sur un cas applicatif pour réduire l'excitation aérodynamique et cette réflexion est représentée par le bloc inférieur gauche. On peut alors regarder dans un écoulement si la pression ou la cinématique (la vitesse) expriment des caractéristiques identifiées par l'étude paramétrique comme efficaces énergétiquement. Si c'est le cas et si on trouve une topologie qui pilote le rayonnement acoustique, on peut construire une analogie avec la surface que forme l'excitation. Ce serait une analogie pour dresser une équivalence entre les structures de l'écoulement et la vibration d'une surface. Ce serait une analogie vibroacoustique.

Cet avant–propos nous a permis de présenter dans un cadre général la réflexion qui est menée dans ce document. Elle s'articule autour de trois axes de recherche : l'énergie acoustique, les moyens d'excitation surfacique et la réponse du milieu propagatif, et la modélisation de la réduction du phénomène aérodynamique à une surface vibrante. Ces deux derniers axes ont largement profité du savoir–faire disponible au laboratoire où s'est déroulée la thèse, notamment par l'accès aux bases de données de simulations numériques directes (écoulement de tourbillons co–rotatifs et de couche de mélange) et par la connaissance approfondie des membres de l'équipe sur les méthodes intégrales. Ces trois axes principaux ont été organisés en cinq chapitres.

Organisation du mémoire

Le chapitre 1 replace la problématique générale de la thèse dans son contexte scientifique. À partir d'une définition claire des caractéristiques premières du phénomène acoustique, l'accent est mis sur les difficultés encore rencontrées. Un de ces problèmes non résolus concerne la nature du phénomène excitateur. Mais l'onde qui

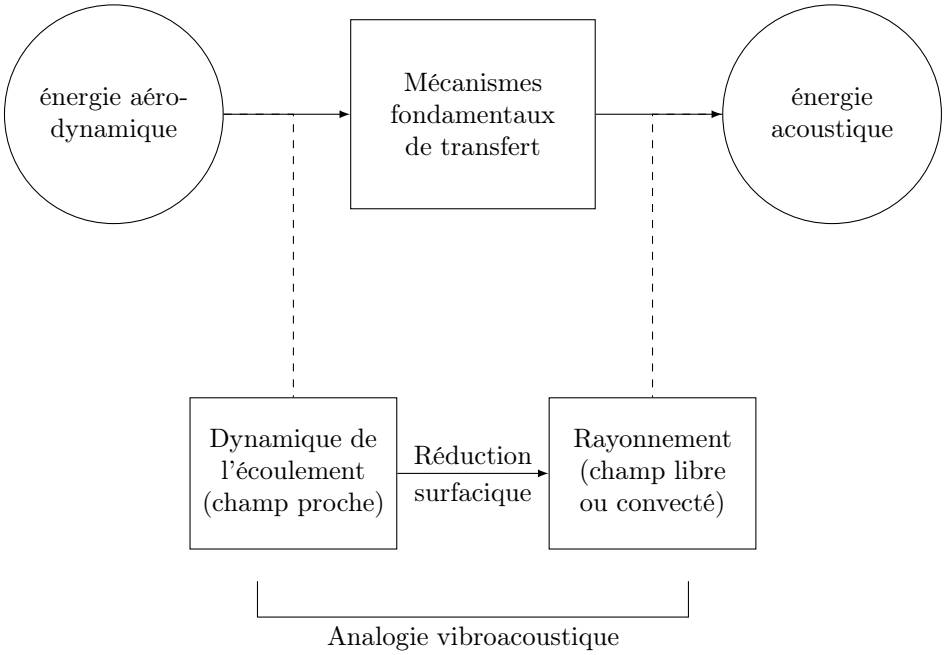


FIGURE 2 – Schématisation de la problématique de la thèse.

en résulte se propage et elle a besoin d'une énergie pour cela (malgré de très faibles ordres de grandeurs [54]). C'est la raison pour laquelle on s'intéresse à l'origine de l'énergie dont le phénomène s'alimente pour rayonner, avant de se demander comment le milieu acoustique réagit ou comment sa réponse peut être prédite par le calcul.

Le chapitre 2 recherche dans la littérature disponible les notions d'énergie acoustique et de son transport. On verra comment elles ont été abordées, et quels sont les résultats les plus marquants. Nous verrons que trois grandes tendances peuvent se dégager. Globalement, le sujet est foisonnant. Si certains outils sont très utilisés, nous verrons qu'il y a presque autant d'énergies acoustiques qu'il y a eu d'auteurs pour en parler. Et de nouvelles pierres sont régulièrement ajoutées à l'édifice [15, 140]. Ce chapitre est représenté par le bloc supérieur sur la figure 2.

Le chapitre 3 détaille certains formalismes de calcul acoustique qui auront été évoqués au chapitre 1. Si la théorie de Lighthill est adaptée à un rayonnement en champ libre (sans présence de parois), elle a permis d'ouvrir la voie en définissant un cadre général. Certains formalismes étendus depuis l'équation de Lighthill comme la formulation de Ffowcs Williams et Hawkings ou depuis l'équation d'onde dans la théorie des fonctions de Green comme la formulation de Kirchhoff peuvent permettre de traiter l'information sur une surface. À partir de cette dernière, une condition sur cette surface permet d'avoir recours à la méthode des images. On aboutit à l'intégrale de Kirchhoff ou à l'intégrale de Rayleigh et cela constitue des formalismes d'excitation surfacique. Une extension du formalisme de Kirchhoff est proposée par Farassat et Myers [52] pour une surface en mouvement et déformable, décrite par ses coordonnées curvilignes. Cette extension est appliquée sur des cas académiques.

Ces formalismes sont utilisés au chapitre 4 comme support pour apporter une

excitation (et donc fournir de l'énergie) au milieu acoustique. Et c'est la manière dont ce milieu réagit qui est quantifiée. Pour cela, deux critères sont mis en place. L'un porte sur la direction spatiale privilégiée du rayonnement et l'autre sur le taux d'énergie qu'il récupère de l'excitation pour pouvoir s'exprimer, définissant l'efficacité du processus. Le milieu de propagation est d'abord pris au repos, avant que l'étude soit étendue au cas où il est sujet à un mouvement uniforme. Ces deux chapitres sont représentés par le bloc inférieur de droite sur la figure 2.

Le chapitre 5 applique ces considérations d'excitation surfacique dans un cas (relativement) simple d'écoulement bien documenté. Les méthodes intégrales sont mises en œuvre et comparées aux bases de données disponibles [103, 117]. Une des premières tentatives d'excitation surfacique, portée par Liepmann [89] est revisitée, étendue à la convection et appliquée. Cette formulation permet la réduction des fluctuations aérodynamiques sur une surface pour élaborer un modèle vibroacoustique. Une analyse critique est menée et des solutions d'améliorations sont proposées. Ce dernier chapitre représente le bloc inférieur de gauche sur la figure 2.

Finalement et de manière tout à fait classique, une réflexion de synthèse et de perspectives referme ce document.

Chapitre 1

Problématique scientifique

« Sachez que les arbres et le vent se délectent
de la mélodie qu'ensemble ils enfantent. »
P. Rabhi

Sommaire

1.1 Concept d'onde acoustique **18**
1.1.1 L'équation d'onde 18
1.1.2 Caractérisation de l'aspect acoustique d'une onde 19
1.1.3 Le bruit du vent 19
1.2 Excitation des ondes acoustiques **20**
1.2.1 Notion de terme source 20
1.2.2 Analogies acoustiques 21
1.2.3 Conditions aux limites 23
1.2.4 Formalisme intégral et distributions 23
1.3 Trois symboles aéroacoustiques **25**
1.3.1 La paire de tourbillons co–rotatifs 25
1.3.2 Vibration du domaine fluide 26
1.3.3 Efficacité d'une excitation « air–air » 28
1.4 Synthèse **29**

Plutôt qu'un exposé historique de l'aéroacoustique, nous présentons ici les faits qui symbolisent pour nous la situation actuelle de la discipline et qui ont motivé la définition et l'orientation de ce sujet de recherche. Ce chapitre tient donc davantage de l'état de l'art au sens fort que de la synthèse bibliographique ou de l'exposé pédagogique des connaissances disponibles.

Comme sujet interdisciplinaire, l'aéroacoustique fait le lien entre la mécanique des fluides et l'acoustique. L'écoulement étant manifestement la cause — pour ne pas dire la source, ce dernier concept n'étant pas aussi simple qu'il n'y parait — de l'onde sonore, il est naturel de considérer le problème d'abord depuis la mécanique des fluides en cherchant à extraire le son du vent. Nous prenons, dans ce travail, le parti de considérer le problème fondamentalement depuis sa vision acoustique. Il est pris acte de ce que l'excitation est apportée par l'écoulement, mais nos efforts

se porteront davantage sur les propriétés du milieu acoustique de réagir à tel ou tel type de sollicitation. Les deux premières parties explorent en détail les propriétés du mouvement acoustique et son excitation. Dans une troisième partie, trois phénomènes symbolisant la problématique sont décrits : le bruit des tourbillons co–rotatifs, la décroissance radiale des fluctuations de pression dans un jet et l'impédance de rayonnement d'un tuyau ouvert. Une synthèse permet finalement de dégager la problématique de la thèse et les questions auxquelles elle tente de répondre.

1.1 Concept d'onde acoustique

C'est une propriété des milieux continus que de soutenir la propagation d'ondes de compressibilité. Dans le cas des fluides, les déformations à caractère acoustique peuvent être approchées par un jeu d'équations, bien qu'en pratique elles soient difficiles à isoler des autres types de déformation.

1.1.1 L'équation d'onde

En négligeant la dissipation visqueuse, en supposant une évolution isentropique et en l'absence de gradients et de mouvement moyens, les petites perturbations de pression, de masse volumique ou du potentiel de vitesse d'un gaz parfait, représentés par un scalaire ϕ, sont gouvernées par une équation d'onde [23] :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \Box\phi = 0$$

dont les solutions élémentaires sont du type $f(t - r/c) + g(t + r/c)$. Le paramètre c, appelé célérité des ondes acoustiques, est une propriété du fluide considéré et dépend de la température. C'est une vitesse de phase, c'est–à–dire de propagation.

Avec le formalisme de Fourier, le phénomène ondulatoire qu'est l'acoustique est simple à décrire par une relation de proportionnalité entre fréquences et longueurs d'onde. La solution générale ci–dessus se mettra plutôt sous la forme $\exp(i\omega t \pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$. La norme k du vecteur d'onde $||\mathbf{k}||$ et la fréquence ω sont alors reliées par une relation de dispersion qui est une conséquence de l'équation d'onde : $k = \omega/c$. Ainsi, on pourrait dire qu'une onde est acoustique si son nombre d'onde est égal à sa pulsation divisée par la célérité du son.

Lorsque le milieu n'est plus au repos mais se trouve en mouvement moyen uniforme et subsonique, la convection des ondes se compose avec leur propagation. La vitesse de phase est alors modifiée par la convection à travers la formule $c_{eff} = c + U_c \times \cos\theta$ où θ est l'angle entre la direction de propagation acoustique et la direction de l'écoulement moyen (face au vent, l'onde acoustique se propage à $c - U_c$ en valeur absolue). On peut ainsi décrire le mouvement à l'aide d'une équation des ondes convectée [67] :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{D^2 \phi}{Dt^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On peut donc quand même utiliser une caractérisation similaire au cas sans écoulement en disant que les ondes acoustiques sont les seules à pouvoir remonter contre le courant principal.

1.1.2 Caractérisation de l'aspect acoustique d'une onde

En milieu au repos, le caractère acoustique d'un mouvement peut être défini avec ce formalisme d'équation d'onde. En présence d'écoulement moyen, dit « porteur », lorsqu'il est uniforme, la définition reste relativement aisée, mais nécessite d'introduire la notion de mouvement potentiel. Le mouvement acoustique est alors celui qui est associé à la partie du champ de vitesse qui dérive d'un potentiel scalaire [41]. La partie complémentaire, qui dérive d'un potentiel vecteur, fait l'objet d'une excitation disjointe, et, au premier ordre, les deux types de mouvement n'interagissent pas [35].

Lorsque l'écoulement porteur n'est plus uniforme, par exemple en présence de cisaillement, la séparation n'est plus possible de manière aussi directe [49]. Il faut alors faire intervenir des considérations sur les différentes échelles en présence (longueur d'onde, épaisseur de cisaillement, etc.).

Le phénomène de propagation est parfois invoqué en creux, quand, de manière imagée, on indique que le son est *ce qui est perçu par l'oreille ou par un microphone*. La fibre mécanicienne des fluides de l'acousticien introduit alors la notion de pseudo–son pour caractériser les mouvements captés par l'oreille (autrement dit : toutes les fluctuations de pression) sachant bien que l'aérodynamique instationnaire, et plus généralement la turbulence, s'accompagnent de fluctuations de pression qu'on mesure à l'aide de microphones notamment, mais qui ne présentent pas les caractéristiques propagatives d'une onde acoustique.

1.1.3 Le bruit du vent

Le fil qui chante

C'est un fait facile à expérimenter que la plupart des mouvements de fluides suffisamment rapides — instationnaires — font du bruit *en brassant l'air*, pour parler crument. Là où on ne perçoit pas le vent, on entend quand même quelque chose. Ceci nous permet de caractériser l'acoustique comme une perturbation capable de contaminer le milieu continu par propagation sur une distance significativement plus longue que l'étendue de la région cisaillée, y compris dans les directions qui ne sont pas celles de l'écoulement principal.

À travers une telle définition, on vient subtilement de passer d'un discours purement descriptif (équation d'onde, mouvement potentiel) de l'onde acoustique, à un discours explicatif, en condition nécessaire tout au moins : l'onde acoustique résulte *nécessairement* d'un phénomène *capable de* contaminer le milieu continu par propagation sur une large distance.

Une autre distinction entre bruit et vent réside dans l'absence de débit massique net dans un mouvement acoustique. L'onde acoustique est un déplacement d'énergie, précisément sous forme de travail des efforts de pression, sans déplacement de matière.

Ces observations conduisent à l'alternative suivante : l'émission de bruit aérodynamique est–elle *(i)* un sous–produit du mouvement tourbillonnaire, à l'image de la dissipation en chaleur — « par frottements » — d'une certaine partie de l'énergie mécanique d'un mouvement donné, ou bien *(ii)* un résultat mécanique de l'excitation instationnaire, ou enfin *(iii)* une voie privilégiée d'évacuation énergétique passé un certain régime, comme une distorsion du mouvement aérodynamique, à l'image

de la transition à la turbulence ?

Instationnarité et compressibilité

On peine à creuser les différentes hypothèses, mais il faut reconnaître que les outils analytiques à disposition actuellement se rangent derrière le deuxième mécanisme : l'instationnarité de l'écoulement est vue comme la source de l'acoustique, et pas seulement comme sa cause [a]. Plus prosaïquement : c'est à partir des sollicitations instationnaires qu'on calcule le champ acoustique.

Avant d'entrer plus en détail dans les modes d'excitation acoustique, notons que ces considérations ont le mérite de placer l'instationnarité au cœur de la réflexion, et non plus la compressibilité. Car si la compressibilité — entendons par là la dépendance de la masse volumique à la pression — est essentielle à la propagation et doit donc être une propriété du milieu observateur, elle n'est pas nécessaire à l'écoulement pour que ce dernier soit bruyant, tant il est vrai que le bruit d'origine aérodynamique est manifeste même dans des situations où les effets de compressibilité (quantifiés par le nombre de Mach) sont insignifiants [103].

1.2 Excitation des ondes acoustiques

Comme toute équation différentielle, l'équation d'onde ne peut donner de solutions particulières que couplée à des conditions aux limites. En champ libre, toute onde progressive de la forme $f(t-r/c)$ est solution, entre autres, mais son amplitude dans un cas particulier ne peut être déterminée qu'à l'aide d'une donnée supplémentaire. La seule solution d'amplitude a priori connue valable en champ libre est le silence absolu : $\phi(\mathbf{x},t) = 0$ quel que soit $(\mathbf{x},t)$ [b].

1.2.1 Notion de terme source

Une inhomogénéité introduite dans l'équation d'onde

Pour obtenir le champ acoustique par résolution de l'équation d'onde, on a coutume de rassembler les conditions particulières dans un second membre appelé terme source, la plupart du temps noté Q. On écrit

$$\Box\phi = Q$$

Dès lors, on est contraint de distinguer un espace source et un espace de propagation : là où le terme source est non–nul, l'équation d'onde n'est plus vérifiée donc le mouvement est difficilement qualifiable d'acoustique. De même, là où l'équation d'onde est vérifiée, le second membre s'annule et il ne s'y trouve pas de source [54].

Cette pratique n'est pas idéale parce que, notamment en aéroacoustique, l'annulation du terme source n'est pas toujours parfaitement tranchée dans l'espace mais présente plutôt un caractère asymptotique.

a. la distinction entre source et cause est en fait assez floue ; nous l'utilisons ici pour susciter une interrogation philosophique.

b. Au sens strict, les fluctuations acoustiques satisfont l'équation d'onde homogène, c'est-à-dire l'annulation du d'alembertien ; voir la discussion qui suit l'équation (1) dans Ffowcs Williams [54].

Réalité physique du terme source

Une autre difficulté réside dans le fait qu'on n'obtient pas d'équation d'onde inhomogène à partir des équations du mouvement linéarisées en l'absence de gradients et d'écoulement moyens. À proprement parler, il n'existe pas de « source de masse ». En effet, en vertu du principe de conservation de la masse, l'équation de continuité ne contient pas de second membre. Autrement dit, dans l'équation de bilan de masse, l'instationnarité est totalement équilibrée par les débits aux frontières. Il en va de même pour l'équation de bilan de quantité de mouvement, bien que cela y soit plus subtil : il s'y trouve certes un terme volumique d'efforts extérieurs — qui n'usurperait pas le titre de source — mais celui–ci ne sera instationnaire, donc à même d'exciter l'équation d'onde, que très rarement [c].

En ce qui concerne l'équation de bilan d'énergie, hormis par viscosité, un terme source peut apparaître en cas d'échauffement instationnaire (par effet Joule ou réaction chimique, par exemple). Mais il s'agit d'un cas particulier qui ne peut être invoqué pour l'excitation d'ondes acoustiques en général. La dissipation visqueuse pourrait jouer cet effet, mais on observe en pratique que l'excitation acoustique est correctement modélisée même quand elle est négligée en tant que source proprement dite [10, 117].

Le terme source n'apparaît pour l'acousticien que si on introduit une séparation spatiale entre le domaine où sont satisfaites les équations du mouvement considéré (petites perturbations isentropiques d'un gaz parfait en évolution instationnaire sans dissipation visqueuse) et le reste de l'espace où interviennent des causes externes : apport de masse, contraintes surfaciques, échanges énergétiques aux frontières. Lorsque la région où agissent ces causes externes est de taille suffisamment petite par rapport à l'espace d'étude du champ acoustique, on peut les considérer comme ponctuelles et écrire ces flux surfaciques sous forme d'une distribution de Dirac, c'est–à–dire non nulle en un point seulement. Ainsi peut–on ramener l'apport instationnaire de masse à la sortie d'un tuyau d'échappement à un terme source de masse, dont le rayonnement acoustique est très efficace [54].

Il est néanmoins possible de former une équation d'onde inhomogène à partir des équations du mouvement fluide, mais cela impose de ne pas faire les hypothèses habituelles de l'acoustique linéaire en milieu au repos. C'est le principe des analogies en aéroacoustique.

1.2.2 Analogies acoustiques

La théorie de Lighthill

En 1952, Lighthill propose une théorie générale [90] d'excitation des ondes acoustiques par les instationnarités aérodynamiques. Un raisonnement physique en deux volets précède la manipulation des équations. D'abord l'auteur fait remarquer que les fluctuations de masse volumique dans l'écoulement réel doivent être exactement celles qui se produiraient dans le milieu acoustique uniforme soumis à un système de contraintes extérieures, ce dernier étant donné par la différence entre la contrainte effective dans l'écoulement réel et les contraintes dans le milieu acoustique uniforme et au repos (cette différence est égale T_{ij}, le tenseur de Lighthill). Dans un deuxième

c. les exemples seraient assez excentriques, et en tout cas hors du champ de l'aéroacoustique usuelle : phénomènes électromagnétiques, pesanteur fluctuante, référentiel non–galiléen ou accélération d'ensemble variable.

temps, le raisonnement revient sur la création d'énergie acoustique par un forçage cinétique extérieur : fluctuation de masse, de quantité de mouvement et de taux de débit de quantité de mouvement. Plus la longueur d'onde acoustique est élevée, plus le mouvement de forçage est susceptible d'être compensé par un mouvement réciproque local, donc plus le rayonnement sera réduit. Ainsi, pour ce qui concerne le bruit d'origine aérodynamique, il s'agit de déterminer *l'infime* fraction de fluctuation de débit de quantité de mouvement qui n'est pas équilibrée par un mouvement réciproque.

L'équation d'analogie est ensuite obtenue en superposant l'équation que satisfont les fluctuations de densité dans l'écoulement à celle qu'elles satisfont en dehors, dans le milieu uniquement propagatif. Il s'agit d'une équation d'onde, qui est inhomogène dans le premier cas et homogène dans le second. L'inhomogénéité s'exprime sous la forme d'une double divergence du tenseur de Lighthill, ce qui confère une nature quadripolaire à l'excitation instantanée par le champ de contrainte extérieure.

Critique de l'approche par terme source

La théorie de Lighthill conduit à une loi de puissance pour l'intensité acoustique en fonction du nombre de Mach qui s'avère vérifiée expérimentalement [92]. Par ailleurs, la résolution numérique de l'équation de Lighthill, à partir d'un écoulement donné, moyennant certaines précautions et malgré son inconvénient majeur lié au stockage du terme source, prédit correctement le champ acoustique, notamment en comparaison de ce qui est obtenu directement par résolution des équations de Navier–Stokes pour un écoulement instationnaire compressible [12, 64, 73, 117]. *Last but not least* à l'actif du travail de Lighthill, sa démarche analogique, qui consiste à comparer un système d'équations décrivant le mouvement acoustique avec le son associé décrivant le mouvement général pour isoler des quantités sources, a inspiré de nombreux travaux subséquents [68, 94, 127, 130]. De ces derniers, on mentionnera seulement qu'ils ont surtout visé à purifier le terme source proposé par le précurseur, de phénomènes qui ne seraient pas purement excitateurs acoustiques. Ce courant de pensée culmine dans la notion de *silent base flow* élaborée récemment [138]. Elle enseigne également que la physique du rayonnement n'est pas la propriété du seul terme source. L'expression de celui–ci n'est en définitive que la conséquence du système choisi pour décrire le mouvement acoustique, dont la solution générale est un élément déterminant du rayonnement. Par exemple, le terme source de Lighthill n'est pas nul pour le champ de vitesse associé à un tourbillon simplement convecté, mais le rayonnement acoustique de ce mouvement, lui, est nul [99, 100]. Dans le formalisme de Green, c'est bien la combinaison du terme source et de sa convolution avec la fonction de Green qui fournit le champ acoustique. Ceci s'applique également pour le terme source de la théorie du *vortex sound* [130], dont l'expression est contenue dans celui de Lighthill [24, 102].

Force est donc de constater que malgré sa validité prédictive et son imposante progéniture scientifique, l'approche par terme source ne renseigne guère, en fait, sur le mécanisme de conversion d'énergie cinétique en énergie acoustique et en particulier sur son rendement (à l'exception notoire, toutefois, de sa dépendance en U_c^5 déduite de l'analogie de Lighthill dans l'hypothèse d'une région source compacte). L'hypothèse qu'il n'y a pas de rétroaction du champ acoustique produit sur l'écoulement lui–même, aussi légitime soit–elle, ne fait–elle pas courir le risque de sous–estimer

l'importance de la réponse du milieu acoustique ? Car une chose est de dire que le champ acoustique n'a pas d'influence sur l'écoulement, une autre est d'imaginer que le rayonnement acoustique est une propriété de cet écoulement seul sans égard pour une éventuelle réponse du milieu de propagation. Avant de revenir sur ces conditions du rayonnement, examinons l'autre type d'excitation de l'équation d'onde.

1.2.3 Conditions aux limites

Le terme source localisé n'est pas la seule possibilité d'excitation de l'équation d'onde, c'est–à–dire d'obtention de solutions particulières. Celles–ci peuvent naturellement être obtenues en appliquant des conditions aux limites à la solution générale. C'est le cas notamment de ce qu'on appelle communément les solutions élémentaires [23].

La sphère pulsante est le premier exemple. À la solution générale en ondes sphériques, on applique une condition sur la vitesse au voisinage de l'origine : on suppose une pulsation radiale harmonique qui impose la vitesse de l'écoulement, en un rayon donné, comme étant uniquement radiale, périodique dans le temps et de moyenne nulle. La condition pour le champ de pression est alors obtenue en considérant l'équation de quantité de mouvement linéarisée, c'est–à–dire que la dérivée radiale du champ de pression est égale à la dérivée temporelle de la vitesse radiale, à la densité (moyenne) près. La solution est naturellement sphérique, on la qualifie de monopolaire. L'intensité acoustique est uniforme sur toute sphère de même centre que celle qui excite, et son amplitude est directement liée à celle du mouvement initial de pulsation.

Le même cheminement mathématique peut être emprunté pour calculer le rayonnement acoustique d'un piston plan à qui on impose une vibration, bien que les calculs soient un peu plus compliqués par la géométrie qui n'est plus sphérique. L'idée clé est encore d'imposer la vitesse du fluide en contact avec la paroi du piston, et d'en déduire le gradient de pression pour l'appliquer comme condition limite à la solution générale de l'équation d'onde.

Ceci se généralise au cas de surfaces planes déformées par vibration : par continuité de la vitesse, celle de la paroi s'impose au fluide, celle du fluide étant reliée au gradient de pression, qu'on applique comme condition limite. C'est le principe de l'intégrale de Rayleigh, qui constitue la formule de base en vibroacoustique [77].

Il faut insister ici sur le fait que dans ces trois cas, il est supposé qu'au sein du fluide le gradient de pression est uniquement déterminé par le taux de variation temporelle de la vitesse, ce qui n'est valable que tant que les équations d'Euler linéarisées le sont.

Cette excitation par conditions aux limites se généralise à l'aide du formalisme intégral et des distributions (ou fonctions généralisées).

1.2.4 Formalisme intégral et distributions

Le principe d'Huygens

Outre le terme source et les conditions aux limites, il existe une troisième forme, hybride, pour construire une solution de l'équation d'onde : lorsque l'onde est connue sur une surface fermée de l'espace et contenant tout phénomène source, sa connaissance peut être étendue à tout le reste de l'espace. C'est un principe énoncé par

Huygens en 1690, puis repris au XIXe siècle par Fresnel, Kirchhoff et Green sous des noms divers tels que principe d'Huygens–Fresnel, intégrale de Kirchhoff ou solution intégrale de Green. Concrètement, une relation relie le champ acoustique extérieur à l'intégrale, sur la surface dite de contrôle, d'une de ses quantités caractéristiques (fluctuation de pression, de masse volumique ou de potentiel de vitesse) et de son gradient normalement à cette surface. Le champ acoustique peut ainsi être extrapolé. Dans la suite, ceci sera désigné comme le formalisme de Kirchhoff, terminologie la plus employée dans la littérature aéroacoustique.

L'extrapolation des ondes acoustique peut être utilisée comme méthode de prédiction en aéroacoustique lorsqu'on cherche par exemple à prolonger vers le champ lointain une simulation numérique de l'écoulement qui contient le phénomène d'émission sonore (*DNC*, ou *Direct Noise Computation*).

L'apport des fonctions généralisées

Le concept de fonctions généralisées (ou théorie des distributions) [3, 51] permet de formaliser l'ambiguïté dénoncée plus haut en ce qui concerne la réalité physique des termes sources. Ffowcs Williams en fait usage pour l'aéroacoustique en introduisant une discontinuité dans l'espace et en écrivant une équation d'onde valable partout malgré cette discontinuité. Ceci lui permet d'inclure la présence de surfaces (solides ou fictives et éventuellement en mouvement) dans le problème aéroacoustique, généralisant ainsi l'approche de Curle [40]. Il apparaît alors ce qui est appelé des termes sources surfaciques, qui peuvent également être vus comme une excitation de l'onde acoustique depuis une condition aux limites, étant donné qu'ils en sont l'empreinte (via la dérivation d'une fonction généralisée) et qu'ils demandent à être intégrés. Ces termes sont basés sur les débits de masse et de quantité de mouvement à travers la surface. On peut montrer [21] qu'ils sont mathématiquement équivalents à ceux intervenant dans le formalisme de Kirchhoff, basés (la plupart du temps) sur la fluctuation de pression et son gradient normal. On exposera en détail ces solutions intégrales au chapitre 3, mais notons dès à présent que l'excitation de l'équation d'onde à partir de données surfaciques peut être schématiquement conçue de trois manières : la formule de Kirchhoff (extrapolation d'onde), la formule de Ffowcs Williams et Hawkings (distribution de débits) et la formule de Rayleigh (vitesse vibratoire).

Extrapolation ou excitation ?

Faisons remarquer enfin qu'il n'a jusqu'ici essentiellement été question que de l'équation d'onde et de l'obtention de sa solution particulière dans une configuration donnée, ce qui suppose de formaliser une excitation. Or, dans le contexte aéroacoustique, les sollicitations surfaciques sont traditionnellement classées du côté de l'extrapolation des ondes plutôt que du côté de l'excitation comme source. C'est–à–dire qu'elles ne comportent pas (ou presque) de modélisation. La solution de Kirchhoff est en effet une propriété mathématique des solutions ondulatoires. Quant à l'intégrale de Ffowcs Williams et Hawkings, elle lui est équivalente. Dans le cas particulier où la surface coïncide avec une paroi solide, il a été montré que le terme surfacique traduit la diffraction du bruit aérodynamique, dont la source effective se trouve dans l'écoulement lui–même [66]. Il s'agit donc encore d'un rôle propagatif, sans caractère de source à proprement parler, c'est–à–dire associé à l'équation d'onde elle–même

davantage qu'à son excitation. On pourrait également faire remarquer que la paroi étant fixe, aucun travail ne peut être développé par la distribution de pression qui y règne [130]. L'objet de ce travail de thèse est d'étudier dans quelle mesure un formalisme par excitation surfacique peut modéliser les phénomènes d'émission sonore par les écoulements instationnaires, et pas seulement leur extrapolation. Avant de présenter le résultat de cette étude, éloignons–nous un peu du rivage acoustique de l'aéroacoustique, en évoquant trois configurations symboliques de la relation entre bruit et vent.

1.3 Trois symboles aéroacoustiques

A travers trois exemples phénoménologiques, nous tentons ici de faire émerger qualitativement comment des fluctuations aérodynamiques (disons, associées aux instationnarités de vorticité) peuvent donner lieu à une évacuation d'énergie sous forme acoustique vers le champ lointain.

1.3.1 La paire de tourbillons co–rotatifs

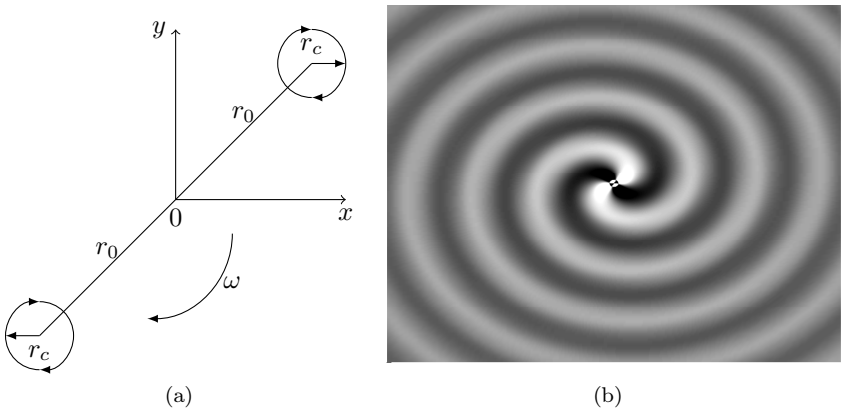


Figure 1.1 – Tourbillons co–rotatifs. **Gauche** : configuration. **Droite** : Simulation Numérique Directe d'après un code de calcul de Bogey [9].

Une des rares solutions analytiques en aéroacoustique

La paire de tourbillons co–rotatifs est le plus simple des mouvements de fluide dont on puisse simuler le rayonnement acoustique directement à partir d'une résolution numérique des équations de Navier–Stokes. Sous réserve d'implanter des schémas numériques et des conditions aux limites adaptées à la propagation et l'évacuation des ondes acoustiques tout autant qu'aux mouvements tourbillonnaires ou convectifs, on observe alors un rayonnement en quadruple hélice, comme généré par un quadripôle en rotation. Cette configuration modèle, qui permet de valider les codes de calcul, a été le point de départ d'une complexification grandissante dans la simulation numérique en aéroacoustique [9, 107], avec les réalisations successives de la couche de mélange bidimensionnelle $2D$ [10, 36, 117], du jet axisymétrique [108], et enfin du jet tridimensionnel $3D$ [11, 59]. Toute à cette progression sur le plan du réalisme physique et des applications pratiques, l'aéroacoustique numérique peut

sembler avoir délaissé l'approfondissement de la question de la conversion énergétique du vent en bruit.

C'est en 1967 que Müller et Obermeier [118] présentent la paire de tourbillons co–rotatifs comme une source acoustique (*"the spinning vortices as a source of sound"*). Une expression analytique est obtenue par la méthode des développements asymptotiques raccordés (*MAE* ou *Matched Asymptotic Expansions*). D'une part, l'équation d'onde constitue l'ordre zéro d'un développement des équations du mouvement à l'échelle de la longueur d'onde, et la solution est l'onde cylindrique (en $2D$) en champ libre. D'autre part, l'ordre zéro du développement à faible nombre de Mach est l'équation de Laplace, dont la solution est un potentiel de vitesse en décroissance quadratique. Les constantes d'intégration de ces deux solutions générales sont obtenues en croisant les termes d'ordre un de chaque solution par rapport à l'autre adimensionnement : le champ proche de la solution externe (acoustique) doit être asymptotiquement égal au champ lointain de la solution interne (solénoïdale). Il est à remarquer que ce raccordement d'équations était en germe dans la démarche de Lighthill, qui évacue du membre de gauche tout ce qui s'écarte de l'acoustique.

Un mécanisme de type vortex sound

Une expression analytique du rayonnement peut également être obtenue en utilisant l'expression (connue) du champ de vitesse induit par les tourbillons pour calculer le terme source défini dans les analogies (Lighthill ou Howe–Powell notamment). D'une manière générale, une distribution de vorticité — sous forme de filets, d'anneaux, de tores ou de nappes — et le champ de vitesse associé peuvent servir à former un terme source, en vertu de la théorie du *vortex sound*. Cette méthode a fourni de nombreux résultats pour le rayonnement acoustique des mouvements tourbillonnaires [76].

Le titre choisi par Müller et Obermeier [118] est explicite : c'est clairement la rotation, et donc l'accélération centrifuge de la vorticité qui est à l'origine du rayonnement. En écoulement visqueux, les tourbillons ont tendance à se rapprocher pour finalement fusionner, mais ce n'est pas ce mouvement dont le rayonnement acoustique est étudié quand on s'intéresse à cette configuration des tourbillons co–rotatifs. Le bruit d'appariement tourbillonnaire (*vortex pairing*) se manifeste en premier lieu dans les couches cisaillées, telles qu'elles apparaissent en aval d'un bord de fuite ou d'une tuyère, où des courants de vitesse différentes se mélangent. Dans une couche de mélange, le rayonnement acoustique est le plus intense à la fréquence d'appariement [10, 36, 117], et à notre connaissance, il n'a pas été établi de lien formel avec la rotation des tourbillons à proprement parler. Si la phénoménologie (c'est-à-dire le phénomène sans le masque d'une jonglerie d'équations...) du bruit d'appariement tourbillonnaire, qui est certes correctement calculé par les analogies, n'est pas encore décrite précisément par une vision simple qui s'applique aux *spinning vortices*, elle est à rapprocher de la notion de mode de vibration.

1.3.2 Vibration du domaine fluide

Une classe particulière de mouvements

En tant que cas particulier des équations générales du mouvement fluide, l'onde acoustique peut être vue comme une classe particulière de mouvements parmi toutes

les solutions possibles. Le mouvement acoustique serait ainsi un mode, au sens de mouvement élémentaire. On parle de mode de vibration pour un corps solide (corde, poutre, plaque, etc.). Un mode propre de la structure se caractérise par une valeur propre qui est ici une mesure de la fréquence de vibration et un vecteur propre qui décrit la déformation générique que connait cette structure quand elle vibre à ce mode. Enfin, un mode se manifeste en réponse à une impulsion ou à un régime forcé, et il est crucial de connaître les modes propres d'une structure car ce sont ceux qui peuvent entrer en résonance lorsque l'excitation est à la fréquence correspondante.

Des oscillations auto–entretenues existent en aéroacoustique, où un couplage s'installe entre un mouvement périodique à l'échelle tourbillonnaire (comme dans une flûte ou une cavité) ou vibratoire (instruments à anche, voix) et le champ acoustique. Mais il s'agit alors du phénomène de rétroaction dont nous avons parlé plus haut (paragraphe 1.2.2) et qui n'est pas systématiquement présent pour le bruit d'origine aérodynamique. En l'absence d'un tel bouclage aéroacoustique, la question se pose néanmoins de l'origine du mode acoustique dans un mouvement fluide dominé en amplitude par les fluctuations associées à la vorticité.

Deux types de fluctuations

Si, en effet, on observe l'évolution de l'amplitude des fluctuations de pression dans un jet subsonique isotherme (figure 1.2), on constate qu'en s'éloignant de l'axe principal où elle est quantifiée par la dynamique, elle décroit d'abord de manière exponentielle puis de manière algébrique. Plus précisément, le mode dit hydrodynamique est à décroissance exponentielle, et le mode dit acoustique est à décroissance algébrique. Asymptotiquement, c'est donc le premier qui domine aux petits rayons et le second qui domine en champ lointain.

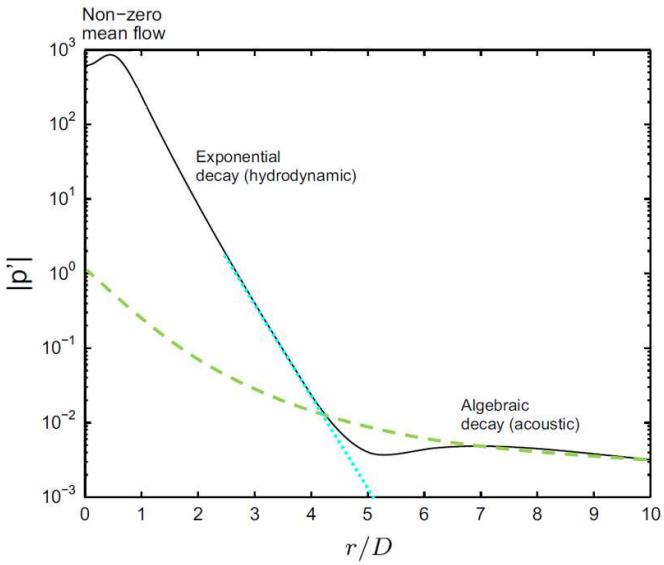


Figure 1.2 – Décroissance des fluctuations de pression. Décroissance exponentielle dans la zone hydrodynamique et décroissance algébrique dans la zone acoustique. Cavalieri *et al.* [31].

Cette hiérarchie a une conséquence pratique immédiate pour le calcul acoustique par extrapolation. S'il est basé sur un formalisme de Kirchhoff avec la pression et

son gradient, il faut, pour qu'il soit valable, que la surface d'extrapolation se situe dans la zone de domination acoustique[d]. Autrement, la fluctuation de pression utilisée dans l'intégrale est polluée par la composante hydrodynamique. Celle–ci, ne rayonnant pas, n'étant pas solution de l'équation d'onde, devrait être filtrée par le formalisme intégral dans la convolution à la fonction de Green. Il ne serait donc pas théoriquement faux de placer la surface d'intégration dans une région à dominance hydrodynamique, mais les erreurs numériques d'intégration (imprécision de quadrature ou effets de bord) alors commises sur cette partie dominante en viennent à masquer le signal acoustique objet de l'extrapolation [103].

Toute la question est de savoir ce qu'il en est quand on veut prolonger les asymptotes. Si le devenir du mode hydrodynamique en champ lointain importe peu pour l'aéroacoustique dès lors qu'il est devenu négligeable devant les fluctuations acoustiques, que se passe–t–il pour le mode acoustique au sein de l'écoulement ? C'est sans conteste là qu'il est généré, puisque c'est de là que part la décroissance géométrique due à la conservation de l'énergie sur un front d'onde. Mais a–t–il une existence propre « en filigrane » du mouvement tourbillonnaire bien que d'amplitude fort moindre comme le suggèrent Doak [41] et Jenvey [74], ou bien sa distinction d'avec lui n'est–elle que chimère avant le croisement des asymptotes ?

L'analyse modale de l'écoulement, notamment le calcul des instabilités, peut permettre d'identifier des modes à caractère rayonnant [139]. Chu et Kovásznay [35] montrent comment, en termes de modes de fluctuations, les interactions tourbillonnaires peuvent exciter l'acoustique. Quelle est l'étendue (spatiale, radiale) sur laquelle s'opère cette excitation ? La modélisation par terme source volumique semble la plus à même d'intégrer cette étendue, mais peut–on traduire cette excitation par une action surfacique (ou un ensemble d'actions surfaciques) bien conçue ? Quoi qu'il en soit, c'est bien de l'efficacité de ce processus sur le plan énergétique que traite ce mémoire. Or, si du point de vue du mode hydrodynamique, ce qui est transféré à l'acoustique peut être passé par pertes et profits vu les écarts d'ordres de grandeurs, du point de vue de l'auditeur il est aussi fondamental que délicat d'en mesurer la proportion et d'identifier ce qui la régit.

1.3.3 Efficacité d'une excitation « air–air »

Qui impose quoi ?

On conçoit sans peine qu'une paroi solide à laquelle on saurait appliquer une vitesse de vibration spatialement cohérente imposerait cette vitesse au fluide environnant, dont la compressibilité le rend plus propre à encaisser le mouvement. Réciproquement, hors résonance, il faut souffler ou crier très fort avant de voir une structure solide se mettre à vibrer sous l'influence d'un mouvement de fluide. Mais le fluide environnant est loin d'avoir une totale passivité et il n'est pas simple d'appliquer n'importe quelle vitesse à une paroi immergée, car le comportement de l'actionneur dépend de sa charge. Certains travaux de vibroacoustique dédiés à la facture instrumentale mènent des expériences dans le vide afin d'étudier comment la charge fluide influe sur la vibration. De même, le pilotage en vitesse d'une membrane de haut–parleur n'est pas trivial. D'une manière générale en électroacoustique, il y a bel et bien couplage entre trois systèmes linéaires amortis du second ordre, expri-

d. En pratique néanmoins, la limite ne saurait être aussi nette (voir Léon et Brazier [87]).

mant respectivement le problème électrique, le problème mécanique et le problème acoustique [23].

Pour le bruit d'origine aérodynamique, on hésite à parler de couplage en général entre les problèmes de mécanique des fluides et d'acoustique parce que ce terme évoque trop le cas des rétroactions, où d'ailleurs le terme de résonance lui serait préférable, et que, de toute évidence l'écoulement *vit sa vie*, indépendamment de l'environnement acoustique. L'écoulement, c'est–à–dire le mode hydrodynamique, oui. Mais l'infime fraction de son énergie qui s'échappe en acoustique ?

L'impédance de rayonnement

C'est la notion d'impédance qui permet de déterminer qui impose quoi à l'interface entre deux milieux. Elle est notamment utilisée pour quantifier la partie transmise et la partie réfléchie de l'énergie portée par une onde incidente. L'interface peut être un changement de matériau, de conditions de propagation (température, pression ambiantes) ou simplement de section dans un tuyau. A ce titre, le problème classique du tuyau débouchant (*open ended duct*) [23, 77] fournit une passerelle intéressante entre la vibroacoustique et l'aéroacoustique. Mettant en scène le transfert d'énergie entre deux mouvements d'air, il peut nous renseigner sur les conditions d'un tel transfert entre bruit et vent.

A l'extrémité ouverte d'un tuyau, on dit que le milieu extérieur impose sa pression, c'est–à–dire que la fluctuation de pression s'annule. Ceci revient à dire que l'impédance, qui peut s'exprimer comme le rapport de la fluctuation de pression à celle de la vitesse, elle aussi s'annule. La conséquence est que toute onde interne au tuyau et incidente sur l'orifice est totalement réfléchie, donc que l'énergie transmise vers l'extérieur est nulle. Cela n'est vrai qu'en première approximation, et ce n'est qu'en gagnant un ordre de précision qu'on peut entrer dans le détail de l'interaction entre l'onde incidente et le milieu ambiant.

En raccordant au voisinage de l'orifice, l'expression du mouvement potentiel dans le tuyau avec l'onde sphérique externe, on peut montrer que la fraction de puissance acoustique qui s'échappe par rayonnement est proportionnelle (et même, moyennant certains adimensionnements, égale) à $(kR)^2$ où k est le nombre d'onde et R le rayon du tuyau. Cette formule est valable pour kR petit, autrement dit pour des tuyaux dont le rayon est faible devant la longueur d'onde [72]. Ce résultat rejoint le constat plus général qu'une source acoustique est d'autant moins efficace qu'elle est compacte, c'est–à–dire petite devant sa longueur d'onde. L'apport de ce problème modèle pour l'aéroacoustique est relatif car il s'agit d'une transmission entre deux mouvements acoustiques, et non de l'excitation du mode acoustique par la vorticité. Néanmoins, l'impédance de rayonnement peut constituer une brique conceptuelle utile pour la modélisation.

1.4 Synthèse

Au cours de ce chapitre, nous avons cherché à exposer la problématique du travail, c'est–à–dire comment se présente à nous la question aéroacoustique. Nous sommes parti des concepts de l'acoustique en cherchant à comprendre comment le mouvement d'air que constitue l'onde acoustique peut être excité par l'autre mouvement

d'air que constitue l'écoulement. On a pu insister sur le fait que l'impédance du milieu récepteur, et sa capacité à propager certains modes d'excitations, apparaissent comme déterminants. C'est dans cette perspective que le développement d'une analogie vibroacoustique pour la modélisation du bruit d'origine aérodynamique est envisagé : un mécanisme d'excitation du milieu acoustique par l'écoulement instationnaire est proposé sous forme de sollicitation surfacique de débit. Deux questions se posent alors vis–à–vis de celle–ci :

i) au sein du champ de vitesse, quelle composante est celle qui s'impose comme condition à l'acoustique ?

ii) quelle réponse le milieu de propagation présente-t-il à un tel type d'excitation ?

Par ailleurs, on a vu qu'une onde acoustique transporte une certaine énergie sans déplacement net de matière. L'efficacité aéroacoustique est intimement liée aux conditions d'apparition de ce mode d'évacuation d'énergie. C'est pourquoi un travail bibliographique sur ce concept a été entrepris, qui est présenté au chapitre suivant.

Chapitre 2

L'énergie acoustique et son transport

« Quand tu te sens égaré et plein de doutes, mille livres ne suffisent pas.
Quand tu as atteint la compréhension, un seul mot est déjà de trop. »
F. Yang

Sommaire

2.1 Problématique de l'énergie acoustique **32**
2.2 Définition usuelle de l'énergie acoustique **33**
2.2.1 Tentative de description à l'ordre deux 36
2.2.2 Prise en compte d'un écoulement en mouvement uniforme 37
2.2.3 Expressions pour le potentiel des vitesses 37
2.3 L'approche eulérienne **39**
2.4 L'approche dissipative **44**
2.4.1 Théorie potentielle 46
2.4.2 Le rôle des fluctuations de vorticité 54
2.4.3 Un théorème exact 55
2.4.4 Un cas d'application numérique 57
2.4.5 Enthalpie ou exergie ? 60
2.4.6 Première unification 64
2.5 L'approche lagrangienne **65**
2.6 Synthèse **69**

Dans ce chapitre les différents concepts d'énergie acoustique sont abordés et présentés dans une optique de synthèse et de revue bibliographique dans un effort d'unification des notations. Une présentation chronologique permet de suivre les contributions et les évolutions des pensées dans le temps et c'est intuitivement ce qu'il y a de plus clair. C'est le parti pris pour l'organisation de ce chapitre, malgré quelques exceptions : un regroupement thématique est effectué dès que possible et si la lecture n'est pas entravée. Néanmoins, on peut distinguer trois grandes approches : une approche eulérienne, une approche dissipative et une approche lagrangienne. L'approche eulérienne est la plus ancienne et utilise les équations d'Euler linéarisée (*EEL*) et les relations isentropiques. En considérant le fluide comme parfait, la description néglige les phénomènes de dissipation dus à la viscosité et aux échanges thermiques. La conservation de l'énergie n'est généralement possible que par l'ajout

d'un terme source. L'approche dissipative est la plus abondante et plusieurs tendances sont à identifier. Globalement, cette approche a recours aux équations complètes de Navier–Stokes et aux relations thermodynamiques pour alléger les calculs et fermer les équations. La prise en compte du rôle des fluctuations de vorticité et d'entropie — mis en évidence par Chu et Kovásznay [35] — ajoute du sens physique, autorise une description plus fine du processus de dissipation et permet un équilibre plus naturel du bilan d'énergie. Autrement, une décomposition du vecteur vitesse et du vecteur de quantité de mouvement permet une description de l'écoulement en composante hydrodynamique et acoustique. L'approche lagrangienne utilise les équations de Galbrun portant sur le déplacement particulaire lié au passage de l'onde acoustique. Si elle semble prometteuse, elle est encore peu répandue.

Ces trois grandes approches pourraient encore se décomposer et intéragissent entre elles ce qui rend notre description délicate. Elles regardent toutes l'énergie acoustique mais ne voient pas toujours la même chose. Initialement, l'énergie reste vague et on a surtout cherché à écrire une loi de conservation générique. Puis on lui associe l'enthalpie d'arrêt, et depuis peu, l'exergie. Ces quantités font l'objet d'une section à part en fin de chapitre. Un tableau de synthèse est présenté en conclusion pour permettre une vue d'ensemble.

2.1 Problématique de l'énergie acoustique

La plupart des études évoquées dans ce chapitre ont recours aux équations de la mécanique des fluides. Dans la veine des méthodes analytiques propre aux débuts de l'aéroacoustique, l'énergie — en tant que scalaire — est une variable de choix pour suivre le chemin d'une quantité apportée par l'écoulement et rayonnée par l'acoustique, notamment lorsque l'on cherche à raccorder ces deux milieux.

Mais l'approche énergétique permet également de mettre temporairement de côté la nature de l'excitation. Que l'excitation soit apportée par une fluctuation de pression ou de vitesse, dans tous les cas c'est avant tout de l'énergie qui voyage.

Nous allons voir que l'énergie acoustique est définie d'une manière usuelle, reconnue par tout le monde mais jugée peu satisfaisante par une majorité de la communauté du fait de son ordre de grandeur supérieur à celui dans lequel évoluent des quantités acoustiques généralement très faibles. Lors de sa synthèse sur les sources sonores en aérodynamique, Ffowcs Williams [54] évoque les grands ordres de grandeurs sur lesquels peut s'étaler la pression acoustique. L'oreille humaine détecte ainsi des variations de pressions à partir de 10^{-10} atm [a] correspondant au chuchotement humain tandis que des variations de 10^{-3} atm peuvent l'endommager. Pour l'avion le plus bruyant, on relève des variations de pression allant jusqu'à 10^{-1} atm. Les niveaux d'énergie en jeu sont sources d'émerveillement. La puissance acoustique délivrée par un tel avion est du même ordre que celle qui serait libérée si toute la population mondiale criait en même temps [47] ! Mais en général, le niveau d'énergie est très faible. L'énergie rayonnée par les cris des spectateurs durant la superbe finale d'un tournoi mondial de tennis suffirait à peine à faire cuire un œuf [47]. Le chapitre 4 fera également état de la grande amplitude des ordres de grandeurs de l'efficacité acoustique.

Les concepts d'énergie doivent nous amener à élaborer la notion d'efficacité comme

a. 1 atm = 101325 Pa.

un rapport entre l'énergie apportée par le système et l'énergie rayonnée dans l'acoustique. En vibroacoustique, une telle notion est connue comme étant le facteur de rayonnement [88] :

$$\sigma = \frac{W_a}{\rho_0 c S_h \left\langle v_n^2 \right\rangle}$$

où ρ_0 est la densité moyenne du milieu fluide, c la célérité du son, S_h la surface de la structure en vibration et $\langle v_n^2 \rangle$ la moyenne spatiale sur S_h de la vitesse de vibration de la structure telle que

$$\left\langle v_n^2 \right\rangle = \frac{1}{S_h} \int_{S_h} v_n^2 \mathrm{d}S_h$$

W_a est la puissance acoustique mesurée sur la surface S_a :

$$W_a = \int_{S_a} \langle p' \mathbf{v}' \rangle \, \mathrm{d}S_a$$

avec p' et $\mathbf{v}'$ la pression fluctuante et la vitesse acoustique respectivement [b]. Ce facteur de rayonnement est adapté pour des structures matérielles en vibration mais est–ce le cas si la structure en vibration est un écoulement fluide ? Le cas échéant, encore faut–il savoir comment exprimer la vitesse de vibration v_n par rapport aux quantités de l'écoulement. Nous verrons que toutes les contributions détaillées dans ce chapitre n'adoptent pas nécessairement le même point de vue.

Dans un premier temps, nous allons présenter l'établissement de la définition usuelle de l'énergie et de l'intensité acoustiques. Puis, nous passerons en revue les différentes définitions et ce qu'elles apportent en complément de cette définition usuelle. Nous choisissons ici de présenter une nomenclature (tableau 2.1) pour aider la compréhension et la lecture des différentes définitions. Lorsqu'une définition est spécifique à un auteur (ou groupes d'auteurs), l'initiale du nom du premier auteur est ajoutée en exposant.

2.2 Définition usuelle de l'énergie acoustique

Dans un espace tridimensionnel ($3D$) formant un volume fluide V au repos, la variation de masse $M(t)$ au cours du temps t est portée par le déplacement des particules à la vitesse $\mathbf{v}$ dans la direction $\mathbf{n}$ le long de la surface S bordant le volume V et dirigée vers l'extérieur :

$$\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} = -\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S \;\; \Rightarrow \;\; \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = 0$$

où ρ est la densité. L'application du théorème de Green–Ostrogradski permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume. Au niveau particulaire, cela donne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i = 0$$

b. les vecteurs sont notés en gras $\mathbf{v}' = v_i'$.

Lettres latines	
c	Célérité du son
e	Densité d'énergie (définition usuelle)
e_I	Densité d'énergie interne
e_p	Densité d'énergie potentielle
G	Exergie (ou enthalpie libre)
h	Enthalpie spécifique
H	Enthalpie d'arrêt
$\boldsymbol{I}$	Intensité (ou densité du flux d'énergie) acoustique (définition usuelle)
$\boldsymbol{k}$	Vecteur nombre d'onde
$\boldsymbol{M}$	Nombre de Mach
$\boldsymbol{n}$	Vecteur normal unitaire extérieur
p	Pression
$\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}$	Tenseur des sources de chaleur
R	Constante des gaz parfaits
s	Entropie spécifique
t	Temps
T	Température
$\boldsymbol{u}'$	Composante irrotationnelle du champ de vitesse fluctuante
v	Amplitude du champ de vitesse instantanée
$\boldsymbol{v}$	Champ de vitesse instannée
$\boldsymbol{w}'$	Composante solénoïdale du champ de vitesse fluctuante
Lettres grecques	
φ	Potentiel des vitesses
ρ	Densité instantanée
μ	Viscosité dynamique
$\boldsymbol{\nu}$	Vecteur nombre d'onde unitaire
$\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\boldsymbol{\omega}$	Vecteur vorticité instantanée
$\boldsymbol{\xi}$	Vecteur déplacement instantané

Table 2.1 – Nomenclature associée à l'énergie acoustique.

C'est l'équation de conservation de la masse où la sommation d'Einstein est sous–entendue pour les trois dimensions de l'espace. Pour qu'une variation de pression se propage, le milieu doit être compressible et continu. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, le son est un mouvement linéaire. ce qui permet de considérer que la densité est la somme d'un champ de densité uniforme et d'une densité fluctuante respectivement $\rho(\mathbf{x},t) = \rho_0(\mathbf{x})+\rho'(\mathbf{x},t)$. Dans la suite de ce mémoire, chaque fois qu'il sera question d'une variable ϕ linéarisée, elle sera considérée comme somme d'une partie stationnaire $\phi_0(\mathbf{x})$ et d'une partie fluctuante ϕ', sauf mention contraire. La partie stationnaire sera notée avec un « 0 » en indice pour un scalaire et en majuscule autant que possible pour un vecteur sauf cas particuliers. La partie stationnaire est la moyenne temporelle telle que

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \phi(\mathbf{x},t^*)\mathrm{d}t^*$$

pour un écoulement périodique de période τ. La moyenne temporelle de la fluctuation est nulle :

$$\frac{1}{\tau}\int_{t}^{t+\tau}\phi'(\mathbf{x},t^*)\mathrm{d}t^* = 0$$

En l'absence d'écoulement et sans gradient thermique, la vitesse du fluide est la vitesse acoustique, c'est la vitesse de vibration ou *vitesse particulaire*. Le champ stationnaire est alors uniforme ($\rho_0(\mathbf{x}) = \rho_0$) et l'équation de conservation de la masse, une fois linéarisée, devient :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_i'}{\partial x_i} = 0 \tag{2.1}$$

La conservation de la quantité de mouvement, écrite d'après la deuxième loi de Newton, stipule que le taux de production de la quantité de mouvement égale les forces appliquées au volume V. En négligeant la viscosité de l'écoulement et les forces volumiques extérieures comme la gravité, la seule force appliquée est la force de pression sur la surface S. Là encore, l'application du théorème de Gauss au niveau particulaire, et après linéarisation permet d'écrire :

$$\rho_0 \frac{\partial v_i'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0 \tag{2.2}$$

où l'on néglige les termes d'ordre deux (c'est–à–dire les produits de fluctuations). Le système des équations (2.1) et (2.2) compose les *EEL*. On peut alors constater que la variable $\mathbf{v}$ est exprimée dans une dérivée spatiale dans l'équation (2.1) et dans une dérivée temporelle dans l'équation (2.2). La dérivée temporelle de l'équation (2.1) est alors soustraite à la dérivée spatiale de l'équation (2.2) ce qui permet d'écrire une équation ne portant plus que sur une variable scalaire comme la pression :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,(2.2) - \frac{\partial}{\partial t}\,(2.1) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \tag{2.3}$$

où l'on a utilisé la relation d'état $c^2 = p'/\rho'$. L'équation obtenue est l'équation d'onde homogène. Reprenons l'équation linéarisée de conservation de la masse, multipliée par $c^2\rho'$:

$$c^2\rho'\frac{\partial \rho'}{\partial t} + c^2\rho'\rho_0\frac{\partial v_i'}{\partial x_i} = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{c^2}{2\rho_0}\frac{\partial \rho'^2}{\partial t} + p'\frac{\partial v_i'}{\partial x_i} = 0 \tag{2.4}$$

D'un autre côté, la multiplication de l'équation linéarisée de conservation de la quantité de mouvement par la vitesse particulaire $\mathbf{v}'$ permet d'obtenir une équation scalaire sous la forme :

$$\frac{\rho_0}{2}\frac{\partial v_i'^2}{\partial t} + v_i'\frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0 \tag{2.5}$$

L'addition de (2.4) et (2.5), en rassemblant les termes à dérivée temporelle et spatiale et en faisant appel à la relation d'état, donne :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.6}$$

C'est la définition usuelle de l'énergie acoustique dans un milieu au repos et sous les hypothèses inhérentes aux *EEL* (pas de viscosité ni de forces volumiques), avec

$$\begin{cases} e &= \dfrac{\rho_0 v'^2}{2} + \dfrac{p'^2}{2\rho_0 c^2} \\ I_i &= p' v'_i \end{cases} \tag{2.7}$$

où $v'^2 = v'_i \cdot v'_i$, e est l'énergie et I_i est l'intensité (ou flux d'énergie) acoustiques. L'énergie est alors la somme d'une énergie cinétique ($\rho_0 v'^2/2$) et d'une énergie potentielle ($p'^2/2\rho_0 c^2$) qui peut être stockée dans le fluide en le comprimant. À ce stade, nous pouvons faire plusieurs remarques. Tout d'abord, cette formulation ne prend pas en compte le cas d'un écoulement, même uniforme. Ensuite, les termes d'ordre deux ont été négligés dans les *EEL*, et ceci malgré le faible niveau énergétique du déplacement acoustique. Par ailleurs, l'équation (2.6) contient des termes d'ordre deux, apparus après avoir combiné les *EEL*. On les néglige, puis ils réapparaissent et on les garde, comme s'il y avait deux poids, deux mesures. En toute rigueur, cela ne semble pas acceptable. C'est pourtant bien commode car cela permet l'écriture de l'équation de conservation de l'énergie en terme bien défini de densité (e) et de flux (I_i).

Pour s'en convaincre, essayons d'écrire cette loi de conservation en écoulement au repos d'une part, en gardant tous les termes d'ordre deux. Nous verrons alors que notre jugement un peu hâtif devra être nuancé. On considérera d'autre part un écoulement en mouvement uniforme en négligeant les termes d'ordre deux pour alléger l'écriture d'après les conclusions tirées de l'écriture à l'ordre deux.

2.2.1 Tentative de description à l'ordre deux

En reprenant le même cas, où la seule vitesse des particules est une vitesse de propagation de l'acoustique $\mathbf{v}$, les *EEL* à l'ordre deux s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial \rho' v'_i}{\partial x_i}}_{\text{ordre 2}} = 0 \tag{2.8}$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement demande un peu plus d'algèbre. Pour les variables totales :

$$\frac{\partial \rho v'_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v'_i v'_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$$

La linéarisation de la densité et de la pression entraîne :

$$\rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \rho' \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \rho_0 v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \rho' v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} + v'_i \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho' v'_j}{\partial x_j} \right) = 0$$

où le dernier terme entre parenthèse s'annule d'après l'équation (2.8), d'où :

$$\rho_0 \frac{\partial v_i'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \underbrace{\rho' \frac{\partial v_i'}{\partial t} + \rho_0 v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \rho' v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}_{\text{ordre 2}} = 0 \tag{2.9}$$

En effectuant ensuite les mêmes opérations que dans la section précédente, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{\rho' v'^2}{2}\right) + \frac{\partial p' v_i'}{\partial x_i} + \frac{p'}{\rho_0}\frac{\partial \rho' v_i'}{\partial x_i} + \rho v_i' v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} = 0 \tag{2.10}$$

Cette équation peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial x_i} + \frac{p'}{\rho_0}\frac{\partial \rho' v_i'}{\partial x_i} + \rho v_i' v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} = 0$$

avec les notations de la section précédente. On s'aperçoit alors qu'en ayant gardé les termes d'ordre deux, on retrouve la même expression que dans la section précédente plus un terme qui s'avère être d'ordre trois. Autrement dit, si on néglige cet ordre de grandeur, on retrouve quand même la définition usuelle.

2.2.2 Prise en compte d'un écoulement en mouvement uniforme

Considérons maintenant une vitesse de convection. On peut alors linéariser la vitesse de manière à écrire $v_i = V_i + v_i'$. En négligeant les termes d'ordre deux, l'équation linéarisée de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_i'}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = 0 \tag{2.11}$$

L'équation linéarisée de conservation de la quantité de mouvement prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 v_i' + V_i \rho'\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho_0 V_i v_j' + \rho_0 V_j v_i' + V_i V_j \rho'\right) + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0 \tag{2.12}$$

En effectuant les mêmes opérations et en reprenant les mêmes notations, on peut alors écrire l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial x_i} + v_i' V_i \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 v_j' V_j \frac{\partial v_i'}{\partial x_i} + \rho_0 v_j' V_i \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} + \frac{v_i' V_i V_j}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{V_i}{2\rho_0 c^2}\frac{\partial p'^2}{\partial x_i} = 0 \tag{2.13}$$

Les termes supplémentaires sont quadratiques par rapport aux fluctuations et ne peuvent pas être négligés devant les termes de la définition usuelle.

2.2.3 Expressions pour le potentiel des vitesses

À partir de l'équation de conservation de quantité de mouvement (2.2), une propriété très intéressante peut être déduite sur le champ de vitesse. Prenons le rotationnel de l'équation (2.2). Puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul, il reste

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot} v_i' = 0$$

ce qui signifie que le rotationnel de la vitesse reste constant avec le temps. Puisqu'on considère un milieu au repos, le rotationnel de la vitesse est nul et donc, le champ de vitesse est irrotationnel, ne produisant ainsi pas de vorticité. D'après Dowling et Ffowcs Williams [47], l'explication physique est due au gradient de pression qui est une quantité conservative et agit donc directement sur le centre de gravité des particules fluides et ne peut donc induire de moment d'inertie ni de vorticité. Comme nous l'avons dit, le rotationnel d'un gradient est toujours nul. Donc si on exprime $\mathrm{rot} v_i = 0$, il existe toujours une fonction $\varphi(\mathbf{x},t)$ telle que

$$v_i' = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

On peut ainsi remplacer dans l'équation de quantité de mouvement (2.2) :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0$$

L'espace étant un invariant du temps, les dérivées peuvent s'intervertir

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p'\right) = 0$$

ce résultat implique que la pression fluctante p' et $\rho_0 \partial\varphi/\partial t$ sont des fonctions constantes, et $p' = -\rho_0 \partial\varphi/\partial t$. En remplaçant ce résultat dans l'équation (2.3), on obtient une équation d'onde sur la variable scalaire φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{2.14}$$

Afin de chercher à établir une loi de conservation de l'énergie acoustique basée sur l'équation d'onde du potentiel des vitesses, multiplions l'équation (2.14) par $\rho_0 \partial\varphi/\partial t$ exactement comme précédemment. On obtient :

$$\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Après quelques développements, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} & = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} & = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right) & = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial x_i} = 0$$

avec

$$\begin{cases} e &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 \\ I_i &= -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \end{cases}$$

Ces considérations préliminaires ont permis de mettre en évidence la sensibilité de l'écriture d'une équation de conservation de l'énergie à un ordre suffisamment élevé pour capter toutes les petites échelles de l'énergie acoustique. Nous allons voir que trois grandes approches ont été suivies pour essayer de contourner ces difficultés.

2.3 L'approche eulérienne

Depuis l'ouvrage fondateur de Rayleigh [132], la première étude de l'énergie acoustique semble avoir été publiée par Blokhintsev [8] en 1946. Traduit par la *NACA* — l'ancêtre de la *NASA* actuelle — en 1956, cet article s'articule en deux parties. La première traite de l'énergie de manière générale d'après les lois de conservation de la dynamique des fluides. La seconde partie approche l'énergie acoustique mais souffre de nombreuses hypothèses. L'auteur néglige alors la viscosité et la conduction thermique et effectue son étude dans le contexte des hautes fréquences, afin de se placer dans la limite géométrique de l'acoustique. En hautes fréquences, les ondes acoustiques sont représentées comme des rayons, exactement comme ce qu'on imagine souvent pour l'optique. L'auteur semble considérer un milieu en mouvement, du moins dans son discours, mais on ne trouve aucune trace d'une telle hypothèse dans les équations.

Dans la première partie adoptant le point de vue hydrodynamique, une manipulation des équations de conservation de la dynamique des fluides permet d'écrire la conservation de l'intensité :

$$N_i = \left(\rho\frac{v^2}{2} + \rho e_I\right)\cdot v_i + Q_j + \rho v_i + \mu\left\{\nabla v^2 + [\mathrm{rot} v_i \times v_j]\right\} + \gamma \mathrm{div} v_i \cdot v_j \tag{2.15}$$

où μ est la viscosité dynamique. Le premier terme représente le flux d'énergie transporté par un écoulement incompressible où $\rho v^2/2$ est le flux d'énergie cinétique et ρe_I le flux d'énergie interne. Le second terme est le flux d'énergie thermique. Les derniers termes représentent la part du flux d'énergie dû aux forces de pression et de viscosité respectivement.

Dans la seconde partie, adoptant le point de vue acoustique en hypothèse de fluide parfait, l'auteur réécrit les équations de conservation pour former l'équation d'onde et à terme, la loi de conservation de l'énergie acoustique. L'auteur, à partir de l'équation (2.15) et en l'absence d'écoulement pour un fluide parfait, écrit que l'énergie totale et l'intensité[c] deviennent :

$$\frac{\partial e^B}{\partial t} + \frac{\partial I_i^B}{\partial x_i} = 0 \tag{2.16}$$

avec

c. Pierce [128] en donne une certaine interprétation : le premier terme dans l'intensité (ev_i) est une densité d'énergie convectée par les effets dynamiques, c'est–à–dire par l'écoulement lui–même ; le second terme (pv_i) correspond au taux de travail effectué par le fluide sur le milieu extérieur, autrement dit le milieu propagatif.

$$\begin{cases} e^B &= \rho\frac{v^2}{2} + \rho e_I \\ I_i^B &= e^B v_i + p v_i \end{cases}$$

Pour un gaz parfait, l'énergie interne $e_I = p/(\gamma - 1)\rho$. En développant à l'ordre un les variables totales, il obtient la loi de conservation de l'énergie à l'ordre deux :

$$\begin{cases} e^B &= e \\ I_i^B &= I_i \end{cases} \tag{2.17}$$

On retrouve à ce stade l'expression usuelle de l'énergie acoustique comme elle a été developée en début de chapitre. En continuant le développement des variables à l'ordre deux :

$$\begin{cases} e^{B2} &= \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{p' + p''}{\gamma - 1} \\ I_i^{B2} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0 \left(v_i' - v_i''\right) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p' v_i' \end{cases} \tag{2.18}$$

où le symbole « $''$ » désigne le second ordre des fluctuations. L'auteur propose une équivalence à l'équation de conservation de l'énergie à l'ordre un en introduisant le potentiel des vitesses φ :

$$\begin{cases} e &= \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2\rho_0^2 c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 \\ I_i &= -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \end{cases}$$

Cette expression a ici été recopiée sans modification. Pourtant, il y a une erreur. Le deuxième terme n'est pas homogène. Il faut lire $\rho_0/2c^2$ et non pas $1/2\rho_0^2c^2$. L'auteur précise néanmoins que ce type de formulation faisant intervenir le potentiel des vitesses ne saurait être valide en milieu non homogène, contrairement aux équations (2.17) et (2.18). Cette perte de validité se manifeste lorsqu'en écoulement non–homogène, le rotationnel de la vitesse n'est plus assuré d'être nul, d'après l'écriture même de l'équation de quantité de mouvement, suivant la réflexion présentée à la section 2.2.3. L'auteur cherche alors une équivalence entre les différentes formulations établies. Il considère alors un rayonnement acoustique produit par la vibration d'une surface S produisant l'effet d'une source Q et contourne l'idée que la surface se déforme. À partir de la loi de conservation à l'ordre deux, passée sous forme volumique en appliquant le théorème de Gauss pour la seconde intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V e\mathrm{d}V + \int_S \left\{\frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0 \left(v_i' + v_i''\right) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(p' v_i'\right)_n\right\}\mathrm{d}S = W$$

où W est l'intensité de la source Q telle que :

$$W = \int_S \left\{p_0 \left(v_i' + v_i''\right)_n + \left(p' v_i'\right)_n\right\}\mathrm{d}S \tag{2.19}$$

où n désigne le projeté orthogonal sur la surface S. L'auteur conclut en disant que l'équation (2.17) est la plus rationnelle et doit être utilisée autant que possible en

acoustique linéaire mais qu'elle ne tient plus dans le cas d'un écoulement non homogène et en mouvement, comme nous l'avons illustré dans la section 2.2.2. L'équation (2.18) peut être généralisée dans le cas d'un milieu en mouvement. Autrement dit, malgré tous les développements apportés, la définition usuelle tient toujours.

Quelques années plus tard, mais avant la traduction anglaise de Blokhintsev [8], Markham [105] cherche l'expression de l'énergie potentielle stockée dans le champ acoustique. C'est ce qu'on retrouvera sous le nom *Stored Potential Energy*. Beaucoup d'hypothèses simplificatrices sont appelées, notamment l'hypothèse d'ondes planes dans le cas d'un écoulement au repos en espace libre, adiabatique et sans apport de matière. L'auteur débute sa dissertation par l'expression généralement admise et veut en obtenir une autre à partir de l'expression thermodynamique. L'énergie potentielle stockée dans un fluide lorsque celui–ci se comprime est l'intégrale sur le volume spécifique de la pression du fluide :

$$E_p = -\int_{\rho_0}^{\rho} p \mathrm{d}V \tag{2.20}$$

C'est une première. Auparavant, l'expression de l'énergie potentielle était déduite de la réécriture des *EEL*. À notre connaissance, Markham [105] est le premier auteur à en justifier l'origine directement depuis la thermodynamique. On peut ensuite remarquer que le volume spécifique est l'inverse de la densité :

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

et la fraction peut être développée lorsqu'on linéarise la densité :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{(\rho_0+\rho')^2} = \frac{1}{\rho_0^2}\left(1+2\frac{\rho'}{\rho_0}\right) = \frac{1}{\rho_0^2}\left(1-2\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \mathcal{O}(\frac{\rho'}{\rho_0})^2$$

obtenu par développement limité sur le terme ρ'/ρ_0. Le remplacement dans l'équation (2.20) donne :

$$E_p = \frac{1}{\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{\rho} p\left(1-2\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\mathrm{d}\rho$$

Soit, en linéarisant la pression et en négligeant les termes d'ordre deux :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{\rho}\left[p_0 + c^2\rho' - 2p_0\frac{\rho'}{\rho_0}\right]\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{\rho_0^2}\left[p_0\rho' + \left(\frac{c^2}{2} - \frac{p_0}{\rho_0}\right)\rho'^2\right] \end{aligned}$$

L'énergie obtenue est une énergie spécifique associée à une certaine quantité de matière. En la multipliant par ρ pour s'affranchir de la masse, on obtient une énergie par unité de volume, soit la densité d'énergie potentielle e_p :

$$e_p = \frac{1}{\rho_0}\left(p_0\rho' + \frac{p'^2}{2c^2}\right)$$

Le terme $p'^2/2\rho_0c^2$ est retrouvé dans l'expression usuelle mais pas le terme $p_0\rho'/\rho_0$. Ce premier terme n'apparaît dans aucune autre formulation. La raison sera donnée

par Schoch [136]. La moyenne temporelle de ce terme s'annule et donc, ne contribue pas à l'acoustique, du moins en première approximation. C'est donc une énergie potentielle hydrodynamique, mais qui alimente l'énergie potentielle acoustique. Notons également que l'expression établie est une expression pour l'énergie potentielle. Il faut donc lui ajouter le terme d'énergie cinétique présent dans la définition usuelle. S'il propose une autre formulation, il ne remet cependant pas en question la validité de la définition usuelle.

Quelques mois plus tard suit l'étude de Schoch [136] qui s'inscrit là encore dans la lignée des études précédentes puisque gardant d'un côté la définition usuelle tout en proposant une approche alternative basée sur les expressions thermodynamiques. C'est cette tendance qui marque les premières études systématiques de l'énergie acoustique. Schoch considère un système de fluide parfait adiabatique en l'absence d'écoulement. L'auteur veut répondre à l'article de Markham [105] et réhabiliter l'expression usuelle car recevant à cette époque deux principales critiques : l'absence de convection dans l'écoulement et l'ordre un des *EEL* qui permettent d'écrire l'expression de l'énergie acoustique comme nous l'avons vu en début de chapitre. La question de l'ordre est de première importance étant donné l'ordre de grandeur des quantités acoustiques. Si Schoch considère l'absence d'écoulement, il écrit néanmoins l'équation de l'énergie à partir des équations d'Euler en coordonnés lagrangiennes, c'est–à–dire en suivant la particule dans son mouvement (acoustique). Schoch choisit cependant de linéariser au dernier moment. La combinaison des équations d'Euler comme elle a été effectuée auparavant s'écrit alors

$$\rho\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)-p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]+\frac{\partial pv_i}{\partial x_i}=0 \tag{2.21}$$

où l'opérateur D/Dt est la dérivée particulaire $D/Dt = \partial/\partial t + v_i\partial/\partial x_i$. On peut à ce stade jeter un pont avec le travail précédemment exposé de Markham. On remarque en effet que le second terme n'est autre que l'expression de l'énergie potentielle stockée dans un fluide soumis à compression :

$$-p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{DE_p}{Dt}$$

et en reconnaissant la définition usuelle de l'intensité, cela permet le remplacement dans l'expression (2.21) sous la forme :

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}+E_p\right)+\frac{\partial I_i}{\partial x_i}=0$$

En développant la dérivée particulaire et en appliquant la conservation de la masse, il vient

$$\frac{\partial e^S}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^S v_i+pv_i\right)=0 \tag{2.22}$$

où $e^S = \rho(v^2/2 + E_p)$ est la densité d'énergie. On a ainsi les outils caractéristiques des deux précédentes études. On retrouve d'une part l'énergie potentielle définie par Markham et d'autre part la présence du terme $e^S v_i$ dans le divergent comme Blokhintsev [8]. À ce stade, rappelons que Schoch n'a pas encore linéarisé les équations. L'expression établie est alors une densité d'énergie totale, puisque comprenant à la

fois l'hydrodynamique et l'acoustique. En linéarisant maintenant cette expression, on peut identifier l'origine de ces composantes. C'est là que Schoch met en évidence l'énergie potentielle hydrodynamique dont nous avons discuté en parlant de la contribution de Markham. En linéarisant la pression dans l'expression de l'énergie potentielle, il vient :

$$E_p = -\int_{\rho_0}^{\rho} p \mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -p_0 \int_{\rho_0}^{\rho} \mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \int_{\rho_0}^{\rho} p' \mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) = E_{p_h} + E_{p_a}$$

en identifiant E_{p_h} et E_{p_a} respectivement comme l'énergie potentielle hydrodynamique et acoustique. Si on linéarise l'équation (2.21) :

$$\rho\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{v'^2}{2}\right) - p_0\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - p'\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] + \frac{\partial p_0 v_i'}{\partial x_i} + \frac{\partial p' v_i'}{\partial x_i} = 0$$

on peut maintenant concevoir l'équation de l'énergie acoustique aux premier et second ordres contenant respectivement l'hydrodynamique et l'acoustique :

$$\rho\frac{DE_{p_h}}{Dt} + \frac{\partial p_0 v_i'}{\partial x_i} = 0 \tag{2.23a}$$

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v'^2}{2} + E_{p_a}\right) + \frac{\partial p' v_i'}{\partial x_i} = 0 \tag{2.23b}$$

où l'on retrouve à l'équation (2.23b) l'expression de Markham [105]. L'énergie purement acoustique est bien l'équation (2.23b). Schoch [136] calcule la moyenne temporelle et conclut que l'équation (2.23a) ne contribue en aucune manière au rayonnement acoustique.

Dans la lignée de ces premières contributions, nous portons à l'attention du lecteur l'article de Ryshov et Shefter [134]. Cette étude traite le cas de la propagation d'une onde de choc. Les auteurs manipulent les équations complètes de Navier–Stokes et cela mériterait à ce titre de s'y attarder. Néanmoins le contexte de l'onde de choc et les hypothèses qui s'y rattachent — comme l'approximation en limite géométrique et la faible épaisseur de l'onde acoustique — ajouté aux développements détaillés nous éloignent de notre thématique. Pour cette raison, nous n'exposerons pas cette discussion.

Elle est cependant incluse dans une revue générale — complète et détaillée dotée de tableaux récapitulatifs — publiée par Candel [25] en 1975. Nous faisons à ce titre une première entorse à l'organisation chronologique de ce chapitre. Candel utilise les concepts d'énergie acoustique mais appliqués au cas de propagation d'ondes planes en écoulements guidés. L'auteur se demande sous quelles conditions l'énergie acoustique est effectivement conservée. S'il ne cherche pas à établir son propre concept, il dresse une très bonne revue historique. Candel utilise l'expression de l'intensité de Blokhintsev [8] mais légèrement modifiée en approximation géométrique :

$$\frac{\partial e^{Ca}}{\partial t} + \mathrm{div} I_i^{Ca} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e^{Ca} &= \dfrac{p'^2}{\rho c^2}\left(1 + M_i \cdot \nu_i\right) \\ I_i^{Ca} &= \dfrac{p'^2}{\rho c}\left(1 + M_i \cdot \nu_i\right) \cdot \left(M_i + \nu_i\right) \end{cases} \tag{2.24}$$

où ν_i est le vecteur d'onde unitaire et M_i le nombre de Mach dans la direction i. Notons que le contexte de cette équation est celui d'un écoulement irrotationnel et isentropique dans lequel peut s'appliquer la limite géométrique de la théorie des rayons. Il cite cependant un autre travail (Bretherton et Garrett [22]) dans lequel la formulation de Blokhintsev est étendue au cas d'un milieu en mouvement non uniforme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{Ca}/\omega^*\right) + \operatorname{div}\left(v_g\, e^{Ca}/\omega^*\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^* = \omega - V_i \cdot k_i \tag{2.25}$$

où ω^* est la fréquence et v_g la vitesse de groupe des perturbations. L'auteur cite ensuite Cantrell et Hart [26] et Morfey [112] qui seront évoqués à la section suivante. Candel retrouve les résultats de Blokhintsev à partir de ceux de Cantrell et Hart en limite géométrique. Il cite également Ryshov et Shefter [134] dont il critique le résultat en raison d'une absence des termes de production qui ne permet pas de retomber sur le résultat de Blokhintsev dans l'approximation des hautes fréquences. Candel en conclut que leur formulation est valide seulement pour des écoulements à faibles gradients. Dans la référence [25] sont ensuite présentés le cas d'ondes planes puis modales, la transmission à travers une zone de cisaillement, en environnement guidé dans les tuyères et les diffuseurs.

Les études suivantes présentent une teinte différente, approchant l'énergie acoustique d'une autre manière. Alors que la première génération était marquée par la thermodynamique, on observe ici une tendance plus « aérodynamique », prenant désormais en compte les phénomènes de dissipation par la viscosité et les effets thermiques.

2.4 L'approche dissipative

En parcourant la littérature, on peut remarquer que l'énergie acoustique est généralement écrite de deux manières différentes. La première méthode c'est de développer au premier ordre les *EEL* jusqu'à obtenir une équation qui ait la forme d'une loi de conservation. Mais le prix à payer pour construire une relation qui ressemble à une loi de conservation (sous la forme de l'équation (2.6)) est la perte des informations du second ordre. C'est ce qui a prédominé dans ce qui a été présenté jusqu'ici. La seconde méthode consiste à développer à l'ordre deux l'équation de conservation de l'énergie dans les équations de Navier–Stokes. Cette initiative est portée par Cantrell et Hart [26]. Leur étude a pour contexte la propulsion solide des accélérateurs de lanceurs. Ils considèrent donc un écoulement de cavité fermée. Si leur formulation de l'énergie acoustique est à ce jour la plus reconnue et la plus utilisée, ils reconnaissent eux–mêmes qu'elle manque de généralité à cause des hypothèses d'écoulement non visqueux, homentropique et irrotationnel. Ils commencent leur étude en stipulant que la cavité est acoustiquement stable, c'est–à–dire que la masse et l'énergie sont en équilibre et ne s'accumulent pas. Ils travaillent donc en moyenne temporelle afin d'écrire un bilan nul. Ils partent de l'équation de conservation de l'énergie dans les équations de Navier–Stokes qu'ils développent au second ordre, intègrent sur le volume et y substituent l'équation de conservation de la masse. C'est alors du fait de la stabilité acoustique que les termes d'ordre deux s'annulent. Ils obtiennent une loi ne contenant que des termes à l'ordre un :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V e^{CH} \mathrm{d}V \right\rangle = - \left\langle \int_S I_i^{CH} \mathrm{d}S \right\rangle \tag{2.26}$$

où le symbole $\langle \phi \rangle$ représente la moyenne temporelle de la variable ϕ, et

$$\begin{cases} e^{CH} &= e + \dfrac{p' v_i' \cdot V_i}{c^2} \\ I_i^{CH} &= I_i + \dfrac{p'^2 V_i}{\rho_0 c^2} + \rho_0 \left(V_i \cdot v_i' \right) v_i' + \dfrac{p'}{c^2} \left(V_i \cdot v_i' \right) V_i \end{cases} \tag{2.27}$$

Il semble que la seule originalité par rapport aux formulations précédentes soit le terme $p' v_i' \cdot V_i / c^2$. L'intensité en effet est similaire à l'équation (2.22) : $I_i^{CH} = e^{CH} V_i + p' v_i'$ (si l'on accepte une légère différence d'expression, notamment à cause de la vitesse de convection V_i dans la formulation de Cantrell et Hart). L'expression (2.26) semble assurer la conservation et elle peut être écrite sous forme locale :

$$\frac{\partial e^{CH}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{CH}}{\partial x_i} = 0$$

pour se ramener aux notations utilisées ici jusqu'à présent. La dérivée exacte de l'expression (2.26) est bien devenue une dérivée partielle parce que l'intégrale de volume éliminait la dépendance spatiale [26]. Pourtant, elle sera citée par Elias [49] trente ans plus tard sous la forme :

$$\frac{\partial e^{CH}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{CH}}{\partial x_i} = D \tag{2.28}$$

où l'on remarque l'introduction d'un terme source. Elias [49] critique la formulation de Cantrell et Hart [26] à cause de ce terme source qu'il juge « inacceptable ». Mais sa présence est plus subtile et demande une précision. L'expression (2.26) assurant la conservation sans terme source n'est valable qu'en état d'équilibre acoustique. Les auteurs la généralisent ensuite dans le cas où les frontières du volume permettent la croissance ou la perte d'informations. La réponse acoustique d'une sollicitation est alors introduite par eux comme un taux de croissance des oscillations acoustiques aux frontières. Cette expression prend alors la forme :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V e^{CH} \mathrm{d}V \right\rangle = - \left\langle \int_S I_i^{CH} \mathrm{d}S \right\rangle - \left\langle \int_V \left\{ s' \left(\rho v_i' + \frac{\rho V_i s'}{C_p} \right) \cdot \frac{\partial p_0 / \partial x_i}{\rho_0 C_p} \right\} \mathrm{d}V \right\rangle$$

où s est l'entropie et C_p la capacité calorifique isobare. C'est donc ce taux de croissance et la généralisation à un écoulement où la masse ne serait plus en équilibre qui sont à l'origine de ce terme source. Il mériterait le nom de terme source puisqu'il contient les fluctuations de masse, mais il n'apparaît pas subitement pour assurer la conservation. La critique d'Elias [49] doit sûrement être nuancée sans nier le fait que l'estimation du rôle joué par le taux de croissance de Cantrell et Hart pourrait, lui, être critiquable. On retrouve également la présence arbitraire de deux constantes dans une autre formulation, lorsque les auteurs refont l'analyse de Pridmore Brown [131] en écoulement unidimensionnel.

Opérant une sorte d'approche hybride avec ce qui a été vu jusqu'à présent, Chu [34] écrit les équations complètes de Navier–Stokes (conservation de la masse, de

la quantité de mouvement et de l'énergie) et les combine toutes trois en une équation scalaire. La méthode est donc la même que celle utilisée pour écrire l'équation de l'énergie acoustique mais l'originalité de Chu est d'utiliser les trois équations de conservation et de garder les termes thermiques et de viscosité. Son objectif cependant n'est pas l'étude spécifique de l'énergie acoustique mais l'énergie qu'une perturbation quelconque reçoit de l'écoulement moyen. La combinaison des équations de Navier–Stokes permet d'écrire l'équation scalaire identifiant la densité d'énergie sous la forme :

$$e^{Ch} = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c^2 p'^2}{2\gamma\rho_0} + \frac{\rho_0 C_v T'^2}{2T_0} \tag{2.29}$$

où C_v est la capacité calorifique isochore et T est la température. En écoulement adiabatique on retrouve une expression familière mais ce n'est pas la définition usuelle de l'énergie acoustique. L'auteur indique que si l'écoulement est incompressible la seule énergie est une énergie cinétique correspondant au premier terme du membre de droite dans l'expression (2.29). La compressibilité vient ajouter un second terme dans l'énergie (deuxième terme du membre de droite dans l'équation (2.29)). Les fluctuations d'entropie apparaissent au troisième terme du membre de droite. Jusqu'à présent, l'effet de la compressibilité était vu comme l'apport d'une énergie potentielle mais Chu trouve une nouvelle expression et l'identifie comme une énergie de condensation. On voit que ce second terme est différent d'une énergie potentielle. Plus surprenant, il n'est pas homogène à une pression comme c'est le cas pour l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle. Quand nous combinions les *EEL* pour écrire l'énergie acoustique, l'équation de conservation de la quantité de mouvement était mutlipliée par le terme $c^2\rho'$ qui est bien homogène à une pression. Chu quant à lui multiplie l'équation de conservation de la quantité de mouvement par le terme $c^2\rho'/\gamma\rho_0$ (qui n'est pas homogène à une pression). L'auteur discute ensuite de l'effet de la viscosité, de la production de chaleur et de forces volumiques. En se focalisant sur l'énergie apportée par les perturbations entropiques, il met en évidence un mécanisme de transfert d'énergie piloté par le transport de points d'entropie lorsqu'ils croisent des couches de températures différentes dans l'écoulement.

2.4.1 Théorie potentielle

C'est après avoir approché l'énergie acoustique en considérant toutes les équations de Navier–Stokes qu'une nouvelle tendance apparaît sous l'impulsion de Morfey [112] et Doak [41]. Ces deux articles parus en 1971 ont pour motivation l'identification claire et découplée des composants turbulents et acoustiques d'un écoulement. Le point de départ de cette réflexion est l'idée que sous certaines conditions assez générales [d], un champ de vecteur continu peut être décomposé en somme d'une partie irrotationnelle et d'une partie incompressible (ou solénoïdale). On a alors la base mathématique pour isoler d'une part la turbulence, qui peut être considérée comme composante incompressible devant l'importance des phénomènes inertiels et visqueux, et l'acoustique d'autre part, qui peut être considérée comme composante irrotationnelle car un écoulement est strictement irrotationnel au passage d'une onde acoustique [e]. Ainsi, tout champ de vecteurs peut s'écrire sous la forme générale

d. voir la référence [50, p.217].
e. suivant le raisonnement conduisant à l'expression du potentiel des vitesses (section 2.2.3).

$$\Phi_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + b_i \quad \text{avec} \quad \mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} \tag{2.30}$$

Le premier terme du membre de droite est la partie irrotationnelle, le rotationnel d'un gradient étant toujours nul, et le second terme est la partie solénoïdale. Les fonctions ψ et a_i sont nommées par Doak *potentiel scalaire* et *potentiel vecteur*, respectivement. On constate que cette décomposition s'applique soit sur le vecteur vitesse [74, 112], soit sur le vecteur de quantité de mouvement [41, 44]. Jenvey [74] utilise la décomposition sur le vecteur vitesse mais il développe avec Doak [44] une théorie qui justifie que ces deux contributions soient regroupées en un paragraphe commun.

Décomposition potentielle du vecteur vitesse

L'article de Morfey étend l'approche aux écoulements non uniformes. Il constate que le bilan d'énergie est non nul, impliquant une production ou une dissipation de l'énergie acoustique par l'écoulement. Cependant, il présente un cas particulier, qu'il juge important, dans lequel le bilan est nul, impliquant la conservation de l'énergie acoustique. En partant de la définition généralement admise de l'intensité acoustique en milieu uniforme au repos, il cherche une équivalence dans le cas d'un écoulement non uniforme. Morfey affirme que la généralisation de la définition de l'intensité par Cantrell et Hart pose un problème de validité. Il indique qu'il existe deux approches pour tenter de généraliser l'expression de l'intensité acoustique. Une première approche consiste à soustraire au flux d'énergie total la contribution hydrodynamique sans production sonore. C'est la solution retenue par Morse et Ingard [115] dans leur ouvrage :

$$I_i = \langle N_i - N_i(\text{sans son}) \rangle \tag{2.31}$$

où $N_i = pv_i$ le flux d'énergie (donc l'intensité) de l'écoulement. Le symbole $\langle \phi \rangle$ désigne la moyenne temporelle de la variable ϕ. La seconde approche fait l'objet de l'article. Il reconnaît cependant une part d'arbitraire. Il indique que la seconde approche ne requiert que des termes au premier ordre contrairement à la première approche (celle retenue par Morse et Ingard [115]) qui nécessite la résolution des équations de la dynamique pour aller jusqu'à l'ordre deux. C'est dans la contribution d'Andreev [1] que l'on trouve l'information que l'expression généralement admise pour l'intensité acoustique n'est pas valide. Même dans le cas restrictif d'un milieu isentropique au repos, l'expression de l'intensité n'est valide que pour certaines conditions aux limites. L'auteur concède néanmoins que la divergence de cette expression controversée est valide au second ordre en état stationnaire d'un milieu de fluide parfait au repos :

$$\frac{\partial I_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.32}$$

Cette information est également pointée du doigt par Schoch [136]. Morfey cite d'autres articles ayant fait la généralisation de l'expression de l'intensité acoustique : Bergmann [7], Blokhintsev [8] et Cantrell et Hart [26]. C'est la définition de cette dernière contribution que l'auteur adopte pour la généraliser au cas d'un écoulement non uniforme arbitraire afin d'étudier les cas où l'énergie acoustique se

conserve au sens de l'équation (2.32). Pour s'approcher de l'expression de Cantrell et Hart, l'auteur formule l'intensité acoustique sans considérer de surface par :

$$N_n = \left(h + \frac{1}{2}v_i^2\right)\rho v_n \quad \Rightarrow \quad \langle N_n \rangle = \langle H'\rho' v_n' \rangle = \langle p' v_n' \rangle \tag{2.33}$$

où le terme entre parenthèse est l'enthalpie d'arrêt $H = h + v^2/2$ avec h l'enthalpie spécifique, que l'on retrouvera plus tard chez Jenvey [74], Myers [119] notamment. La moyenne temporelle de cette expression permet là encore de retomber sur l'expression usuelle de l'intensité acoustique. De toute façon c'est équivalent puisque au premier ordre, les fluctuations de l'enthalpie spécifique s'évaluent comme (p'/ρ). Par considération thermodynamique, l'auteur réécrit la loi usuelle :

$$\frac{\partial I_i^M}{\partial x_i} = -\langle T \rangle \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial t} \tag{2.34}$$

et note que c'est proportionnel au taux de perte d'énergie du mode acoustique, discuté par ailleurs chez Chu et Kovásznay [35]. C'est donc le bilan moyen d'énergie par dissipation acoustique. Morfey dresse alors un bilan d'énergie qui satisfait la loi de conservation :

$$\frac{\partial e^M}{\partial t} + \frac{\partial I_i^M}{\partial x_i} = D^M \tag{2.35}$$

avec

$$\begin{cases} e^M &= \dfrac{p'^2}{2\rho c^2} + \dfrac{v_j'}{c^2} p' u_j' + \dfrac{1}{2}\rho u_j'^2 \\ I_i^M &= p' u_i' + \dfrac{v_i'}{\rho c^2} p'^2 + \dfrac{v_i' v_j'}{c^2} p' u_j' + \rho v_j' u_i' u_j' \end{cases} \tag{2.36}$$

où les fluctuations de vitesses sont décomposées en partie irrotationnelle et solénoïdale $v_i' = u_i' + w_i'$ respectivement. La partie irrotationnelle u_i' est considérée comme la vitesse particulaire de l'acoustique. C'est la loi de conservation de l'énergie acoustique généralisée aux écoulements non uniformes. Le terme D^M est le taux de production d'énergie acoustique. C'est un terme qui rassemble de nombreuses variables et n'est pas exposé ici pour ne pas alourdir la discussion. La présence de ce terme source semble acceptée par la communauté. Dans le cas d'un écoulement irrotationnel et isentropique, le terme source est nul et on retrouve alors la formulation de Cantrell et Hart [26]. Lorsqu'on fait l'hypothèse des hautes fréquences en acoustique géométrique, on retrouve le résultat de Blokhintsev [8]. Morfey nuance néanmoins son principal résultat. Pour être le plus général possible, il faut considérer la production d'énergie par l'écoulement et donc le terme source doit être évalué. Mais pour cela il faut connaître le détail des quantités de l'écoulement au premier ordre. La formulation de Morfey ne saura donc être bien adaptée pour le cas d'écoulements généraux et complexes comme le jet turbulent.

Décomposition potentielle du vecteur de quantité de mouvement

En appliquant la décomposition potentielle au vecteur de quantité de mouvement (ρv_i) dans l'équation de conservation de la masse linéarisée, on peut montrer que la densité fluctuante dérive d'un potentiel scalaire :

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_i^2} = -\left(-\frac{\partial \rho'}{\partial t}\right) \tag{2.37}$$

Le scalaire ψ' satisfait une équation de Poisson où le terme $-\partial\rho'/\partial t$ est l'intensité de la source. Donc ce potentiel scalaire peut être déterminé sur simple connaissance de la densité fluctuante. Nous avons évoqué dans l'introduction au chapitre 1 le recours à des termes spécifiques pour catégoriser les composantes turbulentes ou acoustiques d'un écoulement en faisant référence à Chu et Kovásznay [35]. Leur analyse s'est appuyée sur un développement en série de Taylor autour d'un petit paramètre représentant l'ordre de grandeur des perturbations. Doak propose une nouvelle approche basée sur la décomposition potentielle. Selon l'origine d'une quantité, c'est–à–dire si elle dérive d'un potentiel scalaire ou d'un potentiel vecteur, il introduit les termes de *pyknostatique* et *pyknodynamique* respectivement, en s'appuyant sur le préfixe *pykno–* qui fait référence à la densité. C'est une belle initiative mais elle ne sera guère reprise que par Jenvey [74] vingt ans plus tard. Après la discussion préliminaire portant plus sur la sémantique, l'auteur écrit les équations de transport (pour la quantité de mouvement et l'énergie, la masse ayant déjà été traitée) en faisant apparaître le potentiel scalaire et le potentiel vecteur. La présentation de ces équations ici viendrait alourdir la discussion, nous avons donc choisi de ne pas les reproduire mais le lecteur pourra trouver leur détail dans la référence [41]. La réécriture de ces équations de transport permet à Doak d'obtenir une équation d'onde. La principale contribution semble donc plus tenir de l'analogie que de l'énergie acoustique. L'écriture de l'équation d'onde de Doak fait en effet apparaître un terme quadripolaire qu'il compare avec les études précédentes (Csanady [39], Ffowcs Williams [53], Lighthill [90], Ribner [133]). Doak déclare son analogie plus générale que celles mentionnées (et notamment celles de Lighthill et Ffowcs Williams) car selon lui, elles négligent « complètement » la convection et la réfraction. Nous ne saurons adhérer totalement à cette opinion : ces phénomènes sont manifestement pris en compte dans les formulations de Lighthill et de Ffowcs Williams, au travers des termes regroupés dans le membre de droite qui équilibrent l'équation d'onde.

En reprenant la décomposition potentielle sur le vecteur vitesse [74] et sur le vecteur de quantité de mouvement [42, 44], Jenvey et Doak développent l'idée que l'acoustique est générée à l'intérieur de la zone hydrodynamique. C'est ce que le premier appelle le mouvement acoustique piégé (*internal trapped acoustic motion*) et que le second nomme les fluctuations locales en équilibre dynamique (*local fluctuating dynamical equilibrium*). Ces concepts semblent vouloir dire la même chose, à savoir que les fluctuations hydrodynamiques ne sont en vérité que de l'acoustique qui serait piégée ou contrainte et entraînée par l'écoulement. Cette interprétation s'appuie surtout sur le travail de Doak qui a montré qu'un champ de pression hydrodynamique est en fait un champ acoustique piloté par la densité linéaire de quantité de mouvement [42], selon le concept *pyknostatique* défini par Doak. Jenvey va plus loin : si l'acoustique reste piégée, c'est parce que la stratification de l'écoulement hydrodynamique exprime une impédance acoustique, infranchissable par la perturbation, au même titre qu'une surface matérielle. Peut–être peut–on y voir les prémisses d'une vision surfacique. Pour Jenvey, cette impédance bloque l'acoustique mais peut–être peut–elle aussi imposer un mouvement et propager les fluctuations vers l'extérieur. Pour développer une analogie qui prend en compte l'énergie « hydro–acoustique », la théorie potentielle de Doak et Jenvey nécessiterait d'être approfondie.

Le mouvement acoustique piégé

Nous avons déjà évoqué la décomposition du vecteur de la vitesse fluctuante en partie irrotationnelle et solénoïdale, mais Jenvey va plus loin et décompose la partie irrotationnelle de la vitesse fluctuante en partie acoustique et entropique. Ensuite, tous les termes des équations de Navier–Stokes qui ont en eux les parties acoustique et entropique de la vitesse fluctuante peuvent eux–mêmes s'exprimer en partie acoustique et non–acoustique. Le développement mathématique est assez conséquent. Pour la vitesse, il est proposé la décomposition suivante :

$$v_i = V_i + v_i' = V_i + u_i' + w_i' = V_i + u_{a_i}' + u_{e_i}' + w_i'$$

L'existence et l'unicité de ces termes ne sont pas connues mais supposées *a priori* en vertu de la décomposition potentielle. Par ailleurs, en cas d'écoulement homentropique, Jenvey stipule que la partie entropique du champ irrotationnel est nulle, la fluctuation se décomposant uniquement en une partie irrotationnelle acoustique et une partie solénoïdale non–acoustique. De la même manière que pour le vecteur vitesse, Jenvey décompose d'autres quantités en spécifiant une quantité acoustique et une quantité entropique.

L'enthalpie d'arrêt a déjà été évoquée, ainsi que sa fluctuation (voir Morfey [112], notamment). Jenvey [74] décompose alors cette enthalpie d'arrêt fluctuante en partie acoustique (exposant $*$) et non–acoustique (exposant n) :

$$\begin{aligned} H'^{*} &= \left\{ h^* + (V_i + w_i + u_{e_i}) \cdot u_{a_i} + \frac{u_{a_i} \cdot u_{a_i}}{2} \right\}' \\ H'^{n} &= \left\{ h^n + \frac{(V_i + w_i + u_{e_i}) \cdot (V_i + w_i + u_{e_i})}{2} \right\}' \end{aligned}$$

avec l'enthalpie fluctuante associée :

$$\begin{aligned} h'^{*} &= \left\{ \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \mathrm{d}t \right\}' \\ h'^{n} &= \left\{ \int T \frac{\partial s}{\partial t} \mathrm{d}t \right\}' \end{aligned} \tag{2.38}$$

Appliquée au tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij}, la décomposition permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\tau_{ij}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - 2\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\ \sigma_{ij}^{*} &= \frac{\tau_{ij}^{*}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u_{a_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{a_j}}{\partial x_i} - 2\delta_{ij} \frac{\partial u_{a_k}}{\partial x_k} \right)' \\ \sigma_{ij}^{n} &= \left(\frac{\tau_{ij} - \tau_{ij}^{*}}{\rho} \right)' \end{aligned} \tag{2.39}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (valant l'unité lorsque $i = j$ et nul sinon). Sans s'alourdir de trop de détails analytiques et afin de fournir une comparaison, nous reprenons ici la formulation finale de l'énergie de Jenvey [74] :

$$\int_S \left\langle H^*(\rho v_j)' - \sigma^*_{ij}(\rho v_i)' \right\rangle \tilde{n}_j \mathrm{d}S$$
$$= \int_S \left\{ \left\langle \sigma^n_{ij}(\rho v_i)' \right\rangle - \left\langle H^n(\rho v_j)' \right\rangle + \left\langle \rho v_i \right\rangle \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle + \left\langle \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\rangle \right\} \tilde{n}_j \mathrm{d}S$$
$$- \int_V \left[\left\langle \rho v_i \right\rangle \left\{ T \left\langle \frac{\partial s}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} \right\rangle_i \right\} - \left\langle \frac{\partial Q_T}{\partial t} \right\rangle \right] \mathrm{d}V \quad (2.40)$$

où λ est le coefficient de conduction thermique et Q_T le terme d'addition de chaleur. On peut identifier les termes $\left\langle H^*(\rho v_j)' - \sigma^*_{ij}(\rho v_i)' \right\rangle$ et $\left\langle \sigma^n_{ij}(\rho v_i)' \right\rangle - \left\langle H^n(\rho v_j)' \right\rangle$ comme étant respectivement le flux moyen d'énergie acoustique et non–acoustique associé à la quantité de mouvement fluctuante.

Cette expression permet de retrouver les résultats de Howe en ce qui concerne l'échange d'énergie entre les modes acoustique–entropique à bas nombre de Mach [74]. En ce qui concerne le membre de gauche, l'expression du flux d'énergie est consistante avec celles de Cantrell et Hart [26], Doak [43, 44], Morfey [112] déjà évoquées et celle de Myers [119] présentée plus loin. C'est ce terme qui indique que c'est le flux de masse totale fluctuant qui transporte l'énergie acoustique à travers la surface S. Si on se place dans le cadre d'un écoulement non visqueux et adiabatique, où $\rho_0 V_i \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \wedge \boldsymbol{V} = 0$ [f], l'équation (2.40) devient :

$$\int_S \left\langle H^*(\rho v_i)' \right\rangle \tilde{n}_i \mathrm{d}S$$
$$= \int_V \rho_0 V_i \cdot \left\langle \boldsymbol{\omega}' \wedge \boldsymbol{v}' \right\rangle + \left\langle \rho' v'_i \right\rangle \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \wedge \boldsymbol{V} + \left\langle \rho' v'_i \right\rangle \cdot \left\langle \boldsymbol{\omega}' \wedge \boldsymbol{v}' \right\rangle \mathrm{d}V \quad (2.41)$$

Cette équation fait apparaître que dans le cas où il n'y a pas d'autres sources acoustiques (et avec le lot d'hypothèses considéré), la source hydrodynamique locale d'énergie acoustique est alors :

$$\rho_0 V_i \cdot \left\langle \boldsymbol{\omega}' \wedge \boldsymbol{w} \right\rangle \quad (2.42)$$

où l'on rappelle que le vecteur $\boldsymbol{w}$ est la partie solénoïdale de la vitesse fluctuante. L'influence de l'hydrodynamique s'exprime par la densité et la vitesse moyennes $\rho_0 V_i$. Et s'il n'y a pas de fluctuations de vorticité, la puissance acoustique sera générée par le terme :

$$\left\langle \int \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \mathrm{d}t \times \boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{a}} \right\rangle \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \boldsymbol{V})$$

où l'influence est déterminée par la vorticité moyenne $\boldsymbol{\omega}_0$ et la vitesse instantanée $\boldsymbol{V}$. On retrouve également la pression et la vitesse acoustiques p' et $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{a}}$.

Les fluctuations locales de l'équilibre dynamique

L'enthalpie d'arrêt spécifique a reçu beaucoup d'attention jusqu'à présent. Et ceci parce que jusqu'à présent, seule l'intensité acoustique a pu être décomposée

f. on rappelle que l'opérateur $\langle\ \rangle$ désigne la moyenne temporelle ; pour simplifier, lorsqu'appliquée à une seule variable, on préfèrera noter $\boldsymbol{\omega} = \langle \boldsymbol{\omega} \rangle + \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}'$, $v_i = \langle v_i \rangle + v'_i = V_i + v'_i$ ou $\rho = \langle \rho \rangle + \rho' = \rho_0 + \rho'$.

en partie acoustique, turbulente et thermique mais pas la densité d'énergie. C'est pour résoudre ce problème que Doak [44] étudie plus en détail la fonction enthalpie. L'auteur situe son étude par rapport à celle de Myers exposée un peu plus loin et Jenvey. Tandis que l'outil de Myers était une expansion en série de Taylor autour d'un petit paramètre, jugé arbitraire, l'étude de Doak pose comme hypothèse le cadre d'un écoulement stationnaire en temps, ou périodique de la même manière que Jenvey. Malgré un départ différent, Doak retrouve les résultats de Myers, ce qui demanderait une comparaison plus approfondie.

De nombreuses notions intéressantes sont développées dans cet article. Il faut bien reconnaître que Doak a un sens de la formule bien à lui et il y a surement des propos à nuancer. Doak y introduit sa notion des fluctuations locales en équilibre dynamique. Cette notion est à rapprocher de ce que Jenvey appelle le mouvement acoustique piégé. Si un écoulement présente des caractéristiques fluctuantes mais ne rayonne aucune énergie en champ lointain ou si aucune énergie ne sort d'un certain volume de contrôle, alors cet écoulement est dans un état de fluctuations locales en équilibre dynamique. Tout écoulement homentropique, non visqueux et irrotationnel appartient à cette classe d'écoulements. Selon Doak, il se pourrait que dans certains cas, des écoulements pleinement développés comme des écoulements de couche limite ou de jets se rapprochent de cette classe d'écoulements. Mais cette assertion peut paraître étrange et devrait être à nuancer, car car une telle classe d'écoulements n'est pas censée rayonner d'énergie acoustique. L'objectif de cet article est donc de prouver que l'enthalpie — la fonction qui définit l'énergie totale d'un système thermodynamique — peut être décomposée en une superposition linéaire des composants moyen, turbulent, acoustique et thermique d'un écoulement. Une première nuance doit être apportée. La superposition linéaire se justifie mathématiquement, mais Chu et Kovásznay [35] ont bien insisté sur le fait que les modes de fluctuations produisent des interactions non–linéaires.

Doak développe l'équation de conservation de la masse comme il l'a fait précédemment [41] en décomposant le vecteur de quantité de mouvement ρv_i en partie solénoïdale et irrotationnelle, suivant ce qu'il souhaite être une nouvelle théorie, appelée « théorie potentielle de la quantité de mouvement » (*momentum potential theory*) :

$$\rho v_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + b_i \quad \text{avec} \quad \mathbf{b} = \text{rot}\ \mathbf{a}$$

Si on suppose que la composante solénoïdale et la composante irrotationnelle peuvent se décomposer elles–mêmes en parties moyenne et fluctuante, alors

$$\rho v_i = -\frac{\partial \psi'}{\partial x_i} + B_i + b'_i$$

La partie rotationnelle disparaît lorsqu'on écrit la conservation de la masse du fait du divergent et on retrouve donc l'équation (2.37) déjà discutée. Mais Doak cherche à montrer que le vecteur de quantité de mouvement peut s'écrire comme une superposition de quatre champs (moyen, turbulent, acoustique et thermique). Formellement, la densité ne dépend que de la pression et de l'entropie :

$$\rho = \rho(p,s) \quad \Rightarrow \quad \delta\rho = \rho_p \delta p + \rho_s \delta s \quad \text{avec} \quad \rho_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c^2} \quad \text{et} \quad \rho_s = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p$$

Dès lors, l'équation (2.37) devient :

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_i^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial s'}{\partial t}$$

Ainsi, ψ' peut s'exprimer par la somme d'une partie acoustique ψ'_A et d'une partie thermique ψ'_T et donc, le vecteur de quantité de mouvement devient :

$$\rho v_i = -\frac{\partial \psi'_A}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi'_T}{\partial x_i} + B_i + b'_i \tag{2.43}$$

Donc, le vecteur de quantité de mouvement peut effectivement s'écrire comme la superposition linéaire d'une composante moyenne (B_i), turbulente (b'_i), acoustique ($\partial\psi'_A/\partial x_i$) et thermique ($\partial\psi'_T/\partial x_i$). Doak procède de même pour la loi de conservation de la quantité de mouvement (mais sans conclure sur une superposition linéaire) puis pour la conservation de l'énergie. Cette dernière prenant la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle H\rangle B_j + \langle H' b'_j\rangle - \left\langle H'\frac{\partial \psi'_A}{\partial x_j}\right\rangle - \left\langle H'\frac{\partial \psi'_T}{\partial x_j}\right\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle \tau_{ij} v_i\rangle + \left\langle \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right\rangle\right) + \langle Q_T\rangle \tag{2.44}$$

L'équation (2.44) fait apparaître la décomposition du flux d'énergie en partie :
- moyenne ($\langle H\rangle B_j$) ;
- turbulente ($\langle H' b'_j\rangle$) ;
- acoustique ($-H'\partial\psi'_A/\partial x_j$) ;
- et thermique ($-H'\partial\psi'_T/\partial x_j$).

Pour être encore plus général, Doak reprend l'équation de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées lagrangiennes pour garder la possibilité d'un milieu en mouvement et fait intervenir la vorticité. Après quelques manipulations, il obtient un bilan d'énergie exact :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle H'(\rho v_i)'\rangle = \langle \rho v_i\rangle \cdot \left\langle \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)' \times (\rho \boldsymbol{v})'\right\rangle_i + \langle Q_T\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle \tau_{ij} v_i\rangle + \left\langle \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right\rangle\right) - \langle \rho v_i\rangle \left(\left\langle \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right\rangle + \left\langle T\frac{\partial s}{\partial x_i}\right\rangle\right) \tag{2.45}$$

L'équation (2.45) semble l'expression la plus exacte et la plus générale pour le bilan d'énergie. On remarque surtout que si on considère les hypothèses d'écoulement homentropique (à entropie constante s), non visqueux, ne conduisant pas la chaleur et en l'absence d'apport extérieur de chaleur, ce bilan devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle H'(\rho v_i)'\rangle = \langle \rho v_i\rangle \cdot \left\langle \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)' \times (\rho \boldsymbol{v})'\right\rangle_i \tag{2.46}$$

et dans le cas d'un écoulement irrotationnel, le résultat de Cantrell et Hart [26] est retrouvé. Une analyse supplémentaire peut s'effectuer dans ce dernier cas. Dans

le chapitre d'introduction, l'importance de la compressibilité sur la génération et la propagation sonore a été relativisée (section 1.1.3). Doak suggère qu'il est raisonnable de considérer également le cas incompressible. En incompressible, le théorème de la divergence indique que les flux s'équilibrent en entrée et sortie d'un volume de contrôle, ce qui permet de considérer une zone en dehors de toute source acoustique, dans laquelle l'énergie acoustique ne fait que passer et où l'on peut considérer la densité comme constante et le divergent nul. Alors, l'équation (2.45), avec son lot d'hypothèses, se résume à :

$$\langle \rho v_i \rangle \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x_i} = 0$$

Ce résultat est très intéressant car il illustre que dans la zone potentielle d'un écoulement homentropique, non visqueux et adiabatique, le gradient moyen de l'enthalpie totale est orthogonal au flux de quantité de mouvement. Il en va de même pour les fluctuations :

$$\left\langle (\rho v_i)' \frac{\partial H'}{\partial x_i} \right\rangle = 0$$

Ce qui signifie que la fluctuation de quantité de mouvement est orthogonale aux fluctuations du gradient d'enthalpie. Les formulations développées dans cette section sont séduisantes et semblent complètes et exactes mais nécessitent encore une connaissance assez fine du champ hydrodynamique.

Cette problématique se retrouvera également chez Myers [119, 120] qui développe alors un théorème exact de l'énergie pour des classes d'écoulements les plus généraux, incluant même les non–linéarités.

2.4.2 Le rôle des fluctuations de vorticité

Depuis Morfey [112], l'énergie acoustique est approchée par les équations complètes de la mécanique des fluides. Nous avons vu que la décomposition potentielle a eu beaucoup de succès. Pour Howe [70], les équations de la dynamique peuvent s'écrire sous forme tourbillonnaire. Avec Powell [130], Howe est l'un des fondateurs de la théorie du *vortex noise* [71], même si leur approche reste différente. Powell fait intervenir la vorticité directement dans le tenseur de Lighthill en écoulement isentropique. Howe [68] quant à lui, la fait apparaître dans les équations de Navier–Stokes en faisant intervenir le vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$. Dans ce contexte, il se place dans un écoulement de couche–limite et écrit l'enthalpie d'arrêt H du fluide :

$$H = \int \mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{v^2}{2} = h + \frac{v^2}{2}$$

Dans la zone à l'extérieur de la couche–limite, l'écoulement est irrotationnel et on peut alors exprimer l'enthalpie totale selon le potentiel des vitesses φ : $H = -\partial\varphi/\partial t$. Dans un article précédent, Howe [68] a montré que l'enthalpie totale satisfait une équation d'onde en cas d'écoulement homentropique au repos en réécrivant l'analogie avec le vecteur vorticité :

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) H = \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v})$$

Et en déduit une formule générale pour le transfert d'énergie [69] :

$$\Pi = -\int_S \rho_0 \ (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v'} \ \mathrm{d}S \tag{2.47}$$

où Π est le taux auquel l'énergie est fournie au champ acoustique. Cette équation signifie que le flux d'énergie du champ acoustique est égal au taux de production de la puissance par les forces tourbillonnaires pour un son incident en présence de parois. C'est la principale avancée due au travail de Howe à caractériser « l'absorption » de l'énergie acoustique par l'écoulement.

L'article de Nelson *et al.* [121] représente une synthèse entre la vue de Doak [41] sur la décomposition vectorielle et celle de Howe sur le rôle clé de la vorticité. Dans la partie hydrodynamique et tant que l'écoulement peut être considéré comme non visqueux, incompressible et homentropique, la conservation de la quantité de mouvement dans les équations de Navier–Stokes est écrite comme :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad \text{avec} \quad H = e_I + \frac{p}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} \tag{2.48}$$

où H est l'enthalpie d'arrêt. Toujours d'après les équations de Navier–Stokes, l'équation de transport de l'énergie prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e_I + \frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i} H \rho v_i = 0 \tag{2.49}$$

Si la densité d'énergie est stationnaire, la moyenne temporelle de l'équation (2.49) se résume à :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle H \rho v_i \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial x_i} \langle H \rangle \langle \rho v_i \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle H' (\rho v_i)' \rangle = 0$$

en faisant appel aux variables linéarisées. Le premier terme ($\langle H \rangle \langle \rho v_i \rangle$) représente le flux d'énergie de l'écoulement moyen. Le second ($\langle H' (\rho v_i)' \rangle$) représente le flux d'énergie associé au champ fluctuant de l'écoulement. Cette écriture permet de reconnaître facilement la définition usuelle de l'intensité en l'absence d'écoulement. Pour Nelson *et al.* [121], ce dernier vecteur est donc une définition satisfaisante de l'intensité acoustique au sens général, associée aux fluctuations. La décomposition vectorielle n'ayant pas encore été appliquée, ce vecteur associé aux fluctuations porte encore en lui les composantes acoustique et turbulente non différenciées. Ce vecteur se retrouve également en linéarisant l'équation (2.48) :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle H' (\rho v_i)' \rangle = - \langle (\rho \boldsymbol{v})' \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} \rangle \tag{2.50}$$

Ce qui signifie que le mécanisme de production de l'énergie dans les fluctuations d'un écoulement est produite par l'accélération d'une force de Coriolis. Le rôle de la force de Coriolis sur la production acoustique est également suggéré par Doak [44].

2.4.3 Un théorème exact

Dans une tentative générale pour former un théorème exact de l'énergie acoustique, Myers [119] développe une équation de conservation qui généralise l'équation

familière de l'énergie acoustique, dans le cadre d'un écoulement non visqueux et homentropique. Selon lui, l'hypothèse d'écoulement homentropique n'est pas trop restrictive et est souvent employée en aéroacoustique, même dans le cas d'un écoulement cisaillé [67]. La conséquence directe est la constance de l'entropie spécifique s et l'unique dépendance selon la densité ρ des quantités thermodynamiques (p, e_I, et h). Au premier ordre, il retrouve les définitions usuelles de l'énergie et de l'intensité. Étendu au second ordre, on retrouve les résultats de Cantrell et Hart. Myers recommande Morfey [112] et Pierce [128] pour les travaux les plus complets, mais reconnaît comme contributions majeures et fondatrices celles de Cantrell et Hart et de Blokhintsev [8]. Il obtient son théorème exact en partant des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement et en faisant intervenir l'enthalpie spécifique qui est alors ensuite injectée dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour remplacer le gradient de pression. Il réecrit les lois de conservation et étend les quantités linéarisées en séries de Taylor. De manière générale, la procédure de Myers est classique puisqu'il réarrange et combine les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement mais en exprimant l'enthalpie spécifique de stagnation suivant le raisonnement de Nelson *et al.* pour obtenir une loi de conservation sous la forme :

$$\frac{\partial e^{M1}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{M1}}{\partial x_i} = -D$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e^{M1} & = & \rho(H - H_0) - (p - p_0) - \rho_0 \boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}) \\ I_i^{M1} & = & (\rho \boldsymbol{v} - \rho_0 \boldsymbol{V}) \cdot (H - H_0) \\ D^{M1} & = & (\rho \boldsymbol{v} - \rho_0 \boldsymbol{V}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}_0 \wedge \boldsymbol{V}) \end{array} \right.$$

Myers étend ensuite cette analyse pour les perturbations homentropiques d'un écoulement lui–même homentropique aux perturbations arbitraires d'un écoulement arbitraire [120]. L'auteur généralise la définition usuelle de l'énergie acoustique en développement de Taylor. La densité d'énergie et de l'intensité sont définies comme des quantités exactes du point de vue de la dynamique des fluides. Donc, si Myers décompose bien les différentes énergies portées et échangées dans l'écoulement, il ne spécifie pas leur origine ce qui implique que la loi d'énergie qu'il identifie n'est pas purement acoustique et mérite en conséquence le titre d'énergie de perturbation. Les lois développées par Myers sont consistantes avec ses prédécesseurs dans le cas d'un milieu au repos mais empêche l'identification de l'énergie et de l'intensité comme quantités acoustiques. On retrouve là encore l'usage de l'enthalpie d'arrêt et en gardant les perturbations qu'il développe en séries de puissances, celles–ci restent à la fois dans la densité d'énergie et de l'intensité [17]. Selon Myers, l'approche d'expansion autour d'un petit paramètre — par opposition à l'approche de moyenne temporelle utilisée notamment par Jenvey et Doak — est justifiée par Lighthill qui a montré l'inacceptabilité de baser les équations de l'énergie acoustique sur une moyenne temporelle de quantités fluctuantes (Lighthill [93]).

Par les équations de la dynamique des fluides et des relations thermodynamiques (et de longs développements), Myers obtient un théorème de l'énergie au premier ordre puis développe au second ordre :

$$\frac{\partial e^{M2}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{M2}}{\partial x_i} = -D^{M2}$$

avec

$$\begin{cases} e^{M2} & = & e + \rho' \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{v}' + \frac{\rho_0 T_0 s'^2}{2C_p} \\ I_i^{M2} & = & (\rho \boldsymbol{v})' \left(H' - T_0 s'\right) - (\rho \boldsymbol{v})' \left(\frac{\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}}{\rho}\right)' + (\rho \boldsymbol{v})_0 T' s' + T' \left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)' \\ D^{M2} & = & -\rho_0 \boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{\omega}' \wedge \boldsymbol{v}') - \rho' \boldsymbol{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \boldsymbol{V}) + s'(\rho \boldsymbol{v})' \nabla T_0 - s'(\rho \boldsymbol{v})_0 \nabla T' \\ & + & \left(\frac{\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}}{\rho}\right)' \frac{\partial (\rho \boldsymbol{v})'}{\partial x_i} - (\rho \boldsymbol{v})' \left(\frac{\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}}{\rho^2} \nabla \rho\right)' - T' \left(\frac{\Phi}{T}\right)' - \left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)' \cdot \nabla T' \\ & + & T' \left(\frac{\boldsymbol{q} \cdot \nabla T}{T^2}\right)' \end{cases}$$

où la double barre représente un tenseur d'ordre deux $\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \tau_{ij}$. Là encore, il s'agit d'un bilan qui est poussé à l'ordre deux pour satisfaire sa conservation dans les quantités infimes de l'acoustique. On note alors l'apparition d'un terme de dissipation : $\Phi = \tau_{ij} \partial u_j / \partial x_i$. L'équation est complète à l'ordre deux mais ne nécessite que des quantités de premier ordre. Le terme D^{M2} est un terme source représentant le taux auquel l'énergie des perturbations de premier ordre est dissipée. Non seulement par effets visqueux mais aussi par transfert d'énergie croisé entre le champ moyen de vitesse et le champ de vorticité fluctuante d'une part et entre le champ moyen de vorticité et le champ de vitesse fluctuante d'autre part. On note aussi l'effet du gradient thermique. Le terme de flux est celui de Cantrell et Hart [26], augmenté par le terme représentant les efforts visqueux, le flux thermique et la source de chaleur.

C'est une expression générale et si l'écoulement est homentropique, on retrouve le résultat de Cantrell et Hart [26]. Si de plus il s'agit d'un écoulement irrotationnel de fluide parfait, on retrouve la définition usuelle, sans dissipation ($D^{M2} = 0$). Myers par ailleurs indique que son résultat peut être retrouvé *via* la décomposition potentielle du vecteur vitesse de Morfey [112] moyennant certains efforts analytiques. Mais puisque la motivation de Myers [120] est d'être le plus général possible, il vise le cas non–linéaire dans lequel la décomposition vectorielle ne peut s'appliquer. L'expression générale obtenue, incluant les non–linéarités dépasse le cadre de ce mémoire. L'auteur discute des applications en écoulement transsonique dans un conduit en approximation d'ondes planes. À ce stade, la comparaison plus approfondie de cette expression générale avec les descriptions des interactions non–linéaires de Chu et Kovásznay [35] serait éclairante. Notons finalement que la motivation de Myers était d'établier une loi de conservation et d'étudier le transport d'énergie, mais non le canal de conversion d'énergie entre les champs hydrodynamique et acoustique. Nous présentons à la section suivante un cas d'application numérique du théorème exact de Myers.

2.4.4 Un cas d'application numérique

C'est en 1993 avec Brentner [19] que semble avoir été publiée la première contribution sur l'énergie acoustique ayant recours à la simulation numérique directe des équations d'Euler. On a pu voir tous les efforts entrepris ces cinquantes dernières années sur l'énergie acoustique pour prendre en compte notamment la dissipation

par viscosité. Mais Brentner justifie l'emploi des équations d'Euler car cela permet d'observer spécifiquement l'influence de la viscosité numérique (puisqu'il n'y a pas de viscosité *physique*). Cela permet également le transport gelé de la vorticité au sens de Taylor [143]. Brentner étudie donc numériquement l'acoustique engendrée par un objet en déplacement à travers le cas d'un cylindre circulaire rapidement accéléré en translation horizontale. L'accent est mis sur le transfert entre les différentes composantes de l'énergie acoustique. Le cas d'étude de l'auteur étant appliqué au mouvement d'un corps solide, pose un problème de généralisation en écoulement libre.

Il cherche alors à identifier l'énergie qui va suivre le mouvement du cylindre (énergie cinétique), celle qui va donner lieu à un échange thermique (énergie entropique), celle qui va évoluer en convection (énergie convective) et celle qui rayonnera en champ lointain (énergie propagative). Il propose de décomposer l'énergie totale entre l'énergie acoustique qui est propagative, l'énergie associée au changement d'entropie du fluide qui est convective et l'énergie cinétique qui suit le mouvement du corps immergé. Cette décomposition tire son origine de la constation faite d'après les travaux de Taylor [voir 144, pp. 306-308] et Ffowcs Williams et Lovely [56] notamment, qui montrèrent que l'énergie est répartie également entre une énergie cinétique qui suit le corps immergé et une énergie acoustique rayonnante. Selon Brentner [19], c'est cette dernière composante de l'énergie qui peut être de nouveau décomposée entre l'énergie acoustique propagative et l'énergie entropique convective. Et cette distinction peut être faite facilement en mesurant le temps mis par l'énergie pour quitter le volume de contrôle, les vitesses de propagation acoustique et de convection du fluide étant bien distinctes.

Brentner reprend les résultats de Myers [120] dont il applique le théorème exact en le simplifiant en l'absence d'écoulement, sans viscosité ni conduction thermique :

$$\frac{\partial e^{Br}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{Br}}{\partial x_i} = 0$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^{Br} & = & \rho \left(h' + \frac{v^2}{2} - T_0 s' \right) - p' \\ I_i^{Br} & = & \rho \left(h' + \frac{v^2}{2} - T_0 s' \right) \cdot v_i \end{array} \right.$$

Brentner propose une décomposition de la densité d'énergie en quantités cinétique, potentielle et entropique, respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_k^{Br} & = & \frac{\rho v^2}{2} \\ e_p^{Br} & = & \rho \left(h' - T_0 s' \right) - p' \\ e_s^{Br} & = & \rho T_0 s' \end{array} \right.$$

Brentner indique que chacune de ces composantes est construite de manière à être nulle dans l'écoulement porteur et note que $e_k^{Br} + e_p^{Br} = e^{Br}$. L'introduction de e_s^{Br} dans la loi de conservation peut sembler abusive.

Nous trouvons ici une approche « hybride » originale. Le théorème de Myers est assez conséquent. Brentner choisit donc de le simplifier au maximum et d'introduire *a posteriori* une vitesse de convection (Blokhintsev [8]) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e_k^{Br}+e_p^{Br}+e_s^{Br}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(e_k^{Br}+e_p^{Br}+e_s^{Br}-p_0\right)(v_i-u_i)+pv_i\right]=0$$

où u_i est la vitesse du cylindre, ce dernier étant pris comme référence du cadre d'étude. Une intégration sur le volume de contrôle et l'application du théorème de la divergence donnent :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E_k^{Br}+E_p^{Br}+E_s^{Br}\right)+\dot{F}_a+\dot{F}_s=\dot{W}^{Br}$$

avec

$$\begin{cases} E_k^{Br} &= \displaystyle\int_V e_k \mathrm{d}V; \quad E_p^{Br}=\int_V e_p \mathrm{d}V; \quad E_s^{Br}=\int_V e_s \mathrm{d}V \\ F_a &= \displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_S \left[(e_k+e_p-p_0)(v_n-u_n)+pv_n\right]\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau \\ F_s &= \displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_S e_s(v_n-u_n)\,\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau \\ W^{Br} &= \displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_S pu_n \mathrm{d}S\mathrm{d}\tau \end{cases}$$

où v_n et u_n sont les composantes normales à la surface S respectivement de la vitesse du fluide et de la vitesse du cylindre, F_a et F_s sont les intégrales temporelles des flux acoustique et entropique sortant du volume V et W^{Br} est le travail total fourni par le corps immergé considéré. Le point au dessus d'une variable est l'opérateur de dérivée temporelle, notée différement que $\partial/\partial t$, car elle est en quelque sorte une dérivée « glissante » au temps t d'intégration. L'auteur précise cependant que la quantité F_a n'est purement acoustique que si les parois du domaine de contrôle sont suffisamment éloignées pour éviter l'influence du champ aérodynamique. L'énergie cinétique e_k^{Br} est la seule qui évolue dans la limite d'un fluide non visqueux et incompressible, l'énergie potentielle e_p^{Br} est liée à la compression du fluide et l'énergie entropique e_s^{Br} est liée à l'augmentation de l'entropie du fluide. Il en ressort que l'énergie potentielle e_p^{Br} est de première importance pour l'étude des ondes acoustiques notamment par son rôle de « marqueur » de la compression. On pourra retrouver dans la thèse de Brentner [18] une illustration montrant la répartition des trois composantes de l'énergie. On reproduit une illustration à un instant donné à la figure 2.1.

Il ressort de la simulation numérique directe de Brentner [19] (et de la figure 2.1) que l'énergie cinétique est concentrée à la fois sur la surface du cylindre et dans les fronts d'ondes acoustiques. L'énergie cinétique qui reste sur le cylindre est l'énergie locale de l'écoulement aérodynamique. L'énergie cinétique localisée dans les fronts d'ondes est purement acoustique du fait de sa vitesse de propagation. Même conclusion de localisation pour l'énergie potentielle. Mais alors que l'énergie cinétique hydrodynamique se répartit plus ou moins uniformément sur la surface du cylindre, l'énergie potentielle hydrodynamique se retrouve surtout là où l'amplitude de la vitesse est la plus élevée. Pour l'étude de l'énergie entropique, les résultats semblent

(a) Énergie cinétique (b) Énergie potentielle (c) Énergie entropique

Figure 2.1 – Répartition des composantes de l'énergie acoustique au même instant t. D'après Brentner [18]. Les niveaux de coloration vont de zéro (bleu) au maximum (rouge).

inattendus. En règle générale, l'acoustique est un processus non visqueux et isentropique. Mais comme Brentner constate la génération d'entropie par l'onde acoustique propagative il en conclut que sa nature est plus numérique que physique. Ainsi, la mesure de l'énergie entropique permet d'identifier la présence d'erreurs numériques et de juger de la fiabilité d'une prédiction acoustique par *DNS*.

Brentner offre une extension des travaux de Ffowcs Williams et Lovely [56], Longhorn [97], Taylor [144] notamment et porte des conclusions identiques : après un démarrage impulsif, l'énergie totale du fluide est divisée de manière égale entre d'une part une énergie hydrodynamique faite d'énergie cinétique et d'énergie potentielle (mais toujours dans le cas non visqueux, donc sans dissipation) et d'autre part une énergie acoustique et entropique qui se propagent en champ lointain. On a donc une moitié de l'énergie qui reste dans le volume de contrôle, qui se déplace avec le fluide et une autre moitié qui se propage à la fois par l'acoustique et à la fois par l'entropie. Brentner insiste sur les méthodes numériques et notamment la discrétisation spatiale pour ne pas risquer de voir l'énergie acoustique se transformer en énergie entropique par effet de dissipation numérique. Il est toutefois étrange de constater que Brentner observe l'entropie se propager quand Doak note que les fluctuations d'entropie ne peuvent se « propager » que par la convection et la diffusion [45].

Lorsqu'a été étendue l'approche eulérienne pour prendre en compte les phénomènes de dissipation, l'enthalpie s'est imposée comme une variable prédominante. Nous discutons de son rôle et de son intérêt pour la description du phénomène acoustique à la section suivante. Nous allons voir qu'une alternative a été proposée. Une autre description semble possible, basée sur l'exergie.

2.4.5 Enthalpie ou exergie ?

Une note sur l'enthalpie d'arrêt

L'intérêt qu'a porté un si grand nombre d'auteurs sur l'enthalpie réside dans sa définition, consistante avec leurs ambitions de séparer l'énergie acoustique en une partie solénoïdale (entropique) et une partie irrotationnelle (acoustique). Tout d'abord, l'enthalpie correspond à l'énergie totale d'un système thermodynamique et comprend l'énergie interne. C'est, de plus, une fonction d'état extensive. Ensuite, elle se définit d'après le second principe de la thermodynamique :

$$\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + \left(\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{d}p \tag{2.51}$$

et permet ainsi la séparation claire des composants irrotationnel et solénoïdal. C'est le point de départ choisi par beaucoup d'auteurs.

Si Jenvey [74] assure que les fluctuations aérodynamiques peuvent transporter le rayonnement acoustique, Doak [45] soutient que la création de l'énergie acoustique doit nécessairement avoir une origine thermodynamique. Ce dernier considère ainsi les fluctuations de l'enthalpie d'arrêt comme le meilleur critère pour décrire les problèmes d'aéroacoustique. Il confirme également les résultats de Powell [130] indiquant le rôle prédominant de la vorticité dans la génération du bruit aérodynamique. Mais alors pourquoi choisir d'approcher l'aéroacoustique sous l'angle de l'enthalpie, quand les précédents travaux mettent en avant l'influence de la vorticité ? L'enthalpie est une variable thermodynamique que l'on peut aisément exprimer grace aux relations adiabatiques. Or, des fluctuations rapides des propriétés thermodynamiques comme justement le son peuvent être considérées comme adiabatiques. En effet, l'entropie et la vorticité ne se transmettent d'une particule à une autre que par une diffusion lente. Un changement d'entropie par diffusion est donc négligeable devant les échelles de temps et de vitesse de la propagation acoustique[g].

Une équation de transport, écrite en moyenne temporelle sur l'enthalpie d'arrêt fluctuante est obtenue par Doak [45] à partir de l'énergie et des définitions thermodynamiques de l'enthalpie d'arrêt. Elle est exacte et complète, incluant les forces extérieures (f_i) comme la gravité :

$$\frac{\partial \langle H'(\rho v_i)' \rangle}{\partial x_i} = \left\langle (\rho v_i)' \left\{ f_i' - \left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right)' \wedge \langle \rho \boldsymbol{v} \rangle \right]_i + \left(T \frac{\partial s}{\partial x_i} \right)' + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right)' \right\} \right\rangle + \frac{\langle p' \partial s' / \partial t \rangle}{R} \tag{2.52}$$

avec τ_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses de Stokes :

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - 2(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}) \right] + \left(\frac{4}{3}\mu + \eta \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

L'équation est légèrement similaire au résultat de la référence [44] (écrite ici à l'équation (2.45)). Une équation portant déjà sur la variable $H'(\rho v_i)'$ est également donnée par Morfey [112]. On retrouve ici encore l'influence de la force de Coriolis sur le processus d'échange énergétique. Pour Doak [45], c'est la source du divergent de $H'(\rho v_i)'$ (exprimé par l'équation (2.52)) qui est la cause de l'expansion de l'intensité des fluctuations d'enthalpie. À partir de cette équation, Doak note qu'à moins d'un puissant processus irréversible ou d'un forçage extérieur, la puissance acoustique rayonnée est déterminée par :

$$\rho v_i \left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right)' \wedge (\rho \boldsymbol{v})' \right]_i \tag{2.53}$$

On retrouve ici une expression auparavant mise en évidence par Nelson *et al.* [121] (équation (2.50)), Jenvey [74] (équation (2.42)) et Doak [44] (équation (2.46)). Lors d'un processus adiabatique, l'énergie interne est constante et les fluctuations de l'enthalpie d'arrêt sont alors données par :

g. évoquons néanmoins la perte du caractère isentropique de l'onde acoustique en description lagrangienne [16].

$$H' = \frac{p'}{\rho_0} + \frac{v'^2}{2}$$

Dès lors, $\rho_0 H'$ représente les fluctuations de la pression totale. $\rho_0 H'$ peut être p' en dehors d'une région perturbée de l'écoulement mais à l'intérieur il faut ajouter le terme $\rho_0 v'^2/2$. H' a l'avantage d'être explicitement indépendant de la convection des fluctuations de pression. Pour exprimer une loi portant uniquement sur l'enthalpie d'arrêt fluctuante, ce sont les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement qui sont réécrites en utilisant les relations thermodynamiques pour faire apparaître l'enthalpie d'arrêt puis isoler sa partie fluctuante. La démarche est longue et fastidieuse mais c'est sûrement l'expression la plus complète pour identifier le flux d'énergie acoustique :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 H'}{\partial x_i^2} - \left[\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial^2 H'}{\partial t^2} + 2\left\{v_i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}\right)_i + \frac{1}{2}\beta_i - \frac{\partial h}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial H'}{\partial x_i} + v_i v_j \frac{\partial^2 H'}{\partial x_i x_j}\right\}\right]' \\
&\quad = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}\right)_i' - \beta_i'\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{R}\frac{Ds}{Dt}\right]' + \left[\frac{\partial(1/c^{2\prime})}{\partial t}\frac{Dh}{Dt}\right]' - \left[\frac{1}{c^2}\left\{v_i\frac{\partial V_i'}{\partial t}\right\}'\right]' \\
&\qquad + 2\left[\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2}v_i v_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}\right)_i + \frac{1}{2}\beta_i - \frac{\partial h}{\partial x_i}\right\}\left\{\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}\right)_i' - \beta_i'\right\}\right]'
\end{aligned} \tag{2.54}$$

où R est la constante des gaz parfaits et $\beta_i = T\partial s/\partial x_i + (1/\rho)\partial\tau_{ij}/\partial x_j + f_i$.

Finalement, Doak [45] conclut que c'est en se focalisant sur l'enthalpie d'arrêt fluctuante qu'on peut effectuer la distinction claire entre les sources qui génèrent un rayonnement de l'énergie en champ lointain et les sources qui génèrent des pertubations en champ proche. Et étant donné l'importance de la vorticité en aéroacoustique, il suggère subtilement d'utiliser en priorité les équations de transport qu'il a développées pour l'enthalpie d'arrêt fluctuante plutôt que d'avoir recours aux équations classiques de la dynamique des fluides. L'idée que l'enthalpie fluctuante est l'unique champ acoustique généralisé a été suggérée par Doak [41] en 1971 et enrichie notamment par Doak [44], Jenvey [74] et Myers [120]. Il faut attendre l'article de Starobinski et Aurégan [140] pour voir une première critique de ce concept en y substituant l'exergie.

L'exergie

Il est vrai que le travail que peut fournir une particule ne dépend pas seulement des propriétés intrinsèques à cette particule mais également des propriétés de son environnement. Il semble donc plus adapté d'utiliser une fonction extensive comme l'exergie pour décrire un processus d'échange énergétique entre une particule et son milieu. Alors que l'énergie et l'enthalpie désignent la capacité totale d'un système à produire un travail, l'exergie spécifie la part du travail qui est réellement utilisable. Si l'énergie désigne une quantité, l'exergie mesure une qualité [h].

Dans un cadre beaucoup moins général que les théories de Myers [120] ou Doak [45] puisque demandant les hypothèses d'écoulement non visqueux, adiabatique, isentropique et irrotationnel, elle se définit comme :

h. La phrase vient de France Culture qui y a consacré un reportage, disponible sur : www.franceculture.fr/emission-science-publique-faut-il-passer-de-l-energie-a-l-exergie-2013-07-05.

$$G = H - T_0 s \tag{2.55}$$

L'exergie était déjà incluse chez Myers [120] et Brentner [19]. Les fluctuations d'entropie d'une part et de vorticité d'autre part sont deux sources aéroacoustiques considérées par Starobinski et Aurégan [140]. Sous les hypothèses considérées, les fluctuations d'entropie s'expriment par l'équation de conservation de l'énergie et les fluctuations de vorticité par l'équation de Crocco. Ces fluctuations sont transportées avec l'écoulement moyen par convection et sont qualifiées de « pseudo–son ». Si elles ne constituent pas à proprement parler le « vrai » son[i], elles sont néanmoins liées à sa génération. En considérant l'équation de Crocco écrite depuis les équations d'Euler

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} - (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v})_i = T \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

qu'on linéarise avec l'équation de conservation de la masse, on peut écrire une loi de conservation pour l'exergie en fonction des fluctuations d'entropie et de vorticité :

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t} + \frac{\partial G'}{\partial x_i} = -(\boldsymbol{\omega'} \wedge \boldsymbol{V})_i - T_0 s' \tag{2.56}$$

avec l'exergie fluctuante $G' = H' - T_0 s'$. Le membre de droite est le terme de forçage, somme des fluctuations de la force de Coriolis ($\boldsymbol{\Gamma'} = \boldsymbol{\omega'} \wedge \boldsymbol{V}$) et des fluctuations d'entropie ($T_0 s'$). En combinant cette loi de conservation avec l'équation de conservation de l'entropie, Starobinski et Aurégan [140] proposent une équation de transport pour l'exergie :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_0 \frac{\partial G'}{\partial x_i}\right) - \frac{D_0}{D_0 t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{D_0 G'}{D_0 t}\right) = &-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_0 \Gamma_i'\right) \\ &- \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_0 s' \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \frac{s'}{c^2} V_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(V_j \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

Cette expression est à rapprocher de l'équation de transport pour l'enthalpie d'arrêt fluctuante $H' = G' + T_0 s'$ proposée par Howe [68]. Bien sûr, en cas d'écoulement isentropique, les deux expressions se confondent, car l'enthalpie H est alors identique à l'exergie G. L'exergie fluctuante G' désigne le travail que produit une particule lorsqu'elle subit une transformation depuis son état d'équilibre, tandis que l'enthalpie fluctuante H' désigne le travail que produit une particule subissant une transformation depuis le zéro absolu. L'exergie désigne donc une réserve d'énergie directement utilisable. Pour citer d'autres avantages de l'exergie, Starobinski et Aurégan [140] rappellent que dans le cas d'un écoulement adiabatique, sans échange d'énergie avec l'extérieur, l'enthalpie H est constante. Or, la seconde loi de la thermodynamique précise que l'entropie augmente, ce qui signifie que le travail que peut produire une particule diminue ; autrement dit, le potentiel de rayonnement acoustique diminue aussi ce qui va entraîner une incertitude issue de la fiabilité du concept d'enthalpie pour quantifier l'énergie acoustique.

i. puisqu'elles se propagent à la vitesse de convection et non à la vitesse du son, comme nous l'avons évoqué dans le chapitre d'introduction à la section 1.1.2.

2.4.6 Première unification

Dokumaci [46] propose une synthèse claire et concise des deux principales approches fondatrices de la théorie potentielle (Doak [44], Morfey [112]) et utilise le concept d'exergie. Loin de les remettre en cause, il montre très brièvement que ces deux résultats peuvent facilement se retrouver à partir de la définition usuelle de l'intensité acoustique. Cet article est d'une précision redoutable. En quelques lignes, il unifie deux approches complexes et les relie directement à la définition usuelle. Malgré toutes les discussions sur la pertinence de cette définition, l'auteur montre qu'elle est bien posée, car elle permet de retrouver les résultats généraux de Morfey et Doak. Dokumaci ne considère pas la densité d'énergie mais uniquement l'intensité. Sa réflexion se base sur le concept de puissance acoustique. Par définition, la puissance acoustique W est l'intégrale de la moyenne temporelle du flux d'énergie acoustique traversant une surface S :

$$W^{DU} = \int_S \left\langle I_i^{DU} \right\rangle \cdot n_i \mathrm{d}S$$

d'après les notations utilisées jusqu'ici. Une petite discussion est apportée sur la définition de l'intensité I_i^{DU} mais elle reste consistante par rapport à la définition usuelle. En l'absence d'écoulement, on a simplement $I_i^{DU} = pv_i$. La convection rajoute un premier terme de manière similaire à Blokhintsev [8] et Markham [105] : $I_i^{DU} = ev_i + pv_i$. Dokumaci fait explicitement référence à l'exergie G :

$$I_i^{DU} = ev_i + pv_i = \rho v_i \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \rho v_i G \tag{2.57}$$

L'équation (2.57) contient les quantités totales. Mais à ce niveau, deux considérations s'ajoutent. Premièrement, la puissance acoustique est définie par une moyenne temporelle de l'intensité. Si l'écoulement est périodique, la moyenne temporelle des quantités moyennes s'annulent. Deuxièmement, dans la limite des petites perturbations, les produits de fluctuations peuvent être négligés. Il vient :

$$I_i^{DU} = (\rho \boldsymbol{v})_i' G' = (\rho_0 v_i' + \rho' V_i) \cdot \left(V_i \cdot v_i' + \frac{p'}{\rho_0} \right) \tag{2.58}$$

On retombe alors exactement sur l'intensité I_i^{CH} de Cantrell et Hart [26] définie à l'équation (2.27). À ce stade, Dokumaci propose deux cheminements. Le premier est une analyse basée sur la décomposition de la vitesse fluctuante et est similaire à l'approche de Morfey. Le second décompose le vecteur de quantité de mouvement et se rapproche de l'analyse de Doak [44]. Dokumaci considère un écoulement irrotationnel. Dès lors, toutes les fluctuations de l'écoulement sont de l'ordre de l'acoustique. Dans un premier temps, on peut donc réécrire la densité :

$$\mathrm{d}\rho' = \frac{1}{c^2}\mathrm{d}p' + \frac{\partial \rho'}{\partial s'}\mathrm{d}s'$$

ce qui conduit alors à $\rho' = p'/c^2$ si l'écoulement est isentropique. De fait, les effets thermiques et visqueux sont négligés. En faisant maintenant intervenir la décomposition de la vitesse fluctuante suivant l'exemple de Morfey [112] en une partie irrotationnelle et une partie solénoïdale $v_i' = u_i' + w_i'$ respectivement. Par définition, la partie solénoïdale est incompressible et ne participe pas à l'acoustique. La vitesse

irrotationnelle u'_i est donc la vitesse particulaire acoustique. L'équation (2.58) se réécrit :

$$I_i^{DU} = \left(\rho_0 u'_i + V_i \frac{p'}{c^2}\right) \cdot \left(V_i \cdot u'_i + \frac{p'}{\rho_0}\right) \tag{2.59}$$

où l'on retrouve le résultat de Morfey [112], présenté dans ce chapitre à l'équation (2.36), par décomposition de la vitesse fluctuante. La décomposition du vecteur de quantité de mouvement s'écrit sous la forme de l'équation (2.43) [44]. Dans le cas d'un écoulement irrotationnel sans effets thermiques, il reste simplement $\rho v_i = -\partial \psi'_A / \partial x_i$. On peut exprimer la fluctuation d'exergie de manière à faire intervenir la décomposition du vecteur de quantité de mouvement :

$$\frac{V_i \cdot V_i}{2} = \frac{1}{\rho_0}\left[(\rho_0 v'_i + \rho' V_i) \cdot V_i - \rho' V^2\right] = \frac{1}{\rho_0}\left[(\rho v_i)' \cdot V_i - \rho' V^2\right]$$

Ainsi, la partie acoustique de la fluctuation de l'exergie s'écrit :

$$G' = -\frac{V_i \cdot \partial \psi'_A / \partial x_i}{\rho_0} + \left(1 - M^2\right) \frac{p'}{\rho_0}$$

où $M = V/c$ est le nombre de Mach. L'intensité devient :

$$I_i^{DP} = -\frac{\partial \psi'_A}{\partial x_i} \cdot \left(-\frac{V_i \cdot \partial \psi'_A / \partial x_i}{\rho_0} + \left(1 - M^2\right) \frac{p'}{\rho_0}\right) \tag{2.60}$$

2.5 L'approche lagrangienne

En mécanique des fluides, deux grandes approches sont utilisées pour décrire l'état d'une particule. La première de ces approches est la plus intuitive et consiste à suivre une particule dans son mouvement et au cours du temps à partir d'un point et d'un instant de référence. C'est la description lagrangienne. La seconde approche lui est souvent préférée car elle facilite les opérations mathématiques. Elle consiste à s'attacher à un point de l'espace et à observer l'évolution des variables sur ce point. C'est la description eulérienne[j]. Si on considère un écoulement comme une superposition d'un écoulement non perturbé, ou porteur, et d'un écoulement perturbé, chaque description donnera une définition différente du mouvement perturbé.

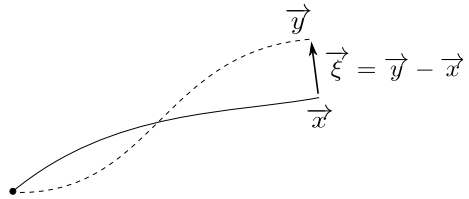


Figure 2.2 – Perturbation lagrangienne et déplacement de Galbrun $\overrightarrow{\xi}$.

On illustre ce problème par la figure 2.2. L'écoulement non perturbé transporte la particule à l'instant t au point $\mathbf{x}$ en suivant la trajectoire en noir. L'écoulement

j. c'est le terme consacré mais à ne pas confondre avec ce que nous avons pris la liberté de désigner comme « l'approche eulérienne » pour faire référence aux équations d'Euler linéarisées.

perturbé amène quant à lui la particule au même instant au point $\mathbf{y}$. On définit alors le déplacement lagrangien au premier ordre

$$\varepsilon\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},t) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$$

où ε est un petit paramètre d'expansion arbitraire. L'équation de Galbrun, publiée en 1931 [60], est une description lagrangienne du déplacement acoustique d'une particule. En restant dans la description eulérienne, il n'est pas possible d'obtenir une relation ne portant que sur une variable scalaire comme ce peut être le cas avec l'équation d'onde. La description lagrangienne permet cette opportunité. Poirée [129] parle de formulation mixte puisqu'il s'agit d'écrire une perturbation lagrangienne dans ses coordonnées eulériennes. Pour Brazier [13], il s'agit de décrire « l'état d'une particule au temps t en fonction non pas de ses coordonnées réelles mais de la position qu'elle aurait au même instant dans l'écoulement porteur ».

Si ϕ est une variable quelconque de l'écoulement perturbé et ϕ_0 la même variable dans l'écoulement porteur, la perturbation eulérienne s'écrit :

$$\varepsilon\phi^E = \phi(\mathbf{x},t) - \phi_0(\mathbf{x},t)$$

La perturbation lagrangienne quant à elle s'écrit :

$$\varepsilon\phi^L = \phi(\mathbf{y},t) - \phi_0(\mathbf{x},t)$$

Pour simplifier, on veut suivre la perturbation lagrangienne en variables d'Euler en utilisant la relation de déplacement :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},t)$$

La finalité de la démarche est la description de l'énergie acoustique qui contient, on l'a vu, des termes quadratiques. On développe toutes les variables à l'ordre deux en suivant l'exemple du déplacement :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = &\quad \mathbf{x} + \varepsilon\boldsymbol{\xi_1}(\mathbf{x},t) + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi_2}(\mathbf{x},t) \\ \rho = &\quad \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2(\mathbf{x},t) \\ p = &\quad p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2(\mathbf{x},t) \end{aligned} \tag{2.61}$$

La vitesse s'obtient en prenant la dérivée temporelle totale de la coordonnée :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

d'où

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi_1}}{\mathrm{d}t} + \varepsilon^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi_2}}{\mathrm{d}t}$$

Les relations entre les dérivées des différentes descriptions sont délicates. Elles se démontrent à l'aide du jacobien de la transformation faisant passer d'un écoulement porteur à l'écoulement perturbé (voir Elias [49] à l'ordre un et Brazier [13] à l'ordre deux). Nous proposons de donner un exemple de l'établissement à l'ordre un de l'équation de Galbrun par une approche indicielle. On donnera le résultat pour l'ordre deux d'après Brazier [13].

L'écoulement perturbé comme l'écoulement porteur satisfont l'équation d'Euler linéarisée pour la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial p}{\partial y_i}=0 \quad \text{et} \quad \rho_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0$$

L'équation de Galbrun a été étendue pour prendre en compte les effets thermiques et visqueux [13]. Pour décrire l'écoulement perturbé d'après les variables de l'écoulement porteur, il faut réécrire en premier lieu l'opérateur différentiel :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_k}=\left(\delta_{ik}+\varepsilon\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_k}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}-\varepsilon\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

en ne gardant que les termes d'ordre un. On applique l'opérateur différentiel de la même manière au vecteur vitesse pour reformuler le divergent ce qui fait apparaître la dérivée particulaire

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_i}=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} \tag{2.62}$$

La densité s'exprime avec son lagrangien

$$\rho(\mathbf{y},t)=\varepsilon\rho^L(\mathbf{x},t)+\rho_0(\mathbf{x},t)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial p}{\partial y_i}=\left(\rho_0+\rho^L\right)\left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}t^2}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(p+p^L\right)$$

Suivant quelques manipulations d'après les transformations évoquées, on écrit l'équation de Galbrun à l'ordre un :

$$\rho_0\frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_0 c^2\frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\frac{\partial p_0}{\partial x_i}-\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial p_0}{\partial x_j}=0 \tag{2.63}$$

avec les perturbations à l'ordre un

$$\begin{aligned}\rho^L(\mathbf{x},t)=&\quad -\rho_0\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\\ p^L(\mathbf{x},t)=&\quad c^2\rho^L(\mathbf{x},t)\end{aligned}$$

On obtient une équation différentielle ne portant que sur une variable vectorielle (le déplacement lagrangien) exprimé uniquement en fonction des conditions de l'écoulement porteur. L'équation (2.63) est consistante avec les références [13, 49]. Poirée [129] donne l'expression à l'ordre deux :

$$\rho_0\frac{\mathrm{d}^2\xi_{2_i}}{\mathrm{d}t^2}+\rho_1^L\frac{\mathrm{d}^2\xi_{1_i}}{\mathrm{d}t^2}+\rho_2^L\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial p_2}{\partial x_i}+\frac{\partial \xi_{1_j}}{\partial x_i}\frac{\partial p_1}{\partial x_j}+\frac{\partial \xi_{2_j}}{\partial x_i}\frac{\partial p_0}{\partial x_j}-\left(\frac{\partial \xi_{2_j}}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial p_0}{\partial x_j}$$

avec les perturbations à l'ordre deux

$$\begin{aligned}
\rho_2^L(\mathbf{x},t) &= \rho_0 \left[-\frac{\partial \xi_{2_i}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_{1_i}}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_{1_k}}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_{1_j}}{\partial x_k} \right] \\
p_2^L(\mathbf{x},t) &= \rho_2 c^2 + \frac{1}{2}\rho_1^2 \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho_0}\right)_s
\end{aligned}$$

L'équation de Galbrun a été l'objet d'une intense activité à la fin des années 1990. On citera notamment Peyret [126] et Elias [49] pour une application numérique par la méthode des éléments finis, Brazier [14] pour une application en conduit et sur une surface vibrante, ainsi qu'en limite géométrique. Pour une synthèse (avec emploi du jacobien), une application numérique et une comparaison critique entre les formulations de Cantrell et Hart [26] et Elias, voir Brazier [15]. Pour une extension dans le domaine non linéaire, voir Minotti *et al.* [106].

À ce stade, on connaît deux manières pour exprimer l'énergie acoustique. Brazier [13] introduit une perturbation lagrangienne de la densité et du flux d'énergie qu'on reproduit ici. Elias quant à lui a recours à la théorie hamiltonienne [114] pour l'expression de la densité lagrangienne de l'énergie. Nous avons vu que l'énergie acoustique est la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle. On cherche dans un premier temps à étudier la perturbation lagrangienne de l'énergie interne. Par unité de volume, celle–ci est fonction de la densité et de l'entropie $E_I = \rho e_I = \alpha(\rho,s)$. Dans le cas isentropique [81], la densité est de la forme donnée en (2.61). En effectuant un développement de Taylor à l'ordre deux de l'énergie interne :

$$E_I = \alpha(\rho_0,s_0) + \varepsilon\rho_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}\right)_s + \varepsilon^2\rho_2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}\right)_s + \frac{\varepsilon^2\rho_1^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \rho^2}\right)_s$$

D'après les relations thermodynamiques

$$\mathrm{d}(\rho e_I) = \left(e_I + \frac{p}{\rho}\right)\mathrm{p} + \rho T \mathrm{d}s$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}\right)_s &= e_I + \frac{p}{\rho} = h \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}h = \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + T\mathrm{d}s \\
\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \rho^2}\right)_s &= \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c^2}{\rho}
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire l'énergie interne à l'ordre deux.

$$E_I = \rho_0 e_{I_0} + \varepsilon\rho_1 h_0 + \varepsilon^2 \left(\rho_2 h_0 + \frac{\rho_1^2 c^2}{2\rho_0}\right)$$

L'expression pour l'énergie cinétique est obtenue depuis sa définition $E_c = \rho v^2/2$ et d'après (2.61) :

$$E_c = \frac{1}{2}\rho_0 u^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\rho_1 u^2 + \rho_0 u_i \cdot \frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}\right) + \varepsilon^2\left[\frac{1}{2}\rho_2 u^2 + \rho_1 u_i \cdot \frac{\mathrm{d}\xi_{1_i}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \rho_0 u_i \cdot \frac{\mathrm{d}\xi_{2_i}}{\mathrm{d}t}\right]$$

Par sommation de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 \\
E_0 &= \rho_0 e_{i_0} + \frac{1}{2}\rho_0 u^2 \\
E_1 &= -(E_0 + p_0)\frac{\partial \xi_{1_i}}{\partial x_i} + \rho_0 u_i \cdot \frac{\mathrm{d}\xi_{1_i}}{\mathrm{d}t} \\
E_2 &= \rho_2 h_0 + \frac{p_1^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{1}{2}\rho_2 u^2 + \rho_1 u_i \cdot \frac{\mathrm{d}\xi_{1_i}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \rho_0 u_i \cdot \frac{\mathrm{d}\xi_{2_i}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

L'expression obtenue par Elias [49] (à l'ordre un) est légèrement différente :

$$E^E = \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\xi_{1_i}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2\rho_0 c^2}\left[p_1^2 - \left(\xi_{1_i} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x_i}\right)^2\right] - \rho_0 \frac{\mathrm{d}\xi_{1_i}}{\mathrm{d}t} \cdot \left[\left(V_{0i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\xi_{1_i}\right]_i$$

La formulation d'Élias satisfait la conservation de l'énergie acoustique, ce qui n'est pas le cas de toutes les formulations précédentes comme Cantrell et Hart à cause de l'insertion non justifiée pour Elias du terme source dans l'équation (2.28), qui ne doit sa présence qu'à équilibrer l'hypothèse de fluide parfait qui elle, aurait pu introduire la dissipation naturellement.

Lorsque Brazier étudie numériquement la comparaison des formulations énergétiques de Brazier [13], Cantrell et Hart [26] et Elias [49], il dresse une conclusion enrichissante : l'équation venant de Elias représente réellement la part acoustique de l'énergie que toute onde transporte. Cette énergie acoustique pourrait bien constituer l'outil ultime pour séparer les composants acoustique et non acoustique des perturbations d'un écoulement quelconque. Cette analyse nous renvoie directement aux théories de décomposition potentielle notamment portées par Doak [41, 44], Jenvey [74], Morfey [112] dont on a évoqué la complexité.

2.6 Synthèse

Ce chapitre a passé en revue les différents moyens d'aborder le concept d'énergie acoustique et de l'isoler de l'énergie hydrodynamique dont elle est issue (si on reste dans le cadre fixé par ce mémoire). Nous avons pu voir qu'une définition usuelle est généralement retenue mais elle pose un probleme de consistance dans les ordres de grandeurs et n'identifie pas de mécanisme source. D'un point de vue général, nous avons distingué trois approches principales :

i) l'approche eulérienne ; elle consiste à écrire les *EEL* jusqu'à obtenir une loi de conservation mais le prix à payer est la perte des informations d'ordre deux.

Cette approche néglige les phénomènes de dissipation et de génération. C'est une description de la propagation. Elle est reconnue comme étant issue de Blokhintsev [8].

ii) l'approche dissipative ; elle est la plus dense et la plus complète. Elle est initiée par Cantrell et Hart [26] qui développent à l'ordre deux la loi de conservation de l'énergie des équations de Navier–Stokes. Une autre initiative portée par Morfey [112] et Doak [41], décompose un vecteur (de vitesse ou de quantité de mouvement) en somme de son potentiel scalaire et de son potentiel vecteur. Et finalement une autre tendance dans cette approche fait intervenir le vecteur de vorticité pour mettre en évidence le rôle clé de ce dernier. Quels que soient les moyens utilisés, cette approche permet l'écriture d'un bilan entre la génération de l'énergie acoustique, son transport et sa dissipation. Cette approche aboutit aux théories les plus complètes comme celle de Doak [45], Jenvey [74] et Myers [120].

iii) l'approche lagrangienne ; elle s'appuie sur une perturbation lagrangienne des équations de Galbrun et permet de décrire la propagation acoustique d'après le déplacement particulaire lors du passage de l'onde acoustique. Le principal avantage est de fournir une équation ne portant plus que sur une seule variable vectorielle. Si l'équation de Galbrun date des années 1930, son adaptation à l'énergie acoustique est plus récente mais encore peu répandue.

D'un point de vue historique, la définition usuelle est conservée jusqu'à ce que Cantrell et Hart établissent leur loi de conservation. Elle est restée — et reste encore *a priori* — la plus célèbre et vraisemblablement la plus utilisée. On peut dire que la grande majorité des études subséquentes reconnaissent la formulation de Cantrell et Hart. La plupart citent le travail de Morfey [112], saluant au passage sa revue bibliographique et son état de l'art. Les travaux de Möhring [109] sont également beaucoup cités mais peu appliqués. Force est de constater qu'un certain nombre d'auteurs élude la question et hésite à plonger dans la littérature de l'énergie acoustique. Il en résulte une certaine diversité, pour ne pas dire hétérogénéité. Actuellement, il semble que Myers [120] ait fourni la formulation la plus complète et la plus générale mais son application reste délicate.

Il émerge de la littérature l'importance des forces de Coriolis (*via* les fluctuations de vorticité) comme vecteur de transmission de l'énergie entre le champ fluctuant aérodynamique et la propagation acoustique. Cette prépondérance de la vorticité fluctuante a été pressentie par Chu et Kovásznay [35], mise en lumière par Powell [130], établie par Howe [68] et retrouvée par Doak [44, 45], Jenvey [74], Morfey [112]. Ces dernières études font plutôt ressortir le produit croisé de la quantité de mouvement et de la vorticité dans une expression générale de la puissance acoustique exprimée par le terme :

$$\rho v_i \left[\boldsymbol{\omega'} \wedge (\rho \boldsymbol{v})'\right]_i$$

selon les notations de ce chapitre.

L'enthalpie d'arrêt a quant à elle été pointée du doigt pour caractériser le transport acoustique [45]. Récemment, on semble lui préférer l'exergie [140].

Si on veut finalement résumer tout ce travail, on dira que l'on passe des équations d'Euler linéarisée en absence d'écoulement et au premier ordre jusqu'aux équations complètes de Myers [120] et Doak [45] avec les fluctuations de l'enthalpie d'arrêt et de

la vorticité, prenant en compte la gravité, les forces extérieures et les non–linéarités. L'idée n'est alors plus d'établir à tout prix une équation de conservation de l'énergie ni même de la compenser par l'ajout d'un terme source arbitraire, mais d'établir l'expression pour le flux d'énergie en fonction de toutes les sources hydrodynamiques possibles au sens le plus général.

Pour essayer de synthétiser encore la littérature sur le sujet, nous présentons au tableau 2.2 les principales définitions de l'énergie acoustique et de l'intensité que l'on peut comparer à la définition usuelle. Un graphique général est présenté à la figure 2.4 et permet de se représenter dans le temps les courants de pensée et les trois approches que l'on a identifiées.

Pour résumer la situation, nous pouvons reprendre le schéma de la problématique de la thèse qui a été présenté en avant–propos (figure 2). Le lien entre l'énergie aérodynamique et l'énergie acoustique rayonnée a été revu en détail. Ainsi, c'est la voie du haut sur le schéma de la problématique qui a été l'objet de ce chapitre (figure 2.3). Les chapitres suivants vont étudier la voie inférieure. Plus particulièrement, le chapitre 3 va présenter les moyens de calculer le champ acoustique à partir d'une sollicitation surfacique (dans le bloc inférieur de droite).

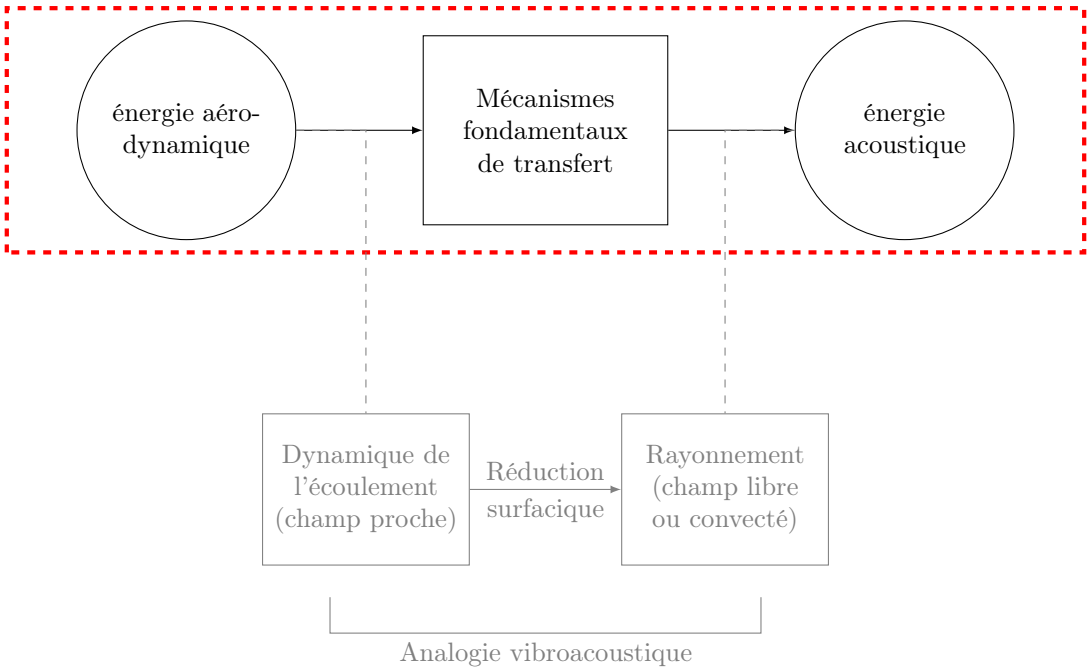


Figure 2.3 – Positionnement du chapitre 2 dans la problématique de la thèse.

Auteurs	**Densité d'énergie**	**Intensité**
Blokhintsev [8]	$e = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_0 c^2}$	$I_i = p' v'_i$
Markham [105]	$e = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0}\rho' + \frac{p'^2}{2\rho_0 c^2}$	
Schoch [136]	$e = \rho\left(\frac{v'^2}{2} - \int_{1/\rho_0}^{1/\rho} p' \mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$	$I_i = p' v'_i$
Cantrell et Hart [26]	$e = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_0 c^2}$ $+\frac{p' v'_i \cdot V_i}{c^2}$	$I_i = p' v'_i + \frac{V_i}{\rho_0 c^2} p'^2$ $+\frac{p'}{c^2}\left(V_i \cdot v'_i\right) V_i + \rho_0 \left(V_i \cdot v'_i\right) v'_i$
Chu [34]	$e = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c^2 p'^2}{2\gamma\rho_0}$	
Morfey [112]	$e = \frac{\rho u_j^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho c^2} + \frac{v_j}{c^2} p' u_j$	$I_i = p' u_i + \frac{v_i}{\rho c^2} p'^2$ $+\frac{p'}{c^2} v_i v_j u_j + \rho v_j u_i u_j$
Pierce [128]	$e = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho c^2}$	$I_i = p' v'_i$
Myers [119]	$e = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_0 c^2} + \rho' V_i \cdot v'_i$	$I_i = \left(c^2 \rho' + \rho_0 V_i \cdot v'_i\right)$ $\times \left(v'_i + \frac{\rho'}{\rho_0} V_i\right)$
Brentner [19]	$e = \rho\left(h' + \frac{v^2}{2} - T_0 s'\right) - p'$	$I_i = \rho\left(h' + \frac{v^2}{2} - T_0 s'\right) \cdot v_i$
Elias [49]	$e = \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta_i}{\mathrm{d}t}\right)^2$ $+\frac{1}{2\rho_0 c^2}\left[p'^2 - \left(\zeta_i \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x_i}\right)^2\right]$ $-\rho_0 \frac{\mathrm{d}\zeta_i}{\mathrm{d}t} \cdot \left[\left(V_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\zeta_i\right]_i$	$I_i = p' \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}$ $+\rho_0 \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} \cdot \frac{\mathrm{d}\zeta_i}{\mathrm{d}t}\right)_i V_i$

Table 2.2 – Synthèse des principales définitions de l'énergie et de l'intensité acoustiques vues dans ce chapitre.

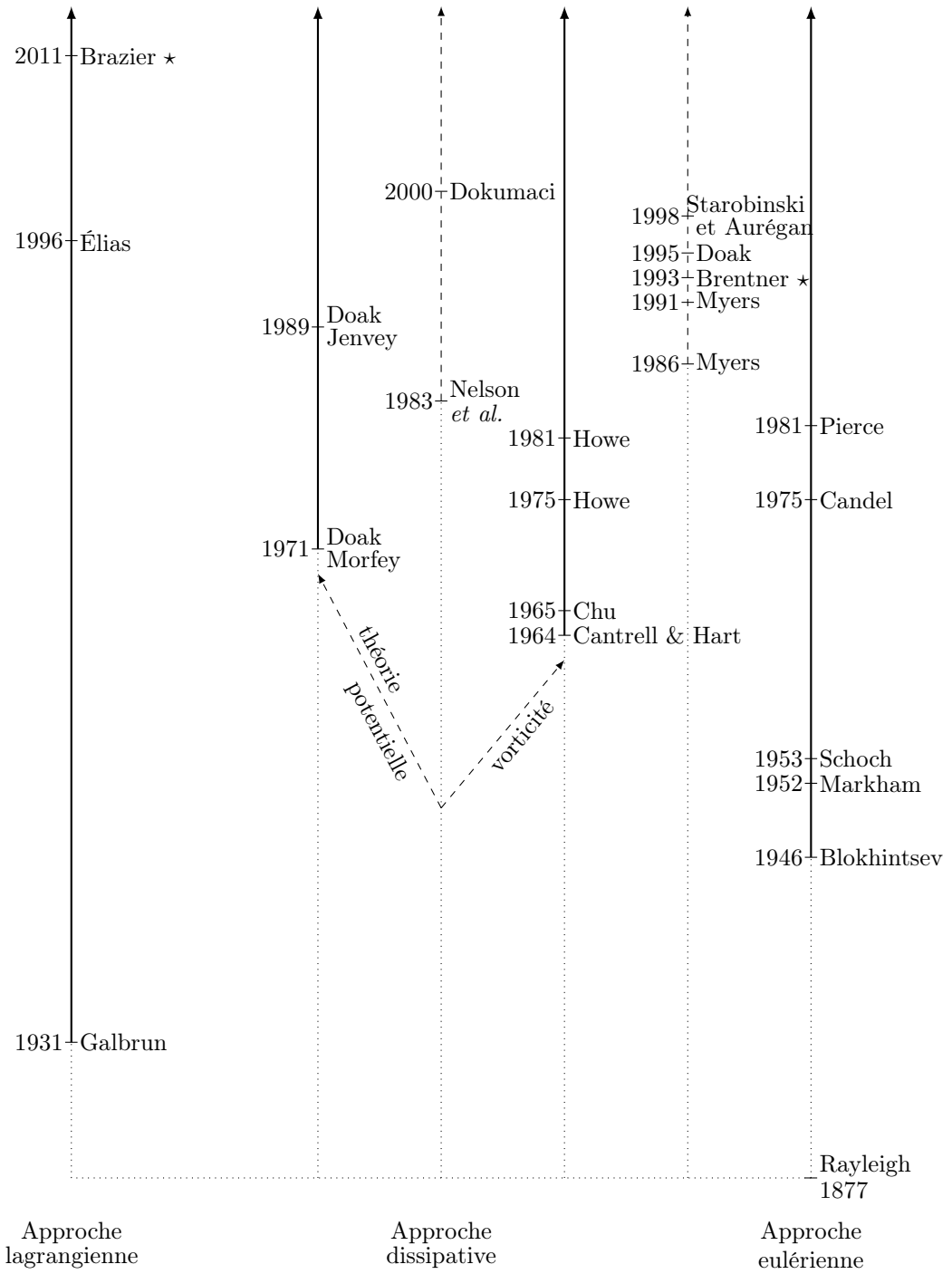


Figure 2.4 – Histoire de l'énergie acoustique. Les lignes intermédiaires en pointillés désignent les approches hybrides, combinaisons des deux approches adjacentes. Les noms d'auteur marqués d'un « ⋆ » désignent les études ayant eu recours à l'outil numérique.

Chapitre 3

Formalismes d'excitation surfacique

"Now be Silent.
Let the One who creates words speak.
He made the door, He made the lock, and He also made the key."
RUMI

Sommaire

3.1 Discussion de l'approche de Lighthill **76**
3.2 Les méthodes d'extrapolation **77**
3.2.1 Le formalisme de Ffowcs Williams et Hawkings 78
3.2.2 Le formalisme de Kirchhoff 81
3.3 Distributions sur une surface plane **82**
3.3.1 Surface en sollicitation de pression 83
3.3.2 Surface en sollicitation de vitesse 84
3.3.3 Formulation de Farassat et Myers 86
3.4 Applications du formalisme de Farassat et Myers **90**
3.4.1 La sphère pulsante 90
3.4.2 Extrapolation d'une onde acoustique sphérique 92
3.4.3 Le piston vibrant 93
3.4.4 Remarque sur l'évaluation aux temps retardés 94
3.5 Synthèse **96**

Nous proposons de consacrer ce chapitre au contexte et à l'établissement des différents formalismes utilisés dans ce mémoire. Nous évoquons très brièvement en début de chapitre l'analogie de Lighthill pour fournir une première discussion sur le concept d'analogie. Nous verrons que l'analogie est une équation d'onde dont toutes les quantités issues des équations de la mécanique des fluides sont regroupées dans un terme source. Ce terme source contient toutes les informations aérodynamiques dans un volume que nous appelons le volume source. Nous présentons ensuite une extension de ce concept vers la prise en compte d'une information sur les surfaces fermant le volume source. L'information aérodynamique est alors connue dans le volume source ainsi que sur la surface et c'est à partir de ces frontières que l'information

est extrapolée pour reconstruire le champ acoustique. Mais à ce niveau, l'information doit être acoustique pour pouvoir être extrapolée. C'est ce qui constitue les méthodes d'extrapolation comme la méthode de Kirchhoff ou de Ffowcs Williams et Hawkings. Les formalismes d'excitation surfacique sont un nouveau degré d'extension du formalisme précédent lorsque l'information aérodynamique n'est plus connue que sur les surfaces du domaine. Dans l'un de ces formalismes, connu par les vibroacousticiens comme l'intégrale de Rayleigh, le gradient de pression sur la surface est la quantité extrapolée et il peut être relié à la vitesse de vibration par les équations d'Euler linéarisées. Une généralisation de la méthode de Kirchhoff a été développée par Farassat et Myers [52] et nous verrons qu'elle se place également dans la catégorie des formalismes d'excitation surfacique. Sa particularité est d'être la formulation la plus générale portée à notre connaissance, car la surface d'excitation peut être en mouvement arbitraire et se déformer sans restriction. Nous verrons qu'il s'agit d'une méthode bien adaptée aux cas d'excitations sphériques mais que sa mise eu œuvre est délicate. Ce dernier formalisme est appliqué et plusieurs cas académiques sont présentés.

3.1 Discussion de l'approche de Lighthill

Le concept d'analogie est issu de la théorie du bruit d'origine aérodynamique élaborée par Lighthill [90] et marque la naissance de l'aéroacoustique en tant que nouvelle discipline. Le bruit d'origine aérodynamique fait donc appel à des notions venues d'une part de l'acoustique, et d'autre part, de la mécanique des fluides. L'approche de Lighthill est de faire l'analogie entre un domaine où dominent les lois de l'aérodynamique (la région turbulente) où le son est généré de manière non–linéaire par la turbulence et un autre domaine où l'acoustique est propagée linéairement (la région acoustique). Formellement, on écrit les équations de la dynamique des fluides pour les deux domaines et on les combine sous la forme d'une équation d'onde.

Dans la région turbulente, on écrit la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un écoulement compressible. Dans la région acoustique, ces équations prennent une condition aux limites qui va imposer que le fluide soit au repos très loin de la source. C'est alors en combinant les équations de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement qu'on peut former une équation d'onde sur la pression fluctuante :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.1}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (valant l'unité lorsque $i = j$ et nul sinon). T_{ij} est le tenseur de Lighthill

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + \left(p' - c^2\rho'\right)\delta_{ij} - \tau_{ij}$$

D'après l'équation (3.1), tous les termes du tenseur de Lighthill sont regroupés sous la forme d'un terme source qui est exprimé dans l'équation d'onde par une dérivée spatiale d'ordre deux. C'est cette double dérivée du terme source qui entraîne le caractère quadripolaire de la turbulence. Différentes formulations de la solution à l'équation (3.1) existent selon le choix de la fonction de Green et de la convention adoptée. Elles sont pour la plupart exposées avec beaucoup de clarté dans la thèse

de Gloerfelt [61]. On peut présenter à titre d'exemple l'une de ces solutions, obtenue par convolution avec la fonction de Green temporelle en espace libre tridimensionnel [3, 61]. On montre alors que la pression acoustique dans le domaine observateur s'écrit :

$$p'(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\iiint_{V(\mathbf{y})}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}\left(\mathbf{y},t-\frac{r}{c}\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\tau \tag{3.2}$$

L'équation (3.2) exprime la pression acoustique $p'(\mathbf{x},t)$ par rapport à la dérivée seconde du tenseur de Lighthill T_{ij}. Le bruit d'origine aérodynamique est donc un terme quadripolaire dominé par le produit des fluctuations, et notamment par le tenseur de Reynolds $\rho u_i u_j$, cédé par la turbulence. Elle a bien été obtenue en réarrangeant les équations de la dynamique des fluides sous la forme d'une équation d'onde. Et c'est ce concept qui constitue l'analogie acoustique. Toutes ces quantités issues de l'aérodynamique sont incluses dans un volume source. Le calcul du champ acoustique à partir d'une analogie de ce type repose sur la connaissance que l'on a de ces quantités dans tout un volume de contrôle. Le tenseur de Lighthill peut se modéliser analytiquement [30, 123] ou bien être calculé numériquement si l'on dispose d'une base de données [103]. Mais la base de données doit être fine et la modélisation pertinente. L'analogie de Lighthill nous dit que toutes les sources de bruit doivent être incluses dans le volume. Mais on peut être à la recherche d'un moyen pour réduire le « volume nécessaire » au strict minimum, c'est–à–dire à une surface qui, à elle seule, porterait toute l'information acoustique. Avant d'en arriver là, nous allons présenter d'autres formalismes dans lesquels la modélisation du terme source est secondaire. Une démonstration plus détaillée est présentée car leur résultat sera retrouvé dans les chapitres 4 et 5. Ils font apparaître non seulement une contribution volumique mais également une contribution surfacique. Ce sont les méthodes d'extrapolation et nous allons nous y intéresser pour cette raison.

3.2 Les méthodes d'extrapolation

Ces formalismes sont établis à partir d'une approche originale. Dans l'analogie de Lighthill, la présence du volume source est en quelque sorte déduite de la convolution et de la fonction de Green. Mais on peut décider d'imposer la présence d'un espace distinct bien plus tôt. Le cas échéant on fait appel aux fonctions généralisées et à la théorie des distributions [3]. Cet outil mathématique permet de traiter le cas d'une fonction non continue, existant dans une partie de l'espace mais nulle en dehors. Mais tout dépend du moment auquel on y fait appel. De nombreuses formulations sont possibles et le lecteur les trouvera là encore pour la plupart dans la thèse de Gloerfelt [61]. Nous présentons dans cette section les deux formalismes principaux. Le premier a été proposé par Ffowcs Williams et Hawkings [55] en 1969 et est assez similaire à l'approche utilisée par Lighthill car les fonctions généralisées interviennent lors de la réécriture des équations de la dynamique des fluides. Le second est une méthode d'extrapolation dans le formalisme de Kirchhoff et les fonctions généralisées sont appliquées à l'équation d'onde dont le terme source est quelconque. Mais par l'une ou l'autre de ces deux formulations, les fonctions généralisées permettent de décrire la topologie du volume source et d'en identifier les limites. C'est l'utilisation de cet outil mathématique qui fait apparaître les termes surfaciques.

3.2.1 Le formalisme de Ffowcs Williams et Hawkings

La démarche de Ffowcs Williams et Hawkings (FW–H) originellement publiée en 1969 [55] est une analogie et suit donc la voie ouverte par Lighthill. C'est une réécriture des équations de la mécanique des fluides pour former une équation d'onde. Mais l'analogie de FW–H est une extension de l'analogie de Lighthill par la prise en compte d'une surface, matérielle ou non, *via* l'utilisation des fonctions généralisées. La surface peut être animée d'un mouvement uniforme par exemple en considérant que c'est le milieu observateur qui est animé de ce mouvement et que l'on se place dans le repère de la surface [a]. La prise en compte d'un milieu en mouvement uniforme nécessite des transformations en amont. Gloerfelt [61] indique plusieurs moyens d'y parvenir. Une réécriture des équations de la mécanique des fluides en description lagrangienne est ici employée dans le but d'écrire une équation d'onde convectée. Comme nous le verrons au paragraphe suivant, la formulation de Kirchhoff ne pose *a priori* pas d'hypothèse sur la nature de la source et ne nécessite donc pas de réécrire les équations de conservation. En revanche, l'objet de la formulation de FW–H est justement de déduire de la réécriture des équations, la nature et la répartition de la source acoustique en termes aérodynamiques. Afin de préserver la simplicité de la lecture, la démonstration complète n'est pas reprise ici mais cette information est très bien exposée dans les références [61, 64]. Il faut écrire les lois de conservation en coordonnées lagrangiennes pour un écoulement compressible et y intégrer le discours sur les fonctions généralisées. Pour prendre en compte la présence de surfaces matérielles ou non et formellement séparer le domaine source et le domaine observateur, on définit alors une fonction f qui s'annule sur la surface Σ qui borne le volume de contrôle, est positive à l'intérieur et négative à l'extérieur. Les notations sont reprises sur la figure 3.1. On définit la fonction de Heaviside dont l'argument est la fonction f telle que

$$H(f) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad f < 0 \\ \\ 1 \quad \text{pour} \quad f \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

L'opérateur généralisé est appliqué aux lois de conservation linéarisées :

$$\begin{aligned} H(f) \times \frac{D\rho'}{Dt} &= -H(f) \times \frac{\partial \rho \tilde{u}_i}{\partial x_i} \\ H(f) \times \frac{D\rho\tilde{u}_i}{Dt} + H(f) \times c^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} &= -H(f) \times \frac{\partial \tilde{T}_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec la dérivée particulaire $D/Dt = \partial/\partial t + U_i \partial/\partial x_i$. La vitesse $\tilde{u}_i$ est relative et prise dans le repère de la surface. $\tilde{T}_{ij}$ est le tenseur de Lighthill exprimé par rapport aux vitesses $\tilde{u}_i$. On fait apparaître la fonction Heaviside dans les dérivées après quelques manipulations. À ce stade, les équations vont faire intervenir le gradient de la fonction Heaviside. Comme elle est définie sur la surface pour l'argument f,

a. nous adresserons le cas d'une surface en mouvement arbitraire en présentant la formulation de Farassat et Myers [52].

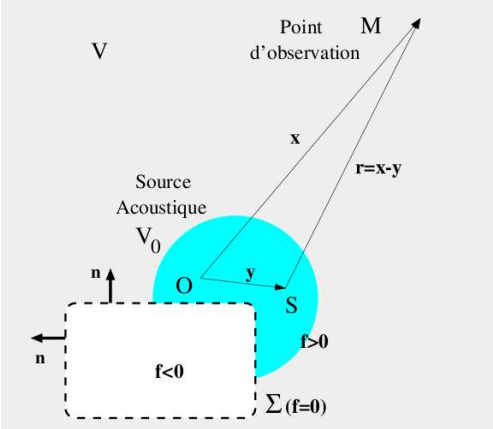


Figure 3.1 – Représentation des domaines sources et observateurs dans le formalisme de Ffowcs Williams et Hawkings. Le volume V_0 est le volume source et il peut être extérieur à la surface de contrôle Σ. Reproduit d'après Gloerfelt [61].

on note que $\partial H(f)/\partial x_j = \delta(f)\partial f/\partial x_j$. Physiquement, la fonction de Dirac associée à la surface $\delta(f)$ peut être vue comme un commutateur s'annulant dans la surface et prenant la valeur unité dans le domaine de propagation. Le gradient $\partial f/\partial x_j$ caractérise quant à lui le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de la surface.

Il faut ensuite combiner les lois de conservation pour obtenir une équation d'onde en prenant la dérivée particulaire de la loi de conservation de la masse à laquelle on soustrait le divergent de la loi de conservation de la quantité de mouvement. Après quelques manipulations [64], on obtient l'équation d'onde regroupée par termes :

$$\frac{D^2\rho' H(f)}{Dt^2} - c^2\frac{\partial^2\rho' H(f)}{\partial x_i^2} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\tilde{T}_{ij}H(f)\right]}_{\text{quadripole}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\tilde{F}_i\delta(f)\right]}_{\text{dipole}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left[\tilde{Q}\delta(f)\right]}_{\text{monopole}} \quad (3.5)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{T}_{ij} &= \rho\left(u_i - U_i\right)\left(u_j - U_j\right) + \left(p - c^2\rho'\right)\delta_{ij} - \tau_{ij} \\ \tilde{F}_i &= -\left[\rho\left(u_i - 2U_i\right)u_j + p\delta_{ij} - \tau_{ij}\right]\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \\ \tilde{Q} &= \left[\rho u_i\right]\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \end{cases}$$

Les constantes ne produisent aucun son [64]. La formulation fréquentielle permet de s'affranchir de la dépendance temporelle c'est–à–dire de rechercher le temps d'émission τ à l'origine du son perçu à l'instant t par l'observateur. Ce type de problématique se retrouvera néanmoins dans la formulation de Farassat et Myers [52] présentée plus loin, nous aurons l'occasion d'y revenir. L'opérateur de transformée de Fourier temporelle est une application linéaire du domaine temporel dans le domaine fréquentiel $t \to \omega$. C'est le cœur de l'analyse spectrale. Le théorème de Fourier stipule que toute fonction $\hat{f}\left(\mathbf{x},t\right)$ peut être représentée comme l'intégrale des contributions de ces éléments harmoniques

$$\hat{f}\left(\mathbf{x},t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\mathbf{x},\omega\right) e^{+i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

et que l'intensité de chacun de ces éléments harmoniques est la somme dans le temps de tous les éléments à la fréquence ω

$$f\left(\mathbf{x},\omega\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\mathbf{x},t\right) e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

selon les conventions adoptées dans ce mémoire [b]. En appliquant à l'équation de FW–H (3.5) la définition de la transformée de Fourier, on obtient une équation inhomogène de Helmholtz en régime convecté [64] :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k_a^2 - 2ik_aM_\infty\frac{\partial}{\partial x_j} - M_\infty^2\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) H(f)p'(\mathbf{x},\omega)\\ = -\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[\tilde{T}_{ij}(\mathbf{x},\omega)H(f)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\tilde{F}_i(\mathbf{x},\omega)\delta(f)\right] - i\omega\left[\tilde{Q}(\mathbf{x},\omega)\delta(f)\right]\end{aligned}$$

où apparaît dans le membre de gauche le nombre de Mach $M_\infty = U_\infty/c$ et le nombre imaginaire unité $i^2 = -1$. On résout la pression acoustique par convolution avec la fonction de Green convectée G_c [67, 95] :

$$\begin{aligned}H(f)p'(\mathbf{x},\omega) = &-\iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y},\omega)\frac{\partial^2 G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)}{\partial y_i\partial y_j}H(f)\mathrm{d}\mathbf{y}\\ &+\iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_i(\mathbf{y},\omega)\frac{\partial G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)}{\partial y_i}\delta(f)\mathrm{d}\mathbf{y}\\ &-\iiint_{-\infty}^{+\infty} i\omega\tilde{Q}(\mathbf{x},\omega)G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)\delta(f)\mathrm{d}\mathbf{y}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété auto–adjointe de la fonction de Green pour supprimer dans les dérivées la référence aux coordonnées de l'observateur [64]. La fonction de Dirac $\delta(t-t_0)$ représente l'impulsion d'amplitude infinie à l'instant t_0 telle que $\delta(t-t_0) = 0$ pour $t \neq t_0$ et $\delta(t-t_0) = +\infty$ lorsque $t = t_0$ [3]. L'ensemble des contributions de cette fonction est donc l'unité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1$$

Ce qui signifie que le spectre de cette fonction dans le domaine fréquentiel est une fonction constante d'amplitude unité. Dès lors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

et ce, quelle que soit la fonction $f(t)$, par définition de la fonction de Dirac. Ainsi, il vient :

b. d'autres conventions sont cependant utilisés au chapitre 4.

$$
\begin{aligned}
H(f)p'(\mathbf{x},\omega) = &- \iiint_{f>0} \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y},\omega)\frac{\partial^2 G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)}{\partial y_i \partial y_j}\mathrm{d}\mathbf{y} \\
&+ \iint_{f=0} \tilde{F}_i(\mathbf{y},\omega)\frac{\partial G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)}{\partial y_i}\mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \\
&- \iint_{f=0} i\omega\tilde{Q}(\mathbf{x},\omega)G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

C'est la formulation spectrale convectée de l'analogie de Ffowcs Williams et Hawkings. Au vu de l'équation (3.6), le champ acoustique est reconstruit dans le formalisme de Ffowcs Williams et Hawkings à partir de l'intégration volumique d'un terme source quadripolaire qui est le tenseur de Lighthill ainsi que de l'intégration d'un terme dipolaire et d'un terme monopolaire sur les frontières du volume de contrôle. Comme on le voit à la figure 3.1, le volume source et le volume de contrôle peuvent être dissociés. C'est toute la force du formalisme de Ffowcs Williams et Hawkings. Le cas échéant, le terme source (volumique) est non nul. Le terme dipolaire porte de nombreuses informations dynamiques *via* les produits des fluctuations de vitesses ou le tenseur des contraintes visqueuses. Le terme monopolaire représente un débit massique. Le formalisme de Kirchhoff est maintenant détaillé au paragraphe suivant. Son établissement repose sur l'utilisation des fonctions généralisées comme le formalisme de FW–H, néanmoins, aucune hypothèse n'est faite sur la nature du terme source[c] et aucune réécriture des lois de conservation n'est nécessaire.

3.2.2 Le formalisme de Kirchhoff

Gloerfelt [61] note au moins deux manières d'obtenir la formulation spectrale convectée de Kirchhoff : soit on se place dans le repère de l'écoulement ce qui revient à considérer que la surface est en translation, soit on considère la surface comme immobile et c'est le fluide qui est en translation, auquel cas il faut utiliser une équation d'onde convectée. La première méthode utilise le changement de repère introduit par Ffowcs Williams et Hawkings [55], la seconde est employée par Morino [113]. C'est la seconde méthode qui est évoquée ici. Puisque le théorème de Kirchhoff, contrairement à la formulation de Ffowcs Williams et Hawkings, ne pose pas d'hypothèse sur la nature de la source acoustique, on peut partir directement d'une équation inhomogène de Helmholtz en régime convecté dont l'établissement a été présenté au paragraphe précédent. C'est à partir de cette équation qu'on applique la fonction généralisée. Pour une variable scalaire ϕ et une source Q quelconques :

$$
H(f)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} + k_a^2 H(f)\phi - 2ik_a M_\infty H(f)\frac{\partial\phi}{\partial x_j} - M_\infty^2 H(f)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2} = H(f)Q \tag{3.7}
$$

où $M_\infty = U_\infty/c$ est le nombre de Mach de la translation et f la fonction définie comme précédemment (figure 3.1). Il faut là encore réécrire les opérateurs de dérivée de manière à incorporer la fonction de Heaviside. Après quelques manipulations [64], on obtient l'équation inhomogène de Helmholtz convectée pour la variable généralisée $H(f)\phi$:

c. mais celui–ci doit par conséquent être emprunté à une théorie du bruit d'origine aérodynamique, par exemple celle de Lighthill.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[H(f)\phi\right] + k_a^2 H(f)\phi - 2ik_a M_\infty \frac{\partial}{\partial x_j}\left[H(f)\phi\right] - M_\infty^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left[H(f)\phi\right]$$
$$= H(f)Q + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi \frac{\partial H(f)}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial H(f)}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - 2ik_a M_\infty \phi \frac{\partial H(f)}{\partial x_j}$$
$$- M_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi \frac{\partial H(f)}{\partial x_j}\right) - M_\infty^2 \frac{\partial H(f)}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

La résolution de cette équation s'effectue par convolution avec la fonction de Green convectée [64] :

$$H(f)\phi\left(\mathbf{x},\omega\right) = \iiint_{V(\mathbf{y})} QG_c \mathrm{d}\mathbf{y} - 2ik_a M_\infty \iint_\Sigma \phi G_c n_j \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y})$$
$$+ \iint_\Sigma \left\{ G_c \frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \phi \frac{\partial G_c}{\partial y_i} \right\} \left(n_i - M_\infty^2 n_j\right) \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{3.8}$$

Ce résultat nous montre que le champ acoustique est reconstruit à partir d'une intégration du terme source sur un volume d'une part, et d'une intégration des quantités aérodynamiques sur les frontières d'un volume de contrôle. La quantité aérodynamique est le scalaire résolu dans l'équation d'onde et s'exprime dans l'intégrale surfacique par une excitation de type Dirichlet (ϕ) et une excitation de type Neumann ($\partial\phi/\partial y_i$). En l'absence d'un terme source, la première intégrale n'apporte aucune contribution et le problème se résume seulement à l'intégrale surfacique. Dans ce cas, l'acoustique est contenue dans la quantité à extrapoler sur les frontières du volume. Mais le positionnement de la surface d'extrapolation est déterminant pour la juste prédiction du rayonnement acoustique [103]. On peut poursuivre la réflexion sur les formalismes d'excitation et rechercher l'expression d'autres quantités aux frontières du volume source. Nous voyons qu'une plus grande généralité est permise par rapport à la formulation de FW–H. D'une part avec le caractère quelconque du terme source et d'autre part avec le champ acoustique qui ne dépend plus que d'une quantité (mais aussi de sa dérivée normale). Cette quantité est cependant toujours dynamique. Dans le cas d'une surface plane, deux formulations peuvent s'écrire à partir de la formulation de Kirchhoff (3.8) : l'intégrale de Kirchhoff ou l'intégrale de Rayleigh. Selon la condition de perméabilité (au sens de la vitesse) de la surface Σ, on peut constuire une fonction de Green appropriée qui annule l'un des deux termes. Ce cas fait l'objet de la section suivante.

3.3 Distributions sur une surface plane

La méthode de Kirchhoff ne pose aucune hypothèse sur la nature (et la présence) du terme source. Dans le cas où toutes les sources sont contenues dans le volume de contrôle, le terme source est nul. Il ne reste alors que des quantités surfaciques à extrapoler, ce qui fait apparaître l'importance de la surface d'extrapolation. Pour Margnat et Gloerfelt [103], sa position est déterminante pour reconstruire correctement le champ acoustique. Mais sa nature l'est aussi. Elle peut apporter elle–même l'excitation acoustique par son mouvement ou les quantités qui y sont associées. Nous

allons dans cette section distinguer deux types d'excitations surfaciques, basées sur le formalisme de Kirchhoff. L'une considère une surface plane infinie et peut être écrite sous deux formes, selon le type de surface et sa perméabilité au sens de la vitesse qu'impose sa condition limite. On distingue ainsi le cas d'une sollicitation en pression et en vitesse. L'autre, due à Farassat et Myers [52], est plus générale et est spécifiquement construite pour retranscrire la cinématique de la surface. Plusieurs applications de cette dernière sur des cas académiques sont discutés en fin de chapitre. Ces méthodes seront notamment exploitées aux chapitres 4 et 5.

3.3.1 Surface en sollicitation de pression : l'intégrale de Kirchhoff

Reprenons l'équation intégrale de Kirchhoff (3.8) présentée à la section précédente. Dans le cas d'une surface infiniment plane et en l'absence de termes sources, les contributions du vecteur normal dans la direction longitudinale n_j s'annulent. La différence avec une formulation de Kirchhoff en milieu au repos ne tient alors plus qu'à la fonction de Green utilisée. Sans perte de généralités, on peut donc prendre comme référence l'intégrale de Kirchhoff sous la forme :

$$\phi(\mathbf{x},\omega) = \iint_{\Sigma} \left\{ G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)\nabla\phi(\mathbf{y},\omega) - \phi(\mathbf{y},\omega)\nabla G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) \right\} \mathbf{n}\mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{3.9}$$

La fonction de Green est la réponse élémentaire en espace libre. La surface infiniment plane que l'on considère impose alors de prendre en compte le demi–espace libre qui en résulte. On reconstruit l'espace libre par le recours à une source image *en miroir* de la source réelle. Autrement dit, résoudre un problème en demi–espace c'est chercher à résoudre le même problème en espace libre en ajoutant la contribution d'une deuxième source. Selon l'état de cette source image, la construction d'une fonction de Green adaptée prend alors deux possibilités. Dans le cas d'une sollicitation par condition limite de pression, la surface Σ est fictive et perméable au sens de la vitesse. La source image se comporte comme un puit et annule les contributions sur la surface. Cela amène une nouvelle fonction de Green ΔG qui s'annule sur Σ :

$$\Delta G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) - G(\mathbf{x}|\mathbf{y}')$$

Le point S' de coordonnées $\mathbf{y}'$ est l'image par rapport à Σ du point S de coordonnées $\mathbf{y}$ comme représenté sur le schéma de la figure 3.2. Le recours au point image est le sens de la méthode des images. D'après la définition de la fonction de Green adoptée en espace libre bidimensionnel dans le domaine fréquentiel dans les conventions du mémoire :

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y}') = \frac{i}{4} H_0^{(2)}\left(k_a r'\right)$$

On fait tendre la limite de $\mathbf{y} - \mathbf{y}'$ vers 0 afin de positionner les sources sur la surface Σ. Dans cette limite, $r' = r$

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y}') = G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \;\; \Rightarrow \;\; \Delta G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$$

Le vecteur normal unitaire correspondant à la coordonnée y_2, et toujours dans la limite où $\mathbf{y} - \mathbf{y}' \mapsto 0$, le gradient $\partial/\partial\mathbf{n}$ de la fonction de Green s'écrit :

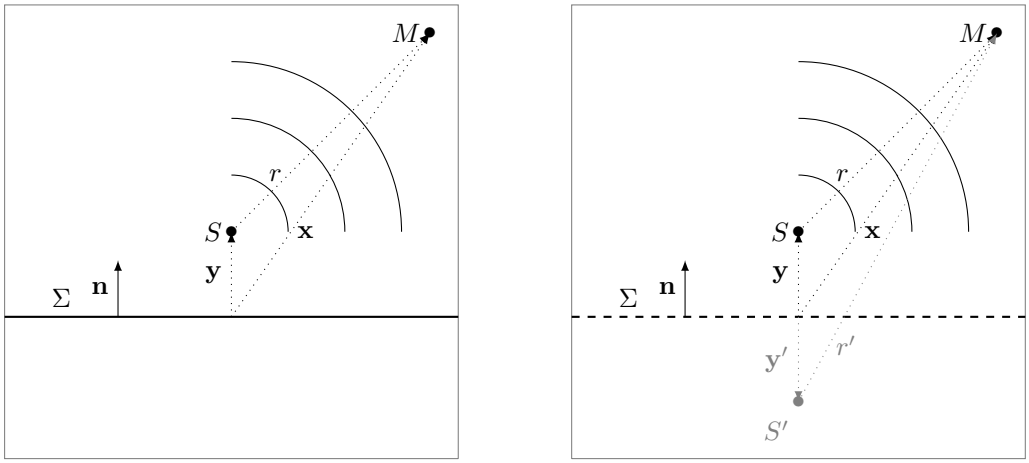


Figure 3.2 – Schéma de principe de la méthode des images. Les deux schémas sont équivalents. **Gauche :** configuration réelle. **Droite :** configuration de calcul.

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} = & \dfrac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2} = & \dfrac{i}{4} k_a \dfrac{r_2}{r} H_1^{(2)}\left(k_a r\right) \\ \dfrac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y}')}{\partial \mathbf{n}} = & \dfrac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y}')}{\partial y_2} = & -\dfrac{i}{4} k_a \dfrac{r_2}{r} H_1^{(2)}\left(k_a r\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Delta G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2} = 2 \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2}$$

où $r_i = x_i - y_i$. Par substitution, l'équation (3.9) devient

$$\phi(\mathbf{x},\omega) = -2 \int_{y_2=0} \phi(\mathbf{y},\omega) \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)}{\partial y_2} \mathrm{d}y_1$$

On note que l'équation obtenue est toujours valable en régime convecté si l'on utilise la fonction de Green convectée, du moins sans terme source et à la condition que la surface soit suffisamment plane.

3.3.2 Surface en sollicitation de vitesse : l'intégrale de Rayleigh

On repart de l'intégrale de Kirchhoff sans terme source (équation (3.9)) pour une surface plane. Dans le cas où le mouvement source impose une vitesse de vibration, on peut considérer la surface Σ comme imperméable au sens de la vitesse. Une telle surface produit sur le champ acoustique un effet semblable à celui d'une source image identique et de même intensité. On construit donc une nouvelle fonction de Green, $\Delta G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)$ telle que les contributions s'additionnent :

$$\Delta G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) = G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) + G(\mathbf{x}|\mathbf{y}',\omega)$$

En reprenant le cadre précédent, on fait tendre la limite de $\mathbf{y} - \mathbf{y}'$ vers 0, soit $r = r'$. En considérant le demi–espace libre bidimensionnel dans le domaine fréquentiel là encore comme au paragraphe précédent, la fonction de Green appropriée devient

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) = G(\mathbf{x}|\mathbf{y}',\omega) \;\Rightarrow\; \Delta G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) = 2\, G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)$$

Et de même pour le gradient :

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \dfrac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} & = & \dfrac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2} & = & \dfrac{i}{4} k_a \dfrac{r_2}{r} H_1^{(2)}\left(k_a r\right) \\ \dfrac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y}')}{\partial \mathbf{n}} & = & \dfrac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y}')}{\partial y_2} & = & -\dfrac{i}{4} k_a \dfrac{r_2}{r} H_1^{(2)}\left(k_a r\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Delta G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2} = 0$$

L'intégrale de Kirchhoff (3.9) avec la fonction de Green appropriée devient

$$\phi(\mathbf{x},\omega) = 2 \int_{y_2=0} \frac{\partial \phi(\mathbf{y},\omega)}{\partial y_2} G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) \mathrm{d}y_1 \tag{3.10}$$

L'équation (3.10) ne peut faire apparaître la convection qu'au travers de la fonction de Green, si on considère une fonction de Green convectée. Formellement, la convection doit être prise en compte dès l'écriture des *EEL*.

Cas d'un milieu au repos

La fonction ϕ est un scalaire satisfaisant l'équation d'onde et peut donc très bien être la pression acoustique. C'est alors que l'établissement de l'intégrale de Rayleigh souffre de son hypothèse la plus restrictive puisque le gradient de pression dans l'intégrande est substitué par la vitesse fluctuante d'après les *EEL*. En négligeant les termes d'ordre deux — les produits de fluctuation — en absence d'écoulement porteur, c'est–à–dire avec un champ de vitesse moyen nul dans toutes les directions, on peut écrire :

$$\frac{\partial \hat{p}'}{\partial y_2}(\mathbf{y},t) = -\rho_0 \frac{\partial \hat{v}'}{\partial t}(\mathbf{y},t)$$

Le terme v est la vitesse normale de vibration, ρ_0 est la densité moyenne et p la pression acoustique. En remplaçant alors dans (3.10) d'après les conventions des transformées de Fourier :

$$p(\mathbf{x},\omega) = -2i\omega\rho_0 \int_{y_2=0} v(\mathbf{y},\omega) G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) \mathrm{d}y_1 \tag{3.11}$$

L'équation (3.11) ainsi obtenue est connue sous le nom d'intégrale de Rayleigh. Au facteur deux près cédé par la fonction de Green appropriée issue de la méthode des images, nous retrouvons l'expression du terme monopolaire dans l'équation intégrale de FW–H (équation (3.6)). Elle n'est valable qu'en milieu au repos.

Extension en milieu convecté

L'extension de l'intégrale de Rayleigh à un milieu en mouvement uniforme nécessite de prendre en compte la convection dans la linéarisation des équations d'Euler. Si on considère pour l'exemple un écoulement convecté dans la direction longitudinale d'une vitesse u_0, portant les fluctuations de vitesse dans la direction transverse v' et aucune vitesse dans la direction perpendiculaire, les *EEL* s'écrivent dans l'axe transverse :

$$\frac{\partial \hat{p}'}{\partial y_2}(\mathbf{y},t) = -\rho_0 \left(\frac{\partial \hat{v}'}{\partial t}(\mathbf{y},t) + u_0 \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y_1}(\mathbf{y},t) \right) = -\rho_0 \frac{D\hat{v}'}{Dt}(\mathbf{y},t)$$

Après application des transformées de Fourier dans le domaine temporel, on remplace dans l'intégrale de Kirchhoff convectée (équation (3.8) sans terme source et avec $n_j = 0$) :

$$p(\mathbf{x},\omega) = -2\rho_0 \int_{y_2=0} \left\{ i\omega v(\mathbf{y},\omega) + u_0 \frac{\partial}{\partial y_1} v(\mathbf{y},\omega) \right\} G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) \mathrm{d}y_1 \tag{3.12}$$

avec G_c la fonction de Green convectée.

3.3.3 Formulation de Farassat et Myers

La formulation de Farassat et Myers [52] est une réécriture de la formulation de Kirchhoff généralisée dans le cas d'une surface en mouvement quelconque. Afin de décrire la dynamique temporelle de la surface en mouvement, cette formulation part de l'équation d'onde dans le domaine temporel sans terme source. La démarche de Farassat et Myers fait intervenir directement la sollicitation de la surface *via* l'expression de ses coordonnées curvilignes. Dans notre classification, il s'agit donc d'un formalisme d'excitation surfacique. L'article original de Farassat et Myers utilise une convention pour l'équation d'onde différente de celle utilisée dans ce mémoire. Nous nous proposons de présenter ici l'établissement de la formulation de Farassat et Myers pour l'équation d'onde définie dans ce mémoire en ayant recours aux notions sur les fonctions généralisées développées lors de l'établissement du théorème de Kirchhoff à la section 3.2.2. On considère donc l'équation d'onde homogène :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

On construit alors le domaine de résolution de la même manière que pour le théorème de Kirchhoff (figure 3.1), et on multiplie l'équation d'onde par la fonction de Heaviside $H(f)$ (3.3). Le premier terme du membre de gauche peut alors s'écrire d'après les règles de dérivation usuelles

$$H(f)\nabla^2(\phi) = \nabla^2(\phi H(f)) - \nabla \cdot (\phi \nabla H(f)) - \nabla\phi \nabla H(f)$$

et d'après les notions de fonctions généralisées [51] :

$$\nabla H(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathbf{n}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal unitaire extérieur à la surface $\Sigma(f)$. Il vient

$$H(f)\nabla^2(\phi) = \nabla^2(\phi H(f)) - \nabla \cdot (\phi \mathbf{n} \delta(f)) - \phi_n \delta(f)$$

où $\phi_n = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}$. De la même manière, le second membre peut s'écrire

$$H(f)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi H(f)) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \frac{\partial}{\partial t} H(f) \right) - \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} H(f)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial t}H(f) = \frac{\partial f}{\partial t}\delta(f) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -v_n$$

soit

$$H(f)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi H(f)) + \frac{\partial}{\partial t}(\phi v_n \delta(f)) + \frac{\partial \phi}{\partial t} v_n \delta(f)$$

où v_n est la vitesse normale extérieure, c'est–à–dire la vitesse normale de vibration de la surface $\Sigma(f)$. On peut maintenant recombiner l'équation d'onde multipliée par la fonction de Heaviside de manière à obtenir une équation d'onde sur la variable généralisée $\phi H(f)$:

$$\nabla^2(\phi H(f)) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi H(f)) = \left(\phi_n + \frac{1}{c}M_n\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\delta(f) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(M_n \phi \delta(f)) + \nabla \cdot (\phi \mathbf{n} \delta(f)) \quad (3.13)$$

où l'on a introduit le nombre de Mach normal $M_n = v_n/c$ sur la surface Σ. La fonction de Green $3D$ en espace libre est donnée par $G(\mathbf{x},t|\mathbf{y},\tau) = \delta(g)/4\pi r$ avec $g = t - \tau - r/c$. On obtient alors par convolution avec l'équation (3.13) :

$$\begin{aligned} 4\pi\phi(\mathbf{x},t) = &\int_{\tau>0}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\left(\phi_n(\mathbf{y},\tau) + \frac{1}{c}M_n\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau)\right)\delta(f)\delta(g)\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau>0}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}M_n\phi(\mathbf{y},\tau)\delta(f)\delta(g)\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\tau \\ &+\nabla\cdot\int_{\tau>0}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\phi(\mathbf{y},\tau)\mathbf{n}\delta(f)\delta(g)\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\tau \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'intégration des fonctions de Dirac permettrait ici d'obtenir une formulation équivalente à la formulation de FW–H où les dérivées spatiales et temporelles sont à l'extérieur des intégrales et exprimées par rapport aux coordonnées de l'observateur. Farassat et Myers [52] proposent de manipuler les équations de manière à exprimer les gradients dans les intégrales et donc, par rapport aux coordonnées de la source. Le gradient spatial présent dans le dernier terme du membre de gauche peut s'exprimer sous la forme d'un gradient temporel :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\delta(g)}{r}\right] = \frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial\delta(g)}{\partial x_i} - \delta(g)\frac{\partial r}{\partial x_i}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{r_i}{r}\frac{\delta(g)}{r}\right] - \frac{r_i}{r}\frac{\delta(g)}{r^2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation (3.14) et en notant que $(r_i \cdot n_i)/r = \cos\theta$, il vient :

$$\begin{aligned} 4\pi\phi(\mathbf{x},t) = &\int_{\tau>0}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\left(\phi_n(\mathbf{y},\tau) + \frac{1}{c}M_n\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau)\right)\delta(f)\delta(g)\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\tau \\ &-\int_{\tau>0}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r^2}\phi(\mathbf{y},\tau)\cos\theta\delta(f)\delta(g)\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau>0}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\left(M_n - \cos\theta\right)\phi(\mathbf{y},\tau)\delta(f)\delta(g)\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\tau \end{aligned} \quad (3.15)$$

Afin d'exprimer les opérations par rapport aux coordonnées de la source, c'est–à–dire, de la surface en mouvement (et déformable), on effectue deux applications. La première est l'application $\mathbf{y} \mapsto (u_1,u_2,u_3)$ où (u_1,u_2) sont les coordonnées curvilignes sur la surface, celle–ci étant décrite par $u_3 = f$. Le jacobien de cette transformation est l'unité. La seconde application concerne le temps $\tau \mapsto g$. Le jacobien de cette transformation est $1/(1-M_r)$ où $M_r = v_i \cdot r_i/rc$ avec $v_i = \partial y_i/\partial\tau$. L'écriture des coordonnées curvilignes permet d'écrire $\mathrm{d}y_1 = \partial y_i/\partial u_j \mathrm{d}u_j$ où la sommation d'Einstein est sous–entendue. Ainsi, $\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \sqrt{g_{(2)}}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2$ où $\sqrt{g_{(2)}}$ est le déterminant de la première forme fondamentale de la matrice de transformation des coordonnées curvilignes. En ayant décrit la surface par $u_3 = f$, les coordonnées de la source s'expriment donc en $u_3 = 0$ ce qui entraîne $\delta(f) = 1$. Dès lors, l'équation (3.15) devient

$$\begin{aligned}
4\pi\phi(\mathbf{x},t) = &\int_{\tau>0}\iint_\Sigma \frac{1}{r(1-M_r)}\left(\phi_n(\mathbf{y},\tau) + \frac{1}{c}M_n\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau)\right)\sqrt{g_{(2)}}\delta(g)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}\tau \\
&-\int_{\tau>0}\iint_\Sigma \frac{1}{r^2(1-M_r)}\phi(\mathbf{y},\tau)\cos\theta\sqrt{g_{(2)}}\delta(g)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}\tau \\
&+\frac{1}{c}\int_{\tau>0}\iint_\Sigma \frac{1}{r(1-M_r)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{(M_n-\cos\theta)\,\phi(\mathbf{y},\tau)\sqrt{g_{(2)}}}{1-M_r}\right\}\delta(g)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Sur la surface, l'intégration du Dirac permet finalement d'écrire :

$$\begin{aligned}
4\pi\phi(\mathbf{x},t) = &\iint_\Sigma \left[\frac{1}{r(1-M_r)}\left(\phi_n(\mathbf{y},\tau) + \frac{1}{c}M_n\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau)\right)\sqrt{g_{(2)}}\right]_{\tau^*}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \\
&-\iint_\Sigma \left[\frac{1}{r^2(1-M_r)}\phi(\mathbf{y},\tau)\cos\theta\sqrt{g_{(2)}}\right]_{\tau^*}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \\
&+\frac{1}{c}\iint_\Sigma \left[\frac{1}{r(1-M_r)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{(M_n-\cos\theta)\,\phi(\mathbf{y},\tau)\sqrt{g_{(2)}}}{1-M_r}\right\}\right]_{\tau^*}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

où les intégrandes sont estimées au temps retardé τ^* qui satisfait l'équation

$$g = t - \tau^* - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(u_1,u_2,0,\tau^*)|}{c} = 0$$

La recherche du temps retardé est un sujet délicat. Lorsque le point de coordonnées $\mathbf{x}$ perçoit un son au temps t, ce son est constitué de l'ensemble des contributions venant de tout l'espace $\mathbf{y}$ émis pour chaque instant τ correspondant. Il y a donc un instant τ pour chaque point de l'espace $\mathbf{y}$ qui correspond au son perçu à l'endroit $\mathbf{x}$ à l'instant t précis. Le problème peut également être inversé et on cherchera alors les temps avancés. En ce qui concerne le développement des différents algorithmes de temps d'émission ou du temps de réception, on citera notamment Brentner [20] pour une revue détaillée et Margnat [98, p. 95].

L'équation (3.16) est la formulation de Farassat et Myers pour une surface en mouvement quelconque déformable. C'est la formulation la plus complète. Pour une application numérique, les auteurs vont plus loin et allègent le contenu des intégrales en évaluant analytiquement les dérivées temporelles et écrivent la forme finale :

$$4\pi\phi(\mathbf{x},t) = \iint_\Sigma \left[\frac{E_1\sqrt{g_{(2)}}}{r(1-M_r)}\right]_{\tau^*} \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 + \iint_\Sigma \left[\frac{\phi E_2\sqrt{g_{(2)}}}{r^2(1-M_r)}\right]_{\tau^*} \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \tag{3.17}$$

avec

$$\begin{aligned}
E_1 = \;& (M_n^2-1)\phi_n + M_n\mathbf{M_t}\cdot\nabla_2\phi - \frac{M_n\dot{\phi}}{c} + \frac{1}{c(1-M_r)^2}\left[\dot{M}_r(\cos\theta - M_n)\phi\right] \\
& + \frac{1}{c(1-M_r)}\left[\left(\dot{n}_r - \dot{M}_n - \dot{n}_M\right)\phi + (\cos\theta - M_n)\dot{\phi} + (\cos\theta - M_n)\phi\dot{\sigma}\right] \\
E_2 = \;& \cos\theta + \frac{1}{1-M_r}\left[2M_r\cos\theta - M_nM_r - M_n\right] \\
& + \frac{1}{(1-M_r)^2}\left[(\cos\theta - M_n)(M_r^2 - M^2)\right]
\end{aligned}$$

avec les notations :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \frac{\mathbf{v}}{c}; & \dot{M}_n &= \dot{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{n} \\
\mathbf{M_t} &= -\mathbf{n}\wedge(\mathbf{n}\wedge\mathbf{M})\,; & \dot{M}_r &= \frac{\dot{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{r}}{r} \\
\dot{n}_r &= \frac{\dot{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}}{r}; & \dot{n}_M &= \dot{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{M}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= cM_n\phi_n + c\mathbf{M}_t\cdot\nabla_2\Phi + \phi_{\tau(y)} \\
\dot{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{g_{(2)}}}\frac{\partial\sqrt{g_{(2)}}}{\partial\tau}
\end{aligned}$$

Le symbole $\dot{()}$ représente la dérivée temporelle dans le repère de la source et ∇_2 désigne l'opérateur de gradient de surface

$$\nabla_2\phi = \nabla\phi - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla\phi)$$

Le cas d'une surface non solide mais fixe et indéformable permet de retrouver l'intégrale classique de Kirchhoff. Nous allons présenter à la section suivante quelques cas d'applications parmi les cas académiques. La validité du formalisme de Farassat et Myers est comparée aux solutions analytiques disponibles, dont l'établissement est présenté en annexe B.

3.4 Applications du formalisme de Farassat et Myers

Dans l'article original [52], un exemple de calcul de la première forme de la matrice fondamentale y est présenté dans le cas de la sphère pulsante. Nous avons choisi de reprendre cet exemple et de présenter deux autres cas : l'extrapolation d'une onde acoustique sphérique et le piston vibrant.

3.4.1 La sphère pulsante

On considère que la source acoustique est une sphère vibrant radialement. Elle produit un champ acoustique par le caractère oscillatoire de son rayon $R(\tau)$ qui induit une vitesse normale de vibration $v_n = \partial R(\tau)/\partial\tau$. On introduit le changement de variables $\mathbf{y} \mapsto (u_1,u_2,u_3)$ tel que u_1 et u_2 sont les coordonnées surfaciques de la sphère et u_3 est la surface de la sphère. Ainsi en $3D$, les coordonnées de la sphère dans son système de référence sont

$$y_1 = R(\tau)\cos u_1 \sin u_2 \ ; \qquad y_2 = R(\tau)\sin u_1 \sin u_2 \ ; \qquad y_3 = R(\tau)\cos u_2$$

avec $u_1 = [0; 2\pi]$ et $u_2 = [0; \pi]$. Ce système de coordonnées est représenté sur la figure 3.3. Ce changement de repère permet de s'affranchir de la dépendance temporelle et donc de n'assigner la déformation de la surface que par son rayon [52].

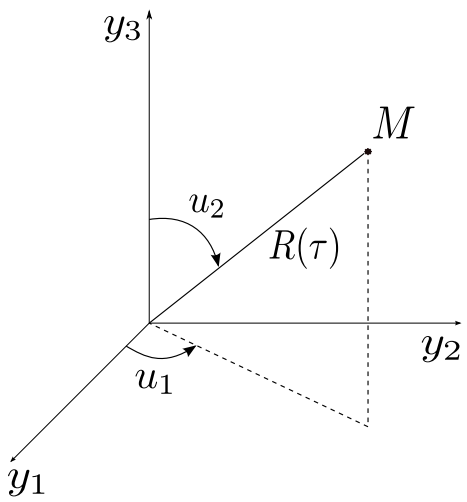


Figure 3.3 – Système de coordonnées curvilignes de surface pour une sphère. Le point M est situé sur la surface à la distance $R(\tau)$.

La vibration radiale est définie de manière périodique

$$R(\tau) = a\left(1 + \varepsilon e^{-i\omega\tau}\right)$$

ω est la fréquence et ε est l'amplitude de variation autour du rayon moyen a. La vitesse de déplacement des particules au voisinage immédiat de la source s'exprime alors par la dérivée temporelle dans chaque direction :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = & \cos u_1 \sin u_2 \ v_n \\ v_2 = & \sin u_1 \sin u_2 \ v_n \\ v_3 = & \cos u_2 \ v_n \end{cases}$$

Le processus de transformation en coordonnées curvilignes est développé en annexe A. On peut s'en servir pour montrer que le déterminant de la première forme fondamentale de la matrice de transformation vaut

$$\sqrt{g_{(2)}} = R(\tau)^2 \sin u_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma} = \frac{2}{R(\tau)} v_n$$

La fonction Φ, qui est la fonction imposée pour résoudre l'equation de propagation, peut représenter le potentiel des vitesses :

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi \tag{3.18}$$

L'expression (3.18) peut être appliquée dans chaque direction de l'espace pour mettre en évidence le gradient de la fonction ϕ. En intégrant selon chaque variable, on montre que $\phi = R(\tau) v_n$:

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} &= v_n \cos u_1 \sin u_2 \quad \longmapsto \quad \phi = v_n \cos u_1 \sin u_2 \times y_1 + \phi_1 (y_2, y_3) \\ v_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y_2} &= v_n \sin u_1 \sin u_2 \quad \longmapsto \quad \phi = v_n \sin u_1 \sin u_2 \times y_2 + \phi_2 (y_1, y_3) \\ v_3 = \frac{\partial \phi}{\partial y_3} &= v_n \cos u_2 \quad \longmapsto \quad \phi = v_n \cos u_2 \times y_3 + \phi_3 (y_1, y_2) \end{aligned}$$

Le gradient normal peut s'exprimer par :

$$\phi_n = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y_2} n_2 + \frac{\partial \phi}{\partial y_3} n_3 = v_n \sin u_2$$

Et le gradient temporel :

$$\phi_{\tau(\mathbf{y})} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = v_n^2 + R(\tau) \frac{\partial v_n}{\partial \tau}$$

Pour pouvoir ensuite obtenir la pression acoustique au point observateur $p(\mathbf{x},t)$, on reporte (3.18) dans l'équation d'Euler linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad}\ p \quad \longmapsto \quad \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{grad}\ \phi) = -\mathbf{grad}\ p$$

Les coordonnées de l'observateur ne vont pas dépendre du temps. On peut donc écrire :

$$\mathbf{grad} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mathbf{grad}\ p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{grad} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p \right) = 0$$

d'où

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_0$$

Pour la mise en œuvre numérique de la formulation de Farassat et Myers, le domaine observateur est circulaire et est divisé en 401 points de manière régulière. Le domaine de la sphère est également discrétisé en 401 points. Le point d'observation est fixé constant à $R = 10\lambda_a$. L'évolution en temps est suivie par l'observateur sur 1 période de vibration discrétisée sur 1000 points et initialisée à $t_0 = 40\ T$. L'intégration numérique est réalisée par la méthode des trapèzes. Un test a été conduit avec une méthode d'intégration par l'algorithme de Simpson, qui n'a pas révélé de changements significatifs pour justifier le coût plus élevé de ce dernier. La fréquence de vibration de la sphère est imposée à $F = 20$ Hz, le rayon moyen est imposé à $2{,}0 \times 10^{-3}$ m pour une amplitude de variation de $1{,}0 \times 10^{-3}$ m. Pour calculer la pression acoustique, un schéma aux différences finies centré et explicite d'ordre 4 est utilisé pour la dérivée temporelle de la fonction ϕ. Le résultat est présenté à la figure 3.4(a). L'accord est qualitativement bon, mais il subsite une erreur relative de l'ordre de 11% sans qu'émerge une explication satisfaisante. Le même écart est constaté, quelle que soit la fréquence ou la discrétisation temporelle. Cette erreur est vraisemblablement à mettre sur le compte d'une implantation malhabile lors de l'élaboration du code de calcul dans le formalisme de Farassat et Myers.

3.4.2 Extrapolation d'une onde acoustique sphérique

Afin de valider la correcte extrapolation des ondes acoustiques prévue par le formalisme de Farassat et Myers, on considère comme donnée source une onde acoustique sphérique, émise par exemple par une sphère animée d'un mouvement radial périodique dont on connait la vitesse v_n. L'onde acoustique ainsi émise est donc sphérique dans le cas d'une source tridimensionnelle. Le potentiel de vitesse de l'onde acoustique prend la forme :

$$\Phi = \frac{A}{r} e^{ikr - i\omega\tau}$$

La solution analytique développée dans l'annexe B permet d'identifier la constante A et de trouver le champ de vitesse par dérivation (spatiale) du potentiel des vitesses. La vitesse particulaire radiale vaut alors :

$$v_a = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \mathbf{e_r} = \frac{A}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) e^{ikr - i\omega\tau}$$

On en déduit le déplacement particulaire ξ dans la direction radiale par intégration temporelle de la vitesse particulaire v_a :

$$\xi = \frac{iA}{\omega r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) e^{ikr - i\omega\tau}$$

Puisque l'onde est sphérique, le déplacement particulaire peut être considéré comme un rayon potentiel. En introduisant le changement de variable de Farassat et Myers $\mathbf{y} \mapsto (u_1, u_2, u_3)$ tel que u_1 et u_2 sont les coordonnées surfaciques de l'onde acoustique et u_3 est la surface de celle–ci :

$$y_1 = [u_3 + \xi] \cos u_1 \sin u_2 \ ; \qquad y_2 = [u_3 + \xi] \sin u_1 \sin u_2 \ ; \qquad y_3 = [u_3 + \xi] \cos u_2$$

avec $u_1 = [0; 2\pi]$ et $u_2 = [0; \pi]$ en suivant le repère de la figure 3.3. Par dérivation temporelle des coordonnées spatiales, on exprime les trois composantes de la vitesse :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau} \begin{cases} v_1 = & \frac{A}{d}\left(ik - \frac{1}{d}\right) e^{ikd - i\omega\tau} \cos u_1 \sin u_2 \\ v_2 = & \frac{A}{d}\left(ik - \frac{1}{d}\right) e^{ikd - i\omega\tau} \sin u_1 \sin u_2 \\ v_3 = & \frac{A}{d}\left(ik - \frac{1}{d}\right) e^{ikd - i\omega\tau} \cos u_2 \end{cases}$$

Le déterminant de la première forme fondamentale de la matrice de transformation ainsi que sa dérivée temporelle $\dot{\sigma}$ valent alors :

$$\sqrt{g_{(2)}} = -\xi^2 \sin u_2 \ ; \quad \dot{\sigma} = \frac{2}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau}$$

En imposant la résolution sur le potentiel des vitesses comme dans l'exemple précédent sur la sphère pulsante :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{A}{r} e^{ikr - i\omega\tau} \\ \phi_n &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right) e^{ikr - i\omega\tau} \\ \phi_{\tau(\mathbf{y})} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -i\omega\phi \end{aligned}$$

Le résultat est présenté à la figure 3.4(b). Le cas présent est similaire à la sphère pulsante précédemment traitée. Pourtant, l'accord est ici bien plus éloquent avec près de 0,003% d'erreur relative.

3.4.3 Le piston vibrant

La source ici considérée dans le formalisme de Farassat et Myers est un piston vibrant verticalement. Son caractère vibratoire est donné par sa hauteur au cours du temps ainsi que sa vitesse normale de vibration, $h(\tau)$ et v_n respectivement :

$$h(\tau) = h_0 \sin(\omega\tau) \ ; \quad V_n = \frac{\partial h(\tau)}{\partial \tau} \tag{3.19}$$

où h_0 est l'amplitude de la vibration et ω la pulsation. Si les coordonnées $\mathbf{y}$ sont les coordonnées de la source, l'application du changement de variables en coordonnées surfaciques introduit par Farassat et Myers permet d'écrire :

$$\begin{aligned} y_1 &= u_3 + u_2 \cos u_1 & & v_1 &= 0 \\ y_2 &= u_3 + u_2 \sin u_1 & \Rightarrow & v_2 &= 0 \\ y_3 &= u_3 + h(\tau) & & v_3 &= v_n \end{aligned}$$

où $u_1 = [0; 2\pi]$ et $u_2 = [0; a]$ avec a le rayon du piston. Le système de coordonnés est représenté à la figure B.1 présentée dans l'annexe B lors de l'établissement de la solution analytique. Le rayon u_2 est discrétisé de 0 à a en 601 points. L'angle u_1 est discrétisé de 0 à 2π en 601 points. Le temps de l'observateur est discrétisé en 2000 points sur 1 période. Le déterminant de la première forme fondamentale de la matrice de transformation ainsi que sa dérivée temporelle $\dot{\sigma}$ valent :

$$\sqrt{g_{(2)}} = -u_2 \ ; \quad \dot{\sigma} = 0$$

On impose le potentiel scalaire des vitesses défini d'après l'équation d'Euler linéarisé par

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi$$

Les composantes v_1 et v_2 de la vitesse sont nulles. Il vient que le potentiel scalaire ϕ dépend donc uniquement de la coordonnées y_3 :

$$v_3 = \frac{\partial \phi}{\partial y_3} = \frac{\partial y_3}{\partial \tau} \ ; \quad \Rightarrow \quad \phi = y_3 \frac{\partial y_3}{\partial \tau}$$

Il vient :

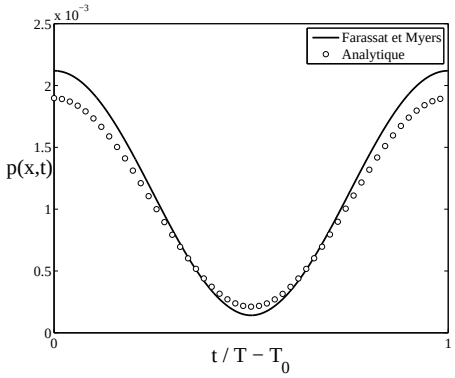
$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{\partial \phi}{\partial y_3} n_3 = v_3 n_3 \\ \phi_{\tau(\mathbf{y})} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial y_3}{\partial \tau}\right)^2 + y_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial \tau^2} \end{aligned}$$

La fréquence est fixée à 20 Hz et l'amplitude de vibration à 0,1 m. Le résultat est présenté à la figure 3.4(c). Il est intéressant de noter que le cas du piston est bien différent des deux cas traités précédemment où l'excitation était sphérique. Malgré une topologie différente, la prédiction par le formalisme de Farassat et Myers est raisonnable pour une première validation, avec une erreur relative de 13%.

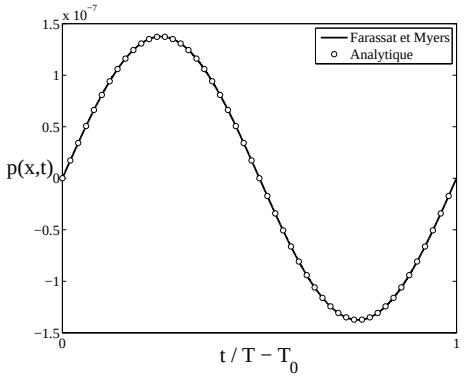
3.4.4 Remarque sur l'évaluation aux temps retardés

Évaluer le temps retardé τ^*, c'est estimer le temps τ où a été produit au point $\mathbf{y}$ le son perçu au point $\mathbf{x}$ et au temps t. Autrement dit, c'est trouver la racine de l'équation

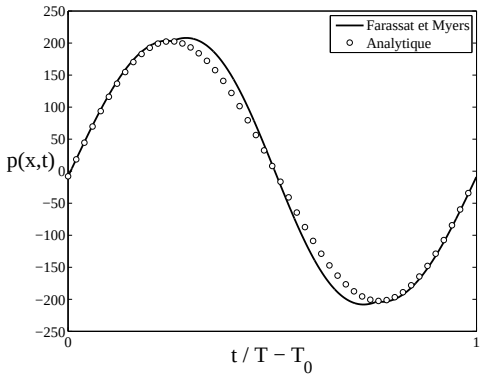
$$f = \tau - t + r/c = \tau - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}\,(u_1,u_2,0,\tau)|}{c}$$



(a) Réponse acoustique de la sphère pulsante



(b) Extrapolation d'une onde acoustique sphérique



(c) Réponse acoustique du piston vibrant

Figure 3.4 – Applications du formalisme de Farassat et Myers. $F = 20$ Hz, $R = 10\lambda_a$.

Cette solution, notée τ^* est estimée numériquement par un algorithme construit sur la méthode de Newton :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \frac{f(\tau_k)}{f'(\tau_k)}$$

à l'itération k. Le calcul est convergé lorsque la différence $||\tau_{k+1} - \tau_k|| \leqslant \epsilon$ pour un seuil ϵ déterminé. À cet instant, $\tau_{k+1} = \tau^*$. On propose d'illustrer l'évaluation numérique par le cas de la sphère pulsante où le son serait perçu au point $(\mathbf{x},t) = (X,Y,Z,t) = (0,0,R = 10\lambda_a,t = 100T)$ avec T la période de vibration de la sphère.

On voit sur la figure 3.5 que l'algorithme semble donner des résultats cohérents : l'observateur se situe sur l'axe vertical (coordonnées Z) au dessus de la sphère et on trouve les plus basses valeurs de τ sur la partie inférieure de la sphère. De plus, le temps mis par l'onde acoustique pour franchir une distance de $10\lambda_a$ est de l'ordre d'une dizaine de périodes :

$$t = \frac{10\lambda_a}{c} = \frac{10 \times 2\pi}{k_a c} = \frac{10 \times 2\pi c}{\omega c} = \frac{10}{F} = 10T \tag{3.20}$$

Puisque le temps observateur est fixé à un temps de $100T$, il est consistant de trouver un temps d'émission proche de $90T$.

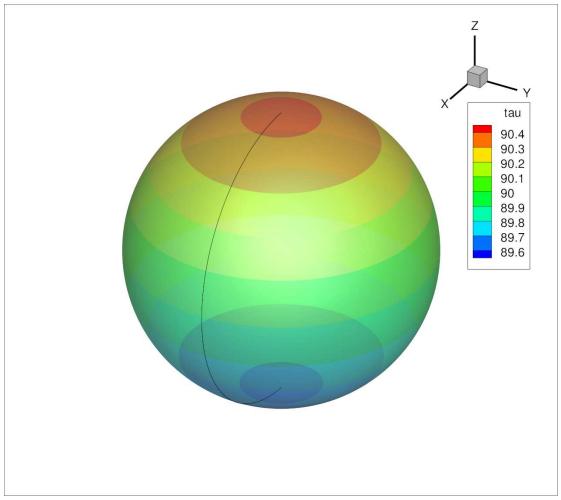


Figure 3.5 – Recouvrement des temps d'émission à la surface de la sphère pulsante pour un son perçu au point $x_3 = Z = 10\lambda_a$ et au temps $t = 100T$. À un instant τ^* différent correspond évidemment un rayon différent à mesure que la sphère se déforme en vibrant. Ce phénomène n'a pas été reproduit pour l'illustration.

3.5 Synthèse

Ce chapitre a permis de détailler les formalismes qui sont utilisés dans ce mémoire, avec leur contexte, leurs avantages et leurs limitations. Nous avons insisté sur l'influence de la surface entourant le volume source et particulièrement dans le cas où l'excitation ne peut être apportée que sur cette surface. Un formalisme robuste et complet a été présenté et validé sur des cas d'applications académiques. Ce formalisme initialement établi par Farassat et Myers [52] est particulièrement intéressant pour traiter le cas de surfaces d'excitation sphériques. Dans le cas plus restrictif mais plus souvent utilisé d'une surface plane, deux types de sollicitations ont été distingués : le cas d'une sollicitation en pression (l'intégrale de Kirchhoff) et celui d'une sollicitation en vitesse (l'intégrale de Rayleigh). Ces deux derniers outils vont nous permettre d'étudier une gamme de distributions des conditions limites sur cette surface et d'observer comment réagit le milieu acoustique comme nous le verrons au chapitre suivant.

Chapitre 4

Réponse acoustique à une excitation aérodynamique

« L'oisillon qui vient de plonger dans le vide a tout intérêt à assumer son acte en battant des ailes, plutôt que de les utiliser pour se voiler la face. »
T. Demens

Sommaire

4.1 Discussion préliminaire **98**
4.2 Sollicitation par une onde de pression **99**
4.2.1 Étude analytique 101
4.2.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation 110
4.3 Extension à un milieu propagatif en mouvement uniforme **114**
4.3.1 Étude analytique en milieu convecté 114
4.3.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation avec convection 116
4.4 Sollicitation par vitesse normale de vibration **119**
4.4.1 Étude analytique 120
4.4.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation 124
4.5 Extension à un milieu propagatif en mouvement uniforme **126**
4.5.1 Étude analytique en milieu convecté 126
4.5.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation avec convection 127
4.6 Résumé – synthèse **129**

Ce chapitre est dédié à l'estimation de l'efficacité acoustique d'excitations génériques, que l'on définit comme le taux d'énergie qu'une fluctuation aérodynamique peut convertir en ondes acoustiques. Si l'on reprend le schéma d'illustration de la thèse (figure 2, page 14), le problème est abordé du point de vue de l'acoustique. L'objectif est alors de décrire la réponse du milieu acoustique à un certain type d'excitation et s'il répond avec plus ou moins d'efficacité.

4.1 Discussion préliminaire

Pour représenter le bruit d'origine aérodynamique, une excitation quelconque peut présenter une vitesse de phase subsonique et une amplitude modulée spatialement [75]. C'est par exemple le cas dans un écoulement comme celui de la couche de mélange, précédemment évoqué et détaillé au chapitre 5. Dans un tel écoulement, des structures de Kelvin–Helmholtz sont amplifiées par convection avant leur appariement [139]. Les fluctuations de la pression hydrodynamique associées à ces structures ont alors la forme d'un paquet d'ondes dans la direction du cisaillement [103, 117]. Un rayonnement par amplification des fluctuations hydrodynamiques a également lieu au bord de fuite d'une plaque plane épaisse [111]. Le rôle de ces structures cohérentes dans la génération du bruit est encore sujet à débat mais la majorité de la communauté s'accorde à en reconnaître l'importance. Quoiqu'il en soit, leur présence est un fait. Elles peuvent tout aussi bien n'avoir d'autres prétentions que d'exister, et à ce titre, elles peuvent constituer un objet d'étude.

Une étude énergétique est cruciale pour la conception efficace de stratégies de contrôle, car on doit être capable de discerner si la puissace acoustique rayonnée est due à un fort apport d'énergie par l'écoulement lui–même ou s'il s'agit d'une haute efficacité dans le processus de conversion de l'énergie hydrodynamique en énergie acoustique.

La réponse acoustique à une distribution de pression ou de vitesse se résume à un problème de Cauchy dont la résolution numérique directe en tant qu'équation différentielle partielle est un sujet difficile [104, 142]. Dans certains cas particuliers, une solution analytique peut être trouvée comme l'ont montré Crighton et Huerre [37] pour suggérer une explication théorique à la directivité d'un écoulement de jet forcé que Laufer et Yen [84] ont observée expérimentalement. Pour se dégager d'une restriction mathématique et élargir les possibilités vers des configurations plus générales, la résolution de l'équation d'onde a été approchée par deux principales techniques. La première consiste à définir l'excitation par un terme source, ce qui revient à résoudre une équation d'onde inhomogène. Le formalisme de Lighthill est le candidat naturel pour la résolution de ce type de problème. Cette technique a été utilisée notamment par Obrist [123] qui a modélisé la première composante du tenseur de Lighthill par un paquet d'ondes et a étudié l'influence de la vitesse de phase et de la modulation (en espace multidimensionnel) ainsi que l'influence de la vitesse de groupe [124]. L'auteur a mis en évidence les principaux effets de ces paramètres sur l'allure de la directivité. Le même formalisme a été utilisé analytiquement et expérimentalement par Papamoschou [125] et Cavalieri *et al.* [30]. Dans cette dernière étude, l'excitation est intermittente ; les fluctuations temporelles de la modulation se sont révélé être un paramètre très efficace sur le rayonnement acoustique. La seconde technique est d'exciter directement l'opérateur d'ondes au travers d'une condition limite de l'équation homogène de Helmholtz. Elle a été notamment utilisée par Avital et Sandham [5] (ainsi que Avital *et al.* [4, 6], Sandham *et al.* [135], par exemple). Fleury *et al.* [58] ont aussi suivi cette voie en traitant le problème d'une surface de Kirchhoff cylindrique dans le contexte du bruit de jet. Dans cette seconde technique, l'excitation a toujours pris la forme d'un paquet d'ondes de pression mais à notre connaissance, aucune étude n'a traité le cas d'une excitation par la modulation d'une vitesse normale de vibration.

Il est un fait avéré que le taux du transfert d'énergie entre les fluctuations hy-

drodynamiques et le rayonnement est piloté par les nombres d'ondes qui ont une vitesse de phase supersonique [4, 78, 124]. Une enveloppe spatiale de modulation localisée entraîne une enveloppe de modulation dans l'espace des nombres d'ondes en lieu et place d'un simple pic localisé sur le nombre d'onde hydrodynamique dans le cas où il n'y aurait pas de modulation spatiale. En conséquence, il y a de l'énergie dans la région supersonique de l'espace des nombres d'ondes et ce, même pour des vitesses de phase subsoniques. C'est le concept d'« extrémité supersonique » d'un paquet d'ondes, qui peut être considérée comme un composant purement acoustique de l'excitation. Inversement, la partie restante située à l'extérieur de l'extrémité supersonique peut être considérée comme le champ de base silencieux [138]. Mais un lien direct entre la forme de la modulation d'un paquet d'ondes et son efficacité acoustique reste encore à établir.

Ce chapitre suit la ligne directrice proposée par Sandham *et al.* [135] *via* l'intégration numérique de l'équation homogène de Helmholtz dans le formalisme de Kirchhoff. L'excitation acoustique est apportée sous la forme d'une condition limite. Les caractéristiques principales du paquet d'ondes sont sa forme — déterminée par la modulation — et le nombre d'onde des ondes qui se propagent dans l'enveloppe. Le but de ce chapitre est de caractériser la réponse acoustique du milieu propagatif à une excitation générique en menant une étude paramétrique sur la fonction de modulation. L'effet de la vitesse de phase est également étudié pour une enveloppe de modulation statique, sans vitesse de groupe. Le rayonnement acoustique ne résulte pas uniquement du seul nombre d'onde hydrodynamique mais aussi de la modulation spatiale, même stationnaire, ce qui justifie l'étude systématique d'une certaine gamme de fonctions de modulation. La réponse acoustique est décrite en terme d'efficacité acoustique du paquet d'ondes et de direction privilégiée du rayonnement. Si beaucoup d'études ont étudié le cas du rayonnement acoustique d'un paquet d'ondes, peu à notre connaissance se sont penchées sur son efficacité à rayonner en champ lointain [82]. On considère dans un premier temps un milieu propagatif au repos avant de prendre en compte une convection uniforme, ce qui permet de se rapprocher des cas d'écoulements dont les mouvements organisés et instationnaires ont été identifiés comme des sources aéroacoustiques, comme par exemple des écoulements de cavité [62] ou des écoulements de couche–limite [65].

Le chapitre est divisé en deux parties, l'une traitant le cas d'un paquet d'ondes de pression et l'autre le cas d'un paquet d'ondes de vitesse. Pour chacune de ces deux parties, on décrit le cadre théorique et les conventions mathématiques adoptées. L'efficacité acoustique est définie et une analyse théorique est effectuée pour mettre en évidence des premières conditions d'efficacité. L'outil numérique est validé et une gamme de fonctions de modulation est considérée. À chaque fois pour un milieu statique puis pour un milieu en mouvement uniforme.

4.2 Sollicitation par une onde de pression

Afin de s'affranchir de la dépendance temporelle, on écrit l'équation homogène de Helmholtz pour la pression acoustique monochromatique $p(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} = x_i$, dans le domaine supérieur d'un milieu statique, uniforme et bidimensionnel $(2D)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} p\left(\mathbf{x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} p\left(\mathbf{x}\right) + k_a^2 p\left(\mathbf{x}\right) = 0 \tag{4.1}$$

avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$. L'équation est associée à une convention de Fourier différente des autres chapitres, définie comme

$$\begin{cases} f(\mathbf{x},\omega) &= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{x},t)\, e^{+i\omega t} \mathrm{d}t \\ \hat{f}(\mathbf{x},t) &= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},\omega)\, e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \end{cases}$$

Cette convention est utilisée tout au long de ce chapitre. L'excitation, supposée harmonique en fréquence, est introduite par la condition limite en $x_2 = 0$ sous la forme d'une onde de pression modulée spatialement par une enveloppe :

$$p(x_1,0) = P_0 A(x_1) \exp\left(i \frac{\omega}{U_c} x_1 \right) \tag{4.2}$$

A est la fonction d'enveloppe, i est le nombre imaginaire unité tel que $i^2 = -1$, ω est la fréquence de l'onde, U_c est la vitesse de phase de l'onde hydrodynamique convectée et P_0 est l'amplitude de la pression, cédée par le milieu environnant. Cette dernière sera considérée comme pression de référence et ne sera plus mentionnée par la suite, sauf cas contraire. On présentera néanmoins un tableau récapitulatif en synthèse (table 4.1, page 132), où l'influence de ce paramètre est discuté. Le nombre d'onde hydrodynamique $k_h = \omega/U_c$ est pris comme référence et est donc considéré unitaire. Un schéma illustre les principales notations et la configuration étudiée à la figure 4.1.

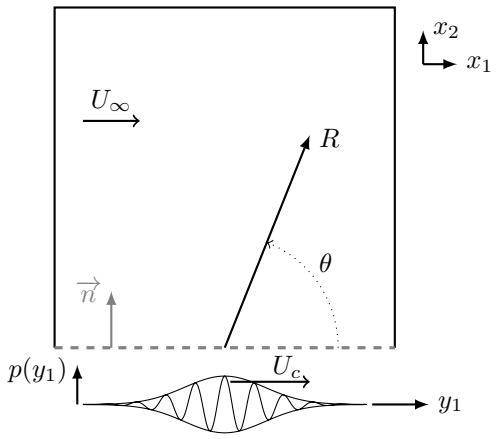


Figure 4.1 – La condition limite de pression en paquet d'ondes avec les principales notations.

On peut résoudre l'équation (4.1) en appliquant le théorème de Kirchhoff vu au chapitre 3. Il a été présenté dans le cas d'un milieu en mouvement uniforme. La formulation en milieu au repos est retrouvée en fixant une vitesse de convection nulle ($M_\infty = 0$) dans l'équation (3.8). On note que la formulation sans terme source et en surface plane reste identique à ce qui a été présenté au chapitre 3 malgré une différence de convention pour les transformées de Fourier. Ainsi, sans terme source, la pression acoustique dans le champ de l'observateur est uniquement pilotée par sa distribution initiale sur l'axe $y_2 = 0$:

$$p\left(\mathbf{x}\right) = \int_{\Sigma(\mathbf{y})} \left\{ G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - p(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} \right\} \mathrm{d}\Sigma\left(\mathbf{y}\right). \tag{4.3}$$

La fonction de Green $2D$ en espace libre est donnée par

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}\left(k_a r\right) \tag{4.4}$$

avec $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ et $H_\nu^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce d'ordre ν. La fonction de Green étant définie en espace libre, il faut se ramener à un problème en demi–espace libre [33], à l'image de l'étude de Léon et Brazier [87] pour l'investigation de l'effet d'une surface de Kirchhoff conique ($\Sigma(\mathbf{y})$) sur la modélisation d'un paquet d'ondes dans le contexte de l'écoulement de jet. La formulation du problème en demi–espace libre a été établie au chapitre 3 (section 3.3.1). L'équation (4.3) s'écrit :

$$p\left(\mathbf{x}\right) = \int_{y_2=0} \left\{ -2p(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2} \right\} \mathrm{d}y_1. \tag{4.5}$$

L'équation (4.5) traduit le champ acoustique dans le domaine observateur dès que la distribution initiale de pression (4.2) est précisée. Ne souffrant pas d'hypothèse restrictive, cette équation est valable en champ proche comme en champ lointain. Par recours à l'outil numérique pour la procédure d'intégration, toute forme de distribution peut être envisagée. Mais avant d'introduire l'outil numérique, nous développons à la section suivante une approximation en champ lointain, ce qui permet une étude analytique pour des distributions spécifiques. L'analyse illustre alors le concept d'« extrémité supersonique » dans l'espace des nombres d'onde.

4.2.1 Étude analytique

Approximation en champ lointain

Le champ lointain se caractérise par une dimension du domaine observateur bien supérieure à celle du domaine source, soit $r \to +\infty$. Dans cette configuration, le comportement asymptotique de la fonction de Hankel aux grands arguments permet d'écrire :

$$H_\nu^{(1)}\left(z\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{4.6}$$

Le rayon d'observation r est ensuite approché au second ordre par un développement en série de Taylor autour de la position de l'observateur :

$$r \sim |\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|} \quad \text{avec} \quad |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}| \tag{4.7}$$

Ces approximations permettent alors de réécrire la dérivée de la fonction de Green en $y_2 = 0$:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2} \sim \sin\theta \sqrt{\frac{k_a}{8\pi R}} e^{i\left(k_a R - k_a \cos\theta y_1 + \frac{3\pi}{4}\right)} \tag{4.8}$$

avec $R = |\mathbf{x}|$, $\sin\theta = x_2/R$ et $\cos\theta = x_1/R$. En remplaçant dans l'équation (4.5) il vient

$$p(\mathbf{x}) \sim E \sin\theta \sqrt{\frac{k_a}{2\pi R}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{y}) e^{-ik_a \cos\theta y_1} \mathrm{d}y_1$$

où par souci de simplification $E = \exp[i(k_a R - \pi/4)]$ [a]. On introduit ensuite la transformée de Fourier spatiale de $p(y_1,0)$ dans la direction longitudinale, selon les conventions adoptées dans ce chapitre :

$$\begin{cases} \tilde{f}(K) &= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1) e^{-iKy_1} \mathrm{d}y_1 \\ f(y_1) &= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(K) e^{+iKy_1} \mathrm{d}K \end{cases}$$

soit finalement l'expression pour la pression acoustique :

$$p(\mathbf{x}) \sim E \sin\theta \sqrt{\frac{2\pi k_a}{R}} \tilde{p}(K = k_a \cos\theta) \tag{4.9}$$

L'expression (4.9) nous montre que la réponse acoustique vers la direction θ en champ lointain est directement proportionnelle à l'intensité du mode spatial $K = k_a \cos\theta$. Ce qui implique que seuls les modes $|K| \leqslant k_a$ sont capables d'exciter le milieu acoustique en champ lointain. En raison de quoi ces modes constituent la région supersonique du paquet d'ondes, par égard à leur vitesse de phase ω/K supérieure à la célérité du son ω/k_a. Ce concept est représenté en schéma sur la figure 4.2.

L'expression (4.9) permet également d'établir une relation directe entre la répartition du spectre des nombres d'onde dans la région $[-k_a; +k_a]$ et la directivité du rayonnement et ce résultat est cohérent avec la littérature. On pourra citer notamment les travaux de Dowling et Hynes [48] et Obrist [123] dans le formalisme de l'analogie de Lighthill. Cette dernière étude présente par ailleurs une discussion et une classification qualitatives sur le concept de région supersonique. On remarque cependant que la direction principale du rayonnement — ou directivité — est pondérée par le facteur $\sin\theta$ ce qui présente un comportement dipolaire dans la direction transverse avec un axe de silence dans la direction longitudinale. Ce comportement dipolaire est une conséquence formelle de la méthode des images et de la construction d'une fonction de Green appropriée.

L'expression (4.9) donne la réponse acoustique dès que la distribution spectrale de la pression (4.2) est connue, ce qui peut être évalué numériquement, comme nous le verrons plus loin. Mais avant cela, avant de tirer parti de l'outil numérique pour une étude paramétrique sur la forme de l'enveloppe A et sa vitesse de convection U_c, poussons plus loin l'analyse pour une distribution spécifique, explicitant formellement les notions de directivité et d'efficacité acoustique liées à l'imposition de la condition limite (4.2). Crighton et Huerre [37] ont étudié le cas d'enveloppes A de forme gaussienne, exponentielle et algébrique. Dans la plupart des contributions qui suivirent, c'est la forme gaussienne qui a reçu le plus d'attention ([6, 30, 123]). Fleury *et al.* [58] ont cependant proposé le cas d'une enveloppe consituée de deux sinusoïdes, représentant la croissance et la décroissance des deux modes d'instabilités d'un jet

a. les transformations $-i = \exp(-i\pi/2)$ et $-1 = \exp(-i\pi)$ ont été appliquées.

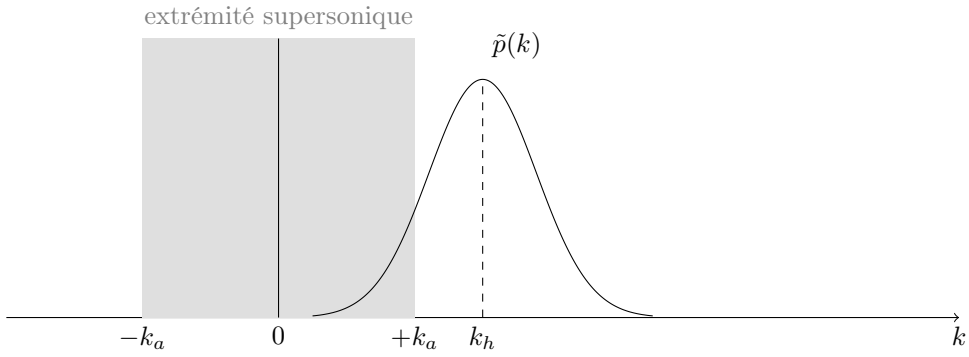


Figure 4.2 – Schématisation du concept d'extrémité supersonique dans l'espace des nombres d'onde k avec une distribution spectrale $\tilde{p}(k)$.

excité. Pour simplifier l'étude analytique, seul le cas de l'enveloppe gaussienne est ici considéré.

Modulation gaussienne du paquet d'ondes

Une enveloppe gaussienne, symétrique, centrée et statique définit la fonction de modulation du paquet d'ondes de pression :

$$A(y_1) = \exp\left(-\frac{y_1^2}{\sigma^2}\right) \tag{4.10}$$

où σ est le paramètre associé à la longueur du paquet d'ondes. Il est généralement appelé l'écart type de la gaussienne et est associé à la demi–longueur de l'enveloppe. Par application de la transformée de Fourier spatiale (dans l'axe longitudinal) à la distribution initiale de pression (4.2), on a :

$$\tilde{p}\,(K) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{4}(k_h - K)^2} \tag{4.11}$$

En substituant $\tilde{p}\,(K)$ dans l'équation (4.9), on obtient :

$$p\,(\mathbf{x}) \sim E\sigma \sin\theta \sqrt{\frac{k_a}{2R}} e^{-\frac{\sigma^2}{4}(k_h - k_a\cos\theta)^2}$$

Dans le cas d'un écoulement subsonique à faible vitesse de phase, le nombre d'onde acoustique est très petit devant le nombre d'onde hydrodynamique ($k_a \ll k_h$). En négligeant les termes d'ordre 2 pour le nombre d'onde acoustique, l'expression précédente peut alors se ramener à :

$$p\,(\mathbf{x}) \underset{M_c \to 0}{\sim} E\sigma \sin\theta \sqrt{\frac{k_a}{2R}} e^{-\frac{\sigma^2 k_h^2}{4}} \times e^{\frac{\sigma^2 k_h^2}{2} M_c \cos\theta} \tag{4.12}$$

en introduisant le nombre de Mach de phase $M_c = U_c/c = k_a/k_h$. Ce résultat a initialement été présenté dans l'article de Crighton et Huerre [37]. Les auteurs l'ont obtenu par la méthode de la phase stationnaire, dont la démarche est en substance,

similaire à l'approximation de champ lointain. L'établissement de l'expression (4.12) par la méthode de la phase stationnaire est présentée en annexe C de ce mémoire. L'expression (4.12) correspond à la solution obtenue par la méthode de la phase stationnaire satisfaisant la relation de causalité dans les conventions de transformée de Fourier définies dans ce chapitre.

L'expression (4.12) va maintenant nous servir de base pour expliciter la notion d'angle de rayonnement maximum, ou directivité, d'une part, et d'efficacité d'autre part. La directivité correspond à l'angle où la pression est maximale, en $\theta = \alpha$, soit

$$\left.\frac{\partial p\left(\mathbf{x}\right)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0 \tag{4.13}$$

Cette équation possède deux solutions, α_1 et α_2 telles que

$$\alpha_{1,2} = \arccos\left[\frac{-1 \pm \sqrt{1+(\sigma^2 k_h^2 M_c)^2}}{\sigma^2 k_h^2 M_c}\right] \tag{4.14}$$

Les isocontours de la solution positive sont présentés à la figure 4.3 pour une plage de nombres de Mach M_c et de longueurs d'enveloppe σk_h. On remarque que l'angle α est initialement situé à $\pi/2$ lorsque $M_c = 0$, puis diminue lorsque la quantité $\sigma^2 k_h^2 M_c$ est augmentée. L'émission sonore est ensuite dirigée vers les plus faibles angles à mesure que le paquet d'ondes s'allonge par rapport à la longueur d'onde hydrodynamique ou que la vitesse de phase est élevée. Par ailleurs, $\sigma^2 k_h^2 M_c = \sigma k_h \times \sigma k_a$, ce qui signifie que les compacités hydrodynamique et acoustique de l'enveloppe influencent simultanément l'angle de rayonnement maximum.

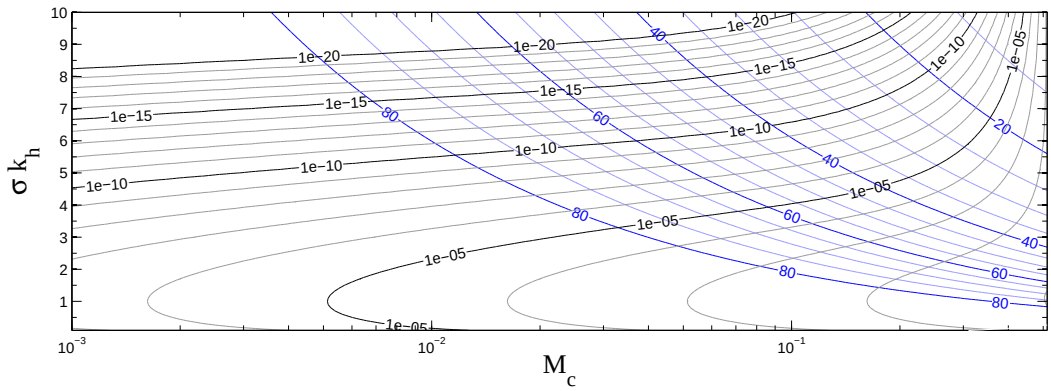


Figure 4.3 – Isocontours de l'angle d'émission maximum (4.14) (pointillés bleus) et de l'efficacité (4.17) (courbes noires) pour une plage de vitesses de phase et de longueur d'enveloppe. Modulation gaussienne, symétrique et centrée du paquet d'ondes de pression.

Efficacité acoustique

Pour quantifier le taux d'énergie libérée dans le milieu propagateur par la condition limite, la notion d'efficacité acoustique η est définie comme le rapport entre la puissance hydrodynamique W_h apportée par la distribution de pression et la puissance acoustique W_a rayonnée en champ lointain.

$$\eta = W_a/W_h$$

avec

$$W_h = \int_{y_2=0} \frac{|p(y_1,0)|^2}{\rho_0 c M_c} \mathrm{d}y_1 \quad ; \quad W_a = R \int_0^{\pi} \frac{|p(R,\theta)|^2}{\rho_0 c} \mathrm{d}\theta \tag{4.15}$$

où le module d'une variable ϕ est noté $|\phi|$. En injectant dans l'expression de la puissance acoustique l'équation (4.9)

$$W_a \sim \frac{2\pi k_a}{\rho_0 c} \int_0^{\pi} \tilde{p}\,(K)^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\theta. \tag{4.16}$$

La puissance acoustique est elle aussi pilotée par les nombres d'onde supersoniques rayonnant à l'angle θ à travers le paramètre $K = k_a \cos\theta$. En remplaçant $\tilde{p}\,(K)$ par son expression obtenue à l'équation (4.11) pour un paquet d'ondes gaussien à faible nombre de Mach M_c, on obtient :

$$W_a \underset{M_c \to 0}{\sim} \frac{\pi}{2\rho_0 c k_h} e^{-\frac{\sigma^2 k_h^2}{2}} I_1\left(\sigma^2 k_h^2 M_c\right)$$

où $I_n\,(z)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n. La puissance est indépendante du rayon R, ce qui est une conséquence de l'approximation de champ lointain. En explicitant maintenant dans l'expression de la puissance hydrodynamique l'intégrale sur y_1 d'après la définition de la condition limite, il vient :

$$W_h = \frac{\sigma}{\rho_0 c M_c} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

La puissance hydrodynamique apportée par un paquet d'ondes gaussien symétrique et centré est directement proportionnelle à la longueur de la modulation σ. En combinant les deux expressions de puissance obtenues avec la définition de l'efficacité acoustique η :

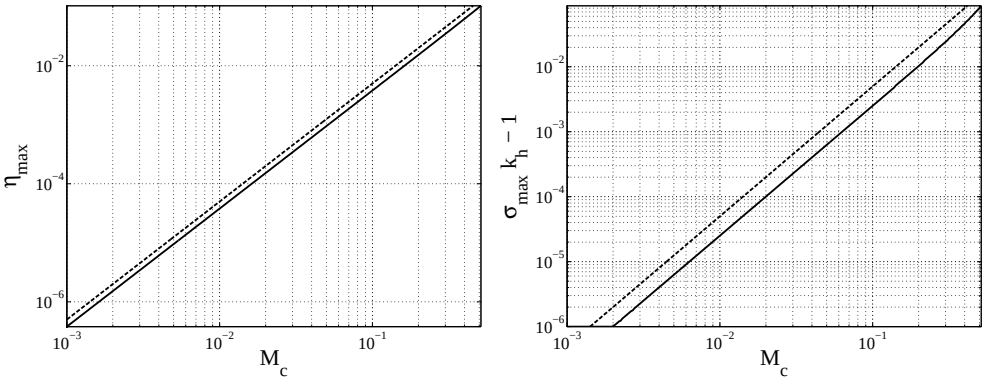
$$\eta \underset{M_c \to 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{M_c}{\sigma k_h} e^{-\frac{\sigma^2 k_h^2}{2}} I_1\left(\sigma^2 k_h^2 M_c\right) \tag{4.17}$$

L'argument σk_h pilotant l'expression (4.17) confirme que la longueur d'onde hydrodynamique est la longueur de référence pour caractériser la longueur d'enveloppe σ. Ce résultat est en accord avec le raisonnement d' Obrist [123] : l'extension de l'enveloppe du paquet d'ondes entraîne un rétrécissement de l'enveloppe dans l'espace des nombres d'ondes autour du nombre d'onde hydrodynamique comme représenté sur le schéma de la figure 4.2. En conséquence, la partie de l'excitation localisée dans la région où $k \in [-k_a; +k_a]$, celle qui rayonnera de l'énergie en champ lointain, sera plus faible ce qui affectera l'efficacité acoustique. Les isocontours de l'efficacité η donnée par l'expression (4.17) sont tracés sur la figure 4.3. La valeur de l'efficacité couvre une gamme étendue sur près de 20 ordres de grandeur, à partir de 10^{-25} pour les faibles M_c et de longues enveloppes, jusqu'à 10^{-2} pour les M_c élevés et les courtes enveloppes. Notons par ailleurs que $\eta = 10^{-25}$ constitue le seuil d'affichage des résultats présentés par la suite.

La fonction de Bessel modifiée de première espèce croît exponentiellement. L'efficacité acoustique atteint alors un maximum pour une certaine valeur σ que l'on note σ_{max} et qui est exprimée par la solution

$$\sigma_{max} k_h - \sqrt{\frac{3 I_1(\sigma_{max}^2 k_h^2 M_c)}{2 M_c I_0(\sigma_{max}^2 k_h^2 M_c) - I_1(\sigma_{max}^2 k_h^2 M_c)}} = 0 \tag{4.18}$$

Cette valeur est proche de l'unité comme on peut le constater sur la figure 4.3 jusqu'à $M_c = 0.5$. L'amplitude de l'efficacité maximum est déterminée par le nombre de Mach de phase M_c mais toujours localisée pour $\sigma k_h \approx 1$. Il doit être souligné que cette amplitude évolue comme M_c^2 (figure 4.4) ; la valeur de σk_h pour laquelle est atteint ce maximum d'efficacité s'écarte de l'unité également en M_c^2 (figure 4.4(b)). On pourra reprocher à ces conclusions leur validité discutable à mesure que M_c est augmenté, c'est–à–dire lorsque la compacité de l'onde hydrodynamique s'atténue. L'étude de l'efficacité acoustique est alors conduite par l'outil numérique pour évaluer directement l'expression (4.9).



(a) Amplitude. (b) Déviation.

Figure 4.4 – Évolution de l'amplitude d'efficacité maximum (gauche) et sa déviation par rapport à l'unité (droite) avec loi de puissance en M_c^2 (pointillés).

Implantation numérique

Cette section présente le développement d'un outil numérique pour résoudre l'équation homogène de Helmholtz (4.1) dans le formalisme de Kirchhoff, c'est–à–dire à partir de l'équation (4.9). La surface de Kirchhoff $\Sigma(\mathbf{y})$ est définie par une ligne d'une longueur L_{y_1} contenant 80 longueurs d'onde hydrodynamique $\lambda_h = 2\pi/k_h$ discrétisée par un pas d'espace $\delta y_1 = \lambda_h/40$ d'après une étude de convergence réalisée précédemment [137]. L'angle d'observation θ est quant à lui discrétisé avec 5 points par unité d'angle. La surface de Kirchhoff et le domaine observateur sont centrés dans la direction longitudinale (y_1 et x_1 respectivement). L'équation (4.9) nécessite l'implantation d'un algorithme de tansformée de Fourier dans la direction y_1. Cet algorithme est écrit selon une règle d'intégration par trapèzes plutôt que par utilisation des algorithmes existants de transformée de Fourier discrète, ce qui fournit une meilleure description des faibles nombres d'onde et permet la capture du mode spécifique $K = k_a \cos\theta$ lors d'un échantillonnage régulier sur θ.

Cependant, une telle procédure entraîne deux sources d'erreurs : d'une part, la rapide décroissance vers le zéro machine de l'enveloppe gaussienne et donc, de son

spectre en fréquence et d'autre part, le fenêtrage de l'enveloppe spectrale lors de l'intégration de la transformée de Fourier en limites finies. Le fenêtrage désigne le traitement de la troncature effectuée lors du calcul de la transformée de Fourier d'un signal. Dans le cas d'une fonction modulée avec une enveloppe spatiale étendue, lorsque la fonction est approchée dans ses limites, la troncature, ou la fermeture de l'échantillonnage, va induire l'apparition de lobes secondaires dans l'espace des nombres d'onde. Ces lobes seront situés de part et d'autre du lobe principal. Plus l'enveloppe spatiale est étendue, plus sera étroite sa transformée de Fourier dans le domaine des nombres d'onde et plus seront importants les lobes secondaires, et inversement, le cas extrême étant illustré par la fonction de Dirac mentionnée au chapitre 3. Une illustration de ce propos est présentée à la figure 4.5 pour deux longueurs d'enveloppe. La transformée de Fourier de la plus grande enveloppe possède des lobes secondaires.

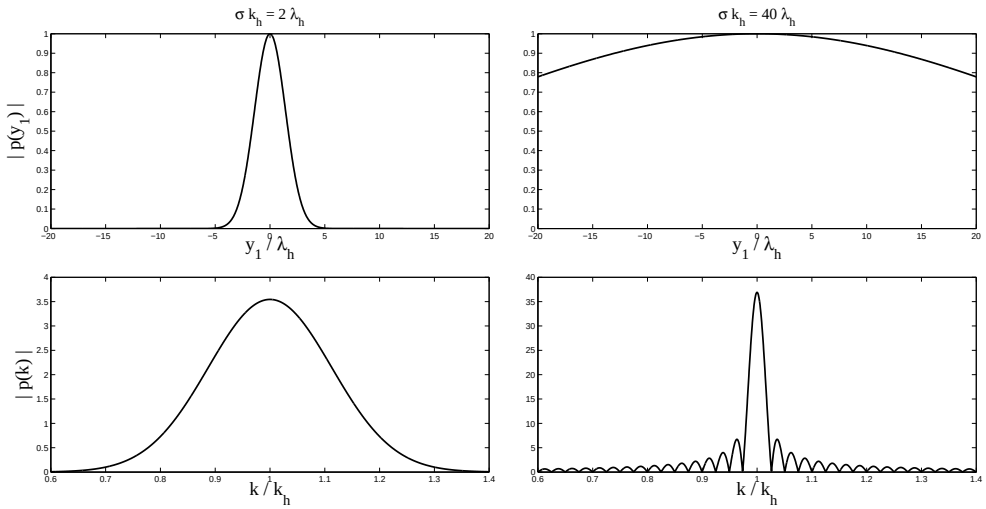


Figure 4.5 – Illustration du phénomène de fenêtrage en traitement du signal sur l'enveloppe d'un paquet d'ondes.

En pratique, dans notre cas, on constate une valeur limite pour $\sigma k_h = 12$. Au–delà de ce seuil, la procédure numérique souffre des erreurs évoquées plus haut pour l'évaluation de l'intégrale de la puissance acoustique et affiche des lobes secondaires dus à la troncation de l'enveloppe spatiale. Ceci a pour effet de présenter une puissance acoustique qui est virtuellement surestimée alors que le zéro machine était atteint. Ce domaine où l'on perd la validité de l'intégration augmente avec le nombre de Mach de phase M_c et peut être légèrement mieux contrôlé par le recours à des procédures d'intégration d'ordres supérieurs ou des algorithmes plus élaborés. Mais l'apparition de ces erreurs ne peut être tout à fait empêchée par la nature même de la procédure numérique. La figure 4.6 présente les isocontours de l'angle de rayonnement maximum et de l'efficacité du paquet d'ondes d'après leur évaluation numérique par la procédure que l'on vient de décrire. Cette évaluation est comparée avec les expressions analytiques de la section précédente (équations (4.14) et (4.17) respectivement). L'accord est satisfaisant pour les faibles vitesses de phase et les petites enveloppes. Avec l'augmentation de la vitesse de phase, les expressions analytiques perdent leur validité ; les isocontours dévient alors des solutions numériques.

Cette déviation est accentuée avec l'augmentation de la longueur d'enveloppe σk_h.

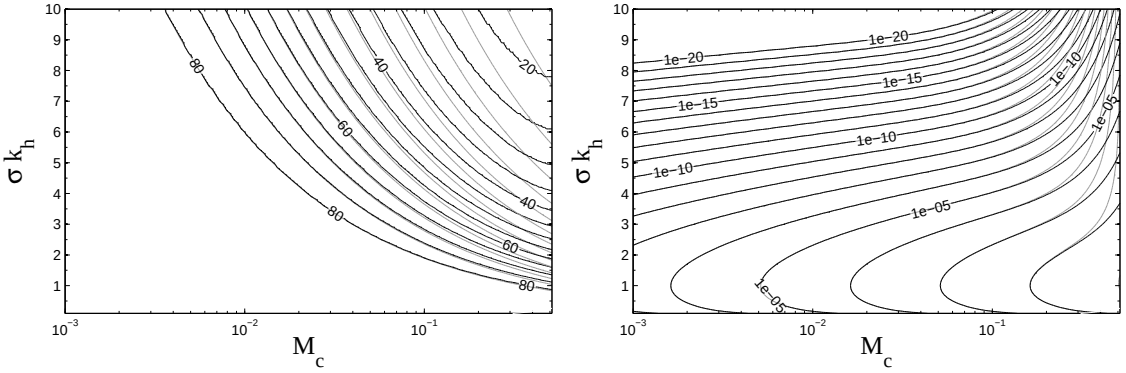


Figure 4.6 – Prédiction numérique (courbes noires) et analytique (courbes grises) pour une plage de vitesses de phase et de longueurs d'enveloppe. **Gauche :** Angle d'émission maximum. **Droite :** Efficacité. Modulation gaussienne, symétrique et centrée du paquet d'ondes de pression. On remarque bien l'écart qui s'accentue avec la vitesse de phase.

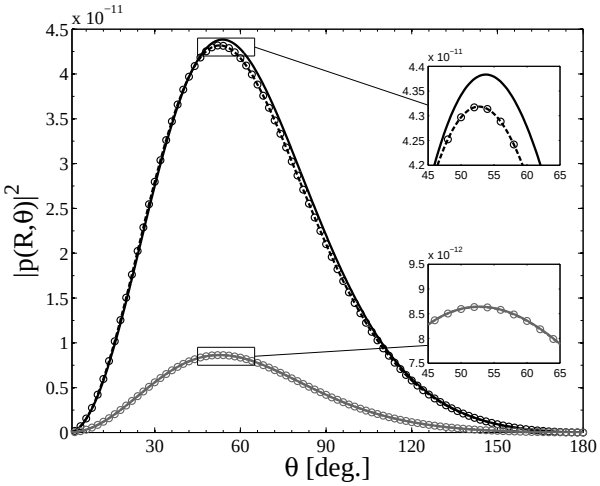


Figure 4.7 – Validation de l'expression en champ lointain de l'intégrale de Kirchhoff (4.9) (tirets) avec l'intégrale exacte (4.5) (traits pleins) et l'expression analytique (4.12) (symboles). $M_c = 0.05$; $\sigma k_h = 2\pi$. Observation à $R = 1\lambda_a$ (noir) et $R = 5\lambda_a$ (gris).

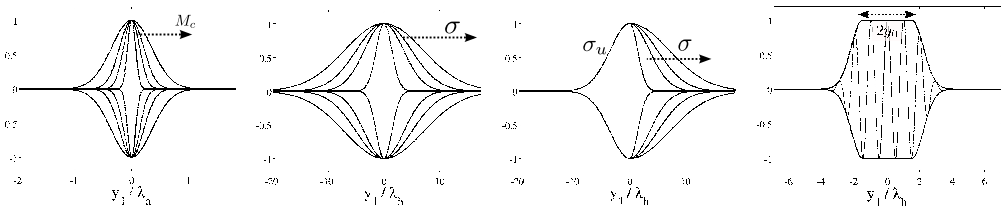
Une seconde validation est mise en place à travers la comparaison de l'intensité acoustique. En champ lointain, cette quantité approche $|p(R,\theta)|^2 / \rho_0 c$ [103]. On compare l'expression de la pression acoustique en champ lointain (4.9), avec l'intégrale de Kirchhoff (4.5) et l'expression analytique (4.12) pour le paquet d'ondes gaussien, symétrique et centré. L'intensité acoustique est présentée à la figure 4.7 pour deux rayons d'observation $R = 1\lambda_a$ and $R = 5\lambda_a$ ($\lambda_a = 2\pi/k_a$) avec $\sigma = \lambda_h$ pour une vitesse de phase telle que $M_c = 0.05$. Un très bon accord est obtenu pour $R = 5\lambda_a$ tandis qu'une légère divergence a lieu pour $R = 1\lambda_a$ pour l'intégrale de Kirchhoff sans l'approximation de champ lointain (4.5) et avec cette approximation (4.9) d'une part et l'expression analytique en modulation gaussienne symétrique d'autre part. On peut donc dire qu'aux grands rayons d'observation, la comparaison des équations (4.12) et (4.9) montre la bonne implantation de l'algorithme de transformée

de Fourier. La comparaison des équations (4.9) et (4.5) indique que le champ lointain est vite atteint puisque la corrélation est fine dès une observation à 5 longueurs d'onde acoustique. Dans la suite de la section 4.2 les résultats présentés sont calculés d'après l'approximation de champ lointain (4.9) par souci d'économie numérique.

Étude paramétrique

Dans la suite de cette section, l'outil numérique remplace l'étude analytique pour traiter des configurations plus « exotiques », d'abord dans un milieu propagatif au repos. La prise en compte d'un milieu convecté est ensuite considérée. Trois cas sont étudiés :

1. L'influence d'une gamme étendue de vitesses de phase est testée avec de grandes valeurs de M_c allant de 0,002 jusqu'à 0,900 pour une enveloppe gaussienne symétrique et centrée. Puisque $M_c = k_a/k_h$, ce paramètre pilote la compacité acoustique de l'onde hydrodynamique convectée ainsi que de son enveloppe. L'influence de M_c sur la compacité est visible à la figure 4.8(a) où la coordonnée longitudinale est adimensionnée par la longueur d'onde acoustique. Le nombre de Mach de phase retarde la limite de précision en σk_h discutée précédemment ce qui autorise l'étude de plus grandes enveloppes (figure 4.8(b)).
2. Le cas asymétrique est ensuite testé, ce qui rapproche la perspective des cas pratiques de structures hydrodynamiques comme celles rencontrées dans le cas de la couche de mélange, dont la pente de croissance est différente de la décroissance (voir à ce propos la figure 7 de la référence [103]). La longueur du paquet d'ondes est fixée dans la direction de l'amont et est dénommée σ_u tandis que σ est étendue selon le modèle du paquet d'ondes symétrique (figure 4.8(c)). Une telle forme de paquet d'ondes se retrouve également dans la littérature (voir pour cela Papamoschou [125] et Koenig *et al.* [78]). Notons qu'aucune différence sur l'efficacité et la directivité n'est observée quant à l'orientation de l'asymétrique [137] et ce, même pour un milieu observateur en mouvement.
3. Une forme plus élaborée est envisagée qu'on désigne comme un paquet d'ondes « plateau » défini par deux paquets d'ondes symétriques et centrés en $\pm y_0$ et reliés par un plateau (figure 4.8(d)). Cette forme d'enveloppe est une description simplifiée d'un train de structures cohérentes avec un état stable ou saturé entre l'expansion et l'amortissement.



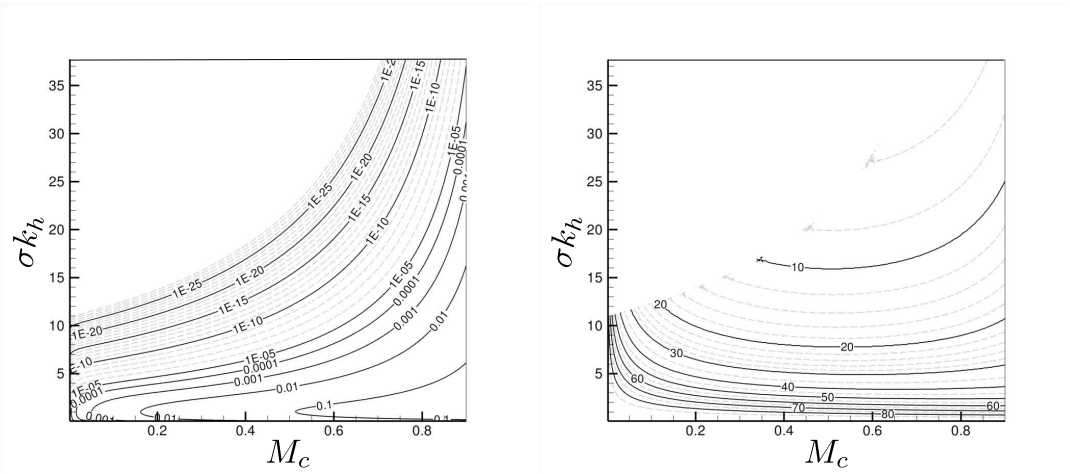
(a) Évolution de M_c. (b) Évolution de σ. Symétrique. (c) Évolution de σ. Asymétrique. (d) Paquet d'ondes plateau.

Figure 4.8 – Configurations génériques des excitations par paquets d'ondes.

Les effets de ces changements d'enveloppe sont quantifiés sur l'efficacité acoustique η et l'angle de rayonnement maximum α pour un rayon d'observation R fixé en champ lointain.

4.2.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation

Modulation gaussienne, symétrique et centrée
La figure 4.9 présente les effets de la vitesse de phase M_c et de la longueur de la modulation σk_h sur l'efficacité η et l'angle de rayonnement α.



(a) Isocontours de l'efficacité.

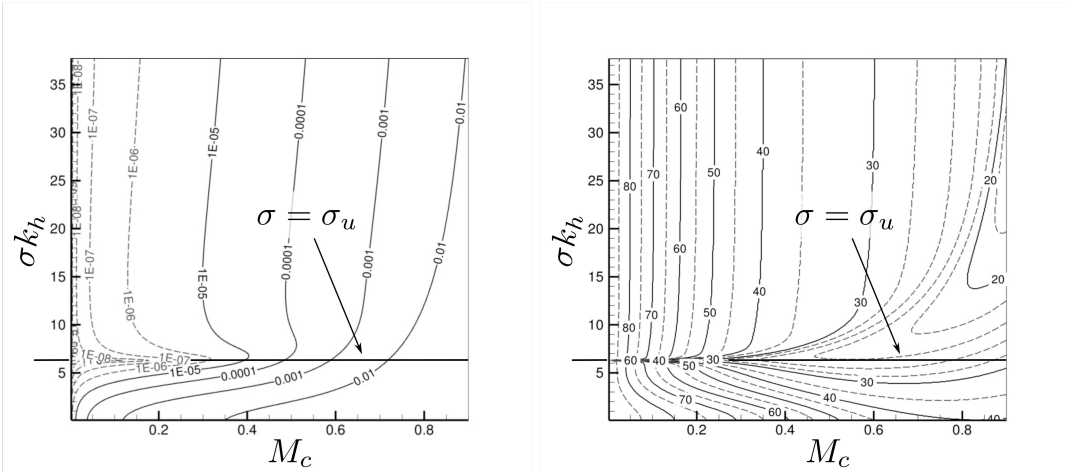
(b) Isocontours de l'angle d'émission maximum (degrés).

Figure 4.9 – Influence de la vitesse de phase et de la longueur d'enveloppe. Modulation gaussienne, symétrique et centrée.

L'augmentation de la vitesse de phase a deux effets : une augmentation exponentielle de l'efficacité comme escompté par la perte de compacité hydrodynamique et une directivité qui va diminuer vers les faibles angles tant que $M_c < 0{,}4$, se stabiliser aux valeurs intermédiaires de M_c puis augmenter à nouveau pour $M_c > 0{,}6$. Pour de faibles longueurs de modulation toutefois, le plateau est atteint à plus bas M_c et dure plus longtemps. Le comportement à faibles M_c est consistant avec les observations reportées par Moser *et al.* [117] quant à l'influence du nombre de Mach de convection sur la directivité pour une couche de mélange subsonique : l'angle de rayonnement principal diminue avec l'augmentation du nombre de Mach. Pour une vitesse de phase donnée, l'efficacité maximum est atteinte pour $\sigma k_h \sim 1$ comme l'étude analytique préliminaire l'a suggéré (équation (4.18)). La longueur de modulation a une forte influence sur l'efficacité et la directivité : une modulation courte entraîne un rayonnement d'une haute efficacité et dirigé principalement vers la direction transverse tandis qu'une longue modulation va au contraire rayonner vers les faibles angles avec une efficacité plus modeste. La vitesse à laquelle le rayonnement se couchera vers les bas angles est par ailleurs accentuée par la vitesse de phase.

Modulation gaussienne, asymétrique et centrée
Dans le cas d'une modulation non symétrique, caractérisée par un taux d'amplification différent du taux de décroissance, l'influence de la vitesse de phase et de la longueur de modulation est regardée pour deux longueurs amont $\sigma_u k_h = 2\pi$ et $\sigma_u k_h = 20\pi$. L'intérêt pour ces deux longueurs réside dans leur comportement qualitativement différent : La plus petite modulation $\sigma_u k_h = 2\pi$ est acoustiquement compacte et présente une haute efficacité dans le cas d'une modulation symétrique.

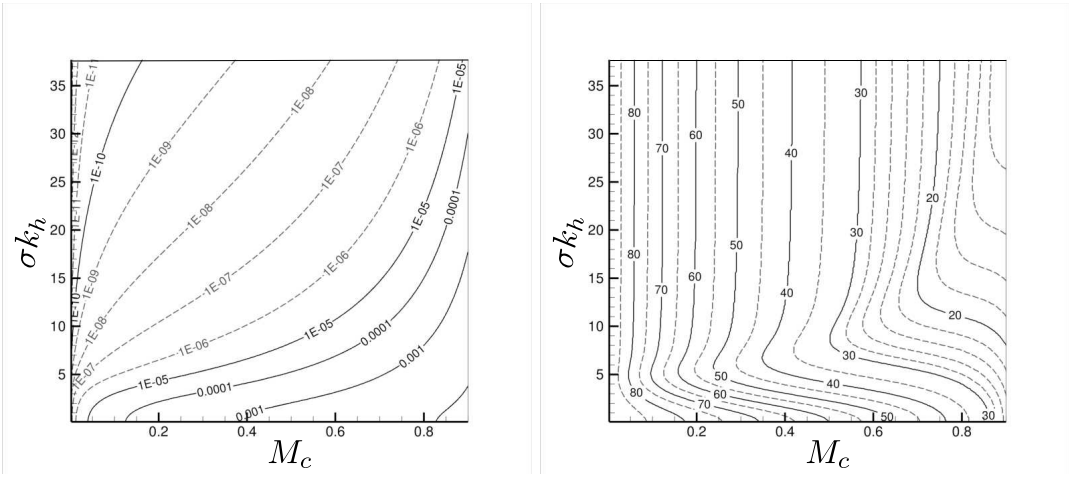
La modulation plus longue $\sigma_u k_h = 20\pi$ présente quant à elle une directivité marquée dans le cas symétrique.



(a) Isocontours de l'efficacité.

(b) Isocontours de l'angle d'émission maximum (degrés).

Figure 4.10 – Influence de la vitesse de phase et de la longueur d'enveloppe. Modulation gaussienne, asymétrique et centrée. $\sigma_u k_h = 2\pi$.



(a) Isocontours de l'efficacité.

(b) Isocontours de l'angle d'émission maximum (degrés).

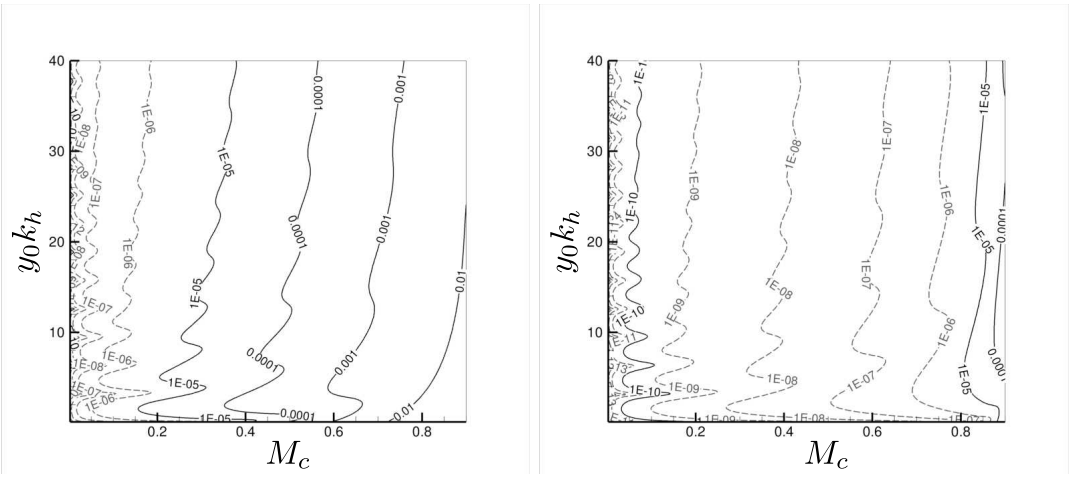
Figure 4.11 – Influence de la vitesse de phase et de la longueur d'enveloppe. Modulation gaussienne, asymétrique et centrée. $\sigma_u k_h = 20\pi$.

Au regard des figures 4.10 et 4.11 il apparaît qu'une modulation asymétrique présente un comportement singulier par rapport au cas symétrique. La chute d'efficacité sur la figure 4.10(a) se produit lorsque $\sigma = \sigma_u$ où l'on se retrouve dans le cas symétrique. Voilà un résultat intéressant : quand un paquet d'ondes symétrique de grande modulation ne rayonne qu'à très faible puissance acoustique, son homologue non symétrique est comparativement plus puissant. Quand $\sigma < \sigma_u$, l'augmentation à la fois de σ et M_c augmente l'efficacité. Quand $\sigma > \sigma_u$ en revanche, l'efficacité n'est plus piloté que par la seule vitesse de phase. Par ailleurs et du fait de l'asymétrie, l'angle d'émission maximum est également influencé par ce seul paramètre, quelle

que soit la longueur de la modulation, tant que $\sigma \gtrsim \lambda_h/(1-M_c)$. En–deça de cette limite, l'angle d'émission est dirigé vers les faibles angles aussi bien par la longueur de la modulation que par la vitesse de phase. Une telle différence de comportement entre le cas symétrique (figure 4.9(b)) et le cas asymétrique vaut d'être soulignée. Ces observations mènent à la conclusion qu'à faible vitesse de phase, l'introduction d'une asymétrie — même très légère — dans la modulation entraîne une forte hausse d'efficacité acoustique. La directivité cependant est plus stable si la longueur de la modulation excède la longueur d'onde hydrodynamique.

Modulation plateau symétrique

Pour une modulation en plateau, de la puissance hydrodynamique est ajoutée lorsqu'augmente y_0 ce qui peut augmenter mécaniquement la puissance acoustique. Dans un premier temps, seule l'efficacité est présentée à la figure 4.12 où l'axe vertical représente le paramètre y_0 pour $\sigma k_h = 2\pi$ and $\sigma k_h = 10\pi$. La directivité fait l'objet d'une discussion ultérieure.



(a) $\sigma k_h = 2\pi$.

(b) $\sigma k_h = 10\pi$.

Figure 4.12 – Influence de la vitesse de phase et de la longueur d'enveloppe. Isocontours de l'efficacité. Modulation plateau, symétrique et centrée.

La figure 4.12 présente des résultats cohérents avec les observations précédentes. En effet, l'augmentation des longueurs d'amplification et de décroissance de la modulation réduit l'efficacité à rayonner de l'acoustique en champ lointain. En revanche, augmenter le parametre y_0 pour une longueur donnée a des conséquences plus modestes puisque l'efficacité est surtout pilotée par les taux d'amplification et de décroissance plutôt que par la longueur du plateau. La modulation $\sigma k_h = 10\pi$ correspond à un faible taux de croissance (et donc à une modulation étendue dans le cas symétrique) et elle affiche une plus haute efficacité que le cas symétrique où $y_0 k_h = 0$ (voir la figure 4.9(a)). Une pseudo–périodicité par rapport à y_0 est observée pour l'efficacité (que l'on retrouve également sur la directivité), surtout pour de faibles vitesses de phase et de courtes modulations. La pression acoustique est calculée d'après l'équation (4.9) dans laquelle apparaît la transformée de Fourier de la distribution initiale de pression $\tilde{p}\,(K)$. Dans le cas du paquet d'ondes plateau, on a :

$$\tilde{p}\,(K) = \frac{\sin\left[(K-k_h)y_0\right]}{\pi(K-k_h)} + \int_{+y_0}^{+\infty} \frac{\cos\left[(K-k_h)y_1\right]}{\pi} e^{-(y_1+y_0)^2/\sigma^2} \mathrm{d}y_1$$

La pseudo–périodicité sur le paramètre y_0 de la modulation se produit par la présence de la fonction *sinus* ainsi que celle du paramètre spatial y_1 — donc dans la direction de modulation — dans la fonction *cosinus* de l'intégrale, entrainant alors les oscillations observées sur l'efficacité à la figure 4.12.

En complément de l'analyse d'une pseudo–périodicité, les figures 4.13 et 4.14 offrent une perspective supplémentaire sur la dynamique de la directivité. Celle–ci présente un caractère multilobes et l'angle respectif de chaque lobe est repéré et affiché sur les deux figures susmentionnées.

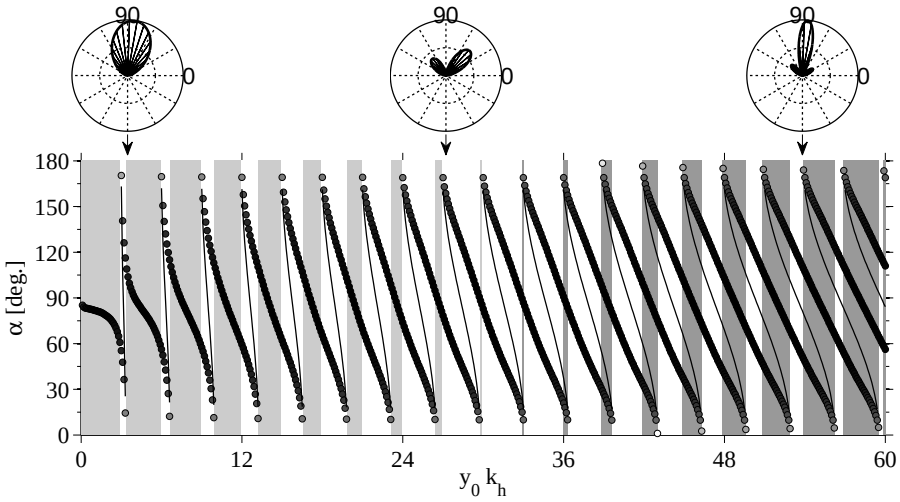


Figure 4.13 – Dynamique de directivité du paquet d'ondes plateau selon y_0k_h. Chaque point est l'angle local d'émission maximum de chaque lobe, noirci selon son intensité acoustique. Les traits pleins représentent l'angle des axes de silence. Le fond de l'image est coloré selon le nombre de lobes (gris clair : 1, blanc : 2, gris foncé : 3). $\sigma = \lambda_h$, $M_c = 0.05$.

Sur la figure 4.13, l'évolution des lobes est suivie avec celle du paramètre y_0k_h et des diagrammes polaires représentatifs viennent s'ajouter pour illustrer la dynamique de directivité. Lorsqu'apparaissent plusieurs lobes, des axes de silence se produisent et sont alors représentés par des traits pleins noirs sur la figure 4.13. Lorsque y_0k_h est faible, le paquet d'ondes possède alternativement un et deux lobes de directivité ; cette dernière configuration durant plus longtemps à mesure que y_0k_h augmente. Soudain, une valeur critique est atteinte pour $y_0k_h \simeq 30$ — quelle que soit la longueur de modulation — reproduisant alors le même schéma d'alternance de lobes, maintenant oscillant entre deux et trois lobes de directivité. Cette alternance de lobes ainsi que la pseudo–périodicité évoquée plus haut à la figure 4.12 nous semble être une conséquence de la troncature de l'enveloppe du paquet d'ondes. La discussion sur le fenêtrage (figure 4.5) avait mis en évidence l'apparition de lobes secondaires comme une conséquence de la troncature imposée par la taille de l'échantillon. Dans le cas présent, cette troncature semble due à des longueurs d'amplification et de décroissance comparativement plus faibles, mettant alors en évidence l'écart de phase entre le début et la fin de l'onde hydrodynamique convectée dans

l'enveloppe. L'évolution du nombre de lobes avec la vitesse de phase M_c est présentée sur la figure 4.14. Le nombre de lobes augmente avec la vitesse de phase et celui–ci possède une certaine symétrie par rapport à la direction transverse (90°).

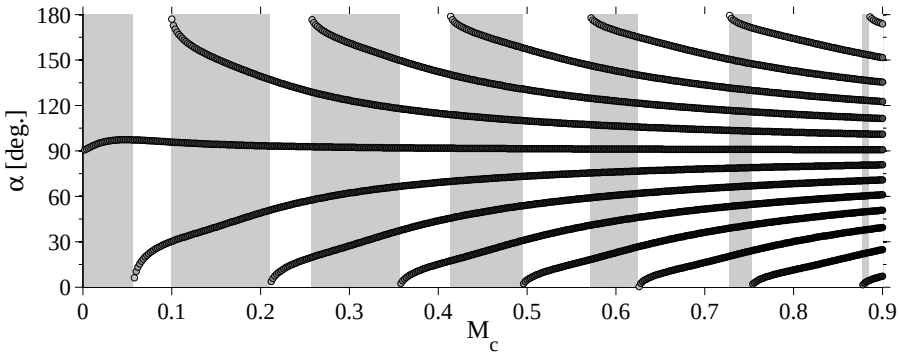


Figure 4.14 – Dynamique de directivité du paquet d'ondes plateau selon M_c. Chaque point est l'angle local d'émission maximum de chaque lobe, noirci selon son intensité acoustique. Le fond de l'image est alternativement coloré en gris (nombre de lobes impair) et blanc (nombre de lobes pair). $\sigma = \lambda_h$, $y_0 k_h = 20$.

4.3 Extension à un milieu propagatif en mouvement uniforme

Le domaine observateur $x_2 > 0$ est maintenant en mouvement uniforme à un nombre de Mach M_∞. L'étude d'une propagation en milieu au repos a permis de mettre en évidence les paramètres et les conditions les plus influents. La considération d'un milieu en mouvement va alors permettre de comprendre comment ces paramètres et ces conditions affectent leur environnement lorsque celui–ci est soumis à une vitesse de convection. Cela permet également de se rapprocher de configurations d'écoulements plus réalistes où des structures cohérentes jouent un rôle majeur comme dans le cas d'un écoulement de cavité ou une couche–limite turbulente et dont les ondes acoustiques se propagent en présence d'un écoulement externe uniforme [75].

4.3.1 Étude analytique en milieu convecté

En faisant appel à la transformation des coordonnées de Prandtl–Glauert, la fonction de Green convectée s'exprime par [64]

$$G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{1}{4i\beta}\exp\left(i\frac{M_\infty k_a r_1}{\beta^2}\right) H_0^{(1)}\left(\frac{k_a r_\beta}{\beta^2}\right) \tag{4.19}$$

avec $r_i = x_i - y_i$, $\beta^2 = 1 - M_\infty^2$ et $r_\beta = \sqrt{r_1^2 + \beta^2 r_2^2}$. La dérivée de $G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ par rapport à y_2 donne

$$\frac{\partial G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2} = \frac{1}{4i\beta} k_a \frac{r_2}{r_\beta}\exp\left(i\frac{M_\infty k_a r_1}{\beta^2}\right) H_1^{(1)}\left(\frac{k_a r_\beta}{\beta^2}\right) \tag{4.20}$$

De la même manière que pour r dans la section précédente en milieu au repos, on peut approcher le rayon r_β en champ lointain à l'aide d'un développement limité

autour des coordonnées de la source ($\mathbf{y}$) par

$$r_\beta \underset{|\mathbf{x}|\gg|\mathbf{y}|}{\sim} x_\beta - \frac{x_1}{x_\beta} y_1 \quad \text{avec} \quad x_\beta = \sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_2^2}$$

En utilisant l'approximation de la fonction de Hankel aux grands arguments (4.6), l'équation (4.20) devient

$$\frac{\partial G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_2} = \frac{1}{i} \sin\theta_\beta \sqrt{\frac{k_a}{8\pi x_\beta}} e^{\left[i \frac{k_a}{\beta^2} \left(M_\infty x_1 + x_\beta - (M_\infty + \frac{x_1}{x_\beta}) y_1 \right) - 3\frac{\pi}{2} \right]} \tag{4.21}$$

avec $\sin\theta_\beta = x_2/x_\beta$. Malgré la convection, la configuration de la surface de Kirchhoff est la même que pour la section 4.2 et donc, l'équation (4.5) est toujours valide. La substitution de la dérivée de la fonction de Green convectée dans (4.5) donne :

$$p(\mathbf{x}) \sim \sin\theta_\beta \sqrt{\frac{2\pi k_a}{x_\beta}} e^{i \left[\frac{k_a x_\beta}{\beta^2} (M_\infty \cos\theta_\beta + 1) - \frac{\pi}{4} \right]} \tilde{p}(K_\beta) \tag{4.22}$$

avec $K_\beta = k_a (M_\infty + \cos\theta_\beta)/\beta^2$ et $\cos\theta_\beta = x_1/x_\beta$. Une nouvelle expression pour l'approximation en champ lointain de l'intégrale de Kirchhoff est ainsi obtenue. La réponse acoustique d'une excitation aéroacoustique dans un milieu convecté est alors pilotée par le mode $k = k_a (M_\infty + \cos\theta_\beta)/\beta^2$ dans la « direction » θ_β. On constate ici l'effet de la convection sur les modes rayonnants, qui vient s'ajouter à la vitesse de phase. La convection amène ainsi les modes ayant une *vitesse relative* supersonique à rayonner, malgré une vitesse de phase subsonique. Le cas le plus éloquent est obtenu dans la direction de propagation longitudinale aval (soit lorsque $\theta = 0°$), où le mode rayonnant est alors $K_\beta = k_a/(1-M_\infty) \geq k_a$, indiquant bien le rayonnement de modes subsoniques. Afin de poursuivre l'analyse, cette expression peut être développée dans le cas d'une excitation apportée par un paquet d'ondes de modulation gaussienne, symétrique et centrée ; ce qui donne, pour une faible vitesse de phase

$$p(\mathbf{x}) \sim \sigma e^{-\frac{\sigma^2 k_h^2}{4}} \sin\theta_\beta \sqrt{\frac{k_a}{2x_\beta}} e^{i \left[\frac{k_a x_\beta}{\beta^2} (M_\infty \cos\theta_\beta + 1) - \frac{\pi}{4} \right]} \times e^{\frac{\sigma^2 k_h^2}{2} \frac{M_c}{\beta^2} (M_\infty + \cos\theta_\beta)} \tag{4.23}$$

La similitude avec l'expression (4.12) mérite d'être relevée. Certainement, le facteur de convection modifie l'espace à travers x_β et θ_β au lieu de R et θ comme dans la section 4.2. Mais au–delà de ça, le seul effet véritable apporté par l'écoulement est le facteur $\exp[(\sigma^2 k_h^2/2) \times (M_c M_\infty/\beta^2)]$. Il en résulte une pression acoustique qui augmente avec la vitesse de convection de l'écoulement. Puisque la puissance hydrodynamique apportée reste inchangée (tant que reste fixe σk_h), l'efficacité acoustique peut ainsi être augmentée par le même facteur [b]. Par ailleurs, le nombre de Mach de convection M_∞ est pondéré par $\cos\theta_\beta$ ce qui affecte la directivité. L'expression

b. au carré, d'après la relation (4.15)

pour la propagation dans un milieu au repos est bien retrouvée lorsque $M_\infty = 0$ dans l'équation (4.22).

L'expression (4.22) est calculée avec l'outil numérique mis en place dans la section 4.2 dans le cas d'un écoulement au repos. Et les mêmes longueurs de modulation sont utilisées. Pour étudier l'impact de la vitesse de convection, le nombre de Mach à l'infini M_∞ varie par conservation du rapport entre les deux nombres de Mach M_c/M_∞. Ce rapport est justifié d'après l'observation qu'en configuration réelle, l'écoulement externe pilote la convection des structures cohérentes. Typiquement on rencontre un rapport $M_c/M_\infty \sim 0{,}3$ en écoulement de couche–limite, $M_c/M_\infty \sim 0{,}5$ en écoulement de cavité, et $M_c/M_\infty \sim 0{,}7$ en sillage. Pour les résultats présentés dans la suite de cette section, la valeur maximale du nombre de Mach à l'infini est $M_\infty = 0{,}8$, ce qui entraîne donc différentes valeurs maximales de M_c pour un rapport des nombres de Mach donné.

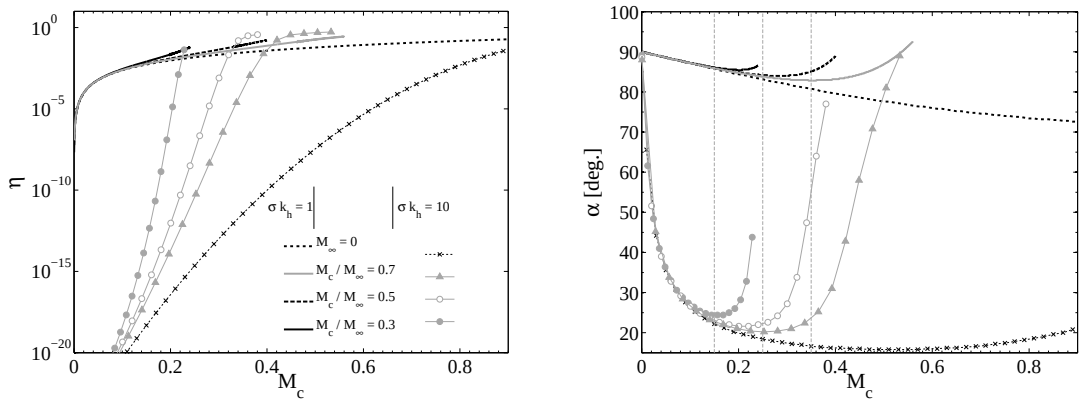
4.3.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation avec convection

Modulation gaussienne, symétrique et centrée

Afin de limiter la représentation des résultats, seuls les paramètres les plus représentatifs sont sélectionnés d'après la section 4.2. Deux longueurs de modulation sont ainsi testées ($\sigma k_h = 1$ et $\sigma k_h = 10$). La longueur de modulation la plus courte a été identifiée comme celle d'efficacité maximum quelle que soit la vitesse de phase M_c (figure 4.9). La seconde longueur arbore des comportements variés selon M_c en milieu statique, puisque passant par les trois régimes identifiés précédemment, fournissant ainsi des cas où la directivité est marquée vers 30° pour les plus faibles valeurs de M_c, un angle d'émission stabilisé vers les faibles angles pour les valeurs intermédiaires de M_c et une croissance vers les angles élevés pour les plus hautes valeurs de M_c (figure 4.9).

La figure 4.15 représente ces deux longueurs de modulation pour trois rapports de nombres de Mach M_c/M_∞ issus des configurations réalistes d'écoulements évoquées en introduction de cette section. Le cas statique $M_\infty = 0$ correspondant et directement issu de la section 4.2 est ajouté pour comparaison. Le nombre de Mach de phase est indiqué sur l'axe horizontal et sa valeur maximale est imposée par le rapport des nombres de Mach fixé. La figure 4.15(a) montre l'efficacité acoustique et la figure 4.15(b) montre l'angle d'émission maximum, en degrés.

L'augmentation de l'efficacité avec M_c et M_∞ est en accord avec les prévisions de l'étude analytique (4.23). Les conclusions qui ont été portées sur l'effet du nombre de Mach de phase M_c sur l'efficacité sont retrouvées dans le cas d'un milieu en mouvement uniforme : à σk_h donné, plus haut est le M_c, plus haute sera l'efficacité (figure 4.15(a)). On remarque également que la longueur de modulation σ à un effet important sur l'efficacité. Une modulation plus courte entraîne une plus haute efficacité comme ce qui a été mentionné à la section 4.2. La longueur $\sigma k_h = 1$ est relativement efficace ($\sim 10^{-2}$) et ne semble pas être grandement affectée par la convection du milieu observateur. On retrouve même un comportement similaire au cas statique à faible M_c. La longueur $\sigma k_h = 10$ est en revanche beaucoup moins efficace aux faibles M_c mais augmente rapidement jusqu'à rejoindre des conditions de haute efficacité, croiser le cas de courte modulation ($\sigma k_h = 1$) et même, le dépasser. Une plus longue modulation est donc plus dépendante de la convection de l'écoulement. On constate ainsi qu'à la fin, lorsque $M_\infty = 0{,}8$, le même ordre de grandeur



(a) Efficacité.

(b) Angle d'émission maximum.

Figure 4.15 – Influence de la convection du milieu observateur. Cas symétrique. Les pointillés gris verticaux indiquent lorsque $M_\infty = 0{,}5$ est atteint pour les différents rapports de Mach.

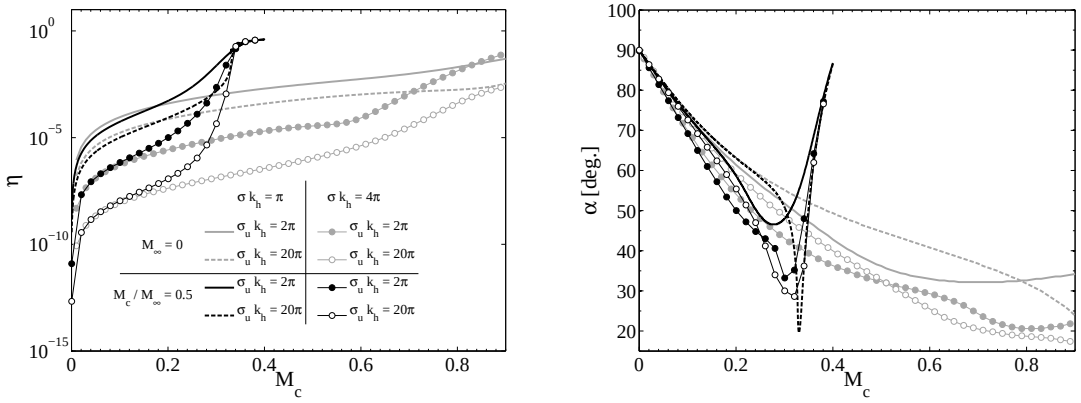
est atteint pour toutes les longueurs et tous les rapports de Mach, autour de 60% pour les cas les plus bruyants. Dès qu'est atteinte une valeur spécifique des nombres de Mach, l'efficacité ne dépend plus alors de la longueur de modulation. De telles efficacités méritent d'être soulignées, au moins en ce qui concerne l'aéroacoustique.

La section 4.2 a mis en évidence que l'augmentation de la vitesse de phase conduit l'angle d'émission maximum vers les faibles angles avant de le stabiliser pour croître de nouveau. Le même comportement est retrouvé lorsque l'on augmente le rapport des nombres Mach, ce qui indique la forte influence du nombre de Mach de phase. On peut alors distinguer deux tendances sur la figure 4.15(b). Pour de faibles longueurs, l'angle d'émission semble peu perturbé et reste relativement stable. Pour de grandes longueurs, le déplacement de l'angle d'émission vers les faibles angles est alors accentué, ainsi que le plateau puis, de nouveau, l'augmentation autour de $M_\infty = 0{,}5$, représenté sur la figure 4.15(b) par les pointillés gris verticaux. De fait, on remarque cette même tendance pour les deux longueurs affichées, mais elle est renforcée pour les grands σ. Une valeur spécifique du nombre de Mach de phase M_c est sélectionnée selon le rapport des nombres de Mach et celle–ci éradique la dépendance sur σ de l'efficacité et — dans une moindre mesure — de l'angle d'émission maximum. Cette valeur spécifique fournit les conditions d'une grande efficacité et procure un rayonnement dirigé vers la direction transverse. C'est le nombre de Mach de la convection M_∞ qui conduit cette directivité à évoluer vers la direction transverse tandis que dans le cas où $M_\infty = 0$, l'ange d'émission décroît continuement vers les faibles angles, mais remonte timidement pour les grandes modulations.

Modulation gaussienne, asymétrique et centrée

L'influence de la longueur d'une modulation asymétrique est représentée à la figure 4.16 pour l'efficacité (figure 4.16(a)) et l'angle d'émission maximum (figure 4.16(b)). Les longueurs en amont représentées plus bas sont identiques à celles étudiées dans le cas statique, c'est–à–dire $\sigma_u k_h = 2\pi$ and $\sigma_u k_h = 20\pi$. Deux longueurs en aval sont testées telles que $\sigma k_h = \pi$ et $\sigma k_h = 4\pi$ (figure 4.10 et figure 4.11 respectivement) pour éviter le cas symétrique et la valeur singulière lorsque le paquet d'ondes est de l'ordre de la longueur d'onde hydrodynamique comme souligné à la section 4.2. Le rapport des nombres de Mach M_c/M_∞ est fixé de manière à ce que

le nombre de Mach de la convection soit le double du nombre de Mach de phase. Le cas statique $M_\infty = 0$ a été ajouté à titre de comparaison.



(a) Efficacité.

(b) Angle d'émission maximum.

Figure 4.16 – Influence de la convection du milieu observateur. Cas asymétrique.

Quelle que soit la longueur de modulation, l'efficacité η est augmentée par la vitesse de convection du milieu observateur. Pour de plus grands σ_u, l'efficacité décroît et cette tendance est accentuée pour de plus grands σ (figure 4.16(a)). Toutes les longueurs convergent quand $M_\infty = 0{,}8$ comme pour le cas symétrique et à ce moment là, l'efficacité approche les $\eta = 40\%$. On remarquera également la même allure en trois étapes de l'angle d'émission vue aux figures 4.9 et 4.15. Le plateau est cependant esquivé, la décroissance vers les faibles angles dure plus longtemps et est renforcée par rapport au cas symétrique, avant la nouvelle croissance lorsque $M_\infty = 0{,}5$ (ou $M_c = 0{,}25$). Les mêmes conclusions que pour l'étude symétrique peuvent être tirées : une valeur spécifique du M_c est sélectionnée et au–delà, la dépendance sur σ est perdue ; l'efficacité comme l'angle d'émission maximum convergent en effet, quelle que soit la longueur de la modulation. La plus petite valeur prise par l'angle d'émission, c'est–à–dire le pic inversé à $M_\infty = 0{,}5$ est accentué lorsque la longueur de modulation est augmentée (figure 4.16(b)). Cette tendance a été mise en évidence dans le cas statique (figures 4.10(b) et 4.11(b)) : augmenter la longueur de modulation fait tendre l'angle d'émission vers les faibles angles. Des calculs pour de plus grands rapports de nombres de Mach M_c/M_∞ affichent le même comportement, mais la singularité, cette nouvelle croissance de l'efficacité et de l'angle d'émission apparaît à plus faible M_∞.

Modulation plateau symétrique

Deux longueurs sont considérées ($\sigma k_h = 2\pi$ et $\sigma k_h = 10\pi$) de manière à les relier au cas statique correspondant. Leur efficacité acoustique est présentée à la figure 4.17. Les deux paramètres présentés ci–dessous ($y_0 k_h = 4$ et $y_0 k_h = 20$) sont directement issus de la figure 4.12 et ont été choisis pour leur comportement différent au regard de la pseudo–périodicité observée dans le cas statique. Le rapport des nombres de Mach est fixé à $M_c/M_\infty = 0{,}5$ et le cas statique $M_\infty = 0$ est ajouté par souci de comparaison.

Pour ces modulations en plateau, l'augmentation du nombre de Mach de phase augmente l'efficacité η (figure 4.17). L'augmentation de la longueur σk_h fait décroître

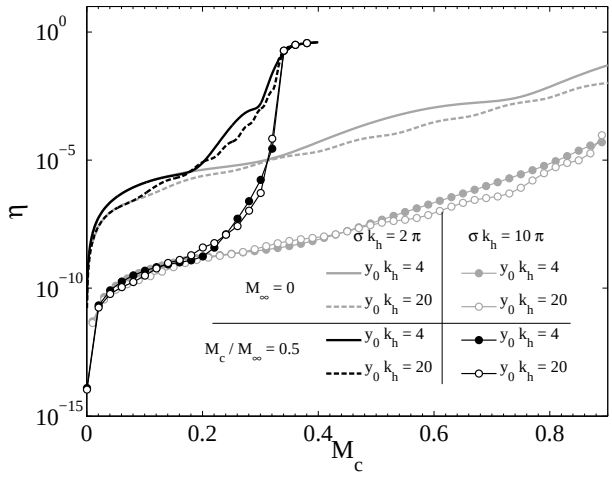


Figure 4.17 – Influence de la convection du milieu observateur sur l'efficacité du paquet d'ondes plateau.

l'efficacité comme conclu d'après l'étude statique tandis que le paramètre y_0 n'a qu'un effet vraisemblablement très limité. La même singularité pour $M_\infty = 0{,}5$ (ou $M_c = 0{,}25$) se produit et exprime une nouvelle croissance de l'efficacité juqu'à près de 40%. Pour de plus grands rapports de nombres de Mach, non représentés ici, la singularité se produit plus tôt mais le plateau atteint après coup la même amplitude. L'angle d'émission semble avoir le même comportement que dans le cas statique où chaque lobe de directivité avait été suivi (figures 4.13 et 4.14). Mais contrairement à la figure 4.14, la symétrie que l'on observait autour de 90° est maintenant perdue face à la vitesse de convection. Pour conclure l'étude de la modulation en plateau sur une allure générale, l'efficacité η est pilotée par la longueur de modulation σ tandis que l'angle d'émission α est piloté par le paramètre y_0 et les nombres de Mach.

4.4 Sollicitation par vitesse normale de vibration

L'imposition d'une condition limite de vitesse va produire une pression acoustique qui est exprimée dans le formalisme de Kirchhoff par l'intégrale de Rayleigh (3.11), dans le cas où la sollicitation est monochromatique. On considère une surface bidimensionnelle $\Sigma\,(y_1)$ produisant un rayonnement par vibration. Cette vibration est caractérisée par la donnée de $h(y_1)$ constituant la répartition de l'amplitude, modulée par une fonction d'enveloppe $A(y_1)$:

$$h(y_1) = h_0\ A(y_1)\ e^{i\frac{\omega}{U_c}y_1} \tag{4.24}$$

où ω est la pulsation de la vibration et U_c la vitesse de convection de l'onde modulée. L'inverse du nombre d'onde hydrodynamique $k_h = \omega/U_c$ est sélectionné comme longueur de référence. L'amplitude maximale de vibration est fixée à $h_0 = 0{,}1$ m. La vitesse normale de vibration est la dérivée temporelle de la hauteur de la surface Σ, c'est–à–dire $\partial h(y_1)/\partial t$. Dans le cas où la répartition de l'amplitude est supposée harmonique en temps, la vitesse normale de vibration s'écrit, dans l'espace des

fréquences :

$$v(y_1) = -i\omega\ h(y_1) \tag{4.25}$$

Le rayonnement est ensuite observé au point observateur de coordonnées R et θ tel que représentés sur la figure 4.18.

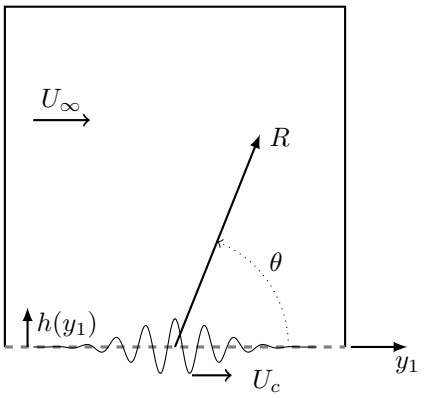


Figure 4.18 – Représentation schématique de la distribution de l'amplitude de vibration et du domaine de modélisation.

En reprenant l'intégrale de Rayleigh (3.11) définie au chapitre 3 et en appliquant la définition de la vitesse de vibration, ainsi que la fonction de Green $2D$ selon les conventions du chapitre, on obtient :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2 \rho_0}{2i} \iint_\Sigma h(y_1) H_0^{(1)}(k_a r) \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{4.26}$$

où $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ et $k_a = \omega/c$ est le nombre d'onde acoustique.

4.4.1 Étude analytique

Approximation en champ lointain

En suivant le procédé de la section 4.2 pour l'approximation de la fonction de Hankel aux grands arguments et pour le développement du rayon en série de Taylor [c], on peut écrire une approximation en champ lointain pour l'intégrale de Rayleigh :

$$p(\mathbf{x}) \sim \omega^2 \rho_0 \sqrt{\frac{2\pi}{k_a R}} e^{i\left(k_a R - \frac{3\pi}{4}\right)} \times \frac{1}{2\pi} \int_{y_2 \sim 0} h(y_1) e^{-ik_a \cos\theta y_1} \mathrm{d}y_1 \tag{4.27}$$

Selon les mêmes conventions de Fourier dans l'espace des nombres d'onde, l'équation (4.27) peut s'écrire :

$$p(\mathbf{x}) \sim \omega^2 \rho_0 \sqrt{\frac{2\pi}{k_a R}} e^{i\left(k_a R - \frac{3\pi}{4}\right)} \tilde{h}\left(K = k_a \cos\theta\right) \tag{4.28}$$

L'expression (4.28) prend alors la même allure que l'expression (4.9) obtenue dans le cas d'une condition limite de pression. On remarque tout d'abord que là encore, la

c. toujours dans le cas où $y_2 = 0$.

condition limite va induire un rayonnement en intensité et en direction proportionnel au mode $K = k_a \cos\theta$, indiquant une fois de plus que seuls les modes supersoniques interviennent. Par rapport à la condition limite de pression en revanche, on a perdu la dépendance en $\sin\theta$, ce qui laisse présumer que le rayonnement aura lieu également dans la direction longitudinale. De plus, le déphasage est ici observé à $-3\pi/4$. La pulsation ω est quant à elle plus influente, où l'on voit une dépendance en ω^2. Pour effectuer plus en détail l'étude analytique, nous allons considérer le cas d'une distribution modulée par une gaussienne et ainsi permettre une comparaison directe avec le cas de la condition limite en pression.

Modulation gaussienne du paquet d'ondes

On définit pour la répartition de la hauteur de la surface Σ une enveloppe gaussienne, symétrique, centrée et statique :

$$A(y_1) = \exp\left(-\frac{y_1^2}{\sigma^2}\right)$$

où σ est le paramètre associé à la longueur du paquet d'ondes. Par application de la transformée de Fourier spatiale (dans l'axe longitudinal) à la distribution initiale des hauteurs (4.24) :

$$\tilde{h}\,(K) = h_0 \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{4}(k_h - K)^2}$$

Dans le cas où le nombre de Mach de convection est faible ($M_c \ll 1$), la distribution spectrale de la hauteur peut s'écrire

$$\tilde{h}\,(K) \sim h_0 \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{4}k_h^2} \times e^{\frac{\sigma^2}{2}k_h^2 M_c \cos\theta}$$

En substituant dans l'expression (4.28), il vient :

$$p(\mathbf{x}) \sim \omega^2 \rho_0 h_0 \sigma \sqrt{\frac{1}{2k_a R}} e^{i\left(k_a R - \frac{3\pi}{4}\right)} e^{-\frac{\sigma^2}{4}k_h^2} \times e^{\frac{\sigma^2}{2}k_h^2 M_c \cos\theta} \tag{4.29}$$

On voit que le paramètre h_0 qui pilote l'amplitude de la condition limite ajoute son influence à la pression acoustique rayonnée. Il joue exactement le même rôle que le terme P_0 lors de l'étude de la condition limite en pression qui avait été pris comme unité. On peut appliquer à l'expression (4.29) les notions définies plus haut d'angle d'émission maximum α et d'efficacité η. L'angle de rayonnement maximum α apparaît plus clairement, *via* l'exponentielle. On s'attendra donc à un rayonnement maximal pour $\theta = 0 + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, et ce, quelles que soient la longueur de modulation ou la vitesse de phase. La condition limite de pression montrait une dépendance en σk_h et en M_c de l'angle de rayonnement maximum. Or dans le cas d'une condition limite en vitesse, celui–ci sera toujours dans la direction longitudinale.

Efficacité acoustique

On va quantifier le taux d'énergie libérée dans le milieu propagateur par la condition limite en faisant appel à la notion d'efficacité acoustique η définie précédemment. La définition de la puissance acoustique reste identique (4.15). L'expression de la puissance apportée par la condition limite en revanche, change légèrement. On parlera ici de puissance mécanique, puisque c'est une puissance cédée par la vibration de la condition limite. D'après les considérations énergétiques évoquées au chapitre 2, on peut dire que la puissance mécanique est l'intégration d'une énergie mécanique totale. Cette énergie totale est le produit d'une densité d'énergie — faite d'une somme d'une énergie potentielle ($\frac{1}{2}\omega^2|h(y_1)|^2$) et d'une énergie cinétique ($\frac{1}{2}|v(y_1)|^2$) — et d'un flux de masse ($\rho_0\,|v(y_1)|$) [74]. Néanmoins, il faut reconnaître une certaine part d'arbitraire dans cette définition. Quoi qu'il en soit, cette définition fournit un premier critère (dont la pertinence devra être discutée) pour évaluer avant tout le taux de variation de l'efficacité.

$$W_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\omega^2\,|h(y_1)|^2 + \frac{1}{2}\,|v(y_1)|^2\right)\rho_0\,|v(y_1)|\;\mathrm{d}y_1$$

En remplaçant par la condition limite modulée par une enveloppe gaussienne :

$$W_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0\omega^3 h_0^3 e^{-3\left(\frac{y_1}{\sigma}\right)^2}\;\mathrm{d}y_1 = \rho_0\omega^3 h_0^3\sigma\sqrt{\frac{\pi}{3}} \tag{4.30}$$

Pour l'expression de la puissance acoustique (4.15) avec l'expression (4.29) pour la pression acoustique il vient

$$\begin{aligned} W_a \sim & \frac{\rho_0\omega^4}{c} \times \frac{2\pi}{k_a}\int_0^{\pi} \tilde{h}\,(K)^2\,\mathrm{d}\theta \\ \sim & \frac{\rho_0\omega^3}{2}\sigma^2 h_0^2 e^{-\frac{\sigma^2 k_h^2}{2}}\int_0^{\pi} e^{\sigma^2 k_h^2 M_c\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\ \sim & \frac{\rho_0\omega^3}{2}\sigma^2 h_0^2 e^{-\frac{\sigma^2 k_h^2}{2}} I_0\left(\sigma^2 k_h^2 M_c\right) \end{aligned} \tag{4.31}$$

avec $I_n\,(z)$ la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n. Là encore, on peut noter que l'expression de la puissance acoustique en champ lointain ne dépend pas du rayon R. Finalement, l'efficacité s'exprimera donc comme le rapport de (4.31) sur (4.30), soit

$$\eta = \frac{W_a}{W_m} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sigma k_h}{h_0 k_h} e^{-\frac{\sigma^2 k_h^2}{2}} I_0\left(\sigma^2 k_h^2 M_c\right) \tag{4.32}$$

Une rapide comparaison avec l'expression de l'efficacité pour la condition limite en pression (4.17) montre que celle–ci semblait décroître avec l'augmentation de la longueur de modulation. Or, ici ce terme est en numérateur dans l'expression (4.32) ce qui pourrait indiquer que l'efficacité aura tendance à augmenter avec la longueur de modulation. Néanmoins, la décroissance de la fonction exponentielle, plus rapide, impose la chute d'efficacité avec l'augmentation de la longueur de modulation. Il

y a donc ici un comportement qualitativement identique avec la condition limite en pression. Mais effectuons la même analyse sur l'efficacité maximum et cherchons à annuler la dérivée de l'expression (4.32) par rapport à la longueur σk_h lorsque celle–ci est maximum et vaut $\sigma_{max} k_h$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma k_h} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \left\{ \left(1 - \sigma^2 k_h^2\right) I_0\left(\sigma^2 k_h^2 M_c\right) - 2\sigma^2 k_h^2 M_c I_1\left(\sigma^2 k_h^2 M_c\right) \right\} \frac{e^{-\dfrac{\sigma^2 k_h^2}{2}}}{h_0 k_h}$$

Cette fonction s'annule lorsque $\sigma k_h = \sigma_{max} k_h$ satisfaisant alors l'équation

$$\sigma_{max} k_h - \sqrt{\frac{I_0\left(\sigma_{max}^2 k_h^2 M_c\right)}{I_0\left(\sigma_{max}^2 k_h^2 M_c\right) + 2 M_c I_1\left(\sigma_{max}^2 k_h^2 M_c\right)}} = 0 \tag{4.33}$$

L'équation (4.33) peut s'exprimer sous une forme assez similaire à l'expression de l'efficacité obtenue pour le paquet d'ondes de pression (équation (4.18)).

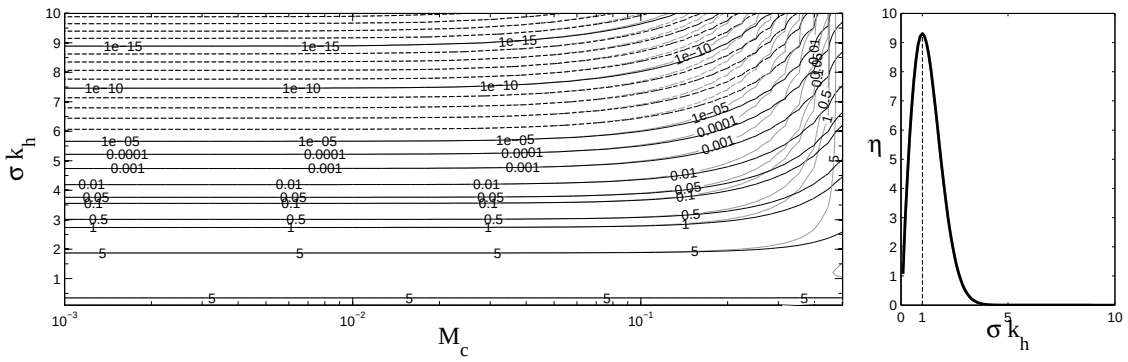


Figure 4.19 – Prédiction numérique (courbes noires) et analytique (courbes grises) pour une plage de vitesses de phase et de longueur d'enveloppe. Isocontours d'efficacité. Modulation gaussienne, symétrique et centrée du paquet d'ondes de vitesse. À droite, coupe en $M_c = 0{,}005$.

On compare alors l'expression (4.32) avec l'efficacité obtenue numériquement. Le résultat est présenté à la figure 4.19, avec une coupe de l'efficacité (à $M_c = 5{,}0 \times 10^{-3}$). Il apparaît alors clairement avec la figure 4.19 et l'équation (4.33) que l'efficacité maximale est obtenue pour la même longueur de modulation que dans le cas de la sollicitation par paquet d'ondes de pression, à savoir $\sigma_{max} k_h = 1$, ce qui est à souligner. On constate également que l'écart entre les formulations s'accentue alors qu'on augmente la vitesse de phase. Il convient ici de relativiser les valeurs prises par l'efficacité et notamment lorsque celle–ci dépasse l'unité sur la figure 4.19 en rappelant que la définition de la puissance mécanique introduite par la vibration est arbitraire. En ce qui concerne la mise en œuvre numérique, elle suit le protocole mis en place pour l'étude du paquet d'ondes de pression. On valide la formulation en champ lointain (équation (4.28)) à la figure 4.20.

L'expression (4.29) semble conserver un certain écart par rapport aux autres formulations mais elle souffre des hypothèses les plus restrictives puisqu'étant développée pour de faibles nombres de Mach. L'expression (4.28) est validée et les résultats présentés dans la section 4.4.2 ont recours à cette expression. On présente à la section suivante l'influence de la vitesse de phase et de la modulation pour le

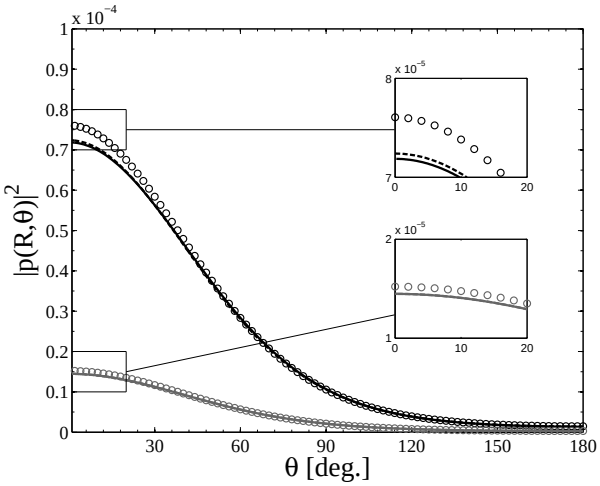


Figure 4.20 – Validation de l'expression en champ lointain de l'intégrale de Rayleigh (4.28) (tirets) avec l'intégrale exacte (4.26) (traits pleins) et l'expression analytique (4.29) (symboles). $M_c = 0.05$; $\sigma k_h = 2\pi$. Observation à $R = 1\lambda_a$ (noir) et $R = 5\lambda_a$ (gris).

paquet d'ondes de vitesse. L'étude paramétrique sur la forme et la longueur de la modulation est identique à celle du paquet d'ondes de pression. On reprend également la même plage de longueur de modulation σk_h et de nombre de Mach M_c.

4.4.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation

Modulation gaussienne, symétrique et centrée

La figure 4.21 présente les effets de la vitesse de phase M_c et de la longueur de la modulation σk_h sur l'efficacité η. L'angle d'émission maximum ne sera pas évoqué dans le reste de l'étude sur le paquet d'ondes de vitesse, du moins en l'absence d'une vitesse de convection du milieu propagatif. Comme prévu par la théorie (équation (4.29)), l'angle d'émission maximum est toujours nul. La longueur de modulation σk_h et de la vitesse de phase M_c semblent avoir le même rôle sur une sollicitation en vitesse que sur une sollicitation en pression (figure 4.9) malgré une différence d'ordre de grandeur. On retrouve la même efficacité maximale (pour $\sigma k_h = 1$). Le seul changement a lieu pour la directivité. Comparativement, la sollicitation en vitesse semble apporter une efficacité beaucoup plus élevée mais l'amplitude maximale de vibration h_0 est arbitraire, de même que la définition de l'énergie hydrodynamique apportée. La pertinence de la valeur atteinte et sa comparaison avec le cas d'une sollicitation en pression doit être nuancée. Plus que sur la valeur atteinte, l'accent doit être placé sur la variation des ordres de grandeur de l'efficacité.

Modulation gaussienne, asymétrique et centrée

Les paramètres de l'étude du paquet d'ondes de pression en modulation asymétrique sont repris pour la modulation asymétrique du paquet d'ondes de vitesse. On teste deux longueurs amonts $\sigma_u k_h = 2\pi$ et $\sigma_u k_h = 20\pi$ pour deux longueurs en aval $\sigma_u k_h = 2\pi$ et $\sigma_u k_h = 20\pi$. On ne présente encore que l'efficacité car l'introduction d'une asymétrie ne modifie pas l'angle à 0° de l'émission maximale. Là encore les mêmes conclusions avancées lors de l'étude du paquet d'ondes de pression (fi-

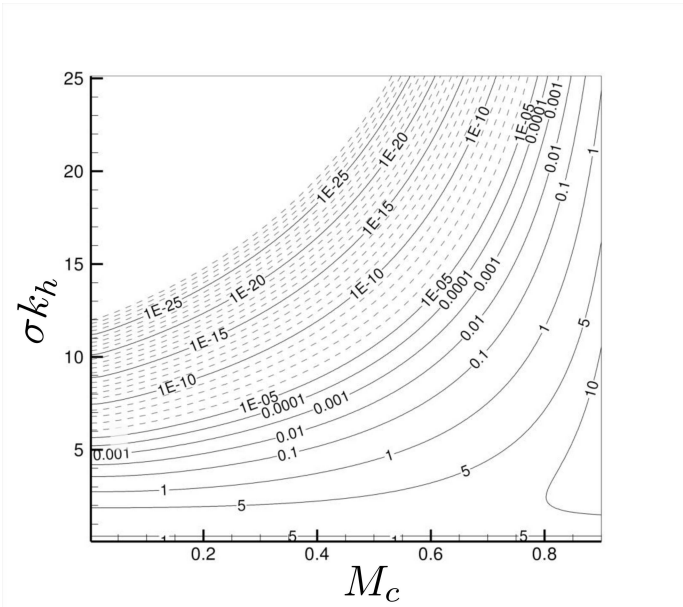
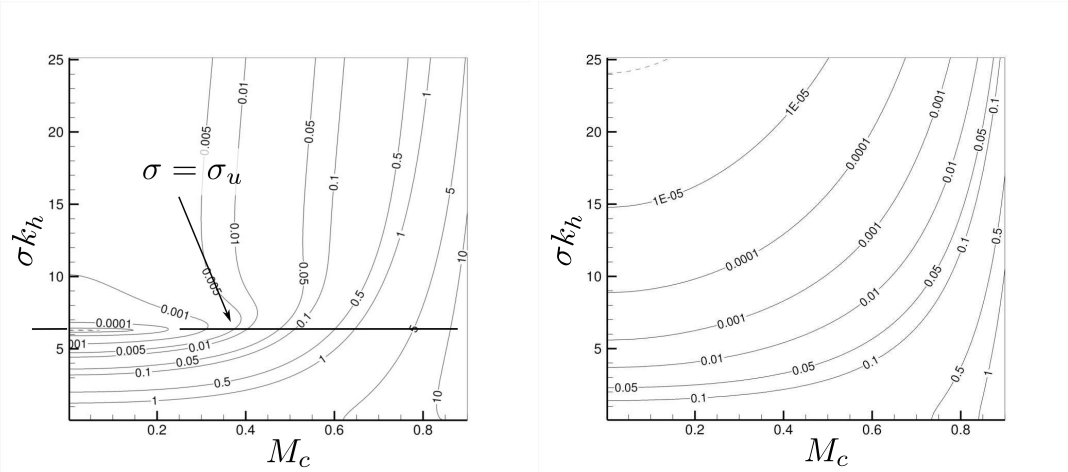


Figure 4.21 – Influence de la vitesse de phase et de la longueur d'enveloppe. Isocontours de l'efficacité. Modulation gaussienne, symétrique et centrée.

gures 4.10(a) et 4.11(a)) peuvent s'adapter au paquet d'ondes de vitesse. Tant que la longueur de modulation amont est inférieure à la longueur aval ($\sigma k_h < \sigma_u k_h$), l'efficacité augmente à la fois par augmentation de la longueur de modulation et de la vitesse de phase M_c. Une singularité apparaît pour $\sigma k_h = \sigma_u k_h$. Au–delà, on constate deux tendances, comme pour le paquet d'ondes de pression asymétrique : l'efficacité diminue pour $M_c < 0{,}5$ et continue d'augmenter pour $M_c > 0{,}5$. Mais l'efficacité est nettement moins influencée par l'augmentation de la longueur de modulation lorsque $\sigma k_h > \sigma_u k_h$.

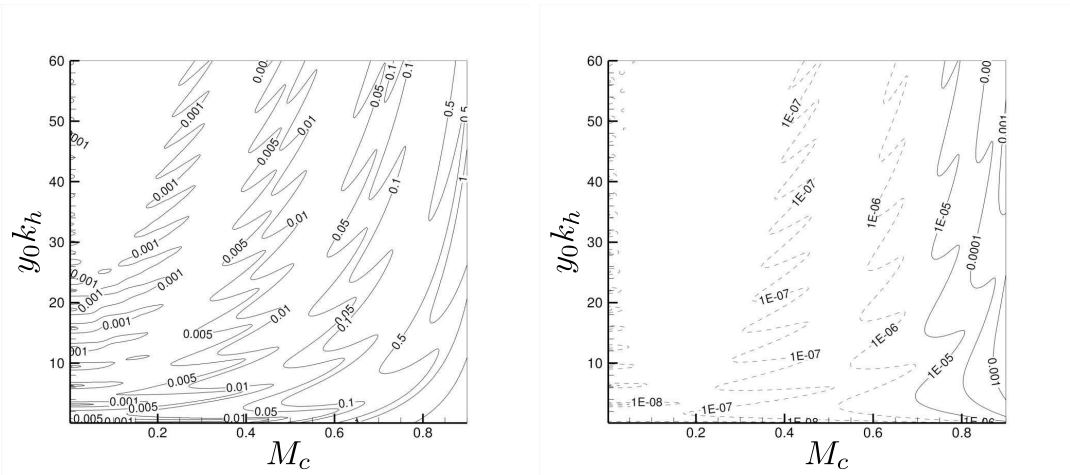


(a) $\sigma_u k_h = 2\pi$.

(b) $\sigma_u k_h = 20\pi$.

Figure 4.22 – Influence de la vitesse de phase et de la longueur d'enveloppe. Isocontours de l'efficacité. Modulation gaussienne, asymétrique et centrée.

Modulation plateau symétrique
Les résultats sont présentés pour la modulation plateau avec deux longueurs de modulation $\sigma k_h = 2\pi$ et $\sigma k_h = 20\pi$ en suivant l'exemple du paquet d'ondes de pression. On retrouve une efficacité fortement marquée par des oscillations, qui ont par ailleurs tendance à s'atténuer aux grandes vitesses de phase. Sur le paquet d'ondes de pression, le paramètre y_0 avait peu d'influence sur l'efficacité (figure 4.12). Lors d'une sollicitation en vitesse, ce paramètre a une influence relativement plus grande. Et de la même manière, l'augmentation de la longueur de modulation diminue l'efficacité acoustique. Étant donné la similitude de la réponse acoustique entre les deux types de sollicitation, l'analyse de la dynamique des lobes de directivité ne sera pas poursuivie ici.



(a) $\sigma k_h = 2\pi$. (b) $\sigma k_h = 10\pi$.

Figure 4.23 – Influence de la vitesse de phase et de la longueur d'enveloppe. Isocontours de l'efficacité. Modulation plateau, symétrique et centrée.

4.5 Extension à un milieu propagatif en mouvement uniforme

Le domaine observateur $x_2 > 0$ est maintenant en mouvement uniforme à un nombre de Mach M_∞.

4.5.1 Étude analytique en milieu convecté

Pour exprimer la pression acoustique en fonction de la vitesse normale de vibration en convecté, il faut partir de l'équation (3.12), c'est–à–dire de l'intégrale de Rayleigh dont le gradient est exprimé par la dérivée particulaire de la vitesse de vibration. Avec la relation (4.25) entre la vitesse normale de vibration et la répartition de l'amplitude de la sollicitation, l'équation (3.12) s'écrit :

$$p(\mathbf{x}) = 2\rho_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \omega^2 h(y_1) + i\omega U_\infty \frac{\partial h(y_1)}{\partial y_1} \right\} G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \mathrm{d}y_1 \tag{4.34}$$

En champ lointain, la fonction de Green convectée prend la forme

$$G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \underset{r_\beta \mapsto \infty}{\sim} \frac{1}{4i\beta} \exp\left[i\frac{M_\infty k_a(x_1-y_1)}{\beta^2}\right]\sqrt{\frac{2\beta^2}{\pi k_a x_\beta}} \exp\left[i\left(\frac{k_a x_\beta}{\beta^2} - \frac{k_a x_1}{\beta^2 x_\beta} y_1 - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

En réinjectant dans l'expression (4.34), il vient :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\rho_0}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi k_a x_\beta}}\left(\omega^2 I_1 + i\omega U_\infty I_2\right) e^{i\left[\frac{k_a x_\beta}{\beta^2}\left(M_\infty \cos\theta_\beta + 1\right) - \frac{3\pi}{4}\right]}$$

avec

$$\begin{cases} I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(y_1) e^{-i\frac{k_a}{\beta^2}\left(M_\infty + \cos\theta_\beta\right) y_1} \mathrm{d}y_1 \\ I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h(y_1)}{\partial y_1} e^{-i\frac{k_a}{\beta^2}\left(M_\infty + \cos\theta_\beta\right) y_1} \mathrm{d}y_1 \end{cases}$$

Au facteur 2π près, on reconnaît en la première intégrale la transformée de Fourier dans l'espace des nombres d'onde de la répartition d'amplitude $I_1 = 2\pi\tilde{h}(K_\beta)$, selon le mode déjà identifié $K_\beta = k_a\left(M_\infty + \cos\theta_\beta\right)/\beta^2$. La seconde intégrale I_2 peut être réécrite par une intégration par partie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h(y_1)}{\partial y_1} e^{-iK_\beta y_1} \mathrm{d}y_1 = \left[h(y_1) e^{-iK_\beta y_1}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi K_\beta \tilde{h}(K_\beta)$$

Le premier terme du membre de droite s'annule par la décroissance de la modulation à l'infini. L'expression de la pression acoustique devient alors :

$$p(\mathbf{x}) = \omega\rho_0\sqrt{\frac{2\pi}{k_a x_\beta}}\tilde{h}(K_\beta)\left(\omega - U_\infty K_\beta\right) e^{i\left[\frac{k_a x_\beta}{\beta^2}\left(M_\infty \cos\theta_\beta + 1\right) - \frac{3\pi}{4}\right]} \tag{4.35}$$

Lorsque $M_\infty = 0$, on retrouve l'expression (4.28).

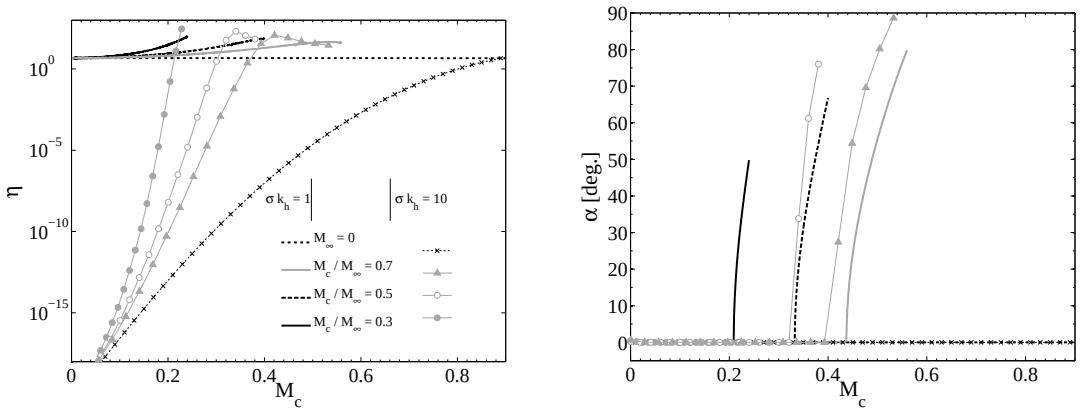
4.5.2 Influence de la vitesse de phase et de la modulation avec convection

Les résultats sont présentés selon les critères légués par l'étude du paquet d'ondes de pression.

Modulation gaussienne, symétrique et centrée

En suivant l'exemple du paquet d'ondes de pression, deux longueurs de modulation sont testées ($\sigma k_h = 1$ et $\sigma k_h = 10$). Les mêmes rapports des nombres de Mach sont utilisés ($M_c/M_\infty = 0{,}3$, $M_c/M_\infty = 0{,}5$ et $M_c/M_\infty = 0{,}7$). Le cas correspondant à une vitesse de convection nulle est ajouté. L'efficacité est présentée à la figure 4.24(a) et

la directivité à la figure 4.24(b). On retrouve le même comportement sur l'efficacité pour les deux types de sollicitations, à savoir, l'augmentation du rapport des nombres de Mach diminue l'efficacité. Le comportement visible sur la figure 4.24(a) est donc qualitativement comparable à la figure 4.15(a). Globalement, la convection apporte un haut niveau d'efficacité pour les deux longueurs étudiées. La prise en compte d'un milieu en convection permet enfin une augmentation de l'angle d'émission maximale. Cette directivité est d'une nature plus simple qu'avec une sollicitation par pression, car monotone. Pour les faibles rapports de nombres de Mach ($M_c/M_\infty = 0{,}3$), la longueur de modulation n'a pas d'influence sur la directivité. À mesure qu'augmente le rapport des nombres de Mach, la longueur de modulation commence à jouer un rôle. Une plus grande longueur de modulation fait émerger la directivité à une vitesse de phase relativement plus faible. Mais pour tous les rapports de nombres de Mach et toutes les longueurs de modulation, la vitesse de convection fait tendre l'angle d'émission maximale vers la direction transverse. La directivité du cas correspondant à un milieu statique ($M_\infty = 0$) reste nulle.



(a) Efficacité.

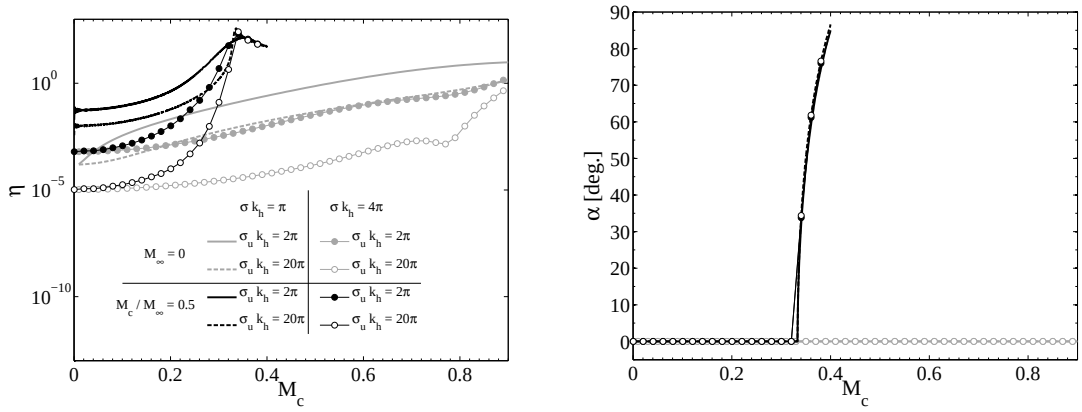
(b) Angle d'émission maximum.

Figure 4.24 – Influence de la convection du milieu observateur. Cas symétrique. Les pointillés gris verticaux indiquent lorsque $M_\infty = 0.5$ est atteint pour les différents rapports de Mach.

Modulation gaussienne, asymétrique et centrée

L'influence de la convection sur une modulation asymétrique est représentée à la figure 4.25 pour l'efficacité (figure 4.25(a)) et l'angle d'émission maximum (figure 4.25(b)). Les longueurs et rapports de nombres de Mach représentés plus bas sont identiques à la sollicitation en pression c'est–à–dire $\sigma_u k_h = 2\pi$ et $\sigma_u k_h = 20\pi$ pour les deux longueurs aval $\sigma k_h = \pi$ et $\sigma k_h = 4\pi$. Le rapport des nombres de Mach M_c/M_∞ est fixé de manière à ce que le nombre de Mach de la convection soit le double du nombre de Mach de phase. Le cas statique $M_\infty = 0$ a été ajouté à titre de comparaison. Au même titre que la vitesse de phase, la vitesse de convection augmente l'efficacité (figure 4.25(a)) et cette tendance est accentuée par une plus grande longueur de modulation mais dans un cas très particulier. Il est vrai que l'augmentation de la longueur de modulation a plutôt tendance à diminuer l'efficacité pour certaines valeurs singulières, le taux de croissance est amplifié par la longueur de modulation et les grandes longueurs dépassent alors les faibles longueurs. Le niveau atteint en cas de convection avec une grande longueur de modulation atteint un ni-

veau certes impressionnant mais néanmoins à nuancer compte tenu de la définition de la puissance mécanique injectée par la vibration de la structure. On remarque cependant une légère rechute de l'efficacité aux hautes valeurs de vitesse de convection. La directivité présente les mêmes caractéristiques que dans le cas de la modulation symétrique : elle est très peu influencée par la longueur de modulation et se dirige vers la direction transverse à mesure que la convection est intensifiée (figure 4.25(b)).



(a) Efficacité.

(b) Angle d'émission maximum.

Figure 4.25 – Influence de la convection du milieu observateur. Cas asymétrique.

Modulation plateau symétrique

Pour l'excitation « plateau », deux longueurs ($\sigma k_h = 2\pi$ et $\sigma k_h = 10\pi$) et deux paramètres ($y_0 k_h = 4$ et $y_0 k_h = 20$) sont considérés de manière à les relier au cas statique correspondant ainsi qu'à l'étude de la sollicitation en pression. Leur efficacité acoustique est présentée à la figure 4.26. Le rapport des nombres de Mach est fixé à $M_c/M_\infty = 0{,}5$ et le cas statique $M_\infty = 0$ est adjoint à titre de comparaison. La longueur de modulation diminue l'efficacité, comme ce qui avait été observé pour une sollicitation en pression (figure 4.17). De la même manière, l'efficacité atteint le même niveau pour les deux longueurs de modulation dans les grandes valeurs de nombres de Mach. Sans commune mesure avec le cas asymétrique, l'efficacité atteint néanmoins de hautes valeurs. Le paramètre y_0 n'a en revanche qu'une influence très limitée. La chute d'efficacité que nous avions notée sur les cas précédents apparaît ici aussi. Elle est atténuée par la convection, et le cas échéant disparaît même complètement pour les grandes longueurs de modulations (quel que soit le paramètre y_0).

4.6 Résumé – synthèse

L'équation homogène de Helmholtz a été résolue dans le formalisme de Kirchhoff pour caractériser la réponse acoustique du milieu à une excitation générique. L'excitation a été appliquée à l'opérateur d'onde au travers d'une distribution — de pression ou de vitesse — comme condition limite. La réponse acoustique a été décrite analytiquement et numériquement selon deux critères : *(i)* l'angle d'émission maximale ; *(ii)* le taux d'énergie cédée en champ lointain par rapport à l'énergie apportée par l'écoulement, définissant ainsi l'efficacité acoustique. Ce dernier paramètre a été peu considéré jusqu'à présent dans les études utilisant l'approche de paquets

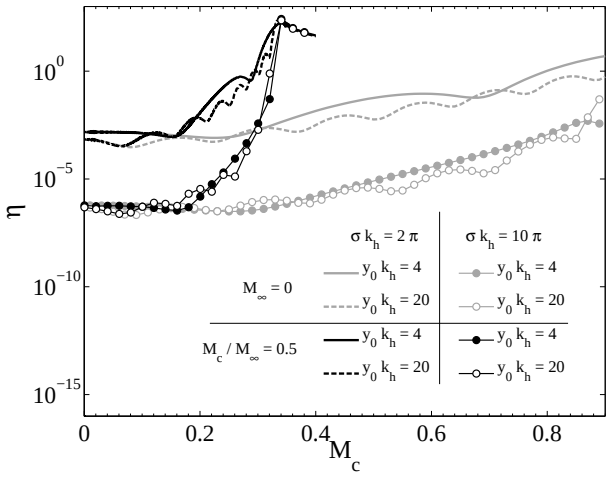


Figure 4.26 – Influence de la convection du milieu observateur sur l'efficacité du paquet d'ondes plateau.

d'ondes. La grande variété des ordres de grandeurs sur lesquels se répartit l'efficacité acoustique est un premier fait intéressant. Les développements analytiques ont permis de révéler les conditions de haute efficacité et de prédire l'angle de pression maximale. L'outil numérique a permis l'étude paramétrique de différentes fonctions de modulation de l'excitation, pour différentes longueurs et vitesses de phase.

Dans le cas particulier d'une enveloppe gaussienne symétrique, les développements analytiques ont identifié une efficacité maximale lorsque la longueur de modulation est de l'ordre du nombre d'onde hydrodynamique, aussi bien sur une sollicitation en pression qu'en vitesse. Dans le cas statique, la valeur de l'efficacité maximale est proportionnelle au carré de la vitesse de phase. Pour une excitation en pression, l'angle d'émission maximale est de $\pi/2$ pour une vitesse de phase nulle puis décroît avec l'augmentation de la longueur de modulation ou de la vitesse de phase. L'augmentation de la vitesse de phase dirige l'angle d'émission maximale vers la direction avale avant de se stabiliser puis de remonter. Si l'asymétrie est introduite, le rayonnement est plus efficace et plus stable sur son angle d'émission par rapport au cas symétrique. Pour une excitation en vitesse, l'angle d'émission est nul quelle que soit la longueur de modulation ou la vitesse de phase et n'augmente qu'en cas de convection du milieu propagatif, vers la direction transverse. La prise en compte de la convection a permis d'obtenir des expressions analytiques originales. Le nombre de Mach à l'infini ajoute une contribution exponentielle à la vitesse de phase sur la pression rayonnée et l'efficacité qui en résulte. Avec l'asymétrie, l'angle d'émission est moins susceptible de se stabiliser. La directivité reste majoritairement dans la direction transverse. L'étude de paquets d'ondes dont la modulation est constituée de deux demi–gaussiennes reliées par un plateau a mis en évidence des effets de troncature importants qui doivent être considérés avec précaution. Ces effets de troncature sont une conséquences de longueurs de croissance et de décroissance faibles de la modulation par rapport à la longueur d'onde hydrodynamique, que ce soit en cas statique ou en cas convecté.

Afin d'ajouter un aspect pratique aux résultats présentés dans ce chapitre, des ordres de grandeurs sont fournis aux tableaux 4.1 et 4.2 pour l'excitation en pression

et en vitesse, respectivement. L'efficacité acoustique et le niveau sonore (*Sound Pressure Level* ou S.P.L.) dans la direction d'émission maximale sont calculés à une distance d'observation de 100 longueurs d'onde acoustiques. Cette distance correspond à 34 mètres dans l'air à une fréquence de 1 kHz pour une amplitude de l'excitation de pression P_0 de 100 pascals et une amplitude de l'excitation de vitesse h_0 de 0,1 mètres. Les résultats obtenus pour l'efficacité de la condition limite en vitesse doivent donc être nuancés quant au sens physique d'une telle amplitude de vibration. Dans le cas statique, on obtient environ 95 dB à $M_c = 0{,}4$ pour l'excitation en pression, obtenue pour un paquet d'ondes symétrique et pour la modulation en plateau. Il faut noter que dans le premier cas, un tel niveau sonore est le résultat d'une haute efficacité tandis que dans le second cas, il est dû à une plus grande énergie apportée par le champ hydrodynamique, l'efficacité étant bien plus faible. Le fait que le niveau sonore puisse être le même malgré des processus d'échanges énergétiques différents est à considérer dans la perspective d'une conception de stratégies de contrôles. Dans le cas d'une excitation en vitesse, on observe un niveau sonore de l'ordre de 110 dB dans les mêmes conditions. Lorsque la convection est prise en compte, les valeurs aux faibles Mach changent peu, mais augmentent de manière significative avec la vitesse de convection. Ainsi, pour un $M_\infty = 0{,}8$ et un rapport des nombres de Mach de 0,5, la valeur limite de la vitesse de phase est identique mais des dizaines de dB sont ajoutées par la convection. La configuration la plus bruyante est obtenue dans les deux types d'excitations par la plus grande modulation asymétrique, qui combine une haute efficacité et une haute énergie hydrodynamique apportée avec un niveau sonore de 135 dB pour l'excitation en pression et de 160 dB pour l'excitation en vitesse. L'excitation en vitesse semble atteindre de plus hauts niveaux sonores que l'excitation en pression mais en vue d'une analyse plus fine, il faudrait pouvoir relier l'amplitude en pression P_0 à l'amplitude en vitesse h_0. De plus, la définition que l'on a donné à la puissance mécanique injectée par l'hydrodynamique reste arbitraire et aucune affirmation ne saurait soutenir sa validité dans le cas général. L'intérêt est ainsi plus porté sur les variations de l'efficacité que sur la valeur atteinte.

Sans argumenter sur la pertinence du rôle joué par un paquet d'ondes sur la génération du bruit aérodynamique, les résultats présentés dans ce chapitre constituent une ligne directrice pour l'analyse de distributions de pression et de vitesse dans le champ proche lorsqu'on cherche à caractériser la réponse acoustique. Ces résultats peuvent être transposés à des cas d'écoulements de couche de mélange ou de jet. L'extension de l'approche à l'équation convectée de Helmholtz la rend applicable pour envisager d'autres cas d'études, comme des écoulements de sillages, de cavité ou de couche–limite. Dans de tels cas, le nombre de Mach à l'infini est plus élevé que le nombre de Mach de phase de l'onde hydrodynamique, ralentie par un écoulement opposé ou par une condition d'adhérence à la paroi.

Reprenons de nouveau le schéma de la problématique de la thèse. Au cours de ce chapitre, la réponse acoustique à une certaine sollicitation a été étudiée, mais l'accent a bien été mis sur le rayonnement lui–même. Ainsi, ce chapitre, comme le précédent, a été consacré à la partie de droite de la voie inférieure du schéma de la problématique (figure 4.27).

Le chapitre suivant applique les méthodes d'excitation surfacique dans un écoulement de couche de mélange et ainsi, met l'accent sur la dynamique de l'écoulement en champ proche.

	Milieu au repos $M_c \in [0{,}05\,;0{,}4]$		**Milieu en mouvement** $M_\infty \in [0{,}1\,;0{,}8]$ avec $M_c = 0{,}5M_\infty$	
	Efficacité acoustique η	S.P.L. [dB]	Efficacité acoustique η	S.P.L. [dB]
Modulation gaussienne, symétrique et centrée $\sigma k_h = 1$	$9.5\ 10^{-4} \to 6.1\ 10^{-2}$	$75 \to 93$	$9.7\ 10^{-4} \to 2.6\ 10^{-1}$	$75 \to 102$
Modulation gaussienne, asymétrique et centrée $\sigma k_h = 8\pi$, $\sigma_u k_h = 2\pi$	$1.1\ 10^{-7} \to 2.7\ 10^{-5}$	$47 \to 74$	$1.2\ 10^{-7} \to 4.0\ 10^{-1}$	$47 \to 126$
Modulation gaussienne, asymétrique et centrée $\sigma k_h = 8\pi$, $\sigma_u k_h = 20\pi$	$8.3\ 10^{-11} \to 1.3\ 10^{-8}$	$21 \to 44$	$8.7\ 10^{-11} \to 4.0\ 10^{-1}$	$21 \to 135$
Modulation plateau $\sigma k_h = 2\pi$, $y_0 k_h = 4$	$3.4\ 10^{-6} \to 5.1\ 10^{-5}$	$51 \to 97$	$3.4\ 10^{-7} \to 3.9\ 10^{-1}$	$51 \to 122$

Table 4.1 – Ordre de grandeur de l'efficacité acoustique et du niveau sonore (S.P.L.) dans la direction de l'émission maximale ($\theta = \alpha$) à la distance $R = 100\lambda_a$, pour $P_0 = 100$ Pa. Paquet d'ondes de pression.

	Milieu au repos $M_c \in [0{,}05\,;0{,}4]$		**Milieu en mouvement** $M_\infty \in [0{,}1\,;0{,}8]$ avec $M_c = 0{,}5M_\infty$	
	Efficacité acoustique η	S.P.L. [dB]	Efficacité acoustique η	S.P.L. [dB]
Modulation gaussienne, symétrique et centrée $\sigma k_h = 1$	$1.1\ 10^{-1} \to 3.3\ 10^{-2}$	$76 \to 113$	$1.1\ 10^{-1} \to 2.3$	$77 \to 127$
Modulation gaussienne, asymétrique et centrée $\sigma k_h = 8\pi$, $\sigma_u k_h = 2\pi$	$1.6\ 10^{-5} \to 2.5\ 10^{-4}$	$50 \to 101$	$1.7\ 10^{-5} \to 6.9\ 10^{-1}$	$51 \to 150$
Modulation gaussienne, asymétrique et centrée $\sigma k_h = 8\pi$, $\sigma_u k_h = 20\pi$	$1.1\ 10^{-8} \to 8.7\ 10^{-8}$	$23 \to 71$	$1.3\ 10^{-8} \to 6.6\ 10^{-1}$	$24 \to 159$
Modulation plateau $\sigma k_h = 2\pi$, $y_0 k_h = 4$	$3.3\ 10^{-5} \to 1.0\ 10^{-4}$	$52 \to 107$	$3.4\ 10^{-5} \to 4.1\ 10^{-1}$	$53 \to 146$

Table 4.2 – Ordre de grandeur de l'efficacité acoustique et du niveau sonore (S.P.L.) dans la direction de l'émission maximale ($\theta = \alpha$) à la distance $R = 100\lambda_a$, pour $h_0 = 0{,}1$ m. Paquet d'ondes de vitesse.

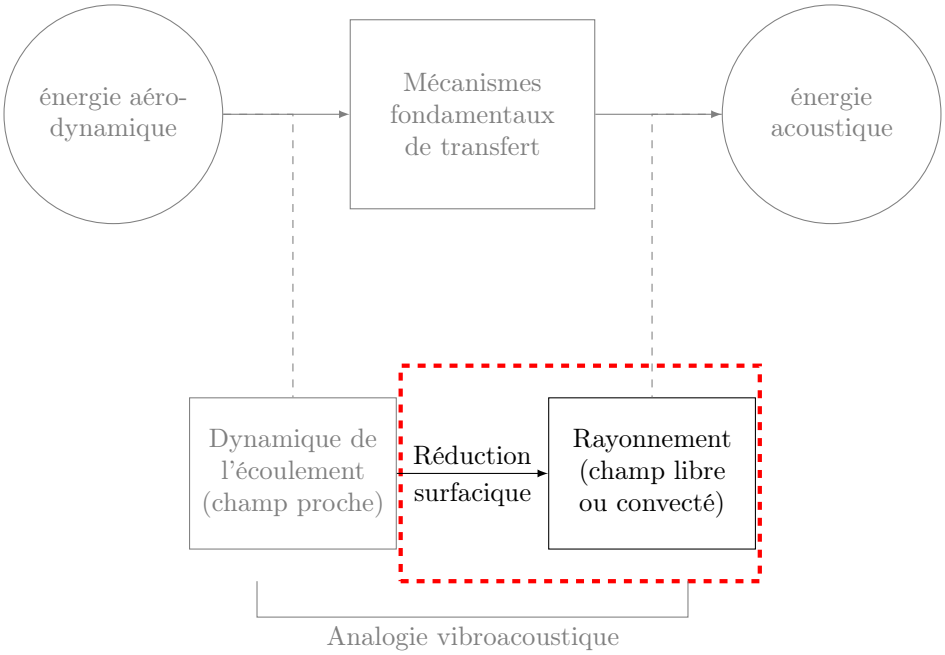


Figure 4.27 – Positionnement du chapitre 4 dans la problématique de la thèse.

Chapitre 5

Modélisation vibroacoustique du rayonnement d'une couche de mélange

"Do not go where the path may lead,
go instead where there is no path,
and leave a trail."
R. W. Emerson

Sommaire

5.1 Rayonnement acoustique d'une couche de mélange **136**
5.1.1 Discussion préliminaire 136
5.1.2 Simulation acoustique directe de la couche de mélange 137
5.1.3 Implantation du formalisme intégral 138
5.1.4 Influence de la position de la surface de contrôle 143
5.2 L'analogie de Liepmann **144**
5.2.1 Concept d'épaisseur de déplacement 144
5.2.2 Sollicitation de l'acoustique par l'épaisseur de déplacement 145
5.3 Application à la couche de mélange **147**
5.3.1 Adaptation du concept d'épaisseur de déplacement 147
5.3.2 Intégration numérique de l'épaisseur de déplacement 148
5.4 Sollicition par ligne de courant **153**
5.5 Correction de l'impédance de rayonnement **155**
5.6 Synthèse **157**

Dans l'introduction de ce mémoire, nous avons vu que l'aéroacoustique est née sous l'impulsion de Lighthill [90] avec la première tentative de description de l'acoustique par la réécriture des équations de la mécanique des fluides. Cette réécriture entraîne l'apparition d'un terme source qui nécessite une modélisation ou un calcul par résolution directe. L'espace est ainsi constitué d'un volume qui contient la source. En supprimant le terme quadripolaire, on ne garde plus que des quantités s'exprimant sur une surface, ce qui conduit aux méthodes d'extrapolation. Mais là encore, l'expression des termes agissant aux frontières du domaine nécessite une modélisation ou une lecture par *DNC*. Le cas de la modélisation des éléments surfaciques

a été discuté au chapitre 4 avec l'investigation du comportement d'un certain type d'excitation portée par les paquets d'ondes. Mais c'est l'imposition d'une quantité acoustique pour observer en sortie une quantité également acoustique. Ce phénomène dans les méthodes d'extrapolation a récemment été mis en évidence par Margnat et Gloerfelt [103] sur le cas de la couche de mélange évoquée dans les premières pages de ce mémoire. Nous proposons de suivre cette réflexion dans la première partie de ce chapitre.

Mais que se passe–t–il lorsque l'on impose comme condition limite une quantité hydrodynamique portant le mouvement source propre à exciter le milieu acoustique ? Si l'on a accès, non plus à une simulation directe résolvant les équations de Navier–Stokes, mais à une simulation « potentielle » résolvant les équations d'Euler, dispose–t–on des informations susceptibles de porter en elles l'information acoustique ? Encore faut–il pouvoir identifier ce qui caractérise le mouvement source.

Il faut remonter aux années 1950 pour trouver le point de départ d'une description de l'excitation acoustique sous forme surfacique et en termes cinématiques (dont la principale donnée connue est la vitesse), avec la théorie proposée par Liepmann [89]. Le mouvement source est alors porté par l'épaisseur de déplacement de la couche limite. Le mouvement source est peut–être imposé à l'acoustique à l'image d'une distribution de pistons. Un piston, ou au sens large, une surface en vibration qui imprime son mouvement dans l'acoustique. C'est le départ de la réflexion de Liepmann. Dans le cas d'écoulements de couche limite, on note plusieurs tentatives d'application (voir Krane et Pauley [79], Lagier et Sornette [80], Lauchle [82]). Mais cette approche est restée purement théorique pour d'autres cas d'écoulements comme la couche de mélange, pourtant décrite par Liepmann. Nous décrivons dans une deuxième partie de chapitre l'approche de Liepmann appliquée à la couche de mélange.

Si l'on cherche à faire une analogie entre un mouvement source d'origine aérodynamique et une surface en vibration, il faut prendre en compte qu'une telle surface est caractérisée par sa pseudo imperméabilité. Mais qu'en est–il dans le cas d'une excitation « air–air » ? En aérodynamique, les lignes de courant sont un réseau de lignes définies par leur colinéarité avec le vecteur vitesse. Elles sont donc imperméables. Mais comme nous l'avons dit, c'est un réseau de lignes, ce qui implique de sélectionner une ligne de courant en particulier. Mais selon quel critère ? La troisième partie de ce chapitre sera dédiée à la réflexion sur cette approche.

5.1 Rayonnement acoustique d'une couche de mélange

5.1.1 Discussion préliminaire

L'écoulement de couche de mélange a été brièvement évoqué dans l'avant–propos et au chapitre 1. Nous l'avons décrit comme une zone de cisaillement provoqué par le contact entre deux écoulements parallèles de vitesses différentes. Cette zone de cisaillement est convectivement instable et est le lieu de création de structures cohérentes par croissance des instabilités de Kelvin–Helmholtz. Crow et Champagne [38] ont mis en évidence la possibilité d'ordonner les structures cohérentes de la zone de cisaillement en excitant à des fréquences bien précises. On peut donc organiser et contrôler le développement des structures de Kelvin–Helmholtz notamment en jouant sur le profil de vitesses transversales [9]. Dans sa thèse de doctorat, Cava-

lieri [27] observe que « la couche de mélange sans contrôle présente un rayonnement intense localisé dans le temps, qui est réduit par l'action du contrôle. L'étude [...] révèle que le contrôle permet d'éviter l'occurrence d'une interaction entre trois tourbillons, qui, dans le cas sans contrôle, mène au rayonnement intermittent » [a]. Il est alors important de distinguer le cas d'une excitation harmonique et le cas d'une excitation aléatoire. À ce propos, la couche de mélange excitée harmoniquement est qualifiée de « pathologiquement silencieuse » par Wei et Freund [146]. La couche de mélange (contrôlée *versus* aléatoire) est analysée par Cavalieri *et al.* [28]. Ils découvrent que le cas non contrôlé est très bruyant à cause de ruptures de périodicité dans les appariements [b].

En ce qui nous concerne, nous disposons d'une base de données issue d'une simulation directe (*DNC*) d'après Moser *et al.* [117]. Elle est excitée harmoniquement selon deux fréquences, une fondamentale et sa première sous–harmonique, et fait donc relativement peu de bruit (par rapport à un écoulement excité aléatoirement) mais avec un mécanisme incomplètement identifié [9]. Laissant le sujet ouvert quant au rôle de l'appariement tourbillonnaire ou de la modulation de pression dans la zone de cisaillement, nous présentons l'application des méthodes d'extrapolation. Nous effectuons la comparaison entre la *DNC* issue des calculs de Moser *et al.* [117] et les méthodes d'extrapolation vues au chapitre 3, basées sur le formalisme de Kirchhoff (section 3.2.2), de Ffowcs Williams (section 3.2.1) et l'intégrale de Rayleigh (section 3.3.2) en milieu convecté.

5.1.2 Simulation acoustique directe de la couche de mélange

Moser *et al.* [117] ont réalisé une simulation acoustique directe du bruit rayonné par une couche de mélange. L'écoulement supérieur est à la vitesse U_1 tandis que l'écoulement inférieur est à la vitesse U_2. Pour rester dans les notations du mémoire, la direction longitudinale est représentée par la variable y_1 et la direction transverse par la variable y_2. La condition d'entrée de la simulation est un profil de vitesse horizontale (u) en tangente hyperbolique :

$$u(y_2) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\frac{2y_2}{\delta_\omega}\right)$$

où $\delta_\omega = (U_1 - U_2)/|\partial u/\partial y_2|_{max}$ est l'épaisseur de vorticité que l'on peut représenter par le schéma de la figure 5.1.

Le rapport des vitesses vaut $U_1/U_2 = 2$ et dans l'écoulement supérieur, le nombre de Mach est fixé à $M_1 = 0{,}5$ en prenant la vitesse du son c comme vitesse de référence d'après les conditions à l'infini, identiques pour les deux écoulements. Le nombre de Reynolds est basé sur l'épaisseur de vorticité et vaut $R_e = (U_1 - U_2)\delta_\omega/\nu = 400$ pour une viscosité cinématique ν constante à l'infini.

La simulation est échantillonnée sur une période, selon 538 pas de temps $\Delta t = 0{,}15\delta_\omega/c$. Dorénavant et sauf mention contraire, les échelles de longueurs sont toutes adimensionnées par rapport à la longueur de référence δ_ω. Le domaine numérique s'étend de 0 à $L_{y1} = +800$ dans la direction longitudinale, discrétisée avec un pas d'espace $\Delta y_{1\ min} = 0{,}255$ pour $0 \leqslant y_1 \leqslant 440$ avant d'être graduellement étiré

a. Pour une comparaison entre différents types de contrôle appliqués à la couche de mélange (sans excitation, excité à la première sous harmonique puis à la deuxième sous harmonique et enfin les deux simultanément), voir Bogey [9].

b. C'est le point de départ de l'investigation sur les mécanismes de paquets d'ondes intermittents [29].

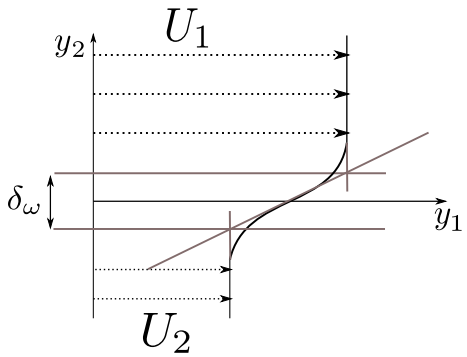


Figure 5.1 – Concept d'épaisseur de vorticité δ_ω.

pour $440 \leqslant y_1 \leqslant L_{y1}$ jusqu'à $\Delta y_{1\ max} = 1{,}600$ en sortie de domaine. Dans la direction transverse, le domaine numérique s'étend de -400 à $+400$, soit une longueur $L_{y2} = L_{y1}$. Le pas d'espace dans cette direction est également étiré graduellement de $\Delta y_{2\ min} = 0{,}175$ dans la zone de cisaillement en $y_2 = 0$ jusqu'à atteindre $\Delta y_{2\ max} = 5{,}948$ aux frontières latérales. La direction longitudinale est composée de 2071 points et la direction transverse de 785 points.

Le domaine numérique est également constitué d'une zone tampon appelée *buffer zone* en anglais, comme on peut le voir sur la figure 5.2. Cette zone a pour but de dissiper les ondes acoustiques artificielles qui seraient issues des schémas numériques ou des structures tourbillonnaires convectées en fin de domaine. Dans une simulation directe (*DNS* ou *DNC*), les schémas numériques produisent en effet une viscosité artificielle qui vient atténuer l'influence de la viscosité « naturelle » et donc prolonger l'existence d'une structure qui serait autrement dissipée. La zone tampon est appliquée pour $[440 \leqslant y_1 \leqslant 800] \times [-120 \leqslant y_2 \leqslant 120]$ et $[720 \leqslant y_1 \leqslant 800] \times [-400 \leqslant y_2 \leqslant 400]$.

La discrétisation spatiale est appliquée par des schémas aux différences finies d'ordre six [86] et l'avancement temporel est géré par un schéma de Runge–Kutta d'ordre quatre. Pour le détail des algorithmes employés pour la simulation acoustique directe, voir la référence [117]. Voir également la thèse de Moser [116].

Dans la simulation directe de Moser *et al.* [117], l'excitation est harmonique. Nous avons dit dans la discussion préliminaire que ce cas de figure génère une intensité acoustique plus faible qu'une couche de mélange excitée aléatoirement. Pour Moser *et al.* [117], l'intérêt principal est surtout que cela permet une croissance plus rapide des instabilités de Kelvin–Helmholtz ainsi qu'un meilleur contrôle sur les phénomènes d'enroulement et d'appariement tourbillonnaires. L'écoulement est donc excité aux deux premières harmoniques $f_1 = 0.132 U_c/\delta_{\omega_f}$ et $f_2 = f_1/2$ où $U_c = (U_1 + U_2)/2$ est la vitesse de convection des tourbillons et δ_{ω_f} est l'épaisseur de vorticité en $y_2 \sim 80$ pour tenir compte de son élargissement dû à la viscosité. L'excitation, incompressible et de faible amplitude, est localisée légèrement en aval du début du domaine en suivant l'exemple de Bogey *et al.* [10].

5.1.3 Implantation du formalisme intégral

Les méthodes intégrales qui ont été développées au chapitre 3 sont maintenant appliquées à la couche de mélange sur un domaine de taille identique à celui de la

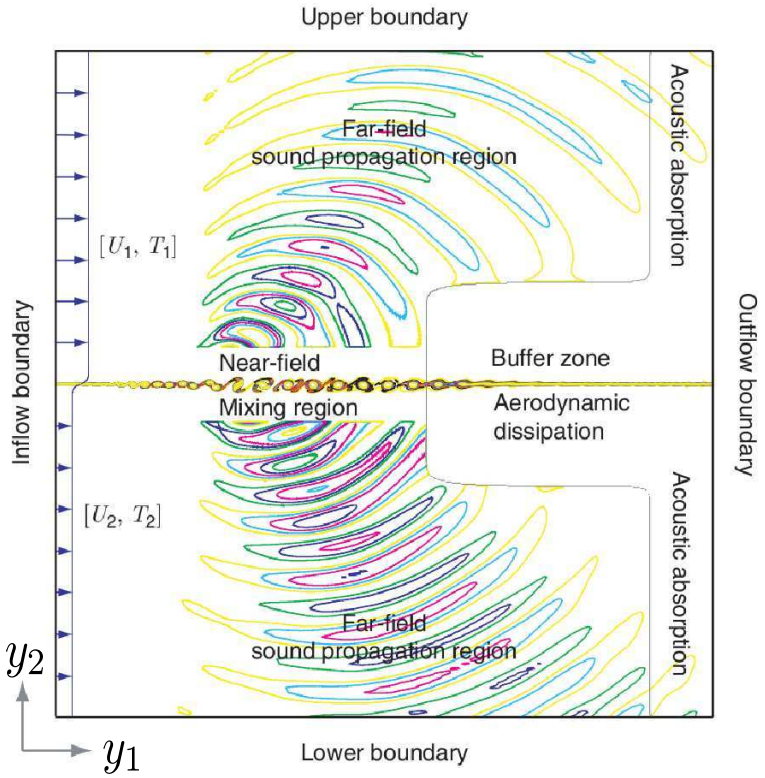


Figure 5.2 – Vue schématique de la simulation acoustique directe avec isocontours de vorticité (champ proche) et du champ de dilatation (champ lointain). Reproduit d'après Moser *et al.* [117].

DNC de Moser *et al.* [117] mais d'une discrétisation beaucoup plus légère de 201 points dans les deux directions espacés de manière régulière. Pour l'application des méthodes intégrales, on rappelle avoir recours à deux notations spécifiques pour identifier le domaine source $(y_1; y_2)$ et le domaine observateur $(x_1; x_2)$, comme représenté sur la figure 5.3.

Les différentes quantités nécessaires aux méthodes d'extrapolation sont lues sur la surface Σ entourant le domaine source à partir de la base de données de la simulation de Moser *et al.* [117]. Pour atténuer leur influence en dehors de la zone prédite par la *DNC* comme étant la source acoustique et ainsi éviter l'apparition d'ondes acoustiques parasites, une pondération gaussienne est appliquée, définie par la fonction de pondération f telle que

$$f = \exp\left(-\frac{x_p^2}{\sigma^2}\right)$$

où

$$x_p = \begin{cases} \dfrac{x - x_{d_1}}{x_{d_1} - x_{d_0}}; & x_{d_0} \leqslant x \leqslant x_{d_1} \\ \dfrac{x - x_{f_0}}{x_{f_1} - x_{f_0}}; & x_{f_0} \leqslant x \leqslant x_{f_1} \end{cases}$$

avec les paramètres de pondération résumés dans la table 5.1 :

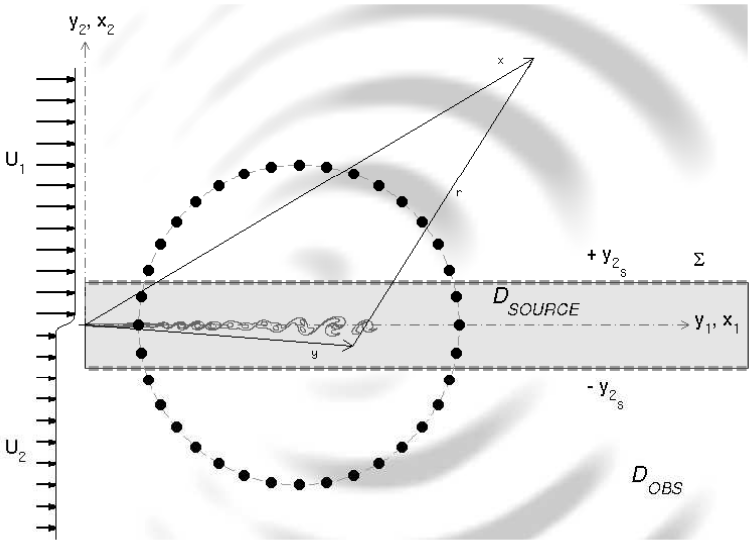


Figure 5.3 – Principales notations pour la mise en place du formalisme intégral. Reproduit d'après Margnat et Gloerfelt [103].

σ	x_{d_0}	x_{d_1}	x_{f_0}	x_{f_1}
0,5	0,0	100,0	450,0	700,0

Table 5.1 – Fenêtre de pondération utilisée pour la couche de mélange.

Les méthodes d'extrapolation sont appliquées dans le domaine fréquentiel par souci de clarté, l'écoulement étant périodique et laminaire. De plus, la décroissance rapide des modes de Fourier permet un calcul sur les plus importants en limitant le nombre d'opérations. Après la pondération, on applique une transformée de Fourier pour calculer le spectre fréquentiel des quantités lues. L'algorithme utilisé est le code *DFFT pack* [141]. Les conventions pour les transformées de Fourier sont celles de l'algorithme *DFFT pack*. Elles sont identiques aux autres chapitres (mais différentes de celles utilisées au chapitre 4). On les rappelle ici :

$$\begin{cases} f(\mathbf{x},\omega) &= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{x},t)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\ \hat{f}(\mathbf{x},t) &= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},\omega)\, e^{+i\omega t}\mathrm{d}\omega \end{cases}$$

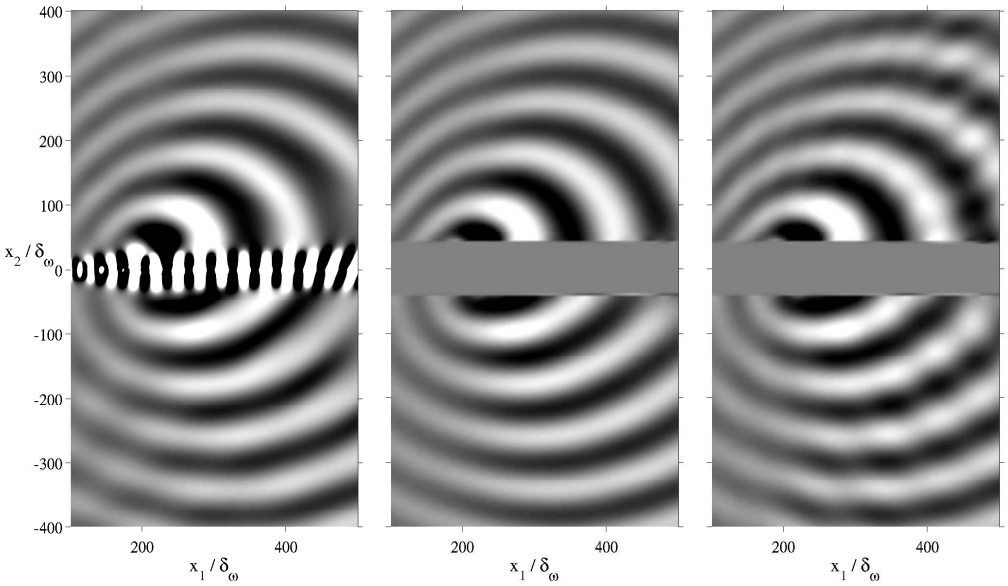
La procédure de calcul du champ acoustique est ensuite effectuée dans l'espace des fréquences et on revient à l'espace temporel par une transformée de Fourier inverse. C'est dans cet espace que seront présentés les résultats. Pour le calcul des fonctions de Hankel, nous avons utilisé les algorithmes inclus dans la librairie Amos[c]. L'intégration numérique est effectuée par la méthode des trapèzes.

Pour illustrer l'implantation numérique nous présentons l'application des méthodes intégrales de Kirchhoff, de FW–H et de Rayleigh en régime convecté pour une position donnée de la surface de contrôle. L'influence de cette dernière sera discutée à la section 5.1.4. En ce qui concerne la formulation de FW–H, deux expressions

c. détails et routines disponibles sur : http://netlib.org/amos/

seront testées : l'une avec la densité instantanée (ρ), l'autre avec la densité moyenne (ρ_0). L'équivalence entre ces deux formulations sera présentée dans la section 5.1.4 conjointement avec l'étude sur la position de la surface de contrôle. Pour présenter les résultats préliminaires et illustrer l'implantation numérique, seule la formulation avec ρ_0 est retenue dans cette section.

Une première application des méthodes d'extrapolation est présentée aux figures 5.4 et 5.5. Les formulations utilisées sont rappelées à l'équation (5.1) [d] et appliquées au cas présent. La surface de contrôle est placée en $y_2 = \pm y_{2_S} = \pm 40$. En ce qui concerne la figure 5.4 on constate une bonne prédiction par les méthodes d'extrapolation (Kirchhoff et FW–H) par rapport à la *DNC* de Moser *et al.* [117]. On note cependant un léger rayonnement parasite à la sortie du domaine source dans la prédiction par la méthode de FW–H et qui semble dû à la pondération. Bien que celle–ci soit identique pour toutes les méthodes d'extrapolation, la méthode de FW–H se montre la plus sensible au problème de troncature.



(a) DNC (b) Kirchhoff (c) FW–H

Figure 5.4 – Pression acoustique. Prédiction par les méthodes intégrales. $y_{2_S} = 40$. Niveaux de couleurs de $-4{,}0 \times 10^{-5}$ (noir) à $+4{,}0 \times 10^{-5}$ (blanc).

$$p_K(\mathbf{x},\omega) = \int_\Sigma \left\{ \pm G_c \frac{\partial}{\partial y_2} p(\mathbf{y},\omega) \mp p(\mathbf{y},\omega) \frac{\partial G_c}{\partial y_2} \right\} n_i \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{5.1a}$$

$$p_{FWH}(\mathbf{x},\omega) = \int_\Sigma \left\{ F_1(\mathbf{y},\omega) \frac{\partial G_c}{\partial y_1} + F_2(\mathbf{y},\omega) \frac{\partial G_c}{\partial y_2} - i\omega Q(\mathbf{y},\omega) G_c \right\} \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{5.1b}$$

$$p_R(\mathbf{x},\omega) = -2i\omega\rho_0 \int_\Sigma v(\mathbf{y},\omega) G_c \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{5.1c}$$

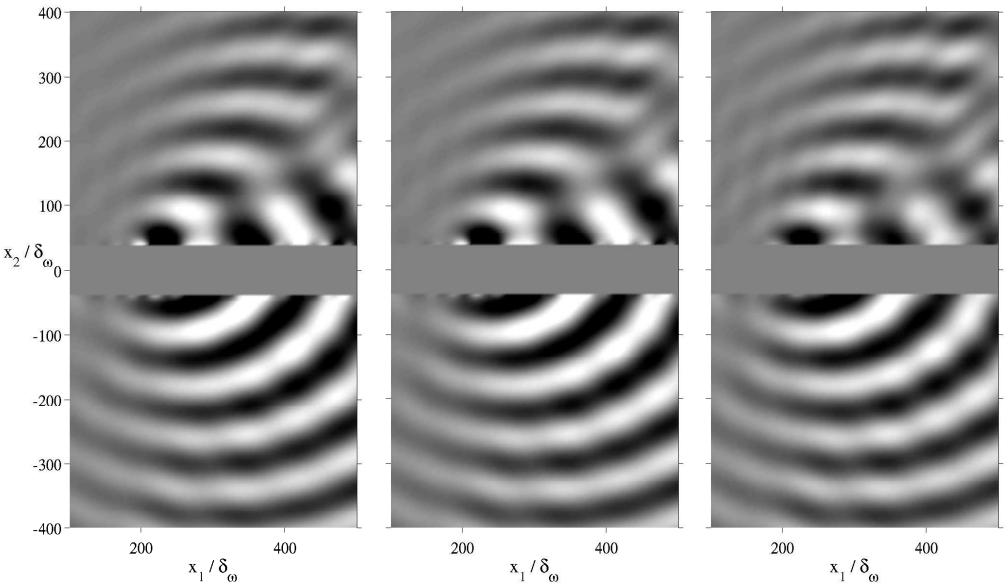
$$p_{RC}(\mathbf{x},\omega) = -2\rho_0 \int_\Sigma \left\{ i\omega v(\mathbf{y},\omega) + U_\infty \frac{\partial}{\partial y_1} v(\mathbf{y},\omega) \right\} G_c \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{5.1d}$$

d. où les indices K, FWH, R et RC désignent les formulations respectives de Kirchhoff, FW–H, Rayleigh et Rayleigh convecté.

avec

$$\begin{cases} \hat{F}_1(t) & = \mp\hat{\rho}\,(\hat{u} - 2U_\infty)\,\hat{v} & = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)e^{+i\omega t}\mathrm{d}\omega \\ \hat{F}_2(t) & = \mp\hat{\rho}\hat{v}^2 + p & = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega)e^{+i\omega t}\mathrm{d}\omega \\ \hat{Q}(t) & = \mp\hat{\rho}\hat{v} & = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega)e^{+i\omega t}\mathrm{d}\omega \end{cases}$$

Concernant la figure 5.5, on valide la mise en place de l'intégrale de Rayleigh en la comparant au terme monopolaire de la formulation de FW–H [e]. Le sens physique de ce terme monopolaire est donc relatif car il n'est qu'une partie du champ acoustique complet. On constate que l'intégrale de Rayleigh prédit correctement le comportement monopolaire. Formellement, l'intégrale de Rayleigh doit contenir le gradient de pression exprimé d'après les *EEL* en présence d'un écoulement uniforme (intégrale de Rayleigh statique). Néanmoins, l'équivalence mathématique est entre le monopole de FW–H et l'intégrale de Rayleigh avec un gradient de pression exprimé en l'absence d'écoulement (intégrale de Rayleigh convectée).



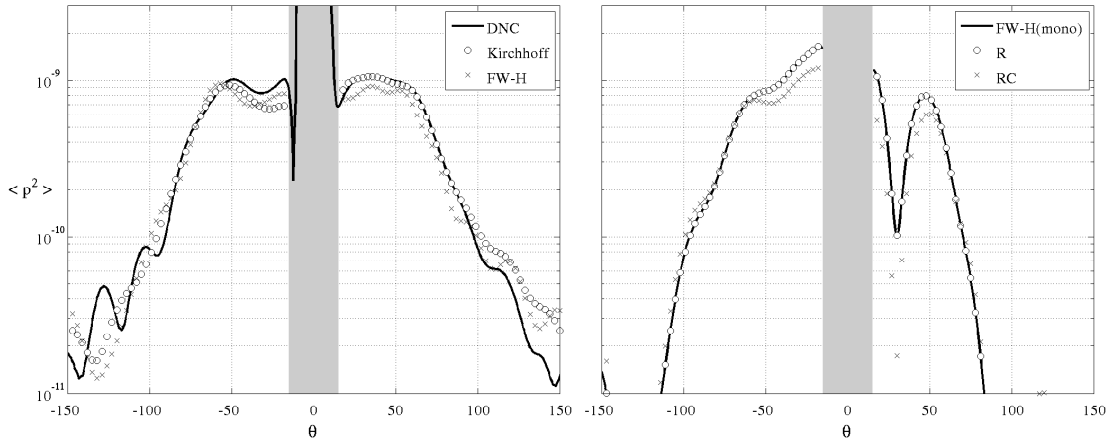
(a) FW–H (monopôle) (b) Rayleigh (c) Rayleigh convecté

Figure 5.5 – Pression acoustique. Prédiction par les méthodes intégrales. Terme monopolaire. $y_{2_S} = 40$. Niveaux de couleurs de $-4{,}0 \times 10^{-5}$ (noir) à $+4{,}0 \times 10^{-5}$ (blanc).

Pour une analyse plus rigoureuse, on présente à la figure 5.6 l'intensité acoustique observée sur une surface définie par un cercle de rayon $r = 150\delta_\omega$ et centré au point $x_1 = 200$ et $x_2 = 0$, discrétisé en 1201 points sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$. Ce cercle est représenté sur la figure 5.3. En champ lointain, l'intensité acoustique est approchée par $I \sim \langle p'^2 \rangle$, où $\langle\ \rangle$ est la moyenne temporelle [103]. Sur la figure 5.6, la zone grisée correspond au domaine source, c'est–à–dire la zone en–deçà de la surface de contrôle donc non calculée. On constate un très bon accord entre les méthodes intégrales et la *DNC*. En regardant le terme monopolaire (figure 5.6(b)), l'intégrale de Rayleigh

e. au facteur deux près, issu de la méthode des images qui double la contribution (voir section 3.3.2).

statique (légende « R ») est naturellement plus fidèle au monopole de FW–H que l'intégrale de Rayleigh convectée (légende « RC »). D'après la figure 5.6(b), il semble que la prise en compte du terme d'advection dans la dérivée particulaire de l'intégrale de Rayleigh diminue l'intensité acoustique aux faibles angles, près de la surface de contrôle.



(a) Intensité acoustique (b) Terme monopolaire

Figure 5.6 – Intensité acoustique sur un cercle de rayon $r = 150\delta_\omega$ centré en $(x_1 = 200; x_2 = 0)$. Angle d'observation θ en degrés. $y_{2_S} = 40$. La zone grisée est le domaine source.

On considère dès lors les mises en place du formalisme de Kirchhoff, du formalisme de FW–H et de l'intégrale de Rayleigh validées. Nous proposons maintenant une étude sur l'influence de la position de la surface de contrôle y_{2_S}.

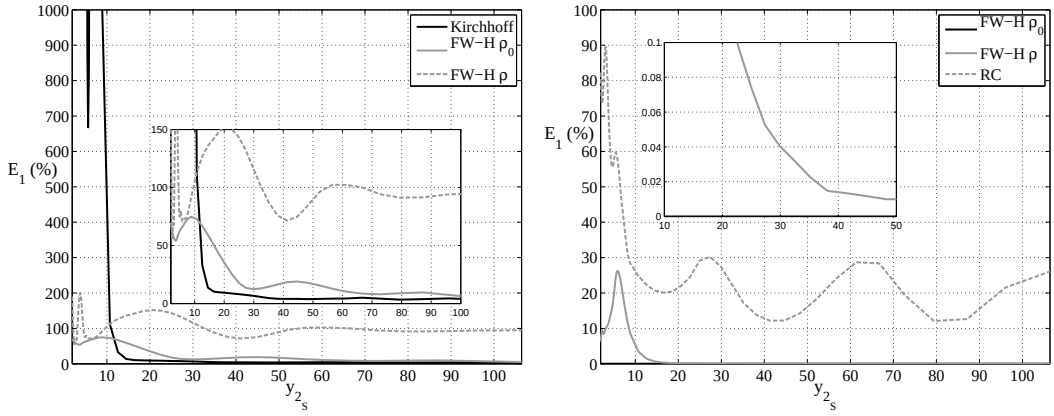
5.1.4 Influence de la position de la surface de contrôle

Maintenant que les méthodes intégrales sont validées, on peut tester l'influence de la position de la surface de contrôle. Pour cela, nous définissons une erreur relative pour quantifier l'écart entre l'intensité acoustique prévue par la méthode intégrale (I) par rapport à l'intensité acoustique de la méthode de référence (I_{REF}) :

$$E_1 = \frac{\langle I - I_{\text{REF}} \rangle}{\langle I_{\text{REF}} \rangle}$$

Ici, $\langle\ \rangle$ désigne la moyenne spatiale entre $100 \leqslant x_1 \leqslant 500$ en $x_2 = +300$.

La figure 5.7(a) présente l'erreur E_1 entre les méthodes d'extrapolation de Kirchhoff et de FW–H avec densité moyenne (ρ_0) et densité totale (ρ) et prenant comme référence la *DNC*. D'une manière générale, on voit bien que l'erreur est importante pour y_{2_S} proche de zéro mais diminue rapidement et c'est plus éloquent pour l'intégrale de Kirchhoff. Dès que la surface de contrôle $y_{2_S} > 10$, l'erreur sur l'intégrale de Kirchhoff est inférieure à l'erreur sur l'intégrale de FW–H (avec ρ_0 ou ρ) et passe en dessous de 50% pour finalement osciller entre 3% et 4%. L'erreur sur l'intégrale de FW–H ρ_0 descend plus timidement. Elle passe les 50% pour $y_{2_S} > 16$, arrive à 12% pour $y_{2_S} = 30$, remonte pour finalement atteindre presque le niveau d'erreur constaté avec l'intégrale de Kirchhoff, de l'ordre de 5%. L'erreur sur l'intégrale de FW–H ρ quant à elle reste toujours importante. Elle descend au plus bas à 70%



(a) Référence : *DNC*

(b) Référence : intégrale de Rayleigh

FIGURE 5.7 – Erreur relative. Influence de la position de la surface de contrôle y_{2_S}.

pour $y_{2_S} = 40$ mais remonte et oscille autour de 100%. Ce résultat est comparable à la littérature [103] en ce qui concerne la méthode de Kirchhoff mais est étonnant pour la méthode de FW–H. L'écart entre la formulation de FW–H pour les deux densités considérées (instantanée ou moyenne) est également surprenant mais une erreur accentuée par le rayonnement parasite issu de la pondération est à envisager.

La figure 5.7(b) présente l'erreur E_1 entre le formalisme de FW–H (pour le terme monopolaire) et l'intégrale de Rayleigh comme référence. Lorsque l'on compare l'intégrale de FW–H ρ_0 (avec une hypothèse de masse volumique constante) avec l'intégrale de Rayleigh, l'erreur est immédiatement inférieure à 1,0 10^{-6}%. L'algorithme utilisé est validé. En revanche, l'erreur par rapport à l'intégrale de FW–H ρ est plus timorée bien qu'elle reste toujours en dessous de 20% et passe sous les 1% dès $y_{2_S} > 12$. Si l'accord est toujours satisfaisant avec le monopole de FW–H, la densité uniforme ρ_0 est privilégiée. Et ce fait est encore plus marquant lorsque l'on regarde l'intégrale complète (figure 5.7(a)).

La mise en place des méthodes intégrales a été validée par comparaison avec la *DNC*. La base de données issue de la simulation directe de Moser *et al.* [117] est ainsi maîtrisée, nous sommes donc en mesure d'aborder la problématique de modélisation par une excitation surfacique *via* le formalisme de l'intégrale de Rayleigh. Avec les outils que nous venons de développer et de valider, nous allons étudier le rôle de quantités évoluant directement dans le domaine hydrodynamique. En premier lieu, nous présentons l'analogie de Liepmann.

5.2 L'analogie de Liepmann

5.2.1 Concept d'épaisseur de déplacement

La viscosité d'un écoulement s'oppose au mouvement du fluide. C'est la cause du frottement. Si on considère par exemple un écoulement sur une plaque plane, le frottement va entraîner un ralentissement de l'écoulement d'autant plus fort que l'on s'approche de la paroi. Au plus proche de la paroi, la vitesse des particules est nulle. Une zone est alors définie, qui part de la paroi jusqu'à ce que la vitesse de l'écoulement atteigne la vitesse moyenne de convection. On appelle cette zone la

couche–limite. La chute de vitesse dans la couche–limite entraîne une perte de débit qui est compensée par un réhaussement des lignes de courant [91]. La hauteur de ce réhaussement est l'épaisseur de déplacement. La figure 5.8 est une vue schématique de ce concept. Le cas réel d'un écoulement avec viscosité est représenté à gauche. La couche–limite entraîne une perte de débit représenté par la zone grisée. Si on représente cette perte de débit dans le cas d'un écoulement de fluide parfait, la hauteur δ^* est la hauteur à laquelle il faut réhausser le profil de vitesse uniforme.

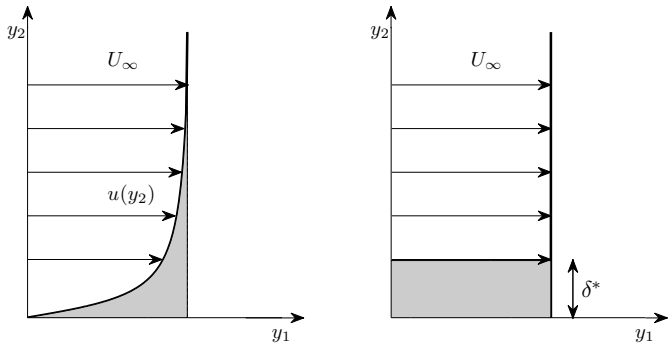


Figure 5.8 – Concept d'épaisseur de déplacement pour une couche–limite. À gauche, le cas avec viscosité. À droite, le même débit en fluide parfait. Dans les deux cas, l'intégrale sous le profil de vitesse (zone grisée) est identique.

Ainsi, on définit formellement l'épaisseur de déplacement δ^* par rapport au profil de vitesse uniforme :

$$\rho_0 U_\infty \delta^* = \int_0^{+\infty} \rho_0 U_\infty \mathrm{d}y_2 - \int_0^{+\infty} \rho u(y_2) \mathrm{d}y_2 \tag{5.2}$$

où ρ_0 et U_∞ sont les conditions de densité et de vitesse en dehors de la couche–limite tandis que ρ et $u(y)$ sont les conditions de densité et de vitesse dans la couche–limite de l'écoulement uniforme. On peut alors exprimer la valeur de l'épaisseur de déplacement par

$$\delta^* = \int_0^{+\infty} 1 - \frac{\rho u(y_2)}{\rho_0 U_\infty} \mathrm{d}y_2$$

Dans le cas général, il est évident que l'épaisseur de déplacement n'est pas une constante ; elle évolue le long de la paroi, au cours de l'espace, et au cours du temps si l'écoulement est instationnaire, soit $\delta^* = \delta^*(y_1,t)$. Si l'épaisseur de déplacement exprime alors des variations, et puisqu'elle impose un mouvement par réhaussement à l'écoulement extérieur, elle peut être perçue comme une distribution de pistons élémentaires qui viendraient imprimer le mouvement vibratoire de l'écoulement et transmettre une fluctuation au milieu acoustique. C'est le principe de l'analogie de Liepmann [89].

5.2.2 Sollicitation de l'acoustique par l'épaisseur de déplacement

Liepmann propose en 1954 une alternative à la théorie de Lighthill [90] (1952) pour le bruit d'origine aérodynamique, à partir d'un constat de Van Dyke : l'onde

de pression générée par une plaque plane mise en mouvement de manière impulsive peut être vue comme l'onde acoustique causée par la vibration d'un piston [145]. La question que se pose alors Liepmann est simple : et si les fluctuations de l'épaisseur de déplacement avaient le même rôle ? Si on considère un écoulement de plaque plane, on peut appliquer l'intégrale de Rayleigh développée à la section 3.3.2 (équation (3.11)), dans la mesure où le piston impose une sollicitation de vitesse. D'après le chapitre 3, l'intégrale de Rayleigh s'écrit :

$$p(\mathbf{x},\omega) = -2i\omega\rho_0 \iint_\Sigma v(\mathbf{y},\omega)G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{5.3}$$

Dans cette expression, $v(\mathbf{y},\omega)$ est la vitesse normale à la surface dans l'espace des fréquences. L'épaisseur de déplacement $\delta^*(\mathbf{y},\tau)$ étant l'amplitude de vibration, c'est–à–dire la position instantanée du piston équivalent, on peut alors exprimer une vitesse de vibration par effet de déplacement :

$$\frac{\partial\delta^*(\mathbf{y},\tau)}{\partial\tau} = v(\mathbf{y},\tau)$$

qui devient, dans l'espace des fréquences, après application de la transformée de Fourier :

$$i\omega\delta^*(\mathbf{y},\omega) = v(\mathbf{y},\omega)$$

Et en remplaçant dans l'expression (5.3), il vient :

$$p(\mathbf{x},\omega) = 2\omega^2\rho_0 \iint_\Sigma \delta^*(\mathbf{y},\omega)G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{5.4}$$

C'est le résultat publié par Liepmann [89]. C'est une intégrale de Rayleigh, pour laquelle la vitesse normale de vibration n'est plus la vitesse de la particule au sens des équations d'Euler mais une vitesse de déplacement. L'expression (5.4) ne souffre aucune autre perte de généralités que celles inhérentes à la méthode des images utilisée pour établir l'intégrale de Rayleigh. Il faut cependant noter que Liepmann présente une formulation faisant intervenir une fonction représentant la surface qui n'est pas clairement définie, à plus forte raison lorsque l'auteur généralise le concept à d'autres types d'écoulement (voir [2, 83]). Généralisation qui pose par ailleurs de nombreuses questions. On constate ainsi quelques publications sur la théorie de Liepmann appliquée à des écoulements de couche–limite ([79, 80, 82]), mais aucune à notre connaissance sur d'autres cas d'écoulements pourtant évoqués par Liepmann [89] (notamment le jet rond).

Étant donné la similitude avec le terme monopolaire de l'expression de FW–H, on pourrait douter de sa capacité à représenter un champ acoustique complet comme celui de la *DNC*. Cette remarque nous donne une nouvelle occasion d'insister sur le fait qu'il ne sagit pas de la même vitesse d'excitation puisqu'une intégrale de Rayleigh au sens où on l'entend généralement prend en entrée la vitesse eulérienne tandis que l'intégrale de Rayleigh au sens de Liepmann prend comme excitation la vitesse de variation de l'épaisseur de déplacement. On peut ajouter une nouvelle remarque à l'expression (5.4) : lorsque Liepmann écrit son analogie, il ne prend pas en compte une vitesse uniforme de l'écoulement en remplaçant le gradient de pression par les *EEL*. La convection pourrait être prise en compte plus tôt en écrivant la vitesse d'excitation

comme la dérivée *particulaire* de l'épaisseur de déplacement. Nous proposons une extension de l'analogie de Liepmann pour la prise en compte dans la convection dès l'écriture des *EEL* pour l'expression du gradient de pression mais formellement, on peut aboutir au même résultat. L'intégrale de Rayleigh convectée a été établie au chapitre 3 :

$$p(\mathbf{x},\omega) = -2\rho_0 \iint_\Sigma \left\{ i\omega v(\mathbf{y},\omega) + U_\infty \frac{\partial}{\partial y_1} v(\mathbf{y},\omega) \right\} G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{5.5}$$

Dès lors, l'analogie de Liepmann avec prise en compte de la convection devient :

$$p(\mathbf{x},\omega) = -2\omega\rho_0 \iint_\Sigma \left\{ -\omega\delta^*(\mathbf{y},\omega) + iU_\infty \frac{\partial}{\partial y_1} \delta^*(\mathbf{y},\omega) \right\} G_c(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega) \mathrm{d}\Sigma(\mathbf{y}) \tag{5.6}$$

5.3 Application à la couche de mélange

5.3.1 Adaptation du concept d'épaisseur de déplacement

L'analogie de Liepmann qui consiste à imaginer les fluctuations de l'épaisseur de déplacement comme une distribution de pistons en vibration évoque directement la cinématique de l'écoulement *via* une information portant uniquement sur la vitesse transverse. Il est alors tentant de généraliser ce concept à la couche de mélange. La première question qui se pose concerne l'adaptation du concept d'épaisseur de déplacement non plus dans le cas d'un écoulement de couche–limite sur une plaque plane (donc avec une surface physique) mais dans le cas où deux écoulements parallèles sont en contact. Pour cela, on peut idéaliser le profil de vitesse de la couche de mélange à l'image du schéma de la figure 5.8, en suivant l'exemple de Ansart [2] comme on le représente à la figure 5.9. Dans la partie supérieure où l'écoulement est rapide, le profil de vitesse va engendrer une perte de débit par rapport à un profil idéalisé exactement comme dans le cas de la couche–limite. Dans la partie inférieure où l'écoulement est lent en revanche, le profil de vitesse va engendrer une augmentation du débit par rapport au cas idéalisé.

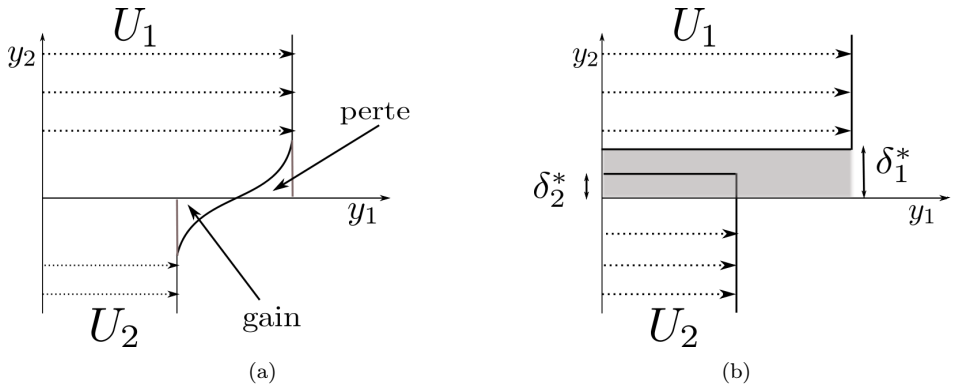


Figure 5.9 – Concept d'épaisseur de déplacement pour une couche de mélange. À gauche, le cas avec viscosité. À droite, le même débit en fluide parfait. Le profil de vitesse inférieur doit être réhaussé pour compenser le gain de débit.

Épaisseur de déplacement pour l'écoulement rapide

$$\rho_0 U_1 \delta_1^* = \int_0^{+\infty} \rho_0 U_1 \mathrm{d}y_2 - \int_0^{+\infty} \rho u(\mathbf{y}) \mathrm{d}y_2 \;\Rightarrow\; \delta_1^* = \int_0^{+\infty} 1 - \frac{\rho u(\mathbf{y})}{\rho_0 U_1} \mathrm{d}y_2$$

Épaisseur de déplacement pour l'écoulement lent

$$\rho_0 U_2 \delta_2^* = \int_{-\infty}^{0} \rho u(\mathbf{y}) \mathrm{d}y_2 - \int_{-\infty}^{0} \rho_0 U_2 \mathrm{d}y_2 \;\Rightarrow\; \delta_2^* = \int_{-\infty}^{0} \frac{\rho u(\mathbf{y})}{\rho_0 U_2} - 1 \; \mathrm{d}y_2$$

Si le concept d'épaisseur de déplacement d'un écoulement de couche–limite peut être adapté pour un écoulement de couche de mélange, il n'en reste pas moins un certain nombre d'incertitudes et notamment sur les bornes d'intégration. Dans un écoulement « idéal » de couche–limite, lorsque que la vitesse longitudinale atteint 99% de la vitesse à l'infini, donc dès qu'on sort de la couche–limite, il n'y a plus d'intérêt à intégrer les quantités puisqu'elles ne livrent plus de contributions. Dans un écoulement de couche de mélange, le profil peut rester perturbé longtemps, même pour de grandes distances verticales. En fixant la borne supérieure de l'intégration aux limites du domaine ($y_2 = \pm 400$), on conserve toutes les contributions. Cependant, rien n'est sûr en ce qui concerne la valeur de la borne inférieure de l'intégration.

On peut chercher à comparer les épaisseurs de déplacement calculées dans la couche de mélange aux épaisseurs de quantité de mouvement δ_θ et de vorticité δ_ω qui sont mieux définies pour ce type d'écoulement et qui peuvent également céder une vitesse de déplacement. Bogey [9] donne une définiton de l'épaisseur de quantité de mouvement et Monkewitz et Huerre [110] ont montré qu'elle est proportionnelle à l'épaisseur de vorticité dans le cas d'une couche de mélange ayant un profil en tangente hyperbolique :

$$\delta_\theta = \frac{1}{(U_2 - U_1)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\mathbf{y}) - U_1]\,[U_2 - u(\mathbf{y})]\,\mathrm{d}y_2 \quad \text{et} \quad \delta_\omega = 4\delta_\theta$$

Si Liepmann a fondé sa théorie sur l'épaisseur de déplacement, l'épaisseur de quantité de mouvement vaut d'être également considérée, si l'on note la remarque de Jenvey [74], suggérant que l'énergie acoustique est transportée par les fluctuations de quantité de mouvement.

5.3.2 Intégration numérique de l'épaisseur de déplacement

L'étude de Ansart [2] a mis en évidence la forte sensibilité des résultats sur la précision des schémas numériques. Un algorithme d'intégration numérique plus précis que la méthode des trapèzes est alors nécessaire. Nous développons en annexe D un algorithme basé sur la méthode de Simpson mais adapté à un maillage irrégulier. Pour valider dans un premier temps l'algorithme, on considère une fonction gaussienne $f(y_2)$ dont on connaît analytiquement l'intégrale I_{ref} :

$$f(y_2) = e^{-\left(\frac{y_2}{\sigma}\right)^2} \;\Rightarrow\; I_{ref} = \int_{-h}^{+h} f(y_2)\mathrm{d}y_2 \underset{h \mapsto \infty}{\sim} \sigma\sqrt{\pi}$$

La fonction $f(y_2)$ est ensuite intégrée numériquement par la méthode des trapèzes (I_T) et par la méthode de Simpson en maillage irrégulier (I_{SI}, équation (D.1) en annexe). La méthode est validée d'après la figure 5.10. On y représente la fonction gaussienne $f(y_2)$ (haut), les intégrations numériques avec l'intégrale de Gauss (milieu) et l'erreur relative associée par rapport à l'intégrale de Gauss (bas) d'après la relation

$$E_i = \frac{||I_i - I_{ref}||_1}{||I_{ref}||_1}$$

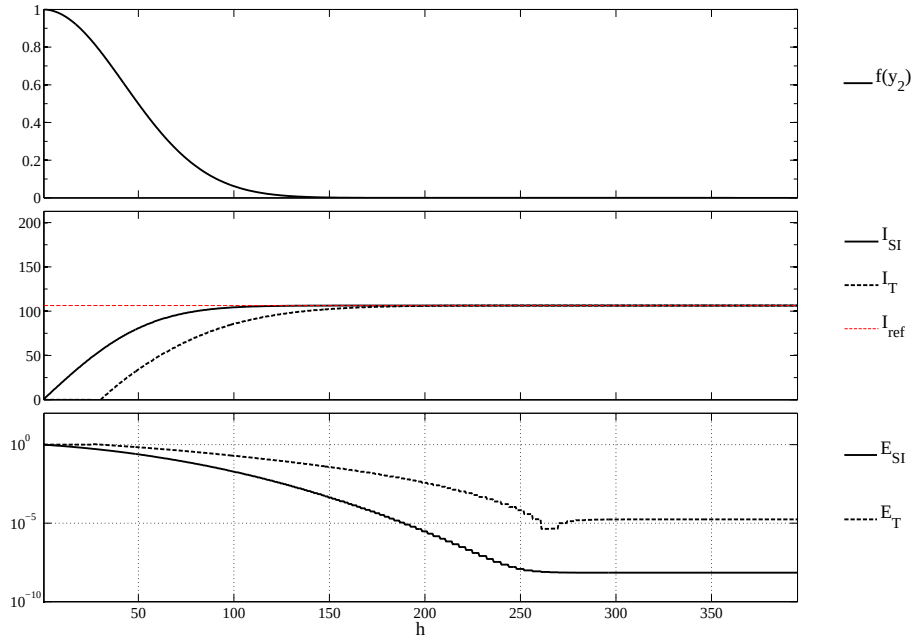


Figure 5.10 – Intégration numérique d'une fonction gaussienne. Validation de l'algorithme de Simpson en maillage irrégulier. Fonction gaussienne $f(y_2)$ (haut) pour $\sigma = 60$. Intégrations numériques et intégrale de Gauss (milieu). Erreur relative par rapport à l'intégrale de Gauss (bas).

La validité de l'intégration est testée par incrémentation des bornes d'intégration $\pm h$. L'intégration par la méthode de Simpson irrégulier converge plus rapidement vers l'intégrale de Gauss que l'intégrale obtenue par la méthode des trapèzes. L'erreur commise lors de l'intégration par la méthode des trapèzes tend vers 10^{-5} tandis que celle commise lors de l'intégration par la méthode de Simpson irrégulier tend vers 10^{-8}. L'algorithme basé sur la méthode de Simpson en maillage irrégulier est validé. On présente à la figure 5.11 un instantané des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement, avec les première et seconde dérivées temporelles.

Lorsque l'on compare les différentes épaisseurs, on constate qu'elles sont toutes en phase. La somme des deux épaisseurs de déplacement semble correspondre à l'épaisseur de quantité de mouvement mais elles ne se complètent pas tout à fait. Les pics négatifs de l'épaisseur de quantité de mouvement suggérant les appariements ne sont pas visibles sur les épaisseurs de déplacement ce qui semble indiquer une mauvaise définition de la borne inférieure de l'intégration des épaisseurs de déplacement. S'il existe une proportionnalité entre épaisseur de déplacement et épaisseur de quantité de mouvement, on peut prendre cette dernière comme référence pour un calcul d'er-

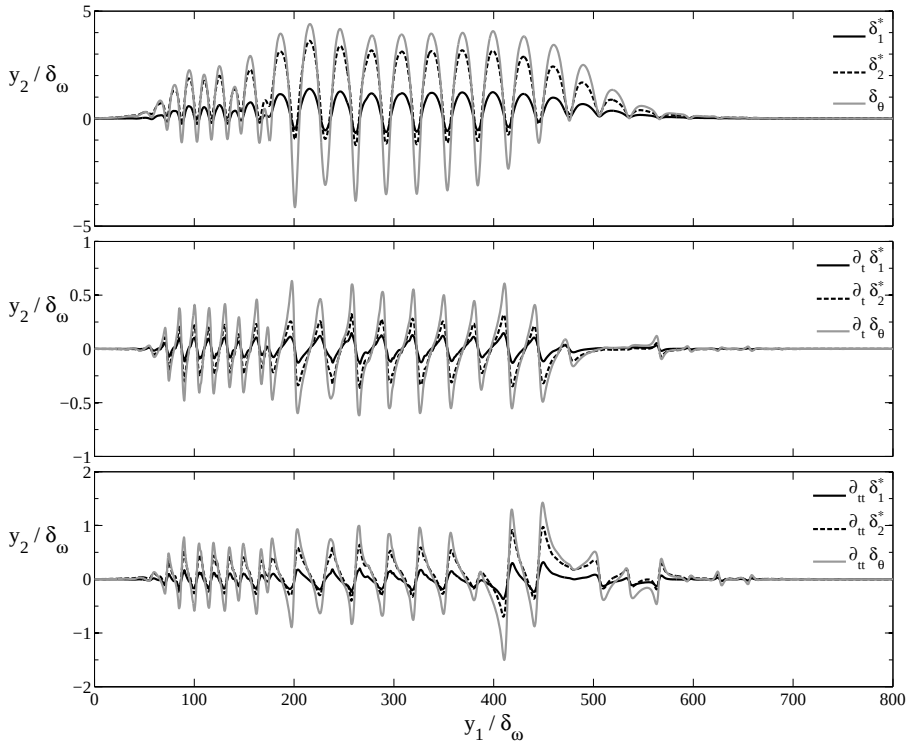


Figure 5.11 – Épaisseurs de déplacement (supérieure δ_1^* et inférieure δ_2^*) et de quantité de mouvement δ_θ pour la couche de mélange. **Haut :** amplitude. **Milieu :** vitesse. **Bas :** accélération.

reur relative sur les bornes d'intégration (figure 5.12). Pour l'étude de convergence sur la borne d'intégration supérieure cependant, la référence est l'intégration lorsque $h_{sup} = 400$. On calcule la somme des deux épaisseurs de déplacement en intégrant entre une borne inférieure h_{inf} qui est le paramètre et l'infini. On fait la moyenne temporelle et spatiale (dans la direction longitudinale) de chaque somme d'épaisseurs de déplacement et on trace la norme 1 de l'erreur relative à l'épaisseur de quantité de mouvement sur la figure 5.12(a). On constate que l'erreur est minimisée pour $h = -1$ malgré une valeur encore assez élevée de 25%. On étudie l'influence de la borne supérieure h_{sup} de la même manière. On fixe pour cela la borne inférieure $h_{inf} = 0$. On constate sur la figure 5.12(b) que l'erreur diminue de manière monotonique à mesure qu'augmente la borne d'intégration h_{sup}, ce qui indique que l'influence de l'épaisseur de déplacement (comme perte de débit) reste manifeste même à une grande distance de la zone de cisaillement.

Le concept d'épaisseur de déplacement a été adapté à la couche de mélange. Un schéma d'intégration numérique précis a été mis en place et l'influence des bornes d'intégration a été étudiée. Mais malgré les précautions prises pour le calcul de cette quantité, il reste encore trop d'incertitudes et de zones d'ombres. De plus, la quantité d'excitation est–elle une somme ou une différence des deux épaisseurs de déplacement ? Est–ce justifié de séparer ainsi en deux domaines distincts ? Ne faudrait–il pas définir une unique épaisseur de déplacement, normalisée par la vitesse de convection $U_c = (U_1+U_2)/2$? Pour ces raisons, nous jugeons plus sain de continuer la démarche de Liepmann en ayant recours à l'épaisseur de quantité de mouvement. Cette démarche revient d'ailleurs à considérer aussi l'épaisseur de vorticité, étant

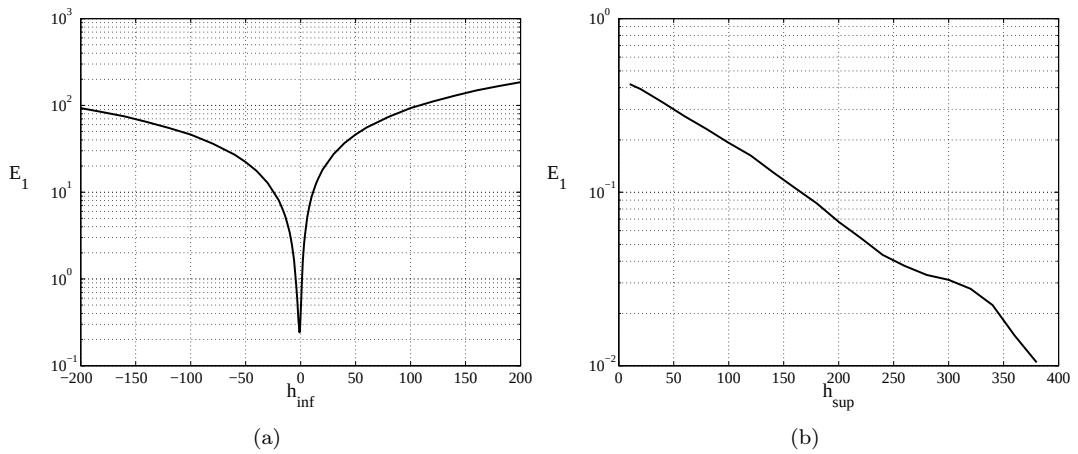
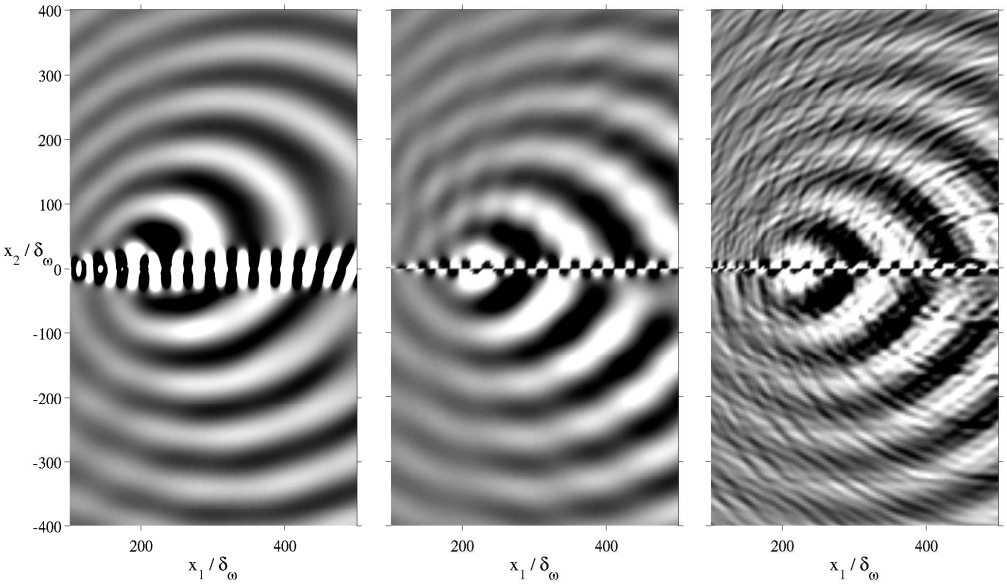


Figure 5.12 – Influence de la borne d'intégration inférieure (h_{inf}, gauche) et supérieure (h_{sup}, droite) de l'épaisseur de déplacement. Erreur relative (norme 1) à l'épaisseur de quantité de mouvement.

donné leur proportionnalité. Nous voyons plusieurs raisons à cela : (i) elle est mieux définie pour un écoulement de couche de mélange [9] ; (ii) les fluctuations de quantité de mouvement transportent l'énergie acoustique [74] et enfin (iii) c'est une quantité définie de manière univoque pour tout l'écoulement, contrairement à l'épaisseur de déplacement qui implique deux épaisseurs pour les deux écoulements parallèles de la couche de mélange. Le résultat de l'analogie de Liepmann avec sollicitation par l'épaisseur de quantité de mouvement est présentée à la figure 5.13.

Un facteur correctif de $2{,}0 \times 10^{-2}$ a été appliqué afin de retrouver les niveaux de la *DNC* car la pression acoustique prédite par l'analogie de Liepmann est surestimée de deux ordres de grandeurs. Les longueurs d'ondes et la convection sont certes bien prises en compte mais cela est plus à mettre au crédit de la fonction de Green que de la nature de la sollicitation. Mais en plus de l'amplitude erronée, on constate également un échec sur la topologie : (i) pour l'écoulement supérieur, les fronts d'ondes sont obliques au niveau de l'interface ($x_2/\delta_\omega = 0$) tandis qu'ils sont bien verticaux sur la *DNC*. (ii) à l'inverse, pour l'écoulement inférieur, les fronts d'ondes ont une tendance plus verticale sur l'analogie de Liepmann que sur la *DNC*, toujours à l'approche de l'interface. Tout se passe comme si la convection était surestimée dans l'écoulement supérieur et sous–estimée dans l'écoulement inférieur. Une présentation de la directivité de l'intensité acoustique confirme la surestimation dans l'écoulement supérieur et la sous–estimation dans l'écoulement inférieur (figure 5.14). La prise en compte d'un plus grand nombre de modes de Fourier ne corrige pas cela (figure 5.13(c)). Le formalisme qui extrapole l'onde acoustique issue de l'excitation par épaisseur de quantité de mouvement est basé sur l'intégrale de Rayleigh. On peut donc s'attendre à trouver un rayonnement maximal sur l'axe longitudinal d'après les conclusions tirées du chapitre 4. En ce sens, les résultats des figures 5.13 et 5.14 sont cohérents.

La démarche de la thèse est une démarche prospective dont le but est le développement d'une analogie basée sur la cinématique. L'analogie de Liepmann est séduisante. Nous avons vu qu'elle repose sur le concept d'épaisseur de déplacement qui est délicat à appliquer aux écoulements plus généraux. Or, l'épaisseur de déplacement entraîne un réhaussement des lignes de courant. Ces lignes sont définies par



(a) DNC (b) Premier mode (c) 5 premiers modes

Figure 5.13 – Pression acoustique. Prédiction par l'analogie de Liepmann. Sollicitation par épaisseur de quantité de mouvement. Niveaux de couleurs de $-4{,}0 \times 10^{-5}$ (noir) à $+4{,}0 \times 10^{-5}$ (blanc). Correction de niveaux par un facteur $2{,}0 \times 10^{-2}$ pour l'analogie de Liepmann.

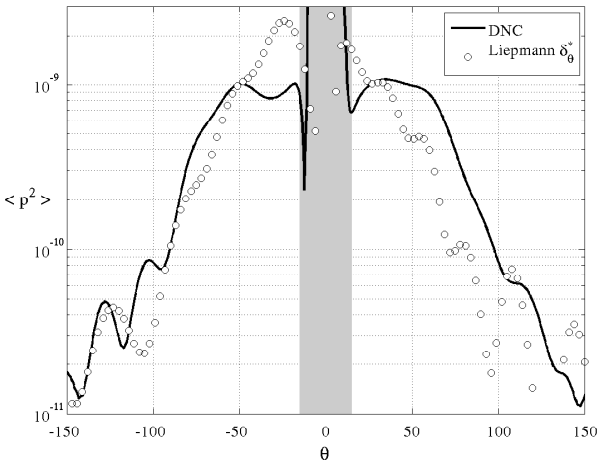


Figure 5.14 – Intensité acoustique sur un cercle de rayon $r = 150\delta_\omega$ centré en $(x_1 = 200; x_2 = 0)$. Angle d'observation θ en degrés. Prédiction par l'analogie de Liepmann et comparaison avec la *DNC*. Sollicitation par épaisseur de quantité de mouvement avec correction par un facteur $4{,}0 \times 10^{-4}$.

colinéarité avec le vecteur vitesse. Par définition, les lignes de courant sont un réseau de lignes imperméables au fluide, au sens de la vitesse. Elles peuvent alors constituer un réseau agissant comme une membrane par son imperméabilité. De plus, la reconstruction du champ acoustique à une sollicitation par lignes de courant est tout à fait adaptée à l'intégrale de Rayleigh, là encore du fait de l'imperméablité de la surface d'excitation comme nous l'avons vu au chapitre 3. Nous nous proposons d'étendre le raisonnement de Liepmann à une sollicitation par lignes de courant.

5.4 Sollicition par ligne de courant

Les lignes de courant sont un réseau de lignes définies par colinéarité avec le vecteur vitesse. Elles sont solutions de l'équation :

$$\mathrm{d}\mathbf{x} \wedge \mathbf{V} = 0$$

Il y a une infinité de lignes de courant selon le point par lequel elles passent. On obtient une ligne de courant passant par l'origine du repère de la couche de mélange qu'on représente à la figure 5.15 en superposant l'épaisseur de déplacement δ_1^*. On constate que ces deux quantités sont en opposition de phase mais de même amplitude. La figure 5.15 présente également les dérivées temporelles du premier et second ordre de l'épaisseur δ_1^* et de la ligne de courant.

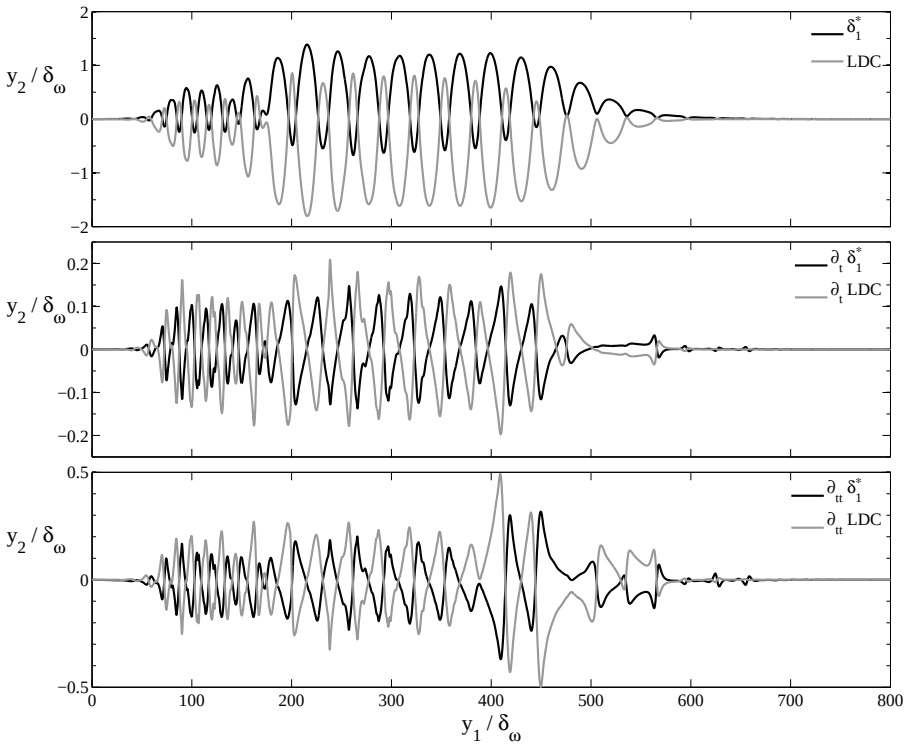


FIGURE 5.15 – Épaisseurs de déplacement (supérieure δ_1^*) et ligne de courant passant au point $(y_1 = 2{,}4; y_2 = 0)$ à $t = 0$. **Haut :** amplitude. **Milieu :** vitesse. **Bas :** accélération.

Le choix d'une condition initiale (le point de passage) est une donnée arbitraire qui ne joue pas en la faveur de la ligne de courant comme sollicitation acoustique

appropriée. Comment peut–on justifier de sélectionner une ligne de courant parmi d'autres ? Selon le point de passage et en fonction du temps, la ligne de courant n'exprimera jamais la même allure. Nous pouvons superposer l'épaisseur de déplacement et une ligne de courant à un instant donné mais ce ne sera plus nécessairement le cas pour un autre instant. On peut illustrer cette problématique par la figure 5.16 où l'on trace un réseau de lignes de courant passant par l'abscisse $y_1/\delta_\omega = 0$. Les points noirs représentent la trajectoire instantanée de la particule initialement à l'origine du repère. La ligne de courant colorée en rouge est la ligne de courant passant par la trajectoire à l'instant t. La figure 5.16 permet de voir tout d'abord la trajectoire d'une particule, fortement perturbée au niveau de l'appariement ($y_1/\delta_\omega = 200$) et dont la période d'oscillation double après l'appariement. On remarque également la variété de formes prises par la ligne de courant. Afin de laisser à la particule dont on suit la trajectoire le temps de parcourir le domaine, on calcule plusieurs périodes. On affiche pour chaque image de la figure 5.16 le temps réel correspondant, la phase (c'est–à–dire le pourcentage de la période parcourue) et le nombre de périodes. Sur la figure 5.16 est également présentée la ligne d'émission. Elle pourrait apporter l'excitation de par son caractère *séparateur* des deux écoulements. On constate cependant une topologie plus délicate à traiter que la ligne de courant. La discussion sur ce type d'excitation est reportée dans les perspectives qui referment ce document.

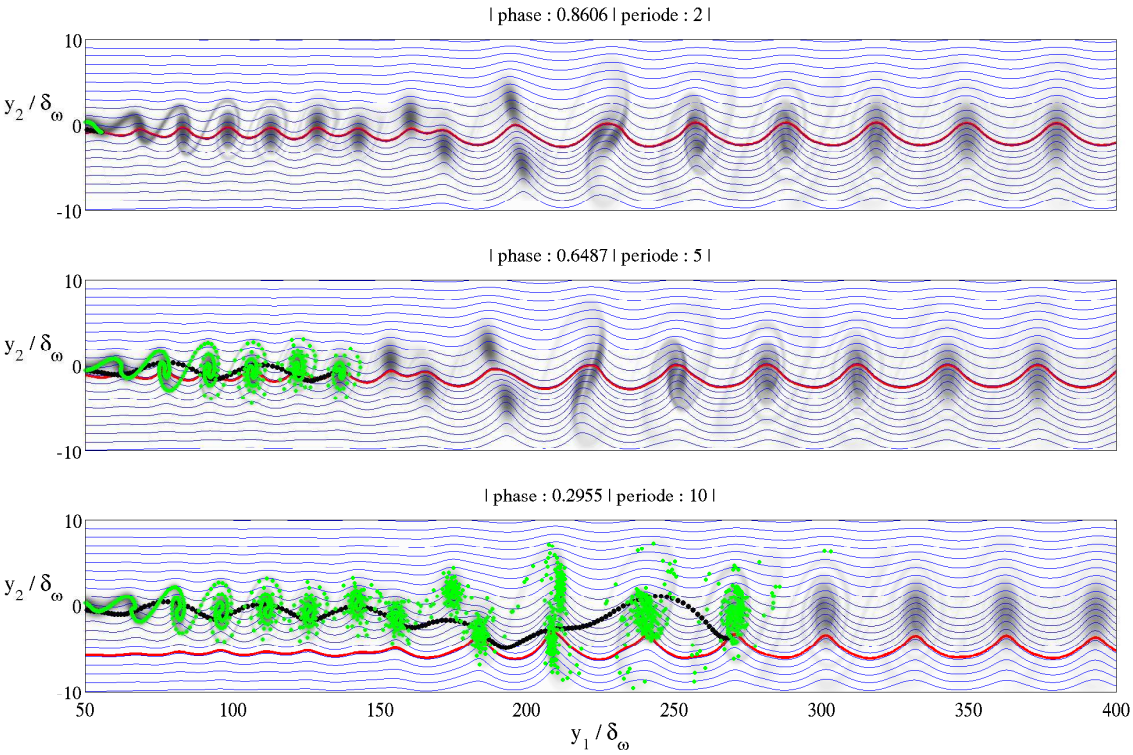
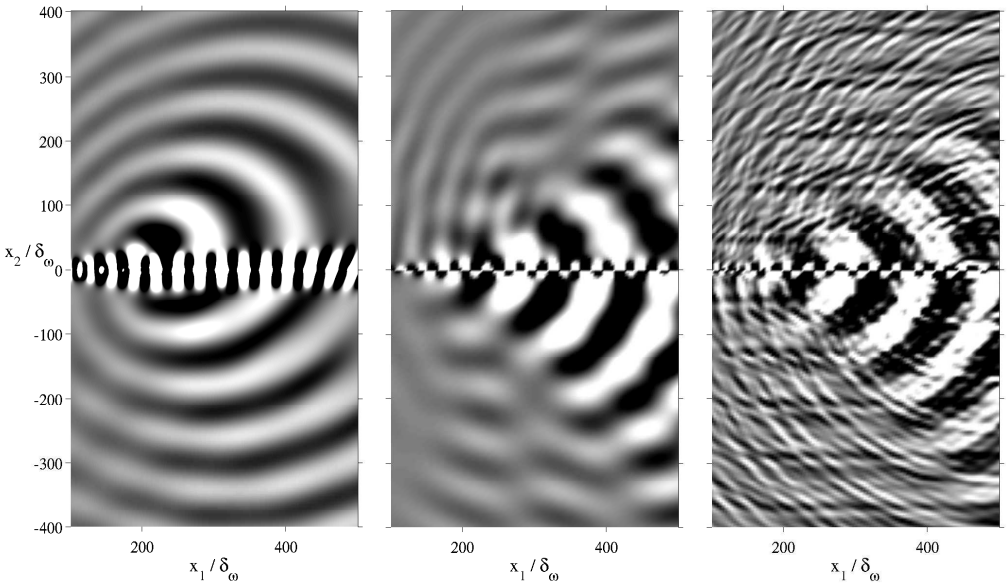


Figure 5.16 – Réseau de lignes de courant (bleu). Ligne de courant (rouge) passant par un point (noir) de la trajectoire et ligne d'émission (vert).

La figure 5.17 est le résultat de l'analogie de Liepmann sollicitée par une ligne de courant. La réponse acoustique est totalement différente de la sollicitation par épaisseur de quantité de mouvement ou de la *DNC*. Le niveau est encore différent de deux ordres de grandeur avec celui de la *DNC* et la directivité très altérée mais

toujours maximale sur l'axe longitudinal comme ce qui est attendu en ayant recours à une intégrale de Rayleigh, en accord avec les conclusions du chapitre 4.



(a) DNC (b) Premier mode (c) 5 premiers modes

Figure 5.17 – Pression acoustique. Prédiction par l'analogie de Liepmann. Sollicitation par lignes de courant. Niveaux de couleurs de $-4{,}0 \times 10^{-5}$ (noir) à $+4{,}0 \times 10^{-5}$ (blanc). Correction de niveaux par un facteur $1{,}0 \times 10^{-2}$ pour l'analogie de Liepmann.

5.5 Correction de l'impédance de rayonnement

Comme cela a été présenté plus haut dans ce chapitre, l'analogie de Liepmann pour la couche–limite est basée sur une intégrale de Rayleigh où en guise de vitesse vibratoire on utilise la dérivée temporelle de l'épaisseur de déplacement. Liepmann a conjecturé une potentielle application aux jets, sans toutefois proposer de définition pour la section du jet à utiliser. Pour la couche de mélange, la définition de l'épaisseur de déplacement est sujette à discussion, comme cela a été vu. La distribution spatio–temporelle est similaire entre plusieurs définitions, à un facteur proportionnel près. Rappelons également que la quantité à intégrer est en fait la dérivée temporelle seconde de l'épaisseur choisie (dérivée première pour obtenir la vitesse, dérivée seconde pour remonter à la condition de Neumann sur la pression). Il y a un autre aspect de la modélisation par l'intégrale de Rayleigh qui n'a pas été évoqué par Liepmann, c'est la condition de rayonnement du piston plan. Comme nous sommes en écoulement libre, nous prenons l'analogie avec le problème de l'extrémité ouverte d'un tuyau [32]. Dans ce cas (mais la formule est la même que pour un piston), Howe [72] montre que la fraction de l'énergie incidente qui est rayonnée vers l'extérieur n'est pas nulle[f] mais vaut $(k_a r)^2$, où k_a est le nombre d'onde acoustique ($k_a = \omega/c$) et r est le rayon du piston. Cette formule, qui s'obtient en raccordant les écoulements potentiels asymptotiques dans le tuyau, au voisinage de l'orifice et dans l'espace libre, est valable pour une configuration $3D$ et pour les petites valeurs

f. ce qui serait le cas si on supposait que l'extérieur impose sa pression à la sortie.

de $(k_a r)$, c'est–à–dire des orifices compacts. On peut dériver une formule similaire pour des configurations $2D$ [101]. Dans ce cas, la fraction d'énergie rayonnée vaut $(k_a 2r)$ où r est cette fois la demi–longueur de l'orifice (linéique ici).

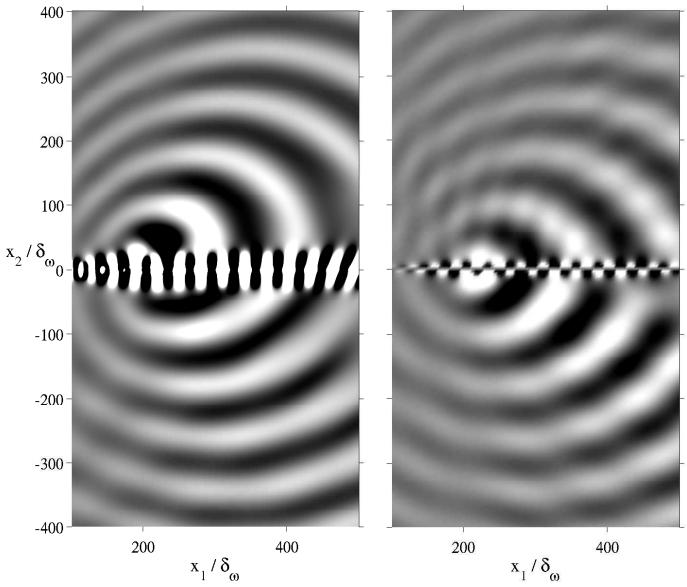
Pour appliquer ce couplage entre l'analogie de Liepmann et l'impédance de rayonnement à notre écoulement de couche de mélange, il faut choisir une dimension pour notre orifice modèle. Cette dimension doit être suffisamment petite pour qu'on puisse supposer que chaque piston vibre de manière uniforme sur toute sa longueur. Il faut donc que r soit petit devant la longueur d'onde hydrodynamique. Dès lors, la compacité acoustique est acquise car la longueur d'onde acoustique y est proportionnelle d'un facteur égal à l'inverse du nombre de Mach. Sur le plan numérique, une définition naturelle pour $2r$ serait de l'ordre Δy_1, qui est le pas de discrétisation dans la direction longitudinale, introduisant *de facto* un découpage en pistons élémentaires. Enfin, nous devons prendre en compte l'écoulement uniforme dans le milieu de propagation. Une proposition simple consisterait à modifier en conséquence la longueur d'onde acoustique par la formule :

$$\lambda_a = \frac{c\,(1 + M_\infty \cos\theta)}{f_{pairing}}$$

où $f_{pairing}$ est la fréquence de l'appariement. Ainsi, le facteur de correction ζ dû à l'impédance de rayonnement s'écrit, pour une émission dans la direction θ par un orifice au voisinage de l'appariement :

$$\zeta = \frac{2\pi \Delta y_1 f_{pairing}}{c\,(1 + M_\infty \cos\theta)}$$

Le résultat de l'application de ce facteur de correction au rayonnement de la couche de mélange prédit par l'analogie de Liepmann est donné sur la figure 5.18.



(a) DNC (b) Liepmann $\delta^*_\theta\ k_a r$.

Figure 5.18 – Correction de l'impédance de rayonnement. Pression acoustique. Niveaux de couleurs de $-4{,}0 \times 10^{-5}$ (noir) à $+4{,}0 \times 10^{-5}$ (blanc).

Globalement, les niveaux de fluctuations de pression sont correctement retrouvés, ce qui est confirmé sur l'intensité (figure 5.19). La directivité en revanche reste inchangée. Comme il a été dit précédemment, le formalisme utilisé étant basé sur une intégrale de Rayleigh, le rayonnement est maximal dans la direction longitudinale.

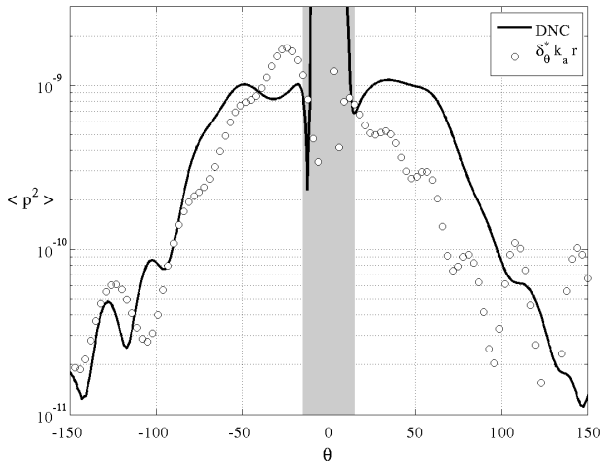


Figure 5.19 – Correction de l'impédance de rayonnement. Intensité acoustique sur un cercle de rayon $r = 150\delta_\omega$ centré en $(x_1 = 200; x_2 = 0)$. Angle d'observation θ en degrés. Prédiction par l'analogie de Liepmann et comparaison avec la *DNC*. Sollicitation par épaisseur de quantité de mouvement.

5.6 Synthèse

Afin de valider l'implantation numérique des formalismes d'excitation surfacique, les méthodes d'extrapolations ont été appliquées avec succès à l'écoulement de couche de mélange. La position de la surface de contrôle est un paramètre déterminant pour la bonne prédiction des méthodes intégrales.

La motivation de ce chapitre était la recherche d'une quantité exploitable directement dans la zone de génération de bruit. Cette recherche s'est principalement basée sur une étude ancienne qui mérite plus de crédit pour son approche séduisante. Mais sa mise en œuvre est délicate et encore trop d'incertitudes y restent attachées.

À ce stade, nous pouvons dire que malgré son originalité, l'analogie de Liepmann n'a pas encore livré de résultats satisfaisant. Premièrement, comme on l'a vu aux chapitres 3 et 4, l'intégrale de Rayleigh conduit formellement à un rayonnement principalement dirigé vers la direction longitudinale. On peut se demander dans quelles mesures cela introduit un biais dans la modélisation. Deuxièmement, les niveaux de pression semblent surestimés par la méthode de Liepmann mais la prise en compte d'une impédance de rayonnement pourrait réduire cette erreur.

En reprenant une nouvelle fois le schéma de problématique, ce chapitre a traité le cas de la dynamique de l'écoulement en champ proche, et en particulier de la modélisation de l'excitation acoustique par les fluctuations. On s'est donc intéressé à la voie inférieure dans sa partie de gauche (figure 5.20).

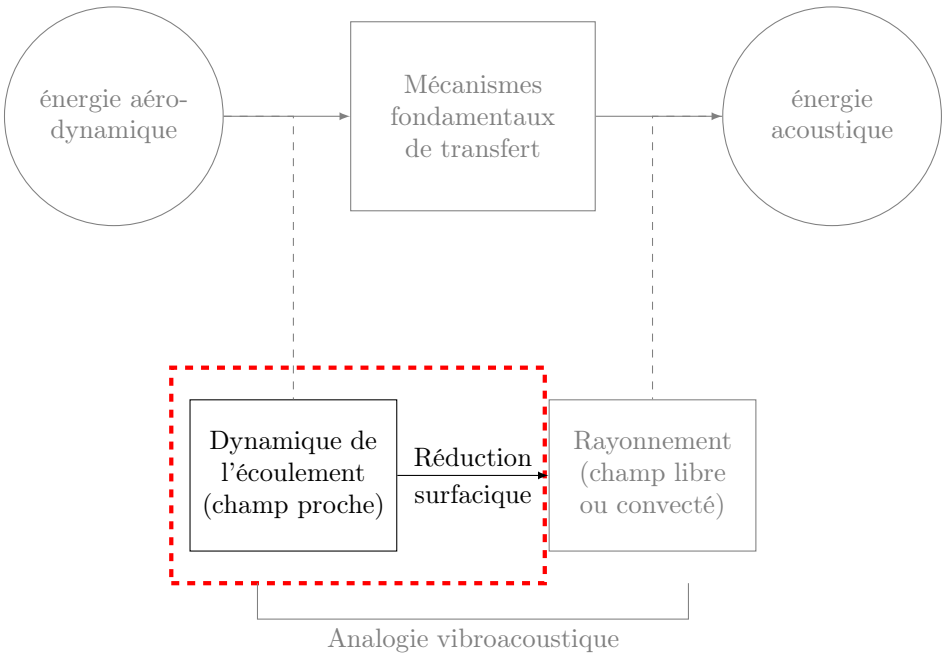


Figure 5.20 – Positionnement du chapitre 5 dans la problématique de la thèse.

Conclusion

"We live on an island surrounded by a sea of ignorance.
As our island of knowledge grows, so does the shore of our ignorance."
J. A. Wheeler

Cette thèse a proposé une démarche pour relier les mouvements aérodynamiques à leur rayonnement acoustique. Lors de la définition de la problématique, il est apparu que la nature du phénomène excitateur n'est pas entièrement identifiée et le tryptique « mouvement hydrodynamique $\mapsto$ excitation $\mapsto$ mouvement acoustique » garde une certaine part d'inconnu ; sa modélisation est encore incomplète et est donc un sujet de recherche toujours ouvert. Du point de vue mathématique, la description de l'onde acoustique et de sa propagation est une donnée connue, mais ces outils, ces jeux d'équations, s'épuisent à mesure que l'on se rapproche de la source. Pour comprendre comment et dans quelles mesures un écoulement aérodynamique peut fournir de l'énergie à la propagation d'une onde acoustique, une revue de la littérature a été entreprise. On a pu esquisser trois grandes approches au sens large : l'approche eulérienne, dissipative et lagrangienne.

En ce qui concerne l'approche eulérienne, on peut écrire les équations d'Euler linéarisées comme le propose Blokhintsev [8] jusqu'à l'obtention d'une loi de conservation mais cela implique de négliger les ordres de grandeurs qui pourtant, caractérisent l'acoustique. Cette approche permet une description de l'énergie à partir des variables qui la propagent (la densité et la vitesse particulaire) mais ne prend pas en compte les phénomènes propres à la dissiper.

L'approche dissipative contient elle–même plusieurs tendances. À l'initiative de Cantrell et Hart [26], la loi de conservation de l'énergie des équations de Navier–Stokes est développée au second ordre. Une décomposition en potentiel scalaire et en potentiel vecteur de la vitesse ou de la quantité de mouvement, les équations de Navier–Stokes font apparaître ce qui tient de l'hydrodynamique ou ce qui tient de l'acoustique. Ce choix est fait notamment par Morfey [112], Doak [41] et Jenvey [74]. L'intervention de la vorticité permet une écriture des équations sous une forme similaire à l'équation de Crocco, mettant ainsi en évidence son rôle de première importance sur la génération de l'énergie acoustique, comme le suggère l'approche de Howe [68]. Enfin, les fluctuations d'enthalpie sont pointées du doigt comme variable portant en elle l'information acoustique et ce, même au sein de l'écoulement hydrodynamique mais depuis quelques années on semble lui préférer l'exergie. Sur cette base, une théorie générale est établie par Doak [45] qui présente le champ hydrodynamique comme un champ acoustique généralisé. Le phénomène acoustique est alors

latent (ou piégé d'après le terme employé par Jenvey) et ne rayonne que lorsqu'il peut se libérer de l'impédance imposée par les structures hydrodynamiques.

Finalement, l'approche lagrangienne décrit le déplacement lagrangien de la perturbation qui découle du passage de l'onde acoustique. Cela permet le suivi de la propagation de l'énergie mais n'identifie pas clairement le phénomène excitateur. Le principal avantage est de former une équation (issue de l'équation de Galbrun) ne portant que sur une variable vectorielle. Cette approche reste peu répandue.

Il en ressort que la définition usuelle, généralement acceptée, reste valable pour décrire la propagation de l'énergie acoustique en première approximation et sous réserve que les phénomènes de dissipation (c'est–à–dire la viscosité ou les échanges thermiques) soient négligeables. Cette définition ne peut exprimer de terme de création pour cette énergie. Dans le cas le plus général, l'énergie acoustique est générée par le produit croisé des fluctuations de la quantité de mouvement et de la vorticité dans une expression générale de la puissance acoustique exprimée par le terme :

$$\rho \boldsymbol{v} \left[\boldsymbol{\omega'} \wedge (\rho \boldsymbol{v})' \right]$$

Du point de vue du calcul acoustique proprement dit, plusieurs formalismes sont disponibles. Lighthill en est le précurseur ; la théorie qu'il bâtit identifie le terme source aux fluctuations de la turbulence. Cette approche en champ libre entraîne le développement des méthodes d'extrapolation des ondes acoustiques comme la méthode de Kirchhoff ou la méthode de Ffowcs Williams et Hawkings qui extrapole les débits instationnaires. Elles permettent une première prise en compte de la présence de surface [g] dans la mesure où le domaine est non infini et décrivent ainsi la propagation de l'énergie acoustique au travers d'une surface bordant un volume où évoluent les structures dynamiques qui génèrent le rayonnement acoustique. Des formulations surfaciques, issues de la méthode d'extrapolation dans le formalisme de Kirchhoff (qui n'impose pas d'hypothèse sur la nature du terme source) sont développées par le recours à la méthode des images : l'intégrale de Kirchhoff et l'intégrale de Rayleigh dont l'excitation est apportée respectivement par la pression et par la vitesse vibratoire. Mais cela impose de constuire une fonction de Green appropriée et nécessite surtout des conditions restrictives sur l'état de la surface, du point de vue de sa perméabilité notammment mais également de sa topologie (la surface doit être plane et vibrer à faible amplitude). Pour des cas plus généraux, un formalisme basé sur la méthode de Kirchhoff a été étendu par Farassat et Myers, qui s'applique à une surface en mouvement et déformable sans restriction. L'excitation est apportée par une condition limite *via* l'état de la surface dont la déformation est décrite par ses coordonnées curvilignes.

Les formalismes permettant une prédiction du champ acoustique par condition limite ont ensuite permis d'étudier la réaction du milieu acoustique à la sollicitation surfacique représentative de l'aérodynamique instationnaire au travers d'une gamme d'excitations génériques en pression ou en vitesse représentées en paquet d'ondes. L'efficacité est un critère ayant relativement peu été étudié. C'est pourtant un critère de premier ordre pour l'élaboration de stratégies de contrôle différenciant une grande efficacité dans le processus même de conversion d'énergie ou au contraire un rayonnement dû à une haute énergie d'entrée. L'efficacité s'étale sur une vaste gamme d'ordre de grandeurs. La réponse à un paquet d'ondes est relativement robuste, car

g. matérielles ou non pour la formulation de Ffowcs Williams et Hawkings mais purement fictive pour la formulation de Kirchhoff.

des conclusions similaires sont tirées pour les deux types d'excitation. Dans un milieu au repos, l'efficacité est maximale lorsque la longueur de modulation est inverse au nombre d'onde hydrodynamique et ce, quel que soit le type d'excitation (pression ou vitesse) du moment qu'elle est symétrique. Pour une excitation en pression, l'amplitude de l'efficacité maximale évolue comme le carré de la vitesse de phase. Une modulation asymétrique de l'excitation est comparativement plus efficace que son homologue symétrique de même longueur. Lorsque le milieu propagatif est mis en mouvement uniforme, il en résulte un fort apport d'énergie et l'efficacité augmente sensiblement. L'étude analytique a mis en évidence l'extension de l'extrémité supersonique aux nombres d'onde subsonique par effet cumulatif de la vitesse de phase et de la vitesse de convection ce qui corrobore une plus haute efficacité de la convection. Aux grandes vitesses de convection, la direction principale du rayonnement évolue soudainement vers la direction transverse pour une excitation en vitesse.

Finalement, le chapitre 5 introduit le lien manquant entre l'écoulement et la surface d'excitation. Les formalismes d'excitation surfacique (Ffowcs Williams et Hawkings, Kirchhoff et l'intégrale de Rayleigh) ont été appliqués à un cas d'écoulement de couche de mélange et comparés avec une *DNC* pour valider leur implantation numérique et permettre d'appliquer notre modèle d'excitation. Ce modèle est basé sur une théorie existante (Liepmann [89]) qui a été étendue pour prendre en compte un écoulement en mouvement uniforme. La principale donnée d'entrée est la vitesse normale de vibration. D'après Liepmann, cette quantité peut être exprimée par rapport à la dérivée temporelle de l'épaisseur de déplacement. Il ressort que la pression hydrodynamique ou la vitesse transverse sont inadaptées car elles ne satisfont pas les équations d'Euler ; dans la zone hydrodynamique, les effets rotationnels ne sont pas négligeables. Il reste donc à trouver une distribution surfacique tranduisant l'instationnarité du mouvement potentiel. La théorie de Liepmann a été conçue pour un écoulement de couche–limite et les rares études la mettant en application sont restées dans ce cadre. Sa généralisation à un écoulement libre pose un problème de définition de l'épaisseur de déplacement. Appliquée à un écoulement de couche de mélange, le résultat produit par l'analogie de Liepmann montre une directivité en léger désaccord avec la *DNC* et des niveaux de pression acoustique surestimés. Les niveaux peuvent être corrigés lorsqu'est appliqué un modèle de l'impédance de rayonnement.

Perspectives

Cette thèse a proposé une démarche prospective de modélisation, en parcourant une voie relativement peu explorée. Des améliorations peuvent être suggérées.

En parcourant les différents concept d'énergie acoustique, la théorie du mouvement acoustique piégé de Jenvey [74] et du champ acoustique généralisé de Doak [45] suggèrent que l'écoulement hydrodynamique impose une impédance au champ acoustique. D'une part, cela nous aide à comprendre pourquoi les méthodes d'extrapolation échouent à prédire l'acoustique lorsque la surface de contrôle est dans la zone hydrodynamique. D'autre part, nous avons mis en évidence l'importance de la correction d'impédance pour une sollicitation surfacique. Rechercher une description qui unifie la notion d'impédance imposée par l'hydrodynamique et la correction d'impédance nécessaire pour corriger l'excitation surfacique est un objectif évident. Cette recherche devra être couplée à une description plus précise du mouvement potentiel et faisant notamment intervenir le rôle des lignes de courant, représentative

de ce type d'excitation, par équilibre des débits.

Un critère de directivité plus élaboré que l'angle d'émission maximum pourrait permettre d'identifier avec plus de précisions les caractères topologiques de la condition limite propre à se transférer à l'acoustique. Surtout, un tel critère permet de différencier un rayonnement de type superdirectif [37] ou omnidirectif et ainsi d'apporter une description plus représentative de l'intensité du rayonnement.

Pour une surface à forte déformation, il peut être envisageable de développer une extension de la formulation de Farassat et Myers dans l'espace des fréquences et en régime convecté, pour une application à la ligne de courant et l'épaisseur de déplacement de Liepmann. Néanmoins, cela ne règle (au mieux) qu'une partie de la question car la nature de l'excitation à imposer sur la surface de Farassat et Myers n'en est pas plus simplifiée.

En ce qui concerne la nature de l'excitation, nous avons présenté plusieurs possibilités, non explorées par Liepmann. Nous avons cependant laissé de côté une sollicitation apportée par les lignes d'émission, comme il nous l'a été suggéré par l'un des rapporteurs de ce mémoire. En effet, il faudrait prévoir une étude plus systématique sur la cinématique des lignes d'émission et notamment en dehors de la zone de vorticité. Car la ligne d'émission est la ligne qui permet de séparer les deux écoulements de la couche de mélange. Or, à l'interface, la ligne d'émission est d'une topologie trop complexe pour être utilisée dans l'analogie de Liepmann, dans l'état actuel de nos connaissances (voir la figure 5.16, page 154).

Enfin, une source importante d'amélioration est l'unification de nos trois axes de recherche : l'énergie (chapitre 2), la réponse du milieu (chapitre 4) et les moyens d'excitation surfacique (chapitres 3 et 5). Autrement dit, on doit chercher à intégrer le concept d'énergie acoustique dans le calcul de l'efficacité (et notamment dans la définition de l'énergie injectée par l'hydrodynamique) et déplacer les réflexions sur le lien entre la réponse acoustique et la forme de l'excitation dressé au chapitre 4 vers l'application de la couche de mélange du chapitre 5. Un bilan énergétique de cet écoulement avec la *DNC* pourrait ainsi être effectué.

Bibliographie

[1] Andreev, N. N. (1955). Concerning certain second–order quantities in acoustics. *Soviet Phys. Acoust.*, 2(1).

[2] Ansart, L. (2010). *De l'utilisation des analogies pour les prédictions du bruit d'origine aérodynamique.* Stage de fin d'études, Arts et Métiers ParisTech.

[3] Arsac, J. (1961). *Transformation de Fourier et théorie des distributions.* Dunod.

[4] Avital, E. J., Musafir, R. E. et Korakianitis, T. (2013). Nonlinear propagation of sound emitted by high speed wave packets. *Journal of Computational Acoustics*, 21(2) :1–21.

[5] Avital, E. J. et Sandham, N. D. (1997). A note on the structure of the acoustic field emitted by a wave packet. *Journal of Sound and Vibration*, 204(3) :533–539.

[6] Avital, E. J., Sandham, N. D. et Luo, K. H. (1998). Mach wave radiation by mixing layers. part I : analysis of the sound field. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 12 :73–90.

[7] Bergmann, P. G. (1946). The wave equation in a medium with a variable index of refraction. *Journal of the Acoustical Society of America*, 17(4).

[8] Blokhintsev, D. I. (1946). Acoustics of a nonhomogeneous moving medium. NACA, Technical memorandum no. 1399. Traduction anglaise de 1956.

[9] Bogey, C. (2000). *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides.* Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.

[10] Bogey, C., Bailly, C. et Juvé, D. (2000). Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer. *AIAA Journal*, 38(12) :2210–2218.

[11] Bogey, C., Bailly, C. et Juvé, D. (2003a). Noise investigation of a high subsonic moderate Reynolds number jet using a compressible Large Eddy Simulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 16(4) :273–297.

[12] Bogey, C., Gloerfelt, X. et Bailly, C. (2003b). Illustration of the inclusion of sound–flow interactions in Lighthill's equation. *AIAA Journal*, 41(8) :1604–1606.

[13] Brazier, J.-P. (1996). *Propagation acoustique au sein d'un écoulement non uniforme.* ONERA. RT 23/3641 PY.

[14] Brazier, J.-P. (1998). *Aspects théoriques de l'acoustique de Galbrun dans les écoulements non uniformes.* ONERA. RTS 3/6187 DSNA/Y/DMAE.

[15] Brazier, J.-P. (2011). Derivation of an exact energy balance for Galbrun equation in linear acoustics. *Journal of Sound and Vibration*, 330 :2848–2868.

[16] Brazier, J.-P. (2014). Communication privée.

[17] Brear, M. J., Nicoud, F., Talei, M., Giauque, A. et Hawkes, E. R. (2012). Disturbance energy transport and sound production in gaseous combustion. *Journal of Fluid Mechanics*, 707 :53–73.

[18] Brentner, K. S. (1990). *The sound of moving bodies.* Thèse de doctorat, University of Cambridge.

[19] Brentner, K. S. (1993). Direct numerical calculation of acoustics : solution evaluation through energy analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 254 :267–281.

[20] Brentner, K. S. (1996). Numerical algorithms for acoustic integrals – the Devil is in the details. In *2nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, number AIAA-96-1706.

[21] Brentner, K. S. et Farassat, F. (1998). Analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surfaces. *AIAA Journal*, 36(8) :1379–1386.

[22] Bretherton, F. P. et Garrett, C. J. R. (1968). Wavetrains in inhomogeneous moving media. *Proceedings of the Royal Society A*, 302 :529–554.

[23] Bruneau, M. (1998). *Manuel d'acoustique fondamentale.* Hermès.

[24] Cabana, M., Fortuné, V. et Jordan, P. (2008). Identifying the radiating core of Lighthill's source term. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 22 :87–106.

[25] Candel, S. M. (1975). Acoustic conservation principles and an application to plane and modal propagation in nozzles and diffusers. *Journal of Sound and Vibration*, 41(2) :207–232.

[26] Cantrell, R. H. et Hart, R. W. (1964). Interaction between sound and flow in acoustic cavities : mass, momentum and energy considerations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 36(4) :697–706.

[27] Cavalieri, A. V. G. (2012). *Wavepackets as sound–source mechanisms in subsonic jets.* Thèse de doctorat, Université de Poitiers.

[28] Cavalieri, A. V. G., Daviller, G., Comte, P., Jordan, P., Tadmor, G. et Gervais, Y. (2011a). Using Large Eddy Simulation to explore sound–source mechanisms in jets. *Journal of Sound and Vibration*, 330 :4098–4113.

[29] Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Agarwal, A. et Gervais, Y. (2011b). Jittering wavepacket models for subsonic jet noise. *Journal of Sound and Vibration*, 330 :4474–4492.

[30] Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Colonius, T. et Gervais, Y. (2012). Axisymmetric superdirectivity in subsonic jets. *Journal of fluid Mechanics*, 704 :388–420.

[31] Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Wolf, W. R. et Gervais, Y. (2014). Scattering of wavepackets by a flat plate in the vicinity of a turbulent jet. *Journal of Sound and Vibration*, 333(24) :6516–6531.

[32] Chaigne, A. et Kergomard, J. (2008). *Acoustique des instruments de musique*. Belin.

[33] Chase, D. M. (1972). Sound radiated by turbulent flow off a rigid half–plane as obtained from a wavevector spectrum of hydrodynamic pressure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 52(3B) :1011–1023.

[34] Chu, B. T. (1965). On the energy transfer to small disturbances in fluid flow (part I). *ACTA Mechanica*, 1 :215–234.

[35] Chu, B. T. et Kovásznay, L. S. G. (1958). Non–linear interactions in a viscous heat–conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 3 :494–514.

[36] Colonius, T., Lele, S. K. et Moin, P. (1997). Sound generation in a mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 330 :375–409.

[37] Crighton, D. G. et Huerre, P. (1990). Shear-layer pressure fluctuations and superdirective acoustic sources. *Journal of Fluid Mechanics*, 220 :355–368.

[38] Crow, S. C. et Champagne, F. H. (1971). Orderly structure in jet turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 48(3) :547–591.

[39] Csanady, G. T. (1966). Effect of mean velocity variations on jet noise. *Journal of Fluid Mechanics*, 26(1) :183–197.

[40] Curle, N. (1955). The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. Proceedings of the Royal Society of London.

[41] Doak, P. E. (1971). On the interdependence between acoustic and turbulent fluctuating motions in a moving media. *Journal of Sound and Vibration*, 19(2) :211–225.

[42] Doak, P. E. (1973). Analysis of internally generated sound in continuous materials : 3. the momentum potential field description of fluctuating fluid motion as a basis for a unified theory of internally generated sound. *Journal of Sound and Vibration*, 26(1) :91–120.

[43] Doak, P. E. (1974). Acoustic thermal and turbulent energy density and linear momentum density relationships and fluxes in fluctuating fluid flows. In *Proceedings of the Eight International Congress on Acoustics, Constributed Papers, Volume 2*.

[44] Doak, P. E. (1989). Momentum potential theory of energy flux carried by momentum fluctuations. *Journal of Sound and Vibration*, 131(1) :67–90.

[45] Doak, P. E. (1995). Fluctuating total enthalpy as a generalized acoustic field. *Acoustical physics*, 41(5) :677–685.

[46] Dokumaci, E. (2000). On calculation of acoustic power. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5) :869–876.

[47] Dowling, A. P. et Ffowcs Williams, J. E. (1983). *Sound and sources of sound*. Ellis Horwood.

[48] Dowling, A. P. et Hynes, T. P. (2004). Sound generation by turbulence. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 23 :491–500.

[49] Elias, G. (1996). *Nouvelles expressions pour l'énergie et l'intensité acoustique dans un écoulement non uniforme*. ONERA. RT 22/3641 PY.

[50] Eringen, A. C. (1967). *Mechanics of Continua*. John Wiley and Sons, Inc.

[51] Farassat, F. (1994). Introduction to generalized functions with applications in Aerodynamics and Aeroacoustics. NASA, Technical paper no. 3428.

[52] Farassat, F. et Myers, M. K. (1988). Extension of Kirchhoff's formula to radiation from moving surfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 123(3) :451–460.

[53] Ffowcs Williams, J. E. (1963). The noise from turbulence convected at high speed. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 255 :469–503.

[54] Ffowcs Williams, J. E. (1982). Sound sources in aerodynamics – fact and fiction. *AIAA Journal*, 20(3) :307–315.

[55] Ffowcs Williams, J. E. et Hawkings, D. L. (1969). Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 264(1151) :321–342.

[56] Ffowcs Williams, J. E. et Lovely, D. J. (1977). An approximate method for evaluating the sound of impulsively accelerated bodies. *Journal of Sound and Vibration*, 50 :333–343.

[57] Fleury, V. (2006). *Superdirectivité, bruit d'appariement et autres contributions au bruit de jet subsonique*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.

[58] Fleury, V., Bailly, C. et Juvé, D. (2005). Shear–layer acoustic radiation in an excited subsonic jet : models for vortex pairing and superdirective noise. *C. R. Mécanique*, 333 :754–761.

[59] Freund, J. B. (2001). Noise sources in a low Reynolds–number turbulent jet at Mach 0.9. *Journal of Fluid Mechanics*, 438 :277–305.

[60] Galbrun, H. (1931). *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère et théorie des zones de silence*. Gauthiers-Villars Paris.

[61] Gloerfelt, X. (2001). *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : simulation aéroacoustique directe et applications de méthodes intégrales*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.

[62] Gloerfelt, X. (2008). Compressible proper orthogonal decomposition/Galerkin reduced-order model of self sustained oscillations in a cavity. *Physics of Fluids*, 20.

[63] Gloerfelt, X. (2010). Aéroacoustique. Support de cours. Arts et Métiers ParisTech.

[64] Gloerfelt, X., Bailly, C. et Juvé, D. (2003). Direct computation of the noise radiated by a subsonic cavity flow and application of integral methods. *Journal of Sound and Vibration*, 266 :119–146.

[65] Gloerfelt, X. et Berland, J. (2013). Turbulent boundary–layer noise : direct radiation at Mach number 0.5. *Journal of Fluid Mechanics*, 723 :318–351.

[66] Gloerfelt, X., Perot, F., Bailly, C. et Juvé, D. (2005). Flow–induced cylinder noise formulated as a diffraction problem for low Mach numbers. *Journal of Sound and Vibration*, 287 :129–151.

[67] Goldstein, M. E. (1976). *Aeroacoustics*. McGraw-Hill Book Co.

[68] Howe, M. S. (1975). Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluids Mechanics*, 71(4) :625–673.

[69] Howe, M. S. (1979). The interaction of sound with low Mach number wall turbulence, with application to sound propagation in turbulent pipe flow. *Journal of Fluids Mechanics*, 94(4) :729–744.

[70] Howe, M. S. (1981). The role of displacement thickness fluctuations in hydroacoustics and the jet–drive mechanism of the flue organ pipe. *PRSL A*, 374(1759) :543–568.

[71] Howe, M. S. (2003). *Theory of vortex sound*. Cambridge University Press.

[72] Howe, M. S. (2006). *Hydrodynamics and Sound*. Cambridge University Press.

[73] Inoue, O. et Hatakeyama, N. (2002). Sound generation by a two–dimensional circular cylinder in a uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 471 :285–314.

[74] Jenvey, P. L. (1989). The sound power from turbulence : a theory of the exchange of energy between the acoustic and non-acoustic fields. *Journal of Sound and Vibration*, 131(1) :37–66.

[75] Jordan, P. et Colonius, T. (2013). Wave packets and turbulent jet noise. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45 :173–195.

[76] Kambe, T. (2010). Vortex sound with special reference to vortex rings : theory, computer simulations, and experiments. *International Journal of Aeroacoustics*, 9(1-2) :51–89.

[77] Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B. et Sanders, J. V. (1999). *Fundamentals of acoustics*. John Wiley and Sons, Inc., 4th edition.

[78] Koenig, M., Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Delville, J., Gervais, Y. et Papamoschou, D. (2013). Farfield filtering and source imaging of subsonic jet noise. *Journal of Sound and Vibration*, 332(18) :4067–4088.

[79] Krane, M. H. et Pauley, W. R. (1995). Estimation of the direct acoustic radiation from a transitional boundary layer using velocity measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 181(5) :737–763.

[80] Lagier, M. et Sornette, D. (1986). A two fluids model of the acoustic noise radiated by intermittent flows. *Acustica*, 61(2) :116–124.

[81] Landau, L. et Lifchitz, E. (1994). *Physique théorique tome 6 : Mécanique des Fluides*. Mir - Ellipses.

[82] Lauchle, G. C. (1981). Transition noise—The role of fluctuating displacement thickness. 65(3) :665–671.

[83] Laufer, J., Ffowcs Williams, J. E. et Childress, S. (1964). Mechanism of noise generation in the turbulent boundary layer. *AGARDograph 90*, pages 39–50.

[84] Laufer, J. et Yen, T. C. (1983). Noise generation by a low Mach number jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 134 :1–32.

[85] Lee, D. J. et Koo, S. O. (1995). Numerical study of sound generation due to a spinning vortex pair. *AIAA Journal*, 33(1) :20–26.

[86] Lele, S. K. (1992). Compact finite difference schemes with spectral–like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103 :16–42.

[87] Léon, O. et Brazier, J.-P. (2013). Investigation of the near and far pressure fields of dual–stream jets using an Euler–based PSE model. In *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*.

[88] Lesueur, C. (1988). *Rayonnement Acoustique des Structures*. Eyrolles.

[89] Liepmann, H. W. (1954). *On the acoustic radiation from boundary layers and jets*. NACA.

[90] Lighthill, M. J. (1952). On sound generated aerodynamically I. General theory. pages 564–587.

[91] Lighthill, M. J. (1958). On displacement thickness. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(4) :383–392.

[92] Lighthill, M. J. (1962). Sound generated aerodynamically, the Bakerian Lecture, 1961. 267 :147–182.

[93] Lighthill, M. J. (1978). *Waves in fluids*. Cambridge University Press.

[94] Lilley, G. M. (1974). On the noise from jets. *AGARD CP-131*, pages 13.1–13.12.

[95] Lockard, D. P. (2000). An efficient, two–dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4) :897–911.

[96] Long, S. L., Nie, H. et Xiu, X. (2012). Aeroacoustic study on a simplified nose landing gear. *Applied Mechanics and Materials*, 184-185 :18–23.

[97] Longhorn, A. L. (1952). The unsteady, subsonic motion of a sphere in a compressible inviscid fluid. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 5(1) :64–81.

[98] Margnat, F. (2005). *Méthode numérique hybride pour l'étude du rayonnement acoustique d'écoulements turbulents pariétaux*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.

[99] Margnat, F. (2009). Retarded–time source field analysis of vortex–pairing noise. In *International Conference on Acoustics NAG-DAGA 2009 (Rotterdam, Holland)*, number AIAA-2011-2891.

[100] Margnat, F. (2010). A mixing–layer flow noise analysis by retarded–time filtering of the source field. In *10e Congrès Français d'Acoustique, Lyon, France.*

[101] Margnat, F. (2014). Communication privée.

[102] Margnat, F. et Fortuné, V. (2010). An iterative algorithm for computing aeroacoustic integrals with application to the analysis of free shear flow noise. *Journal of the Acoustical Society of America*, 128.

[103] Margnat, F. et Gloerfelt, X. (2014). On compressibility assumptions in aeroacoustic integrals : a numerical study with subsonic mixing layers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 135 :3252–3263.

[104] Marin, L. (2010). An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation. *Computational Mechanics*, 45 :665–677.

[105] Markham, J. J. (1952). Second-order acoustic fields : energy relations. *Physical Review*, 86(5) :712–714.

[106] Minotti, A., Brazier, J.-P. et Simon, F. (2012). Extension of the Eulerian–Lagrangian description to nonlinear perturbations in an arbitrary inviscid flow. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :4537–4553.

[107] Mitchell, B. E., Lele, S. K., Lee, D. J. et Moin, P. (1995). Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics*, 285 :181–202.

[108] Mitchell, B. E., Lele, S. K., Lee, D. J. et Moin, P. (1999). Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 383 :113–142.

[109] Möhring, W. (1978). Acoustic energy flux in nonhomogeneous ducts. *Journal of the Acoustical Society of America*, 64 :1186.

[110] Monkewitz, P. A. et Huerre, P. (1982). Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers. *Physics of Fluids*, 25 :1137–1143.

[111] Moreau, D. J., Brooks, L. A. et Doolan, C. J. (2011). On the aeroacoustic tonal noise generation mechanism of a sharp–edged plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 129(4).

[112] Morfey, C. L. (1971). Acoustic energy in a non-uniform flow. *Journal of Sound and Vibration*, 14(2) :159–170.

[113] Morino, L. (1985). Mathematical foundations of integral methods. In *Computational Methods in Potential Aerodynamics*, pages 271–291. Springer-Verlag.

[114] Morse, P. M. et Feschbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics.* McGraw-Hill Book Co.

[115] Morse, P. M. et Ingard, K. U. (1968). *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill Book Co.

[116] Moser, C. (2006). *Direct computation of sound from a spatially evolving mixing layer : study of Mach number and non–isothermal effects*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.

[117] Moser, C., Lamballais, E., Margnat, F., Fortuné, V. et Gervais, Y. (2012). Numerical study of Mach number and thermal effects on sound radiation by a mixing layer. *International Journal of Aeroacoustics*, 11(5–6) :555–580.

[118] Müller, E.-A. et Obermeier, F. (1967). The spinning vortices as a source of sound. *AGARD CP-22*, pages 22.1–22.8.

[119] Myers, M. K. (1986). Generalization and extension of the law of acoustic energy conservation in a non-uniform flow. In *24th Aerospace Sciences Meeting*, number AIAA-1986-471, Reno, NV.

[120] Myers, M. K. (1991). Transport of energy by disturbances in arbitrary steady flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 226 :383–400.

[121] Nelson, P. A., Halliwell, N. A. et Doak, P. E. (1983). Fluid dynamics of a flow excited resonance, part II : flow acoustic interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 91(3) :375–402.

[122] Noger, C., Patrat, J. C., Peube, J. et Peube, J. L. (2000). Aeroacoustical study of the TGV pantograph recess. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3) :563–575.

[123] Obrist, D. (2009). Directivity of acoustic emissions from wave packets to the far field. *Journal of Fluid Mechanics*, 640 :165–186.

[124] Obrist, D. (2011). Acoustic emissions from convected wave packets. *Physics of fluids*, 23.

[125] Papamoschou, D. (2010). Prediction of jet noise shielding. In *48th AIAA Conference*, number AIAA-2010-653.

[126] Peyret, C. (1996). *Résolution numérique de l'équation de Galbrun*. ONERA. RT 24/3641 PY.

[127] Phillips, O. M. (1960). On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 9(1) :1–28.

[128] Pierce, A. D. (1981). *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*. McGraw-Hill Book Co.

[129] Poirée, B. (1983). L'équation de l'énergie acoustique dans un écoulement unidimensionnel. Comparaison avec les résultats connus. *Revue d'Acoustique*, (67) :234–239.

[130] Powell, A. (1964). Theory of vortex sound. *Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1) :177–195.

[131] Pridmore Brown, D. C. (1958). Sound propagation in a fluid flowing though an attenuating duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(4) :393–406.

[132] Rayleigh, J. W. S. (1877). *The theory of sound*. MacMillan.

[133] Ribner, H. S. (1962). Aerodynamic sound from fluid dilatations. a theory of the sound from jets and other flows. University of Toronto, Institute of Aeronautical Sciences Report no.86.

[134] Ryshov, O. S. et Shefter, G. M. (1962). On the energy of acoustic waves propagating in moving media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 26(5) :1293–1309.

[135] Sandham, N. D., Morfey, C. L. et Hu, Z. W. (2006). Sound radiation from exponentially growing and decaying surface waves. *Journal of Sound and Vibration*, 294 :355–361.

[136] Schoch, A. (1953). Remarks on the concept of acoustic energy. *Acustica*, 3(3) :181–184.

[137] Serré, R. et Margnat, F. (2013). Modeling aeroacoustic excitations by subsonic wave packets in the Kirchhoff formalism. In *21e Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, France*.

[138] Sinayoko, S. et Agarwal, A. (2012). The silent base flow and the sound sources in a laminar jet. *Journal of the Acoustical Society of America*, 131(3) :1959–1968.

[139] Song, G., Alizard, F., Robinet, J.-C. et Gloerfelt, X. (2013). Global and Koopman modes analysis of sound generation in mixing layers. *Physics of Fluids*, 25.

[140] Starobinski, R. et Aurégan, Y. (1998). Fluctuations of vorticity and entropy as sources of acoustical exergy. *Journal of Sound and Vibration*, 216(3) :521–527.

[141] Swarztrauber, P. N. (1982). Vectorizing the FFTs. In *Parallel Computations*, pages 51–83. Academic Press.

[142] Tajani, C., Abouchabaka, J. et Abdoun, O. (2012). KMF algorithm for solving the Cauchy problem for Helmholtz equation. *Applied Mathematical Sciences*, 6(92) :4577–4587.

[143] Taylor, G. I. (1938). The spectrum of turbulence. *Proceedings of the Royal Society A*, 164 :476–490.

[144] Taylor, G. I. (1942). *The motion of a body in water when subjected to a sudden impulse*, volume 3 of *Scientific papers of G. I. Taylor*. Cambridge University Press.

[145] Van Dyke, M. (1952). Impulsive motion of an infinite plate in a viscous compressible fluid. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 3(5) :343–353.

[146] Wei, M. et Freund, J. B. (2006). A noise–controlled free shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 546 :123–152.

Annexe A

Système de transformation en coordonnées curvilignes

Le mapping surfacique est une transformation de coordonnées du maillage cartésien $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ au maillage curviligne $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$ appliqué à la surface telle que $u_3 = f$. L'application du mapping nous donne les lois :

$$y_1 = y_1(u_1,u_2) \ ; \ \text{ et } \ y_2 = y_2(u_1,u_2)$$

On a de même, par bijection :

$$u_1 = u_1(y_1,y_2) \ ; \ \text{ et } \ u_2 = u_2(y_1,y_2)$$

L'écriture des dérivées partielles de ces coordonnées nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial u_1} \cdot \mathrm{d}u_1 + \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \cdot \mathrm{d}u_2 + \frac{\partial y_1}{\partial u_3} \cdot \mathrm{d}u_3 \\
\mathrm{d}y_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial u_1} \cdot \mathrm{d}u_1 + \frac{\partial y_2}{\partial u_2} \cdot \mathrm{d}u_2 + \frac{\partial y_2}{\partial u_3} \cdot \mathrm{d}u_3 \\
\mathrm{d}y_3 &= \frac{\partial y_3}{\partial u_1} \cdot \mathrm{d}u_1 + \frac{\partial y_3}{\partial u_2} \cdot \mathrm{d}u_2 + \frac{\partial y_3}{\partial u_3} \cdot \mathrm{d}u_3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \cdot \mathrm{d}y_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \cdot \mathrm{d}y_2 + \frac{\partial u_1}{\partial y_3} \cdot \mathrm{d}y_3 \\
\mathrm{d}u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \cdot \mathrm{d}y_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \cdot \mathrm{d}y_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y_3} \cdot \mathrm{d}y_3 \\
\mathrm{d}u_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial y_1} \cdot \mathrm{d}y_1 + \frac{\partial u_3}{\partial y_2} \cdot \mathrm{d}y_2 + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \cdot \mathrm{d}y_3
\end{aligned} \tag{A.1}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \\ \mathrm{d}y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2} & \frac{\partial y_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2}{\partial u_2} & \frac{\partial y_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial u_1} & \frac{\partial y_3}{\partial u_2} & \frac{\partial y_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 \\ \mathrm{d}u_2 \\ \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 \\ \mathrm{d}u_2 \\ \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 \\ \mathrm{d}u_2 \\ \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \\ \mathrm{d}y_3 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

Pour déterminer la matrice $[J]^{-1}$, posons $m = \det(J)$:

$$\begin{aligned} m = & \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial u_3} + \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial u_1} + \frac{\partial y_1}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial u_2} \right) \\ & - \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial u_1} + \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial u_3} + \frac{\partial y_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial u_2} \right) \end{aligned}$$

la matrice $[J]^{-1}$ s'écrit alors :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_3} - \frac{\partial y_2}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_2} & \frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_2} - \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_3} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_2}{\partial u_3} - \frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_1} - \frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_3} & \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_3} - \frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_2}{\partial u_1} - \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_2} - \frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_1} - \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_2} & \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_2}{\partial u_2} - \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_2}{\partial u_1} \end{pmatrix}$$

En identifiant les expressions (A.1) et (A.2), on en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_3} - \frac{\partial y_2}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_2}\right)\\
\frac{\partial u_1}{\partial y_2} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_2} - \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_3}\right)\\
\frac{\partial u_1}{\partial y_3} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_2}{\partial u_3} - \frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right)\\
\frac{\partial u_2}{\partial y_1} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_2}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_1} - \frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_3}\right)\\
\frac{\partial u_2}{\partial y_2} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_3} - \frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_1}\right)\\
\frac{\partial u_2}{\partial y_3} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_2}{\partial u_1} - \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_2}{\partial u_3}\right)\\
\frac{\partial u_3}{\partial y_1} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_2} - \frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_1}\right)\\
\frac{\partial u_3}{\partial y_2} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_1} - \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_2}\right)\\
\frac{\partial u_3}{\partial y_3} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_2}{\partial u_2} - \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\right)
\end{aligned}
$$

D'où on peut écrire que :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \cdot}{\partial y_1} = \frac{1}{m}\Bigg[&\left(\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_3} - \frac{\partial y_2}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_2}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial y_2}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_1} - \frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_3}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_2}\\
&+ \left(\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_2} - \frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_1}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_3}\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \cdot}{\partial y_2} = \frac{1}{m}\Bigg[&\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_2} - \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_3}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_3} - \frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_3}{\partial u_1}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_2}\\
&+ \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_3}{\partial u_1} - \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_3}{\partial u_2}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_3}\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \cdot}{\partial y_3} = \frac{1}{m}\Bigg[&\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_2}{\partial u_3} - \frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_3}\frac{\partial y_2}{\partial u_1} - \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_2}{\partial u_3}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_2}\\
&+ \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial y_2}{\partial u_2} - \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u_3}\Bigg]
\end{aligned}
$$

La première forme fondamentale du tenseur métrique se définit par :

$$g_{ij} = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j \text{ avec } \mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial u_i} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial u_i} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial u_i} \end{pmatrix}$$

et le déterminant de ce tenseur par :

$$\sqrt{g_{(2)}} = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2$$

Annexe B

Solutions analytiques des surfaces déformables

Dans cette annexe sont établies les formulations analytiques des problèmes académiques adressés lors de l'application du formalisme de Farassat et Myers à la section 3.3.3.

La sphère pulsante et l'onde acoustique sphérique

Soit une sphère pulsante de rayon moyen a, animée d'un mouvement radial périodique, défini par la fluctuation de son rayon

$$R(t) = a\left(1 + \varepsilon e^{-i\omega t}\right)$$

avec ω la fréquence de vibration et ε un paramètre d'amplitude. $i^2 = -1$ est le nombre imaginaire pur et t l'instant d'observation de l'onde acoustique. La vitesse normale de vibration est alors la dérivée temporelle du rayon :

$$V_r(t) = -ia\omega\varepsilon e^{-i\omega t}$$

On suppose que les ondes émises par la sphère pulsante sont des ondes sphériques harmoniques telles que la pression acoustique rayonnée est de la forme :

$$p_a(r,t) = \frac{A}{r} e^{i\,(kr - \omega t)} = \hat{p}_a(r,\omega) e^{-i\omega t}$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde acoustique et A une constante à déterminer. Dans un milieu au repos, on linéarise l'équation d'Euler projetée sur l'axe $\mathbf{e_r}$ dans le repère polaire ayant pour origine le centre de la sphère

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v_a}(r,t)}{\partial t} \cdot \mathbf{e_r} = -\frac{\partial p_a(r,t)}{\partial r} \cdot \mathbf{e_r} \tag{B.1}$$

où $\mathbf{v_a}$ est la vitesse particulaire acoustique et p_a la pression acoustique. ρ_0 est la densité uniforme du milieu. On applique ensuite la condition de continuité de la vitesse en $r = R(t)$:

$$\mathbf{v_a}(r,t) \cdot \mathbf{e_r} = V_r(t)$$

Après simplification de la périodicité temporelle, l'équation (B.1) devient :

$$-\rho_0 a\omega^2\varepsilon = -\frac{A}{R(t)}\left(ik - \frac{1}{R(t)}\right)e^{ikR(t)}$$

D'où

$$A = \rho_0 a\omega^2\varepsilon\frac{R(t)^2}{ikR(t)-1}e^{-ikR(t)}$$

L'expression pour la pression acoustique perçue par l'observateur au point r à l'instant t devient par substitution

$$p_a(r,t) = \frac{\rho_0 a\omega^2\varepsilon}{r}\frac{R(t)^2}{ikR(t)-1}e^{ik\,(r-R(t))}e^{-i\omega t} \tag{B.2}$$

L'onde acoustique sphérique émise par la sphère pulsante peut également être décrite par son potentiel de vitesse qui prend la forme générale :

$$\Phi = \frac{A}{r}e^{ikr - i\omega t}$$

où la distance r est la distance entre l'onde acoustique et la sphère d'où elle est issue. Comme l'onde émise à l'instant t se propage à la célérité du son c, la distance à la sphère est $r = ct$. La constante A peut se déterminer par application des équations d'Euler linéarisées en coordonnées polaires comme précédemment. Les expressions pour le potentiel des vitesses ayant été évoquées au chapitre 2 (section 2.2.3, page 37), on peut exprimer la vitesse particulaire acoustique :

$$v_a = \mathbf{v_a}(r,t)\cdot\mathbf{e_r} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\cdot\mathbf{e_r} = \frac{A}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right)e^{ikr - i\omega\tau}$$

L'application de la condition de continuité à l'interface, c'est–à–dire sur la surface de la sphère à l'origine de l'onde acoustique en $r = R$ permet d'écrire :

$$v_a = V_n \quad \rightarrow \quad \frac{A}{R}\left(ik - \frac{1}{R}\right)e^{ikR - i\omega\tau} = -ia\omega\varepsilon e^{-i\omega t}$$

où R est le rayon de la sphère ayant émis l'onde acoustique. Il vient

$$A = -ia\omega\varepsilon\frac{R^2}{(ikR-1)}e^{-ikR}$$

L'onde acoustique a donc un potentiel

$$\Phi = -\frac{ia\omega\varepsilon}{r}\frac{R^2}{(ikR-1)}e^{ik\,(r-R)}e^{-i\omega t}$$

Le piston vibrant

Le cas du piston vibrant représente une surface solide et non déformable animée d'un mouvement radial périodique. On peut distinguer deux configurations, si le piston est bafflé ou non, c'est–à–dire s'il est entouré sur l'axe de son rayon d'une surface fixe dans le repère d'origine. La baffle a pour seul effet de doubler l'intensité

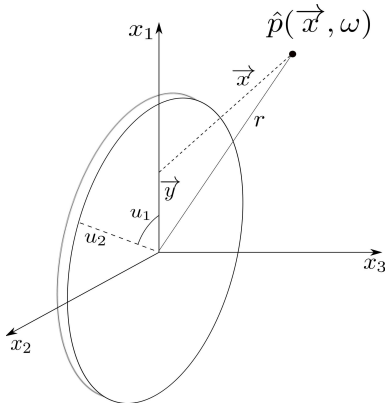


FIGURE B.1 – Schéma du piston vibrant avec le système de coordonnées sur la surface du piston et en champ lointain.

de la pression acoustique mais n'intervient par sur la directivité [77]. On schématise ce cas académique à la figure B.1.

La pression acoustique engendrée par la vibration (de faible amplitude) d'une surface plane non déformable est prédite par l'intégrale de Rayleigh et a été établie à la section 3.3.2 (page 84). La surface étant plane et non déformable, la vitesse radiale de vibration V_n est constante sur la surface du piston, repérée sur la figure B.1 par les coordonnées polaires (u_1,u_2) et les coordonnées cartésiennes $\mathbf{y}$.

L'application de l'intégrale de Rayleigh avec la fonction de Green en espace tridimensionnel donne

$$\hat{p}_a(\mathbf{x}) = \frac{i\omega\rho_0 V_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} u_2 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_1$$

où a est le rayon du piston et $\mathbf{x}$ les coordonnées de l'observateur. En introduisant la temporalité dans l'intégrale de Rayleigh par un mouvement harmonique et avec $r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$:

$$p_a(\mathbf{x},t) = \hat{p}_a(\mathbf{x})\, e^{-i\omega t} = \frac{i\omega\rho_0 V_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} u_2 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_1$$

C'est la forme exacte de la solution analytique du piston plan. S'il est bafflé, on ajoute un facteur deux [77]. Cette formulation peut s'intégrer numériquement. En revanche, pour pousser la réflexion et développer analytiquement l'intégrale sur la surface, deux cas de figures sont possibles : *(i)* on se place en champ lointain pour approcher le rayon r ; *(ii)* on se place dans l'axe du rayon ce qui simplifie là aussi l'expression pour le rayon r. Ces deux approximations sont données notamment dans Kinsler *et al.* [77].

Annexe C

Solution de l'équation homogène de Helmholtz par la méthode de la phase stationnaire

L'approche de la méthode de la phase stationnaire peut être vue comme une approximation en champ lointain. Il s'agit d'une méthode d'estimation d'intégrale aux grands arguments. Une onde acoustique est fondamentalement une onde sphérique. En champ lointain, à une distance suffisamment grande de la source acoustique, le rayon de courbure de l'onde diminue et elle peut alors être localement considérée comme plane.

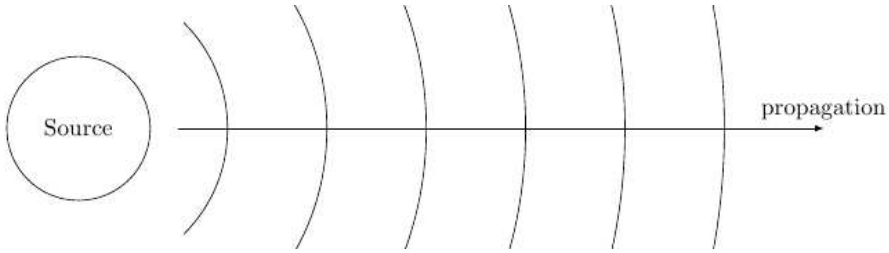


FIGURE C.1 – Propagation d'ondes acoustiques devenant planes en champ lointain.

Si l'onde est plane, il n'y a plus de changement de phase lors de sa réception par un observateur distant. La phase est donc considérée comme stationnaire. Considérons un domaine bidimensionnel tel que $x \times y \mapsto \mathbb{R}^2$ et dans lequel la pression monochromatique $p = p(x,y)$ satisfait l'équation homogène de Helmholtz selon les conventions de transformées de Fourier du chapitre 3 :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_a^2 p = 0 \tag{C.1}$$

Faisons l'hypothèse que la dimension longitudinale (de coordonnées x) du problème domine sur la dimension transverse (de coordonnées y). On peut écrire la transformée de Fourier de la pression dans l'espace des nombres d'onde k selon la direction privilégiée :

$$\tilde{p}(k,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

L'équation (C.1) peut être réécrite de manière à faire apparaître les caractéristiques d'une telle transformée de Fourier axiale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+k_a^2 p\right\}e^{-ikx}\mathrm{d}x=0$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}e^{-ikx}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2}+k_a^2\tilde{p}=0 \tag{C.2}$$

On effectue deux intégration par partie successives sur le premier terme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}e^{-ikx}\mathrm{d}x &= \left[\frac{\partial p}{\partial x}e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}ik\frac{\partial p}{\partial x}e^{-ikx}\mathrm{d}x\\ &= \left[pe^{-ikx}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}(ik)^2 pe^{-ikx}\mathrm{d}x\\ &= -\,k^2\tilde{p}\end{aligned}$$

La pression et le gradient de pression décroissent en effet vers une valeur nulle en champ lointain. En remplaçant dans (C.2) :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2}-\left(k^2-k_a^2\right)\tilde{p}=0 \tag{C.3}$$

L'équation (C.3) a une solution de la forme :

$$\tilde{p}(k,y)=F(k)e^{-\gamma y}+G(k)e^{+\gamma y}$$

avec

$$\begin{cases}\gamma &= +\sqrt{k^2-k_a^2} \qquad \text{if} \quad |k|>k_a\\ \gamma &= -i\sqrt{k_a^2-k^2} \qquad \text{if} \quad |k|<k_a\end{cases}$$

Or, à l'infini la pression tend vers 0 ce qui implique $G(k)=0$. Donc la solution est de la forme :

$$\tilde{p}(k,y)=F(k)e^{-\gamma y}$$

La fonction $F(k)$ est une constante selon la dimension y. On suppose la répartition de la pression dans l'espace des nombres d'onde connue en tout point x et $y=0$

$$\tilde{p}(k)=F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,0)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

Soit :

$$p(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{p}(k)\exp(ikx-\gamma y)\mathrm{d}k \tag{C.4}$$

Dans le cas où la distribution spatiale de la pression en $(x,y=0)$ est modulée par une fonction d'enveloppe A de longueur de référence σk_h :

$$\tilde{p}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{x}{\sigma k_h}\right)\ e^{ik_h x}\ e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{C.5}$$

Le recours à des variables adimensionnées peut s'avérer plus approprié si on prend comme référence l'échelle de longueur de l'enveloppe σk_h. On effectue ainsi le changement de variable $X = \varepsilon x$ avec $\varepsilon = 1/\sigma k_h$.

$$\tilde{p}(k) = \frac{1}{\varepsilon} \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A\left(X\right) e^{-iKX}\mathrm{d}X = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}\left(K\right) \tag{C.6}$$

avec $K = (k - k_h)/\varepsilon$. Équation (C.4) s'écrit alors

$$p(x,y) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(K)\exp(ikx - \gamma y)\mathrm{d}k \tag{C.7}$$

En écoulement subsonique, le rayonnement acoustique ne peut être produit que par les nombres d'ondes supersoniques [a]. Il vient

$$p(x,y) \sim \frac{1}{\varepsilon}\int_{-k_a}^{+k_a} \tilde{A}\left(K\right)\exp(ikx + iy\sqrt{k_a^2 - k^2})\mathrm{d}k$$

Soit, en coordonnées polaires

$$p(R,\theta) \sim \frac{1}{\varepsilon}\int_{-k_a}^{+k_a} \tilde{A}\left(K\right)\exp\left[iR\left(k\cos\theta + \sin\theta\sqrt{k_a^2 - k^2}\right)\right]\mathrm{d}k \tag{C.8}$$

On détaille ici la méthode de la phase stationnaire appliquée à (C.8) pour $R \mapsto \infty$ en considérant $\tilde{A}\left(K\right)$ comme la fonction de faible croissance, c'est–à–dire tant que l'échelle de longueur de l'enveloppe σk_h est suffisamment grande. On recherche les points k_s où la phase est stationnaire de manière à ce que la dérivée première par rapport à la variable k de la fonction dans l'exponentielle s'annule.

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(k_s\cos\theta + \sin\theta\sqrt{k_a^2 - k_s^2}\right) = \cos\theta - \sin\theta\frac{k}{\sqrt{k_a^2 - k^2}} \tag{C.9}$$

L'équation (C.9) s'annule pour deux points particuliers qui sont les points stationnaires k_{s_1} et k_{s_2} tels que $k_{s_{1,2}} = \pm k_a\cos\theta$. Les deux points stationnaires ajoutent leur contribution au comportement asymptotique de l'intégrale de pression. L'équation (C.8) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} p(R,\theta) \sim & \frac{1}{\varepsilon}\sin\theta\sqrt{\frac{2\pi k_a}{R}}\tilde{A}\left(\frac{k_a\cos\theta - k_h}{\varepsilon}\right)\exp\left(ik_aR - i\frac{\pi}{4}\right) \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\sin\theta\sqrt{\frac{2\pi k_a}{R}}\tilde{A}\left(\frac{-k_a\cos\theta - k_h}{\varepsilon}\right)\exp\left(-ik_aR - i\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{C.10}$$

La pression acoustique qui est solution de (C.1) est la somme exacte des contributions des deux points stationnaires. Cependant, la condition de rayonnement associée à la convention utilisée pour la transformée de Fourier, c'est–à–dire correspondant

a. voir le concept de région supersonique évoqué au chapitre 4 et notamment la figure 4.2. Pour plus de détails sur ce concept, voir Dowling et Hynes [48], Obrist [123].

au mode $\exp(-i\omega t)$ donne la contribution du seul point stationnaire $k_{s_1} = +k_a \cos\theta$. C'est en effet la seule solution à satisfaire la causalité. Donc, si on retient cette seule contribution dans l'équation (C.10), on obtient

$$p(R,\theta) \sim \frac{1}{\varepsilon} \sin\theta \sqrt{\frac{2\pi k_a}{R}} \tilde{A}\left(\frac{k_a \cos\theta - k_h}{\varepsilon}\right) \exp\left(ik_a R - i\frac{\pi}{4}\right)$$

En considérant finalement les nombres d'onde hydrodynamique $k_h = 1$ et acoustique $k_a = M_c$, le résultat est consistant avec Crighton et Huerre [37] et Fleury [57].

Annexe D

Méthode de Simpson en maillage irrégulier

La méthode d'intégration de Simpson consiste à décomposer l'espace d'intégration en $2n$ intervalles et à intégrer sur chaque intervalle un polynôme de degré deux comme représenté sur la figure D.1. Un intervalle peut être défini par trois points vérifiant chacun l'équation

$$y_i = ax_i^2 + bx_i + c$$

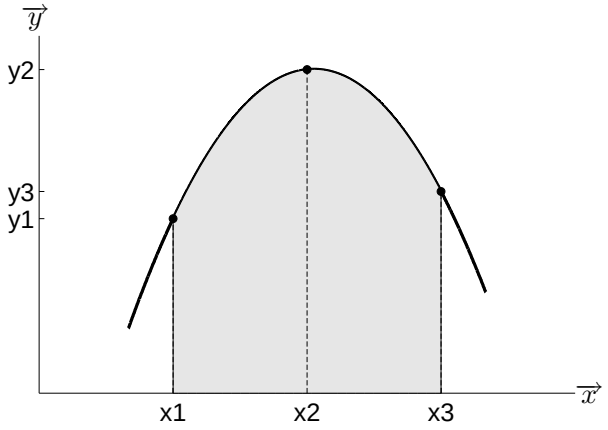


FIGURE D.1 – Schéma de principe de l'algorithme de Simpson.

Au niveau de l'intervalle, on peut écrire ce problème sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Pour trouver le polynôme approchant la fonction à intégrer définie sur cet intervalle, il faut donc trouver les constantes a, b et c. Pour cela, il faut inverser la matrice A :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{com}^T(A)$$

et

$$\det(A) = x_1^2\ x_2 + x_3^2\ x_1 + x_2^2\ x_3 - x_3^2\ x_2 - x_2^2\ x_1 - x_1^2\ x_3$$

$$\mathrm{com}^T(A) = \begin{bmatrix} (x_2 - x_3) & (x_3 - x_1) & (x_1 - x_2) \\ (x_3^2 - x_2^2) & (x_1^2 - x_3^2) & (x_2^2 - x_1^2) \\ (x_2^2\ x_3 - x_3^2\ x_2) & (x_3^2\ x_1 - x_1^2\ x_3) & (x_1^2\ x_2 - x_2^2\ x_1) \end{bmatrix}$$

Dès que les constantes du polynômes sont identifiées, l'intégrale sur cet intervalle peut être calculée :

$$I = \int_{x_1}^{x_3} \left(a x_i^2 + b x_i + c\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{a\ x_3^3}{3} + \frac{b\ x_3^2}{2} + c\ x_3\right) - \left(\frac{a\ x_1^3}{3} + \frac{b\ x_1^2}{2} + c\ x_1\right) \quad \text{(D.1)}$$

Annexe E

Rappel des principales fonctions de Green en espace libre

La fonction de Green est la solution fondamentale de l'équation d'ondes. Elle représente en effet le champ acoustique d'un point source dans le volume V à une position $\mathbf{y}$ excité de manière impulsive au temps τ telle que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{x},t|\mathbf{y},\tau) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t-\tau)$$

où la source sonore est l'impulsion représentée par la fonction de Dirac δ. On présente dans cette partie un tableau récapitulatif des fonctions de Green utilisées dans ce mémoire, pour les deux définitions de la transformée de Fourier, en $2D$ et en $3D$ et associées à l'équation d'ondes :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = Q$$

Pour une présentation plus détaillée des fonctions de Green, voir Bruneau [23] et Gloerfelt [63]. On pose la fonction $g(\tau) = t - \tau - r/c$. La source est décrite par les coordonnées $\mathbf{y}$ au temps d'émission τ. L'observateur est décrit par les coordonnées $\mathbf{x}$ au temps de réception t. Le rayon $r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ et $r_i = x_i - y_i$. La fréquence est ω et la vitesse du son c. Pour un observateur en mouvement uniforme, on utilise la transformation de Prandtl–Glauert qui donne dans un espace à n dimensions :

$$\begin{aligned} r_\beta &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} (x_i - y_i)^2} \\ \tau^* &= \frac{r_\beta - M_\infty r_1}{c\beta^2} \end{aligned}$$

avec $\beta^2 = 1 - M_\infty^2$ et $M_\infty = U/c$ où U est la vitesse uniforme. On présente les fonctions de Green en espace temporel (tableau E.1) et en espace fréquentiel pour deux conventions des transformées de Fourier (tableaux E.2 et E.3).

Milieu au repos	
$3D$	$G_{3D}(\mathbf{x},t\|\mathbf{y},\tau) = -\frac{\delta(g)}{4\pi r}$
$2D$	$G_{2D}(\mathbf{x},t\|\mathbf{y},\tau) = -\frac{c}{2\pi}\frac{H(g)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}}$
Milieu en mouvement uniforme	
$3D$	$G_{c_{3D}}(\mathbf{x},t\|\mathbf{y},\tau) = -\frac{\delta(\tau - t + \tau^*)}{4\pi r_\beta}$
$2D$	$G_{c_{2D}}(\mathbf{x},t\|\mathbf{y},\tau) = -\frac{c}{2\pi}\frac{H(g)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}}$

Table E.1 – Fonctions de Green dans le domaine temporel.

Conventions pour la transformée de Fourier
$f(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{x},t)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$ $\hat{f}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},\omega)\, e^{+i\omega t}\mathrm{d}\omega$
Milieu au repos
$3D$
$G_{3D}(\mathbf{x}\|\mathbf{y},\omega) = -\frac{e^{-ik_a r}}{4\pi r}$
$2D$
$G_{2D}(\mathbf{x}\|\mathbf{y},\omega) = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(k_a r)$
Milieu en mouvement uniforme
$3D$
$G_{c_{3D}}(\mathbf{x}\|\mathbf{y},\omega) = -\frac{e^{-i\frac{k_a}{\beta^2}(r_\beta - M_\infty r_1)}}{4\pi r_\beta}$
$2D$
$G_{c_{2D}}(\mathbf{x}\|\mathbf{y},\omega) = \frac{i}{4\beta}\exp\left(i\frac{M_\infty k_a r_1}{\beta^2}\right) H_0^{(2)}\left(\frac{k_a r_\beta}{\beta^2}\right)$

Table E.2 – Fonctions de Green dans le domaine fréquentiel. Première convention.

Conventions pour la transformée de Fourier
$f(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{x},t)\, e^{+i\omega t}\mathrm{d}t$ $\hat{f}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},\omega)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$
Milieu au repos
$3D$
$G_{3D}(\mathbf{x}\|\mathbf{y},\omega) = -\frac{e^{+ik_a r}}{4\pi r}$
$2D$
$G_{2D}(\mathbf{x}\|\mathbf{y},\omega) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k_a r)$
Milieu en mouvement uniforme
$3D$
$G_{c_{3D}}(\mathbf{x}\|\mathbf{y},\omega) = -\frac{e^{+i\frac{k_a}{\beta^2}(r_\beta - M_\infty r_1)}}{4\pi r_\beta}$
$2D$
$G_{c_{2D}}(\mathbf{x}\|\mathbf{y},\omega) = \frac{1}{4i\beta}\exp\left(i\frac{M_\infty k_a r_1}{\beta^2}\right) H_0^{(1)}\left(\frac{k_a r_\beta}{\beta^2}\right)$

Table E.3 – Fonctions de Green dans le domaine fréquentiel. Seconde convention.

Liste des tableaux

2.1 Nomenclature associée à l'énergie acoustique. 34
2.2 Énergie acoustique. Synthèse. 72

4.1 PWP. Ordre de grandeurs du rayonnement acoustique. 132
4.2 VWP. Ordre de grandeurs du rayonnement acoustique. 132

5.1 Fenêtre de pondération. 140

E.1 Fonctions de Green dans le domaine temporel. 188
E.2 Fonctions de Green fréquentielles. Première convention. 188
E.3 Fonctions de Green fréquentielles. Seconde convention. 189

Table des figures

1 Représentation d'une couche de mélange. 13
2 Problématique de la thèse. 14

1.2 Décroissance des fluctuations de pression. 27

2.1 Répartition des composantes de l'énergie acoustique. 60
2.2 Perturbation lagrangienne. 65
2.3 Positionnement du chapitre 2. 71
2.4 Histoire de l'énergie acoustique. 73

3.1 Représentation des domaines sources et observateurs (FW–H). 79
3.2 Méthode des images 84
3.3 Coordonnées curvilignes de surface pour une sphère. 90
3.4 Applications du formalisme de Farassat et Myers. 95
3.5 Recouvrement des temps d'émission sur une sphère pulsante. 96

4.1 Condition limite de pression 100
4.2 Concept d'extrémité supersonique 103
4.3 PWP. Isocontours de directivité et d'efficacité. Analytique. 104
4.4 PWP. Évolution de l'amplitude d'efficacité maximum et sa déviation. 106
4.5 Illustration du phénomène de fenêtrage. 107
4.6 PWP. Isocontours de directivité et d'efficacité. Numérique. 108
4.7 PWP. Validation du champ lointain. 108
4.8 Configurations génériques des excitations par paquets d'ondes. 109
4.9 PWP. Influence de M_c et σk_h. Symmétrique. 110
4.10 PWP. Influence de M_c et σk_h. Asymétrique $\sigma_u k_h = 2\pi$. 111
4.11 PWP. Influence de M_c et σk_h. Asymétrique $\sigma_u k_h = 20\pi$. 111
4.12 PWP. Influence de M_c et σk_h. Modulation plateau. 112
4.13 PWP. Dynamique des lobes de directivité avec $y_0 k_h$. 113
4.14 PWP. Nombre de lobes de directivité avec M_c. 114
4.15 PWP. Effets de convection. Symmétrique. 117
4.16 PWP. Effets de convection. Asymétrique. 118
4.17 PWP. Effets de convection. Plateau. 119
4.18 Condition limite de vitesse. 120
4.19 VWP. Isocontours d'efficacité. Numérique. 123
4.20 VWP. Validation du champ lointain. 124
4.21 VWP. Influence de M_c et σk_h. Symmétrique. 125
4.22 VWP. Influence de M_c et σk_h. Asymétrique $\sigma_u k_h = 2\pi$. 125
4.23 VWP. Influence de M_c et σk_h. Modulation plateau. 126

4.24 VWP. Effets de convection. Symmétrique. 128
4.25 VWP. Effets de convection. Asymétrique. 129
4.26 VWP. Effets de convection. Plateau. 130
4.27 Positionnement du chapitre 4. 133

5.1 Épaisseur de vorticité. 138
5.2 DNC. Moser *et al.* [117]. 139
5.3 Notations du formalisme intégrale. Margnat et Gloerfelt [103]. 140
5.4 Pression acoustique dans la couche de mélange. 141
5.5 Pression acoustique dans la couche de mélange. Terme monopolaire. . 142
5.6 Intensité acoustique dans la couche de mélange. 143
5.7 Influence de la position de la surface de contrôle. 144
5.8 Épaisseur de déplacement (couche–limite). 145
5.9 Épaisseur de déplacement (couche de mélange). 147
5.10 Validation de l'algorithme de Simpson en maillage irrégulier. 149
5.11 Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement. 150
5.12 Influence des bornes d'intégration sur l'épaisseur de déplacement. . . 151
5.13 Pression acoustique. Sollicitation par δ_θ. 152
5.14 Intensité acoustique. Sollicitation par δ_θ. 152
5.15 Épaisseurs de déplacement (supérieure) et ligne de courant. 153
5.16 Lignes de courant, trajectoire et ligne d'émission. 154
5.17 Pression acoustique. Sollicitation par lignes de courant. 155
5.18 Correction de l'impédance de rayonnement. Pression acoustique. . . 156
5.19 Correction de l'impédance de rayonnement. Intensité acoustique. . . . 157
5.20 Positionnement du chapitre 5. 158

B.1 Schéma du piston vibrant. 179

C.1 Propagation d'ondes acoustiques. 181

D.1 Principe de l'algorithme de Simpson. 185

CONTRIBUTION AU DEVELOPPEMENT D'UNE ANALOGIE VIBROACOUSTIQUE POUR LA MODELISATION DU BRUIT D'ORIGINE AERODYNAMIQUE

RESUME : Cette thèse propose une modélisation du bruit d'origine aérodynamique, avec une attention particulière aux mécanismes de transfert d'énergie entre l'écoulement et le milieu de propagation. Une première partie aborde le problème de la création et du transport de l'énergie acoustique en milieu aérodynamique. Trois grands courants de pensée sont identifiés : l'approche eulérienne linéarise les équations valables en cas de fluide parfait pour former une loi de conservation ; l'approche dissipative développe les équations de Navier-Stokes, fait intervenir les fluctuations de vorticité comment moteur du mouvement acoustique ou décompose la quantité de mouvement en une théorie potentielle ; l'approche lagrangienne décrit le déplacement lagrangien de la perturbation qui suit le passage de l'onde acoustique. La première est la plus naturelle. La deuxième est la plus complète et la seule à expliquer la création d'énergie par l'aérodynamique. Une théorie générale voyant l'acoustique comme le seul champ généralisé qui se trouve piégé par l'aérodynamique en découle. Dans une deuxième partie, les moyens permettant le calcul du champ acoustique à partir d'une sollicitation surfacique sont présentés. Il s'agit de la méthode d'extrapolation des ondes de Kirchhoff basée sur la pression, la formulation de Ffowcs Williams & Hawkings basée sur les débits, et l'intégrale de Rayleigh basée sur une vitesse vibratoire. Une troisième partie de la thèse utilise les formalismes d'excitation surfacique pour étudier la réaction du milieu acoustique à des excitations génériques sous formes de paquets d'onde, représentatives de l'aérodynamique instationnaire. La réponse acoustique est caractérisée par la direction d'émission privilégiée du rayonnement et son efficacité, défini comme le taux de transfert d'énergie entre l'excitation et son milieu. On montre notamment que l'introduction d'une dissymétrie amont-aval dans l'excitation augmente fortement son efficacité, de même que la prise en compte d'un milieu de propagation en mouvement uniforme. Dans une dernière partie, ces considérations sont étendues au rayonnement d'une couche de mélange et adaptées en se basant sur l'analogie de Liepmann. Cette approche peu répandue est une intégrale de Rayleigh dont l'excitation est la dérivée temporelle de l'épaisseur de déplacement. Les résultats sont comparés avec la base de données d'une simulation acoustique directe et des deux autres méthodes surfaciques. La directivité est globalement retrouvée par la modélisation proposée. La prédiction des niveaux pourrait nécessiter de modéliser une impédance de rayonnement.

Mots clés : Aéroacoustique, énergie acoustique, efficacité, surface d'excitation, analogie de Liepmann, impédance de rayonnement.

CONTRIBUTION TO THE DEVELOPMENT OF A VIBRO-ACOUSTIC ANALOGY FOR MODELING AERODYNAMIC NOISE

ABSTRACT: This study proposes a model for the noise generated aerodynamically, while focusing on energy transfer mechanisms between the main flow and the propagating medium. Energy harvest in aerodynamic condition is therefore the subject of a first part. Three general trends may be identified; the eulerian approach uses linearized Euler's equations for inviscid flows in a form of a conservation law; the dissipating approach expands Navier-Stokes equations in series, relies on vorticity fluctuations to excite the medium or splits velocity or momentum vectors in a general potential theory ; the lagrangian approach describes the lagrangian displacement of the perturbation inherent to an acoustic wave. The first approach is the most commonly adopted. The second one is the most complete and provides aerodynamical mechanisms for energy generation. A general fashion follows where acoustics is a generalized field, trapped by a hydrodynamic impedance. In a second part, computational models are presented with their ability to predict acoustic radiation from a surface excitation. These are the Kirchhoff formalism based on the pressure, the Ffowcs Williams & Hawkings formalism based on the mass flow rate and the Rayleigh integral based on the vibration velocity. These are applied in a third part of the study to investigate the response of the acoustic medium to a generique excitation in the form of a wavepacket, representative of unsteady aerodynamics. Such acoustic response is caracterised by its direction of maximum radiation and its efficiency, defined as the rate of energy transfer between the excitation and its surrounding medium. Introducing an upstream-downstream asymmetry in the excitation is showed to significantly enhance its efficiency, as well as a convection velocity in the propagating medium. Within these general considerations, the last part of this study models acoustic excitation in a mixing layer flow based on Liepmann's analogy. This relatively unexplored theory consists in a Rayleigh integral excited by the temporal derivative of the displacement thickness. Results are compared with direct noise computation database and two other methods of surface excitation. Directivity is likely to be found while pressure amplitude is correctly predicted by using a model for radiation impedance.

Keywords : Aeroacoustics, acoustic energy, efficiency, surface excitation, Liepmann's analogy, radiation impedance.

ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ParisTech INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY