HAL
open science

Mécanique de la rupture et endommagement d'un alliage d'aluminium 2219 T87 pour application aérospatiale

Christophe Le Guyader

To cite this version:

Christophe Le Guyader. Mécanique de la rupture et endommagement d'un alliage d'aluminium 2219 T87 pour application aérospatiale. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2014. Français. NNT : 2014ENMP0046 . tel-01142080

HAL Id: tel-01142080

https://pastel.hal.science/tel-01142080

Submitted on 14 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

MINES ParisTech

École doctorale n°432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité « Science et Génie des Matériaux »

Christophe LE GUYADER

thèse soutenue le 16/12/2014

Mécanique de la rupture et endommagement d'un alliage d'aluminium 2219 T87 pour application aérospatiale

Directeur de thèse: **Jacques BESSON**
Maître de thèse: **Yazid MADI**

Jury :

M. Jia LI	Département de Mathématiques, Université Paris 13	Président
Mme. Aude SIMAR	IMMC, Université Catholique de Louvain	Rapporteur
Mme. Véronique DOQUET	LMS, Ecole Polytechnique	Rapporteur
M. Jacques BESSON	CDM, Mines ParisTech	Examinateur
M. Yazid MADI	Ermess, EPF	Examinateur
M. Jean-Christophe EHRSTRÖM	CRV, Constellium Voreppe	Examinateur

T H È S E

MINES ParisTech
Centre des Matériaux - UMR CNRS 7633
B.P. 87 - 91003 EVRY Cedex

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury : Mesdames Aude Simar et Véronique Doquet pour avoir accepté de rapporter mon travail de thèse, Monsieur Jia Li pour avoir bien voulu présider mon jury de thèse et Monsieur Jean-Christophe Ehrström pour sa contribution en tant qu'examinateur. La qualité et la pertinence de leur analyse de mes travaux de thèse ont donné lieu, lors de la soutenance, à des questions et des discussions enrichissantes.

Je suis extrêmement reconnaissant à mon directeur de thèse, Jacques Besson, pour la qualité de son encadrement. Malgré son accés à la fonction de directeur du Centre des Matériaux, il a su rester disponible tout au long de ma thèse. Je le remercie de m'avoir initié à l'approche locale de la rupture. J'ai particulièrement apprécié, lors de nos échanges scientifiques, sa maîtrise théorique et numérique de la modélisation du comportement élasto-plastique et de l'endommagement des matériaux.

Je remercie François Peyraud pour avoir soutenu mon projet de thèse lorsqu'il était responsable du département des études chez EURO CRYOSPACE. Je suis reconnaissant à toutes les personnes qui ont contribué au sein de EURO CRYOSPACE à la mise en œuvre de mon détachement au Centre des Matériaux pendant trois années. J'ai ainsi eu la possibilité d'effectuer mes travaux de recherche dans des conditions exceptionnelles.

Je tiens à remercier mon maître de thèse Yazid Madi pour son aide précieuse sur la partie expérimentale de ma thèse. Il m'a également encouragé à persévérer dans mes investigations sur l'approche globale de la rupture. A ce titre, je salue sa relecture minitieuse du deuxième chapitre de ma thèse.

Je voudrais remercier Abdenour et Régis pour m'avoir aidé lors de la réalisation de mes nombreux essais, en particulier pour leur contribution à la préfissuration des éprouvettes CT, SENT et SCT.

Je remercie également tout le personnel de l'atelier pour l'usinage de mes différentes éprouvettes, leur aide a été précieuse. J'en profite pour souligner qu'une des forces du Centre des Matériaux réside dans cet atelier qui permet l'usinage d'éprouvettes spécifiques, nécessaires à la caractérisation mécanique des matériaux.

Je remercie particulièrement Anne Laurent pour son aide lors des observations MEB de mes nombreux échantillons. Sa patience a été grandement mise à l'épreuve lors des séances de cartographie de la porosité sur coupes polies.

Je remercie Farida Azzouz pour ses nombreux coups de pouce sur ZeBuLoN, Franck Nguyen pour le post-traitement de mes données de tomographie et Odile Adam pour son efficacité dans la recherche des références bibliographiques.

Je remercie également tous ceux du Centre des Matériaux que j'ai croisé et qui ont su rendre mon séjour agréable, inutile de les nommer ici, ils se reconnaîtront.

Enfin, je remercie Laurence de m'avoir soutenu et supporté tout au long de ces années de thèse.

INTRODUCTION

Le Réservoir Isolé et Equipé (RIE) de l'Etage Principal Cryotechnique (EPC) du lanceur ARIANE 5 est dimensionné et fabriqué par EURO CRYOSPACE. Il est constitué de deux réservoirs cylindriques fermés par des dômes hémi-sphériques dont la longueur totale et le diamètre sont respectivement de 23 m et de 5,4 m. Ces réservoirs sont réalisés à partir de viroles dont l'assemblage est effectué par soudage (soudures circulaires). Chaque virole est formée de trois panneaux également soudés (soudures longitudinales), obtenus par usinage et cintrage de tôles laminées en alliage d'aluminium 2219 T87, d'épaisseur 27 mm, 13 mm ou 10 mm. Pour le réservoir d'oxygène liquide (RLO_2) les épaisseurs de la pleine peau et des trottoirs de soudage après usinage sont de 4,6 mm et 8,8 mm. Ces mêmes épaisseurs sont respectivement de 2 mm et 4,2 mm dans le cas du réservoir d'hydrogène liquide (RLH_2).

Lors du dimensionnement du réservoir se pose la question de l'évaluation de la taille des Défauts Critiques Initiaux (DCI) nécessaire à la mise en œuvre des moyens de contrôle non destructifs. Il existe inévitablement des défauts dans les réservoirs RLO_2 et RLH_2. Ils ont pu être engendrés lors du procédé d'élaboration de l'alliage d'aluminium 2219 T87 ou pendant une des phases de la fabrication des réservoirs. Pour que la présence de ces défauts soit sans danger, il est nécessaire de pouvoir détecter à l'aide de moyens de contrôle non destructifs leur taille minimale, en deçà de laquelle l'intégrité de la structure reste garantie pour un chargement donné.

Le calcul de la taille critique des défauts repose sur une approche FAD (Failure Assessment Diagram) dont les règles d'application ont fait l'objet d'une procédure, établie par CEGB et résumée dans [Milne et al., 1986]. Ce document propose trois options de moins en moins conservatives, correspondant à des défauts de plus en plus critiques, pour vérifer l'intégrité d'une structure. Ces défauts sont généralement assimilés à une fissure surfacique semi-elliptique. Au sein d'EURO CRYOSPACE seules sont utilisées les deux premières options basées sur le facteur d'intensité de contrainte K alors que la troisième utilise la notion d'intégrale J. La détermination des DCI par cette méthode ne pose pas de problèmes particuliers dans le cas nominal. Par contre elle peut rapidement atteindre ses limites lors de certaines anomalies de production.

Une anomalie relativement récurrente est liée à la présence d'une entaille à la surface du réservoir, dont la cause peut être la rupture d'une dent de fraise lors de l'usinage, ou un choc dû à une erreur de manutention. Une opération de ragréage permet d'éliminer cette entaille afin d'éviter une concentration de contrainte, mais entraîne inévitablement une réduction d'épaisseur, engendrant une déformation plastique localisée plus ou moins importante. Le calcul des DCI dans cette zone de sous-épaisseur sera problématique dans le cas d'une déformation plastique importante, car elle conduira, compte tenu du conservatisme de l'approche FAD, à une taille de défaut acceptable trop faible pour être détectée.

L'objectif de cette thèse est donc de proposer différentes approches afin d'évaluer, dans le domaine plastique, l'intégrité d'une structure comportant un défaut. Le problème posé est donc équivalent à

l'étude d'une fissure surfacique plus ou moins profonde, afin d'obtenir au niveau du ligament une déformation plastique relativement importante. Nous avons adopté une démarche progressive qui consiste à consacrer le deuxième chapitre de cette thèse à l'approche globale basée sur la méthode FAD, puis à orienter nos recherches, dans le troisième et dernier chapitre, vers une approche locale axée sur l'utilisation d'un modèle d'endommagement. Il nous paraît important de souligner que tout au long de cette étude nous avons veillé à ce que nos travaux puissent être utilisés dans un contexte industriel, et plus paticulièrement dans celui de EURO CRYOSPACE.

Quant au premier chapitre, il est dédié à la caractérisation de l'alliage d'aluminium 2219 T87. Il se décompose en quatre parties dont la première est consacrée à l'étude de la microstructure de notre alliage. Il s'agit de déterminer la taille des grains, la nature et les dimensions des phases intermétalliques présentes dans le matériau ainsi que leur distribution. La seconde partie porte sur l'analyse des essais de traction réalisés sur différentes géométries d'éprouvettes non fissurées. Des éprouvettes lisses de section rectangulaire seront utilisées afin de caractériser l'écrouissage, et d'appréhender le caractère orthotrope de la plasticité en effectuant une mesure du coefficient de Lankford. Des essais sur éprouvettes entaillées permettent d'évaluer l'influence du taux de triaxialité sur la rupture. Bien que ces éprouvettes soient uniquement sollicitées en traction, la présence de l'entaille produit un état de contraintes multi-axiales, permettant ainsi une meilleure définition de la surface de plasticité. La troisième partie aborde à travers des essais sur éprouvettes fissurées le comportement du matériau vis-à-vis de la propagation d'une fissure en déchirure ductile. Le but est d'obtenir la ténacité et la courbe $J_R - \Delta a$ pour différentes géométries d'éprouvettes : CT (Compact Test), SENT (Single Edge Notched Tensile) et SCT (Surface Crack Tensile). Précisons que pour cette dernière géométrie la fissure est semi-elliptique alors qu'elle est rectiligne pour les deux premières. Ce premier chapitre se termine par l'observation au Microscope Electronique à Balayage (MEB) des faciès de rupture des diverses éprouvettes, afin de déterminer les micromécanismes mis en jeu lors de la rupture.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, l'approche globale constitue le sujet du second chapitre qui s'articule en trois parties dont la dernière, pouvant être perçue comme l'aboutissement des deux premières, sera consacrée à l'analyse FAD. A première vue il pourrait sembler étonnant de vouloir à l'heure actuelle concentrer des travaux de recherche sur ce type d'analyse. En effet celle-ci s'inscrit dans le cadre de la mécanique de la rupture, dont le développement remonte aux années 80. Il faut cependant garder à l'esprit que la méthode FAD est largement employée dans l'industrie compte tenu de sa relative simplicité de mise en œuvre, par conséquent il n'est pas inutile d'approfondir ce genre d'approche. De plus il existe un regain d'intérêt pour l'analyse FAD, lié à une utilisation de plus en plus généralisée des éprouvettes SENT dans le domaine des pipelines. Cette géométrie d'éprouvette permet de déterminer, au même titre que les éprouvettes CT, la courbe $J_R - \Delta a$ dont se déduisent les caractéristiques matériaux nécessaires à l'analyse FAD. Cette courbe caractérise la résistance à la déchirure ductile d'un matériau mais ne constitue pas une propriété intrinsèque de celui-ci, elle peut par conséquent dépendre de la géométrie des éprouvettes fissurées utilisée. Les éprouvettes CT possèdent une fissure dont le ligament est principalement soumis à de la flexion tandis que pour les éprouvettes SENT celui-ci travaille essentiellement en traction, or ce mode de sollicitation est celui d'un tube ou d'un réservoir cylindrique sous pression.

Il apparaît donc que la détermination de la courbe $J_R - \Delta a$ joue un rôle clé dans l'approche globale, car elle conditionne l'évaluation des propriétés mécaniques utilisées lors de l'analyse FAD. Or cette courbe s'obtient selon la méthodologie déployée par la norme ASTM E1820 uniquement applicable aux éprouvettes CT. L'avancée de la fissure Δa est obtenue soit par des essais interrompus nécessitant plusieurs éprouvettes, soit à partir d'un unique spécimen en utilisant la méthode de la complaisance, décrite dans cette même norme. La principale difficulté est de calculer l'intégrale J à partir de l'effort

P appliqué à l'éprouvette et du déplacement d'ouverture V de la fissure, enregistrés au cours de l'essai. Le principe de base consiste à relier la partie plastique de l'intégrale J à l'aire sous la courbe $P - V_{pl}$ par l'intermédiaire d'un coefficient noté η_{pl}. Précisons que dans les notations précédentes V_{pl} désigne la partie plastique du déplacement V. La composante élastique de l'intégrale J se déduit du facteur d'intensité de contrainte K, déterminé à partir de solutions analytiques tabulées dans des formulaires comme celui proposé par [Murakami, 1987]. Si nous voulons pouvoir comparer les courbes $J_R - \Delta a$ issues d'essais sur éprouvettes CT et SENT, il faut être en mesure de calculer η_{pl} selon une unique méthode, applicable quelle que soit la géométrie de l'éprouvette utilisée. De plus nous devons vérifier que la formule incrémentale, issue de la norme ASTM E1820, reste valable afin de construire la courbe $J_R - \Delta a$, dans le cas d'une géométrie quelconque d'éprouvette fissurée.

Ainsi nous avons naturellement consacré la première partie du second chapitre à l'analyse de cette norme. Il s'agit, en s'aidant de la littérature, de retrouver la démonstration de l'expression du paramètre η_{pl} pour une éprouvette CT et de la formule incrémentale permettant de déterminer la courbe $J_R - \Delta a$. Nous verrons que ces démonstrations s'articulent autour de la notion de « keycurve » qui sera mise en application dans la deuxième partie du second chapitre, afin de déterminer l'expression du facteur plastique η_{pl} pour les éprouvettes CT et SENT. Afin de vérifier les résultats obtenus par cette méthode dite de la « keycurve », nous déterminerons également η_{pl} à partir de la partie plastique de l'intégrale J calculée numériquement selon l'approche proposée par [Cravero and Ruggieri, 2007]. Il nous faudra alors résoudre le problème de la dépendance de J vis-à-vis du contour d'intégration dans le cas d'une plasticité étendue. Nous profiterons de ces calculs d'intégrale J pour réaliser une analyse en pointe de fissure, dans le cas de la plasticité confinée et dans les configurations liées aux éprouvettes CT et SENT. Nous serons alors en mesure de déterminer la courbe $J_R - \Delta a$ quelle que soit la géométrie d'éprouvette fissurée utilisée, et par conséquent d'en extraire les caractéristiques mécaniques nécessaires à l'analyse FAD. La mise en œuvre de cette analyse sera abordée dans la dernière partie du second chapitre, afin de prévoir l'amorçage de la fissure pour les éprouvettes CT, SENT et SCT. Nous avons également utilisé une extension de l'approche FAD pour étudier l'instabilité de la fissure dans le cas des éprouvettes SENT.

Le troisième et dernier chapitre de cette thèse est dédié à l'approche locale qui permet théoriquement de prévoir la rupture de toute structure comportant ou non une fissure. En effet elle est basée sur la prise en compte d'une part des micromécanismes de rupture, et d'autre part de la structure microscopique propre au matériau. Ainsi dans le cas de l'alliage d'aluminium 2219 T87 ces micromécanismes sont ceux de la rupture ductile : la germination, la croissance et la coalescence des cavités. L'utilisation d'un critère de rupture ou d'un modèle d'endommagement nécessite toutefois une simulation correcte du comportement élasto-plastique du matériau. Ainsi la première partie du troisième chapitre sera consacrée à la recherche d'un critère de plasticité. Dans la seconde partie nous proposons d'utiliser le critère de [Rice and Tracey, 1969] afin de prévoir la rupture des éprouvettes non fissurées, et l'amorçage de la fissure pour les éprouvettes fissurées. Ce critère n'est pas couplé à la plasticité, par conséquent il est simple à mettre en œuvre, tout en permettant de simuler le micromécanisme principal de la rupture ductile, à savoir la croissance des cavités. Il est donc particulièrement bien adapté au contexte industriel car il se calcule par un simple post-traitement, réalisé à partir des tenseurs des contraintes et des déformations. A la fin de cette deuxième partie nous nous poserons la question de modéliser la coalescence à travers le critère de [Thomason, 1985a]. La dernière partie du chapitre 3 traite de l'endommagement couplé à la plasticité, simulé à l'aide du modèle de [Gurson, 1977] modifié par [Tvergaard and Needleman, 1984]. Ce modèle permet de rendre compte des trois phases de la rupture ductile : la germination, la croissance et la coalescence. Cette partie termine nos travaux de thèse et peut donc être perçue comme l'aboutissement de notre étude consacrée à l'approche locale. En effet nous souhaitons calibrer les paramètres du modèle d'endommagement afin de simuler la rupture

des éprouvettes non fissurées et la propagation de la fissure des éprouvettes CT, SENT et SCT. Cette phase de propagation de la fissure peut être modélisée en utilisant deux autres approches . La première, décrite dans [Newman et al., 2003] et employée par [Hampton and Nelson, 2003] sur des tôles en 2219 T87, consiste à faire propager la fissure lorsque l'angle en pointe de fissure, désigné courament par l'acronyme CTOA (Crack Tip Opening Angle), atteint une valeur critique. Cette méthode est surtout utilisée pour prévoir la déchirure ductile de tôle mince, ce qui ne correspond pas au cadre de notre étude. La seconde approche repose sur un modèle de zone cohésive, elle a fait l'objet d'une revue détaillée fournie par [Elices et al., 2002]. Elle est basée sur une loi d'évolution de la contrainte normale en fonction du déplacement d'ouverture de la fissure, mais nécessite de connaître a priori le chemin de fissuration. Ces deux approches ne tiennent pas compte des micromécanismes représentatifs de la rupture ductile. Dans le cas des zones cohésives, il peut donc exister quelques difficultés liées à l'utilisation du critère, calibré sur une géométrie fissurée, pour prévoir la rupture d'une éprouvette non fissurée. Ce problème lié au transfert d'une géométrie à une autre ne se pose pas dans le cas d'un critère qui tient compte des micromécanismes de la rupture ductile.

Il nous faut maintenant répondre au lecteur qui pourrait se demander pourquoi cette thèse consacrée à l'alliage 2219 T87, dans le cadre d'une application aux réservoirs cryotechniques d'ARIANE 5, n'envisage pas d'étudier le comportement plastique et la rupture de ce matériau, aux températures cryogéniques de 77 K ou 20 K. Une première réponse, non satisfaisante du point de vue technique, est liée aux coûts élevés des essais mécaniques à ces températures, surtout dans le cadre de notre approche qui se base sur un nombre important d'éprouvettes non fissurées et fissurées. De plus il existe en France un unique laboratoire situé à Grenoble et appartenant à AIR LIQUIDE qui est habilité à réaliser des essais mécaniques dans l'hydrogène liquide. La température de 20 K peut néanmoins être atteinte à partir d'hélium liquide à 4 K mais avec des coûts associés importants. Dans tous les cas ces essais nécessitent l'utilisation d'un cryostat et une certaine expérience de la cryogénie, d'où l'impossibilité de les réaliser au Centre des Matériaux. Enfin d'un point de vue technique les alliages d'aluminium, compte tenu de leur structure cristalline cubique à faces centrées, ne présentent pas comme les aciers de phénomènes de fragilisation à froid. L'alliage 2219 est même connu pour présenter une limite d'élasticité supérieure à températures cryogéniques, de plus cette augmentation de la contrainte à limite élastique est également associée à une ductilité plus importante. Par conséquent, il est raisonnable de penser que les micromécanismes de rupture, liés au caractère ductile de celle-ci, seront identiques aux températures cryogéniques et à température ambiante. C'est pourquoi nous avons décidé, dans le cadre de cette thèse, de nous concentrer sur la compréhension et la modélisation de ces micromécanismes à température ambiante.

SOMMAIRE

1 CARACTERISATION DE L'ALLIAGE D'ALUMINIUM 2219 T87 **9**
1.1 INTRODUCTION 10
1.2 PRESENTATION DE L'ALLIAGE 2219 T87 11
1.3 ANALYSE DES EPROUVETTES NON FISSUREES 17
1.4 ANALYSE DES EPROUVETTES FISSUREES 28
1.5 MICROMECANISMES DE RUPTURE 51
1.6 RESUME 62

2 APPROCHE GLOBALE **65**
2.1 INTRODUCTION 66
2.2 ANALYSE DE LA NORME ASTM E1820 67
2.3 DETERMINATION DE η_{pl} PAR LA KEYCURVE 84
2.4 INTEGRITE D'UNE STRUCTURE AVEC FISSURE 123

3 APPROCHE LOCALE **143**
3.1 INTRODUCTION 144
3.2 CRITERES DE PLASTICITE 145
3.3 CRITERES DE RUPTURE 160
3.4 COUPLAGE ENDOMMAGEMENT ET PLASTICITE 198

CONCLUSION ET PERSPECTIVES **223**

A DONNEES GEOMETRIQUES DES EPROUVETTES CT10 (série b) **237**

B FRACTOGRAPHIE DES EPROUVETTES AE SELON LE SENS D **241**

C FRACTOGRAPHIES DES EPROUVETTES EU_4 ET AE_4 **243**

D CARTOGRAPHIE DE LA POROSITE POUR LES EPROUVETTES AE **245**

E OPTIMISATION DES PARAMETRES DES CRITERES DE PLASTICITE **249**

F CONTRAINTES PRINCIPALES POUR LES EPROUVETTES AE et EU **253**

Chapitre 1

CARACTERISATION DE L'ALLIAGE D'ALUMINIUM 2219 T87

Sommaire

1.1 INTRODUCTION 10
1.2 PRESENTATION DE L'ALLIAGE 2219 T87 11
1.3 ANALYSE DES EPROUVETTES NON FISSUREES 17
1.3.1 Essais sur éprouvettes lisses 17
1.3.1.1 Eprouvettes D_{10} 17
1.3.1.2 Eprouvettes TR_{12} 17
1.3.2 Essais sur éprouvettes entaillées 20
1.3.2.1 Eprouvettes EU_4 et EU_2 20
1.3.2.2 Essais sur éprouvettes AE_4 et AE_2 24
1.3.2.3 Essais sur éprouvettes DP 26
1.3.3 Synthèse des essais sur éprouvettes non fissurées 28
1.4 ANALYSE DES EPROUVETTES FISSUREES 28
1.4.1 Essais sur éprouvettes CT 28
1.4.1.1 Géométrie des éprouvettes CT 28
1.4.1.2 Méthode de calcul de la ténacité 29
1.4.1.3 Méthode de détermination de la courbe R 30
1.4.1.4 Ténacité de l'alliage 2219 T87 32
1.4.1.5 Courbe R de l'alliage 2219 T87 36
1.4.2 Essais sur éprouvettes SENT 41
1.4.2.1 Géométrie des éprouvettes SENT 41
1.4.2.2 Résultats des essais 44
1.4.3 Essais sur éprouvettes SCT 45
1.4.3.1 Géométrie des éprouvettes SCT 45
1.4.3.2 Résultats des essais 49
1.5 MICROMECANISMES DE RUPTURE 51
1.5.1 Observation des faciès de rupture 51
1.5.2 Analyse de la porosité à l'instant de la rupture 56
1.6 RESUME 62

1.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est dédié à la caractérisation de l'alliage d'aluminium 2219 T87 du point de vue microscopique et macroscopique. Dans le cadre de cette thèse ce matériau est utilisé pour la fabrication des réservoirs cryotechniques du lanceur ARIANE 5, il est fourni par ALERIS. Ces réservoirs sont réalisés à partir de viroles dont l'assemblage est effectué par soudage (soudures circonférentielles). Chaque virole est formée de trois panneaux également soudés (soudures longitudinales), obtenus par usinage et cintrage de tôles laminées d'épaisseur 27 mm, 13 mm et 10 mm.

Dans la suite de cette étude nous désignerons par L le sens de laminage, par T le sens transverse et par S celui de l'épaisseur. Au niveau du lanceur L et T sont respectivement suivant la circonférence et l'axe longitudinal des réservoirs. La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation du matériau dont nous souhaitons aborder le mode d'élaboration et la caractérisation de la microstructure. Il s'agit d'évaluer notamment la taille des grains et la nature des précipités intermétalliques ainsi que leurs dimensions et répartition au sein du matériau. Nous essaierons de mettre en perspective les propriétés de la microstructure avec le procédé de laminage et les traitements thermiques spécifiques à la nuance T87.

La seconde partie de ce chapitre est centrée sur la description des essais et les résultats obtenus qui serviront, dans la suite de cette étude, à identifier un critère de plasticité adapté à notre alliage. Des essais de traction ont été réalisés sur éprouvettes plates lisses TR_{12}, plates entaillées (EU) et axisymétriques entaillées (AE). Afin de caractériser l'anisotropie du matériau toutes ces éprouvettes ont été prélevées suivant différents angles par rapport au sens de laminage L. A partir d'un essai de traction uniaxial, la présence du rayon d'entaille dans les éprouvettes EU et AE engendre au niveau de la section minimale de l'éprouvette, un état de contraintes multiaxial permettant ainsi une description plus riche du comportement élasto-plastique de l'alliage 2219 T87.

Nous souhaitons ensuite caractériser la résistance à la déchirure ductile de ce matériau. Cette propriété se quantifie par la courbe $J_R - \Delta a$, nommée également courbe R, dont la détermination nécessite l'utilisation d'éprouvettes fissurées. Pour un matériau fragile il n'est pas possible de définir cette courbe, car il n'existe pas de phase de propagation stable de la fissure. La tenue mécanique d'un tel matériau vis à vis de la présence d'une fissure sera alors évaluée par la ténacité, notée K_{IC}. Dans le cas d'un matériau ductile la ténacité est utilisée pour prévoir l'amorçage de la propagation de la fissure.

Les éprouvettes CT (Compact Tension) sont les plus employées pour déterminer la ténacité et la courbe R d'un matériau. Cette utilisation généralisée est due au fait qu'elles font l'objet de la norme ASTM E1820 contrairement aux éprouvettes SENT (Single Edge Notched Tension) dont la définition et la réalisation des essais ne sont encadrées par aucune spécification émanant d'un document officiel. Cependant dans le cas d'une application à un réservoir soumis à un effort de pression les éprouvettes SENT sont plus adaptées, car elles possèdent un ligament sollicité principalement en traction contrairement aux éprouvettes CT dont le ligament travaille essentiellement en flexion.

L'objet de la troisième partie de ce chapitre est donc de présenter la description et les résultats des essais effectués sur des éprouvettes CT et SENT. Afin de prendre en compte l'anisotropie du matériau ces éprouvettes ont été prélevées suivant différentes directions notées L-T, T-L, L-S et T-S. La désignation L-T signifie par exemple que l'éprouvette est prélevée de manière à être sollicitée suivant le sens L, tandis que la fissure se propagera suivant le sens T. Ces essais permettent d'obtenir la ténacité et la courbe R pour les différents sens de prélèvement. Des éprouvettes SCT (Surface Crack Tension) ont également été testées. Contrairement aux éprouvettes CT ou SENT dont la fissure est rectiligne, les

éprouvettes SCT possèdent une fissure semi-elliptique dont l'amorçage est caractérisé, selon la norme ASTM E740, par une ténacité spécifique notée K_{IE}.

La dernière partie de ce chapitre est dédiée à la compréhension des micromécanismes de rupture de l'alliage 2219 T87, basée sur l'observation au Microscope Electronique à Balayage (MEB) des faciès de rupture des différentes éprouvettes. Pour la modélisation du comportement plastique macroscopique la prise en compte des différentes phase intermétalliques n'est pas nécessaire, contrairement à la simulation de la rupture macroscopique. En effet le phénomène de rupture des différentes éprouvettes (EU, AE et CT) est intimement lié à la taille, la forme et la distribution des précipités intermétalliques. Nous verrons que dans la modélisation de l'endommagement de l'alliage 2219 T87, le phénomène de germination joue un rôle prépondérant, or celui-ci dépend de la nature et de la répartition des phases intermétalliques.

1.2 PRESENTATION DE L'ALLIAGE 2219 T87

Un alliage d'aluminium peut en général être considéré comme constitué de trois types d'éléments. Le premier est l'élément d'alliage, il est le plus important et détermine notamment la nature de la famille d'alliage d'aluminium. Ainsi il existe cinq familles ou séries d'alliage d'aluminium, chacune caractérisée par l'emploi d'un des principaux éléments d'alliage à savoir : le cuivre (série 2000), le manganèse (série 3000), le silicium (série 4000), le magnésium (série 5000), le silicium associé au magnésium (série 6000) et le zinc (série 7000). Le second englobe les éléments additifs ajoutés afin d'obtenir certaines propriétés particulières. Le troisième est constitué par les impuretés qui sont dans le cas des alliages d'aluminium le fer et le silicium, dont la présence est inévitable puisqu'ils se trouvent dans la bauxite, le minerai dont l'alumine est extraite.

L'alliage d'aluminium 2219 fait partie comme sa dénomination l'indique de la série 2000, caractérisée par l'utilisation du cuivre en tant qu'élément d'alliage. De toute la famille 2000, le 2219 est l'alliage le plus chargé en cuivre dont le pourcentage en masse est de l'ordre de 6 %. Il est intéressant de noter qu'une teneur en cuivre élevée, au-dessus de 4 %, facilite le soudage à l'arc. L'alliage 2219 T87 possède des caractéristiques mécaniques élevées, cependant ce gain se fait au détriment de la ténacité et de la corrosion sous contrainte. Cette faible ténacité pourrait toutefois être augmentée en baissant la teneur en fer et silicium comme dans le cas du 2419 par exemple. Dans ses travaux [Bron, 2004] montre également que la ténacité d'un alliage 2024 est plus élevée pour une composition allégée en fer et silicium.

Compte tenu de leur structure cristalline cubique à faces centrées les alliages d'aluminium ne présentent pas de phénomène de fragilisation à froid, comme cela est le cas pour les aciers par exemple. Ainsi l'alliage 2219 montre une augmentation de la limite d'élasticité à 0,2 % et de la contrainte à rupture égale à 20 % et 35 % respectivement pour des températures de 77 K et 20 K. Les valeurs de la ductilité et de la ténacité sont légèrement augmentées pour ces mêmes températures. Par conséquent ces propriétés ajoutées à sa bonne soudabilité à l'arc font du 2219 T87 un excellent candidat pour la réalisation des réservoirs cryotechniques d'un lanceur, lesquels vont contenir de l'oxygène liquide (90 K) et de l'hydrogène liquide (20 K) nécessaires à la propulsion.

Les différents traitements thermiques et mécaniques appliqués à l'alliage 2219 T87 sont une trempe, suivie d'un écrouissage par laminage à l'état de trempe fraîche puis un revenu. Une trempe suivie d'un revenu permet de durcir l'alliage par précipitation d'une ou plusieurs phases au sein de la matrice d'aluminium. La présence de ces particules de taille inférieure au dixième de micron vont perturber la déformation plastique de la matrice. Ainsi pour obtenir une même déformation il faudra appliquer une charge plus importante par conséquent la limite d'élasticité du matériau a augmenté, l'alliage a été durci. Il faut néanmoins préciser que seuls les alliages d'aluminium dits trempants (séries 2000, 6000 et 7000) sont suceptibles de durcir suite à un revenu après trempe. Les autres (séries 3000, 4000

et 5000) nommés non trempants par opposition ne peuvent être durcis que par écrouissage. L'alliage 2219 pourra donc être durci par écrouissage et par un revenu après trempe, il est toutefois important de signaler que le durcissement se fait au détriment de la ténacité et de la ductilité c'est-à-dire de l'allongement à rupture.

La trempe fait suite à un recuit de mise en solution au cours duquel l'alliage est porté à une température comprise entre 490° C et 530° C pendant une durée de 15 à 20 heures. Le but de cette opération est de remettre en solution tous les précipités, par conséquent il est nécessaire de chauffer l'alliage à une température suffisamment élevée, afin d'assurer une solubilité maximale. La trempe consiste alors à refroidir le métal jusqu'à la température ambiante. Il existe comme le montre [Ashby and Jones, 1991] une vitesse critique de trempe de l'ordre de 150° C/sec en deçà de laquelle les caractéristiques mécaniques ne sont pas réellement améliorées. D'autre part l'optimisation de la vitesse de trempe permet de réduire les contraintes résiduelles inhérentes au refroidissement de l'alliage.

Immédiatement après l'opération de trempe le matériau présente une faible limite d'élasticité associée à un fort écrouissage. Toutefois cet état de trempe fraîche ne peut pas être conservé au delà de quelques heures compte tenu de la sensibilité des alliages trempants au mûrissement, c'est-à-dire au durcissement à température ambiante suite à la trempe. Il est toutefois possible de prolonger l'état de trempe fraîche en maintenant l'alliage à basse température. Il est important de réaliser l'écrouissage de l'alliage à l'état de trempe fraîche afin de profiter de son caractère particulièrement doux et ductile. Le rôle de l'écrouissage entre trempe et revenu est d'une part de durcir l'alliage et d'autre part d'influencer la cinétique et la répartition spatiale de la précipitation lors du revenu. Notre alliage sera écroui par laminage à froid avec un taux d'écrouissage de 8 % défini comme le rapport de la diminution de l'épaisseur de la tôle $e_0 - e$ sur l'épaisseur initiale de la tôle e_0, le tout multiplié par 100 afin d'obtenir un pourcentage.

Pour une température de revenu donnée il existe une durée optimale de celui-ci afin d'obtenir un alliage avec des caractéristiques mécanique maximales. De manière générale un revenu à température plus élevée pendant un temps plus court conduit à de moins bonnes propriétés mécaniques qu'un revenu à température plus basse maintenue pendant un temps plus long. Il est donc préférable de choisir une température de revenu pas trop élevée pendant une durée prolongée afin d'optimiser les caractéristiques mécaniques de l'alliage. En effet dans ce cas la cinétique de précipitation est suffisamment lente pour permettre la succession des différentes phases. Nous allons réaliser la description de celles-ci dans le cas d'un alliage de la série 2000 revenu à une température relativement basse, autour de 100° C.

A l'état de trempe fraîche cet alliage est sursaturé en atomes de cuivre, ainsi la précipitation débute par le rassemblement de ces atomes en petits amas, afin de former les zones de Guinier − Preston (GP) dont la taille est de quelques nanomètres. Puis apparaît une première phase intermédiaire θ'' toujours cohérente [(a)] avec la matrice. Celle-ci va alors se transformer partiellement en une seconde phase θ' semi−cohérente qui permet d'atteindre un durcissement maximal. Si le revenu est trop prolongé, cas du surevenu, la phase θ' va coalescer pour former la phase eutectique $\theta - Al_2Cu$ du diagramme de phase Al−Cu. Cette phase n'est plus cohérente avec la matrice et sa taille est plus importante, de l'ordre de quelques microns.

La composition chimique a été évaluée en effectuant sur un échantillon une centaine de pointés aléatoires avec une microsonde puis en réalisant un traitement statistique des résultats obtenus. La surface de cet échantillon a été polie à l'aide de papiers abrasifs de grains de plus en plus fins, jusqu'à l'obtention finale d'un aspect miroir à l'aide de deux draps de granulométrie 3 μm et 1 μm. La composition de notre alliage est présentée en pourcentage massique dans le tableau 1.1 où figure également une composition de référence issue de l'AMS 4295B [(b)].

(a). Des précipitations sont dites cohérentes avec la matrice lorsqu'il existe des plans cristallograpiques communs entre ces deux entités

(b). Aerospace Material Specification 6.3Cu−0.3Mn−0.06Ti−0.10V−0.18Zr (2219, T351, T37, T81, T851, T87) Rev.Feb 2006

		Si	Fe	Cu	Mn	Mg	V	Zn	Zr	Ti	Al
AMS 4295B	max	0,20	0,30	6,8	0,40	0,02	0,10	0,10	0,15	0,25	le reste
	min	–	–	5,8	0,20	–	–	0,02	0,05	0,10	
Echantillon		0,04	0,05	6,1	0,26	0,02	0,12	0,06	0,16	0,03	le reste

TABLE 1.1 – Composition chimique en pourcentage massique de l'alliage 2219 T87

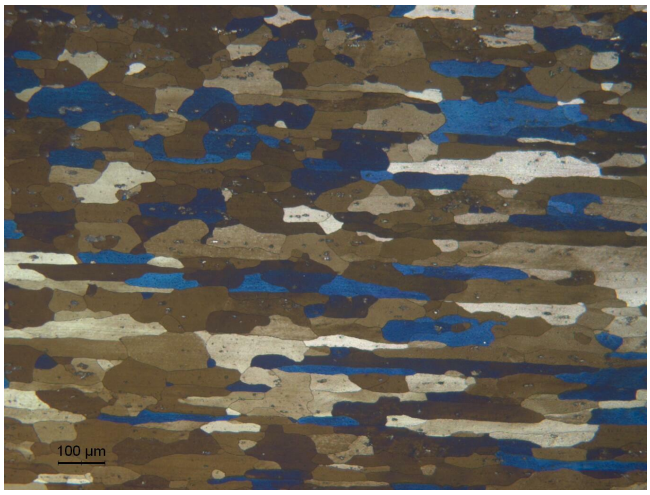
Le faible pourcentage en Silicium et en Fer de notre alliage permet en théorie d'améliorer la ténacité. Le Zirconium et le Vanadium sont en excès par rapport aux valeurs spécifiées tandis que le pourcentage en Titane est particulièrement faible. Ces trois éléments jouent un rôle identique dans les alliage de la série 2000, ils permettent d'affiner la taille de grain. Par conséquent les excés des uns sont a priori censés compenser la rareté des autres. Le pourcentage de Magnésium correspond à la valeur maximale spécifiée par AMS 4295B. L'ajout de cet élément dans d'autres alliages de la famille 2000 permet d'augmenter la sensibilité au revenu en favorisant la précipitation des phases durcissantes.

Afin de révéler la microstructure de notre alliage nous avons réalisé deux types d'attaques chimiques sur des échantillons polis miroir à 1μm. La première attaque utilisée est celle de BARKER qui permet selon la norme ASTM E407 [c] de révéler les grains par observation en lumière polarisée à l'aide d'un microscope optique. Elle est constituée d'une solution d'acide fluoborique (HBF_4) dans laquelle l'échantillon est plongé et soumis à une différence de potentiel de 30 V pendant environ deux minutes. La seconde est l'attaque de Keller, recommandée par la norme ASTM E407 pour visualiser les phases intermétalliques Al_2Cu. Elle est composée d'un mélange d'acides fluorhydrique, chlorhydrique et nitrique fortement dilués dans de l'eau. L'échantillon est immergé dans cette solution pendant une durée variant de 10 à 60 secondes avant d'être rinçé, séché puis observé au microscope optique. La caractérisation des grains est complétée par une analyse par EBSD (Electron BackScatter Diffraction) à partir d'un microscope électronique à balayage (MEB) basé sur le principe des interactions entre le faisceau d'électrons émis et la matière de l'échantillon. L'utilisation de la diffraction d'électrons rétrodiffusés permet de mesurer l'orientation cristallographique d'un matériau polycristallin. Ainsi les grains apparaissent d'une certaine couleur suivant leur orientation cristalline il est alors possible d'évaleur leur forme et leur taille.

Les figures 1.1a et 1.2 permettent d'observer les grains respectivement suite à une attaque de Barker et une analyse EBSD. La forme des grains est semblable à une galette ou un haricot qui serait fortement applati dans la direction S. En effet la taille des grains varie de 200 à 400 μm selon le sens L et de 100 à 200 μm selon le sens T tandis que la dimension des grains suivant S est de 20 à 50 μm. L'allongement prépondérant des grains suivant L et leur faible taille suivant le sens S sont dus à l'opération de laminage. Nous retrouvons ces caractéristiques dimensionnelles des grains dans l'étude effectuée par [Arora et al., 2010] dans le cadre d'un programme spatial indien. Par contre l'alliage étudié dans [Srivatsan et al., 2008] présente des grains de taille plus faible avec un allongement moins prononcé dans le sens de laminage. Ceci peut s'expliquer d'une part par le fait que cet alliage est dans l'état T62 par conséquent il n'a pas subi l'opération de laminage entre la trempe et le revenu ce qui peut expliquer un impact moins important sur la forme des grains. D'autre part la composition chimique de cet alliage révèle un fort pourcentage de Chrome alors que notre alliage en est exempt, or l'ajout de cet élément dans les alliages de la série 2000 permet de contrôler la croissance des grains.

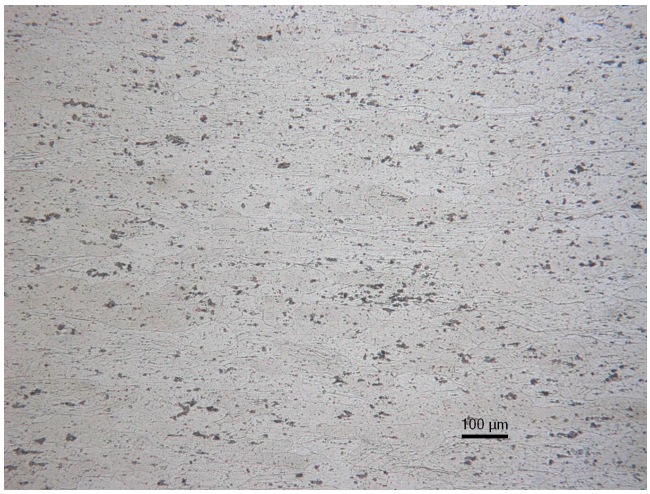
Les figures 1.1b à 1.1d présentent des vues de la microstructure de notre alliage suite à une attaque de Keller. Nous pouvons constater la présence de nombreux précipités intermétalliques qui se répartissent selon leur taille en deux populations. En effet la figure 1.3 montre un zoom sur ces phases intermétalliques, réalisé avec un microscope optique à partir d'un échantillon ayant subi une attaque de Keller. Ainsi il apparaît que les plus petits précipités sont inférieurs au micron tandis que les plus

(c). American Standart Test Method for Standart Practice for Microetching Metals and Alloys

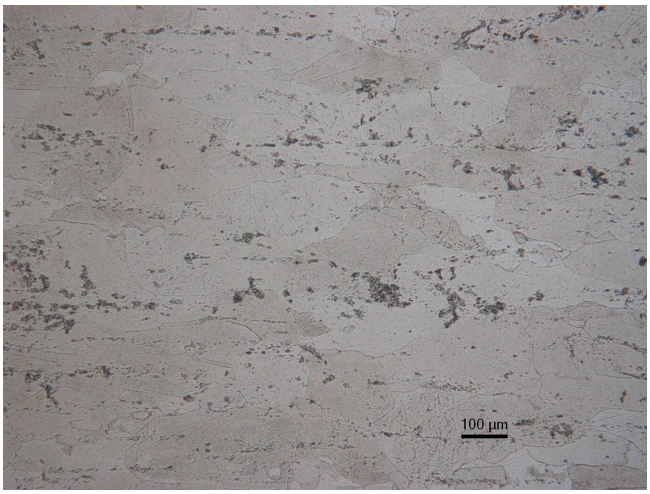


(a) Attaque Barker plan (L,S)

(b) Attaque Keller plan (L,S)

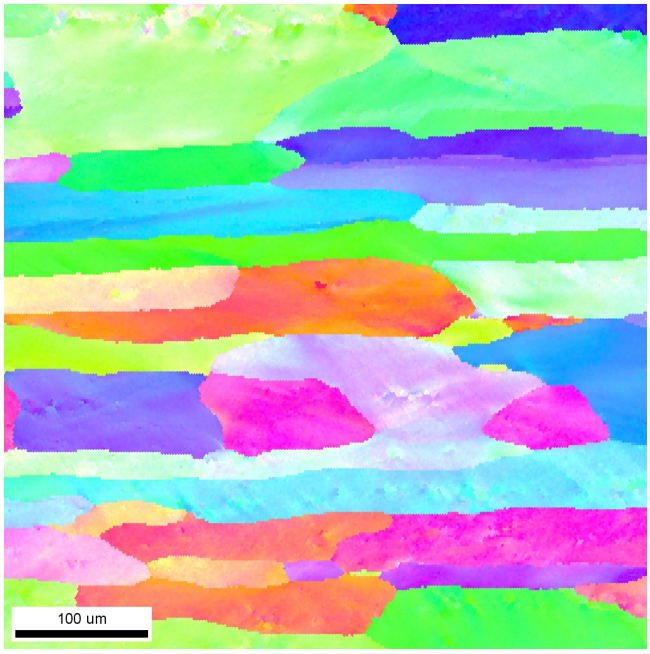


(c) Attaque Keller plan (T,S)

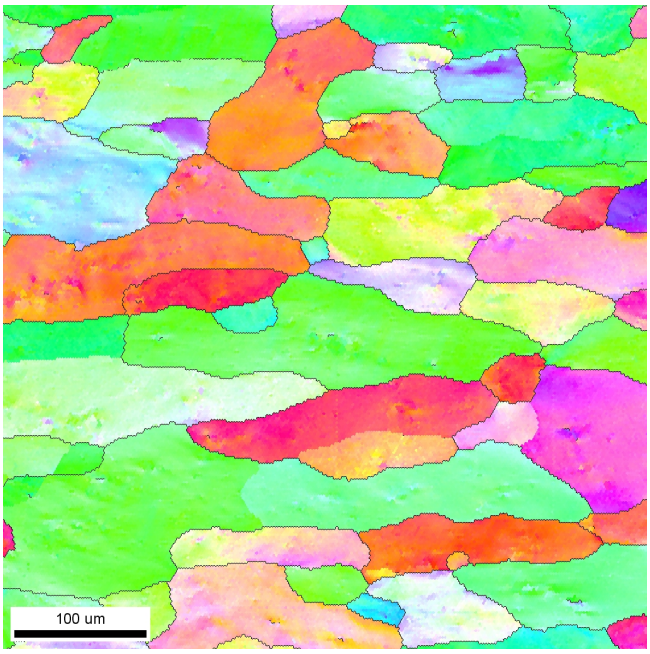


(d) Attaque Keller plan (L,T)

FIGURE 1.1 – Microstructure de l'alliage 2219 T87 révélée par attaques chimiques

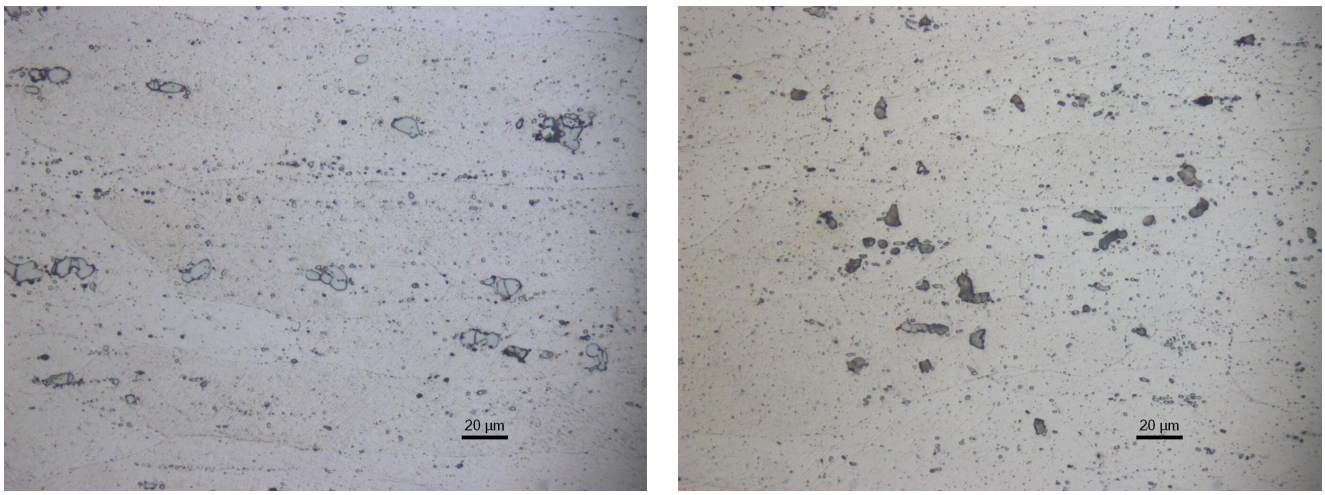


(a) plan (L,S)



(b) plan (T,S)

FIGURE 1.2 – Représentation des grains de l'alliage 2219 T87 par analyse EBSD



(a) plan (L,S) (b) plan (T,S)

FIGURE 1.3 – Agrandissement des deux populations de précipités intermétalliques

gros sont de quelques microns. Afin de compléter la caractérisation de ces composés intermétalliques en terme de taille et de répartition un échantillon de 1 mm × 1 mm × 10 mm a été analysé par tomographie. Ainsi la figure 1.4 permet de voir la distribution dans l'espace des plus gros précipités intermétalliques. Nous pouvons alors constater que ces précipités forment des plans régulièrement espacés et perpendiculaires à la direction S. Notons que si ces plans peuvent se distinguer si nettement sur la figure 1.4 c'est parce que la distance qui existe entre les précipités intermétalliques selon le sens S est significativement supérieure à celle qui existe entre ces précipités dans les directions L et T. De plus dans chaque plan perpendiculaire à S les précipités intermétalliques sont alignées suivant la direction L consécutivement à l'opération de laminage. La répartition de ces mêmes précipités suivant le sens T ne semble suivre aucun motif préçis, elle paraît aléatoire. Il est également important de souligner que la distance entre les précipités intermétalliques est plus faible suivant le sens L que selon la direction T. Ce caractère est renforcé par l'alignement des précipités selon le sens de laminage L.

Nous allons maintenant essayer de déterminer la nature des deux populations de phases intermétalliques. Nous avons réalisé une série de pointés avec une microsonde sur une cinquantaine de gros précipités intermétalliques, la composition moyenne obtenue en pourcentage massique est de 52 % et de 48 % respectivement pour les éléments Cu et Al. Ce résultat montre que les précipités intermétalliques de taille importante sont des composés Al_2Cu. En effet, en tenant compte des masses atomiques, la composition théorique en pourcentage massique de la phase Al_2Cu est de 54 % de Cuivre et de 46 % d'Aluminium. Par contre l'utilisation de la microsonde n'a pas permis de déterminer la nature des petites phases intermétalliques. Les indications fournies montrent que ces petits précipités contiennent du cuivre et de l'aluminium associé à un autre élément dont la nature n'a pas pu être clairement identifiée. Nous avons donc compulsé la littérature afin d'avoir une idée plus précise de la nature de ces petits composés intermétalliques. Ainsi selon [Srivatsan et al., 2008] les petits précipités intermetallique sont identifiés à Al_7Cr et Al_3Zr. Nous pouvons écarter Al_7Cr compte tenu de l'absence de Chrome dans notre alliage. Quant à la formation de Al_3Zr elle n'est pas cohérente avec les données de la microsonde, car ce composé intermétallique ne contient pas l'élément Cuivre. Dans l'alliage étudié par [Talamantes-Silva et al., 2008] les différentes petits précipités intermétalliques sont Al_7CuFe et Al_2Mn_3Cu. Le composé Al_7CuFe s'observe selon [Mondolfo, 1976] lorsque le taux de Fer est très supérieur à celui du Silicium. Or dans notre alliage le Silicium et le fer sont dans des proportions voisines comme le montre le tableau 1.1. Par contre le pourcentage de manganèse est voisin entre l'alliage de [Talamantes-Silva et al., 2008] (0,24 %) et le notre (0,26 %), il se pourrait donc bien que la nature de nos petits précipités soit Al_2Mn_3Cu.

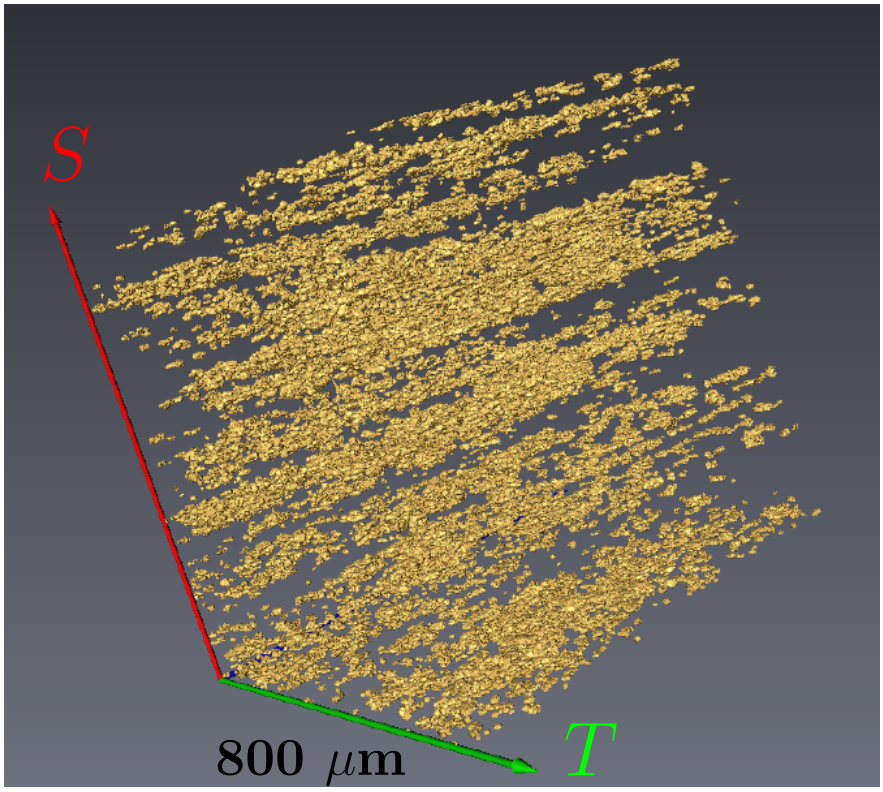


FIGURE 1.4 – Distribution spatiale des plus gros précipités intermétalliques obtenue par tomographie

La présentation de l'alliage 2219 T87 va se clore par la mesure du taux de précipités intermétalliques Al_2Cu et de la porosité initiale à partir des données issues de la tomographie. Ces mesures ont été réalisées à l'aide d'un programme développé sous MATLAB, interne au Centre des Matériaux, permettant d'analyser des images en noir et blanc. Sur ces images les porosités sont de couleur noire tandis que la matrice et les précipités intermétalliques apparaissent avec des nuances de gris distinctes. Il est alors possible d'effectuer un seuillage des nuances de gris afin de sélectionner uniquement les phases Al_2Cu ou les porosités. Puis le programme mentionné précédemment permet de calculer le taux volumique des précipités Al_2Cu et des porosités dont les valeurs sont respectivement de 0,0163 soit 1,63 % et de 3.10^{-4} soit 3.10^{-2} %. Il est également possible, toujours avec ce programme, de calculer la taille moyenne des phases intermétalliques Al_2Cu dans une direction donnée. Ainsi les dimensions moyennes de ces phases Al_2Cu obtenues suivant les sens L, T et S sont respectivement de 18,6 μm, 17,6 μm et 10,7 μm. Remarquons que les valeurs selon L et T sont très proches, alors que nous pouvions nous attendre à une valeur plus importante suivant L compte tenu de l'opération de laminage. Ceci signifie que les précipités intermétalliques Al_2Cu sont bien moins déformables que la matrice d'aluminium.

Nous pouvons constater que le taux de précipités Al_2Cu est très élevé. Il est nécessaire de préciser que ces précipités ne sont pas produits par la transformation totale de la phase θ'' en θ' puis en θ au cours d'un surevenu. En fait l'existence de ces précipités est liée au fait que le pourcentage de cuivre de notre alliage est plus élevé que la solubilité maximale de celui-ci dans l'aluminium (5,7 % à 548° C). Par conséquent d'après le diagramme de phase Al−Cu il y aura production d'un composé de deux phases : une matrice d'aluminium (phase α) contenant le composé intermétallique Al_2Cu. Ainsi dans notre alliage cette phase θ coexiste avec les phases θ'' et θ' dont l'observation n'a pas été réalisée, comme dans [Arora et al., 2010] par exemple, car elle nécessite l'utilisation d'un Microscope Electronique à Transmission (MET) et n'est pas indispensable dans le cadre de notre étude. Il serait toutefois possible de diminuer le nombre des précipités intermétalliques Al_2Cu selon [Gupta et al., 2005] et [Gupta et al., 2006] qui proposent d'effectuer le traitement de mise en solution en deux paliers. Ces

derniers correspondent à un maintient pendant des durées différentes respectivement à une température de 485° C et une température de 505° C. Il s'ensuit une meilleur répartition du cuivre dans la matrice d'aluminium dont la conséquence serait un taux plus faible de phases Al_2Cu.

1.3 ANALYSE DES EPROUVETTES NON FISSUREES

1.3.1 Essais sur éprouvettes lisses

1.3.1.1 Eprouvettes D_{10}

La géométrie des éprouvettes D_{10} est donnée par la figure 1.5, elle est conforme aux exigences de ASTM E8 [(d)]. Le but des essais sur ces éprouvettes est de vérifier l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement mécanique du matériau. Les résultats de ces essais vont permettre de savoir si il est nécessaire de modéliser ou non l'écrouissage cinématique. Trois éprouvettes ont été usinées pour chaque sens de prélèvement correspondant à 0°, 45° et 90° par rapport à la direction de laminage L.

Les trois éprouvettes usinées suivant un même sens sont alors soumises à un essai de traction à température ambiante, effectué avec des vitesses de déformations différentes, égales respectivement à 10^{-2} s^{-1} ; 10^{-3} s^{-1} et 10^{-4} s^{-1}. Les données enregistrées sont l'effort F appliqué ainsi que la déformations longitudinale $\Delta l/l_0$ obtenue à l'aide d'un extensomètre. Les dimensions des éprouvettes mesurées avant essai pour chaque spécimen permettent de calculer la section initiale S_0 et la contrainte F/S_0 appliquée à l'éprouvette.

La figure 1.6 présente les courbes contrainte−déformation, des éprouvettes prélevées à 0° et 90° du sens de laminage, obtenues pour les trois vitesses de déformation évoquées précédemment. Les symboles de forme carrée présents sur cette figure correspondent à la contrainte maximale obtenue lors des différents essais. Ces résultats ne sont pas fournis pour les éprouvettes usinées à 45° du sens L car ils sont identiques à ceux des éprouvettes prélevées à 0° et 90°. Il apparaît que la vitesse de déformation est sans influence sur le comportement mécanique de l'alliage d'aluminium 2219 T87. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de tenir compte d'une composante viscoplastique dans la modélisation de l'écrouissage.

1.3.1.2 Eprouvettes TR_{12}

La géométrie des éprouvettes TR_{12} est fournie par la figure 1.7, elle est conforme aux exigences de ASTM E8. Ces éprouvettes ont été prélevées tous les 15° par rapport au sens de laminage L. Pour les angles de prélèvement compris entre 15° et 75°, nous avons utilisé trois éprouvettes usinées au milieu de l'épaisseur de la tôle. Par contre pour les sens L et T, nous avons prélevé six éprouvettes par sens, réparties de la manière suivante : deux au milieu de la tôle (repère b) et les quatres autres affleurant à la surface (repères a et c).

Chaque éprouvette est soumise à un essai de traction simple à la température ambiante avec une vitesse de chargement de 1 mm par minute suivant les recommandations de ASTM E8. Les données enregistrées sont l'effort F appliqué ainsi que les déformations longitudinales $\Delta l/l_0$ et transverses $\Delta t/t_0$ mesurées avec deux extensomètres positionnés selon la figure 1.8. Les dimensions des éprouvettes mesurées avant essai pour chaque spécimen permettent de calculer la section initiale S_0 et la contrainte F/S_0 appliquée à l'éprouvette.

La figure 1.10 présente les courbes contrainte−déformation obtenues pour les éprouvettes prélevées selon L et T. L'essai sur l'éprouvette n° 2c usinée suivant le sens de laminage n'est pas valide compte tenu d'un problème de saturation de l'extensomètre longitudinal. La déformation figurant sur ces courbes n'est pas celle issue de la mesure de l'extensomètre. En effet cette dernière ne permet pas une détermination correcte de la déformation $\Delta l/l_0$ à rupture ou ductilité, car la zone de rupture n'est

(d). American Standart Test Method for Tension Testing of Metallic Materials

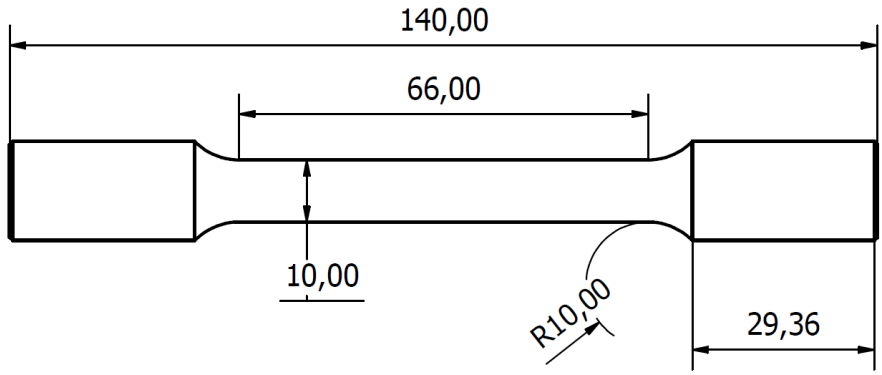
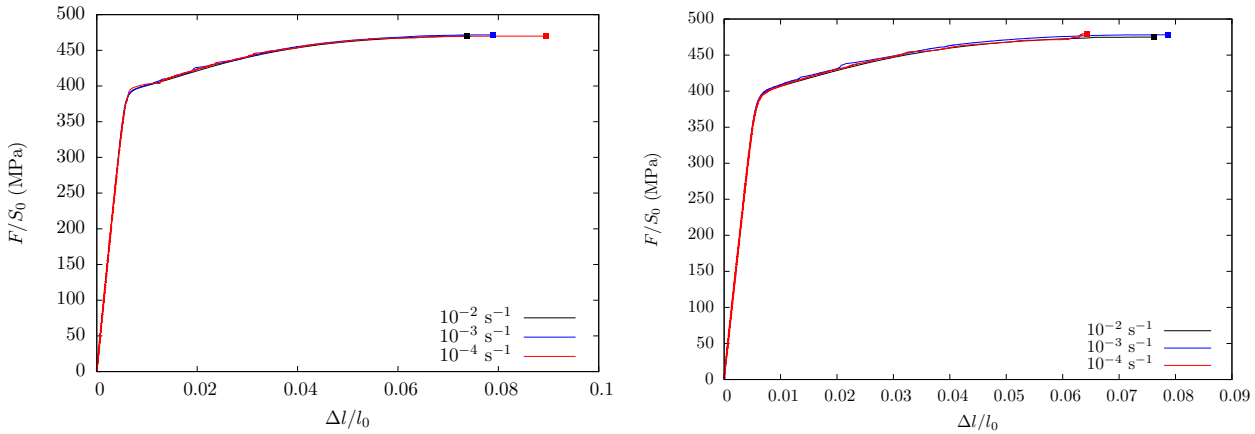


FIGURE 1.5 – Plan de définition des éprouvettes D_{10}



(a) angle de 0° (b) angle de 90°

FIGURE 1.6 – Courbes contrainte−déformation pour les éprouvettes D_{10} prélevées selon L et T

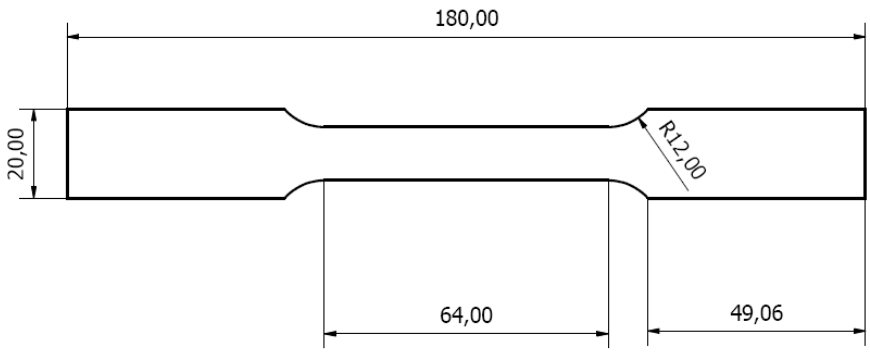


FIGURE 1.7 – Plan de définition des éprouvettes TR_{12}

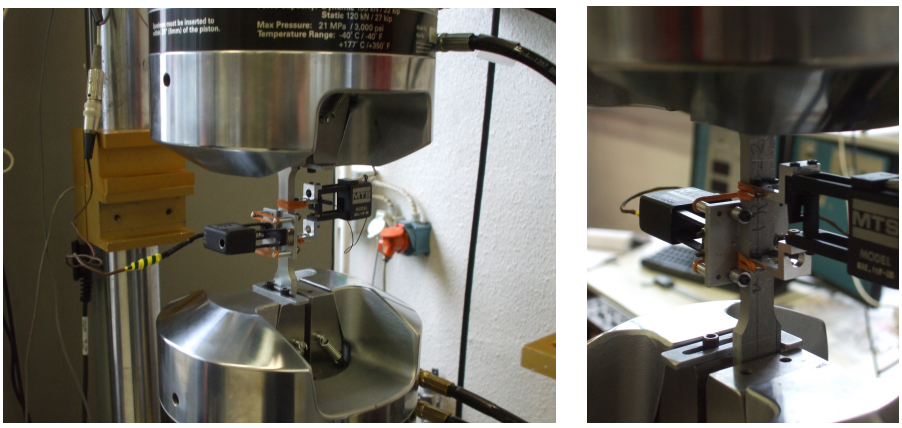


FIGURE 1.8 – Mesure des déformations longitudinale et transverse des éprouvettes TR_{12}

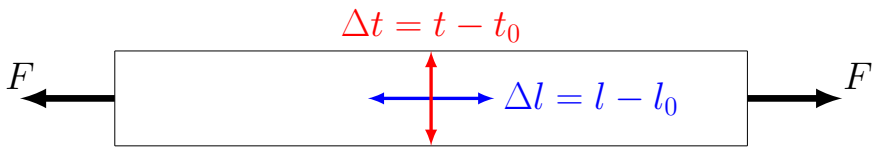


FIGURE 1.9 – Définition des déformations utilisées pour calculer L_k

pas toujours localisée entre les couteaux de l'extensomètre. Nous avons donc utilisé le déplacement de la traverse pour recalculer la déformation de l'éprouvette. Une première étape consiste à obtenir la raideur de la machine qui permettra ensuite de déterminer la partie plastique du déplacement de la traverse. Or celle-ci ne peut être due qu'à la plastification de l'éprouvette, et en supposant qu'elle soit homogène sur toute la longueur utile (64 mm), il devient possible d'évaluer la déformation plastique de l'éprouvette. Enfin en combinant cette dernière à la déformation élastique nous obtenons la défomation totale de l'éprouvette utilisée comme abscisse des courbes de la figure 1.10.

Les contraintes à limite élastique $R_{p0,2}$ et à rupture R_m sont résumées dans le tableau 1.2 pour les éprouvettes usinées selon L et T. Le tableau 1.3 présente ces mêmes résultats pour les éprouvettes prélevées à 15°, 30°, 45°, 60° et 75° du sens de laminage. Nous avons également fait figurer dans ces tableaux la déformation $\Delta l/l_0$ à rupture, ou ductilité, et le coefficient de Lankford L_k dont nous rappelons ci-dessous la formulation à partir des déformations principales ε_1 et ε_2 définies par la figure 1.9. Il permet d'évaluer l'anisotropie du matériau et possède une valeur égale à 1 dans le cas d'un matériau isotrope.

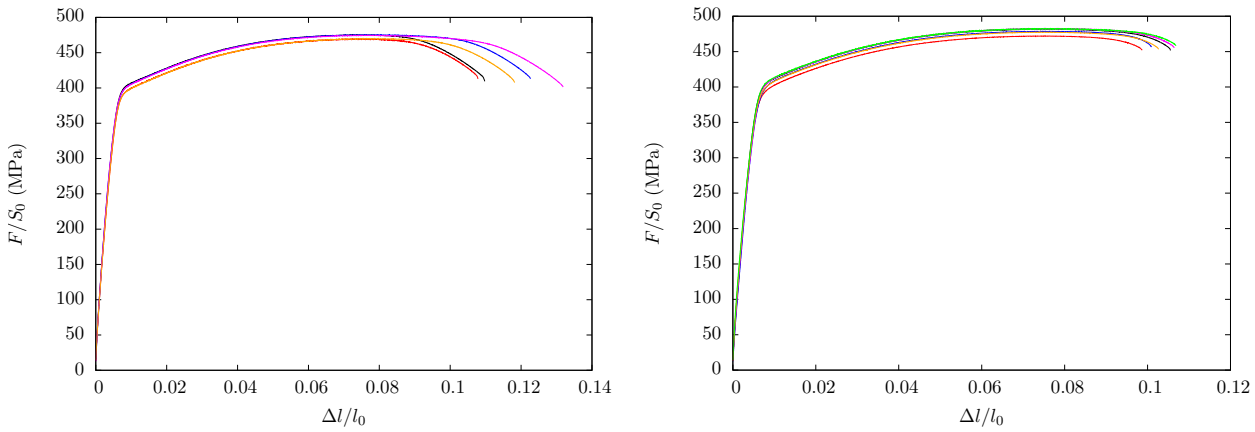
$$L_k = \frac{d\varepsilon_2^{pl}}{d\varepsilon_3^{pl}} = -\frac{d\varepsilon_2^{pl}}{d\varepsilon_1^{pl} + d\varepsilon_2^{pl}} \quad \text{car le tenseur des déformations plastiques est un déviateur}$$

$$\text{Avec} \quad \varepsilon_1^{pl} = \log\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) - \frac{F}{E\ S_0} \times \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2^{pl} = \log\left(1 + \frac{\Delta t}{t_0}\right) + \frac{\nu\ F}{E\ S_0} \times \frac{\Delta l}{l_0}$$

A partir des tableaux 1.2 et 1.3 nous avons tracé l'évolution de $R_{p0,2}$, R_m, L_k et de la ductilité en fonction de l'angle de prélèvement (voir figure 1.11). Il existe peu de variation de $R_{p0,2}$ et R_m en fonction du sens de prélèvement, on pourrait donc en conclure que le matériau est isotrope. Mais la valeur de L_k bien que quasiment constante, n'est pas égale à 1 mais plutôt à 0,4, ainsi le matériau est isotrope transverse. Cette anisotropie s'explique par le procédé de laminage des tôles. Le fait que L_k soit inférieur à 1 montre que le matériau se déforme plus dans l'épaisseur que dans le plan (L,T). Nous voyons ici l'importance du coefficient de Lankford pour juger de l'anisotropie d'un matériau. Notons également pour conclure sur ces essais que la ductilité varie peu en fonction de l'angle de prélèvement à condition de rester dans le plan (L,T). Ainsi la distribution des précipités intermétalliques ne semble pas avoir

Eprouvettes TR_{12} prélevée à	E en MPa	$R_{p0,2}$ en MPa	R_m en MPa	ductilité en %	L_k
0° – n° 1a	67628	402,4	475,1	10,97	0,420
0° – n° 1b	66034	395,0	469,2	10,78	0,363
0° – n° 1c	70190	402,0	475,3	12,27	0,368
0° – n° 2a	69494	400,1	474,5	13,19	0,336
0° – n° 2b	66582	394,0	469,8	11,82	0,349
moyenne	67986	398,7	472,8	11,81	0,367
90° – n° 1a	71624	405,3	481,6	10,55	0,391
90° – n° 1b	70219	395,1	472,0	9,87	0,408
90° – n° 1c	69122	401,8	478,6	10,09	0,368
90° – n° 2a	68477	406,9	482,5	10,64	0,400
90° – n° 2b	69865	401,0	477,4	10,27	0,461
90° – n° 2c	70235	407,1	482,4	10,68	0,415
moyenne	69924	402,9	479,1	10,35	0,407

TABLE 1.2 – Synthèse des résultats pour les éprouvettes TR_{12} prélevées selon L et T



(a) angle de 0° (b) angle de 90°

FIGURE 1.10 – Courbes contrainte−déformation pour les éprouvettes TR_{12} prélevées selon L et T

d'impact sur l'allongement à rupture des éprouvettes TR_{12}. Les résultats des essais sur éprouvettes TR_{12} serviront essentiellement à calibrer les paramètres d'anisotropie du critère de plasticité.

1.3.2 Essais sur éprouvettes entaillées

1.3.2.1 Eprouvettes EU_4 et EU_2

La géométrie des éprouvettes EU_4 et EU_2 est donnée par la figure 1.12. La largeur de ces éprouvettes est de 18 mm tandis que l'épaisseur est de 6 mm pour une section minimale de 10 mm de large. Les éprouvettes ont été prélevées à 0°, 90° et 45° du sens L. Pour plus de facilité ce dernier sens sera également désigné par la lettre D. Pour chaque angle de prélèvement nous avons utilisé deux éprouvettes usinées au cœur de la tôle.

Chaque éprouvette a été soumise à un essai de traction simple à la température ambiante avec une vitesse de chargement de 1 mm par minute. Les données enregistrées sont l'effort F appliqué et les déplacements d'ouverture des entailles (notés V), mesurés avec deux extensomètres positionnés selon la figure 1.13. Les mesures de l'épaisseur et de largeur de la section minimale des éprouvettes permettent

Eprouvettes TR_{12} prélevée à	E en MPa	$R_{p0,2}$ en MPa	R_m en MPa	ductilité en %	L_k
15° – n° 1	65192	387,0	463,6	11,26	0,366
15° – n° 2	67074	389,5	469,2	11,18	0,364
15° – n° 3	66303	388,7	467,9	11,76	0,395
moyenne	66190	388,4	466,9	11,40	0,375
30° – n° 1	68320	388,7	466,0	13,65	0,412
30° – n° 2	66223	391,0	472,6	11,53	0,424
30° – n° 3	65628	387,5	467,7	11,75	0,445
moyenne	66724	389,1	468,8	12,31	0,427
45° – n° 1	65876	395,7	474,7	11,66	0,463
45° – n° 2	66706	393,9	473,1	11,15	0,464
45° – n° 3	63870	390,2	469,1	11,27	0,457
moyenne	65484	393,3	472,3	11,36	0,461
60° – n° 1	65816	389,3	467,5	10,13	0,410
60° – n° 2	65661	395,3	471,2	11,02	0,484
60° – n° 3	66513	394,0	472,3	10,23	0,451
moyenne	65997	392,9	470.3	10,46	0,448
75° – n° 1	67099	394,5	471,9	10,71	0,439
75° – n° 2	67924	396,3	472,0	10,53	0,443
75° – n° 3	70229	396,7	473,6	10,47	0,461
moyenne	68417	395,8	472,5	10,57	0,448

TABLE 1.3 – Synthèse des résultats pour les éprouvettes TR_{12} prélevées à 15°, 30°, 45°, 60° et 75°

de calculer la section initiale S_0 et la contrainte F/S_0 appliquée à l'éprouvette.

Les figures 1.14 à 1.15 présentent les courbes contrainte−déplacement obtenues pour les éprouvettes EU_4 et EU_2. Nous constatons que la réponse des deux extensomètres n'est pas identique pour un essai sur une même éprouvette. Par contre en considérant la moyenne du déplacement fourni par les deux extensomètres, nous obtenons une courbe effort-déplacement qui varie peu pour des éprouvettes prélevées selon le même sens, validant ainsi le caractère reproductible des essais.

Nous allons nous intéresser maintenant au déplacement d'ouverture de l'entaille à l'instant de la rupture et lorsque l'effort est maximum. Les valeurs de ce déplacement pour ces instants sont résumées dans les tableaux 1.4 et 1.5. Pour les éprouvettes EU_4 la valeur du déplacement V pour F_{max} est inférieure à celle correspondant à la rupture. Par contre pour les éprouvettes EU_2 les déplacements V à rupture et à F_{max} ont des valeurs proches. Les éprouvettes EU_4 sont donc plus ductiles que les éprouvettes EU_2. Cependant dans les deux cas la rupture à lieu au voisinage de la striction, un peu avant pour les éprouvettes EU_2 et un peu après pour les éprouvettes EU_4.

Les éprouvettes prélevées suivant le sens T présentent une ductilité plus faible que celles usinées selon L. Ceci s'explique par la distribution des précipités intermétalliques Al_2Cu observée dans la première partie de ce chapitre, elle se caractérise par un alignement selon L avec une distance entre précipités plus faible selon L que T. Par conséquent une sollicitation suivant T entraîne une rupture prématurée, car la coalescence des cavités dans la direction L est favorisée par l'alignement et le faible espacement. Ce phénomène est amplifié pour les éprouvettes EU_4 car l'écart entre les valeurs de V à rupture pour les sens T et L est plus important que pour les éprouvettes EU_2. Lorsque le rayon de l'entaille des éprouvettes EU diminue, nous constatons que les valeurs de V se rapprochent, et l'écart

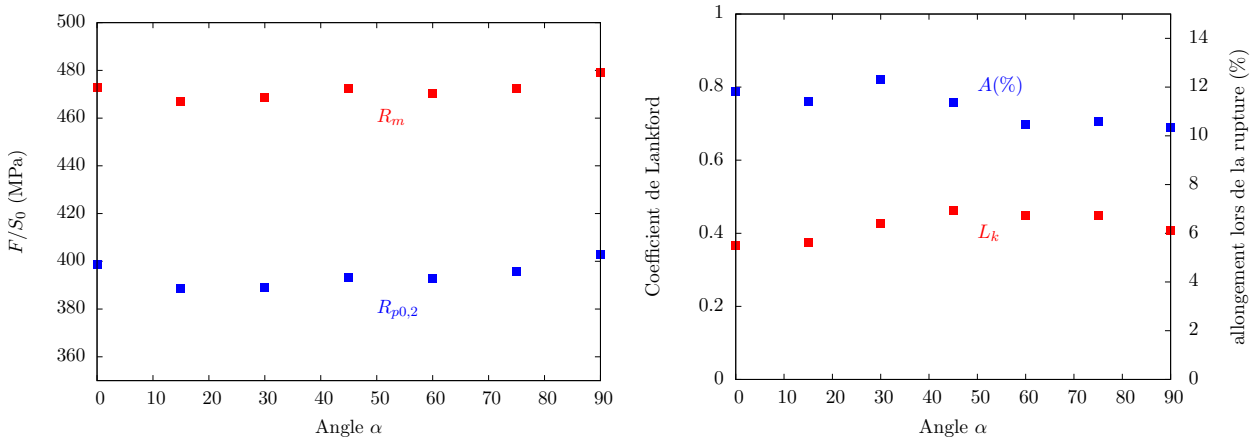
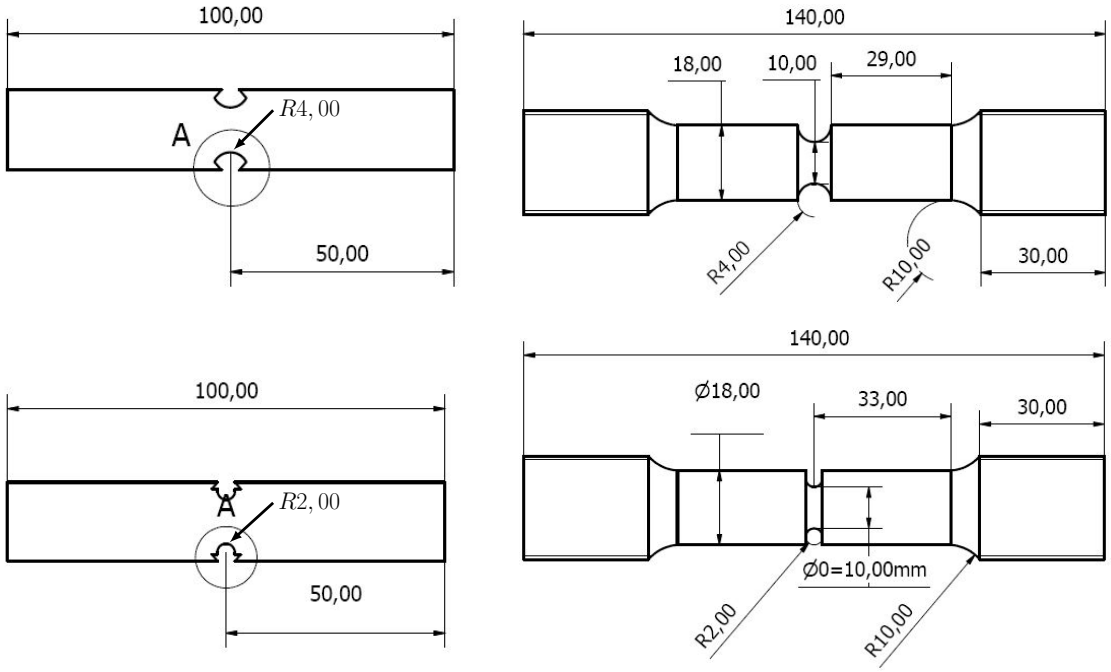


FIGURE 1.11 – Evolution de $R_{p0,2}$;R_m et L_k en fonction de l'angle de prélèvement des éprouvettes dans le plan (L,T)



(a) Eprouvettes *EU* (b) Eprouvettes *AE*

FIGURE 1.12 – Plan de définition des éprouvettes *EU* et *AE*

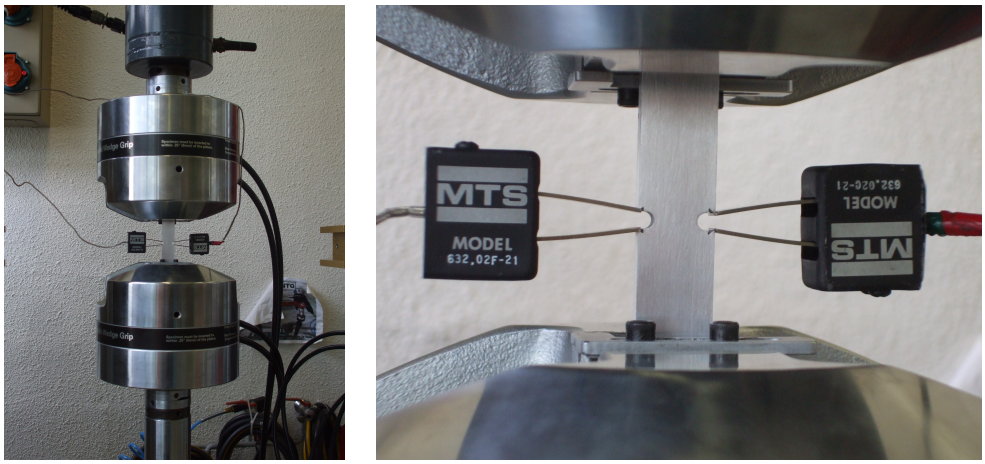
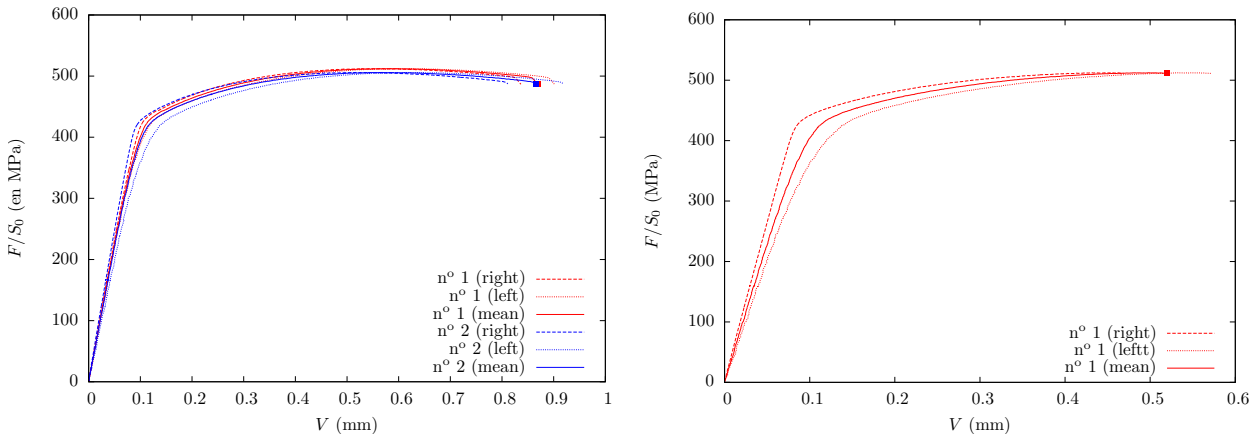


FIGURE 1.13 – Mesure des déplacements d'ouverture des entailles pour les éprouvettes EU_4 et EU_2



(a) EU_4 angle de 0° (b) EU_4 angle de 90°

FIGURE 1.14 – Courbes contrainte−déplacement pour les éprouvettes EU_4 prélevées selon L et T

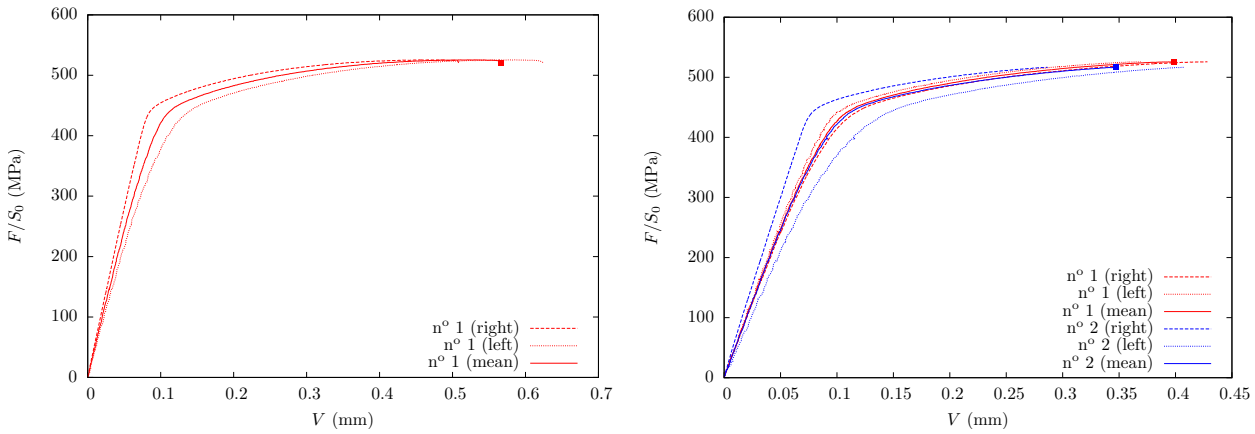
entre l'effort à rupture et F_{max} se réduit. Il semblerait que dans ce cas, la rupture se produise en fond d'entaille où la déformation plastique est maximale, plutôt qu'au centre de l'éprouvette où le taux de triaxialité est le plus important. Ce point devra être vérifié par une observation des faciès de rupture et par un calcul par Eléments Finis (EF). Nous pouvons observer qu'il existe une faible dispersion des valeurs à rupture de V enregistrées pour une même géométrie d'éprouvette, prélevée dans une direction donnée. Les essais sur éprouvettes EU_2 et EU_4 serviront à ajuster les paramètres du modèle de comportement plastique, utilisé pour les simulations numériques. Ils seront également utiles pour calibrer les coefficients du modèle d'endommagement permettant de simuler la rupture.

Eprouvettes EU_4 prélevée à	$(F/S_0)_{max}$ en MPa	F/S_0 à rupture en MPa	$(V_{OD})_{mean}$ à F_{max} en mm	$(V_{OD})_{mean}$ à rupture en mm
0° − n° 1	512	487	0,58	0,87
0° − n° 2	506	487	0,57	0,87
45° − n° 1	516	506	0,56	0,70
45° − n° 2	507	504	0,55	0,61
90° − n° 1	529	527	0,52	0,55
90° − n° 2	512	511	0,50	0,52

TABLE 1.4 – Synthèse des résultats pour les éprouvettes EU_4

Eprouvettes EU_2 prélevée à	$(F/S_0)_{max}$ en MPa	F/S_0 à rupture en MPa	V_{mean} à F_{max} en mm	V_{mean} à rupture en mm
0° − n° 2	526	520	0,51	0,57
45° − n° 1	527	524	0,43	0,45
45° − n° 2	524	522	0,39	0,40
90° − n° 1	526	526	0,40	0,40
90° − n° 2	517	517	0,34	0,35

TABLE 1.5 – Synthèse des résultats pour les éprouvettes EU_2



(a) EU_2 angle de 0°

(b) EU_2 angle de 90°

FIGURE 1.15 – Courbes contrainte−déplacement pour les éprouvettes EU_2 prélevées selon L et T

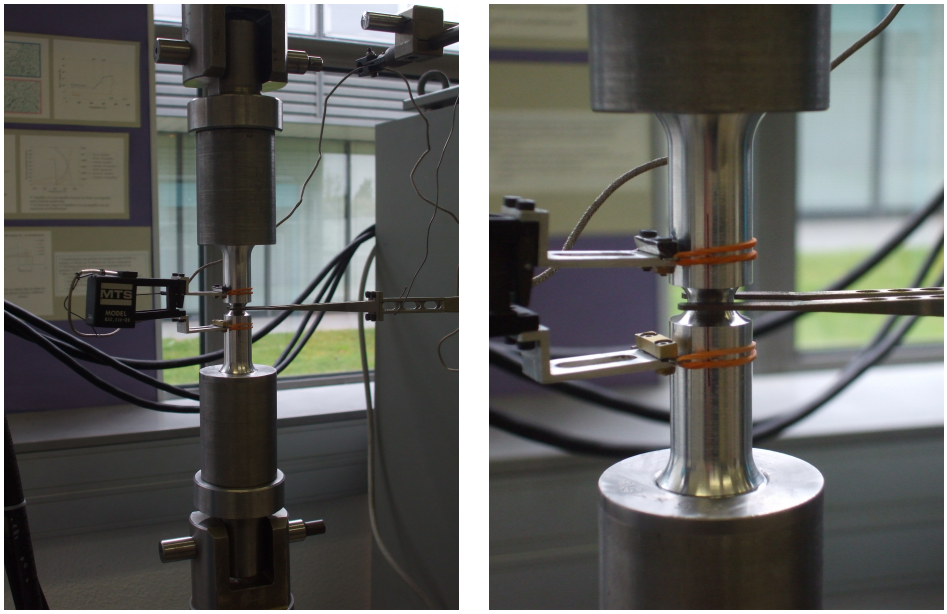


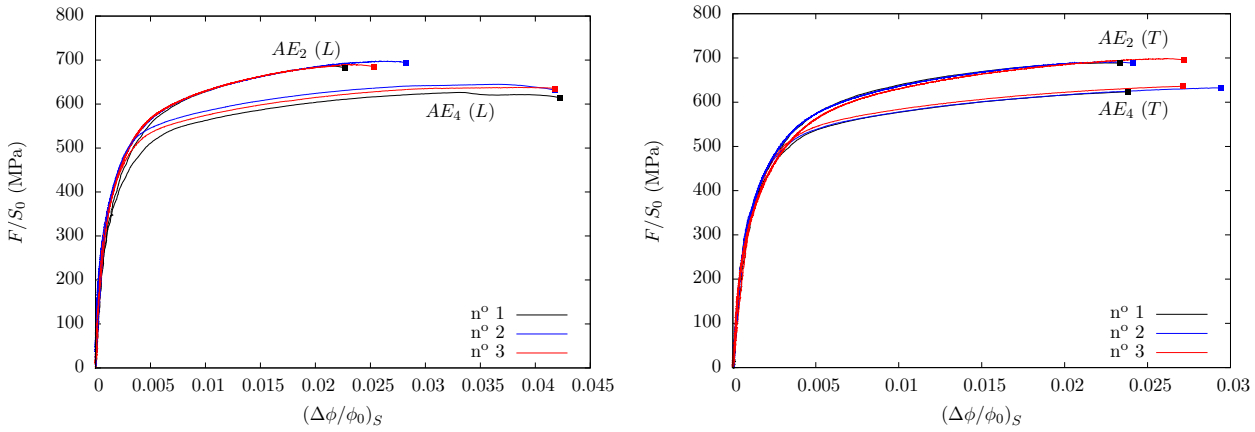
FIGURE 1.16 – Mesure de la déformation diamétrale pour les éprouvettes AE_4 et AE_2

1.3.2.2 Essais sur éprouvettes AE_4 et AE_2

La géométrie des éprouvettes AE_4 et AE_2 est donnée par la figure 1.12. Les éprouvettes ont été prélevées à 0°, 90° et 45° du sens L. Pour plus de facilité ce dernier sens sera également désigné par la lettre D. Pour chaque sens de prélèvement nous avons utilisé trois éprouvettes usinées au cœur de la tôle.

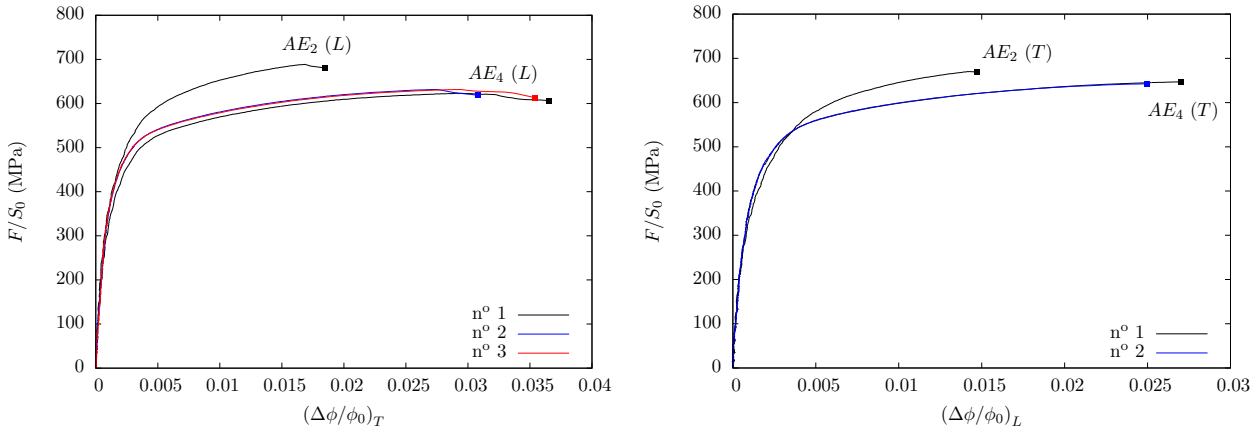
Chaque éprouvette est soumise à un essai de traction à la température ambiante avec une vitesse de chargement de 1 mm par minute. Les données enregistrées sont l'effort F appliqué ainsi que les déformations longitudinale et diamétrale (notée $\Delta\phi/\phi_0$), mesurées avec deux extensomètres positionnés selon la figure 1.16. Pour toutes les éprouvettes prélevées suivant le sens D la déformation diamétrale $\Delta\phi/\phi_0$ sera mesurée suivant le diamètre correspondant au sens S qui a été repéré lors de l'usinage. Pour les éprouvettes prélevées suivant les sens L et T cette mesure a été effectuée suivant le sens S et le sens perpendiculaire à ce dernier. L'aire de la section minimale de chaque éprouvette, notée S_0, a été mesurée puis introduite au niveau du programme de la machine de traction, afin d'obtenir directement la contrainte F/S_0.

Les figures 1.17 et 1.18 présente les courbes contrainte−déformation diamétrale obtenues pour les éprouvettes AE_4 et AE_2. La rupture des éprouvettes AE_2 se produit bien avant la striction pour une



(a) Eprouvettes AE_4 (b) Eprouvettes AE_2

FIGURE 1.17 – Courbes contrainte−déformation diamétrale selon le sens S pour AE_4 et AE_2



(a) Eprouvettes AE_4 (b) Eprouvettes AE_2

FIGURE 1.18 – Courbes contrainte−déformation diamétrale selon les sens L et T pour AE_4 et AE_2

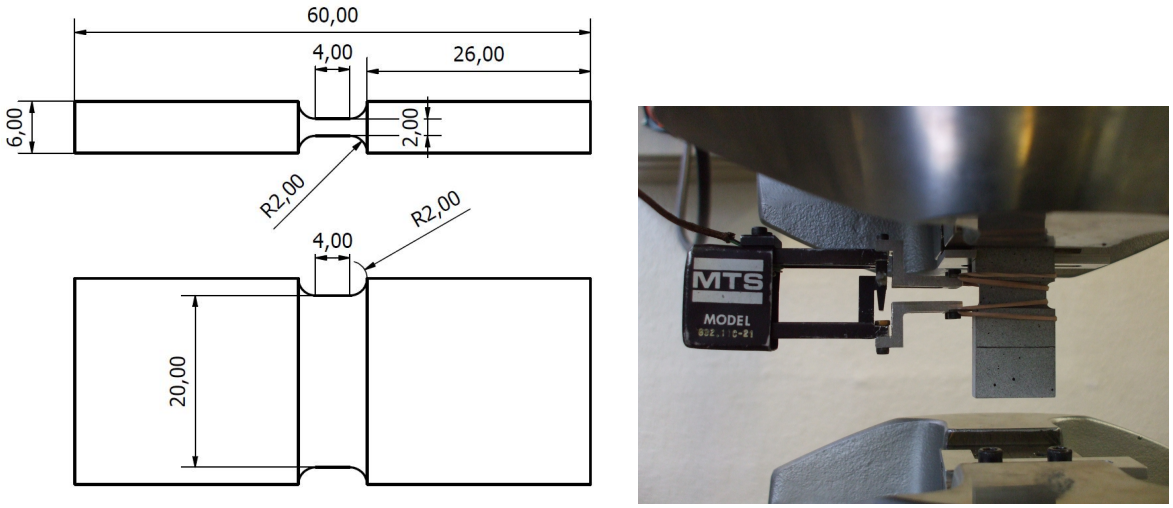
valeur moyenne de $\Delta\phi/\phi_0$ selon S de 2,5 %. Cette déformation diamétrale à rupture est quasiment identique quel que soit le sens de prélèvement. De plus ces éprouvettes présentent un caractère très instable, avec une rupture immédiate qui fait sursauter l'opérateur malgré le fait qu'il s'y attende. La rupture des éprouvettes AE_4 prélevées suivant L a lieu un peu avant la striction pour des valeurs moyennes de $\Delta\phi/\phi_0$ selon S de 4,2 %. Par contre les éprouvettes AE_4 usinées selon T possèdent une valeur moyenne de la déformation à rupture selon S de 2,8 %. Compte tenu du coefficient de Lankford égal à 0,4 nous pourrions nous attendre à obtenir une section à rupture de forme elliptique pour les éprouvettes AE_2 et AE_4. Mais nous observons une section qui reste circulaire car les déformations avant rupture de ces éprouvettes restent faibles.

Les éprouvettes AE_4 sont plus ductile que les éprouvettes AE_2 pour un sens de prélèvement suivant L par contre ces deux types d'éprouvettes présentent un niveau de déformation à rupture identique lorsqu'elles sont usinées selon T. Les éprouvettes AE_4 prélevées suivant le sens T présente une ductilité plus faible que celles usinées selon L. Ceci s'explique par la distribution des précipités intermétalliques Al_2Cu observée dans la première partie de ce chapitre, elle se caractérise par un alignement selon L avec une distance entre précipités plus faible selon L que T. Par conséquent une sollicitation suivant T entraîne une rupture prématurée, car la coalescence des cavités dans la direction L est favorisée par l'alignement et le faible espacement. Par contre il est étonnant de ne pas constater cette anisotropie de rupture pour les éprouvettes AE_2, cette abscence pourrait s'expliquer par le faible taux de déformation. La figure 1.18 montre, pour les éprouvettes AE_2 et AE_4, que les déformations à rupture mesurées suivant L et T sont plus faibles que celles obtenues suivant le sens S. Ceci s'explique par la valeur inférieure à 1 du coefficient de Lankford, mesuré sur les éprouvettes TR_{12}, qui montre que le matériau se déforme plus dans le sens S que suivant L et T. Comme pour les éprouvettes EU les essais sur éprouvettes AE serviront à ajuster les paramètres du modèle de comportement plastique, utilisé pour les simulations numériques. Ils seront également utiles pour calibrer les coefficients du modèle d'endommagement permettant de simuler la rupture.

1.3.2.3 Essais sur éprouvettes DP

La géométrie des éprouvettes DP est donnée par la figure 1.19. Deux éprouvettes ont été usinées suivant chaque sens de prélèvement c'est-à-dire à 0° et 90° du sens L. La conception de ces éprouvettes impose que la section minimale soit sollicitée en déformation plane. En effet le déplacement suivant le sens de la largeur est bloqué donc la déformation associée est nulle. Les données enregistrées sont l'effort F appliqué à l'éprouvette ainsi que le déplacement V mesuré avec un extensomètre de base V_0 conformément à la figure 1.19. Les dimensions des éprouvettes relevées pour chaque spécimen permettent de calculer la section initiale S_0 et la contrainte F/S_0 appliquée à l'éprouvette.

La figure 1.20 présente les courbes contrainte−déformation ($\Delta V/V_0$) obtenues pour les éprouvettes DP. Il existe une bonne reproductibilité de l'essai pour chaque éprouvette prélevée suivant le même sens. L'anisotropie de comportement plastique est peu marquée entre les sens L et T. Par contre du point de vue de la rupture il existe une réelle différence entre ces deux directions. En effet la rupture se produit pour une déformation de 5 % pour l'éprouvette prélevée suivant le sens L et de 3,3 % pour celle usinée suivant T. Ceci s'explique par la distribution des précipités intermétalliques, observée dans la première partie de ce chapitre, comme nous l'avons déjà expliqué pour les éprouvettes EU et AE. Le but de ces essais sera de valider le choix d'un critère de plasticité quadratique ou non quadratique. De plus ils permettent de solliciter le matériau en déformation plane, ceci est particulièrement intéressant du point de vue de la modélisation de la rupture notamment pour la phase de calibrage des paramètres du modèle d'endommagement.



(a) Eprouvette DP (b) Mesure du déplacement Δ

FIGURE 1.19 – Plan de définition des éprouvettes DP et mesure du déplacement

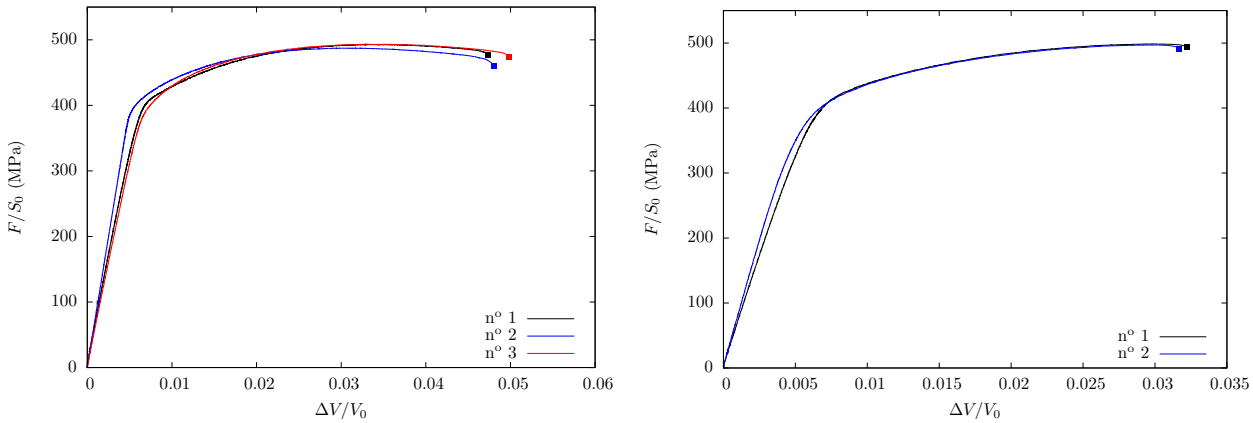


FIGURE 1.20 – Synthèse des résultats pour les éprouvettes DP prélevées selon L et T

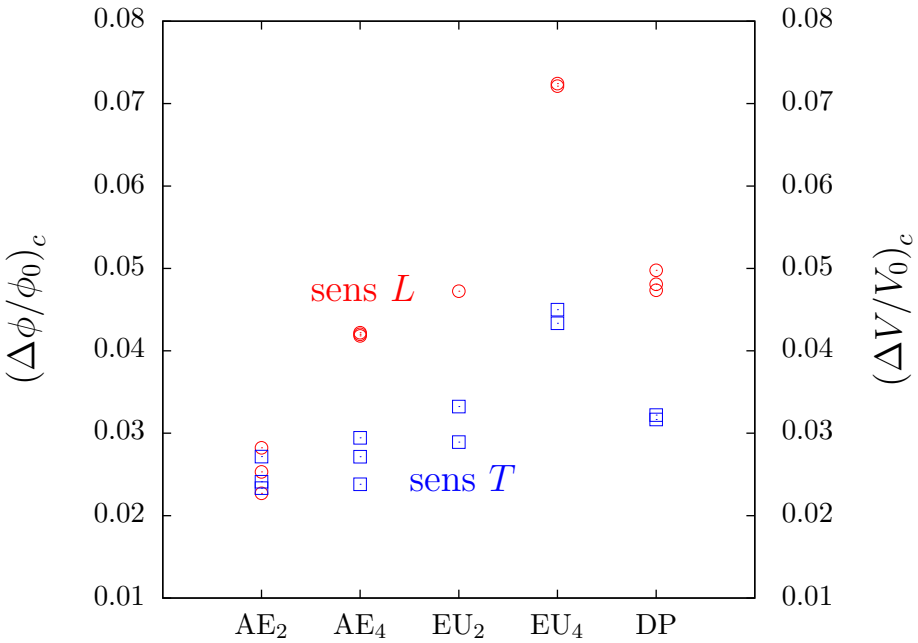


FIGURE 1.21 – Ductilité à rupture des éprouvettes EU, AE et DP

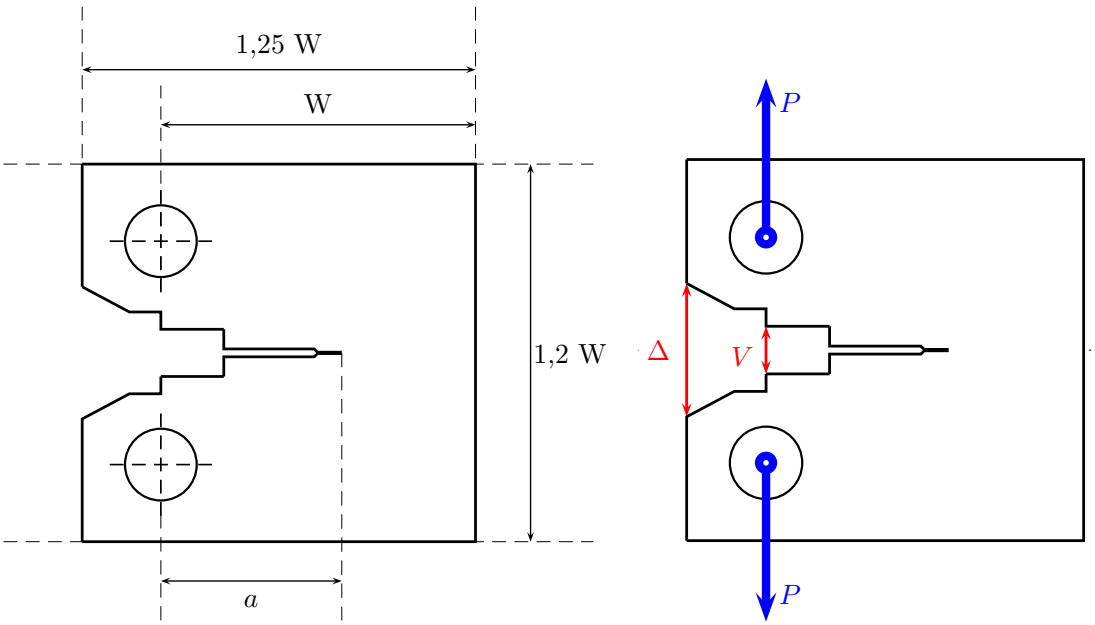


FIGURE 1.22 – Géométrie d'une éprouvette CT – Mesures de l'ouverture de la fissure

1.3.3 Synthèse des essais sur éprouvettes non fissurées

La figure 1.21 présente une synthèse des ductilités à rupture obtenues pour les éprouvettes AE, EU et DP usinées selon les sens L et T. La notation $(\Delta\phi/\phi_0)_c$ désigne la ductilité à rupture des éprouvettes AE_2 et AE_4 tandis que $(\Delta V/V)_c$ possède la même signification pour les éprouvettes EU et DP. La définition de ces ductilités varie selon le type d'éprouvette, par conséquent il n'est pas possible de comparer les ductilités à rupture pour des éprouvettes de géométrie différente. Les résultats de la figure 1.21 permettent seulement, pour un même type d'éprouvette, d'évaluer le caractère othotrope de la rupture ainsi que la dispersion des résultats expérimentaux.

Nous pouvons constater qu'il existe une rupture anisotrope, selon le sens de sollicitation L ou T, pour toutes les géométries d'éprouvette, excepté pour les éprouvettes AE_2. De plus, cette anisotropie est plus importante pour les éprouvettes EU et DP alors qu'elle est moins marquée pour les éprouvettes AE_4. Il apparait également que les éprouvettes prélevées selon le sens T présentent des valeurs de ductilité à rupture plus dispersées que pour un prélèvement selon L.

Les essais sur éprouvettes TR_{12} montrent que l'alliage 2219 T87 est isotrope transverse, il sera donc nécessaire d'utiliser un critère de plasticité orthotrope, afin de modéliser le comportement élasto-plastique de cet alliage. D'autre part, pour les éprouvettes AE_4, EU et DP la simulation de la rupture devra permettre de rendre compte de son caractère orthotrope selon que le matériau est sollicité suivant L ou T.

1.4 ANALYSE DES EPROUVETTES FISSUREES

1.4.1 Essais sur éprouvettes CT

1.4.1.1 Géométrie des éprouvettes CT

La géométrie d'une éprouvette CT est donnée par la figure 1.22a. Le choix de l'épaisseur B de l'éprouvette permet de déterminer toutes les autres dimensions puisque W vaut le double de B. La valeur de l'épaisseur est utilisée dans la nomenclature de l'éprouvette. Ainsi à titre d'exemple une éprouvette CT10 désigne une éprouvette CT d'épaisseur 10 mm. La longueur de la fissure est notée a

et celle du ligament b, obtenue à partir de la formule $b = W - a$. La norme ASTM E1820 [e] spécifie un ratio a/W compris entre 0,45 et 0,7 pour la détermination d'une courbe R et entre 0,45 et 0,55 pour celle de la ténacité. Le ratio retenu pour la présente étude est de 0,5.

Dans la pratique, la longueur de la fissure est en grande partie usinée sous forme d'une entaille qui doit néanmoins se terminer par une fissure obtenue par un cyclage en fatigue. La largeur de l'entaille est de 0,3 mm environ, la pointe de fissure est donc un demi cercle de rayon 0,15 mm. Cette valeur respecte les exigences de la norme ASTM E1820. En effet le rayon de l'entaille doit être suffisamment petit afin de pouvoir amorcer une fissure en pointe d'entaille par un chargement en fatigue à faible intensité de contrainte. La longueur initiale de la fissure avant l'essai, souvent notée a_0, est égale à la somme d'une longueur d'entaille usinée, a_{notch}, et d'une longueur de fissure, a_{crack}. La norme spécifie que a_{crack} doit être supérieure à $0,05 \times B$ ou 1,3 mm.

Le cyclage en fatigue s'effectue entre une valeur minimale, P_{min}, de l'effort et une valeur maximale, P_{max}, à une certaine fréquence, égale à 40 Hz dans cette étude. Selon la norme ASTM E1820 le rapport P_{min} sur P_{max} est égal à 0,1. Un facteur d'intensité K_{min} est associé à P_{min} et de même K_{max} correspond à P_{max}. La relation (1.1) fournit l'expression du facteur d'intensité de contrainte K en fonction de l'effort P. Le cyclage en effort s'effectue pour P_{min} et P_{max} fixés, mais il faut garder à l'esprit que K_{max} augmente lorsque la fissure se propage. Par conséquent il faut veiller à obtenir une valeur K_{max} en fin de propagation inférieure à $0,6 \times K_{IC}$. Cette exigence de la norme ASTM E1820 permet d'éviter de plastifier une zone trop importante autour de la pointe de fissure, et donc de rester dans le domaine linéaire de la mécanique de la rupture.

Le chargement est effectué par un déplacement imposé au niveau de la traverse de la machine de traction sous la forme d'une vitesse de 0,5 mm/min. Lors de l'essai la cellule de force de la machine permet d'enregistrer l'effort P (cf figure 1.22b) correspondant au déplacement imposé en fonction de l'ouverture de la fissure, obtenue à l'aide d'un extensomètre. Celle-ci peut être mesurée à différents endroits, en pratique elle s'effectue soit au bord libre de l'éprouvette et correspond au CMOD [f] (lettre Δ de la figure 1.22b) soit au niveau de la ligne de chargement pour le CLLOD [g] (lettre V de la figure 1.22b). Il est important de noter que la mesure du CMOD ou du CLLOD nécessite pour le post-traitement de l'essai l'utilisation respective des normes ASTM E399 [h] ou ASTM E1820. Par conséquent pour obtenir une courbe R il est impératif de mesurer le CLLOD.

1.4.1.2 Méthode de calcul de la ténacité

Lors d'un essai sur une éprouvette CT la force appliquée, P, est enregistrée en fonction du déplacement d'ouverture de la fissure Δ. La méthode de détermination de la ténacité, K_{IC}, est spécifiée par la norme ASTM E399. Elle consiste à définir un effort P_Q à partir de la courbe P-Δ issue de l'essai, puis à calculer le facteur d'intensité K_Q correspondant. Sous certaines conditions, précisées ci-dessous, la ténacité est égale à la valeur de K_Q. Le début de la courbe P-Δ est une droite dont le coefficient directeur est désigné par $(P/\Delta)_0$. L'effort P_5 correspond à l'intersection entre la courbe P-Δ et la droite passant par l'origine dont le coefficient directeur $(P/\Delta)_5$ est égal à $0,95 \times (P/\Delta)_0$. Si entre le début de l'essai et l'effort P_5 il existe un effort supérieur à P_5 alors celui-ci est par définition P_Q sinon P_5 est égal à P_Q. Pour une éprouvette CT d'épaisseur B le facteur d'intensité de contrainte K_Q correspondant à l'effort P_Q est défini par l'expression ci-dessous issue de ASTM E399 :

(e). American Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness
(f). Crack Mouth Opening Displacement
(g). Crack Load Line Opening Displacement
(h). American Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness K_{IC} of Metallic Materials

$$K_Q = \frac{P_Q}{B\sqrt{W}}\ f(a/W) \tag{1.1}$$

$$\text{Avec}\quad f(a/W) = \frac{2+\dfrac{a}{W}}{\left(1-\dfrac{a}{W}\right)^{3/2}}\left(0,886+0,64\frac{a}{W}-13,32\left(\frac{a}{W}\right)^2+14,72\left(\frac{a}{W}\right)^3-5,6\left(\frac{a}{W}\right)^4\right)$$

Enfin pour pouvoir transformer K_Q en K_{IC} il est nécessaire que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

❶ $2,5 \times (K_Q/\sigma_{0,2})^2 < W - a = b$

❷ $P_{max} < 1,1\ P_Q$

P_{max} désigne la valeur maximale de l'effort enregistré au cours de l'essai et $\sigma_{0,2}$ est la contrainte limite d'élasticité pour un allongement conventionel de 0,2 %.

La norme ASTM E1820 spécifie la même procédure que la norme ASTM E399 pour déterminer la ténacité K_{IC} mais utilise la courbe P-V au lieu de la courbe P-Δ. La tangente à l'origine de la courbe P-V a pour coefficient directeur $(P/V)_0$. L'effort P_5 est défini comme l'intersection entre la courbe P-V et la droite passant par l'origine dont le coefficient directeur $(P/V)_5$ est égal à $0,95 \times (P/V)_0$. Ensuite la détermination de P_Q puis de K_Q, et finalement de K_{IC}, se fait conformément à la méthodologie exposée précédemment.

1.4.1.3 Méthode de détermination de la courbe R

Supposons que lors d'un essai sur éprouvette CT la fissure ne se propage pas, c'est-à-dire que a reste constant, alors la courbe P-V ressemblera au tracé rouge de la figure 1.23. En notant A l'aire sous cette courbe, nous avons la relation suivante :

$$A = \int_0^V P\ dV \tag{1.2}$$

Le déplacement V peut être décomposé en une partie élastique, V_{el}, et une partie plastique, V_{pl}, comme illustré par la figure 1.23. La relation (1.2) peut alors s'écrire :

$$A = \int_0^V P\ dV_{el} + \int_0^V P\ dV_{pl} = A_{el} + A_{pl}$$

L'aire A se décompose en une aire élastique, A_{el}, et une aire plastique, A_{pl}, (cf figure 1.23). La norme ASTM E1820 permet de calculer l'intégrale J à partir de la courbe $P - V$ en utilisant les formules suivantes :

$$J = J_{el} + J_{pl} \quad \text{avec} \quad J_{el} = \frac{K^2(1-\nu^2)}{E} \quad \text{et} \quad J_{pl} = \frac{\eta_{pl}A_{pl}}{Bb} \quad \text{où} \quad \eta_{pl} = 2 + 0,522\frac{b}{W} \tag{1.3}$$

K désigne le facteur d'intensité de contrainte dont l'expression est donnée par la relation (1.1). La partie élastique du déplacement notée V_{el} se calcul avec l'expression : $V_{el} = PC_{LL}$. Où C_{LL} représente la complaisance, c'est-à-dire l'inverse de la raideur, d'une éprouvette CT. Elle se déduit des paramètres géométriques de l'éprouvette et des caractéristiques mécaniques du matériau par l'expression :

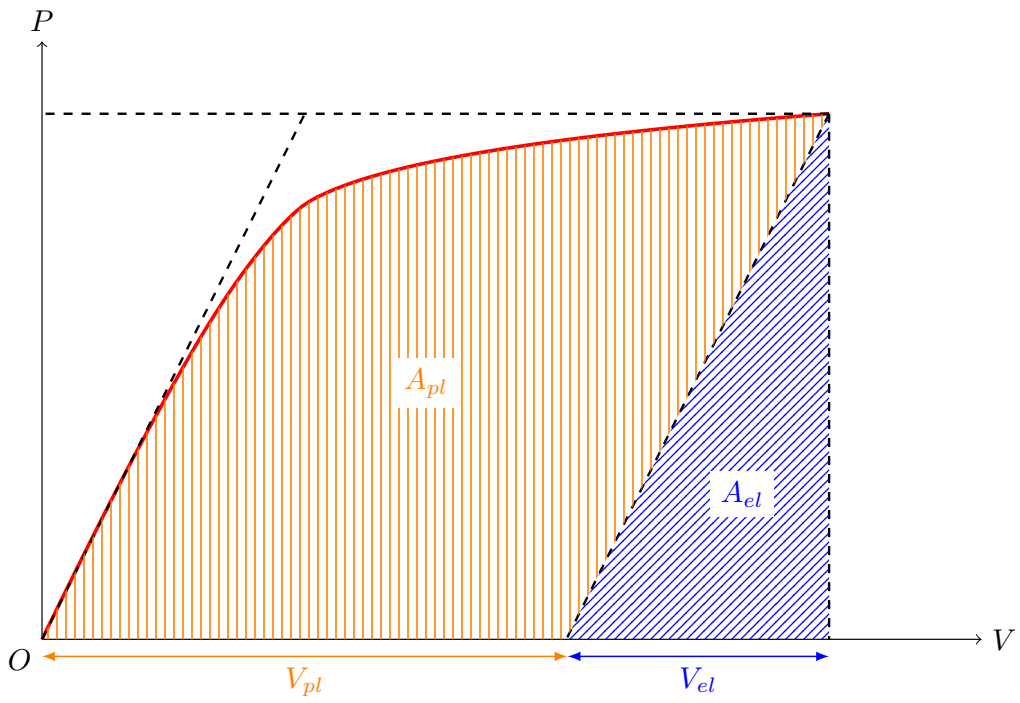


FIGURE 1.23 – Courbe P-V pour un essai sur éprouvette CT

$$C_{LL} = \frac{1-\nu^2}{EB}\left(\frac{W+a}{W-a}\right)^2 g(a/W) \tag{1.4}$$

$$g(a/W) = \left(2,1630 + 12,219\frac{a}{W} - 20,065\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 0,9925\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 20,609\left(\frac{a}{W}\right)^4 - \left(\frac{a}{W}\right)^5\right)$$

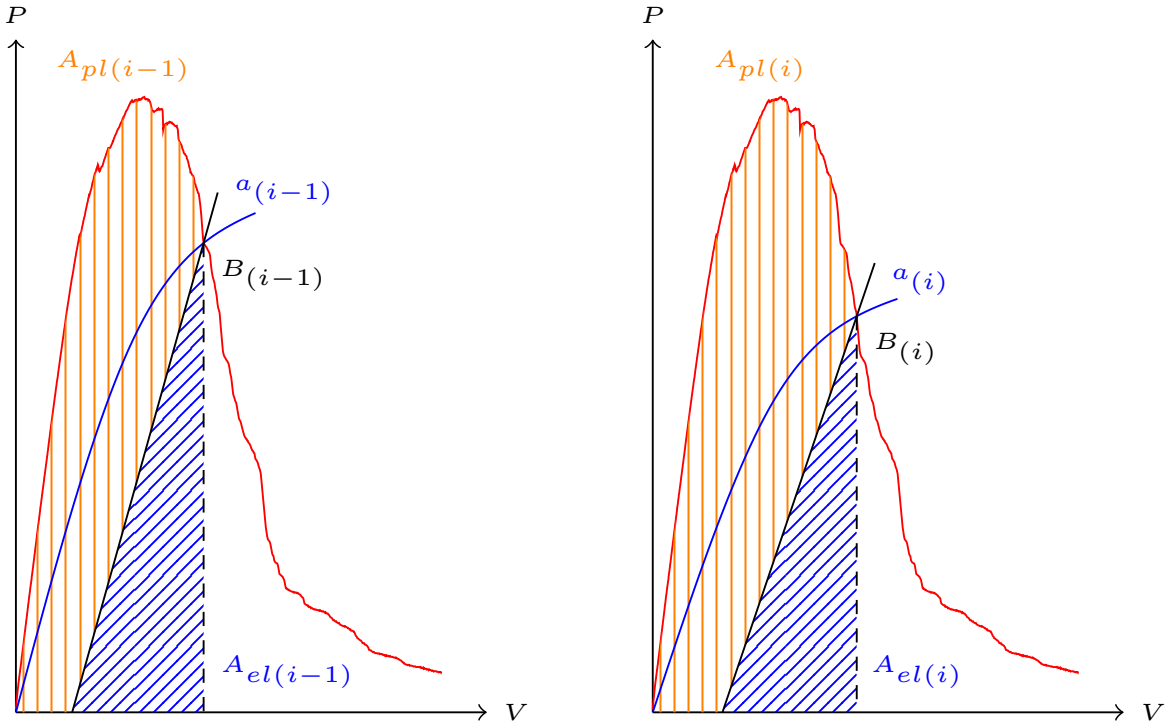
Lors d'un essai sur éprouvette CT la fissure se propage. La norme ASTM E1820 donne dans ce cas une formule itérative, dont l'expression est rappelée ci-dessous, afin de calculer J_{pl} puis J en fonction de l'accroissement de la longueur de fissure, noté Δa. Nous obtenons ainsi de proche en proche la courbe R qui représente par définition l'évolution de J en fonction de Δa.

$$J_{pl(i)} = \left(J_{pl(i-1)} + \left(\frac{\eta_{pl(i-1)}}{b_{(i-1)}}\right)\frac{A_{pl(i)} - A_{pl(i-1)}}{B}\right)\left(1 - \gamma_{(i-1)}\frac{a_{(i)} - a_{(i-1)}}{b_{(i-1)}}\right) \tag{1.5}$$

Avec $\gamma_{(i-1)} = 1 + 0,76\frac{b_{(i-1)}}{W}$

La figure 1.24 permet de mieux comprendre la signification des différents termes de la formule itérative donnée par la relation (1.5). La courbe rouge représente l'enregistrement de l'effort P en fonction du déplacement V pour un essai sur éprouvette CT. Les deux courbes bleues de la figure 1.24 représentent la courbe $P - V$ pour des éprouvettes CT respectivement de longueur de fissure $a_{(i-1)}$ et $a_{(i)}$ mais dont la fissure est supposée ne pas se propager. Par hypothèse lors d'un essai, la longueur de fissure de l'éprouvette CT sera, au point d'intersection d'une courbe bleue et de la courbe rouge, égale à celle du tracé bleu modélisant la courbe $P - V$ d'une éprouvette CT sans propagation de la fissure.

Ainsi à un point d'intersection $B_{(k)}$ la longueur de la fissure de l'éprouvette CT réellement testée (courbe rouge) est égale à $a_{(k)}$. Elle est associée à la complaisance $C_{LL(k)}$ par la relation (1.4). A partir de l'enregistrement, lors de l'essai, des valeurs de P et V il est aisé en utilisant la « méthode des trapèzes » de calculer pour différents points de la courbe rouge l'aire $A_{(k)}$. Elle est égale à la somme des aires hachurées en orange et bleu de la figure 1.24. Connaissant $P_{(k)}$ et $C_{LL(k)}$ on en déduit la



longueur de fissure $a_{(i-1)}$ longueur de fissure $a_{(i)}$

FIGURE 1.24 – Illustration de la formule itérative permettant le calcul de J

valeur de $A_{el(k)}$ à l'aide de l'expression suivante :

$$A_{el(k)} = \frac{V_{el(k)} \times P_{(k)}}{2} = \frac{C_{LL(k)} \times \left(P_{(k)}\right)^2}{2}$$

Pour finir l'aire $A_{pl(k)}$ se déduit des aires $A_{(k)}$ et $A_{el(k)}$ et permet donc d'obtenir la courbe R en utilisant la formule (1.5). Nous verrons au paragraphe suivant comment obtenir lors des essais sur éprouvette CT les valeurs de $a_{(k)}$ et $C_{LL(k)}$.

1.4.1.4 Ténacité de l'alliage 2219 T87

Les différentes éprouvettes CT ont été prélevées dans un morceau de tôle laminée en alliage d'aluminium 2219 T87, de dimensions 500 × 500 × 27 mm, issus du même lot matière que celui utilisé pour l'usinage des éprouvettes non fissurées. Le sens de laminage et le sens transverse seront désignés respectivement par les lettres L et T, tandis que le sens de l'épaisseur sera repéré par la lettre S. Les différents sens de prélèvement sont illustrés sur la figure 1.25. Ainsi pour une éprouvette CT de type $L-T$ le chargement s'effectue suivant le sens L et la fissure se propage suivant le sens T.

Des éprouvettes CT20 ont été testées par le fournisseur afin de donner une valeur de la ténacité dans le PV matière associé à la commande des morceaux de tôle laminée. Ces essais utilisent quatre éprouvettes CT20 de rapport a/W égal à 0,5, dont deux sont de type $L-T$ et les deux autres de type $T-L$. La mesure de la ténacité a été complétée par des essais sur éprouvettes CT10 (série a) effectués au Centre des Matériaux.

Nous avons choisi cette géométrie d'éprouvette car elle permet de tester les sens $L-T$ et $T-L$ mais également les orientations $L-S$ et $T-S$. En effet pour ces deux derniers types les dimensions des éprouvettes CT sont limitées par l'épaisseur de 27 mm des tôles laminées autorisant uniquement le prélèvement de CT10. Trois éprouvettes ont été testées jusqu'à rupture pour chacun des quatre types

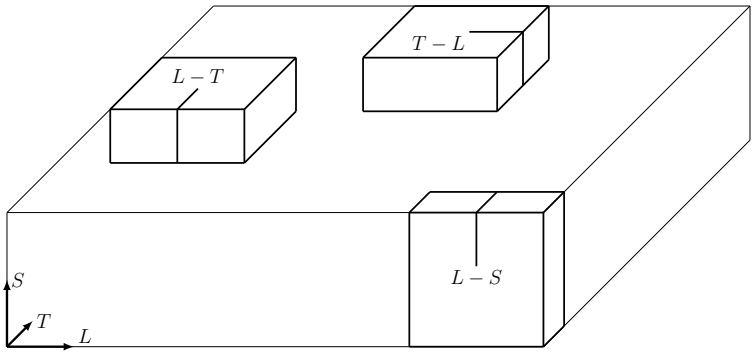


FIGURE 1.25 – Sens de prélèvement des éprouvettes CT

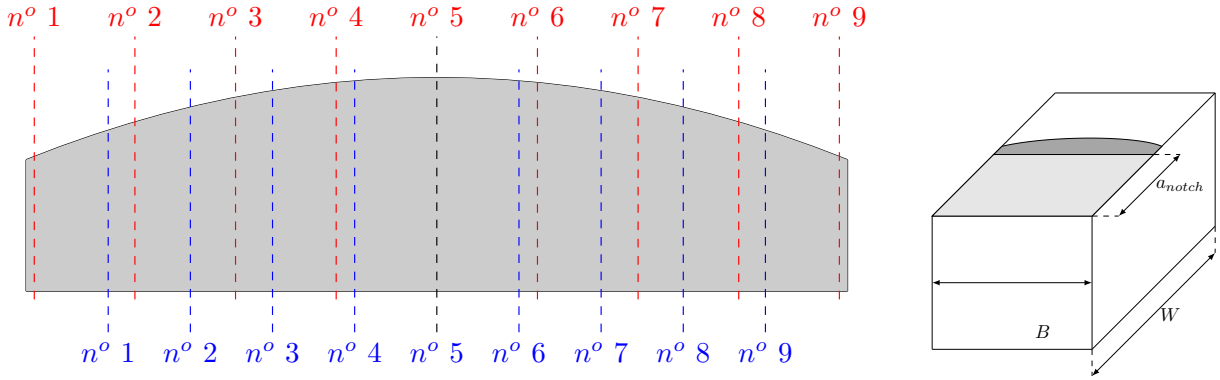


FIGURE 1.26 – Emplacement des neuf points de mesure de a_{crack}

suivants : $L-T$, $T-L$, $L-S$ et $T-S$. Les éprouvettes ont été préfissurées sur une longueur de 1,5 mm (a_{crack}) avec une valeur de P_{max} égale à 1,2 kN pour le cyclage en fatigue. Cet effort reste constant durant toute la durée de la préfissuration ainsi la valeur de K est de 6,6 MPa.$\sqrt{\text{m}}$ pour une longueur de fissure égale à 8,5 mm et de 8,2 MPa.$\sqrt{\text{m}}$ lorsque a vaut 10 mm. La propagation de la fissure est contrôlée sur les deux faces de l'éprouvette à l'aide de deux lunettes binoculaires. Afin de faciliter cette opération de suivi, les surfaces ont été polies puis trois traits de trusqin ont été tracés tout les 0,5 mm perpendiculairement à la direction de propagation.

Les tableaux 1.6 et 1.7 résument pour les éprouvettes CT20 et CT10 les différentes caractéristiques géométriques nécessaires au calcul de la ténacité. La mesure de a_{crack} a été obtenue par une moyenne effectuée à partir de neuf points de mesure, dont l'emplacement est donné par la figure 1.26 pour une répartition homogène (couleur bleue) et celle spécifiée par la norme ASTM E1820 (couleur rouge). La forme « grisée » de la figure 1.26 représente la propagation de la fissure due au cyclage par fatigue. Les valeurs moyennes de a_{crack} pour ces deux types de répartition seront notées $(a_{crack})_{mean}$ pour le cas homogène et $(a_{crack})_{1820}$ dans le cas de la norme ASTM E1820. Elles sont calculées à l'aide des deux formules suivantes :

$$(a_{crack})_{mean} = \frac{1}{9} \times \left(\sum_{i=1}^{9} (a_{crack})_i \right) \quad \text{d'où} \quad (a_0)_{mean} = a_{notch} + (a_{crack})_{mean}$$

$$(a_{crack})_{1820} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{(a_{crack})_1 + (a_{crack})_9}{2} + \sum_{i=2}^{8} (a_{crack})_i \right) \quad \text{d'où} \quad (a_0)_{1820} = a_{notch} + (a_{crack})_{1820}$$

La figure 1.28 présente les courbes P-V obtenues pour les éprouvettes CT20 et CT10. L'éprouvette $T-L$ n° 1a n'a pas été testée car elle a rompu lors de la phase de préfissuration suite à un effort appliqué

Eprouvettes CT20	a_{notch} en mm	$(a_{crack})_{1820}$ en mm	$(a_0)_{1820}$ en mm	B en mm	W en mm
L-T n° 1	16	4,37	20,37	20,06	40
L-T n° 2	16	4,33	20,33	19,91	40
T-L n° 1	16	4,31	20,31	19,95	40
T-L n° 2	16	4,32	20,32	19,97	40

TABLE 1.6 – Caractéristiques géométriques des éprouvettes CT20

Eprouvettes CT10	a_{notch} en mm	$(a_{crack})_{1820}$ en mm	$(a_{crack})_{mean}$ en mm	$(a_0)_{1820}$ en mm	$(a_0)_{mean}$ en mm	B en mm	W en mm
L-T n° 1a	8,5	1,49	1.54	9,99	10,04	9,66	20
L-T n° 2a	8,5	1,68	1.72	10,18	10,22	9,45	20
L-T n° 3a	8,5	1,81	1.87	10,31	10,37	9,79	20
T-L n° 1a	8,5	–	–	–	–	9,69	20
T-L n° 2a	8,5	1,63	1.73	10,13	10,23	9,53	20
T-L n° 3a	8,5	1,53	1.56	10,03	10,06	9,76	20
L-S n° 1a	8,5	1,76	1,77	10,26	10,27	9,77	20
L-S n° 2a	8,5	1,64	1,66	10,14	10,16	9,67	20
L-S n° 3a	8,5	1,57	1,59	10,07	10,09	9,84	20
T-S n° 1a	8,5	1,72	1,78	10,22	10,28	9,74	20
T-S n° 2a	8,5	1,66	1,72	10,16	10,22	9,70	20
T-S n° 3a	8,5	1,57	1,64	10,07	10,14	9,84	20

TABLE 1.7 – Caractéristiques géométriques des éprouvettes CT10 (série a)

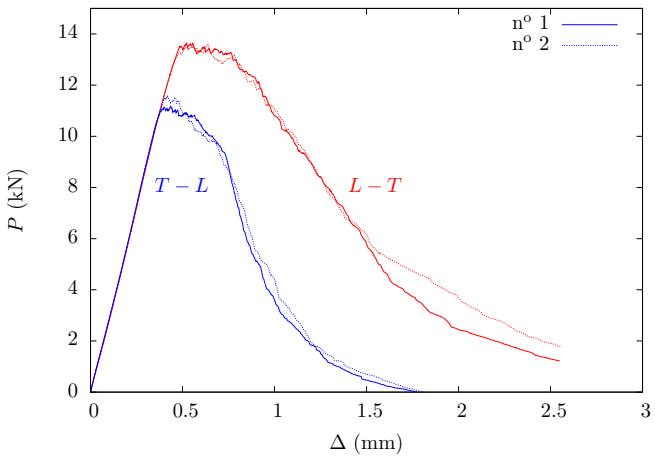


FIGURE 1.27 – Courbe $P - \Delta$ des éprouvettes CT20

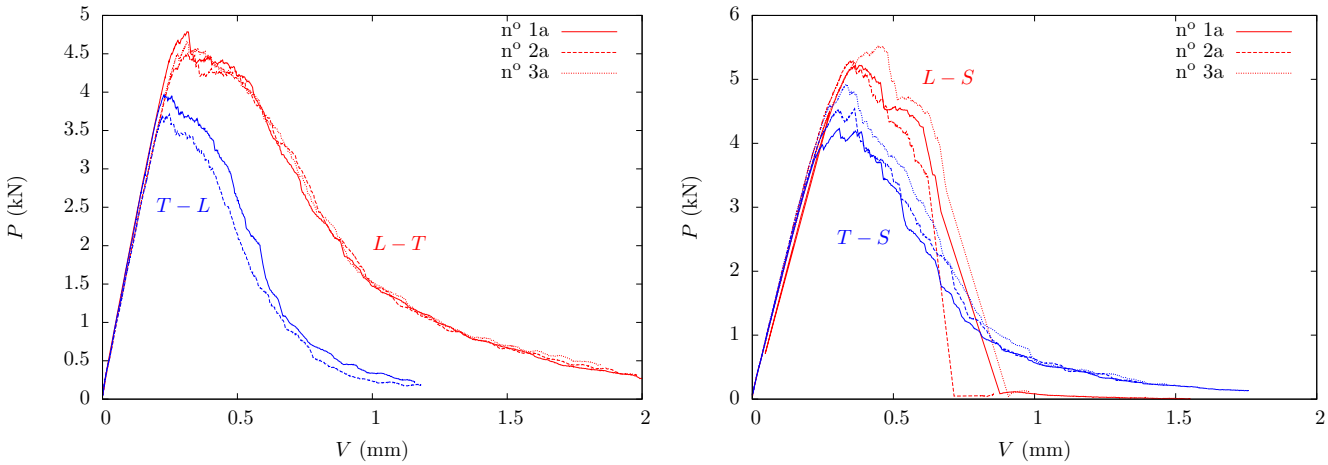


FIGURE 1.28 – Courbe $P - V$ des éprouvettes CT10 (série a)

P_{max} trop important. Il existe une dispersion plus prononcée pour les résultats des éprouvettes de type $T - S$ comparativement à ceux des sens $L - T$ et $T - L$. Nous constatons un comportement différent pour les sens $L - T$ et $T - L$ alors que le résultat des essais de traction sur éprouvettes TR_{12} montrent que le matériau peut être considéré comme isotrope transverse dans le plan (L,T). De plus pour ces éprouvettes nous n'avons pas constaté un comportement anisotrope à rupture. La ténacité plus élevée selon le sens $L-T$ s'explique par la distribution des composés intermétalliques observée dans la première partie de ce chapitre. En effet celle-ci se caractérise par un alignement des précipités intermétalliques Al_2Cu selon L avec une distance entre précipités plus faible selon L que T. Par conséquent la fissure aura plus de facilité pour se propager selon le sens L que suivant la direction T. Les éprouvettes de type $L - S$ présentent un comportement étrange puisque la fissure bifurque suivant un angle de 90° afin de se propager suivant le sens L au lieu du sens S. Ce phénomène, comme le comportement anisotrope des sens $L - T$ et $T - L$, s'explique par la distribution des phases intermétalliques, observée dans la première partie de ce chapitre. Celle-ci se caractérise par un alignement selon L et une distance entre phases Al_2Cu plus faible selon L que T.

Le calcul de la ténacité a été effectué suivant la méthodologie exposée au paragraphe 1.4.1.2. Nous avons utilisé $(a_0)_{mean}$ au lieu de $(a_0)_{1820}$ car le choix de cette mesure s'accorde mieux avec l'exigence de ASTM E399, que nous jugeons moins précise, puisqu'elle spécifie une mesure uniquement à partir de trois points, situés aux positions $B/4$, $B/2$ et $3B/4$. Le tableau 1.8 présente les résultats obtenus pour les éprouvettes CT20 et CT10. Il est important de noter que la détermination de $(P/\Delta)_0$ conditionne celle de P_Q et donc de K_Q. Or la détermination de la pente à l'origine de la courbe $P - \Delta$ est subjective.

Eprouvettes	$(P/V)_0$ (N/mm)	P_Q (N)	P_{max} (N)	P_{max}/P_Q	K_Q (MPa.$\sqrt{m}$)	$2,5 \times (K_Q/\sigma_{0,2})^2$ (mm)	b (mm)
CT20 $L-T$ n° 1	28765	14304	14427	$<$ 1,1	33,6 ($\rightarrow$)	20,51	19,63
CT20 $L-T$ n° 2	28520	14051	14387	$<$ 1,1	33,0 ($\rightarrow$)	19,96	19,67
CT20 $T-L$ n° 1	28843	11907	11984	$<$ 1,1	27,5 ($\rightarrow$)	14,24	19,69
CT20 $T-L$ n° 2	28718	12296	12343	$<$ 1,1	28,6 ($\rightarrow$)	15,17	19,68
CT10 $L-T$ n° 1a	18436	4314	4700	$<$ 1,1	30,7 ($\rightarrow$)	14,42	9.96
CT10 $L-T$ n° 2a	17511	3775	4433	$>$ 1,1	28,2 ($\rightarrow$)	13,04	9.78
CT10 $L-T$ n° 3a	17439	4122	4576	$>$ 1,1	30,5 ($\rightarrow$)	15,2	9.63
CT10 $T-L$ n° 2a	17192	3562	3632	$<$ 1,1	26,5 ($\rightarrow$)	11,46	9.77
CT10 $T-L$ n° 3a	18318	3780	3842	$<$ 1,1	26,7 ($\rightarrow$)	11,65	9.94
CT10 $L-S$ n° 1a	17541	3903	5137	$>$ 1,1	28,5 (↱)	13,25	9,73
CT10 $L-S$ n° 2a	18201	4162	5223	$>$ 1,1	30,1 (↱)	14,85	9,84
CT10 $L-S$ n° 3a	17410	4166	5448	$>$ 1,1	29,3 (↱)	14,05	9,91
CT10 $T-S$ n° 1a	17512	3674	4150	$>$ 1,1	26,9 ($\rightarrow$)	11,84	9,72
CT10 $T-S$ n° 2a	17896	3583	4462	$>$ 1,1	26,1 ($\rightarrow$)	11,16	9,78
CT10 $T-S$ n° 3a	18250	3927	4848	$>$ 1,1	27,9 ($\rightarrow$)	12,69	9,86

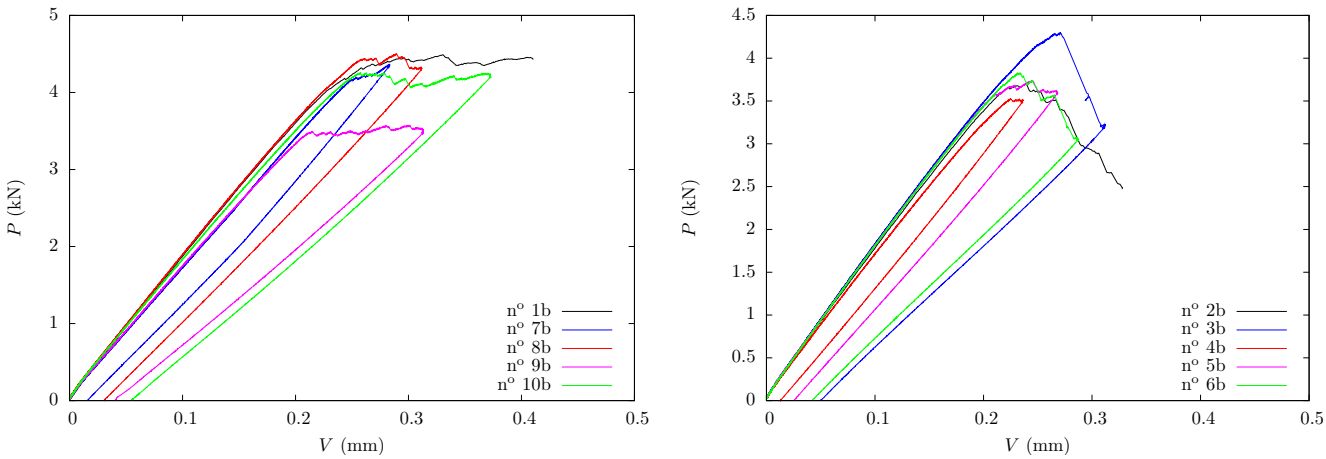
TABLE 1.8 – Valeurs de K_Q et exigences de ASTM E399 afin de transformer K_Q en K_{IC}

En effet il faut choisir une valeur de Δ à partir de laquelle la courbe semble ne plus être linéaire. Nous avons fixé cette valeur à 0,25 mm et 0,15 mm pour les éprouvettes CT20 et CT10.

Le tableau 1.8 fait la synthèse des exigences présentées au paragraphe 1.4.1.2 permettant de transformer le facteur d'intensité de contrainte K_Q en ténacité K_{IC}. Ce tableau présente les valeurs de la ténacité K_Q obtenues ainsi que le mode de propagation observé. Ainsi le symbole « $\rightarrow$ » renvoie à une propagation rectiligne tandis que « ↱ »désigne une bifurcation à 90° de la fissure. Ces exigences sont vérifiées ou presque pour les éprouvettes CT20 contrairement aux éprouvettes CT10 qui semblent donc ne pas être adaptées à la mesure de la ténacité. Cette conclusion n'est pas une réelle surprise car compte tenu de leur plus faible épaisseur les éprouvettes CT10 présentent certainement un état de déformation plus éloigné de l'hypothèse de déformation plane sur laquelle repose la norme ASTM E399. Nous rappelons que les éprouvettes CT10 ont été choisies car leur géométrie est la seule permettant de tester les sens $L-S$ et $T-S$. La ténacité est plus élevée pour le sens $L-T$ que $T-L$, ce résultat est en accord avec le constat d'anisotropie pour ces deux sens mentionné précédemment. Finalement nous retiendrons une valeur moyenne de K_{IC} de 1044 MPa.$\sqrt{mm}$ ou 33 MPa.$\sqrt{m}$ pour le sens $L-T$ et de 885 MPa.$\sqrt{mm}$ ou 28 MPa.$\sqrt{m}$ pour les sens $T-L$ et $T-S$. L'utilisation d'une même valeur de la ténacité pour ces deux derniers sens tient au fait que nous obtenons des valeurs de K_Q quasiment identiques pour les éprouvettes CT10 de type $T-L$ et $T-S$. Le calcul de K_Q pour les éprouvettes CT10 de type $L-S$ montre que l'amorçage de la fissure s'effectue pour un niveau de charge proche de celui des éprouvettes de type $L-T$. Par contre la propagation de la fissure sera totalement différente pour ces deux types d'éprouvettes, puisqu'il existe une bifurcation de 90° de la fissure pour le sens $L-S$.

1.4.1.5 Courbe R de l'alliage 2219 T87

Compte tenu du comportement des éprouvettes CT10 de type $L-S$ utilisées pour la mesure de la ténacité, la détermination de la courbe R a été effectuée seulement pour les sens de prélèvement $L-T$, $T-L$ et $T-S$ à partir d'éprouvettes CT10 (série b). Pour chacun des types $L-T$ et $T-L$ nous avons



Sans rainures latérales

Avec rainures latérales

FIGURE 1.29 – Courbe P-V des éprouvettes CT10 de type L-T (série b)

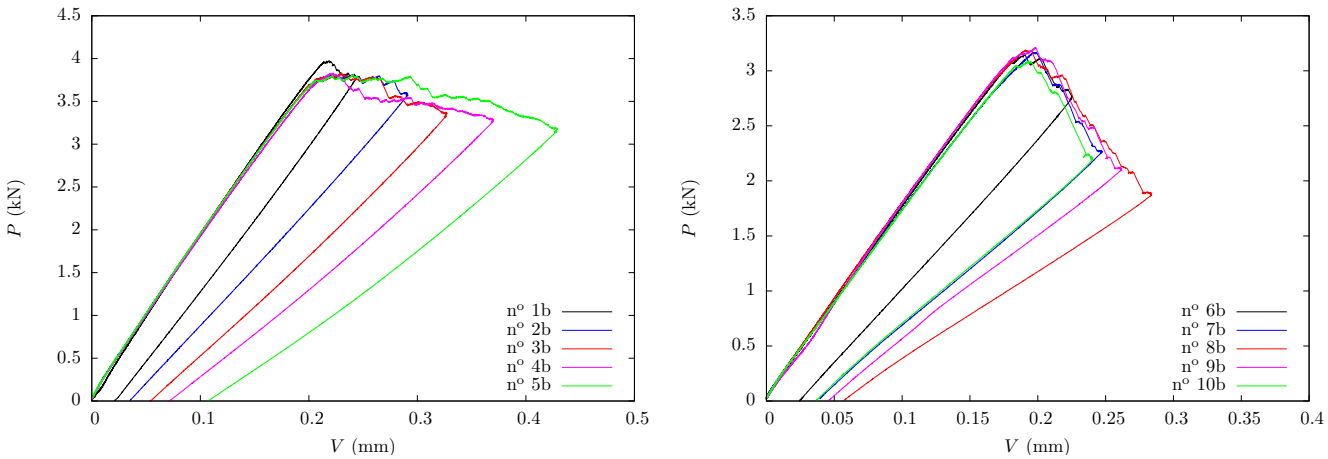
utilisé cinq éprouvettes sans rainures latérales et cinq éprouvettes avec rainures latérales. La définition de ces rainures est donnée par la norme ASTM E1820. Nous avons choisi un angle de 60°, un rayon en fond de rainure de 0,2 mm et une épaisseur de section nette, notée B_N, égale à $0,8 \times B$. Pour le sens $T-S$ nous avons utilisé uniquement des éprouvettes CT10 sans rainures latérales. Le tableau A.1 résume pour chacune des éprouvettes sans rainures latérales les caractéristiques géométriques suivantes : a_{notch}, a_{crack}, a_0 et B. De même le tableau A.2 présente pour les éprouvettes CT10 avec rainures latérales les valeurs de a_{notch}, a_{crack}, a_0, B et B_N. Pour ces deux géométries d'éprouvettes CT10 la valeur de W est égale à 20 mm.

Considérons une éprouvette CT soumise à une certaine valeur d'effort puis partiellement déchargée. L'enregistrement de la courbe $P-V$ au cours de l'essai permet d'obtenir la valeur de la pente à la décharge et donc celle de la longueur de fissure correspondante, compte tenu de la relation (1.4). Par conséquent si au cours de l'essai des opérations de charge et décharge partielle se succèdent, il est théoriquement possible d'obtenir l'évolution de a en fonction de la charge appliquée. Ce procédé de mesure de la longueur de fissure est désigné par « méthode de la complaisance », il possède l'avantage d'utiliser une unique éprouvette pour déterminer les différentes valeurs $a_{(k)}$ de la formule itérative (1.5).

La méthode utilisée dans le cadre de cette étude consiste à tester une éprouvette pour chaque valeur $a_{(k)}$. L'éprouvette est soumise à une certaine charge puis elle est totalement déchargée (P=0). Ensuite nous effectuons un cyclage en fatigue, identique à celui utilisé lors de la pré-fissuration, jusqu'à la rupture. Le but de cette opération est de pouvoir isoler la propagation de la fissure due à la déchirure ductile, puisqu'elle se distingue visuellement de celle obtenue par fatigue (zones brillantes de la figure 1.32). Il est alors possible de mesurer, sur le faciès de rupture de l'éprouvette, la longueur de fissure correspondant à la décharge.

Les figures 1.29, 1.30 et 1.31 présentent les courbes $P-V$ pour les différentes éprouvettes CT10 utilisées afin d'obtenir la courbe R pour les sens $L-T$, $T-L$ et $T-S$. A partir de la figure 1.29 nous pouvons d'ores et déjà écarter les éprouvettes numérotées 3b et 9b compte tenu de l'allure atypique de leur courbe $P-V$ comparée à celles obtenues pour les autres éprouvettes. Ainsi la détermination de la courbe R pour les éprouvettes CT10 de type $L-T$ avec et sans rainures latérales se fera uniquement à partir de quatre spécimens au lieu des cinq initialement prévus. L'enregistrement de la décharge matérialisée sur les figures 1.29 à 1.31 permet d'obtenir la raideur, notée K_{LL}, des différentes éprouvettes CT10 testées.

Les éprouvettes ne comportant pas de rainures latérales présentent un profil de propagation de la fissure qui n'est pas rectiligne comme le montre la figure 1.32. Nous pouvons constater sur cette même figure que la présence des rainures latérales permet d'obtenir une avancée rectiligne de la fissure. Pour



Sans rainures latérales

Avec rainures latérales

FIGURE 1.30 – Courbe P-V des éprouvettes CT10 de type T-L (série b)

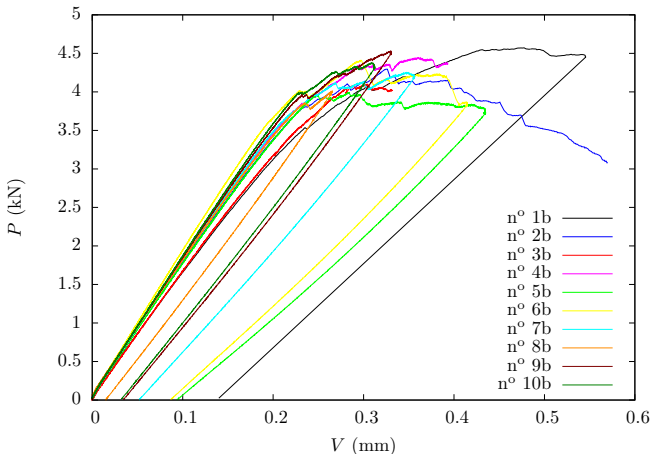
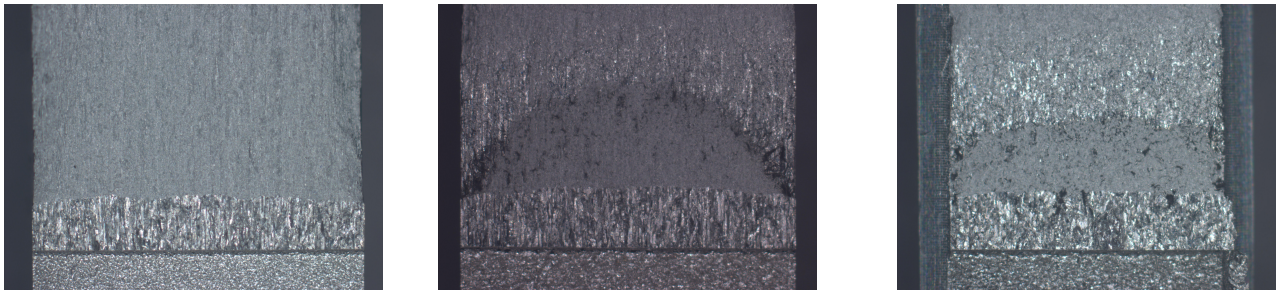


FIGURE 1.31 – Courbe P-V des éprouvettes CT10 de type T-S (série b)



Propagation par fatigue sans rainures latérales

Propagation par déchirure ductile sans rainures latérales

Propagation par déchirure ductile avec rainures latérales

FIGURE 1.32 – Photographies de différents stades de propagation d'une fissure

ces dernières éprouvettes afin de tenir compte de la largeur de la section nette en fond de rainure, notée B_N, les relations (1.1) et (1.4) sont modifiées selon la norme ASTM E1820 et s'écrivent alors :

$$K = \frac{P_Q}{\sqrt{BB_N W}}\ f(a/W)$$
$$C_{LL} = \frac{1-\nu^2}{EB_e}\left(\frac{W+a}{W-a}\right)^2 g(a/W) \quad \text{où} \quad B_e = B - \frac{\left(B-B_N\right)^2}{B}$$

La prise en compte de B_N n'est pas identique dans l'expression du facteur d'intensité de contrainte, où B est remplacé par $\sqrt{BB_N}$, et dans celle de la complaisance qui nécessite l'introduction d'une nouvelle variable B_e. Enfin dans les relations (1.3) et (1.5) B sera simplement remplacé par B_N. Par conséquent l'usinage de rainures latérales permet d'obtenir une avancée rectiligne de la fissure, mais semble poser un problème au niveau de l'introduction de B_N dans les différentes formules utilisées pour obtenir la courbe R. De plus la présence des rainures latérales affecte certainement la répartition des contraintes et des déformations. Ainsi il n'est pas évident que l'hypothèse des déformations planes qui est au cœur de la norme ASTM E1820 soit encore valide. Le fait d'obtenir une fissure rectiligne ne constitue pas obligatoirement une preuve d'un état de déformations planes, mais signifie simplement que le taux de triaxialité varie moins entre le centre et les bords de l'éprouvette.

Pour obtenir l'avancée de la fissure des éprouvettes avec rainures latérales nous avons utilisé, conformément à la norme ASTM E1820, neuf points de mesure dont la répartition est donnée au paragraphe 1.4.1.4. Dans le cas des éprouvettes sans rainures latérales cette méthode n'est pas applicable puisque la propagation de la fissure n'est pas rectiligne. Nous pourrions utiliser une moyenne calculée à partir de neuf points de mesure répartis de façon homogène suivant la description de la figure 1.26. Mais nous avons préféré procéder d'une autre manière basée sur l'équivalence des aires « grisées » de la figure 1.34. Cette approche renvoie intuitivement à une équivalence d'énergie nécessaire à la propagation de la fissure par déchirure ductile.

Dans un premier temps les profils d'avancée de fissure sont approximés par des paraboles d'équation $y = \alpha - \beta(x - \frac{1}{2})^2$ comme le montre la figure 1.35. L'aire sous la parabolle, notée A_1 est donc égale à :

$$A_1 = \int_0^B \left(\alpha - \beta\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)\ dx = \left(\alpha - \frac{\beta}{24}\right)\ B$$

L'aire de l'avancée rectiligne de la fissure, notée A_2, se calcule à partir de la relation : $B \times (\Delta a)_{aire}$. L'égalité entre A_1 et A_2 permet d'obtenir $(\Delta a)_{aire}$ dont l'expression est : $(\Delta a)_{aire} = \left(\alpha - \frac{\beta}{24}\right)$. Les tableaux A.3 et A.4 résument les valeurs de $(\Delta a)_{aire}$ ainsi obtenues pour les différentes éprouvettes CT10 avec et sans rainures latérales.

Nous disposons donc maintenant de toutes les données nécessaires à la construction de la courbe R par application de la relation 1.5. La figure 1.36 présente les courbes $J_R - \Delta a$ ainsi obtenues. Une approximation linéaire de ces courbes a été effectuée afin de déterminer le coefficient dJ_R/da qui caractérise la résistance à la déchirure ductile du matériau. Les valeurs de ce coefficient sont de 13 MPa, 8,3 MPa et 9 MPa respectivement pour les sens de prélèvement $L-T$, $T-L$ et $T-S$. Les sens $T-L$ et $T-S$ se comportent de manière identique relativement à la propagation d'une fissure, nous avions déjà constaté cette tendance lors de la détermiation de la ténacité. Pour les éprouvettes avec rainures latérales les valeurs obtenues de dJ_R/da sont très faibles, à savoir 5,7 MPa et 2,3 MPa pour les sens $L-T$ et $T-L$.

Nous souhaitons terminer ce paragraphe consacré aux éprouvettes CT par le calcul de J_{IC}. Quelle différence existe-t-il entre K_{IC} et J_{IC} ? Nous pourrions être tenté de penser que le lien qui existe entre

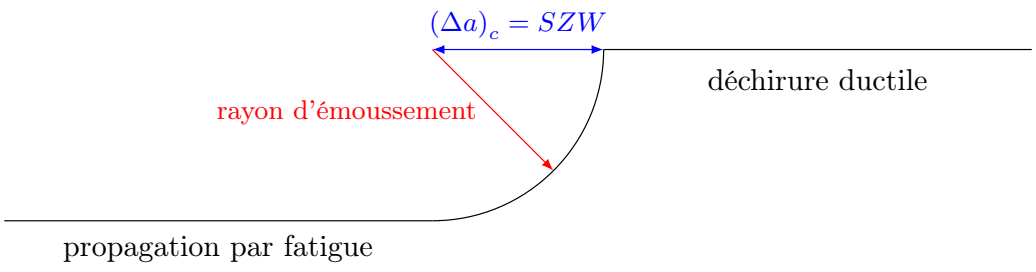


FIGURE 1.33 – Définition de la valeur critique de l'émoussement $(\Delta a)_c$

ces deux grandeurs est simplement donné par :

$$J_{IC} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{IC}^2 \tag{1.6}$$

Si tel était le cas la norme ASTM E1820 proposerait de calculer J_{IC} à partir de K_{IC} en utilisant l'expression ci-dessus. Or la détermination de J_{IC} selon cette norme n'est pas aussi simple, elle est même suffisament compliquée pour nous inciter à utiliser une autre méthode. Celle-ci s'inspire de la définition de J_{IC} utilisée dans [Paris et al., 1979] et [Lautridou and Pineau, 1981] où la valeur de J_{IC} correspond au début de la propagation stable de la fissure. En effet avant de se propager une fissure se déforme au niveau de sa pointe, celle-ci subit un émoussement qui se traduit par une relation linéaire entre J et Δa. [Paris et al., 1979] propose d'utiliser $\Delta a = 0,5J/\sigma_y$ tandis que selon [Kobayashi et al., 1983] cette expression devient $\Delta a = 0,25J/\sigma_f$. Dans les relations précédentes σ_y désigne la limite d'élasticité (391 MPa) et σ_f est la contrainte d'écoulement égale à la moyenne de σ_y et de σ_u la contrainte à rupture (430 MPa).

La valeur de J_{IC} est définie comme l'intersection entre cette droite d'émoussement et la courbe R. La valeur de Δa correspondant à J_{IC} sera notée $(\Delta a)_c$. Nous avons tracé sur la figure 1.36 la droite d'équation $\Delta a = 0,5J/\sigma_y$, nous pouvons constater qu'il existe peu d'émoussement pour notre matériau et que la valeur de J_{IC} peut être considérée comme l'intersection de la courbe R avec l'axe des ordonnées. Le tableau 1.9 résume les valeurs de J_{IC} obtenues pour les différentes éprouvettes CT. Les valeurs de K_{IC} associées sont plus faibles, sauf pour le sens $T-S$, que celles issues du calcul de la ténacité réalisé au paragraphe 1.4.1.4.

Ce constat n'est pas conforme à l'attendu, en effet la prise en compte de l'émoussement devrait permettre d'obtenir des valeurs de ténacité, calculées à partir de J_{IC}, supérieures à celles issues des essais sur CT20 et déterminées suivant la norme ASTM E1820 (voir tableau 1.8). L'explication de ce phénomène réside dans l'émoussement faible de la pointe de fissure dans le cas de notre alliage. Par conséquent la détermination de J_{IC} à partir de l'intersection de la courbe R et de la droite d'émoussement est délicate, car elle concerne précisément la partie de la courbe R la moins bien définie, c'est-à-dire celle qui correspond à de faibles valeurs de Δa.

Nous avons cherché à observer à l'aide d'un Microscope Electronique à Balayage (MEB) la taille de la zone d'émoussement sur les faciès de rupture des éprouvettes CT10 de type $L-T$ et $T-L$. La définition de celle-ci est illustrée par la figure 1.33 issue de [Kobayashi et al., 1983]. Elle est identique à $(\Delta a)_c$ et sera notée SZW pour l'expression anglaise « Stretched Zone Width ». L'identification visuelle de cette zone d'émoussement a été effectuée sur la base des clichés photographiques de [Bansal et al., 2009].

La figure 1.37 présente des vues similaires issues de l'observation au MEB des faciès de rupture des éprouvettes CT10. Nous pouvons clairement distinguer la zone correspondant à la phase de propagation de la fissure par fatigue (à gauche sur le cliché 1.37a) de celle due à la déchirure ductile. Le rayon d'émoussement se situe à la frontière de ces deux zones. Il apparaît de dimension réduite, de l'ordre

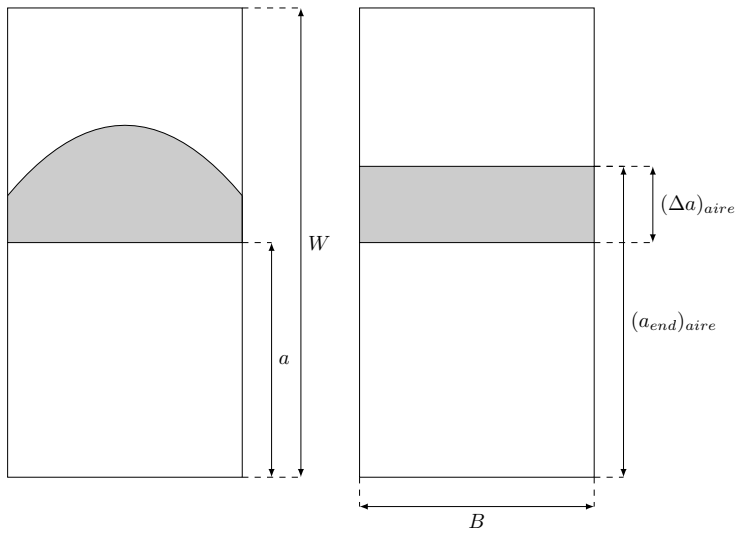
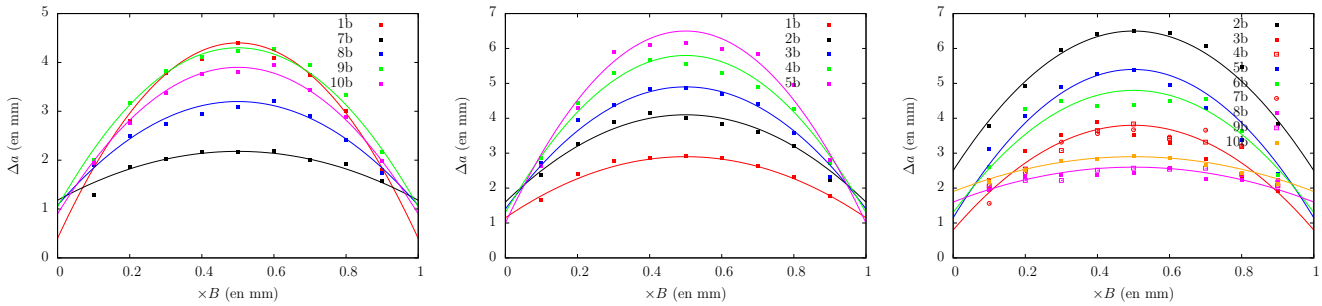


FIGURE 1.34 – Principe du calcul de Δa par égalité des aires A_1 et A_2



L-T T-L T-S

FIGURE 1.35 – Propagation de la fissure pour les éprouvettes CT10 sans rainures latérales

de 10 μm à 20 μm, ce résultat est donc cohérent avec l'approche analytique réalisée ci-dessus. En effet celle-ci montre que la valeur de SZW est suffisament faible pour être négligée et permettre de remplacer la droite d'émoussement par l'axe des ordonnées.

Eprouvettes CT	J_{IC} MPa.mm	K_{IC} selon (1.6) MPa.$\sqrt{m}$	K_{IC} selon CT20
type $L-T$	11,3	29,8	33
type $T-L$	7,1	23,6	28
type $T-S$	17,3	36,9	28

TABLE 1.9 – Valeur de J_{IC} obtenue pour les différentes éprouvettes CT

1.4.2 Essais sur éprouvettes SENT

1.4.2.1 Géométrie des éprouvettes SENT

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction de ce chapitre les éprouvettes SENT ne font l'objet d'aucune norme officielle, contrairement aux éprouvettes CT dont la définition et la réalisation des essais sont encadrées par la norme ASTM E1820. A l'heure actuelle les éprouvettes SENT sont surtout utilisées pour caractériser la courbe R des pipelines en acier. L'utilisation de ces éprouvettes à la place des éprouvettes CT, afin d'obtenir la courbe $J_R - \Delta a$, s'explique par le fait que le ligament

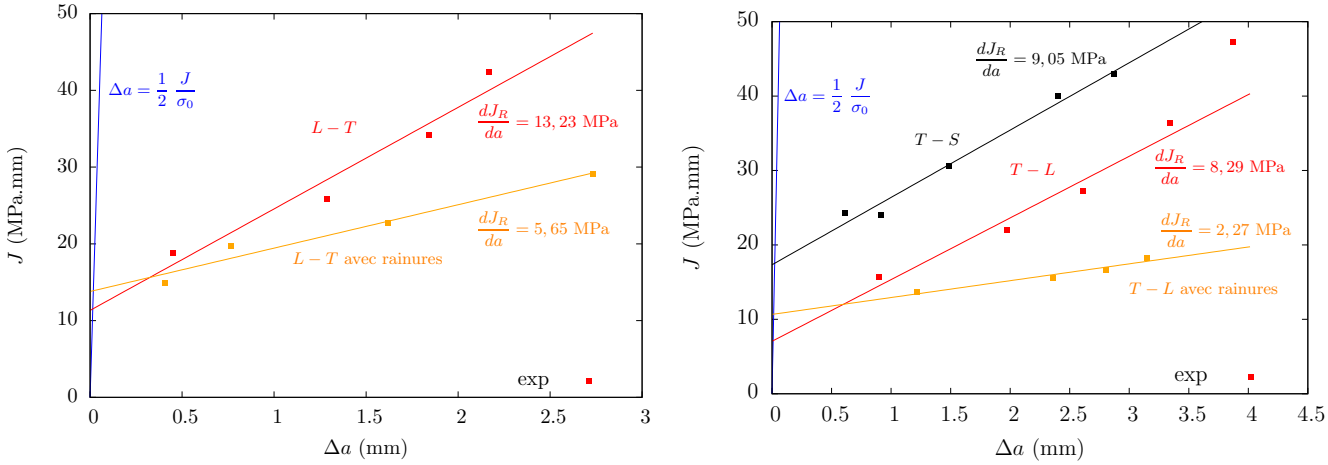
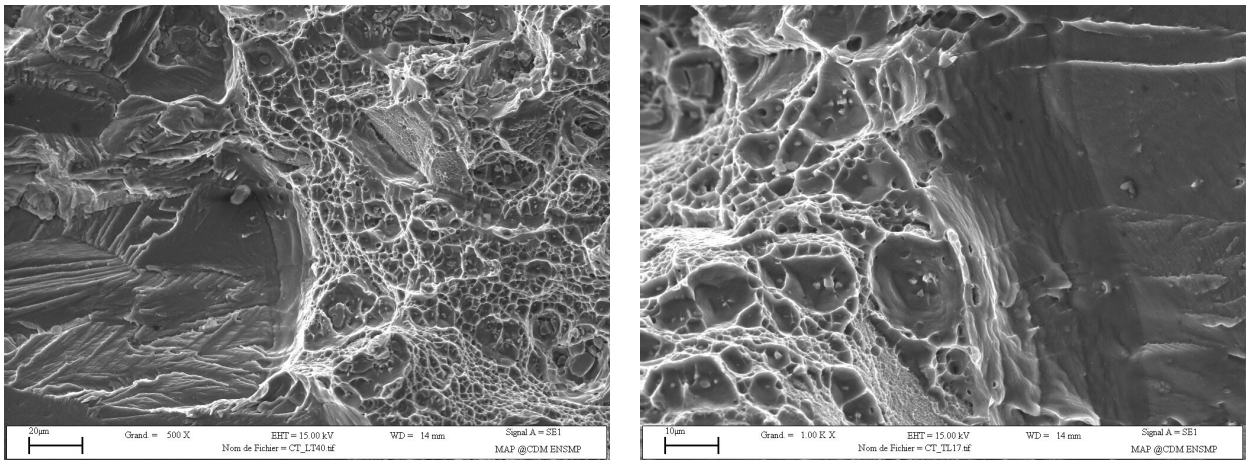


FIGURE 1.36 – Courbes R obtenues pour les sens L-T, T-L et T-S



(a) Eprouvette CT10 $L-T$ (500x) (b) Eprouvette CT10 $T-L$ (1000x)

FIGURE 1.37 – Vue de la zone d'émoussement pour des éprouvettes CT10 de type $L-T$ et $T-L$

des éprouvettes CT travaille principalement en flexion, contrairement aux éprouvettes SENT dont le ligament est sollicité essentiellement en traction. Ce dernier mode de sollicitation est donc plus représentatif de l'état de contrainte d'un tube sous pression ou d'un réservoir sous pression dans le cadre de notre étude.

Afin de normaliser l'utilisation des éprouvettes SENT pour le dimensionnement des pipelines, le bureau VERITAS norvégien a émis une série de recommandations rassemblées dans un projet de norme que nous désignerons par l'acronyme DNV [(i)]. Bien que ce document ne fasse pas office de norme il nous a été utile pour définir la géométrie de nos éprouvettes SENT. Contrairement aux éprouvettes CT dont l'interface avec la machine de traction se fait uniquement par l'intermédiaire d'une goupille, les éprouvettes SENT peuvent également être maintenue à l'aide de mors autoserrants reliés au dispositif de traction. Nous avons choisi ce dernier mode de fixation car il ne nécessite pas de géométrie particulière des points d'amarrage de l'éprouvette. D'autre part il limite la rotation de l'éprouvette ainsi il n'est pas nécessaire d'utiliser la formule corrective de la complaisance, développée par [Cravero and Ruggieri, 2007], qui reste par conséquent réservée à une fixation au moyen d'une goupille.

La figure 1.38 présente les principales dimensions d'une éprouvettes SENT dont les désignations sont en grande partie identiques à celles d'une éprouvette CT. Ainsi la fissure est toujours définie par sa longueur a et par le paramètre W, la longueur du ligament b est alors égale à $W - a$. Comme pour les éprouvettes CT la géométrie d'une éprouvette SENT peut être définie uniquement à partir de W. En effet le document DNV recommande une longueur utile H et une épaisseur B respectivement égale à dix et deux fois W. Nous avons retenu une valeur de 10 mm pour W par conséquent B est égal à 20 mm tandis que la valeur de H est de 100 mm. Afin d'éviter tout glissement durant l'essai le serrage sera effectué sur une distance de 30 mm d'où une longueur totale d'éprouvette de 160 mm. La longueur initiale de la fissure a_0 sera de 5 mm, cette configuration correspond à une éprouvette moyennement entaillée.

Conformément à ce qui a déjà été présenté pour les éprouvettes CT la longueur initiale de la fissure se décompose en une partie usinée notée a_{notch} et une partie préfissurée par fatigue notée a_{crack}. La préfissuration de l'éprouvette ne sera pas effectuée en traction mais en flexion trois points comme illustrée par la figure 1.39. Cette configuration est celle d'une éprouvette SENB (Single Edge Notched Bending) dont le facteur d'intensité de contrainte pour un effort P possède l'expression suivante, issue de la norme ASTM E1820 :

$$K = \frac{PS}{BW^{3/2}}\ f(a/W) \tag{1.7}$$

$$\text{Avec} \quad f(a/W) = \frac{3\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2}\left[1,99 - \frac{a}{W}\left(1-\frac{a}{W}\right)\left(2,15 - 3,93\frac{a}{W} + 2,7\left(\frac{a}{W}\right)^2\right)\right]}{2\left(1+2\frac{a}{W}\right)\left(1-\frac{a}{W}\right)^{3/2}}$$

Le cyclage en fatigue est effectué à la fréquence de 40 Hz entre une valeur minimale P_{min} et une valeur maximale P_{max} de l'effort P avec un rapport P_{min} sur P_{max} égal à 0,1. Les éprouvettes ont été préfissurées sur une longueur de 1,5 mm (a_{crack}) avec un effort initial P_{max} égal à 1,9 kN afin d'avoir en début de préfissuration un facteur d'intensité de contrainte K identique à celui obtenu au début de la préfissuration des éprouvettes CT dont la valeur est 6,6 MPa.m$^{1/2}$. Pour les éprouvettes SENT la préfissuration ne pourra pas se faire à effort P_{max} constant car dans ce cas le facteur d'intensité de contrainte deviendrait trop important lorsque la valeur de a_{crack} devient proche de 1,5 mm. Il faut néanmoins veiller à ne pas diminuer P_{max} trop brusquement sinon la fissure se bloque. Un résultat satisfaisant a été obtenu en diminuant une première fois P_{max} de 1,9 kN à 1,8 kN pour une valeur de

(i). Recommended Practice DNV-RP-F108 – Fracture control for pipeline installation methods introducing cyclic plastic strain (january 2006) – Det Norske Veritas

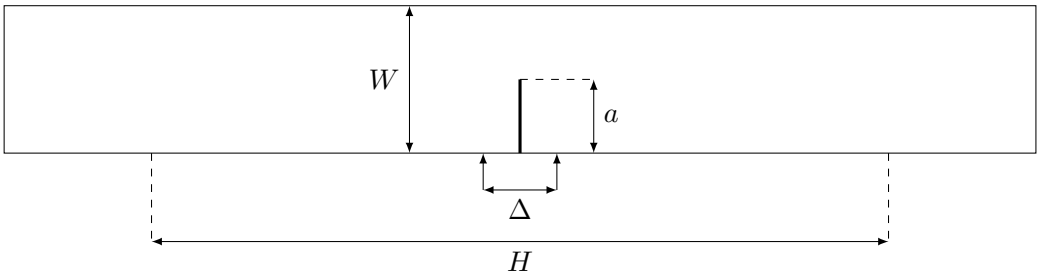


FIGURE 1.38 – Plan de définition d'une éprouvette SENT

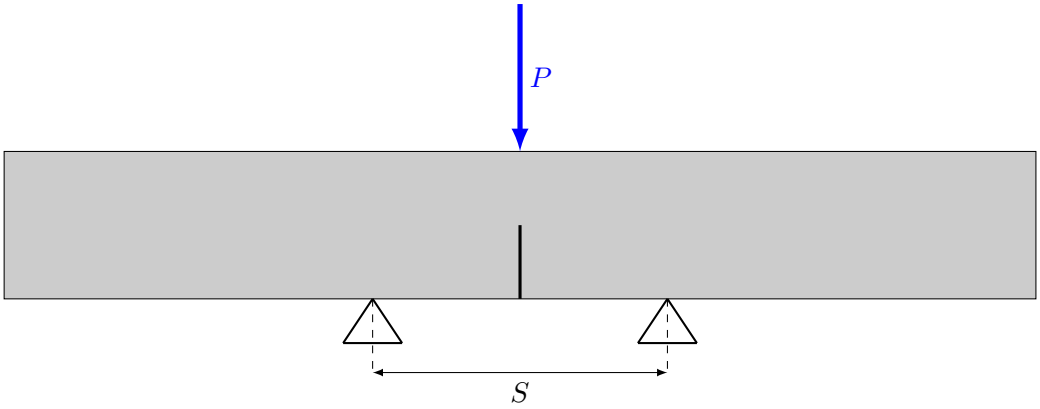
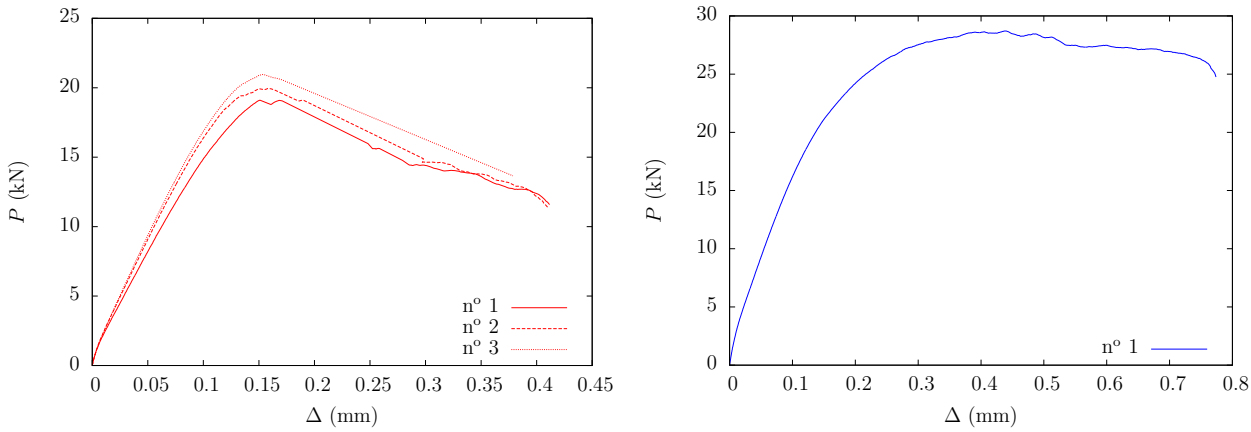


FIGURE 1.39 – Préfissuration en flexion 3 points d'une éprouvette SENT

a_{crack} supérieure à 0,5 mm, puis de 1,8 kN à 1,7 kN lorsque a_{crack} atteint 1 mm. La propagation de la fissure est contrôlée sur les deux faces de l'éprouvette à l'aide de deux lunettes binoculaires. Afin de faciliter cette opération de suivi, les surfaces ont été polies puis trois traits de trusqin ont été tracés tout les 0,5 mm perpendiculairement à la direction de propagation.

1.4.2.2 Résultats des essais

Nous avons testé les éprouvettes SENT suivant deux orientations à savoir $L-S$ et $T-S$, car elles correspondent au cas de la propagation d'une fissure dans l'épaisseur d'un des réservoirs cryotechniques d'Ariane 5. Trois éprouvettes SENT de type $T-S$ ont été soumises à un essai de traction avec une



(a) Eprouvette de type $T-S$ (b) Eprouvette de type $L-S$

FIGURE 1.40 – Courbe $P-\Delta$ des éprouvettes SENT de type $T-S$ et $L-S$

vitesse de déplacement de la traverse machine de 1 mm/min. Suivant le sens $L-S$ nous avons testé une unique éprouvette car il existe, comme pour les éprouvettes CT de type $L-S$, une bifurcation de la fissure à 90° qui rend l'essai inexploitable. Au cours de l'essai sont enregistrés la force appliquée à l'éprouvette et le déplacement Δ d'ouverture de la fissure, défini par la figure 1.38, et mesuré à l'aide d'un extensomètre. La figure 1.40 présente pour chaque éprouvette la courbe de l'effort P en fonction du déplacement d'ouverture de la fissure Δ.

Nous pouvons constaté qu'il n'existe pas de propagation stable de la fissure pour les éprouvettes de type $T-S$. Par conséquent ces essais sont peu exploitables car ils permettent essentiellement une comparaison de la courbe R issue d'une éprouvette SENT avec celle obtenue avec une éprouvette CT. Il n'existe pas de calcul de la ténacité à partir des éprouvettes SENT comme dans le cas des éprouvettes CT et SCT selon les normes ASTM E1820 et ASTM E740. Il est néanmoins possible d'évaluer la ténacité des éprouvettes SENT en utilisant la méthodologie de ces deux normes.

La norme ASTM E1820 permet d'obtenir la ténacité K_Q suivant la procédure décrite pour les éprouvettes CT au paragraphe 1.4.1.4 (voir page 35). La méthode proposée par la norme ASTM E740 est différente car elle ne se base pas sur l'effort P_Q pour déterminer la ténacité mais sur l'effort maximal P_{max}. Dans le cas d'un matériau peu ductile, à l'image de notre alliage, cette approche se justifie car la propagation de la fissure se déclenche lorsque l'effort atteint sa valeur maximale, puisque l'avancée de la fissure se traduit par une chute de l'effort. Par analogie avec la norme ASTM E740 nous désignerons par K_{IE} la ténacité associée à P_{max}. Le tableau 1.10 présente les valeurs de K_Q et K_{IE} obtenues pour les différentes éprouvettes SENT.

Eprouvettes SENT	a_0 (mm)	B (mm)	W (mm)	P_Q (N)	P_{max} (N)	K_Q MPa.$\sqrt{m}$	K_{IE} MPa.$\sqrt{m}$
n° 1	5,7	19,99	5,7	15396	19123	23,3	28,9
n° 2	5,53	19,99	5,53	16614	19993	24,1	28,9
n° 3	5,46	20,00	5,46	16701	20970	23,7	29,8

TABLE 1.10 – Dimensions des éprouvettes SENT et calcul de K_Q et K_{IE}

1.4.3 Essais sur éprouvettes SCT

1.4.3.1 Géométrie des éprouvettes SCT

Le but des essais sur éprouvettes SCT est de caractériser l'amorçage et la propagation d'une fissure semi-elliptique sollicitée en traction. Précisons que les fissures de cette forme sont toujours surfaciques, de plus elles présentent un facteur d'intensité de contrainte plus important qu'un défaut elliptique, de dimensions identiques, noyé dans la matière. Un défaut surfacique est donc plus critique, mais également plus facile à détecter par ressuage par exemple. L'intérêt d'une éprouvette SCT est de proposer d'une part un mode de sollicitation du ligament proche de celui correspondant à un réservoir sous pression, et d'autre part une géométrie de fissure semblable à celle d'un défaut réel, pouvant être détecté sur une structure dans un contexte industriel.

L'utilisation d'éprouvettes CT ou SENT, comportant une fissure rectiligne, permet d'obtenir, à condition de vérifier certaines hypothèses, des propriétés mécaniques du matériau telles que la ténacité et la courbe $J_R - \Delta a$. Nous verrons que selon la norme ASTM E740 [(j)] l'exploitation d'un essai sur éprouvette SCT n'est susceptible de fournir qu'une nouvelle valeur de la ténacité, notée K_{IE}, spécifique aux défauts semi-elliptiques. Ce type d'éprouvette peut également être utilisée pour vérifier la résistance à la déchirure ductile d'un défaut semi-elliptique dont les dimensions a et c sont connues. Ces dernières

(j). American Standard Test Method for fracture testing with surface-crack tension specimens

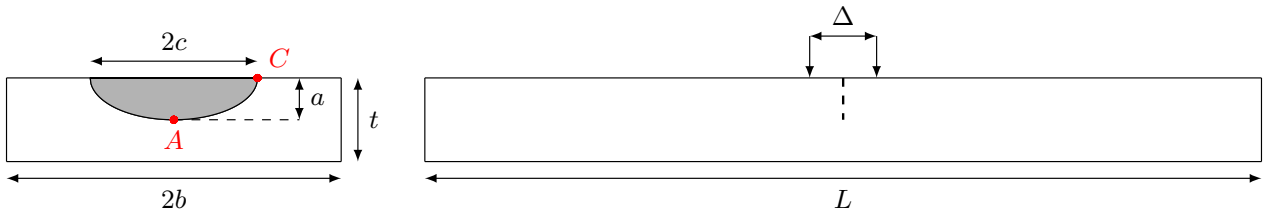


FIGURE 1.41 – Dimensions caractéristiques de la géométrie d'une éprouvette SCT

peuvent correspondre par exemple à celles d'un défaut réel dont la tenue mécanique n'est pas simple à justifier par calcul.

La figure 1.41 présente la géométrie d'une éprouvette SCT dont les dimensions caractéristiques doivent correspondre aux exigences de la norme ASTM E740. Celle-ci impose notamment que b soit au minimum cinq fois plus important que c. De même la longueur l, définie entre les points d'ancrage de l'éprouvette, doit être au moins égale à deux fois la largeur de celle-ci, notée $2b$. A première vue la figure 1.41 peut laisser à penser qu'un défaut semi-elliptique est caractérisé par sa profondeur a et par sa longueur désignée par $2c$. En fait celui-ci est plutôt défini par l'intermédiaire des deux rapports a/c et a/t, dont l'utilisation au lieu de a et c signifie que des défauts de tailles homothétiques vont se comporter de manière identique vis à vis de la déchirure ductile.

Ce dernier point est important du point de vue de l'usinage des défauts semi-elliptiques. En effet ils sont en général réalisés par électro-érosion à partir d'un outil prélevé dans une tôle de cuivre de faible épaisseur (0,3 mm) à l'image de la forme du défaut. Ce procédé implique que la taille du défaut ne soit pas trop petite. Ainsi compte tenu de la remarque précédente sur le rapport d'homothétie des fissures semi-elliptiques, nous avons opté pour un défaut dont les rapports a/c et a/t ont une valeur moyenne de l'ordre de 0,5, pour une épaisseur t de 10 mm, identique à celle des éprouvettes SENT.

Nous visons donc après préfissuration en fatigue, un défaut dont la profondeur a sera de 5 mm pour une longueur $2c$ de 20 mm. Cette dernière dimension implique selon les règles de ASTM E740 une largeur minimum d'éprouvette de 100 mm. Nous n'avons pas été en mesure de respecter cette exigence, car cette taille d'éprouvette n'était ni compatible avec la capacité des machines de traction dont nous disposions, ni avec les outillages permettant la préfissuration aussi bien en traction qu'en flexion.

Nous avons finalement choisi la largeur minimale d'éprouvette autorisant un calcul analytique du facteur d'intensité de contrainte, selon [Newman and Raju, 1981], au niveau du défaut semi-elliptique. Or l'expression de K développée par ces auteurs n'est valable que lorsque b est supérieure à $2c$, d'où une largeur d'éprouvette égale à 40 mm. La longueur entre les points d'ancrage de l'éprouvette sera de 100 mm conformément à celle des éprouvettes SENT, égale à dix fois l'épaisseur. De plus les éprouvettes SCT seront maintenues durant l'essai par des mors auto-serrants, afin d'éviter tout glissement nous avons prévu une prise de ces mors sur 50 mm. La longueur totale des éprouvettes SCT sera donc de 200 mm.

Nous allons maintenant aborder la question de la préfissuration en fatigue d'une éprouvette SCT. Celle-ci est plus délicate que pour une fissure rectiligne, car il faut gérer simultanément l'avancée de la fissure aux points A et C, associés aux dimensions a et c du défaut semi-elliptique (voir figure 1.41). [Corn, 1971] et [Pierce and Shannon, 1978] ont montré expérimentalement qu'il existe une unique courbe de fissuration, vers laquelle tendent tous les défauts qui se propagent en fatigue qu'elles que soient leurs dimensions initiales a_0 et c_0. Ce chemin de fissuration est cependant différent suivant que la propagation, par cyclage en fatigue, se fasse en traction ou en flexion.

Ce phénomène de courbe de fissuration unique a été mis en équation par [Newman and Raju, 1981], nous avons utilisé ce formalisme afin de prévoir la prefissuration en fatigue de nos éprouvettes. Ces auteurs fournissent également les expressions du facteur d'intensité de contrainte, selon le mode I d'ou-

verture de la fissure, aux points A et C d'un défaut semi-elliptique. Elles seront notées respectivement K_A et K_C et s'écrivent :

$$\begin{cases} K_A = (\sigma_t + H_A\ \sigma_b)\ \sqrt{\pi\ \dfrac{a}{Q}}\ M\ f_w \\ \\ K_C = (\sigma_t + H_C\ \sigma_b)\ \sqrt{\pi\ \dfrac{a}{Q}}\ M\ f_w\ S \end{cases} \tag{1.8}$$

Dans les expressions ci-dessus σ_t et σ_b désignent respectivement les contraintes de traction et de flexion appliquées à une éprouvette SCT. La relation permettant de calculer Q est donnée par :

$$Q = 1 + 1,464 \left(\frac{a}{c}\right)^{1,65} \quad \text{avec} \quad \left(\frac{a}{c} \leq 1\right)$$

De même M s'obtient par la formulation suivante :

$$M = M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t}\right)^4$$

$$\text{Avec} \begin{cases} M_1 = 1,13 - 0,09 \left(\dfrac{a}{c}\right) \\ \\ M_2 = -0,54 + \dfrac{0,89}{0,2 + (a/c)} \\ \\ M_3 = 0,5 - \dfrac{1}{0,65 + (a/c)} + 14 \left(1 - \dfrac{a}{c}\right)^{24} \end{cases}$$

Enfin pour déterminer complètement K_A et K_C il reste à exprimer f_w et S ainsi que H_A et H_C pour tenir compte de la flexion :

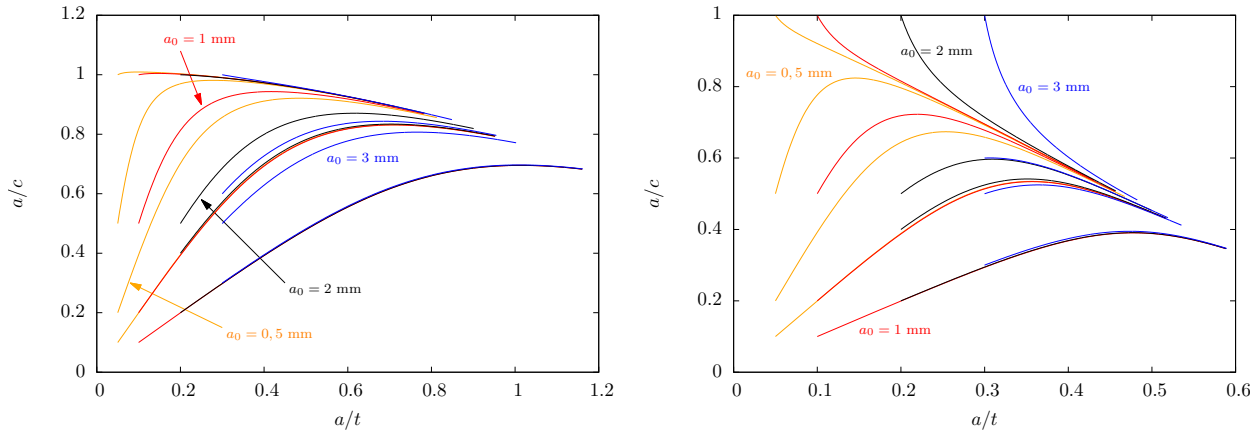
$$\begin{cases} f_w = \left[\sec\left(\dfrac{\pi c}{2b}\ \sqrt{\dfrac{a}{t}}\right)\right]^{1/2} \\ \\ S = \left[1,1 + 0,35 \left(\dfrac{a}{t}\right)\right]\ \sqrt{\dfrac{a}{c}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 1 + \left[\left(-1,22 - 0,12\dfrac{a}{c}\right)\ \dfrac{a}{t}\right] + \left[\left(0,55 - 1,05 \left(\dfrac{a}{c}\right)^{0,75} + 0,47 \left(\dfrac{a}{c}\right)^{1,5}\right)\ \left(\dfrac{a}{t}\right)^2\right] \\ \\ H_C = \left(1,1 - 0,34\ \dfrac{a}{t} - 0,11\ \dfrac{a}{c}\ \dfrac{a}{t}\right) \end{cases}$$

En notant da et dc l'avancée de la fissure par cyclage en fatigue respectivement aux points A et C, il est possible d'écrire en appliquant la loi de [Paris, 1964] :

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dN} = C_A\ \ (\Delta K_A)^n \\ \\ \dfrac{dc}{dN} = C_C\ \ (\Delta K_C)^n \end{cases} \tag{1.9}$$

A priori les constantes C_A et C_C devraient être égales, mais en réalité cela n'est pas le cas. En effet il faut tenir compte du fait que le point A est soumis à un état de déformation plane tandis



(a) Cas de la traction (b) Cas de la flexion

FIGURE 1.42 – Chemin de fissuration pour un cyclage en fatigue en traction ou flexion

qu'au niveau du point C règne un état de containte plane. Afin de prendre en compte cette différence, [Newman and Raju, 1981] propose d'utiliser la relation $C_C = O,9^n\ C_A$, celle-ci permet à partir de (1.9) de trouver le lien qui existe entre da et dc lors de la préfissuration par cyclage en fatigue :

$$da = \frac{C_A}{C_C}\left(\frac{\Delta K_A}{\Delta K_C}\right)^n dc = \left(\frac{\Delta K_A}{0.9\Delta K_C}\right)^n dc \tag{1.10}$$

Selon [Newman and Raju, 1981] une valeur de n égale à 4 permet de couvrir un large éventail de matériaux, par conséquent nous avons utilisé cette valeur pour notre alliage. Il est important de noter que la relation (1.9) s'applique uniquement à un matériau isotrope or l'alliage 2219 T87 que nous étudions est isotrope transverse. Nous avons néanmoins décidé d'utiliser cette relation, car elle permet une première approximation du chemin de préfissuration en fatigue de nos éprouvettes SCT.

En se fixant des valeurs initiales de a et c, notées a_0 et c_0, puis en incrémentant c par pas dc de 0,01 nous pouvons évaluer da en utilisant (1.10), et ainsi obtenir a et c qui sont alors injectés dans (1.8) afin de recalculer K_A et K_C. Ce calcul incrémental permet d'obtenir de proche en proche le chemin de fissuration pour les valeurs initiales a_0 et c_0. A partir d'une épaisseur t de 10 mm nous avons utilisé ce procédé de calcul pour différents rapports a_0/c_0 et a_0/t afin d'évaluer les chemins de fissuration correspondants. Les résultats obtenus sont présentés par la figure 1.42 pour un cyclage en fatigue effectué en traction et en flexion. Il existe bien une convergence vers un unique chemin de fissuration conformément aux résultats expérimentaux de [Pierce and Shannon, 1978].

La figure 1.42 montre que la préfissuration en traction conduit à une forme de défaut semi-elliptique quasiment circulaire avec a/c égal à 0,8 quelle que soit la valeur de a_0 et c_0. Le résultat d'une préfissuration en flexion converge vers un défaut semi-elliptique caractérisé par a/c et a/t proches de 0,5. Ces valeurs sont précisément celles que nous souhaitions obtenir à l'issue de la phase de propagation en fatigue. La norme ASTM E740 impose une longueur de préfissuration d'au moins 1,3 mm. Afin de remplir cette exigence nous sommes parti d'un défaut initial caractérisé par des valeurs de a_0 et c_0 égales respectivement à 3 mm et 6 mm.

Le principe de la préfissuration en fatigue des éprouvettes SCT est identique à celle utilisée pour les éprouvettes SENT décrit par la figure 1.39. Le cyclage se fera entre deux valeurs d'effort notées P_{max} et P_{min}, avec un rapport P_{min}/P_{max} égal à 0,1. La valeur de P_{max} est déterminée afin d'avoir en début de préfissuration un facteur d'intensité de contrainte maximal, entre K_A et K_C, identique à celui obtenu au début de la préfissuration des éprouvettes CT et dont la valeur est 6,6 MPa.$\sqrt{\text{m}}$. Afin de calculer K_A et K_C il faut exprimer σ_b en fonction de P dont la formulation à partir des notations

des figures 1.41 et 1.39 est :

$$\sigma_b = \frac{6M_b}{2bt^2} \quad \text{avec} \quad M_b = \frac{PS}{4} \quad \text{soit} \quad \sigma_b = \frac{3PS}{4bt^2}$$

En utilisant cette relation avec une longueur S de 80 mm, pour le défaut initial décrit ci-dessus, le facteur d'intensité de contrainte maximal est obtenu au point C, et vaut 6,6 MPa.$\sqrt{\text{m}}$ lorsque P est égal à 3,3 kN. Le cyclage en fatigue se fera donc entre 0,33 kN et 3,3 kN à une fréquence de 40 Hz. L'avancée de la fissure est uniquement suivie à la lunette binoculaire au niveau de la surface de l'éprouvette, puisque la propagation au point A est liée à celle du point C. Afin de faciliter cette opération de suivi, la surface a été polie puis trois traits de trusqin ont été tracés perpendiculairement à la direction de propagation. La préfissuration est alors interrompue lorsque la largeur $2c$ du défaut atteint 20 mm.

1.4.3.2 Résultats des essais

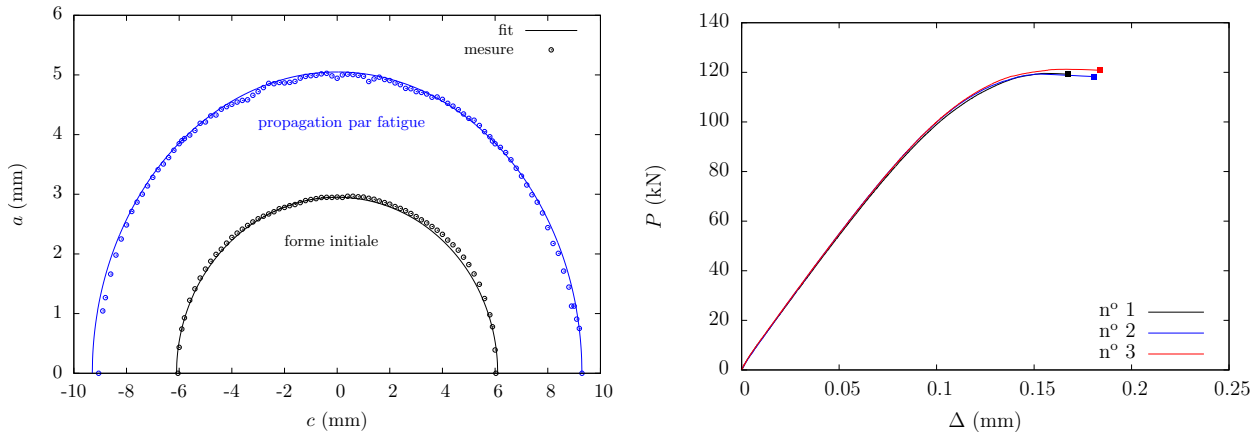
Trois éprouvettes SCT de type $T-S$ ont été soumises à un essai de traction avec une vitesse de déplacement de la traverse machine de 1 mm/min. Pour les éprouvettes SCT le sens de prélèvement $T-S$ signifie que l'éprouvette est soumise à un effort de traction selon T tandis que la propagation de la fissure, au point A, se fera selon le sens S. Le sens $L-S$ n'a pas été testé compte tenu de l'observation d'une bifurcation de la fissure pour les éprouvettes CT et SENT. Au cours de l'essai sont enregistrés la force appliquée à l'éprouvette et le déplacement Δ d'ouverture de la fissure défini sur la figure 1.41. Ce déplacement est mesuré à l'aide d'un extensomètre de base 15 mm centré sur la fissure semi-elliptique. L'épaisseur et la largeur des éprouvettes sont mesurées avant essai, au niveau de la section contenant le défaut, permettant ainsi de connaître la section initiale S_0. La figure 1.43b présente pour chaque éprouvette la courbe de la contrainte F/S_0 en fonction du déplacement d'ouverture Δ. Nous pouvons constater que les trois courbes obtenues sont quasiment superposables, attestant ainsi de la reproductibilité de l'essai mais surtout de celle de la préfissuration par fatigue. Par contre comme pour les éprouvettes SENT il n'existe pas de propagation stable de la fissure.

L'avancée de la fissure par fatigue a été mesurée sur le faciès de rupture en de nombreux points comme le montre la figure 1.43a. Puis ce nuage de points a été approximé par un profil semi-elliptique. Nous avons procédé de même pour le défaut initial usiné par électro-érosion. Le tableau 1.11 résume les différentes dimensions ainsi obtenues. Nous pouvons constater que la préfissuration est reproductible et qu'elle a bien été réalisée sur une longueur supérieure à 1,3 mm conformément aux exigences de ASTM E740.

Eprouvettes SCT	a_0 (mm)	c_0 (mm)	a (mm)	c (mm)	P_Q (kN)	P_{max} (kN)	K_Q (point A) MPa.$\sqrt{m}$	K_{IE} (point A) MPa.$\sqrt{m}$
n° 1	2,94	6,05	5,05	9,3	100,8	119,6	31,5	37,4
n° 2	2,95	6,10	5,05	9,3	100,7	119,3	31,5	37,3
n° 3	2,95	6,10	5,05	9,0	102,6	121,3	31,6	37,3

TABLE 1.11 – Dimensions des défauts et calcul de K_{IE} pour les éprouvettes SCT

Nous allons clore ce paragraphe consacré aux éprouvettes SCT par la détermination de la ténacité K_{IE} dont il a déjà été question précédemment. Signalons avant de poursuivre que la notation K_{IE} est employée dans l'étude menée par [Orange, 1975] dont est issue la norme ASTM E740 dans laquelle cette même ténacité est dénommée K_{Ie}. Dans la suite de notre étude nous utiliserons la notation d'origine c'est-à-dire K_{IE}. Selon [Orange, 1975] la ténacité au sens de la norme ASTM E399, désignée par K_{IC}, est basée sur une extension de 2% de la fissure. La ténacité K_{IE} est déterminée à partir de l'effort maximal appliqué à l'éprouvette SCT au delà duquel il y a amorçage de la fissure et par conséquent



(a) Préfissuration par fatigue (b) Propagation du défaut en déchirure ductile

FIGURE 1.43 – Préfissuration et propagation des défauts semi-elliptiques des éprouvettes SCT

diminution de l'effort. Il n'existe aucune raison a priori pour que ces deux approches fournissent la même valeur de la ténacité. Par contre il semble raisonnable d'utiliser la ténacité K_{IC} pour les fissures rectilignes et K_{IE} pour les défauts semi-elliptiques. Nous avons également utilisé la norme ASTM E1820 afin d'obtenir la ténacité K_Q suivant la procédure décrite pour les éprouvettes CT au paragraphe 1.4.1.4 (voir page 35).

Les formules proposées par la norme ASTM E740 afin de calculer le facteur d'intensité de contrainte sont issues de [Murakami, 1987]. La seule différence qui existe avec celles fournies par 1.8 est l'absence de f_w. A partir des dimensions des défauts semi-elliptiques résumés dans le tableau 1.11 la valeur moyenne de K_{IE} obtenue est de 37,3 MPa.$\sqrt{m}$. Il faut préciser que la valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte se trouve au point A de la fissure semi-elliptique (voir figure 1.41). Cependant il n'est pas certain que cette valeur soit indépendante des dimensions de l'éprouvette et de la taille du défaut et par conséquent transposable à un défaut quelconque. En effet d'une part la taille de nos éprouvettes SCT ne respecte pas l'exigence $b > 5 \times c$ de la norme ASTM E740. D'autre part celle-ci spécifie de tester plusieurs tailles de défauts semi-elliptiques afin de vérifier l'indépendance de K_{IE} vis à vis de a et c.

Le tableau 1.12 présente une synthèse des ténacités K_Q et K_{IE} obtenues pour les éprouvettes CT, SENT et SCT. Seules les valeurs de K_Q issues des essais sur éprouvettes CT20 peuvent être transformées en K_{IC} compte tenu des exigences de la norme ASTM E1820. Les valeurs de K_Q et K_{IE} calculées pour les éprouvettes SENT sont respectivement plus faible et plus importante que la valeur de K_{IC} déterminée à partir des éprouvettes CT20. Par conséquent nous pouvons nous attendre à un amorçage de la fissure sur les éprouvettes $SENT$ pour un effort P compris entre P_Q et P_{max}. Par contre dans le cas des éprouvettes SCT les ténacités K_Q et K_{IE} sont toujours plus élevées que K_{IC}. Il apparaît donc que la ténacité n'est pas une propriété intrinsèque du matériau mais qu'elle dépend de la forme de la fissure. Selon la norme ASTM E740, c'est d'ailleurs l'intérêt des éprouvettes SCT que de permettre d'augmenter la valeur de la ténacité à utiliser pour la prévision de l'amorçage des fissures semi-elliptiques.

	CT20		CT10			SENT	SCT
	$L-T$	$T-L$	$L-T$	$T-L$	$T-S$	$T-S$	$T-S$
K_Q (MPa.$\sqrt{\text{m}}$	33	28	29,8	26,6	26,9	23,7	31,5
K_{IE} (MPa.$\sqrt{\text{m}}$	–	–	–	–	–	29,2	37,3

TABLE 1.12 – Synthèse des ténacités K_Q et K_{IE} obtenues pour les éprouvettes CT, SENT et SCT

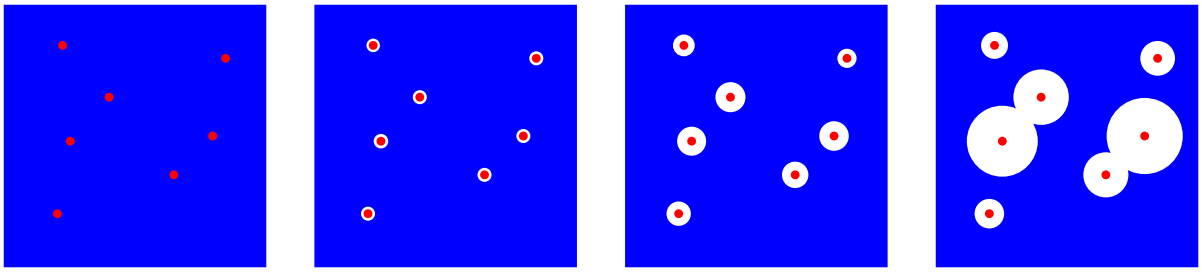


FIGURE 1.44 – Micromécanisme de la rupture ductile

1.5 MICROMECANISMES DE RUPTURE

Le but de cette partie est d'établir un scénario de rupture pour les différentes éprouvettes testées précédemment. Il est donc nécessaire de comprendre la manière dont va se produire la rupture au niveau microscopique. Il nous faudra notamment déterminer le rôle que vont jouer dans ce scénario de rupture les phases intermétalliques Al_2Cu, dont la forme et la distribution ont été caractérisées dans la première partie de ce chapitre, consacrée à la présentation de notre alliage 2219 T87.

D'après les nombreux exemples décrits dans [Besson, 2010] la rupture de cet alliage devrait être a priori de nature ductile. Nous rappelons que le micromécanisme de la rupture ductile s'articule autour de trois phases illustrées par la figure 1.44. Il est utile de préciser ici que la rupture ductile n'est pas forcément liée à un comportement élasto-plastique d'un matériau. En effet un matériau peut se déformer plastiquement et périr par rupture fragile. Ce qui caractérise la rupture ductile, c'est l'endommagement basé sur les trois phases mentionnées précédemment.

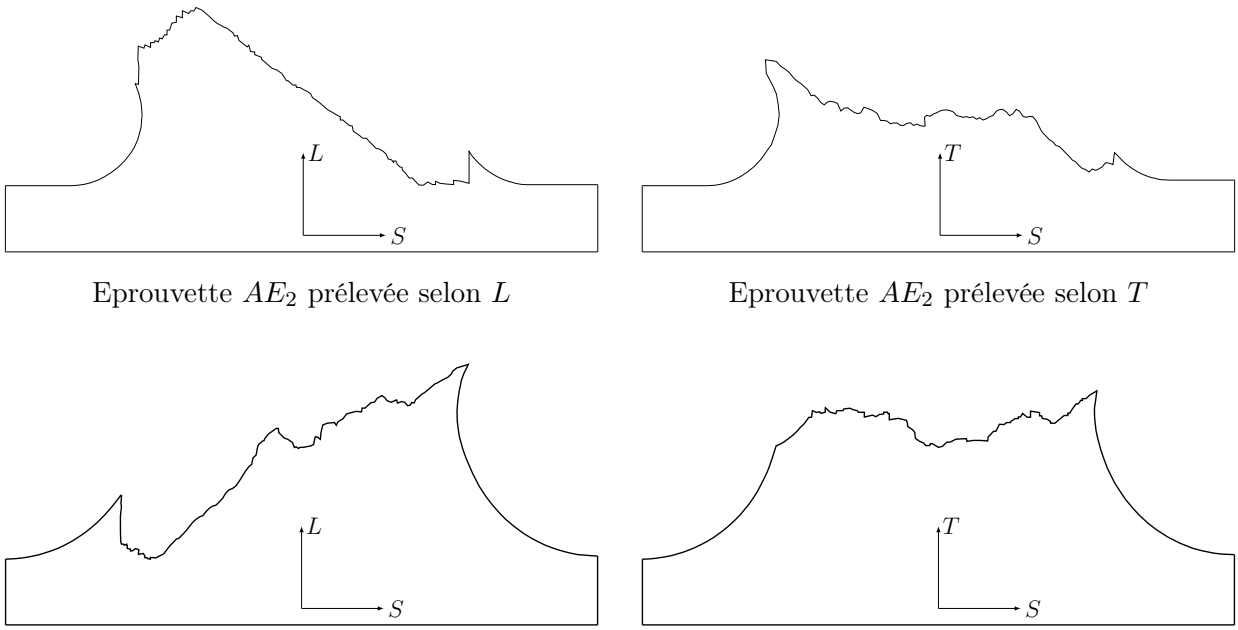
Celles-ci sont décrites dans [Besson, 2010], le processus débute par une phase de germination des cavités autour de précipités intermétalliques, puis se poursuit par une phase de croissance de ces cavités, et enfin se termine par une phase de coalescence entraînant brutalement la rupture. Afin de confirmer et enrichir ces hypothèses nous avons mené notre investigation par des observations des faciès de rupture au Microscope Electronique à Balayage (MEB), puis par l'analyse au MEB de la répartition de la porosité sur des coupes polies.

1.5.1 Observation des faciès de rupture

Nous souhaitons commencer ces observations par les éprouvettes axisymétriques entaillées car elles sont généralement employées pour caractériser la rupture ductile. En effet à partir d'un certain niveau de chargement le taux de triaxialité devient constant et maximum au centre de l'éprouvette. De plus sa valeur varie en fonction du rayon d'entaille, il est donc possible en usinant des éprouvettes avec différents rayons d'analyser l'influence du taux de triaxialité sur la rupture.

Or celui-ci pilote la croissance des cavités par conséquent le centre de l'éprouvette va être le siège privilégié du développement des différentes étapes de la rupture ductile. Ainsi, suite à la coalescence, il apparaît au centre de l'éprouvette une fissure qui se propage perpendiculairement au sens de traction. Lorsqu'elle parvient à proximité des bords de l'éprouvette elle va obliquer de 45°, engendrant alors des lèvres de cisaillement.

Ce faciès de rupture perpendiculaire à la direction de sollicitation, dont les extrémités présentent des lèvres de cisaillement, est caractéristique d'une rupture en « cup-cone ». Dans notre cas comme le montre la figure 1.45 nous obtenons ce type de faciès uniquement lorsque les éprouvettes AE_2 et AE_4 sont soumises à un effort de traction suivant T. En fait cet aspect du faciès est dû à l'alignement des précipités intermétalliques Al_2Cu suivant la direction L comme l'indique la figure 1.46 sur laquelle



Eprouvette AE_2 prélevée selon L — Eprouvette AE_2 prélevée selon T

Eprouvette AE_4 prélevée selon L — Eprouvette AE_4 prélevée selon T

FIGURE 1.45 – Profil des faciès de rupture des éprouvettes AE_2 et AE_4

les « lignes » de précipités sont nettement visibles. Lorsque les éprouvettes sont sollicitées dans la direction L nous obtenons un faciès de rupture en « toit d'usine » pour reprendre l'expression employée dans [Achon, 1994].

Les remarques précédentes ont été faites à partir d'un examen visuel des faciès de rupture des éprouvettes AE_2 et AE_4 dont l'analyse va maintenant se poursuivre par des observations au MEB. Celles-ci ont été effectuées au centre des éprouvettes AE et sont présentées par la figure 1.47 qui occupe une page entière. En haut de cette page deux clichés photographiques, juxtaposés, fournissent une vue assez large (grandissement 200x) du centre du faciès de rupture des éprouvettes AE_2, prélevées suivant les sens L et T. Les deux clichés suivants, situés en milieu de page, constituent un agrandissement (500x) des deux vues précédentes. Quant aux deux dernières photographies, disposées en bas de page, elles correspondent à un grandissement de 500x des faciès de rupture des éprouvettes AE_4, prélevées suivant les sens L et T.

Il existe pour les éprouvettes AE_2 et AE_4 prélevées suivant le sens L de nombreuses cupules. La taille de celles-ci, de l'ordre du micron, semble confirmer un amorçage de la germination de ces petites cavités sur les précipités intermétalliques Al_2Mn_3Cu. Nous pouvons également constater la trace de décohésion aux joints de grains et la présence de rares cupules, dont la taille nettement plus importante correspond à une germination à partir des phases intermtalliques Al_2Cu. Ces grosses cupules sont reliées entre elles par les cupules de petite taille.

Les éprouvettes prélevées suivant le sens T présentent de nombreuses grosses cupules associées aux précipités intermétalliques Al_2Cu. Souvent nous trouvons plusieurs « morceaux » au fond des cavités, ce constat atteste d'une part une distribution en groupes de quelques précipités, et d'autre part une germination qui s'effectue par fragmentation du précipité, plutôt que par décohésion entre la matrice et le précipité. Nous observons comme pour le sens L une décohésion aux joints de grains, dont l'empreinte confirme la taille des grains, dans le plan $L - S$, évaluée lors de la première partie de ce chapitre. En effet ils sont très allongés dans le sens L et peu épais dans le sens S. Les grosses cupules sont alignées suivant le sens L, elles forment comme de longs chapelets reliés entre eux par les grains ayant subis une décohésion, et plus rarement par des grappes de petites cupules.

Toutes ces observations confirment le caractère ductile de la rupture et permettent de distinguer, suivant le sens de prélèvement, des micromécanismes distincts. Ces derniers expliquent le comportement

anisotrope de la rupture macroscopique, et trouvent leur origine dans la distribution différente des précipités intermétalliques selon les sens L et T. De plus il semblerait que les deux populations de cupules co-existent dans des proportions complémentaires. Ainsi de manière intuitive nous pouvons dire que plus il y a de petites cupules moins il y a de grosses et inversement, comme si leur somme devait atteindre une certaine valeur, correspondant à une porosité critique au delà de laquelle se produit la rupture.

Précisons qu'il s'agit là d'une intuition qui n'est pas vérifiée par une approche numérique. Cette vérification est d'ailleurs loin d'être simple car le calcul de la porosité pose problème pour un matériau présentant simultanément des petites et des grosses cavités. En effet la porosité est définie comme la fraction d'un volume de vide sur un volume de matrice. Ainsi la difficulté est liée au fait qu'un volume de matrice pour la porosité liée aux grosses cavités englobera forcément des petites cavités et donc de la porosité en puissance. A l'inverse le choix d'un volume de matrice pour calculer la porosité générée par les petites cavités ne permettra pas le calcul de la porosité due aux grosses cavités. Dans notre cas la solution tient au fait que les petites cavités apparaissent tardivement et peuvent donc être modélisées par la phase de coalescence.

Nous pouvons à ce stade présenter le scénario de rupture suivant pour les éprouvettes AE. La germination semble s'effectuer en premier lieu sur les précipités intermétalliques Al_2Cu puis le processus se poursuit par une phase de croissance, gérée par le taux de triaxialité et la déformation plastique équivalente. Ensuite survient, probablement peu de temps avant la rupture, la germination des petites porosités avec une faible phase de croissance, cette étape peut de fait s'apparenter à la coalescence. En effet lorsque les grosses cupules ne sont pas suffisamment proches, comme dans le cas des éprouvettes prélevées selon le sens L, l'apparition des petites cupules permet de les relier entre elles et de conduire à la rupture par coalescence. Il existe probablement de petites cupules aux joints de grains qui lors de la coalescence « déchaussent » les grains. Ceci est d'ailleurs confirmée par la présence de traces de ces petites cupules sur de nombreuses empreintes de grains.

Les hypothèses évoquées ci-dessus sur la manière dont se produit la rupture sont valables pour les éprouvettes AE_2 et AE_4. Elles sont consolidées par la présence d'un nombre plus important de petites cupules pour les éprouvettes AE_4 par rapport aux éprouvettes AE_2, dans le cas d'un prélèvement selon le sens T. En effet la croissance des grosses cupules est moins importante pour les éprouvettes AE_4 compte tenu d'un taux de triaxialité plus faible, d'où un complément plus important en petites cupules afin d'atteindre la porosité critique. Nous allons maintenant analyser les faciès de rupture des éprouvettes plates entaillées EU_2 et EU_4, afin de confirmer ou infirmer le scénario de rupture que nous venons d'esquisser à partir des éprouvettes AE_2 et AE_4.

Mais auparavant il nous faut dire un mot à propos des faciès de rupture des éprouvettes AE_2 et AE_4 prélevées selon le sens D, défini dans le plan (L,T) par un angle de 45° par rapport à la direction L. Les clichés issus de l'analyse de ces faciès sont fournis dans l'annexe B. Ils ont été réalisés au centre des éprouvettes AE et sont présentés sur une page unique comme pour les sens L et T. Il font intervenir différents grandissements (200x à 1000x) afin de fournir une vue d'ensemble mais également des vues de détail de certaines zones. Ces clichés montrent que les faciès de rupture des éprouvettes AE prélevées dans la direction D héritent de certains caractères observés selon le sens L et d'autres issus du sens T. Ainsi l'éprouvette AE_2 dans le sens D présente une décohésion aux joints de grains, dont la forme est similaire au sens L, associée à des grosses cupules caractéristiques du sens T. Pour l'éprouvette AE_4 nous observons l'inverse c'est-à-dire de nombreuses petites cupules héritées du sens L et des grains « déchaussés » de forme allongée comme pour le sens T.

Les éprouvettes EU prélevées suivant le sens L présentent un plan de rupture faisant un angle d'environ 45° par rapport au plan contenant le sens de l'épaisseur et la direction de sollicitation. Pour les éprouvettes soumises à un effort de traction dans la direction T le faciès de rupture a une forme en chevron. De plus dans ce cas nous pouvons clairement distinguer les « lignes » de précipités intermétalliques Al_2Cu comme pour les éprouvettes axisymétriques entaillées. La distribution de ces

précipités dans le plan $L - S$ joue décidément un rôle prépondérant dans la rupture.

La figure 1.48 occupe une page entière dont les différents clichés présentent les faciès de rupture des éprouvettes EU_4 prélevées selon les sens L et T. Le choix de plusieurs grandissements (200x à 1000x) se justifie par le fait de disposer d'une vue relativement large de la répartition des cupules, tout en permettant d'apprécier leur taille. Précisons que ces clichés ont été pris au voisinage de l'entaille où est censée s'amorçer la rupture. Nous n'avons pas fourni de clichés des éprouvettes EU_2 car elles présentent des faciès similaires aux éprouvettes EU_4. D'autre part il nous paraissait plus intéressant d'analyser les éprouvettes EU_4, car elles sont plus éloignées des éprouvettes AE_2 et AE_4, en termes de taux de triaxialité. Ainsi cet état « limite » permettra une meilleure validation de nos hypothèses relatives aux micromécanismes de rupture, élaborées à partir des éprouvettes axisymétriques entaillées.

L'observation des différents clichés montre que pour les éprouvettes EU_4 les cupules qui prennent naissance sur les phases intermétalliques Al_2Cu sont moins grosses que celles des éprouvettes AE_4. Ceci est particulièrement frappant pour un prélèvement de l'éprouvette selon L et reste vrai pour le sens T, mais nécessite un examen plus attentif. Toutefois afin de supprimer tout scepticisme chez le lecteur, nous avons juxtaposé dans l'annexe C les clichés des éprouvettes EU_4 et AE_4 afin de mieux pouvoir comparer les tailles respectives des cupules.

Cette conclusion confirme les hypothèses effectuées à partir des éprouvettes axisymétriques entaillées. En effet les cupules, dont la taille est la plus importante, s'amorçent à partir des composés intermétalliques Al_2Cu, puis entament une phase de croissance, au terme de laquelle leur taille sera moins importante que dans le cas des éprouvettes axisymétriques entaillées, compte tenu d'un taux de triaxialité plus faible. En paralèlle, à un instant donné, les petites cupules s'initient sur les précipités Al_2Mn_3Cu, mais avant la phase de coalescence elles vont devoir croîtrent, afin de compenser la croissance plus réduite des grosses cupules, toujours dans le but d'atteindre un taux de porosité critique.

D'après l'analyse des faciès des éprouvettes AE nous avons fait de la décohésion des grains une conséquence de la phase de coalescence des cupules c'est-à-dire du processus de rupture ductile. Dans leur étude sur la rupture d'un alliage 2219 T62 [Srivatsan et al., 2008] proposent d'expliquer par la rupture fragile, un aspect de leur faciès de rupture relativement semblable à nos grains « déchaussés », bien que les tailles de grains ne soient pas comparables.

Dans le cas de notre alliage la décohésion aux joints de grains ne s'apparente pas à de la rupture fragile, car le nombre de grains « déchaussés » pour l'éprouvettes EU_4, prélevées selon T, est plus important que pour l'éprouvette AE_4. Or en admettant qu'un critère de rupture fragile se base sur une valeur seuil de la contrainte principale maximale, celle-ci sera plus élevée pour l'éprouvette AE_4 que pour l'éprouvette EU_4. Nous devrions donc observer plus de décohésion aux joints de grains pour les éprouvette AE_4 que pour les éprouvettes EU_4 or ce n'est pas le cas.

L'analyse des faciès de rupture va se poursuivre par les éprouvettes de déformation plane (DP), dont l'intérêt est de présenter un état de déformation proche de celui du cisaillement, caractérisé par une valeur nulle du paramètre de Lode, bien que le taux de triaxialité ne soit pas nul. L'observation au MEB, des faciès des éprouvettes DP, va ainsi nous permettre d'évaluer l'impact du cisaillement au niveau microscopique. Par conséquent nous pourrons éventuellement compléter nos hypothèses, relatives aux micromécanismes de rupture, élaborées à partir de l'examen des éprouvettes EU et AE.

La figure 1.49 présente, sur une page entière, les différents clichés, issus d'une obervation de la zone centrale des éprouvettes DP après rupture. Conformément à la disposition retenue pour les éprouvettes EU_4, les deux clichés du haut fournissent une vue relativement large (200x) du faciès de rupture, pour les sens de prélèvement L et T. Puis en milieu de page, figure un agrandissement à 500x des deux vues précédentes, afin de mieux distinguer la taille des cupules. Enfin les deux clichés du bas de page, constituent une comparaison, à un fort grandissement (1000x), de la taille des petites cupules entre les éprouvettes DP et AE_2, prélevées selon le sens L.

L'effet du cisaillement s'observe essentiellement pour l'éprouvette DP sollicitée suivant le sens L.

De plus il est localisé dans la zone centrale de l'éprouvette où s'initie la rupture. Il se traduit, au niveau microscopique, par une succession de marches de très faible amplitude. Pour l'éprouvette DP, prélevée selon T, l'effet microscopique du cisaillement semble annihilé par la distribution particulière des phases intermétalliques, selon un alignement dans le sens L. En effet, les clichés spécifiques à cette éprouvette sont assez semblables à ceux consacrés aux éprouvettes AE et EU.

La présence d'une myriade de petites cupules sur le faciès de l'éprouvette DP, prélevée selon L, semble également être due à l'effet microscopique du cisaillement. En fait, la particularité du cisaillement est de produire des cupules de très faible taille, comme le démontre la comparaison avec celle des plus petites cupules observées jusqu'à présent, sur le faciès de l'éprouvette AE_2 prélevée selon L. Ces très petites cupules se retrouvent, en beaucoup moins grande quantité, sur le faciès de l'éprouvette DP prélevée selon T, où leur disposition en amas de faible dimension permet de relier les plus grosses cupules entre elles.

Nous allons terminer ce paragraphe consacré à l'observation des faciès de rupture par l'analyse des éprouvettes fissurées et plus particulièrement des éprouvettes CT. Nous avons testé cette géométrie suivant différents sens de pélèvement à savoir $L-T$, $T-L$, $T-S$ et $L-S$. Compte tenu du comportement atypique du sens $L-S$ nous avons effectué des observations uniquement pour les sens $L-T$, $T-L$ et $T-S$. La figure 1.50 fournit, sur une page entière, les différents clichés, issus de l'obervation des faciès de rupture des éprouvette CT. Nous présentons pour chaque sens de prélèvement une photographie à un grandissement faible (x100) et une autre à un grandissement plus fort (x500) afin de pouvoir disposer d'une vision d'ensemble et d'une vue de détail. Toutes les observations ont été réalisées au centre des éprouvettes CT où est sensée s'initier la rupture, puisque le facteur d'intensité de contrainte est maximum pour cette localisation compte tenu de l'hypothèse de déformation plane.

Nous retrouvons suite à l'observation du sens $L-T$ les mêmes éléments que ceux issus de l'analyse des éprouvettes EU prélevées selon L. En effet nous constatons la présence de petites cupules amorcées sur les précipités intermétalliques Al_2Mn_3Cu permettant de relier entre elles les grosses cupules ayant pris naissance sur les phases intermétalliques Al_2Cu. Il existe également une décohésion aux joints de grains dont l'empreinte présente toutefois davantage de traces de petites cupules, laissant à penser que la phase de croissance de ces dernières est plus importante que pour les éprouvettes EU. Ceci n'est pas surprenant puisque le taux de triaxialité associé à une éprouvette CT est plus important que celui lié à une éprouvette EU. La vue d'ensemble pour le sens $L-T$ montre que la surface du faciès de rupture n'est pas plane, elle présente un aspect chahuté attesté par une faible profondeur de champ.

Cette observation peut être reliée à la présence de fissures visibles sur le cliché au grandissement 100x (voir cliché en haut à gauche de la figure 1.50). Nous pensons que celles-ci sont des vestiges d'une tentative de la fissure à bifurquer de 90° pour suivre les alignements des précipités intermétalliques Al_2Cu du sens L. Selon [Blauel, 1979] le processus d'endommagement en pointe de fissure se traduit par un émoussement de celle-ci au cours duquel la périphérie de la pointe de fissure va rencontrer un précipité ou un petit groupe de précipités. Or il règne au niveau de la pointe de fissure un taux de triaxialité élevé dont la conséquence va être une croissance rapide, suivie d'une coalescence des cavités engendrées par ces précipités qui conduit de proche en proche à une propagation de la fissure. Dans le cas de notre alliage la répartition alignée et peu espacée des précipités intermétalliques Al_2Cu suivant le sens L va inciter la fissure à vouloir se propager dans ce sens. Elle y parviendra pour les éprouvettes de type $L-S$ compte tenu d'un espacement important des précipités selon S ne permettant pas en quelque sorte de compenser les tentatives de propagation de la fissure selon L. Par contre pour les éprouvettes $L-T$ la distance entre les précipités dans le sens T permettra d'assurer une propagation de la fissure suivant cette direction.

L'observation du faciès des éprouvettes de type $T-L$ conduit à des remarques similaires à celles mentionnées pour les éprouvettes EU prélevées selon le sens T. Ainsi il existe une majorité de grosses cupules reliées entre elles par quelques petites cupules. De plus nous pouvons constater une décohésion aux joints de grains, caractérisée par des empreintes très allongées selon le sens L et de dimension

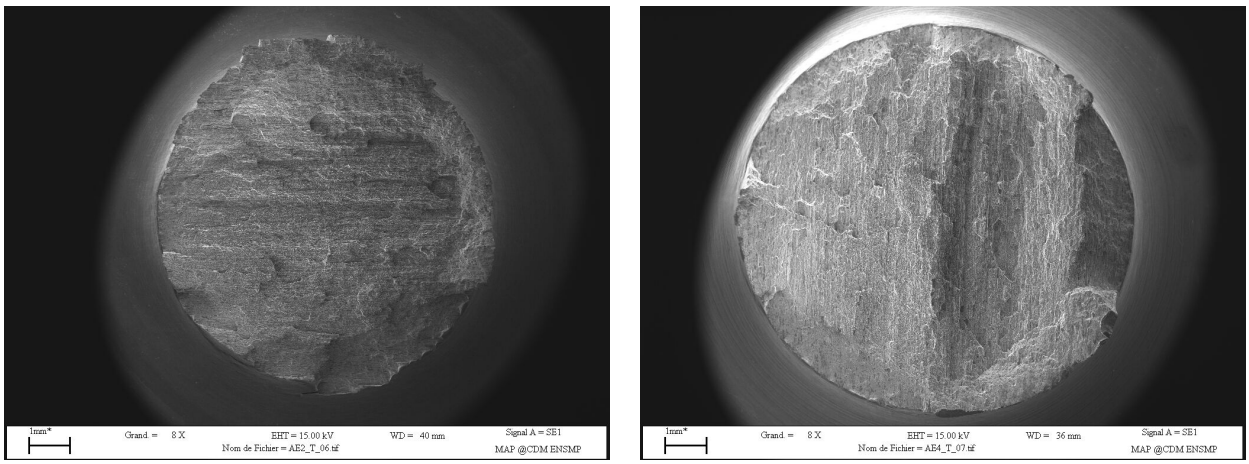


FIGURE 1.46 – Vue des faciès de rupture des éprouvettes AE_2 et AE_4 sollicitées suivant T

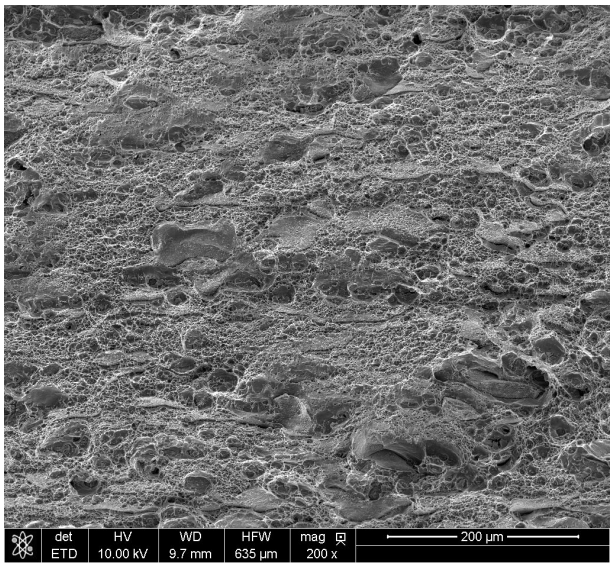
fort réduite selon S, confirmant ainsi la caractérisation de la taille des grains, dans le plan (L, S), réalisée dans la première partie de ce chapitre. Sur le cliché avec un grandissement de 100x nous pouvons clairement distinguer l'alignement des grains et des phases intermétalliques selon le sens L qui explique que la propagation de la fissure soit facilitée dans ce sens.

Notons la présence d'une fissure importante sur le cliché en bas à gauche de la figure 1.50. Ceci semble confirmer l'hypothèse qu'une fissure, sensée se propager selon la direction S, cherche à bifurquer selon le sens de traction, c'est-à-dire à 90°. Elle y parviendra pour une sollicitation selon L compte tenu de l'alignement des précipités intermétalliques Al_2Cu dans cette direction et de leur faible espacement. En fait le faciès des éprouvettes de type $T-S$ correspond à une rotation de 90° de celui des éprouvettes de type $T-L$, en effet dans les deux cas la fissure se propage dans le plan (L, S). Mais dans un cas cette propagation se fait selon L et dans l'autre suivant S. L'analyse des éprouvettes CT, effectuées au paragraphe 1.4.1.5, a montré que les courbes R pour ces deux types d'éprouvettes sont des droites parallèles, c'est-à-dire de même coefficient directeur. Ainsi elles possèdent la même résistance à la déchirure ductile, ceci paraît cependant surprenant compte tenu de la distribution caractéristiques des précipités intermétalliques selon L. En effet comment est-il possible que L et S joue le même rôle vis-à-vis de la propagation de la fissure ? La seule explication possible est de considérer que le sens L joue également un rôle dans la propagation suivant S. La fissure se propage suivant L puis avance ensuite par à coups selon S comme le laisse à penser le relief perturbé du faciès de rupture des éprouvettes de type $T-S$.

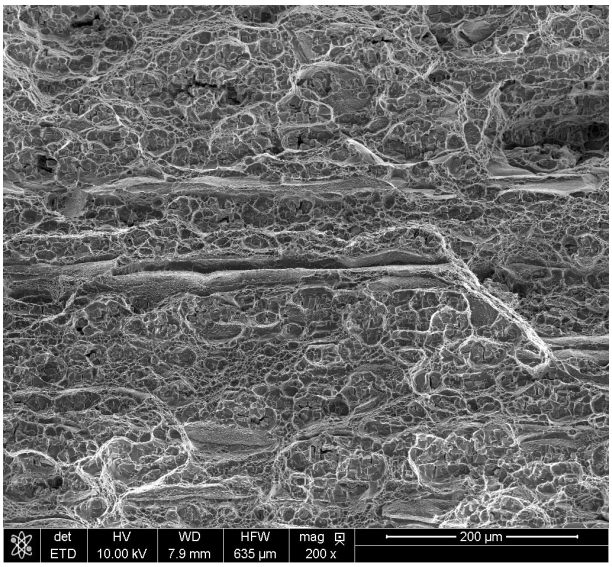
1.5.2 Analyse de la porosité à l'instant de la rupture

Ce paragraphe va débuter par l'étude de la répartition de la porosité, pour les éprouvettes AE_2 et AE_4, à partir de coupes polies longitudinales, identiques à celles présentées par la figure 1.45. Nous rappelons que ces échantillons ont été polis à l'aide de papiers abrasifs de grains de plus en plus fins, jusqu'à l'obtention finale d'un aspect miroir à l'aide de deux draps de granulométrie 3 μm et 1 μm. Les observations effectuées au MEB visent simplement à identifier la zone d'amorçage de la rupture, et la distribution qualitative de la porosité, afin de servir de base pour le calibrage des paramètres du modèle d'endommagement.

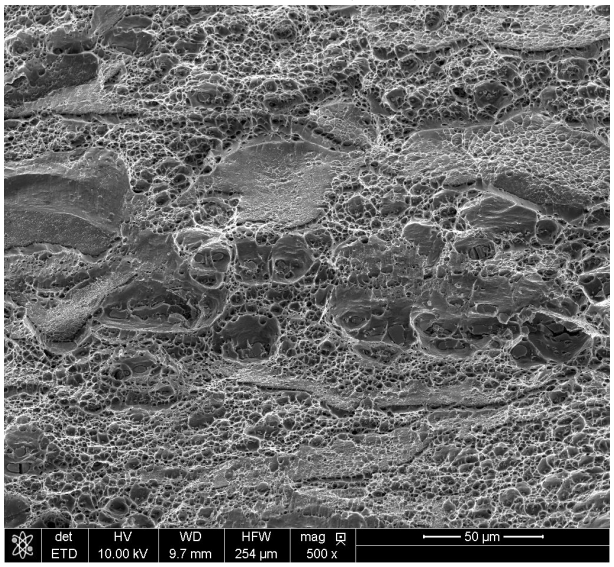
Nous n'avons pas entrepris une démarche de caractérisation quantitative des porosités comme dans [Achon, 1994] et [Lautridou and Pineau, 1981] car notre objectif est différent. En effet nous ne cherchons pas à relier la ténacité à la distribution des précipités intermétalliques, mais seulement à prévoir dans un premier temps l'amorçage de la fissure pour les éprouvettes CT. Par conséquent une caractérisation qualitative de la porosité est suffisante dans le cadre de l'utilisation d'un modèle phénoménologique de l'endommagement.



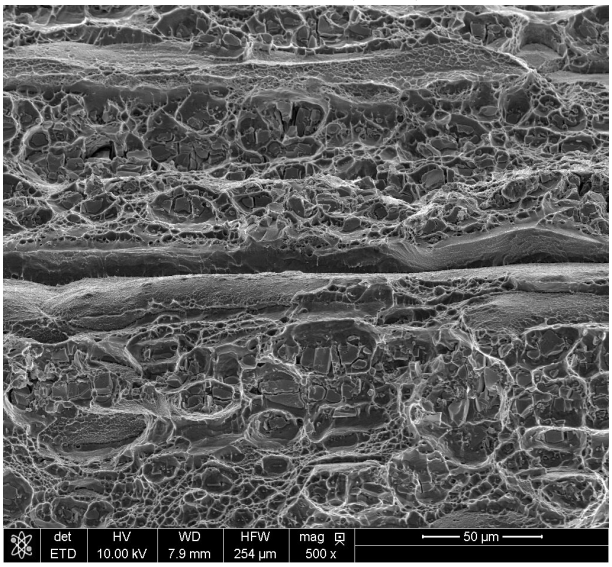
AE_2 sens L (200x)



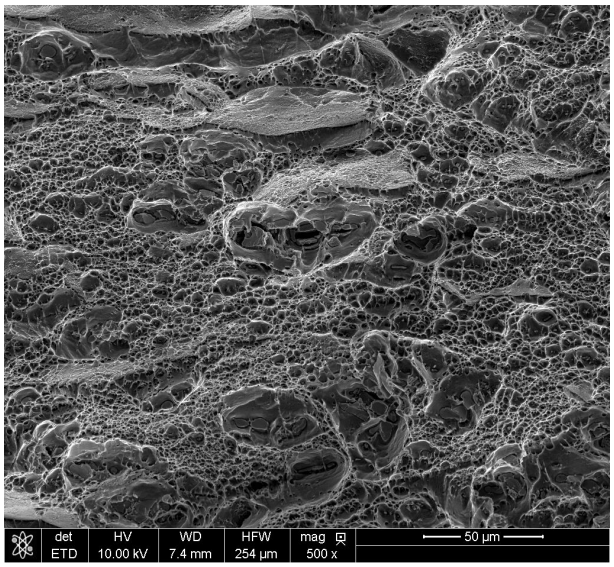
AE_2 sens T (200x)



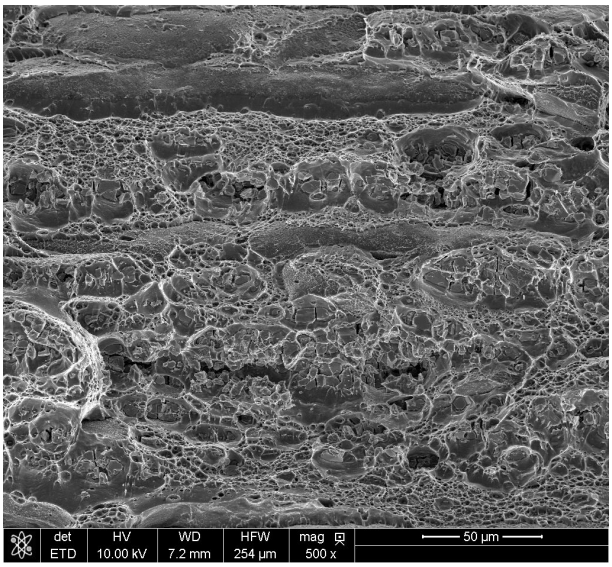
AE_2 sens L (500x)



AE_2 sens T (500x)

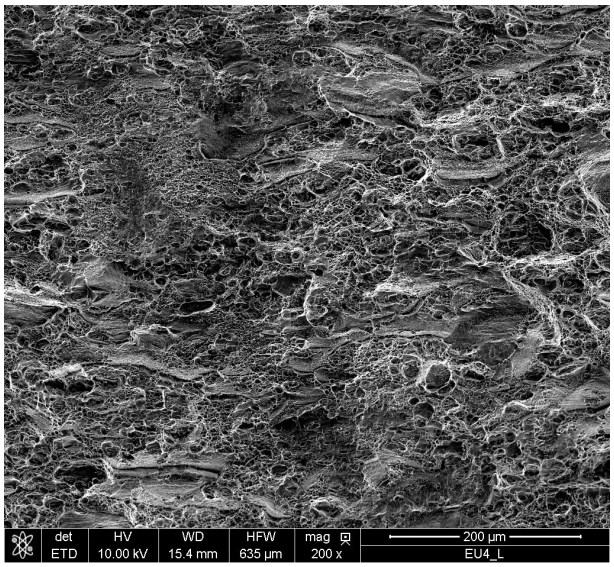


AE_4 sens L (500x)

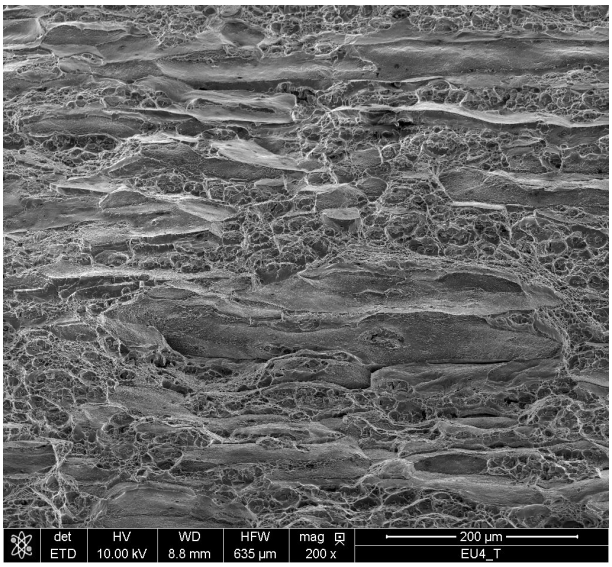


AE_4 sens T (500x)

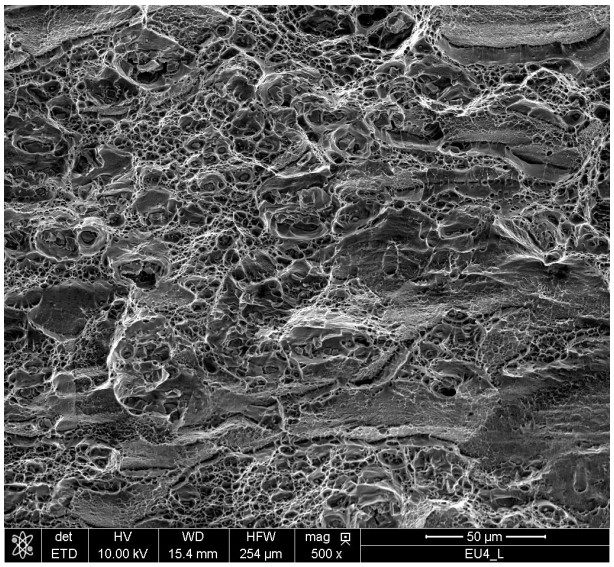
FIGURE 1.47 – Observations au MEB des faciès de ruptures des éprouvettes AE_2 et AE_4



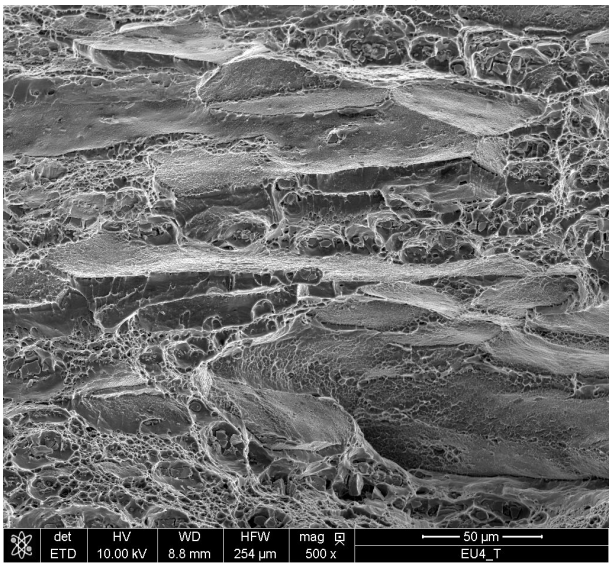
EU_4 sens L (200x)



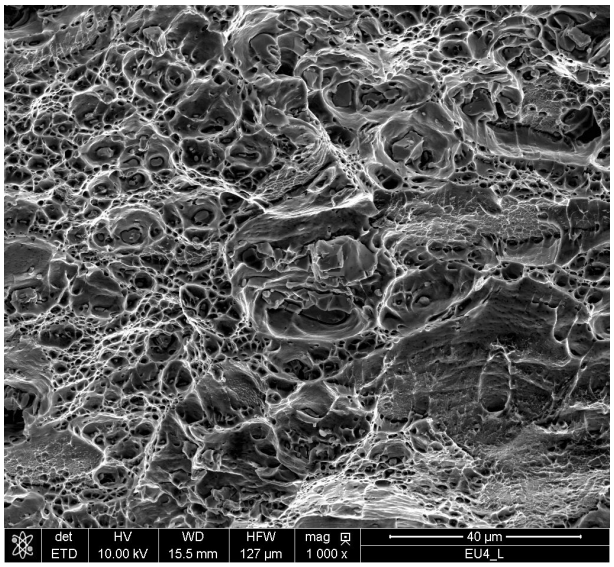
EU_4 sens T (200x)



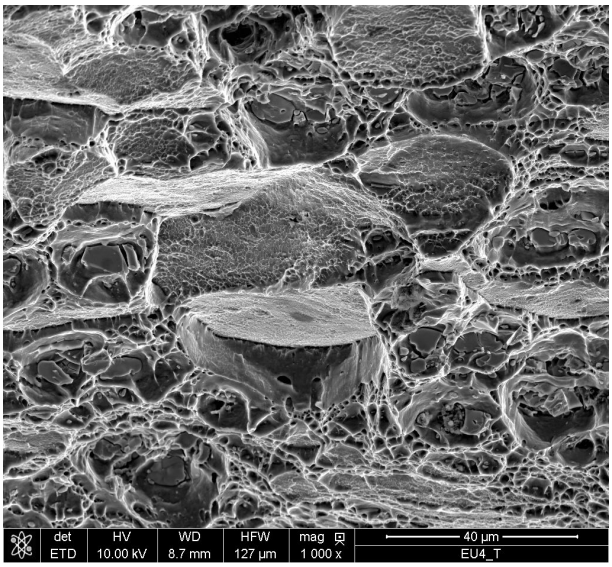
EU_4 sens L (500x)



EU_4 sens T (500x)

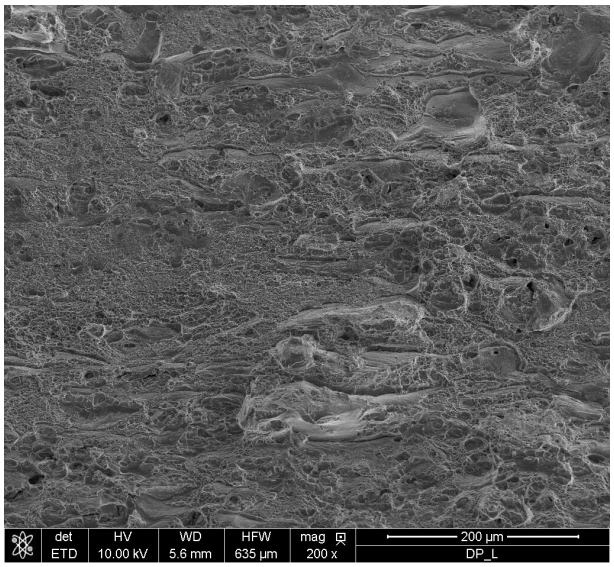


EU_4 sens L (1000x)

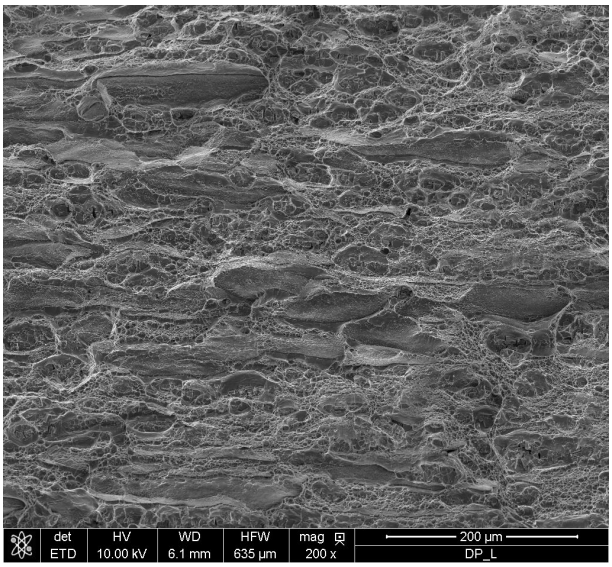


EU_4 sens T (1000x)

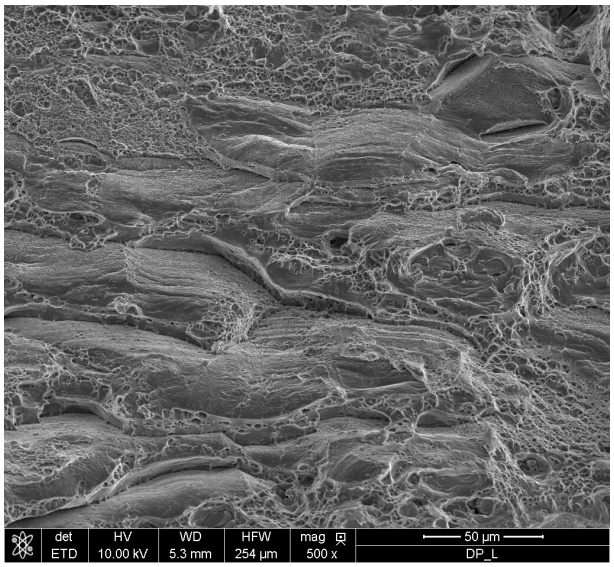
FIGURE 1.48 – Observations au MEB des faciès de ruptures des éprouvettes EU_4



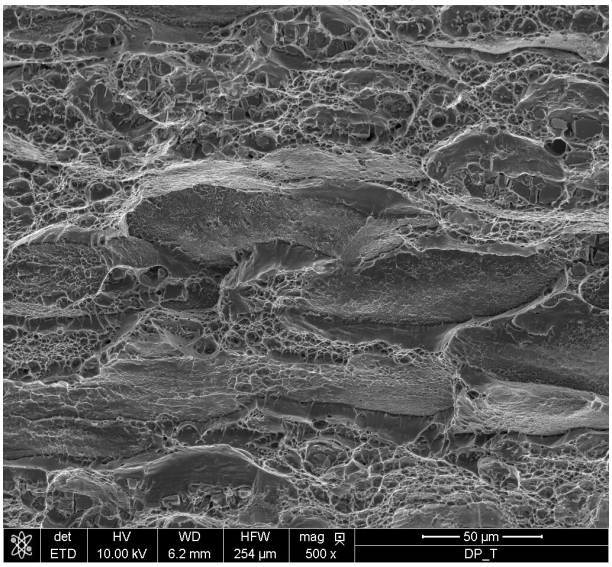
DP sens L (200x)



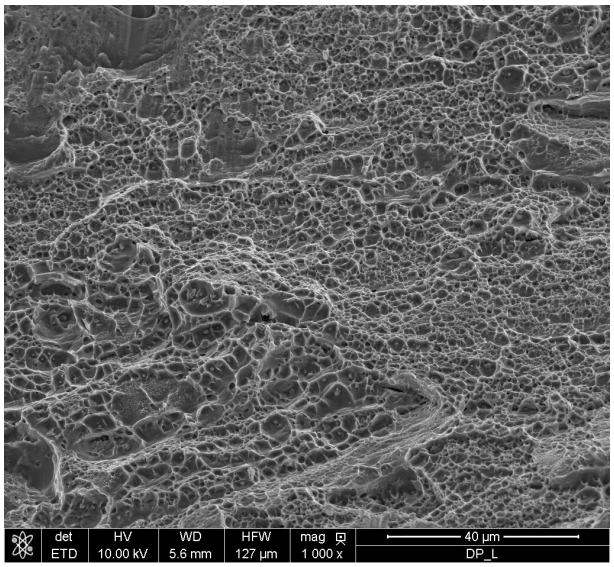
DP sens T (200x)



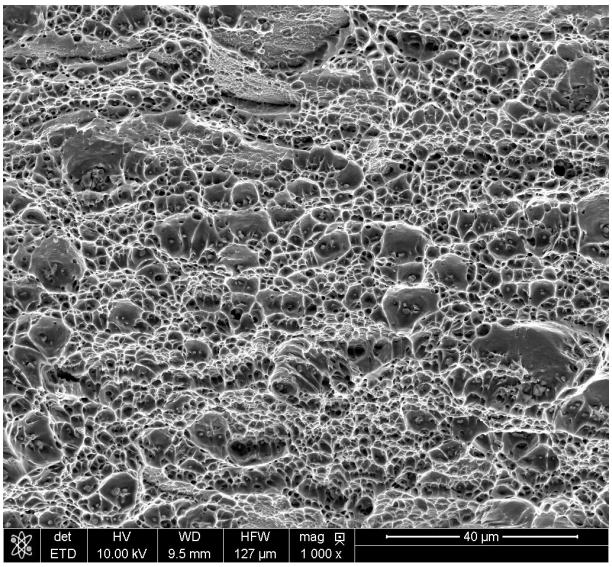
DP sens L (500x)



DP sens T (500x)

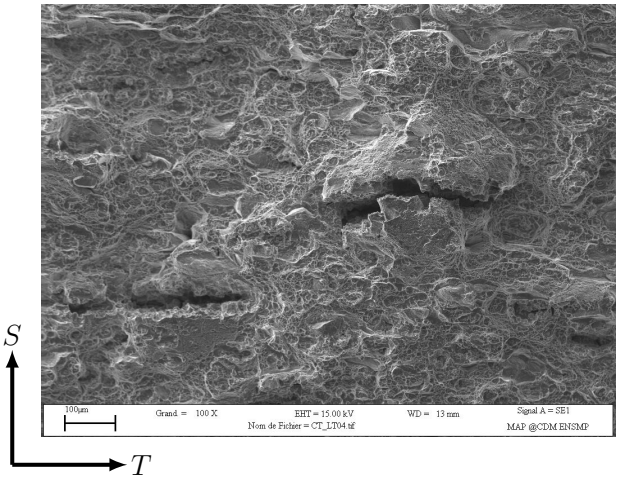


DP sens L (1000x)

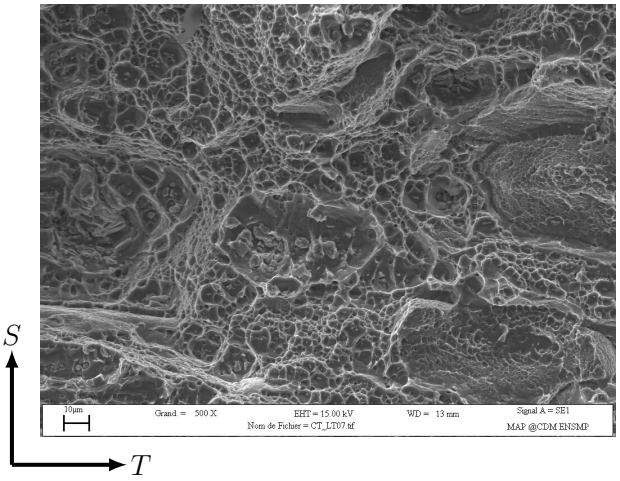


AE_2 sens T (1000x)

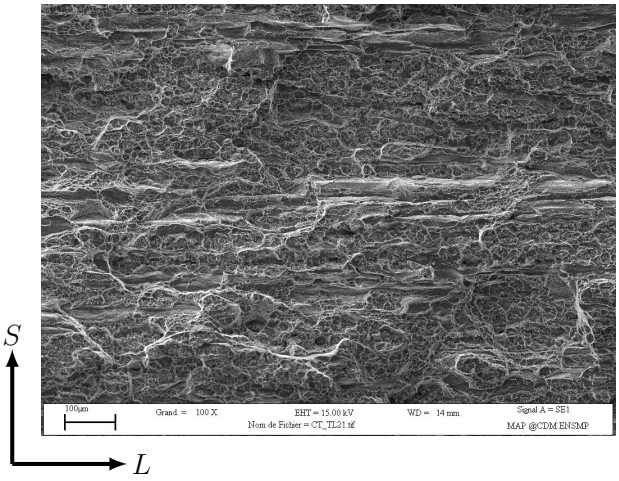
FIGURE 1.49 – Observations au MEB des faciès de ruptures des éprouvettes DP



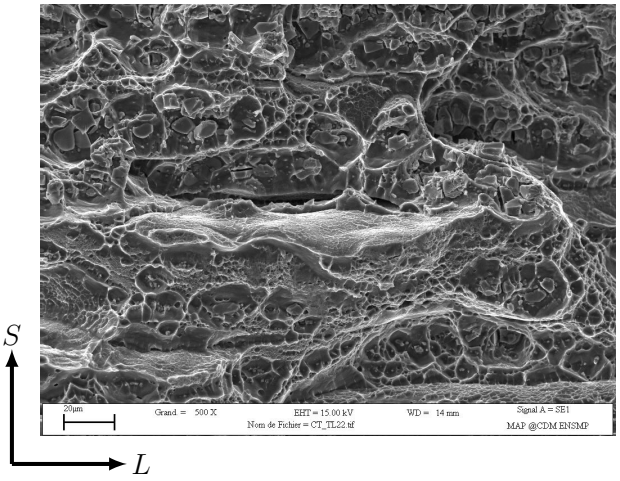
Eprouvette CT10 sens $L-T$ (100x)



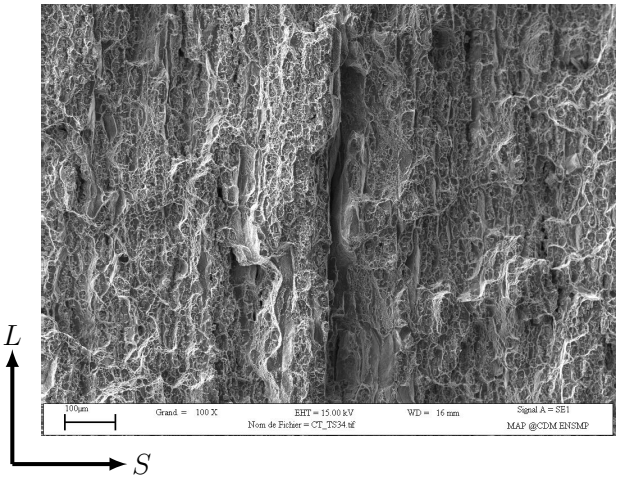
Eprouvette CT10 sens $L-T$ (500x)



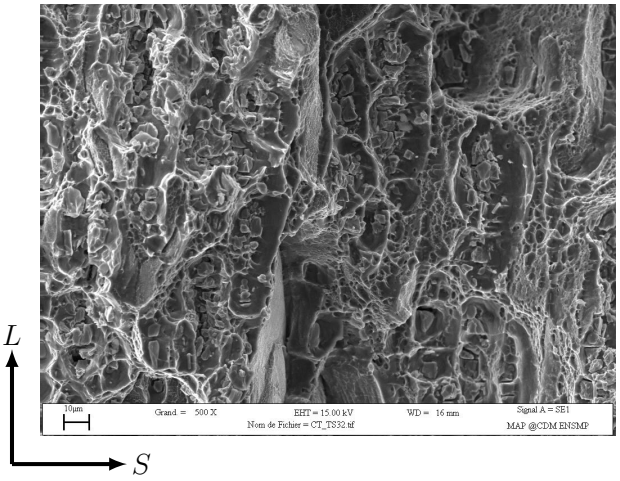
Eprouvette CT10 sens $T-L$ (100x)



Eprouvette CT10 sens $T-L$ (500x)



Eprouvette CT10 sens $T-S$ (100x)



Eprouvette CT10 sens $T-S$ (500x)

FIGURE 1.50 – Observations au MEB des faciès de ruptures des éprouvettes CT

Ainsi nous avons réalisé une cartographie systématique des coupes polies des éprouvettes AE_2 et AE_4, prélevées suivant les sens L et T, en prenant une photographie d'une zone de 0,4 mm × 0,4 mm avec un pas de 0,5 mm dans le sens horizontal et vertical. Ces prises de vue commencent à partir du front de rupture où les porosités sont nombreuses et s'arrêtent lorsque celles-ci disparaissent. Les résultats obtenus sont présentés en annexe D où chaque marque correspond à un cliché photographique. La légende associée est la suivante : les cercles vert, bleu et rouge désignent une zone où le taux de porosité est respectivement faible, moyen et important. Un cercle blanc renvoie à un cliché où figure principalement la résine d'enrobage de l'échatillon. L'ajout d'un point noir ou blanc signifie que la croissance des cavités est forte ou moyenne. En revanche l'abscence de point correspond à de la germination seule, c'est-à-dire sans phase de croissance.

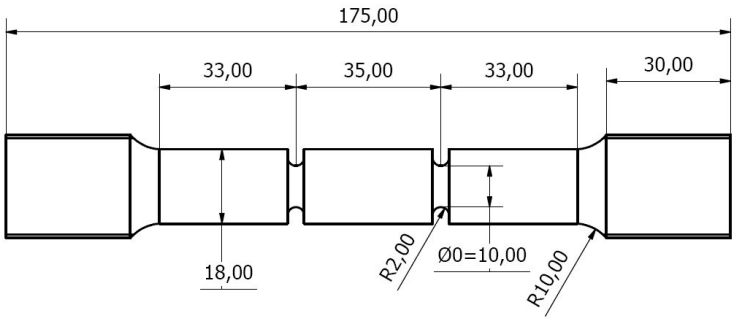
L'analyse des différentes cartographies montre que pour l'éprouvette AE_2, prélevée selon L, la zone de germination et de croissance des cavités est principalement située au centre de l'éprouvette. Pour la même éprouvette prélevée selon T cette zone correspond plutôt au fond d'entaille. Pour l'éprouvette AE_4, prélevée selon L, la germination des cavités se produit en fond d'entaille tandis que la phase de croissance concerne quasiment toute la section de l'éprouvette. Cette dernière remarque est également vraie pour l'éprouvette AE_4, prélevée selon T, dont la phase de germination est localisée entre le centre de l'éprouvette et le fond d'entaille.

Aucune conclusion quant à la zone d'amorçage de la rupture ne semble se dégager en fonction du rayon d'entaille ou du sens de prélèvement des éprouvettes AE. Les observations réalisées à partir des faciès post-mortem sont peut être faussées. En effet il se peut que des porosités soient ouvertes ou agrandies lors de la propagation d'une fissure à l'instant de la rupture, dont la conséquence est de brouiller les cartes relativement à l'origine de l'initiation de la rupture.

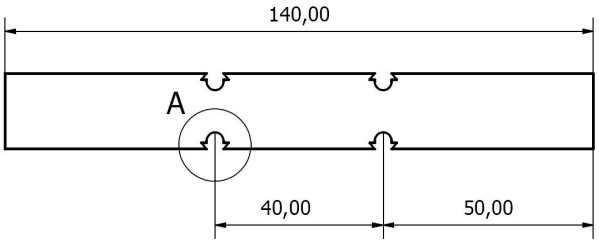
Nous avons donc décidé de réaliser des essais sur éprouvettes AE_2 et EU_2 bi-entaillées dont la définition est fournie par la figure 1.51. Nous nous sommes limités au rayon d'entaille de 2 mm car il est associé à un taux de triaxialité élevé et par conséquent devrait induire un endommagement plus important, et donc plus visible, que le rayon de 4 mm. Pour des matériaux présentant une ductilité importante, comme les aciers par exemple, le résultat obtenu avec ce type d'éprouvette est décevant. En effet après la striction les deux entailles vont avoir des histoires différentes, car l'endommagement va se localiser dans une entaille au détriment de l'autre. Cette dernière ne subira donc aucun endommagement et son examen après rupture ne révèlera par conséquent aucune information.

Mais dans le cas de notre alliage la situation est différente car la rupture des éprouvettes AE et EU se produit avant ou juste au moment de la striction. Par conséquent les deux entailles auront des histoires identiques, ainsi l'emploi de ce type d'éprouvette est tout à fait justifié. Nous devons préciser que pour les éprouvettes EU_2 bi-entaillées la rupture a toujours eu lieu dans l'entaille où nous avions placé les extensomètres. Ainsi il est légitime de supposer que le léger effort supplémentaire, induit par la compression des lames de l'extensomètre, suffit à localiser la rupture dans l'entaille où s'effectue la mesure. Cette remarque démontre le caractère très instable de la rupture de nos éprouvettes.

Les observations au MEB ont été réalisées sur des coupes polies prélevées au niveau de l'entaille non rompue, dans le plan (L, S) pour l'éprouvette bi-entailée AE_2 usinée selon L , et dans le plan (L, T) pour les éprouvettes bi-entaillées EU_2 usinées suivant L et T. La figure 1.52 présente pour chacune de ces éprouvettes prélevées selon L deux clichés respectivement pris au centre de l'éprouvette et au niveau de l'entaille. Pour l'éprouvette bi-entaillée EU_2 usinée suivant T ces clichés seront pris en bord d'entaille et au voisinage de celle-ci. Nous pouvons constater que l'endommagement se localise au centre de l'éprouvette bi-entaillée AE_2 et en fond d'entaille pour les éprouvettes bi-entaillées EU_2 prélevées selon L et T. Pour l'éprouvette bi-entaillée EU_2 usinée selon L toutes les phases intermétalliques Al_2Cu ont engendré des cavités mais avec une faible croissance, tandis que pour l'éprouvette bi-entaillée AE_2 il existe une unique cavité avec une forte croissance due à un taux de triaxialité plus élevé. De plus nous pouvons observer en fond d'entaille de l'éprouvette bi-entaillée AE_2 un gros précipité intermétallique Al_2Cu qui n'est pas rompu, confirmant par conséquent que la germination ne s'initie pas dans cette zone.



Eprouvette bi-entaillée AE_2



Eprouvette bi-entaillée EU_2

FIGURE 1.51 – Plan de définition des éprouvettes bi-entaillées AE_2 et EU_2

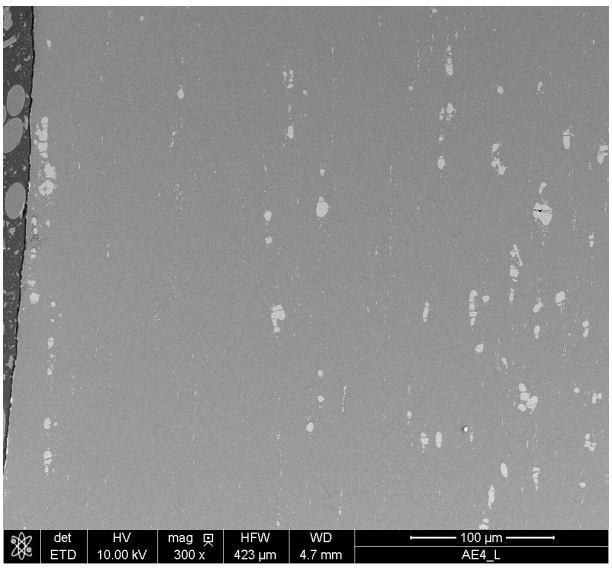
Pour l'éprouvette bi-entaillée EU_2 usinée selon T la quasi totalité des composés intermétalliques ont engendré des cavités, avec une croissance nulle, en effet nous constatons simplement que ces composés sont brisés. En conclusion l'analyse menée à l'aide des éprouvettes AE_2 bi-entaillées montre que la germination des cavités s'effectue au centre de l'éprouvette et non en fond d'entaille comme pouvait le suggérer l'observation de coupes polies, issues des faciès post-mortem des éprouvettes AE. Les éprouvette EU_2 bi-entaillées confirment que la germination des cavités s'initie en fond d'entaille comme nous le montrait l'examen de coupes polies des éprouvettes EU après rupture.

1.6 RESUME

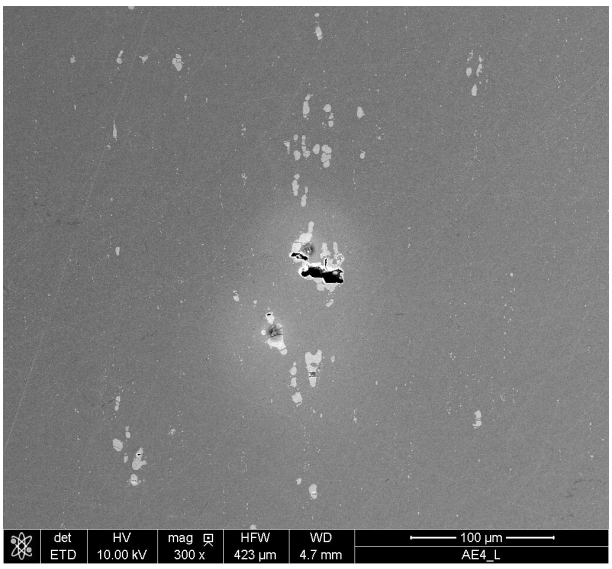
La caractérisation de l'alliage 2219 T87, étudié dans cette thèse, montre qu'il existe une fraction volumique importante de phases intermétalliques Al_2Cu de l'ordre de 1,63 %. Elles sont distribuées suivant des plans régulièrement espacés et perpendiculaires à la direction S. De plus dans chacun de ces plans les précipités intermétalliques sont alignées suivant la direction L, consécutivement à l'opération de laminage, alors que leur répartition selon le sens T ne semble suivre aucun motif préçis, et peut donc être considérée comme aléatoire. La distance entre les précipités est plus faible suivant le sens L que selon la direction T. Ce caractère est renforcé par l'alignement des précipités intermétalliques selon le sens de laminage L. Cette distribution des phases intermétalliques va jouer un rôle prépondérant dans la rupture de notre alliage.

Elle fournit notamment une explication de la forte anisotropie de rupture entre les sens L et T pour les éprouvettes EU et DP. En effet compte tenu de l'alignement et du faible espacement des précipités intermétalliques suivant L la rupture de ces éprouvettes, pour une sollicitation suivant T, se produit pour un allongement mesuré moins élevé que celui obtenu avec un chargement selon L. Ce caractère orthotrope de la rupture est beaucoup moins marqué pour les éprouvettes AE dont la ductilité à rupture est particulièrement faible. La rupture de ces éprouvettes s'apparente à de la rupture fragile bien que le matériau présente un certain niveau de déformation plastique.

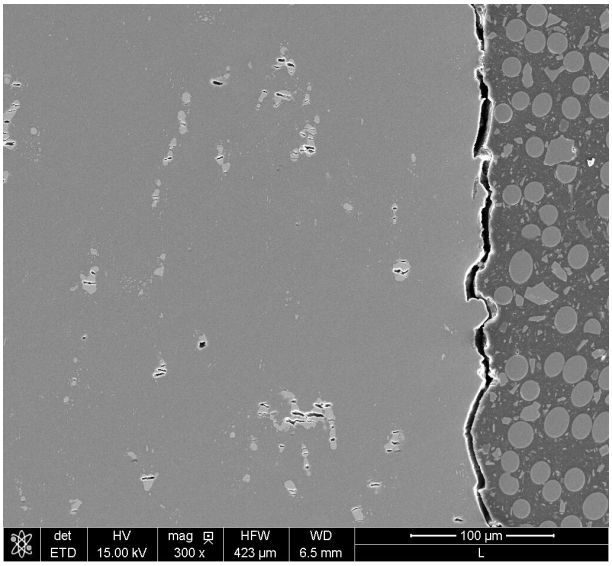
L'analyse des essais sur éprouvettes CT montre qu'il existe entre les types $L-T$ et $T-L$ une



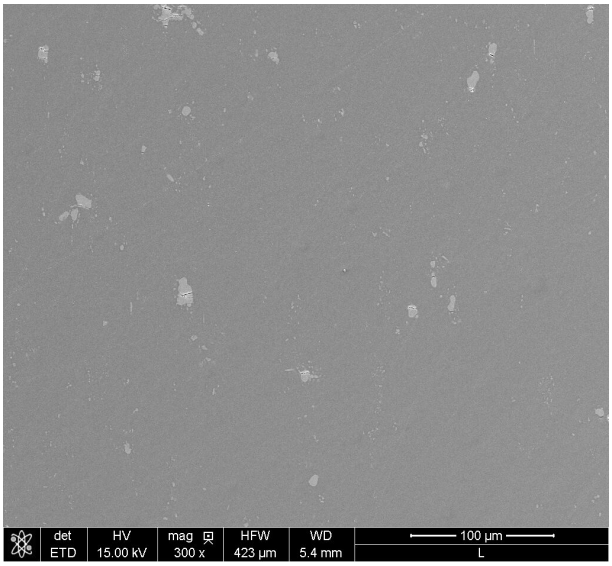
Fond d'entaille – Erouvette AE_2 sens L



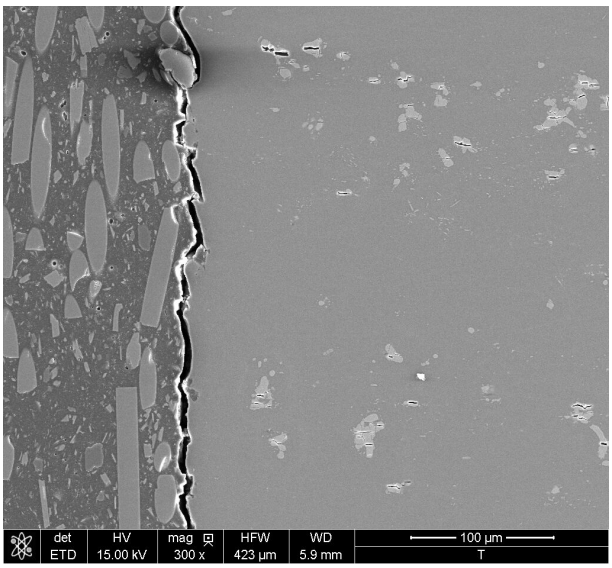
Centre – Eprouvette AE_2 sens L



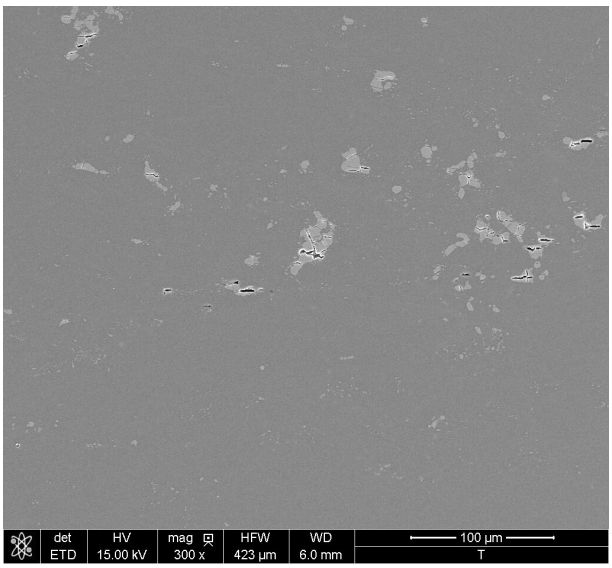
Fond d'entaille – Eprouvette EU_2 sens L



Centre – Eprouvette EU_2 sens L



Fond d'entaille – Eprouvette EU_2 sens T



Voisinage de l'entaille – Eprouvette EU_2 sens T

FIGURE 1.52 – Observation au MEB des coupes polies des éprouvettes bi-entaillées AE_2 et EU_2

anisotropie de comportement vis-à-vis de l'amorçage et de la propagation de la fissure. Ce phénomène s'explique par la distribution des phases intermétalliques Al_2Cu. En effet lorsque le mode I d'ouverture de la fissure d'une éprouvette CT est activé par une sollicitation en traction selon le sens T, alors la résistance à la déchirure ductile est plus faible que pour un effort appliqué selon L, compte tenu de l'alignement et du faible espacement des précipités intermétalliques selon le sens L. Il apparaît également que les éprouvettes CT de type $T-S$ affichent des valeurs proches du module de déchirure ductile dJ_R/da obtenu pour le sens $T-L$. Ainsi la propagation de la fissure selon les sens L et S s'effectue de manière similaire. Enfin les résultats issus des éprouvettes CT, SENT et SCT montrent que l'émoussement et le confinement plastique sont peu importants en pointe de fissure compte tenu des faibles valeurs de ductilité et de ténacité de notre alliage.

Les observations au MEB des faciès de rupture des différentes éprouvettes ont permis d'esquisser un scénario de rupture pour notre alliage. La germination s'amorçe sur les phases intermétalliques Al_2Cu puis le processus se poursuit par une phase de croissance, ainsi s'explique la présence plus ou moins importante des grosses cupules observées quel que soit le faciès. Ces grosses cupules sont associées à de petites cupules dont l'origine est attribuée à une germination secondaire sur les précipités intermétalliques Al_2Mn_3Cu, peu de temps avant la rupture. Il semblerait que ces deux populations de cupules co-existent dans des proportions complémentaires. Ainsi plus il y a de petites cupules moins il y a de grosses et inversement, nous avons l'intuition que tout se passe comme si leur somme devait atteindre une valeur critique au delà de laquelle se produit la rupture. Il existe également de petites cupules aux joints de grains qui vont conduire à une décohésion de certains grains suite à la phase de coalescence.

L'observation de la répartition de la porosité sur des coupes polies d'éprouvettes bi-entaillées AE_2 et EU_2 montre que la rupture s'initie au centre des éprouvettes AE et en fond d'entaille des éprouvettes EU. Ainsi l'amorçage de la rupture des éprouvettes AE s'effectue sur une zone relativement large, où la probabilité de trouver un gros précipité intermétallique est nettement plus importante que lorsque la rupture se localise dans une zone plus restreinte, comme dans le cas des éprouvettes EU par exemple. Ceci peut expliquer la dispersion de l'allongement à rupture constatée sur les éprouvettes AE. En conclusion la rupture de notre alliage est ductile mais comporte des mécanismes multiples : décohésion de grains, germination primaire et secondaire respectivement sur les précipités intermétalliques Al_2Cu et Al_2Mn_3Cu. Nous nous attendons donc à rencontrer quelques difficultés dans l'utilisation d'un modèle d'endommagement pour prédire la rupture de notre alliage qui présente une faible ténacité et une ductilité peu importante.

Chapitre 2

APPROCHE GLOBALE

Sommaire

2.1 INTRODUCTION 66

2.2 ANALYSE DE LA NORME ASTM E1820 67

2.2.1 Expression du facteur plastique pour les éprouvettes CT 67

2.2.2 Formule incrémentale pour obtenir la courbe J_R-Δa 77

2.2.3 Définition de l'intégrale J modifiée 82

2.2.4 Résumé 83

2.3 DETERMINATION DE η_{pl} PAR LA KEYCURVE 84

2.3.1 Détermination de la keycurve pour les éprouvettes CT et SENT 84

2.3.1.1 Cas des éprouvettes CT 85

2.3.1.2 Cas des éprouvettes SENT 96

2.3.2 Intégrale J 105

2.3.2.1 Introduction au calcul de J 105

2.3.2.2 Application aux éprouvettes CT et SENT 110

2.3.2.3 Analyse en pointe de fissure 116

2.3.3 Résumé 122

2.4 INTEGRITE D'UNE STRUCTURE AVEC FISSURE 123

2.4.1 Analyse FAD 123

2.4.1.1 Principe et théorie 124

2.4.1.2 Application aux éprouvettes CT, SENT et SCT 127

2.4.2 Etude de l'instabilité d'une fissure 137

2.4.2.1 Principe et théorie 137

2.4.2.2 Application aux éprouvettes SENT 138

2.4.3 Résumé 141

2.1 INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de présenter une approche dite « globale » permettant de prévoir la rupture d'une structure comportant un défaut. Ce dernier est le plus souvent assimilé à une fissure surfacique semi-elliptique ou à une fissure elliptique noyée dans la matière. Le terme de fissure employé ici ne désigne en aucun cas des microcavités ou microfissures qui existent au niveau microscopique et dont l'analyse relève de la théorie de l'endommagement. Il doit au contraire être compris comme une fissure dont la taille est suffisamment importante pour considérer que le volume de matière l'entourant satisfait aux hypothèses de la mécanique des milieux continus. Nous entrons alors dans le domaine de la mécanique de la rupture qui constitue la base de l'approche « globale ».

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, dont l'acronyme LEFM dérive de l'expression anglaise « Linear Elastic Fracture Mechanics », les champs de contrainte et de déformation en pointe de fissure, pour un problème 2D, dépendent du chargement, des dimensions de la fissure et de sa forme par l'intermédiaire d'un unique paramètre : le facteur d'intensité de contrainte K. Par conséquent ce dernier permet de définir un critère de rupture, utilisé pour déterminer l'amorçage de la propagation de la fissure, dont la valeur critique sera égale à la ténacité du matériau désignée par K_{IC}. Dans le cas de la plasticité confinée en pointe de fissure, il est toujours possible de se placer dans les hypothèses de l'élasticité linéaire en considérant une fissure fictive dont les dimensions sont celles de la fissure réelle augmentées de la taille de la zone plastique [Irwin, 1962].

Lorsque la plasticité s'étend, sans toutefois devenir généralisée, il est nécessaire d'avoir recours à la mécanique non linéaire de la rupture dont l'acronyme NLFM provient de l'anglais « Non Linear Fracture Mechanics ». Dans ce cas l'intégrale J introduite par [Rice, 1968b] peut jouer un rôle identique à celui du facteur d'intensité de contrainte K. En effet les travaux menés par [Hutchinson, 1968] et [Rice and Rosengren, 1968] montrent que les champs de contrainte et déformation, connus sous le nom de champs HRR, sont reliés au chargement et à la géométrie de la fissure uniquement par l'intégrale J. Toutefois l'utilisation d'une valeur critique de J comme critère de rupture pour prévoir l'amorçage de la fissure ne peut pas être généralisée. En effet, il faut s'assurer que l'étendue de la plasticité reste compatible avec l'utilisation de l'intégrale J. De plus les études sur les champs HRR, initiées par [O'Dowd and Shih, 1991] et [O'Dowd and Shih, 1992], ont montré que les champs de contrainte et déformation ne dépendent pas seulement de J mais également du taux de triaxialité qui est lié à la géométrie de la structure.

L'étude de l'amorçage de la propagation d'une fissure se fera par une analyse FAD (Failure Assessment Diagram) qui s'apparente à la LEFM tandis que le caractère stable ou instable de cette fissure sera évalué par une analyse CDF (Crack Driving Force) qui s'inscrit dans le cadre de la NLFM. Ces deux analyses étant intimement liées il n'a pas été jugé pertinent de les présenter séparément, elles feront donc l'objet de la troisième et dernière partie de ce chapitre. En effet, l'analyse CDF repose d'une part sur la détermination de la courbe $J_R - \Delta a$ et d'autre part sur le calcul de l'intégrale J. Ainsi les deux premières parties seront consacrées à la détermination des propriétés matériaux nécessaires à la mise en œuvre des analyses FAD et CDF. Il s'agit plus particulièrement de définir une méthodologie pour obtenir la courbe $J_R - \Delta a$ quelle que soit la géométrie de l'éprouvette utilisée. Celle-ci passe par le calcul du facteur plastique qui permet de surcroît de calculer l'intégrale J.

La première partie sera consacrée à l'analyse de la norme ASTM E1820. Il s'agit en particulier d'exposer la démonstration de l'expression du paramètre η_{pl} pour une éprouvette CT, puis celle de la formule incrémentale permettant de déterminer la courbe $J_R - \Delta a$. Pourquoi reconduire dans le cadre de cette étude ces deux démonstrations alors que leurs résultats sont intégrés dans la norme

ASTM E1820 ? Cette norme s'applique uniquement aux éprouvettes CT. Or nous souhaitons pouvoir étendre le calcul de η_{pl} à d'autres géométries d'éprouvettes, en particulier aux éprouvettes SENT. Par conséquent il est nécessaire de connaître l'origine des deux formules clés de la norme ASTM E1820 utilisées pour déterminer la courbe $J_R - \Delta a$, afin de savoir si elles peuvent être utilisées dans un cadre plus général. Cette analyse montrera que ces démonstrations s'articulent autour de la notion de « keycurve ».

Dans la seconde partie des calculs par éléments finis, appliqués aux éprouvettes CT et SENT, permettront d'obtenir la « keycurve » et d'en déduire le paramètre η_{pl}. Ce résultat sera alors comparé à celui obtenu à partir du calcul direct de l'intégrale J par simulation numérique. Afin de déterminer une valeur de J indépendante du contour utilisé pour le calcul, nous avons développé une loi non linéaire élastique pour modéliser le comportement élasto-plastique du matériau. Nous profiterons alors de ce calcul de l'intégrale J pour réaliser une analyse en pointe de fissure dans le cas de la plasticité confinée et dans les configurations liées aux éprouvettes CT10 et SENT. Nous serons alors en mesure de statuer sur l'exigence du confinement plastique en pointe de fissure pour les éprouvettes CT10 et SENT. Cette exigence est importante car elle permet de garantir l'indépendance de la courbe $J_R - \Delta a$ vis à vis de la géométrie d'éprouvette employée, sous réserve que soit vérifiée la condition de déformation plane.

2.2 ANALYSE DE LA NORME ASTM E1820

2.2.1 Expression du facteur plastique pour les éprouvettes CT

Le but de ce paragraphe est de retrouver l'expression du facteur plastique, noté η_{pl}, spécifié dans la norme ASTM E1820 pour les éprouvettes CT. Par définition il permet de calculer la partie plastique de J à partir de l'aire A_{pl} sous la courbe $P - V_{pl}$ enregistrée au cours de l'essai. Nous rappelons que P désigne la charge appliquée à l'éprouvette et V_{pl} la partie plastique du déplacement d'ouverture de la fissure V, mesuré à l'aplomb de la ligne de chargement, c'est-à-dire au niveau du point A de la figure 2.1. La formulation mathématique du facteur plastique est donnée par la relation suivante :

$$J_{pl} = \frac{\eta_{pl}}{Bb} \int_0^{V_{pl}} P dV_{pl} \;=\; \frac{\eta_{pl}}{Bb} A_{pl} \tag{2.1}$$

La démonstration de cette formulation de η_{pl} a été effectuée par le passé en deux temps. Elle a été en initiée par [Merkle and Corten, 1974] puis complétée par [Clarke and Landes, 1979]. Historiquement le facteur plastique η_{pl} a été déterminé pour des éprouvettes SENB sollicitée en flexion pure. Dans ce cas sa valeur est constante et égale à 2. Ainsi au début de leur utilisation les éprouvettes CT profondément entaillées ont naturellement été traitées comme des éprouvettes SENB.

Nous allons maintenant détailler, en suivant [Merkle and Corten, 1974], la première étape de la démonstration de l'expression de η_{pl} pour les éprouvettes CT. Le matériau est supposé parfaitement plastique de limite d'élasticité σ_y. L'analyse est effectuée pour un chargement limite noté P_L, par conséquent le ligament de longueur b est totalement plastifié, l'éprouvette est proche de l'instabilité plastique. La variable α, représentée sur la figure 2.1, désigne la fraction du ligament totalement plastifié, permettant d'équilibrer la sollicitation en traction du chargement limite P_L, d'où l'équation suivante :

$$\sigma_y = \frac{P_L}{S} = \frac{P_L}{\alpha b B} \quad \text{d'où} \quad P_L = 2\sigma_y B \alpha c \tag{2.2}$$

L'idée de [Merkle and Corten, 1974] est de considérer qu'une faible partie du ligament est sollicitée en traction, bloc rouge de la figure 2.1, alors que le ligament travaille principalement en flexion. L'équilibre en flexion correspond à l'égalité des blocs jaune et gris de la figure 2.1. Remarquons que pour un ligament en flexion pure le bloc rouge disparaitrait, les blocs jaune et gris seraient égaux et

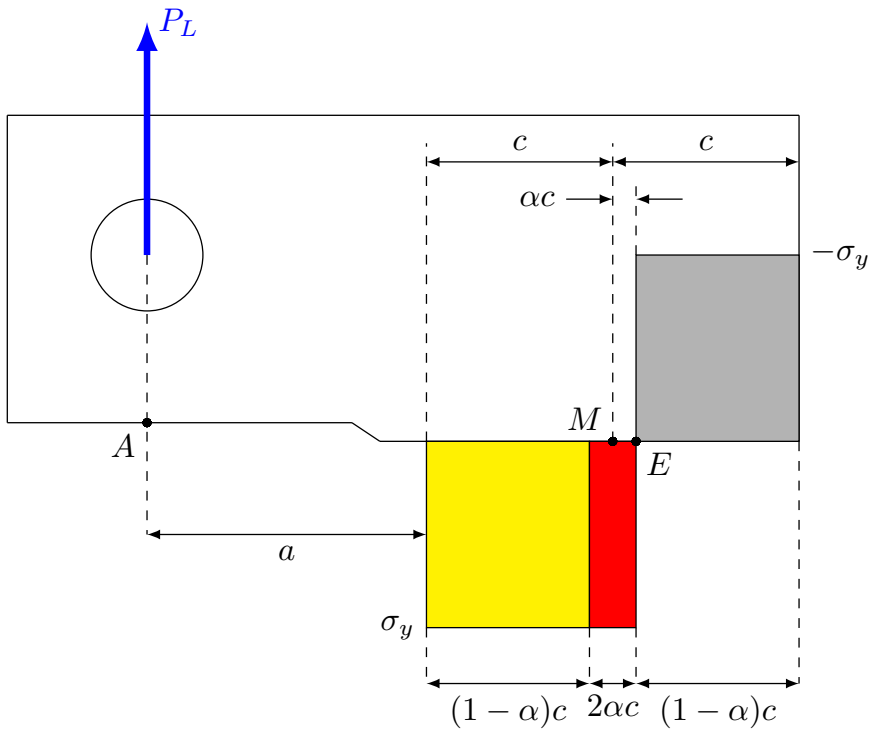


FIGURE 2.1 – Flexion et traction du ligament

leur jonction se ferait au point M, milieu du ligament. La résultante du moment de flexion M_L au niveau du ligament totalement plastifié, exprimé relativement au point d'équilibre M, est définie par :

$$M_L = \sigma_y B \int_{\alpha c}^{c} x \; dx - \sigma_y B \int_{-c}^{\alpha c} x \; dx$$

D'où $\quad M_L = \sigma_y B \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha c}^{c} - \sigma_y B \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-c}^{\alpha c}$

Soit $\quad M_L = \frac{\sigma_y B}{2}\left[c^2 - \alpha^2 c^2 - \alpha^2 c^2 + c^2\right]$

Ainsi $\quad M_L = \sigma_y B c^2 \left(1 - \alpha^2\right)$ (2.3)

Le moment de flexion M_L exprimé au point M est égal à P_L multiplié par le bras de levier $a + c$. Ainsi compte tenu de (2.3) il est possible d'écrire l'égalité suivante :

$$\sigma_y B c^2 (1 - \alpha^2) = 2\sigma_y B \alpha c \;\; (a + c)$$

D'où $\quad \alpha^2 + 2\left(\frac{a}{c} + 1\right)\alpha - 1 = 0$ (2.4)

L'équation du second degré en α obtenue ci-dessus a pour solution :

$$\alpha = \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 2\;\left(\frac{a}{c}\right) + 2\right]^{1/2} - \left(\frac{a}{c} + 1\right) \tag{2.5}$$

La figure 2.2 présente les courbes $P - V$ pour deux éprouvettes dont les fissures diffèrent d'une très faible longueur da. La lettre V désigne le déplacement d'ouverture de la fissure mesuré au point A. Il est important de noter que pour l'instant les fissures sont supposées stationnaires, elles ne se propagent pas. Ainsi l'accroissement da de longueur de fissure doit être compris comme la différence de longueur entre

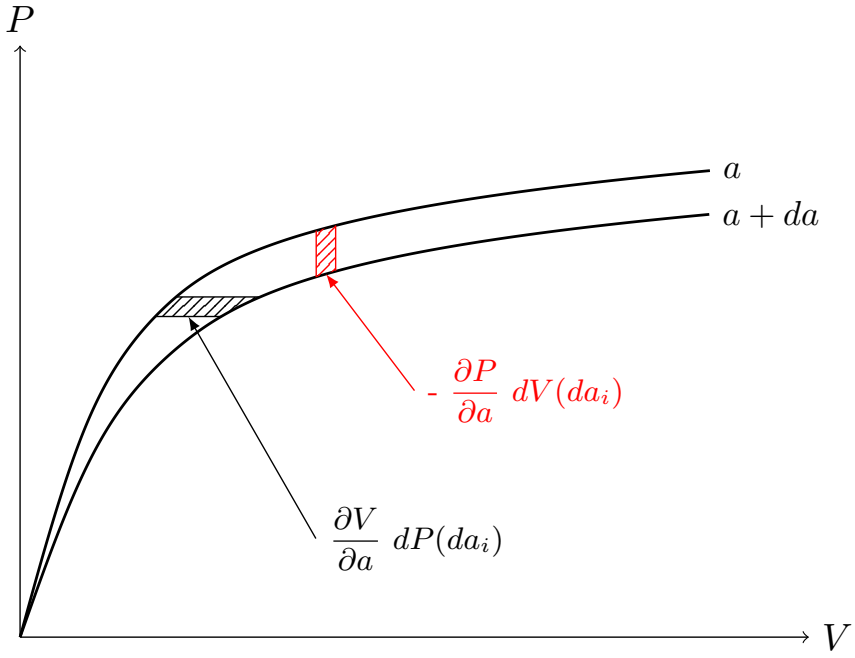


FIGURE 2.2 – Courbes $P - V$ pour des longueurs de fissure voisines

deux fissures stationnaires, présentes dans deux éprouvettes distinctes dont les dimensions géométriques sont identiques. L'intégrale J peut être définie, conformément à [Rice, 1968a], comme la variation de l'énergie potentielle par rapport à l'accroissement surfacique (Bda) de la fissure, d'où la formulation mathématique suivante :

$$-\ J(da)Bda = \int_0^V P(V, a + da)\ dV\ -\ \int_0^V P(V, a)\ dV$$

Ainsi $\quad -\ J(da)B = \displaystyle\int_0^V \frac{P(V, a + da) - P(V, a)}{da}\ dV$

Or $\quad J = \displaystyle\lim_{da \to 0} J(da) \quad$ soit $\quad J = -\ \frac{1}{B} \displaystyle\int_0^V \lim_{da \to 0} \frac{P(V, a + da) - P(V, a)}{da}\ dV$

Finalement $\quad J = -\ \dfrac{1}{B} \displaystyle\int_0^V \frac{\partial P}{\partial a}\ dV$

La figure 2.2 montre que l'aire définie par l'intégrale ci-dessus s'obtient aussi bien à partir de l'élément de surface infinitésimale hachuré en noir qu'à partir de celui hachuré en rouge. Cette égalité des aires se traduit par l'équation ci-dessous :

$$-\int_0^V \frac{1}{B}\ \frac{\partial P}{\partial a}\ dV = \int_0^P \frac{1}{B}\ \frac{\partial V}{\partial a}\ dP$$

Par conséquent $\quad J = -\ \dfrac{1}{B} \displaystyle\int_0^V \frac{\partial P}{\partial a}\ dV = \frac{1}{B} \int_0^P \frac{\partial V}{\partial a}\ dP \qquad (2.6)$

En écrivant le déplacement d'ouverture de la fissure V comme la somme d'une partie élastique V_{el} et d'une partie plastique V_{pl} l'expression de J devient :

$$J = \int_0^P \frac{1}{B}\ \frac{\partial V}{\partial a}\ dP = \int_0^P \frac{1}{B}\ \frac{\partial V_{el}}{\partial a}\ dP + \int_0^P \frac{1}{B}\ \frac{\partial V_{pl}}{\partial a}\ dP$$

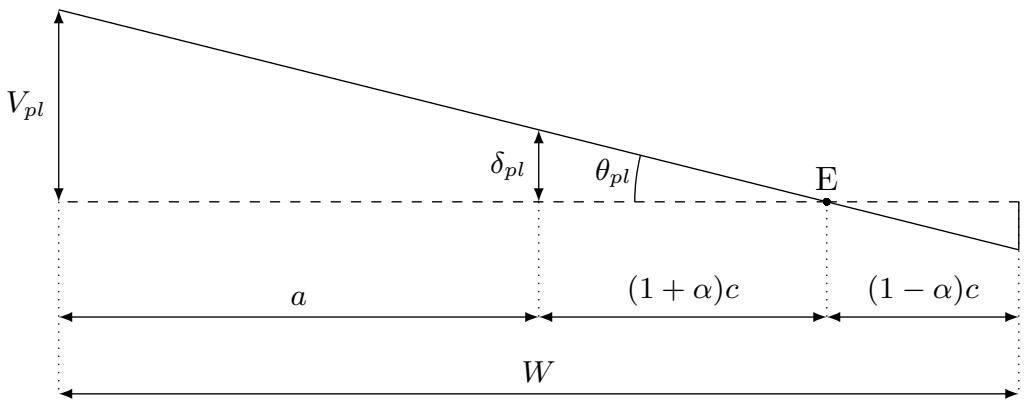


FIGURE 2.3 – Schéma de la rotation due à la flexion

Cette relation montre que l'intégrale J peut également être décomposée en une partie élastique J_{el} et une partie plastique J_{pl} :

$$J = J_{el} + J_{pl} \quad \text{avec} \quad J_{el} = \int_0^P \frac{1}{B}\,\frac{\partial V_{el}}{\partial a}\,dP \quad \text{et} \quad J_{pl} = \int_0^P \frac{1}{B}\,\frac{\partial V_{pl}}{\partial a}\,dP \tag{2.7}$$

Dans la figure 2.2, il est tout à fait possible de remplacer l'abscisse V par V_{pl}. En utilisant le même raisonnement que précédemment l'expression de J_{pl} devient :

$$J_{pl} = \int_0^P \frac{1}{B}\,\frac{\partial V_{pl}}{\partial a}\,dP = -\int_0^{V_{pl}} \frac{1}{B}\,\frac{\partial P}{\partial a}\,dV_{pl} \tag{2.8}$$

La partie plastique V_{pl} du déplacement d'ouverture de la fissure est supposée être due à une rotation d'angle θ_{pl} autour du point E qui marque la frontière entre la zone en traction et celle en compression. La figure 2.3 illustre cette hypothèse, elle introduit également le déplacement d'ouverture en pointe de fissure [(a)], noté δ, dont la partie plastique sera désignée par δ_{pl}. Par conséquent en supposant θ_{pl} petit, le théorême de Pythagore permet d'écrire :

$$\sin\,\theta_{pl} = \theta_{pl} = \frac{V_{pl}}{a + (1+\alpha)\,c} \tag{2.9}$$

$$\text{De même} \quad \sin\,\theta_{pl} = \theta_{pl} = \frac{\delta_{pl}}{(1+\alpha)\,c} \tag{2.10}$$

En tenant compte du fait que $a = W - 2c$ la relation entre V_{pl} et δ_{pl} est définie par :

$$V_{pl} = \frac{W + (\alpha - 1)\,c}{(1+\alpha)\,c}\,\delta_{pl} \tag{2.11}$$

L'approche de [Rice et al., 1973] a été utilisée afin d'évaluer la partie plastique J_{pl} de l'intégrale J. Elle consiste à supposer que l'angle de rotation θ_{pl} est une fonction f du rapport P/P_L, où P désigne l'effort appliqué à l'éprouvette CT. Dans la présente étude, la fonction f a été inversée afin de pouvoir écrire P/P_L comme une fonction g de θ_{pl}.

$$P = P_L\;g\,(\theta_{pl}) \tag{2.12}$$

Compte tenu de l'égalité (2.8) il est nécessaire de calculer $\partial P/\partial a$ afin d'obtenir J_{pl}. Une première étape consiste à exprimer $\partial P/\partial a$ en fonction de $\partial P/\partial c$.

$$-\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial P}{\partial c} \quad \text{puisque} \quad a = W - 2c$$

(a). δ correspond au terme anglais de « Crack Tip Opening Displacement » abrégé en CTOD

Compte tenu de (2.12) l'expression précédente devient :

$$-\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{1}{2}\, g\left(\theta_{pl}\right)\, \frac{\partial P_L}{\partial c} + \frac{1}{2}\, P_L\, \frac{\partial g}{\partial c}$$

$$\text{Soit} \quad -\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{1}{2}\, \frac{P}{P_L}\, \frac{\partial P_L}{\partial c} + \frac{1}{2}\, P_L\, \frac{\partial g}{\partial \theta_{pl}}\, \frac{\partial \theta_{pl}}{\partial c} \tag{2.13}$$

Il reste à calculer les dérivées partielles $\partial P_L/\partial c$, $\partial g/\partial \theta_{pl}$ et $\partial \theta_{pl}/\partial c$. La dérivée de (2.12) par rapport à V_{pl} permet d'écrire :

$$\frac{\partial P}{\partial V_{pl}} = P_L\, \frac{\partial g}{\partial \theta_{pl}}\, \frac{\partial \theta_{pl}}{\partial V_{pl}}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_{pl}} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial V_{pl}}}{P_L\, \dfrac{\partial \theta_{pl}}{\partial V_{pl}}}$$

La relation (2.13) est alors modifiée compte tenu de l'expression de $\partial g/\partial \theta_{pl}$ obtenue ci-dessus d'où :

$$-\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{1}{2}\, \frac{\dfrac{\partial P_L}{\partial c}}{P_L}\, P + \frac{1}{2}\, \frac{\dfrac{\partial \theta_{pl}}{\partial c}}{\dfrac{\partial \theta_{pl}}{\partial V_{pl}}}\, \frac{\partial P}{\partial V_{pl}} \tag{2.14}$$

Dans un premier temps il faut déterminer $\partial P_L/\partial c$. La dérivée de (2.2) par rapport à c donne :

$$\frac{\partial P_L}{\partial c} = 2\sigma_y B \left(\alpha + c\frac{\partial \alpha}{\partial c}\right) \tag{2.15}$$

Afin de calculer $\partial \alpha/\partial c$, la relation (2.4) est transformée en tenant compte de l'égalité $a = W - 2c$.

$$\alpha^2 + 2\left(\frac{W}{c} - 1\right)\alpha - 1 = 0 \tag{2.16}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{W}{c} - 1 = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha} \quad \text{soit} \quad \frac{W}{c} = \frac{1+2\alpha-\alpha^2}{2\alpha} \tag{2.17}$$

La dérivée de (2.16) par rapport à c permet d'écrire :

$$2\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial c} + 2\left(\frac{W}{c} - 1\right)\, \frac{\partial \alpha}{\partial c} - 2\frac{W}{c^2}\, \alpha = 0$$

En utilisant (2.17) la relation ci-dessus devient :

$$\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial c} + \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\, \frac{\partial \alpha}{\partial c} = \frac{1+2\alpha-\alpha^2}{2\alpha}\, \frac{\alpha}{c}$$

$$\text{Soit} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial c} = \frac{\alpha}{c}\, \frac{1+2\alpha-\alpha^2}{1+\alpha^2} \tag{2.18}$$

En tenant compte de (2.18) l'expression de (2.15) est modifiée de la manière suivante :

$$\frac{\partial P_L}{\partial c} = 2\, \sigma_y\, B\, \left(\alpha + \alpha\, \frac{1+2\alpha-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial c} = 2\ \sigma_y\ B\ \alpha\ \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}$$

Or d'après (2.2) $P_L = \sigma_y\ B\ b\ \alpha$ d'où :

$$\frac{1}{2}\ \frac{\dfrac{\partial P_L}{\partial c}}{P_L} = \frac{2}{b}\ \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} \tag{2.19}$$

Il reste à calculer les dérivées partielles $\partial\theta_{pl}/\partial V_{pl}$ et $\partial\theta_{pl}/\partial c$. La première se calcule en dérivant (2.9) par rapport à V_{pl}.

$$\text{D'où}\quad \frac{\partial\theta_{pl}}{\partial V_{pl}} = \frac{1}{a+(1+\alpha)\,c} \tag{2.20}$$

La seconde s'obtient en dérivant (2.9) par rapport à c en prenant soin de remplacer a par $W-2c$.

$$\text{Ainsi}\quad \frac{\partial\theta_{pl}}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{V_{pl}}{W+(\alpha-1)\,c}\right)$$

$$\text{Soit}\quad \frac{\partial\theta_{pl}}{\partial c} = -\ \frac{V_{pl}}{(W+(\alpha-1)\,c)^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial c}+\alpha-1\right)$$

En utilisant (2.18) la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{\partial\theta_{pl}}{\partial c} = \frac{V_{pl}}{(W+(\alpha-1)\,c)^2}\ \frac{1-2\alpha-\alpha^2}{1+\alpha^2} \tag{2.21}$$

Puis en divisant (2.21) par (2.20) le résultat obtenu est :

$$\frac{1}{2}\ \frac{\dfrac{\partial\theta_{pl}}{\partial c}}{\dfrac{\partial\theta_{pl}}{\partial V_{pl}}} = \frac{V_{pl}}{W+(\alpha-1)\,c}\ \frac{1-2\alpha-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

L'expression ci-dessus se simplifie en utilisant (2.17) pour devenir :

$$\frac{1}{2}\ \frac{\dfrac{\partial\theta_{pl}}{\partial c}}{\dfrac{\partial\theta_{pl}}{\partial V_{pl}}} = \frac{2}{b}\ \alpha\ \frac{1-2\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\ V_{pl} \tag{2.22}$$

En introduisant (2.19) et (2.22) dans le relation (2.14) celle-ci devient :

$$-\ \frac{\partial P}{\partial a} = \frac{2}{b}\ \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\ P + \frac{2}{b}\ \alpha\ \frac{1-2\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\ V_{pl}\ \frac{\partial P}{\partial V_{pl}}$$

L'expression de J_{pl} donnée par (2.8) peut alors se mettre sous la forme :

$$J_{pl} = \frac{2}{b}\ \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\ \int_0^{Vpl}\frac{P}{B}dV_{pl} + \frac{2}{b}\ \alpha\ \frac{1-2\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\int_0^{V_{pl}}\frac{V_{pl}}{B}\frac{\partial P}{\partial V_{pl}}dV_{pl}$$

$$\text{Or}\quad \int_0^{V_{pl}}\frac{V_{pl}}{B}\frac{\partial P}{\partial V_{pl}}dV_{pl} = \int_0^{P}\frac{V_{pl}}{B}dP$$

$$\text{d'où}\quad J_{pl} = \frac{2}{b}\ \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\ \int_0^{Vpl}\frac{P}{B}dV_{pl} + \frac{2}{b}\ \alpha\ \frac{1-2\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\int_0^{P}\frac{V_{pl}}{B}dP \tag{2.23}$$

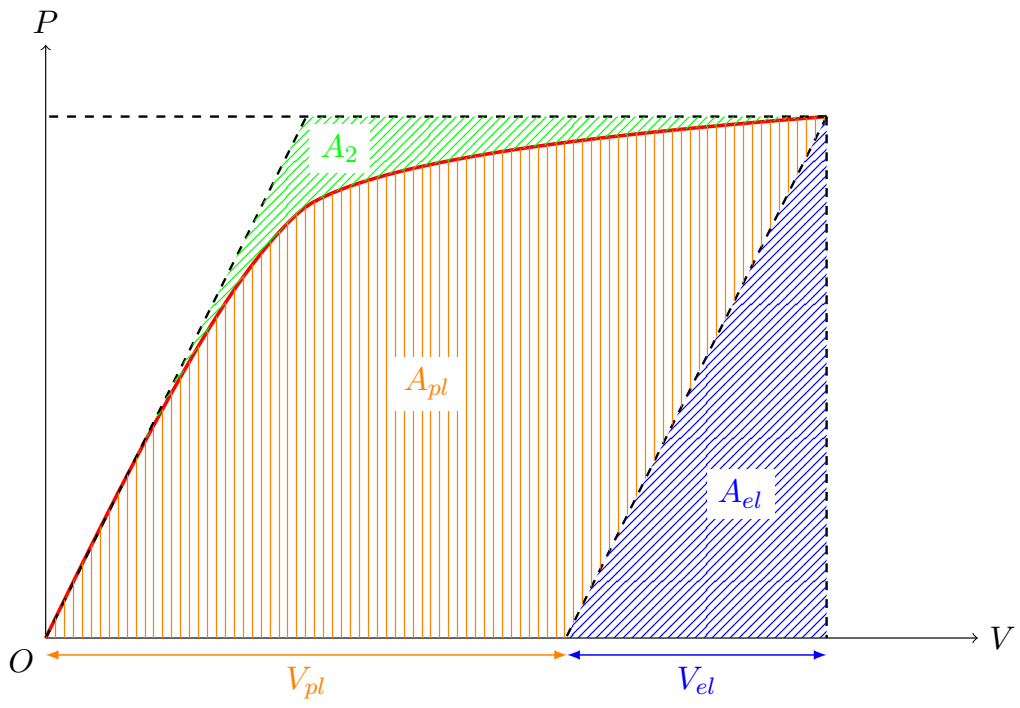


FIGURE 2.4 – Courbe $P - V$ pour une éprouvette CT

L'équation (2.23) achève la contribution de [Merkle and Corten, 1974] à la démonstration de la formule du facteur plastique applicable aux éprouvettes CT selon la norme ASTM E1820. Cette démonstration sera poursuivie par [Clarke and Landes, 1979] dont l'analyse a pour point de départ la relation (2.23) permettant de calculer J_{pl} à partir d'un essai sur éprouvette CT. En effet, lors d'un tel essai est enregistré l'effort appliqué P en fonction du déplacement d'ouverture de la fissure, noté V, comme le montre la figure (2.4). Celle-ci permet de définir les aires A_2 et A_{pl} dont les expressions sont données par :

$$A_{pl} = \int_0^{V_{pl}} P dV_{pl} \quad \text{et} \quad A_2 = \int_0^{P} V_{pl} dP$$

Ainsi, en utilisant les aires définies ci-dessus et la relation (2.23) l'expression de l'intégrale J devient :

$$J = J_{el} + \frac{2\lambda_1}{bB} A_{pl} + \frac{2\lambda_2}{bB} A_2 \tag{2.24}$$

Avec $\lambda_1 = \dfrac{1+\alpha}{1+\alpha^2}$ et $\lambda_2 = \alpha \dfrac{1-2\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$

[Clarke and Landes, 1979] vont s'efforcer de simplifier (2.24) afin de pouvoir calculer plus aisément l'intégrale J lors d'un essai sur éprouvette CT. Pour cela, ils vont définir A comme l'aire sous la courbe $P - V$, elle est donc égale à la somme de A_{el} et A_{pl}, nous avons en se référant à la figure (2.4) : $PV = A_{el} + A_2 + A$. Ainsi la relation (2.24) peut être reformulée de la manière suivante :

$$J = J_{el} + \frac{2\lambda_1}{bB} (A - A_{el}) + \frac{2\lambda_2}{bB} (PV - A - A_{el}) \tag{2.25}$$

Soit $J = J_{el} + \dfrac{2}{bB} (\lambda_1 - \lambda_2) A + \dfrac{2}{bB} \lambda_2 PV - \dfrac{2}{bB} (\lambda_1 + \lambda_2) A_{el}$

Afin de simplifier d'avantage la relation ci-dessus les auteurs de [Clarke and Landes, 1979] font l'hypo-

thèse que J_{el} peut être annulée par le terme faisant intervenir A_{el} d'où :

$$J = \frac{2}{bB}\left(\lambda_1 - \lambda_2\right) A + \frac{2}{bB}\lambda_2 PV \tag{2.26}$$

L'égalité ci-dessus est vraie si et seulement si : $J_{el} = \frac{2}{bB}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) A_{el}$ (2.27)

Selon la norme ASTM E1820 la partie élastique de J se calcule à partir du facteur d'intensité de contrainte K en utilisant les relations suivantes :

$$J_{el} = \frac{K^2\left(1-\nu^2\right)}{E} \tag{2.28}$$

Avec $K = \frac{P}{B\sqrt{W}}\, f\left(a/W\right)$

Où $f\left(a/W\right) = \dfrac{\left(2+\frac{a}{W}\right)\left(0,886 + 4,64\frac{a}{W} - 13,32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14,72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5,6\left(\frac{a}{W}\right)^4\right)}{\left(1-\frac{a}{W}\right)^{3/2}}$

L'expression de J_{el} devient donc :

$$J_{el} = \frac{P^2\left(1-\nu^2\right)}{EB^2W}\ \left(f\left(a/W\right)\right)^2$$

De plus $V_{el} = C_{LL}P$ selon la norme ASTM E1820.

Avec $C_{LL} = \frac{1-\nu^2}{EB}\left(\frac{W+a}{W-a}\right)^2\ g(a/W)$

$$g(a/W) = \left(2,1630 + 12,219\frac{a}{W} - 20,065\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 0,9925\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 20,609\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 9,9314\left(\frac{a}{W}\right)^5\right)$$

Par définition, $A_{el} = \frac{V_{el}P}{2} = \frac{C_{LL}P^2}{2}$

La relation (2.27) devient donc :

$$\frac{\left(1-\nu^2\right)}{EB^2W}\ \left(f\left(a/W\right)\right)^2\ \frac{2A_{el}}{C_{LL}} = \frac{2}{bB}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) A_{el}$$

Soit $\lambda = \frac{b\left(1-\nu^2\right)}{EBWC_{LL}}\ \left(f\left(a/W\right)\right)^2$

Par conséquent la relation (2.26) est vraie si et seulement si $\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda_2} = 1$

La figure 2.5 présente l'évolution du rapport λ sur $\lambda_1 + \lambda_2$ en fonction de a/W. Pour une valeur de a/W supérieure ou égale à 0,5 la relation (2.26) peut être considérée comme vraie puisque le rapport précédent est égal à 1 plus ou moins 2 %. Nous retrouvons cette exigence sur a/W dans la norme ASTM E1820. Dans la suite de l'étude menée par [Clarke and Landes, 1979] la relation (2.26) est encore simplifiée pour devenir :

$$J = \frac{2}{bB}\ \lambda_1\ A = \frac{2}{bB}\ \lambda_1\ A_{el} + \frac{2}{bB}\ \lambda_1\ A_{pl} \tag{2.29}$$

Ainsi, en se souvenant de la définition du facteur plastique donnée par (2.1) nous obtenons $\eta_{pl} = 2\ \lambda_1$. La simplification effectuée ci-dessus revient à négliger le terme $\lambda_2(PV - A)$ soit $\lambda_2(A_{el} + A_2)$.

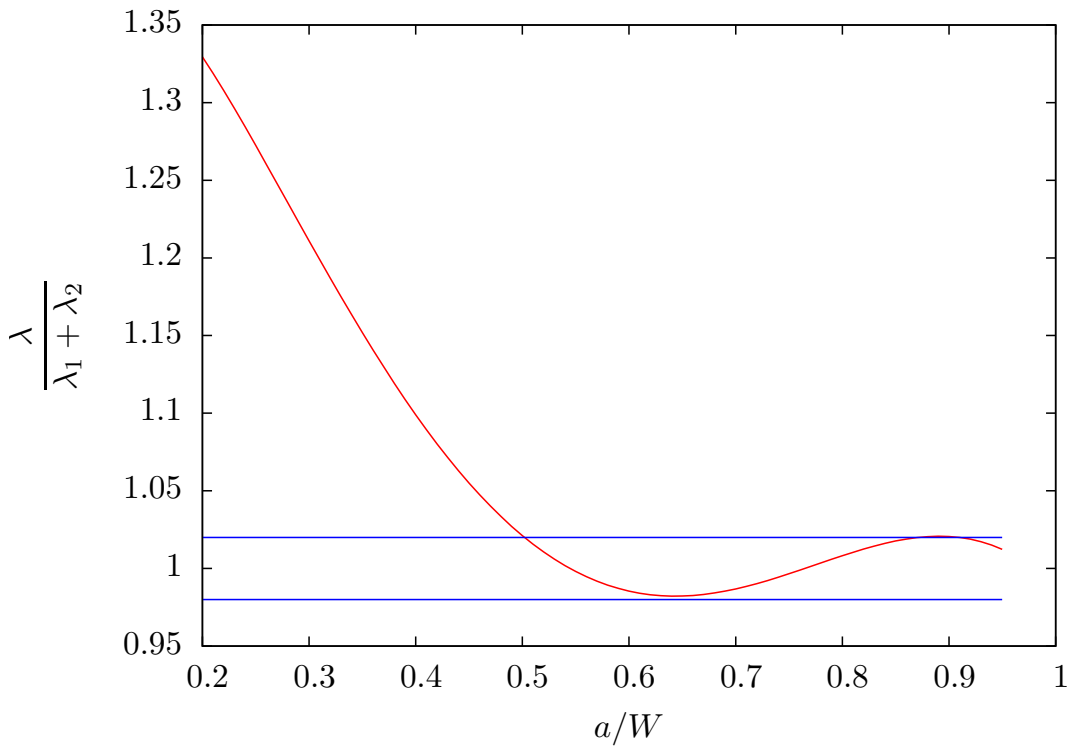


FIGURE 2.5 – Evolution du rapport $\lambda/(\lambda_1+\lambda_2)$ en fonction de a/W

La démonstration de cette dernière étape consiste simplement à montrer que dans le cas linéaire la relation (2.29) fournit une meilleure approximation de l'équation (2.25) que la relation (2.26). Enfin [Clarke and Landes, 1979] montrent que l'évolution de λ_1 en fonction de a/W est quasiment une droite dont l'équation est :

$$\lambda_1 = 1 + 0,261\left(1 - \frac{a}{W}\right) = 1 + 0,261\,\frac{b}{W} \quad \text{soit} \quad 2\lambda_1 = 2 + 0,522\,\frac{b}{W} \tag{2.30}$$

L'expression ci-dessus correspond à celle du facteur plastique utilisé dans la norme ASTM E1820.

En résumé : *compte tenu de ce qui précède l'expression de η_{pl}, issue de la norme ASTM E1820, est basée sur une approche purement analytique où le ligament d'une éprouvette CT est supposé travailler principalement en flexion avec une faible partie sollicitée en traction. L'équilibre des forces permet de déterminer le paramètre α qui désigne la fraction de ligament soumis à un effort de traction.*

La partie plastique V_{pl} du déplacement est alors reliée à un angle de rotation θ_{pl} autour du point d'équilibre E de la figure 2.1. En suivant l'approche de [Rice et al., 1973] cet angle est considéré comme une fonction du rapport P/P_L, où P désigne l'effort appliqué à l'éprouvette CT et P_L la charge limite admissible par cette même éprouvette.

Cette dernière hypothèse permet d'obtenir l'expression (2.23) de la partie plastique de J. Celle-ci sera alors simplifiée par [Clarke and Landes, 1979] afin d'obtenir la relation (2.29) dont se déduit l'expression du facteur plastique spécifié dans la norme ASTM E1820.

Cette analyse de l'éprouvette CT qui a fait l'objet du présent paragraphe, ne peut pas être généralisée à une éprouvette de géométrie quelconque, il est donc nécessaire de trouver une autre méthodologie permettant la détermination du facteur plastique η_{pl}.

Avant de poursuivre l'analyse de la norme ASTM E1820, il est intéressant d'exposer les travaux de [Ernst et al., 1979] qui permettent de vérifier que le ligament d'une éprouvette CT est principalement soumis à de la flexion avec une faible partie de celui-ci sollicitée en traction. De plus par analogie avec une éprouvette SENT dont le ligament sera principalement soumis à de la traction cette étude montre que le facteur plastique associé à de la traction pure est égale à 1.

Dans le cas d'un chargement du ligament en flexion selon [Ernst et al., 1979] l'expression de la charge P appliquée à l'éprouvette est de la forme :

$$P = \frac{Bb^2}{W}\ F_1\left(\frac{a}{W}, \frac{V_{pl}}{W}\right) \tag{2.31}$$

La flexion est prise en compte par le terme Bb^2/W. La formulation ci-dessus a également été utilisée par [Joyce, 1989] et [Joyce and Hackett, 1989] mais F_1 est réduite au cours de l'analyse à la fonction puissance suivante :

$$F_1 = \frac{PW}{Bb^2} = \frac{\alpha k W}{Bb}\left(\frac{V_{pl}}{W}\right)^n$$

Dans l'expression ci-dessus k est une constante et α est la variable introduite par [Merkle and Corten, 1974], donnée par la relation (2.5). Cette définition de F_1 ne sera pas retenue par la suite, nous suivrons [Ernst et al., 1979] qui n'explicitent pas F_1 et lui conservent ainsi un caractère général.

Afin d'obtenir J nous nous intéressons uniquement au calcul de sa partie plastique J_{pl}. En effet sa partie élastique J_{el} se déduit, en utilisant (2.28), du facteur d'intensité de contrainte K issus d'une simulation EF ou d'un formulaire de la littérature tel que [Murakami, 1987]. Afin de déterminer J_{pl} nous utilisons la relation (2.8) ainsi nous avons :

$$J_{pl} = -\int_0^{V_{pl}} \frac{1}{B}\ \frac{\partial P}{\partial a}\ dV_{pl} = -\int_0^{V_{pl}} \frac{\partial}{\partial a}\ \frac{1}{B}\ \left(\frac{Bb^2}{W}\ F_1\right)\ dV_{pl}$$

Soit $\dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{Bb^2}{W}\ F_1\right) = -2\ \dfrac{bB}{W}\ F_1 + \dfrac{Bb^2}{W}\ \dfrac{\partial F_1}{\partial a}$ en se souvenant que $b = W - a$

or $\dfrac{\partial F_1}{\partial a} = \dfrac{\partial F_1}{\partial\left(\dfrac{a}{W}\right)}\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{a}{W}\right)}{\partial a} = \dfrac{1}{W}\ \dfrac{\partial F_1}{\partial\left(\dfrac{a}{W}\right)}$

D'où $$J_{pl} = \int_0^{V_{pl}} \frac{2b}{W}\ F_1\ dV_{pl} - \int_0^{V_{pl}} \frac{b^2}{W^2}\ \frac{\partial F_1}{\partial\left(\dfrac{a}{W}\right)}\ dV_{pl} \tag{2.32}$$

En utilisant (2.31) $$J_{pl} = \frac{2}{Bb}\int_0^{V_{pl}} P\ dV_{pl} - \frac{b^2}{W^2}\int_0^{V_{pl}} \frac{\partial F_1}{\partial\left(\dfrac{a}{W}\right)}$$

Compte tenu de l'expression de J_{pl} en fonction de η_{pl} donnée par (2.1), le premier terme représente la formuation de J_{pl} dans le cas de la flexion pure correspondant à une valeur de η_{pl} égale à 2. Le second terme est un terme correctif afin de prendre en compte la sollicitation de traction qui s'exerce sur le ligament conformément à l'analyse de [Merkle and Corten, 1974]. Pour une éprouvette de type SENT dont le ligament est principalement sollicité en traction, [Ernst et al., 1979] proposent de modifier l'expression 2.31 afin de tenir compte de la traction en remplaçant le terme Bb^2/W traduisant l'effet de flexion par Bb. Dans le cas d'un ligament en traction la relation 2.31 devient donc :

$$P = Bb\ F_2\left(\frac{a}{W}, \frac{V_{pl}}{W}\right) \tag{2.33}$$

Or $$J_{pl} = -\int_0^{V_{pl}} \frac{1}{B}\ \frac{\partial P}{\partial a}\ dV_{pl} = -\int_0^{V_{pl}} \frac{\partial}{\partial a}\ (b\ F_2)\ dV_{pl}$$

D'où $$J_{pl} = \int_0^{V_{pl}} F_2\ dV_{pl} - \int_0^{V_{pl}} b\ \frac{\partial F_2}{\partial\,(a/W)}\ \frac{\partial\,(a/W)}{\partial a}\ dV_{pl}$$

Soit $\quad J_{pl} = \int_0^{V_{pl}} F_2 \; dV_{pl} - \int_0^{V_{pl}} \frac{b}{W} \frac{\partial F_2}{\partial (a/W)} \; dV_{pl}$ (2.34)

En utilisant (2.33) $\quad J_{pl} = \frac{1}{Bb} \int_0^{V_{pl}} P \; dV_{pl} - \frac{b}{W} \int_0^{V_{pl}} \frac{\partial F_2}{\partial \left(\frac{a}{W}\right)} \; dV_{pl}$

Compte tenu de l'expression de J_{pl} en fonction de η_{pl} donnée par (2.1), le premier terme représente la formuation de J_{pl} dans le cas de la traction pure correspondant à une valeur de η_{pl} égale à 1. Le second terme est un terme correctif afin de prendre en compte la sollicitation en flexion qui s'exerce sur le ligament. Nous allons maintenant revenir à l'analyse de la norme ASTM E1820.

2.2.2 Formule incrémentale pour obtenir la courbe J_R-Δa

L'expression du facteur plastique, établie dans le paragraphe précédent, permet de calculer à partir de l'aire sous la courbe $P - V$ la partie plastique de l'intégrale J pour une éprouvette CT dont la fissure est stationnaire. La norme ASTM E1820 spécifie une formule incrémentale permettant le calcul de J_{pl} lorsque la fissure se propage. Le but de ce paragraphe est de présenter à partir de l'étude de [Ernst et al., 1981], restreinte à une éprouvette CT, la démonstration de cette formule pour une éprouvette fissurée de géométrie quelconque.

Dans [Ernst et al., 1981] la question de l'existence du facteur plastique est abordée. En effet, avant d'élaborer une méthode de calcul de η_{pl}, il est important de savoir quelles sont les conditions nécessaires à son existence. D'après [Ernst et al., 1981], le facteur plastique existe si et seulement si l'effort P appliqué à l'éprouvette fissurée peut s'écrire comme le produit d'une fonction G de a/W et d'une fonction H de V_{pl}/W. La condition d'existence de η_{pl} repose donc sur la séparabilité des variables a et V_{pl} dans l'expression de la charge P. C'est cette expression particulière de P qui est appelée « keycurve ». Nous allons à partir de celle-ci chercher à déterminer η_{pl}.

Nous savons que η_{pl} existe si et seulement si $\quad P = G\,(a/W)\,H\,(V_{pl}/W)$ (2.35)

Ainsi en se souvenant de la relation (2.8) la partie plastique de J s'écrit sous la forme suivante :

$$J_{pl} = -\int_0^{V_{pl}} \frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial a} \; dV_{pl} = -\int_0^{V_{pl}} \frac{1}{B} \frac{\partial G}{\partial a} \; H \; dV_{pl}$$

En notant $\quad G\,' = \frac{dG}{d\,(a/W)} \quad$ nous avons $\quad \frac{dG}{da} = \frac{dG}{d\,(a/W)} \frac{d\,(a/W)}{da} = \frac{G\,'}{W}$

D'où $\quad J_{pl} = -\frac{G\,'}{BW} \int_0^{V_{pl}} H \; dV_{pl}$

En utilisant (2.35) $\quad J_{pl} = -\frac{G\,'}{GBW} \int_0^{V_{pl}} P \; dV_{pl}$

Or $\quad \int_0^{V_{pl}} P \; dV_{pl} = A_{pl} \quad$ d'où $\quad J_{pl} = -\frac{G\,'}{GBW} \; A_{pl}$

Compte tenu de (2.1) $\quad \eta_{pl} = -\frac{b}{W} \frac{G\,'}{G}$ (2.36)

Ainsi $\quad J_{pl} = \eta_{pl} \frac{G}{Bb} \int_0^{V_{pl}} H \; dV_{pl}$ (2.37)

L'expression (2.36) pourra être utilisée afin de déterminer le facteur plastique pour une éprouvette fissurée de géométrie quelconque. Remarquons également que d'après cette expression η_{pl} dépend

seulement de a et W puisque par définition G est uniquement fonction de a/W et b, égal à $W - a$.

Dans [Ernst et al., 1981] les auteurs fournissent une démonstration de la formule incrémentale de la norme ASTM E1820 pour les éprouvettes CT. Sur la base de cet article nous allons généraliser cette démonstration à une éprouvette fissurée quelconque. D'après la relation (2.37) la partie plastique de J dépend uniquement des variables a et V_{pl}, nous pouvons donc écrire la relation suivante :

$$dJ_{pl} = \frac{\partial J_{pl}}{\partial a}\ da + \frac{\partial J_{pl}}{\partial V_{pl}}\ dV_{pl} \tag{2.38}$$

D'après (2.37) $$\frac{\partial J_{pl}}{\partial V_{pl}} = \eta_{pl}\ \frac{G}{Bb}\ \frac{d}{dV_{pl}}\left(\int_0^{V_{pl}} H\ dV_{pl}\right) = \eta_{pl}\ \frac{G}{Bb}\ H \tag{2.39}$$

(2.37) permet d'écrire $$\frac{\partial J_{pl}}{\partial a} = \frac{1}{B}\ \frac{d}{da}\left(\eta_{pl}\ \frac{G}{b}\right)\ \int_0^{V_{pl}} H\ dV_{pl} \tag{2.40}$$

$$\frac{d}{da}\left(\eta_{pl}\ \frac{G}{b}\right) = \frac{G}{b}\ \frac{d\eta_{pl}}{da} + \frac{\eta_{pl}}{b}\ \frac{dG}{da} - \frac{\eta_{pl}G}{b^2}\ \frac{db}{da}$$

Nous avons déjà établi que $\dfrac{dG}{da} = \dfrac{dG}{d\,(a/W)}\dfrac{d\,(a/W)}{da} = \dfrac{G\,'}{W}$

En notant $\eta_{pl}\,' = \dfrac{d\eta_{pl}}{d\,(a/W)}$ nous avons $\dfrac{d\eta_{pl}}{da} = \dfrac{d\eta_{pl}}{d\,(a/W)}\ \dfrac{d\,(a/W)}{da} = \dfrac{\eta_{pl}\,'}{W}$

D'où $\dfrac{d}{da}\left(\eta_{pl}\ \dfrac{G}{b}\right) = \dfrac{G}{bW}\ \eta_{pl}\,' + \dfrac{\eta_{pl}}{bW}\ G\,' + \dfrac{\eta_{pl}G}{b^2}$

Soit $\dfrac{d}{da}\left(\eta_{pl}\ \dfrac{G}{b}\right) = \dfrac{\eta_{pl}G}{b^2}\left(\dfrac{b}{W}\ \dfrac{\eta_{pl}\,'}{\eta_{pl}} + \dfrac{b}{W}\ \dfrac{G\,'}{G} + 1\right)$

Compte tenu de (2.36) $\dfrac{d}{da}\left(\eta_{pl}\ \dfrac{G}{b}\right) = \dfrac{\eta_{pl}G}{b^2}\left(\dfrac{b}{W}\ \dfrac{\eta_{pl}\,'}{\eta_{pl}} + 1 - \eta_{pl}\right)$

Finalement $$\frac{d}{da}\left(\eta_{pl}\ \frac{G}{b}\right) = -\ \gamma\ \frac{\eta_{pl}G}{b^2} \quad \text{avec} \quad \gamma = \eta_{pl} - \frac{b}{W}\ \frac{\eta_{pl}\,'}{\eta_{pl}} - 1 \tag{2.41}$$

En introduisant ce dernier résultat dans (2.40) et en utilisant (2.39) la relation (2.38) devient :

$$dJ_{pl} = \left(-\ \gamma\ \frac{\eta_{pl}G}{Bb^2}\ \int_0^{V_{pl}} H\ dV_{pl}\right) da + \left(\eta_{pl}\ \frac{G}{Bb}\ H\right) dV_{pl}$$

En utilisant (2.37) $$dJ_{pl} = -\ \gamma\ \frac{J_{pl}}{b}\ da + \left(\eta_{pl}\ \frac{G}{Bb}\ H\right) dV_{pl} \tag{2.42}$$

En intégrant l'expression ci-dessus nous obtenons donc :

$$J_{pl} = \int_{a_0}^{a} -\ \gamma\ \frac{J_{pl}}{b}\ da + \int_0^{V_{pl}} \eta_{pl}\ \frac{G}{Bb}\ H\ dV_{pl} \tag{2.43}$$

Revenons un instant sur la relation (2.41) qui définit selon [Ernst et al., 1981] le paramètre γ à partir de η_{pl} et de sa dérivée par rapport a/W. En effet, dans la norme ASTM E1820 ce paramètre suit une évolution linéaire donnée par : $\gamma = 1 - 0,76b/W$. Nous avons donc tracé sur la figure 2.7 les courbes correspondant à ces deux définitions afin d'évaluer la validité de l'approximation linéaire de (2.41) proposée par la norme ASTM E1820, pour les éprouvettes CT. Nous pouvons constater d'après la figure 2.7 que cette approximation est tout à fait satisfaisante.

Nous avons traité jusqu'à présent des fissures stationnaires, nous allons maintenant nous intéresser à la propagation de ces fissures. La courbe rouge de la figure 2.6 illustre l'enregistrement $P - V$ effectué

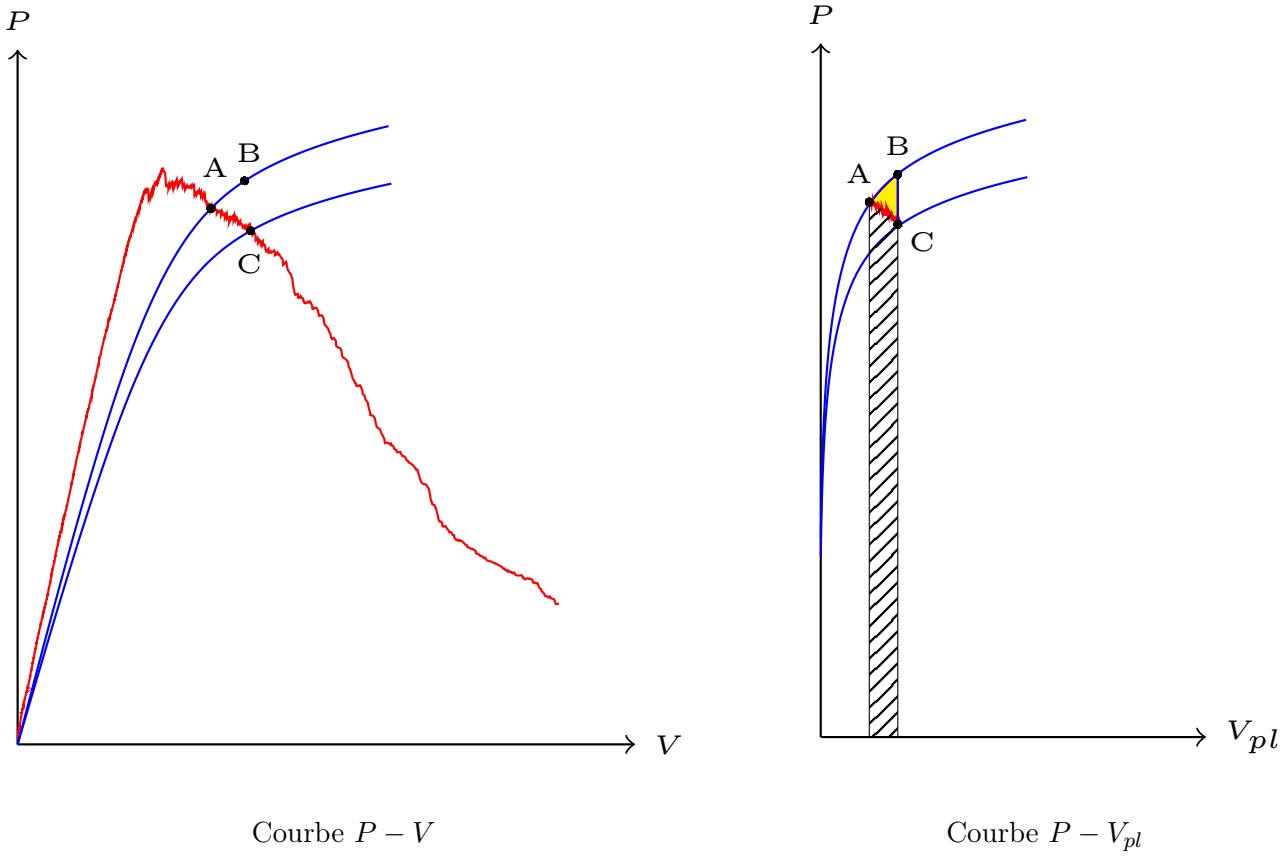


FIGURE 2.6 – Effort en fonction du déplacement pour une éprouvette fissurée

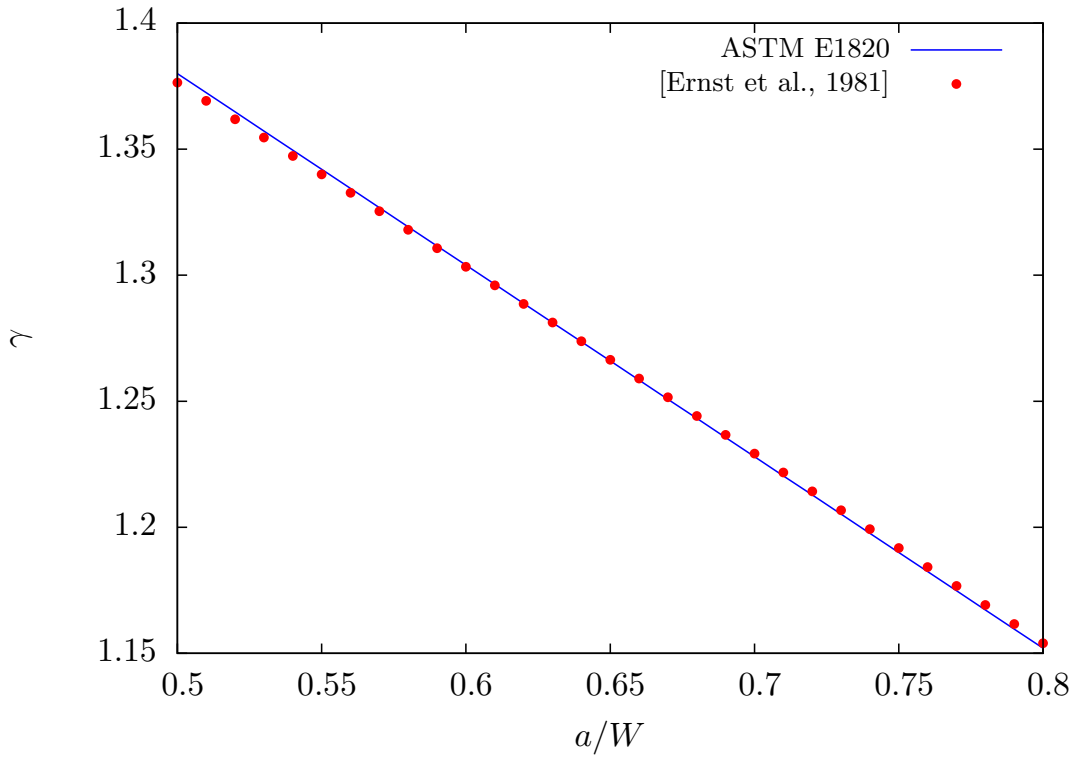


FIGURE 2.7 – Evolution de γ en fonction de a/W selon la norme ASTM E1820 et [Ernst et al., 1981]

au cours d'un essai sur une éprouvette fissurée dont la fissure se propage. Les deux courbes bleues représentent la charge P en fonction du déplacement V pour des éprouvettes fissurées dont la longueur de fissure est égale respectivement à a_A et a_C. Précisons également que ces fissures sont stationnaires c'est-à-dire que leur longueur est constante.

En se référant à la figure 2.6, le point B est construit de manière a être à l'intersection de la courbe $P - V_{pl}$ d'une éprouvette comportant une fissure stationnaire de longueur a_A et de la droite d'abscisse constante égale à celle du point C. Le trajet du point A au point C est indéterminé car il s'agit de l'enregistrement expérimental de la propagation d'une fissure (courbe rouge de la figure 2.6). Compte tenu de la construction du point B, le trajet du point A au point B se fait à longueur de fissure constante tandis que celui du point B au point C s'effectue à déplacement plastique V_{pl} constant.

Dans [Ernst et al., 1981], il est précisé qu'il existe une unique valeur de l'intégrale J pour un couple (a, V_{pl}) donné. Ainsi la valeur de J au point A, notée J_A, ne dépend que du couple (a, V_{pl}) du point A. De même J_B et J_C ne dépendent que de (a, V_{pl}) aux points B et C. Selon [Rice, 1968a], l'intégrale J dérive d'un potentiel par conséquent la valeur J_C ne dépend pas du chemin parcouru et sera identique si le chemin considéré est le trajet expérimental du point A au point C ou un trajet virtuel du point A au point B puis de celui-ci au point C.

Le trajet de l'origine au point A puis au point B concerne une fissure stationnaire, la valeur de da est donc nulle ainsi la relation (2.43) permet d'écrire :

$$J_{pl}^B = \int_0^{V_{pl}^B} \eta_{pl} \, \frac{G}{Bb} \, H \, dV_{pl}$$

Puisque la longueur de fissure n'évolue pas sur le trajet considéré, les variables b et η_{pl} restent constantes par conséquent l'expression ci-dessus devient :

$$J_{pl}^B = \frac{\eta_{pl}^A}{Bb_A} \int_0^{V_{pl}^B} G \, H \, dV_{pl} = \frac{\eta_{pl}^A}{Bb_A} \int_0^{V_{pl}^B} P \, dV_{pl} \quad \text{compte tenu de (2.35)}$$

Les notations η_{pl}^A et b_A signifient que les valeurs de η_{pl} et b sont évaluées au point A. La relation ci-dessus peut être transformée afin d'obtenir l'expression suivante :

$$J_{pl}^B = \frac{\eta_{pl}^A}{Bb_A} \int_0^{V_{pl}^A} P \, dV_{pl} + \frac{\eta_{pl}^A}{Bb_A} \int_{V_{pl}^A}^{V_{pl}^B} P \, dV_{pl}$$

En se souvenant de (2.1) $\quad J_{pl}^A = \dfrac{\eta_{pl}^A}{Bb_A} \displaystyle\int_0^{V_{pl}^A} P \, dV_{pl}$

D'où $\quad J_{pl}^B = J_{pl}^A + \dfrac{\eta_{pl}^A}{Bb_A} \displaystyle\int_{V_{pl}^A}^{V_{pl}^B} P \, dV_{pl}$ (2.44)

Nous allons maintenant chercher à évaluer la valeur de l'intégrale J au point C en intégrant (2.42) sur le trajet du point B au point C, nous pouvons donc écrire :

$$J_{pl}^C - J_{pl}^B = \int_B^C dJ_{pl} = \int_{a_B}^{a_C} - \gamma \, \frac{J_{pl}}{b} \, da + \int_0^{V_{pl}^C} \eta_{pl} \, \frac{G}{Bb} \, H \, dV_{pl} \tag{2.45}$$

Or nous avons précisémment construit le point B de manière à avoir V_{pl} constant, soit $dV_{pl} = 0$, sur le trajet du point B au point C, par conséquent :

$$J_{pl}^C = J_{pl}^B - \int_{a_B}^{a_C} \gamma \, \frac{J_{pl}}{b} \, da \tag{2.46}$$

En combinant les relations (2.44) et (2.46) nous obtenons :

$$J_{pl}^{C} = J_{pl}^{A} + \frac{\eta_{pl}^{A}}{Bb_A} \int_{V_{pl}^{A}}^{V_{pl}^{B}} P \; dV_{pl} - \int_{a_B}^{a_C} \gamma \; \frac{J_{pl}}{b} \; da \tag{2.47}$$

Afin de simplifier l'expression ci-dessus une première approximation consiste à négliger l'aire du triangle ABC à condition que les points A, B et C soient suffisamment proches. En désignant par A_{AC} l'aire sous la courbe d'essai (partie hachurée de la figure 2.6) pour une valeur d'abscisse comprise entre V_{pl}^{A} et V_{pl}^{C}, la simplification précédente permet d'obtenir :

$$A_{AC} = \int_{V_{pl}^{A}}^{V_{pl}^{B}} P \; dV_{pl}$$

Une seconde approximation, toujours basée sur des points A, B et C suffisamment proches, consiste à supposer que les valeurs de l'intégrale J ainsi que des variables b et γ sont constantes sur le trajet du point B au point C. Il est alors possible d'écrire la relation suivante :

$$\int_{a_B}^{a_C} \gamma \; \frac{J_{pl}}{b} \; da = \frac{\gamma_B}{b_B} \; J_{pl}^{B} \; (a_C - a_B)$$

Les notations γ_B, b_B, et J_{pl}^{B} signifient que ces variables sont évaluées au point B. Le trajet du point A au point B s'effectue à longueur de fissure constante par conséquent $\gamma_B/b_B = \gamma_A/b_A$. De plus par hypothèse $a_A = a_B$ ainsi (2.47) devient :

$$J_{pl}^{C} = J_{pl}^{A} + \frac{\eta_{pl}^{A}}{Bb_A} \; A_{AC} - \frac{\gamma_A}{b_A} \; J_{pl}^{B} \; (a_C - a_A) \tag{2.48}$$

En tenant compte des approximations définies ci-dessus, (2.44) s'écrit sous la forme :

$$J_{pl}^{B} = J_{pl}^{A} + \frac{\eta_{pl}^{A}}{Bb_A} \; A_{AC} \tag{2.49}$$

En combinant (2.48) et (2.49) $\quad J_{pl}^{C} = \left(J_{pl}^{A} + \frac{\eta_{pl}^{A}}{Bb_A} \; A_{AC} \right) \left(1 - \frac{\gamma_A}{b_A} \, (a_C - a_A) \right)$

En remplaçant respectivement les lettres A et C par les indices $i-1$ et i l'expression ci-dessus devient :

$$J_{pl(i)} = \left(J_{pl(i-1)} + \frac{\eta_{pl(i-1)}}{b_{(i-1)}} \; \frac{A_{pl(i)} - A_{pl(i-1)}}{B} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{(i-1)}}{b_{i-1}} \left(a_{(i)} - a_{(i-1)} \right) \right)$$

Nous retrouvons l'expression de la formule itérative de la norme ASTM E1820 permettant d'obtenir la courbe $J_R - \Delta a$ pour une éprouvette fissurée. Théoriquement, compte tenu de la relation (2.8), la partie plastique de l'intégrale J devrait être déterminée par intégration sur le trajet réel emprunté par la fissure et matérialisé par l'enregistrement $P - V_{pl}$ lors de l'essai (courbe rouge de la figure 2.6). Ce calcul direct est délicat car il nécessite de connaître a priori l'expression de P en fonction de V_{pl} et a ou de V_{pl} en fonction de P et a.

La formule itérative traite la propagation de la fissure de proche en proche, en considérant plusieurs fissures stationnaires dont l'incrément de longueur est faible à chaque pas. Dans tous les cas, l'hypothèse de base est de considérer que l'intersection des courbes $P-V$ d'une fissure stationnaire et d'une fissure se propageant, pour des éprouvettes de géométrie identique, se fait pour une même longueur de fissure a.

2.2.3 Définition de l'intégrale J modifiée

Selon [Paris et al., 1979] la courbe $J_R - \Delta a$ est indépendante de la taille de l'éprouvette CT utilisée si la longueur du ligament b est supérieure à MJ/σ_f avec $M = 25$. Dans cette expression la contrainte σ_f désigne la valeur moyenne de la contrainte à limite élastique (σ_y pour « yield stress ») et de la contrainte à rupture (σ_u pour « ultimate stress »). Si cette condition est vérifiée, alors les champs de contrainte et de déformation en pointe de fissure sont reliés au chargement et à la géométrie de l'éprouvette uniquement par l'intégrale J. Une valeur critique de J peut alors être utilisée comme critère d'amorçage de la fissure dans le cadre de la mécanique de la rupture non linéaire (NLFM). Dans [McMeeking and Parks, 1979] les auteurs proposent une valeur de M égale à 25 ou 50 tandis que [Windisch et al., 2009] donne une valeur de 50.

Cette exigence traduit la condition de plasticité confinée, souvent notée SSY pour l'acronyme de l'expression anglaise « Small Scale Yielding », elle est nécessaire mais pas suffisante. En effet, pour que la courbe R soit indépendante de la géométrie de l'éprouvette, et traduise par conséquent une propriété intrinsèque du matériau, il faut également respecter la condition de déformation plane au centre de l'éprouvette.

En fait, cette exigence de déformation plane ne peut pas être remplie pour des éprouvettes de faible épaisseur. Par exemple, dans le cas d'une éprouvette CT prélevée de manière à caractériser un joint soudé, l'épaisseur B est limitée par la dimension de la soudure. [Ernst, 1989] propose alors d'employer une expression modifiée de l'intégrale J qu'il note J_M. Elle permet de construire une courbe $J_M - \Delta a$ qui constitue une autre manière de caractériser la résistance à la déchirure ductile d'un matériau. Cette nouvelle courbe R_M s'avère être insensible à la variation d'épaisseur de l'éprouvette, comme le montre les travaux de [Ernst et al., 1988] et [Nakagaki et al., 1989].

$$J_M = J - \int_{a_0}^{a} \frac{\partial J_{pl}}{\partial a}\, da \quad \text{où} \quad J_{pl} = J - J_{el} \tag{2.50}$$

La relation ci-dessus montre bien que J_M est égale à J lorsque la fissure ne se propage pas. Le but de Ernst était de modifier l'expression de l'intégrale J afin qu'elle devienne dépendante du chemin suivi dans le plan (P, V), c'est-à-dire de tenir compte du trajet de la fissure entre a_0 et a dans le plan (a, V). Nous allons maintenant à partir de [Ernst, 1989] transformer l'expression (2.50) afin de pouvoir calculer J_M à partir de la courbe $P - V$, issue d'un essai sur éprouvette fissurée. Puisque P peut être exprimé en fonction de V_{pl} et de a nous pouvons écrire la relation suivante :

$$dJ_{pl} = \frac{\partial J_{pl}}{\partial a}\, da \; + \; \frac{\partial J_{pl}}{\partial V_{pl}}\, dV_{pl}$$

En réintégrant la relation ci-dessus nous obtenons :

$$J_{pl} = \int dJ_{pl} \; = \; \int_{a_0}^{a} \frac{\partial J_{pl}}{\partial a}\, da \; + \; \int_{0}^{V_{pl}} \frac{\partial J_{pl}}{\partial V_{pl}}\, dV_{pl}$$

$$\text{Soit} \quad J = J_{el} \; + \; \int_{a_0}^{a} \frac{\partial J_{pl}}{\partial a}\, da \; + \; \int_{0}^{V_{pl}} \frac{\partial J_{pl}}{\partial V_{pl}}\, dV_{pl}$$

$$\text{Ainsi d'après (2.50)} \quad J_M = J_{el} \; + \; \int_{0}^{V_{pl}} \frac{\partial J_{pl}}{\partial V_{pl}}\, dV_{pl} \tag{2.51}$$

Cette nouvelle définition de J_M a l'avantage de faire intervenir la dérivée partielle de J_{pl} par rapport à V_{pl} au lieu de celle par rapport à a qui est plus délicate à calculer. Compte tenu de (2.8) nous avons :

$$J_{pl} = -\int_{0}^{V_{pl}} \frac{1}{B}\, \frac{\partial P}{\partial a}\, dV_{pl} \; = \; \int_{0}^{V_{pl}} \frac{1}{B}\, \frac{\partial P}{\partial b}\, dV_{pl} \quad \text{car} \quad b = W - a$$

D'où $\dfrac{\partial J_{pl}}{\partial V_{pl}} = -\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial P}{\partial a} = \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial P}{\partial b}$

Par conséquent $J_M = J_{el} + \displaystyle\int_0^{V_{pl}} \frac{1}{B}\frac{\partial P}{\partial b}\, dV_{pl}$

Cette relation permet de calculer J_M à partir de l'expression de P donnée par la « keycurve ». Il est également possible, comme nous allons le montrer, de déterminer J_M en utilisant d'une part le facteur plastique η_{pl} et d'autre part une formule incrémentale issue de [Ernst, 1989]. Nous rappelons ci-dessous la définition du facteur plastique donnée par (2.1) :

$$J_{pl} = \frac{\eta_{pl}}{Bb}\int_0^{V_{pl}} P dV_{pl} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial J_{pl}}{\partial V_{pl}} = \frac{\eta_{pl} P}{Bb}$$

En utilisant (2.51) $J_M = J_{el} + \displaystyle\int_0^{V_{pl}} \frac{\eta_{pl} P}{Bb}\, dV_{pl}$

Nous posons $J_M = J_{el} + J_M^{pl}$ où $J_M^{pl} = \displaystyle\int_0^{V_{pl}} \frac{\eta_{pl} P}{Bb}\, dV_{pl}$

La formulation précédente permet d'évaluer J_M de proche en proche à l'aide d'une formule incrémentale. En effet, le calcul de l'intégrale ci-dessus entre les états (i) et $(i+1)$ s'obtient par la méthode des trapèzes :

$$\int_{V_{pl(i)}}^{V_{pl(i+1)}} \frac{\eta_{pl} P}{Bb}\, dV_{pl} = \frac{1}{2B}\left[\left(\frac{\eta_{pl} P}{b}\right)_{(i+1)} + \left(\frac{\eta_{pl} P}{b}\right)_{(i)}\right]\left(V_{pl(i+1)} - V_{pl(i)}\right)$$

Or $J_{M(i+1)}^{pl} = J_{M(i)}^{pl} + \displaystyle\int_{V_{pl(i)}}^{V_{pl(i+1)}} \frac{\eta_{pl} P}{Bb}\, dV_{pl}$

Soit $J_{M(i+1)} = J_{el(i+1)} + J_{M(i)}^{pl} + \dfrac{1}{2B}\left[\left(\dfrac{\eta_{pl} P}{b}\right)_{(i+1)} + \left(\dfrac{\eta_{pl} P}{b}\right)_{(i)}\right]\left(V_{pl(i+1)} - V_{pl(i)}\right)$

Cette expression permet donc de déterminer la courbe $J_M - \Delta a$ qui constitue une alternative à la courbe R classique dans le cas d'éprouvettes fissurées de faible épaisseur, permettant ainsi de s'affranchir de la condition de déformation plane. Néanmoins pour que la courbe $J_M - \Delta a$ représente une propriété intrinsèque du matériau il faudra tout de même vérifier la condition de plasticité confinée. Enfin il faut bien avouer que cette courbe R_M est peu utilisée, nous la mentionnons donc plutôt à titre d'information et nous ne la mettrons pas en application dans la suite de notre étude.

2.2.4 Résumé

Au début de cette partie nous avons retracé l'histoire de la formulation du facteur plastique présente dans la norme ASTM E1820 car nous recherchons une méthode de détermination de la courbe $J_R - \Delta a$ valable pour toute géométrie d'éprouvette. Celle-ci sera basée sur un calcul de η_{pl} applicable quel que soit le type d'éprouvette. Nous avons donc naturellement commencé notre investigation par l'étude de l'expression de η_{pl} issue de la norme ASTM E1820 car elle est la plus utilisée pour obtenir la courbe R à partir d'éprouvettes CT.

L'idée de [Merkle and Corten, 1974] est de considérer que le ligament d'une éprouvette CT est principalement soumis à de la flexion avec une faible partie de celui-ci, non négligeable, sollicitée en traction. Ces auteurs déduisent de cette hypothèse l'expression du paramètre α qui représente la fraction de ligament chargé en traction. Sur cette base [Clarke and Landes, 1979] vont parvenir à l'issue de leur étude à l'expression du facteur plastique spécifié par la norme ASTM E1820. Il apparaît que le paramètre α joue un rôle essentiel dans cette formulation de η_{pl} applicable aux éprouvettes CT.

Malheureusement, cette analyse développée pour les éprouvettes CT et conduisant à la définition de η_{pl} n'est pas transposable à toute géométrie d'éprouvette. En particulier, elle ne peut pas être appliquée aux éprouvettes SENT dont le ligament est principalement sollicité en traction.

Nous avons donc poursuivi notre recherche en partant non plus de l'expression de η_{pl} fournie par la norme ASTM E1820 mais de la formulation incrémentale, issue de ce même document, utilisée pour construire de proche en proche la courbe $J_R - \Delta a$. La démonstration de cette formule est réalisée dans [Ernst et al., 1981] dont l'analyse montre qu'elle est transposable à une géométrie quelconque sous réserve que la charge appliquée à l'éprouvette fissurée puisse se mettre sous la forme : $P = G\,(a/W)\;\; H\,(V_{pl}/W)$ où V_{pl} désigne la partie plastique du déplacement d'ouverture de la fissure. Cette expression particulière de P est désignée par le terme de « keycurve ». Elle repose donc sur la séparabilité des variables a et V_{pl} dans l'expression de la charge P qui assure l'existence de η_{pl} selon [Ernst et al., 1981] et en permet un calcul direct à partir de la relation (2.36).

2.3 DETERMINATION DE η_{pl} PAR LA KEYCURVE

2.3.1 Détermination de la keycurve pour les éprouvettes CT et SENT

Dans ce paragraphe il est question de trouver les fonctions G et H permettant de définir la « keycurve » suivant la relation (2.35) pour les éprouvettes CT et SENT. L'utilisation de (2.36) permettra alors d'obtenir le coefficient η_{pl} nécessaire à la détermination de la courbe $J_R - \Delta a$. Les travaux exposés dans [Sharobeam and Landes, 1991] et [Sharobeam and Landes, 1993] permettent de vérifier expérimentalement la séparabilité des variables dans l'expression de P pour des éprouvettes CT et SENT.

Les auteurs de ces études ont utilisé des éprouvettes dont la totalité de la longueur de fissure est usinée et se termine par un rayon d'émoussement, afin d'autoriser la déformation plastique lors de l'ouverture de la fissure, tout en interdisant la propagation compte tenu de l'absence de préfissuration. Des éprouvettes avec différents rapports a/W ont été testées et permettent donc d'obtenir une courbe $P - V$ correspondant à des fissures stationnaires.

Pour un déplacement plastique quelconque, noté V_{pl}, les auteurs précédents définissent la variable S_{ij} comme le rapport de $P(a_i, V_{pl})$ sur $P(a_j, V_{pl})$. En supposant que la séparabilité des variables soit acquise, il devient possible d'écrire :

$$S_{ij} = \frac{P(a_i, V_{pl})}{P(a_j, V_{pl})} = \frac{G\left(\dfrac{a_i}{W}\right)\;\; H\left(\dfrac{V_{pl}}{W}\right)}{G\left(\dfrac{a_j}{W}\right)\;\; H\left(\dfrac{V_{pl}}{W}\right)} = \frac{G\left(\dfrac{a_i}{W}\right)}{G\left(\dfrac{a_j}{W}\right)}$$

Pratiquement, il suffit d'évaluer, pour différentes valeurs de V_{pl}, le rapport S_{ij} à partir des courbes $P - V$ issues des essais. Si la valeur de S_{ij} ainsi déterminée est constante alors la séparabilité des variables est démontrée. Les résultats présentés dans [Sharobeam and Landes, 1991] montrent l'existence de la séparabilité des variables pour des éprouvettes SENB, CT et SENT. Dans la suite de l'étude, une approximation de G par une fonction puissance permet d'obtenir une bonne adéquation avec les résultats expérimentaux. Ainsi, en posant $G(a_i/W) = A_i\;(a_i/W)^{m_i}$, la valeur de η_{pl} pour une longueur de fissure a_i est égale à m_i compte tenu de la relation (2.36). Il est donc possible d'évaluer de proche en proche η_{pl} en fonction de a/W.

La méthode développée dans la présente étude repose essentiellement sur un calcul numérique par la méthode des éléments finis qui se déploie suivant les différentes étapes énumérées ci-dessous :

❶ Maillage de la géométrie de l'éprouvette fissurée pour différentes valeurs de a/W.

❷ Simulation numérique en considérant que la fissure est stationnaire afin d'obtenir la courbe $P-V$ pour chaque valeur de a/W.

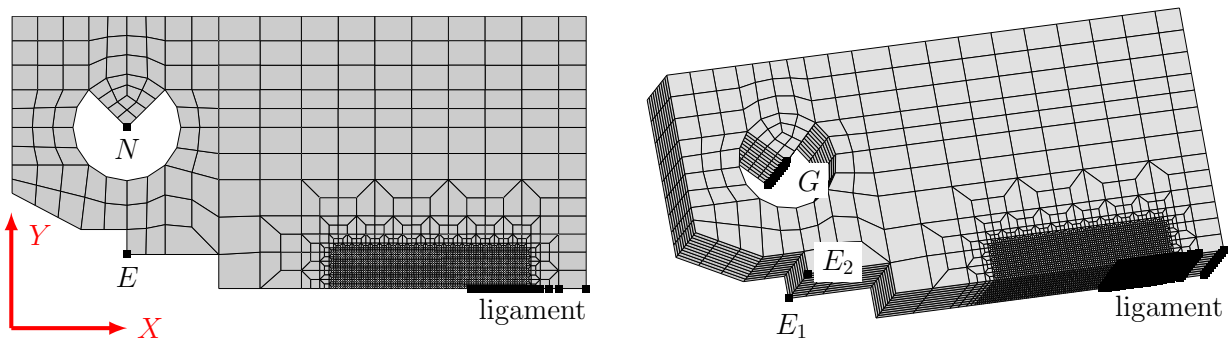


FIGURE 2.8 – Maillage 2D et 3D de l'éprouvette CT10

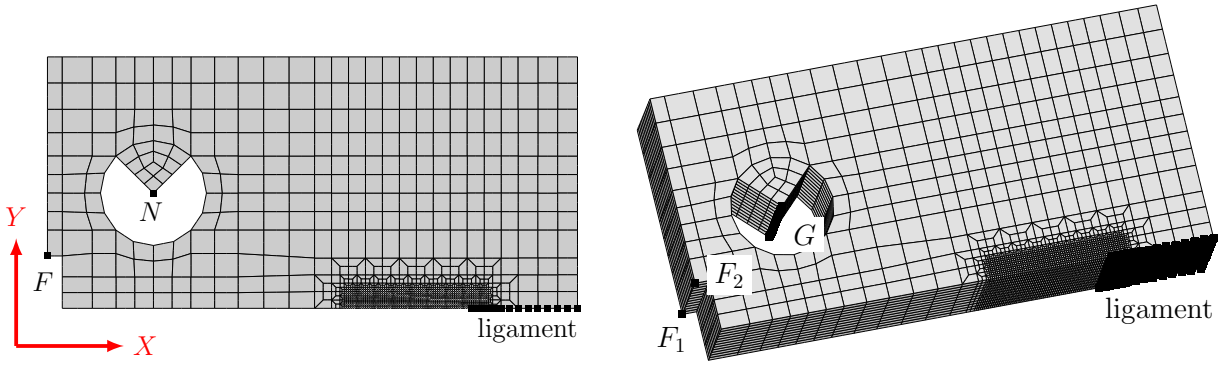


FIGURE 2.9 – Maillage 2D et 3D de l'éprouvette CT20

❸ Evaluation de la complaisance ou de la raideur de l'éprouvette en fonction de a/W.

❹ Détermination de la courbe $P - V_{pl}$ pour les différentes valeurs de a/W.

❺ Expression des fonctions H et G à l'aide du module d'optimisation du logiciel ZeBuLoN.

❻ Calcul de la dérivée de G par rapport à a/W pour chaque valeur de a/W, puis déduction de l'expression de η_{pl} en fonction de a/W.

2.3.1.1 Cas des éprouvettes CT

Deux géométries d'éprouvette CT ont été étudiées correspondant à une épaisseur B respectivement de 10 mm (CT10) et 20 mm (CT20). Pour chaque éprouvette, nous avons réalisé un maillage 2D et un maillage 3D. Il est ainsi possible de comparer le comportement d'une éprouvette 3D, avec celui d'une éprouvette calculée suivant l'hypothèse de déformation plane (DP) et de contraintes plane (CP). Les figures 2.8 et 2.9 présentent les différents maillages utilisés, le maillage 3D se déduit du 2D par une simple extrusion suivant l'axe z.

Pour chaque longueur de fissure fixée, un modèle est réalisé afin de simuler la courbe $P - V$ qui correspond à une valeur de a/W donnée. La longueur du ligament augmente respectivement par pas de 200 μm et de 400 μm pour les éprouvettes CT10 et CT20, de manière à obtenir un incrément de 0,01 pour a/W compris entre 0,5 et 0,8. La dimension des éléments autour du ligament est de 100 μm et 200 μm respectivement pour les éprouvettes CT10 et CT20. La taille de maille a fait l'objet d'une étude de convergence relativement à la réponse macroscopique du chargement P en fonction du déplacement d'ouverture de la fissure V ou Δ.

Dans le cas 3D seule 1/4 d'éprouvette a été modélisée. Par conséquent, par rapport au modèle 2D, il existe une condition de symétrie supplémentaire dans le plan d'équation $z = 0$, d'où la fixation de la composante Z. Les conditions aux limites communes aux modèles 2D et 3D sont :

- Fixation de la composante Y pour les nœuds du ligament

- Fixation de la composante X pour le nœud N (cas 2D) ou le groupe de nœuds G (cas 3D)
- Un déplacement imposé suivant Y pour le nœud N (cas 2D) ou le groupe de nœuds G (cas 3D)

Le post-traitement du calcul consiste à récupérer l'effort P dans la direction Y au nœud N, ou au groupe de nœuds G dans le cas 3D, ainsi que le déplacement d'ouverture de la fissure. Les figures 2.8 et 2.9 montrent que, pour les éprouvettes CT20, ce déplacement, noté Δ, est mesuré au niveau du bord libre de l'éprouvette (nœud F), tandis que pour l'éprouvette CT10 cette mesure est effectuée à l'aplomb de la ligne de chargement (nœud E), il sera alors désigné par la lettre V. Le déplacement Δ ou V devra être multiplié par deux afin de tenir compte de la symétrie du modèle. Dans le cas du modèle 3D le déplacement Δ ou V sera la moyenne des déplacements Δ ou V des nœuds F_1 et F_2 ou E_1 et E_2 (voir figures 2.8 et 2.9).

Nous allons maintenant introduire les caractéristiques mécaniques du matériau. Les valeurs respectives du coefficient de Poisson ν et du module d'Young E seront égales à 0,33 et 70000 MPa. Historiquement, le comportement plastique du matériau en pointe de fissure a été pris en compte pour la premère fois par [Rice and Rosengren, 1968] et [Hutchinson, 1968]. La loi d'écrouissage utilisée par ces auteurs était alors définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sigma_0} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} & \text{pour} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\[2ex] \dfrac{\sigma}{\sigma_0} = \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^N & \text{pour} \quad \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \tag{2.52}$$

Ainsi, depuis ces travaux précurseurs, les études menées sur les fissures dans le cadre de la NLFM sont basées sur cette même formulation de la loi d'écrouissage ou sur son expression inversée, connue sous l'appellation de loi de Ramberg-Osgood. Nous ne dérogerons donc pas à la règle tout en utilisant un formalisme plus général issus de [Hutchinson, 1983] et rappelé ci-dessous :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \tag{2.53}$$

La contrainte σ_0 est reliée à la déformation ε_0 par la relation $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ où E désigne le module d'Young. L'expression ci-dessus est donc définie à partir des trois paramètres caractéristiques du matériau σ_0, α et n. A titre d'exemple une valeur de n égale à 5 ou 20 correspond respectivement à un matériau fortement ou peu écrouissable. Traditionnellement, dans l'expression (2.53) les déformations élastiques sont considérées comme négligeables devant les déformations plastiques au voisinage de la pointe de fissure. Ainsi, la relation (2.53) se simplifie pour devenir :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n$$

Cherchons la contrainte correspondant au début de plasticité de cette loi d'écrouissage c'est-à-dire lorsque la déformation plastique est nulle :

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} = \alpha_0 \; \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n = \frac{\sigma_0}{E} \; \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n$$

d'où pour $\varepsilon_{pl} = 0$ $\quad \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{\sigma_0}{E} \; \alpha \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n$

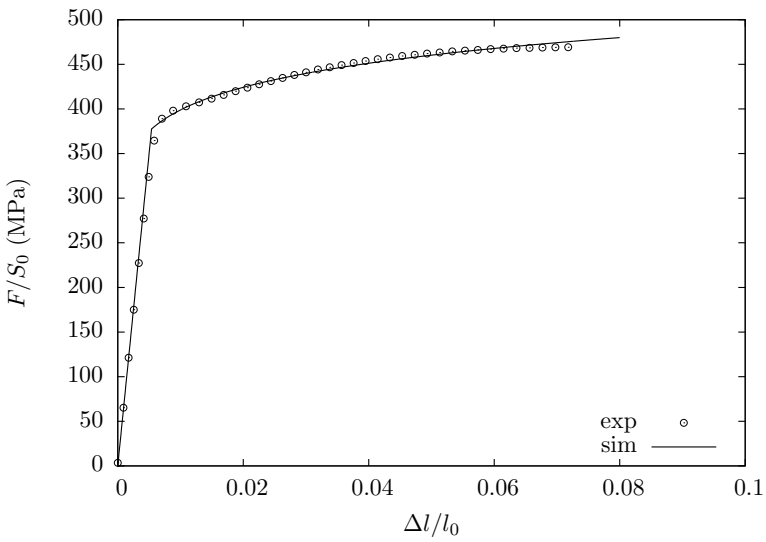


FIGURE 2.10 – Optimisation de la loi de Ramberg-Osgood

Soit $\sigma = \sigma_0 \; \alpha^{\frac{1}{1-n}}$

Par conséquent, les calculs seront effectués avec l'hypothèse de petite déformation en utilisant le critère de plasticité de von Mises et la loi d'écrouissage définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\sigma_0} & \text{pour} \quad \sigma \leq \sigma_0 \; \alpha^{\frac{1}{1-n}} \\ \\ \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n & \text{pour} \quad \sigma > \sigma_0 \; \alpha^{\frac{1}{1-n}} \end{cases} \tag{2.54}$$

Les paramètres σ_0, α et n ont été déterminés à l'aide d'un calcul par la méthode des éléments finis afin de modéliser un essai de traction sur éprouvette TR_{12}. Le modèle est très simple puisqu'il se réduit à un unique élément cubique soumis à un déplacement imposé. Cette simulation est alors couplée avec le module d'optimisation du logiciel ZeBuLoN ([Besson and Foerch, 1997]), afin de minimiser l'écart entre les résultats obtenus par calcul et ceux issus des essais. En vue de ne pas alourdir le présent exposé, nous nous permettons de renvoyer le lecteur intéressé par cette méthodologie, à la lecture de la première partie du chapitre 3 où celle-ci est plus amplement détaillée. Nous devons néanmoins préciser que la loi d'écrouissage, décrite par la relation (2.54), a été utilisée avec l'hypothèse des petites déformations. Les valeurs des paramètres σ_0, α et n issues de l'optimisation sont égales respectivement à 390,6 MPa, 1,42 et 11,2. Cette valeur de l'exposant n caractérise un matériau modérément écrouissable. La figure 2.10 montre qu'il existe une adéquation satisfaisante entre la modélisation et l'essai.

Pour obtenir la « keycurve » il faut transformer la courbe $P-V$ obtenue directement de la simulation en une courbe $P - V_{pl}$, en utilisant l'expression de la raideur K_{LL} ou de la complaisance C_{LL} de l'éprouvette CT. Nous rappelons que la complaisance est égale à l'inverse de la raideur. Dans une première étape, nous allons donc comparer la valeur de la raideur de l'éprouvette, calculée par la méthode des éléments finis, avec celle issue de la norme ASTM E1820 dans le cas des éprouvettes CT10 et de la norme ASTM E399 pour les éprouvettes CT20. L'évaluation de K_{LL} se fait lors du premier incrément de charge, choisi suffisamment petit, pour que les déformations restent purement élastiques. La différence entre les formulations de K_{LL} spécifiées par la norme ASTM E1820 et la norme ASTM E399 réside uniquement dans le point de mesure du déplacement d'ouverture de la fissure, dans le premier cas il s'agit d'évaluer V et dans le second Δ. Dans la norme ASTM E399 la complaisance

est donnée par la relation :

$$C_{LL} = \frac{1}{E'\ B}\left(\frac{19,75}{1-\dfrac{a}{W}}\right)^2 h(a/W) \quad \text{avec} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \tag{2.55}$$

$$h(a/W) = 0,5 + 0,192\frac{a}{W} - 1,385\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 2,919\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 1;842\left(\frac{a}{W}\right)^4 - \left(\frac{a}{W}\right)^5$$

L'expression de C_{LL} fournie par la norme ASTM E1820 est :

$$C_{LL} = \frac{1}{EB}\left(\frac{W+a}{W-a}\right)^2 g(a/W) \tag{2.56}$$

$$g(a/W) = 2,1630 + 12,219\frac{a}{W} - 20,065\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 0,9925\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 20,609\left(\frac{a}{W}\right)^4 - \left(\frac{a}{W}\right)^5$$

L'examen de ces deux formules de la complaisance permet de remarquer que la norme ASTM E399 se réfère a priori au cas de déformation plane en utilisant E', alors que la norme ASTM E1820 fait référence au cas de contrainte plane en employant E au lieu de E'. Ce constat est d'autant plus surprenant que l'expression du facteur d'intensité de contrainte K, identique pour les deux normes, correspond au cas de déformation plane.

Afin d'éclaircir ce point nous souhaitons vérifier les relations (2.56) et (2.55) aussi bien avec l'utilisation de E' qu'avec celle de E. Nous allons donc évaluer la raideur des éprouvettes CT10 et CT20 à partir d'une géométrie 2D dont le maillage est constitué d'éléments avec l'hypothèse de déformation plane ou avec celle de contrainte plane. Cette évaluation a également été effectuée dans le cas d'une géométrie 3D pour les deux types d'éprouvettes CT.

La raideur de l'éprouvette CT a été calculée par simulation numérique pour différents rapports de a/W variant de 0,5 à 0,8 par pas de 0,01. Puis les valeurs de K_{LL} ainsi obtenues ont été approximées par un polynôme de degré 5 à l'aide d'un algorithme SQP, issus de [Zhou and Tits, 1996] et intégré au logiciel ZeBuLoN. Le domaine de validité de cette approximation correspond à l'intervalle défini par les valeurs minimale et maximale de a/W, utilisées lors de la modélisation. Les figures 2.11a et 2.11b présentent les résultats obtenus respectivement pour les éprouvettes CT10 et CT20. L'équation du polynôme de degré 5 en a/W afin d'approximer K_{LL} sera définie de la manière suivante :

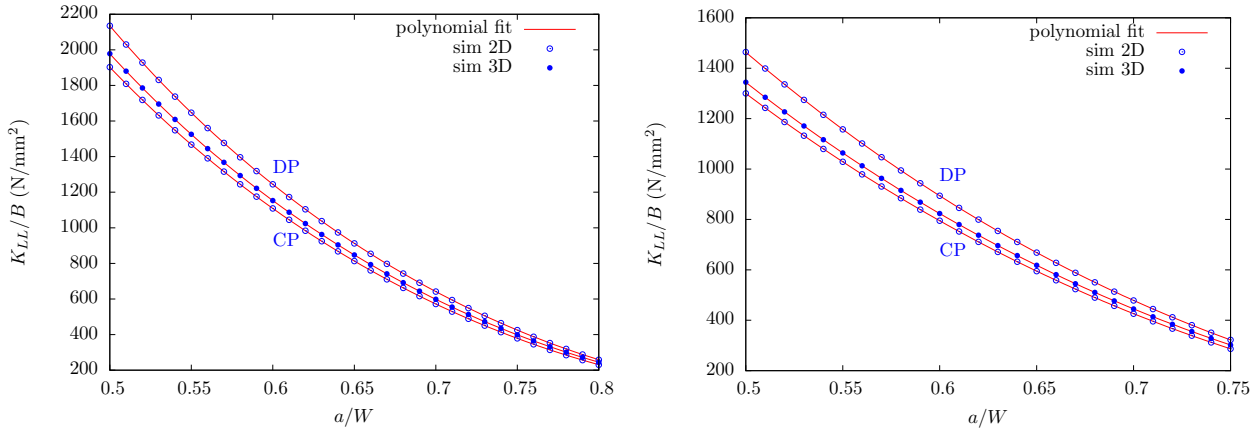
$$K_{LL} = B\ \left[\xi_0 + \xi_1\ \frac{a}{W} + \xi_2\left(\frac{a}{W}\right)^2 + \xi_3\left(\frac{a}{W}\right)^3 + \xi_4\left(\frac{a}{W}\right)^4 + \xi_5\left(\frac{a}{W}\right)^5\right] \tag{2.57}$$

Pour chacune des éprouvettes CT10 et CT20, la raideur sera donc représentée par trois polynômes, correspondant au cas de déformation plane (DP), de contrainte plane (CP) et du modèle 3D, dont les coefficients sont résumés dans le tableau ci-dessous. Il faut néanmoins garder à l'esprit que, dans le cas des éprouvettes CT10, la raideur est calculée à partir de P/V_{el}, alors que pour les éprouvettes CT20 K_{LL} sera égale à P/Δ_{el}.

	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
CT10 − DP	20821	−90292	183069	−212141	132191	−33638
CT10 − CP	15079	−53087	77416	−55678	14702	1706
CT10 − 3D	19701	−85748	172997	−197704	120914	−30145
CT20 − DP	7824	−19948	15154	2865	−11214	5369
CT20 − CP	6894	−17486	13184	2527	−9746	4671
CT20 − 3D	7297	−18918	14841	2574	−11080	5331

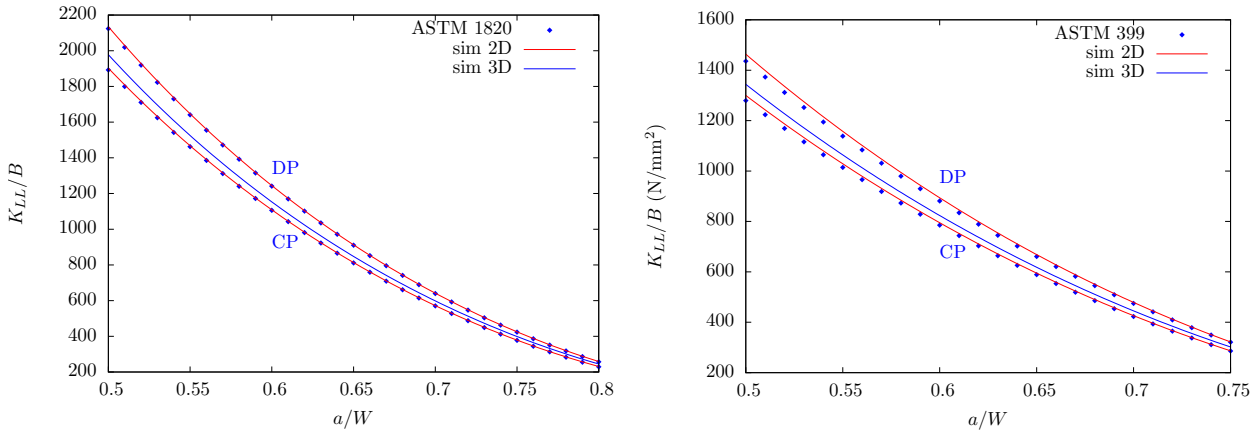
TABLE 2.1 – Coefficients des polynômes d'ordre 5 utilisés pour approximer K_{LL}

Les figures 2.12a et 2.12b comparent les différentes raideurs issues du calcul avec celles des normes



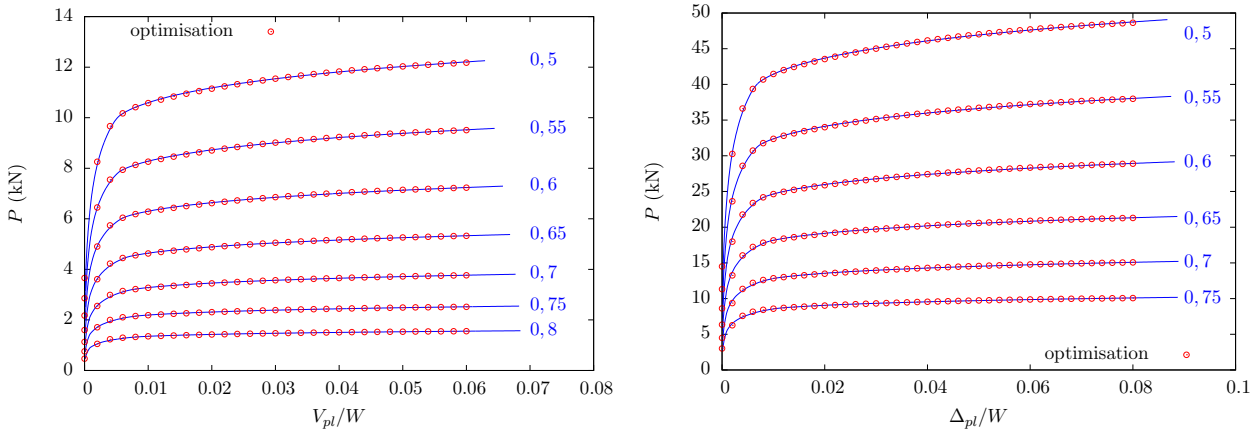
(a) Eprouvette CT10 (b) Eprouvette CT20

FIGURE 2.11 – Approximation de la raideur d'une éprouvette CT par un polynôme



(a) Eprouvette CT10 (b) Eprouvette CT20

FIGURE 2.12 – Comparaison de K_{LL} issue du calcul avec la spécification des normes ASTM



(a) Eprouvette CT10 (b) Eprouvette CT20

FIGURE 2.13 – « keycurve » pour les éprouvettes CT10 et CT20 dans le cas de déformation plane

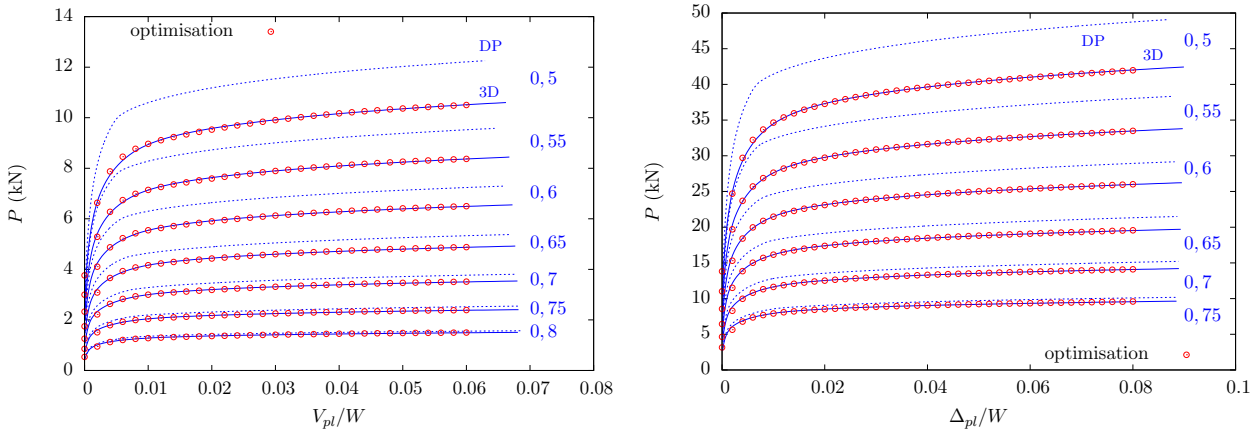
ASTM E1820 et ASTM E399 pour les éprouvettes CT10 et CT20. Elles constituent donc d'une part une validation de la modélisation, au moins dans le domaine élastique, puisque les valeurs de K_{LL} obtenues par simulation, sont cohérentes de celles spécifiées par les normes. D'autre part elles montrent que les formules de complaisance fournies par les normes ASTM E1820 et ASTM E399 correspondent respectivement au cas de contrainte plane et de déformation plane. De plus en remplaçant E' par E dans la relation (2.55) nous retrouvons le cas de contrainte plane, et celui de déformation plane en utilisant E' au lieu de E dans (2.56).

Il est cependant surprenant que la norme ASTM E399 présente une formulation de C_{LL} sous l'hypothèse de déformation plane tandis que la norme ASTM E1820 utilise celle de contrainte plane. L'explication la plus logique est que la norme ASTM E399 étant principalement axée sur le calcul de K en déformation plane, afin d'en déduire la ténacité, propose par souci de cohérence une raideur exprimée également en déformation plane. Par contre la norme ASTM E1820 vise principalement la détermination de la courbe R où la complaisance joue un rôle essentiel. Par conséquent il est important qu'elle soit la plus exacte possible, c'est-à-dire proche du comportement 3D de l'éprouvette, d'où l'expression avec l'hypothèse de contrainte plane.

La détermination de la « keycurve » sera effectuée pour l'hypothèse de déformation plane et pour le cas de la modélisation 3D. Pour obtenir la courbe $P - V_{pl}$ ou $P - \Delta_{pl}$, il suffit de soustraire la partie élastique V_{el} ou Δ_{el} de la courbe $P - V$ ou $P - \Delta$, en utilisant l'expression de la raideur K_{LL} calculée précédemment (voir tableau 2.1). Les figures 2.13a et 2.13b présentent les courbes $P - V_{pl}$ et $P - \Delta_{pl}$ ainsi déterminées, pour certaines valeurs du rapport a/W, dans le cas de déformation plane. De même, les figures 2.14a et 2.14b fournissent ces mêmes courbes pour le cas de la simulation 3D. Pour des valeurs de a/W allant de 0,5 à 0,6, le calcul 3D donne un effort P nettement inférieur à celui issus de la simulation en déformation plane, puis cet écart s'atténue lorsque a/W augmente, jusqu'à devenir nul pour des valeurs proches de 0,8. La définition de la « keycurve » fournie par (2.35) nécessite de connaitre les deux fonctions G et H tel que :

$$P = G\,(a/W)\;\; H\,(V_{pl}/W) \quad \text{ou} \quad P = G\,(a/W)\;\; H\,(\Delta_{pl}/W)$$

Ces fonctions ne sont certainement pas uniques, mais il nous suffit de déterminer un couple de fonctions G et H permettant de vérifier la relation ci-dessus. D'après les figures 2.13 et 2.14 la forme des courbes $P - V_{pl}$ et $P - \Delta_{pl}$ ressemblent étrangement à celle d'une loi d'écrouissage. Il vient donc immédiatement à l'esprit d'utiliser pour H une fonction puissance du type de celle définie par (2.52). L'inconvénient de ce type de fonction est de ne pas exactement capter la transition entre les domaines



(a) Eprouvette CT10 (b) Eprouvette CT20

FIGURE 2.14 – « keycurve » pour les éprouvettes CT10 et CT20 dans le cas de la similutation 3D

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	b_1	b_2	b_3
CT10 – DP	4574	3050	537,5	7674	36,5	11,3	635,5
CT10 – 3D	5267	6340	3593	0	455,9	33	0
CT20 – DP	13404	22833	9865	244	478	25,8	5,4
CT20 – 3D	13457	32987	7488	16073	1,5	73,1	445,3

TABLE 2.2 – Coefficients de la fonction H

élastique et plastique, de la courbe $P - V$ ou $P - \Delta$. L'impact de cet écart n'étant pas connu pour l'instant nous préférons utiliser, afin d'approximer le mieux possible les courbes $P - V_p$ et $P - \Delta_{pl}$, une somme de fonctions exponentielles saturantes, dont l'expression s'écrit :

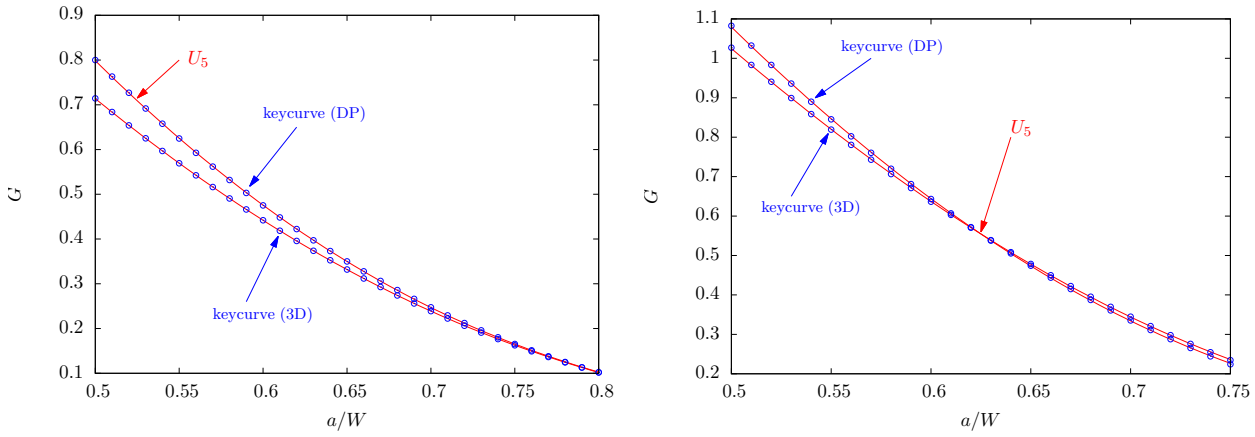
$$\begin{cases} H\left((V_{pl}/W)\right) = Q_0 + \sum_{i=1}^{3} Q_i \left[1 - \exp\left(-b_i \dfrac{V_{pl}}{W}\right)\right] \\ \text{ou} \\ H\left((\Delta_{pl}/W)\right) = Q_0 + \sum_{i=1}^{3} Q_i \left[1 - \exp\left(-b_i \dfrac{\Delta_{pl}}{W}\right)\right] \end{cases} \tag{2.58}$$

Les paramètres Q_i et b_i sont optimisés à l'aide d'un algorithme SQP, inclus dans ZeBuLoN, pour des valeurs de a/W comprises entre 0,5 et 0,8 par pas de 0,01. Les figures 2.13a et 2.13b montrent le résultat satisfaisant de cette optimisation pour les éprouvettes CT10 et CT20. Le tableau 2.2 résume les valeurs des coefficients permettant de définir la fonction H. Ces derniers étant maintenant fixés nous allons essayer de déterminer la fonction G.

Nous ne connaissons pas a priori la forme à donner à la fonction G. Par conséquent celle-ci sera évaluée point par point pour a/W variant entre 0,5 et 0,8 avec un pas de 0,01. Le principe est simple, en efffet pour une longueur de fissure égale à a_n nous connaissons la courbe $P - V_{pl}$ ou $P - \Delta_{pl}$ correspondante. Cette dernière sera alors approximée pour obtenir $G(a_n/W)$, à l'aide d'un algorithme SQP, par un effort P de la forme :

$$P = G\left(\frac{a_n}{W}\right) \; H\left(\frac{V_{pl}}{W}\right) \quad \text{où } H \text{ est définie selon (2.58) avec les coefficients du tableau 2.2}$$

Les figures 2.16a et 2.16b fournissent, pour les éprouvettes CT10 et CT20, les valeurs de G ainsi obtenues en fonction de a/W, dans le cas d'un modéle 3D et 2D avec des éléments en déformation plane. Compte tenu du nombre élévé d'optimisation effectuée, nous n'avons pas détaillé les résultats



(a) Eprouvette CT10 (b) Eprouvette CT20

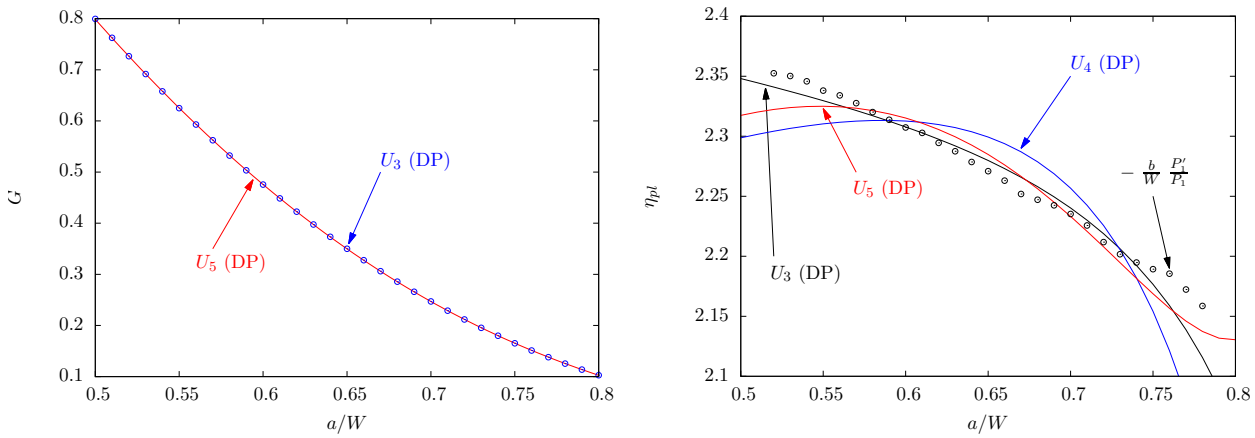
FIGURE 2.15 – Approximation de G par un polynôme de degré 5

	ζ_0	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
CT10 – DP	3,4772	$-6,1552$	$-0,2202$	3,2531	1,9234	$-2,3288$
CT10 – 3D	2,7516	$-4,4201$	$-0,6678$	2,2803	1,7145	$-1,6974$
CT20 – DP	4,5316	$-7,7748$	$-0,4218$	3,7591	2,2868	$-2,3019$
CT20 – 3D	3,7856	$-5,9190$	$-0,7298$	2,5004	1,7434	$-1,2909$

TABLE 2.3 – Coefficients des polynômes de degré 5 utilisés pour approximer G

de chacune d'entre elles, mais il est suffisant de préciser qu'ils sont tous comparables à ceux présentés par les figures 2.13 et 2.14. En utilisant la même méthode que pour la raideur K_{LL}, la fonction G a été approximée par un polynôme de degré 5, dont les coefficients ζ_i sont regroupés dans le tableau 2.3. Les figures 2.16a et 2.16b montrent que l'approximation polynomiale de G est excellente.

Nous sommes parvenu à déterminer les fonctions H et G permettant de définir la « keycurve » pour les éprouvettes CT10 et CT20 dans l'hypothèse de déformation plane et dans le cas 3D. En se souvenant de (2.36) nous sommes donc en mesure de trouver l'expression de η_{pl} en fonction de a/W, sous réserve de pouvoir calculer la dérivée de G par rapport à a/W. La détermination du facteur plastique ne sera effectuée que pour les éprouvettes CT10, c'est-à-dire pour une mesure du déplacement d'ouverture de la fissure à l'aplomb de la ligne de chargement. En effet l'expression de η_{pl} issue de la norme ASTM E1820 s'applique uniquement à ce cas, et n'est pas valide pour une mesure du déplacement



(a) Approximation de G – CT10 (DP) (b) Calcul de η_{pl} – CT10 (DP)

FIGURE 2.16 – Détermination de η_{pl} à partir d'une approximation de G par un polynôme

d'ouverture Δ correspondant aux éprouvettes CT20 utilisées dans cette étude. Notre analyse se limite donc à l'éprouvette CT10, car c'est la seule géométrie pour laquelle il existe un élément de comparaison, afin de valider ou non, le calcul de η_{pl} à l'aide de la « keycurve ».

Dans un premier temps l'évaluation de G' se fera point par point, pour chaque valeur de a/W où la fonction G a été définie, à partir des résultats de la simulation par éléments finis. La méthode utilisée pour calculer $G'(a_i/W)$ par exemple est simple. Elle consiste à approximer G sur l'ensemble de points $(a_{i-2}/W\ ,\ a_{i-1}/W\ ,\ a_i/W\ ,\ a_{i+1}/W\ ,\ a_{i+2}/W)$ par un pôlynome de degré n noté P_n. Il suffit ensuite de dériver ce polynôme pour obtenir P'_n dont la valeur en a_i/W fournit celle de G'. Quel degré n doit être attribué à P_n ? Nous avons obtenus des résultats identiques avec un polynôme de degré 1, 2 et 3 pour l'éprouvette CT10 en déformation plane. Par conséquent le polynôme P_1 a été utilisé pour le modèle 3D.

Nous souhaitons vérifier si le calcul de η_{pl} à partir d'une approximation polynomiale de G donne un résultat acceptable. Ci-dessus une telle approximation a été effectuée avec un polynôme de degré 5, noté U_5, dont les coefficients ζ_i figurent dans le tableau 2.3. La même méthode a été utilisée avec des polynômes de degré 3 et 4 (U_3 et U_4). La figure 2.16a montre par exemple que l'optimisation de G par un polynôme de degré 3, est tout à fait satisfaisante pour les éprouvettes CT10 et CT20. Un résultat identique a été obtenu avec un polynôme de degré 4. Il est alors possible de calculer η_{pl} directement à partir de la relation (2.36). Pour le cas de déformation plane, ces résultats ont été superposés, sur la figure 2.16, à ceux issus de l'expression de η_{pl} définie point par point, suivant l'approche précédente. Il existe selon nous une dispersion trop importante selon le degré du polynôme employé, pour valider le calcul direct de η_{pl} à partir d'une approximation de G par un polynôme.

Dans le norme ASTM E1820 et dans [Cravero and Ruggieri, 2007] l'évolution de η_{pl} en fonction de a/W est considérée comme linéaire. Nous allons donc envisager un calcul du facteur plastique, en supposant qu'il est toujours possible d'approximer η_{pl} par un polynôme R_2 ou R_3, respectivement de degré 2 ou 3 en a/W, dont l'expression générale est donnée ci-dessous.

$$R_3\left(a/W\right) = \alpha_0 + \alpha_1\ \frac{a}{W} + \alpha_2\ \left(\frac{a}{W}\right)^2 + \alpha_3\ \left(\frac{a}{W}\right)^3$$

D'après (2.36) nous avons l'égalité suivante :

$$\alpha_0 + \alpha_1\ \frac{a}{W} + \alpha_2\ \left(\frac{a}{W}\right)^2 + \alpha_3\ \left(\frac{a}{W}\right)^3 \ = -\ \frac{b}{W}\ \frac{G'}{G}\ =\ \left(\frac{a}{W} - 1\right)\ \frac{G'}{G}$$

Posons $X = 1 - \dfrac{a}{W}$ d'où $G' = \dfrac{dG}{d(a/W)} = \dfrac{dG}{dX}\ \dfrac{dX}{d(a/W)} = -\ \dfrac{dG}{dX}$

Par conséquent $X\ \dfrac{dG/dX}{G}\ =\ \alpha_0 + \alpha_1\left(1 - X\right) + \alpha_2\left(1 - X\right)^2 + \alpha_3\left(1 - X\right)^3$

D'où $X\ \dfrac{dG/dX}{G}\ =\ \alpha_0 + \alpha_1\left(1 - X\right) + \alpha_2\left(1 - 2X + X^2\right) + \alpha_3\left(1 - 3X + 3X^2 - X^3\right)$

Soit $X\ \dfrac{dG/dX}{G}\ =\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3\right)X + \left(\alpha_2 + 3\alpha_3\right)X^2 - \alpha_3 X^3$

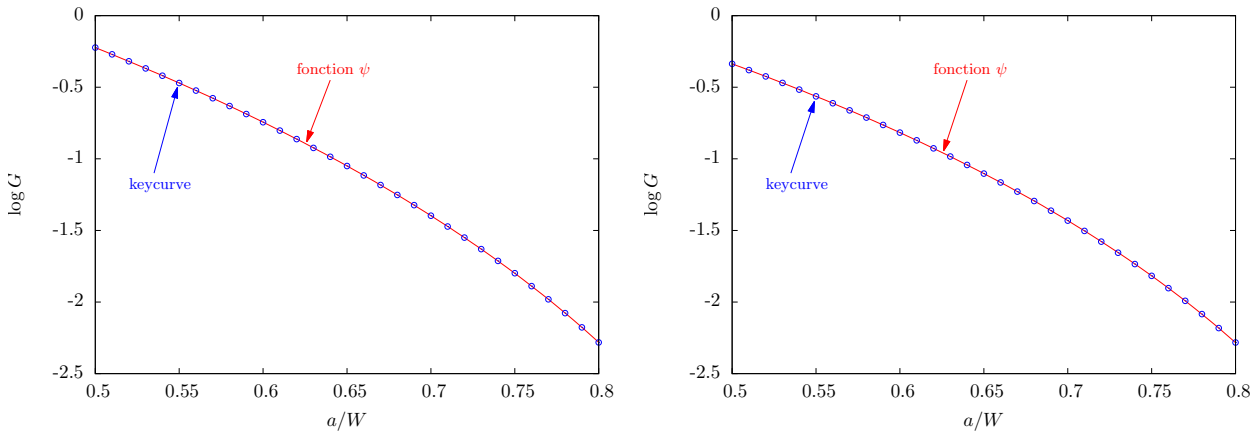
Ainsi $\dfrac{dG/dX}{G}\ =\ \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{X} - \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3\right) + \left(\alpha_2 + 3\alpha_3\right)X - \alpha_3 X^2$

En intégrant par rapport à X nous pouvons écrire :

$$\log G\ =\ \left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\right)\log X - \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3\right)X + \left(\alpha_2 + 3\alpha_3\right)\frac{X^2}{2} - \alpha_3\frac{X^3}{3} + cste$$

	α_0	α_1	α_2	α_3
CT10 − DP	2,3475	0,3199	$-0,3787$	$-0,4465$
CT10 − 3D	2,0151	0,4624	$-0,1866$	$-0,3613$

TABLE 2.4 – Coefficients du polynôme R_3



(a) Calcul 2D (DP) (b) Calcul 3D

FIGURE 2.17 – Approximation de $\log G$ à l'aide de la fonction ψ

En remplaçant X par $1 - a/W$, puis en développant, nous obtenons après simplification :

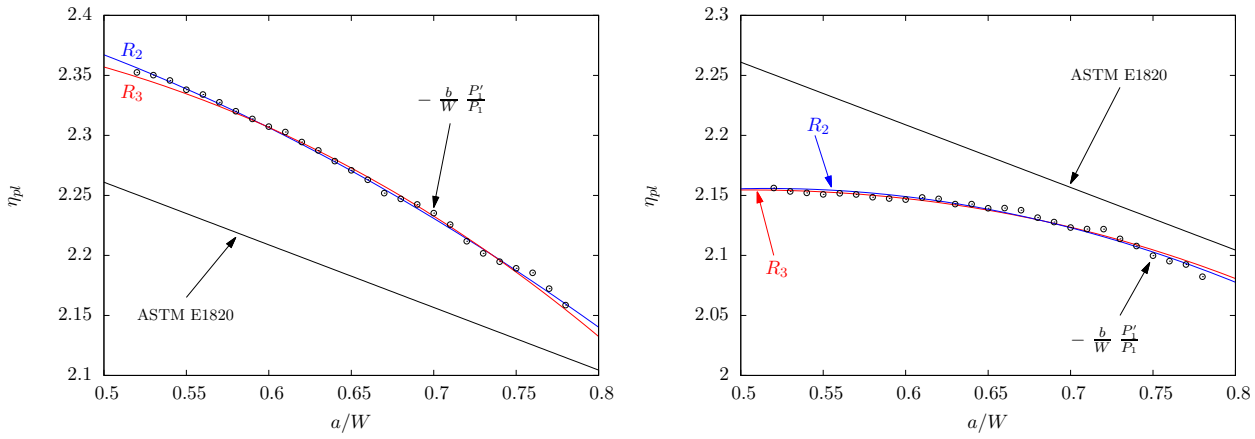
$$\log G = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \log\left(1 - \frac{a}{W}\right) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\frac{a}{W} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\left(\frac{a}{W}\right)^2 + \frac{\alpha_3}{3}\left(\frac{a}{W}\right)^3 + K$$

Nous définissons alors la fonction ψ par :

$$\psi = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \log\left(1 - \frac{a}{W}\right) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\frac{a}{W} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\left(\frac{a}{W}\right)^2 + \frac{\alpha_3}{3}\left(\frac{a}{W}\right)^3 + K$$

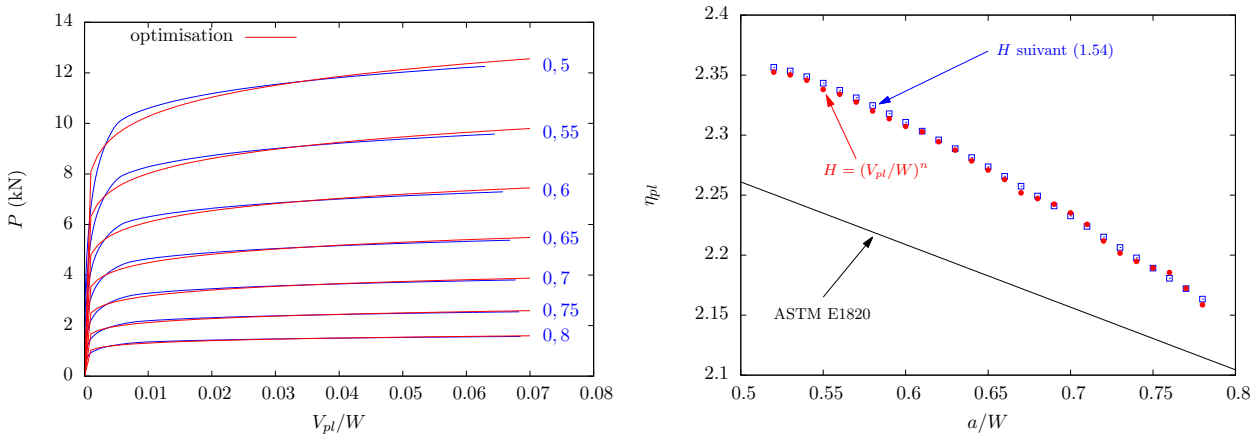
L'idée est donc de déterminer les coefficients α_i des polynômes R_2 et R_3 en approximant $\log G$ par la fonction ψ, à l'aide du module d'optimisation intégré au logiciel ZeBuLoN. Les résultats de cette approximation sont présentés figure 2.17 pour l'éprouvette CT10, dans le cas d'un modèle 3D et d'une simulation 2D en déformation plane. L'optimisation est satisfaisante et permet la détermination des polynômes R_2 et R_3. La figure 2.18 montre qu'il existe une bonne concordance entre ces polynômes et les valeurs de η_{pl} obtenues point par point, à partir du calcul de G' basé sur une approximation locale de G, par un polynôme de degré 1, noté P_1. En conclusion l'expression de η_{pl} en fonction de a/W, pris dans l'intervalle $[0,5; 0,8]$, sera donnée par le polynôme R_3 dont les coefficients α_i sont résumés dans le tableau 2.4. Il est important de noter que la « keycurve » déterminée à partir d'un modèle 2D, en déformation plane, ne donne pas les mêmes valeurs de η_{pl} que celle obtenue avec une modélisation 3D.

Nous nous posons maintenant la question d'évaluer l'incidence sur η_{pl} d'une approximation dégradée de la forme des courbes $P - V_{pl}$ par la fonction H, en assimilant celle-ci à une fonction puissance dont l'équation sera : $H(V_{pl}/W) = (V_{pl}/W)^n$. Nous traiterons, dans cette optique, uniquement le cas des éprouvettes CT10 en déformation plane. L'exposant n est optimisé suivant une méthode identique à celle utilisée pour déterminer les paramètres Q_i et b_i. La fonction G et sa dérivée G' sont déterminées comme précédemment afin de pouvoir calculer η_{pl} suivant la relation (2.36). La figure 2.19a montre l'approximation des courbes $P - V_{pl}$ par une fonction puissance dont le résultat est moins bon qu'avec une fonction H définie par (2.58). Quant à la figure 2.19b, elle présente l'évolution correspondante du facteur plastique η_{pl} qui est quasiment identique à celle de la figure 2.18a. Par conséquent une approximation dégradée de la forme des courbes $P - V_{pl}$ par la fonction H n'a pas d'impact significatif



(a) Calcul 2D (DP) (b) Calcul 3D

FIGURE 2.18 – Evolution de η_{pl} en fonction de a/W



(a) Courbes $P - V_{pl}$ (b) Facteur plastique η_{pl}

FIGURE 2.19 – Résultats de l'approximation de H par une fonction puissance

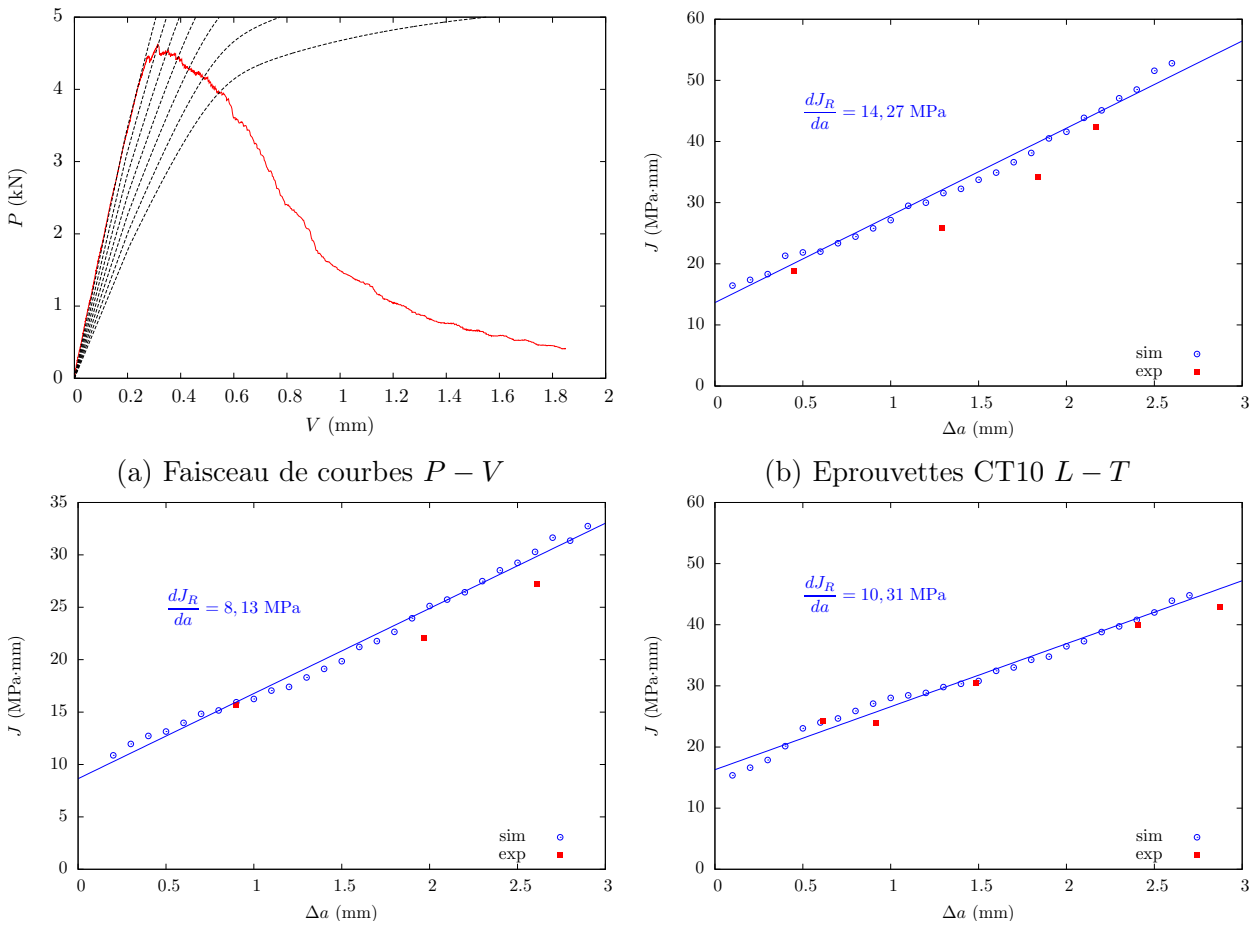
sur le calcul de η_{pl}.

Avant de clore ce paragraphe nous voulons présenter une autre application possible de la « keycurve ». Il s'agit d'obtenir la courbe $J_R - \Delta a$ à partir d'un essai de traction sur une unique éprouvette CT, sans essais interrompus et sans charge/décharge, afin d'évaluer la complaisance pour en déduire la longueur de fissure.

Il faut se rappeler que pour déterminer la courbe R selon la norme ASTM E1820, il est nécessaire d'utiliser la formule itérative. Or celle-ci traite la propagation de la fissure de proche en proche, en considérant plusieurs fissures stationnaires, dont l'incrément de longueur est faible à chaque pas. L'hypothèse fondamentale qui reste sous-jacente et par conséquent n'est jamais clairement exprimée, est de considérer que l'intersection entre les coubes $P - V$, caractérisant d'une part une fissure stationnaire et d'autre part une fissure se propageant lors d'un essai, se fait pour une même longueur de fissure.

L'idée est d'utiliser la formulation de la « keycurve » obtenue précédemment avec le modéle 3D de l'éprouvette CT10. Il est alors possible de tracer un faisceau de courbe $P - V$ pour des fissures stationnaires dont la longueur augmentera par pas de 100 μm à partir de la valeur intiale a_0. Ce principe est illustré par la figure 2.20a. Pour une longueur de fissure a_i le point d'intersection, entre la courbe $P - V$ issue de la « keycurve » et celle obtenue lors d'un essai sur éprouvette CT10, correspond à l'effort P_i.

La « méthode des trapèzes » permet alors de déduire l'aire A_i sous la courbe $P - V$ enregistrée pendant l'essai. La raideur de l'éprouvette de longueur de fissure a_i est obtenue à l'aide des coefficients



(a) Faisceau de courbes $P - V$

(b) Eprouvettes CT10 $L - T$

(c) Eprouvettes CT10 $T - L$

(d) Eprouvettes CT10 $T - S$

FIGURE 2.20 – Détermination de la courbe $J_R - \Delta a$ à partir de la « keycurve »

du tableau 2.1. Nous pouvons ensuite calculer l'aire A_{el} liée à la partie élastique du déplacement V. Puis nous obtenons par simple soustration l'aire plastique A_{pl}. Par conséquent de proche en proche nous sommes en mesure de tracer la courbe $J_R - \Delta a$. Nous signalons au lecteur que nous avons détaillé cette procédure dans la partie 3 du chapitre 1 lors du post-traitement des essais sur éprouvette CT10.

Par cette méthodologie nous avons pu évaluer la courbe R pour des éprouvettes CT10 de type $L - T$ et $T - L$ et $T - S$ à partir des essais de la série a ($L - T$ n° 2a, $T - L$ n° 2a et $T - S$ n° 2a) dont l'analyse a été effectuée au chapitre 1. La comparaison avec les points expérimentaux, obtenus lors de l'exploitation des essais par la norme ASTM E1820, montre qu'il existe un écart mais que celui-ci reste acceptable. Par conséquent malgré la différence entre l'expression de η_{pl}, issue de la norme et celle obtenue par la « keycurve », l'impact sur le calcul de la courbe $J_R - \Delta a$ reste peu important.

2.3.1.2 Cas des éprouvettes SENT

La géométrie des éprouvettes SENT utilisée dans cette étude a été décrite dans la deuxième partie du chapitre 1. Pour mémoire la largeur B de ces éprouvettes est de 20 mm tandis que l'épaisseur W est égale à 10 mm. Le moyen d'essai utilisé est constitué de mors hydrauliques, par conséquent les extrémitées de l'éprouvette sont totalement immobilisées, sans rotation possible. La longueur d'éprouvette comprise entre les machoires des deux mors est notée H, nous avons étudié trois configurations d'éprouvettes définies par des valeurs de H/W égales à 4, 6 et 10. Nous avons réalisé un maillage 2D et un maillage 3D de ces éprouvettes afin de pouvoir comparer le comportement d'une éprouvette 3D, avec celui d'une éprouvette calculée suivant l'hypothèse de déformation plane. La figure 2.21 présente ces deux maillages, notons que le maillage 3D se déduit du 2D par une simple extrusion suivant l'axe Z.

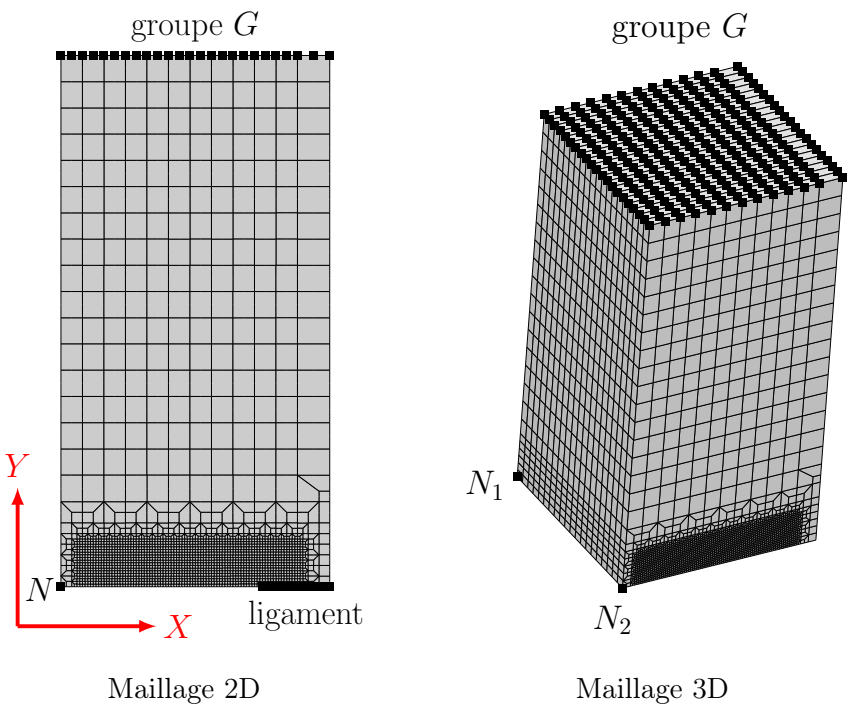


FIGURE 2.21 – Maillage 2D et 3D de l'éprouvette SENT pour $H/W = 4$

Pour chaque longueur de fissure considérée, un modèle est développé afin de simuler la courbe $P-V$ correspondant à une valeur de a/W fixée. La longueur du ligament augmente par pas de 100 μm de manière à obtenir un incrément de 0,01 pour a/W, compris entre 0,15 et 0,8. La dimension retenue pour les éléments autour du ligament est de 100 μm. La taille de maille a fait l'objet d'une étude de convergence relativement à la réponse macroscopique du chargement P en fonction du déplacement d'ouverture de la fissure Δ.

Dans le cas 3D seule 1/8 d'éprouvette a été modélisée, par conséquent il existe pour ce modèle une condition de symétrie supplémentaire dans le plan d'équation $Z = 0$, d'où la fixation de la composante Z. Les conditions aux limites communes aux modèles 2D et 3D sont :

- Fixation de la composante Y pour les nœuds du ligament
- Fixation de la composante X, respectivement des composantes X et Y, pour le groupe de nœuds G dans le cas 2D, respectivement 3D.
- Un déplacement imposé suivant Y pour le groupe de nœuds G.

Le post-traitement du calcul consiste à récupérer l'effort P dans la direction Y, aux nœuds du groupe G, ainsi que le déplacement d'ouverture de la fissure noté Δ. Celui-ci est mesuré au niveau d'une encoche usinée dans l'éprouvette afin de pouvoir fixer l'extensomètre. Pour plus de détail sur la procédure de mesure, nous renvoyons le lecteur à la partie 3 du chapitre 1. Néanmoins, pour simplifier le maillage, cette encoche n'a pas été prise en compte. La détermination de Δ est alors effectuée au niveau du nœud N ou des nœuds N_1 et N_2 pour le modèle 3D. La figure 2.22 montre qu'il n'existe aucune différence sur la réponse $P - V$ entre un modèle avec encoche et un modèle sans encoche. Le déplacement Δ devra être multiplié par deux afin de tenir compte de la symétrie du modèle. Dans le cas du modèle 3D, le déplacement Δ sera la moyenne des déplacements selon Y des nœuds N_1 et N_2 de la figure 2.21.

Les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé, dans la modélisation des éprouvettes SENT, sont identiques à celles prises en compte pour la simulation des éprouvettes CT. Dans le domaine élastique les valeurs respectives du coefficient de Poisson ν et du module d'Young E seront égales à 0,33 et 70000 MPa. L'écrouissage est modélisé par une loi de Ramberg-Osgood, définie par la relation (2.54), dont les paramètres σ_0, α et n ont des valeurs égales respectivement à 390,6 MPa, 1,42 et 11,2.

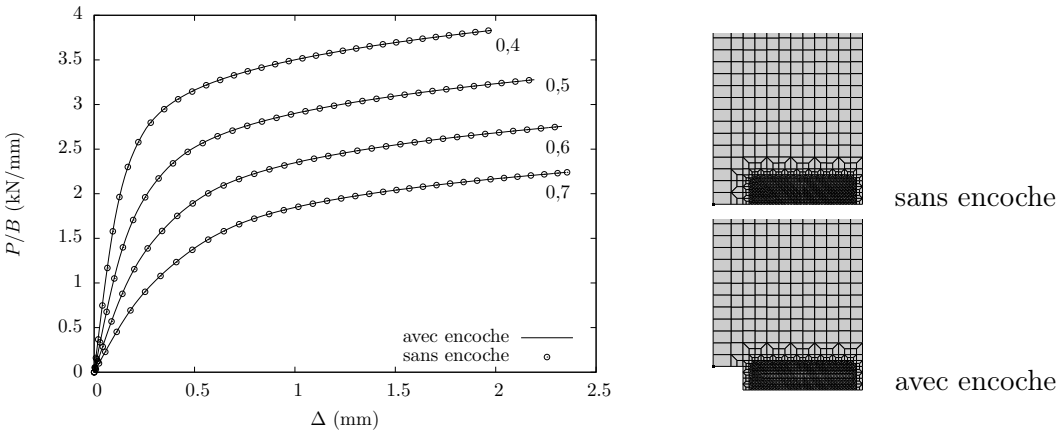


FIGURE 2.22 – Influence de l'encoche pour une éprouvette SENT en déformation plane

	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$H/W = 4$	2,3928	$-14,074$	47,881	$-104,58$	124,20	$-59,423$
$H/W = 6$	2,1263	$-13,461$	51,299	$-120,47$	147,83	$-71,812$
$H/W = 10$	1,6485	$-9,1005$	33,025	$-78,467$	97,344	$-47,227$

TABLE 2.5 – Coefficients du polynôme exprimant a/W en fonction de μ

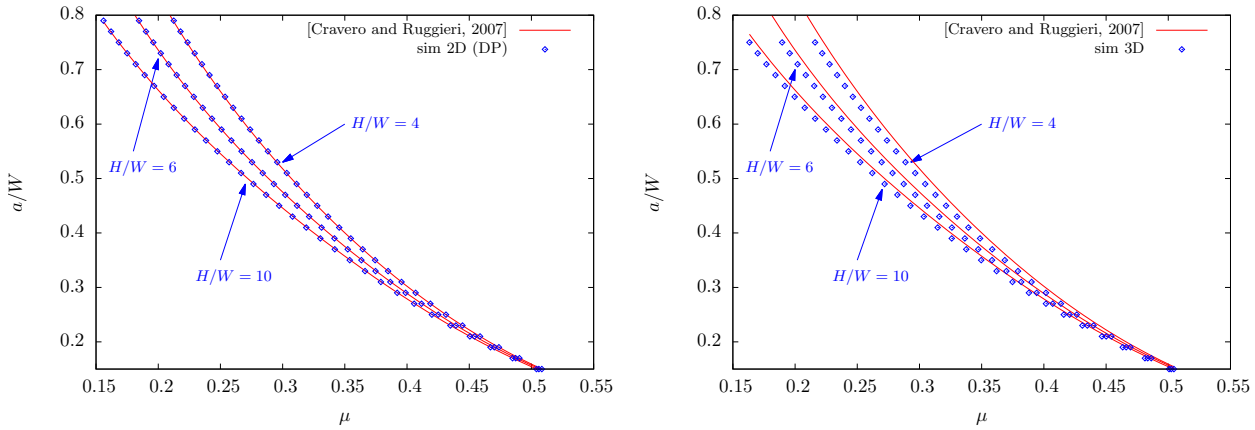
Les différents calculs sont effectués avec l'hypothèse des petites déformations.

Pour obtenir la « keycurve » il faut soustraire à la courbe $P - \Delta$ le déplacement élastique afin d'obtenir la courbe $P - \Delta_{pl}$. Pour cela il est nécessaire de connaitre l'expression de la raideur K_{LL}, ou de la complaisance C_{LL}, en fonction de a/W pour les différentes éprouvettes SENT étudiées. Afin de valider notre modélisation par la méthode des éléments finis, au moins dans le domaine élastique, nous allons comparer nos résultats avec ceux exposés dans [Cravero and Ruggieri, 2007]. Ces auteurs ne fournissent pas une formulation de K_{LL} ou C_{LL} en fonction de a/W, mais ont plutôt exprimé ce rapport en fonction de la complaisance par la relation ci-dessous. Le tableau 2.5 fournit les coefficients β_i pour différents rapports H/W.

$$\frac{a}{W} = \beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2 + \beta_3\mu^3 + \beta_4\mu^4 + \beta_5\mu^5 \quad \text{Avec} \quad \mu = \frac{1}{1 + \sqrt{E'BC_{LL}}} \tag{2.59}$$

L'intérêt de cette approche est de pouvoir obtenir simplement la longueur de fissure a à partir de la complaisance issue d'une charge/décharge, lors d'un essai de propagation de fissure sur une éprouvette SENT. Par conséquent, nous avons calculé μ à partir de la valeur de K_{LL} obtenue par simulation, pour des éprouvettes SENT, dont la longueur de fissure a varie de 0,15 à 0,8 par pas de 0,01. Nous avons utilisé un modèle 3D et un modéle 2D en déformation plane. Dans [Cravero and Ruggieri, 2007] l'évolution de a/W en fonction de μ est uniquement donnée pour le cas de déformation plane. Nous obtenons, d'après la figure 2.23a, des résultats identiques à ceux de [Cravero and Ruggieri, 2007]. Par contre la figure 2.23b montre qu'il existe un faible écart entre le calcul 3D et celui effectué en 2D, avec l'hypothèse de déformation plane. Ainsi, le comportement élastique d'une éprouvette SENT de largeur 20 mm, obtenu par un modèle 3D, est proche de celui calculé en 2D avec l'hypothèse de déformation plane.

Pour déterminer la partie plastique de Δ, il est néanmoins nécessaire de pouvoir exprimer la raideur ou la complaisance en fonction de a/W. A l'aide du module d'optimisation intégré au logiciel ZeBuLoN, nous avons donc approximé le paramètre μ par un polynôme de degré 5 en a/W, dont l'expression générale est donnée ci-dessous. La figure 2.24 montre que cette approximation est satisfaisante pour la simulation 3D et le modèle 2D en déformation plane. Les valeurs des coefficients γ_i des polynômes sont résumées dans le tableau 2.6.



(a) Modèle 2D (DP) (b) Modèle 3D

FIGURE 2.23 – Evolution de a/W en fonction de μ

		γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
$H/W = 10$	DP	0,6615	$-1,2350$	1,2437	$-0,5260$	$-0,5587$	0,5563
	3D	0,6070	$-1,2615$	1,3129	$-0,5778$	$-0,6153$	0,6271
$H/W = 6$	DP	0,6988	1,7372	3,8141	$-6,2350$	5,5195	$-1,9433$
	3D	0,6603	$-1,2574$	1,3827	$-0,5863$	$-0,6484$	0,6201
$H/W = 4$	DP	0,6993	$-1,7450$	3,9743	$-6,4013$	5,5785	$-1,9676$
	3D	0,6598	$-1,2526$	1,4762	$-6,2150$	$-0,7042$	6,3447

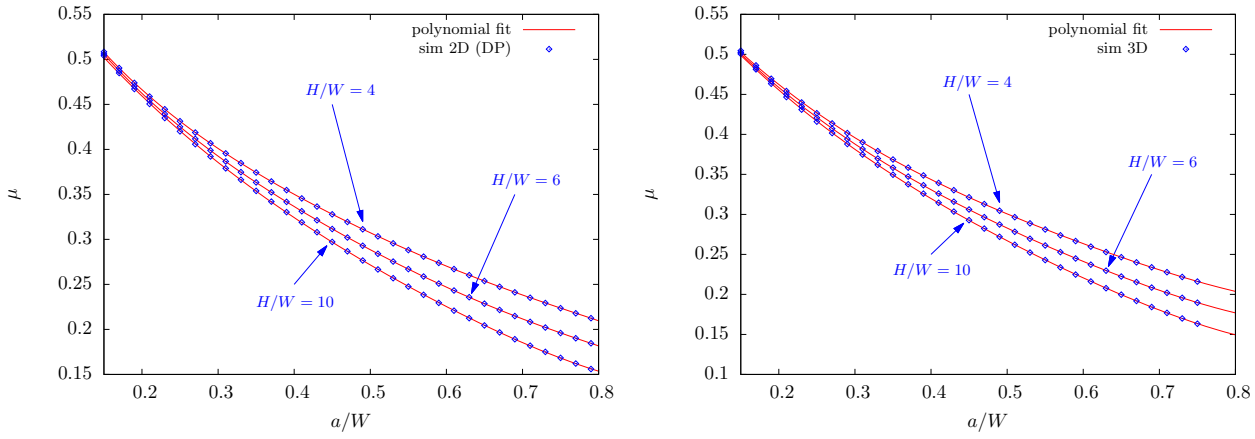
TABLE 2.6 – Coefficients du polynôme exprimant μ en fonction de a/W

$$\mu = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{a}{W} + \gamma_2 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + \gamma_3 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + \gamma_4 \left(\frac{a}{W}\right)^4 + \gamma_5 \left(\frac{a}{W}\right)^5 \tag{2.60}$$

La détermination de la « keycurve » sera effectuée pour l'hypothèse de déformation plane et pour le cas de la modélisation 3D. Pour obtenir la courbe $P - \Delta_{pl}$, nous avons vu auparavant qu'il suffit de soustraire la partie élastique, Δ_{el}, du déplacement total Δ en utilisant la complaisance C_{LL}, fournie par l'expression de μ en fonction de a/W (voir tableau 2.6). Les figures 2.25a et 2.25b présentent les courbes $P - \Delta_{pl}$ issues de la simulation en déformation plane et de celle en 3D, respectivement pour des éprouvettes SENT dont $H/W = 10$ et $H/W = 4$. Pour ces deux ratios H/W nous constatons que le calcul 3D donne un effort P nettement inférieur à celui obtenu dans le cas de déformation plane, pour des rapports a/W compris entre 0,2 et 0,5. Puis, cet écart diminue lorsque a/W augmente, jusqu'à devenir faible pour des valeurs proches de 0,8. Ce même constat était également valable pour les éprouvettes CT.

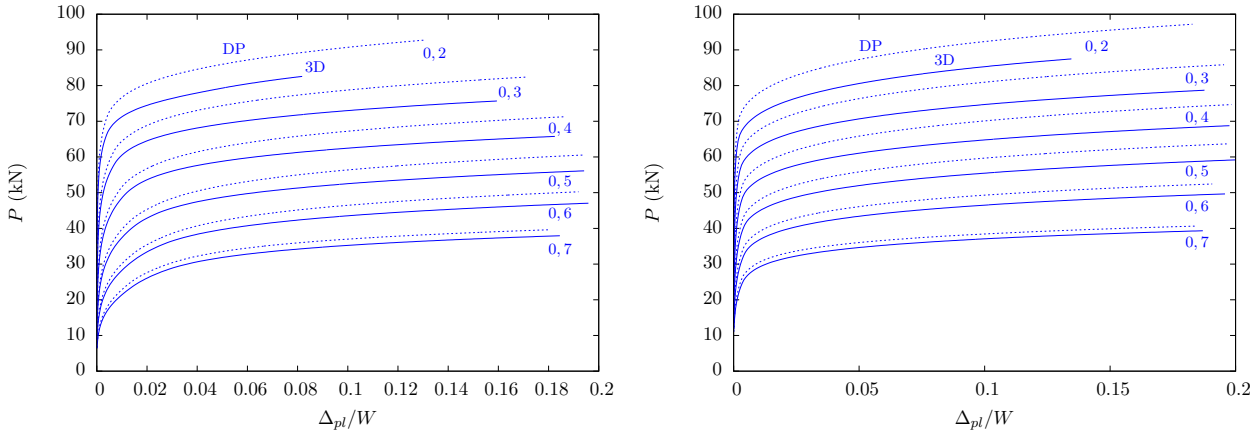
La définition de la « keycurve » selon (2.35) nécessite de connaitre les deux fonctions G et H tel que $P = G\,(a/W)\;\; H\,(\Delta_{pl}/W)$. La forme de la fonction H sera identique à celle utilisée pour les éprouvettes CT. Ainsi, cette fonction sera approximée par une fonction exponentielle saturante, définie par la relation (2.58). Les paramètres Q_i et b_i ont été optimisés à l'aide d'un algorithme SQP, inclus dans ZeBuLoN, pour le modèle 3D et celui en déformation plane, pour des valeurs de a/W variant de 0,2 à 0,8 par pas de 0,01. La figure 2.26 présente le résultat de cette optimisation dans le cas de déformation plane pour un rapport H/W respectivement égal à 10 et 4.

Dans tous les cas l'approximation n'est pas très bonne en comparaison de celle obtenue pour les éprouvettes CT. Nous avons alors décidé de réduire la plage de variation de a/W et de nous concentrer sur des fissures « profondes », c'est-à-dire pour a/W compris entre 0,5 et 0,8. Cette approche permet



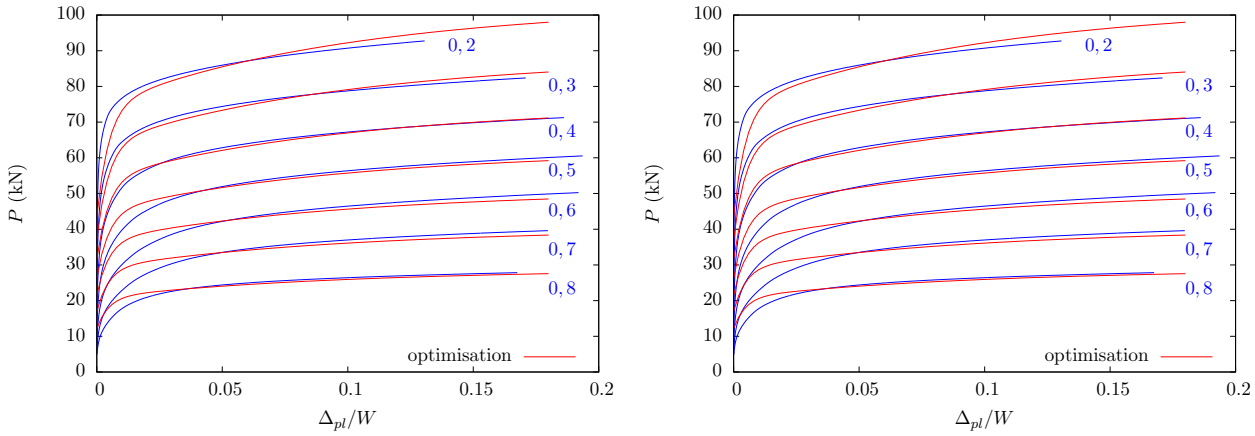
(a) Modèle 2D (DP) (b) Modéle 3D

FIGURE 2.24 – Evolution de μ en fonction de a/W



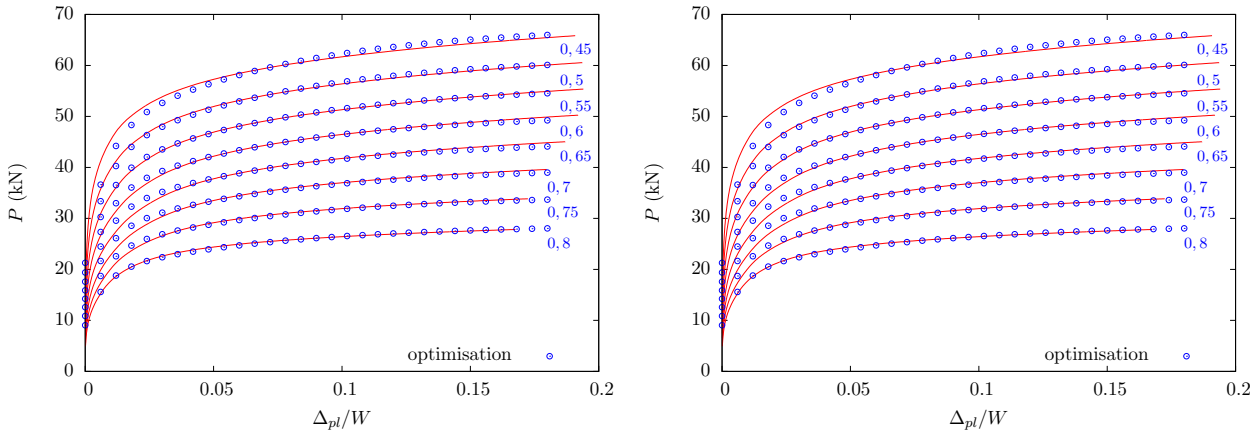
(a) Cas $H/W = 10$ (b) Cas $H/W = 4$

FIGURE 2.25 – « keycurve » pour différentes éprouvettes SENT



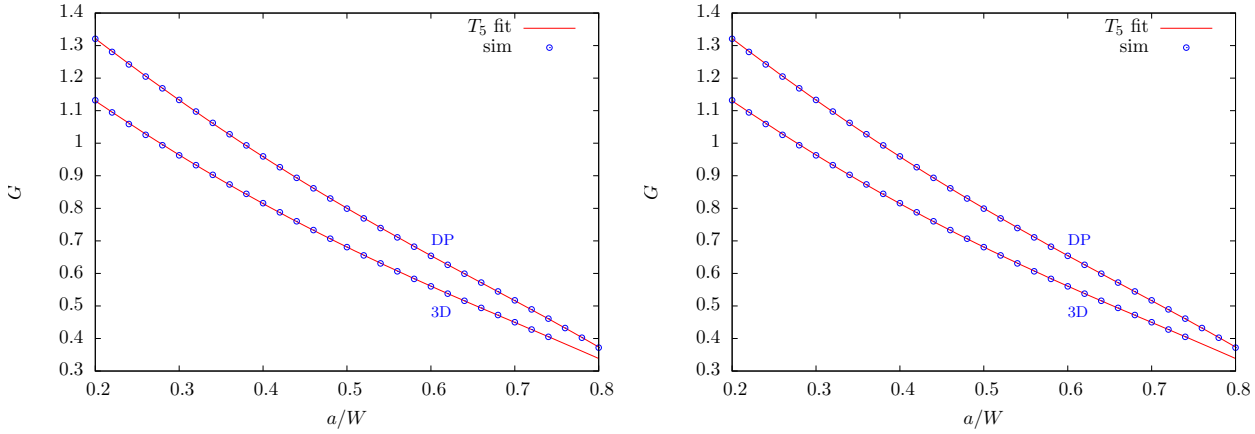
(a) Cas $H/W = 10$ (b) Cas $H/W = 4$

FIGURE 2.26 – Approximation de la fonction H pour $a/W \in [0,2; 0,8]$



(a) Cas $H/W = 10$ (b) Cas $H/W = 4$

FIGURE 2.27 – Approximation de la fonction H pour $a/W \in [0,5; 0,8]$



(a) Cas $H/W = 10$ (b) Cas $H/W = 4$

FIGURE 2.28 – Approximation de G par un polynôme de degré 5

		Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	b_1	b_2	b_3
$H/W = 10$	DP	32928	15830	7339	23215	12	4,5	210,9
	3D	36819	1052	23716	23983	4	10,4	268,5
$H/W = 6$	DP	50752	29149	697	37762	13	12,8	322
	3D	–	–	–	–	–	–	–
$H/W = 4$	DP	25046	1227	13920	18256	2,6	13,7	467
	3D	59152	25569	4021	33763	11,9	19,8	389

TABLE 2.7 – Valeur des paramètres d'optimisation de H

		ζ_0	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
$H/W = 10$	DP	1,7307	$-2,1112$	0,1739	0,7430	0,1790	$-0,7101$
	3D	1,5075	$-2,0145$	0,5499	0,4767	$-0,0746$	$-0,3752$
$H/W = 6$	DP	1,0615	$-1,1525$	0,0560	0,2887	0,0184	$-0,2741$
	3D	–	–	–	–	–	–
$H/W = 4$	DP	2,1782	$-2,3620$	0,3208	0,4279	$-0,1615$	$-0,4645$
	3D	–	–	–	–	–	–

TABLE 2.8 – Coefficients des polynômes de degré 5 utilisés pour approximer G

d'obtenir une approximation plus satisfaisante des courbes $P - \Delta_{pl}$ comme le montre la figure 2.27. Nous pouvons également noter que cette tendance s'améliore lorsque H/W diminue. Dans la suite de cette étude nous ménerons les calculs de η_{pl} à partir d'une optimisation de H et G effectuée pour les fissures « profondes », mais également pour a/W balayant l'intervalle $[0,2; 0,8]$. Cette démarche nous permettra ainsi dévaluer l'incidence du degré d'approximation de H sur le calcul final du facteur plastique. Le tableau 2.7 synthétise les valeurs des paramètres Q_i et b_i, obtenues suite à l'optimisation de H, à partir des courbes $P - V_{pl}$ correspondant à un ratio a/W variant entre 0,2 et 0,8.

Pour la simulation en déformation plane et celle basée sur un modèle 3D, la fonction G a été évaluée point par point, selon la même méthode que celle développée pour les éprouvettes CT, dans le cas où a/W varie de 0,2 à 0,8, et dans celui plus restreint des fissures dites « profondes ». De plus, nous avons approximé la fonction G par un polynômes de degré 5 en a/W, à l'aide d'un algorithme SQP intégré au module d'optimisation de ZeBuLoN. Les résultats de ces optimisations sont satisfaisants. A titre d'exemple, la figure 2.28 fournit ceux obtenus pour une simulation en déformation plane et un modèle 3D, pour des éprouvettes SENT dont le rapport H/W est égal à 4 et 10. Le tableau 2.8 donne les coefficients ζ_i du polynôme permettant d'approximer la fonction G, dans le cas de l'optimisation de H effectuée pour a/W compris entre 0,2 et 0,8.

Le calcul de η_{pl} pour les éprouvettes SENT se fera conformément aux deux méthodes développées précédemment dans le cadre des éprouvettes CT. Nous utiliserons donc, d'une part une évaluation de G' point par point, à partir d'une approximation locale de G par un polynôme de degré 1. D'autre part, nous déterminerons le polynôme $R3$, par l'intermédiaire d'une approximation de $\log G$ à l'aide de la fonction ψ, uniquement dans le cas où l'optimisation de H a été effectuée pour a/W compris entre 0,2 à 0,8. Les expressions de η_{pl} ainsi obtenues seront alors comparées à celles issues de [Cravero and Ruggieri, 2007] et de [Shen et al., 2009], dont les formulations respectives sont :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ϕ_i	1	$-1,089$	9,519	$-48,572$	109,225	$-73,116$	$-77,984$	38,487	101,401	43,306	$-110,770$

TABLE 2.9 – Coefficients ϕ_i de l'équation (2.61)

	α_0	α_1	α_2	α_3
$H/W = 10$	0,9031	2,5390	$-7,6088$	5,3973
$H/W = 6$	1,0495	0,7386	$-3,7280$	3,2115
$H/W = 4$	1,1809	$-0,7530$	$-0,059$	7,1659

TABLE 2.10 – Coefficients du polynôme R_3

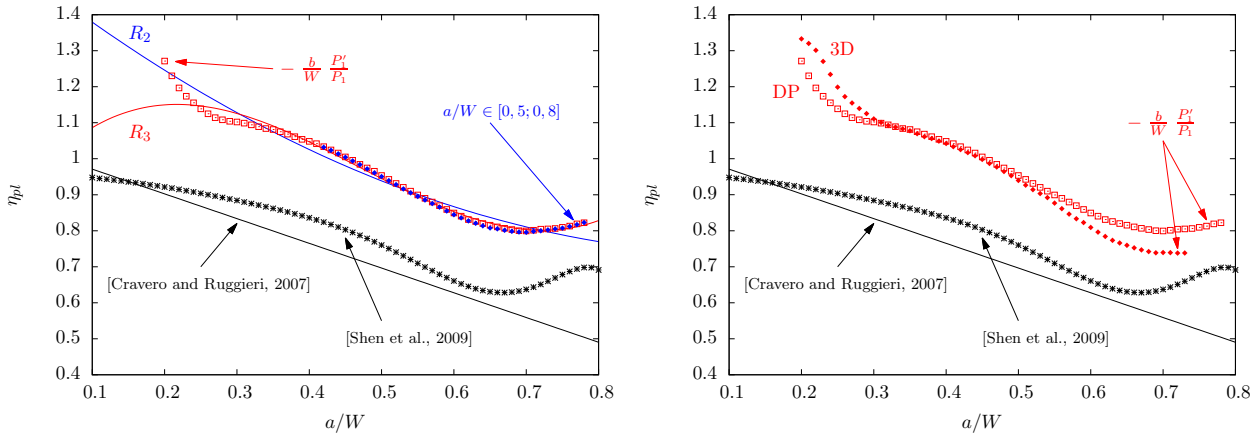
$$\begin{cases} \eta_{pl} = 1,0398 - \dfrac{a}{W} & \text{[Cravero and Ruggieri, 2007]} \\ \text{ou} \\ \eta_{pl} = \displaystyle\sum_{i=1}^{10} \phi_i \left(\frac{a}{W}\right)^i & \text{[Shen et al., 2009]} \end{cases} \tag{2.61}$$

L'approximation de η_{pl} par un polynôme de degré 10 issue de [Shen et al., 2009] est uniquement valable pour une éprouvette SENT dont H/W est égal à 10. Les coefficients ϕ_i de ce polynôme sont donnés dans le tableau 2.9.

La figure 2.29 présente l'évolution de η_{pl} en fonction de a/W pour des éprouvettes SENT dont le rapport H/W est égal à 10. La modélisation 2D en déformation plane et la simulation 3D donnent des résultats proches. De plus, les valeurs de η_{pl}, obtenues à partir de l'optimisation de H, pour des courbes $P - V_{pl}$ dont a/W varie entre 0,2 et 0,8, sont identiques à celles issues d'une approximation de H pour a/W décrivant l'intervalle [0,5 ;0,8]. Or, cette dernière approximation est bien meilleure que celle effectuée sur l'intevalle [0,2 ;0,8], comme le montrent les figures 2.26a et 2.27a. Nous retrouvons le même résultat que pour les éprouvettes CT, à savoir qu'une approximation dégradée des courbes $P - V_{pl}$ par la fonction H, est sans impact sur le calcul de η_{pl}.

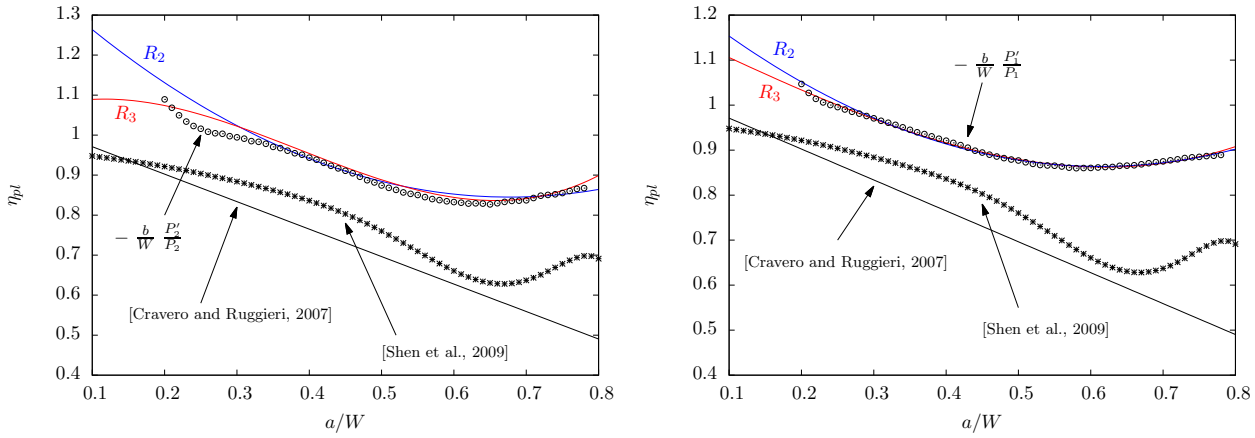
Par conséquent, pour les éprouvettes avec $H/W = 4$ et $H/W = 6$, les figures 2.30a et 2.30b présentent uniquement les résultats obtenus avec une modélisation 2D en déformation plane, basée sur une optimisation de H effectuée pour a/W compris entre 0,2 et 0,8. Dans la plupart des cas, le polynôme $R3$ permet de décrire correctement l'évolution de η_{pl} en fonction de a/W, sauf lorsque a/W devient faible. Effectivement dans ce cas, un écart se creuse entre η_{pl} calculé point par point et $R3$, dont la réponse est plus proche du calcul analytique. En effet nous avons montré dans la première partie de ce chapitre que η_{pl} tend vers 1 pour une sollicitation en traction pure. En conclusion, nous considèrerons par la suite que l'expression η_{pl} est définie par le polynôme $R3$ correspondant au calcul 2D en déformation plane, dont les coefficients sont résumés dans le tableau 2.10.

Ici s'achève ce paragraphe dédié à la « keycurve », dont nous sommes parvenu à établir une formulation pour les éprouvettes CT et SENT. D'après les figures 2.29 et 2.30, il existe cependant des écarts importants entre l'expression de η_{pl} en fonction de a/W, obtenue par la « keycurve » et celle issue de la littérature. Afin de s'assurer de la validité de la méthode de calcul de η_{pl}, basée sur le concept de « keycurve », nous allons chercher à évaluer numériquement ce paramètre, à partir de J_{pl} et de l'aire sous la courbe $P - V_{pl}$, conformément à la démarche de [Cravero and Ruggieri, 2007]. La principale difficulté de cette approche réside dans le calcul de l'intégrale J qui va constituer l'objet du paragraphe suivant.



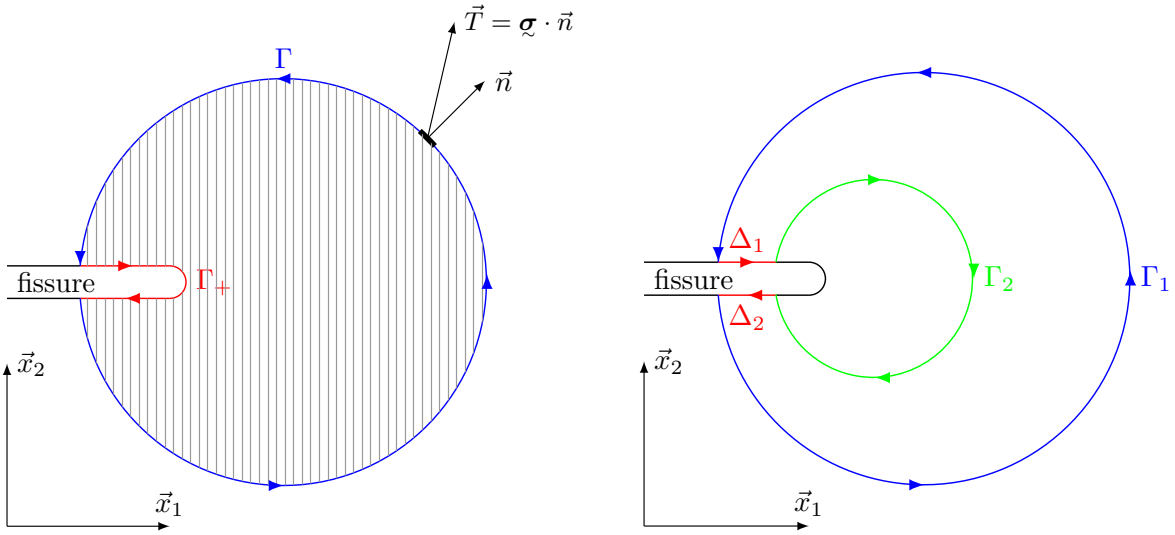
(a) Modèle 2D (DP) (b) Comparaison des modèles 2D et 3D

FIGURE 2.29 – Evolution de η_{pl} pour des éprouvettes SENT dont $H/W = 10$



(a) $H/W = 6$ – Modèle 2D (DP) (b) $H/W = 4$ – Modèle 2D (DP)

FIGURE 2.30 – Evolution de η_{pl} pour des éprouvettes SENT dont $H/W = 6$ et $H/W = 4$



(a) Contour fermé $\Gamma \cup \Gamma_+$ (b) Contour fermé $\Gamma_1 \cup \Delta_1 \cup \Gamma_2 \cup \Delta_2$

FIGURE 2.31 – Contours pour le calcul de l'intégrale J

2.3.2 Intégrale J

2.3.2.1 Introduction au calcul de J

Avant de se lancer dans le calcul numérique de l'intégrale J, il nous paraît nécessaire de rappeler sa définition, et de montrer que sa valeur est théoriquement indépendante du contour d'intégration, sous réserve de certaines hypothèses. [Cherepanov, 1967] et [Rice, 1968b] furent les premiers à introduire la notion d'intégrale J, dont la formulation est :

$$J = \int_\Gamma \left(W \; dx_2 \; - \; T \; \frac{\partial u}{\partial x_1} \; ds \right) \tag{2.62}$$

Les notations renvoient à la figure 2.31a où le vecteur de traction appliqué au contour Γ est noté $\vec{T}$, il se déduit du tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ par la relation $\vec{T} = \vec{n} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$, $\vec{n}$ étant la normale au contour. Par convention selon [Rice, 1968b] l'intégrale J est définie positive pour un contour orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. W désigne la densité d'énergie de déformation, elle se calcule à partir du tenseur des contraintes et du tenseur des taux de déformation, selon la relation :

$$W = \int_0^\varepsilon \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\nabla \underline{\boldsymbol{u}} + (\nabla \underline{\boldsymbol{u}})^t \right) \quad \text{où } \underline{\boldsymbol{u}} \text{ est le vecteur déplacement} \tag{2.63}$$

$$\text{En notation indicielle} \quad W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.64}$$

Supposons une fissure se propageant dans la direction x_1 et un contour fermé Ω autour de la pointe de la fissure. Ce contour s'obtient, comme illustré par la figure 2.31a, en ajoutant au contour Γ le contour Γ_+ de couleur rouge. Nous souhaitons alors calculer J dans ce cas particulier.

$$J = \int_\Omega \left(W \; dx_2 \; - \; T \; \frac{\partial u}{\partial x_1} \; ds \right) = \int_\Omega \left(W \; n_1 \; - \; n_j \; \sigma_{jk} \; \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \; ds$$

$$\text{Soit} \quad J = \int_\Omega \left(W \; \delta_{1j} \; - \; n_j \; \sigma_{jk} \; \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \; n_j \; ds \quad \text{où } \delta_{1j} \text{ est le symbol de Kronecker}$$

$$\text{D'après le théorême de Green :} \quad \int_\Omega f_j \; n_j \; ds = \int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \; dA \quad \text{avec A l'aire délimitée par le contour } \Omega$$

D'où $J = \int_A \frac{\partial}{\partial x_j}\left(W\ \delta_{1j}\ -\ \sigma_{jk}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right)\ dA$

Ainsi $J = \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\ -\ \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1}\ -\ \sigma_{jk}\ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1 \partial x_j}\right)\ dA$

En supposant qu'il n'existe aucune force extérieure appliquée sur le contour Ω nous avons :

$\nabla\sigma = 0$ soit $\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} = 0$

De plus d'après (2.64) $\sigma_{jk}\ \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\ \left(\sigma_{jk}\ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1 \partial x_j}\ +\ \sigma_{jk}\ \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1 \partial x_k}\right) = \sigma_{jk}\ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1 \partial x_j}$

Par conséquent $J = \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\ -\ \sigma_{jk}\ \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_1}\right)\ dA$

Pour un matériau élastique le tenseur des contraintes se déduit de la densité d'énergie de déformation suivant la relation : $\sigma_{jk} = \partial W / \partial \varepsilon_{jk}$

Finalement $J = \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\ -\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{jk}}\ \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_1}\right)\ dA = 0$

Nous venons donc de démontrer que l'intégrale J sur un contour fermé Ω autour d'une pointe de fissure est nulle. Choisissons un contour fermé composé de l'union de Γ_1, Δ_1, Γ_2 et Δ_2 représentés sur la figure 2.31b, nous pouvons alors écrire :

$$J = \int_{\Gamma_1 \cup \Delta_1 \cup \Gamma_2 \cup \Delta_2} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right) = J_{\Gamma_1} + J_{\Delta_1} + J_{\Gamma_2} + J_{\Delta_2} = 0 \tag{2.65}$$

Avec $J_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right)$ et $J_{\Delta_1} = \int_{\Delta_1} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right)$

De même $J_{\Gamma_2} = -\int_{\Gamma_2} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right)$ et $J_{\Delta_2} = \int_{\Delta_2} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right)$

Remarquons que l'intégrale J_{Γ_2} est négative car l'orientation du contour Γ_2 correspond à celui des aiguilles d'une montre. Par hypothèse, les lèvres de la fissure ne sont soumises à aucune forces extèrieures d'où :

$$\int_{\Delta_1} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right) = \int_{\Delta_2} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right) = 0$$

Par conséquent, (2.65) devient :

$$\int_{\Gamma_1} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right) = \int_{\Gamma_2} \left(W\ dx_2\ -\ T\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\ ds\right)$$

La relation ci-dessus montre que le calcul de l'intégrale J est indépendant du contour, sous réserve que les forces extérieures soient nulles et que le matriau soit élastique. Comment est-il possible de traduire cette indépendance, dans le cadre d'un calcul numérique, lorsque le matériau possède une loi d'écrouissage ? Précisons toutefois que cette exigence ne se limite pas à un matériau élastique, mais à

un matériau tel que :

$$W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Cette condition sera remplie, si nous parvenons à construire un modèle permettant de simuler le comportement plastique du matériau de manière élastique, c'est-à-dire que la décharge doit s'effectuer suivant le même chemin que lors de la charge. Nous pouvons toujours écrire :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right) \tag{2.66}$$

Le tenseur des déformations plastiques est désigné par $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}$ représente le tenseur d'ordre 4 des rigidités élastiques. En supposant que la pasticité du matériau soit régie par le critère de von Mises, noté σ_{eq}, nous obtenons la relation ci-dessous qui sera démontrée au début de la première partie du chapitre 3 :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\, p\, \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}}{\sigma_{eq}}$$

Soit R la loi d'écrouissage, alors par définition : $\sigma_{eq} = R(p)$ d'où $p = R^{-1}(\sigma_{eq})$. Ainsi, en injectant ce résultat dans l'expression précédente nous pouvons transformer (2.66) de la manière suivante :

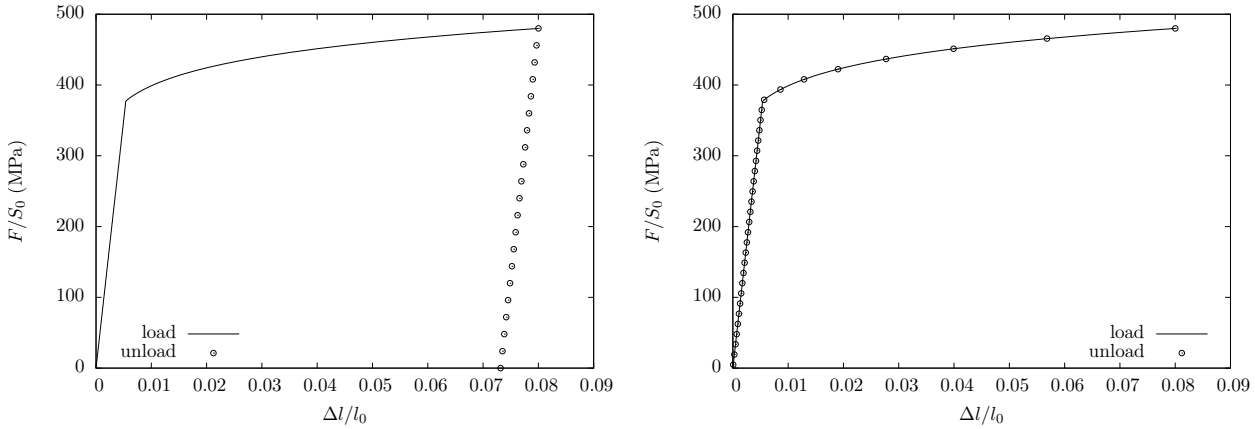
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{3}{2}\, R^{-1}(\sigma_{eq})\, \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}}{\sigma_{eq}}\right) \tag{2.67}$$

Par cet artifice d'écriture permettant de faire disparaître la variable p, nous pouvons décrire une loi de comportement non linéaire, alors que par construction elle est linéaire point par point. La loi de Ramberg-Osgood définie par (2.54) sera associée à ce modèle afin de représenter l'écrouissage du matériau.

Ce modèle « élastique » du comportement plastique d'un matériau a été implémenté dans le logiciel ZeBuLoN, sous l'appellation de modèle de Hencky-Mises. Un test a été effectué en imposant un effort sur un élément cubique c3d8 afin de simuler un chargement en traction, puis une décharge jusqu'à charge nulle. L'écrouissage est modélisé par la même loi de Ramberg-Osgood que celle utilisée au paragraphe 2.3.1.1, dont la valeur des paramètres σ_0, α et n était respectivement égale à 390,6 MPa, 1,42 et 11,2. Les figures 2.32a et 2.32b présentent les résultats obtenus avec la loi de Ramberg-Osgood et le modèle de Hencky-Mises. Nous constatons que ce dernier permet de simuler le comportement plastique du matériau de manière élastique, puisque la décharge se fait par le même trajet que celui emprunté lors de la charge, il ne reste donc aucune déformation résiduelle dans le matériau.

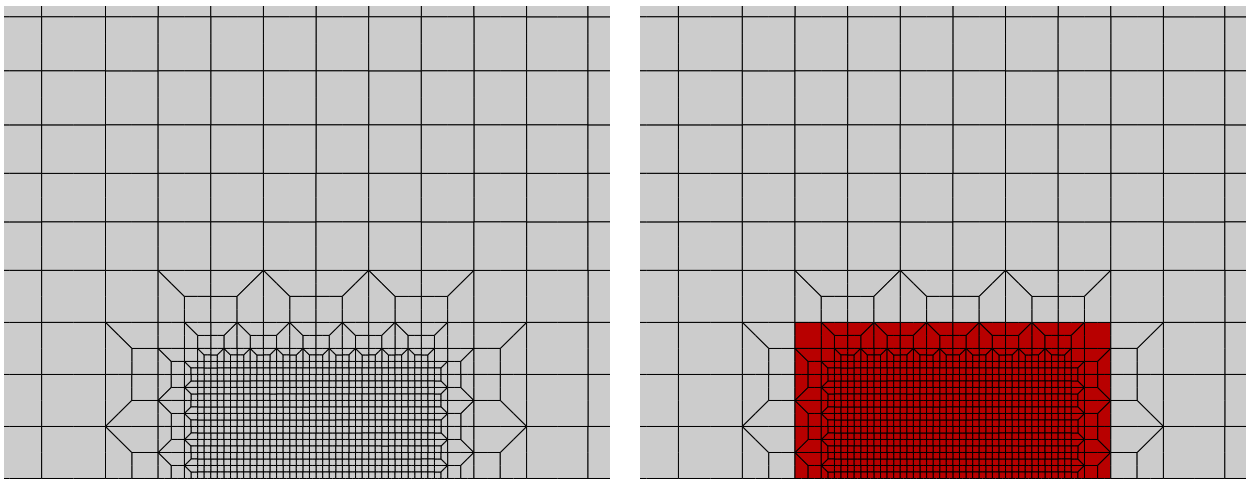
Nous souhaitons maintenant vérifier numériquement l'indépendance de J par rapport au contour d'intégration, pour les éprouvettes CT et SENT. Le choix de la longueur de fissure doit permettre d'obtenir une plasticité étendue, susceptible de perturber le calcul de J, sans pour autant tomber dans le cas de la plasticité généralisée. Une valeur de a/W égale à 0,7 nous semble être un bon compromis. Les conditions aux limites appliquées aux modèles des éprouvettes CT et SENT seront identiques à celles utilisées dans le paragraphe précédent, consacré à la détermination de la « keycurve ». De même le chargement sera effectué de manière identique, c'est-à-dire par un déplacement imposé.

La figure 2.33 montre le maillage autour de la pointe de fissure, il est identique pour les éprouvettes CT et SENT, la taille de maille étant de 100 μm. Afin de déterminer J nous avons utilisé quatre contours, le plus éloigné de la pointe de fissure est représenté sur la figure 2.33. Le calcul de J dans ZeBuLoN est basé sur une avancée virtuelle de la fissure selon la méthode développée par [Delorenzi, 1985]. La simulation a été réalisée avec l'hypothèse des petites déformations. Les éléments 2D du maillage sont de type linéaire ou quadratique mais toujours considérés en déformation plane.



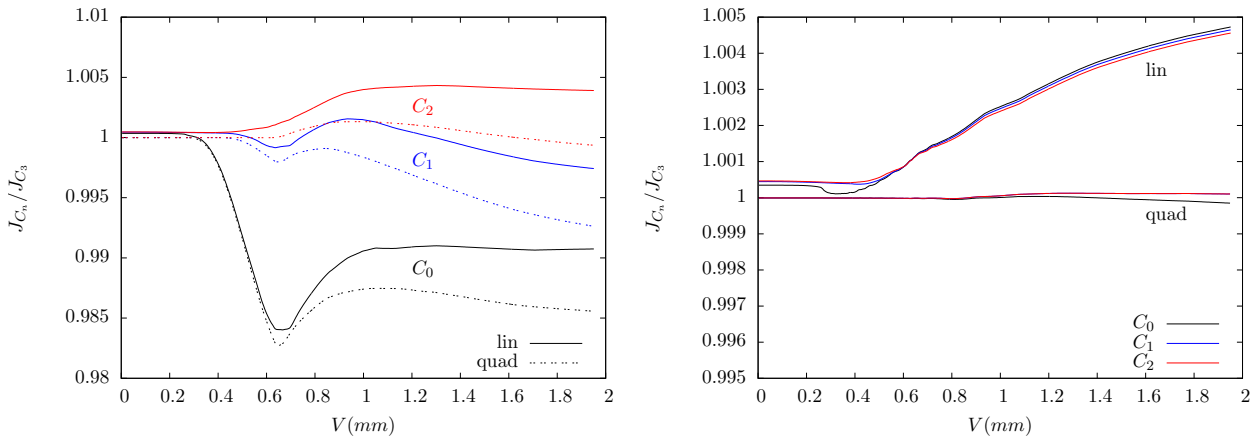
(a) Loi de Ramberg-Osgood (b) Modèle de Hencky-Mises

FIGURE 2.32 – Simulation d'une charge/décharge avec un élément c3d8



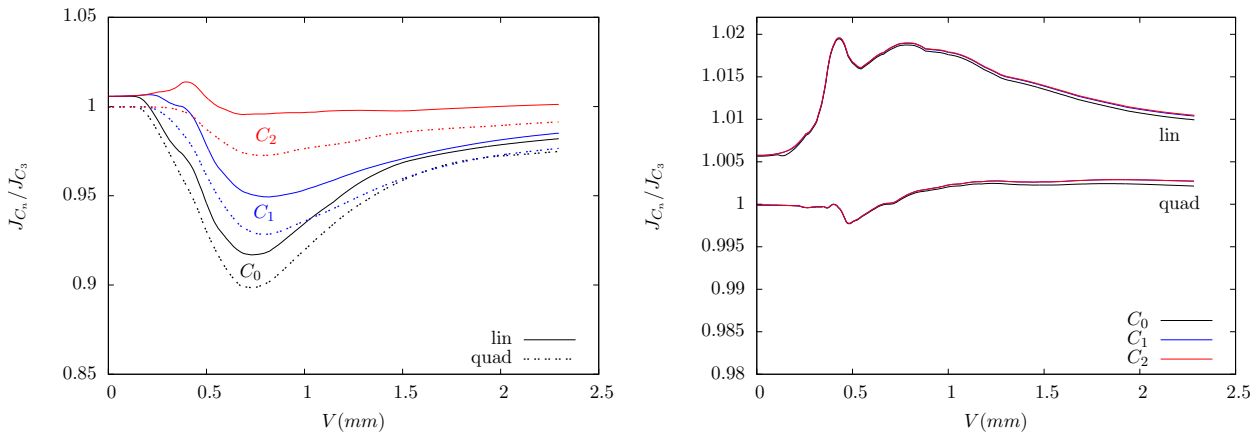
(a) Maillage en pointe de fissure (b) Contour d'intégration le plus large

FIGURE 2.33 – Maillage et contour d'intégration pour vérifier la convergence de J



(a) loi de Ramberg-Osgood (b) Modèle de Hencky-Mises

FIGURE 2.34 – Calcul numérique de J pour une éprouvette CT dont $a/W = 0,7$

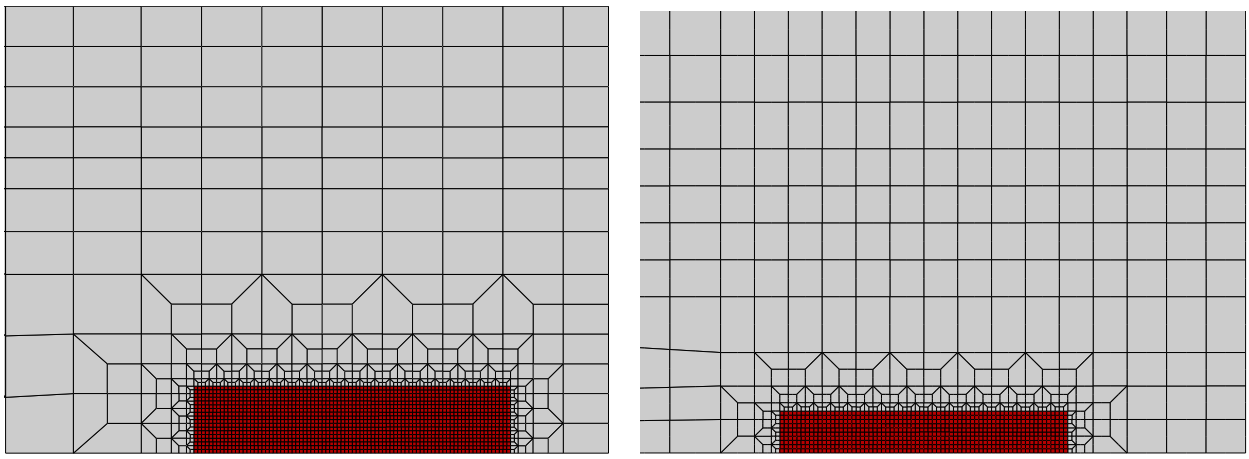


(a) loi de Ramberg-Osgood (b) Modèle de Hencky-Mises

FIGURE 2.35 – Calcul numérique de J pour une éprouvette SENT dont $a/W = 0,7$

Dans [Brocks and Scheider, 2001], l'évolution de J est tracée en fonction de V pour les différents contours d'intégration, afin de visualiser la convergence de J à partir d'un certain contour. Pour des raisons d'échelle, cette manière de présenter les résultats peut laisser à penser que la convergence existe, alors que celle-ci n'est pas effective. Nous avons donc préféré choisir un contour de référence, le plus éloigné par exemple (C_3 dans notre cas), puis tracer le rapport de J_{C_n} (J calculée avec le contour C_n) sur J_{C_3} en fonction de V, afin de vérifier qu'il est proche de l'unité. Les figures montrent les résultats obtenus pour les éprouvettes CT et SENT.

Dans chacun des cas, le modèle de Hencky-Mises appliqué à des éléments quadratiques permet d'obtenir une valeur quasiment identique de J, quel que soit le contour d'intégration. L'amélioration que procure ce type d'élément par rapport au cas linéaire, est liée au fait que pour ce dernier est activée l'option d'intégration sélective. Celle-ci permet de moyenner l'effet de la pression dans les éléments où existe une déformation plastique importante. Cet artifice de calcul, uniquement employé pour les éléments linéaires, perturbe localement la relation (2.67), entraînant alors de faibles variations au niveau du calcul de J, selon le contour choisi. Nous avons également vérifié que l'utilisation en pointe de fissure, d'une taille d'élément de 50 μm et 200 μm au lieu de 100 μm, permet de toujours assurer la convergence de l'intégrale J. Mentionnons cependant que celle-ci est d'autant meilleure que la taille des éléments est faible.



(a) Eprouvette CT10 (b) Eprouvette CT20

FIGURE 2.36 – Définition du contour d'intégration Γ pour les éprouvettes CT

2.3.2.2 Application aux éprouvettes CT et SENT

Le but de ce paragraphe est de calculer numériquement l'intégrale J pour les éprouvettes CT et SENT. Dans un premier temps, ce calcul sera mené dans le domaine linéaire afin de valider la simulation par comparaison avec le facteur d'intensité de contrainte issus de la littérature. Une seconde étape consiste à déterminer pour les éprouvettes CT et SENT l'évolution de la partie plastique de J en fonction de la charge P, pour différents rapports a/W. Ceci permettra alors, d'une part de calculer η_{pl} à partir de l'aire sous la courbe $P - V_{pl}$ selon la méthode utilisée par [Cravero and Ruggieri, 2007], et d'autre part d'étudier la stabilité de la fissure par une analyse CDF, exposée dans la troisième et dernière partie de ce chapitre.

Cas des éprouvettes CT

La méthodologie utilisée précédemment pour déterminer la raideur K_{LL} en fonction de a/W, va être maintenant déployée afin d'obtenir le facteur d'intensité de contrainte en fonction de a/W, pour les éprouvettes CT10 et CT20. Nous nous limiterons au cas de déformation plane, car il correspond à la valeur maximale de K obtenue au centre de l'éprouvette, et permet, par exemple, de prédire la rupture par comparaison avec la ténacité. Les normes ASTM E399 et ASTM E1820 fournissent l'expression de K pour le cas de déformation plane sous la forme suivante :

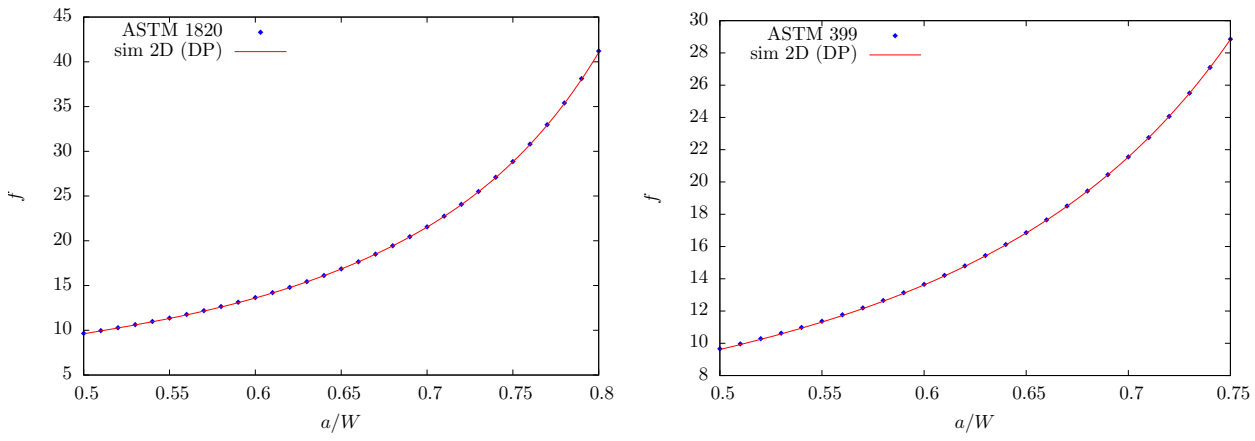
$$K = \frac{P}{B\sqrt{W}}\ f\left(a/W\right) \tag{2.68}$$

$$\text{Avec} \quad f\left(a/W\right) = \frac{2 + \dfrac{a}{W}}{\left(1 - \dfrac{a}{W}\right)^{3/2}} \left(0,886 + 0,64\ \frac{a}{W} - 13,32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14,72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5,6\left(\frac{a}{W}\right)^4\right)$$

L'évaluation de K lors de la simulation se fait au premier incrément de charge, choisi suffisamment petit, pour que les déformations restent purement élastiques. En fait, le calcul permet d'obtenir l'intégrale J à partir d'un unique contour Γ. En effet, nous avons montré auparavant que l'utilisation du modèle de Hencky-Mises, en petites déformations avec des éléments quadratiques, permet d'obtenir une valeur de J indépendante du contour d'intégration. La figure 2.36 définit Γ respectivement pour les éprouvettes CT10 et CT20. Le facteur d'intensité de contrainte K se déduit de J par la relation :

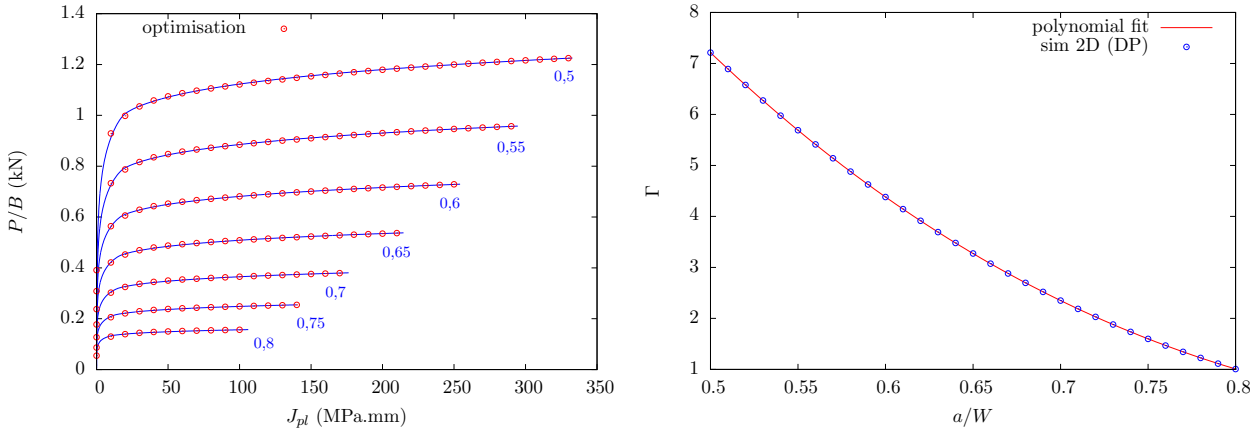
$$J = \frac{1 - \nu^2}{E}\ K^2 \tag{2.69}$$

La correspondance entre J et K décrite par (2.69) est uniquement valable dans le domaine élastique



(a) Eprouvette CT10 (b) Eprouvette CT20

FIGURE 2.37 – Comparaison de $f(a/W)$ issue du calcul avec la spécification des normes ASTM



(a) P en fonction de J_{pl} (b) Optimisation de Γ

FIGURE 2.38 – Résultats du calcul de J pour les éprouvettes CT10

et pour le cas de déformation plane. D'après la figure 2.37, il existe une très bonne adéquation entre la valeur de $f(a/W)$ issue de la simulation et celle spécifiée par les normes ASTM. Ce résultat constitue une validation du calcul par éléments finis de l'intégrale J dans le domaine élastique.

Comme dans le paragraphe 2.3.1.1 consacré à la « keycurve », la détermination du facteur plastique ne sera effectuée que pour les éprouvettes CT10, c'est-à-dire pour une mesure du déplacement d'ouverture de la fissure, à l'aplomb de la ligne de chargement. En effet, l'expression de η_{pl}, issue de la norme ASTM E1820, s'applique uniquement à ce cas et n'est pas valide pour une mesure du déplacement d'ouverture Δ, correspondant aux éprouvettes CT20 utilisée dans cette étude. Notre analyse se limite donc à l'éprouvette CT10, car c'est la seule géométrie pour laquelle il existe un élément de comparaison dans la littérature.

Le modèle utilisé pour calculer, dans le cas de déformation plane, l'intégrale J associée à différentes éprouvettes CT10, dont la valeur de a/W varie de 0,5 à 0,8 par pas de 0,01, est identique à celui utilisé au paragraphe 2.3.1.1 (voir figure 2.8). Le comportement plastique du matériau est modélisé à l'aide du modèle de Hencky-Mises, développé précédemment et défini par la relation(2.67). L'écrouissage associé est simulé par une loi de Ramberg-Osgood, définie par (2.54), dont la valeur des paramètres σ_0, α et n est celle utilisée au paragraphe 2.3.1.1. Le contour d'intégration est représenté sur la figure 2.36, il est unique car l'utilisation du modèle de Hencky-Mises assure la convergence de J quel que soit le contour.

La figure 2.38a donne l'évolution de P en fonction de J_{pl} pour différentes valeurs de a/W. Compte tenu de la forme de ces courbes, nous souhaitons essayer de les exprimer par une fonction semblable à

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	b_1	b_1	b_3
CT10	$54,204$	59,449	$29,650$	35,051	$0,4356$	$0,0665$	0,0043

TABLE 2.11 – Valeurs des paramètres d'optimisation de Ω – Cas des éprouvettes CT10

	ζ_0	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
CT10	36,415	$-84,806$	48,491	$22,808$	$-33,799$	$10,894$

TABLE 2.12 – Valeurs des paramètres d'optimisation de Γ – Cas des éprouvettes CT10

une « keycurve », dont l'expression serait :

$$P = \Gamma\left(\frac{a}{W}\right)\ \Omega\left(J_{pl}\right) \tag{2.70}$$

La fonction Γ, comme la fonction G définie par (2.35), sera approximée par un polynôme de degré 5 en a/W, et la fonction Ω par une somme de fonctions exponentielles saturantes d'équation :

$$\Omega\left(J_{pl}\right) = Q_0 + \sum_{i=1}^{3} Q_i\ \left[1 - \exp\left(-b_i\ J_{pl}\right)\right] \tag{2.71}$$

Les résultats de l'optimisation de Ω et Γ sont présentés respectivement par les figures 2.38a et 2.38b. Nous pouvons constater qu'ils sont tout à fait satisfaisants. Les tableaux 2.11 et 2.12 fournissent les coeffcients respectivement pour les fonctions permettant d'approximer Ω et Γ.

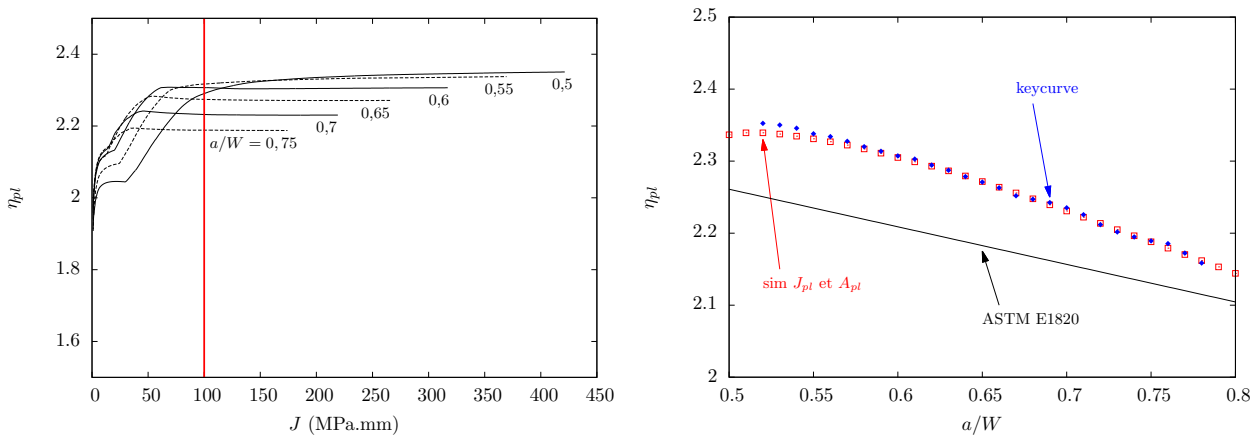
L'évaluation du facteur plastique suivant l'approche de [Cravero and Ruggieri, 2007] est basée sur la définition de η_{pl} donnée par (2.1), elle nécessite donc de calculer, d'une part la partie plastique de l'intégrale J, et d'autre part l'aire A_{pl} sous la courbe $P - V_{pl}$. La simulation 2D en déformation plane permet d'obtenir la courbe $P - V$, la soustraction de la partie élastique de V se fait alors en utilisant l'expression de la complaisance, fournie par la norme ASTM E1820. Puis l'aire A_{pl} est obtenue en utilisant la « méthode des trapèzes ».

La figure 2.39a fournit l'évolution de η_{pl} en fonction de J pour différents ratios a/W. Dans [Cravero and Ruggieri, 2007], les auteurs ont préféré tracer la variation de η_{pl} en fonction de $J/b\sigma_y$. Nous n'avons pas suivi cette procédure, car nous considérons que les valeurs de J sont plus parlantes que celles de $J/b\sigma_y$. Ainsi, nous pouvons constater que lorsque $a/W = 0,5$, η_{pl} n'est pas constant pour des valeurs de J inférieures à 100 MPa·mm. Or c'est précisément l'ordre de grandeur obtenu dans la partie 3 du chapitre 1, consacrée à l'analyse des essais sur éprouvettes CT10.

Néanmoins, nous avons suivi [Cravero and Ruggieri, 2007] pour calculer la valeur de η_{pl} en fonction de a/W. Celle-ci correspond donc au « plateau » des courbes de la figure 2.39a, défini pour des valeurs de J supérieures à 100 MPa·mm. La figure 2.39b présente les résultats ainsi obtenus et les compare avec ceux déterminés par la « keycurve ». La concordance entre les deux méthodes est excellente, elle confirme l'écart déjà constaté avec l'expression de η_{pl} issue de la norme ASTM E1820. La conclusion du paragraphe 2.3.1.1 reste donc valable, à savoir que l'expression de η_{pl} en fonction de a/W, pris dans l'intervalle $[0,5; 0,8]$, sera donnée par le polynôme R_3 dont les coefficients α_i sont résumés dans le tableau 2.4.

Cas des éprouvettes SENT

La méthodologie utilisée précédemment pour les éprouvettes CT, afin de déterminer l'expression de K en fonction de a/W, va être maintenant appliquée aux éprouvettes SENT pour un ratio H/W égal à 4, 6 et 10. Nous nous limiterons au cas de déformation plane, car il correspond à la valeur maximale de K obtenue au centre de l'éprouvette, et permet de prédire, par exemple, la rupture par comparaison avec la ténacité. Les travaux de [Cravero and Ruggieri, 2007] fournissent l'expression de K pour le cas



(a) η_{pl} en fonction de J

(b) η_{pl} en fonction de a/W

FIGURE 2.39 – Evolution de η_{pl} en fonction de J et de a/W pour les éprouvettes CT10

	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
$H/W = 10$	0,2832	3,8497	$-1,4885$	4,1716	9,9094	$-7,4188$
$H/W = 6$	0,2681	4,1916	$-4,5098$	12,5442	$-6,4726$	0,7304
$H/W = 4$	0,2565	4,4604	$-7,0538$	18,6928	$-19,4703$	9,2523

TABLE 2.13 – Coefficients du polynôme F de la relation (2.72)

de déformation plane suivant la formulation (2.72). Elle fait intervenir un polynôme de degré 5 en a/W, dont les coefficients ξ sont résumés, pour les différents rapports H/W, dans le tableau 2.13.

$$\begin{cases} K = \dfrac{P}{B\sqrt{W}}\, F\left(a/W\right) \\ \\ \text{Avec} \quad F\left(a/W\right) = \xi_0 + \xi_1\left(\dfrac{a}{W}\right) + \xi_2\left(\dfrac{a}{W}\right)^2 + \xi_3\left(\dfrac{a}{W}\right)^3 + \xi_4\left(\dfrac{a}{W}\right)^4 + \xi_5\left(\dfrac{a}{W}\right)^5 \end{cases} \tag{2.72}$$

L'évaluation de K lors de la simulation se fait au premier incrément de charge, choisi suffisamment petit, pour que les déformations restent purement élastiques. En fait le calcul permet d'obtenir l'intégrale J à partir d'un unique contour Γ représenté sur la figure 2.40. Le facteur d'intensité de contrainte K se déduit de J par la relation (2.69), uniquement valable dans le domaine élastique et pour le cas de déformation plane. D'après la figure 2.41a, il existe une très bonne adéquation entre la valeur de $F\left(a/W\right)$ issue de la simulation, et celle spécifiée par [Cravero and Ruggieri, 2007]. Ce résultat constitue une validation du calcul par éléments finis de l'intégrale J dans le domaine élastique.

Le but de la présente analyse est de comparer l'expression de η_{pl} obtenue par la méthode basée sur la « keycurve », avec celle issue de l'approche proposée par [Cravero and Ruggieri, 2007]. Il n'est donc pas utile, selon nous, de vérifier toutes les géométries d'éprouvette SENT, nous avons choisi celle dont H/W est égal à 10, car elle correspond aux éprouvettes que nous avons testée, dont les résultats d'essais sont présentés dans la partie 3 du chapitre 1.

Le modèle utilisé pour calculer, dans le cas de déformation plane, l'intégrale J associée à différentes valeurs de a/W, variant de 0,2 à 0,8 par pas de 0,01, est identique à celui utilisé au paragraphe 2.3.1.2 (voir figure 2.21). Le comportement plastique du matériau est modélisé à l'aide du modèle de Hencky-Mises, développé précédemment et défini par la relation(2.67). L'écrouissage associé est simulé par une loi de Ramberg-Osgood, définie par (2.54), dont la valeur des paramètres σ_0, α et n est celle utilisée au paragraphe 2.3.1.1. Le contour d'intégration est représenté sur la figure 2.40, il est unique car l'utilisation du modèle de Hencky-Mises assure la convergence de J quel que soit le contour.

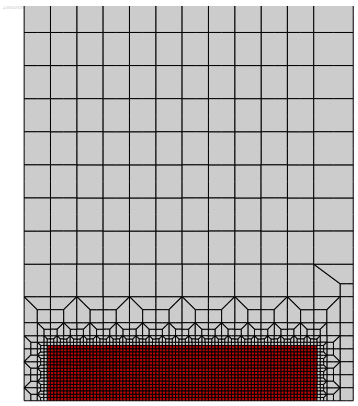
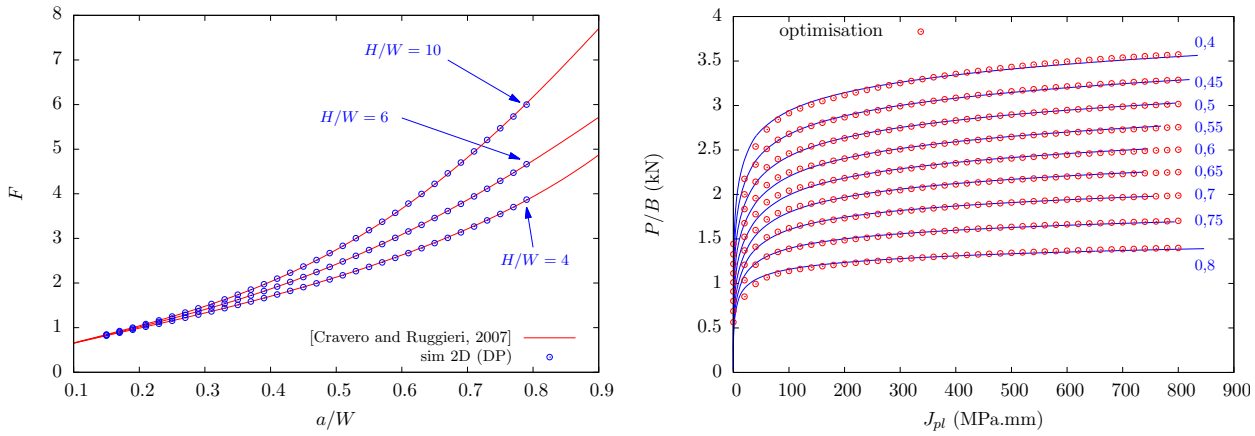


FIGURE 2.40 – Définition du contour d'intégration Γ pour les éprouvettes SENT



(a) Evolution de $F\,(a/W)$ (b) P en fonction de J_{pl}

FIGURE 2.41 – Résultats du calcul de J pour les éprouvettes SENT

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	b_1	b_1	b_3
CT10	138, 50	86,911	7, 2285	121,37	0, 0028	0, 0017	0,0385

TABLE 2.14 – Valeurs des paramètres d'optimisation de Ω – Cas des éprouvettes SENT

	ζ_0	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
CT10	3,3574	115, 38	−490, 87	875, 61	−744, 79	242, 09

TABLE 2.15 – Valeurs des paramètres d'optimisation de Γ – Cas des éprouvettes SENT

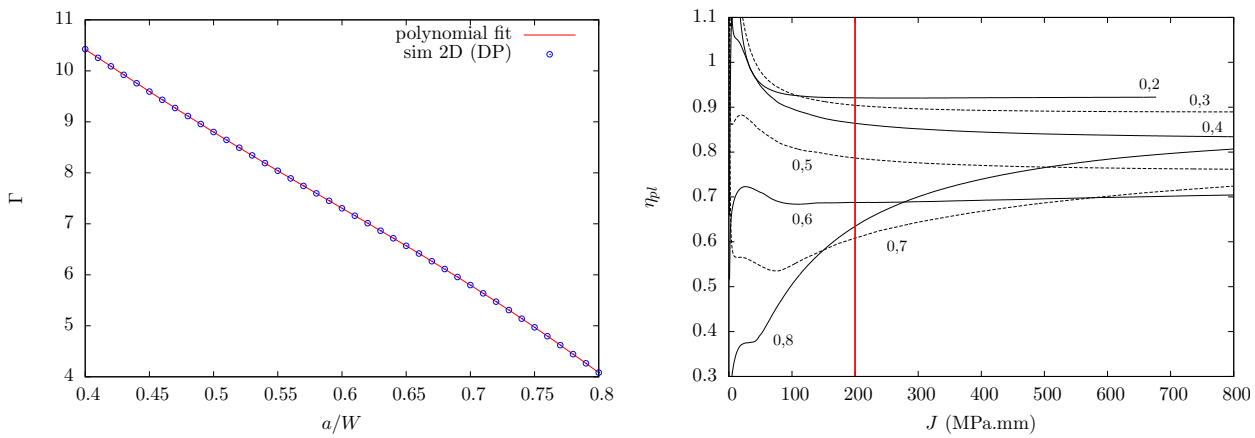
La figure 2.41b donne l'évolution de P en fonction de J_{pl} pour différentes valeurs de a/W. Comme pour le cas des éprouvettes CT traitées ci-dessus, nous allons approximer ces courbes par une fonction dont l'équation est donnée par (2.70). La fonction Γ sera approximée par un polynôme de degré 5 en a/W, et la fonction Ω par une somme de fonctions exponentielles saturantes, définie par (2.71).

Le résultat de l'optimisation de Ω est présenté par la figure 2.41b. Nous pouvons constater qu'il est tout à fait satisfaisant comme celui obtenu pour l'approximation de Γ, fourni par la figure 2.42a. Les tableaux 2.14 et 2.15 fournissent les coeffcients respectivement pour les fonctions permettant d'approximer Ω et Γ.

L'évaluation du facteur plastique suivant l'approche de [Cravero and Ruggieri, 2007] est basée sur la définition de η_{pl} donnée par (2.1), elle nécessite donc de calculer, d'une part la partie plastique de l'intégrale J, et d'autre part l'aire A_{pl} sous la courbe $P - V_{pl}$. La simulation 2D, en déformation plane, permet d'obtenir la courbe $P - V$, la soustraction de la partire élastique de V se fait alors en utilisant l'expression de la complaisance fournie par [Cravero and Ruggieri, 2007]. Puis l'aire A_{pl} est obtenue en utilisant la « méthode des trapèzes ».

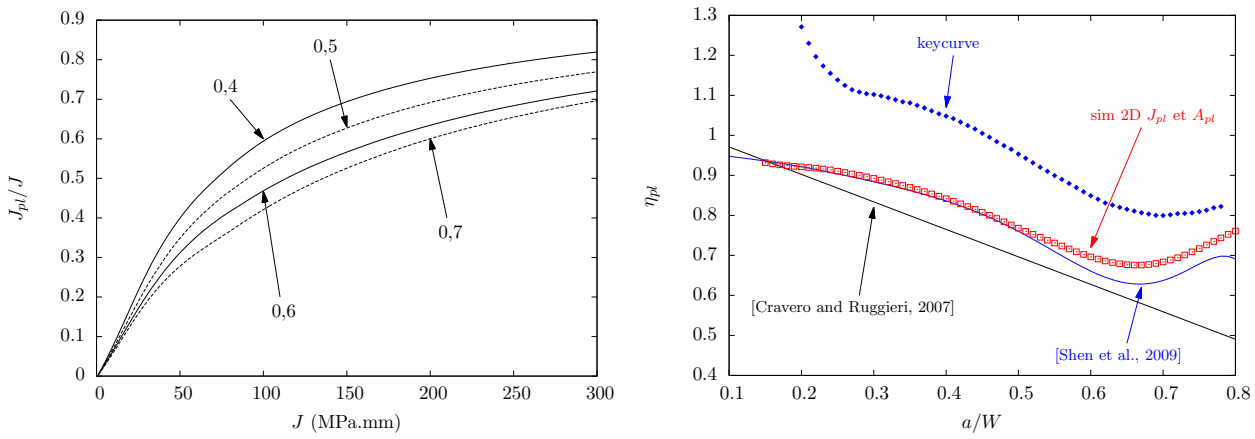
La figure 2.42b fournit l'évolution de η_{pl} en fonction de J pour différents ratios a/W. Pour a/W inférieur à 0,7 la valeur de η_{pl} ne devient constante que lorsque J est supérieure à 200 MPa·mm, dans ce cas elle correspond au « plateau » des courbes de la figure 2.42b. Pour a/W supérieur ou égal à 0,7 le facteur plastique n'est jamais constant, quelle que soit la valeur de J considérée. Ce problème a été mentionné par [Cravero and Ruggieri, 2007], ces auteurs proposent alors de prendre une valeur moyenne, calculée pour J supérieure à 200 MPa·mm. La figure 2.43b présente l'évolution de η_{pl} en fonction de a/W obtenue en utilisant une valeur moyenne du facteur plastique. Nous obtenons des résultats proches de [Shen et al., 2009] mais vraiment différents de ceux issus du calcul à partir de la « keycurve ».

Nous pourrions en déduire que l'approche basée sur la « keycurve » n'est pas valide, mais cela



(a) Optimisation de Γ (b) η_{pl} en fonction de J

FIGURE 2.42 – Optimisation de la fonction Γ et évolution de η_{pl} en fonction de J



(a) J_{pl}/J en fonction de J

(b) η_{pl} en fonction de a/W

FIGURE 2.43 – Valeur de J_{pl}/J en fonction de J et évolution de η_{pl} en fonction de a/W

conduirait à occulter les excellents résultats obtenus pour les éprouvettes CT. Il faut également avouer que la méthode, issue de [Cravero and Ruggieri, 2007], utilisant l'aire sous la courbe $P - V_{pl}$ n'est pas totalement satisfaisante. En effet les valeurs de η_{pl} ainsi obtenues ne sont pas constantes, ou lorsque J est supérieure à 200 MPa·mm. Or, nous obtenons précisément des valeurs de J, inférieures à 200 MPa·mm pour les éprouvettes SENT testées au paragraphe 3 du chapitre 1. De plus, nous avons tracé sur la figure 2.43 l'évolution du rapport J_{pl}/J en fonction de J pour différents ratio a/W. Nous pouvons constater, par exemple, que lorsque a/W vaut 0,5, alors la valeur de J_{pl}/J est de 0,4, pour J égal à 50 MPa·mm. Par conséquent pour les valeurs de J où η_{pl} n'a pas encore atteint le « plateau », la contribution de J_{pl} à la valeur de J n'est pas négligeable. Ainsi, si une erreur est commise sur l'évaluation de J_{pl} elle se répercute également sur J.

Il semble donc qu'il n'existe pas une méthode entièrement satisfaisante pour le calcul de η_{pl}. Toutefois l'analyse développée à partir de la « keycurve » a au moins le mérite de démontrer la séparabilité des variables a et V_{pl}, dans l'expression de la charge P. Or, d'après [Ernst et al., 1981] cette condition est nécessaire pour prouver l'existence de η_{pl}, de plus selon le paragraphe 2.2.2, sans elle il n'est pas possible d'utiliser la formule incrémentale, nécessaire à la détermination de la courbe $J_R - \Delta a$ à partir d'un essai sur éprouvette fissurée.

2.3.2.3 Analyse en pointe de fissure

Tout au long de cette partie et de la précédente nous nous sommes efforcés de fournir une méthode générale permettant de déterminer la courbe $J_R - \Delta a$ de façon identique, quelle que soit la géométrie de l'éprouvette. En effet pour comparer les courbes R issues d'essais réalisés sur des éprouvettes différentes, il est important de calculer J en fonction de Δa de la même manière. Nous avons vu au paragraphe 2.2.2 que la formule itérative, issue de la norme ASTM E1820, permettant d'obtenir la courbe $J_R - \Delta a$ à partir de l'aire sous la courbe $P - V_{pl}$, peut être utilisée pour une géométrie quelconque, à condition de respecter la séparabilité des variables a et V_{pl}, dans l'expression de l'effort P. Cette condition assure également l'existence de η_{pl} et autorise par conséquent le calcul de ce paramètre.

C'est justement dans l'expression du facteur plastique que réside une certaine confusion. Par exemple, pour les éprouvettes CT, la courbe $J_R - \Delta a$ est toujours évaluée en utilisant la formulation de η_{pl} fournie par la norme ASTM E1820. Or, nous avons montré, au paragraphe 2.2.1, que cette expression est issue d'une approche analytique, dont la transposition à une autre géométrie d'éprouvette n'est pas possible. Nous avons donc établi au paragraphe 2.3.1, une méthode générale basée sur l'utilisation de la « keycurve », permettant de déterminer l'existence et l'expression de η_{pl} pour une géométrie quelconque d'éprouvette.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{xx}(\theta) \quad \text{avec} \quad f_{xx} = \left(1 + \sin^2 \dfrac{\theta}{2}\right) \cos \dfrac{\theta}{2} \\ \\ \sigma_{yy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{yy}(\theta) \quad \text{avec} \quad f_{yy} = \cos^3 \dfrac{\theta}{2} \end{cases} \tag{2.73}$$

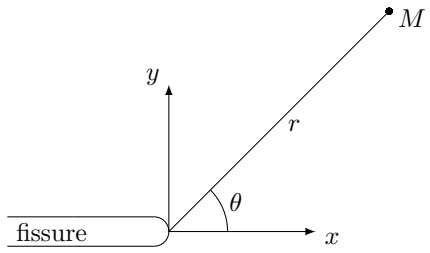


FIGURE 2.44 – Expression du champ de contrainte en pointe de fissure

Dans ce paragraphe, nous voulons fournir un moyen de vérifier le confinement plastique en pointe de fissure, quelle que soit la géométrie d'éprouvette utilisée. Cette exigence est importante car elle permet de garantir l'indépendance de la courbe R vis à vis de la géométrie d'éprouvette employée, sous réserve que soit vérifiée la condition de déformation plane. Afin de montrer l'importance de cette exigence, nous allons revenir un instant sur l'analyse d'un essai de traction sur éprouvette CT.

Pour déterminer la ténacité à partir de la norme ASTM E399, il faut dans un premier temps touver l'effort P_Q, puis en déduire le facteur d'intensité de contrainte K_Q correspondant. La valeur de celui-ci sera alors égale à celle de la ténacité, si est vérifiée la condition $b > 2,5(K_Q/\sigma_y)$ qui traduit la condition de déformation plane. Celle-ci permet d'obtenir une valeur de K_{IC} considérée comme une propriété intrinsèque du matériau, c'est-à-dire indépendante de l'épaisseur B de l'éprouvette. De la même manière, la courbe $J_Q - \Delta a$ sera transformée en courbe R, sous réserve de remplir une double exigence, à savoir celle de déformation plane, mais également celle de plasticité confinée. Selon la norme ASTM E1820, cette dernière est vérifiée pour les éprouvettes CT si $b > 25(J/\sigma_f)$.

Les premières études faisant date sur la condition de plasticité confinée ont été initiées par [O'Dowd and Shih, 1991] et [O'Dowd and Shih, 1992], notamment par l'introduction du facteur Q, dont la définition se déduit de celle de la contrainte T pour le cas de la LEFM. Soit une fissure plane sollicitée à l'infini suivant le mode I. Dans ce cas, la contrainte en pointe de fissure est reliée au facteur d'intensité de contrainte en mode I, à l'aide de la relation (2.73) de la figure 2.44.

La contrainte T en pointe de fissure, pour une éprouvette de géométrie quelconque, sera alors évaluée par comparaison avec la solution de référence, donnée par (2.73). Ainsi, en notant σ_{ij} le champ de contrainte au voisinage d'une fissure, nous aurons par définition :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T\delta_{xi}\delta_{xj} \tag{2.74}$$

Par analogie, le facteur Q sera défini par rapport à un champ de contrainte de référence, représentatif de l'état de plasticité confinée. Historiquement [O'Dowd and Shih, 1991] ont choisi les champs HRR issus de [Hutchinson, 1968] et [Rice and Rosengren, 1968] comme état de référence. En désignant toujours par σ_{ij} le champ de contrainte au voisinage d'une fissure, l'expression du facteur Q s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{HRR} + Q\sigma_y\delta_{ij} \tag{2.75}$$

La relation ci-dessus montre que Q n'est pas homogène à une contrainte mais est un facteur adimensionnel. De plus, contrairement à T, la contrainte $Q\sigma_y$ ne modifie que les termes de la trace du tenseur des contraintes. La fin de ce paragraphe va donc être consacrée à la détermination du facteur Q pour les éprouvettes CT et SENT, afin de quantifier un éventuel écart par rapport à l'état de plasticité confinée, représenté par les champs HRR. En se référant à [Hutchinson, 1968] et [Rice and Rosengren, 1968], la détermination des champs HRR n'est pas simple. Par conséquent, nous allons adopter un autre état de référence pour le cas de plasticité confinée, conformément aux travaux de [McMeeking and Parks, 1979]. Dans ce cas, le champ de contrainte de référence, noté σ_{ij}^{SSY}, est obtenu par simulation numérique en suivant l'analyse de [McMeeking, 1977].

	SENT		CT	
δ_0/W	$a/W = 0,5$	$a/W = 0,7$	$a/W = 0,5$	$a/W = 0,7$
2×10^{-3}	$\delta_0 = 10\ \mu$m	$\delta_0 = 6\ \mu$m	$\delta_0 = 20\ \mu$m	$\delta_0 = 12\ \mu$m
2×10^{-4}	$\delta_0 = 1\ \mu$m	$\delta_0 = 0,6\ \mu$m	$\delta_0 = 2\ \mu$m	$\delta_0 = 1,2\ \mu$m

TABLE 2.16 – Valeurs de δ_0 calculées à partir des ratios δ_0/b issus de [McMeeking and Parks, 1979]

Il s'agit de mailler finement la pointe de fissure en considérant un rayon initial d'émoussement δ_0. Puis il faut imposer un chargement en déplacement, caractéristique de celui associé au champ de contrainte réprésentatif de la condition de plasticité confinée, décrit par la relation (2.73). Dans le logiciel ZeBuLoN, il existe la possibilité de définir un champ de déplacement, se déduisant de (2.73), piloté par le facteur d'intensité de contrainte K suivant les équations :

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{K_I}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(k - 1 + 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \\ u_y = \dfrac{K_I}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(k + 1 - 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 3 - 4\,\nu \quad \text{(Déformation plane)} \\ \\ k = \dfrac{3-\nu}{1+\nu} \quad \text{(Contraite plane)} \end{cases} \tag{2.76}$$

Le choix de la valeur δ_0 a été dicté par [McMeeking and Parks, 1979]. En effet, dans cette étude, les auteurs ont réalisé deux maillages d'éprouvette SENB avec un ratio a/W de 0,9 en utilisant une valeur de δ_0/b respectivement égale à 2×10^{-3} et 2×10^{-4}. Un maillage pour a/W égal à 0,5 a également été effectué avec 2×10^{-4} comme valeur pour δ_0/b. Nous envisageons dans la suite de cette étude de faire varier a/W de 0,5 à 0,7 pour les éprouvettes CT et SENT, dont les valeurs respectives de W sont 20 mm et 10 mm. A partir des ratios δ_0/b choisis par [McMeeking and Parks, 1979], nous avons donc calculé les différentes valeurs possibles de δ_0 pour nos géométries d'éprouvettes, elles sont résumées dans le tableau 2.16. Nous avons choisi un rayon d'émoussement de 3 μm soit une valeur de δ_0 égale à 6 μm. Ce choix correspond donc à un ratio δ_0/b de 2×10^{-3} au lieu de 2×10^{-4}, ce dernier conduirait à des valeurs de δ_0 inférieures ou égales à 1 μm, risquant alors d'engendrer des problèmes de convergence.

La figure 2.45 présente une vue générale du modèle ainsi qu'un zoom sur le rayon d'émoussement. Le maillage a été réalisé à l'aide d'éléments linéaires c2d4 avec l'hypothese de déformation plane. Les conditions aux limites introduites sont, d'une part une condition de symétrie pour les nœuds du ligament, et d'autre part pour ceux de la périphérie circulaire un déplacement imposé, conforme à (2.76), piloté par incrémentation de K.

Le comportement plastique est modélisé par une loi de Ramberg-Osgood définie au paragraphe 2.3.1.1 par la relation (2.54). Les simulations seront effectuées en grandes déformations géométriques et matériau, exprimées dans le repère corrotationnel suivant le formalisme de [Ladevèze, 1980]. Par conséquent, les paramètres de la loi de Ramberg-Osgood ont été optimisés à nouveau afin de tenir compte de cette nouvelle hypothèse. Nous obtenons donc de nouvelles valeurs pour σ_0, α et n, à savoir respectivement 362,8 MPa, 0,873 et 8,39 au lieu de 390,6 MPa, 1,42 et 11,2 pour le cas des petites déformations (voir 2.3.1.1).

Le post-traitement du calcul consiste à récupérer en fonction du temps, d'une part le déplacement d suivant y, du nœud N_1 au nœud N_1', afin de calculer le CTOD, noté δ, en utilisant la relation $\delta = \delta_0 + 2d$, l'introduction du facteur 2 permet de tenir compte de la symétrie (voir figure 2.45). Précisons que nous avons retenu la même définition de δ que celle utilisée dans [McMeeking, 1977]. D'autre part l'évolution de la contrainte σ_{yy} est enregistrée le long de l'axe x, puisque selon [McMeeking, 1977] la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale pour $\theta = 0$. La figure 2.46 permet de vérifier ce point puisque nous avons représenté sur celle-ci l'évolution de $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de $r/\left(J_{app}/\sigma_y\right)$ pour θ égal à 0 et $\pi/2$. Nous avons également relevé le déplacement suivant x du nœud N_2 au nœud N_2', il représente l'avancée de fissure due à

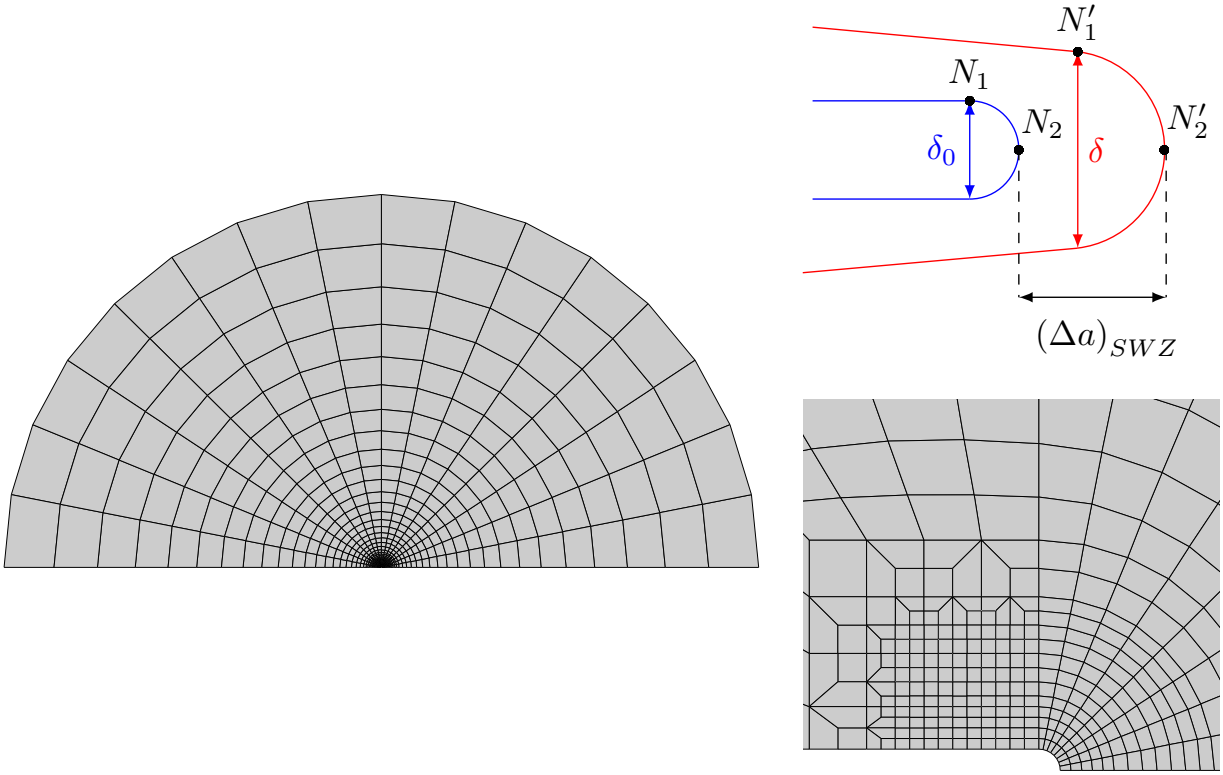


FIGURE 2.45 – Modèle représentatif de la condition de plasticité confinée

l'émoussement, notée $(\Delta a)_{SWZ}$ et définie sur la figure 2.45.

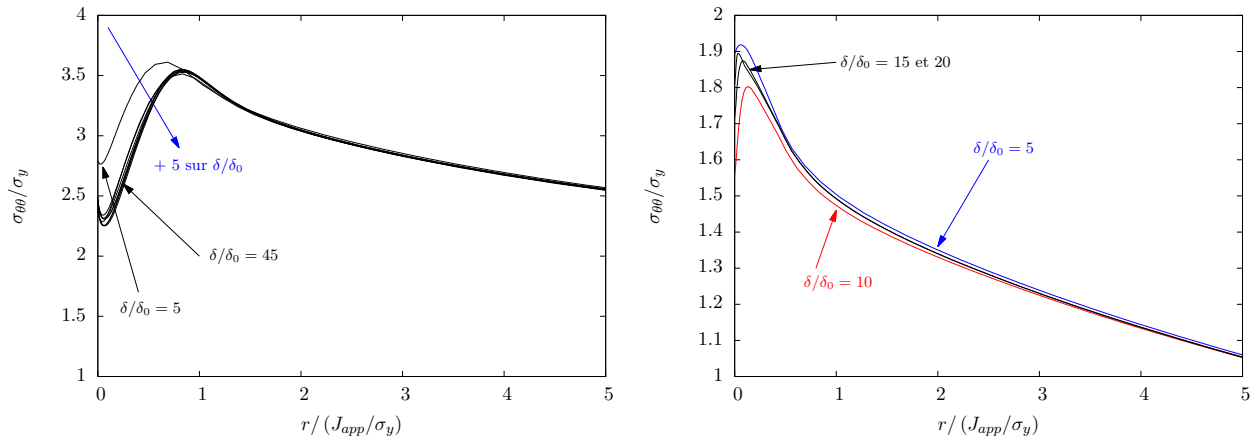
Avant d'exposer les résultats obtenus nous devons signaler que nous avons rencontré de sérieux problèmes de convergence, ils n'ont pu être résolus que par l'introduction d'éléments spécifiques. Ceux-ci ont été enrichis en degré de liberté, suivant le formalisme développé dans [Bellet, 1999], afin de garantir aux points de Gauss la continuité de la pression hydrostatique, égale par définition à la trace du tenseur des contraintes. Nous sommes surpris qu'il ne soit pas fait mention de ce problème de convergence dans [McMeeking, 1977] et [McMeeking and Parks, 1979]. Ces auteurs mentionnent tout au plus le fait que les éléments en pointe de fissure doivent être étroits suivant la direction orthoradiale, et allongés dans le sens radial, afin de ne pas adopter une forme dégénérée lorsqu'ils vont se déformer.

La figure 2.46 représente $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_y$ en fonction de $r/\left(J_{app}/\sigma_y\right)$ pour différents rapports δ/δ_0 variant de 5 à 45 par pas de 5, les variables θ et r étant définies sur la figure 2.44. La notation J_{app} désigne l'intégrale J appliquée, c'est-à-dire calculée en utilisant la relation (2.69), à partir du facteur d'intensité de contrainte K imposé comme condition aux limites. La figure 2.46 permet de retrouver le résultat phare de [McMeeking, 1977], à savoir que l'évolution de $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_y$ en fonction de $r/\left(J_{app}/\sigma_y\right)$ converge vers une solution unique, pour tout ratio δ/δ_0 supérieur à 10. *Cette solution constitue alors la contrainte de référence σ_{ij}^{SSY} représentative du cas de plasticité confinée.*

La figure 2.47a présente l'évolution de δ/δ_0 en fonction de $J_{app}/\delta_0\sigma_y$ qui s'apparente à une droite pour des rapports de δ/δ_0 inférieurs à 8. Le coefficient directeur de cette droite est égal à 0,629. [McMeeking, 1977] propose la relation suivante entre δ et J_{app}/σ_y :

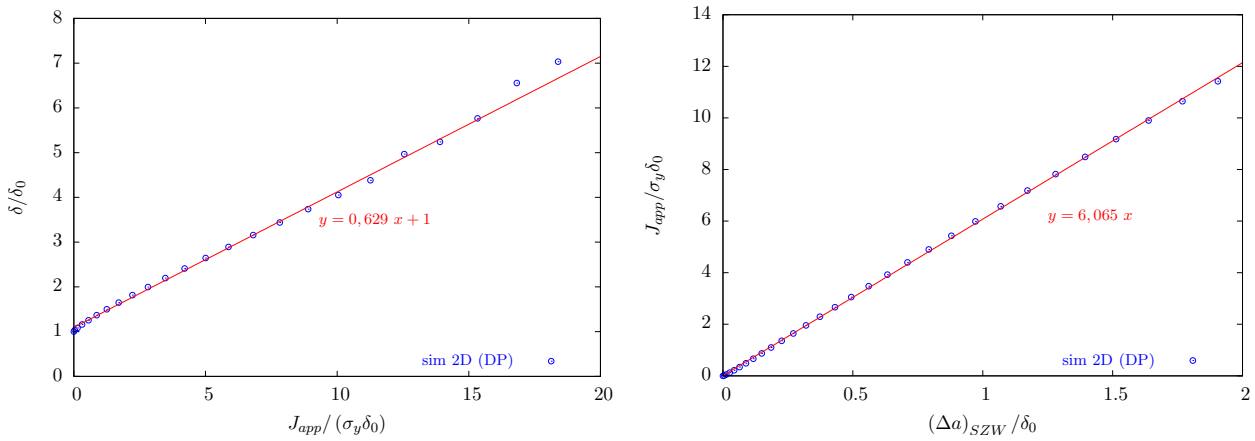
$$\delta = 0,55\ \frac{J_{app}}{\sigma_y}\ \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\ (1+\nu)\ (1+N)\ \frac{\sigma_y}{NE}\right]^N$$

Dans l'expression ci-dessus N représente l'inverse de l'exposant n de la loi de Ramberg-Osgood définie par la relation (2.54) dont la valeur est de 11,2. L'application numérique à partir de la formulation précédente donne $\delta = 0,45 J_{app}/\sigma_y$ dans le cas de notre matériau. Nous n'obtenons donc pas exactement



(a) Pour $\theta = 0$ (b) Pour $\theta = 90$

FIGURE 2.46 – Evolution de $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_y$ en fonction de $r/(J_{app}/\sigma_y)$



(a) Relation entre δ et J (b) Droite d'émoussement

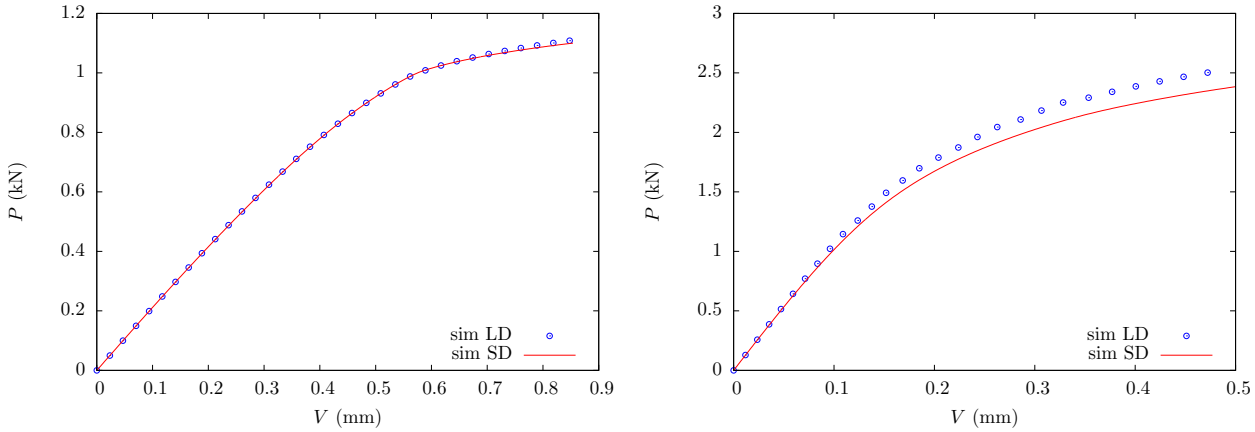
FIGURE 2.47 – Evolution du CTOD et de l'émoussement en fonction de J

le même résultat que celui annoncé par [McMeeking, 1977]. D'après la figure 2.47a, pour un ratio δ/δ_0 de 7, nous avons une valeur correspondante de J_{app} égale à 42 MPa.mm. Dans la troisième partie du chapitre 1 les valeurs de la ténacité obtenues à partir des essais sur éprouvette CT sont de l'ordre de 30 MPa$\cdot\sqrt{\text{m}}$, soit une valeur de J_{IC} de 11,5 MPa.mm selon (2.69). Il apparaît donc que le CTOD ne peut pas être considéré comme un véritable critère local pour prévoir l'amorçage de la fissure. En effet il existe, pour J inférieure à 42 MPa.mm, une relation affine entre δ et l'intégrale J dont la valeur critique $J_{IC} = 11,5$ MPa.mm fait office de critère d'amorçage de la fissure.

Avant de se propager une fissure se déforme plastiquement au niveau de sa pointe, la figure 2.45 illustre ce phénomène d'émoussement. Nous avons tracé sur la figure 2.47b l'évolution de J_{app}/σ_y en fonction de l'avancée de la fissure par émoussement, notée $(\Delta a)_{SWZ}$. Il existe une relation linéaire entre J_{app}/σ_y et $(\Delta a)_{SWZ}$. D'après [Paris et al., 1979] et [Lautridou and Pineau, 1981], l'intersection de cette droite avec les courbes $J_R - \Delta a$ de la figure 2.20 permet de déterminer la valeur critique de J à l'amorçage de la fissure pour les sens $L-T$, $T-L$ et $T-S$. Dans le cas de notre alliage, l'émoussement étant faible, la valeur de J_{IC} peut être considérée comme l'intersection entre la courbe R et l'axe des ordonnées. Le tableau 2.17 résume les valeurs de J_{IC} ainsi obtenues et offre également à titre de comparaison celles issues des essais sur éprouvettes CT10. Nous pouvons constater qu'il existe peu d'écart entre les valeurs de J_{IC} et de dJ_R/da issues de l'analyse à partir de la « keycurve » (voir figure 2.20) et celles déterminées par essais en utilisant la norme ASTM E1820 (voir troisième partie du chapitre 1).

	Utilisation de la « keycurve »		Détermination par essais	
	J_{IC}	dJ_R/da	J_{IC}	dJ_R/da
$L-T$	13,7 MPa.mm	14,27 MPa	11,3 MPa.mm	13,23 MPa
$T-L$	8,6 MPa.mm	8,13 MPa	7,1 MPa.mm	8,29 MPa
$T-S$	16,3 MPa.mm	10,31 MPa	17,3 MPa.mm	9,05 MPa

TABLE 2.17 – Valeurs de J_{IC} issues d'essais et déterminées à l'aide de la « keycurve »



(a) Cas des éprouvettes CT (b) Cas des éprouvettes SENT

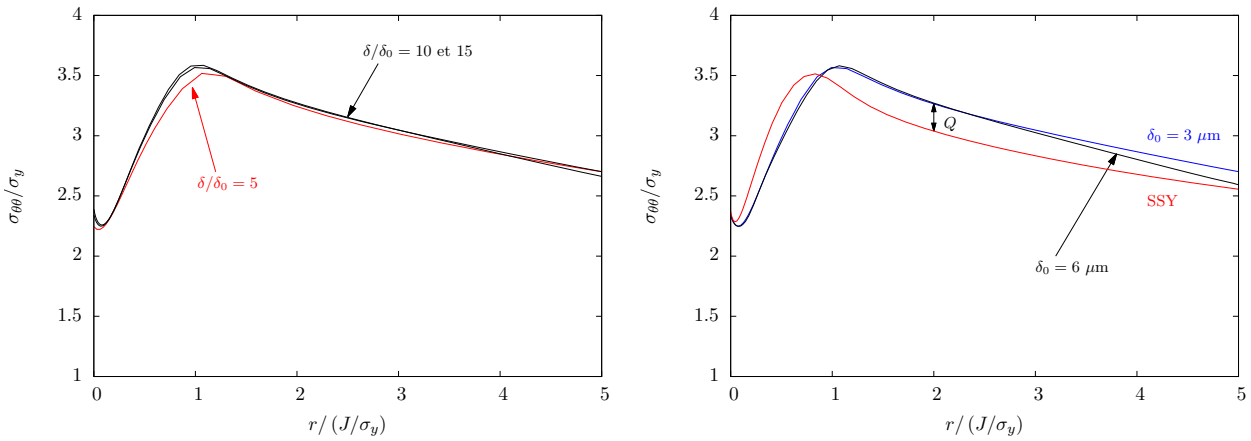
FIGURE 2.48 – Courbe $P-V$ en petites et grandes déformations

Le maillage en pointe de fissure illustré par la figure 2.45 a été introduit dans celui d'une géométrie CT et SENT avec a/W égal à 0,5. Précisons que pour l'éprouvette SENT, seul le ratio H/W égal à 10 est étudié, car il correspond à celui des éprouvettes testées dans la troisième partie du chapitre 1. Il est alors possible, en utilisant une méthodologie identique à celle déployée pour le cas de plasticité confinée, de tracer l'évolution de $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de $r/\left(J/\sigma_y\right)$. Les figures 2.49 et 2.50 montrent les résultats obtenus respectivement pour les éprouvettes CT et SENT, dans le cas où le ratio a/W est égal à 0,5.

Il nous faut cependant dire un mot sur le calcul de J. En effet, l'introduction en pointe de fissure des éléments spécifiques, dont il a été question précédemment, n'est pas compatible avec un calcul numérique de J, basé sur une avancée virtuelle de la fissure selon [Delorenzi, 1985]. La figure 2.48a présente les courbes $P-V$ obtenues à partir d'une modélisation en grande déformation, et d'une simulation en petite déformation pour l'éprouvette CT, avec a/W égal à 0,5. Nous pouvons constater que ces deux courbes sont confondues par conséquent le calcul de J peut se faire à partir du modèle en petite déformation, puisque J se déduit de l'aire sous la courbe $P-V$.

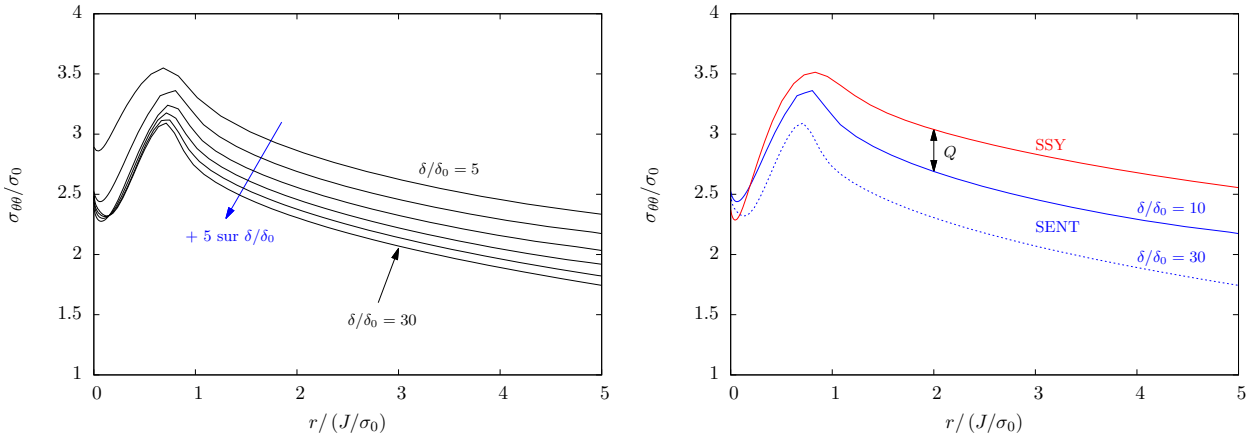
La figure 2.48b fournit ces mêmes résultats pour les éprouvettes SENT, mais dans ce cas les deux courbes $P-V$ ne coïncident pas, il n'est donc pas possible d'obtenir la valeur de J à partir d'un calcul en petites déformations. Par conséquent, l'évaluation de l'intégrale J sera effectuée à l'aide de l'aire A_{pl} sous la courbe $P-\Delta_{pl}$. Celle-ci se déduit de la courbe $P-\Delta$ par soustraction de la partie élastique Δ_{el}, calculée en utilisant la complaisance formulée selon [Cravero and Ruggieri, 2007]. L'aire A_{pl} permet d'obtenir J_{pl} moyennant l'utilisation de (2.1). Nous avons retenu l'expression de η_{pl} donnée par [Shen et al., 2009] car elle conduit, selon la figure 2.43, à des résultats proches de ceux issus des calculs numériques effectués au paragraphe 2.3.2.2.

En se reportant à la figure 2.49a nous pouvons constater que la convergence vers une solution unique se fait pour δ/δ_0 supérieur à 10 pour les éprouvettes CT. Nous avons également étudié l'évolution de $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de $r/\left(J/\sigma_y\right)$ pour un rayon d'émoussement de 6 μm. Il existe également pour cette



(a) Evolution de $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_y$ pour $\theta = 0$ (b) Calcul de Q

FIGURE 2.49 – Détermination de Q pour l'éprouvette CT10 avec $a/W = 0,5$



(a) Evolution de $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_y$ pour $\theta = 0$ (b) Calcul de Q

FIGURE 2.50 – Détermination de Q pour une éprouvette SENT avec $a/W = 0,5$

géométrie une convergence vers une solution unique pour δ/δ_0 supérieur à 10, celle-ci étant proche de celle obtenue pour un rayon d'émoussement de 3 μm, comme le montre la figure 2.49a. Dans le cas des éprouvettes SENT cette convergence n'est pas atteinte pour une valeur maximale de δ/δ_0 égale à 30 compte tenu de la figure 2.50a.

Selon [Ainsworth et al., 2000], l'évaluation de Q se fait pour $x/(J/\sigma_y)$ égal à 2 en utilisant la relation (2.75). Le paramètre Q est représenté sur les figures 2.49b et 2.50b pour les éprouvettes CT10 et SENT. La valeur de Q est de 0,226 dans le cas des éprouvettes CT10. Pour les éprouvettes SENT deux évaluations ont été réalisées compte tenu de l'absence de convergence vers une solution unique. Ainsi nous obtenons des valeurs de Q de $-0,348$ et de $-0,737$ respectivement pour $\delta/\delta_0 = 10$ et $\delta/\delta_0 = 30$. Les éprouvettes CT10 donnent donc un niveau de contrainte plus proche de la contrainte de référence σ^{SSY} que les éprouvettes SENT, d'autant plus que celles-ci ne présentent pas de convergence vers une solution unique, à partir d'une certaine valeur du rapport δ/δ_0.

2.3.3 Résumé

La méthode de la « keycurve » consiste à exprimer pour une éprouvette fissurée la charge appliquée sous la forme : $P = G(a/W)\ H(V_{pl}/W)$ où V représente le déplacement d'ouverture de la fissure. L'intérêt de cette méthode est d'assurer la séparabilité des variables a et V_{pl} dans la formulation de P. Cette condition permet selon [Ernst et al., 1981] de garantir l'existence du facteur plastique η_{pl} dont

l'expression se déduit alors aisément en utilisant (2.36). Afin d'obtenir les fonctions G et H pour les éprouvettes CT10, CT20 et SENT, nous avons réalisé des modélisations numériques d'essai de traction sur ces éprouvettes pour diverses longueurs de fissure a.

Puis en utilisant le module d'optimisation intégré à ZeBuLoN nous avons cherché à approximer les courbes $P - V_{pl}$, obtenues par simulation pour différents rapports a/W, par une fonction H écrite sous la forme d'une somme d'exponentielles saturantes. Nous obtenons alors, d'une part, les coefficients de la fonction H et, d'autre part, la valeur de G pour les ratios a/W utilisés lors de la modélisation. Il ne reste plus qu'à optimiser la fonction G ainsi définie point par point par un polynôme de degré 5. En supposant que η_{pl} est un polynôme de degré 3 il est possible d'intégrer (2.36) et d'exprimer $\log G$ en fonction des coefficients de ce polynôme dont la détermination sera alors réalisée par optimisation en cherchant à approximer la fonction $\log G$.

Nous sommes parvenus à déterminer G et H pour les éprouvettes CT10, CT20 et SENT ainsi que le facteur plastique correspondant sous la forme d'un polynôme de degré 3. L'approximation des courbes $P - V_{pl}$ pour les éprouvettes CT par la fonction H est excellente alors qu'elle est nettement moins bonne pour les éprouvettes SENT. Cependant nous avons montré à partir des éprouvettes CT qu'une dégradation de l'approximation des courbes $P - V_{pl}$ par H a peu d'incidence sur la détermination de η_{pl}. Dans le but de vérifier la validité de la méthodologie basée sur la « keycurve » nous avons calculé, à titre de comparaison, le facteur plastique par une évaluation directe de J en utilisant une simulation numérique comme le propose [Cravero and Ruggieri, 2007].

Afin de s'affranchir autant que possible de la dépendance de J par rapport au contour d'intégration nous avons développé une loi non linéaire élastique pour modéliser l'écrouissage du matériau. Les facteurs plastiques obtenus par la « keycurve » et par calcul numérique montrent qu'il n'existe pas d'écart pour les éprouvettes CT contrairement aux éprouvettes SENT. Néanmoins pour ces dernières l'approche développée par [Cravero and Ruggieri, 2007] n'est pas entièrement satisfaisante, car elle suppose que η_{pl} atteint un palier à partir d'une certaine valeur seuil de J. Or ce n'est pas le cas lorsque le rapport a/W est supérieur à 0,7. Le calcul de J a été étendu à l'analyse en pointe de fissure afin de calculer le paramètre Q. Les résultats obtenus montrent que les éprouvettes CT10 et SENT présentent un écart par rapport au champ de contrainte de référence, représentatif de la plasticité confinée.

2.4 INTEGRITE D'UNE STRUCTURE AVEC FISSURE

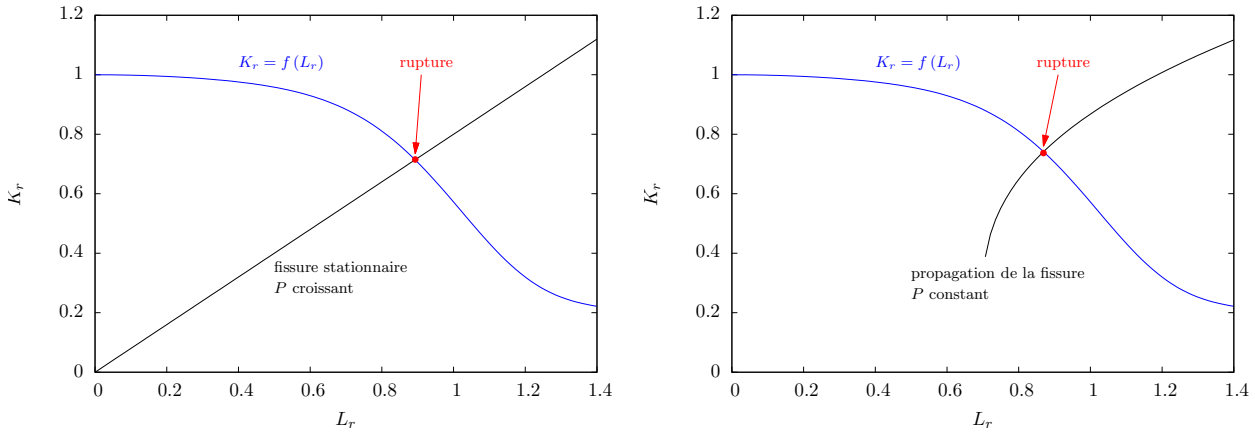
2.4.1 Analyse FAD

L'objectif de ce paragraphe est de présenter et mettre en œuvre une méthode de vérification de l'intégrité d'une structure comportant une fissure. Cette partie est très appliquée car la méthodologie abordée est utilisée presque de manière standard dans l'ingénierie, et en particulier au sein de EURO CRYOSPACE. Elle recèle néanmoins quelques subtilités que nous allons essayer d'éclairer dans la suite de cette étude.

Elle repose sur l'analyse FAD [(b)] développée par CEGB [(c)], il existe d'autres approches analogues notamment celle de EPRI [(d)] dont le projet global est détaillé dans [Marston, 1979]. Cependant cette dernière est d'un emploi moins aisé, car elle utilise uniquement une démarche basée sur l'intégrale J dont le calcul, pour différentes géométries, s'effectue à partir de formules tabulées issues des travaux de [Kumar et al., 1981] et [Bloom and Malik, 1982].

Alors que du côté CEGB sont proposées trois options de plus en plus sophistiquées, les deux premières font intervenir le facteur d'intensité de contrainte K dans le cadre de la LEFM et de la NLFM, l'intégrale J n'apparaissant que dans la dernière option. Ceci étant dit, il serait vain de vouloir

(b). acronyme anglais pour Failure Assessment Diagram
(c). Central Electricity Generating Boarding (United Kingdom)
(d). Electric Power Research Institute (USA)



(a) Acceptabilité d'un défaut (b) Recherche des DCI

FIGURE 2.51 – Principe de l'analyse FAD

opposer ces deux approches, il existe tout au plus des querelles de chapelle qui restent de bonne guerre. En suède, la méthode CEGB sert de référence aux procédures permettant de certifier l'intégrité d'une structure avec fissure selon [Brickstad et al., 2000]. [Hodulak et al., 1989] valident cette méthode tandis que [Darlaston, 1979] et [Dowling et al., 1983] en fournissent, à titre d'exemple, une application.

2.4.1.1 Principe et théorie

Le cœur de l'analyse FAD est un diagramme d'abscisse L_r et d'ordonnée K_r représenté sur la figure 2.51. Lorsque K_r tend vers 1 la rupture de la structure fissurée se fait avec très peu de déformation plastique, c'est le domaine de la LEFM, elle peut même être purement élastique dans le cas d'un matériau faiblement ductile. A l'opposé, pour une valeur de L_r proche de 1, la ruine de la structure s'effectue par instabilité plastique du ligament. La force du diagramme FAD est de proposer une courbe d'équation $K_r = f(L_r)$ permettant d'interpoler la rupture entre ces deux extrêmes que nous venons de décrire, d'une part une rupture quasiment élastique et d'autre part une instabilité plastique.

Nous verrons que cette fonction f peut être « universelle », c'est-à-dire indépendante de la géométrie et du matériau de la structure étudiée, ou dépendre uniquement du matériau, voir dans certains cas particuliers être spécifique à une géométrie et un matériau donnés. Ainsi, pour un défaut de dimensions connues présent dans une structure soumise à un effort P, l'analyse FAD consiste à déterminer et positionner le couple $(L_r\ ,\ K_r)$ correspondant, sur le diagramme de la figure 2.51a. Si le point tracé se trouve en dessous de la courbe d'interpolation de la rupture, alors le défaut est accetable, sinon il conduira à la ruine de la structure. Pour statuer sur l'acceptabilité d'un défaut dont la géométrie est donnée (fissure stationnaire), il suffit de chercher P tel que le point $(L_r\ ,\ K_r)$ se trouve sur cette courbe, puis vérifier que le chargement réel est bien inférieur à cet effort (voir figure 2.51a). Dans le cas précis de la détermination des défauts critiques initiaux, nous cherchons, pour un niveau de chargement spécifié, des tailles de défauts permettant de se situer précisément sur la courbe $K_r = f(L_r)$, comme illustré par la figure 2.51b.

La définition des expressions de L_r et K_r est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} L_r = \dfrac{\sigma_{app}}{\sigma_L} = \dfrac{P}{P_L} \\ \\ K_r = \dfrac{K_I}{K_{mat}} \end{cases}$$

Les variables σ_{app} et P représentent respectivement la contrainte et l'effort appliqués à la structure, alors

que P_L désigne l'effort limite et σ_L la contrainte limite. Selon [Miller, 1988], P_L est l'effort maximal que peut supporter une structure, dont le matériau est considéré comme parfaitement plastique de limite élastique σ_y, la contrainte limite associée sera donc $\sigma_L = \sigma_y$. Pour un matériau dont la contraite à rupture, σ_u, est très supérieure à la limite d'élasticité, σ_y, il peut être utile de déterminer P_L en supposant que le matériau est toujours parfaitement plastique, mais avec une limite élastique égale à la contrainte d'écoulement σ_f. Celle-ci étant définie comme la valeur moyenne de σ_y et σ_u. Dans ce dernier cas la contrainte limite est alors la contrainte d'écoulement soit $\sigma_L = \sigma_f$.

K_I est la notation relative au facteur d'intensité de contrainte suivant le mode I d'ouverture de la fissure analysée, puisqu'il est le plus dimensionnant. K_{mat} représente une caractéristique du matériau vis à vis de la propagation d'une fissure. Si l'analyse porte sur l'amorçage de la fissure alors K_{mat} sera égal à la ténacité K_{IC}, ou à K_{Ie} qui représente une ténacité spécifique aux éprouvettes SCT, dont la détermination se fait suivant la norme ASTM E740. Pour une approche moins conservative il peut être intéressant de prendre en compte une éventuelle propagation, en utilisant par exemple J_{IC}, ou en autorisant un accroissement Δa_g de la fissure. Dans ce cas, K_{mat} s'obtient par la relation suivante :

$$K_{mat} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{E}{1-\nu^2}\ J_{IC}} \\ \\ \sqrt{\dfrac{E}{1-\nu^2}\ J_R\left(\Delta a_g\right)} \end{cases}$$

L'instabilité plastique évoquée précédemment peut être perçue d'un point de vue global ou local. Dans le premier cas, cela revient à chercher l'effort limite d'une structure sans défaut, équivalente à celle étudiée comportant un défaut, dont la section serait égale à la section nette de la structure fissurée (S_n), définie comme la section réelle moins la surface du défaut. Par conséquent, en se référant à la définition de l'effort limite issue de [Miller, 1988], nous avons dans le cas de l'instabilité globale : $P_L = \sigma_y \times S_n$. Dans le sens local, l'effort limite correspond à celui qui va engendrer localement, au niveau du ligament, une contrainte apparente égale à σ_y ou σ_f.

L'éprouvette SENT va nous servir d'exemple afin d'illustrer la distinction entre un effort limite au sens global ou local. Si nous considérons une fissure peu profonde alors nous voyons bien que dans ce cas l'instabilité plastique est globale, car elle est proche de celle d'une éprouvette plate sans fissure soumise à un effort de traction. Puis pour des fissures de profondeur moyenne les deux définitions de P_L coïncident uniquement lorsque le moyen d'amarrage des éprouvettes n'autorise pas de flexion. En effet, dans ce cas le ligament est soumis uniquement à un effort de traction uniforme, ainsi l'expression de la contrainte apparente au niveau du ligament est P/S_n. Par conséquent, l'effort limite au sens global et local est égal à $\sigma_y \times S_n$. Enfin, pour des fissures profondes l'effort limite doit être calculé différemment afin de tenir compte de la plasticité locale et de la flexion dans le ligament qui influe sur l'évaluation de la contrainte apparente.

Revenons un instant sur la détermination de la contrainte appliquée σ_{app} dont la définition n'est pas explicitement donnée. Notons toutefois qu'il n'existe pas d'ambiguïté dans le cas où nous utilisons un effort au lieu d'une contrainte pour l'évaluation de L_r. Il faudra toujours privilégier l'utilisation de P, parfois même c'est la seule alternative possible. Par exemple dans le cas d'une éprouvette CT il est beaucoup plus facile d'utiliser l'effort appliqué que la contrainte appliquée dont l'expression en fonction de P n'est pas facile à déterminer. Pour les éprouvettes SENT et SCT la contrainte σ_{app} se déduit de l'effort P simplement en divisant celui-ci par la section S_0 de l'éprouvette.

Nous allons fournir maintenant l'expression de la fonction f permettant de relier les variables K_r et L_r. Celle-ci est désignée par le terme de « loi R6 » dans la méthode CEGB dont la première formulation

proposée par [Harrison et al., 1980] s'écrit :

$$K_r = L_r \left[\left(\frac{8}{\pi^2} \right) \log \left(\sec \left(\frac{\pi L_r}{2} \right) \right) \right] \quad \text{avec} \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

[Milne, 1982] a montré que cette expression ne convient pas dans le cas d'un matériau fortement écrouissable, c'est-à-dire dont la valeur de l'exposant n dans la loi de Ramberg-Osgood est inférieur à 5. [Milne et al., 1986] fournit alors une révision du document de référence de la procédure CEGB valable quel que soit le niveau d'écrouissage du matériau. C'est cette version qui est actuellement utilisée chez EURO CRYOSPACE, elle propose trois fonctions permettant de relier K_r et L_r correspondant aux trois options évoquées dans l'introduction de ce paragraphe :

$$\begin{cases} \text{Option 1} \quad K_r = \left[1 - 0,14 L_r^2\right] \left[0,3 + 0,7 \ \exp\left(-0,65 L_r^6\right)\right] \\ \\ \text{Option 2} \quad K_r = \left[\dfrac{E\varepsilon_{ref}}{L_r \sigma_y} + \dfrac{L_r^3 \sigma_y}{2E\varepsilon_{ref}} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \\ \text{Option 3} \quad K_r = \sqrt{\dfrac{J_{el}}{J}} \end{cases}$$

Compte tenu des relations ci-dessus il apparaît que la loi R6 option 1 est indépendante du matériau et de la géométrie de la structure étudiée par l'analyse FAD. L'option 2 fait intervenir les caractéristiques mécaniques du matériau afin de prendre en compte la plasticité, dans le but d'obtenir des résultats moins conservatifs. Il est alors recommandé selon [Milne et al., 1986] d'utiliser la contrainte et la déformation vraies [(e)] plutôt que les grandeurs ingénieures [(f)], issues directement d'un essai de traction uni-axial. Ainsi ε_{ref} désigne la déformation vraie correspondant à la contrainte vraie $L_r \sigma_y$.

Notons que quelle que soit l'option utilisée, la courbe d'équation $K_r = f(L_r)$ est tronquée pour une valeur d'abscisse $(L_r)_{max}$ égale à σ_f / σ_y. Dans ce cas les valeurs ingénieures de σ_y et σ_u seront utilisées pour évaluer σ_f. L'option 3 permet de construire point par point une courbe K_r en fonction de L_r valable, compte tenu de l'expression de J, uniquement pour un matériau donné et une géométrie de structure fixée. Le paramètre L_r intervient de manière implicite dans la détermination de J et J_{el} qui nécessite de connaître la charge P reliée à P_L via L_r. Précisons que l'utilisation de intégrale J n'est pas propre à l'option 3, elle peut être employée avec l'option 2 en écrivant :

$$K_r = \frac{K_J}{K_{mat}} = \left(\frac{E\varepsilon_{ref}}{L_r \sigma_y} + \frac{L_r^3 \sigma_y}{2E\varepsilon_{ref}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad K_J = \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2} \ J} \tag{2.77}$$

Nous allons maintenant mettre en pratique l'analyse FAD afin de prédire l'amorçage de la fissure pour les éprouvettes CT, SENT et SCT dont les résultats d'essai sont présentés au chapitre 1. Nous utiliserons tout d'abord les options 1 et 2 de la loi R6 pour les éprouvettes CT et SENT afin de se familiariser avec l'analyse FAD, avant d'envisager la mise en œuvre de l'option 3 plutôt réservée à un utilisateur aguerri. L'étude des éprouvettes SCT sera uniquement effectuée avec les options 1 et 2.

(e). $\varepsilon_1 = \log(l/l_0) = \log(1 + \Delta l/l_0)$ et $\sigma_1 = F/S = (1 + \Delta l/l_0) \ F/S_0$
(f). $\varepsilon_1 = \Delta l/l_0$ et $\sigma_1 = F/S_0$

2.4.1.2 Application aux éprouvettes CT, SENT et SCT

Cas des éprouvettes CT

Pour appliquer l'analyse FAD aux éprouvettes CT la première étape est de calculer K_r et L_r. Le calcul du facteur d'intensité de contrainte ne pose pas de problème particulier, il sera effectué à partir de la relation (2.68), issue de la norme ASTM E1820, dans le cas de déformation plane. En effet c'est cette hypothèse qui permet d'obtenir la valeur maximale de K au centre de l'éprouvette, et de prédire de manière conservative la rupture par comparaison avec la ténacité. Les valeurs de K_{IC} utilisées sont respectivement de 33 MPa$\cdot\sqrt{\text{m}}$ pour le sens $L-T$ et de 28 MPa$\cdot\sqrt{\text{m}}$ pour le sens $T-L$. Elles sont issues de l'exploitation des essais sur CT20, effectuée dans la troisième partie du chapitre 1.

Le calcul de L_r nécessite de connaitre l'expression de la charge limite pour une éprouvette CT. Après consultation de la littérature nous avons retenu deux formulations de P_L issues respectivement de [Kaiser and Carlsson, 1983] et de [Miller, 1988], dont les expressions sont :

$$P_L = \begin{cases} 1,455\sigma_y bB\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = 2\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{2}} - 2\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\right) & \text{[Kaiser and Carlsson, 1983]} \\ \\ 1,155\sigma_y WB\left[\sqrt{2,702 + 4,599\left(\frac{a}{W}\right)} - \left(1 + 1,702\frac{a}{W}\right)\right] & \text{[Miller, 1988]} \end{cases}$$

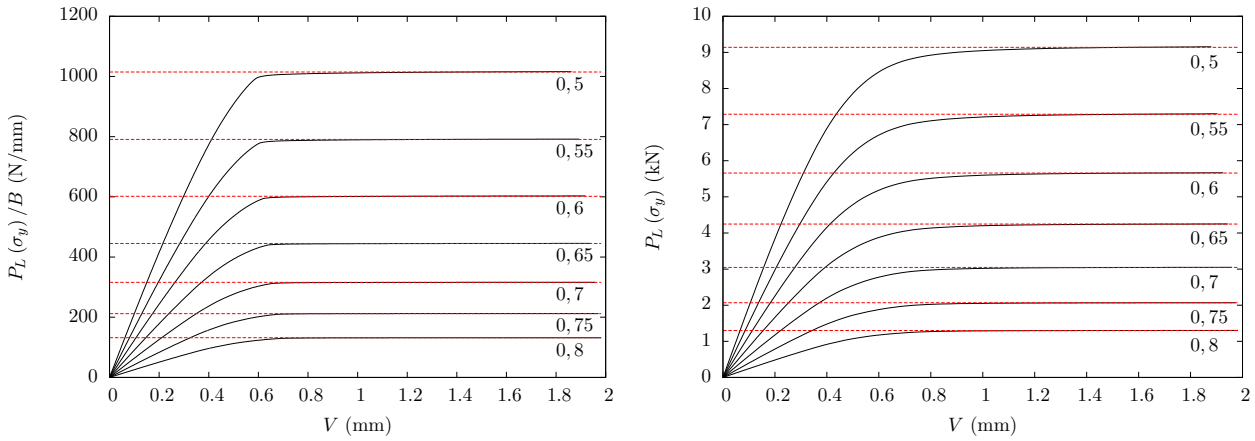
Remarquons que la définition de α correspond à celle donnée par (2.5) au début de la première partie de ce chapitre, lors de l'analyse de la norme ASTM E1820. Les relations ci-dessus fournissent uniquement P_L dans le cas de déformation plane. Pour le cas 3D nous avons donc déterminé P_L en utilisant la même méthodologie que celle déployée au paragraphe 2.3.1.1 pour obtenir la « keycurve ». Cependant dans le cadre de cette analyse le comportement plastique n'est plus représenté par une loi de Ramberg-Osgood, car le matériau est supposé parfaitement plastique.

Nous avons effectué les calculs pour deux valeurs de limite d'élasticité à savoir $\sigma_y = 391$ MPa et $\sigma_f = 430$ MPa. De plus toutes les simulations ont également été réalisées dans le cas 2D avec l'hypothèse de déformation plane, afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux issus de la littérature. La figure 2.52 présente pour les cas 2D en déformation plane et 3D, les courbes $P-V$ pour différents ratios a/W lorsque le matériau est supposé parfaitement plastique de limite d'élasticité σ_y. Pour un rapport a/W donné, la valeur de P_L retenue est celle du « plateau » de la courbe $P-V$ de la figure 2.52.

La figure 2.53 compare l'évolution de P_L en fonction de a/W issue de la littérature avec celle obtenue par simulation 2D en déformation plane et par modélisation 3D. Nous pouvons constater que la formulation de [Miller, 1988] donne les mêmes valeurs de P_L que la modélisation 2D en déformation plane, tandis que celle de [Kaiser and Carlsson, 1983] fournit des résultats identiques à la simulation 3D. Nous aboutissons à des conclusions simulaires pour une analyse effectuée avec une limite d'élasticité égale à σ_f.

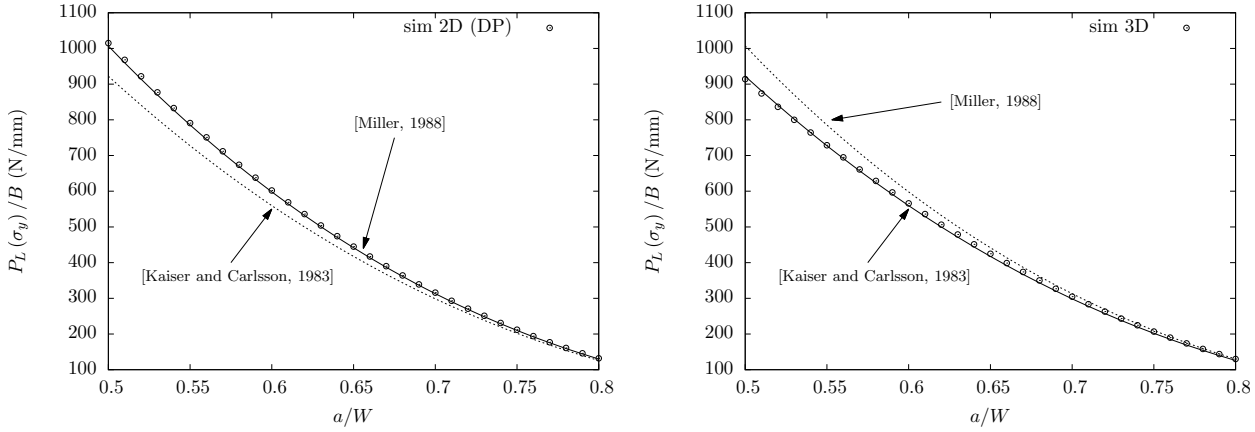
Pour les éprouvettes CT10 repérées au chapitre 1 par $L-T$ n° 3a et $T-L$ n° 3a, nous sommes donc en mesure de tracer l'évolution de K_r en fonction de L_r, comme le montre la figure 2.54, dans le cas d'une charge limite issue de la modélisation 2D en déformation plane ou de la simulation 3D. Nous obtenons une droite dont le point d'intersection avec la courbe d'équation $K_r = f(L_r)$ définit l'amorçage de la fissure. Nous précisons que les caractéristiques géométriques de ces éprouvettes, nécessaires pour l'analyse FAD, sont issues de la troisième partie du chapitre 1. Le tableau 2.18 résume les différents efforts correspondant au début de la propagation du défaut, calculés pour les diverses combinaisons entre l'option 1 ou 2 et la limite d'élasticité σ_y ou σ_f.

La figure 2.55 fournit l'effort minimal et maximal (en rouge dans le tableau 2.18), en terme de



(a) Calcul 2D en déformation plane (b) Calcul 3D

FIGURE 2.52 – Effort P_L pour les éprouvettes CT10 pour différents ratios a/W

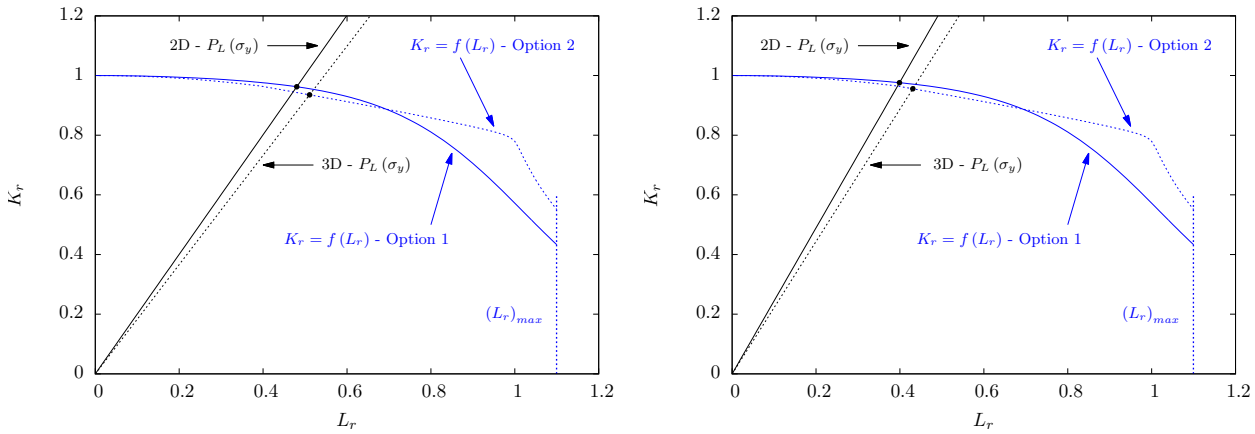


(a) Calcul avec σ_0 (b) Calcul avec σ_f

FIGURE 2.53 – Comparaison des valeurs de P_L obtenues par simulation avec celles issues de la littérature

	P_L calculé avec σ_y		P_L calculé avec σ_f	
	option 1	option 2	option 1	option 2
$L-T$ n° 3a (2D)	4334 N	4257 N	4367 N	4301 N
$L-T$ n° 3a (3D)	4294 N	4213 N	4337 N	4260 N
$T-L$ n° 3a (2D)	3869 N	3823 N	3886 N	3845 N
$T-L$ n° 3a (3D)	3846 N	3788 N	3869 N	3823 N

TABLE 2.18 – Synthèse de l'effort à l'amorçage de la fissure pour les éprouvettes CT



(a) Eprouvette $L-T$ n° 3a (b) Epouvette $T-L$ n° 3a

FIGURE 2.54 – Analyse FAD pour les éprouvettes $L-T$ n° 3a et $T-L$ n° 3a

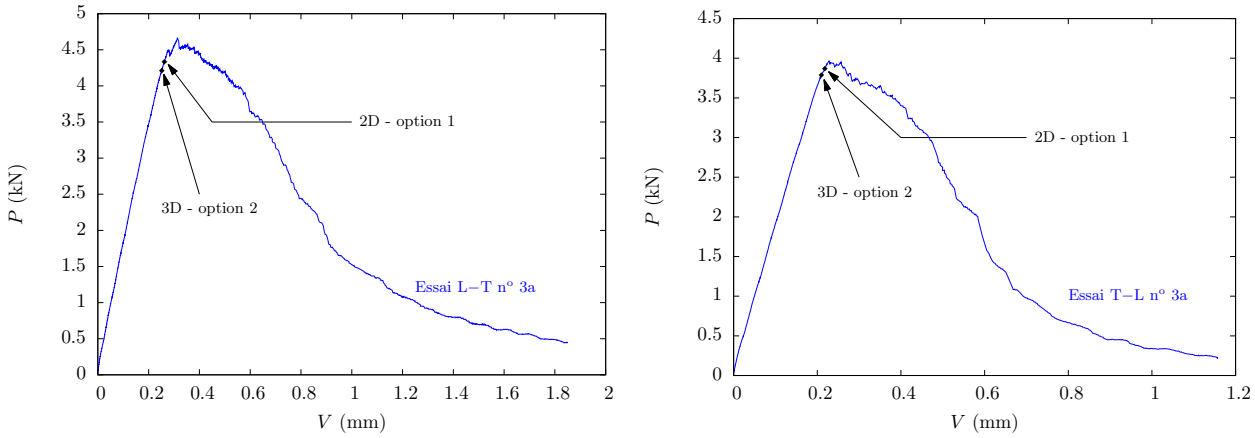
prévision d'amorçage de la fissure, pour les éprouvettes $L-T$ n° 3a et $T-L$ n° 3a, dans le cas où la charge limite P_L est calculée avec σ_y. Nous pouvons remarquer que ces résultats sont satisfaisants. Il faut toutefois garder à l'esprit que pour une prévision du début de propagation de la fissure, le résultat le plus conservatif est donné avec l'option 2 et P_L calculé en 3D. A l'inverse pour la recherche des défauts critiques initiaux à partir d'un chargement fixé, les tailles minimales seront déterminées par une analyse avec l'option 1 et une charge limite issue d'une simulation 2D en déformation plane.

Nous souhaitons déterminer à partir de quelle valeur de a/W les options 1 et 2 de la loi R6 fournissent un point d'amorçage de la fissure nettement différent. Dans cette optique nous avons tracé sur la figure 2.56 l'évolution de K_r en fonction de L_r pour une éprouvette CT10 dont les valeurs de a/W sont égales à 0,6 ; 0,7 ; 0,8 et 0,85. Pour cette analyse le calcul de P_L a été effectué avec une limite d'élasticité σ_y selon l'hypothèse de déformation plane ou en utilisant une simulation 3D. Il nous faut préciser que l'expression de P_L, issue du calcul 3D, est uniquement valide pour a/W inférieur ou égal à 0,8, par conséquent le rapport a/W de 0,85 n'a pas pu être étudié dans ce cas. Les résultats fournis par la figure 2.56 montrent que l'option 2 permet de réduire significativement le conservatisme lié à l'option 1 uniquement lorsque a/W est supérieur à 0,8 ce qui correspond à des fissures extrêmement profondes.

Nous souhaitons maintenant mettre en œuvre pour l'éprouvette CT10 l'option 3 de la loi R6 dont la définition est :

$$K_r = \sqrt{\frac{J_{el}}{J}} = g\left(L_r\right) \quad \text{avec} \quad L_r = \frac{P}{P_L}$$

Pour l'option 3 le coefficient K_r n'est donc pas défini, comme dans le cas de l'option 1 et 2, à partir d'une caractéristique du matériau telle que la ténacité K_{IC} par exemple. Cette option est uniquement valable



(a) prouvette $L-T$ n° 3a (b) Eprouvette $T-L$ n° 3a

FIGURE 2.55 – Prévision de l'amorçage pour les éprouvettes $L-T$ n° 3a et $T-L$ n° 3a

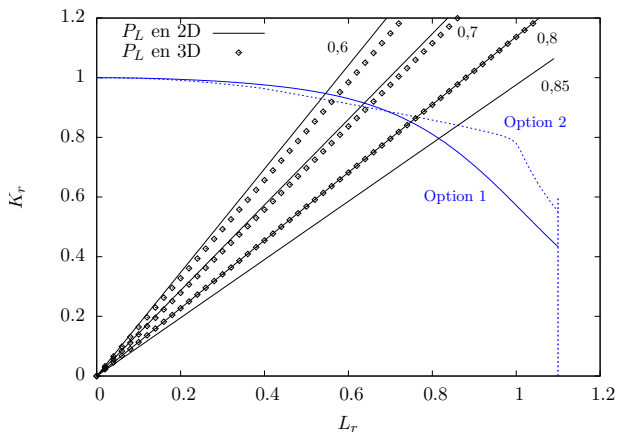
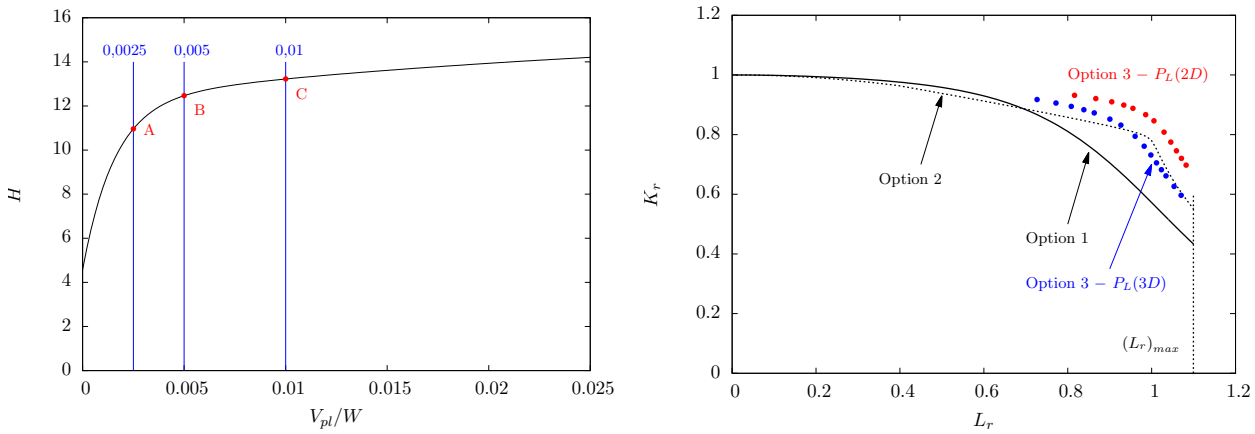


FIGURE 2.56 – Estimation du consevatisme de l'option 1 par rapport à l'option 2 de la loi R6



(a) Définition des points A, B et C

(b) Option 3 $R6$

FIGURE 2.57 – Définition de l'option 3 de la loi R6 pour l'éprouvette CT10

$\frac{a}{W}$	Point A ($V_{pl}/W = 0,0025$)			Point B ($V_{pl}/W = 0,005$)			Point C ($V_{pl}/W = 0,01$)		
	P	$\sqrt{J_{el}/J}$	P/P_L	P	$\sqrt{J_{el}/J}$	P/P_L	P	$\sqrt{J_{el}/J}$	P/P_L
0,5	8759 N	0,921	0,869	9957 N	0,868	0,988	10561 N	0,776	1,048
0,55	6857 N	0,920	0,872	7795 N	0,866	0,991	8269 N	0,774	1,051
0,6	5217 N	0,919	0,871	5930 N	0,865	0,990	6290 N	0,772	1,050
0,65	3837 N	0,919	0,867	4361 N	0,865	0,986	4626 N	0,772	1,046
0,7	2708 N	0,920	0,864	3078 N	0,865	0,982	3265 N	0,773	1,042
0,75	1813 N	0,921	0,862	2061 N	0,868	0,981	2186 N	0,776	1,040
0,8	1124 N	0,924	0,864	1278 N	0,871	0,982	1355 N	0,781	1,042

TABLE 2.19 – Synthèse des valeurs de P, L_r et K_r pour les points A, B et C

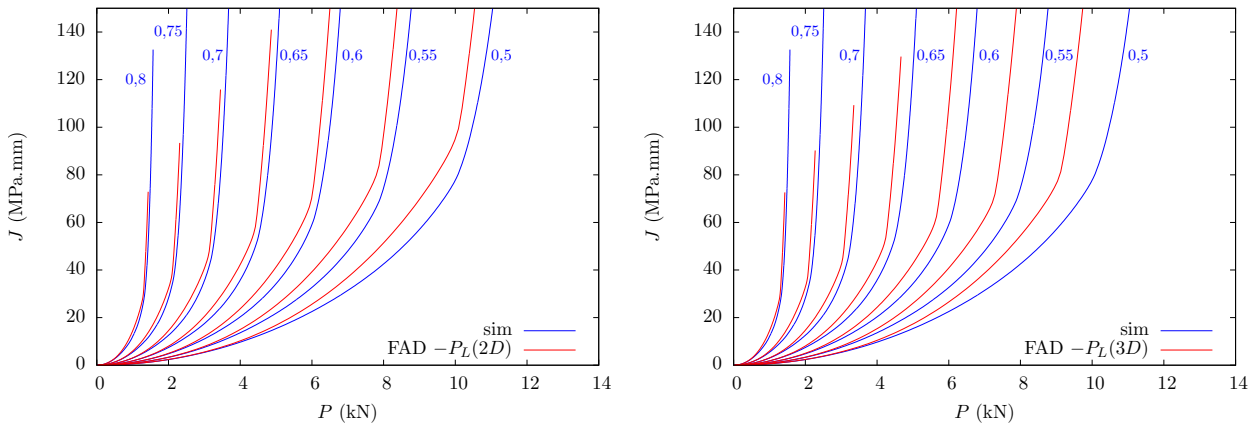
pour un matériau donné et une géométrie spécifique à savoir dans notre cas l'alliage d'aluminium 2219 T87 et l'éprouvette CT10. En effet le calcul de la partie plastique de J dépend de la géométrie de la structure et du comportement plastique du matériau. Afin d'évaluer la fonction g nous allons suivre la méthodologie développée dans [McCabe, 1989] qui se base sur la « keycurve » dont la formulation est :

$$P = G\left(\frac{a}{W}\right)\ H\left(\frac{V_{pl}}{W}\right)$$

Pour les expressions de G et H nous utiliserons celles déterminées au paragraphe 2.3.1 dans le cas d'une simulation 2D en déformation plane et d'une modélisation 3D. Conformément à [McCabe, 1989] la partie plastique de J sera évaluée à partir de l'aire sous la courbe $P - V_{pl}$, en utilisant le facteur plastique η_{pl} défini par le pôlynôme R_3 dont les coefficients sont fournis par le tableau 2.4. Le calcul de J_{pl} sera effectué selon l'hypothèse de déformation plane car celle-ci permet d'obtenir la valeur maximale de J au centre de l'éprouvette CT10 et donc de prévoir l'amorçage de la fissure de manière conservative.

De même la partie élastique de J, notée J_{el}, sera calculée à partir du facteur d'intensité de contrainte en utilisant la relation (2.69). Pour une éprouvette CT, l'expression de K dans le cas de déformation plane est donnée par (2.68) issue de la norme ASTM E1820. Enfin pour calculer P_L nous utiliserons les formulation issues de [Miller, 1988] ou de [Kaiser and Carlsson, 1983] selon que la »keycurve » est déterminée à partir d'une modélisation 2D en déformation plane ou d'une simuation 3D.

Selon [McCabe, 1989] la fonction g ne dépend pas de la longueur de fissure a mais uniquement



(a) P_L issus de [Miller, 1988]

(b) P_L évalué par simulation 3D

FIGURE 2.58 – Validité du calcul de J par l'approche FAD en utilisant l'option 3 de la loi R6

du rapport P/P_L. A titre de démonstration nous allons fixer trois valeurs de V_{pl}/W qui permettent de définir les trois points A, B et C représentés sur la figure 2.57. Puis nous allons calculer P, L_r et K_r obtenues aux points A, B et C pour différents rapports a/W dans le cas d'un calcul de P_L selon l'hypthèse de déformation plane. Le tableau 2.19 résume les résultats ainsi obtenus

Nous pouvons constater que pour chacun des points A, B et C nous obtenons quasiment la même valeur de K_r et L_r quel que soit le rapport a/W. Nous venons alors de définir la fonction g par les couples (L_r, K_r) caractéristiques des points A, B et C. En répétant cette opération pour différents rapports V_{pl}/W nous sommes parvenus à tracer sur la figure 2.57 quelques points de la courbe représentative de l'option 3 de la loi R6, associée à l'éprouvette CT10.

[Lei, 2004] propose d'utiliser l'option 3 de la loi R6 afin de calculer l'intégrale J à partir de sa partie élastique J_{el} en utilisant la relation suivante :

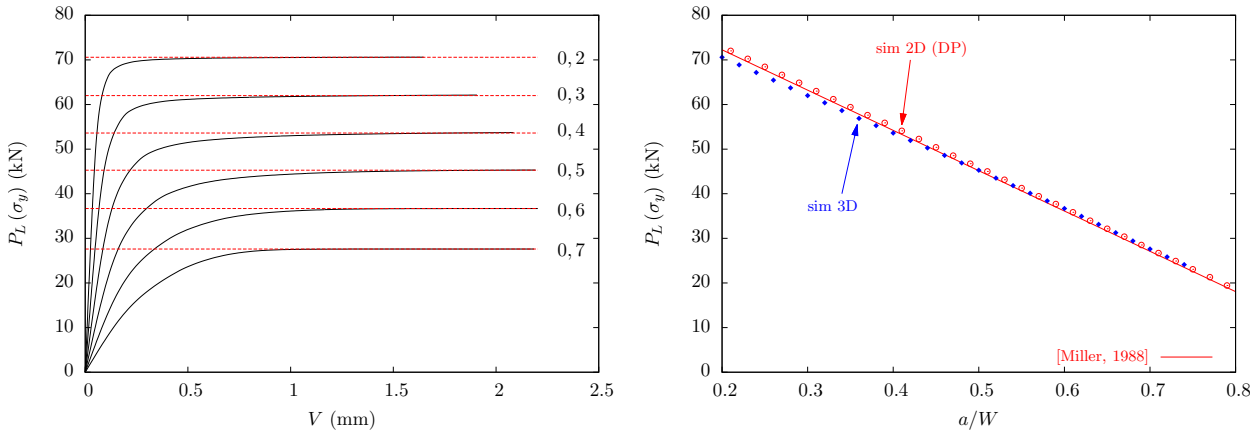
$$\frac{J}{J_{el}} = \frac{K_J}{K_{mat}} = \left(\frac{E\varepsilon_{ref}}{L_r\sigma_y} + \frac{L_r^3\sigma_y}{2E\varepsilon_{ref}}\right) \quad \text{avec} \quad J_{el} = \frac{1-\nu^2}{E}\,K^2 \tag{2.78}$$

Nous avons souhaité vérifier la validité de cette relation en comparant, pour des éprouvettes CT10, les valeurs de l'intégrale J ainsi obtenues par l'approche FAD avec celles issues des simulations numériques, dans le cas de déformation plane, présentées au paragraphe 2.3.2.2 (voir page 110). La figure 2.58 montre les résultats obtenus pour des éprouvettes CT10 dont le rapport a/W varie de 0,5 à 0,8 par pas de 0,05. Le calcul de J selon la relation (2.78) a été effectué en considérant un effort limite P_L obtenu par simulation 3D (voir page 2.4.1.2) ou issue de [Miller, 1988] pour le cas de déformation plane. Nous pouvons constater qu'il existe une influence non négligeable du choix de P_L sur la valeur finale de J. Dans tous les cas le calcul de J par simulation numérique et par l'approche FAD selon (2.78) ne fournissent pas les mêmes résultats dès que la partie plastique de J devient prépondérante. La méthode proposée par [Lei, 2004] afin d'évaluer J n'est valide que dans le cas de plasticité confinée et devient erronée dés que la plasticité s'étend c'est-à-dire lorsque J_{pl} n'est plus négligeable devant J_{el}.

Cas des éprouvettes SENT

L'analyse FAD effectuée précédemment sur les éprouvettes CT va maintenant être déployée sur les éprouvettes SENT. Le paramètre K_r sera évalué en utilisant la formulation du facteur d'intensité de contrainte K donnée par (2.72) et une valeur de la ténacité égale à 28 MPa$\cdot\sqrt{\text{m}}$ pour le sens $T-S$. Le calcul de L_r a été effectué en utilisant la charge limite issue de [Miller, 1988] dont l'expression s'écrit :

$$P_L = 1,155\sigma_y WB\left(1 - \frac{a}{W}\right)$$



(a) P_L pour différents a/W (b) Expression de P_L en fonction de a/W

FIGURE 2.59 – Effort limite pour différents ratios a/W et comparaison avec la littérature

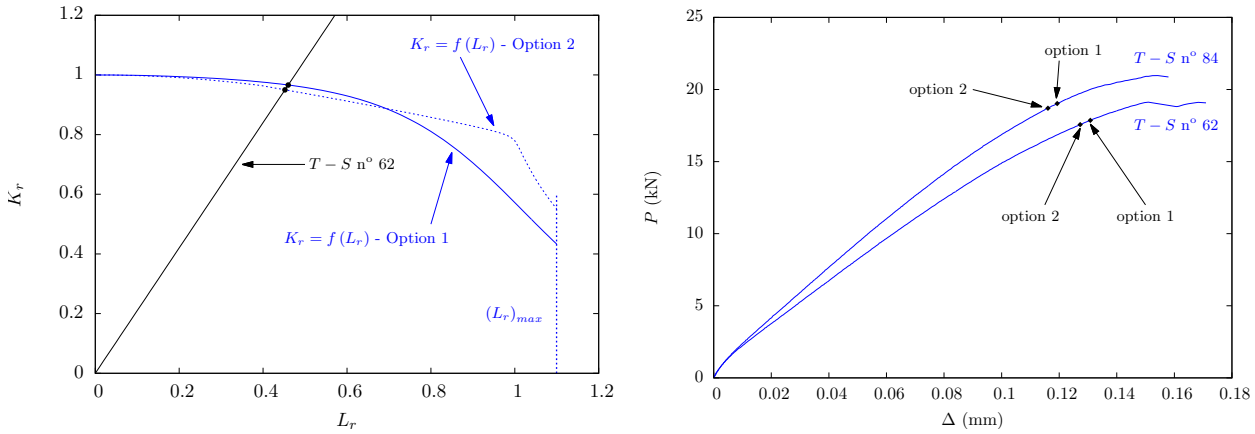
La relation ci-dessus fournit P_L uniquement dans le cas 2D en déformation plane. Pour le cas 3D nous avons déterminé P_L en utilisant la même méthodologie que celle employée au paragraphe 2.3.1.2 pour obtenir la « keycurve ». Cependant dans le cadre de cette analyse le comportement plastique du matériau n'est plus représenté par une loi de Ramberg-Osgood, puisque celui-ci est supposé parfaitement plastique. Les calculs ont été effectués pour trois rapports H/L, à savoir 4, 6 et 10, ainsi que pour deux valeurs de limite d'élasticité égales respectivement à $\sigma_y = 391$ MPa et $\sigma_f = 430$ MPa. De plus toutes les simulations ont également été réalisées dans le cas 2D avec l'hypothèse de déformation plane, afin de comparer les résultats obtenus avec ceux issus de [Miller, 1988].

Ces différentes simulations numériques montrent que l'effort limite est indépendant du rapport H/L, comme le suggère la formulation de [Miller, 1988]. La figure 2.59a présente pour la modélisation 3D les courbes $P - V$ pour différents rapports a/W lorsque le matériau est supposé parfaitement plastique de limite d'élasticité σ_y. Pour a/W donné la valeur de P_L retenue est celle correspondant au « plateau » des courbes $P - V$ de la figure 2.59a. La figure 2.59b compare l'évolution de P_L en fonction de a/W, issue de [Miller, 1988], avec celle obtenue par simulation 2D en déformation plane et par modélisation 3D. Nous pouvons constater que les valeurs de P_L calculées par simulation 2D en déformation plane et par modélisation 3D sont identiques à celles de la littérature.

Pour les éprouvettes SENT nommées $T - S$ n° 062 et $T - S$ n° 084 la figure 2.60a présente l'évolution de K_r en fonction de L_r uniquement pour le modèle 2D en déformation plane, puisque l'effort limite est identique quel que soit le type de modélisation. Les caractéristiques gométriques de ces éprouvettes, nécessaires pour conduire l'analyse FAD, sont données dans la troisième partie du chapitre 1. La figure 2.60a montre que nous obtenons une droite, dont le point d'intersection avec la courbe d'équation $K_r = f(L_r)$ définit l'amorçage de la fissure. La figure 2.60b fournit les efforts correspondants à l'amorçage de la fissure, pour les éprouvettes $T - S$ n° 062 et $T - S$ n° 084, dans le cas où la limite d'élasticité est σ_y. Nous pouvons remarquer que ces efforts fournissent une estimation satisfaisante du début de propagation de la fissure.

Cas des éprouvettes SCT

L'analyse FAD va maintenant être utilisée afin de prévoir l'amorçage de la fissure pour les éprouvettes SCT dont la géométrie est rappelée par la figure 2.61. Le facteur d'intensité K sera calculé en utilisant la formulation issue de [Newman and Raju, 1981], détaillée dans le chapitre 1 au paragraphe consacré à l'exploitation des essais sur éprouvette SCT. Afin d'évaluer le paramètre K_r nous utiliserons, comme pour les éprouvettes SENT, une valeur de la ténacité égale à 28 MPa$\cdot\sqrt{\text{m}}$ pour le sens $T-S$. Le calcul de L_r pour un défaut surfacique semi-elliptique est issus de [Sattari-Far, 1994]. Dans cet article l'auteur part de la solution analytique développée par [Willoughby and Davey, 1989] qui prévoit pour



(a) Analyse FAD (b) Effort à l'amorçage de la fissure

FIGURE 2.60 – Prévision de l'amorçage pour les éprouvettes $T - S$ n° 062 et $T - S$ n° 084

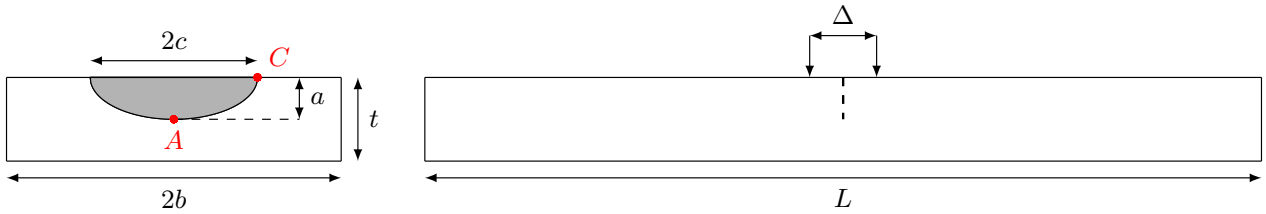


FIGURE 2.61 – Géométrie d'une éprouvette SCT

une éprouvette SCT, dont les extémitées sont encastrées, l'instabilité plastique lorsque :

$$\frac{2}{3}\frac{\sigma_b}{\sigma_f} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_f}\right)^2 = (1-\zeta)^2 \tag{2.79}$$

$$\text{Avec} \quad \zeta = \begin{cases} \dfrac{ac}{t\,(c+t)} & \text{pour} \quad b > c+t \\[2ex] \dfrac{ac}{tb} & \text{pour} \quad b < c+t \end{cases} \tag{2.80}$$

Dans la relation ci-dessus σ_b et σ_m désignent respectivement les contraintes de flexion et de membrane appliquées à l'éprouvette SCT, tandis que σ_f représente la contrainte d'écoulement, définie comme la valeur moyenne de la limite d'élasticité σ_y et de la contrainte à rupture σ_u. En partant de la condition d'instabilité plastique exprimée par (2.79), et en s'appuyant sur les résultats de simulations numériques, [Sattari-Far, 1994] propose l'expression suivante de L_r :

$$L_r = \frac{\dfrac{\sigma_b}{3} + \sqrt{\dfrac{\sigma_b^2}{9} + (1-\zeta)^2\,\sigma_m^2}}{(1-\zeta)^2\;\sigma_y} \tag{2.81}$$

Puis [Sattari-Far, 1994] va substituer à la formulation analytique (2.79) une nouvelle condition d'instabilité plastique, recalée sur les résultats de simulations numériques. Nous fournissons ci-dessous l'expression de cette condition d'instabilité, ainsi que celle du coefficient L_r, dont la détermination se déduit du passage de (2.79) à (2.81).

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}\, g(\zeta)\ \dfrac{\sigma_b}{\sigma_f} + \left(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_f}\right)^2 = (1-\zeta)^2 \quad \text{avec} \quad g(\zeta) = 1 - 20\left(\dfrac{a}{2c}\right)^{0,75} \zeta^3 \\ \\ L_r \ = \ \dfrac{g(\zeta)\ \dfrac{\sigma_b}{3} + \sqrt{g(\zeta)^2\ \dfrac{\sigma_b^2}{9} + (1-\zeta)^2\, \sigma_m^2}}{(1-\zeta)^2\ \sigma_y} \end{cases} \tag{2.82}$$

Dans le cas de nos essais sur éprouvettes SCT la contrainte de flexion est nulle par conséquent les expression de L_r fournies par (2.81) et (2.82) sont équivalentes. Pour trouver une formulation différente de L_r, lorsque σ_b est nulle, il faut se référer à [Sattari-Far and Dillström, 2004] qui propose les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}\ (1-\zeta)^{1,58}\ \dfrac{\sigma_b}{\sigma_f} + (1-\zeta)^{1,14}\ \left(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_f}\right)^2 = (1-\zeta)^2 \\ \\ L_r \ = \ \dfrac{(1-\zeta)^{1,58}\ \dfrac{\sigma_b}{3} + \sqrt{(1-\zeta)^{3,16}\ \dfrac{\sigma_b^2}{9} + (1-\zeta)^{3,14}\ \sigma_m^2}}{(1-\zeta)^2\ \sigma_y} \end{cases} \tag{2.83}$$

Avant d'appliquer ces formulations à une éprouvette SCT nous souhaitons dire un mot sur la détermination de σ_m et σ_b dans le cas d'une structure quelconque, soumise à un chargement complexe, et comportant un défaut surfacique semi-elliptique. De manière conservative l'analyse FAD sera effectuée à partir de la contrainte principale σ_1 supposée solliciter l'ouverture de la fissure selon le mode I, jugé le plus critique. Une modélisation de la structure, sans défaut, permet d'obtenir la contrainte σ_1, dans la section où est localisé le défaut, pour différentes positions selon l'épaisseur t de la structure. Puis la décomposition de σ_1 en une contrainte de membrane σ_{1m} et de flexion σ_{1b} est réalisée à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{1m} = \dfrac{1}{t}\ \displaystyle\int_0^t \sigma_1 dx \\ \\ \sigma_{1b} = \dfrac{6}{t^2}\ \displaystyle\int_0^t \sigma_1\ \left(\dfrac{t}{2} - x\right) dx \end{cases}$$

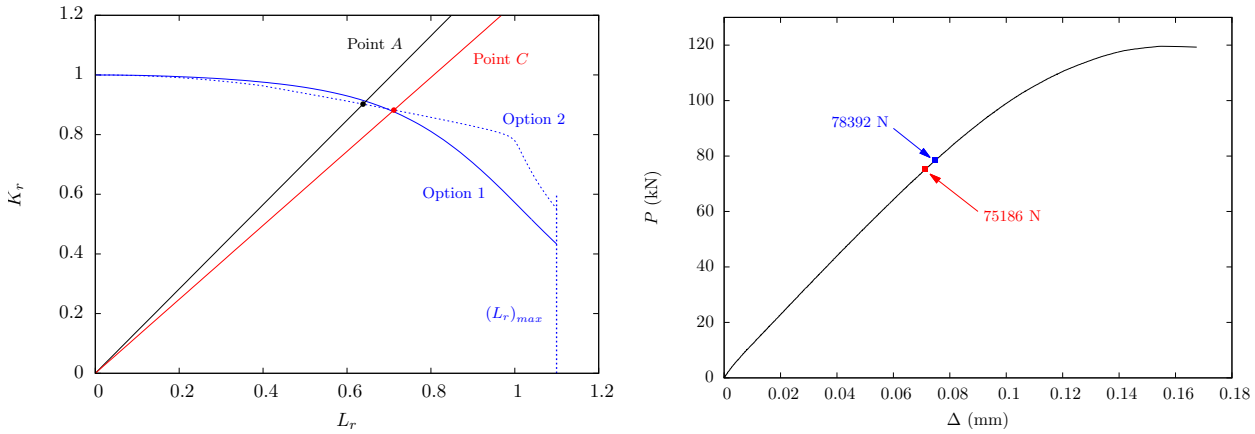
Une méthode générale consiste à approcher la répartition de σ_1 dans l'épaisseur t par un polynôme, de degré 4 par exemple, dont l'expression serait :

$$\sigma_1(x) = \sigma_a + \sigma_b \frac{x}{t} + \sigma_c \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \sigma_d \left(\frac{x}{t}\right)^3 + \sigma_e \left(\frac{x}{t}\right)^4$$

A partir de cette approximation en utilisant les formulations de σ_{1m} et σ_{1b} fournies ci-dessus nous obtenons :

$$\begin{cases} \sigma_{1m} = \sigma_a + \dfrac{\sigma_b}{2} + \dfrac{\sigma_c}{3} + \dfrac{\sigma_d}{4} + \dfrac{\sigma_e}{5} \\ \\ \sigma_{1b} = -\dfrac{\sigma_b}{2} - \dfrac{\sigma_c}{2} - \dfrac{9\sigma_d}{20} - \dfrac{2\sigma_e}{5} \end{cases}$$

Ces expressions de σ_{1m} et σ_{1b} sont alors directement utilisables pour calculer le facteur d'intensité de contrainte K à partir de [Newman and Raju, 1981] et le coefficient L_r issus de [Sattari-Far, 1994] ou de [Sattari-Far and Dillström, 2004].



(a) Analyse FAD

(b) Effort à l'amorçage de la fissure

FIGURE 2.62 – Prévision de l'amorçage pour l'éprouvette SCT n° 1

Revenons maintenant à l'analyse des essais sur éprouvettes SCT. La synthèse de ces essais effectuée au chapitre 1 montre que les dimensions géométriques des trois éprouvettes testées sont similaires. Ainsi nous choisissons d'étudier l'amorçage de la fissure par la méthode FAD pour l'éprouvette n° 1 dont les valeurs de b,c et t sont respectivement de 20 mm, 9,3 mm et 9,97 mm. Nous constatons donc que dans notre cas b est presque égal à $c+t$ par conséquent la question du choix de l'expression de ζ se pose compte tenu de la relation (2.80). En toute rigueur nous avons $b > c+t$ et nous devons donc employer la formulation de ζ correspondante. Mais nous avons néanmoins vérifié que l'utilisation de l'expression de ζ, associée à la condition $b < c+t$, fournissait des résultats similaires. Pour des éprouvettes SCT sollicitées en traction, nous rappelons que la contrainte de flexion est nulle et que celle de membrane est égale à $P/2bt$, où P est l'effort de traction appliqué à l'éprouvette. Ainsi les expressions de L_r dans notre cas sont réduites à :

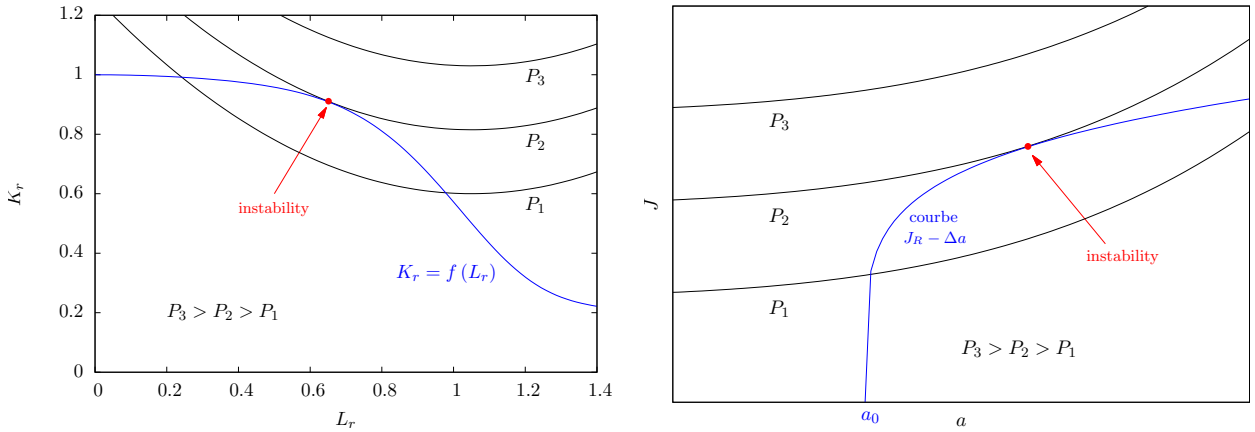
$$\begin{cases} L_r = \dfrac{\sigma_m}{(1-\zeta)\ \sigma_y} = \dfrac{P}{2bt\,(1-\zeta)\ \sigma_y} & \text{selon [Sattari-Far, 1994]} \\ \\ L_r = \dfrac{\sqrt{(1-\zeta)^{3,14}}}{(1-\zeta)^2}\ \dfrac{\sigma_m}{\sigma_y} = \dfrac{\sqrt{(1-\zeta)^{3,14}}}{(1-\zeta)^2}\ \dfrac{P}{2bt\sigma_y} & \text{selon [Sattari-Far and Dillström, 2004]} \end{cases} \tag{2.84}$$

La figure 2.62a fournit pour les points A et C l'évolution de K_r en fonction de L_r, calculé à partir de [Sattari-Far, 1994]. Nous obtenons des droites dont le point d'intersection avec la courbe $K_r = f(L_r)$ définit le point d'amorçage de la fissure. Pour obtenir l'effort P correspondant il suffit d'utiliser la formulation de L_r issue de (2.84). Cette figure montre que le choix de l'option 1 ou 2 donne presque le même point d'intersection, puisque nous nous situons dans la zone où $K_r = f(L_r)$ est quasiment identique pour ces deux options.

Le tableau 2.20 résume les efforts correspondant à l'amorçage de la fissure aux points A et C selon l'expression de L_r retenue, et suivant l'option de la loi R6 activée. Nous pouvons constater que dans tous les cas le début de la propagation de la fissure est prévu au point A, où le facteur d'intensité de contrainte K est maximal. De plus l'utilisation de la formulation de L_r issue de [Sattari-Far and Dillström, 2004] est moins conservative que celle proposée par [Sattari-Far, 1994]. Enfin la figure 2.62b montre sur la courbe d'essai de l'éprouvette SCT n° 1 l'amorçage de la fissure associé à l'effort minimal et maximal obtenu au point A, selon l'expression de L_r retenue et l'option de la loi R6 utilisée. Ces résultats permettent de conclure que la prévision du début de propagation de la fissure à partir d'une analyse FAD est conservative bien que nous obtenions une valeur relativement élevée de L_r. En fait il faut se souvenir que celle-ci ne possède pas une signification à elle seule mais est liée à la détermination de la contrainte limite.

	L_r selon (2.82)		L_r selon (2.83)	
	option 1	option 2	option 1	option 2
Point A	75975 N	75186 N	78392 N	76963 N
Point C	83483 N	83866 N	87226 N	86133 N

TABLE 2.20 – Synthèse de l'effort à l'amorçage de la fissure pour les éprouvettes SCT



(a) Analyse FAD (b) Analyse CDF

FIGURE 2.63 – Principe de l'étude de l'instabilité d'une fissure à partir d'une analyse FAD ou CDF

2.4.2 Etude de l'instabilité d'une fissure

2.4.2.1 Principe et théorie

Ce paragraphe consacré à l'instabilité de la propagation d'une fissure va clore ce chapitre dédié à l'approche globale. Cette étude de l'instabilité est motivée par les résultats obtenus au chapitre 1 pour les éprouvettes SENT. En effet, ces derniers montrent que la propagation de la fissure est instable pour ces éprouvettes, alors qu'elle est stable pour les éprouvettes CT. Nous avons donc cherché un critère simple afin de prévoir cette instabilité.

La présentation d'un tel critère est esquissée dans [Ernst et al., 1981] puis développée plus en détail dans [Ernst, 1983]. Il est basé sur l'utilisation du module de déchirure ductile noté habituellement T. La propagation d'une fissure devient instable lorsque : $T_{app} \geq T_{mat}$. Dans cette inégalité T_{app} désigne le module de déchirure ductile appliqué à la structure, comportant une fissure, tandis que T_{mat} représente celui du matériau. Ce dernier s'exprime simplement à partir du coefficient directeur dJ_R/da de la courbe $J_R - \Delta a$, assimilée à une droite.

[Chell and Milne, 1983] effectuent une revue des différentes méthodes d'investigation relatives à l'instabilité d'une fissure. Nous avons retenu, parmi les différentes techniques abordées, l'analyse FAD ou CDF [g] dont la figure 2.63 illustre le principe, en raisonnant à partir de l'effort P appliqué à la structure. Les principaux avantages de la méthode FAD ou CDF sont une simplicité de mise en œuvre et un champ d'application large qui englobe les cas de plasticité confinée et étendue. Cette approche atteint cependant sa limite lorsque le ligament est totalement pastifié, nous sommes alors dans le cas de l'instabilité plastique.

Nous pouvons constater que le début de l'instabilité de la fissure correspond au point de tangence des différentes courbes de la figure 2.63, cette condition géométrique traduit en fait la relation analytique $T_{app} = T_{mat}$. Ceci apparaît clairement pour l'analyse CDF, illustrée par la figure 2.63b. En effet, dans ce cas, sont explicitement tracées les courbes représentant l'évolution de J en fonction de a, pour la

(g). Cet acronyme provient de l'expression anglaise « Crack Driving Force »

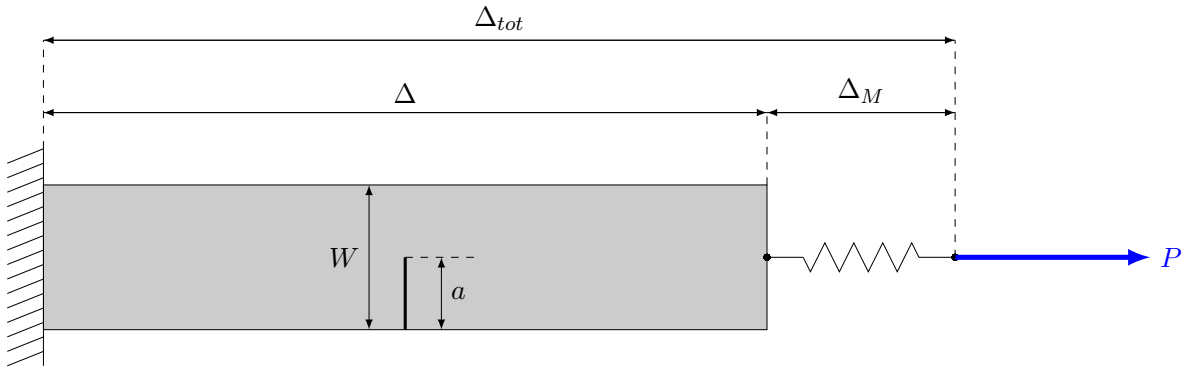


FIGURE 2.64 – Eprouvette fissurée soumise à un essai de traction

structure fissurée, et la courbe $J_R - \Delta a$ pour le matériau. Elle est un peu plus subtile à deviner dans le cas de l'analyse FAD schématisée par la figure 2.63a. Il faut alors se souvenir de la relation (2.77) qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} K_r = \dfrac{K_J}{K_{mat}} = \left(\dfrac{E\varepsilon_{ref}}{L_r\sigma_0} + \dfrac{L_r^3\sigma_0}{2E\varepsilon_{ref}} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \\ \text{Avec} \quad K_J = \sqrt{\dfrac{E}{1-\nu^2}\, J_{app}} \quad \text{et} \quad K_{mat} = \sqrt{\dfrac{E}{1-\nu^2}\, J_R\left(a_0 + \Delta a\right)} \end{cases}$$

Le calcul de L_r sera réalisé conformément au paragraphe 2.4.1.1 consacré à la théorie de l'analyse FAD (voir page 124). Les deux méthodes d'analyse de l'instabilité d'une fissure en plasticité étendue, présentée par la figure 2.63, nécessitent de calculer l'intégrale J pour la structure étudiée, en fonction de la longueur de fissure a et de la charge appliquée P. Nous avons déterminé dans cette partie consacrée à l'approche globale deux méthodes permettant d'obtenir J. La première consite à calculer J_{pl} à partir du facteur η_{pl} et l'aire A_{pl} sous la courbe $P - V_{pl}$ en utilisant la relation (2.1). Les deux limitations de cette méthode sont d'une part la détermination de η_{pl} qui a été traitée au paragraphe 2.3.1, consacré à la « keycurve » (voir page 84), et d'autre part l'accés à la courbe $P - V_{pl}$ qui n'est pas toujours possible. La seconde approche est constituée par un calcul direct de J par simulation numérique selon la méthodologie décrite dans les paragraphes 2.3.2.1 et 2.3.2.2 (voir pages 105 et 110).

2.4.2.2 Application aux éprouvettes SENT

L'analyse CDF va être utilisée afin de prédire l'instabilité des éprouvettes SENT testées au chapitre 1. Le dispositif d'essai peut être schématisé par la figure 2.64 où Δ désigne le déplacement d'ouverture de la fissure, tandis que Δ_M représente celui de la traverse de la machine de traction. Le chargement est donc piloté dans ce cas par Δ_{tot}. Par conséquent, il n'est pas possible de travailler à effort P constant comme l'illustre la figure 2.63b. En effet, lorsque la fissure se propage dans le cas d'un essai de traction sur éprouvette fissurée, le déplacement Δ_{tot} est supposé rester constant selon [Paris et al., 1979]. Cette approche sera également suivie par [Rousselier, 1983] dans son étude sur l'instabilité d'éprouvettes CT.

Le but est donc de déterminer l'évolution de J en fonction de la longueur de fissure a, pour diverses valeurs de Δ_{tot}, puis de tracer les différentes courbes de la figure 2.63b, où le rôle de P sera joué par Δ_{tot}. Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer la raideur K_M du dispositif d'essai incluant la raideur de la machine, mais également celle du moyen d'amarrage de l'éprouvette. La figure 2.65 présente les résultats d'essai pour l'éprouvette SENT n° 2 sous la forme de la charge appliquée P en

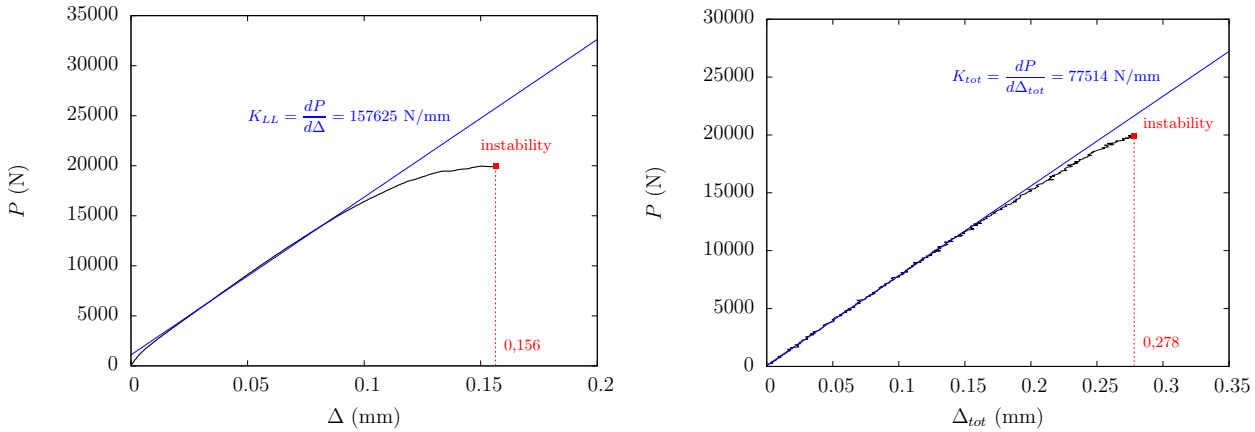
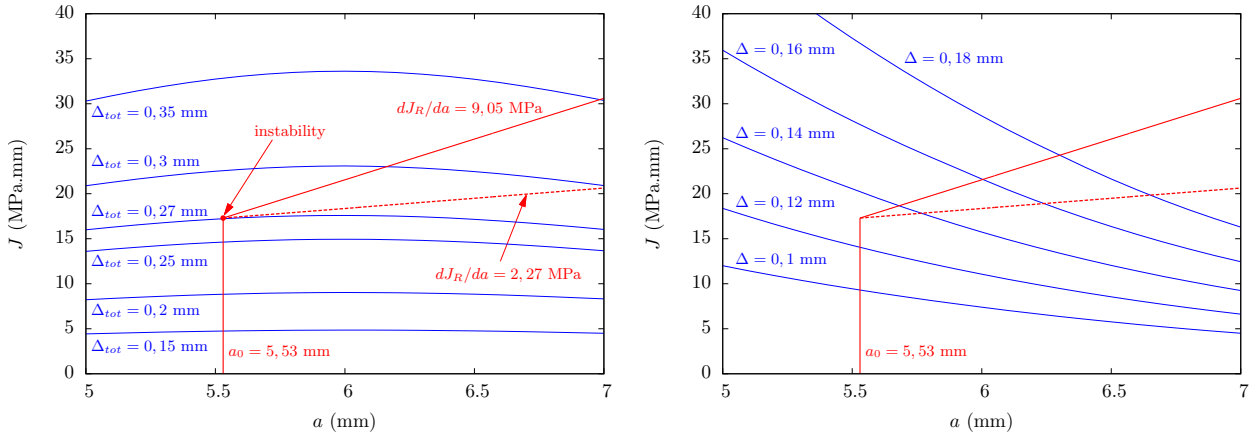


FIGURE 2.65 – Détermination de K_{LL} et de K_{tot} à partir de l'éprouvette SENT n° 1



(a) raideur $K_M = 152515$ N/mm (b) raideur K_M supposée infinie

FIGURE 2.66 – Prévision de l'instabilité de la fissure pour l'éprrouvette SCT n° 1

fonction des déplacements Δ et Δ_{tot} décrits par la figure 2.64. Nous désignons par K_{LL} la raideur de l'éprouvette fissurée et par K_{tot} celle de la totalité du système constitué par la machine d'essai, l'éprouvette et le moyen d'amarrage. L'évaluation de la pente linéaire des courbes $P - \Delta$ et $P - \Delta_{tot}$ permet de calculer K_{LL} et K_{tot}, respectivement égales à 157625 N/mm et 77514 N/mm. La valeur de K_M est alors de 152515 N/mm, elle est issue de la relation suivante :

$$C_{tot} = C_{LL} + C_M \quad \text{soit} \quad \frac{1}{K_{tot}} = \frac{1}{K_{LL}} + \frac{1}{K_M} \quad \text{d'où} \quad K_M = \frac{K_{tot}\, K_{LL}}{K_{LL} - K_{tot}}$$

Pour obtenir un diagramme similaire à celui de la figure 2.63 en supposant Δ_{tot} constant, il est nécessaire de déterminer, pour une valeur de a donnée, celle de J correspondante permettant de satisfaire la condition : $\Delta_{tot} = \Delta + \Delta_M = cste$. Le schéma de résolution adopté est le suivant :

❶ Attribuons une valeur constante au déplacement Δ_{tot}.

❷ Pour notre géométrie d'éprouvette SENT faisons varier a entre 5 mm et 7 mm par pas de 0,1.

❸ Cherchons l'effort P permettant de vérifer l'équation : $\Delta + \Delta_M = \Delta_{tot}$.

❹ Calculons J correspondant à la valeur P déterminée à l'étape précédente.

❺ Traçons pour la valeur initialement fixée de Δ_{tot}, l'évolution de J en fonction de a à partir des différents couples (a, J) ainsi obtenus.

L'étape n° 3 nécessite d'exprimer Δ et Δ_M en fonction de a et P. Le déplacement Δ_M est purement élastique, en effet il ne serait pas raisonnable de supposer que le montage d'essai puisse subir une

déformation plastique. Les parties élastique et plastique de Δ seront déterminées à partir des résultats du paragraphe consacré à l'étude de la « keycurve » pour les éprouvettes SENT (voir page 96). Ainsi l'expression de Δ_{el} se déduit de la relation (2.60) :

$$\mu = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{a}{W} + \gamma_2 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + \gamma_3 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + \gamma_4 \left(\frac{a}{W}\right)^4 + \gamma_5 \left(\frac{a}{W}\right)^5 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{1}{1+\sqrt{E'BC_{LL}}}$$

Les coefficients γ_i sont donnés par le tableau 2.6. Nous choisirons ceux issus de la modélisation 3D avec un rapport H/W égal à 10 conformément à la géométrie de nos éprouvettes SENT. Nous devons donc trouver P tel que :

$$\Delta_{pl} + \frac{P}{K_M} + \frac{P}{E'B}\left(\frac{1}{\mu\left(a/W\right)} - 1\right)^2 = \Delta_{tot} = cste \tag{2.85}$$

Afin de résoudre l'équation ci-dessus nous utiliserons la « keycurve » qui permet de relier Δ_{pl}, P et a selon l'expression : $P = G\left(a/W\right)\ H\left(\Delta_{pl}/W\right)$. La relation (2.58) définit H sous la forme d'une fonction exponentielle saturante dont les coefficients sont fournis par le tableau 2.7. La fonction G est un polynôme de dégré 5 en a/W dont la valeur des coefficients ζ_i est issue du tableau 2.8. Les coefficients des fonctions H et G seront ceux obtenus par simulation 3D avec H/W égal à 10.

L'étape n° 4 part de l'effort P, solution de l'équation (2.85), afin de déterminer la valeur de l'intégrale J associée à ce chargement, pour une longueur de fissure donnée. La relation (2.69) permet de calculer dans le cas de déformation plane la partie élastique de J à partir du facteur d'intensité de contrainte K dont la formulation, issue de [Cravero and Ruggieri, 2007], est rappelée par (2.72). La partie plastique J_{pl} se déduit naturellement de l'aire sous la courbe $P - \Delta_{pl}$ en utilisant l'expression du facteur η_{pl} donnée par [Shen et al., 2009]. Enfin pour compléter cette analyse nous avons considéré, comme [Rousselier, 1983], une longueur de fissure effective, notée a_{eff}, égale à la longueur a augmentée de la taille de la zone plastique r_y, dont l'expression est dans le cas de déformation plane :

$$a_{eff} = a + r_y \quad \text{avec} \quad r_y = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{K}{\sigma_y}\right)^2 \frac{n-1}{n+1} \tag{2.86}$$

Dans le cas de notre matériau n correspond à l'exposant de loi la de Ramberg-Osgood, donnée par (2.54), et vaut 11,2. Les parties élastiques de Δ et de J seront alors évaluées en utilisant a_{eff}, tandis que Δ_{pl} et J_{pl} seront toujours calculées en considérant une longueur de fissure a.

La figure 2.66 présente les résultats obtenus en terme de courbes $J - a$ pour différentes valeurs de Δ_{tot} ou de Δ. Lorsque nous supposons que Δ est constant nous considérons en fait que la raideur K_M est infinie, cette hypothèse conduit alors à $\Delta_{tot} = \Delta$. Ce cas ne peut pas conduire à une instabilité de la fissure. En effet d'après la figure 2.66b les courbes $J - a$ sont toujours décroissantes monotones alors que la courbe $J_R - \Delta a$ est croissante monotone d'où l'impossibilité de déterminer un point de tangence entre ces différentes courbes.

Dans un premier temps, nous avons utilisé la courbe $J_R - \Delta a$ obtenue à partir des éprouvettes CT10 de type $T - S$ soit une valeur de dJ_R/da égal à 9,05 MPa selon le tableau 2.17. La figure 2.66a montre qu'il n'est pas possible dans ces conditions de trouver un point de tangence entre cette courbe R et une courbe $J - a$ correspondant à une valeur constante de Δ_{tot}. La pente de la courbe $J_R - \Delta a$ étant trop importante, nous nous sommes souvenus que dans la troisième partie du chapitre 1, consacrée à l'analyse des éprouvettes fissurée, nous avions obtenu pour des éprouvettes $CT10$ de type $T - S$ comportant des rainures latérales une valeur de dJ_R/da égale à 2,27 MPa. Or, la conclusion de cette troisième partie du chapitre 1 montrait justement que les sens $T - L$ et $T - S$ semblaient jouer un rôle identique vis à vis de la déchirure ductile. Nous avons donc décidé d'utiliser cette valeur de 2,27 MPa pour dJ_R/da dans notre analyse CDF. La figure 2.66a montre qu'il existe alors un point d'instabilité pour une longueur de fissure toujours égale à a_0 et un déplacement Δ_{tot} de 0,27 mm. Cette prévision de l'instabilité par l'approche CDF correspond plutôt bien aux données expérimentales puisque pour

l'éprouvette SENT n° 2 l'instabilité se produit pour une valeur expérimentale de Δ_{tot} égale à 0,28 mm. Par contre, nous n'avons pas accés à la valeur de a au moment de l'instabilité expérimentale et nous ne pouvons donc pas la comparer à la prévision de l'analyse CDF qui montre que la fissure ne s'est pas propagée. Toutefois au regard de la courbe d'essai $P - \Delta$ fournie par la figure 2.65, s'il existe une propagation de la fissure avant qu'elle devienne instable, celle-ci doit être faible et peut donc expliquer que le calcul ne prévoit pas de propagation.

2.4.3 Résumé

Dans cette dernière partie nous avons étudié l'intégrité d'une structure fissurée a l'aide d'une analyse FAD. Nous avons pu vérifier que cette approche est relativement simple à mettre en œuvre, et peut donc être employée avec succés dans un contexte industriel. Son utilisation nécessite une caractérisation réduite du matériau, en effet il suffit de disposer, dans le cadre de l'option 1, de la ténacité ainsi que de la limite d'élasticité et de la contrainte à rupture. Pour l'option 2, il sera nécessaire de se munir en plus de la loi d'écrouissage qui s'obtient sans grande difficulté par un essai de traction standard. Afin d'évaluer le paramètre K_r ces deux options nécessitent de connaitre le facteur d'intensité de contrainte K dont le calcul analytique peut être réalisé à partir des nombreuses configurations tabulées dans des formulaires tel que celui élaboré par [Murakami, 1987].

L'evaluation de L_r est plus délicate que celle de K_r car elle impose de définir la charge limite P_L. Pour les éprouvettes CT et SENT nous avons montré qu'elle peut être calculée directement par simulation numérique. Pour les défauts semi-elliptiques ce type de calcul est délicat et mieux vaut se référer à la formulation de L_r fournie par [Sattari-Far, 1994]. Il peut néanmoins advenir qu'un défaut soit situé dans une configuration géométrique ne permettant pas d'appliquer cette formulation. Il n'existe alors aucune autre alternative que de déployer, pour ce cas spécifique, la méthodologie issue de [Sattari-Far, 1994] afin de déterminer L_r. Nous voyons donc que l'analyse FAD devient extrèmement difficile à appliquer, lorsque l'évaluation de L_r ne peut pas se faire à partir de relations analytiques issues de la littérature.

Il en va de même pour la détermination de K_r lorsque la calcul du facteur d'intensité de contrainte, pour le défaut étudié, ne peut pas être rattaché à une des solutions analytiques fournie par la littérature. Toutefois une évaluation numérique de K sera relativement aisée à réaliser, bien qu'elle demande quelques précautions, et un logiciel permettant ce type de calcul en 3D. Il nous faut enfin mentionner l'option 3 de la loi R6 qui est réservée à un utilisateur averti, car elle nécessite le calcul de l'intégrale J beaucoup plus délicat à réaliser que celui de K, dans le cas d'une géométrie de fissure complexe. Par contre cette option devient relativement simple à utiliser pour des fissures rectilignes, ainsi nous sommes parvenus à la mettre en œuvre avec succés dans le cas des éprouvettes CT.

L'analyse CDF est probablement la seule approche envisageable pour l'étude de l'instabilité d'une fissure. En effet comme a pu le montrer [Ernst, 1983], dans le cas d'un essai de traction sur éprouvette fissurée, cette instabilité est liée à la raideur de la machine de traction et du système d'amarrage. Dans ce contexte l'utilisation de la modélisation numérique afin d'étudier l'instabilité d'une fissure est lourde à mettre en œuvre. En effet elle nécessite d'une part la détermination d'un critère de rupture local afin de simuler la propagation de la fissure. D'autre part il sera nécessaire de parvenir à gérer les problèmes de convergence liés simultanément à la présence de la raideur de la machine, et à l'intégration des lois de comportement aux points de Gauss des éléments situés en pointe de fissure.

En comparaison nous serions presque tentés de dire que l'approche CDF est d'une simplicité enfantine. En effet dans le cas d'une éprouvette dont la fissure est rectiligne il suffit de pouvoir évaluer l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure a, pour un chargement P ou un déplacement donné V. L'utilisation de la « keycurve » facilite l'évaluation de J à partir de l'aire sous la courbe $P - V_{pl}$ et du facteur plastique η_{pl}. Par contre l'analyse CDF pose problème pour une fissure non rectiligne car la géométrie de la fissure n'est plus décrite uniquement par la variable a.

Chapitre 3

APPROCHE LOCALE

Sommaire

3.1 INTRODUCTION . . . 144
3.2 CRITERES DE PLASTICITE . . . 145
3.2.1 Eléments de théorie . . . 145
3.2.1.1 Définition de la surface de charge et du critère de plasticité . . . 145
3.2.1.2 Schéma d'intégration explicite et implicite . . . 147
3.2.2 Critère de plasticité du 2219 T87 . . . 149
3.2.2.1 Quelques critères orthotropes . . . 149
3.2.2.2 Optimisation des paramètres des critères . . . 152
3.2.2.3 Résultats et validation . . . 157
3.2.3 Résumé . . . 159
3.3 CRITERES DE RUPTURE . . . 160
3.3.1 Eléments de théorie . . . 160
3.3.1.1 Instabilité plastique . . . 160
3.3.1.2 Critères de croissance des cavités . . . 163
3.3.1.3 Critère de coalescence des cavités . . . 164
3.3.2 Critère de rupture du 2219 T87 . . . 175
3.3.2.1 Choix d'un critère et calibration de sa valeur critique . . . 175
3.3.2.2 Limites et insuffisance du critère . . . 180
3.3.2.3 Application aux éprouvettes fissurées . . . 191
3.3.3 Résumé . . . 196
3.4 COUPLAGE ENDOMMAGEMENT ET PLASTICITE . . . 198
3.4.1 Eléments de théorie . . . 198
3.4.1.1 Modèle de germination . . . 198
3.4.1.2 Modèle de croissance des cavités . . . 200
3.4.1.3 Modèle de coalescence . . . 201
3.4.2 Prévision de la rupture des différentes éprouvettes . . . 202
3.4.2.1 Le rôle prépondérant de la germination . . . 202
3.4.2.2 Le caractère orthotrope de la rupture . . . 210
3.4.2.3 Modélisation de la propagation de fissures . . . 216
3.4.3 Résumé . . . 220

3.1 INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de présenter une approche locale permettant de prévoir la rupture d'une structure quelconque en alliage d'aluminium 2219 T87. Avant de détailler cette approche il est important de souligner qu'elle ne s'oppose pas à l'approche globale étudiée dans le chapitre précédent. Ces deux approches sont complémentaires et possèdent chacune un champ d'action spécifique.

L'utilisation de l'approche globale devra toujours être privilégiée compte de la simplicité de sa mise en œuvre. En effet les analyses de type FAD ou CDF, présentées dans la troisième partie du chapitre 2, sont des méthodes éprouvées et particulièrement bien adaptées aux besoins de l'ingénieur, souhaitant vérifier la tenue mécanique d'une structure comportant un défaut. L'analyse CDF donne même un avantage indéniable à l'approche globale, par rapport à l'approche locale, lorsqu'il s'agit de prévoir la stabilité ou l'instabilité de la propagation d'une fissure. Cependant quand la plasticité devient généralisée l'approche globale ne peut plus être employée car dans ce cas il n'est plus possible de définir l'intégrale J.

L'approche locale devient donc nécessaire lorsque l'approche globale a atteint ses limites de validité. C'est le cas dès que la plasticité est étendue, par exemple lorsque la fissure semi-elliptique est profonde, engendrant ainsi un ligament de faible longueur qui aura tendance à fortement plastifier. Les critères de rupture utilisés dans l'approche globale, afin de prédire le début de la propagation de la fissure, sont le facteur d'intensité de contrainte K et l'intégrale J. Ils sont donc spécifiques à la présence d'une fissure au sein de la structure contrairement aux critères de rupture développés dans le cadre de l'approche locale. En effet ces derniers peuvent être utilisés aussi bien pour prévoir la rupture d'une structure fissurée que d'une structure non fissurée.

Ainsi apparaît la force de l'approche locale qui est de pouvoir prédire la rupture de toute structure comportant ou non des fissures. Cet avantage repose sur le fait que les critères de rupture, établis dans le cadre de cette approche, tiennent compte des micromécanismes de rupture et de la structure microscopique du matériau. Par conséquent il est nécessaire d'évaluer le plus précisément possible les champs de contrainte et de déformation dans la zone critique où la rupture est susceptible de se produire. Il est donc important de modéliser correctement le comportement élasto-plastique du matériau étudié, notamment en tenant compte de l'anisotropie générée par le procédé de fabrication.

La première partie de ce chapitre sera donc consacrée à la recherche d'un critère de plasticité adapté aux tôles laminées en alliage d'aluminium 2219 T87, utilisées pour la réalisation des réservoirs cryotechniques du lanceur ARIANE 5. La validité de ce critère repose sur sa capacité à simuler les résultats des essais mécaniques effectués sur les différentes éprouvettes non fissurées, décrites dans la première partie du chapitre 1.

La seconde partie a pour objet de chercher un critère de rupture basé sur un modèle d'endommagement non couplé, semblable à celui développé par [Rice and Tracey, 1969], afin de simuler la rupture des différentes éprouvettes testées au chapitre 1. La difficulté majeure de l'approche locale est la dépendance au maillage des valeurs critiques des critères de rupture. Par conséquent son application à différentes géométries d'éprouvettes ou de structures est délicate et nécessite un soin particulier dans la calibration de ces valeurs critiques. Enfin le critère de coalescence issus de [Thomason, 1985b] sera modifié pour rendre compte du caractère orthotrope de la rupture de notre alliage.

La dernière partie de ce chapitre sera dédiée à la prévision de la rupture des différentes éprouvettes à partir d'un modèle d'endommagement afin de modéliser les trois phases de la rupture ductile : la

germination, la croissance et la coalescence des cavités. La croissance et la coalescence des cavités seront simulées à partir du modèle de [Gurson, 1977] modifié par [Tvergaard and Needleman, 1984]. Dans cette approche la phase de coalescence est prise en compte par l'intermédiaire d'une accélération de la porosité. Afin de modéliser la phase de germination nous utiliserons une loi de Gauss dont la formulation est issue de [Chu and Needleman, 1980]. Nous verrons que le recalage des essais sur éprouvettes AE, EU, TR_{12} et DP nécessite le développement d'une germination pilotée simultanément par la déformation plastique cumulée et par la contrainte principale σ_1. Une fois les paramètres du modèle d'endommagement calibrés sur les éprouvettes non fissurées, celui-ci sera employé pour simuler la phase de propagation des éprouvettes CT10 et SENT.

3.2 CRITERES DE PLASTICITE

3.2.1 Eléments de théorie

3.2.1.1 Définition de la surface de charge et du critère de plasticité

Pour un matériau donné le début de la plasticité est défini de manière générale par une condition sur les composantes du tenseur des contraintes, noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$, dont la formulation mathématique s'écrit : $f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}) = 0$, où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ désigne le tenseur des variables d'écrouissage. Dans l'espace des contraintes cette équation définit une surface appelée *surface de charge* ou *surface limite*. Pendant l'écoulement plastique on impose classiquement que le point représentatif de l'état de contrainte reste sur la surface de charge.

Il n'est donc pas possible d'avoir la condition $f > 0$ durant l'écoulement plastique mais seulement $f = 0$ à tout instant, par conséquent $\dot{f} = 0$. Cette dernière condition est nommée *condition de cohérence*. En notant $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ le tenseur portant la vitesse de déformation plastique, il est possible d'écrire :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \quad \text{où } \dot{\lambda} \text{ est le } \textit{multiplicateur plastique} \tag{3.1}$$

La *condition de cohérence* traduit le fait que lors d'une variation de l'état de contrainte produisant une déformation plastique, il y a nécessairement évolution des variables d'écrouissage afin de conserver l'égalité $f = 0$. Cependant l'évolution du chargement peut engendrer une décharge élastique qui amène le point représentatif de l'état de contrainte à l'intérieur de la surface limite. Dans ce cas $\dot{f} < 0$ et aucun écoulement plastique ne se produit. Le comportement est alors élastique, ce qui se traduit par :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : (\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\varepsilon}^p) \quad \text{où } \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} \text{ désigne le tenseur des rigidités élastiques} \tag{3.2}$$

Le critère de charge/décharge peut donc se résumer de la façon suivante :

$$\begin{cases} f < 0 & \text{le comportement est élastique :} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : (\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\varepsilon}^p) \\ f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 & \text{il y a alors écoulement plastique} \\ f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 & \text{il y a décharge élastique :} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : (\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\varepsilon}^p) \end{cases} \tag{3.3}$$

Afin de caractériser l'écoulement plastique il est nécessaire de faire certaines hypothèses. Selon la relation (3.1) l'évolution de la déformation plastique est régie par la relation : $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$. Le problème sera donc totalement résolu quand $\dot{\lambda}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ seront déterminés. La *condition de cohérence* permet d'obtenir $\dot{\lambda}$ sous réserve de connaître la direction $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ et la loi d'écrouissage. La dépendance entre $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$, le tenseur des contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et l'ensemble des variables d'écrouissage $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ est souvent donnée en postulant l'existence d'un potentiel d'écoulement plastique, noté F, tel que : $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$.

L'écoulement est dit normal ou associé lorsque $\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ est colinéaire à $\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$. Dans ce cas puisque $\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ représente le gradient de la fonction f par rapport au tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$, l'écoulement plastique est normal à la surface de charge. Cette condition constitue la *règle de normalité* qui se verifie bien pour les métaux. Dans la suite l'écoulement plastique est supposé associé par conséquent :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\ \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\lambda}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} \tag{3.4}$$

En supposant que l'écrouissage est uniquement isotrope, sans cinématique et viscoplasticité, la seule variable d'écrouissage est la déformation plastique équivalente, notée p, ainsi l'équation de la surface limite se réduit à :

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, p) = \bar{\sigma}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) - R(p) \tag{3.5}$$

La condition de cohérence dans le cas isotherme se traduit par :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial R}\dot{R} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{R} = 0 \tag{3.6}$$

La relation (3.2) permet d'écrire :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p)$$

En utilisant (3.4) l'égalité ci-dessus devient :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\ \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$$

En injectant cette expression de $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ dans (3.6) il apparait que :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{R} = 0 \tag{3.7}$$

En posant $\dot{R} = H\dot{p}$, l'expression ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} - H\dot{p} = 0 \tag{3.8}$$

Considérons une fonction h de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{D}_h$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}_h$, on dit alors que h est une fonction homogène de degré α sur $\mathbb{D}$ si $\forall t > 0$ et $\forall X \in \mathbb{D}$ on a $tX \in \mathbb{D}_h$ et $h(tX) = t^\alpha h(X)$.

D'après [Bron and Besson, 2004] si $\bar{\sigma}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ est une fonction homogène de degré 1, alors selon le théorême d'Euler relatif aux fonctions homogènes, nous obtenons la relation :

$$\bar{\sigma} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{3.9}$$

Supposons que la fonction $\bar{\sigma}$, définie par la relation (3.5), soit une fonction homogène de degré 1 alors elle vérifie l'équation (3.9) ci-dessus. De plus nous pouvons exprimer l'énergie plastique de deux manières, soit à partir des tenseurs des déformations plastiques ($\underset{\sim}{\varepsilon}^p$) et des contraintes ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$) soit à partir de la déformation plastique équivalente (p) et de la contrainte équivalente ($\bar{\sigma}$).

$$\bar{\sigma}\dot{p} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p \quad \text{en tenant compte de (3.4)} \quad \bar{\sigma}\dot{p} = \dot{\lambda}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{3.10}$$

D'après (3.5) $\dfrac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ d'où $\bar{\sigma}\dot{p} = \dot{\lambda}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$

Compte tenu de (3.9) l'expression précédente devient : $\bar{\sigma}\dot{p} = \dot{\lambda}\bar{\sigma}$ par conséquent $\dot{p} = \dot{\lambda}$ et la relation (3.8) permet d'obtenir l'expression du *multiplicateur plastique* :

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{\dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} + H} \tag{3.11}$$

Nous allons maintenant voir comment s'utilisent les diverses relations établies ci-dessus pour résoudre numériquement les différentes équations issues de la méthode des éléments finis. Deux schémas de résolution sont possibles à savoir un explicite et un implicite. Ils seront exposés tour à tour dans le cas restreint du critère plastique de von Mises, afin de simplifier les calculs, mais la méthodologie déployée reste valable quel que soit le critère utilisé.

3.2.1.2 Schéma d'intégration explicite et implicite

Le critère de plasticité le plus utilisé est certainement le critère de von Mises, noté σ_{eq} ou J_2, dont nous rappelons la définition ci-dessous respectivement dans le repère $(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}})$ et dans la base propre $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$ du tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$.

$$\sigma_{eq} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\ \sigma_{xy}^2 + 6\ \sigma_{yz}^2 + 6\ \sigma_{zx}^2} \\ \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{cases} \tag{3.12}$$

En utilisant le déviateur $\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}$ associé au tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$, il existe une formulation tensorielle simple du critère de von Mises dont l'expression est :

$$\sigma_{eq} = J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{s}}} \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3}\ \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right)\ \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_m\ \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \quad \text{ou} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{J}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.13}$$

Dans la relation tensorielle ci-dessus $\underset{\approx}{\boldsymbol{J}}$ est le tenseur d'ordre 4 qui permet d'associer son déviateur à un tenseur d'ordre 2. Le tenseur des déformations plastiques s'obtient en applicant la relation (3.4) au critère de von Mises :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda}\ \frac{\partial J_2}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\lambda}\ \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{s}}} \right) = \dot{\lambda}\ \frac{3}{2\ J_2}\ \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{s}}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = \dot{\lambda}\ \frac{3}{2\ J_2}\ \underset{\approx}{\boldsymbol{J}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = \dot{\lambda}\ \frac{3}{2\ J_2}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{s}}$$

Il est aisé de montrer que J_2 est une fonction homogène de degré 1, elle vérifie donc (3.9), par conséquent $\dot{\lambda} = \dot{p}$ ainsi la relation ci-dessus devient :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{p}\ \frac{3}{2}\ \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}}{J_2} \tag{3.14}$$

Compte tenu de sa simplicité le critère de von Mises va nous servir d'exemple afin d'exposer les schémas de résolution explicite et implicite utilisés pour résoudre les différentes équations dans un calcul par la méthode des éléments finis.

Dans le cas de l'intégration explicite il faut trouver le tenseur des taux de déformation élastique $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e$ et le taux de déformation plastique équivalente $\dot{p}$ pour un tenseur des taux de déformation totale donné $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. Connaissant $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ la première étape consiste à calculer $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ à partir de la relation (3.2). Puis le

critère de charge/décharge résumé par (3.3) permet de savoir si la condition de plasticité est atteinte. Dans le cas où le régime plastique est activé $\dot{p}$ se calcule à partir de (3.11) puisque $\dot{p} = \dot{\lambda}$. Enfin la relation (3.14) fournit $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p$ puis $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e$ en utilisant l'égalité $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p$ puisque par hypothèse $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ est connu.

La méthode d'intégration implicite, également dénommée θ-méthode, est plus délicate à mettre en œuvre car elle nécessite un certain nombre de calculs supplémentaire mais elle assure une convergence plus rapide. Il s'agit de calculer les incréments $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e$ et Δp pour un incrément $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$ donné qui sera donc assimilé à une constante par la suite. Les variables $\underset{\sim}{\varepsilon}^e$ et p sont considérées à l'instant $t + \theta\Delta t$ et sont respectivement approchées par les valeurs $\underset{\sim}{\varepsilon}^e + \theta\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e$ et $p + \theta\Delta p$.
Les résidus $\underset{\sim}{r}_e$ et r_p associés au problème sont définis par les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \underset{\sim}{r}_e = & \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e + \Delta p\ \underset{\sim}{n} = & \Delta\underset{\sim}{\varepsilon} \\ r_p = & \left(\underset{\sim}{\sigma}_{eq}\right)_{(t+\Delta t)} - R_{(t+\Delta t)} = & 0 \end{array}\right. \tag{3.15}$$

L'équation $(\sigma_{eq})_{(t+\Delta t)} - R_{(t+\Delta t)} = 0$ remplace la condition de cohérence qui n'est donc pas utile pour l'intération implicite. En toute rigueur cette équation devrait être écrite à $t+\theta\Delta t$ et non à $t+\Delta t$. Mais dans ce cas il n'est pas certain d'avoir $\sigma_{eq} - R = 0$ au pas de temps final $t + \Delta t$, ainsi des oscillations peuvent être générées dans la recherche de la solution. Afin de résoudre le système par la méthode de Newton il est nécessaire de calculer la matrice jacobienne $[J]$ associée à ce système dont la définition s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \underset{\sim}{r}_e}{\partial \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e} & \dfrac{\partial \underset{\sim}{r}_e}{\partial \Delta p} \\ \dfrac{\partial r_p}{\partial \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e} & \dfrac{\partial r_p}{\partial \Delta p} \end{bmatrix}$$

Il nous reste maintenant à expliciter les différentes dérivées partielles permettant de définir $[J]$.

$$\frac{\partial \underset{\sim}{r}_e}{\partial \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e} = \underset{\approx}{I} + \Delta p \frac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{r}_e}{\partial \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e} = \underset{\approx}{I} + \Delta p \frac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \frac{\partial \underset{\sim}{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}^e} : \frac{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}^e}{\partial \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{r}_e}{\partial \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^e} = \underset{\approx}{I} + \theta\ \Delta p\ \frac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\approx}{\Lambda}$$

Nous allons détailler le calcul de $\frac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}\left(\frac{3}{2}\ \frac{\underset{\sim}{s}}{J_2}\right) = \frac{3}{2J_2}\frac{\partial \underset{\sim}{s}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + \frac{3\underset{\sim}{s}}{2}\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}\left(\frac{1}{J_2}\right)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3}{2J_2}\underset{\approx}{J} - \frac{3\underset{\sim}{s}}{2} \otimes \frac{1}{J_2^2}\frac{\partial J_2}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{1}{J_2}\left(\frac{3}{2}\ \underset{\approx}{J} - \frac{3}{2J_2}\ \underset{\sim}{s} \otimes \underset{\sim}{n}\right)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{1}{J_2}\left(\frac{3}{2}\ \underset{\approx}{J} - \underset{\sim}{n} \otimes \underset{\sim}{n}\right)$$

On pose $\quad \underset{\approx}{N} = \dfrac{\partial \underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}^2} = \dfrac{1}{J_2}\left(\dfrac{3}{2}\ \underset{\approx}{J} - \underset{\sim}{n} \otimes \underset{\sim}{n}\right)$

Finalement $\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{r}}_e}{\partial \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} = \underset{\approx}{\boldsymbol{I}} + \theta\ \Delta p\ \underset{\approx}{\boldsymbol{N}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}$

Compte tenu de (3.15) $\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{r}}_e}{\partial \Delta p} = \underset{\sim}{\boldsymbol{n}}$

D'après (3.15) $\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{r}}_p}{\partial \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} = \left(\dfrac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}\right)_{(t+\Delta t)} = \left(\dfrac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{(t+\Delta t)} : \left(\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}\right)_{(t+\Delta t)} : \left(\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}{\partial \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}\right)_{(t+\Delta t)}$

$\left(\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}{\partial \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}\right)_{(t+\Delta t)} = \underset{\approx}{\boldsymbol{I}}$ car dans ce cas $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ est approché par $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \Delta t$ et non par $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \theta \Delta t$

Ainsi $\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{r}}_p}{\partial \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} = \underset{\sim}{\boldsymbol{n}}_{(t+\Delta t)} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}_{(t+\Delta t)}$

Selon (3.15) $\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{r}}_p}{\partial \Delta p} = -\left(\dfrac{\partial R}{\partial \Delta p}\right)_{(t+\Delta t)} = -\left(\dfrac{\partial R}{\partial p}\right)_{(t+\Delta t)} \left(\dfrac{\partial p}{\partial \Delta p}\right)_{(t+\Delta t)}$

$\left(\dfrac{\partial p}{\partial \Delta p}\right)_{(t+\Delta t)} = 1$ car dans ce cas p est approché par $p + \Delta t$ et non par $p + \theta \Delta t$

Soit $\dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{r}}_p}{\partial \Delta p} = -\left(\dfrac{\partial R}{\partial p}\right)_{(t+\Delta t)} = -\ (H)_{(t+\Delta t)}$

Maintenant que nous venons d'esquisser le cadre théorique dans lequel s'insère le critère de plasticité, nous allons l'utiliser afin de pouvoir modéliser le comportement élasto-plastique de l'alliage d'aluminium 2219 T87. Dans le prochain paragraphe, il va nous falloir choisir un critère de plasticité adapté à notre matériau, puis en déterminer les paramètres à partir des essais sur éprouvettes lisses et entaillées exposés dans le premier chapitre.

3.2.2 Critère de plasticité du 2219 T87

3.2.2.1 Quelques critères orthotropes

Il ressort de l'analyse des essais sur eprouvettes plates et lisses (TR_{12}), dont l'exploitation est détaillée dans le chapitre 1, que le matériau peut être considéré comme isotrope transverse. Nous devons donc utiliser un critère de plasticité orthotrope, le plus simple étant celui développé par [Hill, 1950] dont la formulation est rappelée ci-dessous dans le repère $(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}})$ aligné avec les axes principaux d'orthotropie :

$$\left(\bar{\sigma}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\right)^2 = F\left(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^2 + G\left(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\right)^2 + H\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 \tag{3.16}$$

L'équation de la surface limite est alors : $\bar{\sigma}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - R\left(p\right) = 0$ où $R\left(p\right)$ désigne la loi d'écrouissage dont va dépendre la calibration des différents coefficients.

Ce critère est une modification de celui de von Mises par l'introduction de six coefficients afin de tenir compte de l'orthotropie du matériau. Supposons maintenant que les axes $\underline{\boldsymbol{x}}$ et $\underline{\boldsymbol{y}}$ sont alignés respectivement avec le sens de laminage L et le sens transverse T. Par construction, $\underline{\boldsymbol{z}}$ est orienté suivant l'épaisseur de la tôle. Les coefficients du modèle peuvent être déterminés analytiquement à partir d'essais de traction dans le plan de laminage $(\underline{\boldsymbol{x}}\ ,\ \underline{\boldsymbol{y}})$. Nous notons σ_y^α la limite d'élasticité à 0,2 % issue d'un essais de traction sur une éprouvette de type TR_{12} prélevée suivant un angle α par rapport au sens de laminage. Alors selon [Hill, 1990] nous avons la relation suivante :

$$\left(\sigma_y^\alpha\right)^2 = \frac{\left(R\left(0,002\right)\right)^2}{F\sin^2\alpha + G\cos^2\alpha + H + \left(2N - F - G - 4H\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

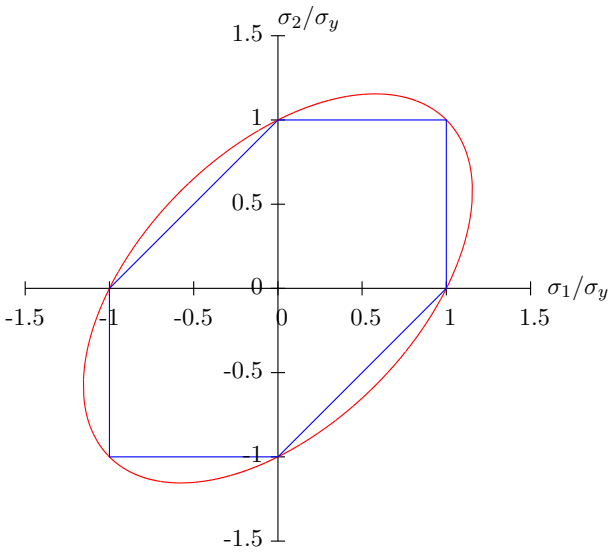


FIGURE 3.1 – Surfaces de charge des critères de von Mises et Tresca

$$\text{D'où :} \quad G+H=\frac{\left(R\left(0,002\right)\right)^2}{\left(\sigma_y^0\right)^2} \;;\; F+H=\frac{\left(R\left(0,002\right)\right)^2}{\left(\sigma_y^{90}\right)^2} \;;\; F+G+2N=\frac{4\ \left(R\left(0,002\right)\right)^2}{\left(\sigma_y^{45}\right)^2} \tag{3.17}$$

Nous constatons qu'il manque une équation pour pouvoir obtenir les coefficients F, G, H et N, celle-ci sera fournie par la mesure du coefficient de Lankford L_k, lors d'un essai de traction sur les éprouvettes de type TR_{12}. Nous rappelons ci-dessous la définition de L_k :

$$L_k=\frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_3^p}=-\frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_1^p+\varepsilon_2^p} \quad \text{car } \underset{\sim}{\varepsilon}^p \text{ est un déviateur}$$

Dans la relation ci-dessus la notation ε_i^p désigne les valeurs propres du tenseur des déformations plastiques. Il faut préciser qu'en toute rigeur il s'agit de déformations rationnelles. Pour une éprouvette prélevée suivant un angle α par rapport à L nous noterons L_k^α le coefficient de Lankford dont l'expression issue de [Hill, 1990] est :

$$L_k^\alpha=\frac{H+(2N-F-G-4H)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{F\sin^2\alpha+G\cos^2\alpha}$$

$$\text{D'où :} \quad L_k^0=\frac{H}{G} \quad ; \quad L_k^{90}=\frac{H}{F} \quad ; \quad L_k^{45}=\frac{N}{F+G}-\frac{1}{2} \tag{3.18}$$

Une première limitation du critère de Hill saute aux yeux, en effet il ne sera pas possible de recaler uniquement avec les coefficients F, G, H et N à la fois les contraintes à limites élastiques (σ_y^0, σ_y^{90} et σ_y^{45}) et les coefficients de Lankford (L_k^0, L_k^{90} et L_k^{45}). Dans notre cas ce n'est pas vraiment un problème car notre matériau étant isotrope transverse le coefficient de Lankford est le même quel que soit l'angle de prélèvement α. Une deuxième limitation de ce critère est lié au fait qu'il est quadratique. Dans le cas isotrope les matériaux ont souvent un comportement plastique qui s'inscrit entre le critère de von Mises qui est quadratique et celui de Tresca qui correspond à un exposant infini. Il est donc très important de posséder un critère non quadratique d'exposant m, afin de pouvoir modéliser au plus juste le comportement plastique du matériau.

Nous allons démontrer l'importance des éprouvettes DP dans la recherche de l'exposant m. La figure 3.1 représente les critères de von Mises (tracé rouge) et de Tresca (tracé bleu) dans l'espace des contraintes principales (σ_1,σ_2). Elle montre que l'écart maximal entre les courbes se situe lorsque σ_1 est la moitié ou le double de σ_2. Or cet état de contrainte correspond précisément à celui généré au centre de l'éprouvette DP. En effet la géométrie de cette éprouvette est étudiée de manière à avoir

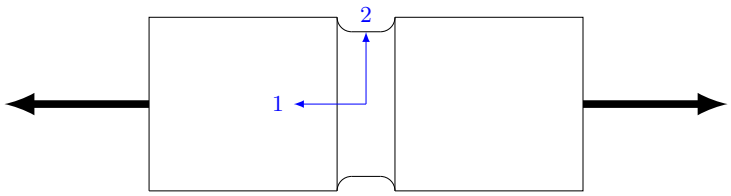


FIGURE 3.2 – Repère propre d'une éprouvette DP soumise à un effort de traction

$\varepsilon_2 = 0$ et $\sigma_3 = 0$. En tenant compte de la loi d'écoulement plastique (3.4) et de l'expression de $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ associé au critère de von Mises compte tenu de (3.14) nous obtenons la relation :

$$\dot{\varepsilon}_2^p = \dot{p}\ \frac{3\ s_2}{2\sigma_{eq}}$$

Or $\dot{\varepsilon}_2^p$ est nul puisque la déformation ε_2 est bloquée, par conséquent s_2 est égal à zéro. Du fait que σ_3 est également nul il en résulte la relation recherchée c'est-à-dire un rapport de deux entre σ_1 et σ_2 ($\sigma_1 = 2\sigma_2$). Il est intéressant de noter que la valeur de ce rapport entre les deux contraintes principales est précisément celui qui résulte de l'état de contraintes d'un réservoir cylindrique sous pression.

Le critère de [Hosford, 1972] est le premier critère non quadratique formulé à parti des valeurs propres s_i du déviateur associé au tenseur des contraintes. Pour mémoire son expression dans le repère principal de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est :

$$\bar{\sigma} = [(s_1 - s_2)^m + (s_2 - s_3)^m + (s_3 - s_1)^m]^{1/m} \tag{3.19}$$

Afin de prendre en compte l'anisotropie du matériau, une extension de ce critère sera proposée par [Barlat et al., 1991]. L'écriture du critère fait intervenir les valeurs propres S_i d'un déviateur $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$ construit à partir de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et d'un tenseur d'ordre 4, noté $\underset{\approx}{\boldsymbol{L}}$:

$$\bar{\sigma} = [(S_1 - S_2)^m + (S_2 - S_3)^m + (S_3 - S_1)^m]^{1/m} \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{L}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.20}$$

L'orthotropie du matériau est modélisée par le tenseur $\underset{\approx}{\boldsymbol{L}}$ dont l'expression en notation de Voigt [(a)] est :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} (c_2+c_3)/3 & -c_3/3 & -c_2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3/3 & (c_1+c_3)/3 & -c_1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2/3 & -c_1/3 & (c_1+c_2)/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{bmatrix}$$

Pour un matériau fortement orthotrope le critère de [Barlat et al., 1991] bien que non quadratique ne pourra pas permettre le recalage simultané des contraintes à limites élastiques (σ_y^0, σ_y^{90} et σ_y^{45}) et des coefficients de Lankford (L_k^0, L_k^{90} et L_k^{45}) puisque le nombre de coefficients disponibles (c_1, c_2, c_3 et c_4) est toujours égal à quatre. Pour s'affranchir de cette limitation il faut augmenter le nombre de paramètres, cette solution est proposée par [Bron and Besson, 2004]. Ces auteurs vont

(a). Cette notation permet de simplifier le calcul tensoriel pour des tenseurs symétriques, elle est utilisée dans le code ZeBuLoN

synthétiser le critère de [Barlat et al., 1991] et celui de [Karafillis and Boyce, 1993] pour aboutir à la formulation suivante :

$$\bar{\sigma} = \left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \bar{\sigma}_i^a \right)^{1/a} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}_i = (\psi_i)^{1/b_i} \tag{3.21}$$

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} \psi_1 = \dfrac{1}{2} \left(\left|S_1^1 - S_2^1\right|^{b_1} + \left|S_2^1 - S_3^1\right|^{b_1} + \left|S_3^1 - S_1^1\right|^{b_1} \right) \\ \\ \psi_2 = \dfrac{3b_2}{2b_2+2} \left(\left|S_1^2\right|^{b_2} + \left|S_2^2\right|^{b_2} + \left|S_3^2\right|^{b_2} \right) \end{cases}$$

Les tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^1$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^2$, définis par : $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^k = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^k : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$, ont pour valeurs propres : S_i^1 et S_j^2. Les tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^k$ d'ordre 4 s'écrivent en notation de Voigt de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^k = \begin{bmatrix} (c_2^k + c_3^k)/3 & -c_3^k/3 & -c_2^k/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^k/3 & (c_1^k + c_3^k)/3 & -c_1^k/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2^k/3 & -c_1^k/3 & (c_1^k + c_2^k)/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6^k \end{bmatrix}$$

3.2.2.2 Optimisation des paramètres des critères

Nous allons maintenant déterminer les paramètres des critères de [Hill, 1950], [Barlat et al., 1991] et [Bron and Besson, 2004]. Les coefficients de ces critères seront obtenus à l'aide du module d'optimisation du logiciel ZeBuLoN ([Besson and Foerch, 1997]). Pour le modèle de [Hill, 1950] ils pourraient être calculés analytiquement à l'aide des relations (3.17) et (3.18). Mais il a été jugé préférable d'optimizer les coefficients F, G, H et N sur l'ensemble des données expérimentales plutôt que de les calculer uniquement au point correspondant à la limite d'élasticité à 0,2 %. Précisons toutefois que dans ZeBuLoN le critère de [Hill, 1950] est implémenté sous la forme tensorielle ci-dessous :

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{M}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{s}}} \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3}\, \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right)\, \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \tag{3.22}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Cette formulation constitue une extension de celle du critère de von Mises donnée par (3.13).

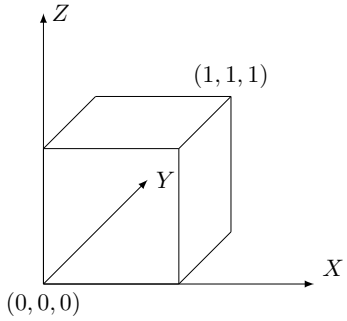


FIGURE 3.3 – Elément cubique $c3d8r$

L'optimisation des paramètres des critères repose sur la comparaison entre les résultats de calculs éléments finis (sim) et ceux issus d'essais (exp). La fonction coût ψ associée à l'optimisation du vecteur de paramètres $\underline{\boldsymbol{p}}$ pour la variable X s'écrit :

$$\psi(p) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[X_k^{sim}\left(\underline{\boldsymbol{p}}, t_i\right) - X_k^{exp}\left(\underline{\boldsymbol{p}}, t_i\right)\right]^2$$

Pour minimiser la fonction coût les valeurs X_k^{sim} n'ont pas à être calculées exactement aux mêmes instants t_i que les données expérimentales X_k^{exp}. Le calcul se fait pour des pas de temps indépendants de ceux de l'expérience, puis l'algorithme de résolution va interpoler les résultats du calcul pour chaque instant de l'essai. Nous allons maintenant décrire la modélisation des éprouvettes TR_{12}, EU_4, EU_2, AE_4, AE_2 et DP.

Modélisation des éprouvettes TR_{12}

La simulation des essais de traction sur éprouvettes TR_{12} est réalisée à partir d'un élément cubique $c3d8r$ d'arête 1 mm illustré par la figure 3.3.

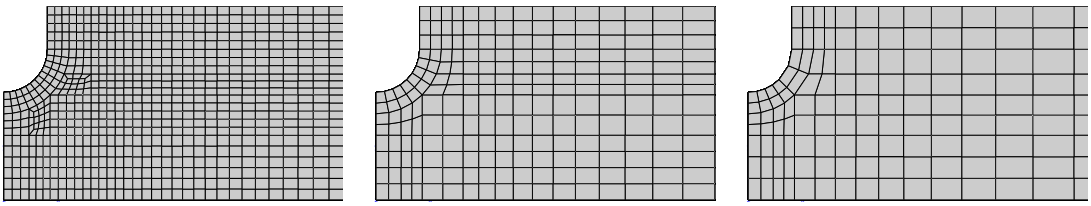
Les conditions aux limites appliquées sur cet élément afin d'être représentatif d'un essai de traction sont :

- Fixation de la composante X pour les nœuds du plan $X = 0$
- Fixation de la composante Y pour les nœuds du plan $Y = 0$
- Fixation de la composante Z pour les nœuds du plan $Z = 0$
- Le déplacement des nœuds du plan $Y = 1$ est lié suivant Y
- Le déplacement des nœuds du plan $Z = 1$ est lié suivant Z
- Un déplacement imposé suivant X pour les nœuds du plan $X = 1$

Lors du calcul nous enregistrons les déplacements selon X et Y du nœud $(1, 1, 1)$ ainsi que l'effort F suivant X à travers le plan $X = 1$. Nous obtenons compte tenu des dimensions de l'élément $c3d8r$, et des conditions aux limites, la contrainte F/S_0 en fonction des déformations $\Delta l/l_0$ et $\Delta t/t_0$. Ces résultats issus du calcul EF sont donc directement comparables à ceux des essais de traction. Nous utilisons le même modèle quel que soit le sens de prélèvement de l'éprouvette TR_{12}, car dans ZeBuLoN il est possible d'orienter directement le matériau au lieu de modifier la géométrie du modèle.

Modélisation des éprouvettes EU_4 ***et*** EU_2

Le modèle EF des éprouvettes entaillées EU est présenté par la figure 3.6. Les axes X, Y et Z sont supposés être respectivement alignés avec les sens L, T et S du matériau. Le maillage a été effectué sous PATRAN à l'aide d'éléments 2D de degré 1 qui ont ensuite été extrudés suivant la direction Z, nous obtenons donc des éléments $c3d8$. Notons d'ores et déjà que ces éléments linéaires nécessiteront d'utiliser l'option d'intégration sélective.



maillage D maillage AD maillage PD

FIGURE 3.4 – Les différentes densités de maillage pour l'éprouvette EU_2

Le modèle EF va être utilisé pour optimiser les paramètres des critères. Par conséquent il ne doit pas posséder un maillage trop dense, afin de ne pas pénaliser le temps de calcul. Trois maillages de 1/8 d'éprouvette ont été réalisés correspondant à différentes densités : D pour dense, AD pour assez dense et PD pour peu dense (voir figure 3.4). De plus afin de réduire la taille du modèle, nous avons considéré également une longueur de 1/2 d'éprouvette réduite à 15 mm pour 35 mm selon la définition géométrique réelle.

La figure 3.5 compare l'effort appliqué F à l'éprouvette en fonction du déplacement d'ouverture de l'entaille V pour les trois densités de maillage, avec une longueur d'éprouvette de 35 mm et une longueur de 15 mm pour le modèle peu dense. Les résultats obtenus sont suffisamment proches pour permettre lors de l'optimisation l'utilisation du modèle peu dense avec une longueur de 15 mm.

Pour les éprouvettes prélevées suivant les sens L et T nous avons modélisé 1/8 d'éprouvette comme le montre la figure 3.6. En effet dans ce cas les plans d'équation $X = 0$ et $Y = 0$ sont des plans de symétrie pour le matériau. Par contre pour les éprouvettes prélevées à 45° du sens de laminage, seul le plan $Z = 0$ est un plan de symétrie pour le matériau. Pour ces éprouvettes il est donc nécessaire de modéliser 1/2 d'éprouvette (voir figure 3.7). Le même modèle est utilisé pour les angles de prélèvement de 0° et 90° car dans ZeBuLoN il est possible d'effectuer une rotation des axes définissant l'orientation du matériau au lieu de modifier la géométrie du modèle.

Les conditions aux limites appliquées sont :

- Fixation de la composante X pour les nœuds du plan $X = 0$
- Fixation de la composante Y pour les nœuds du plan $Y = 0$
- Fixation de la composante Z pour les nœuds du plan $Z = 0$
- Déplacement imposé suivant X pour les nœuds du plan $X = 15$

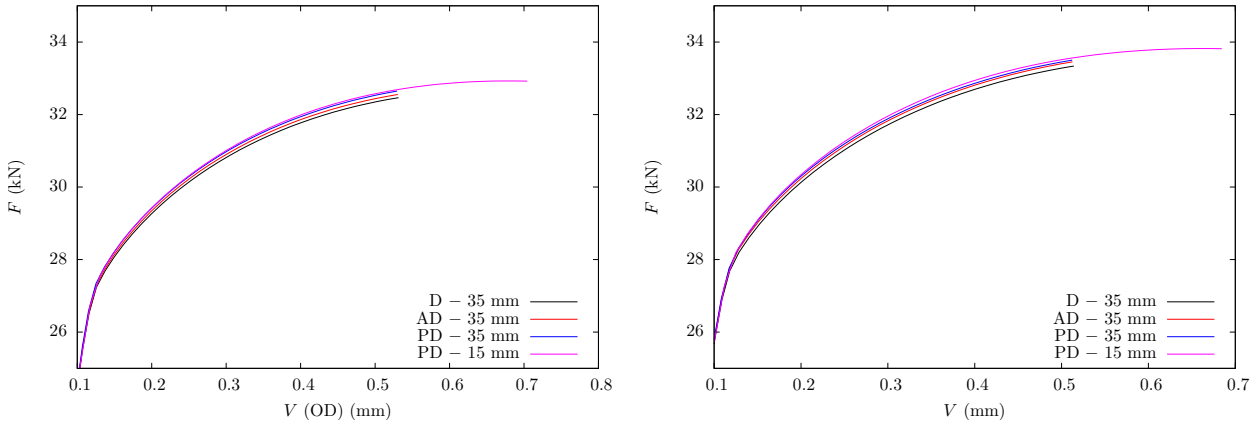
Le post-traitement du calcul consiste à récupérer l'effort selon X au niveau du plan $X = 0$ et le déplacement suivant X du nœud N de la figure 3.6. Ce dernier représente le déplacement d'ouverture de l'entaille, noté V. Compte tenu des symétries il faudra multiplier l'effort par quatre et le déplacement par deux, afin de pouvoir comparer les résultats obtenus par calcul à ceux issus des essais.

Modélisation des éprouvettes AE_4 et AE_2

Le modèle EF des éprouvettes axisymétriques entaillées est présenté par la figure 3.6. Les axes X, Y et Z sont supposés être respectivement alignés avec les sens L, T et S du matériau. Le maillage a été effectué sous PATRAN à l'aide d'éléments de type $c3d8$.

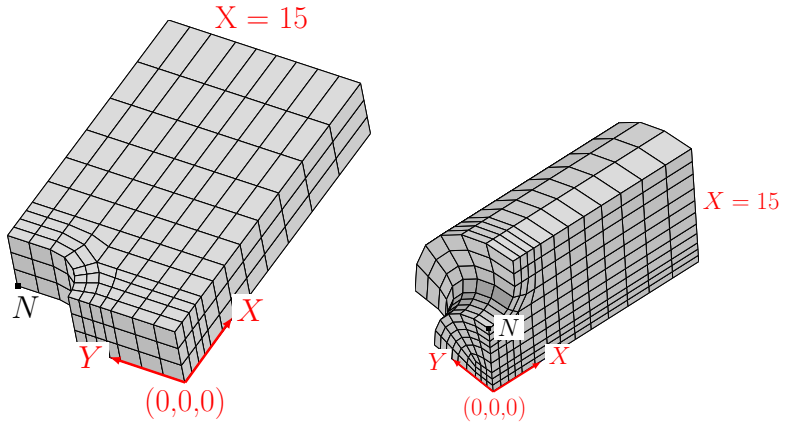
Comme pour les éprouvettes EU nous avons comparé trois maillages de densité différente, afin de retenir le moins dense pour l'optimisation. La figure 3.9 montre l'évolution de l'effort appliqué à l'éprouvette F en fonction de la déformation diamétrale $\Delta\phi/\phi_0$ suivant le sens S, pour trois densités de maillage avec une longueur d'éprouvette de 35 mm et une longueur de 15 mm pour le modèle peu dense. Les résultats obtenus sont suffisamment proches pour permettre lors de l'optimisation l'utilisation du modèle peu dense avec une longueur de 15 mm.

Pour les éprouvettes prélevées suivant les sens L et T nous avons modélisé 1/8 d'éprouvette comme le montre la figure 3.6. En effet dans ce cas les plans d'équation $X = 0$ et $Y = 0$ sont des plans de symétrie pour le matériau. Par contre pour les éprouvettes prélevées à 45° du sens de laminage, seul



Eprouvettes EU_4 Eprouvettes EU_2

FIGURE 3.5 – Effort−déplacement pour les différents maillages des éprouvettes EU_4 et EU_2



(a) Eprouvettes EU_2 (b) Eprouvettes AE_2

FIGURE 3.6 – Conditions aux limites des modèles des éprouvettes EU et AE

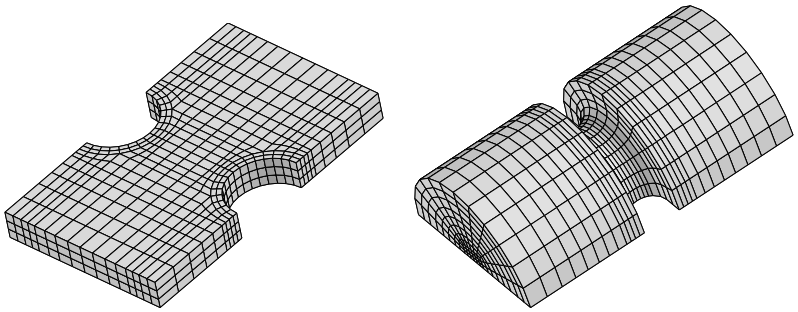
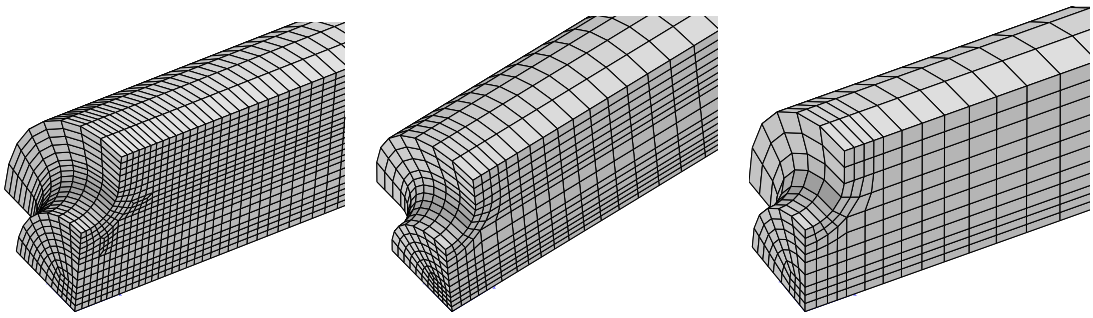
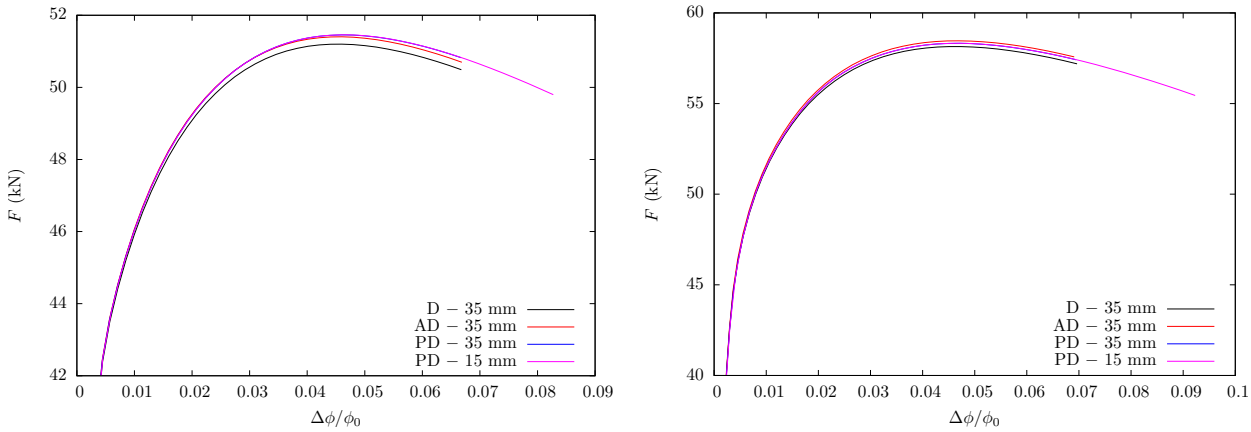


FIGURE 3.7 – Modélisation des éprouvettes EU et AE prélevées à 45° du sens L



maillage D maillage AD maillage PD

FIGURE 3.8 – Les différentes densités de maillage pour l'éprouvette AE_2



Eprouvettes AE_4 Eprouvettes AE_2

FIGURE 3.9 – Effort−déformation pour les différents maillages des éprouvettes AE_4 et AE_2

le plan $Z = 0$ est un plan de symétrie pour le matériau. Pour ces éprouvettes il est donc nécessaire de modéliser 1/2 d'éprouvette (voir figure 3.7).

Les conditions aux limites appliquées sont :

- Fixation de la composante X pour les nœuds du plan $X = 0$
- Fixation de la composante Y pour les nœuds du plan $Y = 0$
- Fixation de la composante Z pour les nœuds du plan $Z = 0$
- Déplacement imposé suivant X pour les nœuds du plan $X = 15$

Le post-traitement du calcul consiste à récupérer l'effort selon X au niveau du plan $X = 0$ et le déplacement suivant X du nœud N de la figure 3.6. Compte tenu des symétries il faudra multiplier l'effort par quatre et le diviser par la surface initiale S_0 ($\pi * 5^2$ soit 73,56 mm^2). De même le déplacement sera multiplié par deux puis divisé par ϕ_0 (10 mm) afin d'obtenir $\Delta\phi/\phi_0$. Nous obtenons alors par calcul l'évolution de F/S_0 en fonction de la déformation diamétrale $\Delta\phi/\phi_0$ selon S, qui pourra être comparée à celle issue des essais.

Modélisation des éprouvettes DP

Le modèle EF des éprouvettes de déformation plane est présenté par la figure 3.10. Les axes X, Y et Z sont supposés être respectivement alignés avec les sens L, T et S du matériau. Le maillage a été effectué sous PATRAN à l'aide d'éléments de type $c3d8$. Nous avons modélisé 1/8 d'éprouvette comme le montre la figure 3.10 car dans cette configuration les plans d'équation $X = 0$ et $Y = 0$ sont des plans de symétrie pour le matériau.

Les conditions aux limites appliquées sont :

- Fixation de la composante X pour les nœuds du plan $X = 0$

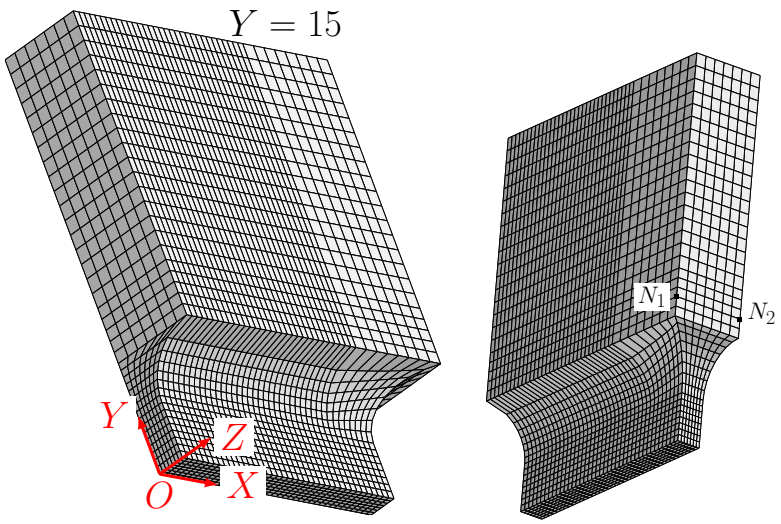


FIGURE 3.10 – Modélisation de l'éprouvette DP

- Fixation de la composante Y pour les nœuds du plan $Y = 0$
- Fixation de la composante Z pour les nœuds du plan $Z = 0$
- Déplacement imposé suivant Y pour les nœuds du plan $Y = 15$

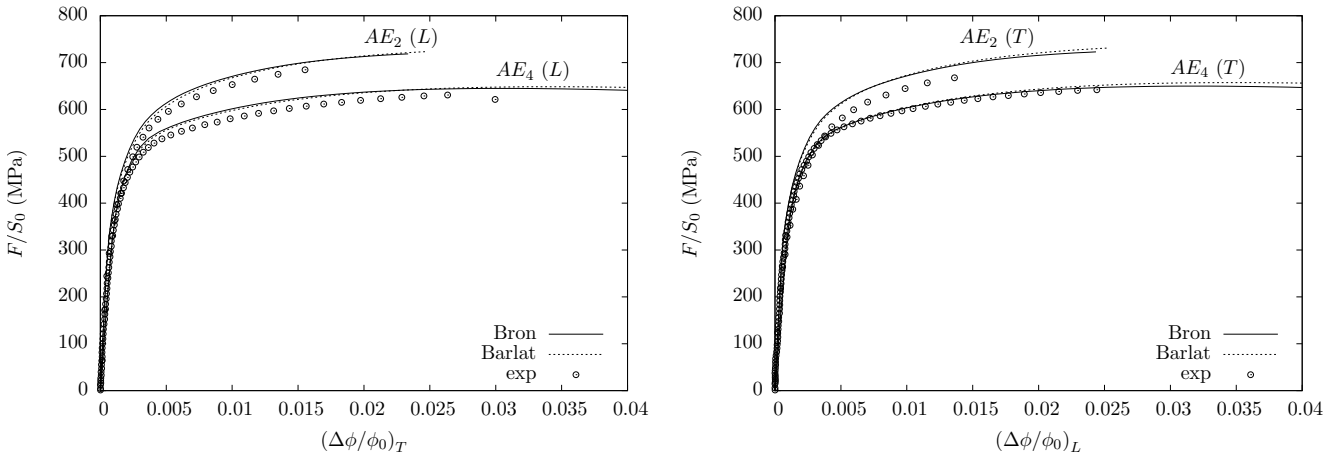
Le post-traitement du calcul consiste à récupérer l'effort selon Y au niveau du plan $Y = 0$ et le déplacement suivant Y des nœud N_1 et N_2 de la figure 3.10. Compte tenu des symétries il faudra multiplier l'effort par quatre et le déplacement par deux puis le diviser par L_0 (9,6 mm) afin de simuler la déformation $\Delta L/L_0$ de l'extensomètre.

3.2.2.3 Résultats et validation

Avant de commencer à déterminer les paramètres du critère, il est nécessaire de caractériser la loi d'écrouissage du matériau, notée $R(p)$. Elle permet de calibrer le critère et surtout de piloter l'écoulement plastique décrit par : $f(\underset{\sim}{\sigma}) = \bar{\sigma} - R(p)$ où p désigne la déformation plastique cumulée. La loi d'écrouissage sera de la forme : $R(p) = R_0 + Q_1\ (1 - e^{-b_1 p})$. Les coefficients R_0, Q_1 et b_1 seront optimisés en même temps que les paramètres des critères de plasticité.

Dans le cadre d'une application à un réservoir cryotechnique sous pression, nous avons des valeurs nulles pour les composantes τ_{LS} et τ_{TS} du tenseur des contraintes. Par conséquent les paramètres e et f du critère de [Hill, 1950], défini par (3.22), seront pris égaux à 1 (cas du matériau isotrope). De même pour les coefficients c_5 et c_6 du critère de [Barlat et al., 1991] ainsi que pour les coefficients c_5^1, c_6^1, c_5^2 et c_6^2 du critère de [Bron and Besson, 2004]. De plus nous considérons pour ce dernier critère que la valeur des paramètres a, b_1 et b_2 est identique. L'exposant du critère de [Barlat et al., 1991] sera pris égal à 8 conformément à ce que préconise l'auteur pour un matériau de structure atomique CFC (Cubique Face Centrée).

Afin de déterminer les valeurs des paramètres des différents critères, nous utilisons le module d'optimisation intégré au logiciel ZeBuLoN qui permet, à l'aide d'une méthode SIMPLEX issue de [Nelder and Mead, 1965], de minimiser l'écart entre les résultats d'une simulation numérique et ceux obtenus par essais. Les simulations consistent à modéliser les essais de traction sur les éprouvettes TR_{12}, EU_4, EU_2, AE_4, AE_2 et DP à l'aide des modèles décrits précédemment. Les essais sur éprouvettes DP serviront de validation pour les critères obtenus, elles ne sont pas utilisées lors de la phase d'optimisation des coefficients des critères. Les simulations sont effectuées avec l'hypothèse des grandes déformations géométriques et matériau, exprimées dans le repère corrotationnel (voir [Ladevèze, 1980]). Les résultats du recalage des différents essais sont présentés dans l'annexe E, ils sont satisfaisants pour les critères de [Barlat et al., 1991] et [Bron and Besson, 2004] avec un léger avantage pour ce dernier quant au



(a) Eprouvettes AE sens L (b) Eprouvette AE sens T

FIGURE 3.11 – Modélisation du comportement plastique des éprouvettes AE selon le diamètre L ou T

recalage des coefficients de Lankford. Par contre le critère de [Hill, 1950] donne des résultats jugés non acceptables. Les tableaux 3.1 et 3.2 présentent respectivement les paramètres de la loi d'écrouissage et les coefficients des différents critères issus de l'optimisation.

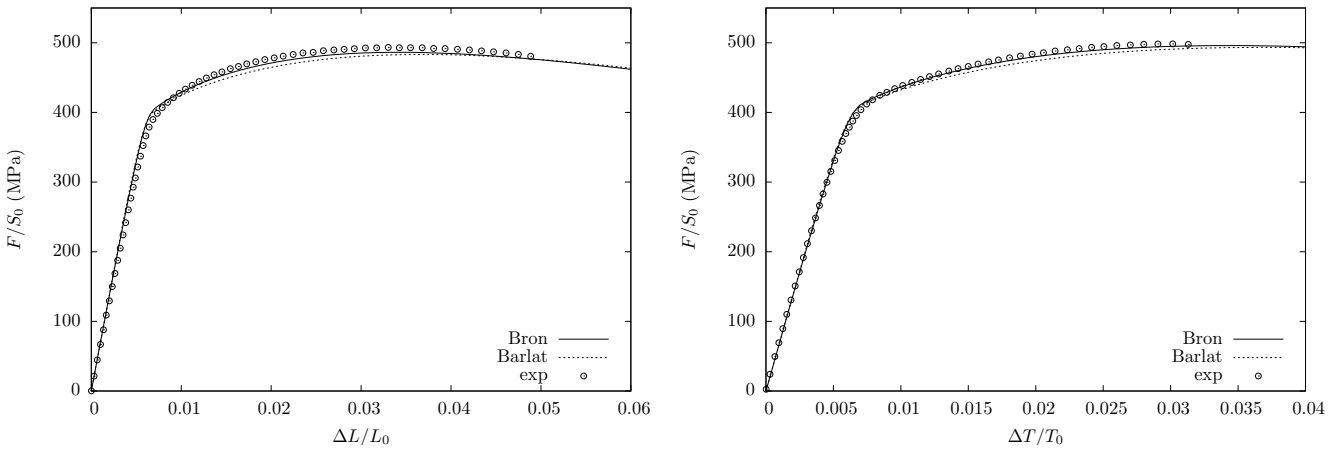
Critère de plasticité	R_0	Q_1	b_1
[Hill, 1950]	418 MPa	148 MPa	32
[Barlat et al., 1991]	361 MPa	128 MPa	28
[Bron and Besson, 2004]	335 MPa	114 MPa	29,5

TABLE 3.1 – Paramètres de la loi d'écrouissage pour les différents critères de plasticité

[Hill, 1950]	m	a	b	c	d	e	f
	2	1,031	0,945	1,977	0,984	1	1
[Barlat et al., 1991]	m	c_{LL}	c_{TT}	c_{SS}	c_{LT}	c_{TS}	c_{SL}
	8	1,020	1,052	0,805	0,880	1	1
[Bron and Besson, 2004]	m	c^1_{LL}	c^1_{TT}	c^1_{SS}	c^1_{LT}	c^1_{TS}	c^1_{SL}
	7,47	1,044	1,093	0,740	0,863	1	1
	α	c^2_{LL}	c^2_{TT}	c^2_{SS}	c^2_{LT}	c^2_{TS}	c^2_{SL}
	0,474	0,767	0,704	0,813	0,788	1	1

TABLE 3.2 – Coefficients de différents critères de plasticité

Les critères de [Barlat et al., 1991] et de [Bron and Besson, 2004], dont les coefficients sont fournis par le tableau 3.2, vont maintenant être utilisés à titre de validation, afin de simuler pour les sens de prélèvement L et T, les essais réalisés sur éprouvettes DP et sur éprouvettes AE avec une mesure de la déformation diamétrale selon le sens orthogonal à S. Pour les éprouvettes AE il suffit de récupérer, pour les calculs effectués ci-dessus dans le but d'optimiser les coefficients des critères de plasticité, le déplacement du nœud situé sur le diamètre $\phi_0 = 10$ mm dans la direction Y définie sur la figure 3.6b. Quant aux éprouvettes DP nous avons réalisé un calcul non linéaire géométrique et matériau à partir de la modélisation décrite au paragraphe 3.2.2.2 (voir page 156). Les figures 3.11 et 3.12 présentent les résultats ainsi obtenus et montrent que le recalage des courbes expérimentales est satisfaisant quel que



(a) Eprouvettes DP sens L (b) Eprouvette DP sens T

FIGURE 3.12 – Modélisation du comportement plastique des éprouvettes DP

soit le critère utilisé. En conclusion nous modéliserons dans la suite de cette étude le comportement élasto-plastique de notre alliage avec le critère de plasticité issus de [Bron and Besson, 2004].

3.2.3 Résumé

Dans cette partie nous avons cherché un critère de plasticité afin de modéliser le comportement élasto-plastique de l'alliage d'aluminium 2219 T87. Cette étape est importante car les critères de rupture mis en œuvre dans le cadre de l'approche locale seront toujours basés sur les tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underset{\sim}{\varepsilon}$, dont la détermination dépend de la simulation du comportement plastique du matériau. Ce serait donc une erreur de traiter trop rapidement la recherche du critère plastique sous prétexte qu'elle n'est pas suffisamment « locale ». En effet la distribution des phases intermétalliques est sans conséquence sur le comportement plastique du matériau, alors qu'elle aura un rôle prépondérant dans la rupture de celui-ci. Ainsi, pour notre alliage la plasticité possède un caractère isotrope dans le plan (L, T), alors que la rupture sera fortement orthotrope selon les sens L ou T.

Compte tenu de ces remarques, la modélisation du comportement plastique d'un matériau est plus facile que la simulation de la rupture. Il faut cependant respecter quelques règles élémentaires, la principale étant la mesure du coefficient de Lankford afin d'évaluer l'anisotropie du matériau. Nous n'insisterons jamais assez sur le fait qu'une loi d'écrouissage identique, selon les directions L, T et D, ne permet pas de conclure que le matériau est isotrope, sans une valeur de L_k égale à 1 pour ces trois directions. Si le coefficient de Lankford est différent de 1, comme dans le cas de notre alliage, alors le matériau est isotrope transverse, et sans la mesure de L_k nous passons à côté de cette conclusion. De plus il est indispensable d'utiliser différentes géométries d'éprouvette afin de pouvoir diversifier les modes de sollicitation du matériau. Nous avons donc réalisé des essais sur éprouvettes TR_{12}, AE_2, AE_4, EU_2, EU_4 et DP.

L'avantage des éprouvettes AE et EU est de créer, compte tenu de la présence de l'entaille, un champ de contraintes multi-axial alors qu'elles sont sollicitées uniquement de manière uni-axiale. Ainsi elles peuvent être testées à l'aide d'une simple machine de traction sans avoir recours à une machine bi-axiale ou multi-axiale. L'annexe F fournit la répartition des contraintes principales au niveau de la section minimale des éprouvettes AE et EU. Pour les éprouvettes AE les trois contraintes principales sont non nulles et sont distribuées de la manière suivante : $\sigma_2 = \sigma_3 \approx \sigma_1/2$. Quant aux éprouvettes EU la contrainte σ_3 est nulle au centre de l'éprouvette, tandis que $\sigma_2 \approx \sigma_1/2$. De même nous avons montré que nous avions également, au centre des éprouvettes DP, cette même répartition des contraintes ($\sigma_3 = 0$ et $\sigma_1 = 2\sigma_2$) qui correspond précisément à celle d'un réservoir cylindrique sous pression.

Nous pouvons donc nous affranchir de la réalisation d'essais bi-axiaux. Idéalement il ne faudrait pas utiliser les mêmes éprouvettes pour déterminer le critère de plasticité et la valeur critique des critères de rupture. Ainsi le calibrage de ces derniers serait réalisé à partir d'éprouvettes entaillées AE et EU, tandis que le comportement élasto-plastique pourrait être obtenu en utilisant des éprouvettes cylindriques tubulaires. Celles-ci seraient alors sollicitées en pression, en traction et en torsion afin de pouvoir décrire un maximum de points de la surface de charge. Mais pour des raisons de coûts cette approche est rarement suivie.

Afin de simuler le comportement élasto-plastique de notre alliage, nous avons utilisé trois critères de plasticité, issus respectivement de [Hill, 1950], [Barlat et al., 1991] et [Bron and Besson, 2004]. L'optimisation des paramètres d'anisotropie de ces critères a été réalisée à l'aide du logiciel ZeBuLoN, elle repose sur la comparaison entre les résultats de simulation numérique et ceux issus d'essais. Le critère de [Hill, 1950] ne permet pas un recalage satisfaisant des essais, contrairement à celui de [Barlat et al., 1991]. Or l'unique différence entre ces deux critères est que le premier est quadratique tandis que le second est non quadratique. Sinon ils possèdent tous les deux le même nombre de paramètres d'anisotropie à savoir quatre, dans notre cas, puisque nous supposons que les cisaillements τ_{LS} et τ_{TS} restent isotropes. Il n'est donc pas possible de modéliser la plasticité de l'alliage d'aluminium 2219 T87 à l'aide d'un critère quadratique. Quant au modèle de [Bron and Besson, 2004] il permet une meilleure approximation des coefficients de Lankford que le critère issus de [Barlat et al., 1991], puisqu'il possède un nombre de coefficients plus important pour simuler l'anisotropie. Nous avons donc choisi d'utiliser dans la suite de cette étude le critère de [Bron and Besson, 2004], bien qu'il nécessite une optimisation plus coûteuse en temps et en puissance de calcul.

3.3 CRITERES DE RUPTURE

3.3.1 Eléments de théorie

3.3.1.1 Instabilité plastique

Dans le chapitre précédent nous avons déterminé un critère de plasticité permettant de modéliser, par simulation numérique, les résultats des essais sur les éprouvettes plates lisses (TR_{12}), plates entaillées (EU_2 et EU_4), axisymétriques entaillées (AE_2 et AE_4) et sur les éprouvettes de déformation plane (DP). Nous allons maintenant pouvoir nous intéresser à la question de la rupture. Ainsi le but de cette partie est de déterminer un critère de rupture et sa valeur critique afin de pouvoir prédire la ruine d'une structure quelconque en alliage d'aluminium 2219 T87.

Dans le cas d'un calcul linéaire, ce critère de rupture sera la contrainte équivalente de von Mises ou de Tresca. A titre d'exemple il existe de nombreux équipements du lanceur ARIANE 5 dont le dimensionnement peut être justifié par une approche linéaire compte tenu de l'absence de plastification ou d'une plastification faible et localisée. Dans ce cas il suffit d'indiquer les marges à limite élastique M_e et à rupture M_r définies par :

$$M_e = 1 \; - \; \frac{\sigma_{vM} \times 1,1}{R_{p0,2}} \quad \text{et} \quad M_r = 1 \; - \; \frac{\sigma_{Tr} \times 1,25}{R_m}$$

Dans les expressions précédentes σ_{vM} et σ_{Tr} sont respectivement les contraintes équivalentes de von Mises et de Tresca issues d'une analyse linéaire pour un certain niveau de chargement. Les caractéristiques mécaniques du matériau correspondant à la contrainte à limite élastique pour un allongement de 0,2 %, noté $R_{p0,2}$, et à la contrainte à rupture R_m doivent être considérée à la température spécifiée par le cas dimensionnant étudié. L'utilisation des coefficients de sécurité 1,1 et 1,25 fait partie des règles de dimensionnement dans un contexte industriel.

La présence d'une singularité géométrique ou d'un niveau de charge important produit inévitable-

ment une plastification du matériau qui va nécessiter une approche non linéaire. Dans ces conditions, les contraintes équivalentes de von Mises et de Tresca ne peuvent plus jouer le rôle de critère de rupture. Une solution simple consiste à substituer ce critère en contrainte par un critère basé sur la déformation plastique équivalente, définie à partir du critère de plasticité (relation(3.10)) utilisé pour décrire le comportement plastique du matériau. Tout le problème réside alors dans le choix de la valeur critique à donner à ce nouveau critère de rupture.

Dans le cas d'un essai de traction simple sur éprouvette lisse cette valeur est la déformation plastique correspondant à la contrainte à rupture identifiée à R_m. Ceci revient à considérer que la rupture se produit au point d'instabilité plastique ou début de la striction défini par le critère de Considère dont la formulation mathématique est $dF = 0$, où F désigne l'effort de traction appliqué à l'éprouvette. En fait c'est à partir de ce point que commence réellement le phénomène de rupture initié par le processus d'endommagement. Par conséquent, sans l'utilisation d'un modèle d'endommagement, la rupture associée au phénomène de striction ne peut pas être décrite correctement. C'est pourquoi elle est appréhendée de manière conservative au début de l'instabilité.

Cependant, cette valeur critique de la déformation plastique équivalente est basée sur un cas de chargement uniaxial, correspondant au cas de traction simple, dont le tenseur des contraintes se résume à une unique composante σ_{11}. Est-elle toujours valide pour un cas de chargement quelconque dont le tenseur comporte plusieurs composantes ? Il n'est pas suffisant de répondre que cette transposition est assurée par le fait que la déformation plastique équivalente ε^p_{eq} est égale à ε^p_{11} dans le cas particulier de la traction uniaxiale.

[Barbe, 1976] donne un élément de réponse à cette question à travers l'analyse de l'instabilité plastique, définie par le critère de Considère, pour une éprouvette de traction et une coque mince de forme sphérique ou cylindrique soumise à une pression P.

Soit une éprouvette de traction de section S, soumise à un effort F. Alors, le tenseur des contraintes, le déviateur associé et le tenseur des déformations s'écrivent :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = \begin{bmatrix} 2/3\ \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3\ \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3\ \sigma_1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Compte tenu de la relation (3.14) l'expression du tenseur des déformations plastiques est :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} \varepsilon^p_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & -1/2\ \varepsilon^p_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & -1/2\ \varepsilon^p_{eq} \end{bmatrix}$$

La contrainte équivalente de von Mises, notée σ_{eq}, est égale à la contrainte principale σ_1.

D'où $\quad \sigma_{eq} = \dfrac{F}{S}$

Le critère d'instabilité plastique s'écrit : $dF = 0$.

Par définition $\quad dF = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{eq}}\ d\sigma_{eq} + \dfrac{\partial F}{\partial S} dS = 0$

$$\text{Soit} \quad \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} + \frac{dS}{S} = 0 \tag{3.23}$$

Or $\quad \log \dfrac{S}{S_0} = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad$ ainsi $\quad \dfrac{S}{S_0} = \exp\left(\varepsilon^e_2 + \varepsilon^p_2 + \varepsilon^e_3 + \varepsilon^p_3\right) = \exp\left(-\varepsilon^p_{eq} - \dfrac{2\nu}{E}\ \sigma_{eq}\right)$

Nous avons $\quad dS = \dfrac{\partial S}{\partial \sigma_{eq}}\, d\sigma_{eq} + \dfrac{\partial S}{\partial \varepsilon^p_{eq}} d\varepsilon^p_{eq} = -\,\dfrac{2\nu}{E} S d\sigma_{eq} - S d\varepsilon^p_{eq}$

(3.23) devient $\quad \dfrac{\sigma_{eq}}{d\sigma_{eq}} d\varepsilon^p_{eq} = 1 - \dfrac{2\nu}{E}\sigma_{eq}$

En supposant que le matériau soit rigide plastique ($E \to \infty$) avec une loi d'écrouissage de type Ramberg-Osgood, l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{\sigma_{eq}}{d\sigma_{eq}} d\varepsilon^p_{eq} = 1 \quad \text{avec} \quad \varepsilon^p_{eq} = \alpha \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^n \quad \text{soit} \quad d\varepsilon^p_{eq} = \frac{\alpha n}{(\sigma_0)^n} (\sigma_{eq})^{n-1} d\sigma_{eq} = n\varepsilon^p_{eq} \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \tag{3.24}$$

Finalement $\quad n\varepsilon^p_{eq} = 1$

La valeur critique de ε_{eq} au moment de l'instabilité d'une éprouvette de traction est donc égale à $1/n$ où n est l'exposant de la loi d'écrouissage de Ramberg-Osgood.

Soit une coque mince, cylindrique ou sphérique de rayon R et d'épaisseur t, soumise à une pression P. Alors le tenseur des contraintes, le déviateur associé et le tenseur des déformations s'écrivent :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{PR}{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 = \frac{PR}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = \begin{bmatrix} \frac{2-\alpha}{3\alpha}\,\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha-1}{3\alpha}\,\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\,\frac{1+\alpha}{3\alpha}\,\sigma_2 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

La valeur du paramètre α est égale à 1 ou 1/2 respectivement pour une coque sphérique ou cylindrique. En utilisant la relation (3.13) la contrainte équivalente de von Mises est égale à :

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}}{2\alpha}\,\frac{PR}{t} = k\,\frac{PR}{2t} \quad \text{ainsi} \quad P = \frac{2t}{kR}\,\sigma_{eq} \tag{3.25}$$

Compte tenu de la relation (3.14) l'expression du tenseur des déformations plastiques est :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\varepsilon}^p_{eq}\,\frac{3}{2\sigma_{eq}} \begin{bmatrix} \frac{2-\alpha}{3\alpha}\,\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha-1}{3\alpha}\,\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\,\frac{1+\alpha}{3\alpha}\,\sigma_2 \end{bmatrix} = \dot{\varepsilon}^p_{eq} \begin{bmatrix} \frac{2-\alpha}{2k\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha-1}{2k\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\,\frac{1+\alpha}{2k\alpha} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Le critère d'instabilité plastique pour la coque sous pression s'écrit : $dP = 0$.

D'après (3.25) $\quad dP = \dfrac{\partial P}{\partial \sigma_{eq}}\, d\sigma_{eq} + \dfrac{\partial P}{\partial t} dt + \dfrac{\partial P}{\partial R} dR = 0$

Soit $\quad \dfrac{2t}{kR}\, d\sigma_{eq} + \dfrac{2\sigma_{eq}}{kR} dt - \dfrac{2t\sigma_{eq}}{kR^2} dR = 0$

D'où $\quad \dfrac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} + \dfrac{dt}{t} - \dfrac{dR}{R} = 0$

Par définition $\varepsilon_1 = \log R/R_0$ nous avons donc $d\varepsilon_1 = dR/R$ et de même $d\varepsilon_3 = dt/t$. En injectant ces expressions dans la relation ci-dessus nous pouvons écrire :

$$\frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} + d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1 = 0$$

Ainsi $\quad \dfrac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} + d\varepsilon^e_3 + d\varepsilon^p_3 - d\varepsilon^e_1 - d\varepsilon^p_1 = 0 \qquad (3.27)$

Or $\quad d\varepsilon^e_3 - d\varepsilon^e_1 = -\,\dfrac{\nu}{E}\,\dfrac{1+\alpha}{k\alpha}\,\sigma_{eq} - \dfrac{1-\alpha\nu}{k\alpha E}\,\sigma_{eq} = -\,\dfrac{1+\nu}{k\alpha E}\,\sigma_{eq}$

(3.26) donne $d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p = -\dfrac{1+\alpha}{2k\alpha}\, d\varepsilon_{eq}^p + \dfrac{2-\alpha}{2k\alpha} = -\dfrac{3}{2k\alpha}\, d\varepsilon_{eq}^p$

(3.27) devient $\dfrac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} - \dfrac{1+\nu}{k\alpha E}\,\sigma_{eq} - \dfrac{3}{2k\alpha}\, d\varepsilon_{eq}^p = 0$

Finalement $\sigma_{eq}\,\dfrac{d\varepsilon_{eq}^p}{d\sigma_{eq}} = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{\alpha^2-\alpha+1} - \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{eq}\right)$

En supposant que le matériau soit rigide plastique avec une loi d'écrouissage de type Ramberg-Osgood et en se référant à (3.24), l'équation ci-dessus devient :

$$n\,\varepsilon_{eq}^p = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\alpha^2-\alpha+1} - \frac{1+\nu}{E}\sigma_{eq}\right)$$

Ainsi au moment de l'instabilité plastique la valeur critique de ε_{eq}^p sera de $\frac{2}{3n}$ pour la coque sphérique et de $\frac{1}{n\sqrt{3}}$ pour la coque cylindrique où n désigne l'exposant de la loi de Ramberg-Osgood.

En conclusion les études précédentes relatives à l'instabilité plastique, pour trois structures de géométrie différente, fournissent trois valeurs distinctes pour la valeur critique de la déformation plastique équivalente, considérée comme critère de rupture. Par conséquent il est nécessaire de chercher un autre critère de rupture dont le domaine de validité sera d'autant plus étendu que ce critère tiendra compte des micromécanismes de la rupture ductile : germination, croissance et coalescence des cavités.

3.3.1.2 Critères de croissance des cavités

Les critères les plus simples afin de modéliser le processus d'endommagement ont été développés par [McClintock, 1968] et [Rice and Tracey, 1969]. Ils sont uniquement représentatifs de la phase de croissance des cavités sans tenir compte des phénomènes de germination et de coalescence. Par contre ils sont très simples à mettre en œuvre car ils ne sont pas couplés à la plasticité, c'est-à-dire que la croissance des cavités ne modifie pas le comportement plastique du matériau. Cette approximation n'est pas rédhibitoire pour notre alliage, car il n'est pas suffisamment ductile pour que la phase de croissance des cavités joue un rôle essentiel dans la modélisation du phénomène d'adoucissement.

Les analyses de [McClintock, 1968] et [Rice and Tracey, 1969] sont similaires mais la première considère une cavité cylindrique tandis que la seconde s'occupe d'une cavité sphérique. Elles présentent l'étude de la croissance d'une cavité cylindrique ou sphérique située dans une matrice de dimensions infinies par rapport à celles de la cavité. Le matériau de la matrice est supposé parfaitement plastique de limite élastique σ_0, incompressible et régi par le critère de von Mises. Nous nous intéresserons essentiellement à la cavité sphérique car dans un matériau réel, les cavités issues de la décohésion entre un composé intermétallique et la matrice sont plus facilement assimilabes à des sphères qu'à des cylindres.

Dans le cas de la cavité sphérique, exposé dans [Rice and Tracey, 1969], le champ de vitesse microscopique est supposé se décomposer en un premier champ de vitesse qui change le volume mais pas la forme de la cavité, et en un second champ de vitesse qui change la forme mais pas le volume de la cavité. Les auteurs de cette étude montrent alors que ce dernier champ de vitesse devient négligeable pour des taux de triaxialité suffisamment grands. Dans ces conditions ils parviennent, en reliant le tenseur des déformations microscopiques aux conditions aux limites macroscopiques, à établir l'évolution du rayon R de la cavité à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{\dot{R}}{R} = 0,283\ \exp\left(\frac{3}{2}\,\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)\ \dot{\varepsilon}_{eq}^p \tag{3.28}$$

Dans l'expression ci-dessus $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ désigne le taux de déformation plastique équivalente. Le critère de rupture, noté R/R_0, s'obtient alors par intégration sur le trajet de chargement de (3.28) :

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \int 0,283 \ \exp\left(\frac{3}{2}\ \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) \ \dot{\varepsilon}^p_{eq}$$

La rupture d'une structure quelconque a lieu lorsque le critère local R/R_0 atteint une valeur critique notée $(R/R_0)_c$ indépendante du taux de triaxialité, c'est-à-dire valable quelle que soit la valeur de ce dernier. Cette valeur critique est déterminée à l'aide d'essais sur éprouvettes axisymétriques entaillées AE avec des rayons d'entailles différents. En effet l'analyse de ces éprouvettes effectuée initialement par [Beremin, 1980] montre qu'à partir d'un certain niveau de chargement le taux de triaxialité maximal se localise au centre de l'éprouvette. Il possède une valeur constante caractérisée par celle du rayon d'entaille de l'éprouvette AE. Un calcul par la méthode des éléments finis permet d'évaluer $(R/R_0)_c$ au moment de la rupture expérimentale des différentes éprouvettes AE. Il est ainsi possible de s'assurer que cette valeur est constante et ne dépend pas du taux de triaxialité.

Afin de tenir compte de l'écrouissage du matériau, la contrainte σ_0 est remplacée dans la relation (3.28) par le critère de plasticité de von Mises, noté σ_{eq}, utilisé pour définir l'équation de la surface limite, formulée par (3.5). [Huang, 1991] a modifié la formulation du critère R/R_0 afin de tenir compte des faibles taux de triaxialité qui ne sont pas correctement pris en compte dans [Rice and Tracey, 1969]. En effet, par hypothèse, ces auteurs considèrent des taux de triaxialité suffisamment importants afin de négliger le champ de vitesse qui change la forme mais pas le volume de la cavité. Nous obtenons alors l'expression suivante de l'évolution du rayon R de la cavité sphérique :

$$\frac{\dot{R}}{R} = \begin{cases} 0,427 \ \left(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)^{1/4} \ \exp\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \ \dot{\varepsilon}^p_{eq} & \text{pour} \quad \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \leq 1 \\ \\ 0,427 \ \exp\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \ \dot{\varepsilon}^p_{eq} & \text{pour} \quad \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \geq 1 \end{cases} \tag{3.29}$$

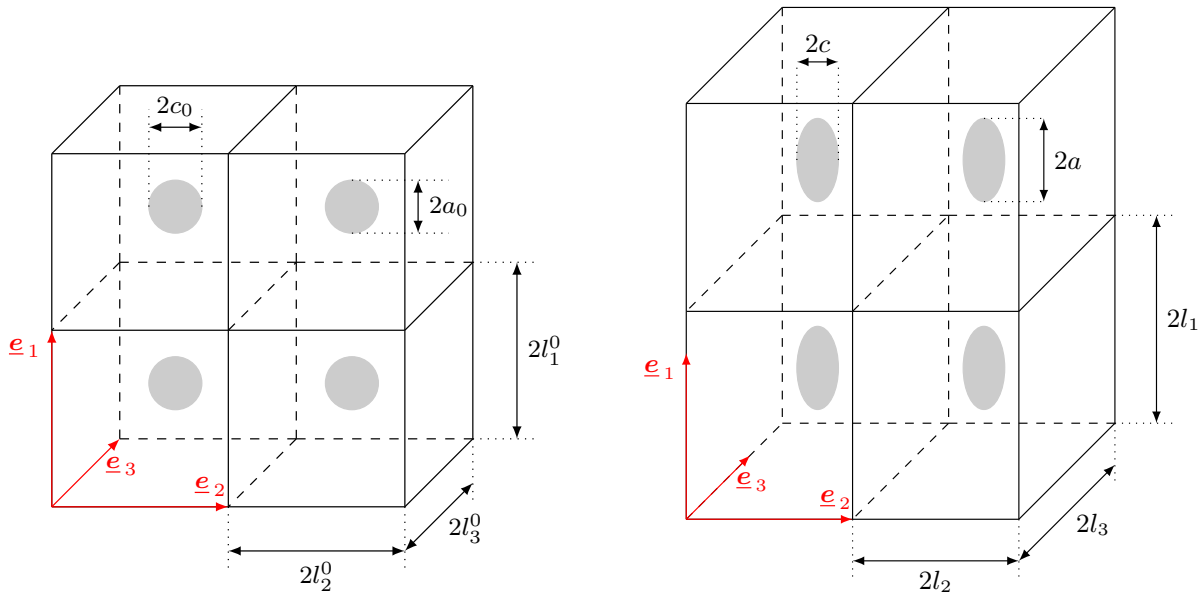
Le critère de rupture R/R_0 a été utilisé avec succès dans les débuts de l'approche locale, surtout dans des études sur la rupture des aciers, menées par exemple par [d'Escatha and Devaux, 1979], [Devaux et al., 1989] et [Mudry et al., 1989], mais également pour prévoir la rupture d'alliages d'aluminium comme dans [Achon, 1994]. A l'heure actuelle ce critère a été remplacé par des modèles couplés à la plasticité tel que celui développé par [Gurson, 1977]. Nous avons choisi de nous intéresser au critère développé par [Rice and Tracey, 1969] car il ne nécessite pas d'implémentation particulière. En effet il s'obtient par simple post-traitement d'un calcul élasto-plastique, il est donc utilisable dans un contexte industriel. De plus le calibrage de sa valeur critique se fait à partir d'essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées, facilement réalisables à l'aide d'une simple machine de traction.

Les résultats des essais exposés dans la première partie du chapitre 1 ont montré que la rupture n'est pas isotrope. Employé seul le critère exposé précédemment ne permet pas de rendre compte du caractère orthotrope de la rupture. Mais il devient possible de modéliser ce phénomène en le couplant au critère de coalescence des cavités, développé par [Thomason, 1985a], que nous allons maintenant analyser en détail.

3.3.1.3 Critère de coalescence des cavités

Dans les travaux résumés par [Thomason, 1985a] et [Thomason, 1985b] la coalescence des cavités est abordée sous un angle nouveau. En effet elle est supposée être engendrée par l'instabilité plastique des ligaments séparant les cavités. Ainsi il existe une différence de nature entre la croissance et la coalescence des cavités, contrairement au modèle de [Rice and Tracey, 1969] où la coalescence est supposée se produire lorsque le critère de croissance R/R_0 atteint une valeur critique.

La figure 3.13 illustre la structure du matériau, celle-ci est modélisée par un assemblage de cellules



(a) Configuration initiale (b) Configuration en cours de chargement

FIGURE 3.13 – Réseau de cellules parallélépipédiques contenant une cavité elliptique

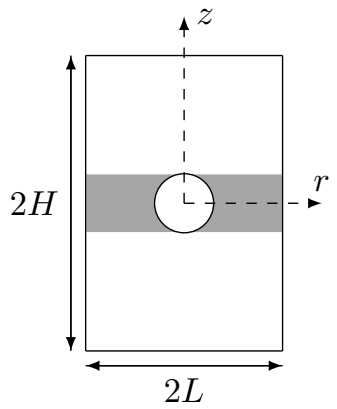


FIGURE 3.14 – Cellule cylindrique centrée sur une cavité sphérique

parallélépipédiques, dont le centre est occupé par une cavité elliptique. Un certain nombre d'hypothèses issues de [Thomason, 1985a] sont résumées ci-dessous :

- A l'état initial les cavités sont supposées être sphériques ($a_0 = b_0 = c_0$) et les cellules sont des cubes d'arête $2l_0$ ainsi $l_1^0 = l_2^0 = l_3^0 = l_0$.
- Au cours du chargement les longueurs $2l_1$, $2l_2$ et $2l_3$ des cellules parallélépipédiques sont continuellement alignées suivant les vecteurs propres $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$, supposés fixes, du tenseur des déformations.
- La croissance des cavités est gérée par le modèle de [Rice and Tracey, 1969], les cavités deviennent alors des ellipsoïdes de rayons a, c et b définis respectivement suivant $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$.
- Les longueurs des ligaments entre cavités sont notées f, e et d respectivement selon $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$.
- Le chargement est caractérisé par le paramètre de Lode ν_L défini à partir des valeurs propres du tenseur des taux de déformation plastique.
- Le matériau est supposé rigide parfaitement plastique de limite élastique σ_y.
- La plasticité est régie par le critère de von Mises.
- La porosité initiale est notée f_0.

Il est intéressant d'aborder le critère de coalescence développé dans [Thomason, 1985a] à partir du cas axisymétrique, car sa relative simplicité permet de mieux comprendre les concepts de base mis en œuvre par cet auteur. La figure 3.14 représente une cellule cylindrique de diamètre $2L$ et de hauteur $2H$ dont le centre est occupé par une cavité sphérique de rayon R. Le tenseur des contraintes appliqué à cette cellule est également axisymétrique et s'écrit :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Il s'agit alors d'écrire l'équilibre du ligament où se concentre la plasticité, compte tenu de la présence de la cavité, nous obtenons :

$$\pi L^2 \sigma_{zz} = \pi C_f \left(L^2 - R^2\right) \sigma_y \tag{3.31}$$

Le terme de droite dans l'équation ci-dessus représente l'effort dans la direction z rapporté sur le ligament. Cet effort doit évidemment être égal à la force extérieure appliquée à la cellule, exprimée par : $\pi L^2 \sigma_{zz}$. Le facteur de confinement plastique C_f traduit l'effet de concentration de contrainte au niveau du ligament, induit par la présence de la cavité. Nous pouvons constater que selon le critère de [Thomason, 1985a] la coalescence s'effectue perpendiculairement au sens de sollicitation du matériau. [Thomason, 1985b] utilise une méthode de borne supérieure pour calculer C_f dont l'expression est :

$$C_f = \frac{0,1}{\left(\dfrac{R}{L-R}\right)^2} + \frac{1,2}{\left(\dfrac{R}{L}\right)^{1/2}} = 0,1\left(\frac{1}{\chi}\right)^2 + 1,2\sqrt{\frac{1}{\chi}} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{R}{L} \tag{3.32}$$

Nous pouvons alors à partir de la relation (3.31) déduire l'expression du critère de coalescence suivant :

$$\frac{\sigma_{zz}}{S_n\ \sigma_y} = C_f = \frac{0,1}{\left(\dfrac{R}{L-R}\right)^2} + \frac{1,2}{\left(\dfrac{R}{L}\right)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{4\pi L^2 - 4\pi R^2}{4\pi L^2} = 1 - \frac{R^2}{L^2} \tag{3.33}$$

Dans la relation ci-dessus S_n représente le rapport de la section effective sur la section totale de la cellule, ces sections sont à considérer perpendiculairement à l'effort appliqué à la cellule. En posant $\sigma_n = \sigma_{zz}/S_n$ et en se référant aux notations de la figure 3.13, la relation (3.33) permet de retrouver, pour le cas axisymétrique, l'expression du critère de coalescence issus de [Thomason, 1985a] :

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_y} = C_f \quad \text{avec} \quad \sigma_n = \frac{\sigma_{11}}{S_n} \quad \text{et} \quad C_f = \frac{0,1}{\left(\dfrac{a}{d}\right)^2} + \frac{1,2}{\left(\dfrac{b}{b+d}\right)^{1/2}} \tag{3.34}$$

Afin de transposer ce critère au cas plus général décrit par la figure 3.13, [Thomason, 1985a] propose de remplacer dans la relation ci-dessus :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{d} & \text{par} \quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{a}{e}\right) \\[2ex] \dfrac{b}{b+d} & \text{par} \quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{b+d} + \dfrac{c}{c+e}\right) \end{cases}$$

Le critère de coalescence devient donc :

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_y} = C_f \quad \text{avec} \quad \sigma_n = \frac{\sigma_{11}}{S_n} \quad \text{et} \quad C_f = \frac{0,4}{\left(\frac{a}{d} + \frac{a}{e}\right)^2} + \frac{1,697}{\left(\frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+e}\right)^{1/2}} \tag{3.35}$$

Les expressions de a/d et a/e fournies par [Thomason, 1985a] sont :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{d} = \dfrac{a/a_0}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\ \exp\left[\left(\dfrac{\nu_L - 3}{\nu_L + 3}\right)\ \varepsilon_1\right] - \dfrac{b}{b_0}} \\[2ex] \dfrac{a}{e} = \dfrac{a/a_0}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\ \exp\left[-\left(\dfrac{2\nu_L}{\nu_L + 3}\right)\ \varepsilon_1\right] - \dfrac{c}{c_0}} \end{cases} \tag{3.36}$$

Nous allons maintenant démontrer les relations ci-dessus et fournir l'expression de $b/(b+d)$ et $c/(c+e)$ afin de déterminer complètement le critère défini par (3.35). Commençons par chercher à exprimer e et d, nous avons compte tenu des hypothèses listées précédemment :

$$\begin{cases} d = \ l_3 - b \ = l_3^0 \exp \varepsilon_3 - b \qquad \text{car} \qquad \varepsilon_3 = \ln\left(l_3/l_3^0\right) \\ e = \ l_2 - c \ = l_2^0 \exp \varepsilon_2 - c \qquad \text{car} \qquad \varepsilon_2 = \ln\left(l_2/l_2^0\right) \end{cases}$$

$$\text{Or} \quad f_0 = \frac{(4\pi a_0^3)/3}{8 l_1^0 l_2^0 l_3^0} = \frac{\pi a_0^3}{6 l_0^3} \quad \text{d'où} \quad l_0 = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6f_0}} a_0 \tag{3.37}$$

$$\text{Par conséquent} \quad \begin{cases} d = \ a_0 \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\ \exp \varepsilon_3 - b \ = \ a_0 \left(\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\ \exp \varepsilon_3 - \dfrac{b}{b_0}\right) \\[2ex] e = \ a_0 \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\ \exp \varepsilon_2 - c \ = \ a_0 \left(\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\ \exp \varepsilon_2 - \dfrac{c}{c_0}\right) \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} \dfrac{a}{d} = \dfrac{a/a_0}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\ \exp \varepsilon_3 - \dfrac{b}{b_0}} \\[2ex] \dfrac{a}{e} = \dfrac{a/a_0}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\ \exp \varepsilon_2 - \dfrac{c}{c_0}} \end{cases} \tag{3.38}$$

Cherchons maintenant à exprimer ε_2 et ε_3 en fonction de ε_1 et du paramètre de Lode. Celui-ci permet de caractériser le tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ à travers les deuxième et troisième invariants du déviateur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}$, respectivement notés J_2 et J_3. Un tenseur est complètement déterminé à partir de ses trois invariants.

Par conséquent le tenseur des contraintes sera totalement défini à l'aide de la pression hydrostatique σ_m, faisant intervenir la trace de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$, de la contrainte équivalente de von Mises égale à $\sqrt{3J_2}$, et du paramètre de Lode. [Xue and Wierzbicki, 2008] et [Danas and Ponte Castaneda, 2012] fournissent les deux formulations possibles du paramètre de Lode, notées L et μ_L, ainsi que la relation permettant de passer de l'une à l'autre.

$$L = -\frac{27}{2}\frac{J_3}{\sqrt{3J_2}} \quad \text{et} \quad \mu_L = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad \text{avec} \quad L = \frac{\mu_L\ \left(9 - \mu_L^2\right)}{\sqrt{\left(\mu_L^2 + 3\right)^3}}$$

De même il existe une définition du paramètre de Lode, notée ν_L, relative au tenseur des déformations ou plutôt au tenseur des taux de déformations plastiques qui a priori n'est pas égale à celle définie

à partir du tenseur des contraintes. Puisque nous souhaitons expliciter ε_2 et ε_3 en fonction de ε_1 et du paramètre de Lode, nous allons utiliser cette définition, issue de [Thomason, 1985a], dont l'expression s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{ll} \nu_L = -\dfrac{3\,\dot{\varepsilon}_2^p}{\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_3^p} & \text{avec} \quad \dot{\varepsilon}_1^p \geq \dot{\varepsilon}_2^p \geq \dot{\varepsilon}_3^p \\ \\ \nu_L = -\dfrac{3\,\varepsilon_2^p}{\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p} & \text{dans le cas d'un chargement radial} \end{array}\right. \tag{3.39}$$

Le matériau étant rigide parfaitement plastique, le tenseur des déformations élastiques $\underset{\sim}{\varepsilon}^e$ est nul ainsi le tenseur des déformation plastiques $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ est égal à celui des déformations totales $\underset{\sim}{\varepsilon}$ qui hérite des propriétés d'un déviateur soit : $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. En utilisant la relation (3.39) nous pouvons alors écrire :

$$\varepsilon_1 + \frac{\nu_L}{3}\,(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + \varepsilon_3 = 0 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_3 = \frac{\nu_L - 3}{\nu_L + 3}\,\varepsilon_1 \tag{3.40}$$

$$\text{D'après (3.39) et (3.40)} \quad 3\,\varepsilon_2 = \nu_L\left(\frac{\nu_L - 3}{\nu_L + 3} - 1\right)\varepsilon_1 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_2 = -\frac{2\nu_L}{\nu_L + 3}\,\varepsilon_1 \tag{3.41}$$

En injectant les relations (3.40) et (3.41) dans (3.38) nous retrouvons les expressions de a/d et a/e issues de [Thomason, 1985a]. Il est aisé de montrer que $b/(b+d)$ et $c/(c+e)$ dépendent respectivement du rapport b/d et c/e. Or ces deux derniers rapports ont des expressions similaires à celles de a/d et a/e, nous obtenons donc :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{b}{b+d} = \dfrac{b/d}{1+\dfrac{b}{d}} & \text{avec} & \dfrac{b}{d} & = & \dfrac{b/b_0}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\,\exp\left[\left(\dfrac{\nu_L - 3}{\nu_L + 3}\right)\varepsilon_1\right] - \dfrac{b}{b_0}} \\ \\ \dfrac{c}{c+e} = \dfrac{c/e}{1+\dfrac{c}{e}} & \text{avec} & \dfrac{c}{e} & = & \dfrac{c/c_0}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6f_0}}\,\exp\left[-\left(\dfrac{2\nu_L}{\nu_L + 3}\right)\varepsilon_1\right] - \dfrac{c}{c_0}} \end{array}\right. \tag{3.42}$$

Calculons pour finir les rapports a/a_0, b/b_0 et c/c_0 en supposant que l'évolution des rayons des cavités est régie par le modèle de [Rice and Tracey, 1969]. Dans cette approche durant leur phase de croissance les cavités sont supposées conserver une forme sphérique. Néanmoins il existe dans [Rice and Tracey, 1969] tous les éléments théoriques nécessaires à la prise en compte de l'évolution de la forme des cavités qui sera alors assimilée à un ellipsoïde. [Le Roy et al., 1981] et [Worswick and Pick, 1990] ont utilisé par exemple une évolution des rayons R_k de l'ellipsoïde, suivant chaque direction propre $\underline{\boldsymbol{e}}_k$ du tenseur des déformations, dont la formulation mathématique est :

$$\frac{\dot{R}_k}{R_k} = \frac{\dot{R}}{R} + (1+E)\;\dot{\varepsilon}_k^p \tag{3.43}$$

Le paramètre E contrôle le changement de forme des cavités, sa valeur est égale à $2/3$ pour un faible σ_m et à 1 pour un σ_m important. Les travaux de [Worswick and Pick, 1990] et [Pardoen and Delannay, 1998] montrent que la valeur de E n'est pas constante mais varie en fonction du taux de triaxialité et de la déformation plastique équivalente. Néanmoins en première approximation nous considèrerons que E a une valeur constante égale à $2/3$ ou 1 car nous cherchons une formulation générale applicable pour un large éventail de chargements. Or ceci n'est pas le cas, par exemple, de la formulation de E issue de [Pardoen and Delannay, 1998] qui a été certes approfondie mais dans un cadre plus restreint de chargements.

Nous allons utiliser la relation (3.43) afin de prédire l'évolution des cavités dans la configuration

issue de [Thomason, 1985a] décrite par la figure 3.13, d'où les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\dot{a}}{a} & = & \dfrac{\dot{R}}{R} + (1+E)\ \dot{\varepsilon}_1^p \\ \\ \dfrac{\dot{b}}{b} & = & \dfrac{\dot{R}}{R} + (1+E)\ \dot{\varepsilon}_3^p \\ \\ \dfrac{\dot{c}}{c} & = & \dfrac{\dot{R}}{R} + (1+E)\ \dot{\varepsilon}_2^p \end{array}\right. \tag{3.44}$$

Compte tenu du modèle de [Rice and Tracey, 1969] dont la relation (3.28) traduit la formulation mathématique, nous avons :

$$\frac{\dot{R}}{R} = 0,283\ \exp\left(\frac{3}{2}\ \frac{\sigma_m}{\sigma_y}\right)\ \dot{\varepsilon}_{eq}^p = D\ \dot{\varepsilon}_{eq}^p \quad \text{en posant} \quad D = 0,283\ \exp\left(\frac{3}{2}\ \frac{\sigma_m}{\sigma_y}\right)$$

En se souvenant que le matériau est rigide parfaitement plastique et que [Thomason, 1985a] suppose que σ_m est constant, l'intégration de l'équation précédente permet d'écrire :

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \int D\ \dot{\varepsilon}_{eq}^p = \int D\ \dot{\varepsilon}_{eq} = D\ \int \dot{\varepsilon}_{eq} = D\ \varepsilon_{eq} \tag{3.45}$$

Le tenseur des déformations élastiques étant nul, le tenseur des déformations totales est un déviateur par conséquent l'expression de ε_{eq} est donnée par :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\ \varepsilon_{ij}\ \varepsilon_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}\ \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}\right)}$$

En utilisant les relations (3.40) et (3.41) la définition de la trace de $\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}$ devient :

$$\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}\right) = (\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_3)^2 = (\varepsilon_1)^2 + \frac{4\nu_L^2}{(3+\nu_L)^2}\ (\varepsilon_1)^2 + \frac{(\nu_L - 3)^2}{(3+\nu_L)^2}\ (\varepsilon_1)^2$$

$$\text{Ainsi} \quad \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}\right) = 6\ \frac{3+\nu_L^2}{(3+\nu_L)^2}\ (\varepsilon_1)^2 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{eq} = \frac{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}{3+\nu_L}\ \varepsilon_1$$

En injectant ce résultat dans (3.45) nous obtenons :

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \frac{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}{3+\nu_L}\ D\ \varepsilon_1 \quad \text{d'où} \quad \frac{R}{R_0} = \exp\left(\frac{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}{3+\nu_L}\ D\ \varepsilon_1\right)$$

Nous conservons les notations de [Thomason, 1985a] par conséquent nous posons :

$$A = \frac{R}{R_0} = \exp\left(\frac{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}{3+\nu_L}\ D\ \varepsilon_1\right) = \exp\left(D\ \varepsilon_{eq}\right) \tag{3.46}$$

Nous pouvons maintenant intégrer la relation (3.44) :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \ln\left(\dfrac{a}{a_0}\right) & = & \ln\left(\dfrac{R}{R_0}\right) + (1+E)\ \varepsilon_1^p & = & \ln\left(\dfrac{R}{R_0}\right) + (1+E)\ \varepsilon_1 \\ \ln\left(\dfrac{b}{b_0}\right) & = & \ln\left(\dfrac{R}{R_0}\right) + (1+E)\ \varepsilon_3^p & = & \ln\left(\dfrac{R}{R_0}\right) + (1+E)\ \varepsilon_3 \\ \ln\left(\dfrac{c}{c_0}\right) & = & \ln\left(\dfrac{R}{R_0}\right) + (1+E)\ \varepsilon_2^p & = & \ln\left(\dfrac{R}{R_0}\right) + (1+E)\ \varepsilon_2 \end{array}\right.$$

En tenant compte de (3.46) les expressions ci-dessus sont transformées de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{a}{a_0} & = & A\ \exp\left[(1+E)\ \varepsilon_1\right] \\ \dfrac{b}{b_0} & = & A\ \exp\left[(1+E)\ \varepsilon_3\right] \\ \dfrac{c}{c_0} & = & A\ \exp\left[(1+E)\ \varepsilon_2\right] \end{array}\right.$$

En se souvenant du développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de zéro :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{a}{a_0} & = & A\ [1\ +\ (1+E)\ \varepsilon_1] & = & A + (1+E)\ A\ \varepsilon_1 \\ \dfrac{b}{b_0} & = & A\ [1\ +\ (1+E)\ \varepsilon_3] & = & A + (1+E)\ A\ \varepsilon_3 \\ \dfrac{c}{c_0} & = & A\ [1\ +\ (1+E)\ \varepsilon_2] & = & A + (1+E)\ A\ \varepsilon_2 \end{array}\right. \tag{3.47}$$

Il nous faut évaluer $A\ \varepsilon_1$, $A\ \varepsilon_2$ et $A\ \varepsilon_3$ pour cela partons de la relation (3.46) :

$$A = \exp\left(\frac{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}{3+\nu_L}\ D\ \varepsilon_1\right) = 1\ +\ \frac{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}{3+\nu_L}\ D\ \varepsilon_1$$

Soit $\quad \varepsilon_1 = \dfrac{3+\nu_L}{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}\ \dfrac{A-1}{D}$

D'où $\quad A\ \varepsilon_1 = \dfrac{3+\nu_L}{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}\ \dfrac{A^2-A}{D}$

Or $\quad A^2 = [\exp(D\ \varepsilon_{eq})]^2 = \exp(2\ D\ \varepsilon_{eq}) = 1\ +\ 2\ D\ \varepsilon_{eq}$

De même $\quad A = 1\ +\ D\ \varepsilon_{eq}$ $\quad$ ainsi $\quad A^2 - A = D\ \varepsilon_{eq} = A - 1$

Par conséquent $\quad A\ \varepsilon_1 = \dfrac{3+\nu_L}{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}\ \dfrac{A-1}{D}$

Les relations (3.40) et (3.41) permettent de calculer $A\ \varepsilon_2$ et $A\ \varepsilon_3$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} A\ \varepsilon_2 & = & -\dfrac{\nu_L}{\sqrt{3+\nu_L^2}}\ \dfrac{A-1}{D} \\ \\ A\ \varepsilon_3 & = & \dfrac{\nu_L-3}{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}\ \dfrac{A-1}{D} \end{array}\right.$$

Finalement en introduisant ces dernières expressions dans (3.47) nous retrouvons les relations établies par [Thomason, 1985a] :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{a}{a_0} & = & A\ +\ \dfrac{3+\nu_L}{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}\ \dfrac{1+E}{D}\ (A-1) \\ \\ \dfrac{b}{b_0} & = & A\ +\ \dfrac{\nu_L-3}{2\ \sqrt{3+\nu_L^2}}\ \dfrac{1+E}{D}\ (A-1) \\ \\ \dfrac{c}{c_0} & = & A\ -\ \dfrac{\nu_L}{\sqrt{3+\nu_L^2}}\ \dfrac{1+E}{D}\ (A-1) \end{array}\right. \tag{3.48}$$

Revenons un instant sur l'expression de C_f dans le critère de coalescence défini par (3.35). Nous pouvons alors constater au regard des expressions (3.38), (3.42) et (3.48) que C_f dépend uniquement de la porosité initiale du matériau f_0, du taux de triaxialité σ_m/σ_y, du paramètre de Lode ν_L et de la déformation principale ε_1. Ainsi pour un matériau donné (f_0 fixée) et une géométrie particulière d'éprouvette (σ_m/σ_y et ν_L fixés), le critère exprimé par (3.35) permet d'obtenir une valeur critique de ε_1, notée ε_1^f, caractéristique du début de la coalescence, à condition de pouvoir exprimer σ_n/σ_y uniquement en fonction de f_0, σ_m/σ_y, ν_L et ε_1. Compte tenu de la relation (3.35) nous avons en se souvenant de la définition de S_n, donnée par (3.33)

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_y} = \frac{\sigma_{11}}{S_n\ \sigma_y} = \frac{\sigma_1}{S_n\ \sigma_y} \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{4l_2l_3-\pi bc}{4l_2l_3} = 1-\frac{\pi bc}{4l_2l_3} \tag{3.49}$$

Dans l'expression ci-dessus la contrainte σ_{11} est assimilée à la contrainte principale σ_1 car [Thomason, 1985a] suppose que les vecteurs propres $\underline{\boldsymbol{e}}_1$, $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ du tenseur des déformations restent alignés avec les arêtes de la cellule parallélépipédique. La conservation du volume de la cellule permet d'écrire :

$$8l_1l_2l_3 = 8l_1^0l_2^0l_3^0 = \frac{4\pi a_0^3}{3f_0} \quad \text{puisque par hypothèse} \quad a_0=b_0=c_0$$

D'où $\dfrac{1}{l_1l_2} = \dfrac{6f_0}{\pi a_0^3}\ l_1 = \dfrac{6f_0}{\pi a_0^3}\ l_1 = \dfrac{6f_0}{\pi a_0^3}\ l_1^0\ \exp(\varepsilon_1)$

D'après (3.37) $\dfrac{1}{l_1l_2} = \dfrac{6f_0}{\pi a_0^3}\ l_0\ \exp(\varepsilon_1) = \dfrac{6f_0}{\pi a_0^2}\ \left(\dfrac{\pi}{6f_0}\right)^{1/3} \exp(\varepsilon_1)$

Ainsi $\dfrac{\pi bc}{4l_1l_2} = \dfrac{3f_0}{2}\ \left(\dfrac{\pi}{6f_0}\right)^{1/3} \dfrac{bc}{a_0^2}\ \exp(\varepsilon_1) = \left(\dfrac{3\ \sqrt{\pi}}{4}\ f_0\right)^{2/3} \dfrac{b}{b_0}\ \dfrac{c}{c_0}\ \exp(\varepsilon_1)$

Le matériau est supposé parfaitement plastique de limite élastique σ_y avec une plasticité régie par le critère de von Mises ainsi :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_y} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} = \frac{s_1}{\sigma_{eq}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \tag{3.50}$$

En se souvenant de (3.14) il apparait que l'accroissement $\dot{\varepsilon}_i^p$ est proportionnel à s_i par conséquent :

$$\nu_L = \frac{2\ s_2 - s_3 - s_1}{s_1 - s_3} = -\ \frac{3\ s_2}{s_1 - s_3} \quad \text{puisque } \underset{\approx}{s} \text{ est un déviateur}$$

De plus les relations (3.40) et (3.41) s'appliquent également aux valeurs propres du déviateur des contraintes, nous obtenons donc compte tenu de la définition du critère de von Mises :

$$2\ \sigma_{eq}^2 = \left(s_1 + \frac{2\nu_L}{\nu_L + 3}\ s_1\right)^2 + \left(s_1 - \frac{\nu_L - 3}{\nu_L + 3}\ s_1\right)^2 + \left(\frac{\nu_L - 3}{\nu_L + 3}\ s_1 + \frac{2\nu_L}{\nu_L + 3}\ s_1\right)^2$$

$$\text{Soit} \quad 2\ \sigma_{eq}^2 = \left[\left(\frac{3\nu_L + 3}{\nu_L + 3}\right)^2 + \left(\frac{6}{\nu_L + 3}\right)^2 + \left(\frac{3\nu_L - 3}{\nu_L + 3}\right)^2\right]\ s_1^2$$

$$\text{D'où} \quad 2\ \sigma_{eq}^2 = \frac{18\ \left(\nu_L^2 + 3\right)}{\left(\nu_L + 3\right)^2}\ s_1^2$$

$$\text{Finalement} \quad \frac{\sigma_{eq}}{s_1} = 3\ \frac{\sqrt{\nu_L^2 + 3}}{\nu_L + 3}$$

$$\text{Compte tenu de (3.50)} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_y} = \frac{\nu_L + 3}{3\ \sqrt{\nu_L^2 + 3}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$$

En introduisant ce dernier résultat dans (3.49) nous avons :

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_y}\ \left[1 - \left(\frac{3\ \sqrt{\pi}}{4}\ f_0\right)^{2/3} \frac{b}{b_0}\ \frac{c}{c_0}\ \exp\left(\varepsilon_1\right)\right] = \frac{\nu_L + 3}{3\ \sqrt{\nu_L^2 + 3}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \tag{3.51}$$

En conclusion il y aura coalescence selon [Thomason, 1985a] quand l'égalité ci-dessous sera vérifiée :

$$C_f\ \left[1 - \left(\frac{3\ \sqrt{\pi}}{4}\ f_0\right)^{2/3} \frac{b}{b_0}\ \frac{c}{c_0}\ \exp\left(\varepsilon_1\right)\right] = \frac{\nu_L + 3}{3\ \sqrt{\nu_L^2 + 3}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \quad \text{où } C_f \text{ est défini par (3.35)} \tag{3.52}$$

Nous allons maintenant étudier, comme dans [Thomason, 1985a], la coalescence dans le cas d'un chargement en traction pour lequel le paramètre de Lode est égal à 1. Dans ce cas particulier la coalescence apparaît quand :

$$C_f\ \left[1 - \left(\frac{3\ \sqrt{\pi}}{4}\ f_0\right)^{2/3} \frac{b}{b_0}\ \frac{c}{c_0}\ \exp\left(\varepsilon_1\right)\right] = \frac{2}{3} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$$

En appliquant le critère de coalescence ci-dessus nous cherchons à déterminer la valeur de ε_1, notée ε_1^f, caractéristique du début de la coalescence, en fonction de la porosité initiale f_0 pour des taux de triaxialité fixés et supposés constants (0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 1 et 1,2).

La figure 3.15 présente les résultats obtenus respectivement pour des cavités elliptiques et sphériques. Nous pouvons constater que la coalescence se produit pour une valeur de ε_1^f deux fois plus faible pour les cavités sphériques que pour les cavités elliptiques. Si nous supposons que la rupture coïncide avec le début de la coalescence alors ε_1^f fait office de critère de rupture et la valeur critique associée n'est pas constante en fonction du taux de triaxialité, mais dépend du paramètre de Lode et de la porosité initiale. De manière implicite cela revient à dire que $(R/R_0)_c$ dépend du taux de triaxialité lorsque la coalescence est effectivement prise en compte, contrairement au cas où seule la croissance des

cavités est modélisée, et pour lequel la valeur critique de R/R_0 ne dépend pas du taux de triaxialité.

Nous avons vu au chapitre 1 que la rupture des éprouvettes AE, EU et DP se produisait pour des valeurs de ductilité différentes entre les sens L et T. Pour simuler ce comportement il est nécessaire de pouvoir modifier dans le modèle de [Thomason, 1985a] les distances entre les cavités selon les sens L et T. Ceci revient à jouer sur les dimensions initiales de la cellule (l_1^0, l_2^0 et l_3^0) centrée sur la cavité illustrée par la figure 3.13. En utilisant une longueur étalon l_0 nous posons : $l_1^0 = \alpha l_0$, $l_2^0 = \beta l_0$ et $l_3^0 = \gamma l_0$. En reprenant la relation (3.37) nous obtenons :

$$f_0 = \frac{(4\pi a_0^3)/3}{8 l_1^0 l_2^0 l_3^0} = \frac{\pi a_0^3}{6\alpha\beta\gamma l_0^3} \quad \text{d'où} \quad l_0 = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\, a_0$$

$$\text{Par conséquent} \quad \begin{cases} d = l_3 - b = l_3^0 \exp\varepsilon_3 - b = \gamma\ l_0 \exp\varepsilon_3 - b = \gamma\ a_0 \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\ \exp\varepsilon_3 - b \\[2ex] e = l_2 - c = l_2^0 \exp\varepsilon_2 - c = \beta\ l_0 \exp\varepsilon_2 - c = \beta\ a_0 \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\ \exp\varepsilon_2 - c \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} \dfrac{a}{d} = \dfrac{a/a_0}{\gamma \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\ \exp\varepsilon_3 - \dfrac{b}{b_0}} \\[2ex] \dfrac{a}{e} = \dfrac{a/a_0}{\beta \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\ \exp\varepsilon_2 - \dfrac{c}{c_0}} \end{cases}$$

En utilisant les résultats démontrés précédemment qui permettent d'écrire ε_2 et ε_3 en fonction du paramètre de Lode ν_L et de ε_1 nous pouvons écrire les relations suivantes :

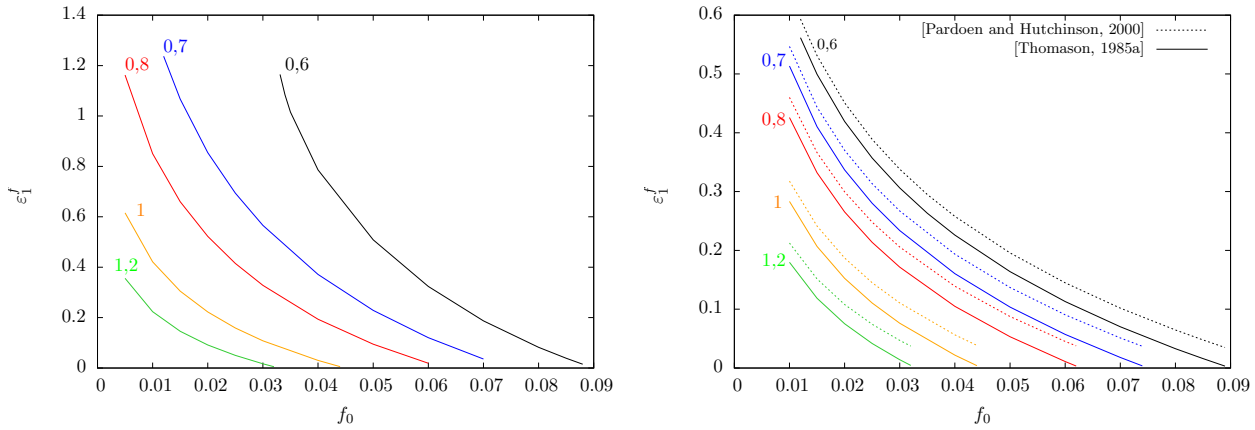
$$\begin{cases} \dfrac{a}{d} = \dfrac{a/a_0}{\gamma \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\ \exp\left[\left(\dfrac{\nu_L - 3}{\nu_L + 3}\right)\ \varepsilon_1\right] - \dfrac{b}{b_0}} \\[2ex] \dfrac{a}{e} = \dfrac{a/a_0}{\beta \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\ \exp\left[-\left(\dfrac{2\nu_L}{\nu_L + 3}\right)\ \varepsilon_1\right] - \dfrac{c}{c_0}} \end{cases} \tag{3.53}$$

La relation (3.42) est modifiée de manière similaire et devient donc :

$$\begin{cases} \dfrac{b}{b+d} = \dfrac{b/d}{1 + \dfrac{b}{d}} \quad \text{avec} \quad \dfrac{b}{d} = \dfrac{b/b_0}{\gamma \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\ \exp\left[\left(\dfrac{\nu_L - 3}{\nu_L + 3}\right)\ \varepsilon_1\right] - \dfrac{b}{b_0}} \\[2ex] \dfrac{c}{c+e} = \dfrac{c/e}{1 + \dfrac{c}{e}} \quad \text{avec} \quad \dfrac{c}{e} = \dfrac{c/c_0}{\beta \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6\alpha\beta\gamma f_0}}\ \exp\left[-\left(\dfrac{2\nu_L}{\nu_L + 3}\right)\ \varepsilon_1\right] - \dfrac{c}{c_0}} \end{cases}$$

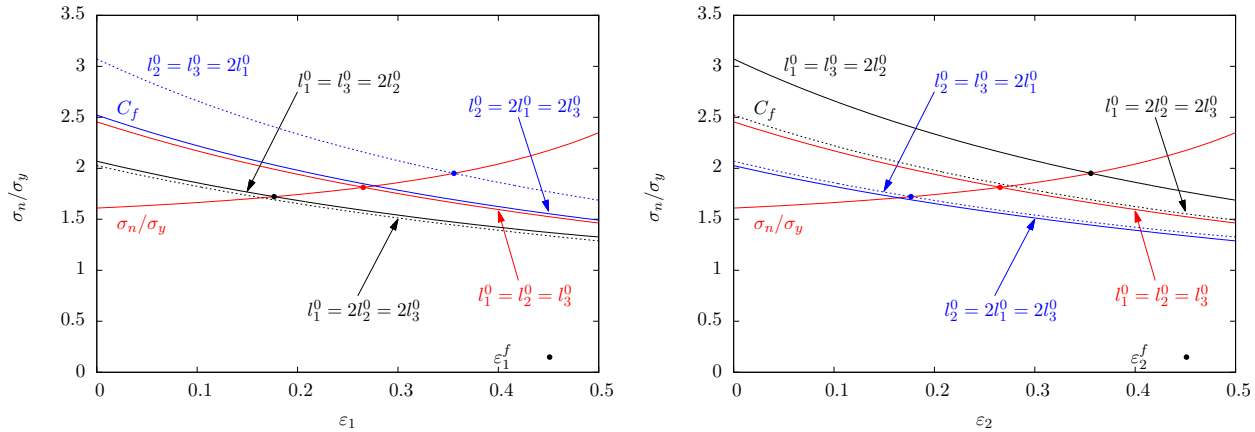
Nous sommes donc en mesure d'exprimer σ_n/σ_y en fonction de α, β, γ et f_0 afin de tenir compte de la rupture orthotrope du matériau. De plus compte tenu de (3.52) l'expression de C_f reste inchangée et permet par conséquent de déterminer ε_1^f correspondant au début de la coalescence.

La figure 3.16a présente, pour différents rapports des dimensions initiales de la cellule, la valeur de ε_1^f obtenue dans le cas d'une sollicitation en traction ($\nu_L = 1$) suivant $\underline{\boldsymbol{e}}_1$, associée à un taux de triaxialité égal à 0,8 et une porosité f_0 de 0,02. Dans cette analyse les cavités sont supposées rester



(a) Cavités elliptiques (b) Cavités sphériques

FIGURE 3.15 – Evolution de ε_1^f en fonction de f_0 pour différentes valeurs du taux de triaxialité



(a) Traction suivant $\underline{e}_1$ Traction suivant $\underline{e}_2$

FIGURE 3.16 – Début de la coalescence pour des cellules de dimensions initiales différentes

sphériques au cours de leur croissance, par conséquent les longueurs l_2^0 et l_3^0 jouent un rôle identique relativement à la coalescence des cavités dans le plan ($\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$). Ainsi par exemple la combinaison $\beta = n_1$ et $\gamma = n_2$ est équivalente à celle où $\beta = n_2$ et $\gamma = n_1$. De plus pour une valeur fixée de l_1^0, la coalescence dans le plan ($\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$), lorsque β et γ sont égaux respectivement à n_1 et n_2, est quasiment équivalente à celle d'une cellule pour laquelle $\beta = \gamma = \min(n_1, n_2)$. La figure 3.16b fournit, pour les mêmes cellules que la figure 3.16a, la valeur de ε_2^f obtenue dans le cas d'une sollicitation en traction suivant $\underline{e}_2$, toujours pour un taux de triaxialité égal à 0,8 et une porosité f_0 de 0,02. Nous pouvons remarquer à titre d'exemple qu'une cellule caractérisée par $l_1^0 = 2l_2^0 = 2l_3^0$, soumise à un effort de traction suivant $\underline{e}_1$, est équivalente à une cellule pour laquelle $l_2^0 = 2l_1^0 = 2l_3^0$, dont la sollicitation en traction s'effectue selon $\underline{e}_2$. En jouant sur les valeurs des longueurs initiales de la cellule (l_1^0, l_2^0 et l_3^0) nous sommes donc parvenus à simuler un comportement orthotrope vis-à-vis de la rupture.

Nous ne pouvons pas clore se paragraphe sur le critère de coalescence sans évoquer les travaux de [Pardoen and Hutchinson, 2000] et [Benzerga, 2002] qui constituent une extension du critère développé par [Thomason, 1985a]. L'expression du critère défini par (3.34) est modifiée, dans le cas d'une cellule axisymétrique, par [Pardoen and Hutchinson, 2000] afin de tenir compte de la loi d'écrouissage de la manière suivante :

$$C_f = \frac{\alpha(n)}{\left(\frac{a}{d}\right)^2} + \frac{1,24}{\left(\frac{b}{b+d}\right)^{1/2}} \quad \text{où} \quad \alpha(n) = 0,1 + 0,217n + 4,83n^2 \tag{3.54}$$

La variable n représente l'exposant de la loi d'écrouissage utilisée dans [Pardoen and Hutchinson, 2000]

et définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sigma_0} = \dfrac{E\varepsilon}{\sigma_0} \quad \text{lorsque} \quad \sigma \leq \sigma_0 \\ \\ \dfrac{\sigma}{\sigma_0} = \left(1 + \dfrac{E\varepsilon^{pl}}{\sigma_0}\right)^n \quad \text{lorsque} \quad \sigma \geq \sigma_0 \end{cases}$$

Afin de s'affranchir du problème axisymétrique et de pouvoir utiliser le critère ci-dessus dans un cadre plus général, nous proposons d'après [Thomason, 1985a] de remplacer dans la relation (3.54) :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{d} \quad \text{par} \quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{a}{e}\right) \\ \\ \dfrac{b}{b+d} \quad \text{par} \quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{b+d} + \dfrac{c}{c+e}\right) \end{cases}$$

Dans le cas de la traction caractérisée par une valeur de ν_L égale à 1, le début de la coalescence s'obtient lorsque :

$$\begin{cases} C_f \left[1 - \left(\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4} f_0\right)^{2/3} \dfrac{b}{b_0} \dfrac{c}{c_0} \exp(\varepsilon_1)\right] = \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \\ \\ \text{Avec} \quad C_f = \dfrac{4\alpha(n)}{\left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{a}{e}\right)^2} + \dfrac{1,24 \times \sqrt{2}}{\left(\dfrac{b}{b+d} + \dfrac{c}{c+e}\right)^{1/2}} \end{cases} \tag{3.55}$$

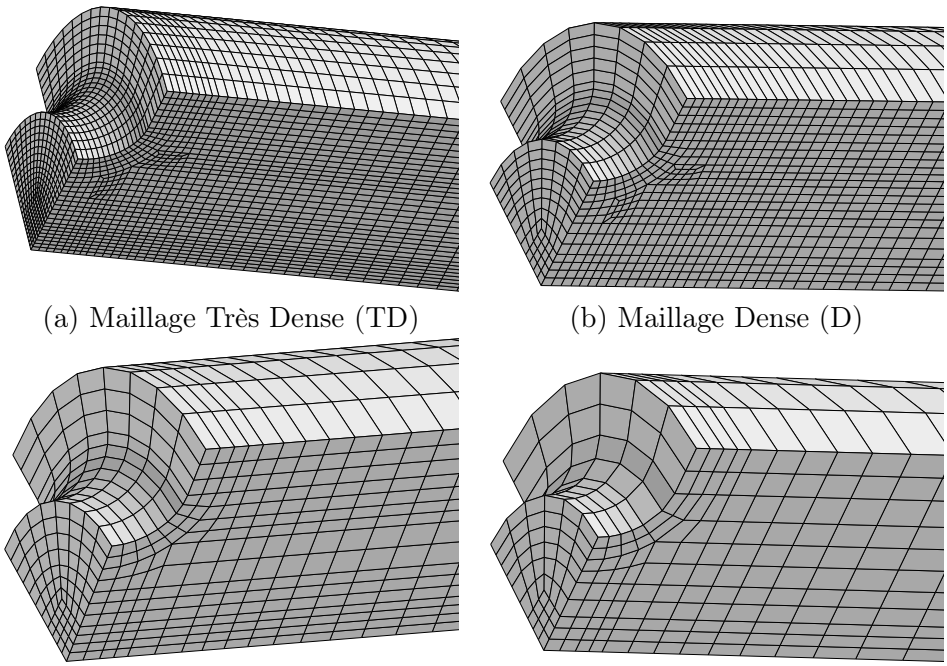
A partir du système ci-dessus nous avons déterminé, dans le cas de cavités restant sphériques, ε_1^f en fonction de la porosité initiale f_0 pour des taux de triaxialité fixés et supposés constants (0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 1 et 1,2). La valeur de n que nous avons choisie est égale à 0,09, elle correspond à l'inverse de l'exposant de la loi de Ramberg-Osgood utilisée dans le paragraphe consacré à la « keycurve » du chapitre 2. Les résultats ainsi obtenus ont été superposés à ceux présentés par la figure 3.15, afin de mesurer l'impact de la modélisation de l'écrouissage dans le critère de [Thomason, 1985a]. Nous pouvons constater que la prise en compte de la loi d'écrouissage retarde le début de la coalescence. Par conséquent une approche conservative pour déterminer ε_1^f consistera à considérer que le matériau est parfaitement plastique de limite d'élasticité σ_y. Enfin pour terminer nous mentionnerons que les modifications du critère de [Thomason, 1985a] apportées par [Benzerga, 2002] ont une portée moins générale que celles issues de [Pardoen and Hutchinson, 2000]. En effet il s'agit de reformuler ce critère pour un problème axisymétrique afin de mieux appréhender le cas où les cavités elliptiques dégénèrent en une fissure plane, c'est-à-dire lorsque le rapport a/b tend vers zéro.

3.3.2 Critère de rupture du 2219 T87

3.3.2.1 Choix d'un critère et calibration de sa valeur critique

Les caractéristiques matériaux utilisées dans l'approche globale sont relativement simples à obtenir, en effectuant par exemple des essais sur éprouvettes CT et SENT. Par contre une incertitude subsiste quant au domaine de validité de ces grandeurs. Sont-elles vraiment des valeurs intrinsèques du matériau, indépendantes de la géométrie des éprouvettes ? Cette question est primordiale car une réponse positive ou négative permettra de les utiliser ou non pour prévoir la rupture d'une structure quelconque comportant une fissure.

L'approche locale s'affranchit de ce problème de transposition du critère de rupture d'une géométrie



(a) Maillage Très Dense (TD) (b) Maillage Dense (D)

(c) Maillage Assez Dense (AD) (b) Maillage Peu Dense (PD)

FIGURE 3.17 – Les différentents maillage de l'éprouvette AE_2

à une autre, car celui-ci est sensé modéliser les micromécanismes de rupture du matériau, indépendants par définition de toute géométrie. Ainsi le choix du critère de [Rice and Tracey, 1969], afin de prévoir la rupture de l'alliage d'aluminium 2219 T87, est pertinent puisqu'il permet de rendre compte du principal processus microscopique de la rupture ductile, à savoir la croissance des cavités.

La difficulté majeure de l'approche locale réside alors dans la dépendance à la taille de maille de la valeur critique du critère de rupture. En effet celle-ci est évaluée localement, c'est-à-dire à l'échelle d'un élément, en utilisant un calcul par la méthode des éléments finis. Ainsi afin de s'affranchir dans la mesure du possible de cette dépendance au maillage, [Rousselier, 1979] propose d'utiliser conjointement à la valeur critique du critère, une longueur caractéristique qui est souvent la taille de maille dans la zone critique.

[Mudry, 1983] propose une méthodologie en deux étapes pour déterminer ces deux paramètres. La première vise à calibrer la valeur critique du critère de [Rice and Tracey, 1969] à l'aide des éprouvettes axisymétriques entaillées, car il n'existe pas de fort gradient de déformation dans une éprouvette AE, même pour une faible valeur du rayon d'entaille. Par conséquent la valeur $(R/R_0)_c$ obtenue par calcul sera peu sensible aux dimensions du maillage. La seconde étape, décrite dans la suite de cette étude, consiste à déterminer la longueur caractéristique évoquée précédemment, en utilisant des éprouvettes fissurées de type CT par exemple.

Nous souhaitons vérifier cette indépendance des éprouvettes AE vis à vis du maillage, évoquée par [Mudry, 1983], en effectuant une étude de convergence à partir de l'éprouvette AE_2, dont le faible rayon d'entaille est davantage susceptible de créer une forte variation de la déformation plastique. Cette démarche consiste à étudier l'influence de certains paramètres tels que la taille de maille, le ratio de convergence ou le type d'élément sur la valeur de R/R_0 et de la déformation plastique équivalente dans la zone critique. Nous avons retenu exclusivement ces deux variables car elles caractérisent l'endommagement et permettent donc de prévoir la rupture. Les différents calculs sur éprouvettes AE_2, présentés par la suite, ont été effectués avec une modélisation identique à celle utilisée dans le paragraphe 3.2.2.2, relatif à la simulation du comportement élasto-plastique du matériau (voir page 154).

Nous nous intéressons aux valeurs moyennes par élément de R/R_0 et de ε^p_{eq} et non aux valeurs en chaque point de Gauss de l'élément. Ce choix se justifie car nous cherchons un critère de rupture et il

nous semble plus physique d'envisager la rupture à partir d'une valeur de ces variables, calculée comme une moyenne par élément, plutôt que comme une valeur maximale en un unique point de Gauss. Il nous paraît utile de préciser ce qu'il faut entendre par point de Gauss dans la méthode des Eléments Finis.

Leur rôle est essentiel puisqu'ils permettent d'évaluer les intégrales de volume ainsi c'est en ces points que seront intégrées les lois de comportement et que seront calculées les grandeurs tensorielles. La méthode de Gauss consiste à remplacer le calcul d'une intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \sum_i \omega_i\ f(x_i)$$

La valeur moyenne de R/R_0 et ε_{eq}^p sur un élément de volume V, notée avec l'indice « ae » pour « average element », sera donc définie par :

$$\left(\varepsilon_{eq}^p\right)_{ae} = \frac{1}{V}\ \sum_i \omega_i\ \varepsilon_{eq}^p\left(x_i\right) \quad \text{de même} \quad \left(\frac{R}{R_0}\right)_{ae} = \frac{1}{V}\ \sum_i \omega_i\ \frac{R}{R_0}\left(x_i\right) \tag{3.56}$$

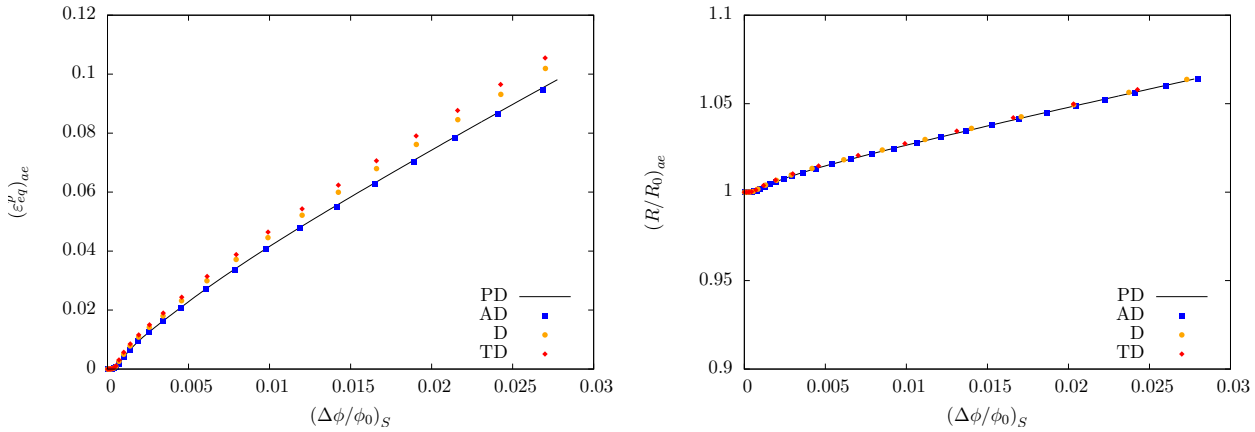
Dans l'exemple ci-dessus la position des différents points de Gauss est notée x_i et permet d'évaluer f tandis que les ω_i désignent les poids associés à ces points. Il est nécessaire de posséder n points de Gauss pour évaluer exactement l'intégration d'un polynôme d'ordre $2n-1$. Dans la méthode des éléments finis les différentes grandeurs sont approximées par un polynôme d'ordre 2 en utilisant un développement de Taylor, par conséquent il faudra pour un élément 1D linéaire deux points de Gauss contre trois pour le cas quadratique. En transposant ce résultat à un élément volumique nous aurons besoin de 8 et 27 points de Gauss respectivement pour le type linéaire (c3d8) et quadratique (c3d20).

Pour l'étude de la convergence nous avons utilisé pour modéliser les éprouvettes AE_2 quatre maillages de densité différente, composés d'éléments linéaires, illustrés par la figure 3.17. Les maillages utilisés pour les sens L et T sont identiques puisque dans ZeBuLoN il est possible d'effectuer une rotation du matériau au lieu de la géométrie. Dans le cas très dense (TD) le taille minimale des éléments en fond d'entaille est de 250 μm tandis que celle-ci sera de 350 μm pour le cas dense (D) et de 500 μm pour les maillages assez dense (AD) et peu dense (PD). [Bron and Besson, 2006] fournit une règle de calcul simple pour déterminer le ratio de convergence r, elle se traduit dans notre cas par :

$$r \leq \frac{l^2\ \sigma_u}{100} \quad \text{où } l \text{ désigne la dimension minimale de l'élément} \tag{3.57}$$

La contrainte moyenne à rupture issue des essais de traction est de 470 MPa, nous obtenons donc pour les tailles de maille évoquées ci-dessus des valeurs de r égales à 0,3 N, 0,6 N et 1,2 N respectivement pour les maillages très dense, dense et assez dense. Nous avons réalisé des calculs avec le maillage dense en prenant un ratio r de 0,1 N et 0,01 N sans constater un écart sur les valeurs maximales de $(R/R_0)_{ae}$ et $(\varepsilon_{eq}^p)_{ae}$ au cours du chargement. De même la modélisation d'une longueur d'éprouvette de 15 mm, 25 mm ou 35 mm n'induit aucun changement.

La figure 3.18 présente l'évolution de $(\varepsilon_{eq}^p)_{ae}$ et $(R/R_0)_{ae}$, pour les éléments où la valeur de ces variables est maximale, en fonction des différentes densité de maillage, les calculs ont été effectués avec un ratio de 0,01 N. L'influence de la taille de l'élément est davantage marquée pour la valeur moyenne de ε_{eq} que pour celle de R/R_0 . De plus il existe peu de différence entre les maillages très dense et dense d'une part et d'autre part entre les maillages assez dense et peu dense. Par contre les valeurs de $(R/R_0)_{ae}$ et de $(\varepsilon_{eq}^p)_{ae}$ issues du calcul avec le maillage dense présentent un écart significatif par rapport à celles calculées avec le maillage assez dense. Il est donc nécessaire d'utiliser une taille de maille permettant d'obtenir une convergence des valeurs des critères de rupture dans la zone critique. Contrairement au maillage assez dense, la figure 3.18 montre que cette convergence est atteinte avec le maillage dense, puisque les valeurs moyennes de ε_{eq} et de R/R_0 évoluent très peu avec un maillage



(a) Evolution de $(\varepsilon^p_{eq})_{ae}$ (b) Evolution de $(R/R_0)_{ae}$

FIGURE 3.18 – Evolution des valeurs maximales de $(\varepsilon^p_{eq})_{ae}$ et $(R/R_0)_{ae}$ pour les différents maillages

plus fin. Nous avons également vérifié que pour le maillage dense l'utilisation d'éléments quadratiques reste sans impact sur les résultats obtenus avec des éléments linéaires. Par conséquent tous les calculs dans la suite de ce paragraphe seront effectués avec le maillage dense composé d'éléments linéaires.

Les éprouvettes AE_2 prélevées suivant les sens L et T vont servir à calibrer la valeur critique du critère de [Rice and Tracey, 1969]. Elle sera égale à la valeur maximale de $(R/R_0)_{ae}$ obtenue pour la déformation diamétrale enregistrée lors de l'essai à l'instant de la rupture effective de l'éprouvette. En nous inspirant des travaux de [Benzerga and Besson, 2001] nous avons défini le critère R/R_0 avec un taux de triaxialité calculé à partir du critère de [Bron and Besson, 2004], noté $\bar{\sigma}$, dont les coefficients ont été déterminés au paragraphe 3.2.2.3 (voir page 157).

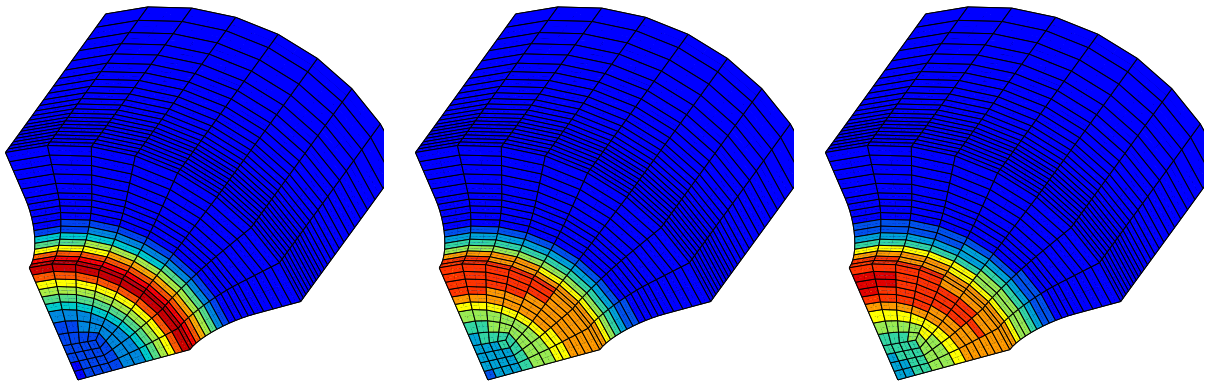
$$\frac{\dot{R}}{R_0} = 0,283 \ \exp\left(\frac{3}{2}\ \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right)\ \dot{\varepsilon}^p_{eq} \tag{3.58}$$

De plus nous proposons également d'utiliser le critère de [Huang, 1991], désigné par R_H/R_0, dont la formulation est donnée par la relation (3.29) au paragraphe 3.3.1.2. Les valeurs critiques des critères R/R_0 et R_H/R_0 obtenues pour les sens L et T sont résumées dans le tableau 3.3, elles sont calculées à partir d'une moyenne par élément comme nous l'avons expliqué précédemment. La déformation plastique équivalente pouvant faire office de critère de rupture, comme cela a été mentionné au paragraphe 3.3.1.1, nous avons intégré sa valeur critique dans le tableau 3.3 pour les deux sens de prélèvement L et T. Celle-ci correspond à la valeur maximale de ε^p_{eq} issue du calcul lors de la simulation de la rupture de l'éprouvette AE_2.

	$(\varepsilon^p_{eq})_{ae}$	$(R/R_0)_{ae}$	$(R_H/R_0)_{ae}$
sens L	10,46 %	1,078	1,115
sens T	9,50 %	1,069	1,101

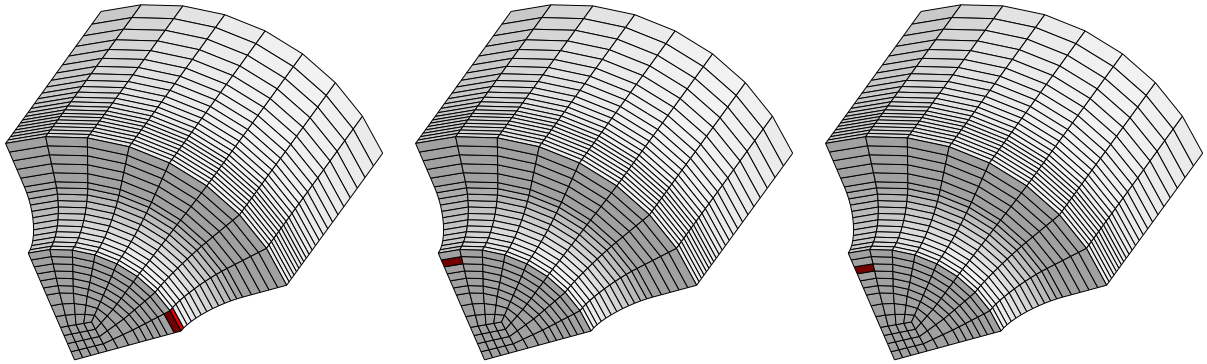
TABLE 3.3 – Valeurs critiques des critères de rupture issues du calibrage à partir de l'éprouvette AE_2

La figure 3.19 donne une idée de la répartition des valeurs moyennes des critères ε^p_{eq}, R/R_0 et R_H/R_0 lors de la rupture des éprouvettes AE_2 prélevées suivant les sens L, tandis que la localisation des maximum est présentée par la figure 3.20. L'absence d'échelle se justifie compte tenu du fait que la valeur maximale de chaque cartographie est la valeur critique du critère correspondant fourni par le tableau 3.3. Nous obtenons pour la direction T une répartition analogue ainsi qu'une localisation identique des critères de rupture en prenant soin évidemment de permuter L et T. Compte tenu de ces résultats, la rupture des éprouvettes AE_2 semble donc s'amorçer en fond d'entaille selon les simulations



$(\varepsilon^p_{eq})_{ae}$ $(R/R_0)_{ae}$ $(R_H/R_0)_{ae}$

FIGURE 3.19 – Cartographie des différents critères à l'instant de la rupture de l'éprouvette AE_2



$(\varepsilon^p_{eq})_{ae}$ $(R/R_0)_{ae}$ $(R_H/R_0)_{ae}$

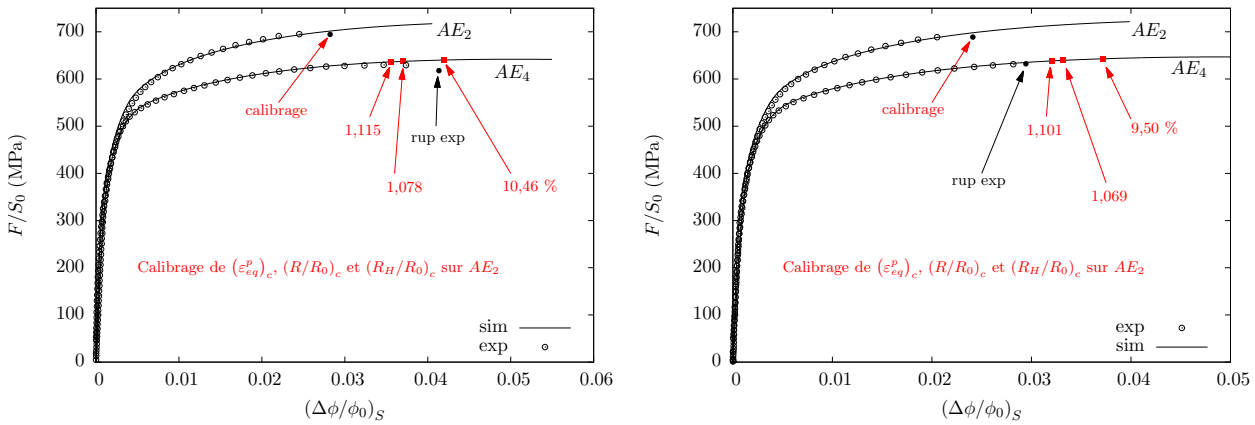
FIGURE 3.20 – Localisation de la valeur maximale des critères de rupture pour l'éprouvette AE_2

numériques, ce qui n'est pas cohérent avec les observations des coupes polies réalisées au chapitre 1 ni avec les calculs réalisés par [Mudry, 1983]. Contrairement aux résultats obtenus par [Mudry, 1983] il semblerait dans notre cas que la redistribution des contraintes maximales du fond d'entaille vers le centre de l'éprouvette n'ait pas eu le temps de se faire avant la rupture.

Les valeurs critiques des critères de rupture déterminées à partir des éprouvettes AE_2 vont permettre de prédire la rupture des éprouvettes AE_4 prélevées selon les sens L et T. Le modéle utilisé pour les éprouvettes AE_4 est identique à celui mis en œuvre lors de l'étude du comportement élasto-plastique du matériau au paragraphe 3.2.2.2. Les conditions aux limites sont détaillées à la page 154. Le maillage de l'éprouvette AE_4 est similaire à celui de l'éprouvette AE_2 et possède en fond d'entaille une taille minimale d'élément identique à celle du maillage dense de l'éprouvette AE_2.

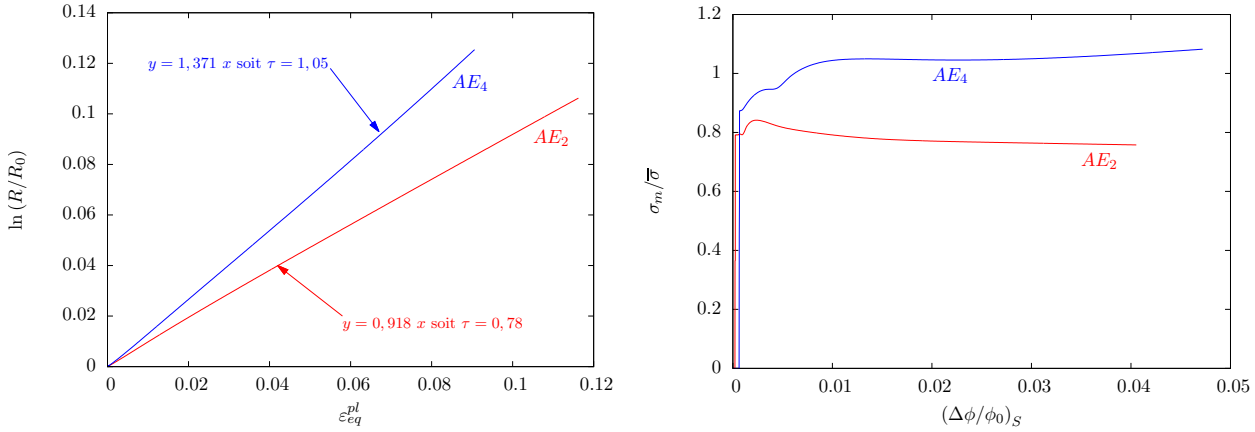
La correspondance entre la simulation et la rupture expérimentale des éprouvettes AE_4 est illustrée par la figure 3.21 pour un prélèvement selon L et T. Pour le sens T nous constatons que le critère en déformation plastique équivalente prévoit une rupture beaucoup plus tardive que celle enregistrée lors de l'essai. Cette prévision de la rupture n'est pas acceptable pour le sens T alors qu'elle est excellente pour le sens L. Les critères de [Rice and Tracey, 1969] et de [Huang, 1991] fournissent une prévision quasi identique de la rupture qui est sous-estimée pour l'éprouvette AE_4 prélevée suivant L, et surestimée pour celle usinée selon T. L'utilisation d'un de ces deux critères peut cependant fournir une estimations acceptable de la rupture des éprouvettes AE_4.

La figure 3.22a montre qu'il existe au niveau de l'élément critique associé au critère R/R_0, une dépendance linéaire entre R/R_0 et ε^p_{eq} pour les éprouvettes AE_2 et AE_4. Il faut entendre par élément critique, associé à un critère de rupture donné, l'élément où la valeur moyenne de ce critère est maximale. Cette linéarité s'explique, compte tenu de la relation (3.58), par un taux de triaxialité



(a) Eprouvettes AE sens L (b) Eprouvettes AE sens T

FIGURE 3.21 – Simulation de la rupture des éprouvettes AE_4



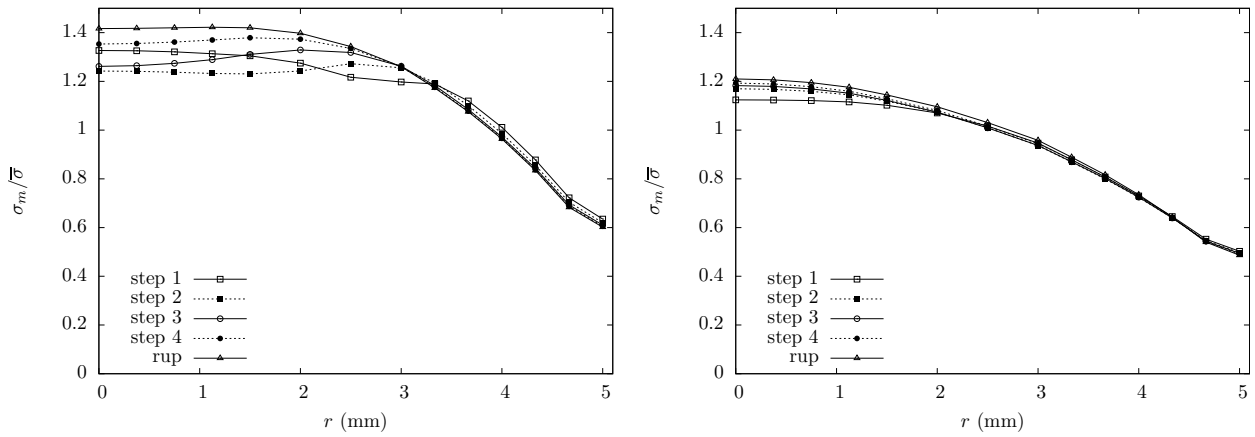
(a) Eprouvettes AE sens L (b) Eprouvettes AE sens L

FIGURE 3.22 – Evaluation de τ au niveau de la zone critique associée à R/R_0 pour les éprouvettes AE

τ constant, estimé respectivement à 0,78 et 1,05 pour les éprouvettes AE_2 et AE_4. Nous pourrions donc nous attendre à une équivalence entre ces deux critères quant à la prévision de la rupture des éprouvettes AE_4 mais la figure 3.21 dément cette hypothèse. Il est également surprenant d'obtenir un taux de triaxialité plus élevé pour les éprouvettes AE_4 que pour les éprouvettes AE_2. Mais il faut se souvenir que ce résultat concerne le fond d'entaille et non le centre des éprouvettes où, comme le montre la figure 3.23, le taux de triaxialité est supérieur pour les éprouvettes AE_2, conformément aux résultats de la littérature.

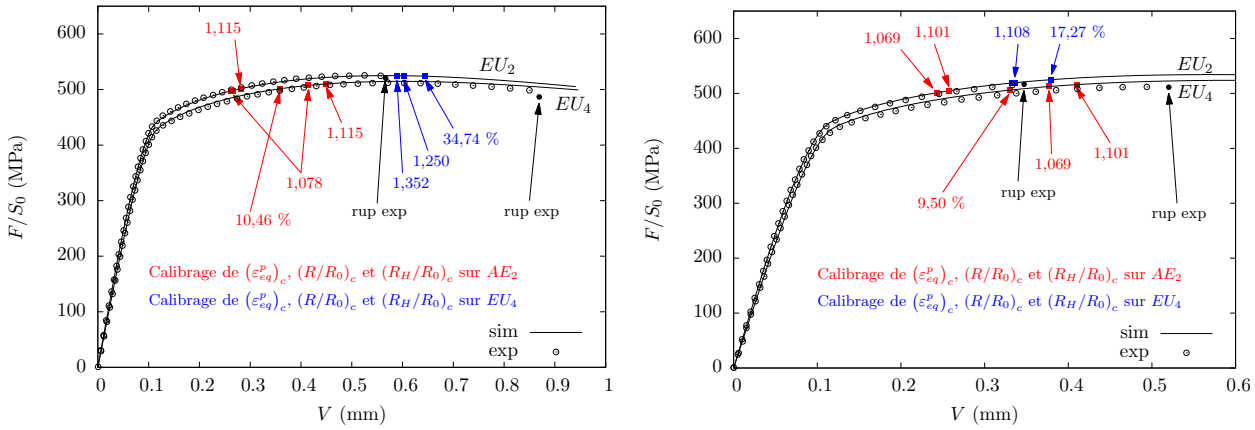
3.3.2.2 Limites et insuffisance du critère

Les critères de rupture calibrés au paragraphe précédent sur les éprouvettes AE_2 vont être utilisés afin de prédire la rupture des éprouvettes EU, TR_{12} et DP usinées suivant L et T. Commençons par les éprouvettes EU puisqu'elles ont une géométrie proche des éprouvettes AE. En effet si nous « découpons » mentalement une éprouvette AE_2 ou AE_4, selon un plan contenant un diamètre et l'axe longitudinale de l'éprouvette, alors en extrudant cette découpe 2D perpendiculairement au plan défini précédemment, nous obtenons une éprouvette EU_2 ou EU_4. Ainsi le maillage d'une éprouvette EU se deduit aisément de celui d'une éprouvette AE. Nous avons donc réalisé le maillage des éprouvettes EU à partir du maillage dense des éprouvettes AE composé d'éléments linéaires et décrit par la figure 3.17. La taille de maille en fond d'entaille est donc similaire pour les éprouvettes AE et EU. Les conditions aux limites sont identiques à celles exposées dans le paragraphe 3.2.2.2, relatif à la



(a) Eprouvette AE_2 (b) Eprouvette AE_4

FIGURE 3.23 – Evolution selon l'axe T du taux de triaxialité τ des éprouvettes AE prélevées selon L



(a) Eprouvettes EU sens L (b) Eprouvettes EU sens T

FIGURE 3.24 – Simulation de la rupture des éprouvettes EU

simulation du comportement élasto-plastique du matériau (voir page 153). La figure 3.24 présente la simulation de la rupture des éprouvettes EU obtenue en utilisant les différents critères de rupture définis à partir des éprouvettes AE_2 prélevées selon L et T. En couleur rouge nous retrouvons les valeurs critiques des critères de rupture définies dans le tableau 3.3. Précisons que pour les éprouvettes EU_2 prélevées suivant L et T les points correspondant aux valeurs critiques de la déformation plastique équivalente et du critère de [Rice and Tracey, 1969] sont confondus. Nous pouvons constater qu'aucune des valeurs critiques calibrées sur les éprouvettes AE_2 ne permet une prévision acceptable de la rupture des éprouvettes EU.

La première explication de cet écart qui vient à l'esprit est un taux de triaxialité plus faible pour les éprouvettes EU. Nous avons donc évalué τ pour les éprouvettes EU_2 et EU_4 pour l'élément critique, c'est-à-dire celui qui présente la valeur moyenne de R/R_0 la plus élevée. La figure 3.25 présente les résultats obtenus selon deux méthodes. La première consiste à calculer τ à partir de l'évolution de R/R_0 en fonction de ε^p_{eq} . En effet si celle-ci est linéaire alors compte tenu de (3.58) le taux de triaxialité est constant, nous obtenons par cette approche des valeurs de τ égales à 0,74 et 0,64 respectivement pour les éprouvettes EU_2 et EU_4. La seconde méthode se limite à tracer l'évolution de τ en fonction du déplacement d'ouverture de l'entaille V. La figure 3.25b montre que les valeurs de τ ainsi déterminées sont cohérentes avec celles calculées par la première méthode. Selon les figures 3.23 et 3.25 le taux de triaxialité est plus important pour les éprouvettes AE_4 (1,05) que pour les éprouvettes EU_4 (0,64), par contre il est identique pour les éprouvettes AE_2 et EU_2. Par conséquent l'écart constaté entre

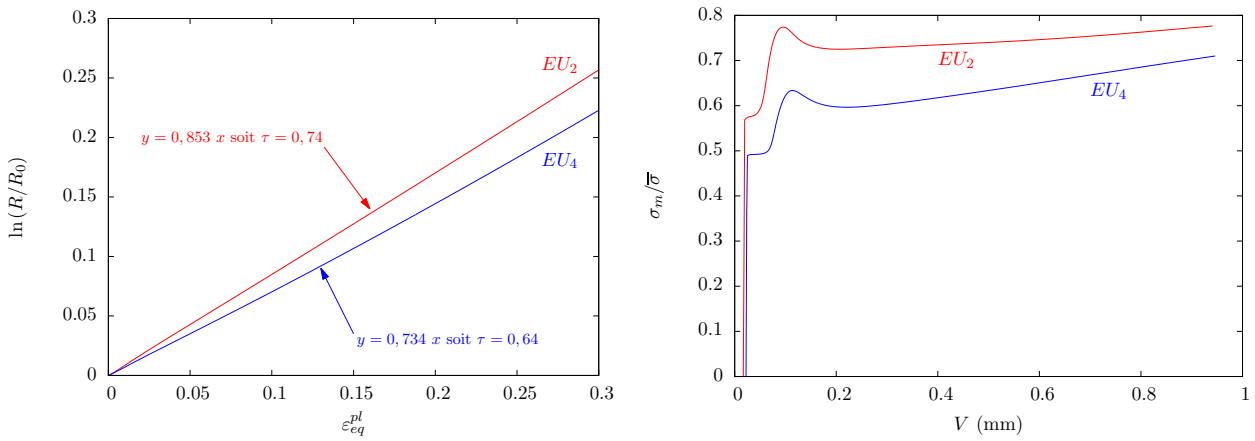
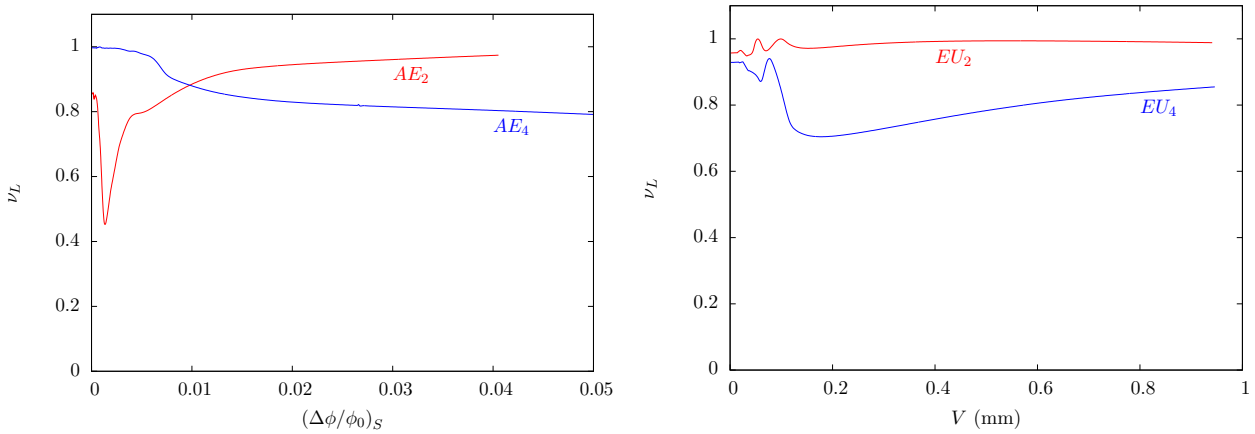


FIGURE 3.25 – Evaluation de τ au niveau de la zone critique associée à R/R_0 pour les éprouvettes EU



(a) Eprouvettes AE (b) Eprouvettes EU

FIGURE 3.26 – Evolution du paramètre de Lode ν_L au niveau de la zone critique associée à R/R_0 pour les éprouvettes AE et EU

la rupture expérimentale des éprouvettes EU et celle obtenue par simulation, à partir des critères de rupture calibrés sur les éprouvettes AE_2, ne peut pas s'expliquer par des taux de triaxialité différents entre les éprouvettes AE et EU.

Nous avons alors envisagé de comparer la valeur du paramètre de Lode ν_L, défini par (3.39), entre les éprouvettes AE et EU. En effet si il existe un écart significatif il sera alors possible de faire dépendre la valeur critique de R/R_0 de la variable ν_L. La figure 3.26 présente l'évolution de ν_L en fonction de $\Delta\phi/\phi_0$ et de V respectivement pour les éprouvettes AE et EU. Précisons que dans cette figure le paramètre de Lode a été calculé, pour chaque éprouvette, au niveau de l'élément où la valeur moyenne de R/R_0 est maximale. D'après la figure 3.26 les valeurs de ν_L ne présentent pas de différences notables entre les éprouvettes AE_2 et EU_2 d'une part, et les éprouvettes AE_4 et EU_4 d'autre part. Il nous faut donc chercher une autre piste pour expliquer l'échec de la prévision de la rupture des éprouvettes EU à partir des valeurs critiques du tableau 3.3.

La principale différence entre les éprouvettes AE et EU réside dans la valeur moyenne de déformation plastique équivalente située en fond d'entaille, de l'ordre de 10 % pour les éprouvettes AE et d'environ 30 % pour les éprouvettes EU. Cet écart compte tenu de la relation (3.28) et des taux de triaxialité, déterminés ci-dessus pour les éprouvettes AE et EU, se retrouve au niveau des valeurs de R/R_0. La valeur importante de la déformation plastique équivalente obtenue pour les éprouvettes EU est localisée en fond d'entaille sur quelques éléments. L'idée est donc de diminuer cette valeur par un effet de moyenne afin de la ramener au niveau de celle des éprouvettes AE, située également en fond

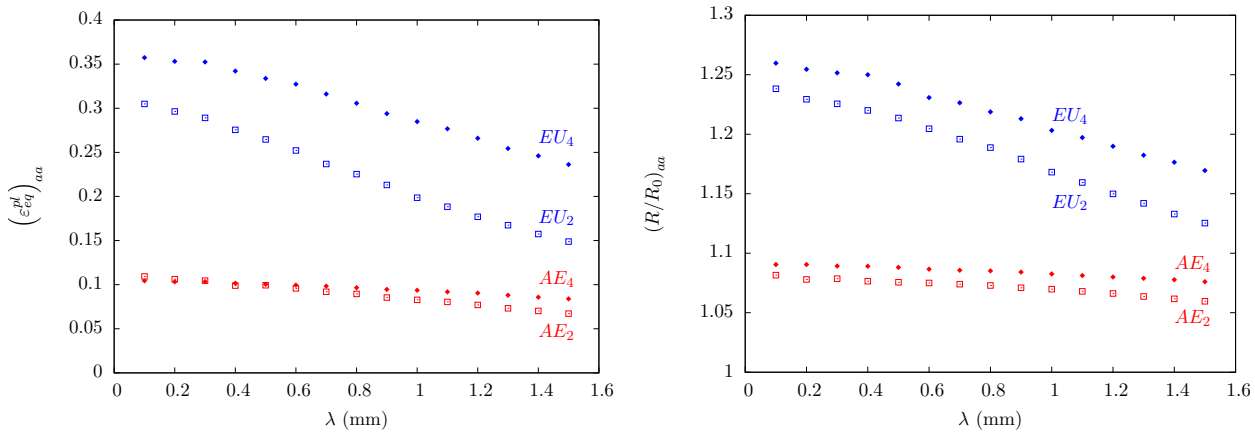


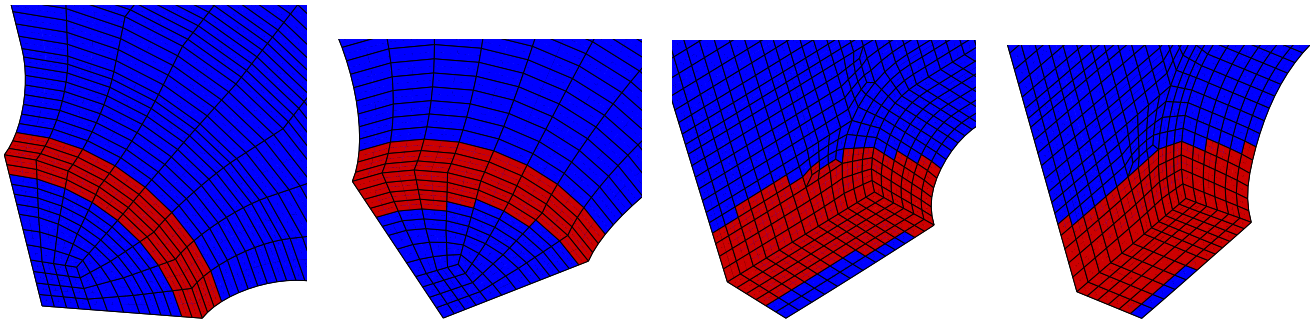
FIGURE 3.27 – Evolution de $\left(\varepsilon_{eq}^{pl}\right)_{aa}$ et de $(R/R_0)_{aa}$ pour les éprouvettes AE et EU

d'entaille mais répartie sur toute la circonférence de la section minimale.

Il existe dans ZeBuLoN une option de post-traitement permettant d'effectuer la moyenne d'une variable X autour d'un point de Gauss donné. Il s'agit de centrer sur ce point de Gauss une boule de rayon λ, puis d'effectuer la moyenne des valeurs de X aux points de Gauss inclus dans cette boule. Cette valeur moyenne est alors attribuée au point de Gauss situé au centre de la boule, elle est désignée par la notation X_{aa} dont l'indice signifie « average around ». Le calcul de X_{aa} se fait conformément à celui de X_{ae} fournie par la relation (3.56), cependant il ne suffit pas de remplacer le volume V de l'élément par celui de la boule de rayon λ. En effet un certain volume de la boule peut se trouver en dehors du maillage, par conséquent le volume effectif de la boule est évalué à partir des fonctions poids des points de Gauss situés à l'intérieur de la boule. Nous avons appliqué ce calcul de moyenne aux variables ε_{eq}^{pl} et R/R_0 pour les éprouvettes AE et EU. La figure 3.27 présente les valeurs de $\left(\varepsilon_{eq}^{pl}\right)_{aa}$ et $(R/R_0)_{aa}$ obtenues en fonction de λ. Nous pouvons constater que l'écart a été réduit entre les valeurs moyennes de ε_{eq}^{pl} et de R/R_0 ainsi calculées pour les éprouvettes AE et celles déterminées pour les éprouvettes EU, mais pas de manière suffisante pour permettre une prédiction correcte de la rupture des éprouvettes EU.

Toujours en partant du fait que les valeurs maximales de ε_{eq}^{pl} et R/R_0 sont beaucoup plus localisées et plus importantes pour les éprouvettes EU que pour les éprouvettes AE, nous souhaitons vérifier si l'écart entre ces valeurs ne pourrait pas s'expliquer par un effet de volume. Nous nous proposons donc de chercher si il existe une valeur seuil de la variable X, notée X_s, tel que le volume des éléments pour lesquel $X \geq X_s$ est identique pour les éprouvettes AE et EU, permettant ainsi de concilier la rupture de ces deux géométries d'éprouvette. Dans notre cas la variable X sera la déformation plastique équivalente ε_{eq}^{pl} et le critère R/R_0. A titre d'exemple la figure 3.28 montre le volume critique des différentes éprouvettes AE et EU obtenu pour une valeur seuil de ε_{eq}^{pl} égale à 8 %. En fait compte tenu des symétries cette figure fournit un huitième du volume critique V_c. La figure 3.29 présente les résultats ainsi obtenus et montre qu'il n'est pas possible de déterminer une valeur unique du volume critique V_c pour les éprouvettes AE et EU dans le cas de différentes valeurs seuil de ε_{eq}^{pl} et de R/R_0.

Devant l'impossibilité de trouver un critère permettant de simuler la rupture des éprouvettes EU et AE, nous avons décidé de calibrer à partir des éprouvettes EU_4 les valeurs critiques de la déformation plastique équivalente, du critère de [Rice and Tracey, 1969] et de celui de [Huang, 1991]. Celles-ci seront alors utilisées par la suite pour prévoir la rupture des éprouvettes TR_{12} et DP. Le choix de l'éprouvette EU_4 pour ce calibrage tient au fait que la rupture expérimentale des différents spécimens de cette éprouvette se produit pour une même valeur du déplacement d'ouverture de l'entaille, comme le montre les résultats issus des essais présentés au chapitre 1. Le tableau 3.4 résume les valeurs critiques des différents critères obtenues à partir de la simulation de la rupture des éprouvettes EU_4 prélevées suivant



AE_2 ($V_c = 23,4$ mm^3) AE_4 ($V_c = 53,6$ mm^3) EU_2 ($V_c = 173,9$ mm^3) EU_4 ($V_c = 291,2$ mm^3)

FIGURE 3.28 – V_c associé à $\left(\varepsilon_{eq}^{pl}\right)_s = 8\%$ pour les éprouvettes AE et EU

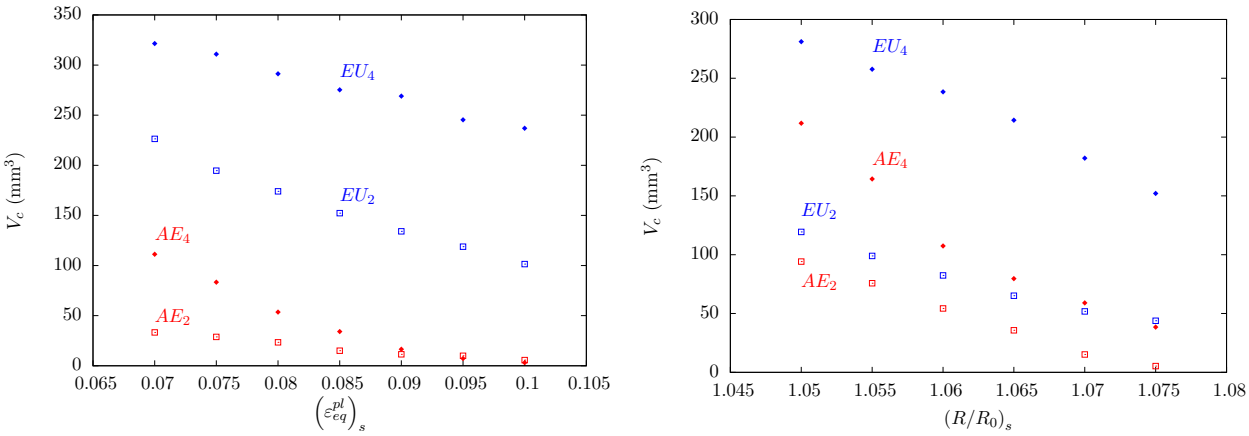
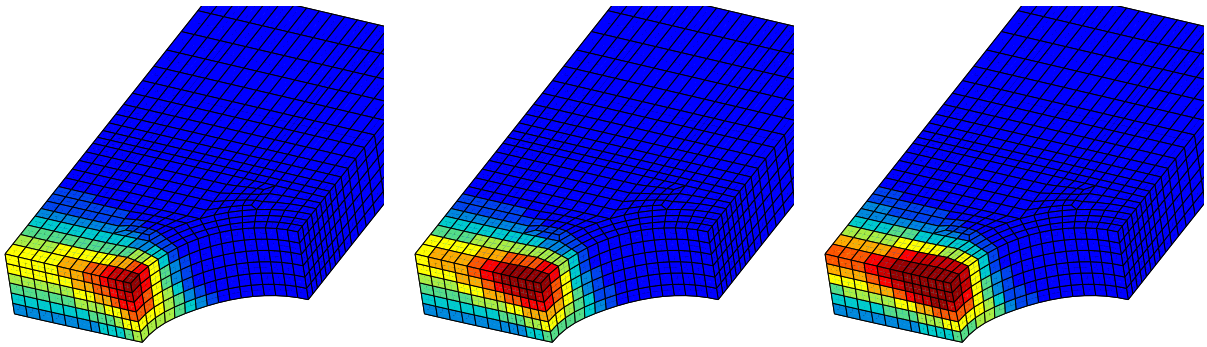


FIGURE 3.29 – Evaluation de V_c pour différentes valeurs seuil de ε_{eq}^{pl} et de R/R_0



$(\varepsilon^p_{eq})_{ae}$ $(R/R_0)_{ae}$ $(R_H/R_0)_{ae}$

FIGURE 3.30 – Cartographie des différents critères à l'instant de la rupture de l'éprouvette EU_4

les sens L et T. La figure 3.30 donne une idée de la répartition des valeurs moyennes des critères ε^p_{eq}, R/R_0 et R_H/R_0 lors de la rupture des éprouvettes EU_4 prélevées suivant le sens L. L'absence d'échelle se justifie compte tenu du fait que la valeur maximale de chaque cartographie est la valeur critique du critère correspondant fourni par le tableau 3.4. Nous obtenons pour la direction T une répartition analogue des critères de rupture en prenant soin évidemment de permuter L et T. Ces résultats montrent que la rupture des éprouvettes EU_4 s'amorçe en fond d'entaille selon les simulations numériques, ce qui est cohérent avec les observations des coupes polies réalisées au chapitre 1.

	$(\varepsilon^p_{eq})_{ae}$	$(R/R_0)_{ae}$	$(R_H/R_0)_{ae}$
sens L	34,74 %	1,250	1,352
sens T	17,27 %	1,108	1,144

TABLE 3.4 – Valeurs critiques des critères de rupture issues du calibrage à partir de l'éprouvette EU_4

La figure 3.24 montre que les critères de [Rice and Tracey, 1969] et de [Huang, 1991], calibrés à partir des éprouvettes EU_4, permettent de modéliser la rupture des éprouvettes EU_2 de manière satisfaisante. Remarquons que pour le sens T les points de rupture correspondant aux valeurs critiques de ces deux critères sont confondus. L'utilisation de la déformation plastique équivalente, dont la valeur critique a été calibrée sur les éprouvettes EU_4, permet une prévision de la rupture des éprouvettes EU_2 à peine acceptable. Nous allons maintenant utiliser les valeurs critiques des différents critères calibrées sur les éprouvettes AE_2 d'une part et EU_4 d'autre part, afin de simuler la rupture des éprouvettes TR_{12} et DP.

La modélisation des éprouvettes DP est identique à celle utilisée dans le paragraphe 3.2.2.2, relatif à la simulation du comportement élasto-plastique du matériau (voir page 156). Le modèle EF des éprouvettes TR_{12} est décrit par la figure 3.31. Les axes X, Y et Z sont supposés être respectivement alignés avec les sens L, T et S du matériau. Le maillage a été effectué sous PATRAN à l'aide d'éléments de type $c3d8$. Nous avons modélisé 1/8 d'éprouvette comme le montre la figure 3.31 car dans cette configuration les plans d'équation $X = 0$ et $Y = 0$ sont des plans de symétrie pour le matériau. Le même modèle est utilisé pour un prélèvement de l'éprouvette suivant L et T car dans ZeBuLoN il est possible d'effectuer une rotation des axes définissant l'orientation du matériau, au lieu de modifier la géométrie du modèle. Les conditions aux limites appliquées sont :

- Fixation de la composante X pour les nœuds du plan $X = 0$
- Fixation de la composante Y pour les nœuds du plan $Y = 0$
- Fixation de la composante Z pour les nœuds du plan $Z = 0$
- Déplacement imposé suivant X pour les nœuds du plan $X = 51$ mm

Le post-traitement du calcul consiste à récupérer l'effort selon X au niveau du plan $X = 0$ et le

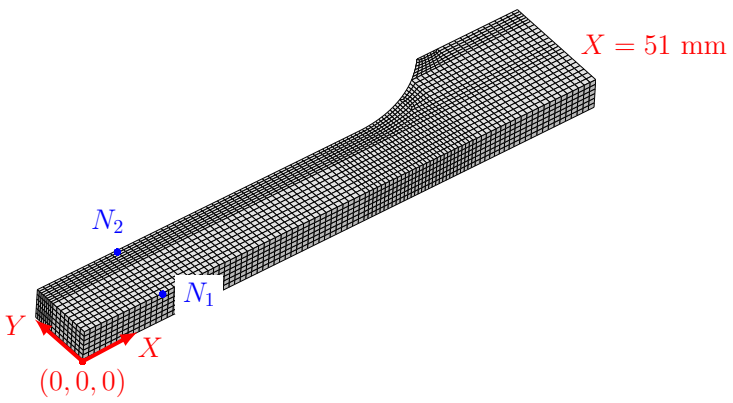


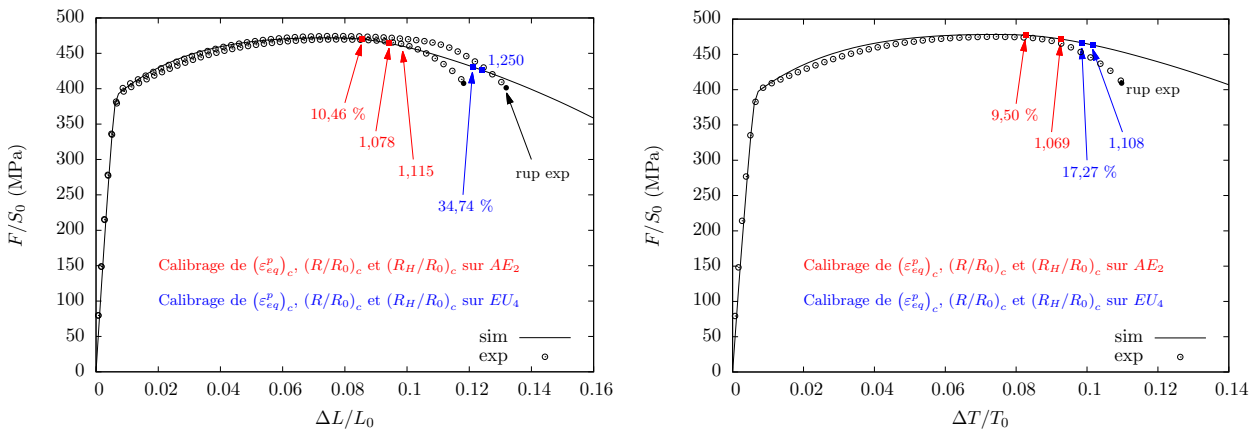
FIGURE 3.31 – Modélisation des éprouvettes TR_{12}

déplacement suivant X des nœuds N_1 et N_2 servant à modéliser l'extensomètre (voir figure 3.31). Compte tenu des symétries il faudra multiplier l'effort par quatre et le déplacement des nœuds N_1 et N_2 par deux. Nous utiliserons une moyenne du dépacement de N_1 et N_2 afin d'obtenir le déplacement ΔX mesuré par l'extensomètre, puis celui-ci sera divisé par la longueur initiale X_0 (28 mm) afin de déterminer la déformation.

Les résultats de la modélisation de la rupture des éprouvettes TR_{12} et DP en utilisant des critères calibrés sur les éprouvettes AE_2 et EU_4 sont présentés respectivement par les figures 3.32 et 3.33. Pour les éprouvettes TR_{12} les valeurs critiques issues du calibrage à partir des éprouvettes EU_4 permettent une meilleure prévision de la rupture. En effet les valeurs des critères obtenues par la simulation de la rupture des éprouvettes AE_2 fournissent une rupture prématurée des éprouvettes TR_{12}. Nous avons montré précédemment que les critères de rupture calibrés sur les éprouvette EU_4 permettent de rendre compte de la rupture orthotrope de ces éprouvettes suivant les sens L et T. Ainsi il est intéressant de noter que leur application aux éprouvettes TR_{12} conduit néanmoins à une ductilité à rupture quasiment identique entre les sens L et T, conformément aux résultats expérimentaux du chapitre 1.

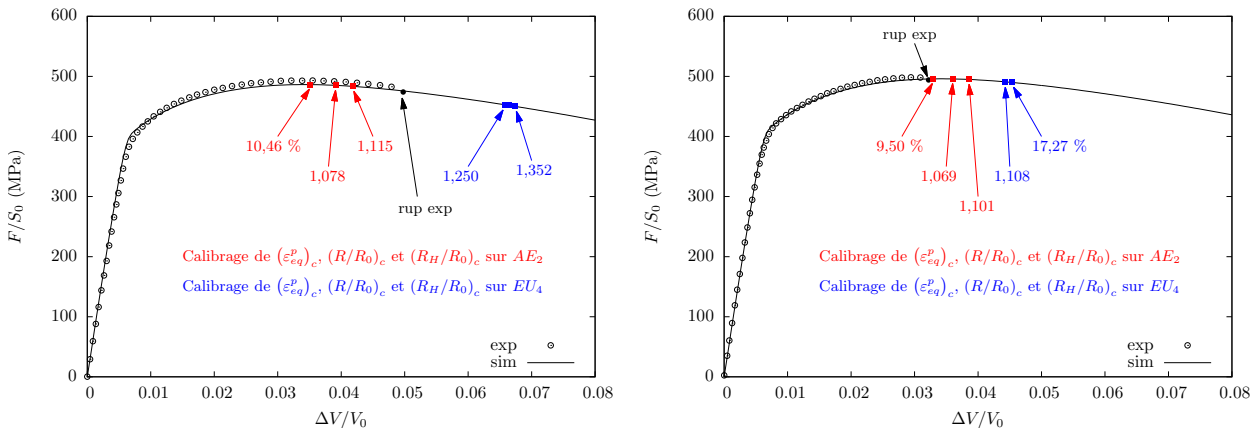
Pour les éprouvettes DP une meilleure modélisation de la rupture semble être obtenue en utilisant des critères dont les valeurs critiques ont été déterminées à partir des éprouvettes AE_2. Il existe cependant une limitation essentielle liée à l'emploi de ces valeurs critiques. En effet elles ne sont pas aptes à rendre compte du caractère orthotrope de la rupture des éprouvettes DP contrairement à celles calibrées sur les éprouvettes EU_4. Cependant ces dernières conduisent à une estimation de la rupture trop tardive, bien qu'elles permettent effectivement de modéliser une rupture orthotrope suivant les sens L et T. En s'inspirant des travaux de [Xue, 2007], une solution afin de prévoir une rupture correcte des éprouvettes DP à partir du critère de [Rice and Tracey, 1969], calibré sur les éprouvettes EU_4, serait de faire dépendre la valeur critique $(R/R_0)_c$ du paramètre de Lode.

La figure 3.34 montre qu'il est nécessaire de choisir une valeur critique de R/R_0 égale respectivement à 1,130 et 1,055 afin de simuler la rupture des éprouvettes DP prélevées selon les sens L et T. La figure 3.35 présente pour les éprouvettes TR_{12} et DP l'évaluation du paramètre de Lode au niveau de l'élément où la valeur moyenne de R/R_0 est maximale. La valeur de ν_L pour les éprouvettes TR_{12} est proche de 0,7 avant la striction puis décroît jusqu'à 0,4 au moment de la rupture. Pour les éprouvettes DP la valeur du paramètre de Lode est de l'ordre de 0,1, c'est-à-dire proche de zéro qui est la valeur caractéristique du cisaillement. Sur la figure 3.36 nous avons situé les différentes éprouvettes en fonction des valeurs du taux de triaxialité et du paramètre de Lode obtenues par simulation à l'instant de la rupture. Nous pouvons constater qu'il existe deux populations distinctes d'éprouvettes. La première est constituée des éprouvettes DP et correspond à une valeur de $|\nu_L|$ inférieure à 0,2, tandis que la seconde est caractérisée par $|\nu_L|$ supérieur à 0,7 et regroupe les éprouvettes EU, AE et TR_{12}. Par conséquent, pour ν_L appartenant à l'intervalle $[-0,2; 0,2]$ la valeur de $(R/R_0)_c$ sera égale à celle de



(a) Eprouvettes TR_{12} sens L (b) Eprouvettes TR_{12} sens T

FIGURE 3.32 – Simulation de la rupture des éprouvettes TR_{12}



(a) Eprouvettes DP sens L (b) Eprouvettes DP sens T

FIGURE 3.33 – Simulation de la rupture des éprouvettes DP

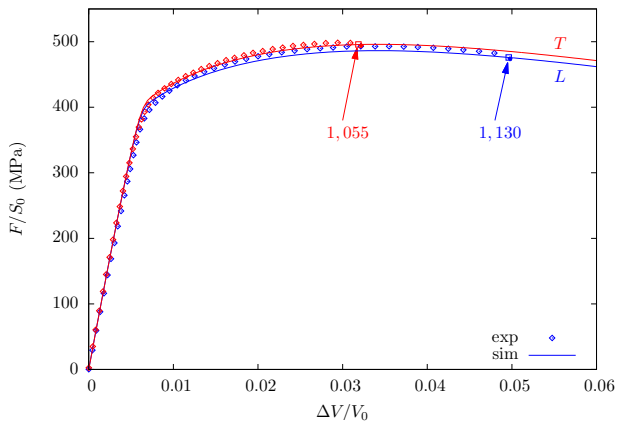
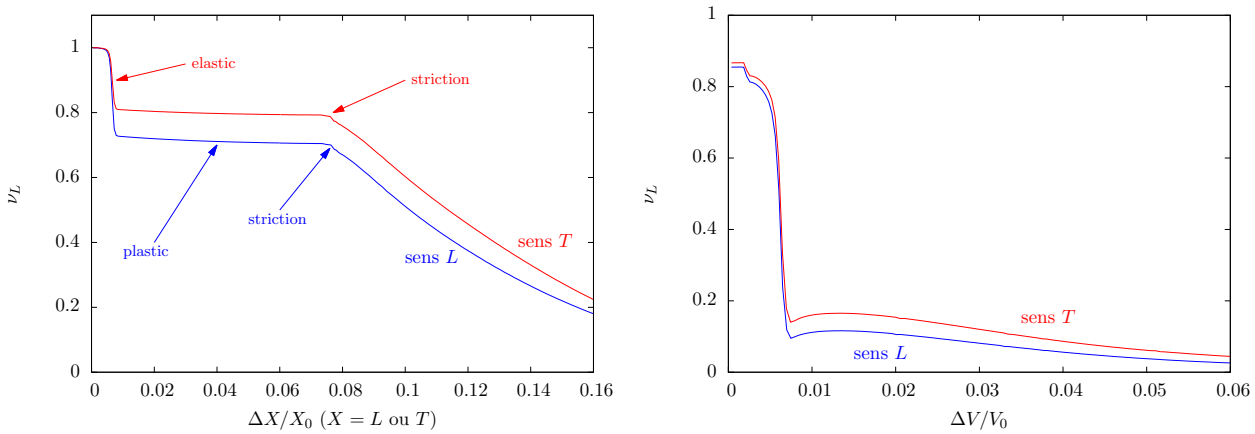


FIGURE 3.34 – Calibration de $(R/R_0)_c$ afin de simuler la rupture des éprouvettes DP



(a) Eprouvettes TR_{12} (b) Eprouvettes DP

FIGURE 3.35 – Evolution du paramètre de Lode ν_L au niveau de la zone critique associée à R/R_0 pour les éprouvettes TR_{12} et DP

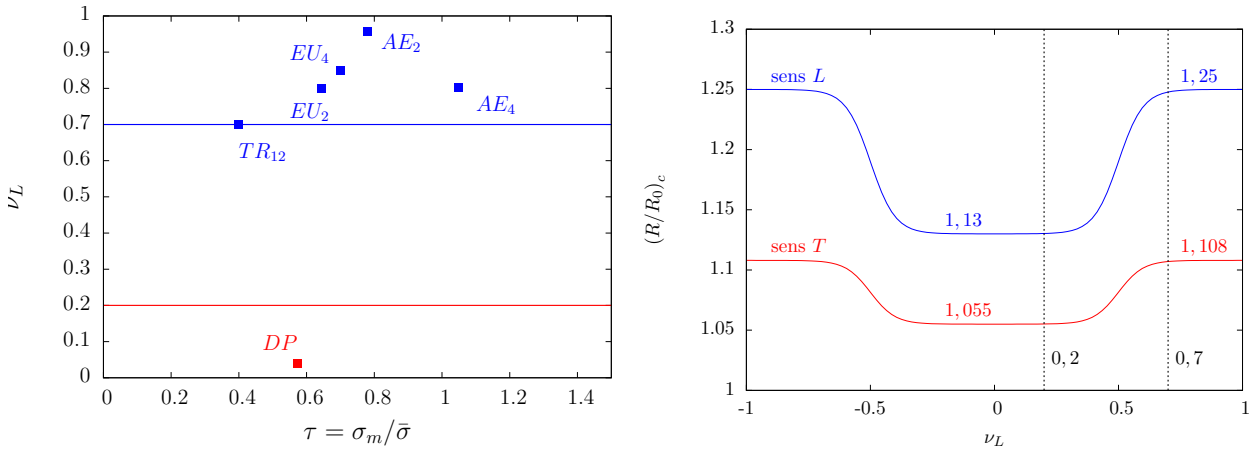
R/R_0 calculée pour les éprouvettes DP au moment de la rupture, soit 1,13 et 1,055 respectivement pour les sens de prélèvement L et T (voir figure 3.34). De même pour $|\nu_L|$ supérieur à 0,7 la valeur de $(R/R_0)_c$ correspond à celle issue de la calibration réalisée à partir des éprouvettes EU_4 et résumée dans le tableau 3.4. Entre ces deux extrêmes nous avons choisi une évolution de $(R/R_0)_c$ selon une fonction tangente hyperbolique représentée sur la figure 3.36 et définie par :

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)_c = \left(\frac{R}{R_0}\right)_c^{DP} + \left[\left(\frac{R}{R_0}\right)_c^{EU_4} - \left(\frac{R}{R_0}\right)_c^{DP}\right] \frac{1 + \tanh\left[10\ \left(|\nu_L| - 0,5\right)\right]}{2} \tag{3.59}$$

Cette dépendance vis à vis du paramètre de Lode de la valeur critique de R/R_0 calibrée sur les éprouvettes EU_4 permet une prévision satisfaisante de la rupture des éprouvettes EU_2, TR_{12} et DP. Nous avons choisi de privilégier pour la simulation de la rupture un calibrage du critère de [Rice and Tracey, 1969] basé sur les éprouvettes EU_4 plutôt que sur les éprouvettes AE_2. Ce choix tient au fait que les valeurs de $(R/R_0)_c$ pour les sens L et T déterminés à partir des éprouvettes AE_2 ne permettent pas, comme le montre la figure 3.33, de rendre compte d'une rupture orthotrope. En effet, d'après cette figure quel que soit le sens de prélèvement des éprouvettes DP la valeur de $\Delta V/V_0$ à rupture, obtenue en utilisant des valeurs critiques calibrées sur les éprouvettes AE_2, est quasiment identique.

Ce constat n'est pas une surprise puisque expérimentalement le caractère orthotrope de la rupture entre les sens L et T est beaucoup moins marqué pour les éprouvettes AE que pour les éprouvettes EU et DP. Les éprouvettes DP ne posent finalement pas de problème puisque nous avons formulé la valeur critique de R/R_0 en fonction du paramètre de Lode. Par contre, d'après les essais décrits au chapitre 1 les éprouvettes CT10 de type $L - T$ et $T - L$ présentent une forte orthotropie de rupture dont la modélisation dans le prochain paragraphe, consacré aux éprouvettes fissurées, nécessitera l'utilisation des valeurs critiques calibrées à partir des éprouvettes EU_4.

Nous devons donc chercher un critère spécifique afin de pouvoir prévoir la rupture des éprouvettes AE. Nous nous sommes orientés vers un critère en contrainte puisque nous avons échoué dans la simulation de la rupture de ces éprouvettes à l'aide d'un critère en déformation plastique équivalente ou en utilisant le critère de [Rice and Tracey, 1969]. Ainsi à l'instant de la rupture expérimentale des éprouvettes AE_2 et AE_4, prélevées selon le sens L, la contrainte principale σ_1, issue de la simulation numérique, est respectivement de 825 MPa et de 839 MPa à comparer à 739 MPa et 686 MPa pour celle des éprouvettes EU_2 et EU_4, usinées suivant la direction L. Il devient donc possible d'utiliser cette contrainte comme critère de rupture pour les éprouvettes AE, sans que ce critère atteigne sa valeur



(a) Répartition des éprouvettes selon τ et ν_L (b) Evolution de $(R/R_0)_c$ en fonction de ν_L

FIGURE 3.36 – Répartition des éprouvettes et évolution de $(R/R_0)_c$ en fonction de ν_L

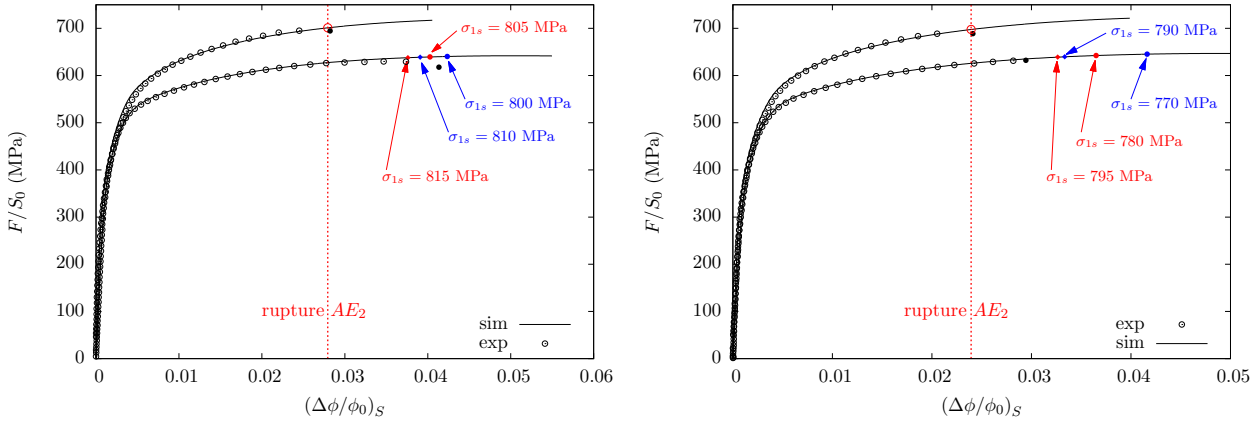
critique pour les éprouvettes EU. La rupture des éprouvettes AE, compte tenu de leur faible ductilité, s'apparente d'une certaine manière à de la rupture « fragile » dont une modélisation pertinente peut être effectuée à partir d'un critère basé sur la contrainte principale σ_1.

Toutefois le caractère soudain de la rupture des éprouvettes AE, alors que la plastification est encore faible, s'accorde mal selon nous avec une valeur critique de σ_1 qui serait localisée au niveau d'un unique élément. C'est pourquoi nous avons décidé, afin de simuler la rupture de ces éprouvettes, d'associer une valeur seuil de σ_1, notée σ_{1s}, à un volume critique V_c correspondant au volume des éléments pour lesquels $\sigma_1 \geq \sigma_{1s}$. Pour une valeur de σ_{1s} donnée, le calibrage du volume V_c est réalisé à partir des éprouvettes AE_2 prélevées suivant les sens L et T. Ces valeurs de σ_{1s} et V_c sont alors utilisées pour prédire la rupture des éprouvettes AE_4. La figure 3.37 montre les résultats obtenus pour différentes valeurs seuil de σ_1.

La prévision de la rupture de l'éprouvette AE_4 prélevée selon L est excellente pour une contrainte σ_{1s} de 805 MPa associée à un volume critique de 12,9 mm^3. Elle est cependant moins bonne pour une éprouvette AE_4 prélevée suivant T, bien qu'elle reste acceptable pour une valeur seuil σ_{1s} égale à 795 MPa et un volume critique de 5,7 mm^3. En effet dans ce cas elle est comparable à la prévision obtenue avec le critère de [Rice and Tracey, 1969], pour une valeur critique calibrée à partir de l'éprouvette AE_2, usinée également selon T (voir figure 3.21). La figure 3.38 représente le volume critique associé aux contraintes seuil de 805 MPa et 795 MPa qui permettent de simuler de manière satisfaisante la rupture des éprouvettes AE_4 prélevées respectivement selon L et T. Le volume V_c déterminé pour le sens T est nettement plus faible que celui obtenu pour le sens L.

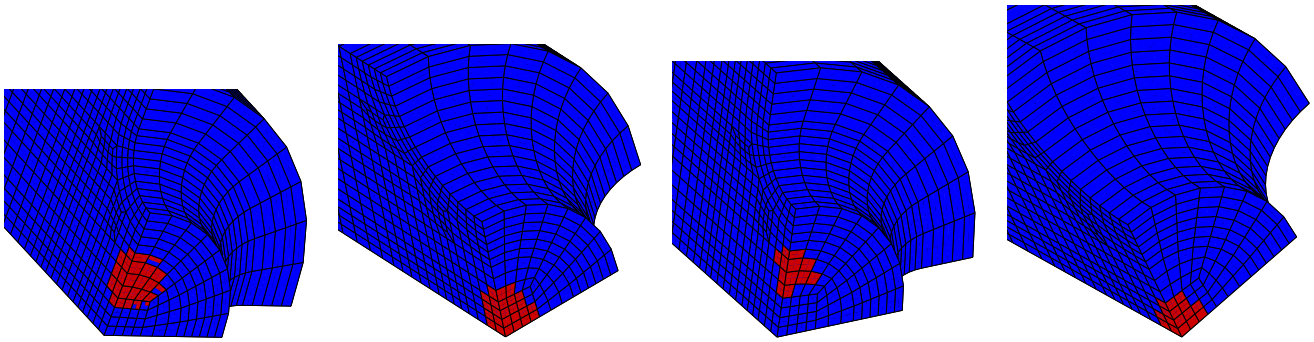
L'explication de cet écart est liée à la répartition des précipités intermétalliques Al_2Cu observée au chapitre 1. En effet la valeur de contrainte seuil permet de briser les précipités et donc de générer des cavités qui vont rapidement coalescer au sein du volume V_c, et conduire à une rupture brutale. Pour qu'il y ait rupture il faut qu'il existe une fraction de vide suffisante dans le volume V_c. Ainsi, compte tenu de la distribution des précipités intermétalliques celle-ci sera atteinte pour un volume plus faible lors d'une sollicitation suivant T puisque les précipités sont plus proches dans le sens L que dans le sens T, facilitant par conséquent la coalescence. Nous pouvons constater que le critère de rupture basé sur une contrainte seuil σ_{1s} et un volume critique V_c permet de prévoir un amorçage de la rupture proche du centre des éprouvettes AE. Cette localisation de la rupture au centre des éprouvettes correspond à l'observation des coupes polies des éprouvettes AE, réalisée au chapitre 1.

Nous sommes parvenus au terme de cette analyse à simuler la rupture de toutes les éprouvettes non fissurées testées dans le chapitre 1 en utilisant une combinaison de deux critères. Le premier est celui développé par [Rice and Tracey, 1969] et permet de prévoir la rupture des éprouvettes EU, TR_{12}



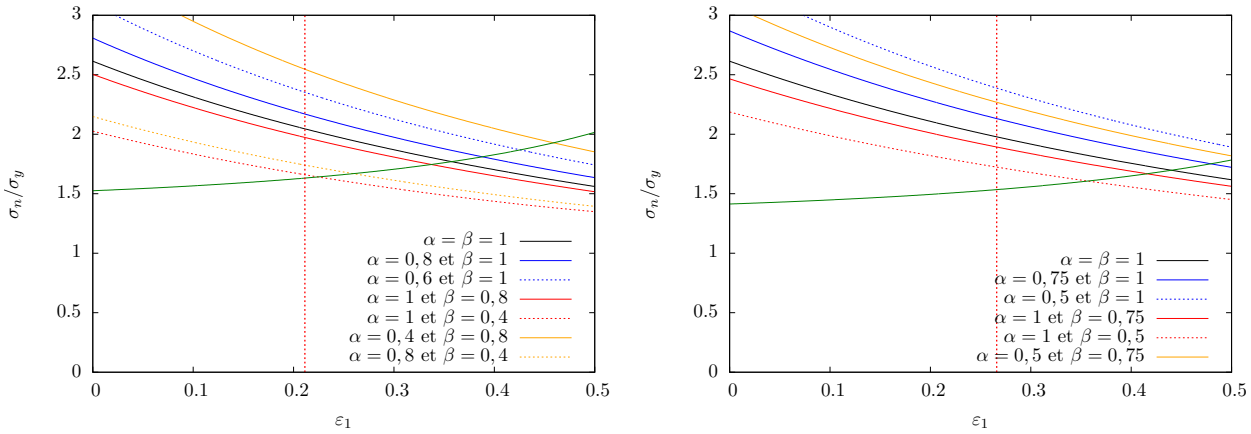
(a) Eprouvettes AE sens L (b) Eprouvettes AE sens T

FIGURE 3.37 – Prévision de la rupture des éprouvettes AE_4 à partir de σ_{1s} et V_c



AE_2 sens L	AE_4 sens L	AE_2 sens T	AE_4 sens T
$\sigma_{1s} = 805$ MPa	$\sigma_{1s} = 805$ MPa	$\sigma_{1s} = 795$ MPa	$\sigma_{1s} = 795$ MPa
$V_c = 12,9$ mm^3	$V_c = 12,9$ mm^3	$V_c = 5,7$ mm^3	$V_c = 5,7$ mm^3

FIGURE 3.38 – V_c associé à σ_{1s} pour la simulation de la rupture des éprouvettes AE



(a) Eprouvette EU_2 sens L (b) Eprouvette EU_4 sens T

FIGURE 3.39 – Prévision de la rupture des éprouvettes EU à partir du critère de coalescence de [Thomason, 1985a]

et DP. Il faut préciser que pour cette dernière géométrie d'éprouvette il est nécessaire d'introduire une dépendance de la valeur critique de R/R_0 vis-à-vis du paramètre de Lode. Le second est dédié aux éprouvettes AE, il est basé sur une valeur seuil de la contrainte principale σ_1 associée à un volume critique V_c. Nous souhaitons conclure cette seconde partie du chapitre 3 par l'application du critère de [Thomason, 1985a] à la prédiction de la rupture des éprouvettes EU prélevées selon L. Le but est de déterminer les dimensions initiales de la cellule, représentée par la figure 3.13, afin d'obtenir des valeurs de ε_1^f identiques à celles issues de la simulation des éprouvettes EU_2 et EU_4 prélevées selon L, égales respectivement à 0,21 et 0,27. Ces dernières ont été déterminées au niveau de l'élément présentant une valeur maximale de R/R_0.

Nous rappelons que la détermination de ε_1^f caractérisant le début de la coalescence s'effectue par la résolution de l'équation (3.52). Les dimensions initiales de la cellule (l_1^0, l_2^0 et l_3^0), centrée sur la cavité illustrée par la figure 3.13, sont définies à partir d'une longueur étalon l_0 en posant : $l_1^0 = \alpha l_0$, $l_2^0 = \beta l_0$ et $l_3^0 = \gamma l_0$.

Dans un premier temps nous avons fixé $\gamma = 1$ et attribué des valeurs à α et β inférieures à 1. En effet l'analyse métallographique de notre alliage, réalisée au chapitre 1, a montré que la distance entre les précipités intermétalliques selon S, correspondant à l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$, est supérieure à la distance entre précipités suivant L et T, représentés respectivement par $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_2$. La figure 3.39 présente pour différentes valeurs de α et β la déformation ε_1^f correspondante. La valeur de la triaxialité et du paramètre de Lode pour les éprouvettes EU sont supposées constantes et correspondent à celles fournies par les figures 3.25 et 3.26 au moment de la rupture. La porosité initiale est prise égale au taux de précipités intermétalliques Al_2Cu, déterminé par tomographie au chapitre 1, car nous supposons que lorsque la coalescence se produit toutes les phases Al_2Cu ont généré des cavités. La figure 3.39 montre que pour s'approcher des valeurs de ε_1^f correspondant à la rupture expérimentales des éprouvettes EU il faut imposer α inférieur à β. D'où une incohérence avec les observations métallographiques qui montrent que la distance entre précipités est plus faible selon L que selon T. Nous devons donc conclure que la rupture de notre alliage ne peut pas être simulée par une coalescence pilotée par le critère de [Thomason, 1985a].

3.3.2.3 Application aux éprouvettes fissurées

Dans le paragraphe précédent nous avons déterminé à l'aide des éprouvettes EU_4 la valeur critique du critère de [Rice and Tracey, 1969]. En utilisant la méthodologie proposée par [Mudry, 1983], nous allons maintenant chercher à calibrer la taille de maille en pointe de fissure à partir des essais effectués

sur éprouvettes CT10. Il semble exister deux manières de procéder. La première, que nous avons choisie, envisage simplement cette taille de maille comme un paramètre ajustable du modèle dont la détermination est purement numérique. La seconde s'efforce de donner un sens physique à cette taille de maille, elle est décrite notamment par [Mudry et al., 1989], [Devaux et al., 1989] et [Achon, 1994].

Il s'agit de rattacher la taille de maille, en pointe de fissure, à l'avancée critique de la fissure par émoussement, notée $(\Delta a)_c$, juste avant l'amorçage de la propagation. [Mudry et al., 1989] et [Devaux et al., 1989] proposent alors la relation suivante uniquement valide pour le cas de la plasticité confinée :

$$J_{IC} = \alpha \sigma_y \left(\Delta_a\right)_c \ln \left(\frac{R}{R_0}\right)_c$$

La valeur du coefficient α dépend du type, du nombre et de la taille des éléments utilisés pour modéliser la pointe de fissure. Connaissant J_{IC}, α et $(R/R_0)_c$ les auteurs de [Devaux et al., 1989] en déduisent alors la valeur de $(\Delta a)_c$. Nous n'avons pas utilisé cette méthodologie car la détermination de J_{IC}, réalisée au chapitre 1, n'est pas satisfaisante compte tenu du faible émoussement présent en pointe de fissure, dans le cas de notre alliage.

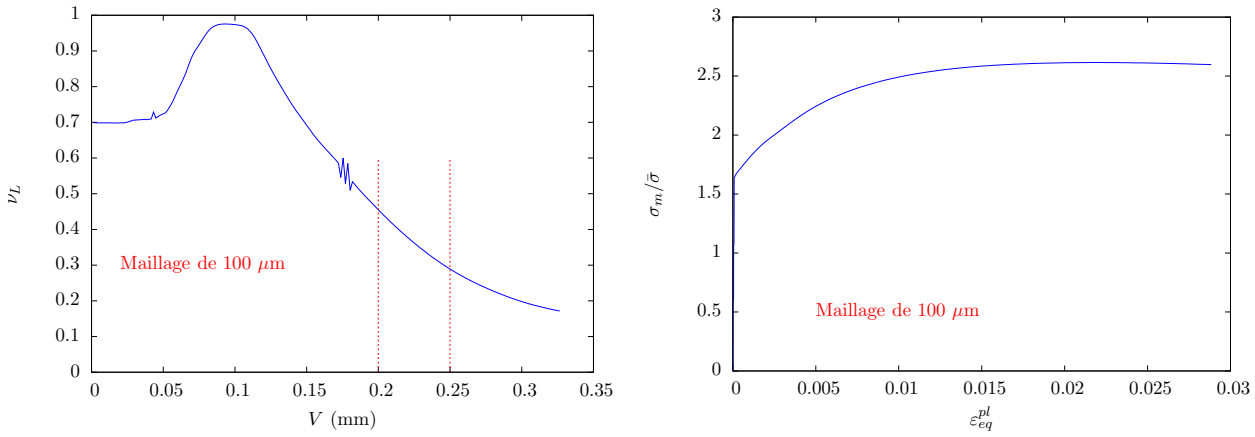
Nous préférons donc assimiler la taille de maille à un paramètre du modèle qui doit être calibré au même titre que les autres. La procédure de calibrage que nous avons mise en place est simple, elle consiste à réaliser plusieurs maillages avec des tailles de maille différentes en pointe de fissure. Nous avons utilisé uniquement des mailles carrées dans le plan perpendiculaire à l'épaisseur de l'éprouvette CT10. Précisons également que les éléments employés en pointe de fissure seront linéaires, car l'hypothèse d'intégration sélective permet d'assurer une variation de volume constante dans les éléments où existe une déformation plastique importante.

Une simulation de l'essai sur éprouvette CT10 est ensuite réalisée à partir des différents maillages. Mise à part la taille de maille le modèle employé est identique, en termes de géométrie et de conditions aux limites, à celui décrit au chapitre 2 dans le cadre de l'étude relative à la « keycurve ». Par contre le comportement élasto-plastique du matériau est différent. En effet nous utilisons ici le critère de plasticité défini par [Bron and Besson, 2004] dont les coefficients ont été déterminés au paragraphe 3.2.2.3 (voir page 157). De plus les calculs sont réalisés avec l'hypothèse des grandes déformations géométriques et matériau, exprimées dans le repère corrotationnel (voir [Ladevèze, 1980]).

Afin de calibrer la taille de maille à partir des éprouvettes CT10 de type $L-T$ il est nécessaire de déterminer auparavant la valeur critique de R/R_0 à utiliser. En effet lors de la simulation numérique le pas de temps correspondant à l'instant de la rupture est précisément celui pour lequel la valeur moyenne maximale de R/R_0 est égale à cette valeur critique. Précisons que pour les éprouvettes fissurée la rupture est assimilée à l'amorçage de la fissure qui ne coïncide pas pour un matériau ductile avec la rupture effective de l'éprouvette. En effet il existe entre ces deux instants une phase de propagation plus ou moins stable de la fissure comme le montrent les résultats obtenus au chapitre 1 sur les éprouvettes CT, SENT et SCT. Il faut garder à l'esprit que la valeur de $(R/R_0)_c$ calibrée à partir des éprouvettes EU_4 dépend du paramètre de Lode comme le montrent la relation (3.59) et la figure 3.36. Par conséquent nous avons tracé sur la figure 3.40 l'évolution de ν_L et du taux de triaxialité en fonction de la déformation plastique équivalente pour l'élément, où la valeur moyenne de (R/R_0) est maximale.

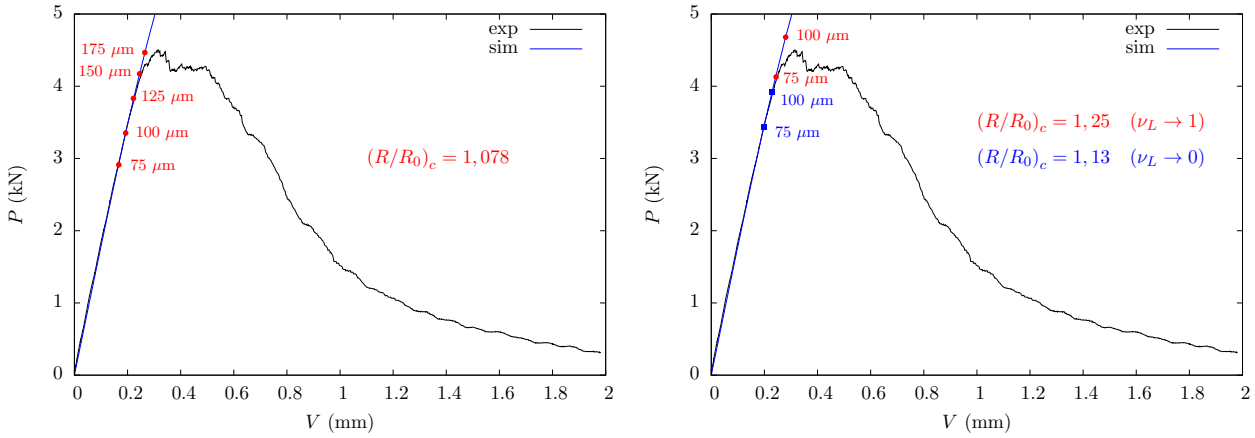
Cet élément correspond à celui situé en pointe de fissure au centre de l'éprouvette, c'est-à-dire à l'intersection des deux plans de symétrie de l'éprouvette. Compte tenu des résultats expérimentaux du chapitre 1 et de l'analyse FAD à la fin du chapitre 2 nous attendons un amorçage de la fissure pour une valeur de V comprise entre 0,2 mm et 0,25 mm. La figure 3.40 montre que pour ces valeurs de V le paramètre de Lode varie entre 0,25 et 0,45. Nos éprouvettes CT10 ne sont donc pas tout à fait dans un état de déformation plane qui correspond à une valeur théorique nulle de ν_L.

En se référant à la figure 3.36 il n'est pas évident de déterminer la valeur de $(R/R_0)_c$ associée à



(a) Paramètre de Lode (b) Taux de triaxialité

FIGURE 3.40 – Evolution du paramètre de Lode et du taux de triaxialité pour les éprouvettes CT10 de type $L-T$



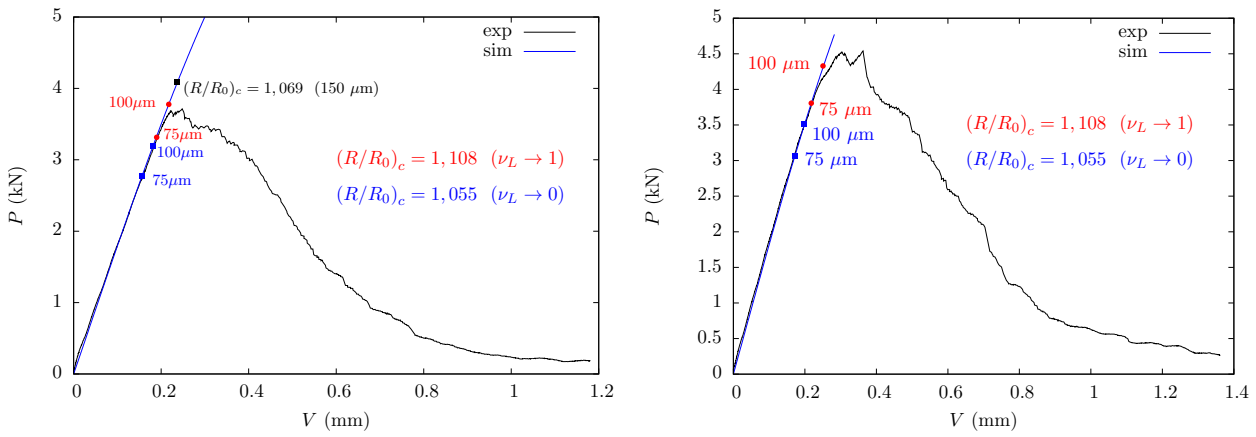
(a) $(R/R_0)_c$ calibrée sur AE_2 – sens L $(R/R_0)_c$ calibrée sur EU_4 – sens L

FIGURE 3.41 – Calibrage de la taille de maille des éprouvettes CT10 de type $L-T$

un paramètre de Lode compris entre 0,25 et 0,45. En effet nous nous situons précisément dans la zone de transition entre le cas de déformation plane ($|\nu_L| \in [0; 0,2]$) et celui de traction ($|\nu_L| \to 1$). Par conséquent nous avons décidé de prévoir la rupture des éprouvettes CT10 de type $L-T$ en utilisant les valeurs critiques de R/R_0 correspondant à ces deux cas extrêmes de chargement, à savoir 1,13 pour $\nu_L \to 0$ et 1,25 pour $\nu_L \to 1$ (voir figure 3.36). Dans le cas où la valeur $(R/R_0)_c$ est calibrée à partir de l'éprouvette AE_2, il n'existe pas de dépendance par rapport à ν_L, ainsi la valeur critique de R/R_0 à utiliser est de 1,078.

La figure 3.41 présente la prévision de la rupture des éprouvettes CT10 de type $L-T$ pour différentes tailles de maille selon la valeur critique de R/R_0 utilisée. Il apparaît que quelle que soit la valeur de $(R/R_0)_c$ il est possible de trouver une taille de maille permettant de simuler la rupture des éprouvettes CT10 prélevées selon le sens $L-T$. Ainsi pour une valeur critique de R/R_0 calibrée à partir des éprouvettes AE_2 nous devrons utiliser une taille de maille de 150 μm. Pour le cas d'un calibrage de $(R/R_0)_c$ basé sur l'éprouvette EU_4 il sera nécessaire, pour rendre compte de la rupture des éprouvettes CT10 de type $L-T$, d'employer des tailles de maille différentes, respectivement 75 μm ou 100 μm, selon que $\nu_L \to 1$ ou $\nu_L \to 0$.

Il faut cependant s'assurer que l'application du critère en contrainte principale σ_1, développé au paragraphe précédent pour modéliser la rupture des éprouvettes AE, ne fournit pas un effort P à rupture inférieur à celui déterminé précédemment avec le critère de [Rice and Tracey, 1969]. Pour le



(a) Eprouvette CT10 sens $T - L$ (b) Eprouvette CT10 sens $T - S$

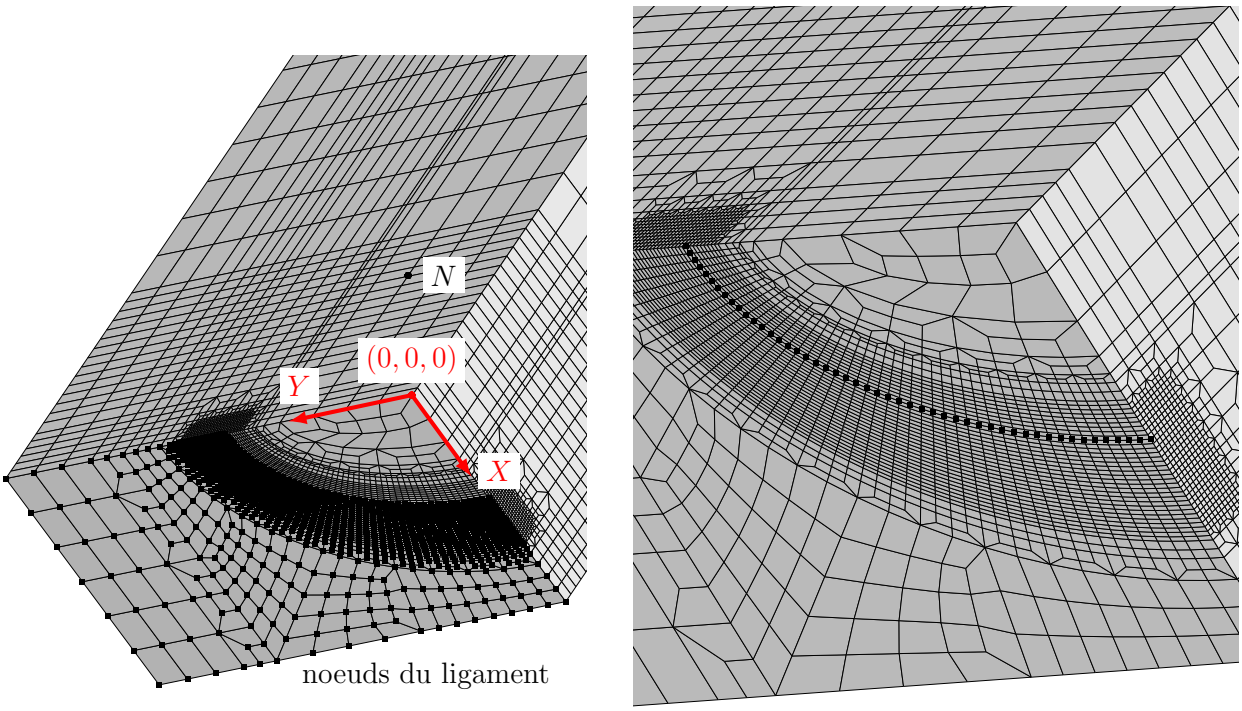
FIGURE 3.42 – Prévision de la rupture des éprouvettes CT10 de type $T - L$ et $T - S$

modèle de l'éprouvette CT10 dont la taille de maille est de 75 μm nous avons donc calculé, à l'instant de la rupture obtenu avec la valeur critique de R/R_0 égale à 1,25, le volume d'éléments pour lequel la contrainte σ_1 est supérieure à la valeur seuil de 805 MPa. Nous trouvons un volume de 1,6 mm^3 qui est nettement inférieur au volume critique V_c de 12,9 mm^3 calibré à partir de l'éprouvette AE_2 prélevée selon L. Le volume d'élément associé à la contrainte seuil de 805 MPa n'est donc pas suffisant pour entrainer une rupture prématurée de l'éprouvette CT10, bien que la valeur maximale de σ_1 soit de 1293 MPa. Nous voyons sur cet exemple l'importance et la pertinence d'associer un volume critique à une valeur seuil de la contrainte principale σ_1.

La taille de maille en pointe de fissure étant maintenant fixée en fonction de la valeur de ν_L, le modèle va être utilisé afin de simuler la rupture des éprouvettes CT10 prélevées suivant les sens $T - L$ et $T - S$. Pour ces deux orientations la valeur critique de R/R_0 est de 1,108 ou de 1,055 selon que le paramètre de Lode tend vers 1 ou 0, correspondant respectivement à une taille de maille de 75 μm et 100 μm. Nous avons également utilisé une valeur de $(R/R_0)_c$ égale à 1,069, associée à une taille de maille de 150 μm. Cette valeur correspond à un calibrage réalisé à partir de l'éprouvette AE_2 prélevée selon T.

La figure 3.42 montre que l'utilisation d'une valeur critique de (R/R_0) calibrée sur les éprouvettes EU_4 permet de simuler la rupture des éprouvettes CT10 de type $T - L$ et $T - S$ quelle que soit la valeur attribuée à ν_L. Par contre la modélisation de la rupture à partir de la valeur de 1,069, calibrée sur l'éprouvette AE_2 au lieu de EU_4, n'est pas satisfaisante. Ce résultat n'est pas surprenant car nous avions déjà évoqué ci-dessus la difficulté de la simulation d'une rupture anisotrope à partir d'un calibrage de $(R/R_0)_c$ sur les éprouvettes AE_2 prélevées selon L et T. Cette difficulté est liée au caractère orthotrope de la rupture expérientale qui est nettement moins marqué pour les éprouvettes AE que pou les éprouvettes EU.

Ce paragraphe consacré à la prévision de la rupture des éprouvettes fissurées à partir d'une valeur critique de R/R_0 va s'achever sur l'application de ce critère aux éprouvettes SENT et SCT. Comme pour les éprouvettes CT10 la modélisation des éprouvettes SENT est identique en termes de géométrie et de conditions aux limites à celle décrite au chapitre 2 dans le cadre de l'étude relative à la « keycurve ». Le modèle des éprouvettes SCT est décrit par la figure 3.43. Les axes X, Y et Z correspondent respectivement au sens S, L et T du matériau, ces alignements sont réalisés, dans ZeBuLoN, en effectuant une rotation des axes définissant l'orientation du matériau. Le maillage a été réalisé sous PATRAN à l'aide d'éléments de type $c3d8$. Nous avons modélisé un quart d'éprouvette puisque les plans d'équation $Y = 0$ et $Z = 0$ sont des plans de symétrie pour le matériau et la géométrie. Les conditions aux limites appliquées au modèle sont :



(a) Vue générale (b) Détail du front de fissure (maille de 100 μm)

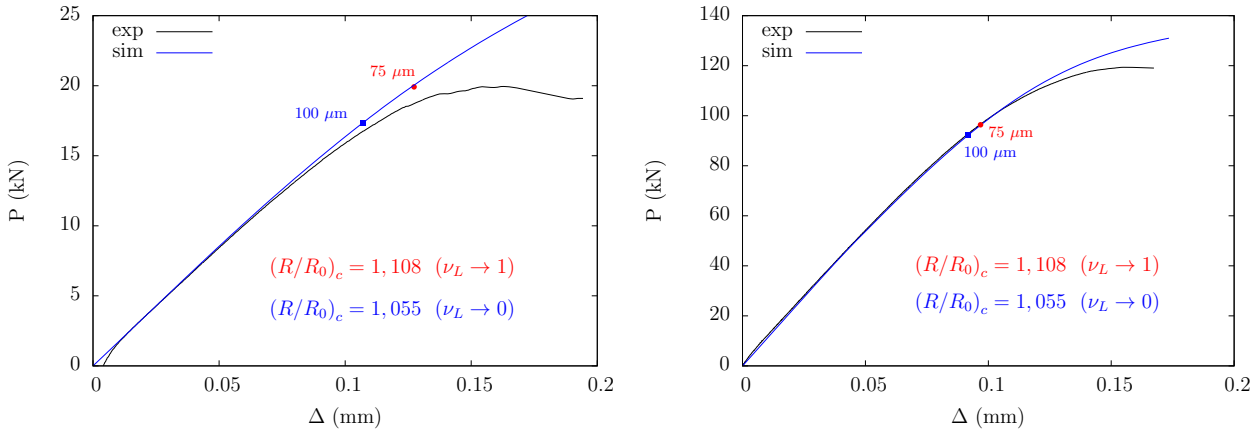
FIGURE 3.43 – Modélisation des éprouvettes SCT

- Fixation de la composante Y pour les nœuds du plan $Y = 0$
- Fixation de la composante Z pour les nœuds du plan $Z = 0$
- Déplacement imposé suivant Z pour les nœuds du plan $Z = 60$ mm
- Fixation de la composante X pour les nœuds du plan $Z = 60$ mm

Le post-traitement du calcul consiste à récupérer l'effort selon Z au niveau du plan de symétrie $Z = 0$ et le déplacement selon Z du nœud N servant à modéliser l'extensomètre. Compte tenu des symétries il sera nécessaire de multiplier par deux l'effort et le déplacement du nœud N. Le comportement élasto-plastique du matériau est décrit par le critère de plasticité de [Bron and Besson, 2004] dont les coefficients ont été déterminés au paragraphe 3.2.2.3 (voir page 157). De plus les calculs en pointe de fissure sont réalisés avec l'hypothèse des grandes déformations géométriques et matériau, exprimées dans le repère corrotationnel (voir [Ladevèze, 1980]).

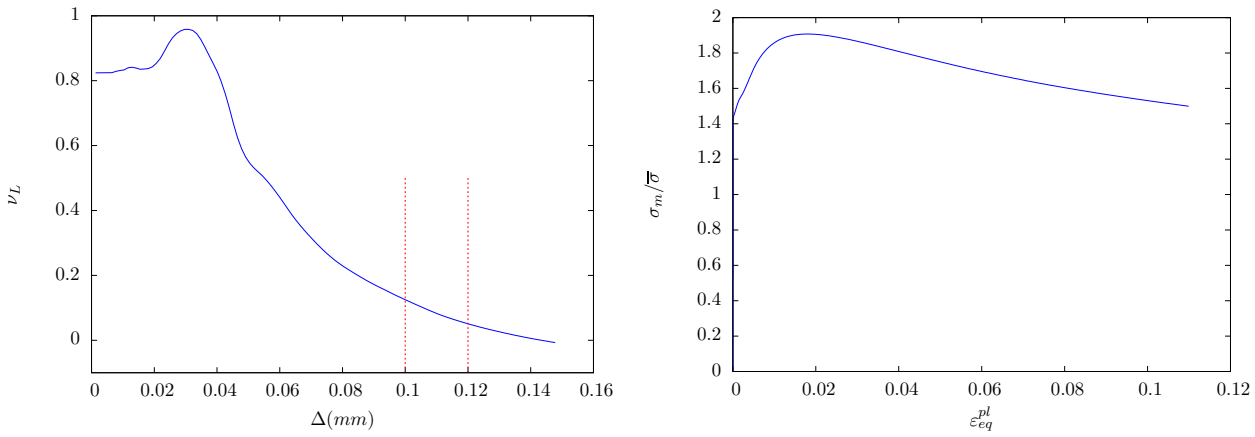
La figure 3.44 présente les résultats de la simulation de la rupture des éprouvettes SENT et SCT à partir d'une valeur critique de R/R_0 égale à 1,108 ou 1,055 selon que le paramètre de Lode tend vers 1 ou 0. La taille de maille dépend également de ν_L, elle est de 75 μm ou de 100 μm respectivement pour $\nu_L \to 1$ ou $\nu_L \to 0$. D'après la figure 3.44 nous pouvons constater que le comportement élasto-plastique des éprouvettes SENT et SCT semble ne pas être correctement simulé. Un tel écart ne peut pas être lié à l'utilisation du critère de plasticité développé par [Bron and Besson, 2004] dont les paramètres ont été calibrés à partir des essais sur éprouvettes TR_{12}, AE, EU et DP. En effet il n'est pas raisonnable de penser que la présence d'une fissure puisse rendre ce critère à ce point inadapté pour modéliser la plasticité des éprouvettes SENT et SCT. La seule explication possible est de considérer qu'il existe sur une courte distance une phase stable de la propagation de la fissure avant que celle-ci devienne totalement instable.

Compte tenu de la figure 3.44 la prévision de l'amorçage de la fissure pour les éprouvettes SCT est satisfaisante, de plus nous pouvons constater que l'effort à rupture est quasiment identique quelle que soit la valeur du paramètre de Lode. Pour les éprouvettes SENT la simulation de la rupture est acceptable uniquement lorsque le paramètre de Lode tend vers zéro. Nous avons donc vérifié, comme le montre la figure 3.45, que l'élément où la valeur de R/R_0 est maximale correspond bien à cette exigence



(a) Eprouvette SENT (b) Eprouvette SCT

FIGURE 3.44 – Prévision de la rupture des éprouvettes SENT et SCT



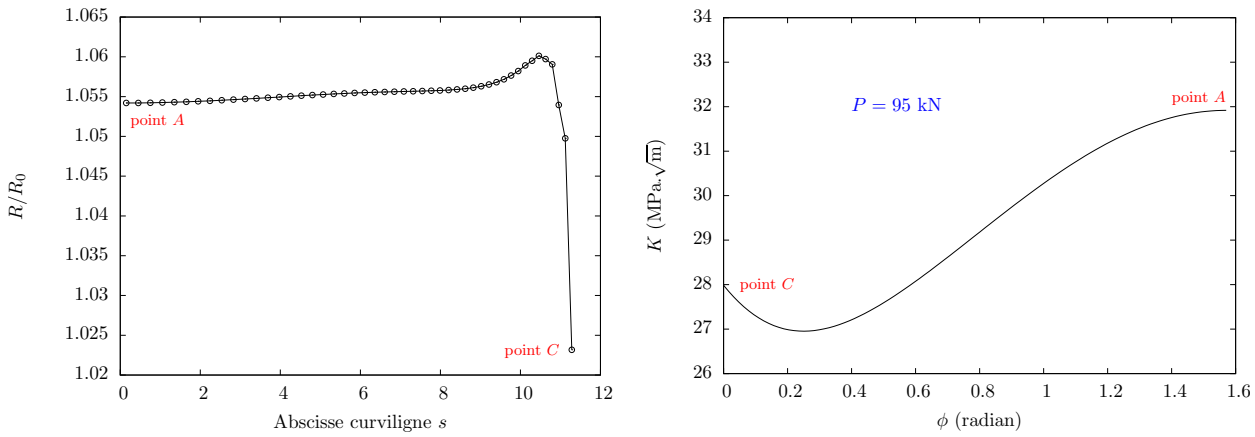
(a) Paramètre de Lode (b) Taux de triaxialité

FIGURE 3.45 – Evolution du paramètre de Lode et du taux de triaxialité pour les éprouvettes SENT

de déformation plane. Pour l'éprouvette SCT la figure 3.46a fournit l'évolution de R/R_0 en fonction de l'abscisse curviligne s au moment de l'amorçage de la fissure correspondant à un effort d'environ 95 kN. Pour cet effort la figure 3.46b présente l'évolution du facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle ϕ servant à paramétrer l'ellipse et dont la définition est donnée dans [Newman and Raju, 1981]. Il apparaît alors que la valeur de K est maximale au point A tandis que celle de R/R_0 semble présenter un maximum précisément là où le facteur d'intensité de contrainte est minimum. Autrement dit la zone d'amorçage de la fissure se situe au point A selon l'approche globale et au voisinage du point C d'après l'approche locale. Cette différence explique pourquoi nous avons trouvé au chapitre 1 une ténacité plus élevée pour les éprouvettes SCT que pour les éprouvettes CT et SENT.

3.3.3 Résumé

Cette seconde partie du chapitre 3 était consacrée à la recherche d'un critère susceptible de fournir une prévision satisfaisante de la rupture des différentes éprouvettes testées au chapitre 1, dont les conclusions montrent que la rupture de notre alliage est de nature ductile. Le critère de [Rice and Tracey, 1969] permet de modéliser la phase prépondérante de la rupture ductile, à savoir la croissance des cavités. Ce critère est basé sur la simulation de l'évolution du rayon R d'une cavité sphérique au sein d'une matrice infinie dont la plasticité est régie par le critère de von Mises. Il est intéressant de préciser que cette évolution suit une loi exponentielle par rapport au taux de triaxialité. En notant par R_0 le rayon initiale de la cavité, la rupture se produit lorsque le rappor R/R_0 atteint une



(a) Critère R/R_0 (b) Facteur d'intensité de contrainte K

FIGURE 3.46 – Evolution du critère R/R_0 et du facteur d'intensité de contrainte K le long du front de fissure des éprouvettes SCT

valeur critique, notée $(R/R_0)_c$, qui reste à calibrer, en utilisant des éprouvettes avec diverses taux de triaxialité compte tenu de la remarque précédente. Dans un premier temps nous avons réalisé, conformément à la littérature, le calibrage de $(R/R_0)_c$ à partir des éprouvettes AE_2 prélevées selon les sens L et T. Nous obtenons deux valeurs critiques de R/R_0 susceptibles de simuler le caractère orthotrope de la rupture selon que le matériau est sollicité dans le sens L ou T. Ces valeurs sont alors utilisées afin de simuler la rupture des éprouvettes AE_4, EU, TR_{12} et DP.

Il apparaît que les valeurs critiques calibrées sur les éprouvettes AE_2 ne permettent pas de simuler la rupture des éprouvettes EU quel que soit le sens de prélèvement. De plus ces valeurs de $(R/R_0)_c$ ne sont pas aptes à rendre compte du caractère orthotrope de la rupture des éprouvettes DP. Nous avons donc décidé d'effectuer un second calibrage de $(R/R_0)_c$ à partir des éprouvettes EU_4 prélevées selon L et T. Les valeurs critiques ainsi obtenues ont alors permis de prévoir la rupture des éprouvettes EU_2, TR_{12} et DP pour les sens de prélèvement L et T. Par contre il n'a pas été possible de modéliser la rupture des éprouvettes AE en utilisant ces valeurs de $(R/R_0)_c$. Il nous faut préciser que pour les éprouvettes DP il a été nécessaire d'introduire une dépendance de $(R/R_0)_c$ vis-à-vis du paramètre de Lode afin d'obtenir une simulation satisfaisante de la rupture. Ainsi l'intérêt de ces éprouvettes serait donc de vérifier comment évolue la valeur de $(R/R_0)_c$ lorsque ν_L tend vers zéro. Nous avons également utilisé conjointement à R/R_0 deux autres critères de rupture : la déformation plastique équivalente et le critère de [Huang, 1991]. Ce dernier est une modification du critère de [Rice and Tracey, 1969] afin d'obtenir une croissance des cavités plus réaliste pour les faibles taux de triaxialité. Dans notre cas ces deux critères fournissent une prévision quasiment identique de l'instant de la rupture, probablement parce que la phase de croissance des cavités est réduite dans le cas de notre alliage. Ainsi un écart significatif entre l'utilisation du critère de [Rice and Tracey, 1969] ou de [Huang, 1991] n'a pas le temps de se creuser. Quant à la déformation plastique équivalente elle ne permet pas de rendre compte de la rupture des différentes éprouvettes, car elle ne tient pas compte des micromécanismes de la rupture ductile.

Il reste à déterminer un critère pour la simulation de la rupture des éprouvettes AE, puisque celle-ci n'a pas pu être réalisée avec le critère de [Rice and Tracey, 1969]. La modélisation de la rupture des éprouvettes AE a nécessité l'utilisation d'un critère basé sur une valeur seuil de la contrainte principale σ_1, associée à un volume critique V_c. Ce critère qui s'apparente à un critère de rupture fragile, permet de modéliser le caractère orthotrope de la rupture entre les sens L et T beaucoup moins marqué pour les éprouvettes AE que pour les éprouvettes EU et DP. La simulation de la rupture orthotrope des éprouvettes EU et DP est réalisée à l'aide de deux valeurs distinctes de $(R/R_0)_c$ qui restent par conséquent spécifiques aux sens L et T. Cette approche présente une limitation importante, car elle ne

peut pas être utilisée lorsque le matériau est sollicité dans une autre direction que L ou T. Afin de palier cet inconvénient nous avons envisagé de simuler le caractère orthotrope de la rupture de notre alliage à partir du critère de coalescence des cavitées développé par [Thomason, 1985a]. En effet ce dernier fait intervenir la distance entre les cavités. Par conséquent en supposant que la germination s'initie sur les phases intermétalliques Al_2Cu présentes dans notre matériau, et en imposant des distances différentes entre les cavités dans le modèle de [Thomason, 1985a] il est alors possible de reproduire l'anisotropie de rupture. En effet l'origine de celle-ci est due, d'après les analyses de la microstructure de notre alliage, à un alignement privilégié des précipités intermétalliques Al_2Cu selon le sens de laminage L, couplé à une distance entre précipités plus faible dans la direction L que selon le sens T. Malheureusement cette tentative s'est soldée par un échec. En effet notre alliage n'est pas suffisamment ductile pour que la coalescence s'active par instabilité plastique du ligament entre les cavités selon le modèle de [Thomason, 1985a]. A la fin de cette seconde partie nous avons appliqué avec succés le critère de [Rice and Tracey, 1969], calibré sur les éprouvettes EU_4, pour simuler l'amorçage de la fissure des éprouvettes CT10, SENT et SCT.

3.4 COUPLAGE ENDOMMAGEMENT ET PLASTICITE

3.4.1 Eléments de théorie

3.4.1.1 Modèle de germination

La germination est la création au cours du chargement d'une porosité notée f_n qui vient s'ajouter à la porosité initiale f_0. Ce mécanisme est prépondérant dans les alliages d'aluminium. En effet la porosité initiale f_0 est tellement faible qu'elle ne peut pas générer par la seule croissance des cavités une porosité suffisamment critique pouvant conduire à la rupture. Ceci est d'autant plus vrai que ces alliages présentent en général, et le notre en particulier, une ductilité à rupture beaucoup plus faible que celle des aciers par exemple.

Les micromécanismes responsables de la germination sont relativement simples, ils consistent soit en une décohésion entre la matrice et un précipité intermétallique, soit en la rupture de ce précipité engendrant ainsi une cavité. Il est important d'insister sur la continuité du processus de germination. En effet tous les précipités ne vont pas donner simultanément naissance à des cavités, mais cette création de porosité va au contraire se faire progressivement, au fur et à mesure de l'endommagement du matériau. Il faudra donc veiller à respecter cet aspect de la germination lors de sa modélisation mathématique.

Il existe des modèles d'endommagement tel que celui développé dans [Lemaitre, 1985] et [Lemaitre and Chaboche, 1978] qui peuvent être considérés comme des modèles de germination seule sans croissance ni coalescence, ils n'ont donc pas besoin de faire intervenir la porosité en tant que variable interne de l'endommagement. Cette approche permet, comme le montre les travaux de [Xue and Wierzbicki, 2008] et [Xue and Wierzbicki, 2009], d'obtenir d'excellents résultats en matière de modélisation de la rupture d'éprouvettes fissurées, en particulier lors de la simulation de la phase de propagation de la fissure. Ces études s'écartent du cadre de l'approche locale au sens strict du terme, basée sur la compréhension des mécanismes de rupture au niveau microscopique, pour suivre un courant plus phénoménologique semblable à celui ayant produit le développement des critères de plasticité.

Dans la littérature pour modéliser la germination des cavités dans les alliages d'aluminium nous rencontrons essentiellement deux options à savoir l'utilisation d'une Gaussienne ou d'une fonction de Heaviside. La formulation de cette dernière est : $\dot{f}_n = A_0 H\left(p - p_0\right)\dot{p}$ où A_0 est une constante et H la fonction de Heaviside dont la valeur sera ici égale à 1 pour $p \geq p_0$ et à zéro lorsque $p < p_0$ (p étant la déformation plastique cumulée). L'utilisation de cette loi pour modéliser la germination a l'avantage

d'être simple d'emploi et de permettre une optimisation numérique relativement aisée des paramètres A_0 et p_0 afin de recaler au mieux les résultats expérimentaux. Elle a été employée par exemple avec succés dans [Zhang et al., 1996], [Besson et al., 2001], [Bron et al., 2004] et [Morgeneyer et al., 2009]. Néanmoins le principal inconvénient de ce modèle est de considérer que la germination se fait de manière identique quelle que soit la valeur de la déformation plastique. Or physiquement le taux de germination varie avec p, l'utilisation d'une loi normale ou loi de Gauss permet de rendre compte de ce phénomène.

Dans les exemples donnés ci-dessus la germination simulée par une fonction de Heaviside est contrôlée uniquement par p. Dans le cas d'une modélisation à l'aide d'une loi de Gauss, [Chu and Needleman, 1980] et [Pan et al., 1983] inscrivent la germination dans un cadre plus général, en la faisant dépendre de la déformation plastique équivalente ou cumulée, mais également d'une contrainte définie par $\bar{\sigma}+\sigma_m$, où $\bar{\sigma}$ représente le critère de plasticité et σ_m la contrainte hydrostatique. Cette dépendance de la germination à la contrainte hydrostatique n'est pas prise en compte lorsqu'elle est contrôlée uniquement par la déformation plastique équivalente, car la plasticité des métaux est modélisée de manière à être insensible à la variation de volume. Notons que $\bar{\sigma}+\sigma_m$ peut également s'écrire $\bar{\sigma}(1+\tau)$. Ainsi l'introduction du taux de triaxialité τ dans la simulation de la germination n'est pas anodin compte tenu de son rôle prépondérant dans la croissance des cavités.

La densité de probabilité φ de la loi normale $N(\mu,\sigma)$ est définie par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

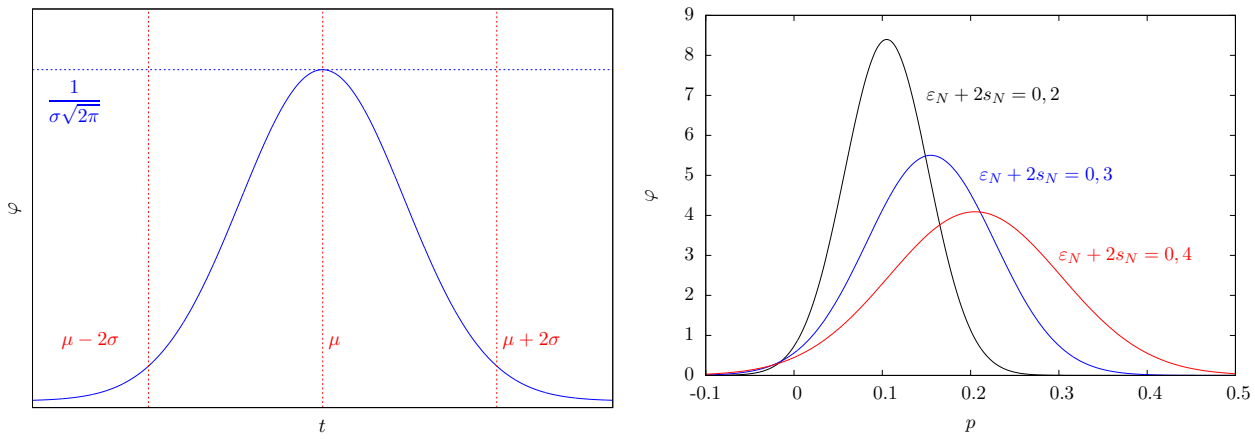
Dans la relation ci-dessus la variable μ désigne l'espérance mathématique de t, c'est-à-dire la valeur moyenne obtenue pour un nombre suffisamment grand de tirages aléatoires. Quant à la variable σ elle représente l'écart type, elle permet de mesurer la dispersion des valeurs possibles autour de la valeur centrale μ. La figure 3.47a montre l'évolution de φ en fonction de t. Soit la fonction Φ dont l'expression est :

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{X}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \sigma\sqrt{2\pi} \tag{3.60}$$

La probabilité P qu'une variable aléatoire X, suivant une loi normale $N(\mu,\sigma)$, appartienne à l'intervalle $[a,b]$ est donnée par : $P\left(X\in[a,b]\right) = \Phi(b)-\Phi(a)$. Il est intéressant de préciser que 95 % des variables X sont distribuées sur une étendue de 4σ centrée sur μ. Le processus de germination va être modélisé à partir de deux lois normales A_n et B_n, apparaissant dans l'expression de l'évolution de la porosité engendrée par la germination, définie par $\dot{f}_n = A_n\dot{p} + B_n\left(\dot{\bar{\sigma}}+\dot{\sigma}_m\right)$ avec :

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p-\varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \\[2ex] B_n = \dfrac{f_N}{\delta_N\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\bar{\sigma}+\sigma_m-\sigma_N}{\delta_N}\right)^2\right] \end{cases} \tag{3.61}$$

Nous rappelons que f_N dans les deux expressions ci-dessus désigne le taux volumique de phase intermétallique Al_2Cu pouvant germiner. En supposant pour simplifier que B_n est nul et en associant la fonction Φ_N, définie par (3.60), à la loi normale $N(\varepsilon_N, s_N)$, alors $\Phi_N(p_0)$ représente la fraction de f_N ayant donnée naissance à des cavités pour une déformation plastique cumulée p_0. Nous voyons donc que les fonctions $N(\varepsilon_N, s_N)$ et $N(\sigma_N, \delta_N)$ permettent de représenter physiquement la fraction de phase Al_2Cu ayant germinée pour un seuil de déformation plastique cumulée p ou de contrainte $\bar{\sigma}+\sigma_m$.



(a) Loi normale $N(\mu, \sigma)$

(b) Evolution de la porosité f_n

FIGURE 3.47 – Loi normale et évolution de la porosité f_n suivant une loi de Gauss

3.4.1.2 Modèle de croissance des cavités

La phase de croissance des cavités est classiquement décrite par le modèle de [Gurson, 1977] qui peut être considéré comme une extension de celui de [Rice and Tracey, 1969]. Dans ce dernier l'auteur s'intéresse à l'évolution du rayon R d'une cavité sphérique au sein d'une matrice infinie parfaitement plastique de limite d'élasticité σ_0. [Gurson, 1977] étudie également l'évolution du rayon r d'une cavité située au centre d'une matrice sphérique de rayon R dont la plasticité est régie par le critère de von Mises, noté σ_{eq}. Il est alors possible d'introduire une fraction volumique ou porosité f qui représente la variable interne de l'endommagement, elle est définie par :

$$f = \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

Compte tenu du caractère incompressible de la matrice toute variation du rayon de la cavité, c'est-à-dire de son volume, entrainera inévitable une variation de la porosité dont l'évolution permet de décrire une surface de plasticité d'équation :

$$\frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0} + 2f\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \tag{3.62}$$

La relation ci-dessus définit le modèle de [Gurson, 1977] et montre que l'endommagement est couplé à la porosité, en effet nous pouvons constater que l'évolution de la porosité agit sur le comportement plastique et vice versa. Ce modèle a été modifié par [Tvergaard and Needleman, 1984] afin d'obtenir une localisation de l'endommagement en meilleur accord avec les prévisions numériques, réalisées sur des cellules élémentaires. Cette modification conduit au modèle dénommé GTN (Gurson Tvergaard Needleman) dont l'équation de la surface de plasticité devient :

$$\Phi = \sigma_f - R(p) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_f} + 2q_1 f\cosh\left(\frac{3q_2}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_f}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0 \tag{3.63}$$

Dans la formulation ci-dessus σ_f désigne la contrainte d'écoulement. Le modèle GTN introduit par rapport au modèle de [Gurson, 1977] deux paramètres supplémentaires q_1 et q_2. Les valeurs classiques de ces paramètres issues de la littérature sont $q_1 = 1,5$ et $q_2 = 1$. L'écoulement plastique associé à la surface limite définie par la relation (3.63) s'écrit :

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial \Phi}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\lambda}\frac{\partial \sigma_f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$$

L'évolution de la porosité est donnée par : $\dot{f} = (1-f)\,\mathrm{trace}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p$, tandis que le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ se détermine selon la même méthode que celle décrite au paragraphe 3.2.1.1. Il s'agit dans un premier temps d'écrire l'égalité entre les deux manières de calculer l'énergie plastique soit à partir des tenseurs des déformations plastiques ($\underset{\sim}{\varepsilon}^p$) et des contraintes ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$), soit à partir de la déformation plastique cumulée (p) et de la contrainte d'écoulement σ_f, nous obtenons donc :

$$\sigma_f \dot{p} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p \tag{3.64}$$

En considérant que σ_f est une fonction homogène de degré 1 du tenseur des contraintes nous avons la relation :

$$\sigma_f = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \sigma_f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{3.65}$$

En injectant (3.64) dans l'équation de l'écoulement plastique et en considérant la relation (3.65) nous trouvons : $\dot{\lambda} = (1-f)\ \dot{p}$.

Enfin des modifications du modèle GTN ont été réalisées par [Gologanu et al., 1993] et [Gologanu et al., 1994] afin de considérer des cavités de forme elliptique. Ces modèles sont limités car ils ne sont applicables que pour un problème axisymétrique, une extension au cas général est cependant proposée par [Danas and Ponte Castaneda, 2009]. La phase de croissance des cavités est limitée dans le cas de notre alliage, comme le montre les faibles ductilités à rupture obtenues pour les éprouvettes EU et AE (voir chapitre 1). Par conséquent il n'est pas utile de mettre en œuvre un modèle de croissance complexe, basé par exemple sur l'évolution de la forme des cavités au cours du chargement. Le modèle de [Gurson, 1977] modifié par [Tvergaard and Needleman, 1984] avec des valeurs classiques de q_1 et q_2, égales respectivement à 1,5 et 1, sera suffisant pour simuler, dans le cadre de notre étude, la phase de croissance des cavités. Il faut toutefois préciser que sur la base des travaux de [Benzerga and Besson, 2001] nous avons remplacé dans la relation (3.63) la contrainte de von Mises σ_{eq} par le critère de plasticité développé par [Bron and Besson, 2004], dont les coefficients ont été déterminés au paragraphe 3.2.2.3 (voir page 157).

3.4.1.3 Modèle de coalescence

Nous avions projeté de suivre la même démarche que [Zhang and Niemi, 1994] c'est-à-dire de prédire la rupture de notre alliage à l'aide de trois critères différents. Le premier étant celui de [Rice and Tracey, 1969] basé sur une valeur critique du ratio R/R_0 où R désigne le rayon d'une cavité sphérique et R_0 sa valeur initiale. Le second consiste en une porosité critique et repose sur l'utlisation du modèle de [Gurson, 1977] modifié par [Tvergaard and Needleman, 1984] décrit dans le paragraphe précédent. Le troisième a été développé par [Thomason, 1985a] et a été étudié au paragraphe 3.3.1.3, il envisage la coalescence à partir de l'instabilité plastique des ligaments séparant les cavités. Les résultats présentés à la fin du paragraphe 3.3.2.2 montrent que ce dernier critère n'est pas applicable à notre matériau, compte tenu de sa trop faible ductilité. Nous devrons donc nous contenter des deux premiers critères évoqués précédemment pour appréhender la rupture de l'alliage 2219 T87.

La coalescence sera alors modélisée d'après [Tvergaard and Needleman, 1984] par une accélération de la porosité qui peut s'expliquer physiquement par la germination secondaire sur dispersoïdes. Cette accélération a été constatée par [Koplik and Needleman, 1988] suite à des simulations numériques effectuées à partir de cellule élémentaire. Elle consiste au niveau du modèle d'endommagement, décrit par la relation (3.63), à remplacer la porosité vraie f par une porosité effective f^* définie par :

$$f^* = \begin{cases} f \quad \text{si} \quad f \leq fc \\ \\ f_c + \dfrac{1/q_1 - f_c}{f_F - f_c}\,(f - f_c) \quad \text{si} \quad f \geq f_c \end{cases} \tag{3.66}$$

Dans l'expression ci-dessus f_c est la porosité critique à partir de laquelle s'initie la coalescence tandis que f_F traduit la fin de la coalesce c'est-à-dire la rupture. Le moment de la rupture correspond donc à une valeur de f^* égale à $1/q_1$. La simulation de la coalescence selon cette approche nécessite la détermination de deux paramètres supplémentaires à savoir f_c et f_F.

3.4.2 Prévision de la rupture des différentes éprouvettes

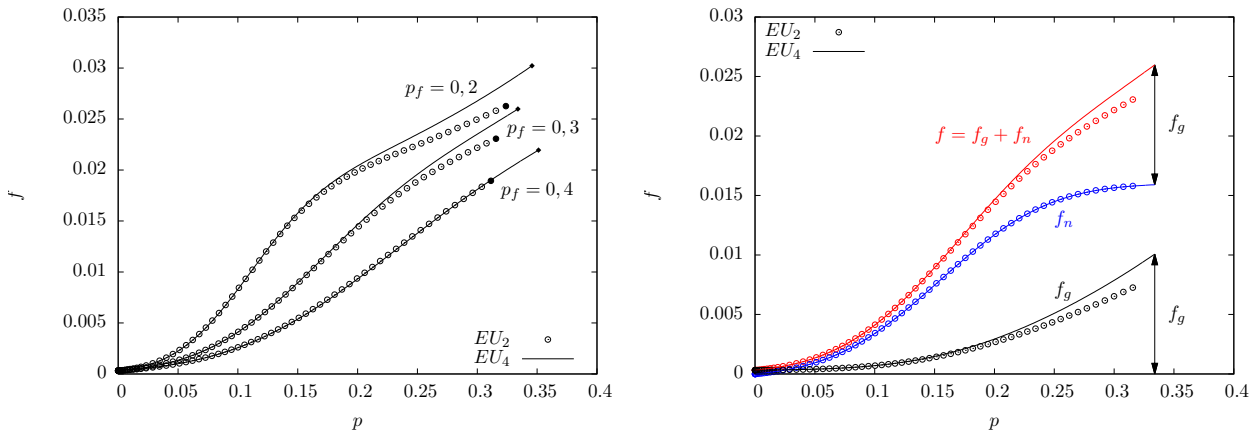
3.4.2.1 Le rôle prépondérant de la germination

Nous envisageons dans cette dernière partie de notre étude de simuler la rupture de notre alliage par un modèle d'endommagement dont la variable interne est la porosité. Le choix de ce type de modèle repose principalement sur le fait que cette variable permet de rendre compte des principaux micromécanismes de la rupture ductile. En effet la germination sera modélisée par la création d'une porosité f_n, la croissance des cavités par l'évolution de f couplée à la plasticité, et enfin la coalescence par l'introduction d'une porosité effective f^* correspondant à une accélération de la porosité f. La phase de croissance des cavités étant limitée dans le cas de notre alliage, le modèle de [Gurson, 1977] modifié par [Tvergaard and Needleman, 1984] avec des valeurs classiques de q_1 et q_2, égales respectivement à 1,5 et 1, est suffisant pour simuler la phase de croissance des cavités. De plus nous avons montré, dans la précédente partie de ce chapitre, que la phase de coalescence des cavités ne pouvait pas être traitée à l'aide du modèle spécifique développé par [Thomason, 1985a].

Par conséquent la germination apparaît comme la seule phase sur laquelle nous pouvons espérer influer, afin de parvenir à simuler la rupture des éprouvettes AE, EU, TR_{12} et DP. Il faut néanmoins constater que la germination est le parent pauvre du développement des modèles d'endommagement. En effet nous ne comptons plus dans la littérature les nombreuses extensions et modifications réalisées sur la base du premier modèle de croissance des cavités couplé à la plasticité développé par [Gurson, 1977]. De même la coalescence a connu quelques développements notables détaillés dans [Benzerga and Leblond, 2010]. Par contre rien ou pas grand chose sur la germination depuis [Chu and Needleman, 1980]. Un élément d'explication de cette situation peut être fourni en considérant que les premières applications des modèles d'endommagement concernaient essentiellement les aciers, pour lesquels la germination est secondaire par rapport à la croissance et la coalescence. Par contre dans le cas des alliages d'aluminium la germination devient prépondérante surtout lorsque la ductilité à rupture est faible.

Afin de modéliser la germination de notre alliage nous supposons que celle-ci suit une loi de Gauss uniquement contrôlée par la déformation plastique cumulée, par conséquent $\dot{f}_n = A_n\ \dot{p}$, l'expression de A_n étant fournie par (3.61). Cette hypothèse permet de simplifier l'implémentation du modèle de germination, tout en restant compatible des micromécanismes de la rupture observés au chapitre 1. Il nous faut maintenant déterminer les paramètres ε_N et s_N qui participent à la définition de A_n. Dans la dernière partie du chapitre 1 l'analyse d'une coupe polie de l'éprouvettes bi-entaillées EU_2, prélevées selon L, montre que toutes les phases intermétalliques au voisinage de l'entaille ont engendré des cavités. De plus certaines de ces phases viennent juste d'être brisées, car elles présentent aucune croissance au moment de la rupture.

La simulation numérique décrite dans le paragraphe 3.3.2.1 fournit en fond d'entaille pour cette éprouvette une valeur à rupture de p égale à 0,3. Par conséquent celle-ci peut être considérée comme la valeur de déformation plastique cumulée ayant permis la germination de cavités à partir de tous



(a) Evolution de f

(b) Décomposition de f en f_n et f_g

FIGURE 3.48 – Evolution de la valeur maximale de f pour les éprouvettes EU prélevées selon L dans le cas d'une germination contrôlée par A_n

les précipités intermétalliques, elle sera désignée par p_f dans la suite de cette étude. Compte tenu des propriétés de la loi normale décrite précédemment nous savons que 95 % des précipités auront engendré des cavités entre $\varepsilon_N - 2s_N$ et $\varepsilon_N + 2s_N$. Par conséquent nous pouvons en déduire que $\varepsilon + 2s_N = p_f = 0,3$. La valeur de p associée au début de la germination, notée p_i, a été évaluée à partir d'un examen au MEB d'une coupe polie des éprouvettes EU_2 et EU_4, prélevées selon L.

Nous nous sommes éloignés progressivement du front de rupture dans la direction L jusqu'à trouver une zone où se trouvent des particules venant juste d'être rompues. La position de cette zone est alors repérée afin de pouvoir l'identifier au niveau du maillage des éprouvettes EU_2 et EU_4. Pour ces deux géométries d'éprouvette, nous obtenons par calcul pour cette zone une valeur de défomation plastique cumulée de l'ordre de 1% ainsi $\varepsilon_N - 2s_N = p_i = 0,01$. [Achon, 1994] utilise une valeur de p_i identique pour l'initiation de la germination dans le cas d'alliages d'aluminium de la série 7000.

Nous avons tracé sur la figure 3.47b la loi normale permettant de simuler la germination des phases intermétalliques Al_2Cu dans notre alliage. L'expression de la porosité f_n liée à la germination est donnée par :

$$f_n = \frac{f_N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{p} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{p-\varepsilon_N}{\sigma_N}\right)^2\right]\dot{p} \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{p-\varepsilon_N}{\sigma}\right)^2\right]\dot{p} = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Compte tenu du fait que la déformation plastique cumulée est forcément positive l'aire sous la courbe de la figure 3.47b entre $-\infty$ et 0 doit être faible car c'est en quelque sorte de la porosité « perdue ». Ainsi si cette aire n'est pas négligeable alors le jeu de paramètres (ε_N, s_N) n'est pas valide. La figure 3.47b montre que nous ne sommes pas dans ce cas, par conséquent les valeurs de ε_N et s_N sont acceptables. A titre de comparaison nous avons également ajouté sur cette même figure les lois normales qui correspondent à des valeurs de déformation plastique cumulée, en fin de germination, égales à 0,2 et 0,4 toujours dans le cas où $p_i = 0,01$.

Les trois lois de germination présentées par la figure 3.47b vont être couplées au modèle GTN décrit au paragraphe 3.4.1.2, sans toutefois considérer de porosité effective f^*, afin de simuler numériquement les essais de traction sur les éprouvettes EU_2 et EU_4 prélevées selon L. La modélisation de ces éprouvettes est celle décrite à la page 180. Le modèle GTN est couplé à celui de la plasticité défini par [Bron and Besson, 2004] dont les coefficients ont été déterminés au paragraphe 3.2.2.3 (voir page 157). Les calculs sont réalisés avec l'hypothèse des grandes déformations géométriques et matériau, exprimées dans le repère corrotationnel (voir [Ladevèze, 1980]). La figure 3.48a présente pour les éprouvettes EU_2 et EU_4 l'évolution de la porosité f, au niveau du point de Gauss de l'élément où elle

atteint sa valeur maximale, pour les trois lois de germination décrites par la figure 3.47b.

Nous pouvons constater que la porosité critique f_c obtenue à rupture n'est pas identique pour les éprouvettes EU_2 et EU_4, elle est toujours légèrement supérieure pour l'éprouvette EU_4. Par conséquent il va être délicat de trouver une unique valeur de f_c afin de simuler correctement la rupture de ces deux éprouvettes. La figure 3.48b illustre la décomposition de la porosité totale f en une porosité liée à la germination f_n et une porosité de croissance f_g gouvernée par le modèle GTN. L'évolution de ces différentes porosités est tracée en fonction de p pour la loi de germination définie par $p_f = 0,3$ et $p_i = 0,01$. Il apparaît que la phase de germination des cavités est prépondérante devant celle de croissance. Nous pouvons vérifier que la courbe décrivant f_n en fonction de p est identique pour les éprouvettes EU_2 et EU_4 puisque la loi de germination utilisée est la même pour ces deux éprouvettes. La valeur de f_n augmente régulièrement puis commence à saturer pour une valeur de p proche de 0,25 car presque toutes les phases intermétalliques ont engendré des cavités. La figure 3.47b montre que pour $p_f = 0,4$ la germination s'effectue sur une plage de p suffisamment large pour ne pas autoriser de phase de croissance de la porosité avant la rupture, ainsi l'évolution de f est identique pour les éprouvettes EU_2 et EU_4 puisque f_g est nulle.

Les résultats présentés par la figure 3.48a vont permettre de calibrer la valeur de f_c à partir de laquelle sera modélisée la coalescence. Celle-ci est envisagée comme une accélération de la porosité f via l'introduction d'une porosité effective f^* dont la définition fournie au paragraphe 3.4.1.3 nécessite la détermination des paramètres f_c et f_F. Compte tenu de la relation (3.66) plus la valeur de f_F sera proche de celle de f_c plus l'accélération de la porosité sera violente engendrant alors une rupture d'autant plus brutale. Il existe toutefois une valeur seuil de f_F en deçà de laquelle il n'est pas possible de descendre sans se heurter à une divergence du calcul. En effet si l'accélération de la porosité est trop importante alors la simulation numérique ne converge pas ou difficilement à cause des trop fortes variations imposées aux différentes variables mises en jeu. Ce phénomène est encore amplifié lorsque la valeur de f_c est faible, comme c'est le cas de notre alliage compte tenu de sa faible ductilité.

Les courbes du déplacement d'ouverture de l'entaille V en fonction de la contrainte F/S_0 issues des essais sur éprouvettes EU, présentées au chapitre 1, montrent que la rupture de ces éprouvettes est soudaine. Par conséquent nous allons choisir une valeur de f_F aussi proche de f_c que le permet l'exigence de convergence. Les calculs ont été effectués pour les trois modèles de germination définis à partir d'une valeur de 0,01 pour p_i et d'une valeur de p_f respectivement égale à 0,2, 0,3 et 0,4. En utilisant la figure 3.48 nous avons associé à ces valeurs une porosité critique f_c respectivement égale à 0,025, 0,022 et 0,02. Dans tous les cas la valeur de f_F est de 0,05. Il nous faut dire un mot sur la modélisation de l'élément endommagé. Un élément sera considéré comme « cassé » lorsque la porosité atteint la valeur de f_F en au moins trois points de Gauss. Lorsque f est égale à f_F en seulement un ou deux points de Gauss d'un élément, c'est-à-dire que celui-ci n'est pas encore « cassé », le matériau en ces points de Gauss possède un comportement linéaire, défini par un module d'Young de 1 MPa et un coefficient de Poisson nul, afin de poursuivre le calcul. Lorsque l'élément est « cassé » alors les déplacements des nœuds de cet élément sont bloqués et celui-ci ne fait plus partie du calcul bien qu'il ne soit pas retiré du maillage. La figure 3.49 fournit les résultats de ces simulations. Nous pouvons constater que les différentes lois de germination permettent de modéliser la rupture des éprouvettes EU de manière satisfaisante.

Il existe cependant un écart acceptable sur la prévision de la rupture de EU_2, respectivement EU_4, quand celle de EU_4, respectivement EU_2, correspond exactement aux données expérimentales. Cela tient à la remarque faite précédemment qui mentionnait que selon la figure 3.48a la porosité critique f_c des éprouvettes EU_2 était dans tous les cas inférieure à celle des éprouvettes EU_4. Il est intéressant de remarquer que l'instant de la rupture dépend du couple (f_c, f_F). Ainsi il est possible « d'avancer » ou « reculer » la rupture soit en fixant f_c et en diminuant ou en augmentant f_F, soit inversement en fixant f_F et en diminuant ou augmentant f_c. La figure 3.49 illustre ce phénomène dans le cas où p_f est égal à 0,3. En effet nous avons réalisé dans cette configuration pour l'éprouvette EU_4 un calcul

avec $f_F = 0,05$ et un autre avec $f_F = 0,07$ en conservant pour f_c une valeur de 0,024. De même pour l'éprouvette EU_2 deux calculs ont été effectués, à partir de f_F fixé à 0,05, en imposant à f_c des valeurs respectivement égales à 0,022 et 0,024.

Nous pouvons conclure que la rupture des éprouvettes EU prélevées selon L est simulée de manière satisfaisante par un modèle GTN caractérisé d'une part par une coalescence basée sur une accélération de la porosité décrite par $f_c = 0,022$ et $f_F = 0,05$. D'autre part par une germination qui dépend uniquement de la fonction A_n définie par $p_i = 0,01$ et $p_f = 0,3$. Ce modèle d'endommagement va maintenant être utilisé afin de simuler la rupture des éprouvettes AE, DP et TR_{12} prélevées selon le sens L. La modélisation adoptée pour les éprouvettes AE et TR_{12} est décrite respectivement aux pages 176 et 185. Pour l'éprouvette DP elle est identique à celle utilisée au paragraphe 3.2.2.2, relatif à la simulation du comportement élasto-plastique du matériau (voir page 156). Nous rappelons que le critère de plasticité est celui défini par [Bron and Besson, 2004] dont les coefficients ont été déterminés au paragraphe 3.2.2.3 (voir page 157). Les calculs sont réalisés avec l'hypothèse des grandes déformations géométriques et matériau, exprimées dans le repère corrotationnel (voir [Ladevèze, 1980]).

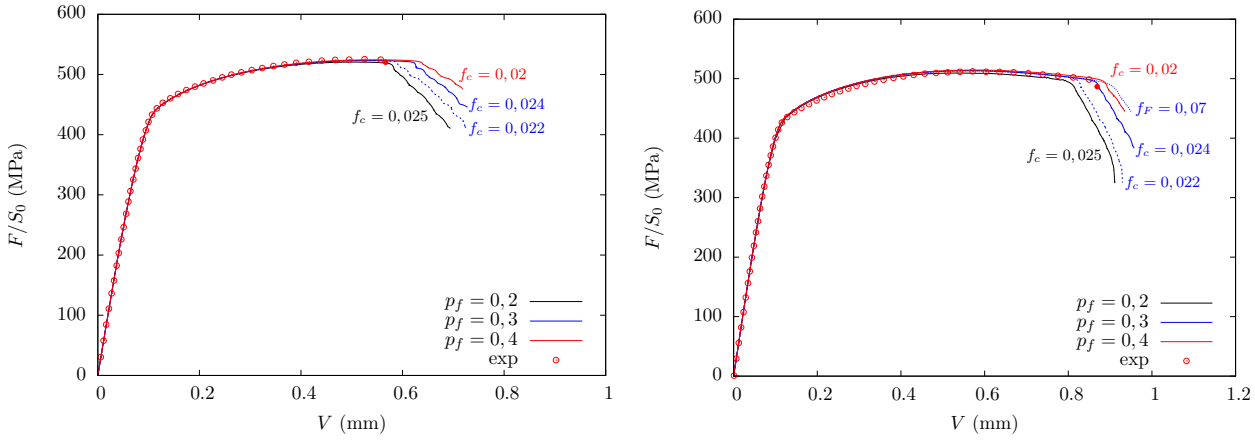
La prédiction de la rupture, issue de la simulation des essais des différentes éprouvettes prélevées selon L, est présentée par la figure 3.50. Elle est tout à fait satisfaisante pour les éprouvettes EU, DP et TR_{12} mais est totalement désastreuse pour les éprouvettes AE. La figure 3.51 montre une cartographie de la porosité à l'instant de la rupture pour les éprouvettes AE et EU, prélevées selon L, dans le cas d'une germination gouvernée par A_n. Nous pouvons constater que pour les éprouvettes AE, contrairement aux éprouvettes EU, la répartition de f n'est pas cohérente avec les observations des coupes polies réalisées au chapitre 1 à partir de l'éprouvette bi-entaillée AE_2 prélevée suivant L. En effet ces observations effectuées au MEB montraient une porosité localisée au centre de l'éprouvette AE_2 et non en fond d'entaille comme le suggère la simulation numérique.

Il faut de plus préciser que pour obtenir une simulation correcte de la rupture de l'éprouvette DP, il est nécessaire d'introduire une dépendance de la germination par rapport au paramètre de Lode, basée sur les travaux de [Xue, 2007], comme pour la valeur critique du critère de [Rice and Tracey, 1969] (voir figure 3.36). Deux variables peuvent ainsi être exprimées en fonction de ν_L selon une relation similaire à (3.59). Il s'agit d'une part de la porosité critique f_c dont le rôle est de modéliser le début de la coalescence, ou d'autre part de la déformation plastique cumulée p_f permettant de définir la fonction A_n afin de simuler la germination. L'évolution de ces variables en fonction du paramètre de Lode s'écrit donc :

$$\begin{cases} f_c = f_c^{DP} + \left(f_c^{EU_4} - f_c^{DP}\right) \dfrac{1 + \tanh\left[10\ \left(|\nu_L| - 0,5\right)\right]}{2} & \text{avec} \quad f_c^{DP} = 0,0145 \ \text{ et } \ f_c^{EU_4} = 0,022 \\ \text{Ou} & \\ p_f = p_f^{DP} + \left(p_f^{EU_4} - p_f^{DP}\right) \dfrac{1 + \tanh\left[10\ \left(|\nu_L| - 0,5\right)\right]}{2} & \text{avec} \quad p_f^{DP} = 0,12 \ \text{ et } \ p_f^{EU_4} = 0,3 \end{cases} \tag{3.67}$$

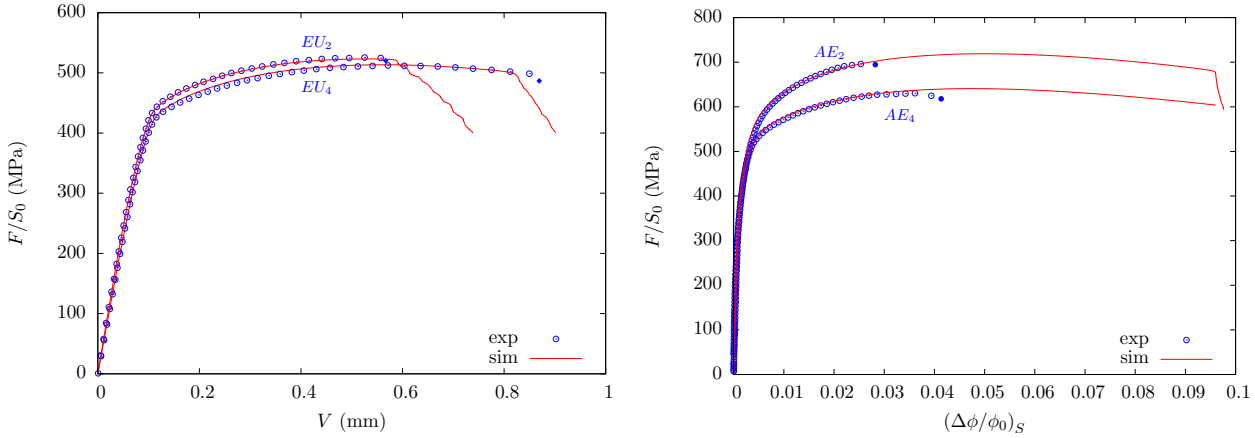
La première option permet de conserver la loi de germination A_n définie par $p_f = 0,3$ et $p_i = 0,01$ mais nécessite de déterminer une nouvelle valeur de f_c. La seconde implique une modification de la fonction A_n via le paramètre p_f mais conserve une valeur de f_c égale à 0,022. Pour ces deux possibilité la modélisation de la coalescence se fera avec une valeur de $f_F = 0,05$. Ces deux options ont été testées et permettent d'obtenir une prévision satisfaisante de la rupture de l'éprouvettes DP, il faut cependant noter que lorsque $p_f = 0,2$ il existe une germination plus importante que pour $p_f = 0,3$ dont l'effet est visible sur le comportement plastique.

Nous avons montré au paragraphe 3.3.2.2 qu'il était possible de modéliser d'une part la rupture des éprouvettes EU, TR_{12} et DP avec un critère de [Rice and Tracey, 1969] et d'autre part celle des éprouvettes AE avec une valeur critique de la contrainte principale σ_1, associée à un volume critique V_c. La figure 3.50 montre que nous ne parvenons pas à simuler la rupture des éprouvettes AE et celle des autres éprouvettes avec le modèle GTN défini ci-dessus. Nous allons néanmoins persévérer en utilisant

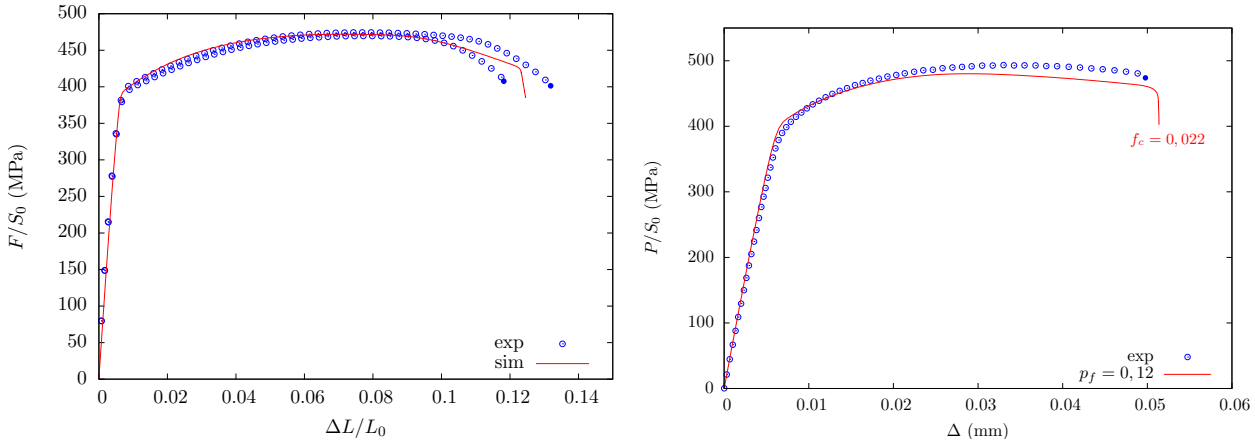


(a) Eprouvette EU_2 (b) Eprouvette EU_4

FIGURE 3.49 – Simulation de la rupture des éprouvettes EU prélevées selon L dans le cas d'une germination contrôlée par A_n

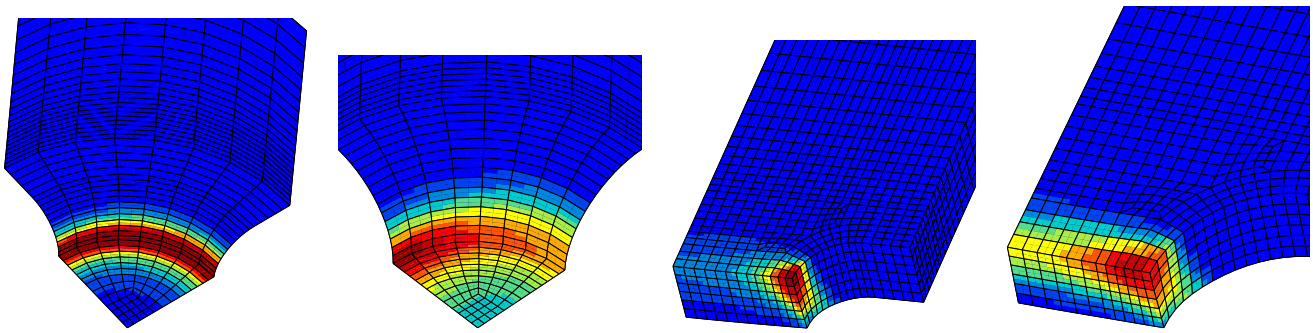


(a) Eprouvettes EU (b) Eprouvettes AE



(c) Eprouvette TR_{12} (d) Eprouvette DP

FIGURE 3.50 – Simulation de la rupture des différentes éprouvettes prélevées selon L dans le cas d'une germination contrôlée par A_n



AE_2 sens L AE_4 sens L EU_2 sens L EU_4 sens L)

FIGURE 3.51 – Répartition de la porosité à l'instant de la rupture pour les éprouvettes AE et EU prélevées selon L dans le cas d'une germination contrôlée par A_n

le fait que la rupture des éprouvettes AE puisse s'appréhender à partir de la contrainte principale σ_1. L'idée est relativement simple, elle est en partie inspirée par [Chu and Needleman, 1980] qui envisagent un contrôle de la germination à l'aide de la déformation plastique cumulée et de la contrainte $\bar{\sigma} + \sigma_m$. Sur cette base nous proposons d'activer la germination par l'intermédiaire de la déformation plastique cumulée p et de la contrainte principale σ_1 tout en la contrôlant uniquement par p.

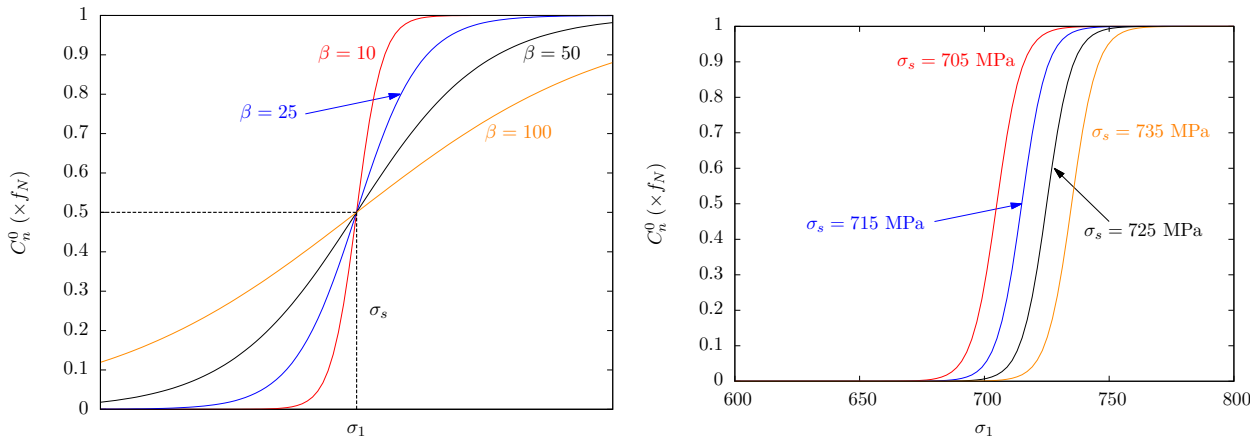
Un précipité intermétallique Al_2Cu peut donc être rompu pour une valeur suffisante de la défomation plastique de la matrice d'aluminium entourant la particule, mais également pour un certain niveau de la contrainte σ_1 susceptible de briser cette même particule. La germination induite par la déformation de la matrice est envisagée comme un processus continu qui sera modélisé par une courbe de Gauss. Tandis que l'amorçage de la germination à partir d'une contrainte seuil σ_s ne suivra pas une loi normale, mais sera plutôt représenté par une fonction de Heaviside. Car la probabilité que la particule soit brisée est identique qu'elle que soit la valeur de σ_1, du moment qu'elle est supérieure à σ_s. Nous avons cependant choisi une fonction tangente hyperbolique au lieu d'une fonction de Heaviside pour des raisons de convergence. En effet la fonction tanh est continue pour σ_1 appartenant à $[0, +\infty[$, alors que la fonction de Heaviside est discontinue au voisinage de σ_s perturbant alors la convergence de la simulation numérique.

La formulation du modèle de germination que nous proposons s'écrit $\dot{f}_n = (A_n + C_n)\,\dot{p}$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} A_n = \dfrac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p-\varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \quad \text{si} \quad f_n \leq f_N \quad \text{et} \quad A_n = 0 \quad \text{si} \quad f_n > f_N \\ \\ C_n = \alpha\left\langle C_n^0 - f_n\right\rangle_+ \quad \text{avec} \quad C_n^0 = \left(\tanh\left(\dfrac{\sigma_1-\sigma_s}{\beta}\right)+1\right)\dfrac{f_N}{2} \end{array}\right. \tag{3.68}$$

Pourquoi ne pas considérer la loi de germination suivante : $\dot{f}_n = A_n\dot{p} + C_n\left(\dot{\bar{\sigma}} + \dot{\sigma}_m\right)$? Il faudrait alors remplacer dans l'expression de C_n la contrainte σ_1 par $\bar{\sigma} + \sigma_m$. Le choix de σ_1 s'impose par le résultat issus du paragraphe 3.3.2.2 où cette contrainte principale, associée à un volume critique V_c, permet de simuler la rupture des éprouvettes AE. Ensuite l'utilisation de $\dot{p}$ au lieu de $(\dot{\bar{\sigma}} + \dot{\sigma}_m)$ se justifie par le fait de vouloir simuler par un même modèle la rupture des éprouvettes AE et EU. Or nous avons montré dans la seconde partie de ce chapitre que le taux de triaxialité τ est quasiment identique pour ces deux géométries d'éprouvette. Par conséquent le paramètre τ ne permet pas de distinguer le comportement à rupture différent entre les éprouvettes AE et EU, or $\bar{\sigma} + \sigma_m$ peut s'écrire sous la forme $\bar{\sigma}\,(1+\tau)$ par conséquent $\bar{\sigma} + \sigma_m$ joue un rôle équivalent à p compte tenu de la loi d'écrouissage reliant p et $\bar{\sigma}$.

L'expression de A_n et C_n, fournie par (3.68), fait intervenir la variable f_n car il n'est pas possible



(a) Influence du paramètre β

(b) Influence du paramètre σ_s

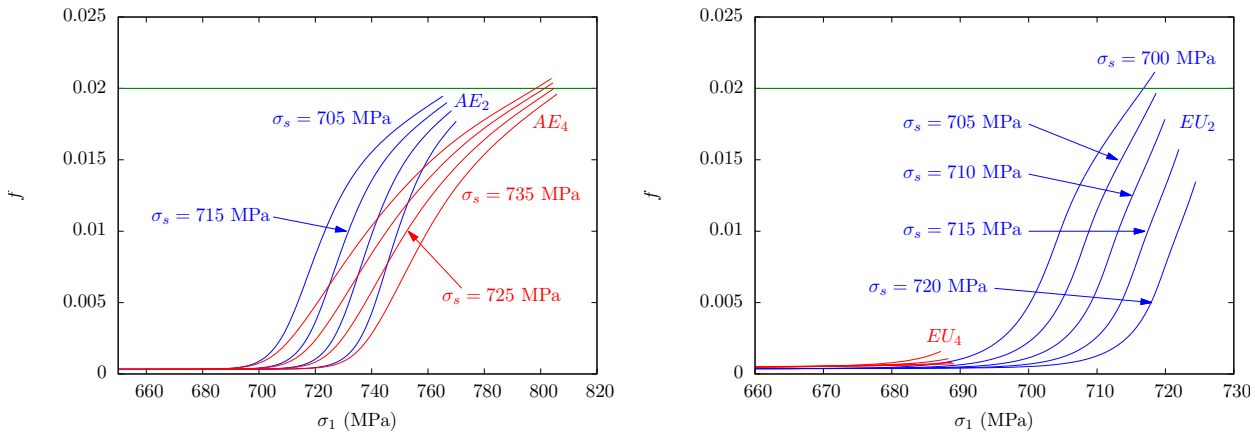
FIGURE 3.52 – Influence des paramètres β et σ_s sur la fonction C_n^0

de germiner plus que le taux de phase intermétallique Al_2Cu total mesuré dans le matériau, noté f_N. Ainsi l'introduction de f_n dans l'expression de A_n et C_n permet de créer un couplage entre les deux modes de germination et de contrôler que la valeur de f_n reste bien inférieure à f_N. Il est donc nécessaire que la fonction A_n tienne compte de la germination engendrée par C_n et vice versa. Nous rappelons que $\langle x \rangle_+$ est égale à x lorsque la variable x est positive et est nul dans le cas où x possède une valeur négative. L'utilisation de cette fonction s'impose car lorsque la germination due à la contrainte σ_1 débute, il est possible que la valeur de f_n ne soit pas nulle. En effet la germination à partir de la déformation plastique cumulée a pu déjà commencer, induisant une valeur négative de $C_n^0 - f_n$ dont la conséquence est une diminution de la porosité f_n. Ce phénomène ne peut pas se produire si nous remplaçons $\left(C_n^0 - f_n\right)$ par $\left\langle C_n^0 - f_n \right\rangle_+$ dans la définition de C_n.

Nous allons maintenant essayer de préciser le rôle des paramètres β et σ_s. La contrainte seuil comme son nom l'indique déclenche la germination dés que σ_1 atteint la valeur σ_s. Quant au paramètre β il permet de jouer sur la forme de la fonction tangente hyperbolique comme le montre la figure 3.52a. Dans la suite de cette étude la valeur de β sera fixée à 10 afin de s'approcher le plus possible de la fonction de Heaviside. La figure 3.52b montre alors l'influence de la valeur de σ_s sur la courbe représentative de la fonction C_n^0. L'impact de σ_s se résume à une simple translation des différentes courbes.

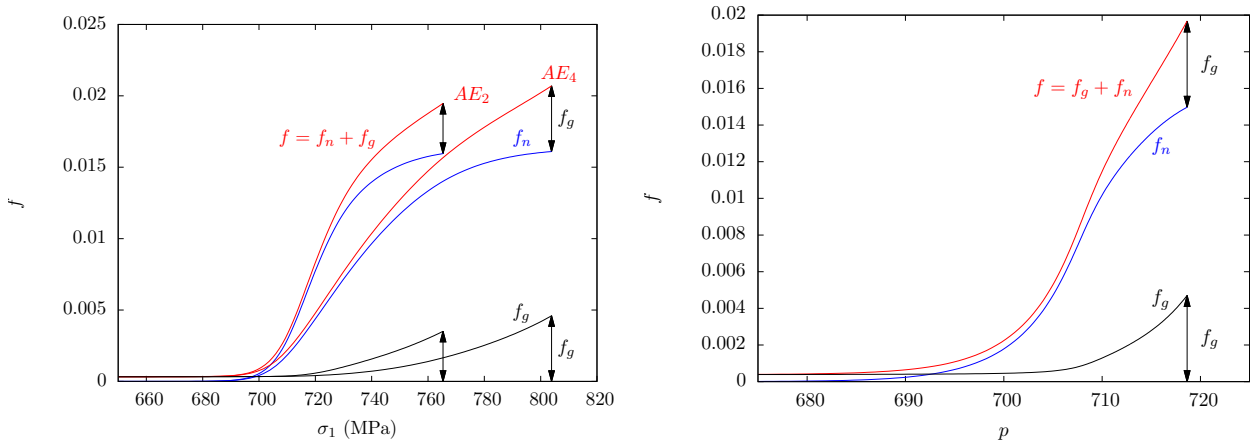
Le calibrage des paramètres de C_n consiste à déterminer la valeur de α et celle de la contrainte seuil σ_s afin de simuler au mieux les essais de traction sur les éprouvettes AE et EU prélevées selon le sens L. Dans un premier temps le calibrage de ces paramètres se fera en supposant que A_n est nul. Par conséquent $\dot{f} = C_n \dot{p}$, cette loi de germination est alors couplée au modèle GTN décrit au paragraphe 3.4.1.2 sans modéliser la coalescence. Ce modèle d'endommagement a été utilisé en attribuant différentes valeurs à σ_s afin de simuler les essais de traction des éprouvettes AE et EU. Nous avons également fait varier le paramètre α en le supposant égal à 50, 100, 200 et 400. Ce paramètre permet de modéliser la vitesse de germination, nous avons constaté que lorsque celle-ci devient trop grande des problèmes de convergence numérique apparaissent notamment pour des valeurs de α égales à 200 ou 400. Pour les valeurs de 50 et 100 ces problèmes de convergence disparaissent nous supposerons donc par la suite que α est égal à 100 car cette valeur permet d'obtenir une vitesse moyenne de germination, alors que celle de 50 correspond à une germination jugée trop lente.

Les résultats issus de la simulation des essais sur éprouvettes AE et EU sont présentés par la figure 3.53 sous la forme de l'évolution de la porosité en fonction de σ_1 pour le point de Gauss de l'élément où f atteint sa valeur maximale. Cet élément est alors considéré comme la zone critique des éprouvettes AE et EU où s'amorcera probablement la rupture. La sélection d'une contrainte seuil de 705 MPa



(a) Eprouvettes AE prélevées selon L (b) Eprouvettes EU prélevées selon L

FIGURE 3.53 – Evolution de la valeur maximale de f pour les éprouvettes AE et EU dans le cas d'une germination contrôlée par C_n

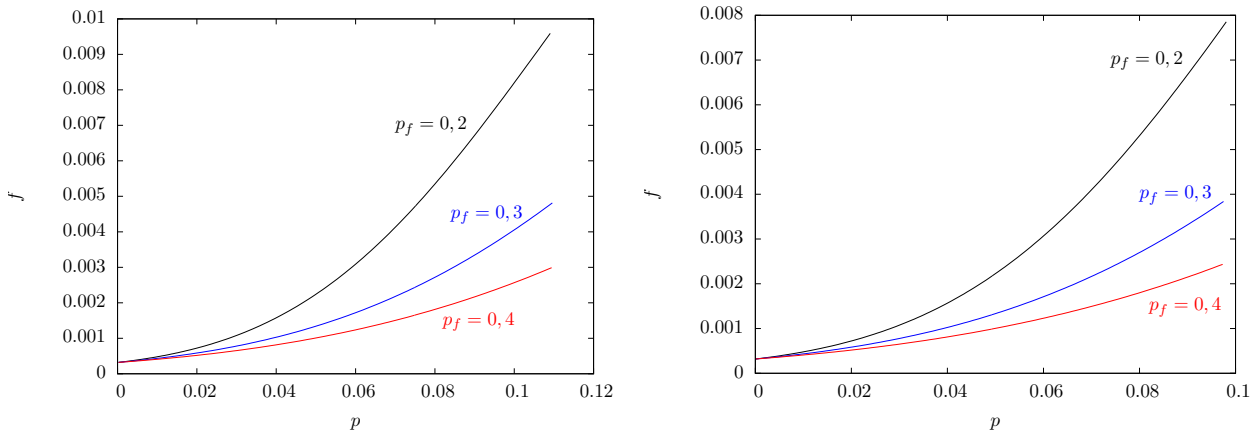


(a) Eprouvettes AE prélevées selon L (b) Eprouvette EU_2 prélevées selon L

FIGURE 3.54 – Décomposition de f en f_n et f_g pour la zone critique des éprouvettes AE et EU_2 dans le cas d'une germination contrôlée par C_n

conduit à une même valeur de porosité critique au moment de la rupture des éprouvettes AE_2, AE_4 et EU_2. Ainsi cette valeur de f_c égale à 0,02 servira de critère de rupture pour ces éprouvettes. Pour la zone critique des éprouvettes AE et EU_2 nous avons également tracé sur la figure 3.54 la décomposition de la porosité f en une porosité f_n engendrée par la germination et une porosité f_g due à la phase de croissance des cavités. Il apparaît que la phase de germination des cavités est prépondérante devant celle de la croissance. De plus la porosité liée à la germination est moins importante pour l'éprouvette EU_2 que pour les éprouvettes AE compte tenu du niveau de contrainte plus élevé pour ces dernières. Nous pouvons constater que l'évolution de f_n n'est pas identique pour les éprouvettes AE_2 et AE_4. L'explication de cet écart réside dans la définition de C_n. En effet celle-ci fait intervenir d'une part C_n^0 dont la valeur sera égale pour ces deux éprouvettes, et d'autre part le taux de déformation plastique cumulée, $\dot{p}$, qui présentera une évolution différente suivant les éprouvettes AE_2 et AE_4.

Par contre pour l'éprouvette EU_4 les différentes valeurs de contrainte seuil testées ne sont pas suffisantes pour amorcer la germination par conséquent la porosité à rupture est négligeable. Ainsi cette éprouvette va permettre de calibrer les paramètres de A_n, indépendamment de ceux de C_n, afin d'obtenir une porosité de 0,02 à l'instant de la rupture. La solution est donnée par la figure 3.48 et correspond à une germination pilotée par la loi normale définie pour des valeurs de p_f et p_i égales respectivement à 0,4 et 0,01. Pour que cette solution soit acceptable il faut toutefois vérifier que la



(a) Eprouvette AE_2 prélevée selon L (b) Eprouvette AE_4 prélevée selon L

FIGURE 3.55 – Evolution de la valeur maximale de f pour les éprouvettes AE prélevées selon L dans le cas d'une germination contrôlée par A_n

porosité associée à une germination contrôlée par la fonction A_n ainsi déterminée est négligeable pour les éprouvettes AE au même titre que celle issue de C_n pour l'éprouvette EU_4. La figure 3.55 fournit pour les éprouvettes AE, dans le cas d'une germination contrôlée uniquement par la fonction A_n, l'évolution de la porosité en fonction de p pour le point de Gauss de l'élément où la valeur de f est maximale. Trois valeurs de p_f ont été étudiées à savoir 0,2, 0,3 et 0,4 en ayant toujours $p_i = 0,01$. Nous pouvons vérifier que pour une valeur de p_f égale à 0,4 la porosité à rupture des éprouvettes AE est négligeable puisqu'elle est de l'ordre de 0,003 pour une valeur visée de 0,02.

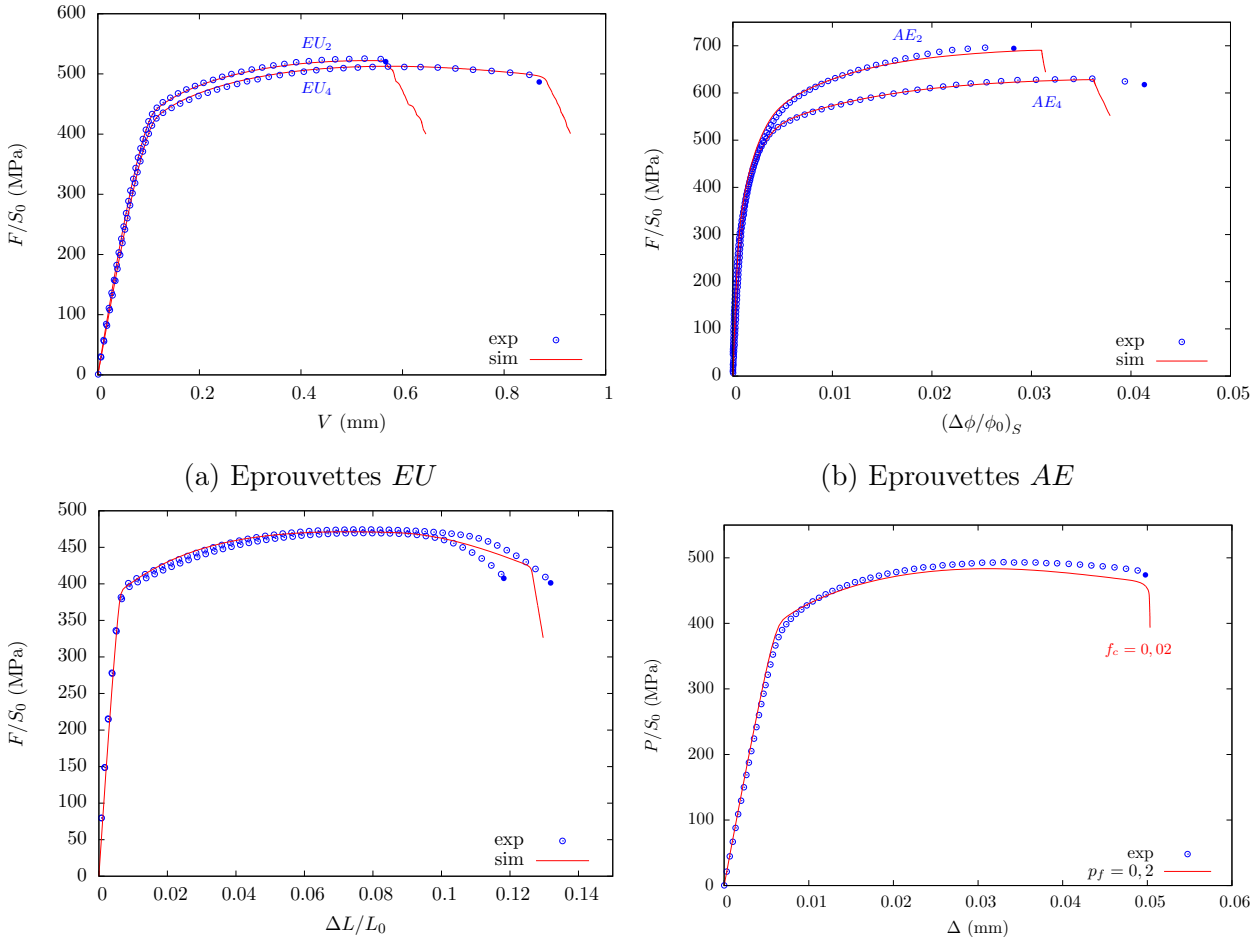
Nous sommes donc en mesure de modéliser la germination par $\dot{f}_n = (A_n + C_n)\,\dot{p}$ avec une loi A_n définie par $p_f = 0,4$ et $p_i = 0,01$ d'une part et d'autre part une fonction C_n dont l'expression s'écrit :

$$C_n = 100\ \left\langle C_n^0 - f_n \right\rangle_+ \quad \text{avec} \quad C_n^0 = \left(\tanh\left(\frac{\sigma_1 - 705}{10}\right) + 1\right)\frac{f_N}{2} \tag{3.69}$$

Afin de simuler la rupture des différentes éprouvettes non fissurées ce modèle de germination va être couplé à un modèle GTN, dont la coalescence est simulée par une accélération de la porosité f, pilotée par f_F égale à 0,05 et f_c restant à définir. La figure 3.56 montre que les résultats obtenus pour une porosité critique $f_c = 0,02$ permettent de prévoir de manière satisfaisante la rupture des éprouvettes AE, EU, TR_{12} et DP. La figure 3.57 présente une cartographie de la porosité à l'instant de la rupture pour les éprouvettes AE et EU prélevée selon L dans le cas d'une germination contrôlée par A_n et C_n. Nous pouvons constater que la répartition de f correspond mieux aux observations réalisées sur les coupes polies des éprouvettes bi-entaillées AE_2 et EU_2. En effet contrairement au cas de la germination pilotée uniquement par A_n, la porosité maximale pour les éprouvettes AE n'est plus localisée en fond d'entaille mais à proximité du centre de l'éprouvette. La modélisation de la rupture des éprouvettes DP nécessite toutefois d'exprimer p_f en fonction du paramètre de Lode à partir de la relation (3.67). Notons que cette dépendance vis à vis de ν_L ne peux pas porter sur f_c car la germination activée par la loi C_n reste indépendante de ν_L, puisque la contrainte principale σ_1 des éprouvettes DP est bien inférieure à σ_s. Nous sommes donc parvenus à modéliser la rupture des éprouvettes AE et EU prélevées selon L à partir d'un unique modèle d'endommagement dont la germination est contrôlée à la fois par σ_1 et p par l'intermédiaire des fonctions A_n et C_n.

3.4.2.2 Le caractère orthotrope de la rupture

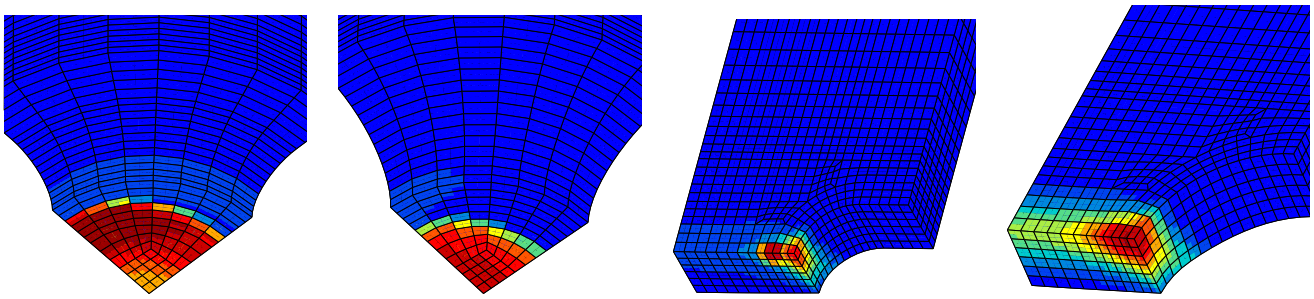
Le but de ce paragraphe est de simuler la rupture des éprouvettes AE, EU, TR_{12} et DP prélevées selon le sens T à partir des modèles d'endommagement exposés dans le paragraphe précédent, dont



(a) Eprouvettes EU (b) Eprouvettes AE

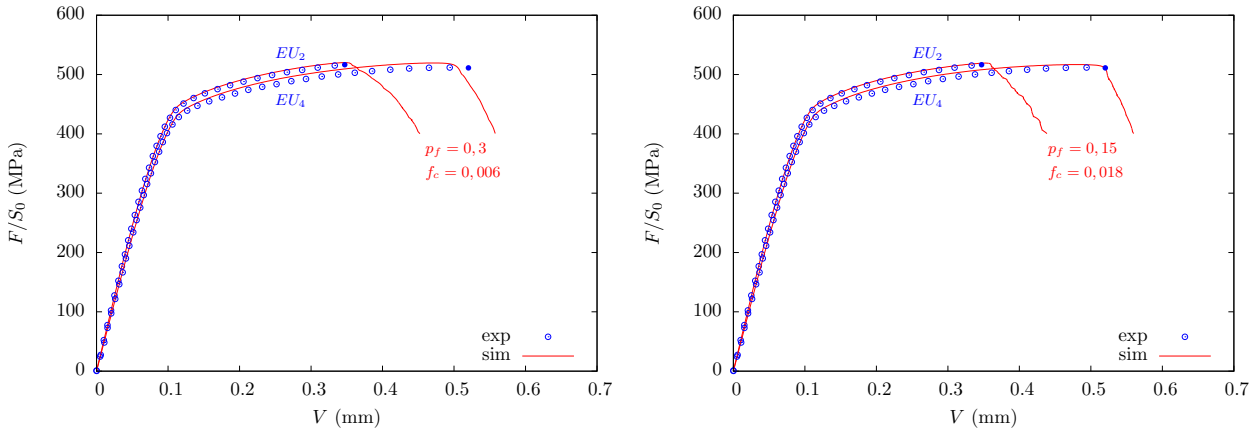
(c) Eprouvette TR_{12} (d) Eprouvette DP

FIGURE 3.56 – Simulation de la rupture des différentes éprouvettes prélevées selon L dans le cas d'une germination contrôlée par A_n et C_n



AE_2 sens L AE_4 sens L EU_2 sens L EU_4 sens L)

FIGURE 3.57 – Répartition de la porosité à l'instant de la rupture pour les éprouvettes AE et EU prélevées selon L dans le cas d'une germination contrôlée par A_n et C_n



(a) $p_f = 0,3$ et $f_c = 0,006$ (b) $p_f = 0,15$ et $f_c = 0,018$

FIGURE 3.58 – Simulation de la rupture des éprouvettes EU prélevées selon T dans le cas d'une germination contrôlée par A_n

la calibration des différents paramètres a été réalisée à partir d'éprouvettes prélevées selon le sens L. La première méthode envisagée consiste à conserver la loi de germination ainsi déterminée tout en définissant une nouvelle valeur critique de la porosité f_c à partir de laquelle se déclenche la coalescence. Cette approche a été appliquée au modèle GTN dont la loi de germination est uniquement gouvernée par la fonction A_n, définie par $p_f = 0,3$ et $p_i = 0,01$. Afin de simuler la coalescence la valeur de f_c est à définir tandis que celle de f_F est conservée égale à 0,05.

D'après la figure 3.58a une prévision satisfaisante de la rupture des éprouvettes EU est obtenue en choisissant $f_c = 0,006$. Cette porosité critique est trop faible comparée au taux f_N de phase intermétallique AL_2Cu dont la valeur de 0,0163 laisse à penser qu'une rupture pour $f_c = 0,006$ ne paraît pas physique. De plus cette valeur de f_c n'est pas en accord avec les observations, réalisées au chapitre 1, d'une coupe polie de l'éprouvettes bi-entaillée EU_2 prélevée selon T. En effet, celles-ci montrent qu'une importante fraction des phases Al_2Cu a donné naissance à des cavités en fond d'entaille au moment de la rupture. Par conséquent f_c devrait être proche de f_N compte tenu de la croissance faible des cavités avant rupture. La simulation numérique fournit en fond d'entaille de l'éprouvette EU_2 prélevée selon T une valeur de p égale à 0,15 à l'instant de la rupture.

Nous allons donc construire une nouvelle loi de germination propre au sens T, contrôlée uniquement par une fonction A_n définie à partir de $p_f = 0,15$ et $p_i = 0,01$. Est-il légitime du point de vue des micromécanismes d'endommagement de considérer deux lois de germination différentes pour les sens L et T ? Nous répondrons affirmativement à cette question pour deux raisons. Premièrement compte tenu de la figure 3.47 la loi de germination calibrée selon le sens L impose que seulement 50 % des phases intermétalliques aient donné naissance à des cavités pour une valeur de p égale à 0,15. Or l'observation d'une coupe polie de l'éprouvettes bi-entaillée EU_2, prélevée selon T, montre que la fraction de phases intermétalliques ayant engendré des cavités est nettement supérieure à la moitié pour une valeur de p à rupture égale à 0,15. Deuxièmement l'analyse des faciès de rupture des éprouvettes AE et EU montre qu'il existe pour un prélèvement selon L une majorité de petites cupules reliant entre elles quelques cupules de taille plus importante. Inversement pour des éprouvettes prélevées selon T nous constatons la présence de nombreuses grosses cupules parmi lesquelles se trouvent, de manière éparse, des grappes constituées de quelques petites cupules. Par conséquent ces observations nous incitent à considérer des micromécanismes d'endommagement distincts suivant les sens L et T.

La modélisation de la germination suivant le sens T par une fonction A_n, caractérisée par $p_f = 0,15$ et $p_i = 0,01$, revient à considérer de manière implicite une accélération de la porosité f_n, lorsque le matériau est soumis à une sollicitation suivant la direction T. Comment expliquer cette accélération au niveau microscopique ? Celle-ci ne peut pas être due à une différence de taille des phases inter-

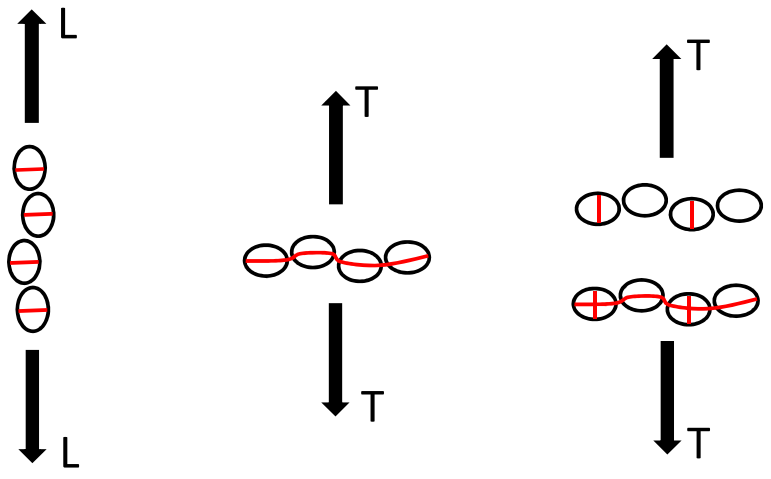
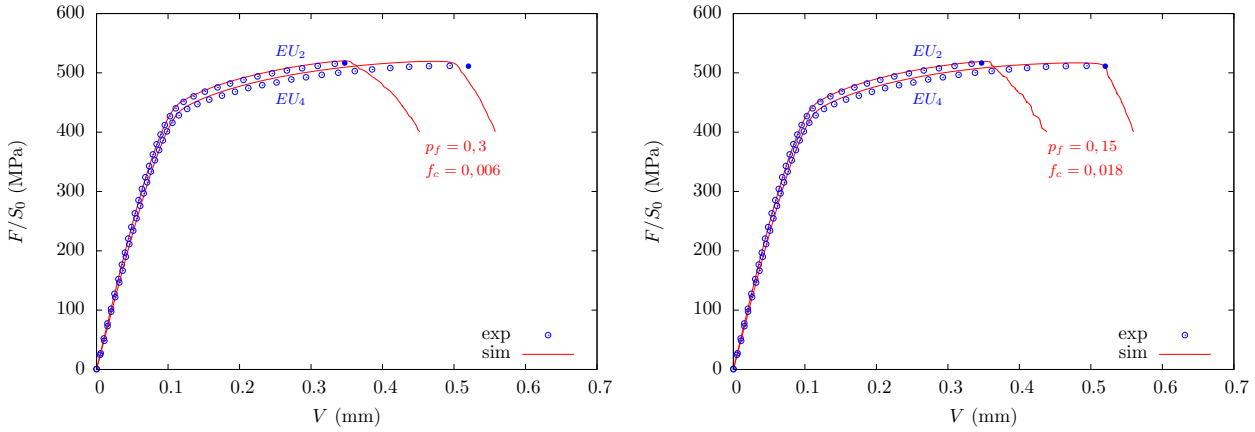


FIGURE 3.59 – Schéma des micromécanismes justifiant une germination différente selon L et T

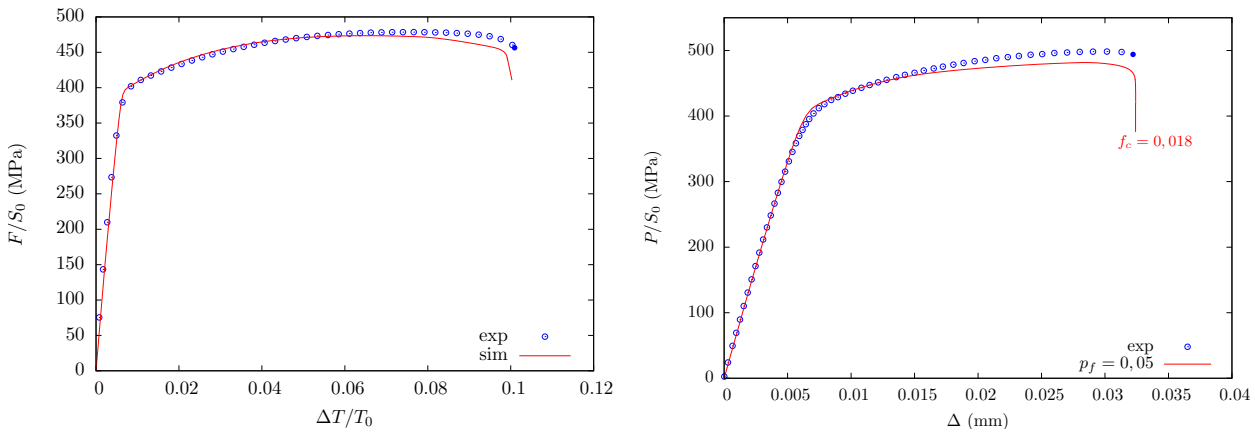


(a) $p_f = 0,3$ et $f_c = 0,006$ (b) $p_f = 0,15$ et $f_c = 0,018$

FIGURE 3.60 – Observation d'une coupe polie

métalliques Al_2Cu selon L et T. En effet l'analyse des images issues de la tomographie, présentée au chapitre 1, montre que les dimensions de ces phases sont en moyenne similaires suivant ces deux directions. L'observation minutieuse de différentes coupes polies, prélevées sur les éprouvettes EU_2 après rupture, a permis de révéler l'activation de micromécanismes différents selon le sens de sollicitation. La figure 3.59 présente un schéma de principe de ces micromécanismes. Tout d'abord il faut rappeler que les précipités intermétalliques ne sont pas répartis de manière homogène. Nous avons déjà mentionné leur alignement privilégié suivant le sens L avec une distance entre précipité plus faible dans le sens L que dans le sens T.

Ainsi se dégage une distribution globale des précipités intermétalliques au sein de laquelle se distingue un agencement plus local. En effet ceux-ci forment parfois un agrégat de trois ou quatre individus alignées selon L comme le montre schématiquement la figure 3.59. Lors d'une sollicitation selon L apparaît au centre de chaque précipité une fissure perpendiculaire à L donnant naissance à une porosité f_n. Ce processus de germination est classique contrairement à celui mis en œuvre lorsque le matériau est soumis à un effort selon T. Dans ce cas il existe de manière similaire une fissure selon L au centre de chaque précipité. Mais compte tenu de leur disposition en chapelet illustrée par la figure 3.59 ces fissures vont se rejoindre, engendrant par conséquent une porosité plus importante que pour une sollicitation selon L. Ce phénomène s'apparente à une accélération de la création de la porosité f_n. De plus il est parfois amplifié par la présence de fissures perpendiculaires à L due au laminage comme nous



(a) Eprouvette TR_{12} (b) Eprouvette DP

FIGURE 3.61 – Simulation de la rupture des éprouvettes TR_{12} et DP prélevées selon T dans le cas d'une germination contrôlée par A_n

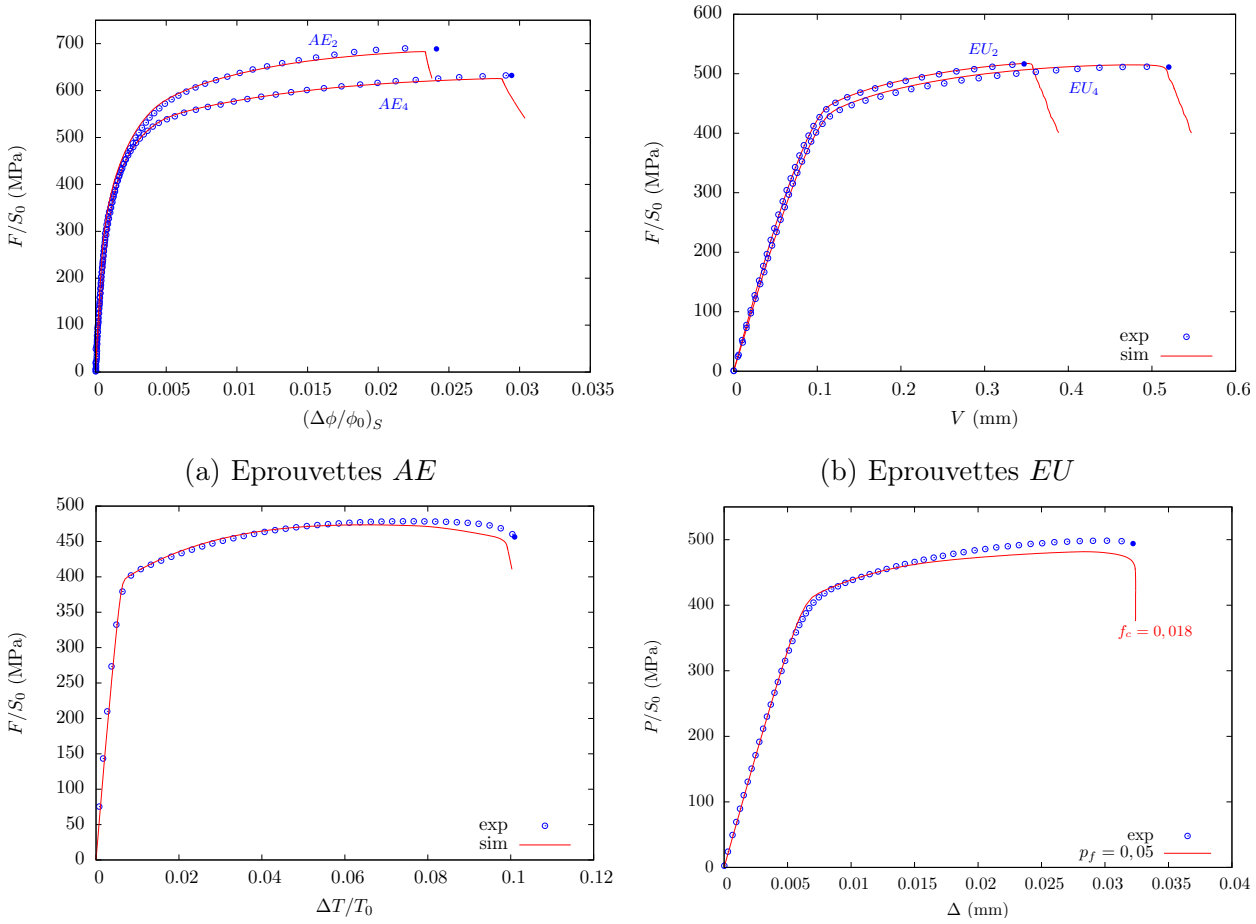
l'avons représenté sur la figure 3.59. Nous avons choisi de simuler cette accélération de la porosité f_n en utilisant deux lois distinctes de germination pour les sens L et T.

Par conséquent nous avons modélisé la rupture des éprouvettes EU, TR_{12} et DP prélevées selon T à partir d'un modèle GTN dont la germination est pilotée par la fonction A_n définie par $p_f = 0,15$ et $p_i = 0,01$. Le calibrage de la porosité critique a été réalisé à partir des éprouvettes EU dont une prévision satisfaisante de la rupture est illustrée par la figure 3.58b pour une valeur de f_c égale à 0,018. La modélisation de la rupture des éprouvettes AE n'a pas été réalisée avec ce modèle compte tenu des résultats complètement erronés obtenu pour le sens L (voir figure 3.50b). En fait nous nous sommes servis de ce modèle GTN, dont la germination est uniquement gouvernée par une fonction A_n, afin de valider le principe d'une simulation différente de la germination pour les sens L et T, en sachant qu'il ne permettra pas de predire correctement la rupture des éprouvettes AE prélevées selon T. Par contre la figure 3.61 montre une prévision tout à fait satisfaisante de la rupture des éprouvettes TR_{12} et DP avec ce modèle d'endommagement. Pour les éprouvettes DP il faut néanmoins introduire une dépendance par rapport au paramètre de Lode similaire à celle exprimée pour le sens L par la relation (3.67) en utilisant $p_f^{DP} = 0,05$ associé à $f_c = 0,018$.

Pour un prélèvement selon T nous souhaitons comme pour le sens L prédire la rupture des éprouvettes AE et EU à partir d'un même modèle d'endommagement. Par conséquent cette modélisation d'une germination différente selon les sens L et T va être appliquée au modéle GTN, défini ci-dessus, dont la porosité f_n est contrôlée par A_n et C_n. Nous avons considéré une germination distincte selon les sens L et T uniquement au niveau de A_n, l'expression de la fonction C_n reste donc identique pour ces deux sens. En effet dans ce cas la germination est activée par la contrainte principale σ_1, elle n'a donc pas le caractère progressif d'une germination gouvernée par A_n permettant d'expliquer des micromécanismes de germination différents selon L et T.

Dans le cas de la modélisation de f_n à l'aide de A_n et C_n la valeur de la porosité critique se déduit de la simulation des éprouvettes AE, dont la rupture est uniquement induite par une germination pilotée par σ_1 et modélisée par C_n définie par la relation (3.69). La valeur de f_c ainsi obtenue pour la prévision de la rupture des éprouvettes AE prélevées selon le sens T est de 0,018. Nous retrouvons donc la valeur critique de la porosité f déterminée précédemment dans le cas d'une germination uniquement contrôlée par A_n, par conséquent nous allons conserver une valeur de p_f égale à 0,15 puisque la fonction C_n est sans impact sur la rupture des éprouvettes EU_4, compte tenu d'une valeur trop faible de σ_1 (voir figure 3.48).

La figure 3.62 fournit la prévision de la rupture des différentes éprouvettes à partir d'un modèle GTN dont la germination est simulée par les fonctions A_n et C_n. Nous pouvons constater que la rupture est



(a) Eprouvettes AE

(b) Eprouvettes EU

(c) Eprouvette TR_{12}

(d) Eprouvette DP

FIGURE 3.62 – Simulation de la rupture des différentes éprouvettes prélevées selon T dans le cas d'une germination contrôlée par A_n et C_n

		Germination contrôlée par A_n		Germination contrôlée par A_n et C_n	
		Sens L	Sens T	Sens L	Sens T
A_n	p_i	0,01	0,01	0,01	0,01
	p_f ($\nu_L \to 1$)	0,3	0,15	0,4	0,15
	p_f ($\nu_L \to 0$)	0,12	0,05	0,2	0,05
C_n	α	–	–	100	100
	β	–	–	10 MPa	10 MPa
	σ_s	–	–	705 MPa	705 MPa
GTN	f_N	0,0163	0,0163	0,0163	0,0163
	f_c	0,022	0,018	0,02	0,018
	f_F	0,05	0,05	0,05	0,05

TABLE 3.5 – Paramètres des modèles GTN avec germination pilotée par A_n ou par A_n et C_n

modélisée de manière satisfaisante pour les éprouvettes AE, EU, TR_{12} et DP. Le tableau 3.5 présente une synthèse des différents modèles GTN d'endommagement, couplés à une loi de germination, dont le développement a été réalisé dans le présent paragraphe afin de simuler la rupture des éprouvettes AE, EU, TR_{12} et DP prélevées selon les sens L et T. Précisons que dans ce tableau le sens L, respectivement T, fait référence au sens de sollicitation du matériau, il faut donc bien garder à l'esprit que l'endommagement se fait alors dans le plan perpendiculaire à ce sens. Nous pouvons également signaler que la dépendance de la germination vis-à-vis du paramètre de Lode ne concerne que la loi A_n, ainsi ce paramètre est sans influence sur une germination pilotée par σ_1. Dans tous les cas l'anisotropie de rupture est simulée par une valeur différente de la porosité critique f_c selon que le matériau est sollicité suivant L ou T.

3.4.2.3 Modélisation de la propagation de fissures

Nous abordons dans ce paragraphe l'ultime étape de notre travail, à savoir modéliser la propagation d'une fissure à l'aide du modèle d'endommagement élaboré au paragraphe précédent à partir des résultats des essais sur éprouvettes non fissurées. Dans un premier temps nous nous sommes concentrés sur les éprouvettes CT10 de type $L-T$, $T-L$ et $T-S$ car elles présentent une propagation stable de la fissure, contrairement aux éprouvettes SENT et SCT. Pour ces dernières nous essaierons néanmoins de prédire l'amorçage de la fissure compte tenu du caractère instable de ces éprouvettes. Nous avons utilisé une modélisation des éprouvettes CT10 identique, en termes de géométrie et de conditions aux limites, à celle exposée au chapitre 2 dans le cadre de l'analyse consacrée à la « keycurve ».

Comme pour l'application du critère de [Rice and Tracey, 1969] aux éprouvettes fissurées, exposée au paragraphe 3.3.2.3 (voir page 191), nous devons également calibrer la taille de maille en pointe de fissure afin de recaler au mieux les essais sur éprouvettes CT10. Nous avons employé uniquement des éléments de forme carrée et de type linéaire. Ce choix implique l'utilisation de l'intégration sélective qui est sensée améliorer la convergence du calcul. En effet l'activation de cette option limite les variations brusques de pression hydrostatique au sein des éléments où règne une forte déformation plastique.

Malgré cet artifice nous devons signaler, avant de présenter les résultats obtenus, que nous avons essuyé de sérieux problèmes de convergence qui n'ont pas toujours pu être résolus. Ces problèmes sont essentiellement liés au fait qu'il est nécessaire de « casser » certains éléments afin de faire propager la fissure. Un élément sera considéré comme « cassé » lorsque la porosité atteint la valeur de f_F en au moins trois points de Gauss. Lorsque f est égale à f_F en seulement un ou deux points de Gauss d'un

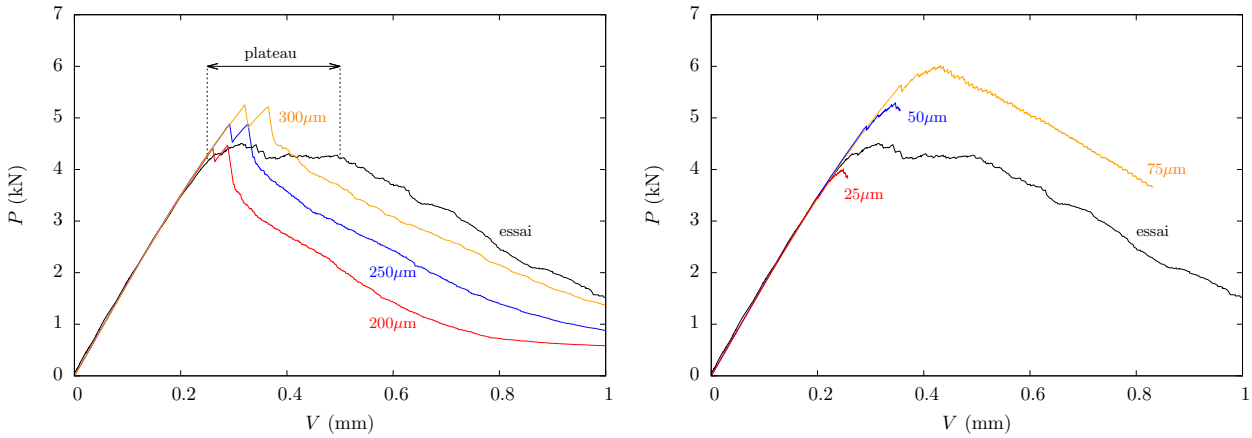
élément, c'est-à-dire que celui-ci n'est pas encore « cassé », le matériau en ces points de Gauss possède un comportement linéaire, défini par un module d'Young de 1 MPa et un coefficient de Poisson nul, afin de poursuivre le calcul. Lorsque l'élément est « cassé » alors les déplacements des nœuds de cet élément sont bloqués et celui-ci ne fait plus partie du calcul bien qu'il ne soit pas retiré du maillage. Le jeu de paramètres utilisé pour modéliser la coalescence ($f_c = 0,02$ et $f_F = 0,05$) impose une croissance violente de la porosité alors que celle-ci possède une valeur encore faible de l'ordre de 2 %. Ainsi les difficultés de convergence sont engendrées par les fortes variations imposées aux différentes variables du modèle d'endommagement. Celles-ci ont pu parfois être résolues par l'introduction d'une faible composante viscoplastique dans la loi d'écrouissage et par la réduction drastique du pas de temps afin de parvenir à « casser » le premier élément.

La figure 3.63a présente pour les éprouvettes CT10 de type $L-T$ et $T-L$ la comparaison entre la propagation obtenue par essais et celle issue de la simulation numérique, en utilisant le modèle d'endommagement GTN dont la germination est pilotée par les fonctions A_n et C_n décrites dans le tableau 3.5. Nous pouvons constater que nous ne parvenons pas à modéliser correctement la phase de propagation de la fissure. En effet dans tous les cas l'effort P résultant du calcul diminue trop brutalement dés lors que les premiers éléments sont « cassés ». Nous ne réussissons pas à reproduire le « plateau » que présente les courbes d'essai entre l'amorçage de la fissure et la chute de l'effort P. Par contre nous sommes capables de capter l'instant de l'amorçage de la rupture marqué par la première diminution de la valeur de P. Du point de vue industriel ce résultat est important, car il est indispensable de pouvoir prédire à partir de quelle valeur de l'effort P s'initie la propagation de la fissure, même si par la suite celle-ci n'est pas correctement modélisée.

Signalons toutefois que la prédiction de l'amorçage de la fissure (courbe rouge des figures 3.63a et 3.64) nécessite l'utilisation de tailles de maille différentes en pointe de fissure entre les sens $L-T$ et $T-L$ des éprouvettes CT10. Ainsi nous avons utilisé une taille de maille de 200 μm et 150 μm respectivement pour les sens $L-T$ et $T-L$. La figure 3.65 montre que la germination est gouvernée par σ_1 en effet il n'est pas possible d'obtenir une valeur de f_n égale à f_N pour $p = 0,06$ alors que $p_f = 0,4$. Par conséquent la remarque précédente n'est pas une surprise puisque les paramètres de la fonction C_n ont été calibrés afin de recaler les résultats des essais sur éprouvettes AE, dont l'anisotropie de rupture est faible comparativement aux éprouvettes EU, DP et CT10. Mais alors se pose la question suivante : pourquoi le caractère anisotrope de la rupture est-il différent entre les éprouvettes AE et CT10, si la germination et l'endommagement sont modélisés de manière identique pour ces deux éprouvettes ?

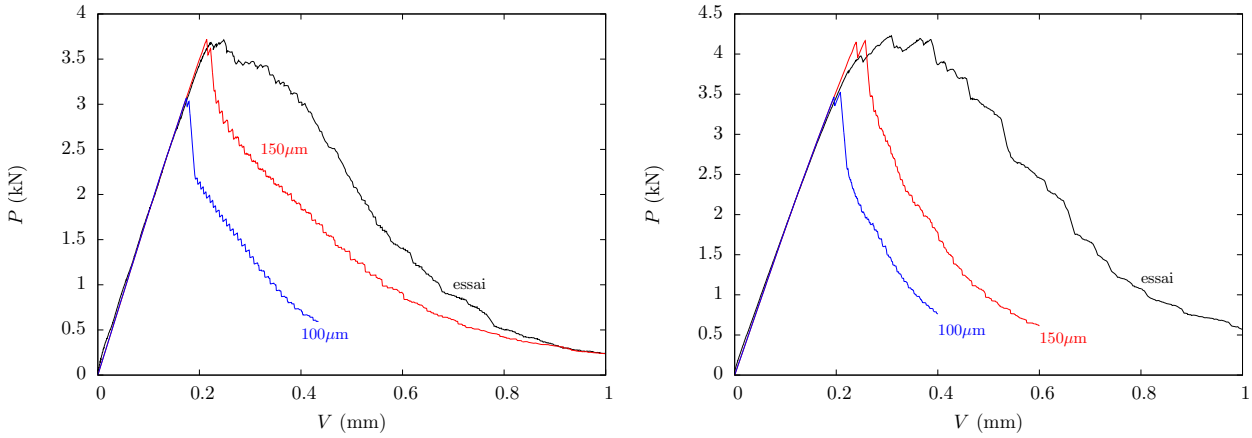
La réponse se trouve à la fin du paragraphe 3.3.2.2 (voir page 188) où nous avons montré qu'un critère basé sur une valeur seuil σ_s de la contrainte principale σ_1, associée à un volume critique V_c, permettait de prévoir la rupture des éprouvettes AE mais pas celle des éprouvettes CT10. En effet pour ces dernières le volume d'éléments pour lesquels σ_1 est supérieure à σ_s reste inférieur à V_c et n'est donc pas suffisant pour déclencher la rupture. Par conséquent nous pouvons avancer que lorsque la germination pilotée par σ_1 s'effectue sur un volume suffisamment important de matière, alors il existe peu d'anisotropie de rupture, comme dans le cas des éprouvettes AE. Il semblerait que se produise un effet de moyenne. Par contre lorsque cette germination opère sur peu d'éléments, comme dans le cas d'une pointe de fissure, nous retrouvons une anisotropie de rupture suivant le sens de sollicitation du matériau. Ainsi une solution rapide et simple pour intégrer ce phénomène dans la simulation numérique consiste à utiliser des tailles de maille distinctes en pointe de fissure, selon que celle-ci est située dans un plan perpendiculaire à L ou T. Cette utilisation de deux tailles de maille ne constitue pas un simple artifice numérique, mais permet en définitive de rendre compte de la différence des distances caractéristiques entre les phases intermétalliques Al_2Cu, observée selon les sens L et T. La figure 3.64b semble confirmer cette approche puisqu'elle montre que pour les éprouvettes CT10 de type $T-S$ il faut utiliser, pour capter l'amorçage de la fissure, la même taille de maille que pour le sens $T-L$ soit 150 μm.

Nous souhaitons maintenant essayer de modéliser la propagation de la fissure en utilisant toujours



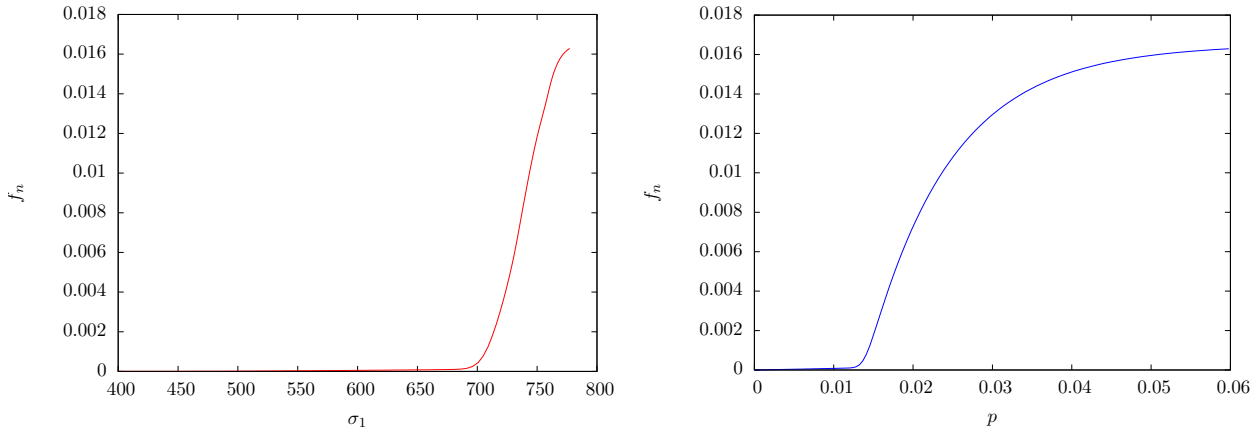
(a) Germination contrôlée par σ_1 et p (b) Germination uniquement contrôlée par p

FIGURE 3.63 – Simulation de la propagation de fissure pour les éprouvettes CT10 de type $L-T$



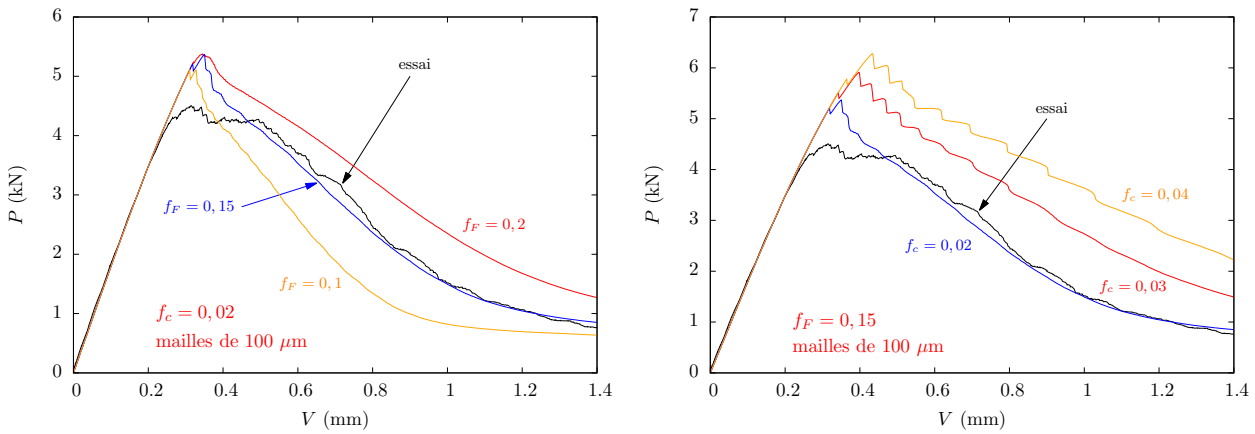
(a) Eprouvettes CT10 $T-L$ (b) Eprouvettes CT10 $T-S$

FIGURE 3.64 – Simulation de la propagation de fissure pour les éprouvettes CT10 de type $T-L$ et $T-S$ lorsque la germination est contrôlée par σ_1 et p



(a) f_n en fonction de σ_1 (b) f_n en fonction de p

FIGURE 3.65 – Evolution de la porosité f_n lorsque la germination est contrôlée par σ_1 et p



(a) Eprouvettes CT10 $T-L$ (b) Eprouvettes CT10 $T-S$

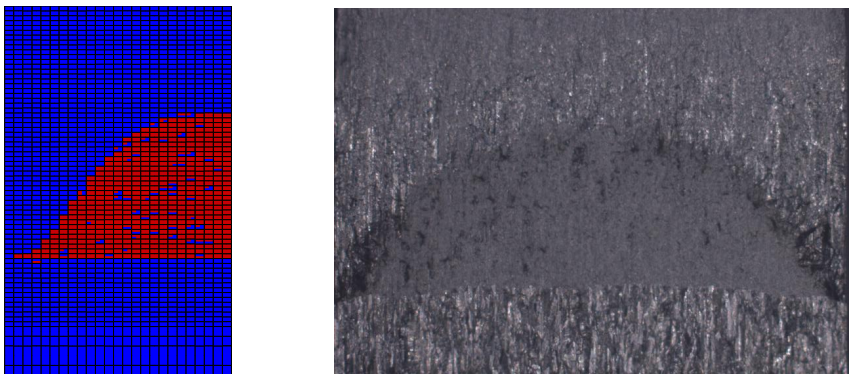
FIGURE 3.66 – Simulation de la propagation de fissure pour les éprouvettes CT10 de type $L-T$ pour le modèle défini par : $f_c = 0,02$, $f_F = 0,15$ et $p_f = 0,09$

un modèle d'endommagement GTN mais avec une germination uniquement pilotée à partir de la déformation plastique cumulée p (fonction A_n du tableau 3.5). Nous supposons que l'endommagement sera alors plus progressif que dans le cas d'une germination gouvernée par σ_1, et permettra ainsi de reproduire le fameux « plateau » des courbes expérimentales. La figure 3.63b présente les résultats de cette simulation numérique uniquement pour le cas de l'éprouvette CT10 de type $L-T$. Cette figure confirme en partie notre hypothèse, puisque dans le cas d'une germination gouvernée uniquement par A_n la propagation se poursuit davantage (voir figure 3.63b) que dans le cas d'une germination pilotée par σ_1, où elle se limite à deux pics nettement marqués (voir figure 3.63a). De plus il apparaît que pour une taille de maille de 75 μm nous obtenons une redescente correcte de l'effort P en fonction du déplacement V. Cependant nous devons constater qu'il manque quelque chose à notre modèle, car il reste insuffisant pour simuler le « plateau » de la courbe expérimentale.

La figure 3.63b montre également que pour une taille de mailles inférieure à 75 μm nous ne réussissons à simuler que l'amorçage de la fissure, sans phase de propagation, compte tenu de problèmes de convergence liés à des éléments trops petits. Or nous avons précisément besoin d'utiliser une taille de mailles légèrement supérieure à 25 μm pour recaler les résultats des essais sur éprouvette CT10 de type $L-T$. Nous sommes donc devant le paradoxe suivant : plus la taille de nos éléments en pointe de fissure est petite et meilleure est la modélisation de la phase de propagation, mais plus nous augmentons les problèmes de convergence, jusqu'au point de ne plus parvenir à faire propager numériquement la fissure.

Nous proposons donc de fixer la taille de maille à 100 μm afin de palier les problèmes de convergence, puis de modifier en conséquence certains des paramètres du modèle GTN et de la loi de germination. En effet si nous conservons les valeurs de ces paramètres fournies dans le tableau 3.5, alors la figure 3.63b montre que pour une taille de maille de 100 μm, il sera impossible de reproduire la courbe $P-V$ expérimentale des éprouvettes CT10 de type $L-T$. Compte tenu des valeurs de la porosité critique proposées dans le tableau 3.5, nous avons choisi une valeur de f_c égale à 0,02. Par rapport aux données du tableau 3.5 nous souhaitons augmenter la valeur de f_F afin de ralentir la coalescence et d'assurer une croissance plus progressive de la fissure tout en espérant améliorer la convergence du calcul.

Nous avons choisi d'attribuer à f_F les valeurs 0,1 ; 0,15 et 0,2 qui seront associées à une porosité critique f_c égale à 0,02 ; 0,03 ou 0,04. Ces nouveaux paramètres nécessitent de modifier les coefficients de la fonction A_n, afin d'accélérer la germination, sans quoi nous ne pourrons pas obtenir une bonne concordance avec les résultats expérimentaux. Ainsi nous avons retenu une valeur de p_f égale à 0,09 au lieu de 0,3 selon le tableau 3.5, la valeur de p_i étant inchangée. La figure 3.66 fournit la courbe $P-V$ issue de la simulation numérique pour différents jeux des paramètres f_c et f_F.



(a) Cas de la simulation (b) Cas de l'essai

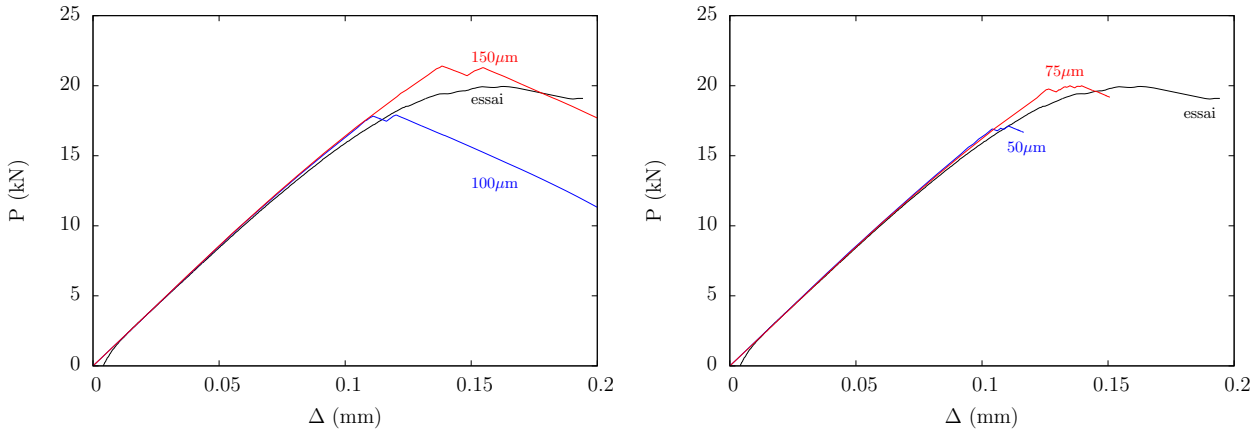
FIGURE 3.67 – Avancée de fissure obtenue par simulation et issue de la caractérisation expérimentale

La combinaison $f_c = 0,02$ et $f_F = 0,15$ permet de modéliser correctement la redescente de l'effort P après le « plateau », sans réussir à reproduire ce dernier. Toutefois il faut souligner que ce résultat est obtenu avec une loi de germination A_n dont les paramètres ne sont pas cohérents avec les observations microscopiques. En effet si 95 % des phases Al_2Cu sont censées avoir engendré des cavités pour une déformation plastique de 9 % alors il y aurait inévitablement des précipités cassés en fond d'entaille de l'éprouvette AE_2. Or l'analyse au MEB de la coupe polie de l'éprouvette bi-entaillée AE_2 ne montre aucune phase intermétallique brisée en bord d'entaille. La vocation des simulations présentées par la figure 3.66 est de transposer pour une taille de maille de 100 μm, ne posant pas de problème de convergence, les résultats que nous devrions obtenir à partir d'éléments plus petits, si nous parvenions à faire converger le calcul. Ce dernier étant réalisé avec une germination pilotée uniquement par la déformation plastique cumulée p, dont les paramètres de la fonction A_n ont été calibrés à l'aide des observations microscopiques et sont résumés dans le tableau 3.5. La figure 3.67 montre que le jeu de paramètres $f_c = 0,02$, $f_F = 0,15$ et $p_f = 0,09$ permet non seulement un recalage satisfaisant de la courbe expérimentale $P - V$ de l'éprouvette CT10 de type $L - T$, mais également une avancée de la fissure cohérente avec les données expérimentales. Ce constat nous laisse perplexe et nous amène à nous demander si tout modèle d'endommagement permettant de recaler la courbe $P - V$ d'un essai sur éprouvette fissurée, fournit également une estimation satisfaisante de l'avancée de fissure !

En conclusion nous devons donc constater que nous n'avons jamais réussi à modéliser le « plateau » présent sur la courbe expérimentale $P - V$ d'une éprouvette CT10 de type $L - T$. Nous sommes parvenus tout au plus à simuler séparément, mais pas simultanément, l'amorçage de la fissure et la propagation de la fissure après le « plateau ». Nous avons donc le sentiment que quelque chose nous échappe et la figure 3.68 est loin de nous rassurer sur ce point. En effet celle-ci présente la simulation de la propagation de fissure pour les éprouvettes SENT en considérant une germination pilotée par p et σ_1 ou par p uniquement. Nous pouvons constater que pour les deux tailles de mailles calibrées à partir des éprouvettes CT10 la simulation de la propagation de la fissure n'est absolument pas satisfaisante, nous arrivons tout juste à prévoir l'amorçage de la fissure. Nous pensons que la modélisation de la coalescence par une accélération de la porosité, via l'introduction d'une porosité effective f^*, n'est pas suffisamment élaborée pour rendre compte des micromécanismes complexes observés sur les faciès de rupture : germination primaire et secondaire ainsi que décohésion aux joints de grains.

3.4.3 Résumé

Nos travaux s'achèvent sur ce troisième et dernier chapitre consacré à la simulation de la rupture à partir d'un modèle d'endommagement. Nous avons choisi de modéliser la croissance des cavités à l'aide du modèle de [Gurson, 1977] modifié par [Tvergaard and Needleman, 1984]. En effet notre alliage présente une ductilité à rupture faible, par conséquent la phase de croissance sera limitée ainsi il n'est



(a) Germination contrôlée par σ_1 et p

(b) Germination uniquement contrôlée par p

FIGURE 3.68 – Simulation de la propagation de fissure pour les éprouvettes SENT

pas nécessaire d'utiliser une modélisation plus élaborée, prenant en compte par exemple la forme elliptique des cavités. Puisque nous avons montré dans la deuxième partie du chapitre 3 que le critère de coalescence développé par [Thomason, 1985a] n'était pas applicable à notre matériau, nous avons envisagé la coalescence comme une simple accélération de la porosité. Quant à la germination elle a été modélisée par une fonction de Gauss, faisant intervenir la déformation plastique équivalente p , dont les paramètres ont été calibrés à partir de l'analyse de la porosité, sur des coupes polies d'éprouvettes bi-entaillées AE_2 et EU_2.

Le modèle GTN ainsi déterminé permet de simuler la rupture des éprouvettes EU, TR_{12} et DP prélevées selon la direction L mais pas celle des éprouvettes AE. Il nous faut préciser que la simulation satisfaisante de la rupture de l'éprouvette DP a nécessité l'introduction d'une dépendance de la germination vis-à-vis du paramètre de Lode. En se souvenant que la rupture des éprouvettes AE n'a pu être modélisée, dans la seconde partie de ce chapitre, que par un critère basé sur une valeur seuil de la contrainte principale σ_1, associée à un volume critique, nous avons eu l'idée de piloter la germination simultanément par p et σ_1, via l'utilisation d'une fonction de Gauss et d'une fonction tangente hyperbolique. Le calibrage des paramètres de ces deux fonctions est réalisé afin de simuler la rupture des éprouvettes AE et EU toujours prélevées selon L. Cette modélisation de la germination gouvernée par p et σ_1 fournit également une simulation satisfaisante des éprouvettes TR_{12} et DP. Pour cette dernière il est toutefois nécessaire de faire varier en fonction de ν_L les paramètres de la germination contrôlée par p. Le caractère orthotrope de la rupture est simulé en utilisant une loi de germination différente pour les sens L et T, il n'est donc pas possible de prévoir la rupture d'une éprouvette sollicitée dans une autre direction que L et T. Enfin l'utilisation du modèle GTN dont la germination est gouvernée par p et σ_1 ne nous a pas permis de simuler de manière satisfaisante la propagation de la fissure pour les éprouvettes CT10 et SENT. Cette limitation s'explique par le fait que la modélisation de la coalescence par une accélération de la porosité est beaucoup trop simple pour rendre compte de la phase de propagation, elle permet tout au plus de prévoir l'amorçage de la fissure.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

En guise de conclusion nous allons balayer les différents objectifs que nous nous étions fixés au début de notre étude afin de vérifier si ils ont été totalement, partiellement ou pas du tout atteints. Dans cette optique les perspectives vont consister à envisager comment dépasser, afin d'aller plus loin, certains objectifs ou plus modestement comment atteindre ceux qui ne l'ont pas été. Nous allons suivre un ordre chronologique dicté par la numérotation des chapitres. Mais cet ordre est également celui d'une modélisation de plus en plus élaborée, attestant ainsi une volonté de compréhension et d'approfondissement des problèmes. Commençons donc par le premier chapitre dont l'objet est la caractérisation de l'alliage d'aluminium 2219 T87. Les différentes analyses métallographiques ont été menées d'un point de vue qualitatif plutôt que quantitatif. En effet, nos travaux ne s'incrivent pas dans une démarche propre à la métallurgie, mais plutôt dans une perspective de dimensionnement de structure industrielle, avec néanmoins une volonté d'adopter une approche locale fondée sur des observations de la microstructure. Selon nous cette stratégie a été payante, car nous avons toujours disposé des informations nécessaires afin d'analyser, de manière pertinente, les résultats des simulations numériques et de choisir le modèle le plus adapté à notre matériau. Nous devons signaler que la tomographie, associée à l'analyse d'images, nous a grandement facilité la tâche quant à la mesure de la porosité initiale et du taux de phases intermétalliques Al_2Cu, dont la connaissance est nécessaire pour la mise en œuvre d'un modèle d'endommagement quel qu'il soit. Nous sommes donc parvenus à déterminer la nature des précipités intermétalliques présents dans notre alliage ainsi que leur distribution selon la direction de laminage L, le sens transverse T et l'épaisseur de la tôle.

Nous n'avons pas rencontré de problèmes particuliers lors de la réalisation des essais sur les différentes éprouvettes. La phase de pré-fissuration par fatigue des éprouvettes CT, SENT et SCT s'est déroulée sans difficulté, alors que nous nous attendions, pour cette dernière géométrie, à devoir essuyer quelques échecs, avant de parvenir à une propagation satisfaisante de la fissure semi-elliptique. La mesure de l'avancée de fissure des éprouvettes CT a été réalisée à partir d'essais interrompus nécessitant plusieurs spécimens. Elle est certes plus longue et plus coûteuse qu'une détermination à partir de la méthode de la complaisance, basée sur des charges/décharges successives, mais elle constitue à nos yeux la seule méthode véritablement fiable, dans le cas d'un matériau dont la ductilité et la ténacité restent faibles. Pour les éprouvettes SENT et SCT nous n'avons pas eu de mesure d'avancée de fissure à effectuer, car pour ces géométries la propagation s'est avérée instable. Ce résultat a réduit en quelque sorte la portée de nos travaux, puisque nous n'avons pas pu comparer les courbes $J_R - \Delta a$ issues de différentes géométries d'éprouvettes. Enfin, l'analyse des faciès de rupture au MEB, nous a permis d'esquisser un scénario de rupture que nous nous sommes efforcés de mettre en équation au dernier chapitre, traitant de l'approche locale.

Au niveau métallurgique deux perspectives sont à considérer. La première consiste à diminuer le taux de phases intermétalliques Al_2Cu, ainsi que la taille de ces particules, afin d'évaluer l'incidence de ces mesures sur la ductilité à rupture. La seconde envisage une réduction de la teneur en Fer et en Silicium dans l'alliage 2219 T87 en vue d'augmenter la ténacité. En choisissant un alliage d'aluminium assurant une propagation stable de la fissure, un 2024 T6 par exemple, il serait intéressant de tester des éprouvettes CT et SENT en faisant varier le rapport a/W. Nous disposerions alors d'une base de

données conséquentes permettant d'étudier l'influence de la géométrie et de la longueur du ligament sur la courbe $J_R - \Delta a$. Enfin il paraît nécessaire dans une perspective à long terme, de réaliser aux températures cryogéniques les mêmes essais que ceux que nous avons effectués à température ambiante. Nous pourrons alors vérifier par l'observation au MEB des faciès de rupture que nous avons des micromécanismes de rupture identiques quelle que soit la température.

Dans la première partie du deuxième chapitre, consacré à l'approche globale, nous avons réalisé une analyse détaillée de la norme ASTM E1820. Il ressort de cette étude que l'expression du facteur plastique η_{pl} et de la formule itérative, permettant d'obtenir la courbe $J_R - \Delta a$, s'articulent autour de la notion de « keycurve ». Celle-ci est basée sur la séparabilité des variables a et V_{pl} dans l'expression de la charge P appliquée à une éprouvette fissurée, d'où : $P = G\,(a/W)\;\;H\,(V_{pl}/W)$. Nous rappelons que V_{pl} représente la partie plastique du déplacement d'ouverture de la fissure, tandis que a désigne la longueur de la fissure. La « keycurve » nous a permis de remplir notre objectif concernant la recherche d'une méthode générale permettant la détermination de la courbe $J_R - \Delta a$. En effet la séparabilité des variables a et V_{pl} dans l'expression de P assure, pour toute géométrie d'éprouvette fissurée, d'une part l'applicabilité de la formule itérative et d'autre part l'existence du facteur plastique qui s'obtient par la relation : $\eta_{pl} = -\,(bG')\,/\,(WG)$. La seconde partie du deuxième chapitre est donc naturellement dédiée à l'application de la méthode de la « keycurve » aux éprouvettes CT et SENT. Afin de vérifier la validité des résultats obtenus par cette méthode nous avons également exprimé η_{pl} à partir d'une analyse, basée sur un calcul numérique de l'intégrale J, issue de [Cravero and Ruggieri, 2007].

Il apparaît alors que la notion de « keycurve » n'a pas tenu toutes ces promesses, car les deux approches évoquées précédemment fournissent des expressions du facteur plastique identiques pour les éprouvettes CT10, mais différentes pour les éprouvettes SENT. De plus, nous ne sommes pas parvenus à identifier le point bloquant dans l'application de la méthode de la « keycurve » aux éprouvettes SENT. Enfin, la détermination de η_{pl} inspirée de [Cravero and Ruggieri, 2007] et qui se base sur une évaluation numérique de l'intégrale J ne donne pas entière satisfaction. En effet, pour des longueurs de fissure importantes, correspondant à un ratio a/W supérieur à 0,7, il n'existe plus de valeur seuil de J, pour laquelle la valeur de η_{pl} atteint un palier et devient par conséquent constante. Les auteurs de [Cravero and Ruggieri, 2007] avaient conscience du problème, car ils proposent de considérer une valeur moyenne de η_{pl} calculée pour J supérieure à une valeur à partir de laquelle le facteur plastique est constant, pour des rapports a/W inférieurs à 0,7.

Le mérite de la méthode basée sur la « keycurve » est de constituer, pour une géométrie quelconque d'éprouvette fissurée, la condition nécessaire de l'existence du facteur η_{pl} et celle de l'utilisation de la formule itérative, issue de la norme ASTM E1820, afin d'obtenir la courbe $J_R - \Delta a$. Par contre l'expression du facteur plastique sera déterminée à partir d'un calcul numérique de J conformément à [Cravero and Ruggieri, 2007], bien que cette approche ne soit pas totalement satisfaisante comme nous l'avons mentionné précédemment. Il nous faut également préciser que nous avons développé une loi non linéaire élastique pour modéliser l'écrouissage de notre alliage, afin de s'assurer que la valeur calculée de J est bien indépendante du contour d'intégration choisi. Puisque nous avons été amenés à devoir effectuer des calculs d'intégrale J nous en avons profité pour réaliser une analyse en pointe de fissure dans le cas de la plasticité confinée et dans les configurations liées aux éprouvettes CT et SENT. L'évaluation de Q montre que les éprouvettes CT sont plus proches du cas de plasticité confinée que les éprouvettes SENT. Ce résultat permettrait éventuellement d'expliquer pourquoi la méthode de la « keycurve » fonctionne dans le cas des éprouvettes CT, mais pas dans celui des éprouvettes SENT. Nous rappelons que l'exigence de confinement plastique en pointe de fissure garantit l'indépendance de la courbe $J_R - \Delta a$ vis-à-vis de la géométrie d'éprouvette employée. Dans ces conditions cette courbe devient une propriété intrinsèque du matériau.

Nous sommes donc maintenant en mesure de déterminer les caractéristiques matériaux nécessaires à la mise en œuvre d'une approche FAD, celle-ci va ainsi constituer la dernière partie du second chapitre. Afin de prévoir l'amorçage de la fissure des éprouvettes CT, SENT et SCT nous avons choisi

d'utiliser l'analyse FAD développée dans [Milne et al., 1986] par CEGB sous l'appellation de loi R6. Cette-dernière propose trois options afin de vérifier l'intégrité d'une structure contenant un défaut. Nous pouvons considérer que nous avons atteint notre objectif principal lié à l'approche globale, car nous somme parvenus à prédire de manière satisfaisante l'amorçage de la fissure, pour les différentes éprouvettes que nous avons testées, en utilisant les options 1 et 2 de la loi R6. Notons que dans le cadre de notre application ces deux options ne présentent pas de différence significative au niveau des résultats obtenus. Par conséquent nous pouvons en conclure que les fissures que nous avons étudiées ne sont pas suffisamment critiques pour amener l'analyse FAD à ces limites. Afin d'atteindre celles-ci nous pourrions, en terme de perspective, tester des éprouvettes CT, SENT et SCT avec des ligaments de faible longueur, afin de vérifier si l'approche FAD permet toujours de prévoir un effort à l'amorçage cohérent de celui issus des essais. Il sera alors nécessaire de calculer l'intégrale J le long du front de fissure de l'éprouvette SCT, il faut donc envisager une extension du calcul de l'intégrale J à une géométrie 3D. Ce calcul n'a pas pu être réalisé avec le logiciel ZeBuLoN car l'implémentation actuelle est limitée au calcul de J pour une géométrie 2D, celle-ci s'avère suffisante dans le cas de déformation plane pour les éprouvettes CT et SENT. Enfin ce second chapitre s'achève sur l'utilisation d'une analyse CDF afin de prédire avec succès l'instabilité de la propagation de la fissure dans le cas des éprouvettes SENT. Pour des raisons de complexité cette analyse n'a pas été menée pour les éprouvettes SCT, elle pourrait donc constituer une extension intéressante de l'étude de l'instabilité.

Le troisième et dernier chapitre de cette thèse est dédié à l'approche locale. Notre objectif était à la fois simple et ambitieux, en effet il s'agissait de simuler, à l'aide d'un modèle d'endommagement de type GTN, la rupture des différentes éprouvettes testées dans le premier chapitre. La difficulté réside dans le nombre important d'éprouvettes et dans le caractère orthotrope de la rupture, selon que le matériau est sollicité suivant L ou T. Avant d'aborder la question de la rupture une première étape, faisant l'objet de la première partie de ce troisième chapitre, consiste à modéliser correctement le comportement élasto-plastique de l'alliage 2219 T87. La détermination du coefficient de Lankford réalisée à partir des essais sur éprouvettes TR_{12} montre que ce matériau est isotrope transverse. Ce résultat s'explique par le procédé de laminage et nécessite d'utiliser un critère de plasticité orthotrope. Le plus simple est celui développé par [Hill, 1950] mais compte tenu de son caractère quadratique, il ne suffit pas à simuler le comportement élasto-plastiques des éprouvettes AE et EU. Il nous faudra avoir recours au critère non quadratique, issus de [Bron and Besson, 2004], afin d'obtenir une simulation satisfaisante du comportement plastique des éprouvettes TR_{12}, AE, EU et DP, prélevées selon les sens L et T. Il est important de noter que le critère de plasticité résulte d'une approche purement phénoménologique qui ne nécessite aucune analyse de la microstructure, mais uniquement les réponses macroscopiques d'essais réalisés sur différentes géométries d'éprouvettes. Nous nous permettons d'insister sur le fait qu'il est vraiment indispensable de disposer d'une base d'essais la plus riche possible, afin d'obtenir un critère de plasticité susceptible de recaler au mieux le comportement plastique du matériau étudié. A titre d'illustration de cette considération si nous avions réalisé uniquement des essais sur éprouvettes TR_{12}, alors le critère de [Hill, 1950] aurait été suffisant pour simuler le comportement isotrope transverse de notre alliage. Or nous avons montré que ce critère quadratique ne permet pas de modéliser le comportement plastique des éprouvettes entaillées AE et EU.

La seconde partie du troisième chapitre envisage l'étude de la rupture des différentes éprouvettes à partir du modèle d'endommagement non couplé à la plasticité développé par [Rice and Tracey, 1969]. Ce critère de rupture est particulièrement adapté au contexte industriel car il se calcule simplement à partir des composantes des tenseurs des contraintes et des déformations. Il constitue les prémisses de l'approche locale car il est basé sur la simulation de la phase prépondérante de la rupture ductile, à savoir la croissance des cavités, mais ne tient pas compte des phases de germination et de coalescence. Nous ne sommes pas parvenus à simuler la rupture des éprouvettes EU et AE uniquement avec le critère de [Rice and Tracey, 1969]. Ce critère, après calibrage de sa valeur critique, notée $(R/R_0)_c$,

sur les éprouvettes EU_4 prélevées selon les sens L et T, permet de prévoir la rupture des éprouvettes EU_2, TR_{12} et DP sollicitées selon les directions L et T. Il faut néanmoins introduire une dépendance vis-à-vis du paramètre de Lode afin de simuler correctement la rupture des éprouvettes DP. Quant à la rupture des éprouvettes AE, elle a nécessité l'utilisation d'un critère basé sur une valeur seuil, notée σ_{1s}, de la contrainte principale σ_1, associée à un volume critique V_c. Ce critère qui s'apparente à un critère de rupture « fragile », permet de modéliser le caractère orthotrope de la rupture entre les sens L et T beaucoup moins marqué pour les éprouvettes AE que pour les éprouvettes EU et DP. La simulation de la rupture orthotrope des éprouvettes EU et DP est réalisée à l'aide de deux valeurs distinctes de $(R/R_0)_c$ qui restent par conséquent spécifiques aux sens L et T. Cette approche présente une limitation importante car elle ne peut pas être utilisée lorsque le matériau est sollicité dans une autre direction que L ou T.

Afin de pallier cet inconvénient nous avons envisagé de simuler le caractère orthotrope de la rupture de notre alliage à partir du critère de coalescence des cavitées développé par [Thomason, 1985a]. En effet ce dernier fait intervenir la distance entre les cavités. Par conséquent en supposant que la germination s'initie sur les phases intermétalliques Al_2Cu présentes dans notre matériau, et en imposant des distances différentes entre les cavités dans le modèle de [Thomason, 1985a], il est alors possible de reproduire l'anisotropie de rupture. En effet l'origine de celle-ci est due, d'après les analyses de la microstructure de notre alliage, à un alignement privilégié des précipités intermétalliques Al_2Cu selon le sens de laminage L, couplé à une distance entre précipités plus faible dans la direction L que selon le sens T. Cette tentative a montré que le critère de [Thomason, 1985a] ne peut pas s'appliquer à notre alliage. En effet, celui-ci n'est pas suffisamment ductile pour activer l'instabilité plastique du ligament présent entre les cavités, afin d'amorçer la phase de coalescence. A la fin de cette seconde partie nous avons appliqué avec succès le critère de [Rice and Tracey, 1969], calibré sur les éprouvettes EU_4, afin de simuler l'amorçage de la fissure des éprouvettes CT10, SENT et SCT. Nous avons alors vérifié pour l'éprouvette CT10 de type $L-T$ que le critère basé sur une valeur seuil de la contrainte principale ne permettait pas de prévoir la rupture. En effet le volume d'éléments, pour lequel la contrainte σ_1 est supérieure à la valeur seuil σ_{1s}, est inférieur au volume V_c calibré sur l'éprouvette AE_2 prélevée selon L. Nous voyons sur cet exemple l'importance et la pertinence d'associer un volume critique à une valeur seuil de σ_1.

La dernière partie du troisième chapitre nous amène au cœur de l'approche locale avec l'utilisation d'un modèle d'endommagement de type GTN afin de prévoir la rupture des différentes éprouvettes. Les phases de croissance et de coalescence des cavités sont modélisées de manière classique à l'aide du modèle de [Gurson, 1977] modifié par [Tvergaard and Needleman, 1984]. La germination a dans un premier temps été pilotée par la déformation plastique équivalente p suivant une loi de Gauss conformément au modèle de [Chu and Needleman, 1980]. Cette modélisation permet de simuler la rupture des éprouvettes EU, TR_{12} et DP, mais pas celle des éprouvettes AE. De plus pour les éprouvettes DP il est nécessaire d'introduire une dépendance de la germination vis-à-vis du paramètre de Lode. Afin de pouvoir modéliser la rupture de toutes nos éprouvettes, à l'aide d'un unique modèle, nous avons dû piloter la germination à partir de p et de la contrainte principale σ_1. Le calibrage des paramètres du modèle GTN, et en particulier ceux de la loi de germination, a nécessité un dialogue constant entre la simulation numérique et les observations au MEB des coupes polies des éprouvettes bi-entaillées AE_2 et EU_2. En effet il fallait notamment que le lieu d'amorçage de la rupture obtenu par calcul soit identique à celui issu de l'observation, c'est-à-dire au centre des éprouvettes AE et en fond d'entaille des éprouvettes EU. De plus nous avions émis l'hypothèse au niveau numérique d'introduire deux lois de germination différentes selon les sens L et T afin de modéliser le caractère orthotrope de la rupture. Nous avons alors cherché une confirmation de cette hypothèse en entreprenant une analyse minutieuse de la porosité des coupes polies des éprouvettes EU.

Pour conclure, nous pourrions dire que le modèle d'endommagement que nous avons développé est plus explicatif que prédictif, en effet nous nous sommes efforcé de mettre en équation le scénario

de rupture esquissé au premier chapitre à partir de l'observation des faciès de rupture des différentes éprouvettes. Il existe deux limitations à notre modèle GTN dont l'amélioration constitue l'essentiel des perspectives liées à notre étude de l'approche locale. La première tient au fait que ce modèle ne permet pas de simuler la rupture d'une éprouvette sollicitée selon un sens autre que L ou T. En effet la simulation de l'anisotropie de rupture n'est possible que parce que nous avons considéré une loi de germination et une valeur de f_c différentes pour les sens L et T. Il est toutefois possible d'unifier ces deux lois de germination pour n'en faire qu'une en écrivant $\dot{f}_n = A_n^L\ \dot{\varepsilon}_L^p\ +\ A_n^T\ \dot{\varepsilon}_T^p\ +\ C_n\ \dot{p}$ où :

$$\begin{cases} A_n^L = \dfrac{f_N}{s_N^L\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\varepsilon_L^p - \varepsilon_N^L}{s_N^L}\right)^2\right] \quad \text{si} \quad f_n \leq f_N \quad \text{et} \quad A_n^L = 0 \quad \text{si} \quad f_n > f_N \\[2ex] A_n^T = \dfrac{f_N}{s_N^T\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\varepsilon_T^p - \varepsilon_N^T}{s_N^T}\right)^2\right] \quad \text{si} \quad f_n \leq f_N \quad \text{et} \quad A_n^T = 0 \quad \text{si} \quad f_n > f_N \\[2ex] C_n = \alpha\left\langle C_n^0 - f_n\right\rangle_+ \quad \text{avec} \quad C_n^0 = \left(\tanh\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_s}{\beta}\right) + 1\right)\dfrac{f_N}{2} \end{cases}$$

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_L^p = \left\langle \underline{\boldsymbol{n}}_L \cdot \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \cdot \underline{\boldsymbol{n}}_L \right\rangle_+ \quad \text{et} \quad \varepsilon_L^p = \displaystyle\int \dot{\varepsilon}_L^p \\[2ex] \dot{\varepsilon}_T^p = \left\langle \underline{\boldsymbol{n}}_T \cdot \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \cdot \underline{\boldsymbol{n}}_T \right\rangle_+ \quad \text{et} \quad \varepsilon_T^p = \displaystyle\int \dot{\varepsilon}_T^p \end{cases}$$

La calibration des différents paramètres, introduits dans la formulation ci-dessus, devra être effectuée conformément aux observations des micromécanismes de rupture, mais également afin d'obtenir une valeur de f_c identique pour les sens L et T. La seconde limitation de notre modèle est son incapacité à simuler correctement la phase de propagation pour les éprouvettes CT et SENT, probablement parce que la modélisation de la coalescence par une accélération de la porosité n'est pas suffisamment élaborée pour rendre compte des micromécanismes complexes observés sur les faciès de rupture. A ce titre, il serait intéressant de mieux appréhender la décohésion ductile aux joints de grains, en étudiant par exemple l'existence et le rôle que peuvent jouer les zones dénudées en précipités (« precipitate free zone » ou PFZ) dans l'endommagement de notre alliage. Au niveau de la simulation numérique, la prise en compte de la décohésion aux joints de grains pourrait se traduire par un modèle de zones cohésives couplé au modèle GTN.

Bibliographie

[Achon, 1994] Achon, P. (1994). *Comportement et ténacité d'alliages d'aluminium à haute résistance.* PhD thesis, Ecole des Mines de Paris.

[Ainsworth et al., 2000] Ainsworth, R. A., Sattari-Far, I., Sherry, A. H., Hooton, D. G., and I., H. (2000). Methods for including constraint effects within the SINTAP procedures. *Eng. Fract. Mech.*, 67 :563–571.

[Arora et al., 2010] Arora, K., Pandey, S., Schaper, M., and Kumar, R. (2010). Microstructure evolution during friction stir welding of aluminum alloy AA2219. *J. Mater. Sci. Technol.*, 26 :747–753.

[Ashby and Jones, 1991] Ashby, M. and Jones, D. (1991). *Matériaux (Volume 2) : Microstructure et mise en œuvre.* Dunod.

[Bansal et al., 2009] Bansal, S., Nath, S., Ghosh, P., and Ray, S. (2009). Streched zone width and blunting line equation for determination of initiation fracture toughness in low carbon highly ductile steels. *Int. J. Frac.*, 159 :43–50.

[Barbe, 1976] Barbe, J. (1976). *Mécanique des structures, tome 3 : Plasticité, Mécanique de la fracture, Fluage des métaux.* Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE).

[Barlat et al., 1991] Barlat, F., Lege, D., and Brem, J. (1991). A six–component yield function for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity*, 7 :693–712.

[Bellet, 1999] Bellet, M. (1999). Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation. application to metal powder hot compaction. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 175(1–2) :19–40.

[Benzerga and Besson, 2001] Benzerga, A. and Besson, J. (2001). Plastic potentials for anisotropic porous solids. *Eur. J. Mech./A*, 20A(3) :397–434.

[Benzerga, 2002] Benzerga, A. A. (2002). Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 50 :1331–1362.

[Benzerga and Leblond, 2010] Benzerga, A. A. and Leblond, J.-B. (2010). Ductile fracture by void growth to coalescence. In Aref, H. and van der Giessen, E., editors, *Advances in Applied Mechanics*, volume 44, pages 169–305. Elsevier.

[Beremin, 1980] Beremin, F. M. (1980). Calculs élastoplastiques par la méthode des éléments finis d'éprouvettes axisymétriques entaillées circulairement. *Journal de Mécanique appliquée*, 4 :307–325.

[Besson, 2010] Besson, J. (2010). Continuum models of ductile fracture : a review. *Int. J. Damage Mech.*, 19 :3–52.

[Besson et al., 2001] Besson, J., Brocks, W., Chabanet, O., and Steglich, D. (2001). Ductile rupture of aluminum sheet materials. *European Journal of Finite Elements*, 10 :401–415.

[Besson and Foerch, 1997] Besson, J. and Foerch, R. (1997). Large scale object oriented finite element code design. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 142 :165–187.

[Blauel, 1979] Blauel, J. G. (1979). Experimental techniques for the determination of the initiation of failure. In Larsson, L. H., editor, *Advances in Elastic-Plastic Fracture*, pages 65–88. Applied Science Publishers.

[Bloom and Malik, 1982] Bloom, J. M. and Malik, S. N. (1982). Procedure for the assessment of the integrity of nuclear pressure vessels and piping containing defects. In *Final Report NP-2431 on EPRI project 1237-2*.

[Brickstad et al., 2000] Brickstad, B., Bergman, M., Andersson, P., Dahlberg, L., Sattari-Far, I., and Nilsson, F. (2000). Procedures used in Sweden for safety assessment of components with cracks. *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*, 77 :877–881.

[Brocks and Scheider, 2001] Brocks, W. and Scheider, I. (2001). Numerical aspects of the path-dependance of the J integral in incremental plasticity. In *Technical Note GKSS/WMS/01/08*.

[Bron, 2004] Bron, F. (2004). *Déchirure ductile des tôles minces en alliage d'aluminium 2024 pour application aéronautique*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris.

[Bron and Besson, 2004] Bron, F. and Besson, J. (2004). A yield function for anisotropic materials. Application to aluminium alloys. *Int. J. Plasticity*, 20 :937–963.

[Bron and Besson, 2006] Bron, F. and Besson, J. (2006). Simulation of the ductile tearing for two grades of 2024 aluminum alloy thin sheets. *Eng. Fract. Mech.*, 73 :1531–1552.

[Bron et al., 2004] Bron, F., Besson, J., and Pineau, A. (2004). Ductile rupture in thin sheets of two grades of 2024 aluminum alloy. *Mater. Sci. Engng A*, 380 :356–364.

[Chell and Milne, 1983] Chell, G. G. and Milne, I. (1983). Ductile tearing instability analysis : a comparaison of available techniques. In Shih, C. F. and Gudas, J. P., editors, *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 803*, pages II–179–II–205. American Society for Testing and Material.

[Cherepanov, 1967] Cherepanov, G. P. (1967). Crack propagation in continuous media. *J. Applied Math. Mech.*, 31 :476–488.

[Chu and Needleman, 1980] Chu, C. C. and Needleman, A. (1980). Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *J. Engng Mater. Technol.*, 102 :249–256.

[Clarke and Landes, 1979] Clarke, G. A. and Landes, J. D. (1979). Evaluation of the J integral for the compact specimen. *J. of testing and evaluation*, 7 :264–269.

[Corn, 1971] Corn, D. L. (1971). A study of cracking techniques for obtaining partial thickness cracks of pre-selected depths and shapes. *Eng. Fract. Mech.*, 3 :45–52.

[Cravero and Ruggieri, 2007] Cravero, S. and Ruggieri, C. (2007). Estimation procedure of J-resistance curves for SE(T) fracture specimens using unloading compliance. *Eng. Fract. Mech.*, 74 :2735–2757.

[Danas and Ponte Castaneda, 2009] Danas, K. and Ponte Castaneda, P. (2009). A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media : I - theory. *Eur. J. Mech./A*, 28 :387–401.

[Danas and Ponte Castaneda, 2012] Danas, K. and Ponte Castaneda, P. (2012). Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials. *Int. J. Solids Structures*, 49 :1325–1342.

[Darlaston, 1979] Darlaston, B. J. L. (1979). The development and application of the CEGB two criteria approach for the assessment of defects in structures. In Larsson, L. H., editor, *Advances in Elastic-Plastic Fracture*, pages 319–357. Applied Science Publishers.

[Delorenzi, 1985] Delorenzi, H. (1985). Energy release rate calculations by the finite element method. *Eng. Fract. Mech.*, 21 :129–143.

[d'Escatha and Devaux, 1979] d'Escatha, Y. and Devaux, J. C. (1979). Numerical study of initiation, stable crack growth, and maximumload, with a ductile fracture criterion based on the growth of holes. pages 229–248.

[Devaux et al., 1989] Devaux, J.-C., Mudry, F., and Pineau, A.and Rousselier, G. (1989). Experimental and numerical validation of a ductile fracture local criterion based on a simulation of cavity growth. In Landes, J. D., Saxena, A., and Mekle, J. G., editors, *Nonlinear Fracture Mechanics, ASTM STP 995*, pages 7–23. American Society for Testing and Material.

[Dowling et al., 1983] Dowling, A. P., Harrisson, R. P., Loosemore, K., Ainsworth, R. A., and Milne, I. (1983). Worked examples using the CEGB procedure for the assessment of the integrity of the structures containing defects. In Larsson, L. H., editor, *Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, pages 327–371. Fourth ISPRA Conference, Joint Research Center, Ispra, Italy.

[Elices et al., 2002] Elices, M., Guinea, G. V., Gomez, J., and Planas, J. (2002). The cohesive zone model : advantages, limitations ans challenges. *Eng. Fract. Mech.*, 69 :137–163.

[Ernst, 1983] Ernst, H. A. (1983). Some salient features of the tearing instability theory. In Shih, C. F. and Gudas, J. P., editors, *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 803*, pages II–133–II–155. American Society for Testing and Material.

[Ernst, 1989] Ernst, H. A. (1989). Further developments on the modified J-integral. In Landes, J. D., Saxena, A., and Merkle, J. G., editors, *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 995*, pages 306–319. American Society for Testing and Material.

[Ernst et al., 1981] Ernst, H. A., Paris, P. C., and Landes, J. D. (1981). Estimations on J-integral and tearing modulus T from a single specimen test record. In Roberts, R., editor, *Fracture Mechanics, ASTM STP 743*, pages 476–502. American Society for Testing and Material.

[Ernst et al., 1979] Ernst, H. A., Paris, P. C., Rossow, M., and Hutchinson, J. W. (1979). Analysis of load-displacement relationship to determine J-R curve and tearing instability material properties. In Smith, C. W., editor, *Fracture Mechanics, ASTM STP 677*, pages 581–599. American Society for Testing and Material.

[Ernst et al., 1988] Ernst, H. A., Schwalbe, K. H., Hellmann, D., and McCabe, D. E. (1988). Modified J, J_M, resistance curves under plane stress conditions. *Int. J. Frac.*, 37 :83–100.

[Gologanu et al., 1993] Gologanu, M., Leblond, J., and Devaux, J. (1993). Approximate models for ductile metals containing non–spherical voids — case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(11) :1723–1754.

[Gologanu et al., 1994] Gologanu, M., Leblond, J., and Devaux, J. (1994). Approximate models for ductile metals containing non–spherical voids — case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *J. Engng Mater. Technol.*, 116 :290–297.

[Gupta et al., 2005] Gupta, R., Nayan, N., and Ghosh, B. (2005). Computation of the homogenization regime for aluminium alloy AA2219 on the basis of diffusion theory. *Metal Science and Heat Treatment*, 47 :522–525.

[Gupta et al., 2006] Gupta, R., Nayan, N., and Ghosh, B. (2006). Design of homogenization cycle for various grain size of aluminium alloy AA2219 using diffusion principles. *Canadian Metallurgical Quaterly*, 45 :347–352.

[Gurson, 1977] Gurson, A. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I— Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engng Mater. Technol.*, 99 :2–15.

[Hampton and Nelson, 2003] Hampton, R. W. and Nelson, D. (2003). Stable crack growth and instability prediction in thin plates and cylinders. *Eng. Fract. Mech.*, 70 :371–385.

[Harrison et al., 1980] Harrison, R. P., Loosemoore, K., Milne, I., and Dowling, A. R. (1980). Assessment of the integrity of structures containing defects. In *CEGB Report R/H/R6-Rev 2*.

[Hill, 1950] Hill, R. (1950). *The mathematical theory of plasticity.* Clarendon Press, Oxford.

[Hill, 1990] Hill, R. (1990). Constituve modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38 :405–417.

[Hodulak et al., 1989] Hodulak, L., Memhard, D., and C., C. (1989). Validation of R6 defect assessment methodology using experiments on plates and pipes with surface cracks. In Smith, C. W., editor, *Nonlinear Fracture Mechanics, ASTM STP 667*, pages 355–370. American Society for Testing and Material.

[Hosford, 1972] Hosford, W. F. (1972). A generalize yield criterion. *J. Applied Mech.*, 39 :607–609.

[Huang, 1991] Huang, Y. (1991). Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields. *J. Applied Mech.*, 58 :1084–1086.

[Hutchinson, 1968] Hutchinson, J. W. (1968). Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 16 :13–31.

[Hutchinson, 1983] Hutchinson, J. W. (1983). Fundamentals of the phenomenological theory of nonlinear fracture mechanics. *J. Applied Mech.*, 50 :1042–1051.

[Irwin, 1962] Irwin, G. R. (1962). Crack-extension force for a part-through crack in a plate. *J. Applied Mech.*, pages 651–653.

[Joyce, 1989] Joyce, J. A. (1989). A closer look at tearing instability and arrest. In Smith, C. W., editor, *Nonlinear Fracture Mechanics, ASTM STP 667*, pages 355–370. American Society for Testing and Material.

[Joyce and Hackett, 1989] Joyce, J. A. and Hackett, E. M. (1989). An advanced procedure for J-R curve testing using a drop tower. In Saxena, A., Landes, J., and Bassani, J. L., editors, *Non linear Fracture Mechanics, ASTM STP 995*, pages 298–317. American Society for Testing and Material.

[Kaiser and Carlsson, 1983] Kaiser, S. and Carlsson, A. J. (1983). Studies of different criteria for crack growth instability in ductile materials. In Shih, C. F. and Gudas, J., editors, *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 803*, pages II 58–II 79. American Society for Testing and Material.

[Karafillis and Boyce, 1993] Karafillis, A. P. and Boyce, M. C. (1993). A general anisotropic yield criterion. *J. Mech. Phys. Solids*, 41 :1859–1886.

[Kobayashi et al., 1983] Kobayashi, H., Nakamura, H., and Nakazawa, H. (1983). Evaluation of blunting line and elastic-plastic toughness. In Shih, C. F. and Gudas, J., editors, *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 803*, pages II 420–II 438. American Society for Testing and Material.

[Koplik and Needleman, 1988] Koplik, J. and Needleman, A. (1988). Void growth and coalescence in porous plastic solids. *Int. J. Solids Structures*, 24 :835–853.

[Kumar et al., 1981] Kumar, V., German, M. D., and Shih, C. F. (1981). An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis. In *EPRI Report NP-1931*.

[Ladevèze, 1980] Ladevèze, P. (1980). Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations. Technical report, Rapport interne No. 9, LMT, ENS Cachan.

[Lautridou and Pineau, 1981] Lautridou, J. C. and Pineau, A. (1981). Crack initiation and stable crack growth resistance in a508 steels in relation to inclusion distribution. *Eng. Fract. Mech.*, 15 :55–71.

[Le Roy et al., 1981] Le Roy, G., Embury, J. D., Edward, G., and Ashby, M. F. (1981). A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids. *Acta Metall.*, 29 :1509–1522.

[Lei, 2004] Lei, Y. (2004). J-integral and limit load analysis of semi-elliptical surface cracks in plates under tension. *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*, 81 :21–30.

[Lemaitre, 1985] Lemaitre, J. (1985). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. Engng Mater. Technol.*, 107 :83–89.

[Lemaitre and Chaboche, 1978] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1978). Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal de Mécanique Appliquée*, 2 :317–365.

[Marston, 1979] Marston, T. U. (1979). The EPRI ductile fracture research program. In Larsson, L. H., editor, *Advances in Elastic-Plastic Fracture*, pages 191–235. Applied Science Publishers.

[McCabe, 1989] McCabe, D. E. (1989). A viewpoint on the failure assessment diagram. In Landes, J. D., Saxena, A., and Mekle, J. G., editors, *Nonlinear Fracture Mechanics, ASTM STP 995*, pages 261–279. American Society for Testing and Material.

[McClintock, 1968] McClintock, F. A. (1968). A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *J. Applied Mech.*, pages 363–371.

[McMeeking, 1977] McMeeking, R. M. (1977). Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 25 :357–381.

[McMeeking and Parks, 1979] McMeeking, R. M. and Parks, D. M. (1979). On criteria for J-dominance of crack-tip fields in large-scale yielding. pages 175–194.

[Merkle and Corten, 1974] Merkle, J. G. and Corten, H. T. (1974). A J integral analysis for the compact specimen, considering axial force as well as bending effects. *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Techn*, pages 286–292.

[Miller, 1988] Miller, A. G. (1988). Review of limit loads of structures containing defects. *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*, 32 :197–327.

[Milne, 1982] Milne, I. (1982). Failure assessment diagrams and J estimates : A comparaison for ferritic and austenitic steels. In *CEGB Report RD/L/2208N81.*

[Milne et al., 1986] Milne, I., Ainsworth, R. A., Dowling, A. R., and Stewart, A. T. (1986). Assessment of the integrity of structures containing defects. In *CEGB Report R/H/R6-Rev 3.*

[Mondolfo, 1976] Mondolfo, L. (1976). *Aluminium alloys − Structure and properties.* Butterworths Ed London.

[Morgeneyer et al., 2009] Morgeneyer, T. F., Besson, J., Proudhon, H., Starink, M., and Sinclair, I. (2009). Experimental and numerical analysis of toughness anisotropy in AA2139 Al-alloy sheet. *Acta Materialia*, 57 :3902–3915.

[Mudry, 1983] Mudry, F. (1983). Methodology and applications of local criteria for the prediction of ductile tearing. In Larsson, L. H., editor, *Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, pages 263–303. Fourth ISPRA Conference, Joint Research Center, Ispra, Italy.

[Mudry et al., 1989] Mudry, F., di Rienzo, F., and Pineau, A. (1989). Numerical comparaison of global and local fracture criteria in compact tension and center-crack specimens. In Landes, J. D., Saxena, A., and Mekle, J. G., editors, *Nonlinear Fracture Mechanics, ASTM STP 995*, pages 24–39. American Society for Testing and Material.

[Murakami, 1987] Murakami, Y. (1987). *Stress intensity factors handbook*, volume 2. Pergamon Press.

[Nakagaki et al., 1989] Nakagaki, M., Marschall, C. W., and Brust, F. W. (1989). Elastic-plastic fracture mechanics evaluation of stainless steel tungsten/inert-gas welds. In Landes, J. D., Saxena, A., and Mekle, J. G., editors, *Nonlinear Fracture Mechanics, ASTM STP 995*, pages 214–243. American Society for Testing and Material.

[Nelder and Mead, 1965] Nelder, J. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7 :308–313.

[Newman and Raju, 1981] Newman, J. and Raju, I. S. (1981). An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. *Eng. Fract. Mech.*, 15 :185–192.

[Newman et al., 2003] Newman, J. J., James, M. A., and Zerbst, U. (2003). A review of the CTOA/CTOD fracture criterion. *Eng. Fract. Mech.*, 70 :371–385.

[O'Dowd and Shih, 1991] O'Dowd, N. P. and Shih, C. F. (1991). Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter − i. structure of fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 39 :989–1015.

[O'Dowd and Shih, 1992] O'Dowd, N. P. and Shih, C. F. (1992). Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter − ii. fracture applications. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :939–963.

[Orange, 1975] Orange, T. W. (1975). Fracture testing with surface crack specimen. *Journal of Testing and Evaluation*, 3 :335–342.

[Pan et al., 1983] Pan, J., Saje, M., and Needleman, A. (1983). Localization of deformation in rate sensitive porous plastic solids. *Int. J. Frac.*, 21 :261–278.

[Pardoen and Delannay, 1998] Pardoen, T. and Delannay, F. (1998). On the coalescence of voids in prestrained notched round copper bars. *Fatigue and Fract. Engng Mater. Struct.*, 21 :1459–1472.

[Pardoen and Hutchinson, 2000] Pardoen, T. and Hutchinson, J. W. (2000). Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :2467–2512.

[Paris, 1964] Paris, P. C. (1964). The fracture mechanics approach to fatigue. In *Fatigue - An Interdisciplinary Approach*, page 107. Proc. 10 th Sagamore Army Mat. Res. Conf. Syracuse University Press.

[Paris et al., 1979] Paris, P. C., Tada, H., Zahoor, A., and Ernst, H. (1979). The theory of instability of the tearing mode of elastic-plastic crack growth. In Landes, J. D., Begley, J. A., and Clarke, G. A., editors, *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 668*, pages 5–36. American Society for Testing and Material.

[Pierce and Shannon, 1978] Pierce, W. S. and Shannon, J. L., J. (1978). Surface-crack shape change in bending fatigue using an inexpensive resonant fatiguing apparatus. *Journal of Testing and Evaluation*, 6 :183–188.

[Rice and Tracey, 1969] Rice, J. and Tracey, D. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 17 :201–217.

[Rice, 1968a] Rice, J. R. (1968a). In Liebowitz, H., editor, *fracture Vol 2*, pages 191–311. Academic Press, New York.

[Rice, 1968b] Rice, J. R. (1968b). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Applied Mech.*, 35 :379–386.

[Rice et al., 1973] Rice, J. R., Paris, P. C., and Merkle, J. G. (1973). Further results on J integral analysis and estimates. In *Progress in flaw growth and fracture toughness testing, proceedings of the 1972 national symposium on fracture mechanics, ASTM STP 536*, pages 231–245. American Society for Testing and Material.

[Rice and Rosengren, 1968] Rice, J. R. and Rosengren, G. F. (1968). Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 16 :1–12.

[Rousselier, 1979] Rousselier, G. (1979). Numerical treatment of crack growth problems. In Larsson, L. H., editor, *Advances in Elastic-Plastic Fracture*, pages 165–189. Applied Science Publishers.

[Rousselier, 1983] Rousselier, G. (1983). The EPRI method for ductile fracture analysis. In Larsson, L. H., editor, *Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, pages 373–396. Fourth ISPRA Conference, Joint Research Center, Ispra, Italy.

[Sattari-Far, 1994] Sattari-Far, I. (1994). Finite element analysis of limit loads for surface cracks in plates. *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*, 57 :237–243.

[Sattari-Far and Dillström, 2004] Sattari-Far, I. and Dillström, P. (2004). Local limit load solutions for surface cracks in plates and cylinders using finite element analysis. *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*, 81 :57–66.

[Sharobeam and Landes, 1991] Sharobeam, M. H. and Landes, J. D. (1991). The load separation criterion and methodology in ductile fracture mechanics. *Int. J. Frac.*, 47 :81–104.

[Sharobeam and Landes, 1993] Sharobeam, M. H. and Landes, J. D. (1993). The load separation and η_{pl} development in precracked specimen test records. *Int. J. Frac.*, 59 :213–226.

[Shen et al., 2009] Shen, G., Gianetto, J. A., and Tyson, W. R. (2009). Measurement of J-R curves using single specimen technique on clamped SE(T) specimens. In *CANMET Materials Technology Laboratory*. Nineteenth international offshore and polar engineering conference, Osaka, Japan.

[Srivatsan et al., 2008] Srivatsan, T. S., Vasudevan, S., and Lederich, R. J. (2008). The quasi-static deformation and final fracture behavior of aluminum alloy 2219. *Int. J. Frac.*, 497 :270–277.

[Talamantes-Silva et al., 2008] Talamantes-Silva, M. A., Rodriguez, A., Talamantes-Silva, J., Valtierra, S., and Colas, R. (2008). Caracterisation of an Al-Cu cast alloy. *Material Characterization*, 59 :1434–1439.

[Thomason, 1985a] Thomason, P. F. (1985a). A three dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids. *Acta Metall.*, 33(6) :1087–1095.

[Thomason, 1985b] Thomason, P. F. (1985b). Three dimensional models for the plastic limit–loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids. *Acta Metall.*, 33(6) :1079–1085.

[Tvergaard and Needleman, 1984] Tvergaard, V. and Needleman, A. (1984). Analysis of the cup–cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall.*, 32 :157–169.

[Willoughby and Davey, 1989] Willoughby, A. A. and Davey, T. G. (1989). Plastic collapse in part-wall flaws in plates. In Wei, R. P. and Gangloff, R. P., editors, *Fracture Mechanics, ASTM STP 1020*, pages 390–409. American Society for Testing and Material.

[Windisch et al., 2009] Windisch, M., Sun, D.-Z., Memhard, D., and Siegele, D. (2009). Defect tolerance assessment of ARIANE 5 structures on the basis of damage mechanics material modellig. *Eng. Fract. Mech.*, 76 :59–73.

[Worswick and Pick, 1990] Worswick, M. and Pick, R. (1990). Void growth and constitutive softening in a periodically voided solid. *J. Mech. Phys. Solids*, 38 :601–625.

[Xue, 2007] Xue, L. (2007). Damage accumulation and fracture initiation in uncracked ductile solids subject to triaxial loading. *Int. J. Solids Structures*, 44 :5163–5181.

[Xue and Wierzbicki, 2008] Xue, L. and Wierzbicki, T. (2008). Ductile fracture initiation and propagation modeling using damage plasticity theory. *Eng. Fract. Mech.*, 75(1) :3276–3293.

[Xue and Wierzbicki, 2009] Xue, L. and Wierzbicki, T. (2009). Numerical simulation of fracture mode transition in ductile plates. *Int. J. Solids Structures*, 46 :1423–1435.

[Zhang and Niemi, 1994] Zhang, Z. L. and Niemi, E. (1994). Studies on the ductility predictions by different local failure criteria. *Eng. Fract. Mech.*, 48 :529–540.

[Zhang et al., 1996] Zhang, Z. L., Thaulow, C., and Ødegård, J. (1996). A complete Gurson model approach for ductile fracture. *Eng. Fract. Mech.*, 67 :461–487.

[Zhou and Tits, 1996] Zhou, J. L. and Tits, A. L. (1996). An sqp algorithm for finely discretized continuous minimax problems and other minimax problems with many objective functions. *SIAM Journal on Optimization*, 6(2) :461–487.

Annexe A

DONNEES GEOMETRIQUES DES EPROUVETTES CT10 (série b)

Eprouvettes sans rainures latérales	a_{notch} en mm	$(a_{crack})_{1820}$ en mm	$(a_{crack})_{mean}$ en mm	$(a_0)_{1820}$ en mm	$(a_0)_{mean}$ en mm	B en mm
L-T n° 1b	8,5	1,56	1,57	10,06	10,07	9,37
L-T n° 7b	8,5	1,53	1,56	10,03	10,06	9,22
L-T n° 8b	8,5	1,65	1,66	10,15	10,16	9,48
L-T n° 9b	8,5	1,84	1,90	10,34	10,40	9,11
L-T n° 10b	8,5	1,63	1,69	10,13	10,19	9,11
T-L n° 1b	8,5	–	1,71	–	10,21	9,89
T-L n° 2b	8,5	–	1,83	–	10,33	9,90
T-L n° 3b	8,5	–	1,75	–	10,25	9,93
T-L n° 4b	8,5	–	1,82	–	10,32	9,87
T-L n° 5b	8,5	–	1,80	–	10,30	9,92
T-S n° 1b	8,5	1,88	1,94	10,38	10,44	8,91
T-S n° 2b	8,5	1,73	1,75	10,23	10,25	9,15
T-S n° 3b	8,5	1,94	1,97	10,44	10,47	9,25
T-S n° 4b	8,5	1,78	1,83	10,28	10,33	9,44
T-S n° 5b	8,5	1,95	2,01	10,45	10,51	9,57
T-S n° 6b	8,5	1,67	1,66	10,17	10,16	9,63
T-S n° 7b	8,5	1,79	1,88	10,29	10,38	9,48
T-S n° 8b	8,5	1,80	1.88	10,30	10,38	9,35
T-S n° 9b	8,5	1,71	1.82	10,21	10,32	9,48
T-S n° 10b	8,5	1,62	1.69	10,12	10,19	9,45

TABLE A.1 – Caractéristiques géométriques des éprouvettes CT10 sans rainures latérales

Eprouvettes avec rainures latérales	a_{notch} en mm	$(a_{crack})_{1820}$ en mm	$(a_{crack})_{mean}$ en mm	$(a_0)_{1820}$ en mm	$(a_0)_{mean}$ en mm	B_N en mm	B en mm
L-T n° 2b	8,5	1,62	1,63	10,12	10,13	7,51	9,44
L-T n° 3b	8,5	1,63	1,63	10,13	10,13	7,75	9,50
L-T n° 4b	8,5	1,86	1,87	10,36	10,37	7,69	9,54
L-T n° 5b	8,5	1,70	1,72	10,20	10,22	7,58	9,78
L-T n° 6b	8,5	1,64	1,64	10,14	10,14	7,47	9,76
T-L n° 6b	8,5	1,72	1,77	10,22	10,27	7,86	9,99
T-L n° 7b	8,5	1,78	1,89	10,28	10,39	7,79	9,95
T-L n° 8b	8,5	1,74	1,80	10,24	10,30	7,89	9,95
T-L n° 9b	8,5	1,73	1,72	10,23	10,22	7,85	9,94
T-L n° 10b	8,5	1,83	1,83	10,33	10,33	7,68	9,98

TABLE A.2 – Caractéristiques géométriques des éprouvettes CT10 avec rainures latérales

Eprouvettes sans rainures latérales	a_{notch} en mm	$(\Delta a)_{mean}$ en mm	$(a_{end})_{mean}$ en mm	$(\Delta a)_{aire}$ en mm	$(a_{end})_{aire}$ en mm
L-T n° 1b	8,5	3,47	11,97	3,73	12,23
L-T n° 7b	8,5	1,97	10,47	2,01	10,51
L-T n° 8b	8,5	2,70	11,20	2,85	11,35
L-T n° 9b	8,5	3,62	12,12	3,76	12,26
L-T n° 10b	8,5	3,24	11,74	3,4	11,90
T-L n° 1b	8,5	2,56	11,06	2,61	11,11
T-L n° 2b	8,5	3,53	12,03	3,68	12,18
T-L n° 3b	8,5	4,16	12,66	4,32	12,82
T-L n° 4b	8,5	4,77	13,27	5,05	13.55
T-L n° 5b	8,5	5,24	13,74	5,58	14.08
T-S n° 2b	8,5	5,70	14,20	5,83	14,33
T-S n° 3b	8,5	3,07	11,57	3,30	11,80
T-S n° 4b	8,5	3,14	11,64	3,30	11,80
T-S n° 5b	8,5	4,38	12,88	4,69	13,19
T-S n° 6b	8,5	4,08	12,58	4,22	12,72
T-S n° 7b	8,5	3,15	11,65	3,30	11,80
T-S n° 8b	8,5	2,33	10,83	2,43	10,93
T-S n° 9b	8,5	2,38	10,88	2,43	10,93
T-S n° 10b	8,5	2,65	11,15	2,73	11,23

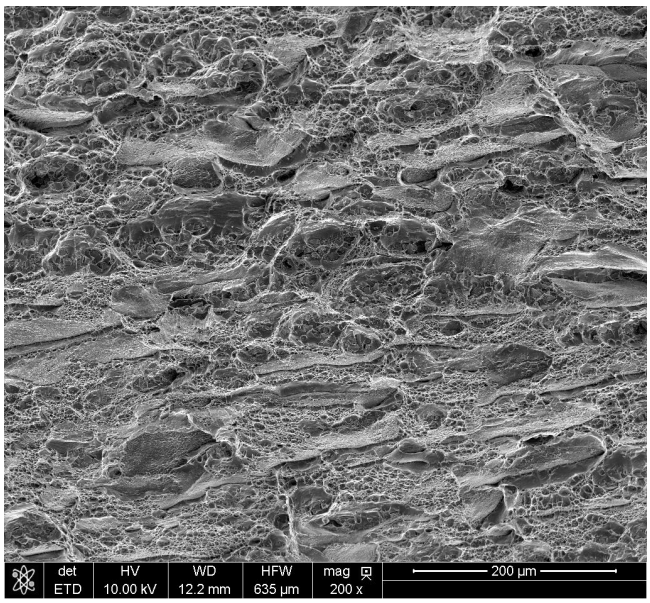
Table A.3 – Mesures de Δa pour les éprouvettes CT10 sans rainures latérales

Eprouvettes avec rainures latérales	a_{notch} en mm	$(\Delta a)_{1820}$ en mm	$(\Delta a)_{mean}$ en mm	$(a_{end})_{1820}$ en mm	$(a_{end})_{mean}$ en mm
L-T n° 2b	8,5	4,26	4,60	12,76	13,10
L-T n° 3b	8,5	3,35	3,58	11,85	12,08
L-T n° 4b	8,5	2,03	2,28	10,53	10,78
L-T n° 5b	8,5	2,20	2,64	10,70	11,14
L-T n° 6b	8,5	2,99	3,49	11,49	11,99
T-L n° 6b	8,5	2,80	2,99	11,30	11,49
T-L n° 7b	8,5	3,98	4,13	12,48	12,63
T-L n° 8b	8,5	5,03	4,92	13,53	13,42
T-L n° 9b	8,5	4,40	4,57	12,90	13,07
T-L n° 10b	8,5	4,04	3,93	12,54	12,43

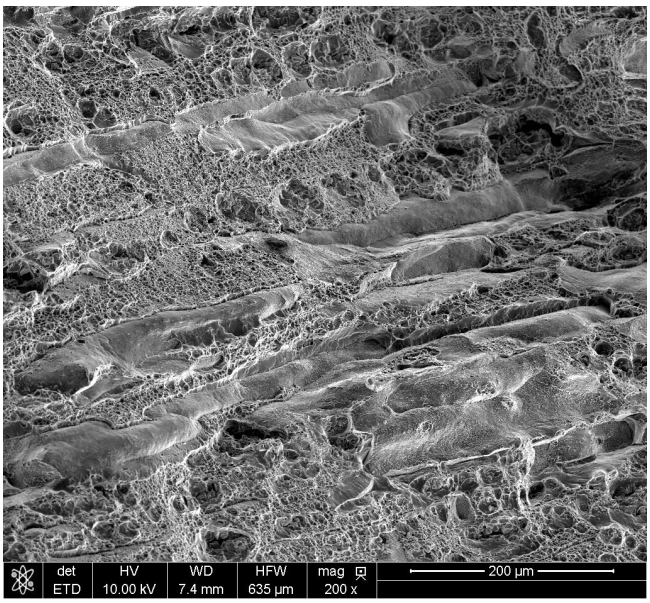
Table A.4 – Mesures de Δa pour les éprouvettes CT10 avec rainures latérales

Annexe B

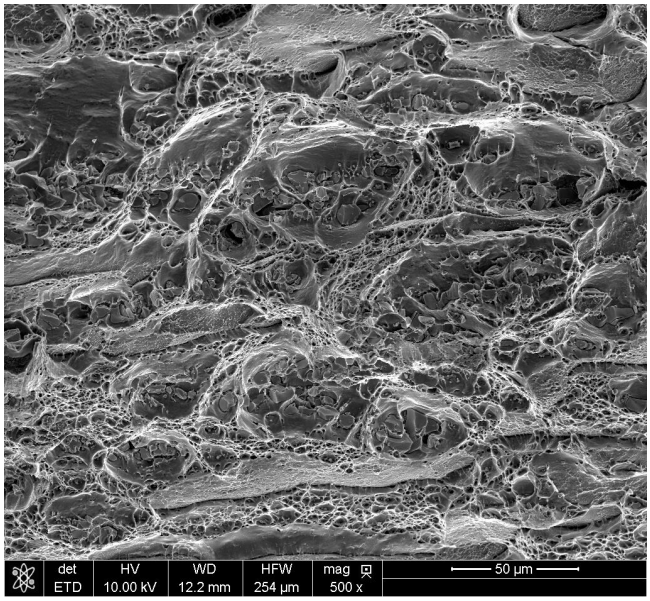
FRACTOGRAPHIE DES EPROUVETTES *AE* SELON LE SENS *D*



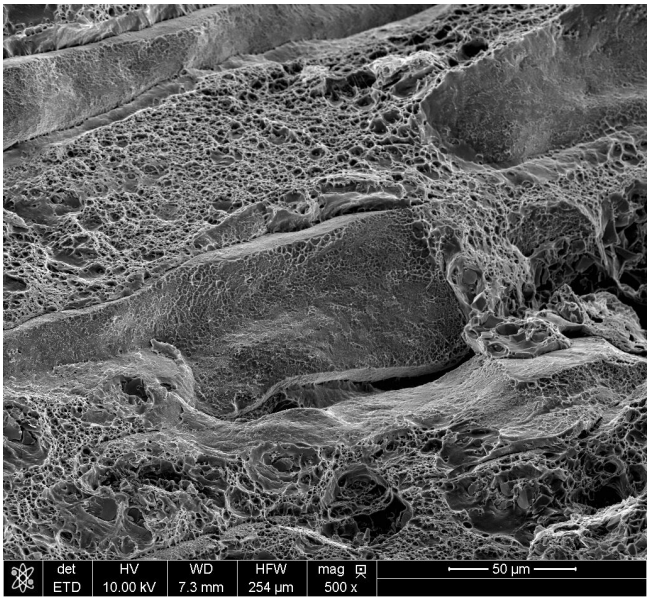
AE_2 sens D (200x)



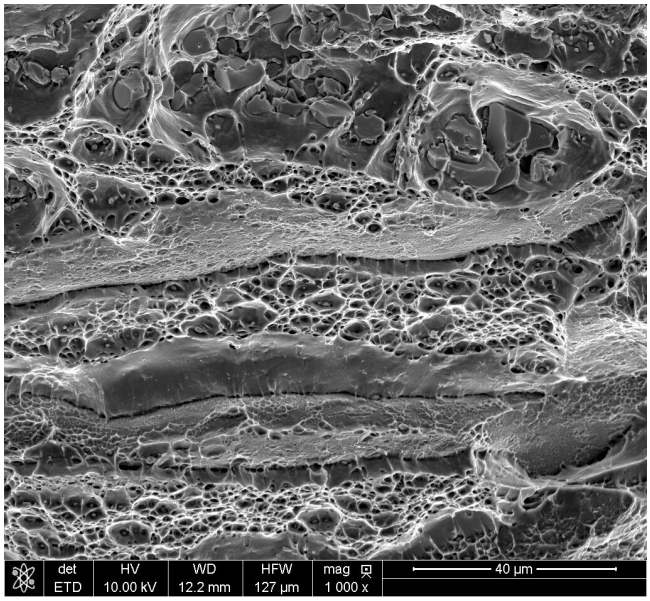
AE_4 sens D (200x)



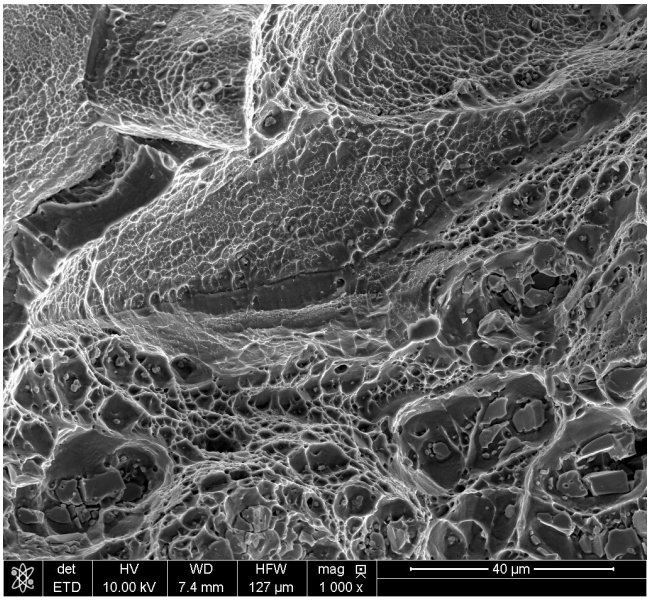
AE_2 sens D (500x)



AE_4 sens D (500x)



AE_2 sens D (1000x)

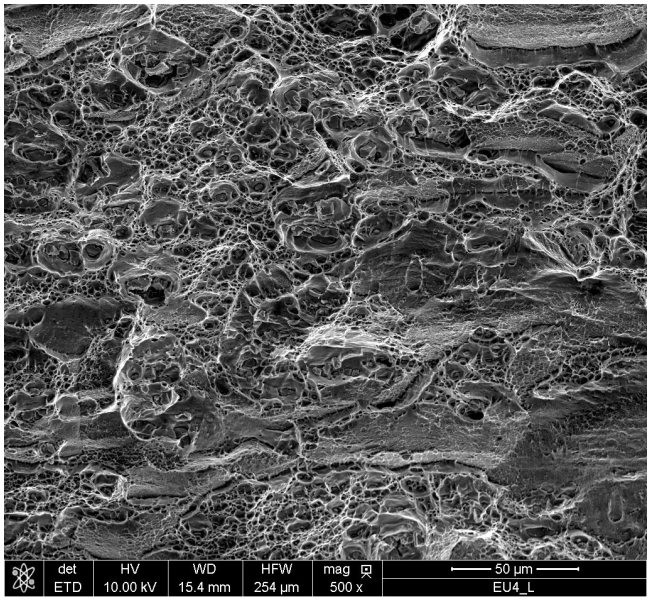


AE_4 sens D (1000x)

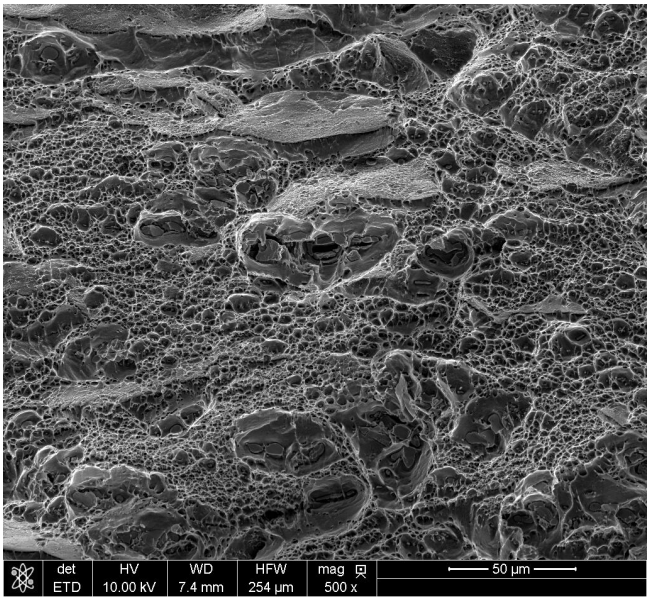
FIGURE B.1 – Observation au MEB des faciès de rupture des éprouvettes *AE* pour le sens *D*

Annexe C

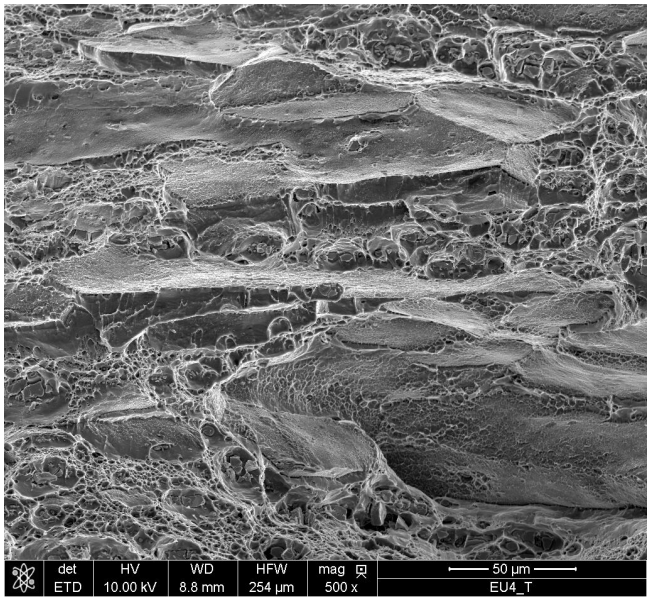
FRACTOGRAPHIES DES EPROUVETTES EU_4 ET AE_4



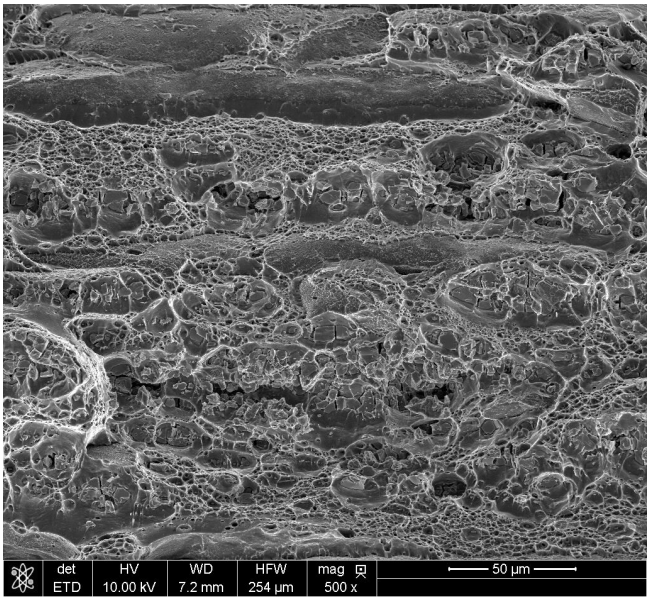
EU_4 sens L (500x)



AE_4 sens L (500x)



EU_4 sens T (500x)

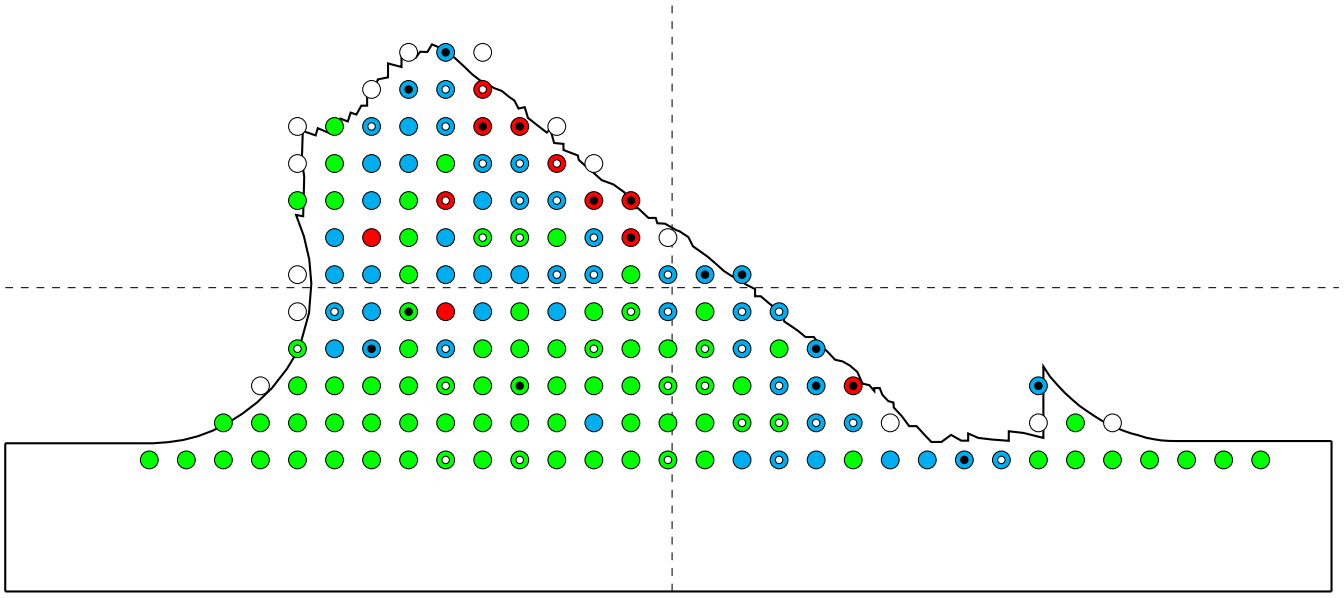


AE_4 sens T (500x)

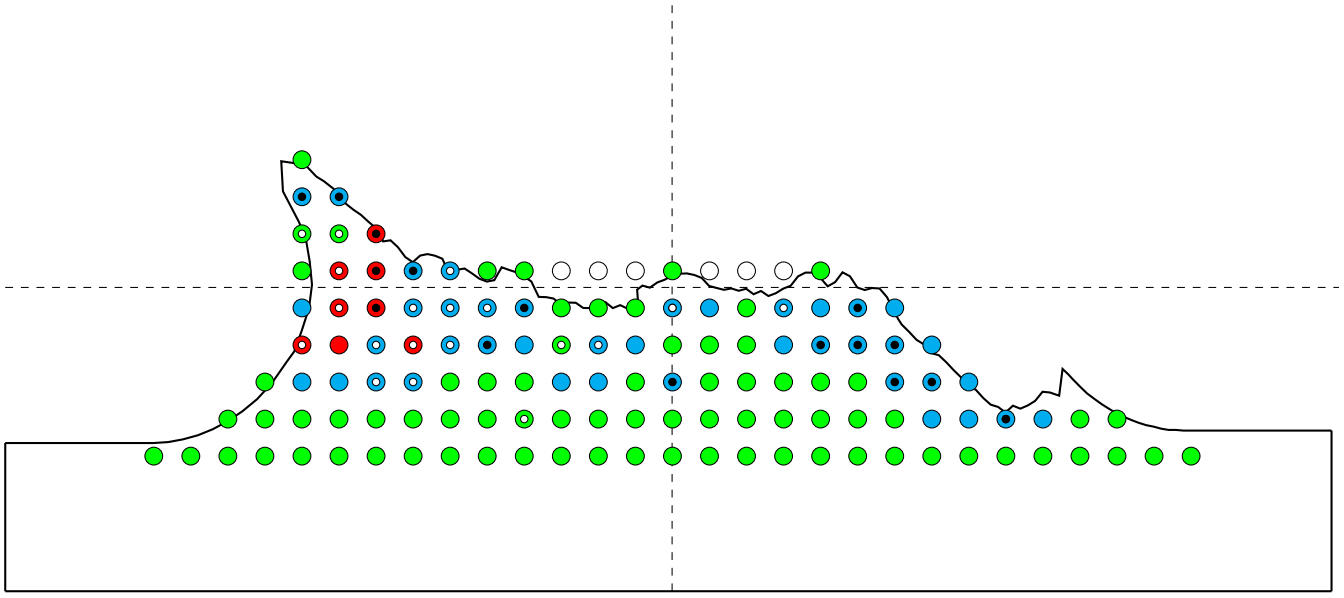
FIGURE C.1 – Comparaison de la taille des cupules entre les éprouvettes EU_4 et AE_4

Annexe D

CARTOGRAPHIE DE LA POROSITE POUR LES EPROUVETTES *AE*

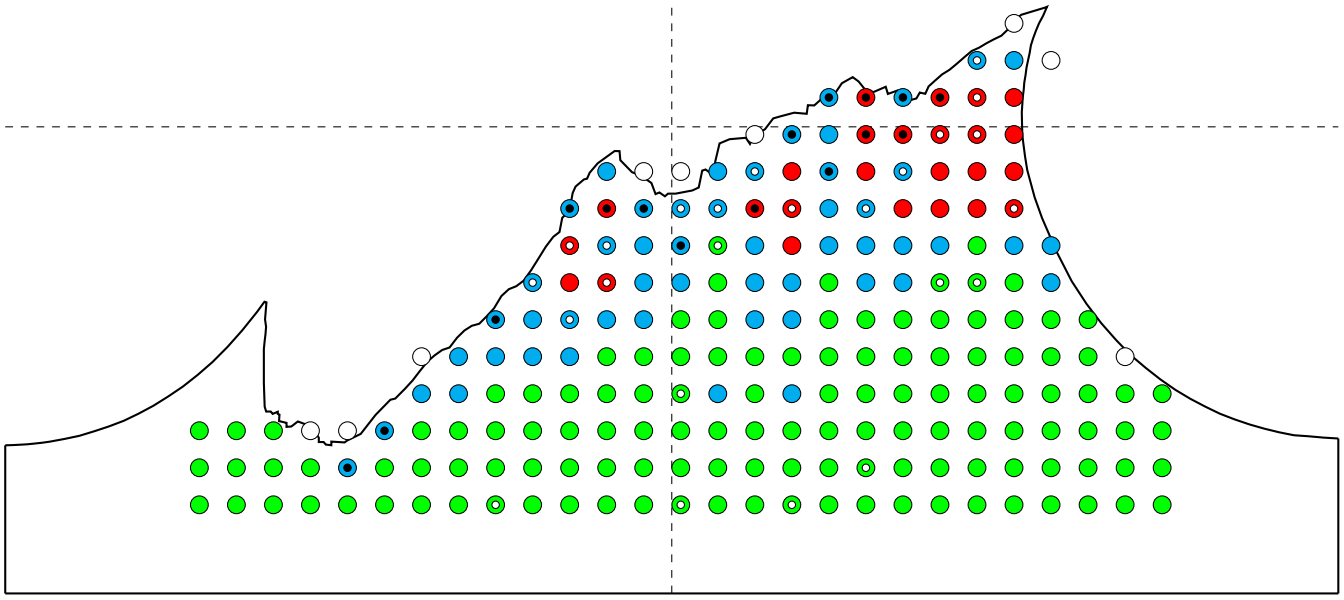


AE_2 sens L

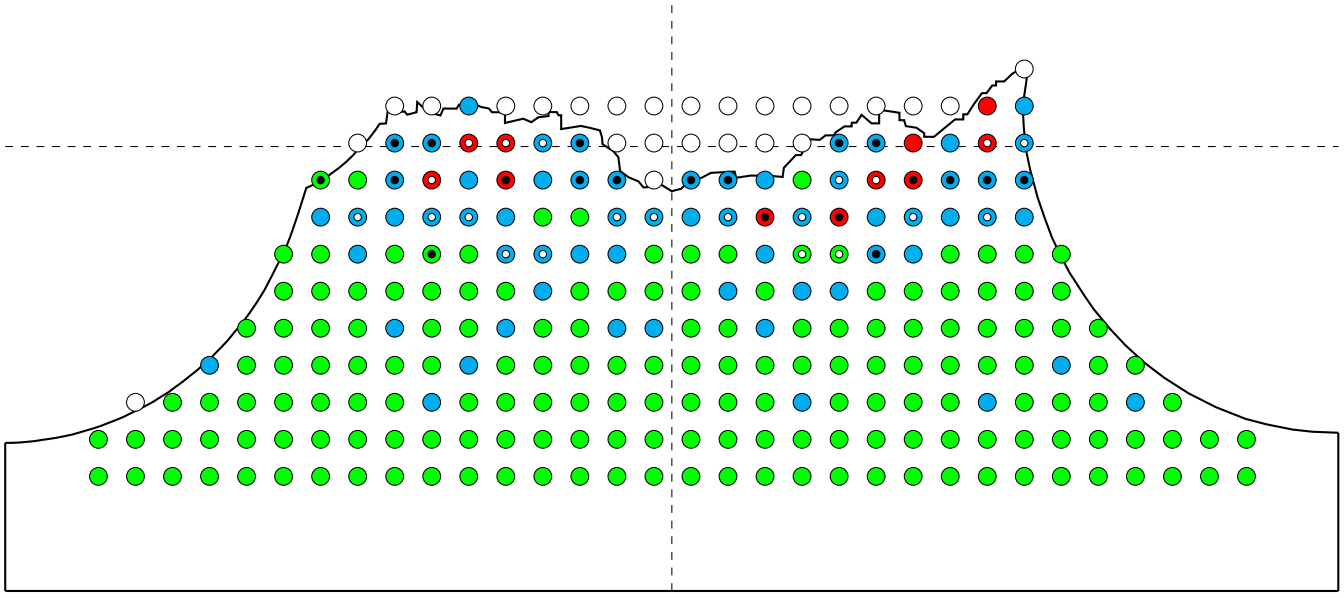


AE_2 sens T

FIGURE D.1 – Cartographie de la porosité pour les éprouvettes AE_2



AE_2 sens L

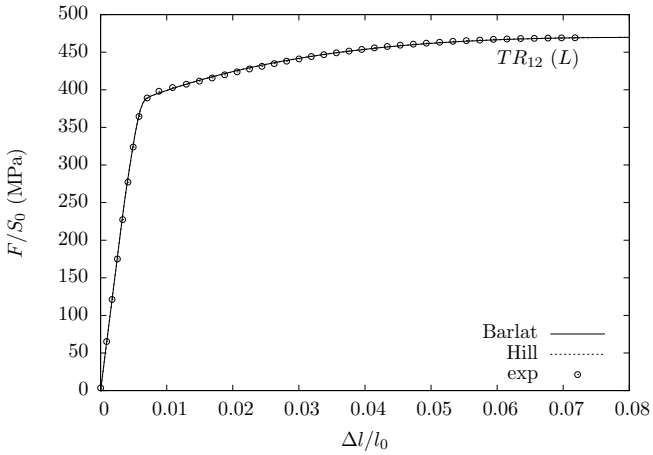


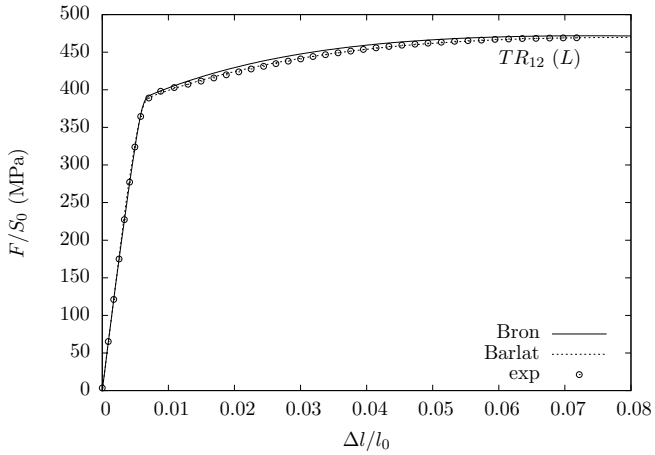
AE_2 sens T

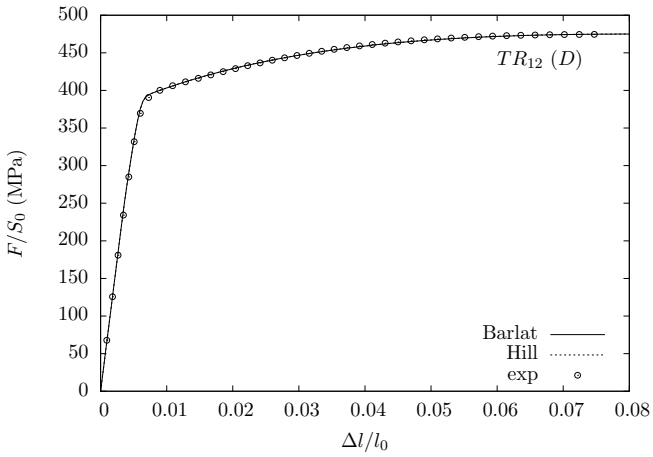
FIGURE D.2 – Cartographie de la porosité pour les éprouvettes AE_4

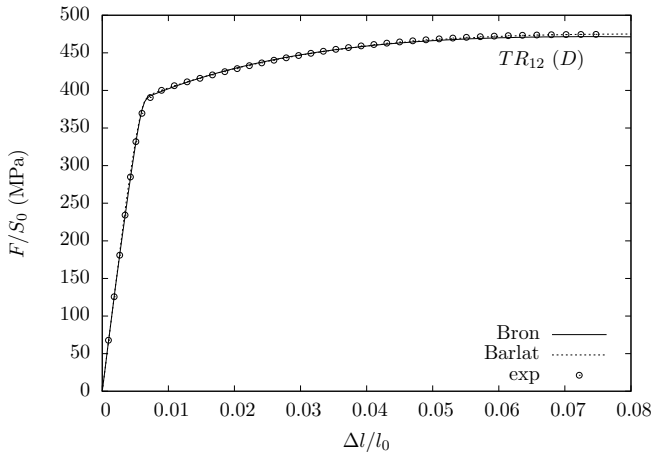
Annexe E

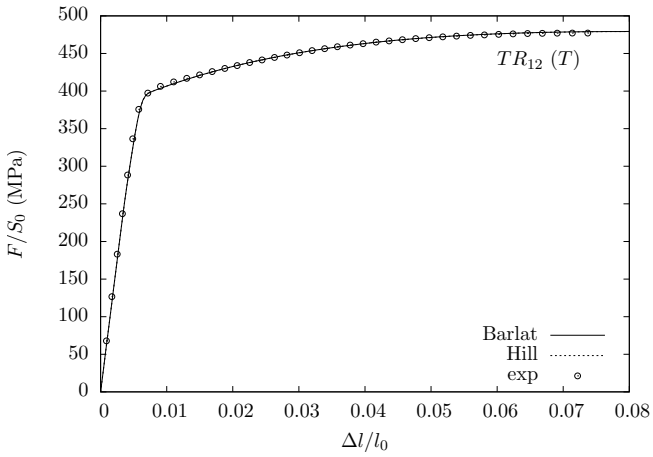
OPTIMISATION DES PARAMETRES DES CRITERES DE PLASTICITE

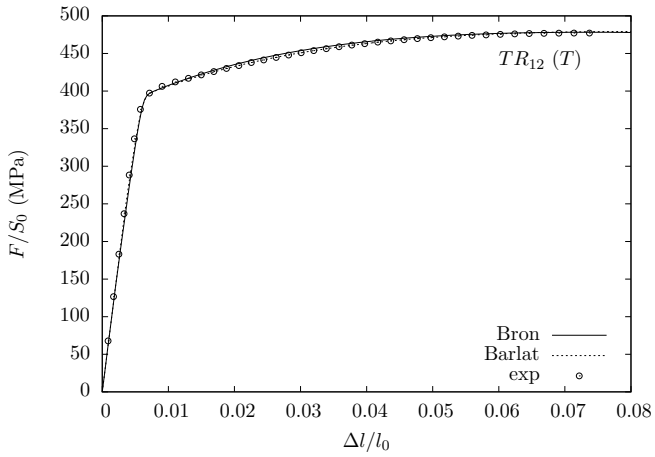

TR_{12} (L)
Barlat
Hill
exp
F/S_0 (MPa)
$\Delta l/l_0$

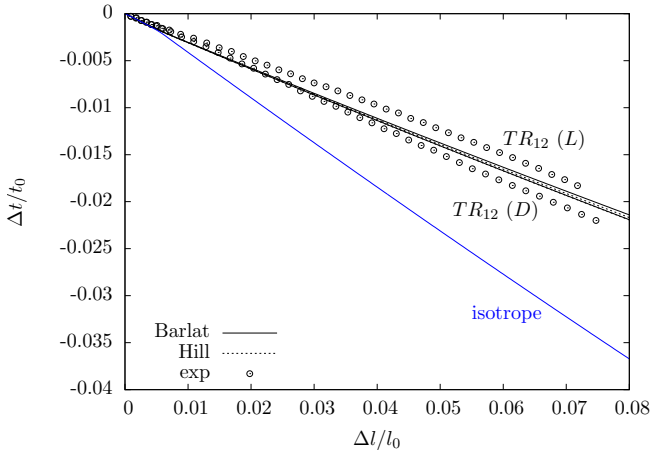

TR_{12} (L)
Bron
Barlat
exp
F/S_0 (MPa)
$\Delta l/l_0$

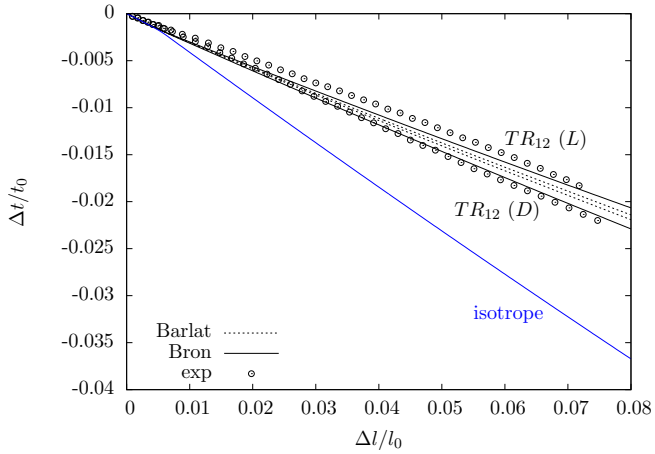

TR_{12} (D)
Barlat
Hill
exp
F/S_0 (MPa)
$\Delta l/l_0$

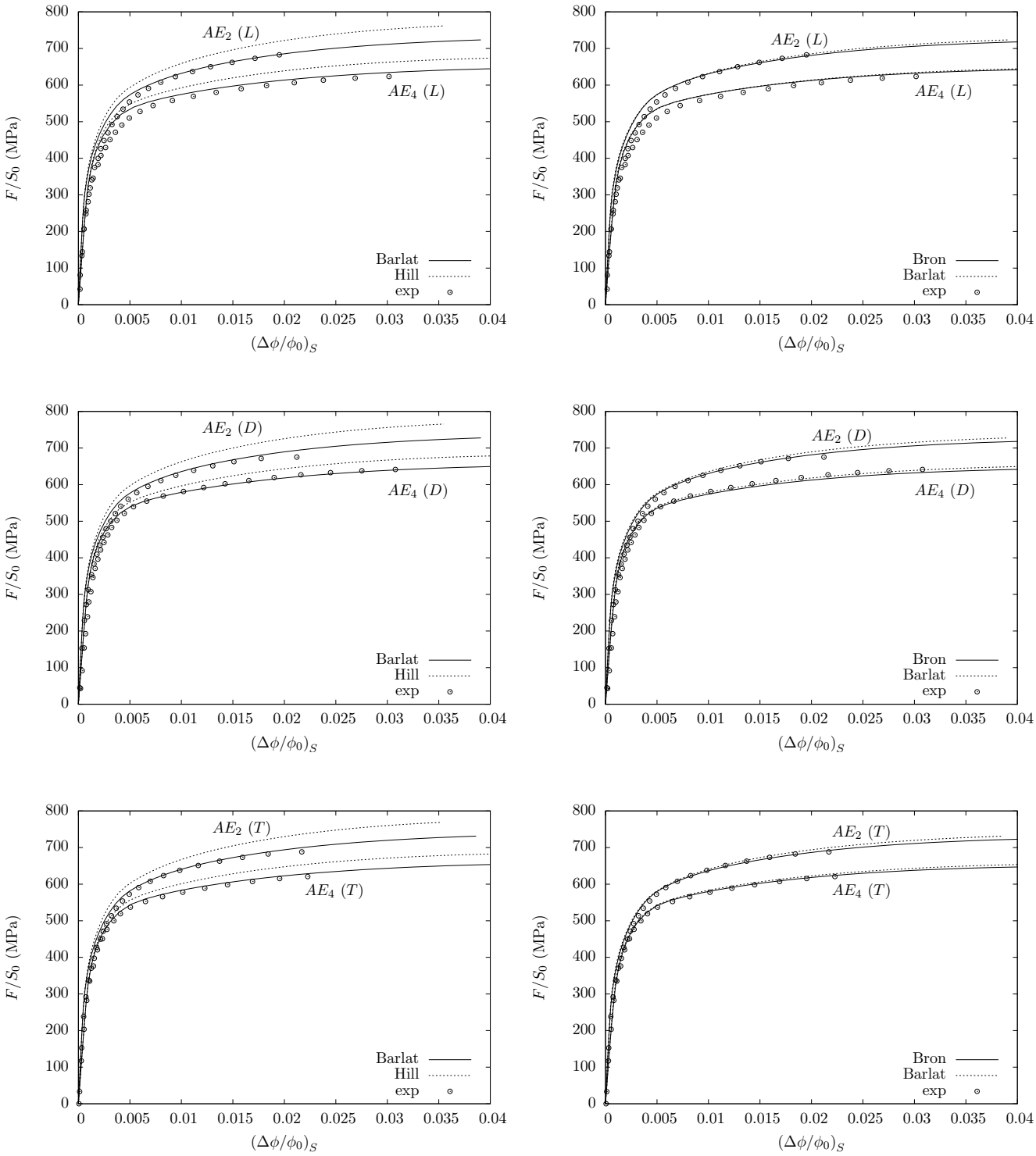

TR_{12} (D)
Bron
Barlat
exp
F/S_0 (MPa)
$\Delta l/l_0$

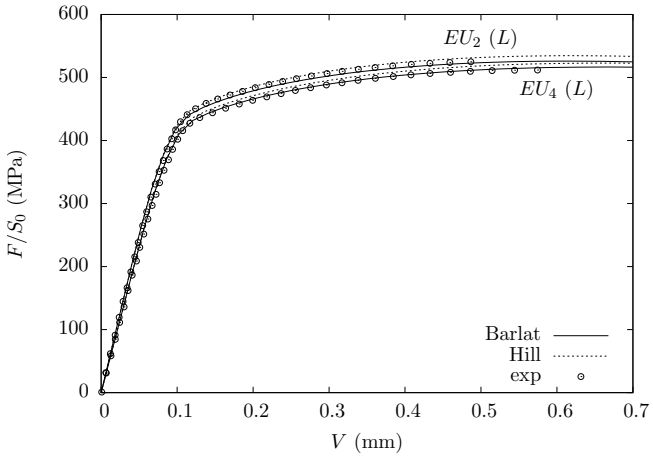

TR_{12} (T)
Barlat
Hill
exp
F/S_0 (MPa)
$\Delta l/l_0$

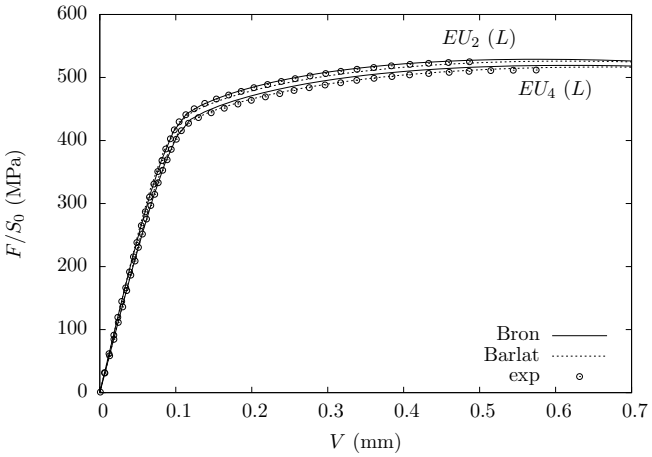

TR_{12} (T)
Bron
Barlat
exp
F/S_0 (MPa)
$\Delta l/l_0$

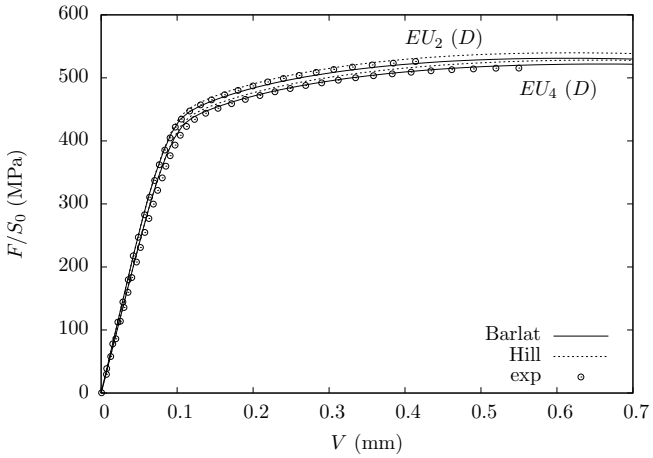

TR_{12} (L)
TR_{12} (D)
isotrope
Barlat
Hill
exp
$\Delta t/t_0$
$\Delta l/l_0$

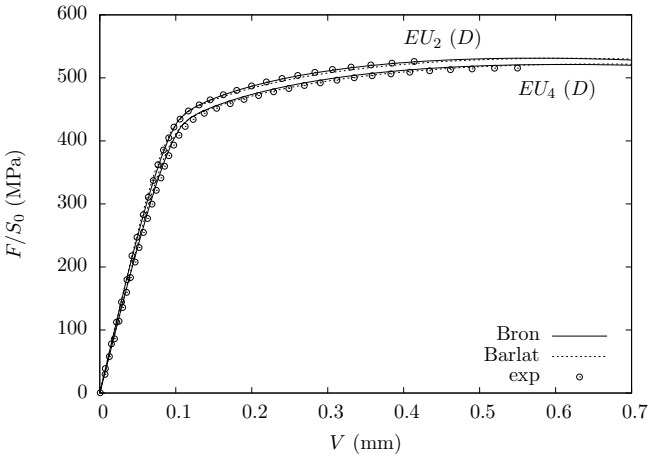

TR_{12} (L)
TR_{12} (D)
isotrope
Barlat
Bron
exp
$\Delta t/t_0$
$\Delta l/l_0$

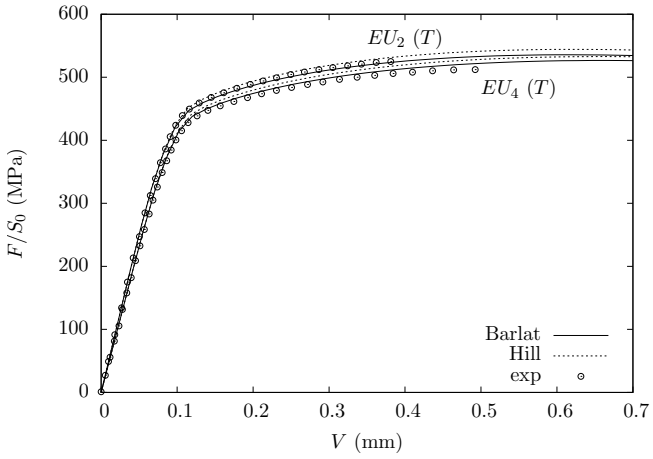

AE_2 (L)
AE_4 (L)
AE_2 (D)
AE_4 (D)
AE_2 (T)
AE_4 (T)
Barlat
Hill
Bron
exp
F/S_0 (MPa)
$(\Delta\phi/\phi_0)_S$
0
100
200
300
400
500
600
700
800
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
0.035
0.04

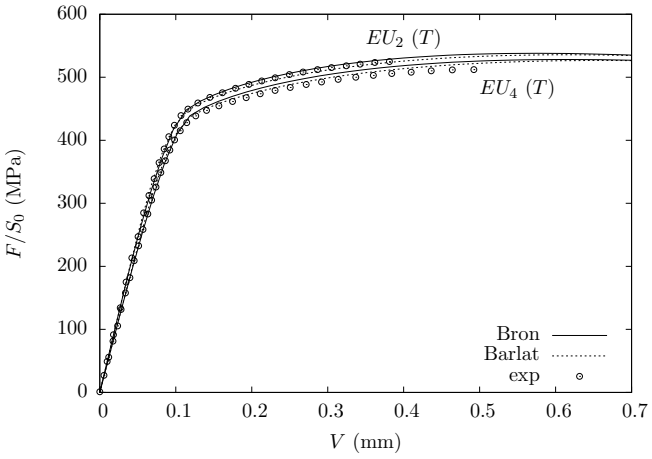

EU_2 (L)
EU_4 (L)
Barlat
Hill
exp
F/S_0 (MPa)
V (mm)


EU_2 (L)
EU_4 (L)
Bron
Barlat
exp
F/S_0 (MPa)
V (mm)


EU_2 (D)
EU_4 (D)
Barlat
Hill
exp
F/S_0 (MPa)
V (mm)

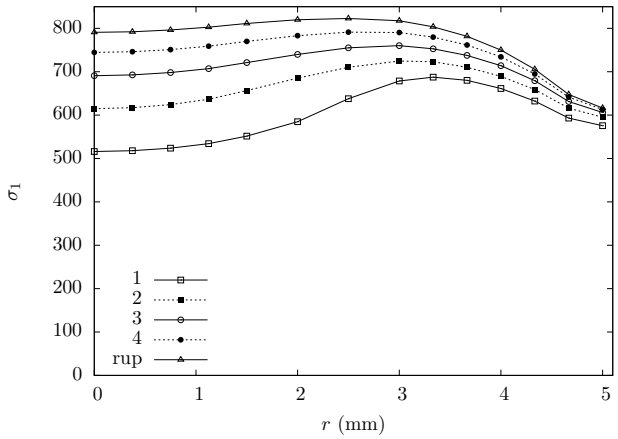

EU_2 (D)
EU_4 (D)
Bron
Barlat
exp
F/S_0 (MPa)
V (mm)


EU_2 (T)
EU_4 (T)
Barlat
Hill
exp
F/S_0 (MPa)
V (mm)

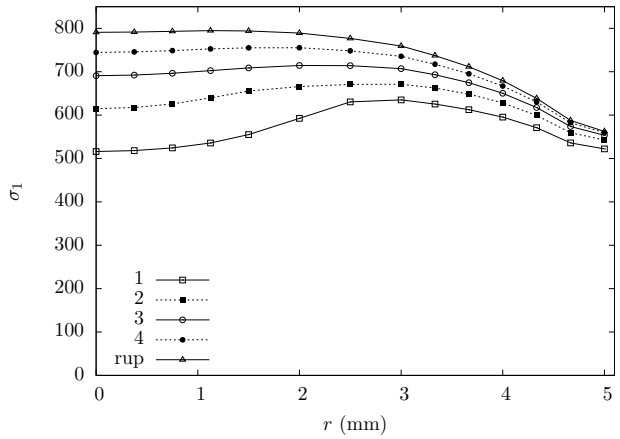

EU_2 (T)
EU_4 (T)
Bron
Barlat
exp
F/S_0 (MPa)
V (mm)

Annexe F

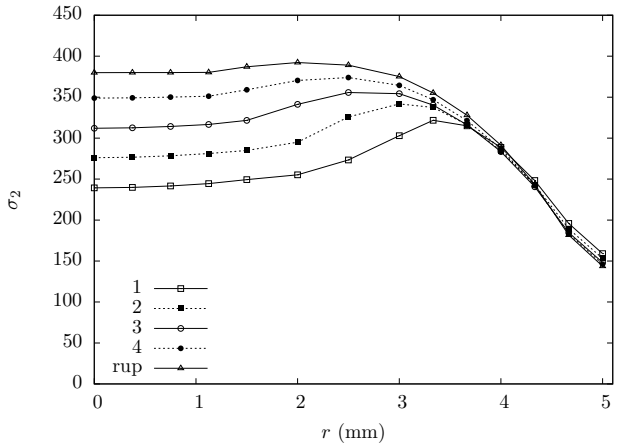
CONTRAINTES PRINCIPALES POUR LES EPROUVETTES AE et EU



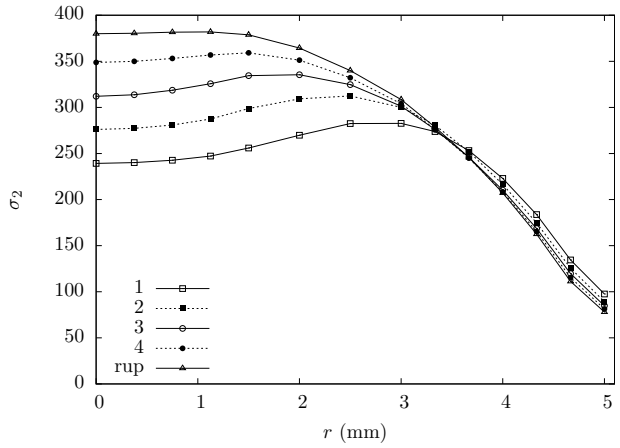
Eprouvette AE_2 − axe T



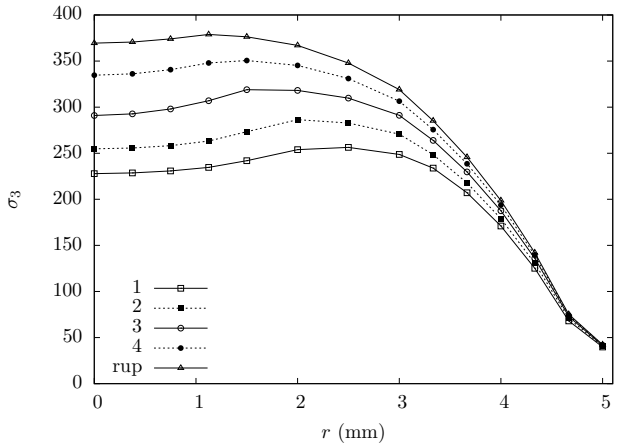
Eprouvette AE_2 − axe S



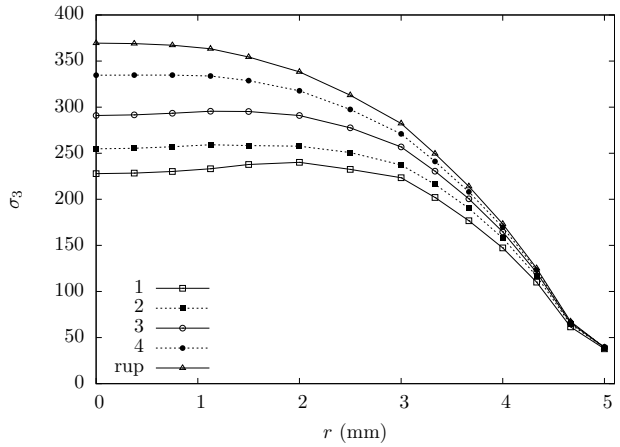
Eprouvette AE_2 − axe T



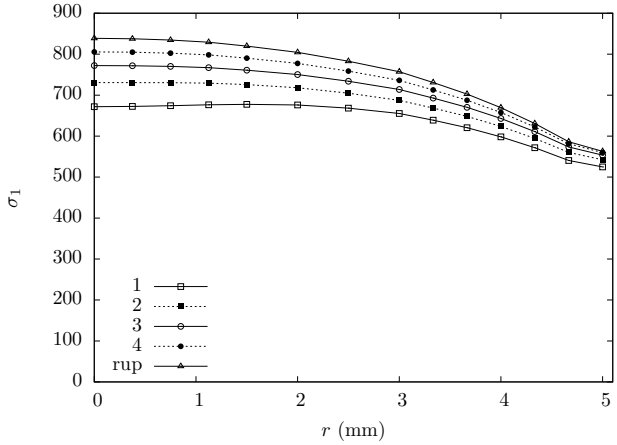
Eprouvette AE_2 − axe S



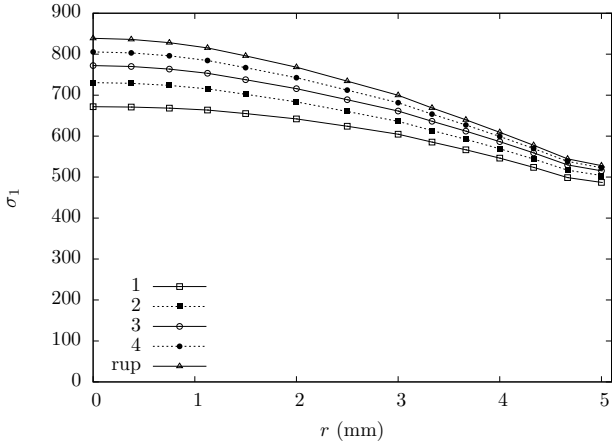
Eprouvette AE_2 − axe T



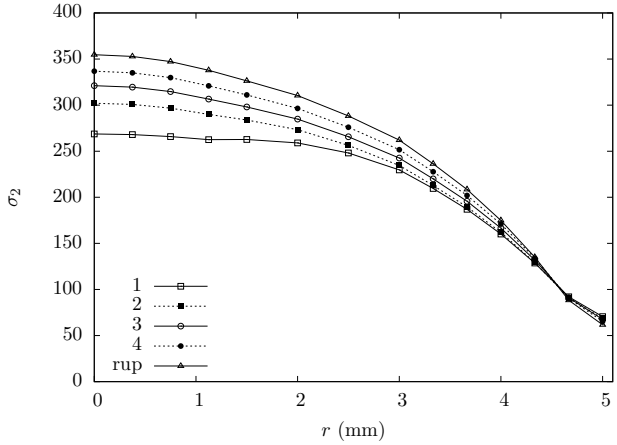
Eprouvette AE_2 − axe S



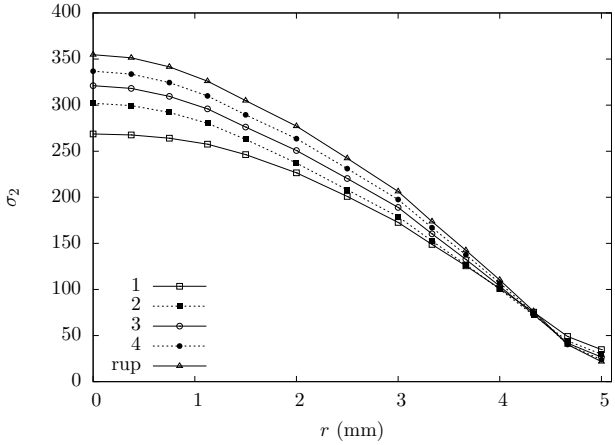
Eprouvette AE_4 − axe T



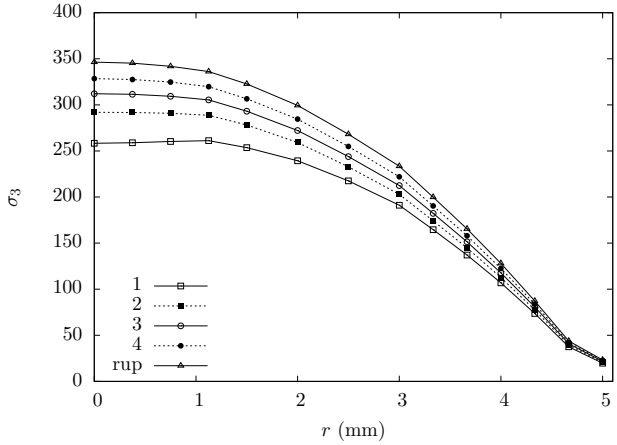
Eprouvette AE_4 − axe S



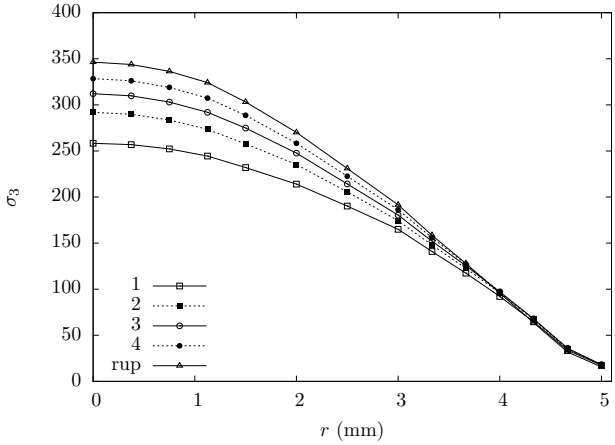
Eprouvette AE_4 − axe T



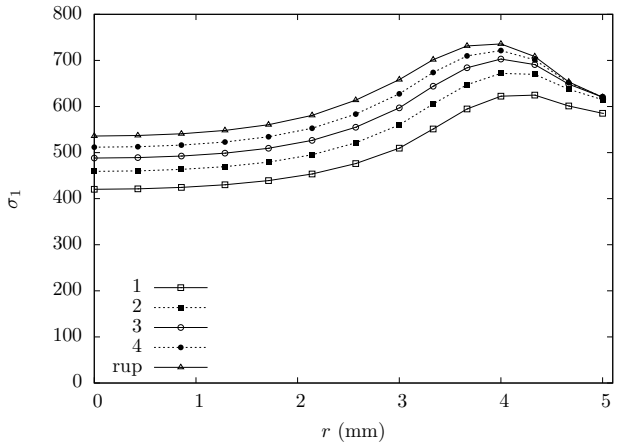
Eprouvette AE_4 − axe S



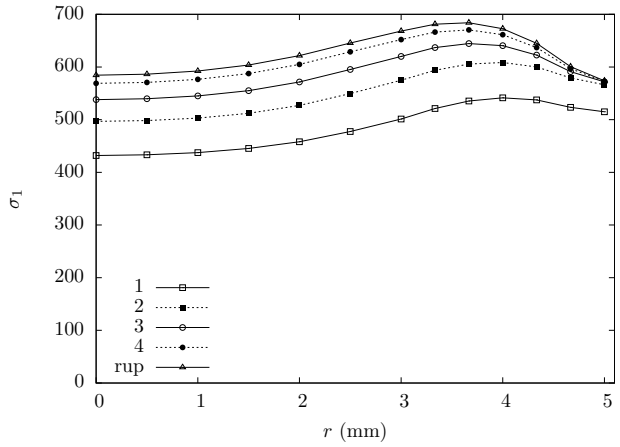
Eprouvette AE_4 − axe T



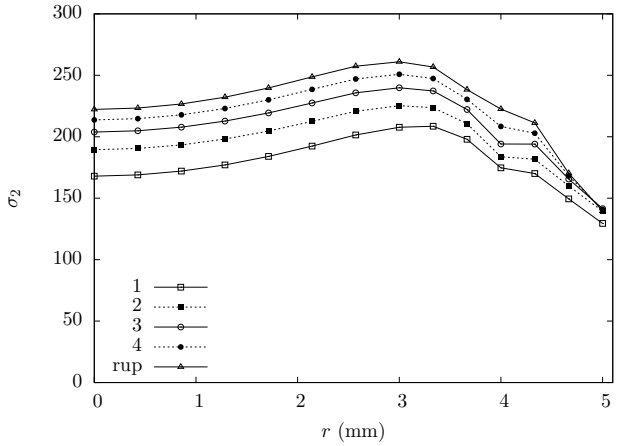
Eprouvette AE_4 − axe S



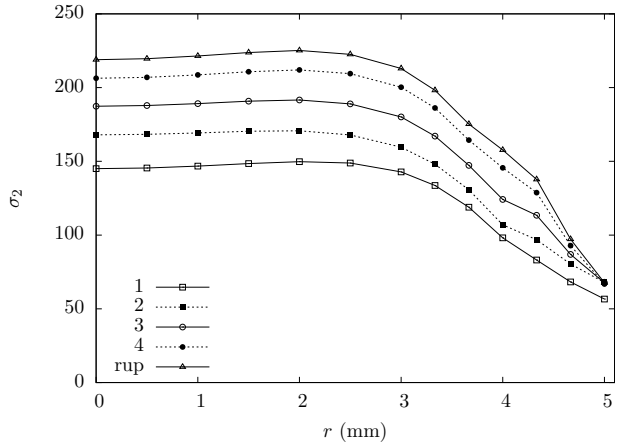
Eprouvette EU_2 − axe T



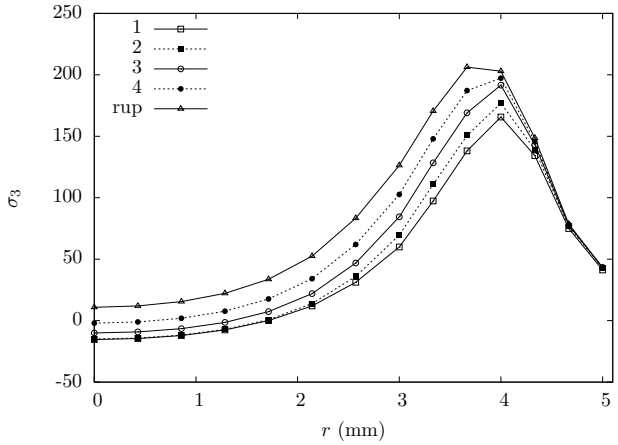
Eprouvette EU_4 − axe T



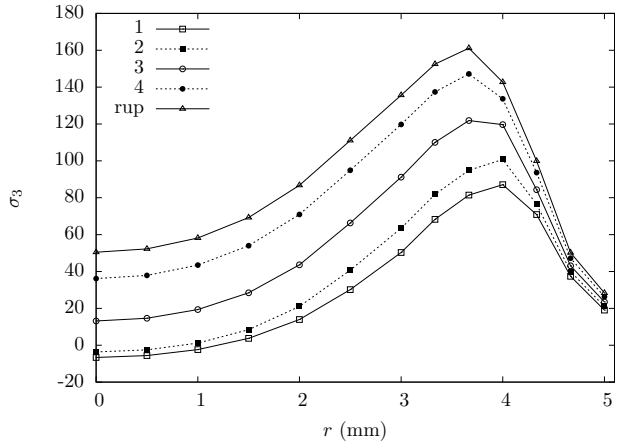
Eprouvette EU_2 − axe T



Eprouvette EU_4 − axe T



Eprouvette EU_2 − axe T



Eprouvette EU_4 − axe T

Mécanique de la rupture et endommagement d'un alliage d'aluminium 2219 T87 pour application aérospatiale

Résumé :

L'objectif de ce travail est la mise en œuvre de la mécanique de la rupture et d'un modèle d'endommagement afin de vérifier l'intégrité du réservoir cryotechnique d'ARIANE 5 en présence de défauts. Ces derniers sont généralement assimilés à des fissures surfaciques semi-elliptiques. L'approche globale basée sur l'analyse FAD fournit une prédiction trop conservative lorsque cette méthode utilise le facteur d'intensité K et la ténacité K_{Ic}. Ce conservatisme peut toutefois être partiellement levé à condition d'introduire la notion d'intégrale J et d'utiliser une ténacité dérivée de la courbe $J_R - \Delta a$ afin d'autoriser une légère avancée de la fissure dans le cas d'un matériau ductile. Cette courbe $J_R - \Delta a$ s'obtient à partir d'essais sur des éprouvettes fissurées de différentes géométries (CT, SENT et SCT). L'approche locale de la rupture constitue cependant la seule alternative possible afin de statuer sur l'acceptabilité d'un défaut suffisamment important pour générer une plasticité étendue. Cette approche nécessite alors de décrire précisément les champs de contrainte et déformation en pointe de fissure. Par conséquent il est nécessaire de tenir compte du caractère anisotrope de la plasticité, lié au procédé de laminage, lors de la modélisation du comportement élasto-plastique de l'alliage d'aluminium 2219 T87. Dans cette étude un critère phénoménologique est utilisé pour modéliser la plasticité dont l'anisotropie est décrite par différents coefficients. L'optimisation de ces paramètres repose sur la comparaison entre les résultats issus de simulations numériques et ceux obtenus par des essais sur des éprouvettes lisses et entaillées. L'approche local de la rupture repose également sur la compréhension des micromécanismes de rupture. L'alliage d'aluminium 2219 T87 étudié dans le cadre de cette thèse présente une rupture ductile dont la phase de germination s'effectue sur les précipités Al_2Cu et constitue le mécanisme prépondérant de la rupture. L'endommagement est modélisé par le modèle de Gurson modifié par Needleman et Tvergaard (GTN). L'anisotopie de rupture est simulée par deux lois de germination différentes selon le sens de laminage et le sens transverse.

Mots clés : alliage d'aluminium 2219 T87, mécanique de la rupture, « keycurve », intégrale J, analyse FAD, rupture anisotrope, modèle d'endommagement GTN, germination anisotrope

Fracture mechanics and damage of 2219 T87 aluminum alloy for aerospace application

Abstract :

The purpose of this work is to use fracture mechanics and damage model to assess the structural integrity of the ARIANE 5 tank containing defects. These flaws are usually assumed to be semi-elliptical surface cracks. This situation can be analysed using the FAD (Failure Assessment Diagram) approach. This method is based on the stress intensity factor K and a material fracture toughness (K_{mat}) which can be the plane strain fracture toughness (K_{IC}) for a conservative prediction. A more realistic prediction is achieved by employing the integral J and a material parameter derived from crack resistance curve $J_R - \Delta a$. This curve is obtained by using cracked test samples with different geometries (CT, SENT and SCT). The local approach to fracture is an alternative method to assess failure in particular in the case of large scale plasticity. In this case, the previous method is not able to give accurate predictions. Analyses based on local approach concepts require an accurate evaluation of strain and stress fields near the crack tip. It is therefore important to take plastic anisotropy into account to model the plastic behavior of the rolled sheets. In this work this is done using a macroscopic phenomenological model. The parameters of this model are determined by minimizing of the difference between the simulation results and the test measurements for smooth and notched tensile test samples. The local approach to fracture is also based on the understanding of the failure micromechanisms of materials. Ductile fracture of metallic materials can be described as a three stage process. The first is void initiation at inclusions, the second is void growth and the third is void coalescence. Nucleation of defects at Al_2Cu precipitates is the main damage mechanism. In this work, the proposed model for ductile fracture is based on the Gurson model modified by Needleman and Tvergaard (GTN). This model is extended to account for fracture anisotropic by considering two nucleation gaussian laws respectively for rolling and transverse directions.

Keywords : 2219 T87 aluminum alloy, fracture mechanics, « keycurve », J-integral, FAD analysis, anisotropic fracture, damage model GTN, anisotropic nucleation

MINES ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY