HAL open science

Conception et réalisation d'un drone hybride sol/air autonome

Sylvain Thorel

To cite this version:

Sylvain Thorel. Conception et réalisation d'un drone hybride sol/air autonome. Robotique [cs.RO]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2014. Français. NNT : 2014ENMP0054 . tel-01142389

HAL Id: tel-01142389

https://pastel.hal.science/tel-01142389v1

Submitted on 15 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

MINES ParisTech

École doctorale n°432 : Sciences des Métiers de l'ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité « Informatique temps-réel, robotique et automatique »

présentée et soutenue publiquement par

Sylvain THOREL

le 14 novembre 2014

Conception et réalisation d'un drone hybride sol/air autonome

Directrice de thèse : **Brigitte d'ANDRÉA-NOVEL**

Jury

Mme. Brigitte d'ANDRÉA-NOVEL, Professeur, Mines ParisTech	Directrice de Thèse
M. Philippe MARTINET, Professeur, IRCCYN	Président du Jury
Mme. Isabelle FANTONI, Directeur de recherche CNRS, Heudiasyc UTC	Rapporteur
M. Pascal MORIN, Professeur, ISIR, UPMC	Rapporteur
M. Jean-Michel CORON, Professeur, Laboratoire Jacques-Louis UPMC	Examinateur
M. Tarek HAMEL, Professeur, i3s sophia antipolis	Examinateur
M. Bruno STEUX, Directeur R&D, Nexter Robotics	Examinateur
M. Claude SAMSON, Directeur de recherche, i3s sophia antipolis	Invité

T H È S E

MINES ParisTech
Centre de Robotique
60 bd Saint Michel, 75006 PARIS - France

Remerciements

C'est avec enthousiasme que j'adresse ces quelques lignes de remerciements à tous ceux que j'ai pu cotoyer pendant ces trois dernières années en tant que doctorant. Je vais tenter de n'oublier personne. Je remercie en tout premier lieu Isabelle Fantoni et Pascal Morin, rapporteurs de cette thèse, pour avoir consacré du temps et usé de patience quant à la lecture de ce document. De plus, je remercie Pascal Morin pour m'avoir apporté son aide sur les fonctions transverses et pour les discussions prenantes sur les drones convertibles volants (pour changer des drones qui roulent) au Art Institute of Chicago. Un grand merci aux autres membres du jury : Philippe Martinet que j'ai rencontré, malheureusement pour lui, dans l'avion pour Chicago en tentant de lui remettre mon manuscrit ; Tarek Hamel recontré à un GT UAV et recroisé à CAPE TOWN pour l'IFAC après une visite de township ; Claude Samson rencontré officiellement le jour J mais qui, par mails, m'a aidé et orienté sur ce concept de fonctions transverses en y consacrant du temps ; Jean-Michel Coron venu de nombreuses fois à l'école des Mines pour m'apporter son aide et combler mes lacunes en mathématiques. Je le remercie également pour son intérêt porté à mes travaux. Un profond remerciement à ma directrice de thèse Brigitte d'Andréa-Novel qui m'a supporté pendant ces trois années et qui m'a converti à l'automatique. Je suis heureux et fier d'avoir pu travailler avec elle et j'espère avoir l'occasion de continuer.

Une pensée particulière à Bruno Steux, membre du jury, mais également maître de stage puis maître de thèse il y a trois ans. Je pense bien évidemment à cette aventure qu'a été CAROTTE au sein de cette équipe CoreBots. Je me souviens de ces nuits passées à travailler à Bourges dans une ambiance survoltée, chaleureuse et bon enfant. J'ai énormément appris de cette expérience tant sur le plan technique que sur le plan humain aux cotés des membres de cette équipe CoreBots. Je pense à Bruno Steux, Laurent Bouraoui, Claire Delaunay, Olivier Widar et Louis Benazet (dit aussi Wikipedia). Marvin espère retrouver cette ambiance de travail un jour. Je souhaite signaler que l'atmosphère du CAOR est incroyablement agréable et sympathique à l'image des gens qui y travaillent. Je tiens donc à remercier le personnel du laboratoire pour ce cadre de vie et de travail exceptionnel en commençant par les directeurs Arnaud de La Fortelle et Claude Laurgeau pour leur qualité humaine et les voyages au ski. Un grand merci à Christophe Kotfila et Christine Vignaud pour leur sympathie et l'aide qu'ils m'ont apportée pour faire face aux méandres administratifs. Dans l'ordre de rapprochement géographique dans le laboratoire, viennent ensuite Silvère, Sotiris, Fabien, Sébastien B., Philippe P., Patrick puis Olivier Hugues. Un grand merci à Tony Noel qui apporta une aide plus qu'importante pour mes travaux : le montage, démontage, montage, démontage, montage, etc... du système Optitrack, la réparation du drone lorsque des éclairs apparaissaient subitement dans les circuits, les longues discussions sur CoreSlam, les bières au Pantalon et j'en passe. Un merci à Amaury pour nous avoir tenu physiquement en forme pour partir à 11h30 pétante en courant au Ministère. Viennent ensuite Philippe Fuch et sa course d'endurance Paris-Pékin en moins de 6 mois, Joel avec sa machine à café probablement responsable de la faillite de la cafétéria, sa sympathie et sa patience hors norme pour s'occuper de David avec ses questions déroutantes. Il vient logiquement Bogdan qui, en plus de s'occuper de David pendant la journée, nous a fait découvrir ses nombreuses soirées cosmopolites dans les bars du quartier. Clément, souvent là à ces occasions, ainsi que mon précécesseur en tant que doctorant de Brigitte, venait souvent animer le laboratoire d'électronique accompagné de Jacky et ses saucissons entreposés dans le garage. Finalement à quelques pas de mon bureau, je tiens à remercier François pour sa sympathie et Alexis pour son humour et sa jovialité.

Je n'oublie évidemment pas Jean-Emmanuel et son emploi du temps de Ministre rempli de jour comme de nuit et des soirées passées avec Raoul et ses rocking shoes, Vincent et son envie de payer toutes les bières, Jef, ses Gif animés et ses lunettes pour mon drone (la fine équipe ! + Eva maintenant -pour qui j'ai perdu toute crédibilité avec mon drone...-). D'ailleurs mis à part Vincent, ils font partie de l'ancienne génération de doctorant avec Ayet, Oussama, Laure, Benjamin, Jorge et Martyna. Je n'oublie pas Cyril, nouvellement arrivé mais déjà avec une thèse en poche malgré ses 19 ans. Je pense ensuite à Etienne, sa peur permanente (de qui ?) et les nombreuses histoires que je n'ai pas le droit de raconter : tout ce qui se passe en Afrique du Sud reste en Afrique du

Sud. Je me souviens d'ailleurs, avec le sourire, de la veille de la présentation de Jean à Cape Town (merci Jean pour ça !) et de la présentation hautement attendue que j'ai due faire pour Lghani avec ses 4 personnes dans l'audience (j'ai fait de mon mieux Lghani !). Un merci également à Raphaëlle, Fernando, Manu, Axel, David A., Houssem, Tao-jin, Edgar, Yannick et ses sprints de folie, Emilie, Florent, Martin, Victor, Zoe, Hassan et enfin dans mon bureau Olivier Hyunh et Bruno Ricaud et son fameux manteau de ski. Je n'oublie pas non plus les stagiaires de passage comme Lucile, ses pauses café chroniques, ses qualités d'entremetteuse et son amie mystère entraîneuse, à ses heures perdues, en squash, course à pied, badminton (à quand le match ?)... Finalement rencontrée dans sa taverne de la rue mouffetard, elle fut d'un soutien à toute épreuve. Un grand merci également à Guillaume et Fawzi avec qui j'ai visité Chicago en long en large et en travers. En dehors de l'univers du laboratoire, je tiens à remercier les personnes de l'école : je pense à Thérèse, Zubida, Frantz, Laurence, Bernard, Claudine, Elisabeth, fred... Ma dernière pensée revient à ma famille.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 État de l'art **7**
2.1 Outils mathématiques pour le contrôle . . . 8
2.1.1 Système dynamique . . . 8
2.1.2 Point d'équilibre . . . 10
2.1.3 Fonctions de Lyapunov . . . 15
2.1.4 Commandabilité . . . 21
2.2 Contrôle de véhicule . . . 25
2.2.1 Modèle de véhicule . . . 25
2.2.2 Suivi de trajectoire . . . 28
2.2.3 Commandabilité . . . 31
2.3 Etat de l'art du contrôle des véhicules non holonomes et sous-actionnés . . . 34
2.3.1 Unicycle : suivi de trajectoires excitantes . . . 35
2.3.2 Unicycle : stabilisation en un point . . . 38
2.3.3 Navire : suivi de trajectoires excitantes . . . 42
2.3.4 Navire : stabilisation en un point . . . 44
2.3.5 Stabilisation pratique . . . 48

3 Modélisation du drone terrestre **51**
3.1 Les angles d'Euler . . . 52
3.2 Principe de la dynamique . . . 55
3.2.1 Quantité d'accélération . . . 56
3.2.2 Moment dynamique du solide Σ . . . 57
3.2.3 Moment dynamique du système isolé $S_{2'}$ . . . 60
3.2.4 Moment dynamique du système isolé S_{3i} . . . 61
3.3 Modèle dynamique complet . . . 61

4 Contrôle **65**
4.1 Contrôle linéaire et placement de pôles . . . 68
4.2 Contrôle par linéarisation . . . 71
4.2.1 Contrôle par une approche platitude . . . 71
4.2.2 Une approche par "Backstepping" . . . 76
4.3 Stabilisation pratique par fonctions transverses . . . 83
4.3.1 Architecture de contrôle pour notre système . . . 83
4.3.2 Condition de rang de l'algèbre de Lie . . . 84
4.3.3 Champs de vecteurs homogènes . . . 84
4.3.4 Loi de composition et invariance à gauche des champs de vecteurs . . . 85
4.3.5 "Mapping" exponentiel et fonctions transverses . . . 86
4.3.6 Stabilisation de trajectoire . . . 88
4.3.7 Loi de contrôle . . . 88
4.3.8 Loi de commande des systèmes en cascade du drone par l'approche "Backstepping" . . . 91
4.3.9 Simulations . . . 93
4.4 Arrêt du drone par commandes en temps variant . . . 98
4.4.1 Système non linéaire : $\dot{x} = vf(x, u)$ . . . 98
4.4.2 Système non linéaire (4.48) . . . 99
4.4.3 Changement d'orientation . . . 100

4.4.4 Simulations . . . 100
4.5 Excitation persistante du noyau de commandabilité . . . 107
4.5.1 Description du système du Glisseur . . . 107
4.5.2 Stabilité d'un point d'équilibre . . . 110
4.5.3 Système à temps variant Σ_{TV} commandé par u_1 . . . 111
4.5.4 Suivi de position du système $\Sigma_{glisseur}$ avec les deux commandes u_1 et u_2 . . . 115
4.5.5 Suivi de posture du système $\Sigma_{glisseur}$ avec les deux commandes u_1 et u_2 . . . 117
4.5.6 Analyse des singularités . . . 120
4.5.7 Simulations . . . 124

5 Plateforme et Expérimentations 163
5.1 Matériels . . . 164
5.1.1 Plateforme expérimentale . . . 164
5.1.2 Système de Motion Capture . . . 164
5.1.3 Drone . . . 167
5.1.4 Programme de contrôle . . . 170
5.2 Identification . . . 172
5.2.1 Nouveau modèle du drone . . . 172
5.2.2 Forces et moments aérodynamiques . . . 174
5.2.3 Identification paramétrique de la dynamique du drone terrestre . . . 178
5.2.4 Variabilité du modèle . . . 189
5.3 Contrôle du drone par platitude . . . 197

6 Conclusions 201

Bibliographie 203

Chapitre 1

Introduction

La robotique profite actuellement d'un contexte économique, politique ou technologique favorable. Ceci est en partie visible avec l'apparition encore récente d'engins sans pilote, dits drones, dans le domaine civil. Les plus connus sont les véhicules volants, mais l'appellation "*drone*" est plus générale et peut faire référence à des robots marins, sous-marins, terrestres, etc. Une des premières apparitions médiatisées de ces véhicules sans pilote fut l'utilisation massive de ces plateformes aériennes lors de missions militaires américaines. Dès lors, et en particulier suite aux évolutions technologiques des batteries vers une autonomie accrue, les plateformes électriques volantes du type *quadricoptère* ont vu le jour. L'entreprise française Parrot a su rapidement démocratiser ces robots en les proposant comme jouets peu onéreux. Un véritable marché s'est alors ouvert. Les néophytes amusés autant que les professionnels de divers corps de métiers (agriculture, génie civil, forces de l'ordre, pompiers, réseaux ferrés, cinéma, etc.) ont su en tirer avantage. Les appareils volants sans pilote se déclinent en plusieurs catégories, allant de quelques grammes à plusieurs kilos, voire plusieurs tonnes pour les engins militaires. L'évolution technologique de ces engins tend vers l'automatisation des déplacements et le développement de la perception de l'environnement au travers de caméras, caméras stéréoscopiques, lidars, GPS, baromètre. De nombreux systèmes d'assistance sont déjà disponibles pour le grand public : décollage et atterrissage automatiques, déplacement par "waypoints", suivi de cibles, cartographie, etc. Les projets de recherche vont encore plus loin en élaborant des algorithmes permettant le contrôle d'une flotte de drones en formation, le partage d'une charge entre plusieurs véhicules, la cartographie et la localisation dans un environnement dénué de signal GPS, l'exploration autonome de bâtiments, etc.

C'est d'ailleurs dans ce cadre que le projet CAROTTE (CArtographie par RObot d'un TErritoire) a vu le jour. Cette recherche organisée par la DGA (direction générale de l'armement) et l'ANR (agence nationale de la recherche) et s'articulant sous la forme d'une compétition sur 3 ans, a opposé cinq équipes de chercheurs et d'ingénieurs sur la thématique des drones terrestres autonomes, dit aussi UGV (*unmanned ground vehicle*) dans un environnement *indoor*. L'objectif de ce projet était d'aboutir à la réalisation de systèmes robotisés autonomes, capables de s'orienter dans un espace clos et de reconnaître des objets présents dans ce local, et de créer une cartographie accompagnée d'annotations sémantiques d'un espace inconnu [ANR 2009]. Pour ce faire, il faut être capable de développer et maîtriser l'ensemble du système, c'est-à-dire de l'architecture mécanique et hardware aux briques logicielles interconnectées de SLAM (*Simultaneous Localization And Mapping*), de reconstruction 3D, d'évitements d'obstacles, de reconnaissance d'objets, de planification de trajectoire, de stratégies d'exploration, etc. En tant que stagiaire puis doctorant, j'ai eu le privilège de participer aux éditions 2011 et 2012 du défi CAROTTE au sein de l'équipe CoreBots de Mines-Paristech qui fut lauréat du concours les deux premières années 2010 et 2011, et second la dernière année en 2012. Mon sujet de thèse "Conception et réalisation d'un drone hybride sol/air autonome" s'inscrit dans la continuité des travaux développés pour cette compétition.

Le défi CAROTTE a clairement confirmé que les plateformes à roues présentent des capacités de franchissement limitées dans des environnements intérieurs (escaliers, gravats, etc...) à l'inverse des véhicules volants, tels que les *quadricoptères*. Quelques laboratoires ont déjà montré la capacité des engins aériens autonomes à explorer des bâtiments, éviter des obstacles, changer d'étages... Malheureusement, leur forte consommation en énergie en évolution aérienne limite la durée des missions à environ 20 minutes, ce qui est un inconvénient majeur. L'idée naturelle, à l'origine de

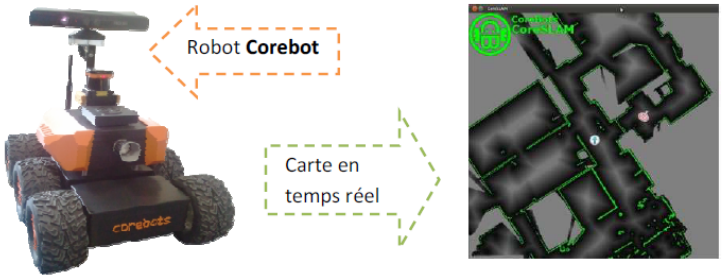

FIGURE 1.1 – Véhicule CoreBots et un exemple de cartographie réalisée par le robot.

la présente recherche, est donc d'envisager un drone hybride, évoluant économiquement sur le sol quand les obstacles le permettent, et en aérien dès que cela n'est plus possible. Les capacités de l'engin à analyser son environnement étant continûment maintenues, le problème se résume alors au contrôle des déplacements aérien et surfacique. C'est dans ce cadre général que s'inscrit cette thèse, orientée vers l'autonomie des drones aériens, en cherchant à profiter des technologies développées pour les robots terrestres au laboratoire de robotique CAOR de Mines-Paristech. Pour des raisons de robustesse, de stabilité et de commandabilité, la plateforme choisie dérive du *quadricoptère* (figure 1.2) et permet, dans ce contexte, l'exploration indoor, avec un déplacement surfacique autant qu'aérien. Ce concept de structure « hybride » terrestre et aérienne du type *quadricoptère* n'est pas nouveau et a déjà fait son apparition sur le marché. Nous pouvons citer à titre d'illustration le HytaQ (Hybrid Terrestrial and Aerial Quadrotor) [HytaQ 2012] (figure 1.3), le B Fly [B 2013] (figure 1.4), le mini drone de Parrot [Parrot 2014] (figure 1.5), le Muwa [Muwa 2013] (figure 1.6) ou encore le AT transformer [Transformer 2014] (figure 1.7). Les particularités originales de la plateforme, adaptées à notre approche du contrôle, sont liées à l'ajout de quatre contacts glissants pour assurer le déplacement au sol, à la génération d'un vecteur de poussée assuré par l'inclinaison du plateau supportant les couples moteurs/hélices, et à l'intégration d'un PC et de capteurs 3D de type Kinect pour l'analyse de l'environnement. Le comportement dynamique au sol est alors comparable à celui d'un aéroglisseur, et la reconnaissance de l'espace est assurée par les capteurs Kinect associés aux algorithmes embarqués de SLAM. Pour l'autonomie complète de cet engin, il faut développer :

- les outils de localisation et de reconstruction de l'espace à l'aide des algorithmes de SLAM couplés aux capteurs 3D de type Kinect,
- le contrôle du drone au sol et en l'air pour le suivi de trajectoire.

La thématique du SLAM a été abordée lors de la première année de thèse, et les deux dernières années ont été consacrées au contrôle du drone au sol, laissant à des travaux ultérieurs la transition vers l'aérien. Par soucis d'homogénéité et de cohérence, il a été exclu de ce manuscrit le travail réalisé sur les algorithmes de localisation et de cartographie simultanées pour ne présenter que l'aspect contrôle au sol. Notre système, lorsqu'il est au sol, s'apparente à un aéroglisseur. La problématique de contrôle de ce genre de système est la même que celle des véhicules marins sous actionnés, proche de celle des véhicules non-holonomes. En effet, leur caractéristique principale commune provient du théorème de Brockett [Brockett 1983] qui stipule que la majorité de ces systèmes ne peuvent pas être stabilisés en un point d'équilibre par des retours d'états continus. Cette restriction conditionne totalement la manière d'aborder le problème, et nous force dans ce travail de thèse à distinguer le suivi de trajectoire de la stabilisation en un point pour lesquels des méthodes de contrôle moins classiques sont utilisées. Nous abordons donc les lois de contrôle de véhicules marins ou non-holonomes pour ces deux cas afin de développer un modèle original, validé expérimentalement et numériquement, décrivant la dynamique de déplacement au sol et permettant l'élaboration de lois de commande. C'est l'élaboration de ce modèle dynamique et des lois de commande afférentes qui fait l'objet de ce manuscrit qui, hors une introduction et une conclusion, s'organise en quatre chapitres, qui traitent de :

- l'état de l'art, qui présente les outils mathématiques généraux de contrôle non linéaire utilisés ici, ainsi que les lois de contrôle des véhicules marins ou non-holonomes (chapitre 2),
- la modélisation spécifique de la dynamique de notre drone glissant (chapitre 3),
- l'élaboration des lois de contrôle du déplacement du drone au sol (chapitre 4),
- la validation expérimentale du modèle dynamique et des lois de commande associées (chapitre 5).

La conclusion, quant à elle, énoncera quelques perspectives pour parfaire l'autonomie de ce drone.

FIGURE 1.2 – Notre drone hybride à l'étude dans cette thèse.

FIGURE 1.3 – Quadricoptère HytaQ "Hybrid Terrestrial and Aerial Quadrotor".

FIGURE 1.4 – Quadricoptère B Fly.

FIGURE 1.5 – Quadricoptère mini drone rolling spider de Parrot.

FIGURE 1.6 – Quadricoptère Muwa “Multi-field Universal Wheel for Air-land Vehicle”.

FIGURE 1.7 – AT Transformer : véhicule terrestre et aérien pour le transport de troupes.

Chapitre 2

État de l'art

Sommaire

2.1 Outils mathématiques pour le contrôle . . . 8
2.1.1 Système dynamique . . . 8
2.1.1.1 Système autonome . . . 9
2.1.1.2 Système non autonome . . . 10
2.1.2 Point d'équilibre . . . 10
2.1.2.1 Stabilité d'un système autonome . . . 11
2.1.2.2 Stabilité d'un système linéaire à temps invariant . . . 11
2.1.2.3 Stabilité d'un système non-linéaire à temps invariant . . . 13
2.1.2.4 Stabilité d'un système non autonome . . . 14
2.1.3 Fonctions de Lyapunov . . . 15
2.1.3.1 Système autonome . . . 15
2.1.3.2 Système linéaire à temps invariant . . . 16
2.1.3.3 Système non autonome . . . 18
2.1.3.4 Système linéaire à temps variant . . . 19
2.1.4 Commandabilité . . . 21
2.1.4.1 Commandabilité d'un système linéaire à temps variant . . . 21
2.1.4.2 Commandabilité d'un système linéaire à temps invariant . . . 22
2.1.4.3 Commandabilité d'un système non linéaire à temps invariant . . . 23
2.2 Contrôle de véhicule . . . 25
2.2.1 Modèle de véhicule . . . 25
2.2.1.1 Véhicule non-holonome . . . 25
2.2.1.2 Véhicule sous-actionné . . . 27
2.2.2 Suivi de trajectoire . . . 28
2.2.2.1 "Path following" . . . 28
2.2.2.2 "Trajectory tracking" . . . 29
2.2.2.3 Description des systèmes de l'Unicycle et du Glisseur pour le suivi de trajectoire . . . 29
2.2.3 Commandabilité . . . 31
2.2.3.1 Linéarisé tangent . . . 31
2.2.3.2 Crochets de Lie . . . 32
2.3 Etat de l'art du contrôle des véhicules non holonomes et sous-actionnés 34
2.3.1 Unicycle : suivi de trajectoires excitantes . . . 35
2.3.1.1 Loi de contrôle linéaire et placement de pôles . . . 35
2.3.1.2 Loi de contrôle non linéaire . . . 35
2.3.1.3 Suivi de position . . . 36
2.3.2 Unicycle : stabilisation en un point . . . 38
2.3.2.1 Commande régulière à temps variant . . . 39
2.3.2.2 Commande homogène à temps variant . . . 40
2.3.3 Navire : suivi de trajectoires excitantes . . . 42
2.3.3.1 Modèle dynamique d'un navire sous actionné . . . 42

2.3.3.2 Suivi de position et linéarisation 43
2.3.3.3 Vitesse de lacet continûment excitante 44
2.3.4 Navire : stabilisation en un point 44
2.3.4.1 Loi de contrôle à temps variant 44
2.3.4.2 Stabilisation d'une partie de l'état 47
2.3.4.3 Commandes discontinues 47
2.3.5 Stabilisation pratique 48
2.3.5.1 Navire : commandes invariantes 48
2.3.5.2 Navire : commandes à temps variant 48
2.3.5.3 Fonctions transverses 50

2.1 Outils mathématiques pour le contrôle

L'objectif de cette partie est de présenter de manière succincte un ensemble d'outils et de théorèmes utilisés dans la théorie du contrôle. Ce n'est pas une liste exhaustive, mais elle apporte les éléments nécessaires aux concepts mis en avant dans cette thèse et, en particulier, au chapitre 4. La notion incontournable de stabilité d'un point d'équilibre d'un système dynamique est présentée ici, ainsi que les outils principaux qui la caractérisent. De plus, une attention particulière est apportée à la propriété de commandabilité d'un système. Cela est d'autant plus pertinent que le véhicule étudié présente des caractéristiques de sous-actionnement qui ont conditionné notre recherche.

2.1.1 Système dynamique

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps. Il est à la fois **causal**, c'est à dire que son état futur ne dépend que de ses états passés et présents, mais aussi **déterministe** car il ne correspond qu'un seul état futur possible à chaque instant ultérieur pour une condition initiale donnée à l'instant présent. Un système dynamique est souvent représenté sous forme de modèle d'état.

Définition 2.1.1 *[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, page 19] Soit un système dont l'évolution au cours du temps est décrite par $n+m$ grandeurs scalaires, notées*

$$x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)$$

Un modèle d'état, d'états $(x_1, ..., x_n)^\top$, est la donnée de n fonctions régulières

$$f_1(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m), ..., f_n(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)$$

telles que l'évolution de $x_1(t), ..., x_n(t)$ satisfasse au système d'équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & \frac{dx_1}{dt}(t) & = & f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)) \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \dot{x}_n(t) & = & \frac{dx_n}{dt}(t) & = & f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)) \end{cases} \tag{2.1}$$

Le modèle est dit stationnaire si les fonctions $f_1, ..., f_n$ ne dépendent pas explicitement du temps t ; sinon il est dit instationnaire. Les états $x_1(t), ..., x_n(t)$ sont également décrits comme étant des *variables internes* tandis que $u_1(t), ..., u_m(t)$ sont considérés comme des *variables externes*.

Définition 2.1.2 *[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, page 34] On appelle système libre ou système autonome un modèle d'état sans variables externes.*

Nous distinguerons par la suite le cas des systèmes autonomes, qui ne dépendent pas explicitement du temps (*temps invariant*), du cas des systèmes dits non autonomes (*temps variant*).

2.1.1.1 Système autonome

Soit Σ_1 le système autonome défini par

$$\Sigma_1 : \quad \dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

avec f un champ de vecteurs sur un ouvert M de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.3 *Un champ de vecteurs f sur un ouvert M de $\mathbb{R}^n$ est une application régulière qui associe à chaque point x de M un vecteur $f(x) \in \mathbb{R}^n$ ayant ce point pour origine.*

Définition 2.1.4 *On appelle courbes intégrales du champ de vecteurs f sur M les solutions de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(x)$$

c'est à dire les courbes $\phi : I \subset \mathbb{R} \to M$ telles que :

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(\phi(t)), \quad \forall t \in I.$$

Une courbe intégrale est qualifiée de maximale si elle n'est contenue dans aucune autre courbe intégrale. L'existence et l'unicité des solutions $x(t)$ du système (2.2) passant par x_0 à l'instant $t = t_0$ (conditions connues sous le nom de problème de Cauchy) sont démontrées par le théorème de Cauchy-Lipschitz ci-dessous.

Théorème 2.1.5 (Cauchy-Lipschitz) *Pour tout champ de vecteurs et tout point x_0 de M, il existe une unique courbe intégrale maximale passant par x_0 $(\Phi_t(x_0), t \in I(x_0))$.*

- *l'ensemble $U = \bigcup_{x_0 \in M} I(x_0) \times \{x_0\}$ est un ouvert dans $\mathbb{R} \times M$;*
- *l'application suivante, appelée flot local, est régulière*

$$(t, x) \in U \to \Phi_t(x) \in M$$

  et satisfait à

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = f(\Phi_t(x));$$

- *pour tout $x_0 \in M$ et $t, s, t+s$ dans $I(x_0)$, on a*

$$\Phi_{t+s}(x_0) = \Phi_t(\Phi_s(x_0)).$$

Définition 2.1.6 *La trajectoire d'un point x de M est l'application*

$$t \in I(x_0) \mapsto \Phi_t(x) \in M.$$

Remarque Dans le cadre d'un système dynamique linéaire à temps invariant sur $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\dot{x} = Ax \tag{2.3}$$

avec A une matrice réelle carrée de taille n, le flot est

$$\Phi_t(x) = e^{tA}x. \tag{2.4}$$

Rappelons qu'une exponentielle de matrice a pour expression la série

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{2.5}$$

2.1.1.2 Système non autonome

Soit Σ_2 le système non autonome défini par

$$\Sigma_2 : \quad \dot{x} = f(t, x) \tag{2.6}$$

avec $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue par morceaux par rapport à la variable t. L'existence et l'unicité des solutions $x(t)$ du système non autonome (2.6) passant par x_0 à l'instant $t = t_0$ provient également du théorème de Cauchy-Lipschitz qui est formulé différemment ici.

Théorème 2.1.7 *Soit $f(t, x)$ une fonction continue par morceaux par rapport à t qui satisfait la condition de Lipschitz*

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y|| \tag{2.7}$$

$\forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad ||x - x_0|| \leq r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. *Alors il existe $\delta > 0$ tel que l'équation d'état*

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad \textit{avec } x(t_0) = x_0 \tag{2.8}$$

a une unique solution sur $[t_0, t_0 + \delta]$.

Finalement, sous l'hypothèse d'une certaine régularité de la fonction f, une solution au problème de Cauchy existe et est unique.

2.1.2 Point d'équilibre

Nous définissons ci-dessous la notion de point d'équilibre pour un système général non autonome de la forme

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.9}$$

avec $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue par morceaux par rapport à la variable t.

Définition 2.1.8 *On appelle point d'équilibre (ou point singulier) du système (2.9) à $t = 0$ tout point x_e tel que :*

$$f(t, x_e) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque Pour un système autonome, c'est à dire tel que $\dot{x} = f(x)$, la condition $f(x_e) = 0$ est suffisante pour décrire un point d'équilibre x_e.

La notion de stabilité de point d'équilibre est essentielle dans la théorie du contrôle. En effet, l'objectif usuel principal est de trouver une loi de contrôle qui conduit le système en un point d'équilibre stable. Nous distinguons encore une fois les systèmes non autonomes des systèmes autonomes. La dépendance explicite de f par rapport au temps engendre des notions de stabilité bien différentes ; il en va de même des outils d'analyse associés.

2.1.2.1 Stabilité d'un système autonome

Définition 2.1.9 *[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, pages 69-70] Le point d'équilibre x_e du système autonome $\dot{x} = f(x)$ est dit*

- *stable si pour tout voisinage U' de x_e il existe un voisinage U'' de x_e tel que pour tout x dans U'', $\Phi_t(x)$ est défini et appartient à U' pour tout $t \geq 0$;*
- *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage U' de x_e ayant la propriété suivante : pour tout x dans U', $\Phi_t(x)$ tend vers x_e lorsque $t \to +\infty$;*
- *instable s'il n'est pas stable.*

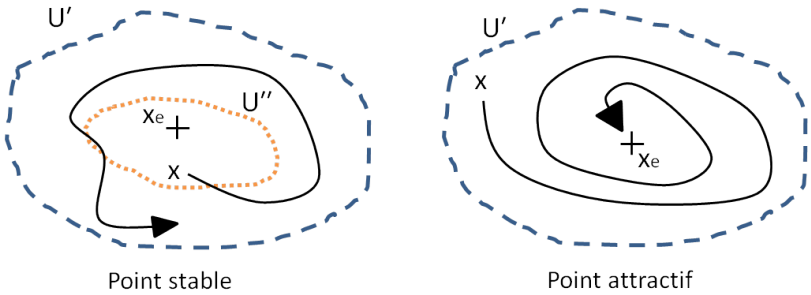

FIGURE 2.1 – Point stable et asymptotiquement stable.

Si $\Phi_t(x)$ tend vers x_e pour tout $x \in M$, alors x_e est qualifié de point d'équilibre globalement asymptotiquement stable. La définition précédente est réécrite avec la notion de norme.

Définition 2.1.10 *[Khalil 1995, page 98] Le point d'équilibre $x = 0$ du système autonome $\dot{x} = f(x)$ est*

- *stable, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que*

$$||x(0)|| < \delta \Rightarrow ||x(t)|| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

- *instable si non stable ;*
- *asymptotiquement stable s'il est stable et si δ peut être choisi tel que*

$$||x(0)|| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Les systèmes autonomes représentent une classe importante des systèmes dynamiques. Les définitions de la stabilité d'un point d'équilibre associées à ces systèmes sont détaillées pour des cas d'études plus spécifiques comme par exemple le cas linéaire. De nombreux outils et théorèmes mathématiques ont été mis en place pour faciliter l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires. La partie suivante en établit un bref état de l'art. Nous verrons par la suite que l'étude de ces systèmes linéaires peut apporter certaines réponses quant à la stabilité des systèmes non linéaires.

2.1.2.2 Stabilité d'un système linéaire à temps invariant

Un système linéaire à temps invariant est modélisé par

$$\dot{x} = Ax \tag{2.10}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une matrice linéaire à temps invariant. La solution à l'équation (2.10) s'exprime alors analytiquement : $x(t) = x(0)e^{At}$ avec e^{At} décrit à l'équation (2.5). La nature de la matrice A, et en particulier ses valeurs propres, définit donc complètement le comportement et la stabilité des points d'équilibre du système (2.10). Nous posons dans un premier temps quelques définitions.

Définition 2.1.11 *[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, page 39] soit A une matrice $n \times n$, on appelle polynôme caractéristique le polynôme de degré n suivant*

$$\chi_A(z) = det(zI - A). \tag{2.11}$$

$\Lambda(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A, soit l'ensemble des zéros de $\chi_A(z)$. On appelle
- *multiplicité d'une valeur propre λ, et on note $m(\lambda)$ la multiplicité de la racine λ du polynôme caractéristique χ_A ;*
- *indice d'une valeur propre λ, et on note $\nu(\lambda)$ le premier entier ν non nul tel que la suite croissante $(Ker(A - \lambda I)^\nu)_{\nu \geq 1}$ soit stationnaire à partir de $\nu = \nu(\lambda)$;*
- *espace propre caractéristique complexe associé à λ le noyau $N(\lambda) = Ker(A - \lambda I)^{\nu(\lambda)}$, c'est-à-dire*

$$x \in N(\lambda) \iff \forall \nu \geq \nu(\lambda),\ (A - \lambda I)^\nu x = 0.$$

Remarque *Il est important de distinguer l'indice d'une valeur propre de sa multiplicité $(1 \leq \nu(\lambda) \leq m(\lambda))$, et le sous-espace propre $E(\lambda) = Ker(A - \lambda I)$ de l'espace propre caractéristique $N(\lambda)$ $(E(\lambda) \subset N(\lambda))$.*

Théorème 2.1.12 *[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, page 71] Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$, de valeurs propres distinctes $\lambda_1 ... \lambda_r$. Considérons le point d'équilibre $x = 0$ du système dynamique $\dot{x} = Ax$:*

1. *Si $\exists j = 1, ...r, \Re(\lambda_j) > 0$, alors le point 0 est instable.*
2. *Si $\forall j = 1, ...r, \Re(\lambda_j) \leq 0$, alors*
   - *si $\forall j = 1, ...r, \Re(\lambda_j) < 0$, alors le point 0 est asymptotiquement stable ;*
   - *si $\exists j = 1, ...r, \Re(\lambda_j) = 0$ et $\nu(\lambda_j) > 1$, le point 0 est instable ;*
   - *si $\forall j = 1, ...r, (\Re(\lambda_j) = 0 \Longrightarrow \nu(\lambda_j) = 1)$, le point 0 est stable mais non asymptotiquement stable.*

Nous savons désormais qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable si les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative. Le critère de Routh, qui est couramment utilisé, permet de déterminer de manière simple si les racines du polynôme caractéristique de A sont à partie réelle strictement négative.

Critère de Routh :[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, page 51]

Soit $P(s)$ le polynôme à coefficients réels :

$$P(s) = a_0^1 s^n + a_0^2 s^{n-1} + a_1^1 s^{n-2} + a_1^2 s^{n-3} + a_2^1 s^{n-4} + a_2^2 s^{n-5} + ...$$

On construit la *table de Routh*

$$\begin{array}{cccccc} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & . & . & . \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & . & . & . \\ a_0^3 & a_1^3 & a_2^3 & . & . & . \\ a_0^4 & a_1^4 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{array}$$

qui s'écrit par récurrence selon la formule

$$a_j^{i+2} = a_{j+1}^i - \frac{a_0^i}{a_0^{i+1}} a_{j+1}^{i+1}.$$

Le théorème suivant est connu sous le nom de *critère de Routh* :

Théorème 2.1.13 (Critère de Routh) *Le polynôme $P(s)$ a toutes ses racines à partie réelle strictement négative si et seulement si tous les coefficients a_0^i de la première colonne de la table de Routh sont non nuls et de même signe. Si tous les a_0^i sont non nuls, le nombre de coefficients dans la première colonne de la table de Routh, n'étant pas du même signe que a_0^1, correspond au nombre de racines de $P(s)$ ayant une partie réelle positive.*

Remarque [Wikipédia 2014b] Un polynôme d'ordre n à coefficients réels est dit de Hurwitz si ses racines sont à partie réelle strictement négative. Un polynôme d'ordre n est de Hurwitz si

- $n < 3$, $\forall i, \quad a_i > 0$;
- $n = 3$, $\forall i, \quad a_i > 0$ et $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$;
- $n = 4$, $\forall i, \quad a_i > 0$ et $a_2 a_3 - a_1 a_4 > \frac{a_3^2 a_0}{a_1}$;
- $n > 4$, voir le critère de Routh.

2.1.2.3 Stabilité d'un système non-linéaire à temps invariant

Après avoir posé les bases de la stabilité d'un point d'équilibre d'un système linéaire, prenons le cas d'un système non linéaire de la forme

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.12}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire. Il est possible de connaître le comportement d'un point d'équilibre du système (2.12) en analysant le comportement du système linéarisé tangent en ce point d'équilibre.

Définition 2.1.14 *[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, page 80] On appelle système linéarisé tangent du système dynamique (2.12) au voisinage d'un point d'équilibre x_e. Le système linéaire*

$$\dot{\xi} = A\xi$$

où $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e)$ est la matrice de l'application linéaire tangente de f au point x_e.

Définition 2.1.15 *[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, page 81] Un point d'équilibre d'un système dynamique tel que l'application linéaire tangente en ce point n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle est dit point hyperbolique.*

Théorème 2.1.16 (Grobman et Hartman) *Un système dynamique non linéaire est topologiquement équivalent à son linéarisé tangent au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique.*

Corollaire 2.1.17 *Soit x_e un point d'équilibre du système dynamique :*

1. *Si x_e est asymptotiquement stable pour le linéarisé, alors il l'est pour le système original.*
2. *Si x_e est instable pour le linéarisé, alors il l'est pour le système original.*

Remarque L'étude du linéarisé tangent n'est pas suffisante pour caractériser la stabilité du système dynamique original si le point d'équilibre n'est pas hyperbolique.

Cette dernière remarque nous montre les limitations de l'étude du linéarisé tangent. Il existe d'autres techniques, telles que l'analyse de la stabilité avec des fonctions de Lyapunov, pour caractériser la stabilité d'un point d'équilibre (2.1.3).

2.1.2.4 Stabilité d'un système non autonome

La définition (2.1.10) est généralisée ci-dessous pour les systèmes non autonomes.

Définition 2.1.18 *[Khalil 1995, page 134] Le point d'équilibre $x = 0$ du système autonome $\dot{x} = f(t, x)$ est*

- *stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tel que*

$$||x(0)|| < \delta \Rightarrow ||x(t)|| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0; \tag{2.13}$$

- *uniformément stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, indépendant de t_0, tel que (2.13) soit vérifié ;*

- *instable si non stable ;*

- *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $c = c(t_0) > 0$ tel que $x(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, pour tout $||x(t_0)|| < c$;*
- *uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et s'il existe $c > 0$, indépendant de t_0, tel que pour tout $||x(t_0)|| < c$, $x(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, uniformément en t_0 ; pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T = T(\epsilon) > 0$ tel que*

$$||x(t)|| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon), \quad \forall ||x(t_0)|| < c;$$

- *globalement uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et si pour tout ϵ, $c > 0$ il existe $T = T(\epsilon) > 0$ tel que*

$$||x(t)|| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon, c), \quad \forall ||x(t_0)|| < c.$$

En pratique, la caractérisation de la stabilité d'un point d'équilibre n'est pas facilement vérifiable avec ces définitions. L'utilisation des fonctions connues sous les dénominations de fonctions de classe $\mathcal{K}$ et de classe $\mathcal{KL}$ rend la tâche plus aisée (corollaire (2.1.21)).

Définition 2.1.19 *[Khalil 1995, page 135] Une fonction continue $\alpha : [0, a) \to [0, \infty)$ est dite appartenir à la classe $\mathcal{K}$ si elle est strictement croissante et si $\alpha(0) = 0$. La classe K peut être annotée K_∞ si $a = \infty$ et $\alpha(r) \to \infty$ lorsque $r \to \infty$.*

Définition 2.1.20 *[Khalil 1995, page 135] Une fonction continue $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ est dite appartenir à la classe $\mathcal{KL}$ si, pour tout s fixé, l'application $\beta(r, s)$ appartient à la classe $\mathcal{K}$ relativement à r et si, pour tout r fixé, l'application $\beta(r, s)$ est décroissante relativement à s et $\beta(r, s) \to 0$ quand $s \to \infty$.*

Corollaire 2.1.21 *[Khalil 1995, page 136] Le point d'équilibre $x = 0$ du système $\dot{x} = f(t, x)$ est*

- *uniformément stable si et seulement si il existe une fonction $\alpha(.)$ de classe $\mathcal{K}$ et une constante positive c, indépendante de t_0 telles que*

$$||x(t)|| \leq \alpha(||x(t_0)||), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad ||x(t_0)|| < c; \tag{2.14}$$

- *uniformément asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction $\beta(.,.)$ de classe $\mathcal{KL}$ et une constante positive c, indépendante de t_0 telles que*

$$||x(t)|| \leq \beta(||x(t_0)||, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad ||x(t_0)|| < c; \tag{2.15}$$

– *globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si* (2.15) *est satisfait pour tout état initial* $x(t_0)$.

Définition 2.1.22 *[Khalil 1995, page 137] Le point d'équilibre* $x = 0$ *de* $\dot{x} = f(t, x)$ *est exponentiellement stable si* (2.15) *est satisfait avec*

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \gamma > 0$$

et est globalement exponentiellement stable si cette condition est satisfaite pour tout état initial.

La stabilité d'un point d'équilibre pour un système non autonome reste pour le moment un concept difficile à caractériser de manière générale. Nous verrons par la suite que les fonctions de Lyapunov permettent d'apporter des outils d'analyse supplémentaires. En ce qui concerne les systèmes autonomes, la stabilité peut être d'ores et déjà caractérisée sous certaines conditions par des critères simples, que ce soit pour les systèmes linéaires ou non linéaires. L'approche par analyse des fonctions de Lyapunov enrichit et complète ces derniers paragraphes.

2.1.3 Fonctions de Lyapunov

L'utilisation des fonctions de Lyapunov permet d'étendre la caractérisation de la stabilité des points d'équilibre à des systèmes plus généraux impliquant par exemple des points d'équilibre non hyperboliques. En revanche, il n'est pas forcément aisé de trouver de telles fonctions.

2.1.3.1 Système autonome

Reprenons le cas du système autonome Σ_1 (2.2) défini par

$$\Sigma_1 : \quad \dot{x} = f(x).$$

Définition 2.1.23 *[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000, page 85] Soit* x_e *un point d'équilibre du système autonome* Σ_1 (2.2). *On appelle fonction de Lyapunov, pour* f *au voisinage de* x_e, *une fonction* V *définie au voisinage de* x_e *telle que :*

– $V(x) > 0$ *sauf en* $x = x_e$ *où* $V(x_e) = 0$ *;*

– V *est une fonction différentiable à dérivées continues et vérifie l'inégalité* $\dot{V}(x) \leq 0$.

Théorème 2.1.24 *[Khalil 1995, page 100] Soit* $x = 0$ *un point d'équilibre du système* Σ_1 (2.2) *et* $D \subset \mathbb{R}^n$ *contenant* $x = 0$. *Soit* $V : D \to \mathbb{R}$ *une fonction de Lyapunov :*

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \text{ dans } D - 0$$
$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ dans } D.$$

Alors $x = 0$ *est stable. Si de plus,*

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ dans } D$$

alors $x = 0$ *est asymptotiquement stable.*

Dans le cas où $D = \mathbb{R}^n$, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1.25 *[Khalil 1995, page 110] Soit* $x = 0$ *un point d'équilibre du système* Σ_1 (2.2). *Soit* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de Lyapunov :*

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0$$
$$||x|| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty \text{ (V est radialement non bornée)}$$
$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Alors $x = 0$ *est globalement asymptotiquement stable.*

Définition 2.1.26 *Une fonction $V(x)$ est dite*
- *définie positive si $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$;*
- *semi définie positive si $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ pour $x \neq 0$;*
- *définie négative si $-V(x)$ est définie positive ;*
- *semi définie négative si $-V(x)$ est semi définie positive.*

Finalement, s'il existe une fonction $V(x)$ définie positive continûment différentiable et si $\dot{V}(x)$ est semi définie négative ou définie négative, alors l'origine du système Σ_1 (2.2) est respectivement stable ou asymptotiquement stable. Le principe d'invariance énoncé dans le théorème de LaSalle (2.1.29) affine un peu plus les résultats précédents puisqu'il rend possible la caractérisation de la stabilité asymptotique, même dans le cas où $\dot{V}(x)$ est seulement semi définie négative.

Définition 2.1.27 *[Khalil 1995, page 114] Un ensemble M est dit invariant relativement au système Σ_1 (2.2) si*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.1.28 *[Khalil 1995, page 114] Un ensemble M est dit positivement invariant relativement au système Σ_1 (2.2) si*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 2.1.29 ***LaSalle*** *[Khalil 1995, page 115] Soit $\Omega \subset D$ un ensemble compact positivement invariant realtivement à Σ_1 (2.2). Soit $V : D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ dans Ω. Soit E un ensemble de tous les points de Ω pour lesquels $\dot{V} = 0$. Soit M le plus grand invariant de E. Alors toutes les solutions commençant dans Ω approchent M lorsque $t \to \infty$.*

Corollaire 2.1.30 *[Khalil 1995, page 116] Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système Σ_1 (2.2). Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie positive, radialement non bornée, continûment différentiable telle que $\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\}$ et supposons qu'aucune solution ne reste identiquement dans S à part la solution triviale. Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.*

Remarque Le théorème de LaSalle peut être également utilisé pour des systèmes non autonomes uniquement s'ils sont périodiques en temps.

2.1.3.2 Système linéaire à temps invariant

Nous considérons désormais le système linéaire à temps invariant $\dot{x} = Ax$ (2.10) ainsi qu'une fonction de Lyapunov quadratique candidate

$$V(x) = x^\top P x$$

avec P une matrice réelle symétrique définie positive. La dérivée de V le long des trajectoires du système linéaire (2.10) est donnée par

$$\dot{V}(x) = x^\top P \dot{x} + \dot{x}^\top + \dot{x}^\top P x = x^\top (PA + A^\top P) x = -x^\top Q x$$

avec Q une matrice symétrique. Si Q est définie positive, alors d'après le théorème (2.1.24) l'origine est asymptotiquement stable.

Théorème 2.1.31 *[Khalil 1995, page 123] Une matrice A est une matrice de stabilité ou de Hurwitz (c'est-à-dire $\Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de A) si et seulement si, pour toute matrice Q symétrique définie positive, il existe une matrice P symétrique définie positive telle que*

$$PA + A^\top P = -Q. \tag{2.16}$$

De plus, si A est une matrice stable, alors P est l'unique solution de (2.16).

Preuve Quelques élements de preuve sont apportés ici, à l'exception de la démonstration de l'unicité de la matrice P ; cette dernière est en revanche détaillée dans [Khalil 1995, page 114].

- **Soit** $P = P^\top > 0$ **et** $Q = Q^\top > 0$ **tels que** $PA + A^\top P = -Q \quad \Rightarrow \quad A$ **est de Hurwitz** :

  Prenons la fonction de Lyapunov $V(x) = x^\top Px$, $\dot{V} = -x^\top Qx$. D'après le théorème (2.1.24), l'origine est asymptotiquement stable et d'après (2.1.12), $\Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de A : A est donc de Hurwitz.

- A **est de Hurwitz** $\quad \Rightarrow \quad \forall Q = Q^\top > 0, \quad \exists P = P^\top > 0$ **tel que** $PA + A^\top P = -Q$:

  Par définition de A, $\Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de A, ce qui nous permet de considérer la matrice P définie par

$$P = \int_0^\infty e^{A^\top t} Q e^{At} dt. \tag{2.17}$$

  Supposons que P n'est pas définie positive, alors il existe $x \neq 0$ tel que $x^\top Px = 0$. Cependant,

$$\begin{array}{rcl} x^\top Px = 0 & \Rightarrow & \int_0^\infty x^\top e^{A^\top t} Q e^{At} x dt = 0 \\ & \Rightarrow & e^{At} x \equiv 0, \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{array}$$

  puisque e^{At} est non singulière pour tout t. P est donc définie positive. De plus,

$$\begin{array}{rcl} PA + A^\top P & = & \int_0^\infty e^{A^\top t} Q e^{At} A dt + \int_0^\infty A^\top e^{A^\top t} Q e^{At} dt \\ & = & \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{A^\top t} Q e^{At} dt = e^{A^\top t} Q e^{At} |_0^\infty = -Q. \end{array}$$

  Ceci conclut la preuve.

Il est également possible de prouver la stabilité asymptotique de l'origine pour Q uniquement semi définie positive.

Corollaire 2.1.32 *[Khalil 1995, page 159] Une matrice A est une matrice de Hurwitz si et seulement si, pour toute matrice $Q = C^\top C$ semi définie positive telle que la paire (A, C) est observable, il existe une matrice P symétrique définie positive telle que*

$$PA + A^\top P = -C^\top C. \tag{2.18}$$

De plus, si A est une matrice de Hurwitz, alors P est l'unique solution de (2.18).

Preuve La démonstration de l'unicité de P n'est pas abordée ici.

- A **est de Hurwitz** $\quad \Rightarrow \quad \forall Q = C^\top C$ **semi définie positive telle que la paire** (A, C) **est observable,** $\exists P = P^\top > 0$ **tel que** $PA + A^\top P = -C^\top C$:

  Par définition de A, $\Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de A, ce qui nous permet de considérer la matrice P définie par

$$P = \int_0^\infty e^{A^\top t} C^\top C e^{At} dt.$$

  Supposons que P n'est pas définie positive ; alors il existe $x \neq 0$ tel que $x^\top Px = 0$. Cependant,

$$\begin{array}{rcl} x^\top Px = 0 & \Rightarrow & \int_0^\infty x^\top e^{A^\top t} C^\top C e^{At} x dt = 0 \\ & \Rightarrow & C e^{At} x \equiv 0, \forall t \geq 0. \end{array}$$

Par définition de l'observabilité de la paire (A, C), $Ce^{At}x \equiv 0, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$. P est donc définie positive. De plus,

$$\begin{array}{rcl} PA + A^\top P & = & \int_0^\infty e^{A^\top t} C^\top C e^{At} A dt + \int_0^\infty A^\top e^{A^\top t} C^\top C e^{At} dt \\ & = & \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{A^\top t} C^\top C e^{At} dt = e^{A^\top t} C^\top C e^{At}|_0^\infty = -C^\top C. \end{array}$$

– **Soit $P = P^\top > 0$, $Q = C^\top C$ semi définie positive avec (A, C) observable et tel que $PA + A^\top P = -Q \quad \Rightarrow \quad A$ est Hurwitz** :

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = x^\top P x$, $\dot{V}(x) = -x^\top C^\top C x \leq 0$. D'après le théorème de LaSalle (2.1.29), les solutions du système (2.10) vont tendre vers le plus grand invariant contenu dans $S = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\}$. Rappelons que la solution $x(t)$ du système (2.10) est $x(t) = e^{At}x(0)$.

$$\dot{V}(x) = -x^\top C^\top C x = 0 \Leftrightarrow Ce^{At}x(0) = 0.$$

Supposons que les trajectoires $x(t)$ appartiennent identiquement à S, c'est-à-dire $Ce^{At}x(0) \equiv 0, \forall t \geq 0$. Comme (A, C) est observable ($Ce^{At}x = 0, \forall t \Leftrightarrow x = 0$), alors $x(0)$ est nécessairement nul et $x(t) = e^{At}x(0) \equiv 0, \forall t \geq 0$. Finalement, la seule solution qui peut rester identiquement dans S est la solution triviale. L'origine est donc asymptotiquement stable et la matrice A est donc de Hurwitz.

2.1.3.3 Système non autonome

Soit Σ_2 (2.6) le système non autonome défini par

$$\Sigma_2 : \quad \dot{x} = f(t, x)$$

avec $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue par morceaux par rapport à la variable t.

Théorème 2.1.33 *[Khalil 1995, page 138] Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système non autonome (2.6) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. Soit $V : [0 \times \infty) \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que*

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \tag{2.20}$$

$\forall t \geq 0$, $\forall x \in D$ avec $W_1(x)$, $W_2(x)$ et $W_3(x)$ des fonctions continues définies positives sur D. Alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.

La preuve de ce théorème est décrite à la page 138 de [Khalil 1995]. La démonstration utilise d'ailleurs le corollaire (2.1.21) pour montrer que l'origine est uniformément asymptotiquement stable.

Corollaire 2.1.34 *Supposons que toutes les conditions du théorème (2.1.33) sont satisfaites globalement (pour tout $x \in \mathbb{R}^n$) avec $W_1(x)$ radialement non bornée. Alors $x = 0$ est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

Corollaire 2.1.35 *Supposons que toutes les conditions du théorème (2.1.33) sont satisfaites avec*

$$W_1(x) \geq k_1 ||x||^c, \quad W_2(x) \leq k_2 ||x||^c, \quad W_3(x) \geq k_3 ||x||^c$$

où k_1, k_2, k_3 et c sont des constantes positives. Alors $x = 0$ est exponentiellement stable. De plus, si ces conditions tiennent pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

2.1.3.4 Système linéaire à temps variant

Soit Σ_3 le système linéaire à temps variant défini par

$$\Sigma_3 : \quad \dot{x} = A(t)x. \tag{2.21}$$

La solution de ce système est donnée par

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0), \quad \forall t \geq t_0 \tag{2.22}$$

avec $\Phi(t, t_0)$ la matrice de transition d'état (voir la définition (2.1.40)). Dans le cas où A est linéaire et à temps invariant, $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ (2.36).

Théorème 2.1.36 *[Khalil 1995, page 143] Le point d'équilibre $x = 0$ du système (2.21) est (globalement) uniformément asymptotiquement stable si et seulement si la matrice de transition satisfait*

$$||\Phi(t, t_0)|| \leq ke^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

pour des constantes k et γ positives.

Example [Khalil 1995, page 142] Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (2.21) et soit $A(t)$ continue pour tout $t \geq 0$. Supposons qu'il existe $P(t)$ une matrice symétrique définie positive, bornée et continûment différentiable telle que

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.23}$$

et telle que l'équation suivante est vérifiée

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + Q(t) \tag{2.24}$$

avec $Q(t)$ continue, symétrique et définie positive :

$$Q(t) \geq c_3 I > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Prenons $V(t, x)$ une fonction de Lyapunov candidate

$$V(t, x) = x^\top P x.$$

$V(t, x)$ est donc définie positive, décroissante et radialement non bornée puisque

$$c_1||x||_2^2 \leq V(t, x) \leq c_2||x||_2^2.$$

La dérivée de $V(t, x)$ est de plus définie négative. En effet,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^\top \dot{P}(t)x + x^\top P(t)\dot{x} + \dot{x}^\top P(t)x \\ &= x^\top[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t)]x = -x^\top Q(t)x \leq -c_3||x||_2^2. \end{aligned}$$

D'après le corollaire (2.1.35), l'origine est globalement exponentiellement stable.

Le théorème suivant (2.1.37) est dérivé de (2.1.33). Il permet, dans l'exemple précédent, de remplacer la condition nécessaire d'avoir $Q(t)$ définie positive par la condition moins restrictive $Q(t) = C^\top(t)C(t)$ avec $(A(t), C(t))$ uniformément observables.

Théorème 2.1.37 *[Khalil 1995, page 194] Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x|| < r\}$ et supposons que $f(t, x)$ est continue par morceaux et localement de Lipschitz en x sur $[0, \infty) \times D$. Soit $x = 0$ un point*

d'équilibre du système non autonome $\dot{x} = f(t,x)$ à $t = 0$. Soit $V : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que

$$\begin{array}{c} W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x) \\ \dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0 \\ \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau,t,x))d\tau \leq -\lambda V(t,x), \quad 0 < \lambda < 1 \end{array}$$

$\forall t \geq 0$, $\forall x \in D$, pour $\delta > 0$, avec $W_1(x)$ et $W_2(x)$ des fonctions continues définies positives sur D et $\phi(\tau,t,x)$ la solution du système qui commence à (t,x). Alors l'origine est uniformément asymptotiquement stable. Si toutes ces hypothèses tiennent globalement avec $W_1(x)$ radialement bornée, alors l'origine est globalement uniformément asymptotiquement stable. De plus, si

$$W_1(x) \geq k_1||x||^c, W_2(x) \leq k_2||x||^c, k_1 > 0, k_2 > 0, c > 0$$

alors l'origine est exponentiellement stable.

Example [Khalil 1995, page 195] Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (2.21) pour tout $t \geq 0$. Supposons qu'il existe une matrice $P(t)$ telle que

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0$$

et telle que

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + C^\top(t)C(t)$$

avec $C(t)$ continue en t. La fonction de Lyapunov candidate définie positive $V(t,x) = x^\top P(t)x$ a comme dérivée une fonction semi définie positive

$$\dot{V}(t,x) = -x^\top C^\top(t)C(t)x \leq 0.$$

Rappelons que la solution du système (2.21) est donnée par

$$\phi(\tau,t,x) = \Phi(\tau,t)x \quad (2.30)$$

avec $\Phi(\tau,t)$ la matrice de transition. Vérifions la dernière condition du théorème (2.1.37) :

$$\begin{array}{rcl} \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau,\phi(\tau,t,x))d\tau & = & -x^\top \int_t^{t+\delta} \Phi^\top(\tau,t)C^\top(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau x \\ & = & -x^\top W(t,t+\delta)x \end{array}$$

avec (2.31)

$$W(t,t+\delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^\top(\tau,t)C^\tau C(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau.$$

Supposons qu'il existe une constante positive $k < c_2$ telle que

$$W(t,t+\delta) \geq kI, \quad t \geq 0$$

alors

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau,\phi(\tau,t,x))d\tau \leq -k||x||_2^2 \leq -\lambda V(t,x)$$

avec $\lambda = \frac{k}{c_2} < 1$. Les conditions du théorème (2.1.37) sont satisfaites globalement avec $W_i(x) = c_i||x||_2^2, \quad i = 1,2$. L'origine est donc globalement exponentiellement stable. Notons que la matrice $W(t,t+\delta)$ est le grammien d'observabilité. L'inégalité $W(t,t+\delta) \geq kI$ découle du fait que la paire $(A(t),C(t))$ est uniformément observable (2.34). On peut remarquer l'analogie avec le corollaire (2.1.32). Ce résultat nous sera utile dans la section 5 du chapitre 4.

En ce qui concerne les systèmes non linéaires à temps variant, la caractérisation de la stabilité peut être établie par l'étude du linéarisé tangent (voir le théorème 3.13 de [Khalil 1995, page 152]).

2.1.4 Commandabilité

Si la dimension des entrées indépendantes est inférieure à la dimension de l'état, on peut se demander s'il est possible d'agir sur toutes les dynamiques du système avec ces seules entrées. Ceci pose donc la question de la commandabilité du système. Cette notion est présentée pour les systèmes linéaires, qu'ils dépendent explicitement du temps ou non, ainsi que pour les systèmes non linéaires à temps invariant.

2.1.4.1 Commandabilité d'un système linéaire à temps variant

Soit Σ_4 le système linéaire à temps variant décrit par l'équation

$$\Sigma_4 : \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [T_0, T_1] \tag{2.25}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ quand $t \in [T_0, T_1]$. La solution au problème de Cauchy associé au système (2.25) est reformulée ici sous l'hypothèse $u \in L^1((T_0, T_1), \mathbb{R}^n)$.

Définition 2.1.38 *[Coron 2009, page 4] Soit $b \in L^1((T_0, T_1), \mathbb{R}^n)$. Une application $x : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^n$ est solution de*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad t \in (T_0, T_1) \tag{2.26}$$

si $x \in C^0([T_0, T_1]; \mathbb{R}^n)$ et satisfait

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (A(t)x(t) + b(t))dt, \quad \forall (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2. \tag{2.27}$$

En particulier, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, une solution au problème de Cauchy

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad t \in (T_0, T_1), \quad x(T_0) = x_0 \tag{2.28}$$

est une fonction $x \in C^0([T_0, T_1]; \mathbb{R}^n)$ telle que

$$x(\tau) = x_0 + \int_{T_0}^{\tau} (A(t)x(t) + b(t))dt, \quad \forall \tau \in [T_0, T_1]. \tag{2.29}$$

Pour toute fonction $b \in L^1((T_0, T_1), \mathbb{R}^n)$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy présente une unique solution.

Définition 2.1.39 *Le système linéaire à temps variant (2.25) est commandable si, pour tout $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe $u \in L^\infty((T_0, T_1); \mathbb{R}^m)$ tel que la solution $x \in C^0([T_0, T_1]; \mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy vérifie $x(T_1) = x_1$.*

Avant de donner une condition nécessaire et suffisante pour la commandabilité du système (2.25), nous introduisons quelques définitions.

Définition 2.1.40 *[Coron 2009, page 4] La matrice de transition R du système linéaire à temps variant $\dot{x} = A(t)x$ est l'application*

$$\begin{aligned} R : \quad & [T_0, T_1]^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \\ & (t_1, t_2) \mapsto R(t_1, t_2) \end{aligned}$$

telle que, pour tout $t_2 \in [T_0, T_1]$, l'application $R(., t_2) : [T_0, T_1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), t_1 \mapsto R(t_1, t_2)$ est solution du problème de Cauchy

$$\dot{M} = A(t)M, M(t_2) = Id_n,$$

avec Id_n la matrice identité de $\mathbb{R}^n$.

La matrice de transition possède certaines propriétés qui sont rappelées à la proposition 1.5 de [Coron 2009, page 5].

Proposition 2.1.41 *[Coron 2009, page 6] La solution au problème de Cauchy (2.28) vérifie*

$$x(t) = R(t, T_0)x_0 + \int_{T_0}^{t} R(t,\tau)b(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [T_0, T_1]. \tag{2.30}$$

Définition 2.1.42 *[Coron 2009, page 6] Le grammien de commandabilité du système*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

est la matrice symétrique de taille $n \times n$

$$\mathcal{C} = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,\tau)B(\tau)B(\tau)^\top R(T_1,\tau)^\top d\tau. \tag{2.31}$$

Théorème 2.1.43 *[Coron 2009, page 6] Le système linéaire à temps variant $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ est commandable si et seulement si le grammien de commandabilité est inversible.*

Remarque Le grammien de commandabilité est une matrice symétrique non négative.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top \mathcal{C} x = \int_{T_0}^{T_1} |B(\tau)^\top R(T_1,\tau)^\top x|^2 d\tau. \tag{2.32}$$

En particulier, $\mathcal{C}$ est inversible si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que

$$x^\top \mathcal{C} x \geq c|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.33}$$

Définition 2.1.44 *[Kern 1982] Le système (2.25) est uniformément complètement commandable s'il existe K tel que pour tout t, $|A(t)| \leq K$, $|B(t)| \leq K$ et s'il existe $\delta_c > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$,*

$$0 < \alpha(\delta_c)I \leq \int_{t-\delta_c}^{t} R(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^\top R(t,\tau)^\top d\tau \tag{2.34}$$

avec $\alpha(.)$ une fonction continue.

2.1.4.2 Commandabilité d'un système linéaire à temps invariant

Soit Σ_5 le système linéaire à temps invariant

$$\Sigma_5 : \quad \dot{x} = Ax + Bu. \tag{2.35}$$

Notons que dans le cas précis où A et B ne dépendent pas du temps, les expressions de la matrice de transition (2.36) ainsi que du grammien de commandabilité (2.37) s'en trouvent simplifiées.

$$R(t_1, t_2) = e^{(t_1 - t_2)A}, \quad \forall (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2 \tag{2.36}$$

$$\mathcal{C} = \int_{T_0}^{T_1} e^{(T_1-\tau)A} BB^\top e^{(T_1-\tau)A^\top} d\tau. \tag{2.37}$$

Dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant, nous présentons le critère de Kalman qui est une alternative à la condition nécessaire et suffisante de commandabilité du système par l'analyse du grammien.

Théorème 2.1.45 (Critère de Kalman) *Le système linéaire à temps invariant $\dot{x} = Ax + Bu$ est commandable sur $[T_0, T_1]$ si et seulement si*

$$Span\{A^i Bu; u \in \mathbb{R}^m, i \in \{0, \ldots, n-1\}\} = \mathbb{R}^n. \tag{2.38}$$

2.1.4.3 Commandabilité d'un système non linéaire à temps invariant

Soit Σ_6 le système non linéaire à temps invariant

$$\Sigma_6 : \quad \dot{x} = f(x, u). \tag{2.39}$$

Définition 2.1.46 *[Coron 2009, page 125] Soit $(x_e, u_e) \in \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$) un point d'équilibre du système non linéaire à temps invariant (2.39). Ce système est localement commandable en temps petit ("small-time locally controllable", également dit STLC) à l'équilibre (x_e, u_e) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in B_\eta(x_e) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_e| < \eta\}$ et pour tout $x_1 \in B_\eta(x_e)$, il existe une fonction mesurable $u : [0, \epsilon] \to \mathbb{R}^m$ telle que*

$$|u(t) - u_e| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [0, \epsilon],$$
$$(\dot{x} = f(x, u(t)), x(0) = x_0) \Rightarrow (x(\epsilon) = x_1)$$

Il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante pour vérifier la commandabilité locale en temps petit pour des systèmes généraux. En revanche, certaines conditions nécessaires sont connues pour couvrir un large spectre de systèmes. Ces critères sont énoncés dans la suite du document.

Définition 2.1.47 *Soit (x_e, u_e) un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x, u)$. Le linéarisé tangent du système en (x_e, u_e) est le système linéaire*

$$\dot{\delta}_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)\delta_x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)\delta_u \tag{2.40}$$

avec $\delta_x = x - x_e$, $\delta_u = u - u_e$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Théorème 2.1.48 *[Coron 2009, page 128] Soit (x_e, u_e) un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x, u)$. Supposons que le linéarisé tangent soit commandable en (x_e, u_e). Alors le système non linéaire $\dot{x} = f(x, u)$ est localement commandable en temps petit (STLC).*

Si le linéarisé tangent n'est pas commandable en un point d'équilibre, il est toujours possible de vérifier le critère de rang de l'algèbre de Lie (LARC : *"Lie Algebra Rank Condition"*) énoncé ci-dessous.

Définition 2.1.49 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Définissons*

$$X = (X^1, ..., X^n)^\top \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$$
$$Y = (Y^1, ..., Y^n)^\top \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

Le crochet de Lie $[X, Y] = ([X, Y]^1, ..., [X, Y]^n)^\top$ de X et Y est l'élément de $C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ défini par

$$[X, Y](x) = Y'(x)X(x) - X'(x)Y(x), \quad x \in \Omega \tag{2.41}$$

ou encore

$$[X, Y]^j(x) = \sum_{k=1}^{n} X^k(x)\frac{\partial Y^j}{\partial x_k}(x) - Y^k(x)\frac{\partial X^j}{\partial x_k}(x), \forall j \in \{1, ..., n\}, \quad x \in \Omega. \tag{2.42}$$

Définition 2.1.50 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de champs de vecteurs de classe C^∞ dans Ω. L'appellation Lie($\mathcal{F}$) est l'algèbre de Lie générée par les champs de vecteurs $\mathcal{F}$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace linéaire E de $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tel que*

$$\mathcal{F} \subset E,$$
$$(X \in E \text{ et } Y \in E) \Rightarrow ([X, Y] \in E)$$

Notons $\mathcal{A}(x_e, u_e) = \{g(x_e); g \in Lie(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial u^\alpha}(., u_e), \alpha \in \mathbb{N}^m)\}$. $\mathcal{A}(x_e, u_e)$ s'obtient en considérant les champs de commandes et leurs crochets itérés (cf. [Coron 2009, page 130]).

Définition 2.1.51 (LARC) *Le système $\dot{x} = f(x, u)$ satisfait la condition de rang de l'algèbre de Lie au point d'équilibre (x_e, u_e) si*

$$\mathcal{A}(x_e, u_e) = \mathbb{R}^n \tag{2.43}$$

Remarque Si le système satisfait la LARC, alors il est dit faiblement localement commandable. Pour les systèmes linéaires à temps invariant, la LARC est équivalent au critère de Kalman.

Théorème 2.1.52 *Supposons que le système $\dot{x} = f(x, u)$ soit STLC au point d'équilibre (x_e, u_e) et que f soit analytique. Alors le système satisfait la LARC au point d'équilibre en question.*

La réciproque n'est pas vraie en général. Une exception est cependant faite pour les systèmes affines sans dérive.

Définition 2.1.53 *Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est dit affine en la commande s'il existe $m + 1$ applications $f_i, i \in \{0, ..., m\}$ telles que*

$$f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \quad \forall (x, u) \in \mathcal{O}. \tag{2.44}$$

Si $f_0 = 0$, le système est dit affine sans dérive.

Théorème 2.1.54 *(Rashevski-Chow [Coron 2009, page 135]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Omega \times \{0\} \subset \mathcal{O}$. Supposons également qu'il existe $f_1, ..., f_m \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, tel que*

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \quad \forall (x, u) \in \mathcal{O}.$$

Soit $x_e \in \Omega$ tel que

$$\mathcal{A}(x_e, 0) = \mathbb{R}^n.$$

Alors le système $\dot{x} = f(x, u)$ est localement commandable en temps petit (STLC) au point d'équilibre $(x_e, 0) \in \mathcal{O}$.

Remarque Il est également prouvé que la commandabilité d'un système affine sans dérive vérifiant la LARC est même globale [Coron 2009, page 135].

À l'exception des systèmes affines sans dérive, la condition de rang de l'algèbre de Lie n'est pas une condition suffisante de commandabilité locale. Le théorème de Sussmann, détaillé dans [Coron 2009, page 143], fait intervenir en plus de la LARC d'autres conditions nécessaires connues sous le nom de "Bad and Good iterated Lie brackets". Ces notions ne sont pas présentées dans ce document, mais peuvent être consultées dans [Coron 2009, pages 141-149].

2.2 Contrôle de véhicule

Le comportement dynamique du quadrotor terrestre à l'étude est très proche de l'aéroglisseur, comme détaillé au chapitre 3 sur la modélisation du drone. Une analogie est également faite avec d'autres systèmes : le modèle d'aéroglisseur décrit dans [Fantoni *et al.* 1999] est tiré des véhicules marins de type bateau. Notre système possède donc des caractéristiques semblables aux navires, et plus généralement à une classe de véhicules dits sous-actionnés. Nous présentons donc dans la suite du document leurs caractéristiques ainsi que les similarités qu'ils partagent avec les véhicules non holonomes. Elles sont également illustrées par deux exemples typiques de la littérature : le système Unicycle et le Glisseur. Par ailleurs, nous introduisons la notion de suivi de trajectoire ainsi que les étapes préliminaires usuelles avant l'analyse et l'élaboration d'une loi de contrôle pour ce type de systèmes (cf. [Canudas De Wit *et al.* 1997], [Morin & Samson 2009a], [Morin & Samson 2005a]).

2.2.1 Modèle de véhicule

Le comportement cinématique et dynamique d'un véhicule peut être modélisé de manière générique [Campion *et al.* 1991] sous la forme des équations suivantes :

- équation cinématique
$$\dot{q} = B(q)u \tag{2.45}$$
- équation dynamique
$$M(q)\dot{u} = -N(q,u)u + P(q,u,t) + C\tau \tag{2.46}$$

Le vecteur $q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables de configurations. Le vecteur $u \in \mathbb{R}^m$ correspond aux vitesses instantanées non contraintes ; sa dimension est alors égale au nombre de degrés de liberté du véhicule. $\tau \in \mathbb{R}^p$ symbolise ici les forces ou les couples appliqués par les actionneurs au système. Les matrices $M(q) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $N(q,u) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et le vecteur $P(q,u,t) \in \mathbb{R}^m$ correspondent respectivement aux matrices d'inertie, aux forces de Coriolis et centrifuges et aux éventuelles forces extérieures. Les matrices $B(q) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$ sont considérées de rangs respectifs m et p ($n \geq m \geq p$). Notons aussi que la matrice $M(q)$ est inversible.

2.2.1.1 Véhicule non-holonome

Une contrainte sur un système mécanique restreint son mouvement en limitant l'ensemble des chemins que le système peut suivre. Une contrainte de la forme

$$A(q)\dot{q} = 0$$

avec $A(q) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ représentant un ensemble de k contraintes de vitesse, est appelée Pfaffian. Elles restreignent l'espace des vitesses instantanées permis par le système mais pas nécessairement l'espace des configurations. Ce dernier se voit réduit si la contrainte Pfaffian est intégrable [Murray *et al.* 1994, chapitre 6], on parle également de contrainte holonome. À l'inverse, elle est non holonome lorsque la contrainte cinématique est non intégrable, elle ne restreint pas l'espace des configurations. Dans le cas qui nous intéresse c'est-à-dire lorsque $p = m < n$, la matrice $B(q) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de l'équation (2.45) indique qu'il existe $n - m$ contraintes de vitesse puisqu'il est possible de trouver une matrice $\hat{B}(q)$ telle que $\hat{B}(q)B(q) = 0$, ceci revient donc à écrire l'équation sous la forme d'une contrainte Pfaffian : $\hat{B}(q)\dot{q} = 0$. Dans ce cadre, un véhicule est dit non holonome si les contraintes précédentes sont non holonomes. Pour que ceci soit vrai, le système d'équation (2.45) vérifie nécessairement la condition de rang de l'algèbre de Lie ; la commandabilité complète est équivalente à la non holonomie complète et tout l'espace de configurations $\mathbb{R}^n$ est alors atteignable (voir [Murray *et al.* 1994] et [Kolmanovsky & McClamroch 1995] pour plus de détails). Par ailleurs, le nombre d'actionneurs indépendants est égal au nombre de degrés de liberté : les

axes "cinématiquement libres" sont donc commandables et la matrice C est alors inversible. Lors de l'étude d'un système non-holonome, il est classique de ne considérer que le modèle cinématique. La matrice C étant inversible, il est relativement facile d'assurer la convergence asymptotique de l'étage dynamique avec le vecteur de contrôle τ en linéarisant les équations dynamiques par des méthodes de type "Backstepping" par exemple. La difficulté pour ce type de système provient donc essentiellement des contraintes cinématiques. Les robots mobiles à roues sont les véhicules non-holonomes les plus répandus. L'Unicycle et la voiture sont les cas d'études les plus classiques de la littérature.

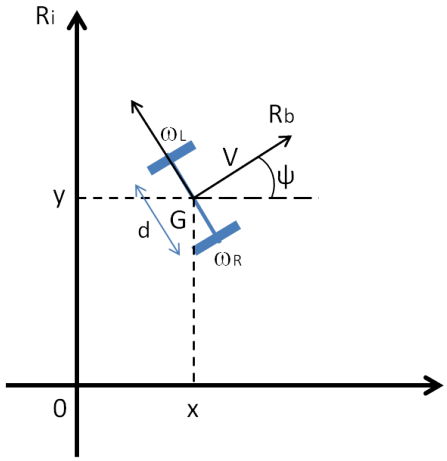

FIGURE 2.2 – robot Unicycle.

Unicycle :

Ce robot se déplace sur un plan 2D ; la dimension n du vecteur des variables de configurations est telle que $n = 3$ et $q = (x, y, \psi)^\top$. Le vecteur $u = (v_1, \dot{\psi})^\top$ de dimension $m = 2$ est composé d'une vitesse longitudinale v_1 et d'une vitesse de rotation $\dot{\psi}$. Les commandes physiques considérées sont les vitesses de rotation des roues gauche et droite. La simplicité mécanique de ce robot, son caractère non-holonome ainsi que sa capacité à pouvoir effectuer simultanément des rotations et des translations, ont fortement contribué à sa notoriété, aussi bien auprès des roboticiens que des automaticiens. L'Unicycle représenté à la figure (2.2) est un robot mobile composé de manière générale de deux roues motrices indépendantes et d'une roue folle. Sa non-holonomie provient, tout comme une voiture, de son incapacité à se déplacer de manière instantanée dans sa direction latérale ($p = m < n$). Des manoeuvres sont alors nécessaires. Par ailleurs, sous l'hypothèse du roulement sans glissement de ses roues, il est possible d'exprimer le comportement cinématique du point G en fonction des commandes de rotation des roues droite et gauche notées ω_R, ω_L, du rayon R des roues et de la voie d. En effet, la vitesse longitudinale v_1 et la vitesse instantanée de rotation $\Omega = \dot{\psi}$, peuvent s'écrire en fonction de ces commandes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_1 & = & R(\omega_R + \omega_L) \\ \Omega & = & \frac{R}{2d}(\omega_R - \omega_L) \end{array} \right. \tag{2.47}$$

Le comportement cinématique du système s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_1 \cos(\psi) \\ \dot{y} & = & v_1 \sin(\psi) \\ \dot{\psi} & = & \Omega \end{array} \right. \tag{2.48}$$

2.2.1.2 Véhicule sous-actionné

Dans un souci de comparaison avec les véhicules non-holonomes, le sous-actionnement est lié à une perte de dimension au niveau de la dynamique du système, et non pas de sa cinématique. Le nombre d'actionneurs indépendants est inférieur au nombre de degrés de liberté ($p < m = n$). Le système complet (cinématique et dynamique) est alors à prendre en compte. À l'exception des véhicules à roues, la grande majorité des véhicules existants sont sous-actionnés, ne serait-ce que pour des questions de coût, de poids, d'encombrement, de complexité mécanique... La conception la plus standard est constituée d'un vecteur de poussée dirigé selon l'axe longitudinal de l'engin tandis qu'un second actionneur permet le changement d'orientation. Il est rare de voir l'axe latéral actionné. Nous pouvons citer quelques exemples de véhicules sous-actionnés :

- véhicules marins (bateaux sans hélices latérales, sous-marins, aéroglisseurs...)
- avions, drone, hélicoptères...

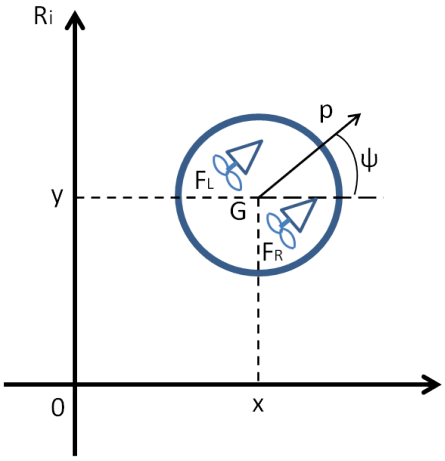

FIGURE 2.3 – robot Glisseur.

Le Glisseur :

Le Glisseur est un véhicule sous-actionné que nous présentons ici puisque son comportement est similaire à un aéroglisseur ou à notre quadrirotor terrestre. Se déplaçant sur un plan 2D, le vecteur q de configuration est le même que pour l'Unicycle : $q = (x, y, \psi)^\top$ et $n = 3$. En revanche, les vitesses instantanées du vecteur u ne sont pas contraintes et sa dimension est égale à $n = m = 3$: $u = (v_1, v_2, \dot{\psi})^\top$ avec v_1, v_2 les vitesses longitudinale et latérale. La dimension du vecteur de commande est alors inférieure à 3 : $p = 2 \leq m = n = 3$. Ce véhicule schématisé à la figure (2.3) est propulsé par deux hélices produisant les forces F_L et F_R. La somme de ces deux forces est directement liée à l'accélération de l'engin tandis que la différence agit sur la dynamique en rotation. Notons alors $\tau_1 = F_L + F_R$ et $\tau_2 = F_R - F_L$. Le système complet devient :

$$\begin{cases} \dot{q} & = & B(q)u \\ m\dot{v}_1 & = & mv_2\dot{\psi} + \tau_1 \\ m\dot{v}_2 & = & -mv_1\dot{\psi} \\ I\ddot{\psi} & = & \tau_2 \end{cases} \tag{2.49}$$

avec

$$B(q) = \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les notations C_ψ et S_ψ font respectivement référence au cosinus et au sinus de l'angle ψ. Il est à noter, cependant, que l'expression ci-dessus ne prend pas en compte la présence de frottement. De plus, $B(q)$ n'est autre que la matrice de rotation permettant de passer du repère inertiel R_i au repère du robot R_b (voir 3). Le système d'équations (2.49) met en avant les variables d'état du Glisseur exprimées dans le repère du véhicule. Ceci peut tout aussi bien être exprimé dans le repère inertiel :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= C_\psi \tau_1 \\ m\ddot{y} &= S_\psi \tau_1 \\ I\ddot{\psi} &= \tau_2 \end{cases} \tag{2.50}$$

L'analogie entre ce système d'équations et celui de l'Unicycle (2.48) devient flagrante. La distinction des comportements cinématiques ou dynamiques entre un système non-holonome et sous-actionné devient alors plus claire.

2.2.2 Suivi de trajectoire

Le suivi de trajectoire des véhicules non-holonomes ou sous-actionnés a fait l'objet de nombreuses recherches ces vingt dernières années. Il existe deux stratégies de suivi de trajectoire : le suivi de chemin, désigné généralement par le terme de "path following", et le suivi de trajectoire, désigné quant à lui par "trajectory tracking". Afin d'illustrer au mieux ces deux notions, nous présentons le cas du suivi de trajectoire pour le système mobile Unicycle.

2.2.2.1 "Path following"

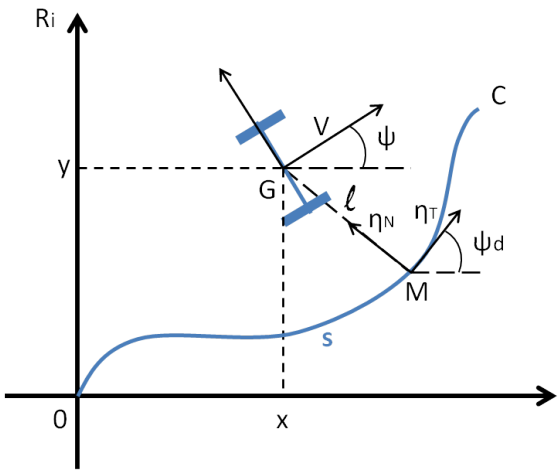

FIGURE 2.4 – Suivi de chemin.

La première approche représentée par le schéma de la figure (2.4) cherche à faire converger la position G du robot vers le point M, ainsi que l'orientation ψ vers l'angle ψ_d défini entre l'axe η_t du repère de Frenet (M, η_t, η_N) avec l'axe x du repère inertiel. η_t n'est autre que la tangente de la courbe au point M. Le point M est défini comme étant la projection orthogonale du point G du robot sur le chemin C. Notons en revanche que les conditions d'existence et d'unicité de ce point sont satisfaites si la distance l n'est pas trop grande (voir [Morin & Samson 2009a]). L'abscisse curviligne notée s, la distance l ainsi que l'erreur en orientation $\tilde{\psi} = \psi - \psi_d$ sont les nouveaux états du système. Finalement, suivre un chemin C défini sur un plan $2D - xy$ avec une vitesse de

translation $v(t)$ revient à trouver une loi de contrôle $\omega = k(s, l, \tilde{\psi}, v(t))$ agissant sur la vitesse de rotation telle que $l(t)$ et $\tilde{\psi}$ tendent vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Cette approche, un peu moins restrictive que le suivi de trajectoire décrit plus bas, n'est pas à l'étude dans cette thèse.

2.2.2.2 "Trajectory tracking"

Le suivi de trajectoire de type "trajectory tracking" schématisé sur la figure (2.5) vise à faire converger la position et l'orientation du robot vers la position et l'orientation d'un robot virtuel de référence régit par les mêmes équations de mouvement. L'état de ce robot virtuel est annoté de l'indice r par la suite. De manière générale, les contraintes cinématiques (non-holonomie) ou dynamiques (sous-actionnement) limitent le choix des trajectoires de référence. Toutes les trajectoires ne sont pas nécessairement réalisables, c'est pourquoi ce modèle de référence est instauré. Dans le cas de l'Unicycle, le robot virtuel de référence satisfait le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_r &= v_{1r}\cos(\psi_r) \\ \dot{y}_r &= v_{1r}\sin(\psi_r) \\ \dot{\psi}_r &= \Omega_r \end{cases} \tag{2.51}$$

avec v_{1r} et Ω_r bornés ainsi que leurs dérivées.

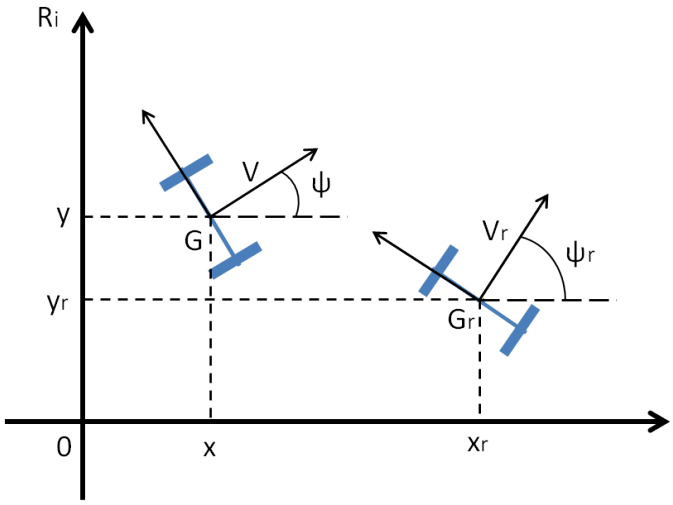

FIGURE 2.5 – Suivi de trajectoire.

L'objectif de ce type de suivi de trajectoire est de trouver une loi de commande $(v_1, \Omega)^\top = k(x, x_r, y, y_r, \psi, \psi_r, v_{1r}, \Omega_r)$ telle que les erreurs $e_x = x - x_r$, $e_y = y - y_r$ et $e_\psi = \psi - \psi_r$ tendent vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Dans la suite du document, le terme de suivi de trajectoire fera uniquement référence au concept de "trajectory tracking".

2.2.2.3 Description des systèmes de l'Unicycle et du Glisseur pour le suivi de trajectoire

Une manière d'analyser et résoudre le problème de suivi de trajectoire passe par l'expression de la dynamique du vecteur d'erreur $e = (e_x, e_y, e_\psi)^\top$ en fonction des différentes commandes. Il est souvent plus pratique d'exprimer ce vecteur d'erreur dans le repère du véhicule. Il est proposé ici d'illustrer ces propos par l'analyse des deux exemples présentés précedemment : l'Unicycle et le Glisseur.

Rappelons que le passage du repère inertiel au repère du véhicule se fait grâce à la matrice de rotation présentée à l'équation (2.49) ou au chapitre 3. Considérons un vecteur $[u]_{R_i}$ exprimé dans le repère inertiel R_i, $[u]_{R_b}$, ce même vecteur exprimé dans le repère du robot R_b, et R_ψ la matrice de passage définie par l'expression suivante :

$$[u]_{R_b} = R_\psi [u]_{R_i} \tag{2.52}$$

avec

$$R_\psi = \begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix}$$

Remarque : la matrice de passage inverse est la transposée de R_ψ. De plus, la dérivée temporelle de la matrice de rotation R_ψ se calcule de la manière suivante :

$$\dot{R}_\psi = \dot{\psi} J R_\psi \tag{2.53}$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Unicycle : [Canudas De Wit *et al.* 1997], [Kanayama *et al.* 1990], [Samson & Ait-Abderrahim 1990]

Les erreurs e_x et e_y projetées dans le repère du robot sont notées respectivement e_1 et e_2. Elles sont également décrites comme étant les erreurs longitudinales et latérales. L'erreur d'orientation e_ψ est quant à elle la même dans les deux repères. Cependant, pour plus de clareté, elle est notée e_3 par la suite. Le changement de coordonnées est exprimé par l'équation ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi & 0 \\ -S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\psi \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

Dans un premier temps, nous considérons les deux premières composantes du vecteur d'erreur :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = R_\psi \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

En utilisant les équations (2.48), (2.51), (2.53) et (2.55), il est possible d'exprimer la dérivée temporelle des erreurs e_1 et e_2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \end{pmatrix} &= \dot{\psi} J R_\psi \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} + R_\psi \begin{pmatrix} \dot{e_x} \\ \dot{e_y} \end{pmatrix} \\ &= \dot{\psi} J \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + R_\psi \begin{pmatrix} v_1 C_\psi - v_{1r} C_{\psi_r} \\ v_1 S_\psi - v_{1r} S_{\psi_r} \end{pmatrix} \\ &= \dot{\psi} J \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_{1r} C_{\psi - \psi_r} \\ v_{1r} S_{\psi - \psi_r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, le système correspondant au suivi de trajectoire de l'Unicycle est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(e_3) \\ 0 \end{pmatrix} v_{1r} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

avec $u_1 = v_1 - v_{1r}\cos(e_3)$ et $u_2 = \Omega - \Omega_r$. Suivre une trajectoire revient donc à trouver une loi de contrôle $(u_1, u_2)^\top$ qui fait converger asymptotiquement $(e_1, e_2, e_3)^\top$ vers $(0, 0, 0)^\top$.

Glisseur :

L'analyse du problème pour le véhicule de type Glisseur est la même que pour l'Unicycle, malgré une dimension plus grande des variables d'états. Considérons le vecteur d'erreur $e = (e_x, e_y, e_\psi, e_{\dot{x}}, e_{\dot{y}}, e_{\dot{\psi}})^\top = (x - x_r, y - y_r, \psi - \psi_r, \dot{x} - \dot{x}_r, \dot{y} - \dot{y}_r, \dot{\psi} - \dot{\psi}_r)^\top$: l'expression de ce vecteur d'erreur dans le repère du véhicule est établie par le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_\psi & C_\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_\psi & S_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\psi \\ e_{\dot{x}} \\ e_{\dot{y}} \\ e_{\dot{\psi}} \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

Le véhicule virtuel annoté de l'indice r satisfait les équations dynamiques ci-dessous :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_r &= C_{\psi_r}\tau_{1r} \\ m\ddot{y}_r &= S_{\psi_r}\tau_{1r} \\ I\ddot{\psi}_r &= \tau_{2r} \end{cases} \tag{2.58}$$

En procédant exactement de la même manière que pour l'Unicycle, les équations (2.50), (2.53), (2.57) et (2.58) nous conduisent à :

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \\ \dot{e_5} \\ \dot{e_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(e_3) \\ 0 \end{pmatrix} u_{1r} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

avec $u_{1r} = \frac{\tau_{1r}}{m}$, $u'_1 = \frac{1}{m}(\tau_1 - \tau_{1r}\cos(e_3))$ et $u'_2 = \frac{1}{I}(\tau_2 - \tau_{2r})$.

2.2.3 Commandabilité

Il est proposé dans la suite d'analyser les propriétés de commandabilité de l'Unicycle et du Glisseur. Ceci se justifie d'autant plus que les caractéristiques principales des véhicules non holonomes et sous actionnés proviennent de cette analyse.

2.2.3.1 Linéarisé tangent

Unicycle :

Le linéarisé tangent (2.60) du système (2.56) s'obtient en le linéarisant au point d'équilibre ($e = 0, u = 0$).

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi}_r & 0 \\ -\dot{\psi}_r & 0 & v_{1r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

La commandabilité d'un système linéaire à temps invariant $\dot{x} = Ax + Bu$ se vérifie avec le critère de Kalman (2.38) pour lequel il est nécessaire de vérifier le rang de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dot{\psi}_r^2 & v_{1r}\dot{\psi}_r \\ 0 & 0 & -\dot{\psi}_r & v_{1r} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que cette matrice est de rang plein uniquement lorsque $(v_{1r}, \dot{\psi}_r) \neq (0,0)$. Le système (2.60) n'est donc pas commandable en un point fixe. D'après le théorème (2.1.48), il est tout de même possible d'affirmer que le système non linéaire (2.56) est localement commandable en temps petit lorsque la trajectoire est telle que $(v_{1r}, \dot{\psi}_r) \neq (0,0)$.

Glisseur :

De la même manière que pour l'Unicycle, nous vérifions le critère de Kalman pour le linéarisé tangent du Glisseur (2.61).

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \\ \dot{e_5} \\ \dot{e_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi}_r & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dot{\psi}_r & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\psi}_r & 0 \\ 0 & 0 & u_{1r} & -\dot{\psi}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B & A^5B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3\dot{\psi}_r^2 & 0 & 0 & 2u_{1r}\dot{\psi}_r & 5\dot{\psi}_r^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\dot{\psi}_r & 0 & 0 & u_{1r} & 4\dot{\psi}_r^3 & 0 & 0 & -3u_{1r}\dot{\psi}_r^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\dot{\psi}_r^2 & 0 & 0 & u_{1r}\dot{\psi}_r & \dot{\psi}_r^4 & 0 & 0 & -u_{1r}\dot{\psi}_r^3 \\ 0 & 0 & -\dot{\psi}_r & 0 & 0 & u_{1r} & \dot{\psi}_r^3 & 0 & 0 & -u_{1r}\dot{\psi}_r^2 & -\dot{\psi}_r^5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le rang de la matrice $\mathcal{C}$ est de 6 lorsque $(u_{1r}, \dot{\psi}_r) \neq (0,0)$. Dans le cas du Glisseur, le linéarisé tangent n'est pas commandable pour $(u_{1r}, \dot{\psi}_r) = (0,0)$ c'est à dire pour des trajectoires caractérisées par des vitesses longitudinale et de rotation constantes. En ajoutant une modélisation des frottements cinétiques dans le système, une trajectoire vérifiant la condition $(u_{1r}, \dot{\psi}_r) = (0,0)$ n'est alors plus qu'un point fixe. Le système non linéaire original est alors localement commandable en temps petit lorsque $(u_{1r}, \dot{\psi}_r) \neq (0,0)$ d'après le théorème (2.1.48).

2.2.3.2 Crochets de Lie

La non commandabilité du linéarisé tangent en un point fixe n'implique pas forcément la non commandabilité du système non linéaire original. Nous savons que la LARC (Lie Algebra Rank Condition) est une condition nécessaire pour la commandabilité locale en temps petit d'un système non linéaire (cf (2.1.52)). En revanche, nous rappelons que cette condition est suffisante pour les systèmes affines sans dérive (cf (2.1.54)). Nous vérifions la LARC pour le système Unicycle et pour le Glisseur en un point fixe.

Unicycle :

Le système d'équations (2.62) est l'expression de (2.56) dans le cadre d'un suivi de trajectoire de type point fixe : $(v_{1r}, \dot{\psi}_r) = (0,0)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \end{pmatrix}}_{e} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -e_1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_1} \Omega + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_2} U_1 \quad \text{avec} \quad U_1 = v_1 + e_2\Omega. \tag{2.62}$$

Le crochet de Lie $[X_1, X_2]$ se calcule de la manière suivante :

$$[X_1, X_2] = \underbrace{\frac{\partial X_2}{\partial e}}_{0} X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial e} X_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, le système Unicycle satisfait la condition de rang de l'algèbre de Lie puisque

$$\mathcal{A}((v_{1r}, \dot{\psi}_r) = (0,0)) = \{X_1, X_2, [X_1, X_2]\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -e_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathbb{R}^3.$$

Le système (2.62) étant de plus affine sans dérive avec des champs de vecteurs analytiques, d'après le théorème (2.1.54) l'Unicycle est localement commandable en temps petit pour des trajectoires de type point fixe.

Glisseur :

Le calcul des crochets de Lie itérés n'est pas décrit ici. Nous faisons uniquement l'analogie du système du Glisseur avec celui du bateau décrit dans l'article [Pettersen & Egeland 1996] et pour lequel la condition de rang de l'algèbre de Lie est démontrée. Pour respecter la comparaison, nous introduisons une modélisation des frottements cinétiques caractérisés par les coefficients $d_1, d_2, d_3 > 0$. Cette hypothèse n'est pas restrictive.

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \\ \dot{e_5} \\ \dot{e_6} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -d_1 & \dot{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{\psi} & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_3 \end{pmatrix}}_{f} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} u_1' + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2} u_2' \tag{2.63}$$

D'après [Pettersen & Egeland 1996], $\mathcal{A} = \{X_1, X_2, [f, X_1], [f, X_2], [X_2, [f, X_1]], [X_2, [[X_1, f], f]]\} = \mathbb{R}^6$. Les champs de vecteurs f, X_1, X_2 étant analytiques, la LARC est donc vérifiée. Contrairement à l'Unicycle, le Glisseur n'est pas affine sans dérive et la condition de rang de l'algèbre de Lie n'est pas suffisante pour montrer la commandabilité locale. En revanche, il est prouvé dans [Pettersen & Egeland 1996] que le système (2.63) satisfait le théorème de Sussmann évoqué brièvement à la fin du paragraphe (2.1.4.3) : le Glisseur est donc localement commandable en temps petit pour tout point fixe.

Finalement la commandabilité locale est assurée pour les deux systèmes en tout point $(v_{1r}, \dot{\psi}_r) \in \mathbb{R}^2$ ou $(u_{1r}, \dot{\psi}_r) \in \mathbb{R}^2$.

2.3 Etat de l'art du contrôle des véhicules non holonomes et sous-actionnés

Il apparaît une fois de plus que les deux systèmes non holonomes et sous actionnés sont semblables sur bien des points, et en particulier sur leurs propriétés de non commandabilité de leurs linéarisés tangents en un point d'équilibre $(v_{1r}, \dot{\psi}_r)$ ou $(u_{1r}, \dot{\psi}_r) = (0, 0)$. Il est possible de tirer quelques conclusions sur la nature des lois de contrôle qui peuvent être utilisées. En effet, nous pouvons faire remarquer que tout système linéaire commandable peut être stabilisé par des retours d'états continus. Il est même possible d'aller plus loin puisqu'un système non linéaire est commandable et stabilisable au moins localement par des retours d'états si son linéarisé tangent est commandable. Il est donc possible de trouver des lois de contrôle par retours d'états capables de stabiliser l'Unicycle ou le Glisseur sur des trajectoires de référence dites excitantes, c'est-à-dire pour $(v_{1r}, \dot{\psi}_r) \neq (0, 0)$ ou $(u_{1r}, \dot{\psi}_r) \neq (0, 0)$. Ces lois peuvent être linéaires, voire non linéaires, afin d'étendre le domaine de stabilité pour des conditions d'excitation plus souples : par exemple $\int_t^{t+T} u_{1r}(s)^2 ds > \epsilon \quad \forall t$ avec $T, \epsilon > 0$. En revanche, la synthèse d'un bouclage capable de stabiliser asymptotiquement le système en un point fixe est beaucoup plus délicat. Le theorème de Brockett, rappelé ci-dessous (2.3.1), apporte d'ailleurs la preuve que ceci n'est pas possible au moyen de retours d'états continus puisque ni l'Unicycle ni le Glisseur ne satisfont la condition de Brockett. Cette limitation majeure dans l'élaboration de lois de commandes nous amène à considérer séparément le problème de suivi de trajectoire et la stabilisation en un point.

Théorème 2.3.1 *(Brockett [Brockett 1983]) Si le système $\dot{x} = f(x, u)$ peut être localement asymptotiquement stabilisable par des retours d'état continus, alors l'image par f de tout voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$.*

Remarque L'Unicycle et le Glisseur ne sont pas stabilisables par des retours d'états continus. Nous pouvons considérer un voisinage $e = (0, \epsilon, 0)^\top$ de l'origine avec $\epsilon \neq 0$; il est clair qu'il n'appartient pas à l'image de $f = (U_1, -e_1\Omega, \Omega)^\top$ définie à l'équation (2.62). De la même manière, le voisinage $e = (\epsilon, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$ n'appartient pas à l'image du système dynamique du Glisseur (2.63).

La stabilisation en un point requiert d'appliquer des méthodes de contrôle moins classiques que pour le suivi de trajectoires excitantes. Les alternatives les plus répandues utilisent :

- des bouclages à temps variant le plus souvent au moyen de fonctions périodiques ;
- des bouclages discontinus ;
- des lois de commandes stabilisant uniquement une partie de l'état ;
- des contrôles stabilisant le système de manière pratique, c'est-à-dire assurant la stabilité dans un voisinage proche de la référence.

La suite de cette section s'attelle à présenter ces différentes techniques de bouclage capables de stabiliser les navires de surface sous actionnés dont le modèle du Glisseur, proche de notre système à l'étude, est tiré. Bien que l'Unicycle soit un système un peu éloigné de notre drone terrestre, j'ai souhaité présenter dans un premier temps quelques exemples non exhautifs de stabilisation de ce véhicule à roues. Ce choix est justifié pour plusieurs raisons :

- la dimension du système est faible et les calculs moins complexes, il en résulte que les difficultés rencontrées pour la synthèse du bouclage sont plus simplement exposées ;
- les méthodes de contrôle utilisées pour la stabilisation des navires sont en général adaptées de celles utilisées pour l'Unicycle. Ceci est particulièrement vrai pour les stabilisations en un point.

2.3.1 Unicycle : suivi de trajectoires excitantes

2.3.1.1 Loi de contrôle linéaire et placement de pôles

Reprenons le système linéarisé tangent à temps invariant de l'Unicycle (2.60) :

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi}_r & 0 \\ -\dot{\psi}_r & 0 & v_{1r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

avec $\dot{\psi}_r$ et v_{1r} constants. L'exemple ci-dessous est tiré de [Canudas De Wit *et al.* 1997] p128. La loi de contrôle

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1 e_1 \\ u_2 &= -k_2 sign(v_{1r}) e_2 - k_3 e_3 \end{aligned} \tag{2.64}$$

rend le système localement asymptotiquement stable tant que $(\dot{\psi}_r, v_{1r}) \neq (0,0)$. Les gains peuvent être réglés de manière à placer arbitrairement les pôles du système bouclé. Le polynôme caractéristique du système bouclé se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \chi(s) = det(sI - (A - BK)) &= \begin{vmatrix} s+k_1 & -\dot{\psi}_r & 0 \\ \dot{\psi}_r & s & -v_{1r} \\ 0 & k_2 & s+k_3 \end{vmatrix} \\ &= (s+k_1)\left(s(s+k_3) + v_{1r}k_2\right) + \dot{\psi}_r^2 (s+k_3) \end{aligned}$$

Il suffit de prendre

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\xi a \\ k_2 &= \tfrac{a^2 - \dot{\psi}_r^2}{|v_{1r}|} \\ k_3 &= 2\xi a \end{aligned}$$

pour amener $\chi(s)$ sous la forme d'un pôlynome de Hurwitz

$$\chi(s) = (s + 2\xi a)\left(s^2 + 2\xi a s + a^2\right)$$

avec ξ, a des constantes positives qui déterminent la valeur des pôles fixes du système bouclé. En revanche, le gain k_2 n'est pas adéquat pour des valeurs de v_{1r} petites. Ceci est amélioré en rendant les racines de $\chi(s)$ dépendantes de v_{1r} et $\dot{\psi}_r$. Par exemple, les gains

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\xi(\dot{\psi}_r^2 + b{v_{1r}}^2)^{\frac{1}{2}} \\ k_2 &= b|v_{1r}| \\ k_3 &= 2\xi(\dot{\psi}_r^2 + b{v_{1r}}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donnés dans [Canudas De Wit *et al.* 1997] p129 sont bien définis pour toutes les valeurs de v_{1r} et $\dot{\psi}_r$. Cette méthode de contrôle reste tout de même limitée puisque, d'une part, la stabilité asymptotique n'est assurée que localement et, d'autre part, parce que les trajectoires de référence sont restreintes à v_{1r} et $\dot{\psi}_r$ constants.

2.3.1.2 Loi de contrôle non linéaire

Avant de décrire le contrôle non linéaire proposé par [Samson & Ait-Abderrahim 1990] et repris par [Canudas De Wit *et al.* 1997] p129, nous introduisons le lemme de Barbalat (2.3.2), qui est utilisé dans la preuve de la stabilité de la loi de commande.

Lemme 2.3.2 *(Barbalat [Khalil 1995, page 192]) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $[0, \infty)$. Supposons que $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \phi(\tau)d\tau$ existe et est finie. Alors,*

$$\phi(t) \to 0 \text{ quand } t \to \infty.$$

Le contrôle proposé est le suivant :

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & -k_1(v_{1r}, \dot{\psi}_r)e_1 \\ u_2 & = & -k_4 v_{1r}\frac{\sin e_3}{e_3}e_2 - k_3(v_{1r}, \dot{\psi}_r)e_3 \end{array}$$

avec k_4 une constante positive et $k_1(.), k_3(.)$ des fonctions continues strictement positives sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-(0,0)$. Elle permet la stabilisation asymptotique globale de l'Unicycle (2.56) autour d'une trajectoire de référence à temps variant pour laquelle $(\dot{\psi}_r(t), v_{1r}(t))$ ne tend pas vers $(0,0)$ quand t tend vers l'infini. Ce résultat se démontre avec la fonction de Lyapunov $V(e)$ suivante :

$$V(e) = \frac{k_4}{2}(e_1^2 + e_2^2) + \frac{e_3^2}{2}.$$

Sa dérivée le long des solutions est négative :

$$\begin{array}{rcl} \dot{V} & = & k_4 e_1(u_1 + \dot{\psi}e_2) + k_4 e_2(v_{1r}\sin e_3 - \dot{\psi}e_1) + e_3 u_2 \\ & = & -k_1 k_4 e_1^2 - k_3 e_3^2 \end{array}$$

En supposant que tout est borné et que $k_1(.)$ et $k_3(.)$ sont uniformément continus, alors $\dot{V}(t)$ l'est également et $V(t)$ tend vers une limite notée V_{lim}. D'après le lemme de Barbalat, $\dot{V}$ tend vers zéro ainsi que $k_1(.)e_1$ et $k_3(.)e_3$. Ces deux fonctions $k_1(.)$ et $k_3(.)$ peuvent être choisies de manière à déduire que $({v_{1r}}^2 + \dot{\psi}_r^2)e_1^2$ et $({v_{1r}}^2 + \dot{\psi}_r^2)e_3^2$ tendent également vers 0. Nous pouvons écrire

$$\dot{e}_3 = -k_4 v_{1r}\frac{\sin e_3}{e_3}e_2 + o(t), \quad \lim_{t\to\infty} o(t) = 0.$$

Comme $v_{1r}e_3$ tend vers zéro puisque $({v_{1r}}^2 + \dot{\psi}_r^2)e_3^2 \to_{t\to\infty} 0$, alors il est possible d'écrire :

$$\frac{d}{dt}({v_{1r}}^2 e_3) = -k_4 {v_{1r}}^3\frac{\sin e_3}{e_3}e_2 + o(t), \quad \lim_{t\to\infty} o(t) = 0.$$

À nouveau d'après Barbalat, $\frac{d}{dt}({v_{1r}}^2 e_3)$ tend vers zéro et, par conséquent, ${v_{1r}}^3\frac{\sin e_3}{e_3}e_2$ aussi. Le terme ${v_{1r}}^2((\frac{\sin e_3}{e_3})^2 + e_3^2)e_2^2$ converge également vers zéro. $((\frac{\sin e_3}{e_3})^2 + e_3^2)$ est strictement positif, ce qui permet de conclure que $v_{1r}e_2$ tend vers l'origine. On réitère le même raisonnement pour montrer que $\dot{\psi}_r e_2$ tend vers zéro. Prenons

$$\dot{e_1} = \dot{\psi}_r e_2 + o(t).$$

Sachant que $\dot{\psi}_r e_1$ tend vers zéro, sa dérivée aussi d'après Barbalat. Il en résulte que $\dot{\psi}_r^3 e_2$ et donc $\dot{\psi}_r e_2$ tendent finalement vers zéro d'après l'équation ci-dessous.

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi}_r^2 e_1) = \dot{\psi}_r^3 e_2 + o(t)$$

Il a été prouvé que $({v_{1r}}^2 + \dot{\psi}_r^2)e_i^2$ $(i = 1, 2, 3) \to_{t\to\infty} 0$. $({v_{1r}}^2 + \dot{\psi}_r^2)V(e)$ converge donc vers zéro. La trajectoire est supposée excitante : $({v_{1r}}^2 + \dot{\psi}_r^2) \neq 0$ et V_{lim} est nécessairement nulle.

2.3.1.3 Suivi de position

Des travaux ont également été effectués sur le concept de "suivi de position", mais sans contrôle de l'orientation du véhicule. En effet, si l'on regarde le système de l'Unicycle (2.48), pour atteindre une position désirée $P_r = (x_r(t), y_r(t))^\top$, il n'existe qu'un état désiré associé possible $(x_r(t), y_r(t), \psi_r(t))^\top$ calculé algébriquement :

$$\psi_r(t) = \arctan 2(\dot{y}_r(t), \dot{x}_r(t)) + k\pi$$

Ceci s'explique par le fait que (x, y) sont des sorties plates de l'Unicycle. Cette notion a été introduite en 1995 [Fliess *et al.* 1995] et intervient dans la définition d'un système plat :

Définition 2.3.3 *(système plat). On dit que le système défini par*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

est **plat** *s'il existe une application* $h : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{r+1} \to \mathbb{R}^m$*, une application* $\phi : (\mathbb{R}^m)^r \to \mathbb{R}^n$ *et une application* $\psi : (\mathbb{R}^m)^{r+1} \to \mathbb{R}^m$ *telles qu'on puisse écrire :*

$$\begin{aligned} y &= h(x, u, \dot{u}, ..., u^{(r)}) \\ x &= \phi(y, \dot{y}, ..., y^{(r-1)}) \\ u &= \psi(y, \dot{y}, ..., y^{(r-1)}, y^{(r)}) \end{aligned} \tag{2.65}$$

La sortie y *est alors dite plate.*

Il est intéressant de noter que tout le comportement dynamique du système se résume au comportement de sa sortie plate comme c'est le cas avec le lacet de l'Unicycle. Il devient donc avantageux de rechercher ces sorties plates pour simplifier l'analyse d'un système plat. Cette notion est particulièrement utile pour la génération de trajectoires. Dans le cas précédent, les commandes de référence sont donc calculables algébriquement :

$$\begin{aligned} v_{1r}(t) &= \pm\sqrt{\dot{x}_r(t)^2 + \dot{y}_r(t)^2} \\ \Omega_r(t) &= \frac{\ddot{y}_r(t)\dot{x}_r(t) - \ddot{x}_r(t)\dot{y}_r(t)}{\dot{x}_r(t)^2 + \dot{y}_r(t)^2} \end{aligned} \tag{2.66}$$

Au regard de la définition (2.3.3), l'Unicycle est bien plat.

Extension dynamique et linéarisation :

La loi de contrôle assurant un suivi de position et proposée par [Oriolo *et al.* 2002] est décrite ici. Considérons le système (2.67) suivant, dérivé de l'Unicycle après avoir supprimé la dynamique en lacet :

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \Omega \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

La matrice n'étant pas inversible, une extension dynamique est réalisée : la commande v_1 est retardée. Un nouvel état ξ est introduit ainsi qu'une nouvelle commande virtuelle a.

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi \\ \dot{\xi} &= a \end{aligned}$$

Cette modification du système considéré nous permet alors d'écrire la relation suivante :

$$\ddot{p} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\xi\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \xi\cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \Omega \end{pmatrix}$$

Cette matrice devient alors inversible pour $\xi \neq 0$, et les commandes peuvent être finalement reliées aux dynamiques de position. En prenant,

$$\begin{pmatrix} a \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\xi\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \xi\cos(\psi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} u_1 &= \ddot{x}_r(t) + k_{d1}(\dot{x}_r(t) - \dot{x}) + k_{p1}(x_r(t) - x) \\ u_2 &= \ddot{y}_r(t) + k_{d1}(\dot{y}_r(t) - \dot{y}) + k_{p1}(y_r(t) - y), \end{aligned}$$

avec des gains PD $k_{p1}, k_{d1}, k_{p2}, k_{d2} > 0$, alors le système est globalement exponentiellement stable sous réserve que la trajectoire de référence soit suffisamment régulière et excitante, c'est-à-dire $\xi_r = v_{1r} = \sqrt{\dot{x}_r(t)^2 + \dot{y}_r(t)^2} \neq 0$ (2.66).

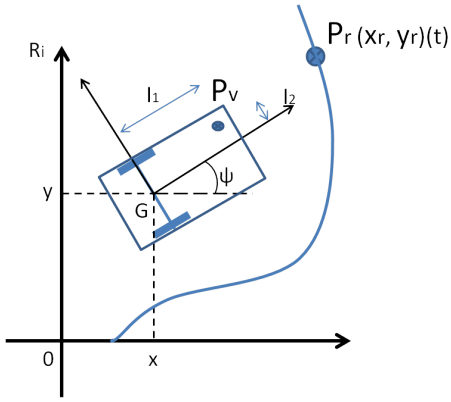

FIGURE 2.6 – Stabilisation du point P_v de l'Unicycle vers la position de référence .

Point virtuel de référence :

Un autre type de suivi de position est considéré avec l'utilisation d'un point virtuel de référence [Morin & Samson 2009a]. L'idée consiste à faire converger non pas le point G situé sur l'axe des roues, mais le point virtuel noté P_v vers la position de référence $P_r(t)$ (voir figure (2.6)). Le point G a des mouvements contraints de par le caractère non holonôme de l'Unicycle. En revanche, si le point P_v n'est pas situé sur l'essieu alors son mouvement n'est pas contraint. Si l'on considère que le point virtuel a pour coordonnées dans le repère véhicule $P_v = (l_1, l_2)^\top$, alors la dynamique de ce point s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -l_1 \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & l_1 \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \Omega \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

Le point n'est pas contraint et des lois de contrôle linéarisantes classiques peuvent être utilisées. Cependant, la dynamique de lacet est une zéro dynamique qui peut engendrer des instabilités, risquant probablement d'apparaître pour une vitesse $v_1 = 0$ de la même manière qu'avec l'approche par platitude via l'extension dynamique.

2.3.2 Unicycle : stabilisation en un point

Le théorème de Brockett fait obstruction à l'utilisation de retours d'états continus pour stabiliser l'Unicycle en un point. Pour pallier à cette restriction, des techniques de bouclage à temps variant sont possibles. Nous proposons ici de les présenter. Nous nous contentons pour le moment des systèmes Unicycles et des systèmes chaînés [Murray & Sastry 1991] qui constituent des modèles génériques plus simples à analyser. Nous savons déjà que la plupart des modèles cinématiques des véhicules à roues peuvent être réduits à l'Unicycle. Par ailleurs, il existe des conditions nécessaires et suffisantes [Murray & Sastry 1991] pour transformer un système dynamique en une forme chaînée via un changement de coordonnées. La plupart des véhicules non holonomes, dont l'Unicycle, satisfont ces conditions. Ces raisons nous ont ainsi poussé à insérer ces systèmes dans l'état de l'art. De nombreux auteurs cherchent à ramener leurs modèles dynamiques aux cas de systèmes chaînés plus simples et pour lesquelles de nombreux outils d'analyse existent. Nous pouvons citer un exemple classique de transformation (2.69) qui amène le modèle Unicycle (2.48) en la forme chaînée (2.70).

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & x \\ z_2 & = & \tan(\psi) \\ z_3 & = & y \\ v_1 & = & u_1 / \cos(\psi) \\ \Omega & = & u_2 \cos(\psi)^2 \end{array} \tag{2.69}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= u_1 \\ \dot{z}_2 &= u_2 \\ \dot{z}_3 &= z_2 u_1 \end{cases} \tag{2.70}$$

Dans le cadre plus spécifique de la stabilisation en un point, les méthodes non autonomes ont été pour la première fois utilisées pour les véhicules de type Unicycle dans [Samson 1991]. Dès lors, de nombreuses études ont été menées sur ces retours à temps variant.

2.3.2.1 Commande régulière à temps variant

Système chaîné de dimension 3 :

Le système de l'Unicycle réduit à la stabilisation en un point se trouve sous la forme d'un système chaîné de dimension 3. Nous rappelons l'expression de ses dynamiques vue précédemment à l'équation (2.62) :

$$\begin{cases} \dot{e_1} &= U_1 \\ \dot{e_2} &= -e_1\Omega \\ \dot{e_3} &= \Omega \end{cases}$$

De manière analogue à la loi de commande non linéaire précédente stabilisant une référence excitante, le contrôle [Morin & Samson 2009a] ci-après assure la convergence de e_2 et e_1 si Ω est excitant, c'est-à-dire s'il ne tend pas vers 0. Tout d'abord,

$$U_1 = \Omega k_2 e_2 - |\Omega| k_1 e_1$$

rend la fonction de Lyapunov

$$V(e) = e_2^2 + \frac{1}{k_2} e_1^2$$

décroissante le long des solutions :

$$\dot{V} = -2\frac{k_1}{k_2}|\Omega| e_1^2.$$

$V(e)$ tend vers une limite V_{lim} d'après le lemme de Barbalat $\dot{V} \to_{t\to\infty} 0$, ce qui assure $\lim_{t\to\infty} \Omega e_1^2 = \lim_{t\to\infty} \Omega e_1 = 0$.

$$\frac{d}{dt}(\Omega^2 e_1) = \Omega^2 U_1 + o(t), \quad \lim_{t\to\infty} o(t) = 0$$

Comme $\frac{d}{dt}(\Omega^2 e_1) \to 0$ d'après Barbalat, $\Omega^2 U_1 = \Omega^3 k_2 e_2 + o(t) \to 0$ et $\Omega e_2 \to 0$. Il est facile de montrer que $\Omega V(e) \to 0$ puisque $\Omega e_2 \to 0$ et $\Omega e_1 \to 0$. L'hypothèse Ω excitante permet alors de conclure que $V_{lim} = 0$. Ce contrôle fait converger e_2 et e_1 uniquement si la deuxième commande Ω est excitante. Il suffit de trouver une expression de Ω qui soit excitante tant que $(e_1, e_2) \neq (0, 0)$. Par exemple,

$$\Omega = k(e_1, e_2)\sin(t)$$

avec $k(.,.)$ une fonction strictement positive sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - (0, 0)$. Pour faire converger e_3 vers 0, un terme de régulation peut être ajouté sous la forme :

$$\Omega = -k_3 e_3 + k(e_1, e_2)\sin(t).$$

Finalement, le bouclage temps variant $(U_1(e, t), \Omega(e, t))$ défini par

$$\begin{cases} \Omega &= -k_3 e_3 + k(e_1, e_2)\sin(t) \\ U_1 &= \Omega k_2 e_2 - |\Omega| k_1 e_1 \end{cases} \tag{2.71}$$

rend l'origine du système chaîné globalement asymptotiquement stable.

Système chaîné de dimension n :

Le paramètre temporel supplémentaire est vu comme une variable excitante afin de rendre le système commandable lorsque c'est nécessaire. Ce dernier résultat est étendu aux systèmes chaînés de dimension quelconque dans [Samson 1995]. Soit,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & u_1 \\ \dot{x}_2 & = & u_1 x_3 \\ \dot{x}_3 & = & u_1 x_4 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ \dot{x}_{n-1} & = & u_1 x_n \\ \dot{x}_n & = & u_2 \end{cases} \tag{2.72}$$

un système chaîné de dimension n muni des commandes u_1, u_2. Il est prouvé dans [Samson 1995], [Morin & Samson 2000] et [Morin & Samson 1997] que la loi de contrôle (2.73) stabilise globalement et asymptotiquement l'origine de (2.72).

$$\begin{cases} u_1(x,t) & = & -k_1 x_1 + g(X_2)\sin t \\ u_2(x,t) & = & -u_1(x,t)\sum_{i=2}^{i=n} a_i sign(u_1)^{n+1-i} x_i \end{cases} \tag{2.73}$$

avec k_1 positif, $g(X_2)$ une fonction continue qui s'annule pour $X_2 = (x_2, x_3, ..., x_n)^\top = (0, ..., 0)^\top$ et a_i des gains qui stabilisent asymptotiquement le système (2.74) avec la commande $u = -\sum_{i=2}^{i=n} a_i x_i$.

$$\begin{cases} \dot{x}_2 & = & x_3 \\ \dot{x}_3 & = & x_4 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n \\ \dot{x}_n & = & u \end{cases} \tag{2.74}$$

La démonstration est la généralisation de la preuve précédente, réalisée pour le système Unicycle, à une dimension quelconque. En effet, le lemme de Barbalat sert également à montrer que le système (2.72) muni seulement de la commande u_2 décrite à l'équation (2.73) est asymptotiquement stable si u_1 est excitant.

Système sans dérive :

De surcroît, l'auteur de [Coron 1992] a prouvé l'existence de bouclages réguliers à temps variant périodiques qui stabilisent tout système sans dérive vérifiant la condition de rang de l'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. La section 4.4 du chapitre 4 utilise d'ailleurs les résultats présentés dans [Coron & d'Andréa-Novel 1993] pour la synthèse de bouclages stabilisant l'origine des systèmes du type $\dot{x} = vf(x,u)$.

2.3.2.2 Commande homogène à temps variant

La principale limitation des commandes régulières à temps variant est la vitesse de convergence relativement lente. Néanmoins, il est prouvé dans [Coron & Pomet 1993] qu'il est possible de générer des retours périodiques assurant une convergence en temps fini au moyen de bouclages réguliers partout sauf à l'origine. Ce résultat a alors amené la communauté à élaborer des contrôles de ce genre, apportant ainsi une convergence exponentielle. La technique la plus usitée s'appuie sur les propriétés d'homogénéité des systèmes. Rappelons quelques définitions :

Définition 2.3.4 *Soit $\lambda > 0$ et un ensemble de réels $r_i > 0 \quad (i = 1, ..., n)$. L'opérateur de dilatation $\delta_\lambda^r : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est défini par*

$$\delta_\lambda^r(x_1, ..., x_n) = (\lambda^{r_1} x_1, ..., \lambda^{r_n} x_n).$$

Définition 2.3.5 *Une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est homogène de degré $d \geq 0$ par rapport à la dilatation δ_λ^r si*

$$\forall \lambda > 0, \quad f(\delta_\lambda^r(x)) = \lambda^d f(x).$$

Définition 2.3.6 *Un système différentiel $\dot{x} = f(x)$ avec $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ continue, est homogène de degré $d \geq 0$ par rapport à la dilatation δ_λ^r si*

$$\forall \lambda > 0, \quad f_i(\delta_\lambda^r(x)) = \lambda^{d+r_i} f_i(x) \quad (i = 1, ..., n).$$

Définition 2.3.7 *Toute fonction continue et positive $\rho(x)$ qui s'annule seulement à l'origine et qui est homogène de degré 1 est appelée norme homogène. Un exemple d'une telle fonction est donné ci-dessous :*

$$\rho_p^r(x) = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\frac{p}{r_j}})^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0.$$

L'intérêt porté aux propriétés d'homogénéité s'explique par le théorème suivant :

Théorème 2.3.8 *Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, $f(x, .)$ périodique et définit un champs de vecteur homogène de degré 0 par rapport à une dilatation $\delta(\lambda, .)$. Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

- *l'origine $x = 0$ du système $\dot{x} = f(x, t)$ est asymptotiquement stable,*
- *$x = 0$ est globalement exponentiellement stable au sens où il existe $\gamma > 0$ et, pour n'importe quelle norme homogène ρ, une valeur K telle que le long des trajectoires $x(t)$ $(t \geq t_0)$ du système $\dot{x} = f(x, t)$,*

$$\rho(x(t)) \leq K\rho(x(t_0))e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Les lois de contrôle à temps variant périodiques homogènes visent donc à rendre le système bouclé asymptotiquement stable à l'origine et homogène de degré 0 pour assurer la convergence exponentielle. Différentes démarches exposées dans [M'Closkey & Murray 1997], ou encore dans [Morin & Samson 2000], consistent à transformer les bouclages réguliers périodiques en des bouclages homogènes périodiques réguliers excepté à l'origine.

Système chaîné de dimension n :

Nous reprenons l'exemple de la loi de contrôle C^∞ (2.73). Il est décrit dans [Morin & Samson 2000] comment la transformer pour assurer une convergence exponentielle. La proposition 2 de [Morin & Samson 2000] est la suivante :

Proposition 2.3.9 *Le bouclage continu temps variant*

$$\begin{cases} u_1(x,t) &= -k_1 x_1 + \rho_q(X_2)\sin(t) \quad k_1 > 0, q \geq q_0 \\ u_2(x,t) &= -u_1(x,t)\sum_{i=2}^{i=n} a_i sign(u_1)^{n+1-i} \frac{x_i}{\rho_q(X_2)^{n+1-i}} \end{cases} \tag{2.75}$$

appliqué au système chaîné (2.72),

- *rend le système bouclé homogène de degré* 0 *par rapport à la dilatation* $\bar{\delta}_q(\lambda, x) = (\lambda x_1, \delta_q(\lambda, X_2))$,

- *rend* $\rho_q(X_2(t))$ *décroissante le long des solutions,*

- *et stabilise exponentiellement et globalement l'origine du système* (2.72).

Par ailleurs, q_0 et $\rho_q(.)$ doivent respecter certaines conditions (lemme 3 [Morin & Samson 2000]). Ces contraintes sont cependant levées pour une norme particulière explicitée à la proposition 3 du même article.

Un inconvénient majeur apparaît cependant : ces lois de contrôle uniquement continues sont peu robustes [Morin & Samson 2006c], à l'inverse des commandes C^∞ précédentes. Finalement, une bonne robustesse aux bruits et aux erreurs de modélisation s'accompagne d'une convergence lente. Les lois homogènes continues assurent quant à elles une convergence rapide mais peu de robustesse.

2.3.3 Navire : suivi de trajectoires excitantes

La configuration des commandes sur un navire sous actionné est généralement composée d'un actionneur de poussée dans l'axe longitudinal du bateau tandis qu'un second contrôle permet le changement d'orientation au moyen, par exemple, d'un gouvernail.

2.3.3.1 Modèle dynamique d'un navire sous actionné

Le modèle dynamique d'un navire de surface sous actionné est présenté dans [Fossen 1994], il s'écrit sous la forme générique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M\dot{\nu} + C(\nu)\nu + D\nu & = & \tau \\ \dot{\eta} & = & J(\eta)\nu \end{array} \right. \tag{2.76}$$

avec

$$C(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m_{22}v \\ 0 & 0 & m_{11}u \\ m_{22}v & -m_{11}u & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(\eta) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -d_{33} \end{pmatrix}$$

Les matrices $C(\nu)$ et D représentent respectivement les termes de coriolis et les termes d'amortissement hydrodynamique. Le vecteur $M = (m_{11}, m_{22}, m_{33})^\top$ peut sembler particulier puisque la masse d'un navire n'est pas dépendante de ses axes. Néanmoins, ces masses sont considérées différentes selon les axes afin de modéliser certains effets hydrodynamiques sous forme de masses ajoutées [Fossen 1994]. Finalement, le modèle complet (2.78) s'obtient en posant les coordonnées $(z_1, z_2, z_3)^\top$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 & = & \cos(\psi)x + \sin(\psi)y \\ z_2 & = & -\sin(\psi)x + \cos(\psi)y \\ z_3 & = & \psi \end{array} \right. \tag{2.77}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= u + z_2 r \\ \dot{z}_2 &= v - z_1 r \\ \dot{z}_3 &= r \\ \dot{u} &= \frac{m_{22}}{m_{11}} vr - \frac{d_{11}}{m_{11}} u + \frac{1}{m_{11}} \tau_1 \\ \dot{v} &= -\frac{m_{11}}{m_{22}} ur - \frac{d_{22}}{m_{22}} v \\ \dot{r} &= \frac{m_{11}-m_{22}}{m_{33}} uv - \frac{d_{33}}{m_{33}} u + \frac{1}{m_{33}} \tau_3 \end{cases} \tag{2.78}$$

2.3.3.2 Suivi de position et linéarisation

"Backstepping" :

La technique de "Backstepping" [Sepulchre 2011] a été élaborée pour stabiliser des systèmes non linéaires particuliers. En effet, ces systèmes doivent pouvoir s'écrire sous forme de plusieurs sous-systèmes en cascade interdépendants. L'exemple le plus basique est une chaîne d'intégrateurs. Afin de stabiliser l'ensemble, chaque sous-système doit stabiliser celui qui suit, et ce jusqu'à atteindre la véritable variable de commande. Considérons le système Σ suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f(x_1) + x_2 \\ \dot{x_2} = u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{2.79}$$

L'objectif du contrôle est d'amener y à 0 quand $t \to \infty$ et rendre le point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

étape 1 :

Définissons le changement de variable suivant $z_1 = x_1 - 0$:

$$\Sigma_1 : \quad \dot{z_1} = f(z_1) + x_2 \tag{2.80}$$

A cette étape, x_2 est considéré comme la commande de ce sous-système Σ_1. De plus, en prenant comme fonction $V_1(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2$, $\dot{V_1} = \dot{z_1}z_1 = (f(z_1) + x_2)z_1$. Cette fonction stabilise Σ_1 si elle est de Lyapunov. Pour que ce soit le cas, il est possible de prendre $x_2 = -f(z_1) - k_1 z_1$ avec $k_1 > 0$. En revanche, x_2 n'étant pas la commande réelle, posons $z_2 = x_2 - x_{2d}$ avec $x_{2d} = -f(z_1) - k_1 z_1$ la commande désirée pour stabiliser Σ_1.

$$\Sigma_1 : \quad \dot{z_1} = f(z_1) + x_{2d} + z_2$$

$$\dot{V_1} = (f(z_1) + x_{2d} + z_2)z_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2$$

$$\dot{z_2} = \dot{x_2} - \dot{x}_{2d} = u - \dot{x}_{2d}$$

étape 2 :

Prenons une deuxième fonction de Lyapunov V_2 pour compléter la première de la manière suivante : $V_2(z) = V_1(z_1) + \frac{1}{2}z_2^2$.

$$\dot{V_2} = \dot{V_1} + \dot{z_2}z_2 = -k_1 z_1^2 + z_2(u - \dot{x}_{2d} + z_1)$$

Finalement pour stabiliser le système complet Σ, il suffit de prendre u tel que :

$$u = \dot{x}_{2d} - z_1 - k_2 z_2 \quad \text{avec } k_2 > 0 \tag{2.81}$$

La fonction de Lyapunov V_2 est alors bien définie puisque :

$$\dot{V_2} = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 < 0$$

Le point d'équilibre $y = 0$ est donc globalement asymptotiquement stable.

Nous avons souhaité décrire cette approche linéarisante puisqu'elle est très utilisée pour la synthèse de loi de contrôle, y compris dans ce manuscrit. D'ailleurs, nous pouvons citer [Godhavn 1996] dans lequel est proposée une loi de contrôle basée sur la technique de "Backstepping", capable de stabiliser exponentiellement une position de référence $P_r(t)$ indéxée par le temps. Cette trajectoire doit cependant être suffisamment régulière $p_r(t) \in C^3$ et la vitesse longitudinale ne peut pas passer par zéro. Le cas de l'aéroglisseur ne peut pas être stabilisé par cette méthode puisque une singularité apparaît lorsque $m_{11} = m_{22}$. La zéro dynamique représentée par le lacet est cependant stable puisque $\dot{\psi}(t)$ est bornée. Une approche similaire est décrite dans [Fossen *et al.* 1998] ; le modèle dynamique prend cette fois-ci en compte des effets hydrodynamiques liés à la vitesse du véhicule et à la fréquence des vagues.

L'approche utilisant un point virtuel de référence 2.3.1.3 est reprise pour le suivi de position d'un navire dans [Berge *et al.* 1999]. Une analyse de la stabilité de la zéro dynamique est faite en fonction de la position du point virtuel.

Platitude :
D'autre part, la méthode s'appuyant sur une extension dynamique présentée au paragraphe (2.3.1.3) est étendue aux véhicules aéroglisseurs dans [Sira-Ramírez & Ibáñez 2000], [Sira-Ramírez 1999]. Le caractère plat de ce véhicule est souligné. Tout comme pour l'Unicycle, cette loi de contrôle s'accompagne d'une singularité lorsque

$$(\ddot{x}_r + \frac{d_{22}}{m_{22}}\dot{x}_r)^2 + (\ddot{y}_r + \frac{d_{22}}{m_{22}}\dot{y}_r)^2 = 0. \tag{2.82}$$

Ces travaux ont été poursuivis et combinés avec des méthodes par modes glissants dans [Sira-Ramírez 2002].

2.3.3.3 Vitesse de lacet continûment excitante

Le suivi de trajectoire complet d'un navire, c'est-à-dire comprenant le suivi d'une orientation de référence, est étudié dans [Pettersen & Nijmeijer 1998], [Pettersen & Nijmeijer 2001] et [Lefeber *et al.* 2003]. Dans les deux premiers articles, la loi de contrôle permet une stabilité exponentielle semi-globale de la trajectoire de référence. La technique utilisée se réfère à une méthode récursive appliquée aux systèmes chaînés et développée dans [Jiang & Nijmeijer 1999]. Malgré la présence d'une dérive dans le modèle du navire, contrairement au système chaîné, cette méthode récursive est adaptée au navire. En revanche, la limitation principale de ce contrôle provient de la nécessité d'avoir une vitesse de lacet de référence définie telle que $0 < \dot{\psi}_r^{min} < |\dot{\psi}_r(t)| < \dot{\psi}_r^{max}$.

Cette condition d'excitation s'avère plus souple avec la loi de contrôle proposée dans [Lefeber *et al.* 2003]. La solution apportée par ces auteurs cherche à profiter des résultats de [Panteley & Loria 2001] sur les systèmes en cascades à temps variant. Le système du navire est alors subdivisé en deux sous systèmes linéaires stabilisés indépendamment. L'idée est d'utiliser la commande en rotation pour faire tendre le lacet vers le lacet de référence, le second contrôle servant quant à lui à stabiliser les dynamiques longitudinales et latérales. Il est montré que cette deuxième stabilisation n'est possible que si la vitesse de lacet de référence est continûment persistante : $\exists \delta_c > 0, \epsilon > 0, \forall t \geq 0, \exists s : t - \delta_c \leq s \leq t$ tel que $|\dot{\psi}_r(t)| \geq \epsilon$.

2.3.4 Navire : stabilisation en un point

2.3.4.1 Loi de contrôle à temps variant

Les méthodes de stabilisation en un point pour les systèmes chaînés et Unicycle ne sont pas transposables directement pour les navires ou les Glisseurs. En effet, ces systèmes ne sont pas sans

dérive. Des outils d'analyse spécialement conçus pour ces systèmes plus complexes sont présentés dans [M'Closkey & Morin 1998]. Nous citons trois théorèmes d'approximation permettant de simplifier grandement l'analyse de la stabilité. Ils s'appuient sur les concepts d'approximation homogène, d'approximation par grands gains mais aussi sur la technique "d'averaging".

Théorème 2.3.10 *Soit $x = 0$ un point d'équilibre asymptotiquement stable du champs de vecteur continu T-périodique et homogène de degré 0 $\dot{x} = f(x,t)$. Considérons le système perturbé*

$$\dot{x} = f(x,t) + h(x,t) \tag{2.83}$$

sachant que chaque composante de $h(x,t)$ peut être uniformément bornée par,

$$|h_i(x,t)| \leq K\rho^{r_i+\epsilon}(x) \quad i = 1,...,n \quad x \in U, \quad \epsilon > 0$$

où U est un voisinage ouvert de l'origine, ρ une norme homogène quelconque, et K une constante positive. Alors $x = 0$ est un point d'équilibre localement exponentiellement stable du système perturbé (2.83).

Théorème 2.3.11 *Considérons le système*

$$\dot{x} = f(x, v(x^{(m)}, t), t) \tag{2.84}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^0 et T-périodique par rapport à t. $x^{(m)} = (x_1, ..., x_m)$, $m \leq n$, et $v : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^0, T-périodique et différentiable par rapport à t, de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^m \ \{0\}) \times \mathbb{R}$ et homogène de degré q par rapport à la dilatation δ_λ. Supposons de plus que (2.84) est homogène de degré 0 par rapport à δ_λ et que l'origine du système est asymptotiquement stable. Alors, pour $K > 0$ suffisamment grand, l'origine $(x = 0, y = 0)$ du système

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,y,t) \\ \dot{y} & = & -K(y - v(x^{(m)}, t)) \end{array}$$

est asymptotiquement stable.

Théorème 2.3.12 *[Coron 2009, page 332] Soit X un champs de vecteurs T-périodique temps variant de classe C^2. Supposons que l'origine est localement exponentiellement stable pour le système moyenné*

$$\dot{x} = \frac{1}{T}\int_0^T X(x,t)dt \tag{2.85}$$

Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, l'origine est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x, t/\epsilon)$.

Des exemples d'applications sont présentés dans [M'Closkey & Morin 1998] : la stabilisation exponentielle d'un système de type Glisseur et d'un engin spatial. Le premier utilise les théorèmes (2.3.10) et (2.3.11) tandis que le second appuie son analyse sur la technique "d'averaging" (2.3.12).

Nous pouvons citer également [Leonard 1995] dans lequel des contrôles périodiques sont utilisés pour forcer un système sous actionné (sous-marins, engins spatiaux) à se positionner et s'orienter. En ce qui concerne plus spécifiquement les navires sous actionnés, les articles [Pettersen & Egeland 1996] et [Pettersen & Egeland 1997] exposent une loi de contrôle périodique homogène à temps variant qui rend l'origine du système localement exponentiellement stable pour des fréquences d'oscillation suffisamment élevées. La preuve de cette stabilité utilise les trois théorèmes précédents. Cette commande a d'ailleurs été validée expérimentalement ; les résultats sont décrits dans [K. Y. Pettersen 1998]. Nous présentons brièvement ici quelques éléments de preuve de la stabilité de la loi de contrôle

tirée de [Pettersen & Egeland 1996]. Tout d'abord, rappelons les équations dynamiques d'un navire (2.78) dans le cadre d'une stabilisation à l'origine.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= u + z_2 r \\ \dot{z}_2 &= v - z_1 r \\ \dot{z}_3 &= r \\ \dot{u} &= \frac{m_{22}}{m_{11}} vr - \frac{d_{11}}{m_{11}} u + \frac{1}{m_{11}} \tau_1 \\ \dot{v} &= -\frac{m_{11}}{m_{22}} ur - \frac{d_{22}}{m_{22}} v \\ \dot{r} &= \frac{m_{11}-m_{22}}{m_{33}} uv - \frac{d_{33}}{m_{33}} u + \frac{1}{m_{33}} \tau_3 \end{cases}$$

Ce système peut être réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = l(z, \nu, t) + h(z, \nu, t) \tag{2.86}$$

avec

$$l(z, \nu, t) = \begin{pmatrix} u \\ v - z_1 r \\ r \\ \frac{1}{m_{11}}(\tau_1 - d_{11} u) \\ -\frac{m_{11}}{m_{22}} ur - \frac{d_{22}}{m_{22}} v \\ \frac{1}{m_{33}}(\tau_3 - d_{33} r) \end{pmatrix}$$

et

$$h(z, \nu, t) = \begin{pmatrix} z_2 r \\ 0 \\ 0 \\ \frac{m_{22}}{m_{11}} vr \\ 0 \\ \frac{m_{11}-m_{22}}{m_{33}} uv \end{pmatrix}.$$

La première étape consiste à considérer que les champs de vecteurs $l(z, \nu, t)$ et $h(z, \nu, t)$ sont homogènes de degrés respectifs 0 et 2 par rapport à la dilatation $\delta_\lambda^\beta(z, \nu, t) = (\lambda z_1, \lambda^2 z_2, \lambda z_3, \lambda u, \lambda^2 v, \lambda r, t)$. En utilisant le théorème (2.3.11) et la loi de contrôle (2.87), il est prouvé dans [Pettersen & Egeland 1996] que l'origine du système moyenné de $l(z, \nu, t)$ est localement exponentiellement stable.

$$\begin{array}{rcl} u_d(z, \nu, t) &=& -k_1 z_1 + \rho^\alpha(z, v) \sin(t/\epsilon) \\ r_d(z, \nu, t) &=& -k_2 z_3 + \frac{2}{\rho^\alpha(z,v)}(kz_2 + dv) \sin(t/\epsilon) \\ \tau_1(z, v, t) &=& -(k_3 m_{11} - d_{11}) u + k_3 m_{11} u_d(z, v, t) \\ \tau_3(z, v, t) &=& -(k_4 m_{33} - d_{33}) r + k_4 m_{33} r_d(z, v, t) \end{array} \tag{2.87}$$

avec $k_1, k_2, k, d > 0$, $\rho^\alpha(z, v)$ une norme homogène associée à la dilatation $\delta_\lambda^\alpha(z, v, t) = (\lambda z_1, \lambda^2 z_2, \lambda z_3, \lambda^2 v, t)$, $k_3, k_4 > 0$ suffisamment grands.

Pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit, et d'après le théorème (2.3.12), le système $(\dot{z}, \dot{\nu})^\top = l(z, \nu, t)$ est localement exponentiellement stable. Il vient alors, d'après le théorème (2.3.10), que l'origine de (2.86) est localement exponentiellement stable.

Une méthode alternative est décrite dans [Mazenc *et al.* 2002]. La loi de contrôle proposée n'est pas homogène ; elle est de classe C^∞ et la convergence n'est donc pas exponentielle. Par contre, la preuve de la stabilité utilise l'expression explicite d'une fonction de Lyapunov et des techniques de "Backstepping", elle n'est en aucun cas fondée sur les théorèmes d'approximations précédents. Il n'y a aucune contrainte sur le choix des fréquences d'oscillation des fonctions périodiques. Ceci est un avantage certain par rapport à la méthode exposée plus haut. Des résultats expérimentaux ont été réalisés ; ils sont détaillés dans [Pettersen *et al.* 2004].

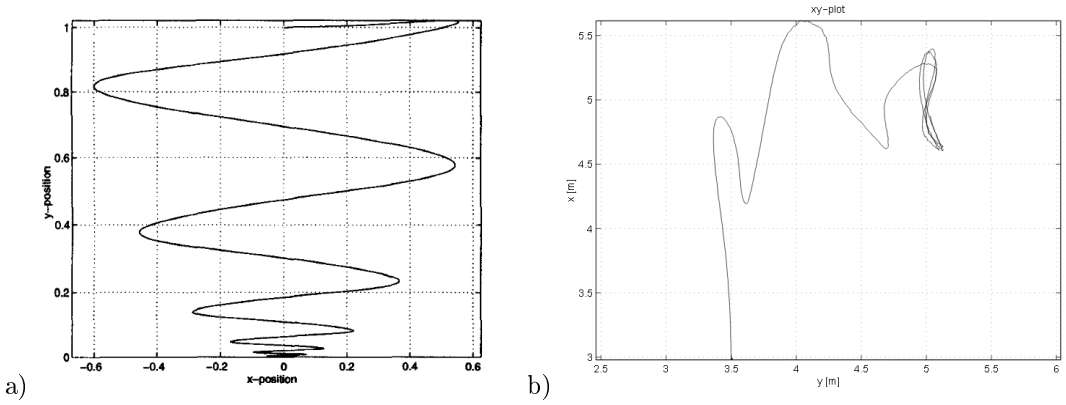

FIGURE 2.7 – Stabilisation d'un navire : a) résultats en simulation de la stabilisation à l'origine [Pettersen & Egeland 1996], b) résultats expérimentaux de la stabilisation en $(x = 5, y = 5)$ [K. Y. Pettersen 1998].

2.3.4.2 Stabilisation d'une partie de l'état

Il est proposé dans [Wichlund *et al.* 1995] de stabiliser asymptotiquement les systèmes de véhicule sous actionné vers une variété d'équilibre $M = \{(x, y, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}) | \dot{x} = \dot{y} = \dot{\psi} = x = y = 0\}$. La stabilisation en un point fixe sans la contrainte d'orientation $\psi = 0$ ne rentre pas dans le cadre de l'obstruction de Brockett. Le système peut alors être stabilisé au moyen de retours d'états continus comme le montre [Wichlund *et al.* 1995].

Un autre exemple de stabilisation partielle est proposé dans [Fantoni *et al.* 1999]. L'objectif consiste à stopper un aéroglisseur, c'est-à-dire faire tendre le système vers $M = \{(x, y, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}) | \dot{x} = \dot{y} = \dot{\psi} = 0\}$ au moyen de retours d'états continus. Le système dynamique considéré se résume alors aux vitesses longitudinale u, transversale v et de rotation r ci-dessous muni des deux commandes τ_u et τ_r :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vr + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur \\ \dot{r} &= \tau_r \end{aligned} \tag{2.88}$$

En considérant les contrôles

$$\begin{aligned} \tau_u &= -k_u u \\ \tau_r &= -ur - k_r(r - v) \end{aligned}$$

et la fonction de Lyapunov

$$V(u, v, r) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}(r - v)^2, \tag{2.89}$$

il est montré que (2.88) converge globalement asymptotiquement vers M. La démonstration utilise le principe d'invariance de LaSalle (2.1.29) appliqué à V et $\dot{V}$:

$$\dot{V} = -k_u u^2 - k_r(r - v)^2.$$

Cette idée est reprise à la section 5 du chapitre 4.

2.3.4.3 Commandes discontinues

Quelques auteurs [Reyhanoglu 1996], [Fantoni *et al.* 1999] ont utilisé des lois invariantes discontinues pour stabiliser en un point des véhicules sous actionnés. [Reyhanoglu 1996] propose une

commande discontinue capable de stabiliser un navire en un point si certaines conditions initiales sont respectées : $\psi(0) \neq 0$ et $\dot{\psi}(0) = 0$. À l'inverse, aucune contrainte n'est imposée sur les conditions initiales par les contrôles décrits dans [Fantoni *et al.* 1999] mais le lacet ne converge pas vers 0.

2.3.5 Stabilisation pratique

Il apparaît très clairement que les lois de contrôle utilisées pour le suivi de trajectoire diffèrent radicalement de celles consacrées à la stabilisation. La synthèse d'une commande générique capable d'effectuer un suivi de trajectoire admissible quelconque, qu'elle soit excitante ou non, est difficile. Il est d'ailleurs prouvé dans [Lizárraga 2004] qu'il n'existe pas de loi de contrôle stabilisante "universelle" pour les systèmes présentant des contraintes non holonomiques. La notion d'universalité est caractérisée par des conditions analytiques décrites dans ce même article. Ces limitations fortes ont amené certains auteurs à considérer le problème de la stabilisation pratique, c'est-à-dire stabiliser le système dans un voisinage arbitrairement petit de la trajectoire de référence. Malgré le fait que la stabilisation ne soit pas asymptotique, ce type de méthode peut présenter quelques avantages, comme par exemple suivre une référence non nécessairement faisable et faciliter par la même occasion le processus de génération de trajectoire.

2.3.5.1 Navire : commandes invariantes

Pour ce type de loi de contrôle pratique, nous pouvons citer [Aguiar & Hespanha 2003] et [Aguiar & Hespanha 2007]. Les commandes utilisées sont des retours d'états continus invariants permettant de stabiliser la position, et non l'orientation, des véhicules sous-actionnés. L'orientation est alors intrinsèquement déterminée par les dynamiques de position comme c'est le cas avec l'approche par platitude 2.3.1.3 ou avec la méthode du point virtuel de référence 2.3.1.3. Des résultats de simulation sur la stabilisation d'aéroglisseur ou de sous-marins y sont également fournis. Par ailleurs, des essais expérimentaux ont été menés sur la plateforme MVWT Caltech Multi-Vehicle Wireless Testbed (cf. [Chung *et al.* 2004], [Chauvin *et al.* 2003], [Cremean *et al.* 2002], [Jin *et al.* 2004]) et sont décrits dans [Aguiar *et al.* 2003].

Cette approche consiste à effectuer une linéarisation via la technique de "Backstepping". Cette linéarisation s'accompagne, de la même manière qu'avec l'approche par platitude, d'une singularité que les auteurs se proposent d'éviter en faisant tendre artificiellement le système vers un voisinage de la position de référence. Il est utilisé à la section 4.2 du chapitre 4 une méthode très similaire à celle-ci et pour laquelle la caractérisation du voisinage en question est plus claire.

Par ailleurs, nous pouvons noter que cette loi de contrôle permet de stabiliser de manière pratique n'importe quelle trajectoire (position indéxée par le temps) sous réserve qu'elle soit au moins de classe C^3.

2.3.5.2 Navire : commandes à temps variant

Les auteurs de [Pettersen & Nijmeijer 1999] proposent deux lois de contrôle périodiques en temps capables de stabiliser globalement et exponentiellement, au sens pratique, un navire sous-actionné respectivement autour de l'origine et le long de trajectoires de référence. Ces dernières sont par ailleurs caractérisées par des vitesses longitudinale et de rotation u_r, r_r constantes et par une vitesse latérale $v_r = 0$. Les commandes synthétisées s'appuient sur des approches de linéarisation de type "Backstepping" et sur la méthode "d'Averaging". La particularité de la convergence au sens pratique est nettement visible sur les simulations (figure 2.8).

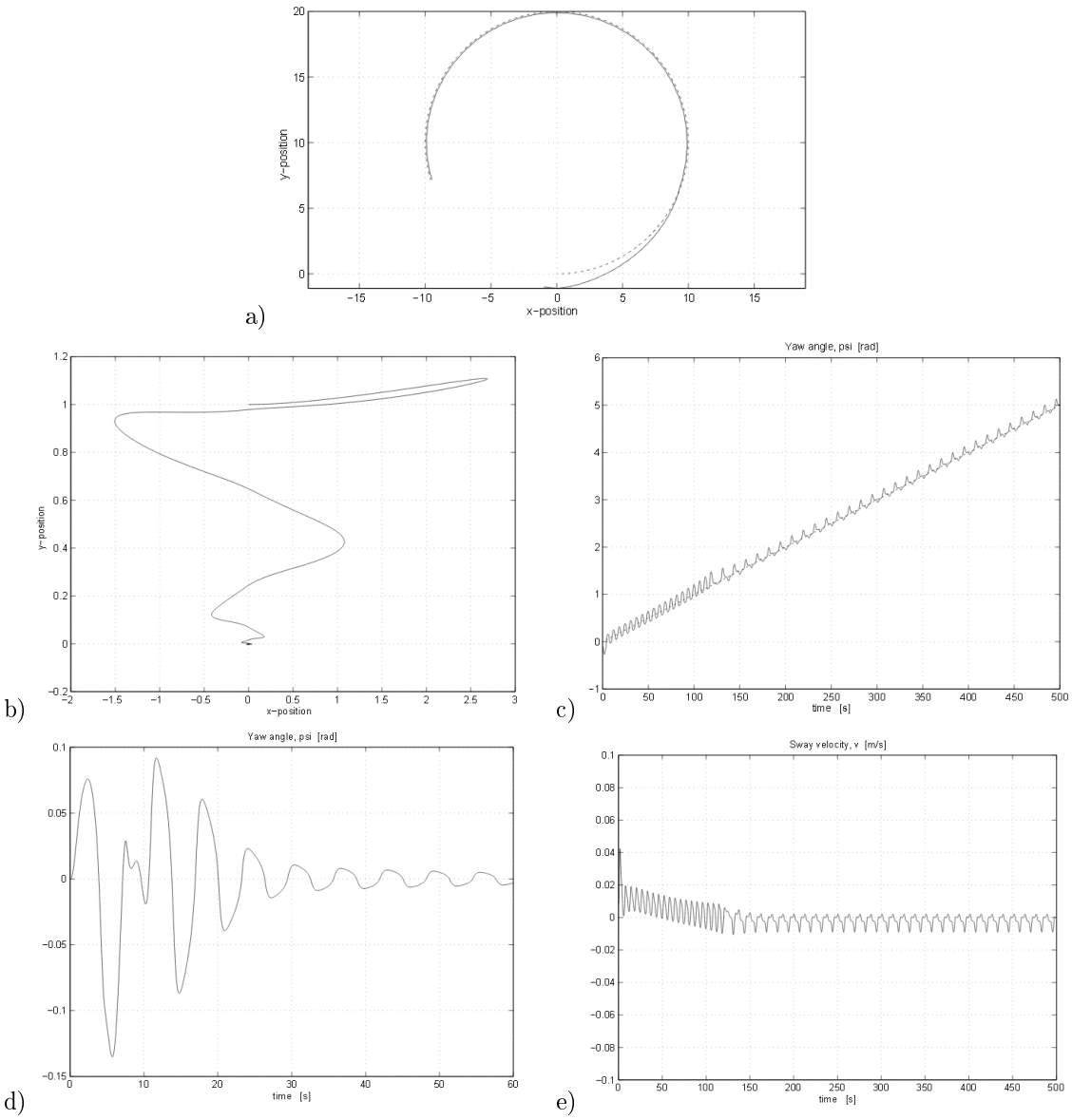

FIGURE 2.8 – Simulations de la stabilisation pratique d'un navire [Pettersen & Nijmeijer 1999] : a) suivi d'un cercle, b) stabilisation à l'origine, c) évolution du lacet lors du suivi de cercle, d) évolution du lacet lors de la stabilisation à l'origine, e) évolution de la vitesse latérale lors du suivi de cercle.

2.3.5.3 Fonctions transverses

L'intérêt de cette approche par fonctions transverses est clairement mis en avant dans [Morin & Samson 2009c] et [Morin & Samson 2006b]. De manière générale, suivre exactement une trajectoire de référence q_r quelconque et non nécessairement admissible pour le système, amène à des singularités dans le contrôle. L'approche en question ici propose de maintenir l'état du système dans un domaine local stable autour de la référence, de manière à éviter les éventuelles singularités. Pour un système sans dérive Σ du type $\dot{q} = \sum_{i=1}^{m} v_i X_i(q)$, cette méthode s'appuie sur un "feedback" dynamique $v(q, \theta, q_r, \dot{q_r})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \sum_{i=1}^{m} v_i X_i(q) \\ \dot{\theta}_j = \omega_j, \quad j = 1, ..., p \end{array} \right.$$

L'idée de la stabilisation dit "pratique" est de faire tendre $q - q_r$ vers les valeurs d'une fonction transverse $f(\theta)$ qui peut être choisie arbitrairement "petite". Pour les véhicules de type bateau ou Unicycle, la dynamique de cette fonction $f(\theta)$ va permettre d'actionner artificiellement l'axe latéral. La dynamique du système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q - q_r - f(\theta)) &= \sum_{i=1}^{m} v_i X_i(q) - \sum_{j=1}^{p} \omega_j \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(\theta) - \dot{q}_r \\ &= \sum_{i=1}^{m} v_i X_i(q_r + f(\theta)) - \sum_{j=1}^{p} \omega_j \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(\theta) - \dot{q}_r + O^2(v, q - q_r - f(\theta)) \\ &= M(q_r, \theta) \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} - \dot{q}_r + O^2(v, q - q_r - f(\theta)) \end{aligned} \tag{2.90}$$

avec $M(q_r, \theta) = (X_1(q_r + f(\theta)) ... X_m(q_r + f(\theta)) - \frac{\partial f}{\partial \theta_{m+1}}(\theta) ... - \frac{\partial f}{\partial \theta_n}(\theta))$. f est une fonction transverse (autour de q_r) si, pour tout θ, le rang de la matrice $M(q_r, \theta)$ est égal à n. Dès lors, en inversant l'équation on obtient la loi de contrôle. L'avantage de cette méthode est visible d'un point de vue pratique puisque la stabilité du contrôle est prouvée dans un voisinage de la trajectoire de référence. De cette manière on s'affranchit du problème de la génération de trajectoire qui doit être admissible pour le système en question. Il est ainsi possible de fournir n'importe quelle trajectoire ; le système pourra contourner les éventuelles singularités dans la trajectoire en oscillant autour de celles-ci tout en restant dans son voisinage. Ce type de loi de contrôle permet non seulement le suivi de trajectoire mais également la stabilisation locale en un point. Les auteurs à l'origine de cette méthode ont développé un panel d'outils pour construire ces fonctions transverses et la loi de contrôle associée. Les systèmes chaînés, l'Unicycle ainsi qu'une classe importante de systèmes sous-actionnés sont étudiés dans les articles [Morin & Samson 2003], [Morin & Samson 2003], [Morin & Samson 2009c] ou encore [Morin & Samson 2005b], [Morin & Samson 2005c], [Morin & Samson 2006a]. Dans la section 4.3 du chapitre 4, l'approche par fonctions transverses est détaillée et appliquée à notre système de drone.

Chapitre 3

Modélisation du drone terrestre

Sommaire

3.1 Les angles d'Euler **52**
3.2 Principe de la dynamique **55**
3.2.1 Quantité d'accélération 56
3.2.2 Moment dynamique du solide Σ 57
3.2.2.1 Moment cinétique du solide S_1 57
3.2.2.2 Moment cinétique du solide $S_{2'}$ 58
3.2.2.3 Moments extérieurs s'exerçant sur le système Σ 60
3.2.3 Moment dynamique du système isolé $S_{2'}$ 60
3.2.4 Moment dynamique du système isolé S_{3i} 61
3.3 Modèle dynamique complet **61**

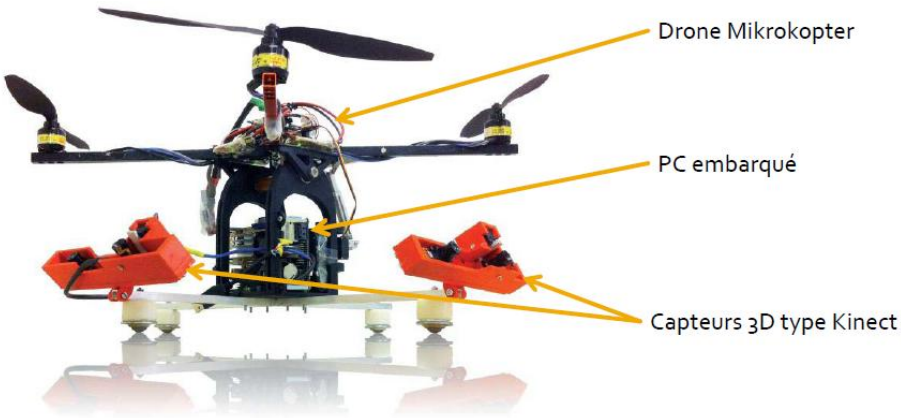

Figure 3.1 – Structure du quadrotor

Ce chapitre est dédié à la construction du modèle dynamique de notre drone terrestre. Cette modélisation porte uniquement sur le mouvement du drone au sol. À ce stade, les frottements du sol ne sont pas pris en compte. Notre approche utilise le principe fondamental de la dynamique et les outils développés dans la théorie de la mécanique du solide ([Pommier 2005, pages 16-17]), [Pommier 2005, pages 45-54]. La structure du robot peut être décomposée en trois parties (voir figures 3.1 et 3.2-a) :

- le socle, muni de quatre billes lui permettant de glisser sur le sol comme le ferait un aéroglisseur ;

- le support en croix, sur lequel sont fixés les moteurs ;

– et les quatre hélices.

Le support en croix est inclinable au moyen d'un servomoteur (voir figure 3.2-b). Il est alors possible de diriger la poussée des hélices afin de créer un mouvement longitudinal et de rotation ; ceci est représenté aux figures 3.2-c et 3.2-d. Les commandes qui contrôlent la dynamique du drone auxquelles nous avons accès sont :

– les moteurs, munis de leurs hélices

– et le servomoteur, permettant l'inclinaison du support en croix.

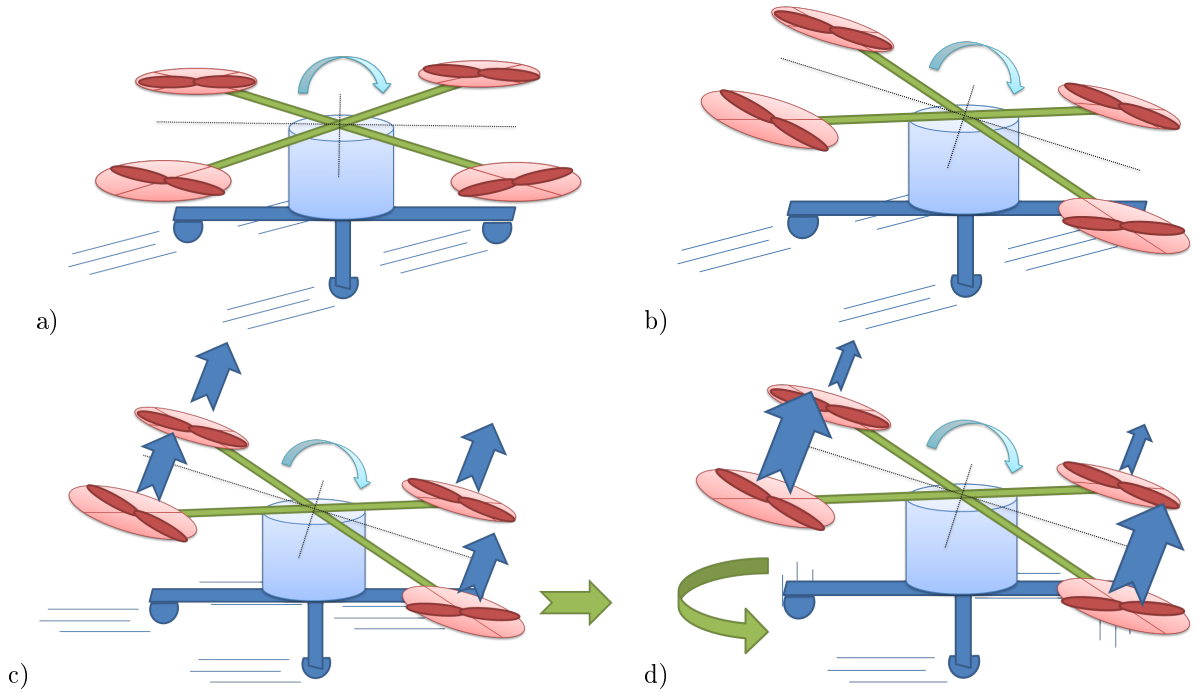

FIGURE 3.2 – Vision schématique du drone terrestre : a) structure du drone terrestre b) inclinaison du support en croix c) génération de poussée longitudinale c) génération de couple de rotation.

Considérons six solides indéformables notés S_i de masse M_i pour i allant de 1 à 2 et S_{3j} de masse m_{3j} pour j allant de 1 à 4. Le solide S_1 représente le socle du drone muni de 4 roulettes permettant un déplacement dans toutes les directions sur le sol (figure 3.3-a). Il supporte le solide S_2 par une liaison pivot au point G_2 (figures 3.3-b et 3.4). L'inclinaison de ce dernier est actionnable par un servomoteur. Les solides restants sont les hélices du drone. Les centres de gravité de ces solides sont respectivement $G_1, G_2, A_{31}, A_{32}, A_{33}$ et A_{34}. Le centre de gravité de l'ensemble de masse M noté Σ est le point G. Les repères associés aux solides sont notés R_1, R_2, R_{3i} et R_0 pour la base inertielle. Notons également, la position $p = (x, y, z)^\top_{R_0}$, la vitesse $V = (u, v, w)^\top_{R_1} = (V_x, V_y, V_z)^\top_{R_0}$ ainsi que les vitesses de rotation instantanées $\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = (p_1, q_1, r_1)^\top_{R_1} = (0, 0, r_1)^\top_{R_1}$, $\vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} = (p_2, q_2, r_2)^\top_{R_2} = (0, q_2, 0)^\top_{R_2}$ et $\vec{\Omega}_{(R_{3i}/R_2)} = (0, 0, \omega_i)_{R_{3i}}$ pour i allant de 1 à 4.

3.1 Les angles d'Euler

Dans un cadre général, l'orientation d'un corps, dont la base associée est B, peut être complètement définie par trois angles dits angles d'Euler. Plus précisemment, nous utilisons les angles de

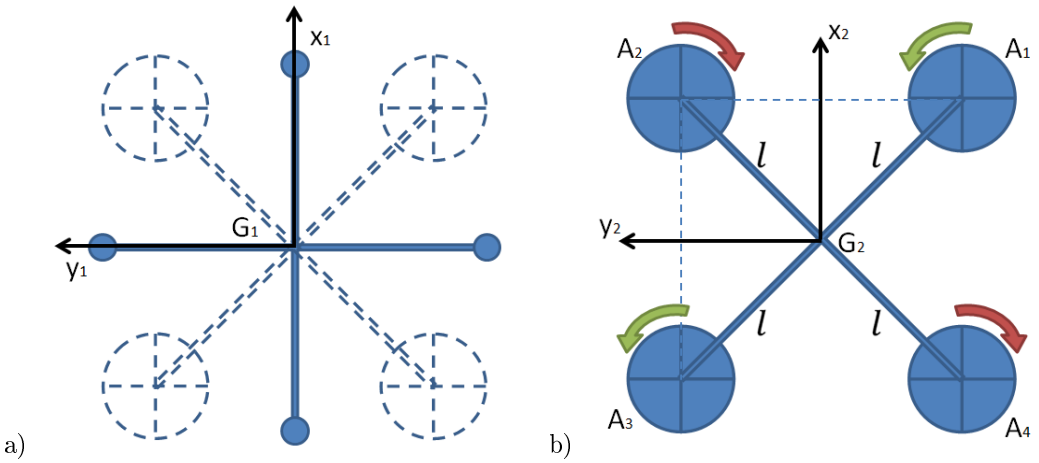

FIGURE 3.3 – Schémas du drone terrestre : a) Schéma du solide S_1 b) Schéma du solide S_2.

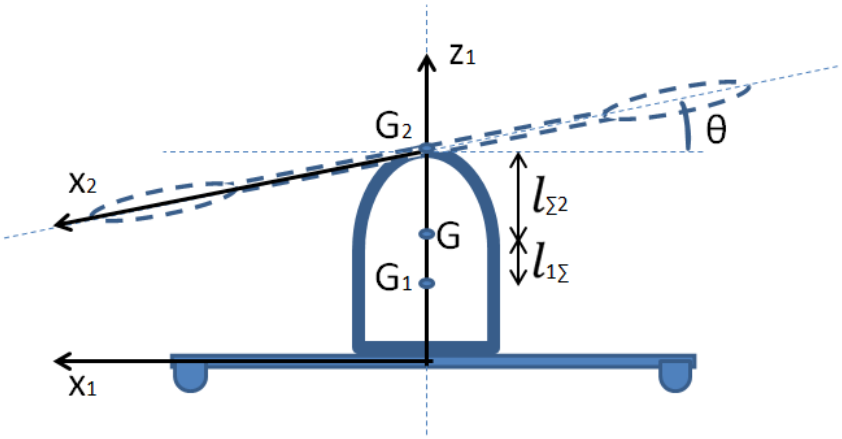

FIGURE 3.4 – Schéma des solides S_1 et S_2.

Tait-Bryan avec la convention ZYX : le lacet noté Ψ, le tangage θ et le roulis Φ. Nous confondons par la suite le terme d'angle d'Euler et ceux de Tait-Bryan. Rappelons les matrices de rotation correspondantes :

$$R_Z(\psi) = \begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi & 0 \\ -S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & -S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\theta & 0 & C_\theta \end{pmatrix}$$

$$R_X(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{pmatrix}$$

Notons $R_{zyx}(\psi, \theta, \phi) = R_X(\phi)R_Y(\theta)R_Z(\psi)$. Dans un cadre général, le changement de repère entre la base inertielle I et la base B du corps défini par les angles d'Euler s'effectue selon l'expression suivante :

$$[u]_B = R_{zyx}(\psi_1, \theta_2, \phi)[u]_I \text{ ou encore } [u]_I = R_{zyx}(\psi_1, \theta_2, \phi)^\top [u]_B$$

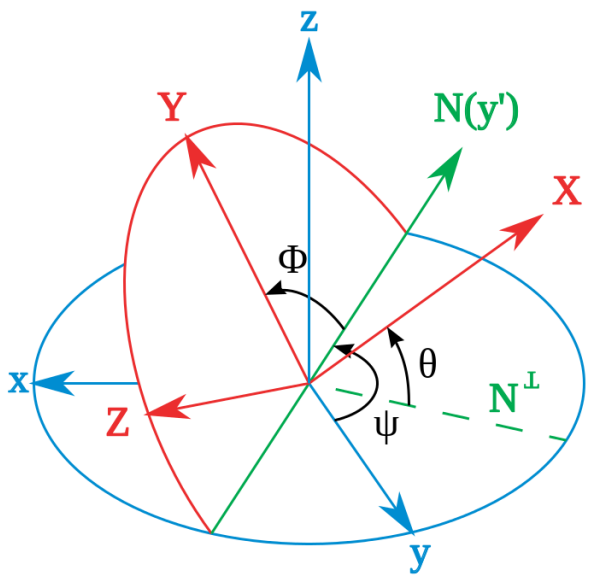

FIGURE 3.5 – Description des angles d'Euler [Wikipédia 2014a].

Il est également possible d'exprimer les dérivées des angles d'Euler en fonction des composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega} = (p, q, r)^\top$:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\Phi)^\top \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\Phi)^\top . R_y(\theta)^\top \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix}$$

Ce qui revient finalement à :

$$\begin{cases} \dot{\Phi} &= p + (q\sin(\Phi) + r\cos(\Phi))\tan(\theta) \\ \dot{\theta} &= q\cos(\Phi) - r\sin(\Phi) \\ \dot{\Psi} &= \frac{q\sin(\Phi)+r\cos(\Phi)}{\cos(\theta)} \end{cases} \tag{3.1}$$

Au regard des différents solides du système, nous allons définir les trois angles d'Euler pour chacun des solides afin de passer du repère inertiel aux repères associés aux solides S_1 et S_2. Les différents repères sont schématisés sur les figures 3.3-a, 3.3-b, 3.4, 3.6 et 3.7. Définissons l'angle de lacet ψ_1 des solides S_1 et S_2 et l'angle de tangage θ_2 du solide S_2 (figures 3.6 et 3.7). Dans le cas du drone naviguant au sol, il n'y a pas de roulis ($\phi = 0$) ni pour S_1, ni pour S_2, tout comme il n'y a pas de tangage pour S_1. Les changements de repère se font donc de la manière suivante :

$$[u]_{R_0} = R_{Z_{R_1}}(\psi_1)^\top [u]_{R_1} \tag{3.2}$$

et

$$[u]_{R_1} = R_{Y_{R_2}}(\theta_2)^\top [u]_{R_2} \tag{3.3}$$

Il suffit d'écrire les vecteurs de vitesses de rotations instantanées pour lier les dérivées de Ψ_1 et θ_2 à r_1 et q_2 :

$$\vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} = \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} -r_1\sin(\theta_2) \\ q_2 \\ r_1\cos(\theta_2) \end{bmatrix}_{R_2}$$

D'après le système d'équations (3.1), les dérivées des angles de lacet Ψ_1 et de tangage θ_2 du solide S_2 s'expriment alors :

$$\begin{cases} \dot{\Phi} & = & -r_1 \sin(\theta_2) + r_1 \cos(\theta_2) \tan(\theta_2) = 0 \\ \dot{\theta}_2 & = & q_2 \\ \dot{\Psi}_1 & = & \frac{r_1 \cos(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} = r_1 \end{cases} \tag{3.4}$$

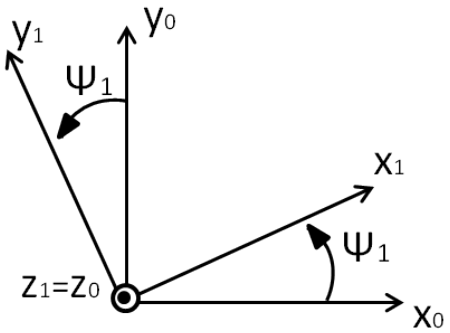

FIGURE 3.6 – Angle de lacet du drone.

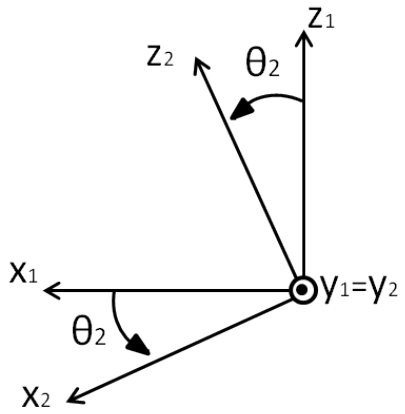

FIGURE 3.7 – Angle de tangage du solide S_2.

3.2 Principe de la dynamique

Les lois de la dynamique s'écrivent :

$$M\dot{\vec{V}}_G = M\vec{g} + \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i \tag{3.5}$$

$$\delta_G^{\vec{\Sigma}} = \sum_{i=1}^{4} G\vec{A}_{3i} \wedge \vec{F}_i + \vec{M}_i \tag{3.6}$$

$$\delta_{A_{3i}}^{\vec{S}_{3i}} . \vec{z_2} = \vec{M}_i . \vec{z_2} + \varepsilon_i \Gamma_i \tag{3.7}$$

avec G le centre de masse, F_i et M_i les forces et moments aérodynamiques générés par les hélices, A_{3i} les points d'application de ces forces (Figure 3.8). $\delta_G^{\vec{\Sigma}}$ et $\delta_{A_{3i}}^{\vec{S}_{3i}}$ sont les moments dynamiques

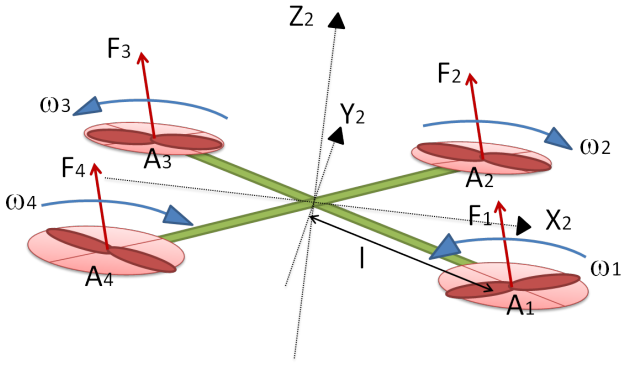

FIGURE 3.8 – Application des forces aérodynamiques sur le solide S_2.

respectifs de l'ensemble Σ et S_{3i} appliqués aux points G et A_{3i}. Les Γ_i sont les couples des moteurs "brushless" et $\varepsilon_i = \{\pm 1\}$ suivant le sens de rotation des rotors.

3.2.1 Quantité d'accélération

Il est possible d'exprimer la quantité d'accélération en fonction du vecteur vitesse grâce à la formule de Varignon qui permet de calculer la dérivée temporelle d'un vecteur. Par exemple, prenons un vecteur $\vec{B}$, deux bases R_0 et R_1 et $\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}$ le vecteur vitesse instantané de rotation de R_1 par rapport à R_0 : la dérivée du vecteur $\vec{B}$ exprimée dans R_0 ([Pommier 2005, pages 16-17] s'écrit alors :

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \times \vec{B} \tag{3.8}$$

Ce qui, appliqué au vecteur accélération, mène à l'expression suivante :

$$M \begin{pmatrix} \dot{\vec{V}}_G.\vec{x_1} \\ \dot{\vec{V}}_G.\vec{y_1} \\ \dot{\vec{V}}_G.\vec{z_1} \end{pmatrix}_{R_1} = M \begin{pmatrix} \dot{u} + q_1 w - r_1 v \\ \dot{v} + r_1 u - p_1 w \\ \dot{w} + p_1 v - q_1 u \end{pmatrix}_{R_1} = m\vec{g} - \sum_{i=1}^{4} \vec{F_i} \tag{3.9}$$

Ces forces et moments aérodynamiques F_i et M_i générés par les hélices se modélisent selon les expressions tirées de [Martin & Salaun 2010] avec $\lambda_{1,2,3,4}, \mu_{1,2,3,4}, a, b > 0$:

$$\begin{aligned} \vec{F_i} &= a\omega_i^2 \vec{z_2} - \omega_i(\lambda_1 \vec{V}_{A_i}^{\perp} + \lambda_2 \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} \times \vec{z_2}) - \varepsilon_i \omega_i(\lambda_3 \vec{V}_{A_i} \times \vec{z_2} + \lambda_4 \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)}^{\perp}) \\ \vec{M_i} &= b\varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z_2} - \omega_i(\mu_1 \vec{V}_{A_i}^{\perp} - \mu_2 \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} \times \vec{z_2}) + \varepsilon_i \omega_i(\mu_3 \vec{V}_{A_i} \times \vec{z_2} - \mu_4 \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)}^{\perp}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

L'opérateur $^{\perp}$ est défini tel que, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^{\perp} = \vec{z_2} \times (\vec{u} \times \vec{z_2}) = \vec{u} - (\vec{u}.\vec{z_2})\vec{z_2}$. Cependant, nous simplifions ces expressions en celles ci :

$$\begin{aligned} \vec{F_i} &= a\omega_i^2 \vec{z_2} \\ \vec{M_i} &= b\varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z_2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ces simplifications sont très usitées pour exprimer les effets aérodynamiques des hélices. Finalement ceci donne :

$$M \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{R_0} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\sum_{i=1}^{4} \omega_i^2 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$M\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} + R_{Z_{R_1}}(\psi_1)^\top R_{Y_{R_2}}(\theta_2)^\top \begin{pmatrix}0\\0\\a\sum_{i=1}^4\omega_i^2\end{pmatrix}_{R_2}$$

En prenant en compte les contraintes du drone évoluant sur le sol, il suffit de garder l'égalité suivante :

$$M\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}aC_{\psi_1}S_{\theta_2}\sum_{i=1}^4\omega_i^2\\ aS_{\psi_1}S_{\theta_2}\sum_{i=1}^4\omega_i^2\end{pmatrix} \tag{3.12}$$

3.2.2 Moment dynamique du solide Σ

En s'appuyant sur les définitions des moments cinétique $\vec{\sigma}_G$ et dynamique $\vec{\delta}_G$ (cf.[Pommier 2005, pages 45-54]), nous montrons que $\dot{\vec{\sigma}_G} = \vec{\delta}_G$. En effet, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma_C} &= \int \vec{CM}\times\vec{V_M}d\mu(M)\\
&= \int \vec{CM}\times\dot{\vec{OM}}d\mu(M)\\
\\
\vec{\delta_C} &= \int \vec{CM}\times\dot{\vec{V_M}}d\mu(M)\\
&= \int \vec{CM}\times\ddot{\vec{OM}}d\mu(M)\\
\\
\dot{\vec{\sigma_C}} &= \int\left(\dot{\vec{CM}}\times\vec{V_M}+\vec{CM}\times\dot{\vec{V_M}}\right)d\mu(M)\\
&= \int \dot{\vec{CM}}\times\dot{\vec{OM}}d\mu(M)+\vec{\delta_c}\\
\\
\int \dot{\vec{CM}}\times\dot{\vec{OM}}d\mu(M) &= \int \dot{\vec{CM}}\times\left(\dot{\vec{OC}}+\dot{\vec{CM}}\right)d\mu(M)\\
&= \left(\int \dot{\vec{CM}}d\mu(M)\right)\times\dot{\vec{OC}}+\int \dot{\vec{CM}}\times\dot{\vec{CM}}d\mu(M).
\end{aligned}$$

Cependant $\int \dot{\vec{CM}}\times\dot{\vec{CM}}d\mu(M) = 0$ et $\int \dot{\vec{CM}}d\mu(M) = 0$ si C = G le centre de masse ; ainsi $\dot{\vec{\sigma_G}} = \vec{\delta_G}$. Pour calculer le moment cinétique du système Σ complet, il est nécessaire de calculer les moments dynamiques de chaque solide compris dans le système Σ, soit S_1, S_2 et les S_{3i}. Regroupons S_2 et S_{3i} en un seul solide noté $S_{2'}$; en reprenant la définition du moment cinétique, il est possible d'écrire :

$$\vec{\sigma_G^\Sigma} = \int_\Sigma \vec{CM}\times\dot{\vec{OM}}d\mu(M) = \int_{S_1}\vec{CM}\times\dot{\vec{OM}}d\mu(M) + \int_{S_{2'}}\vec{CM}\times\dot{\vec{OM}}d\mu(M)$$

d'où

$$\vec{\sigma_G^\Sigma} = \vec{\sigma_G^{S_1}} + \vec{\sigma_G^{S_{2'}}},$$

$$\vec{\delta_G^\Sigma} = \left[\frac{d\vec{\sigma_G^\Sigma}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma_G^{S_1}}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\vec{\sigma_G^{S_{2'}}}}{dt}\right]_{R_0}. \tag{3.13}$$

De plus, la dérivée du moment cinétique se décline ainsi :

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right]_{R_i} + \vec{\Omega}_{(R_i/R_0)}\times\vec{\sigma}.$$

3.2.2.1 Moment cinétique du solide S_1

$$\vec{\sigma_G^{S_1}} = M_1\vec{GG_1}\times\vec{V}(G\in S_1/R_0) + J_G(S_1)\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}$$

et d'après le théorème de Huygens :

$$J_G(S_1)\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} = J_{G_1}(S_1)\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} + M_1 G\vec{G}_1 \times (\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \times G\vec{G}_1)$$

D'après les symétries du solide S_1, la matrice d'inertie peut se mettre sous la forme suivante :

$$J_{G_1}(S_1) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}_{R_1}$$

En reprenant les notations de la figure 3.4, $G\vec{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_{1\Sigma} \end{pmatrix}$.

$$J_G(S_1) = \begin{pmatrix} I_1 + M_1 l_{1\Sigma}^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + M_1 l_{1\Sigma}^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Dans le cadre de notre système, nous considérons que les distances $l_{1\Sigma}$ et $l_{\Sigma 2}$ ($\approx 1cm$) sont suffisamment petites pour être négligées. Ainsi, dans la suite des démonstrations, les points G, G_1 et G_2 seront confondus et se situent au milieu du solide S_2. Ceci simplifie grandement les calculs pour finalement aboutir aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_G^{\vec{S}_1} &= J_G(S_1)\vec{\Omega}(R_1/R_0) \\ \left[\frac{d\sigma_G^{\vec{S}_1}}{dt}\right]_{R_0} &= J_G(S_1)\left[\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R_0)}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \times J_G(S_1)\vec{\Omega}(R_1/R_0) \\ &= \begin{bmatrix} I_1\dot{p}_1 \\ I_1\dot{q}_1 \\ J_1\dot{r}_1 \end{bmatrix}_{R_1} + \begin{bmatrix} (J_1 - I_1)r_1 q_1 \\ (I_1 - J_1)r_1 p_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_1\dot{r}_1 \end{bmatrix}_{R_1} \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.2.2.2 Moment cinétique du solide $S_{2'}$

Dans cette étude, le solide $S_{2'}$ est approximé par un solide équivalent noté $S_{2''}$, qui n'est autre que le solide S_1 muni de 4 disques symbolisant les hélices (figure 3.3-b) [Martin & Salaun 2010]. Chaque disque a une masse équivalente aux solides S_{3i} correspondants. Cette hypothèse est valable dans la mesure où les pales ont une dynamique bien supérieure à celle du système Σ complet. Pour

finaliser le calcul du moment cinétique du système complet, il est nécessaire de calculer $\sigma_G^{\vec{S}_{2'}}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_G^{\vec{S}_{2'}} &= \int_{S_{2'}} \vec{GM} \times \dot{\vec{OM}} d\mu(M) \\
&= \int_{S_{2'}} \vec{GM} \times (\dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{GM}}) d\mu(M) \\
&= \left(\int_{S_{2'}} \vec{GM} d\mu(M)\right) \times \dot{\vec{OG}} + \int_{S_{2'}} \vec{GM} \times \dot{\vec{GM}} d\mu(M) \\
&= \int_{S_{2'}} \vec{GM} \times \dot{\vec{GM}} d\mu(M) \\
&= \int_{S_2} \vec{GM} \times \dot{\vec{GM}} d\mu(M) + \sum_{i=1}^{4} \int_{S_{3i}} \vec{GM} \times (\dot{\vec{GA}}_{3i} + \dot{\vec{A_{3i}M}}) d\mu(M) \\
&= \int_{S_2} \vec{GM} \times \left(\vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} \times \vec{GM}\right) d\mu(M) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{4} \int_{S_{3i}} \vec{GM} \times \left(\vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} \times \vec{GA}_{3i} + (\vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} + \varepsilon_i \omega_i \vec{z_2}) \times \vec{A_{3i}M}\right) d\mu(M) \\
&\approx \int_{S_{2''}} \vec{GM} \times \left(\vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} \times \vec{GM}\right) d\mu(M) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{4} \int_{S_{3i}} \vec{A_{3i}M} \times \left(\varepsilon_i \omega_i \vec{z_2} \times \vec{A_{3i}M}\right) d\mu(M) \\
&\approx J_G^{S_{2''}} \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} + \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i \omega_i \left(J_{A_{3i}}^{S_{3i}} \vec{z_2}\right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

La dernière égalité provient de la définition même d'une matrice d'inertie. En effet, la matrice d'inertie I d'un solide noté S prise en un point O s'obtient d'après la relation suivante :

$$I(0,S).\vec{u} = \int_S \vec{OP} \times (\vec{u} \times \vec{OP}) dm$$

De par la présence de symétries géométriques des solides $S_{2''}$ et S_{3i},

$$J_{A_{3i}}^{S_{3i}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}_{R_{3i}}$$

$$J_G^{S_{2''}} = \begin{pmatrix} I_{2''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2''} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2''} \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$(J_G^{S_{2''}})_{R_1} = R_{Y_{R_2}}(\theta_2)\top \begin{pmatrix} I_{2''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2''} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2''} \end{pmatrix}_{R_2} R_{Y_{R_2}}(\theta_2)$$

$$J_G^{S_{2''}} = \begin{pmatrix} A(\theta_2) & 0 & B(\theta_2) \\ 0 & I_{2''} & 0 \\ B(\theta_2) & 0 & C(\theta_2) \end{pmatrix}_{R_1}$$

avec

$$\begin{aligned}
A(\theta_2) &= \tfrac{1}{2}\left((I_{2''} + J_{2''}) + \cos(2\theta_2)(I_{2''} - J_{2''})\right), \\
B(\theta_2) &= \cos(\theta_2)\sin(\theta_2)(J_{2''} - I_{2''}), \\
C(\theta_2) &= \tfrac{1}{2}\left((I_{2''} + J_{2''}) + \cos(2\theta_2)(J_{2''} - I_{2''})\right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Sachant que $\vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} = \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} = (0, q_2, r_1)^\top_{R_1}$, nous obtenons l'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\sigma_G^{\vec{S}_{2'}} &= \begin{bmatrix} B(\theta_2)r_1 + \sum_{i=1}^4 \epsilon_i\omega_i J_3 \sin(\theta_2) \\ I_{2''}q_2 \\ C(\theta_2)r_1 + \sum_{i=1}^4 \epsilon_i\omega_i J_3 \cos(\theta_2) \end{bmatrix}_{R_1} \\
\left[\frac{d\sigma_G^{\vec{S}_{2'}}}{dt}\right]_{R_0} &= \left[\frac{d\sigma_G^{\vec{S}_{2'}}}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \times \sigma_G^{\vec{S}_{2'}} \\
&= \begin{bmatrix} B(\theta_2)\dot{r_1} + B(\dot{\theta_2})r_1 + \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\dot{\omega_i} J_3 \sin(\theta_2) + \dot{\theta_2}\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\omega_i J_3 \cos(\theta_2) \\ I_{2''}\dot{q_2} \\ C(\theta_2)\dot{r_1} + C(\dot{\theta_2})r_1 + \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\dot{\omega_i} J_3 \cos(\theta_2) - \dot{\theta_2}\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\omega_i J_3 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}_{R_1} \\
&\quad + \begin{bmatrix} -r_1 q_2 I_{2''} \\ B(\theta_2)r_1^2 + r_1\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\omega_i J_3 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

avec

$$C(\dot{\theta_2}) = -\sin(2\theta_2)\dot{\theta_2}(J_{2''} - I_{2''}).$$

Finalement en utilisant les équations (3.13), (3.14) et (3.17) nous pouvons écrire :

$$\delta_G^{\vec{S}_\Sigma}.\vec{z_1} = \dot{r_1}(C(\theta_2)+J_1) - r_1 q_2 \sin(2\theta_2)(J_{2''} - I_{2''}) + J_3\cos(\theta_2)\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\dot{\omega_i} - q_2 J_3 \sin(\theta_2)\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\omega_i. \tag{3.18}$$

3.2.2.3 Moments extérieurs s'exerçant sur le système Σ

En reprenant les notations des figures 3.8, 3.3b, de l'équation 3.6 et sachant que $\vec{F_i} = a\omega_i^2\vec{z_2}$ et $\vec{M_i} = -b\varepsilon_i\omega_i^2\vec{z_2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 G\vec{A}_{3i} \times \vec{F_i} &= \begin{bmatrix} a\frac{l}{\sqrt{2}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \\ a\frac{l}{\sqrt{2}}(-\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2)\frac{al}{\sqrt{2}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \\ \frac{al}{\sqrt{2}}(-\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ -\sin(\theta_2)\frac{al}{\sqrt{2}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix}_{R_1}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\vec{M_i} = \begin{bmatrix} -b\varepsilon_i\omega_i^2 \sin(\theta_2) \\ 0 \\ -b\varepsilon_i\omega_i^2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix}_{R_1} \tag{3.20}$$

Finalement, le moment dynamique du système Σ selon le vecteur $\vec{z_1}$ s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
&\dot{r_1}(C(\theta_2) + J_1) - r_1 q_2 \sin(2\theta_2)(J_{2''} - I_{2''}) + J_3\cos(\theta_2)\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\dot{\omega_i} - q_2 J_3 \sin(\theta_2)\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\omega_i \\
&= \sin(\theta_2)\frac{al}{\sqrt{2}}(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) - b\cos(\theta_2)\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\omega_i^2
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.2.3 Moment dynamique du système isolé $S_{2'}$

En réutilisant les équations (3.15) et (3.17), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\sigma_G^{\vec{S}_{2'}} &= J_G^{S_{2''}}\vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} + \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\omega_i \left(J_{A_{3i}}^{S_{3i}}\vec{z_2}\right) \\
\delta_G^{\vec{S}_{2'}}.\vec{y_1} &= I_{2''}\dot{q_2} + B(\theta_2)r_1^2 + r_1\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\omega_i J_3 \sin(\theta_2)
\end{aligned}$$

et en réitérant la démarche précédente, il vient l'expression suivante :

$$I_{2''}\dot{q}_2 + B(\theta_2)r_1^2 + r_1\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i\omega_i J_3\sin(\theta_2) = \frac{al}{\sqrt{2}}(\omega_3^2+\omega_4^2-\omega_1^2-\omega_2^2) + \Gamma_{servo} \tag{3.22}$$

3.2.4 Moment dynamique du système isolé S_{3i}

Calculons le moment cinétique :

$$\sigma_{A_{3i}}^{\vec{S}_{3i}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{3i} \end{pmatrix} \vec{\Omega}_{(R_{3i}/R_0)}$$

Sachant que $\vec{\Omega}_{(R_{3i}/R_0)} = \vec{\Omega}_{(R_{3i}/R_2)} + \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_i\omega_i \end{bmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ r_1 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} -r_1\sin(\theta_2) \\ q_2 \\ r_1\cos(\theta_2)+\varepsilon_i\omega_i \end{bmatrix}_{R_2}$,
le moment cinétique peut alors s'exprimer comme suit :

$$\sigma_{A_{3i}}^{\vec{S}_{3i}} = J_{3i}(r_1\cos(\theta_2)+\varepsilon_i\omega_i)\vec{z_2}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\sigma_{A_{3i}}^{\vec{S}_{3i}}}{dt}\right]_{R_0} &= \left[\frac{d\sigma_{A_{3i}}^{\vec{S}_{3i}}}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} \times \sigma_{A_{3i}}^{\vec{S}_{3i}} \\ \left[\frac{d\sigma_{A_{3i}}^{\vec{S}_{3i}}}{dt}\right]_{R_0}.\vec{z_2} &= J_{3i}\left(\dot{r_1}\cos(\theta_2)+\varepsilon_i\dot{\omega_i} - q_2 r_1\sin(\theta_2)\right) \end{aligned}$$

Avec les moments extérieurs appliqués aux solides S_{3i}, nous obtenons :

$$J_{3i}\left(\dot{r_1}\cos(\theta_2)+\varepsilon_i\dot{\omega_i} - q_2 r_1\sin(\theta_2)\right) = -b\varepsilon_i\omega_i^2 + \Gamma_{moteur_i} \tag{3.23}$$

3.3 Modèle dynamique complet

En se référant aux équations (3.12), (3.21), (3.22), (3.23) et (3.1) :

$$\begin{cases} M\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aC_{\psi_1}S_{\theta_2}\sum_{i=1}^4\omega_i^2 \\ aS_{\psi_1}S_{\theta_2}\sum_{i=1}^4\omega_i^2 \end{pmatrix} \\ \dot{r_1}(C(\theta_2)+J_1) - r_1q_2\sin(2\theta_2)(J_{2''}-I_{2''}) + J_3\cos(\theta_2)\sum_{i=1}^4\varepsilon_i\dot{\omega_i} - q_2J_3\sin(\theta_2)\sum_{i=1}^4\varepsilon_i\omega_i \\ = \sin(\theta_2)\frac{al}{\sqrt{2}}(\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2) - b\cos(\theta_2)\sum_{i=1}^4\varepsilon_i\omega_i^2 \\ I_{2''}\dot{q}_2 + B(\theta_2)r_1^2 + r_1\sum_{i=1}^4\varepsilon_i\omega_iJ_3\sin(\theta_2) = \frac{al}{\sqrt{2}}(\omega_3^2+\omega_4^2-\omega_1^2-\omega_2^2) + \Gamma_{servo} \\ \forall i\in[3,6] \quad J_{3i}\left(\dot{r_1}\cos(\theta_2)+\varepsilon_i\dot{\omega_i} - q_2r_1\sin(\theta_2)\right) = -b\varepsilon_i\omega_i^2 + \Gamma_{moteur_i} \\ r_1 = \dot{\Psi}_1 \\ q_2 = \dot{\theta}_2 \end{cases} \tag{3.24}$$

Les équations du modèle du comportement dynamique du drone sont alors simplifiées sous certaines hypothèses. Premièrement, les effets gyroscopiques engendrés par les hélices sont négligés (J_3 petit). Etant donné que la dynamique des moteurs est nettement supérieure à celle des mouvements de translation et de lacet du drone sur le sol, nous allons nous intéresser uniquement aux

quatre premières équations du système (3.24). Les commandes considérées pour ce système, notées u_1, u_2, u_3, u_4, sont définies telles que :

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{a}{M}\sum_{i=1}^{4}\omega_i^2 \\ u_2 &= \frac{al}{\sqrt{2}}(\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2) \\ u_3 &= -b(\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_3^2-\omega_4^2) \\ u_4 &= \frac{al}{\sqrt{2}I_{2''}}(\omega_3^2+\omega_4^2-\omega_1^2-\omega_2^2)+\frac{\Gamma_{servo}}{I_{2''}} \end{cases} \tag{3.25}$$

Elles sont de plus indépendantes puisque l'on peut écrire

$$\begin{cases} c_1 &= \omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2+\omega_4^2 = \frac{M}{a}u_1 \\ c_2 &= \omega_1^2+\omega_4^2-\omega_2^2-\omega_3^2 = \frac{\sqrt{2}}{al}u_2 \\ c_3 &= \omega_1^2+\omega_3^2-\omega_2^2-\omega_4^2 = \frac{-u_3}{b} \\ c_4 &= \omega_3^2+\omega_4^2-\omega_1^2-\omega_2^2 = \frac{\sqrt{2}I_{2''}}{al}(u_4-\frac{\Gamma_{servo}}{I_{2''}}) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{pmatrix}$$

avec $det(A) = -16 \neq 0$. Le modèle ainsi considéré pour l'établissement de lois de commandes est simplifié et est décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= C_{\psi_1}S_{\theta_2}u_1 \\ \ddot{y} &= S_{\psi_1}S_{\theta_2}u_1 \\ \ddot{\psi}_1 &= \frac{\sin(\theta_2)}{C(\theta_2)+J_1}u_2+\frac{\cos(\theta_2)}{C(\theta_2)+J_1}u_3+\dot{\psi}_1\dot{\theta}_2\frac{\sin(2\theta_2)(J_{2''}-I_{2''})}{C(\theta_2)+J_1} \\ \ddot{\theta}_2 &= u_4-\frac{B(\theta_2)}{I_{2''}}\dot{\psi}_1^{\,2} \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} B(\theta_2) &= \cos(\theta_2)\sin(\theta_2)(J_{2''}-I_{2''}) \\ C(\theta_2) &= \tfrac{1}{2}\left((I_{2''}+J_{2''})+\cos(2\theta_2)(J_{2''}-I_{2''})\right) \end{aligned}$$

Malgré ces simplifications, ce modèle reste bien cohérent. En effet, prenons par exemple l'inertie sur l'axe $\vec{z}_1$ du véhicule que l'on voit apparaître dans l'équation du lacet sous la forme $C(\theta_2)+J_1$: les inerties du solide $S_{2''}$ selon ses axes sont schématisées sur la figure 3.9-a. Il apparaît cohérent de voir que l'inertie sur $\vec{z}_1$ évolue en fonction de l'angle θ_2 : elle passe de $J_1+J_{2''}$ pour $\theta_2 = 0^\circ$ (figure 3.9-b) à $J_1+I_{2''}$ pour $\theta_2 = 90^\circ$ (figure 3.9-c).

Nous pouvons remarquer que le comportement dynamique de ce modèle est similaire à celui d'un aéroglisseur, les équations étant proches du modèle du Glisseur (cf. 2.2.1). Il présente cependant l'avantage d'être capable d'inverser les poussées aérodynamiques des hélices au moyen de l'angle de tangage θ_2, contrairement à un aéroglisseur classique. Cette dernière modélisation est utilisée comme point de départ pour toutes les lois de contrôle proposées dans le chapitre suivant. Par la suite, elle sera confrontée au comportement réel de notre plateforme expérimentale par différentes procédures d'identification dans le chapitre 5.

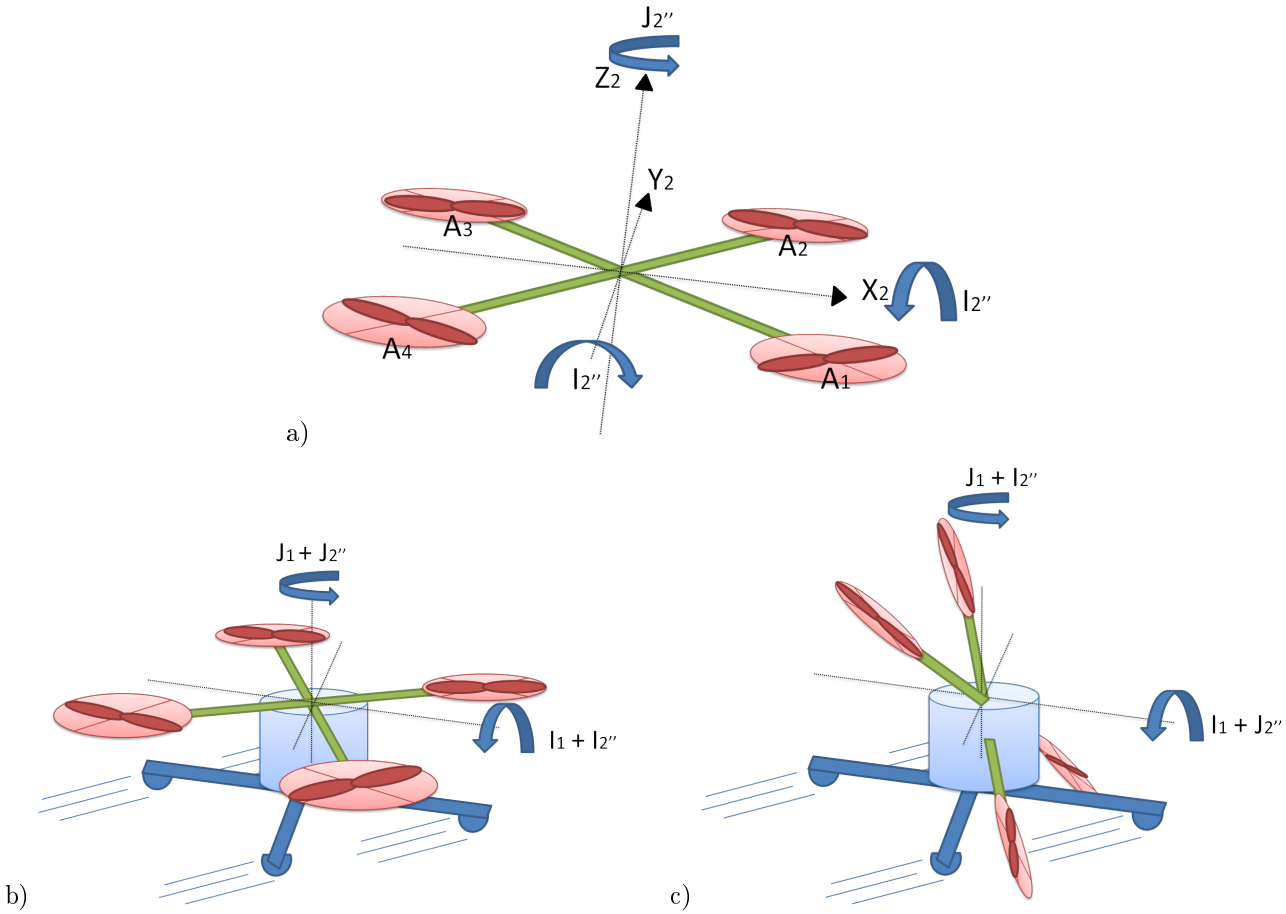

FIGURE 3.9 – Inertie du drone terrestre : a) Inertie du solide $S_{2''}$ b) Inertie du drone lorsque $\theta_2 = 0^{\circ}$ c) Inertie lorsque $\theta_2 = 90^{\circ}$.

Chapitre 4

Contrôle

Sommaire

4.1 Contrôle linéaire et placement de pôles **68**

4.2 Contrôle par linéarisation **71**

4.2.1 Contrôle par une approche platitude 71

4.2.2 Une approche par "Backstepping" 76

4.2.2.1 Étapes de "Backstepping" 76

4.2.2.2 Analyse de la loi de contrôle et simulations 78

4.3 Stabilisation pratique par fonctions transverses **83**

4.3.1 Architecture de contrôle pour notre système 83

4.3.2 Condition de rang de l'algèbre de Lie 84

4.3.3 Champs de vecteurs homogènes 84

4.3.4 Loi de composition et invariance à gauche des champs de vecteurs 85

4.3.5 "Mapping" exponentiel et fonctions transverses 86

4.3.5.1 Calcul de l'application exponentielle 87

4.3.5.2 Calcul des fonctions transverses 87

4.3.6 Stabilisation de trajectoire 88

4.3.7 Loi de contrôle 88

4.3.7.1 Coordonnées de z 89

4.3.7.2 Les matrices $H(\phi)$, $dL_{z^{-1}}(\tilde{x})$ et $dR_{f(\phi)}(z)$ 89

4.3.7.3 Perturbation $P(\tilde{x}, t)$ 90

4.3.7.4 Dynamique de z 91

4.3.8 Loi de commande des systèmes en cascade du drone par l'approche "Backstepping" 91

4.3.9 Simulations 93

4.4 Arrêt du drone par commandes en temps variant **98**

4.4.1 Système non linéaire : $\dot{x} = vf(x, u)$ 98

4.4.2 Système non linéaire (4.48) 99

4.4.3 Changement d'orientation 100

4.4.4 Simulations 100

4.5 Excitation persistante du noyau de commandabilité **107**

4.5.1 Description du système du Glisseur 107

4.5.1.1 Modèles dynamiques du système et de la trajectoire de référence . . 108

4.5.1.2 Dynamique du système d'erreurs 108

4.5.2 Stabilité d'un point d'équilibre 110

4.5.3 Système à temps variant Σ_{TV} commandé par u_1 111

4.5.3.1 Commandabilité du linéarisé tangent 111

4.5.3.2 Commandabilité du système linéaire à temps variant 111

4.5.3.3 Stabilisation par $u_1(t)$ 112

4.5.4 Suivi de position du système $\Sigma_{glisseur}$ avec les deux commandes u_1 et u_2 . . 115

4.5.4.1 Stabilisation en un point : $p_2 = 0$ et $u_{1_r} = 0$ 115

4.5.4.2 Suivi de trajectoire : $u_{1_r} \neq 0$ et $p_2 \neq 0$ 117

4.5.5 Suivi de posture du système $\Sigma_{glisseur}$ avec les deux commandes u_1 et u_2 . . . 117
4.5.5.1 Stabilisation en un point : $u_{1_r} = 0$ et $p_2 = 0$ 118
4.5.5.2 Suivi de trajectoire : $u_{1_r} \neq 0$ et $p_2 \neq 0$ 119
4.5.6 Analyse des singularités 120
4.5.7 Simulations 124

Ce chapitre intitulé "Contrôle" expose les lois de commandes, developpées tout au long de la thèse, qui visent à assurer un suivi de trajectoire ou une stabilisation en un point pour notre système de drone hybride pour le mode "sol". Ce chapitre commence par la présentation de bouclages linéaires et linéarisants continus (platitude et "Backstepping") adaptés respectivement au suivi de trajectoire et au suivi de position. Nous verrons à ce stade que les contraintes associées à ces bouclages sont importantes : les trajectoires de référence stabilisables sont très restreintes.

Une loi de contrôle de stabilisation pratique utilisant les fonctions transverses est ensuite décrite. Contrairement aux lois précédentes, cette méthode est capable de suivre n'importe quelle trajectoire admissible ou non. En revanche, la prise en compte d'éventuelles saturations dans les commandes paraît difficilement applicable avec cette technique.

Vient par la suite la description d'une loi régulière à temps variant qui vise à stopper le drone. Là encore, nous avons cherché à transposer des techniques utilisées pour l'Unicycle. Dans cette partie, l'objectif n'est pas de stabiliser le drone en un point, mais juste de l'arrêter au point courant.

Pour finir, ce chapitre propose un bouclage non autonome régulier qui présente l'avantage de permettre aussi bien un suivi de trajectoire qu'une stabilisation en un point. Cette loi de commande présente de bonnes performances et des caractéristiques génériques.

Le modèle dynamique de déplacement au sol de notre drone (4.1) établi au chapitre précédent peut être décliné sous d'autres formes. Les sections de ce chapitre tirent avantages de ces différentes formes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & C_{\psi_1} S_{\theta_2} u_1 \\ \ddot{y} & = & S_{\psi_1} S_{\theta_2} u_1 \\ \ddot{\psi}_1 & = & \frac{\sin(\theta_2)}{C(\theta_2)+J_1} u_2 + \frac{\cos(\theta_2)}{C(\theta_2)+J_1} u_3 + \dot{\psi}_1 \dot{\theta}_2 \frac{\sin(2\theta_2)(J_{2''} - I_{2''})}{C(\theta_2)+J_1} \\ \ddot{\theta}_2 & = & u_4 - \frac{B(\theta_2)}{I_{2''}} \dot{\psi}_1^{\,2} \end{array}\right. \tag{4.1}$$

$$\begin{array}{lcl} B(\theta_2) & = & \cos(\theta_2)\sin(\theta_2)(J_{2''} - I_{2''}) \\ C(\theta_2) & = & \frac{1}{2}\left((I_{2''} + J_{2''}) + \cos(2\theta_2)(J_{2''} - I_{2''})\right) \end{array}$$

Plusieurs hypothèses supplémentaires sont faites pour simplifier ce modèle. Premièrement, il est montré dans le chapitre 5 que la dynamique en inclinaison θ_2 est bien plus rapide que la dynamique de déplacement et de rotation du drone. Il est donc possible de considérer directement l'angle θ_2 comme une commande. Ceci est justifié par le théorème de perturbations singulières [Khalil 1995]. Par ailleurs, u_2 et u_3 étant indépendants, nous pouvons simplifier l'écriture de la commande sur la dynamique en lacet en prenant par exemple :

$$\begin{array}{lcl} u_2 & = & \sin(\theta_2) u \\ u_3 & = & \cos(\theta_2) u \\ \frac{\tau_2}{I} & = & \frac{u}{C(\theta_2)+J_1} + \dot{\psi}_1 \dot{\theta}_2 \frac{\sin(2\theta_2)(J_{2''} - I_{2''})}{C(\theta_2)+J_1} \end{array}$$

d'où

$$\ddot{\psi}_1 = \frac{\tau_2}{I}$$

avec τ_2 considérée comme la nouvelle commande. Finalement, le système (4.1) peut se réduire à

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & C_{\psi_1} S_{\theta_2} u_1 \\ \ddot{y} & = & S_{\psi_1} S_{\theta_2} u_1 \\ \ddot{\psi}_1 & = & \frac{\tau_2}{I} \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Nous pouvons à présent remarquer la ressemblance que ce système dynamique partage avec un Glisseur : il suffit de prendre $\frac{\tau_1}{M} = S_{\theta_2} u_1$. Par la suite, ψ_1 et θ_2 seront simplement notés ψ et θ.

4.1 Contrôle linéaire et placement de pôles

Cette première section présente une loi de contrôle linéaire permettant un placement des pôles du système dans le cadre d'un suivi de trajectoire. La méthode employée découle du bouclage linéaire utilisé pour l'Unicycle et présenté au paragraphe 2.3.1.1. Le choix a été fait de ne pas effectuer de simulation sur ce type de loi ; en effet, nous allons voir qu'elle présente peu d'intérêt car trop restrictive :

- les trajectoires de référence stabilisables sont limitées ($u_{1r} \neq 0, \dot{\psi}_r \neq 0$ et constants),
- la convergence n'est valable que localement.

Néanmoins, il paraît intéressant de présenter ce type de bouclage linéaire puisque l'automatisation de système industriel est quasi systématiquement fondée sur des lois de contrôle linéaires.

Suite à la remarque sur la similitude entre le Glisseur et notre système, la synthèse de ce bouclage linéaire est établie sur le modèle du Glisseur. Son système linéarisé tangent décrit à l'équation (2.61) du chapitre 2 est rappelé ci-dessous. Une modélisation de frottement cinétique de coefficient $\eta > 0$ est de plus ajoutée.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \\ \dot{e_5} \\ \dot{e_6} \end{pmatrix}}_{\dot{e}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi}_r & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dot{\psi}_r & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{1r} & -\dot{\psi}_r & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix}}_{e} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}}_{U}$$

avec $u_{1r} = \frac{\tau_{1r}}{M}$, $u'_1 = -\eta e_4 + \dot{\psi}_r e_5 + \frac{1}{M}(\tau_1 - \tau_{1r})$ et $u'_2 = \frac{1}{I}(\tau_2 - \tau_{2r})$. Il est supposé $u_{1r} \neq 0$ et $\dot{\psi}_r \neq 0$ constants. Cette hypothèse nous assure qu'il est possible de trouver un retour d'état continu qui stabilise le système puisqu'il est commandable. Dans un cadre général, l'étude de la stabilité d'un système linéaire bouclé $\dot{x} = Ax + BU$ tel que $U = -Kx$ passe par l'analyse de la matrice $H = A - BK$ puisque le système bouclé est sous la forme $\dot{x} = (A - BK)x$. Il est nécessaire de vérifier les racines du polynôme caractéristique de H (cf. 2.1.12). Dans notre cas, nous prenons $U = -Ke$ avec K de la forme :

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \end{pmatrix}.$$

$$H = A - BK = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi}_r & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dot{\psi}_r & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{11} & -k_{12} & 0 & -k_{14} & -k_{15} & 0 \\ 0 & 0 & u_{1r} & -\dot{\psi}_r & -\eta & 0 \\ 0 & -k_{22} & -k_{23} & 0 & -k_{25} & -k_{26} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de H se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \chi_H(s) &= det(sI - H) \\ &= \left| \underbrace{\begin{matrix} s & -\dot{\psi}_r & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \dot{\psi}_r & s & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & -1 \\ k_{11} & k_{12} & 0 & s + k_{14} & k_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -u_{1r} & \dot{\psi}_r & s + \eta & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & s + k_{26} \end{matrix}}_{H'} \right| \end{aligned}$$

Afin de simplifier le calcul du polynôme caractéristique de H, nous pouvons décomposer la matrice H' en quatre sous-matrices de dimension 3×3.

$$H' = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}$$

avec

$$H_1 = \begin{pmatrix} s & -\dot{\psi}_r & 0 \\ \dot{\psi}_r & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -u_{1r} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix} \quad H_4 = \begin{pmatrix} s + k_{14} & k_{15} & 0 \\ \dot{\psi}_r & s + \eta & 0 \\ 0 & k_{25} & s + k_{26} \end{pmatrix}$$

H_2 étant inversible, nous pouvons alors écrire :

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & H_2 \\ I_3 & H_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_3 - H_4 H_2^{-1} H_1 & 0 \\ H_2^{-1} H_1 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_H(s) &= |H'| \\ &= -|H_2||H_3 - H_4 H_2^{-1} H_1| \\ &= |H_3 - H_4 H_2^{-1} H_1| \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \chi_H(s) &= \begin{vmatrix} s^2 + sk_{14} + \dot{\psi}_r k_{15} + k_{11} & s(k_{15} - \dot{\psi}_r) + k_{12} - \dot{\psi}_r k_{14} & 0 \\ \dot{\psi}_r(2s + \eta) & s^2 + s\eta - \dot{\psi}_r^2 & -u_{1r} \\ \dot{\psi}_r k_{25} & k_{22} + k_{25} s & s^2 + sk_{26} + k_{23} \end{vmatrix} \\ &= (s^2 + sk_{14} + \dot{\psi}_r k_{15} + k_{11}) \begin{vmatrix} s^2 + s\eta - \dot{\psi}_r^2 & -u_{1r} \\ k_{22} + k_{25} s & s^2 + sk_{26} + k_{23} \end{vmatrix} \\ &\quad -(s(k_{15} - \dot{\psi}_r) + k_{12} - \dot{\psi}_r k_{14}) \begin{vmatrix} \dot{\psi}_r(2s + \eta) & -u_{1r} \\ \dot{\psi}_r k_{25} & s^2 + sk_{26} + k_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Le deuxième terme dans le calcul du polynôme est supprimé en prenant $k_{15} = \dot{\psi}_r$ et $k_{12} = \dot{\psi}_r k_{14}$. Finalement, le polynôme devient

$$\chi_H(s) = (s^2 + 2\xi a s + a^2)(s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)$$

avec

$$\begin{cases} a^2 = k_{11} + \dot{\psi}_r k_{15} \\ 2\xi a = k_{14} \\ a_3 = k_{26} + \eta \\ a_2 = k_{23} + k_{26}\eta - \dot{\psi}_r^2 \\ a_1 = k_{23}\eta - \dot{\psi}_r^2 k_{26} + u_{1r} k_{25} \\ a_0 = u_{1r} k_{22} - \dot{\psi}_r^2 k_{23} \end{cases}$$

Les paramètres $\xi, a, a_0, a_1, a_2, a_3$ doivent satisfaire le critère de Routh (cf. 2.1.13) pour assurer la convergence du système vers la trajectoire de référence. Les pôles du système sont complètement déterminés par ces paramètres ; ils peuvent être choisis arbitrairement au moyen des gains k_{ij}. En effet, k_{11} fixe a ; k_{14} permet alors de déterminer ξ. a_3 est accessible avec k_{26}, ce qui nous laisse k_{23} pour régler a_2. Comme $u_{1r} \neq 0$ et constant, il est possible de prendre k_{25} et k_{22} tels que :

$$k_{22} = \frac{a_0 + \dot{\psi}_r^2 k_{23}}{|u_{1r}|} sign(u_{1r}), \quad k_{25} = \frac{a_1 - k_{23}\eta + \dot{\psi}_r^2 k_{26}}{|u_{1r}|} sign(u_{1r}).$$

En définitive, il est possible de commander entièrement et relativement simplement la dynamique du système bouclé, avec, en particulier, les contraintes sur les gains $k_{15} = \dot{\psi}_r$ et $k_{12} = \dot{\psi}_r k_{14}$. La commande $u'_1 = -k_{11}e_1 - k_{12}e_2 - k_{14}e_4 - k_{15}e_5$ s'écrit aussi

$$u'_1 = -k_{11}e_1 - \dot{\psi}_r k_{14} e_2 - k_{14} e_4 - \dot{\psi}_r e_5.$$

On notera une certaine similarité avec la loi de contrôle linéaire à temps variant proposée dans [Lefeber *et al.* 2003] et reprise à la section 4.5.

Comme mentionné précédemment, l'intérêt de cette loi linéaire reste limité de par sa capacité à suivre un ensemble très restreint de trajectoires, et de par le caractère local de son domaine de validité. Nous avons exploré d'autres pistes, en commençant par des commandes non linéaires linéarisantes adaptées au suivi de position.

4.2 Contrôle par linéarisation

La linéarisation par retours d'états pour un système non linéaire de la forme $\dot{x} = f(x) + g(x)U$ se résume à trouver une loi de contrôle $U(x)$ telle que le système bouclé puisse s'écrire $\dot{x} = Z(x)$, avec $Z(x)$ une fonction linéaire stabilisante, comme par exemple $Z(x) = -kx$ avec $k > 0$. Si la fonction $g(x)$ est inversible, il est possible de prendre $U(x) = g^{-1}(x)(-f(x) + Z(x))$. La première approche tente d'appliquer cette méthode. Nous reprenons le modèle dynamique complet de notre drone hybride (3.26) :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= C_\psi S_\theta u_1 \\ \ddot{y} &= S_\psi S_\theta u_1 \\ \ddot{\psi} &= \frac{\sin(\theta)}{C(\theta)+J_1} u_2 + \frac{\cos(\theta)}{C(\theta)+J_1} u_3 + \dot{\psi}\dot{\theta}\frac{\sin(2\theta)(J_{2''} - I_{2''})}{C(\theta)+J_1} \\ \ddot{\theta} &= u_4 - \frac{B(\theta)}{I_{2''}}\dot{\psi}^2 \end{cases}$$

Nous mettons ce système sous une forme plus standard :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\psi)\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\psi)\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin(\theta)}{C(\theta)+J_1} & \frac{\cos(\theta)}{C(\theta)+J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sin(2\theta)(J_{2''} - I_{2''})}{C(\theta)+J_1}\dot{\psi}\dot{\theta} \\ -\frac{B(\theta)}{I_{2''}}\dot{\psi}^2 \end{pmatrix}}_{F}.$$

Nous pouvons remarquer qu'un découplage statique est ici impossible puisque $det(G) = 0$. Nous allons donc explorer l'approche dynamique de la même manière que pour les contrôles proposés dans [Sira-Ramírez & Ibáñez 2000] et [Oriolo *et al.* 2002].

4.2.1 Contrôle par une approche platitude

Nous réalisons dans un premier temps une extension dynamique en retardant l'action de u_1, le nouvel état σ est introduit tel que $\dot{\sigma} = v_1$ (voir le système d'équations (4.3)).

$$\begin{cases} \ddot{x} &= C_\psi S_\theta \sigma \\ \ddot{y} &= S_\psi S_\theta \sigma \\ \ddot{\psi} &= \frac{\sin(\theta)}{C(\theta)+J_1} u_2 + \frac{\cos(\theta)}{C(\theta)+J_1} u_3 + \frac{\sin(2\theta)(J_{2''} - I_{2''})}{C(\theta)+J_1}\dot{\psi}\dot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= u_4 - \frac{B(\theta)}{I_{2''}}\dot{\psi}^2 \\ \dot{\sigma} &= v_1 \end{cases} \tag{4.3}$$

Les dynamiques en lacet ψ et en inclinaison θ étant complètement actionnées (notons $\ddot{\psi} = \tau_2$ et $\ddot{\theta} = \tau_4$), il est donc possible de se contenter d'analyser le système en cascade (4.4) [Sepulchre 2011]. Une approche "Backstepping" est ensuite réalisée pour récupérer les commandes réelles du système original (4.3).

$$\begin{cases} \ddot{x} &= C_\psi S_\theta \sigma \\ \ddot{y} &= S_\psi S_\theta \sigma \\ \dot{\sigma} &= v_1 \\ \dot{\psi} &= v_2 \\ \dot{\theta} &= v_3 \end{cases} \tag{4.4}$$

avec v_1, v_2 et v_3 les nouvelles commandes. Afin de résoudre (4.4) par une approche platitude, il faut identifier les sorties plates du système. Nous rappelons qu'une définition 2.3.3 de la platitude est donnée au paragraphe 2.3.1.3.

Proposition 4.2.1 *x, y et θ sont des sorties plates du système (4.4).*

Preuve Il est effectivement possible d'exprimer les états du système (4.4) en fonction des sorties x, y et θ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x \\ y & = & y \\ \sigma & = & \sqrt{\frac{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}{\sin^2(\theta)}} \\ \psi & = & \arctan(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}) \\ \theta & = & \theta \end{array}\right. \tag{4.5}$$

x, y et θ sont donc des sorties plates du système (4.4).

Pour faire apparaître les commandes, il faut dériver respectivement ces sorties à l'ordre 3, 3 et 1.

$$\begin{pmatrix} \dddot{x} \\ \dddot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\psi)\sin(\theta) & -\sigma\sin(\psi)\sin(\theta) & \sigma\cos(\psi)\cos(\theta) \\ \sin(\psi)\sin(\theta) & \sigma\cos(\psi)\sin(\theta) & \sigma\sin(\psi)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B(\psi,\theta,\sigma)} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Le déterminant de la matrice de découplage étant $\sigma.\sin^2(\theta)$, la commande par platitude est valable pour $\sigma \neq 0$ et $\theta \neq 0$ puisque

$$B^{-1}(\psi,\theta,\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\psi)}{\sin(\theta)} & \frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)} & -\sigma\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ -\frac{\sin(\psi)}{\sigma\sin(\theta)} & \frac{\cos(\psi)}{\sigma\sin(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les commandes peuvent finalement s'écrire

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = B^{-1}(\psi,\theta,\sigma) \begin{pmatrix} V_{\dddot{x}} \\ V_{\dddot{y}} \\ V_{\dot{\theta}_2} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} V_{\dddot{x}} & = & \dddot{x}_{ref} + k_{2x}(\ddot{x}_{ref} - \ddot{x}) + k_{1x}(\dot{x}_{ref} - \dot{x}) + k_{0x}(x_{ref} - x) \\ V_{\dddot{y}} & = & \dddot{y}_{ref} + k_{2y}(\ddot{y}_{ref} - \ddot{y}) + k_{1y}(\dot{y}_{ref} - \dot{y}) + k_{0y}(y_{ref} - y) \\ V_{\dot{\theta}} & = & \dot{\theta}_{ref} + k_{0\theta}(\theta_{ref} - \theta) \end{array}\right. \tag{4.8}$$

De par le caractère plat du système, v_1, v_2, v_3 peuvent s'exprimer uniquement en fonction des sorties plates :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & \frac{\cos(\arctan(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}))}{\sin(\theta)} V_{\dddot{x}} + \frac{\sin(\arctan(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}))}{\sin(\theta)} V_{\dddot{y}} - \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} V_{\dot{\theta}} \\ v_2 & = & -\frac{\sin(\arctan(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}))}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}} V_{\dddot{x}} + \frac{\cos(\arctan(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}))}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}} V_{\dddot{y}} \\ v_3 & = & V_{\dot{\theta}} \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Avec cette loi de contrôle, le système bouclé est linéarisé et se réduit en un système simple (4.10).

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dddot{e}_x & = & -k_{2x}\ddot{e}_x - k_{1x}\dot{e}_x - k_{0x}e_x \\ \dddot{e}_y & = & -k_{2y}\ddot{e}_y - k_{1y}\dot{e}_y - k_{0y}e_y \\ \dot{e}_\theta & = & -k_{0\theta}e_\theta \end{array}\right. \tag{4.10}$$

avec $e_x = x - x_{ref}$, $e_y = y - y_{ref}$ et $e_\theta = \theta - \theta_{ref}$. Pour assurer la convergence des états x, y, θ, ainsi que leurs dérivées vers la référence, les gains k_{ix}, k_{iy} et $k_{0\theta}$ pour $i = 0..2$ doivent satisfaire le critère de Routh pour que les polynômes du système d'équations (4.11) soient de Hurwitz.

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & s^3 + k_{2x}s^2 + k_{1x}s + k_{0x} \\ 0 & = & s^3 + k_{2y}s^2 + k_{1y}s + k_{0y} \\ 0 & = & s + k_{0\theta} \end{array}\right. \tag{4.11}$$

La principale limitation de cette loi de contrôle provient de la singularité du déterminant qui ne permet pas à $\sigma = u_1 = \sqrt{\frac{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}{\sin^2(\theta)}}$ et à θ de changer de signe. Imposer $\theta \neq 0$ n'est pas difficile ; en revanche cela est plus compliqué pour le terme $\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 \neq 0$. La trajectoire de référence doit donc satisfaire $\ddot{x}_{ref}^2 + \ddot{y}_{ref}^2 \neq 0, \quad \forall t$. Pour les simulations, nous avons opté pour des trajectoires circulaires qui vérifient cette condition. En théorie, dans un milieu sans frottement, il n'est pas possible de suivre une ligne droite à vitesse constante. Heureusement pour nous, le drone terrestre frotte sur le sol. Si l'on prend en compte les frottements cinétiques dans la modélisation (voir le système (4.12)), la singularité change légèrement et devient : $(\ddot{x} + \eta\dot{x})^2 + (\ddot{y} + \eta\dot{y})^2 \neq 0$.

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -\eta\dot{x} + C_\psi S_\theta \sigma \\ \ddot{y} &= -\eta\dot{y} + S_\psi S_\theta \sigma \\ \dot{\sigma} &= v_1 \\ \dot{\psi} &= v_2 \\ \dot{\theta} &= v_3 \end{cases} \quad \text{avec } \eta > 0, \text{ le coefficient de frottement cinétique.} \tag{4.12}$$

Finalement, les frottements nous assurent une marge de stabilité. Prenons un exemple simple pour mieux comprendre : si l'on souhaite faire suivre à notre système une ligne droite à vitesse constante positive, l'axe x par exemple ($\dot{x} = cte > 0$), et avec une inclinaison fixe $\theta = 90^\circ$, la singularité apparaît pour $\ddot{x} = -\eta\dot{x} < 0$. L'accélération du véhicule doit être incluse dans $]-\eta\dot{x}; +\infty[$. Le drone ne peut donc pas décélérer plus que $\eta\dot{x}$. Le terme correcteur de la commande qui agit sur la dynamique d'accélération longitudinale ne peut pas excéder cette limite pour assurer la stabilité. Cette contrainte limite fortement les gains du correcteur qui doivent rester relativement faibles. De plus, leur réglage est d'autant plus difficile qu'il dépend du coefficient de frottement η variant fortement selon la nature de la surface sur laquelle évolue le drone. La vitesse de convergence est donc limitée, ce qui peut engendrer un retard par rapport à la référence.

Des simulations du système (4.3) ont été réalisées pour le suivi d'un cercle centré en 0 et de rayon 1.1m. La position de départ de la référence est le point $P_{0_{ref}} = (-1.1, 0)^\top$. Le véhicule est quant à lui initialement au point $P_0 = (-0.8, 0.5)^\top$ et orienté à $\psi_0 = -1.2$ rad. Cette loi de contrôle nous permet de suivre une trajectoire arbitraire en inclinaison θ. Nous avons alors choisi $\theta_{ref} = 0.8 + 0.2sin(t)$ pour montrer le bon fonctionnement du découplage de la commande. Les gains utilisés ici sont : $k_{2x} = k_{2y} = 0.7$, $k_{1x} = k_{1y} = 2$, $k_{0x} = k_{0y} = 0.6$, $k_{0\theta} = 3$. L'étape de "Backstepping" utilisée pour lier l'état v_2 et $\ddot{\psi} = \tau_2$ n'est pas présentée ici, mais elle requiert un gain supplémentaire.

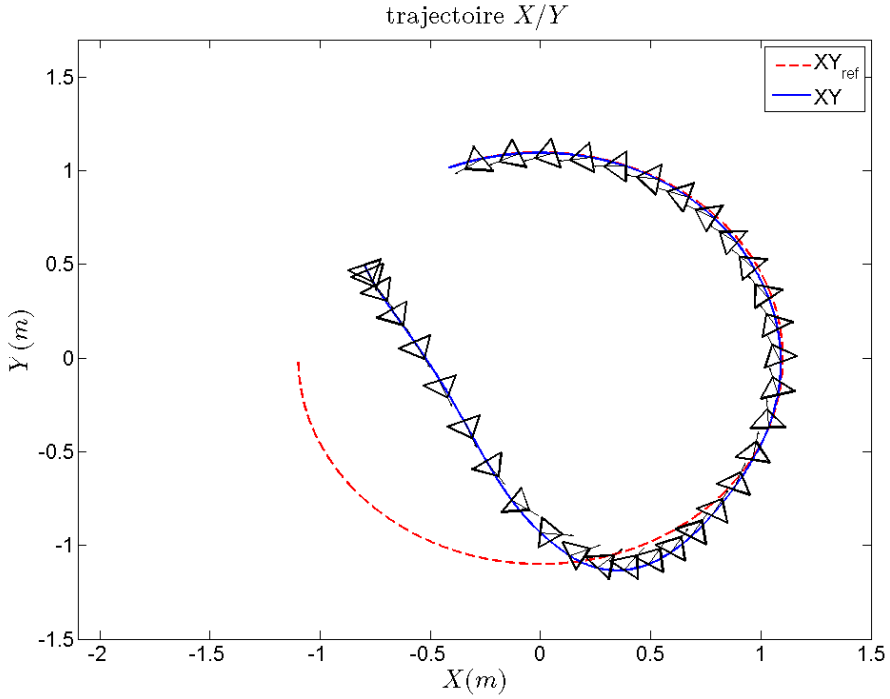

FIGURE 4.1 – Simulation 1 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure illustre la trajectoire du Glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation.

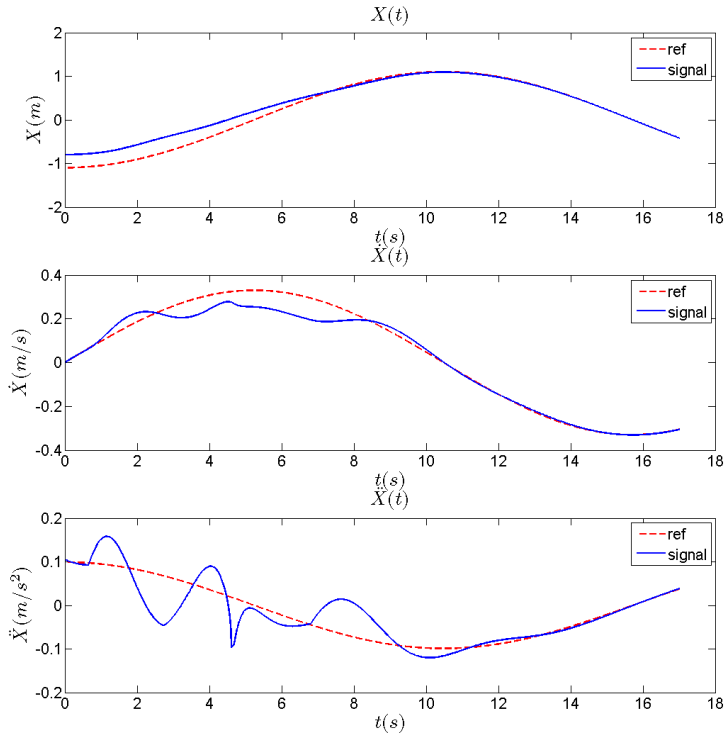

FIGURE 4.2 – Simulation 1 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure présente les dynamiques en x du véhicule et x_r de la trajectoire de référence.

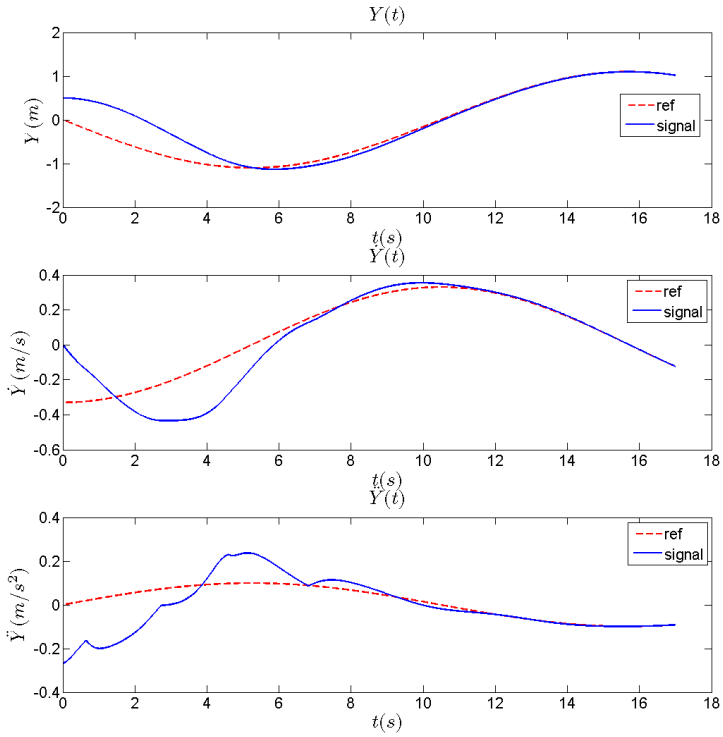

FIGURE 4.3 – Simulation 1 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure présente les dynamiques en y du véhicule et y_r de la trajectoire de référence.

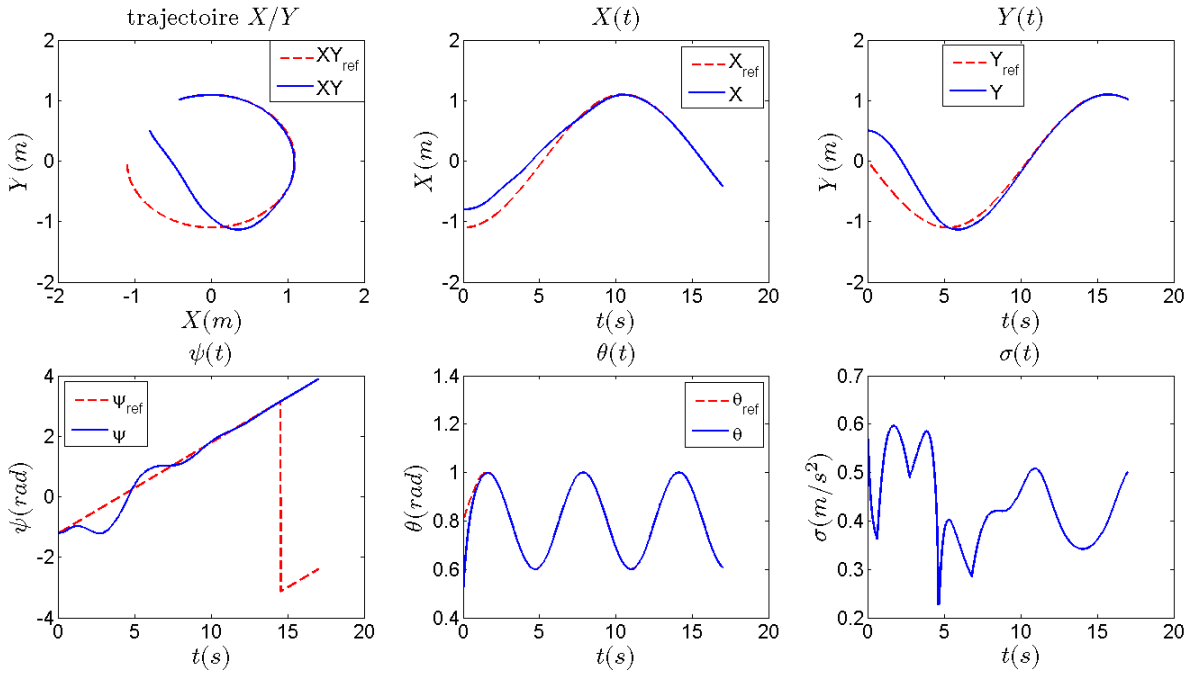

FIGURE 4.4 – Simulation 1 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. Le lacet de référence ψ_r est calculé par rapport aux sorties plates : $\psi_r = \arctan(\frac{\ddot{y}_r+\eta\dot{y}_r}{\ddot{x}_r+\eta\dot{x}_r})$.

4.2.2 Une approche par "Backstepping"

La méthode de commande décrite ici est une alternative à l'approche précédente fondée sur la platitude. La synthèse de la loi de contrôle repose sur la technique de "Backstepping" et les fonctions de Lyapunov. Nous verrons que les limitations de cette approche sont quasi équivalentes à celles du contrôle précédent. Par ailleurs, on notera que la stabilisation obtenue ne sera pas asymptotique mais pratique. La démarche est très similaire à celle employée dans l'article [Aguiar & Hespanha 2003]. Ce paragraphe permet en l'occurence d'expliquer leur approche. Tout comme pour la commande précédente, il est nécessaire de retarder le système pour empêcher l'accélération longitudinale de s'annuler. Il a été montré lors de la preuve de l'existence de sorties plates que le lacet dépend naturellement de l'accélération du véhicule. La dynamique de rotation devient instable lorsque le système n'accélère plus. Nous verrons que ceci est d'autant plus frappant avec ce bouclage. En dépit de ces remarques limitatives, les simulations effectuées montrent des résultats intéressants : l'erreur en position par rapport au chemin tracé par la trajectoire de référence est faible, mais l'écart temporel doit rester grand pour assurer un minimum de robustesse et de stabilité. On pourra noter la ressemblance de cette approche avec les méthodes utilisant les points virtuels de référence (cf. 2.3.1.3 et [Berge *et al.* 1999]).

4.2.2.1 Étapes de "Backstepping"

L'objectif est de faire tendre asymptotiquement $X = (x, y)^\top$ vers $X_r = (x_r, y_r)^\top$ le point de référence. Les vitesses longitudinale et latérale du véhicule sont notées $X_1 = (V_{longi}, V_{lat})^\top$. La synthèse de la loi de commande s'appuie sur le modèle (4.2) pour lequel la dynamique en inclinaison θ est considérée bien plus rapide que le reste :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= C_\psi S_\theta u_1 \\ \ddot{y} &= S_\psi S_\theta u_1 \\ \ddot{\psi} &= \tau_2 \end{cases}$$

Étape 1 :
Nous commençons par écrire la dynamique des sorties de position à piloter :

$$\Sigma_1 : \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_{\dot{X}} = R(\psi) \underbrace{\begin{pmatrix} V_{longi} \\ V_{lat} \end{pmatrix}}_{X_1} \quad \text{avec} \quad R(\psi) = \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi \\ S_\psi & C_\psi \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Soit $\tilde{X} = X - X_r$ et $V_1 = \frac{1}{2}\tilde{X}^\top \tilde{X}$ une fonction de Lyapunov.

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2}\dot{\tilde{X}}^\top \tilde{X} + \frac{1}{2}\tilde{X}^\top \dot{\tilde{X}}$$

Sachant que $\dot{\tilde{X}} = R(\psi)X_1 - \dot{X}_r$, il suffirait d'avoir $X_1 = X_1^\star = (V_{longi}^\star, V_{lat}^\star)^\top = R(\psi)^\top(-K\tilde{X} + \dot{X}_r)$ pour que

$$\dot{V}_1 = -\tilde{X}^\top K \tilde{X}$$

soit une forme quadratique définie négative avec

$$K = \begin{pmatrix} k_{01} & 0 \\ 0 & k_{02} \end{pmatrix}.$$

Posons alors $\tilde{X}_1 = X_1 - X_1^\star$, il vient :

$$\dot{\tilde{X}} = R(\psi)(\tilde{X}_1 + X_1^\star) - \dot{X}_r = R(\psi)\tilde{X}_1 - K\tilde{X}$$

$$\dot{V}_1 = -\tilde{X}^\top K \tilde{X} + \frac{1}{2}(\tilde{X}^\top R(\psi)\tilde{X}_1)^\top + \frac{1}{2}\tilde{X}^\top R(\psi)\tilde{X}_1.$$

Étape 2 :

Considérant la méthode de calcul de la dérivée temporelle à l'équation (cf. 2.2.2.3) de l'état de l'art et sachant que

$$\begin{pmatrix} V_{longi} \\ V_{lat} \end{pmatrix} = R^\top(\psi) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix},$$

le système intermédiaire Σ_2 muni de la commande virtuelle $u_{c1} = \dot{\psi}$ et de $p = S_\theta u_1$ s'écrit

$$\Sigma_2 : \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{V}_{longi} \\ \dot{V}_{lat} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{c1} \\ V_{lat} u_{c1} + p \\ -V_{longi} u_{c1} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Soit la matrice $B(V_{longi}, V_{lat})$ telle que

$$\dot{X}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{lat} & 1 \\ -V_{longi} & 0 \end{pmatrix}}_{B(V_{longi}, V_{lat})} \begin{pmatrix} u_{c1} \\ p \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit

$$\dot{\tilde{X}}_1 = B(V_{longi}, V_{lat}) X_2 - \dot{X}_1{}^\star$$

avec $X_2 = (u_{c1}, p)^\top$ et

$$\dot{X}_1^\star = u_{c1} \begin{pmatrix} V_{lat}^\star \\ -V_{longi}^\star \end{pmatrix} + R^\top(\psi)(-K\dot{\tilde{X}} + \ddot{X}_r).$$

Considérons une deuxième fonction de Lyapunov de la forme

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \tilde{X}_1^\top \tilde{X}_1$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \tfrac{1}{2} \dot{\tilde{X}}_1^\top \tilde{X}_1 + \tfrac{1}{2} \tilde{X}_1^\top \dot{\tilde{X}}_1 \\ &= -\tilde{X}^\top K \tilde{X} + \tfrac{1}{2}(\tilde{X}^\top R(\psi) \tilde{X}_1)^\top + \tfrac{1}{2} \tilde{X}^\top R(\psi) \tilde{X}_1 + \tfrac{1}{2} \tilde{X}_1^\top (B(V_{longi}, V_{lat}) X_2 - \dot{X}_1{}^\star) + \tfrac{1}{2} \dot{\tilde{X}}_1^\top \tilde{X}_1 \end{aligned}$$

Pour linéariser et rendre cette dérivée de Lyapunov définie négative, il faut satisfaire l'égalité

$$\begin{aligned} R^\top(\psi)\tilde{X} + B(V_{longi}, V_{lat}) X_2 - \dot{X}_1^\star &= -K_1 \tilde{X}_1 \\ \underbrace{\begin{pmatrix} V_{lat} - V_{lat}^\star & 1 \\ V_{longi}^\star - V_{longi} & 0 \end{pmatrix}}_{C} X_2 - R^\top(\psi)(-K\dot{\tilde{X}} - \tilde{X} + \ddot{X}_r) &= -K_1 \tilde{X}_1 \end{aligned}$$

avec

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{12} \end{pmatrix}$$

En prenant $X_2 = X_2^\star$ tel que

$$X_2^\star = \begin{pmatrix} u_{c1}^\star \\ p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{V_{longi}^\star - V_{longi}} \\ 1 & \frac{V_{lat}^\star - V_{lat}}{V_{longi}^\star - V_{longi}} \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \left(-K_1 \tilde{X}_1 + R^\top(\psi)(-K\dot{\tilde{X}} - \tilde{X} + \ddot{X}_r) \right) \tag{4.15}$$

la dérivée de la fonction de Lyapunov devient

$$\dot{V}_2 = -\tilde{X}^\top K \tilde{X} - \tilde{X}_1^\top K_1 \tilde{X}_1$$

À ce stade, il est possible de récupérer la valeur de la commande réelle $p = S_\theta u_1$. En revanche, une étape supplémentaire de backstepping est nécessaire pour atteindre la commande $\tau_2 = \ddot{\psi}$.

Étape 3 :

Posons $\tilde{X}_2 = X_2 - X_2^\star = (\dot{\psi} - u_{c1}^\star, 0)^\top$, $\dot{\tilde{X}}_2 = (\tau_2 - \dot{u}_{c1}^\star, 0)^\top$ et

$$\dot{V}_2 \quad = \quad -\tilde{X}^\top K \tilde{X} - \tilde{X}_1^\top K_1 \tilde{X}_1 + \tfrac{1}{2}\tilde{X}_1^\top C \tilde{X}_2 + \tfrac{1}{2}\tilde{X}_2^\top C^\top \tilde{X}_1 \ .$$

Pour stabiliser cet étage, nous prenons la fonction de Lyapunov

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}\tilde{X}_2^\top \tilde{X}_2$$

dont la dérivée temporelle le long des trajectoires s'écrit :

$$\dot{V}_3 \quad = \quad -\tilde{X}^\top K \tilde{X} - \tilde{X}_1^\top K_1 \tilde{X}_1 + \tfrac{1}{2}\tilde{X}_1^\top C \tilde{X}_2 + \tfrac{1}{2}\tilde{X}_2^\top C^\top \tilde{X}_1 + \tfrac{1}{2}\dot{\tilde{X}}_2^\top \tilde{X}_2 + \tfrac{1}{2}\tilde{X}_2^\top \dot{\tilde{X}}_2 \ .$$

Finalement, il suffit d'imposer l'égalité

$$\tilde{X}_2^\top (C^\top \tilde{X}_1 + \dot{\tilde{X}}_2) = -\tilde{X}_2^\top K_2 \tilde{X}_2$$

avec $C^\top \tilde{X}_1 = ((C^\top \tilde{X}_1)_1, (C^\top \tilde{X}_1)_2)^\top$, $K_2 = \begin{pmatrix} k_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La commande τ_2 devient donc

$$\tau_2 = \dot{u}_{c1}^\star - k_2(\dot{\psi} - u_{c1}^\star) - (C^\top \tilde{X}_1)_1.$$

Il en résulte que la fonction de Lyapunov V_3 est définie positive et sa dérivée $\dot{V}_3$ définie négative puisque

$$\dot{V}_3 \quad = \quad -\tilde{X}^\top K \tilde{X} - \tilde{X}_1^\top K_1 \tilde{X}_1 - \tilde{X}_2^\top K_2 \tilde{X}_2$$

4.2.2.2 Analyse de la loi de contrôle et simulations

Il est évident qu'il n'est pas possible de stabiliser le système asymptotiquement avec cette loi de commande puisque la singularité qui apparaît à l'équation (4.15) se manifeste justement lorsque $\tilde{X}_1$ tend vers 0. L'astuce utilisée dans l'article [Aguiar & Hespanha 2003] consiste à forcer $\tilde{X}_1$ à tendre non pas vers 0 mais vers un voisinage δ de 0. Le système sera donc toujours en retard sur les dynamiques en vitesse, ce qui force artificiellement le véhicule à accélérer et rend la dynamique de rotation plus stable. Afin d'empêcher la singularité, et contrairement à [Aguiar & Hespanha 2003], nous imposons un très faible gain k_{11}. Ceci crée un déphasage constant entre la position du véhicule et sa référence, comme le ferait la technique du point virtuel (cf. 2.3.1.3).

Le scénario de simulation est un suivi de cercle de rayon $R = 1.1$m centré en 0 et qui a pour point de départ $P_{0_{ref}} = (-1.1, 0)^\top$. La position initiale du véhicule est $P_0 = (-0.8, 0.5)^\top$ et son orientation de départ est $\psi_0 = -1.2$ rad. Les gains utilisés ici sont : $k_{01} = k_{02} = 1.5$, $k_{11} = 0.01$, $k_{12} = 1$ et $k_2 = 2$.

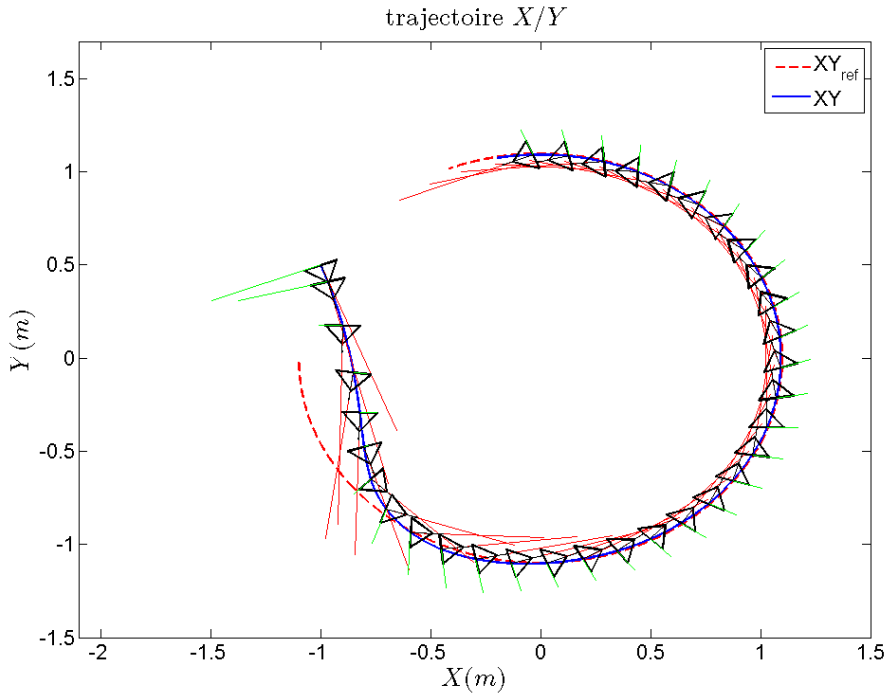

FIGURE 4.5 – Simulation 1 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure illustre la trajectoire du Glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. $V^{\star}_{longi}$ et $V^{\star}_{lat}$ sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

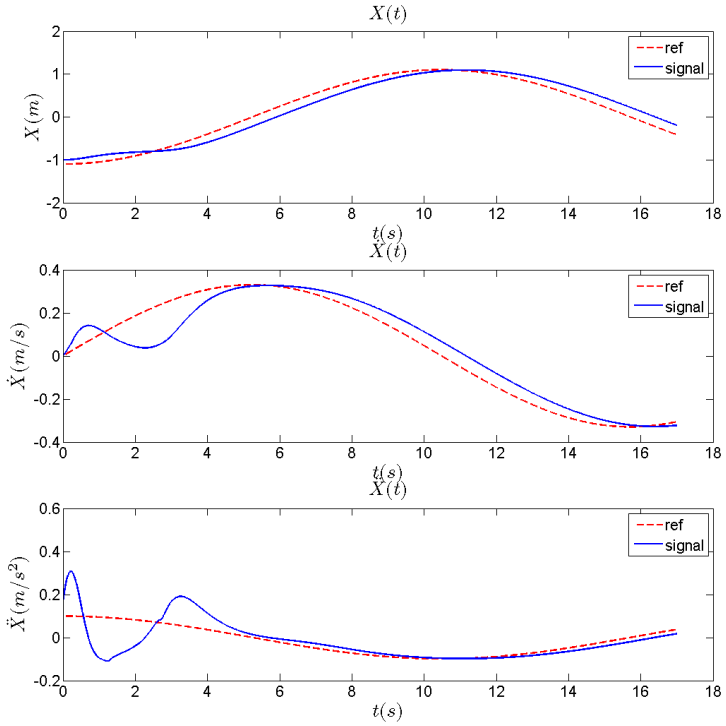

FIGURE 4.6 – Simulation 1 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure présente les dynamiques en x du véhicule et x_r de la trajectoire de référence.

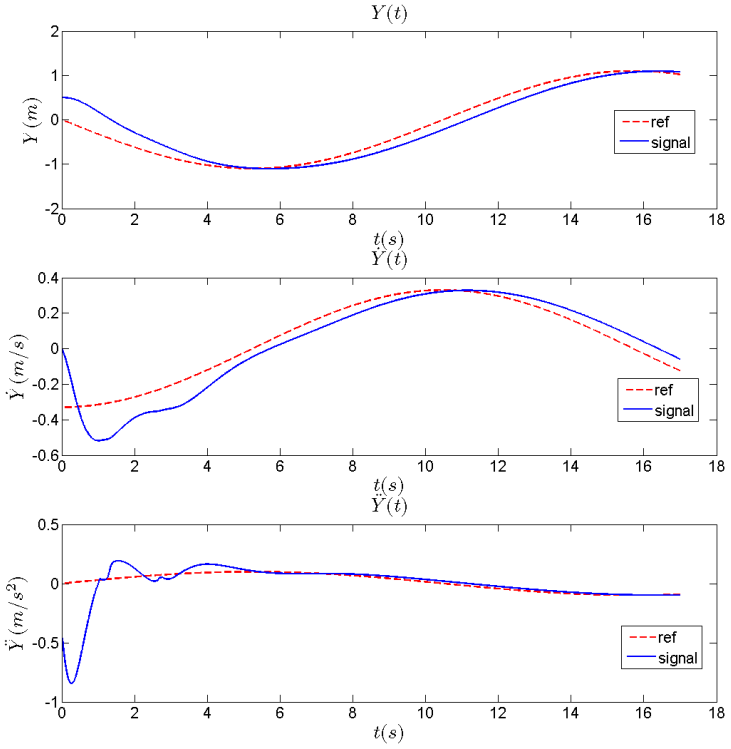

FIGURE 4.7 – Simulation 1 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure présente les dynamiques en y du véhicule et y_r de la trajectoire de référence.

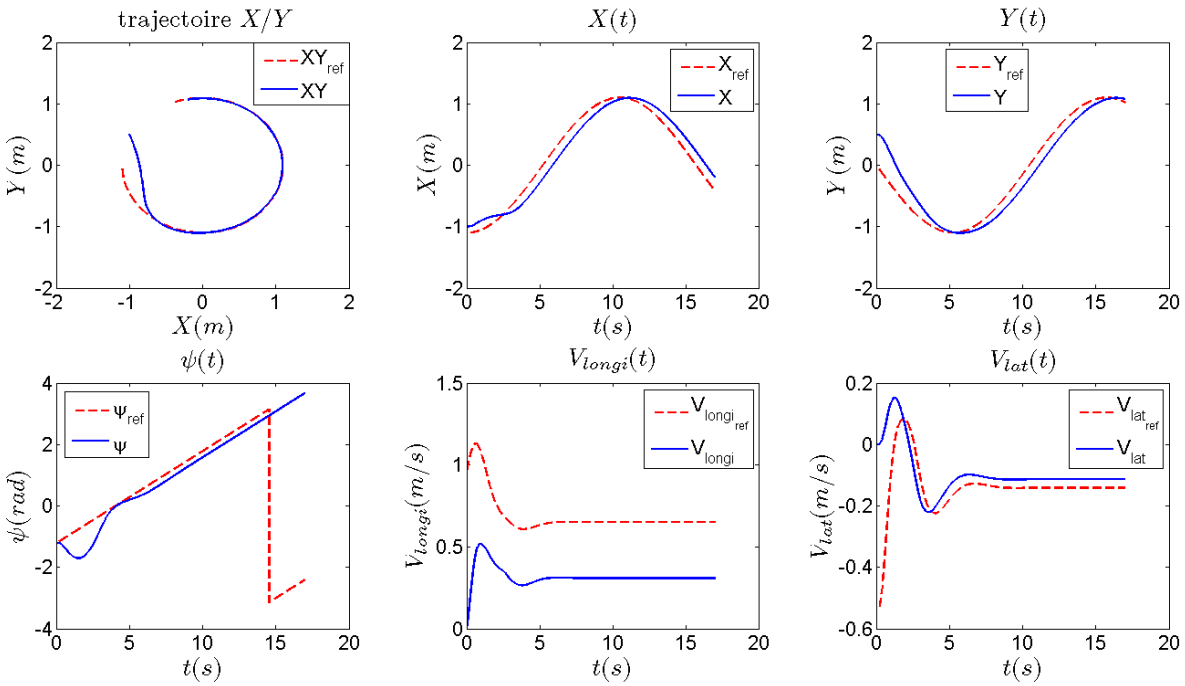

FIGURE 4.8 – Simulation 1 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. Le lacet de référence ψ_r est calculé par rapport aux sorties plates : $\psi_r = \arctan(\frac{\ddot{y}_r+\eta_1\dot{y}_r}{\ddot{x}_r+\eta_1\dot{x}_r})$.

Malgré le déphasage, que l'on voit nettement sur les figures 4.6 et 4.7, le véhicule éxecute un très bon suivi du tracé de la trajectoire. Dans un cadre purement pratique, cette loi de commande présente des caratéristiques intéressantes ; cependant sa robustesse est limitée par l'apparition éventuelle de la singularité, qui ne peut être évitée dans des environnements très perturbés, ou pour des trajectoires de référence trop tortueuses. Pour tempérer cette remarque, on intégre dans la simulation 2 une modélisation des frottements cinétiques sous la forme de coefficients bruités η_1 et η_2 pour modéliser, par exemple, les aspérités du sol. Les signaux de ces coefficients ont pour moyennes respectives $\bar{\eta}_1 = 0.815s^{-1}$ et $\bar{\eta}_2 = 0.37s^{-1}$; ces valeurs proviennent des résultats d'identification du chapitre 5. Ces paramètres interviennent dans le modèle dynamique de la manière suivante :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -\eta_1 \dot{x} + C_\psi S_\theta u_1 \\ \ddot{y} &= -\eta_1 \dot{y} + S_\psi S_\theta u_1 \\ \ddot{\psi} &= -\eta_2 \dot{\psi} + \tau_2 \end{cases}$$

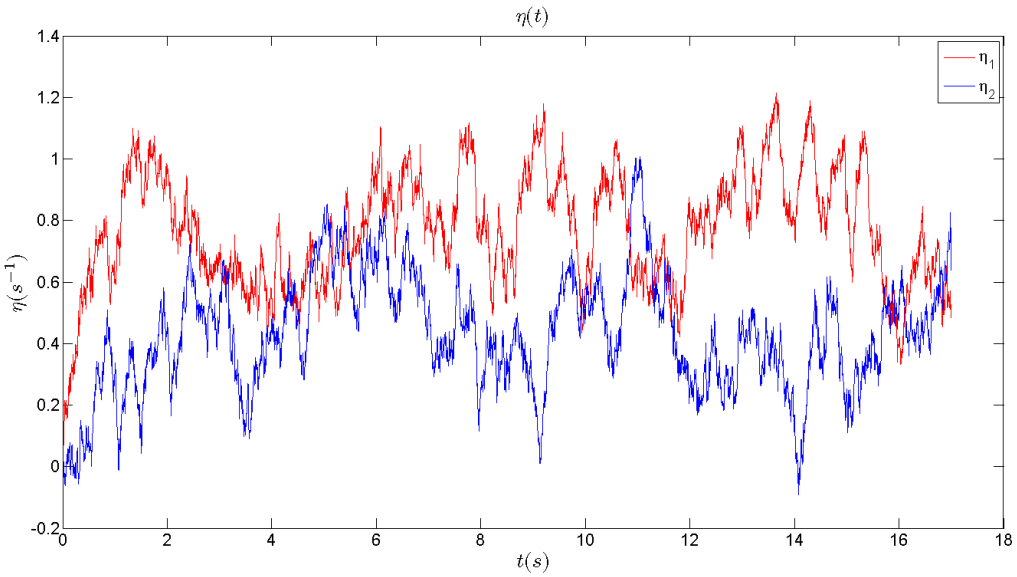

FIGURE 4.9 – Simulation 2 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure présente les valeurs des coefficients de frottements cinétiques η_1 en rouge et η_2 en bleu. Elles représentent les perturbations éventuelles liées aux changements du coefficient de friction du sol.

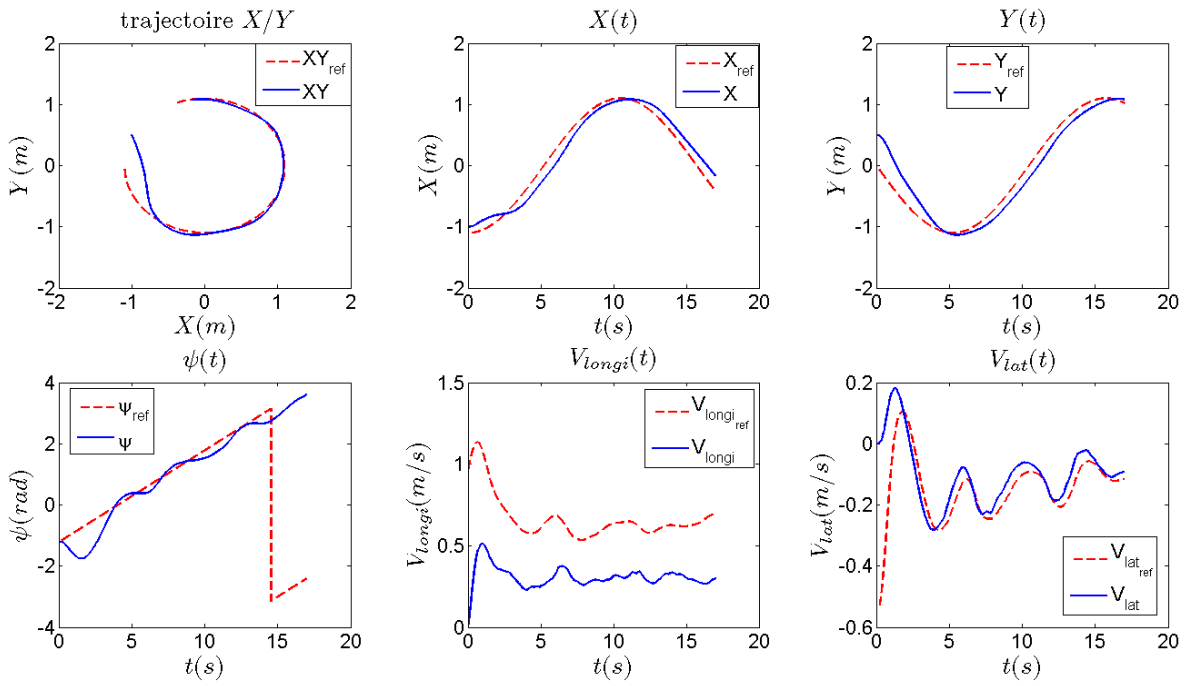

FIGURE 4.10 – Simulation 2 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure expose les résultats du suivi de position du véhicule soumis à des perturbations liées aux frottements au sol. Le lacet de référence ψ_r est calculé par rapport aux sorties plates : $\psi_r = \arctan(\frac{\ddot{y}_r+\eta_1\dot{y}_r}{\ddot{x}_r+\eta_1\dot{x}_r})$.

4.3 Stabilisation pratique par fonctions transverses

Les fondements théoriques de l'approche par fonctions transverses prennent naissance sur l'architecture mathématique des groupes de Lie. En effet, de nombreux systèmes physiques sont naturellement modélisés par des systèmes sur des groupes de Lie. L'Unicycle, les systèmes chaînés, les corps rigides (etc...) en sont de bons exemples. Ils ont l'avantage d'avoir une structure suffisamment riche et générale pour que leurs résultats puissent s'appliquer ou se transposer à d'autres systèmes. Un deuxième avantage à l'utilisation des groupes de Lie est la possibilité d'approximer localement n'importe quel système régulier commandable et sans dérive par un système sur un groupe de Lie. En effet, tout système régulier commandable sans dérive sur une variété peut être approximé par un système nilpotent de même dimension via une approximation homogène. Ce dernier peut être à son tour transformé en un système sur un groupe de Lie grâce au concept "d'élévation" ("lifting theorem") des champs de vecteurs. Finalement, cette approche par fonctions transverses est applicable à une classe de systèmes relativement générale et étendue [Morin & Samson 2009b]. L'application de cette méthode à des systèmes sans dérive de type chaîné (système 2) est largement explorée. Des exemples de résolution par de telles approches sont présentes dans [Morin & Samson 2003]. Pour construire les lois de contrôle par fonctions transverses, il est nécessaire de vérifier cette condition :

- Le système doit vérifier la LARC (Lie Algebra Rank Condition) qui prouve que le système est commandable localement. Cette condition fait intervenir les crochets de Lie des champs de commande.

Finalement cette approche par fonctions transverses convient pour tout système sans dérive satisfaisant la LARC sur $\mathbb{R}^n$. Ces articles proposent tout un panel d'outils pour construire ces fonctions transverses ainsi que les lois de contrôle correspondantes.

4.3.1 Architecture de contrôle pour notre système

Le système dynamique considéré dans cette partie est celui décrit à l'équation (4.2) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & C_{\psi_1} u_\sigma \\ \ddot{y} & = & S_{\psi_1} u_\sigma \\ \ddot{\psi}_1 & = & u_\psi \end{array} \right. \tag{4.16}$$

avec $u_\sigma = S_{\theta_2} u_1$ et sous l'hypothèse réaliste que la dynamique de θ est bien plus rapide que celles du reste du système. Afin d'utiliser les fonctions transverses, nous décomposons le système en trois sous-systèmes :

- Système 1

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = R(\psi) \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ V_{longi} \\ V_{lat} \end{pmatrix}, \quad R(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\psi & -S_\psi \\ 0 & S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

- Système 2

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{V}_{longi} \\ \dot{V}_{lat} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ -V_{longi} u_{c_1} \end{pmatrix}, \quad u_{c_2} = V_{lat}\dot{\psi} + u_\sigma \tag{4.18}$$

- Système 3

$$\dot{u}_{c_1} = u_{\psi_1} \tag{4.19}$$

L'objectif principal est de pouvoir suivre n'importe quelle trajectoire de référence $(\psi_r, x_r, y_r)^\top$ avec les commandes $(u_\sigma, u_\psi)^\top$. Il est possible de contrôler les systèmes en cascade de 1 à 3 et de prouver leur stabilité en utilisant des techniques de type "Backstepping" comme on l'a déjà fait à la section précédente. En revanche, le système 2 ne satisfait pas les conditions du théorème de

Brockett puisque c'est un système chaîné de dimension 2. Il n'existe donc pas de commande par retours d'états continus capables de stabiliser le système en un point d'équilibre, c'est pourquoi la technique de suivi de trajectoire par fonctions transverses est utilisée.

Pour stabiliser le système 1 sur la trajectoire de référence $(x_r, y_r)^\top$, les vitesses longitudinale et latérale doivent tendre vers $V^\star_{longi}, V^\star_{lat}$; ces valeurs sont calculées avec la méthode de "Backstepping". Ensuite, on se propose de stabiliser le système 2 sur ces valeurs désirées $(.^\star)$ au moyen des fonctions transverses. Nous allons donc faire converger respectivement ψ, V_{longi}, V_{lat} vers $\psi_r + f_1(\phi), V^\star_{longi} + f_2(\phi), V^\star_{lat} + f_3(\phi)$ avec $f(\phi) = (f_1(\phi), f_2(\phi), f_3(\phi))^\top$ une fonction transverse et les contrôles $(u^\star_{c_1}, u_{c_2})^\top$. La dernière étape consiste à faire tendre u_{c_1} vers $u^\star_{c_1}$ avec la commande réelle u_ψ. Une autre étape de "Backstepping" peut alors être utilisée.

L'élaboration de la loi de contrôle par fonctions transverses est relativement simple ici puisque synthétisée sur un système chaîné de dimension 2. C'est un problème souvent traité dans la littérature sur les fonctions transverses. Nous nous référons en particulier à [Morin & Samson 2003] ou encore [Morin & Samson 2005c], [Morin & Samson 2005b] et [Morin & Samson 2006a]. Nous présentons dans un premier temps la stabilisation du système 2 par cette méthode, puis nous aborderons la commande du système complet avec la technique de "Backstepping".

4.3.2 Condition de rang de l'algèbre de Lie

La première condition d'existence des fonctions transverses s'appuie sur la commandabilité locale du système, qui se vérifie grâce à la LARC. Rappelons que, d'après le théorème de Rashevski-Chow 2.1.54, les systèmes sans dérive sont localement commandables s'ils vérifient la condition de rang de l'algèbre de Lie (définition 2.1.51). Ce critère s'obtient en calculant les crochets itérés des champs de commande. Reprenons les équations du système 2 en question :

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{V}_{longi} \\ \dot{V}_{lat} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ -V_{longi} u_{c_1} \end{pmatrix}.$$

Les champs de vecteurs correspondants sont $X_1 = (1, 0, -V_{longi})^\top$ et $X_2 = (0, 1, 0)^\top$. La définition des crochets de Lie nécessaires à la vérification de la LARC est accessible à la définition 2.41 de l'état de l'art. Finalement, on obtient $[X_1, X_2] = (0, 0, 1)^\top$ ainsi que les jacobiens

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est ainsi clair que

$$Lie(X_1, X_2) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -V_{longi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La dimension de $Lie(X_1, X_2)$ est de 3, et est égale à la dimension de l'état. Le système (4.18) vérifie donc la LARC et est localement commandable sur $\mathbb{R}^3$.

4.3.3 Champs de vecteurs homogènes

Une définition de l'homogénéité de champs de vecteurs est rappelée ici, il y est également fait référence dans l'état de l'art au paragraphe 2.3.2.2.

Définition 4.3.1 *Soit $\lambda > 0$ et un vecteur $r = (r_1, ..., r_n)$ $(r_i > 0\ \forall i)$, une dilatation Δ^r_λ sur $\mathbb{R}^n$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\Delta^r_\lambda x = (\lambda^{r_1} x_1, ..., \lambda^{r_n} x_n)$. Une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$*

est homogène de degré d en accord avec la famille de dilatation $(\Delta_\lambda^r)_{\lambda>0}$, ou de manière plus concise Δ^r-homogène de degré d, si $\forall\lambda > 0$, $f(\Delta_\lambda^r x) = \lambda^d f(x)$. Un champ de vecteurs régulier X sur $\mathbb{R}^n$ est Δ^r-homogène de degré τ si, pour tout $i = 1, ..., n$, la fonction $x \mapsto X_i(x)$ est Δ^r-homogène de degré $\tau + r_i$.

Proposition 4.3.2 *Les champs de vecteurs du système (4.18) sont $\Delta_\lambda^{(1,1,2)}$-homogènes de degrés respectifs $(-1, -1)$.*

Preuve $X_1 = \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -V_{longi} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $$\begin{cases} X_{11}(\lambda^{r_1}\psi, \lambda^{r_2}V_{longi}, \lambda^{r_3}V_{lat}) = 1 \\ \lambda^{r_1+\tau_1}X_{11}(x) = \lambda^{r_1+\tau_1} \end{cases} \Rightarrow r_1 + \tau_1 = 0$$
- $$\begin{cases} X_{13}(\lambda^{r_1}\psi, \lambda^{r_2}V_{longi}, \lambda^{r_3}V_{lat}) = -\lambda^{r_2}V_{longi} \\ \lambda^{r_3+\tau_1}X_{13}(x) = -\lambda^{r_3+\tau_1}V_{longi} \end{cases} \Rightarrow r_3 + \tau_1 = r_2$$
- $$\begin{cases} X_{22}(\lambda^{r_1}\psi, \lambda^{r_2}V_{longi}, \lambda^{r_3}V_{lat}) = 1 \\ \lambda^{r_2+\tau_2}X_{22}(x) = \lambda^{r_2+\tau_2} \end{cases} \Rightarrow r_2 + \tau_2 = 0$$

Finalement en prenant $\tau_1 = \tau_2 = -1$, le vecteur r est le suivant $(1, 1, 2)$.

L'intérêt d'avoir des champs de vecteurs homogènes apparaît pour le calcul de l'application exponentielle au paragraphe 4.3.5.

4.3.4 Loi de composition et invariance à gauche des champs de vecteurs

Une étape clé dans l'élaboration des lois de contrôle par fonctions transverses réside dans la recherche d'une loi de composition rendant les champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie. L'intérêt de cette invariance est, entre autres choses, de simplifier le cas d'étude de la stabilisation de trajectoire (voir le chapitre 4.3.6).

Un groupe de Lie noté généralement G est une variété régulière munie d'une loi de groupe C^∞ $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \star g_2$. Un champ de vecteurs défini sur un groupe de Lie est dit invariant à gauche si

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad dL_{g_1}(g_2)X(g_2) = X(g_1 \star g_2) \tag{4.20}$$

avec L_{g_1} la translation à gauche par g_1 défini par $L_{g_1}(g_2) = g_1 \star g_2$. De manière similaire, la translation à droite par g_2 est définie par $R_{g_2}(g_1) = g_1 \star g_2$. Quant à $df(p)$, il exprime simplement la différentielle de f évaluée en p. L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche souvent noté $\mathfrak{g}$ est appelé l'algèbre de Lie du groupe. Une autre définition découle de cette invariance : si l'espace d'état associé à un système est un groupe de Lie, et si ses champs de vecteurs sont invariants à gauche, alors le système est dit sur un groupe de Lie. L'article [Morin & Samson 2009b] donne une définition alternative et moins formelle de l'invariance à gauche en parlant de trajectoire. En effet, étant donnée une commande $u(t)(t \in [0, T])$, n'importe quelle solution du système peut être déduite d'une autre solution par simple translation à gauche par un élément constant. Par exemple, si $g_1(t)$ et $g_2(t)$ sont deux solutions d'un système, alors $\forall t \in [0, T], g_2(t) = g_2(0) \star g_1(0)^{-1} \star g_1(t)$. De ces propriétés, il découle une certaine simplicité pour trouver le système dynamique décrivant l'erreur à la trajectoire de référence (voir chapitre 4.3.6). Plusieurs méthodes pour trouver ces lois de groupe rendant invariants les champs de vecteurs sont présentées dans [Morin & Samson 2003] et [Morin & Samson 2009b]. L'une des méthodes s'appuie sur la notion de "mapping" exponentiel (voir chapitre 4.3.5) et sur la formule de Campbell-Baker-Hausdorff.

Proposition 4.3.3 *La loi de composition rendant les champs de vecteurs du système (4.18) invariants à gauche est la suivante :*

$$\sigma \star \tau = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \tau_1 \\ \sigma_2 + \tau_2 \\ \sigma_3 + \tau_3 - \sigma_2 \tau_1 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Preuve Tout d'abord, rappelons les champs de vecteurs du système (4.18) :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -V_{longi} \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En calculant la partie droite de l'équation (4.20) pour les deux champs de vecteurs, on obtient :

$$X_1(\sigma \star \tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sigma_2 - \tau_2 \end{pmatrix} \quad X_2(\sigma \star \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De plus, la définition de l'invariance à gauche fait intervenir la différentielle de la translation à gauche, ce qui amène à :

$$L_\sigma(\tau) = \sigma \star \tau \quad \text{soit} \quad dL_\sigma(\tau) = d_{|\tau}(\sigma \star \tau) \quad \text{ou encore} \quad dL_\sigma(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sigma_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, il est clair que $dL_\sigma(\tau)X_1(\tau) = X_1(\sigma \star \tau)$ et $dL_\sigma(\tau)X_2(\tau) = X_2(\sigma \star \tau)$. Les champs de vecteurs X_1 et X_2 sont donc invariants à gauche par la loi de composition décrite plus haut (4.21).

4.3.5 "Mapping" exponentiel et fonctions transverses

Le "mapping" exponentiel est souvent utilisé dans la théorie des groupes de Lie. Il permet de définir l'application liant l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie à lui-même. La définition tirée de [Morin & Samson 2003] pour l'application exponentielle d'un système sans dérive du type $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x)$ est la suivante :

Définition 4.3.4 *Soit $X_1, X_2, ..., X_{\overline{n}}$ les champs de vecteurs formant la base de Lie($X_1, ..., X_m$). L'application exponentielle notée $\psi : \mathbb{R}^{\overline{n}} \mapsto \mathbb{R}^n$ est définie par :*

$$\psi(\alpha) = exp(\alpha X) \triangleq e^{\alpha X}(id)(0) \tag{4.22}$$

avec

$$\alpha X = \textstyle\sum_{i=1}^{\overline{n}} \alpha_i X_i \qquad e^Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}$$

id est la fonction identité sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce contexte, Z^k est l'opérateur différentiel sur des fonctions f tel que $Z(f) = L_z f$, soit la dérivée de Lie de f le long du champ de vecteurs Z. Les dérivées successives s'expriment alors $Z^k(f) = Z(Z^{k-1}(f))$.

Remarque Les champs de vecteurs Δ^r-homogènes de degrés négatifs ont un intérêt pour le calcul de l'exponentielle puisque la somme de celle-ci est finie pour ces champs.

Remarque $\psi(\alpha)$ est la solution au temps $T = 1$ de l'équation différentielle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{\overline{n}} \alpha_i X_i(x), \quad x(0) = 0.$$

Finalement, cette application exponentielle permet de passer des coordonnées dans la base de l'algèbre de Lie, notées α_i dans l'expression du champ de vecteurs αX, aux coordonnées cartésiennes classiques.

4.3.5.1 Calcul de l'application exponentielle

Cette partie a pour but de calculer cette application exponentielle pour le système (4.18). Elle est utile au calcul des fonctions transverses. Tout d'abord, rappelons que

$$Lie(X_1, X_2) = span\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix}}_{X_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_3}\right\}, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

X_1, X_2 et X_3 forment la base de Lie(X_1, X_2) de dimension $\overline{n} = 3$. D'après l'équation (4.22),

$$\psi(\alpha) \triangleq e^{\alpha X}(id)(0) = (\alpha X)^0(id)(0) + \alpha X(id)(0) + \tfrac{(\alpha X)^2}{2}(id)(0) + \tfrac{(\alpha X)^3}{6}(id)(0)... \tag{4.23}$$

- $(\alpha X)^0(id)(0) = (id)(0) = 0$
- $\alpha X = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i X_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 - x_2\alpha_1 \end{pmatrix}$ d'où $\alpha X(id)(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$
- $(\alpha X)^2(id)(0) = \alpha X(\alpha X(id))(0) = L_{\alpha X}\alpha X(id)(0)$ (rappel : $L_Z f = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$).

$$\alpha X(id) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 - x_2\alpha_1 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \alpha X(id)}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement $(\alpha X)^2(id) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} = (\alpha X)^2(id)(0)$

- En ce qui concerne l'ordre 3, $(\alpha X)^3(id)(0) = (0)$.

En regroupant tous les termes, l'application exponentielle s'écrit :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{\overline{n}}, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } n = \overline{n} = 3, \ \psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

avec son application inverse

$$\psi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + \frac{x_1x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

4.3.5.2 Calcul des fonctions transverses

[Morin & Samson 2003] propose des expressions explicites des fonctions transverses. Des exemples de telles fonctions pour des systèmes chaînés quasi identiques au système (4.18) y sont d'ailleurs présentés. Dans notre cas, il suffit d'expliciter la fonction suivante $f(\phi)$ en utilisant l'expression de l'application exponentielle calculée précedemment :

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \quad f(\phi) = exp(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \tag{4.26}$$

avec $\alpha_1 = \varepsilon_1 sin(\phi)$ et $\alpha_2 = \varepsilon_2 cos(\phi)$. En utilisant les formules (4.24), nous obtenons l'expression de la fonction transverse suivante :

$$f(\phi) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 sin(\phi) \\ \varepsilon_2 cos(\phi) \\ -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} sin(2\phi) \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

4.3.6 Stabilisation de trajectoire

Il a déjà été mentionné plus tôt dans ce rapport l'intérêt de l'invariance à gauche des champs de vecteurs selon une certaine loi de composition (4.21). En effet, l'article [Morin & Samson 2003] montre qu'il est possible de se ramener simplement au problème de stabilisation autour d'une trajectoire de référence. Dans un cadre plus général, pour stabiliser le système $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x)$ autour d'une référence notée x_r, il faut stabiliser le système décrivant la dynamique de l'erreur $e = x - x_r$ à la trajectoire autour de 0. En revanche, ce dernier peut avoir une structure tout à fait différente de celle de départ. L'invariance à gauche permet de garder la structure initiale exploitable pour la stabilisation par fonctions transverses.

Soit x_r une référence arbitraire quelconque exprimée sous la forme :

$$\dot{x_r} = \sum_{i=1}^{\overline{n}} v_{r,i} X_i(x_r) \tag{4.28}$$

Remarque Pour le cas d'étude du système (4.18), $\mathrm{Lie}(X_1, X_2) = \mathbb{R}^3$. Il est donc possible de définir l'ensemble $\mathbb{R}^3$ comme référence.

Prenons σ et $\tau \in G$ (G un groupe de Lie) les solutions respectives des équations différentielles suivantes :

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} v_i Y_i(\sigma) \qquad \dot{\tau} = \sum_{i=1}^{n} u_i Z_i(\tau)$$

avec $Y_1, ..., Y_n$ et $Z_1, ..., Z_n$ des champs de vecteurs invariants à gauche dans l'algèbre de Lie correspondante. En considérant $\sigma^{-1} \star \tau$ avec l'opérateur $\star$ signalant le calcul par la loi de composition rendant les champs invariants à gauche, l'égalité suivante est obtenue :

$$\frac{d}{dt}(\sigma^{-1} \star \tau) = \sum_{i=1}^{n} u_i Z_i(\sigma^{-1} \star \tau) - \sum_{i=1}^{n} v_i Ad(\tau^{-1} \star \sigma) Y_i(\sigma^{-1} \star \tau) \tag{4.29}$$

avec Ad la représentation adjointe de G, c'est-à-dire pour $\sigma \in G, \quad Ad(\sigma) = dI_\sigma(e)$ avec $I_\sigma : G \mapsto G$ définie par $I_\sigma(g) = \sigma \star g \star \sigma^{-1}$. e désigne l'élément identité de G : $\forall \tau \in G, \quad \tau \star e = e \star \tau = \tau$. Considérons alors $\tilde{x} = x_r^{-1} \star x$, "l'erreur" du système associée au problème de stabilisation de trajectoire. La dynamique de cet état est alors exprimée selon l'équation ci-dessous :

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(\tilde{x}) + P(\tilde{x}, t) \tag{4.30}$$

avec

$$P(\tilde{x}, t) = -\sum_{i=1}^{n} v_{r,i}(t) Ad(\tilde{x}^{-1}) X_i(\tilde{x}). \tag{4.31}$$

Il est clair que la structure de départ $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x)$ est gardée. En revanche $P(\tilde{x}, t)$ est ici considéré comme une perturbation et ne pose pas de problème pour la stabilisation par fonctions transverses.

4.3.7 Loi de contrôle

L'objectif reste alors à concevoir une loi de commande capable de rendre $\tilde{x} = e$ stable d'un point de vue "pratique" pour le nouveau système (4.30) considéré. Rappelons que la stabilisation dite "pratique" a pour but de rendre $\tilde{x} = e + f(\phi)$ stable avec $f(\phi)$ la fonction transverse bornée par $\varepsilon > 0$ qu'il est possible de fixer à sa guise. Il est naturel de noter que plus ε est grand, plus

la loi de commande est robuste. [Morin & Samson 2003] donne l'expression explicite de l'équation différentielle utilisée pour la stabilisation pratique :

$$\dot{z} = dR_{f(\phi)^{-1}}(\tilde{x})dL_z(f(\phi))\left(\sum_{i=1}^{m} u_i X_i(f(\phi)) - \sum_{j=m+1}^{n} \dot{\phi}_j \frac{\partial f}{\partial \phi_j}(\phi) + dL_{z^{-1}}(\tilde{x})P(\tilde{x},t)\right) \tag{4.32}$$

avec $z = \tilde{x} \star f(\phi)^{-1}$. En notant $H(\phi) = \left(X_1(f(\phi))...X_m(f(\phi))\frac{\partial f}{\partial \phi_{m+1}}(\phi)...\frac{\partial f}{\partial \phi_n}(\phi)\right)$, l'équation précédente devient :

$$\dot{z} = dR_{f(\phi)^{-1}}(\tilde{x})dL_z(f(\phi))\left(H(\phi)\begin{pmatrix} u \\ -\dot{\phi} \end{pmatrix} + dL_{z^{-1}}(\tilde{x})P(\tilde{x},t)\right) \tag{4.33}$$

Les fonctions transverses sont construites dans le but de rendre la matrice $H(\phi)$ inversible. Sachant que $(dL_z(f))^{-1} = dl_{z^{-1}}(\tilde{x})$ et $(dR_f(z))^{-1} = dR_{f^{-1}}(\tilde{x})$, on peut exprimer les commandes comme suit :

$$\begin{pmatrix} u \\ -\dot{\phi} \end{pmatrix} = H(\phi)^{-1}dL_{z^{-1}}(\tilde{x})\left(dR_{f(\phi)}(z)Z(z) - P(\tilde{x},t)\right) \tag{4.34}$$

avec $Z(z)$ défini tel que la loi de commande amène à satisfaire l'équation suivante :

$$\dot{z} = Z(z) \tag{4.35}$$

$Z(z)$ doit être choisi de manière à faire converger z vers e : par exemple $Z(z) = Kz$ avec K une matrice de Hurwitz.

4.3.7.1 Coordonnées de z

Rappelons que la loi de composition (cf section 4.3.4) propre au système (4.18) est définie par :

$$\Phi(\sigma,\tau) = \sigma \star \tau = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \tau_1 \\ \sigma_2 + \tau_2 \\ \sigma_3 + \tau_3 - \sigma_2\tau_1 \end{pmatrix}$$

L'élément identité associé à cette loi produit est $e = (0,0,0)^\top$. Les coordonnées de $z = \tilde{x} \star f(\phi)^{-1}$ se calculent au moyen des différentes équations ci-dessous.

$$\begin{aligned}
x_r &= \begin{pmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ x_{r3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_r \\ V_{longi_r} \\ V_{lat_r} \end{pmatrix} \\
x_r^{-1} &= \begin{pmatrix} -x_{r1} \\ -x_{r2} \\ -x_{r3} - x_{r1}x_{r2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_r \\ -V_{longi_r} \\ -V_{lat_r} - \psi_r V_{longi_r} \end{pmatrix} \\
\tilde{x} &= x_r^{-1} \star x = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{V}_{longi} \\ \tilde{V}_{lat} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi - \psi_r \\ V_{longi} - V_{longi_r} \\ V_{lat} - V_{lat_r} + V_{longi_r}(\psi - \psi_r) \end{pmatrix} \\
z &= \begin{pmatrix} \tilde{\psi} - f_1(\phi) \\ \tilde{V}_{longi} - f_2(\phi) \\ \tilde{V}_{lat} - f_3(\phi) + f_1(\phi)(\tilde{V}_{longi} - f_2(\phi)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4.3.7.2 Les matrices $H(\phi)$, $dL_{z^{-1}}(\tilde{x})$ et $dR_{f(\phi)}(z)$

Sachant que $H(\phi) = \left(X_1(f(\phi)) \;\; X_2(f(\phi)) \;\; \frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi)\right)$, d'après l'équation (4.27) et les expressions des champs de vecteurs X_1, X_2, nous pouvons écrire :

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon_1\cos(\phi) \\ 0 & 1 & -\varepsilon_2\sin(\phi) \\ -\varepsilon_2\cos(\phi) & 0 & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\cos(2\phi) \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

et $det(H(\phi)) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2} \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq 0$.

Calcul de $dL_{z^{-1}}(\tilde{x})$ et $dR_{f(\phi)}(z)$:

- $dL_{z^{-1}}(\tilde{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(z^{-1}, \tilde{x})$ avec $\Phi(z^{-1}, \tilde{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 - z_1 \\ \tilde{x}_2 - z_2 \\ \tilde{x}_3 - z_3 + z_2(\tilde{x}_1 - z_1) \end{pmatrix}$, ceci amène à :

$$dL_{z^{-1}}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

- $dR_{f(\phi)}(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(z, f(\phi))$ avec $\Phi(z, f(\phi)) = \begin{pmatrix} z_1 + f_1(\phi) \\ z_2 + f_2(\phi) \\ z_3 + f_3(\phi) - z_2 f_1(\phi) \end{pmatrix}$, ceci amène à :

$$dR_{f(\phi)}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -f_1(\phi) & 1 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

4.3.7.3 Perturbation $P(\tilde{x}, t)$

D'après les équations (4.30) et (4.31), et la définition de la représentation adjointe Ad, $Ad(\tilde{x}^{-1})$ s'obtient ainsi :

$$Ad(\tilde{x}^{-1}) = (dI_{\tilde{x}^{-1}})(e)$$

avec

$$\forall g \in G, \quad I_{\tilde{x}^{-1}}(g) = \tilde{x}^{-1} \star g \star \tilde{x}$$

et

$$\tilde{x}^{-1} = \begin{pmatrix} -\tilde{x}_1 \\ -\tilde{x}_2 \\ -\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}^{-1} \star g \star \tilde{x} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 + g_1\tilde{x}_2 - g_2\tilde{x}_1 \end{pmatrix}.$$

Le gradient de la fonction $I_{\tilde{x}^{-1}}$ devient donc :

$$Ad(\tilde{x}^{-1}) = (dI_{\tilde{x}^{-1}})(e) = \frac{\partial I_{\tilde{x}^{-1}}(g)}{\partial g}|_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \tilde{x}_2 & -\tilde{x}_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$P(\tilde{x}, t) = -v_{r,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - v_{r,2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tilde{x}_1 \end{pmatrix} - v_{r,3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

avec $v_{r,1}, v_{r,2}$ et $v_{r,3}$ définies tels que

$$\dot{x}_r = \sum_{i=1}^{\bar{n}} v_{r,i} X_i(x_r) = v_{r,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x_{r2} \end{pmatrix} + v_{r,2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_{r,3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

Pour suivre la référence et sa dynamique, nous imposons $v_{r,1} = \dot{x}_{r1}$, $v_{r,2} = \dot{x}_{r2}$ et $v_{r,3} = \dot{x}_{r3} + x_{r2} v_{r,1}$.

4.3.7.4 Dynamique de z

Il vient l'expression complète suivante :

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z_2 & f_1(\phi) & 1 \end{pmatrix} \left(H(\phi) \begin{pmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ -\dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} P(\tilde{x}, t) \right) \tag{4.41}$$

Pour la suite, nous noterons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z_2 & f_1(\phi) & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'expression de la loi de contrôle devient finalement :

$$\begin{pmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ -\dot{\phi} \end{pmatrix} = H(\phi)^{-1} C \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -f_1(\phi) & 1 \end{pmatrix} Z(z) - P(\tilde{x}, t) \right) \tag{4.42}$$

4.3.8 Loi de commande des systèmes en cascade du drone par l'approche "Backstepping"

Dans un premier temps, nous ne considérons que les deux premiers systèmes d'équations rappelés ci-dessous. L'objectif est de stabiliser le système 1 avec les commandes u_{c1}, u_{c2} présentes dans le système 2 par une approche "Backstepping". Pour faire converger le système 1 vers la référence, le vecteur $v = (\dot{\psi}, V_{longi}, V_{lat})^\top$ doit être égale à une valeur désirée notée $v^\star$. Pour que ceci soit vrai, il est nécessaire que le système 2 fasse converger v vers $v^\star$. C'est à ce stade que l'approche par fonctions transverses, appliquée au système 2 chaîné, tend à faire converger de manière pratique (à un epsilon près) v vers $v^\star$. En revanche, la méthode utilisée pour stabiliser le système 2 fait tendre ψ vers ψ_r et non pas sa dérivée. L'approche par fonctions transverses est utilisée pour faire converger $\psi \to \psi_r$, $V_{longi} \to V^\star_{longi}$ et $V_{lat} \to V^\star_{lat}$ selon les dynamiques décrites par le système 2. Le système 1, quant à lui, fait tendre $x \to x_r$ et $y \to y_r$.

- Système 1

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = R(\psi) \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ V_{longi} \\ V_{lat} \end{pmatrix}, \quad R(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\psi & -S_\psi \\ 0 & S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

- Système 2

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{V}_{longi} \\ \dot{V}_{lat} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ -V_{longi} u_{c_1} \end{pmatrix}, \quad u_{c_2} = V_{lat}\dot{\psi} + u_\sigma \tag{4.44}$$

Étape 1 : Posons $\tilde{X} = X - X_r = (0, x - x_r, y - y_r)^\top$, et $X_2 = (\psi, V_{longi}, V_{lat})^\top$ la commande virtuelle du système 1. Soit $V_1 = \frac{1}{2}\tilde{X}^\top \tilde{X}$ la fonction de Lyapunov candidate :

$$\dot{V}_1 = \tfrac{1}{2}\dot{\tilde{X}}^\top \tilde{X} + \tfrac{1}{2}\tilde{X}^\top \dot{\tilde{X}}$$

$$\tilde{X}^\top \dot{\tilde{X}} = \tilde{X}^\top \left(R(\psi) X_2 - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix}}_{\dot{X}_r} \right)$$

Pour stabiliser le système 1, la commande désirée est donc

$$X_2^\star = \begin{pmatrix} \psi_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R(-\psi) \left(-K_1 \tilde{X} + \dot{X}_r \right) = \begin{pmatrix} \psi_r \\ V^\star_{longi} \\ V^\star_{lat} \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

avec

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\tilde{x}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\tilde{y}} \end{pmatrix}.$$

Le terme $(\psi_r, 0, 0)^\top$ est ajouté pour pouvoir incorporer la loi de contrôle des fonctions transverses (4.41) dans l'étape 2 du "Backstepping". Il n'a pas d'influence sur la fonction de Lyapunov V_1 puisque $\tilde{X}^\top(\psi_r, 0, 0)^\top = 0$.

Posons ensuite $\tilde{X}_2 = X_2 - X_2^\star = \begin{pmatrix} \psi - \psi_r \\ V_{longi} - V_{longi}^\star \\ V_{lat} - V_{lat}^\star \end{pmatrix}$,

$$\tilde{X}^\top \dot{\tilde{X}} = \tilde{X}^\top \left(R(\psi) \left(\tilde{X}_2 + X_2^\star \right) - \dot{X}_r \right) = \tilde{X}^\top \left(R(\psi)\tilde{X}_2 - K_1\tilde{X} + \begin{pmatrix} \psi_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \tilde{X}^\top \left(R(\psi)\tilde{X}_2 - K_1\tilde{X} \right)$$

$$\dot{V}_1 = -\tilde{X}^\top K_1 \tilde{X} + \frac{1}{2}\left(\tilde{X}^\top R(\psi)\tilde{X}_2 \right)^\top + \frac{1}{2}\tilde{X}^\top R(\psi)\tilde{X}_2$$

Étape 2 : Le passage du système 1 au système 2 est un peu particulier puisqu'il fait intervenir la loi de commande calculée par l'approche des fonctions transverses et qui est régie par la dynamique de z. La référence que le système 2 cherche à stabiliser avec la méthode des fonctions transverses est $(x_{r1}, x_{r2}, x_{r3})^\top = (\psi_r, V_{longi}^\star, V_{lat}^\star)^\top$. Il faut donc lier les variables $\tilde{X}_2$ et z. En explicitant l'expression de z en coordonnées cartésiennes, il est possible de lier ces deux variables comme suit :

$$\tilde{X}_2 = B\,(z + D) \tag{4.46}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -V_{longi}^\star & -f_1(\phi) & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} f_1(\phi) \\ f_2(\phi) \\ f_3(\phi) + f_1(\phi)f_2(\phi) \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

Rappelons l'équation différentielle de z :

$$\dot{z} = A\left(H(\phi)U + CP(\tilde{x}, t)\right) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ -\dot{\phi} \end{pmatrix}$$

mais aussi d'après l'équation (4.40),

$$P(\tilde{x}, t) = \begin{pmatrix} -v_{r,1} \\ -v_{r,2} \\ -v_{r,3} + v_{r,2}(\psi - \psi_r) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_{r,1} &= \dot{\psi}_r \\ v_{r,2} &= \dot{V}_{longi}^\star \\ v_{r,3} &= \dot{V}_{lat}^\star + V_{longi}^\star \dot{\psi}_r \end{cases}$$

Posons alors $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z^\top z$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \tfrac{1}{2}\dot{z}^\top z + \tfrac{1}{2}z^\top \dot{z} \\ &= -\tilde{X}^\top K_1 \tilde{X} + \tfrac{1}{2}\left(\tilde{X}^\top R(\psi)\tilde{X}_2 \right)^\top + \tfrac{1}{2}\tilde{X}^\top R(\psi)\tilde{X}_2 + \tfrac{1}{2}\dot{z}^\top z + \tfrac{1}{2}z^\top \left(AH(\phi)U + ACP \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.46),

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= ... + \tfrac{1}{2}\left((Bz + BD)^\top R(\psi)^\top \tilde{X} \right) + ... + \tfrac{1}{2}z^\top (AH(\phi)U + ACP) \\ &= -\tilde{X}^\top K_1 \tilde{X} + \tfrac{1}{2}z^\top \Delta + \tfrac{1}{2}\Delta^\top z + p \end{aligned}$$

avec

$$\Delta = B^\top R(\psi)^\top \tilde{X} + AH(\phi)U + ACP \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2}D^\top B^\top R(\psi)^\top \tilde{X} + \frac{1}{2}\tilde{X}R(\psi)BD$$

La commande virtuelle désirée notée $U^\star$ s'exprime alors :

$$U^\star = \begin{pmatrix} u_{c_1}^\star \\ u_{c_2} \\ -\dot{\phi} \end{pmatrix} = H(\phi)^{-1} A^{-1} \left(-K_2 z - ACP - B^\top R(x_1)^\top \tilde{X} \right)$$

avec

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{z_3} \end{pmatrix}$$

L'expression finale de $\dot{V}_2$ est alors :

$$\dot{V}_2 = -\tilde{X}^\top K_1 \tilde{X} - z^\top K_2 z + p$$

La dérivée de V_2 n'est pas strictement négative à cause de p. Ce dernier terme est dû à la propriété locale du contrôle par fonctions transverses. Nous pouvons noter en revanche que le vecteur BD est borné et arbitrairement petit. La norme de ce vecteur dépend en effet des valeurs de ε_1 et ε_2. La dernière étape de "Backstepping" pour évaluer l'expression de la commande réelle u_ψ n'est pas présentée dans ce manuscrit car ne présentant pas d'intérêt particulier. Les simulations, détaillées dans la partie suivante, s'appuient uniquement sur les systèmes dynamiques 1 (4.43) et 2 (4.44).

4.3.9 Simulations

Nous avons mis en place deux scénarii de simulation pour mettre en avant les capacités de cette loi de contrôle. La première simulation décrit la stabilisation du système dynamique (comprenant les équations (4.43) et (4.44)) sur un cercle, c'est-à-dire sur une trajectoire admissible. Les frottements n'étant pas pris en compte dans la modélisation, le vecteur d'accélération est dirigé vers le centre du cercle. Outre la convergence pratique, bien visible sur les figures, la dynamique de ϕ reste stable et converge même vers 0, ce qui concorde bien avec la théorie. Cet état n'a pas de raison d'osciller puisque la trajectoire est faisable. Dans la deuxième simulation, la trajectoire de référence est composée d'une partie de cercle, d'une ligne droite puis d'une stabilisation en un point. La première partie est une trajectoire admissible puisque le lacet de référence est bien dirigé vers le centre du cercle. En revanche, pour la ligne droite, le lacet n'est pas dirigé selon l'axe de la ligne, ce qui en fait une trajectoire non admissible : le lacet n'est pas en cohérence avec le tracé. En outre, les références ne sont pas forcément continues, en particulier lors des changements cercle/ligne droite et ligne droite/stabilisation en un point. La dynamique ϕ tend à osciller lors de la ligne droite et lors de la stabilisation en un point, ce qui était également prévisible. Par ailleurs, les commandes sont sensibles lors des changements non continus entre les trajectoires (voir figure 4.16). Les gains du contrôleur sont les mêmes entre les deux simulations : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, $k_{\tilde{x}} = k_{\tilde{y}} = 2.7$, $k_{z_1} = 7.2$, $k_{z_2} = k_{z_3} = 9$. Le véhicule est positionné initialement au point $(x_0 = -0.8, y_0 = 0, \psi_0 = -1.8)^\top$ et les vitesses longitudinale et latérale initiales sont, quant à elles : $V_{longi_0} = 0$ m/s et $V_{lat_0} = -0.3$ m/s.

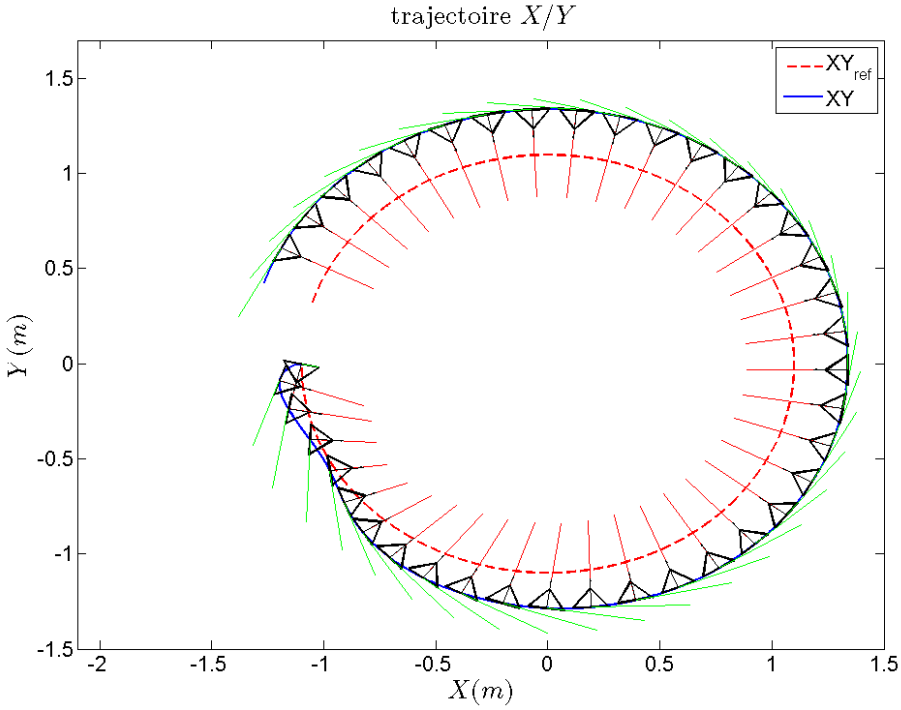

FIGURE 4.11 – Simulation 1 : Suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La figure illustre la trajectoire du système symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. $V^{\star}_{longi}$ et $V^{\star}_{lat}$ sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

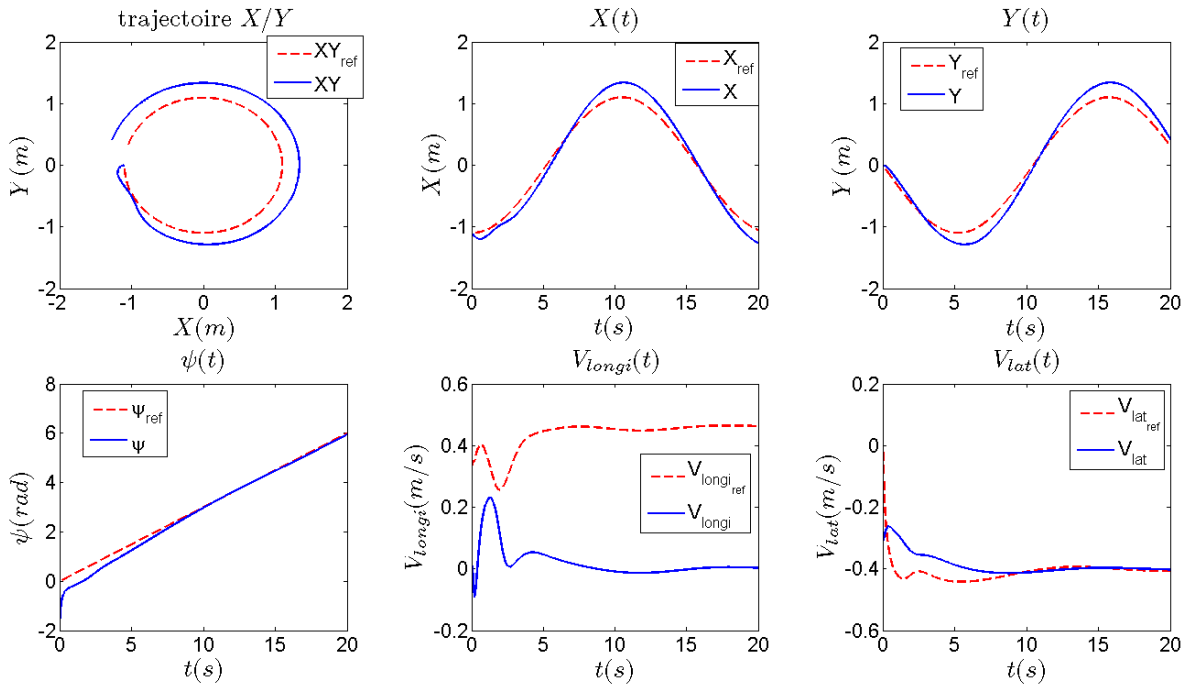

FIGURE 4.12 – Simulation 1 : Suivi d'un cercle de rayon 1.1m. La caratéristique locale de la convergence est bien visible sur la dynamique V_{longi}.

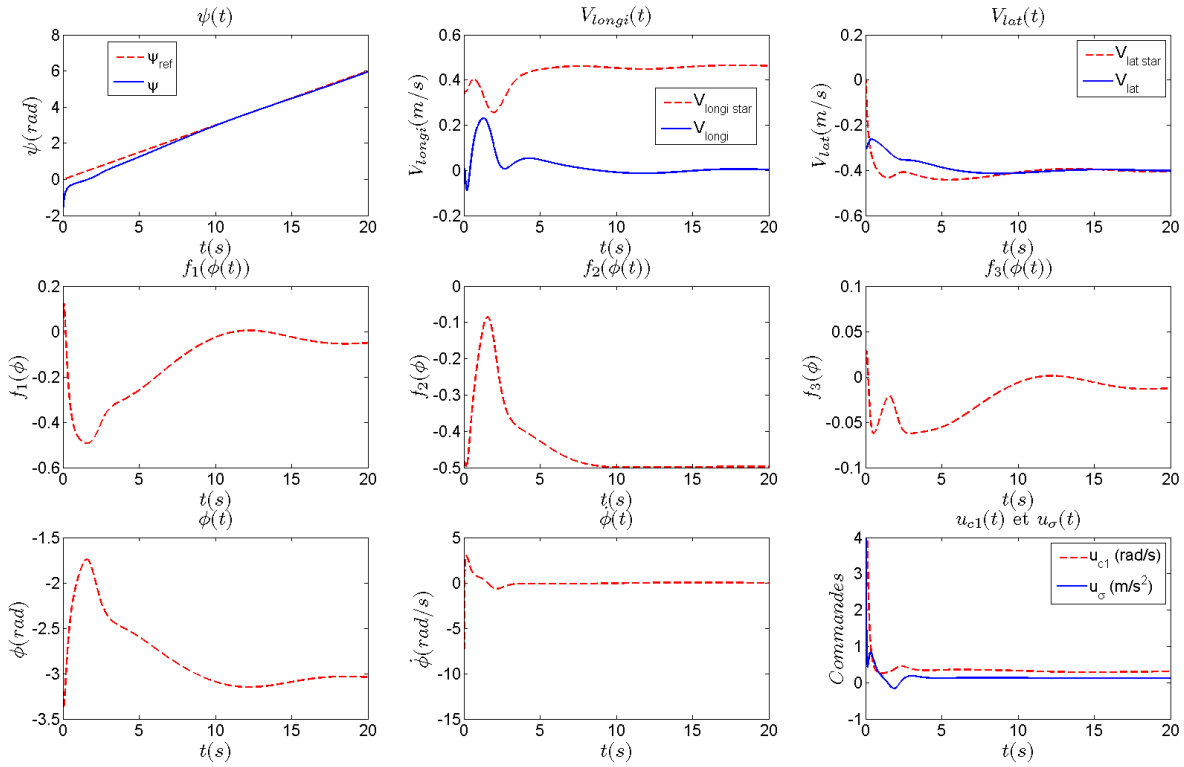

FIGURE 4.13 – Simulation 1 : Suivi d'un cercle de rayon 1.1m. L'état $\dot{\phi}$ converge vers 0 puisque la trajectoire est admissible.

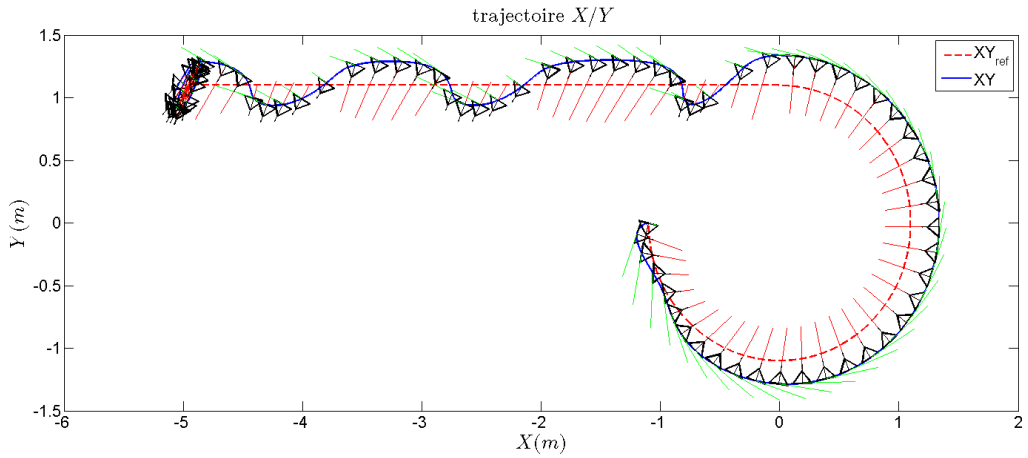

FIGURE 4.14 – Simulation 2 : Suivi d'un cercle de rayon 1.1m, d'une ligne droite non admissible puis une stabilisation en un point. La figure illustre la trajectoire du système symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. $V^{\star}_{longi}$ et $V^{\star}_{lat}$ sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

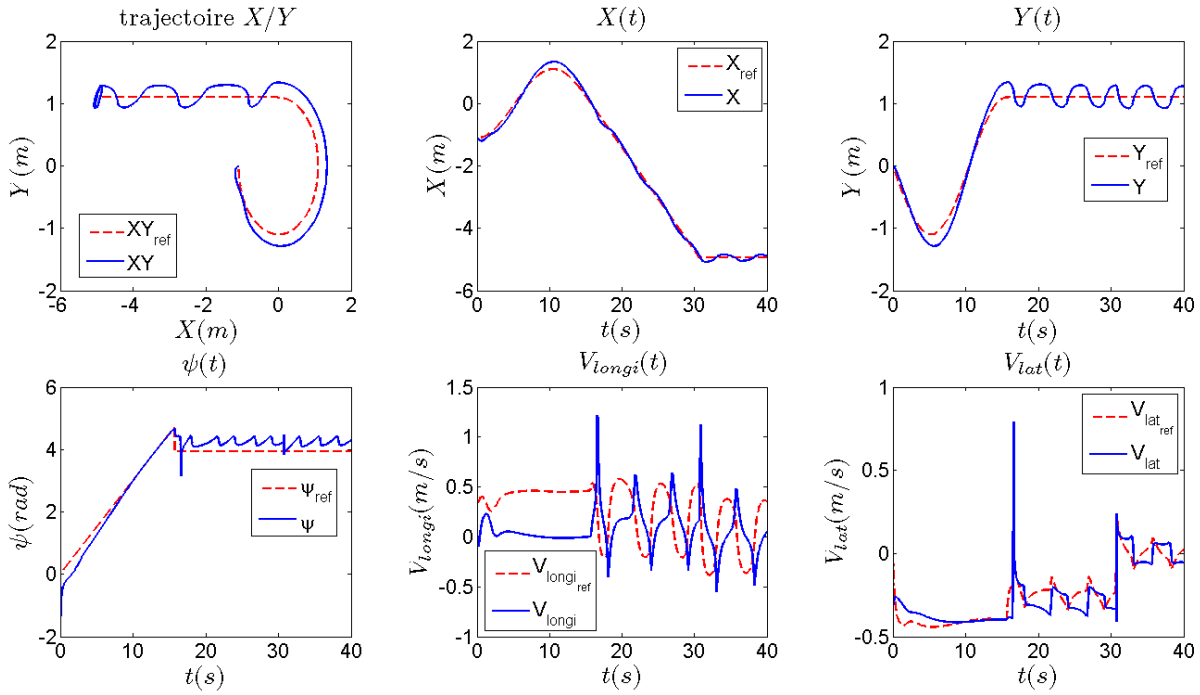

FIGURE 4.15 – Simulation 2 : Suivi d'un cercle de rayon 1.1m, d'une ligne droite non admissible puis une stabilisation en un point. La caratéristique locale de la convergence est bien visible sur la dynamique V_{longi}, que ce soit pour une trajectoire admissible ou non.

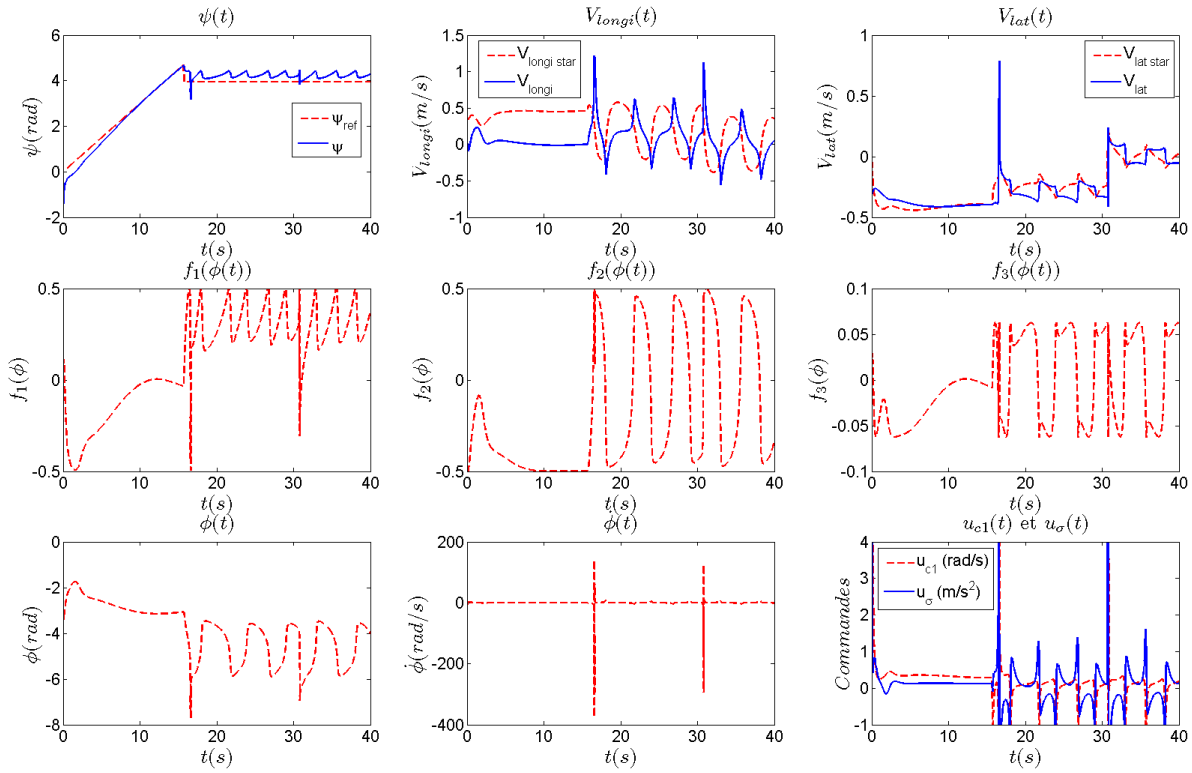

FIGURE 4.16 – Simulation 2 : Suivi d'un cercle de rayon 1.1m, d'une ligne droite non admissible puis une stabilisation en un point. L'état ϕ tend à être constant lorsque le système suit une trajectoire admissible circulaire. À l'inverse, il oscille pour la ligne droite non faisable et lors de la stabilisation en un point.

4.4 Arrêt du drone par commandes en temps variant

Dans les parties précédentes, nous avons présenté des lois de contrôle permettant : une stabilisation pratique via les fonctions transverses ou via la méthode de "Backstepping" (section 4.2.2), mais aussi, une stabilisation asymptotique sur des trajectoires excitantes avec l'approche par platitude. En revanche, la stabilisation asymptotique en un point fixe n'a pas encore été abordée. On a mentionné plusieurs fois que le système dynamique de notre drone ne peut pas être stabilisé en un point par des retours d'états continus à cause de l'obstruction au théorème de Brockett. Des commandes en temps variant sont généralement appliquées. Cette section vise à utiliser ce type de bouclage. Cette partie peut être vue comme une introduction à la section suivante 4.5. Nous ne cherchons pas ici à stabiliser le véhicule en un point, mais juste à l'arrêter. Ce résultat est obtenu en appliquant la méthode développée dans l'article [Coron & d'Andréa-Novel 1993] sur des systèmes particuliers du type $\dot{x} = vf(x,u)$ avec u, v comme commandes. Un exemple concret de contrôle est d'ailleurs fourni pour la stabilisation de l'Unicycle. Nous transposons ces résultats à notre système. La solution que nous obtenons n'a pas grand intérêt pratique puisque le contrôle cherche seulement à faire tendre $\dot{x}, \dot{y}, \psi$ vers 0 ; en revanche, cela nous permet de nous familiariser avec les retours d'états à temps variant.

Nous fondons notre étude sur le modèle du Glisseur (4.2). En revanche, nous simplifions l'étage de commande de la dynamique de rotation en considérant un contrôle virtuel v_ψ tel que $\dot{\psi} = v_\psi$ (voir (4.48)). La stabilisation du système original peut être déduite de cette approche en utilisant la technique de "Backstepping".

$$\begin{cases} \ddot{x} &= C_\psi u_\sigma \\ \ddot{y} &= S_\psi u_\sigma \\ \dot{\psi} &= v_\psi \end{cases} \tag{4.48}$$

4.4.1 Système non linéaire : $\dot{x} = vf(x,u)$

Dans [Coron & d'Andréa-Novel 1993] l'on montre comment construire des commandes $u(x,t)$ et $v(x,t)$ telles que le point $x = 0$ soit asymptotiquement stable pour le système $\dot{x} = vf(x,u)$. De plus, un cas pratique sur l'Unicycle, dont le système d'équations n'est pas si éloigné du cas qui nous intéresse, y est présenté. Selon l'article [Coron & d'Andréa-Novel 1993], $u(x,t) = w(x)g(t)$ et $v(x,t) = -q(x, u(x,t))$ sont des commandes qui stabilisent le système $\dot{x} = vf(x,u)$ au point $x = 0$ si et seulement si ces fonctions satisfont les propriétés suivantes dans le cas où $dim(u) = 1$:

1.
$$\begin{gathered} g \in C^\infty(\mathbb{R}, [-1;1]) \\ \forall t \in \mathbb{R} \quad g(t+T) = g(t) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exists l \in \mathbb{N} - \{0\} \quad g^{(l)}(t) \neq 0 \\ \text{par exemple,} \quad g(t) = \sin(\omega t) \end{gathered}$$

2.
$$\begin{gathered} w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad w \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ w(0) = 0 \\ \forall x \neq 0, \quad w(x) = 0 \Rightarrow q(x,0) \neq 0 \\ \begin{cases} \forall x \quad tq \quad w(x) \neq 0, \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad tq \\ \forall u \in [-|w(x)|, |w(x)|], \quad \frac{\partial^r q}{\partial u^r} \neq 0 \end{cases} \end{gathered}$$

3.
$$\begin{gathered} q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ q(x,u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x,u) \end{gathered}$$

avec V une fonction de Lyapunov telle que

$$\begin{gathered} V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ V(x) \to +\infty \quad \text{quand} \quad |x| \to +\infty \\ V(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad V(x) > 0 \end{gathered}$$

Finalement, si ces conditions sont respectées, $0 \in \mathbb{R}^n$ est globalement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = v(x,t)f(x, u(x,t))$.

4.4.2 Système non linéaire (4.48)

Afin d'appliquer la méthode précédente à notre système d'équations, commençons par simplifier (4.48) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = C_\psi u_\sigma \\ \ddot{y} = S_\psi u_\sigma \end{cases} \tag{4.49}$$

Par analogie avec le cas pratique décrit dans l'article [Coron & d'Andréa-Novel 1993], nous obtenons les commandes suivantes :

$$u(\dot{x}, \dot{y}, t) = \psi(\dot{x}, \dot{y}, t), \quad v(\dot{x}, \dot{y}, t) = u_\sigma(\dot{x}, \dot{y}, t) \quad \text{et} \quad f(\dot{x}, \dot{y}, u) = (\cos(u), \sin(u))$$

- la propriété (3) est satisfaite avec

$$V(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad \text{d'où} \quad q(\dot{x}, \dot{y}, u) = \dot{x}\cos(u) + \dot{y}\sin(u)$$

- les propriétés (1) et (2) sont également satisfaites en prenant

$$\begin{gathered} w(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{y} \quad \text{et} \quad g(t) = \sin(\omega t) \\ \forall (\dot{x}, \dot{y}) \neq (0,0), \quad w(\dot{x}, \dot{y}) = 0 \Rightarrow \dot{x} \neq 0 \Rightarrow q(\dot{x}, \dot{y}, 0) = \dot{x} \neq 0 \\ \forall (\dot{x}, \dot{y}) \quad tq \quad w(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0,0) \Rightarrow \dot{y} \neq 0, \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad tq \\ \forall u \in [-|w(\dot{x}, \dot{y})|, |w(\dot{x}, \dot{y})|], \quad \frac{\partial^r q}{\partial u^r} \neq 0 \quad \text{grâce aux dérivations de sin et cos.} \end{gathered}$$

Il vient

$$\begin{gathered} u(\dot{x}, \dot{y}, t) = \psi(\dot{x}, \dot{y}, t) = \dot{y}\sin(\omega t) \\ v(\dot{x}, \dot{y}, t) = u_\sigma(\dot{x}, \dot{y}, t) = -q(\dot{x}, \dot{y}, \psi) = -\dot{x}\cos(\dot{y}\sin(\omega t)) - \dot{y}\sin(\dot{y}\sin(\omega t)) \end{gathered} \tag{4.50}$$

Pour comprendre d'où vient cette loi de contrôle, nous pouvons remarquer l'expression de la fonction de Lyapunov :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} \\ &= u_\sigma C_\psi \dot{x} + u_\sigma S_\psi \dot{y} \\ &= u_\sigma (C_\psi \dot{x} + S_\psi \dot{y}) \\ &= -(C_\psi \dot{x} + S_\psi \dot{y})^2 \end{aligned}$$

D'après le principe d'invariance et le théorème de LaSalle, il est nécessaire d'exciter la variable ψ tant que $\dot{y} \neq 0$, ceci afin de rendre le plus grand invariant de $\dot{V} = 0$ égal à $(\dot{x}, \dot{y}) = (0,0)$, en prenant par exemple $\psi(\dot{x}, \dot{y}, t) = \dot{y}\sin(\omega t)$.

L'étage $\dot{\psi} = v_\psi$ de la dynamique en rotation est ajouté en considérant la fonction de Lyapunov V_2 :

$$V_2 = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\dot{y}^2 + \tfrac{(\psi - \dot{y}\sin(\omega t))^2}{2}$$

dont la dérivée s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= u_\sigma(C_\psi \dot{x} + S_\psi \dot{y}) + (\dot{\psi} - \ddot{y}\sin(\omega t) - \omega \dot{y}\cos(\omega t))(\psi - \dot{y}\sin(\omega t)) \\ &= -K_\sigma(C_\psi \dot{x} + S_\psi \dot{y})^2 - K_\psi(\psi - \dot{y}\sin(\omega t))^2 \end{aligned}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_\sigma & = & -K_\sigma(C_\psi\dot{x}+S_\psi\dot{y}) \\ v_\psi & = & \ddot{y}\sin(\omega t)+\omega\dot{y}\cos(\omega t)-K_\psi(\psi-\dot{y}\sin(\omega t)) \end{array}\right. \quad \text{et } K_\psi, K_\sigma, \omega > 0. \tag{4.51}$$

Le théorème de LaSalle permet de conclure puisque $\dot{V}_2 = 0$ implique $\psi = \dot{y}\sin(\omega t)$; ceci nous ramène au cas précédent. Les gains K_ψ, K_σ permettent d'accélérer la convergence de la fonction de Lyapunov. Les trois premières simulations (figures 4.18, 4.17, 4.20, 4.19, 4.22 et 4.21) illustrent le comportement du système soumis à ces commandes.

4.4.3 Changement d'orientation

En modifiant la loi de contrôle précédente, il est possible de choisir une orientation de référence différente de zéro. La première idée consisterait à prendre $\psi = \psi_{ref} + \dot{y}\sin(\omega t)$; malheureusement, ceci n'est pas valable pour $\psi_{ref} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}$. En effet, la fonction de Lyapunov considérée ne garantirait pas la convergence de $\dot{x}$ vers zéro.

$$V = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\dot{y}^2 + \tfrac{(\psi-\psi_{ref}-\dot{y}\sin(\omega t))^2}{2}$$

avec pour dérivée

$$\begin{array}{lcl} \dot{V} & = & u_\sigma(C_\psi\dot{x}+S_\psi\dot{y}) + (\dot{\psi}-\ddot{y}\sin(\omega t)-\omega\dot{y}\cos(\omega t))(\psi-\psi_{ref}-\dot{y}\sin(\omega t)) \\ & = & -K_\sigma(C_\psi\dot{x}+S_\psi\dot{y})^2 - K_\psi(\psi-\psi_{ref}-\dot{y}\sin(\omega t))^2 \end{array}$$

Si $\dot{y} = 0$ et $\psi_{ref} = \frac{\pi}{2}$, alors l'invariant $\dot{V} = -K_\sigma(C_\psi\dot{x}) = -K_\sigma(C_{\frac{\pi}{2}}\dot{x}) = 0$, peu importe la valeur de $\dot{x}$. Finalement, le plus grand invariant n'est pas $\dot{x} = \dot{y} = 0$, $\psi = \psi_{ref}$. Pour éviter cela, il est possible de prendre $\psi = \psi_{ref} + \dot{y}\sin(\omega t) + \dot{x}\cos(\omega t)$ comme commande. La nouvelle fonction de Lyapunov devient alors :

$$V = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\dot{y}^2 + \tfrac{(\psi-\psi_{ref}-\dot{y}\sin(\omega t)-\dot{x}\cos(\omega t))^2}{2} \ .$$

Sa dérivée est finalement

$$\begin{array}{lcl} \dot{V} & = & u_\sigma(C_\psi\dot{x}+S_\psi\dot{y}) + (\dot{\psi}-\ddot{y}\sin(\omega t)-\omega\dot{y}\cos(\omega t)-\ddot{x}\cos(\omega t)+\omega\dot{x}\sin(\omega t)) \\ & & (\psi-\psi_{ref}-\dot{y}\sin(\omega t)-\dot{x}\cos(\omega t)) \\ & = & -K_\sigma(C_\psi\dot{x}+S_\psi\dot{y})^2 - K_\psi(\psi-\psi_{ref}-\dot{y}\sin(\omega t)-\dot{x}\cos(\omega t))^2 \end{array}$$

en considérant les commandes suivantes

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_\sigma & = & -K_\sigma(C_\psi\dot{x}+S_\psi\dot{y}) \\ v_\psi & = & \ddot{y}\sin(\omega t)+\omega\dot{y}\cos(\omega t)+\ddot{x}\cos(\omega t)-\omega\dot{x}\sin(\omega t) \\ & & -K_\psi(\psi-\psi_{ref}-\dot{y}\sin(\omega t)-\dot{x}\cos(\omega t)) \end{array}\right. \quad \text{et } K_\psi, K_\sigma, \omega > 0. \tag{4.52}$$

La décroissance de V le long des trajectoires et l'excitation artificielle de la dynamique en lacet tant que $\dot{x} \neq 0$ et $\dot{y} \neq 0$ permettent de faire converger le système vers $\dot{x} = \dot{y} = 0$ et $\psi = \psi_{ref}$. La simulation 4 (figures 4.21 et 4.24) présente cette nouvelle loi de contrôle capable d'arrêter le drone dans la direction de référence.

4.4.4 Simulations

Pour visualiser l'arrêt du système (4.48) au moyen des lois de contrôle (4.51) et (4.52), nous avons simplement imposé des vitesses et des accélérations initiales non nulles. Nous présentons quatre simulations dont les conditions initiales communes sont : $x_0 = y_0 = -1m$, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0.6m.s^{-1}$, $\ddot{x}_0 = 0.3m.s^{-2}$, $\ddot{y}_0 = 0.2m.s^{-2}$ et $\psi_0 = 0.9rad$.

Simulation 1 : Le premier résultat est visible sur les figures 4.17 et 4.18. Ici nous imposons les gains $K_\psi = K_\sigma = 1$ et $\omega = 3$ pour le bouclage (4.51). La première observation que l'on peut faire concerne la faible vitesse de convergence du système vers $\dot{x} = \dot{y} = \psi = 0$. La convergence de l'axe latéral non actionné est particulièrement lente ; ceci est en partie dû à la modélisation qui ne prend pas en compte les frottements. Néanmoins, en augmentant le gain K_σ, la vitesse de stabilisation est accrue (voir simulation 2).

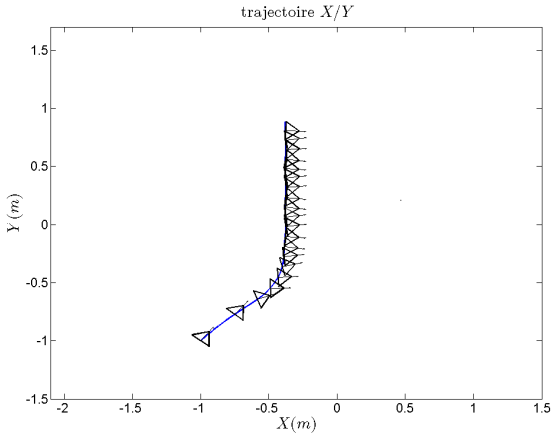

FIGURE 4.17 – Simulation 1 : Arrêt du véhicule avec un lacet final nul. La figure illustre la trajectoire du système symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les gains utilisés sont : $K_\psi = K_\sigma = 1$ et $\omega = 3$.

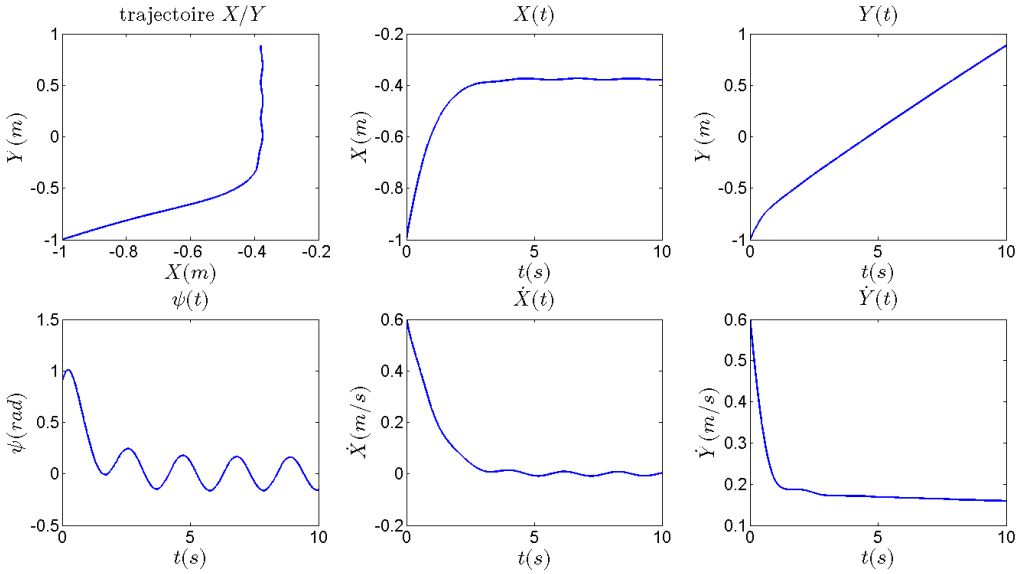

FIGURE 4.18 – Simulation 1 : Arrêt du véhicule avec un lacet final nul. Les gains utilisés sont : $K_\psi = K_\sigma = 1$ et $\omega = 3$.

Simulation 2 : Les figures 4.19 et 4.20 montre une convergence plus rapide avec le contrôle (4.51) muni d'un gain $K_\sigma = 3$ plus fort que pour la simulation 1. Néanmoins, la dynamique latérale converge toujours très lentement, même si l'écart à la référence est moindre. Nous rajoutons des frottements cinétiques dans la modélisation de la simulation 3.

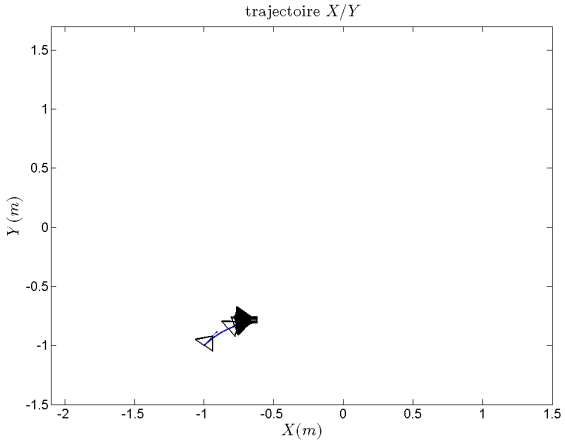

FIGURE 4.19 – Simulation 2 : Arrêt du véhicule avec un lacet final nul. La figure illustre la trajectoire du système symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les gains utilisés sont : $K_\psi = 1$, $K_\sigma = 3$ et $\omega = 3$.

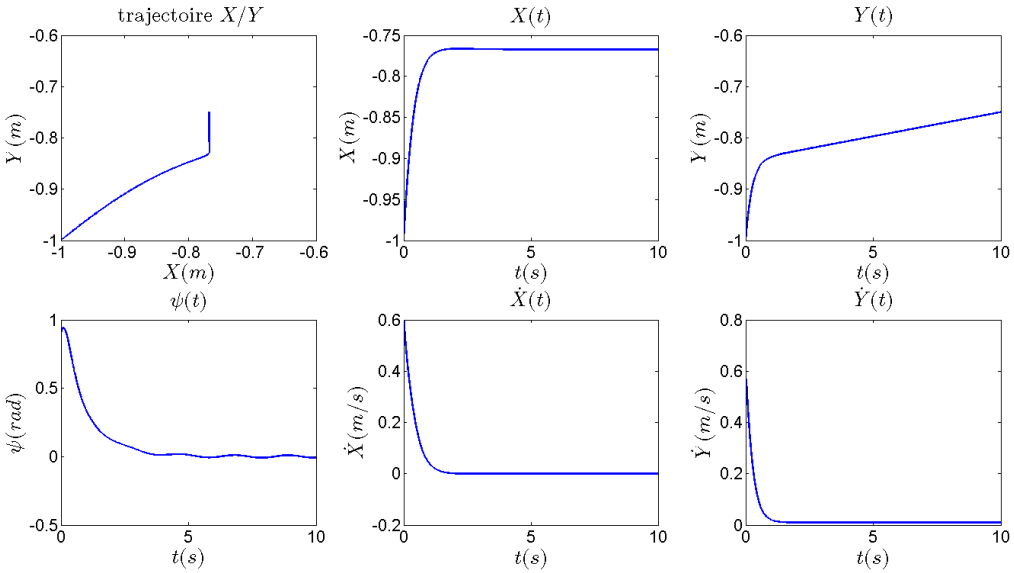

FIGURE 4.20 – Simulation 2 : Arrêt du véhicule avec un lacet final nul. Les gains utilisés sont : $K_\psi = K_\sigma = 3$ et $\omega = 3$.

Simulation 3 : L'ajout de frottements cinétiques dans la modélisation conduit à une convergence plus rapide (figures 4.21 et 4.22). Le caractère stabilisant des frottements permet d'atteindre l'asymptote souhaitée. La dynamique du système est modifiée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -\eta\dot{x} + C_\psi u_\sigma \\ \ddot{y} &= -\eta\dot{y} + S_\psi u_\sigma \\ \dot{\psi} &= v_\psi \end{cases}$$

Remarque Nous verrons au chapitre 5 la validité d'une telle modélisation des frottements cinétiques confrontée à une identification expérimentale du coefficient η et à une analyse de sensibilité.

Les gains utilisés pour le bouclage (4.51) dans ce scénario sont : $K_\sigma = K_\psi = 1$, $\omega = 3$ et $\eta = 0.5$.

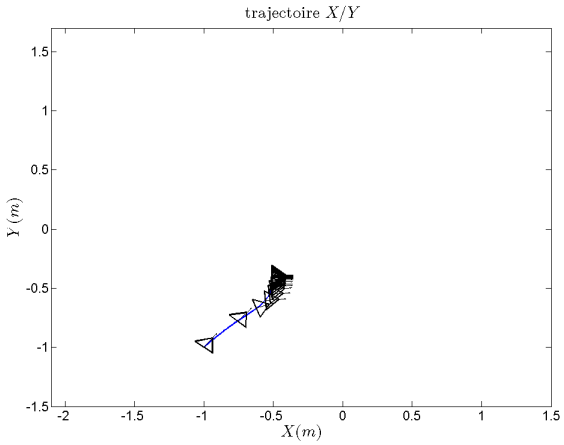

FIGURE 4.21 – Simulation 3 : Arrêt du véhicule avec un lacet final nul. La figure illustre la trajectoire du système symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les gains utilisés sont : $K_\sigma = K_\psi = 1$, $\omega = 3$ et $\eta = 0.5$.

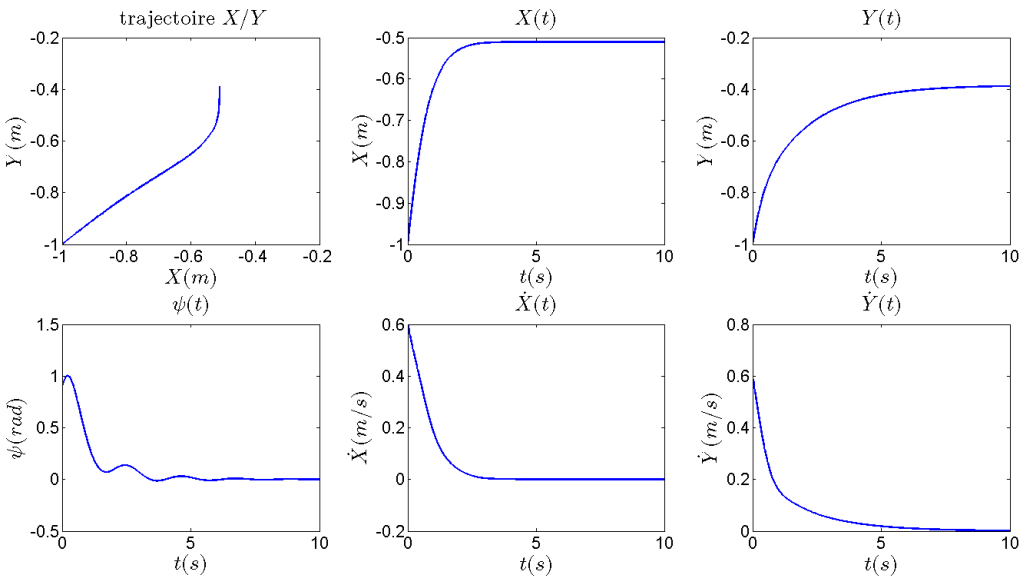

FIGURE 4.22 – Simulation 3 : Arrêt du véhicule avec un lacet final nul. Les gains utilisés sont : $K_\sigma = K_\psi = 1$, $\omega = 3$ et $\eta = 0.5$.

Simulation 4 : En ce qui concerne la simulation 4, illustrée par les figures 4.23 et 4.24, la commande en lacet (4.52) est modifiée par rapport aux simulations précédentes. Elle permet alors de stopper le drone selon la direction ψ_{ref}. Les gains sont : $K_\sigma = K_\psi = 1$, $\omega = 3$, $\eta = 0.5$ et $\psi_{ref} = \frac{\pi}{2} rad$.

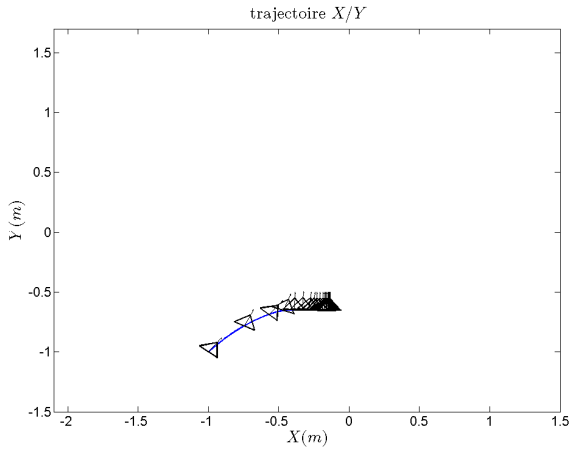

FIGURE 4.23 – Simulation 4 : Arrêt du véhicule avec un lacet final $\psi_{ref} = \frac{\pi}{2} rad$. La figure illustre la trajectoire du système symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les gains utilisés sont : $K_\sigma = K_\psi = 1$, $\omega = 3$ et $\eta = 0.5$.

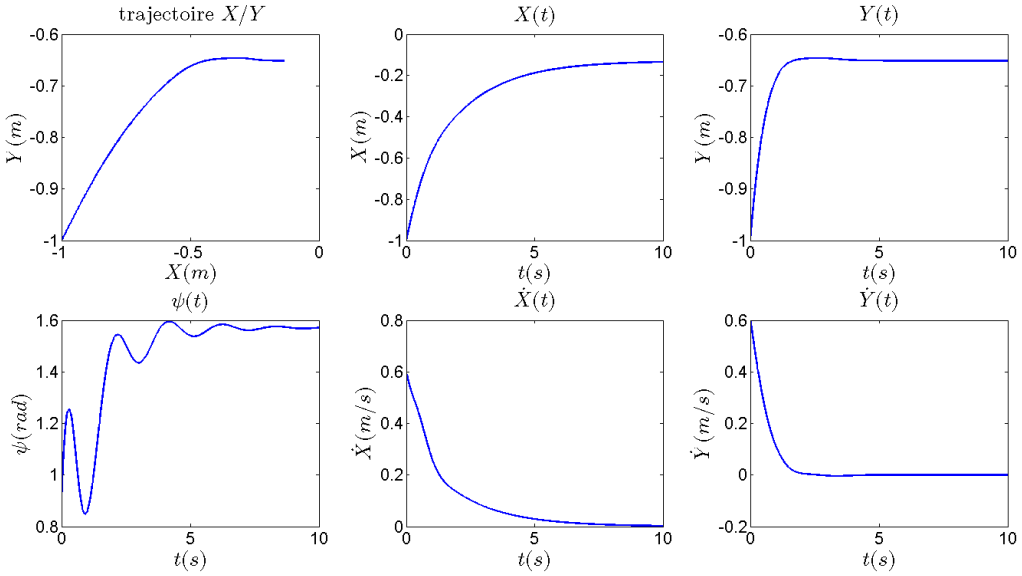

FIGURE 4.24 – Simulation 4 : Arrêt du véhicule avec un lacet final $\psi_{ref} = \frac{\pi}{2} rad$. Les gains utilisés sont : $K_\sigma = K_\psi = 1$, $\omega = 3$ et $\eta = 0.5$.

Finalement, malgré l'intérêt limité de stopper un drone en annulant juste les vitesses, les bouclages en temps variant sont construits de manière à forcer l'invariant d'une fonction de Lyapunov décroissante à tendre vers $\dot{x} = \dot{y} = 0$, $\psi = \psi_{ref}$ au moyen d'une excitation judicieusement paramétrée dans la dynamique de lacet. Cette idée est reprise dans la section suivante, dans laquelle des bouclages temps variant sont utilisés pour stabiliser le drone en un point précis, et non pas juste pour annuler les vitesses.

4.5 Excitation persistante du noyau de commandabilité

La méthode décrite dans cette section vise à proposer une loi de contrôle capable d'effectuer aussi bien une stabilisation en un point qu'un suivi de trajectoire. Nous basons notre analyse sur le système du Glisseur dont le comportement est identique à celui de notre drone terrestre. Nous proposons deux lois de contrôle : la première tente de résoudre le problème du suivi de position tandis que la seconde s'attache au suivi de posture. Dans le premier cas, nous verrons que nous réussissons à faire converger de manière exacte le système lors d'une stabilisation en un point. En revanche cette même loi ne permet qu'une stabilisation pratique lorsqu'il faut suivre une trajectoire même si celle-ci est admissible. La raison principale de cette limitation provient justement du fait que l'orientation du système ne tend pas vers une orientation de référence. La solution du problème de suivi du posture apparaît donc adéquate pour le suivi de trajectoire. Malheureusement, le théorème de Brockett empêche l'utilisation de retours d'états continus pour une stabilisation en un point, ce qui nous amène à élaborer une loi de contrôle à temps variant. Finalement, on décrira comment cette dernière approche permet une convergence exacte lors d'une stabilisation en un point. En ce qui concerne le suivi de trajectoire admissible, les simulations tendent à montrer que la stabilisation est également exacte, mais nous n'avons pas réussi à apporter de preuve théorique. Toute autre trajectoire ne pourra être stabilisée que de manière pratique avec cette même loi de contrôle. Différents scénarii de simulation permettent d'étayer la théorie développée.

4.5.1 Description du système du Glisseur

On considère comme trajectoire de référence une position de référence indexée par le temps notée $P_r(t) = (x_r(t), y_r(t))^\top$ et une orientation de référence notée $\psi_r(t)$. On note également les vitesses correspondantes $\dot{P}_r(t) = (\dot{x}_r(t), \dot{y}_r(t))^\top$ et $\dot{\psi}_r(t)$. L'objectif du suivi de trajectoire est de trouver une loi de contrôle $(\tau_1, \tau_2)^\top$ faisant converger asymptotiquement $e_x = x - x_r$, $e_y = y - y_r$, $e_{\dot{x}} = \dot{x} - \dot{x}_r$, $e_{\dot{y}} = \dot{y} - \dot{y}_r$, $e_\psi = \psi - \psi_r$ et $e_{\dot{\psi}} = \dot{\psi} - \dot{\psi}_r$ vers 0. e_1, e_2, e_3 et e_4 sont les projections respectives des erreurs e_x, e_y, $e_{\dot{x}}$ et $e_{\dot{y}}$ dans le repère du véhicule dont les axes longitudinal et latéral sont respectivement notés x_b et y_b dans la figure (4.25).

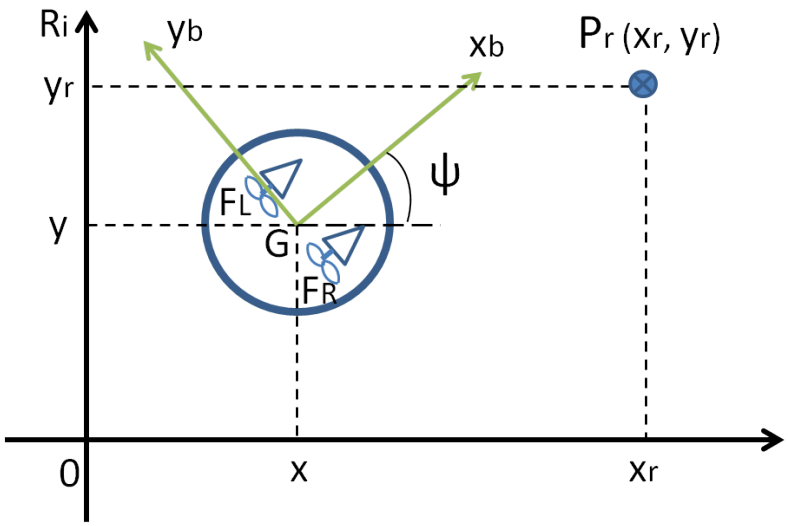

FIGURE 4.25 – Projection des erreurs dans le repère du Glisseur noté (G, x_b, y_b).

4.5.1.1 Modèles dynamiques du système et de la trajectoire de référence

Modèle du véhicule :

$$\left\{ \begin{array}{c} M \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -D(\psi) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi \\ S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ I\ddot{\psi} = -d_3\dot{\psi} + \tau_2 \end{array} \right. \tag{4.53}$$

La matrice $D(\psi)$ représente les coefficients de frottement cinétique. Ces coefficients peuvent dépendre de la structure même du véhicule, comme c'est le cas pour un bateau (frottements hydrodynamiques [Fossen 1994]) ; ces coefficients sont définis selon les axes longitudinal et latéral. Nous faisons le choix de modéliser ces frottements par des coefficients constants d_1, $d_2 > 0$ associés aux axes x_b et y_b. Nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} D(\psi) & = & \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi \\ S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} d_1 C_\psi^2 + d_2 S_\psi^2 & C_\psi S_\psi (d_1 - d_2) \\ C_\psi S_\psi (d_1 - d_2) & d_1 S_\psi^2 + d_2 C_\psi^2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.54}$$

Modèle d'une trajectoire de référence quelconque : La représentation de la trajectoire de référence est choisie afin d'être la plus générique possible. Les seuls phénomènes modélisés sont les frottements cinétiques, exprimés au travers de la matrice $D(\psi)$ (4.54) et des coefficients positifs d_1, d_2, d_3. La présence de frottement n'est pas une hypothèse limitative. Les termes F_{x_r}, F_{y_r} et τ_{2_r} représentent, quant à eux, les forces et les couples produits par d'éventuels actionneurs.

$$\left\{ \begin{array}{c} M \begin{pmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \end{pmatrix} = -D(\psi) \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{x_r} \\ F_{y_r} \end{pmatrix} \\ I\ddot{\psi}_r = -d_3\dot{\psi}_r + \tau_{2_r} \end{array} \right. \tag{4.55}$$

Modèle d'une trajectoire de référence admissible : Une trajectoire admissible, annotée du suffixe $_{r_{ad}}$, est une trajectoire faisable pour le système en question. Les variables d'état qui décrivent cette trajectoire sont régies par la même dynamique que le véhicule considéré. Dans le cas du Glisseur, nous pouvons écrire la relation qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} M \begin{pmatrix} \ddot{x}_{r_{ad}} \\ \ddot{y}_{r_{ad}} \end{pmatrix} = -D(\psi) \begin{pmatrix} \dot{x}_{r_{ad}} \\ \dot{y}_{r_{ad}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{\psi_{r_{ad}}} & -S_{\psi_{r_{ad}}} \\ S_{\psi_{r_{ad}}} & C_{\psi_{r_{ad}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1_{r_{ad}}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ I\ddot{\psi}_{r_{ad}} = -d_3\dot{\psi}_{r_{ad}} + \tau_{2_{r_{ad}}} \end{array} \right. \tag{4.56}$$

La caractéristique de sous-actionnement du Glisseur impose des conditions restrictives sur les trajectoires admissibles :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F_{x_{r_{ad}}} & = & C_{\psi_{r_{ad}}} \tau_{1_{r_{ad}}} \\ F_{y_{r_{ad}}} & = & S_{\psi_{r_{ad}}} \tau_{1_{r_{ad}}} \end{array} \right. \tag{4.57}$$

4.5.1.2 Dynamique du système d'erreurs

Les projections respectives e_1, e_2, e_3, e_4 des erreurs $e_x = x - x_r$, $e_y = y - y_r$, $e_{\dot{x}} = \dot{x} - \dot{x}_r$, $e_{\dot{y}} = \dot{y} - \dot{y}_r$ dans le repère du véhicule se calculent selon l'expression (4.58). Nous insérons dans ce système dynamique de l'erreur le modèle générique de trajectoire de référence (4.55).

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\dot{x}} \\ e_{\dot{y}} \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

– Dynamique de e_1, e_2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} &= \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\dot{x}} \\ e_{\dot{y}} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}} \\ \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} &= \dot{\psi} \begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.59}$$

– Dynamique de e_3, e_4 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{pmatrix} &= \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\dot{x}} \\ e_{\dot{y}} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\ddot{x} - \ddot{x}_r) \\ (\ddot{y} - \ddot{y}_r) \end{pmatrix}}_{H} \\ H &= \begin{pmatrix} C_\psi & S_\psi \\ -S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \left[-\frac{D(\psi)}{M} \begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{x}_r \\ \dot{y} - \dot{y}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi \\ S_\psi & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\tau_1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{F_{x_r}}{M} \\ \frac{F_{y_r}}{M} \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{1}{M} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\tau_1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} C_\psi \frac{F_{x_r}}{M} + S_\psi \frac{F_{y_r}}{M} \\ C_\psi \frac{F_{y_r}}{M} - S_\psi \frac{F_{x_r}}{M} \end{pmatrix}}_{P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}} \end{aligned} \tag{4.60}$$

Le système dynamique des erreurs e_i $(i = (1, 2, 3, 4))$, devient finalement :

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 1 & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\eta_1 & \dot{\psi} \\ 0 & 0 & -\dot{\psi} & -\eta_2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \frac{\tau_1}{M} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_\psi \frac{F_{x_r}}{M} + S_\psi \frac{F_{y_r}}{M} \\ C_\psi \frac{F_{y_r}}{M} - S_\psi \frac{F_{x_r}}{M} \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

avec $\eta_1 = \frac{d_1}{M}, \eta_2 = \frac{d_2}{M} > 0$. Posons $u_1 = \frac{\tau_1}{M}$ et $u_{1_r} = p_1 = C_\psi \frac{F_{x_r}}{M} + S_\psi \frac{F_{y_r}}{M}$.

Remarque D'après (4.57), le suivi d'une trajectoire de référence admissible change les termes p_1 et p_2 selon le système d'équations (4.62).

$$\begin{cases} p_1 &= \cos(\psi - \psi_{r_{ad}}) \frac{\tau_{1_{r_{ad}}}}{M} \\ p_2 &= -\sin(\psi - \psi_{r_{ad}}) \frac{\tau_{1_{r_{ad}}}}{M} \end{cases} \tag{4.62}$$

Le système complet du Glisseur est récapitulé ci-dessous (4.63).

$$(\Sigma_{glisseur})\left\{\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}\dot{e_1}\\ \dot{e_2}\\ \dot{e_3}\\ \dot{e_4}\end{pmatrix} & = & A\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{pmatrix}+B(u_1-u_{1_r})-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\p_2\end{pmatrix}\\ \ddot{\psi} & = & -\eta_3\dot{\psi}+u_2\end{array}\right. \tag{4.63}$$

avec $\eta_3 = \frac{d_3}{I}$ et $u_2 = \frac{\tau_2}{I}$.

4.5.2 Stabilité d'un point d'équilibre

L'analyse des points d'équilibre du système $\Sigma_{glisseur}$ nous conduit à étudier ce qu'il se passe lorsque u_1, u_{1_r}, u_2, p_2 ainsi que $\ddot{\psi}$, $\dot{\psi} = 0$, $\dot{e_1}$, $\dot{e_2}$, $\dot{e_3}$ et $\dot{e_4}$ sont nuls. L'étude de stabilité se résume alors à l'analyse de la matrice A quand $\dot{\psi} = 0$.

$$A(\dot{\psi}=0) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\eta_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\eta_2\end{pmatrix} \tag{4.64}$$

Nous avons vu au paragraphe 2.1.2.2 du chapitre 2 que la stabilité d'un système linéaire à temps invariant de type $\dot{x} = Ax + Bu$ dépend des valeurs propres du polynôme caractéristique associé à la matrice A. Ceci nous amène à calculer les valeurs propres de la matrice $A(\dot{\psi} = 0)$:

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & -1\\ 0 & 0 & \lambda+\eta_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda+\eta_2\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+\eta_1)(\lambda+\eta_2)$$

Nous obtenons 3 valeurs propres distinctes : $\lambda = 0$ de multiplicité 2, $\lambda = -\eta_1 < 0$ et $\lambda = -\eta_2 < 0$. La présence de valeurs propres nulles nous oblige à vérifier l'indice $\nu(\lambda = 0)$ (voir la définition 2.1.11 et le théorème 2.1.12). Si $\nu(0) > 1$ alors le point d'équilibre $(0, 0, 0, 0)^\top$ est instable. En revanche, si $\nu(0) = 1$ l'origine est stable mais non asymptotiquement stable.

Proposition 4.5.1 *La suite croissante $(Ker(A(\dot{\psi} = 0) - \lambda I)^\nu)_{\nu\geq 1}$ avec $\lambda = 0$ est stationnaire à partir de $\nu = 1$. L'origine du système est donc stable.*

Preuve Calculons la suite $(Ker(A(\dot{\psi} = 0) - \lambda I)^\nu)_{\nu\geq 1}$ pour $\lambda = 0$:
- $\nu = 1$, $Ker(A(\dot{\psi} = 0)) = (e_1, e_2)^\top$;
- $\nu = 2$, $Ker(A(\dot{\psi} = 0)^2) = (e_1, e_2)^\top$ d'après l'expression de la matrice $A(\dot{\psi} = 0)^2$:

$$A(\dot{\psi}=0)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -\eta_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\eta_2\\ 0 & 0 & \eta_1^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \eta_2^2\end{pmatrix}$$

- $\forall\nu > 2$, $Ker(A(\dot{\psi} = 0)^\nu) = (e_1, e_2)^\top$. En effet, ceci est dû à la présence des termes $\eta_1, \eta_2 > 0$ sur la diagonale de la matrice $A(\dot{\psi} = 0)$.

D'après la définition (2.1.11), $\nu(\lambda = 0) = 1$; le théorème (2.1.12) permet alors de conclure que l'origine est stable mais non asymptotiquement stable.

Remarque L'origine du système est stable uniquement par la présence des frottements représentés par les coefficients $\eta_1, \eta_2 > 0$.

4.5.3 Système à temps variant Σ_{TV} commandé par u_1

Avant de présenter l'analyse du système $\Sigma_{glisseur}$ avec les deux commandes u_1 et u_2, nous restreignons l'étude au système Σ_{TV} considéré à temps variant, commandé uniquement par la commande de propulsion u_1 et avec p_2 supposé nul. La composante à temps variant $\dot{\psi}(t)$ est une variable considérée exogène pour le moment.

$$(\Sigma_{TV}) \left\{ \begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \end{pmatrix} = A(\dot{\psi}(t)) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} + B(u_1 - u_{1_r}) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_2 = 0 \end{pmatrix} \right. \tag{4.65}$$

4.5.3.1 Commandabilité du linéarisé tangent

Vérifions le critère de Kalman pour le système linéarisé où $\dot{\psi}$ est supposé constant, c'est-à-dire le rang de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(\dot{\psi}) = (B\ AB\ A^2B\ A^3B)$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\eta_1 \\ -\dot{\psi} \end{pmatrix} \quad , \quad A^2B = \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ -2\dot{\psi} \\ \eta_1^2 - \dot{\psi}^2 \\ \dot{\psi}(\eta_1 + \eta_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3B = \begin{pmatrix} \eta_1^2 - 3\dot{\psi}^2 \\ \dot{\psi}(2\eta_1 + \eta_2) \\ -\eta_1^3 + \dot{\psi}^2(2\eta_1 + \eta_2) \\ \dot{\psi}^3 + \dot{\psi}(-\eta_1^2 - \eta_2\eta_1 - \eta_2^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}(\dot{\psi}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\eta_1 & \eta_1^2 - 3\dot{\psi}^2 \\ 0 & 0 & -2\dot{\psi} & \dot{\psi}(2\eta_1 + \eta_2) \\ 1 & -\eta_1 & \eta_1^2 - \dot{\psi}^2 & \dot{\psi}^2(2\eta_1 + \eta_2) - \eta_1^3 \\ 0 & -\dot{\psi} & (\eta_1 + \eta_2)\dot{\psi} & \dot{\psi}^3 - \dot{\psi}(\eta_1^2 + \eta_2\eta_1 + \eta_2^2) \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

Le rang de la matrice de commandabilité dépend exclusivement de la valeur de $\dot{\psi}$. Les coefficients de frottement η_1 et η_2 n'influent pas sur la commandabilité ; ils peuvent être positifs ou nuls. Finalement, ce qu'il est important de retenir se résume à :

- $\dot{\psi} \neq 0$: le rang de $\mathcal{C}(\dot{\psi})$ est de 4. Le système est commandable, n'importe quel état $X = (e_1, e_2, e_3, e_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ est atteignable avec la commande u_1.

- $\dot{\psi} = 0$: le rang de $\mathcal{C}(\dot{\psi} = 0)$ est égal à 2. Le système n'est pas commandable. En revanche, les états e_1 et e_3 restent commandables. Les états e_2 et e_4 ne sont plus atteignables par u_1 : $(e_2, e_4) \in Ker(\mathcal{C}(\dot{\psi} = 0))$. Ils définissent la zéro-dynamique du système lorsque $\dot{\psi} = 0$.

4.5.3.2 Commandabilité du système linéaire à temps variant

Les théorèmes suivants viennent en complément de ceux présentés dans la section 2.1.4.1 du chapitre 2.

Théorème 4.5.2 *[Lefeber et al. 2003] Soit Σ le système linéaire à temps variant suivant :*

$$(\Sigma) : \qquad \dot{x} = A(\phi(t))x + Bu \qquad y = Cx$$

avec $A(\phi(t))$ continu, $A(0) = 0$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu. Supposons que pour tout $s \neq 0$, la paire $(A(s), B)$ soit commandable. Si $\phi(t)$ est bornée, Lipschitz en temps, et si il existe $\delta_c > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que :

$$\forall t \geq 0,\ \exists s : t - \delta_c \leq s \leq t \text{ tel que } |\phi(t)| \geq \epsilon$$

alors le système Σ est uniformément complètement commandable.

La condition imposée sur la fonction $\phi(t)$ est connue sous le nom de condition d'excitation persistante.

Définition 4.5.3 *Une fonction continue $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continuellement excitante ("persistently exciting") si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :*
- *une constante $K > 0$ existe telle que $|\phi(t)| \leq K$ pour tout $t \geq 0$;*
- *une constante $L > 0$ existe telle que $|\phi(t) - \phi(t')| \leq L|t - t'|$ pour tout $t, t' \geq 0$;*
- *les constantes $\delta_c > 0$ et $\epsilon > 0$ existent telles que*

$$\forall t \geq 0,\ \exists s : t - \delta_c \leq s \leq t \text{ tel que } |\phi(t)| \geq \epsilon$$

Finalement,
- lorsque $\dot{\psi}(t) \neq 0$, le système est commandable ;
- lorsque $\dot{\psi}(t)$ est continuellement excitante, le système est uniformément complètement commandable.
- lorsque $\dot{\psi}(t)$ est constant et $\dot{\psi}(t) = 0$, seul $(e_1, e_3)^\top$ est commandable. La zéro-dynamique $(e_2, e_4)^\top$ est stable.

Il reste à trouver une loi de commande $u_1(t)$ qui stabilise asymptotiquement l'origine du système $(e_1, e_2, e_3, e_4)^\top$ lorsque $\dot{\psi}(t) \neq 0$ ou continuellement excitante et $(e_1, e_3)^\top$ lorsque $\dot{\psi}(t) = 0$.

4.5.3.3 Stabilisation par $u_1(t)$

Cette partie a pour but de présenter la loi de contrôle $u_1(t)$ inspirée de [Lefeber *et al.* 2003] qui rend le système temps variant (4.65) globalement exponentiellement stable sous certaines conditions de $\dot{\psi}(t)$.

Proposition 4.5.4 *Considérons le système dynamique (4.65) en boucle fermée avec la loi de contrôle τ_1 définie ci-dessous :*

$$u_1(t) = u_{1_r} - \frac{k_3}{M} e_3 + \frac{k_4}{M} \dot{\psi}(t) e_4 - \frac{k_1}{M} e_1 + \frac{k_2}{M} \dot{\psi}(t) e_2, \quad u_{1_r} = \frac{1}{M}(C_{\psi(t)} F_{x_r} + S_{\psi(t)} F_{y_r}) \tag{4.67}$$

avec les gains vérifiant les inégalités suivantes et $d_2, d_1 > 0$ tel que $\eta_1 = \frac{d_1}{M}$ et $\eta_2 = \frac{d_2}{M}$ (M la masse du système) :

$$\begin{array}{c} k_3 > d_2 - d_1 \\ k_4 = \frac{M k_2 (k_2 + k_3 + d_1 - d_2)}{d_2 k_2 + M k_1} \\ 0 < k_1 < (k_3 + d_1 - d_2) \frac{d_2}{M} \\ k_2 > 0. \end{array} \tag{4.68}$$

Si $\dot{\psi}(t)$ est continuellement excitante, alors le système bouclé est globalement exponentiellement stable.

Preuve Pour apporter la preuve [Lefeber *et al.* 2003] de cette proposition, supposons les inégalités précédentes (4.68) vérifiées et définissons λ et μ ($\lambda < \mu$) :

$$\begin{array}{c} \lambda + \mu = \frac{k_3+d_1}{M} \\ \lambda\mu = \frac{k_1}{M} \end{array} \tag{4.69}$$

λ et μ sont donc les racines du polynôme $P(x)$ défini par :

$$P(x) = Mx^2 - (k_3 + d_1)x + k_1 \tag{4.70}$$

La première inégalité des équations (4.68) nous permet d'écrire :

$$0 < \frac{d_2}{M} < \frac{k_3 + d_1}{M} \tag{4.71}$$

De plus,

$$P(0) = P(\frac{k_3 + d_1}{M}) = k_1 > 0$$

et

$$P(\frac{d_2}{M}) = M(\frac{d_2}{M})^2 - (k_3 + d_1)\frac{d_2}{M} + k_1 = (d_2 - k_3 - d_1)\frac{d_2}{M} + k_1 < 0$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous prouve l'existence de ces deux racines λ et μ telles que :

- $0 < \lambda < \frac{d_2}{M}$ et $P(\lambda) = 0$;
- $\frac{d_2}{M} < \mu < \frac{k_3+d_1}{M}$ et $P(\mu) = 0$;
- $0 < \lambda < \frac{d_2}{M} < \mu$.

Ces propriétés nous sont utiles pour démontrer les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{c} 0 < \mu - \lambda \\ 0 < d_2 - M\lambda \\ 0 < M\mu - d_2 \\ 0 < M^2\lambda\mu + d_2k_2 \\ 0 < k_2 + M\lambda \\ 0 < k_2 + M\mu \end{array} \tag{4.72}$$

Le système (4.65) bouclé par la commande $u_1(t)$ décrite à la proposition 4.5.4 s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi}(t) & 1 & 0 \\ -\dot{\psi}(t) & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M} & \frac{k_2}{M}\dot{\psi}(t) & -\frac{k_3+d_1}{M} & (\frac{k_4}{M}+1)\dot{\psi}(t) \\ 0 & 0 & -\dot{\psi}(t) & -\frac{d_2}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \tag{4.73}$$

L'équation précédente peut être réécrite :

$$\begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi}(t) & 1 & 0 \\ -\dot{\psi}(t) & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda\mu & \frac{k_2}{M}\dot{\psi}(t) & -(\lambda+\mu) & \frac{(k_2+M\lambda)(k_2+M\mu)}{M^2\lambda\mu+d_2k_2}\dot{\psi}(t) \\ 0 & 0 & -\dot{\psi}(t) & -\frac{d_2}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

Un changement de coordonnées est nécessaire ; notons $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ le nouveau vecteur d'état : il est lié à l'ancien par la transformation (4.75) et son inverse (4.76).

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{\mu-\lambda} & \frac{1}{\mu-\lambda} \\ \frac{M}{d_2} & -\frac{M}{d_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\mu-\lambda} & \frac{-\lambda}{\mu-\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d_2}{M} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

Notons que $\mu - \lambda > 0$ par construction des racines et par le choix des gains (voir (4.72)). Le nouveau système dynamique est finalement :

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{pmatrix} = A'(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{4.77}$$

avec

$$A'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{M\mu - d_2}{M(\mu-\lambda)}\dot{\psi}(t) & -\frac{d_2 - M\lambda}{M(\mu-\lambda)}\dot{\psi}(t) \\ 0 & -\frac{d_2}{M} & -\frac{\mu}{(\mu-\lambda)}\dot{\psi}(t) & \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\dot{\psi}(t) \\ \frac{k_2+M\lambda}{d_2}\dot{\psi}(t) & \frac{M\mu(k_2+M\lambda)(d_2-M\lambda)}{d_2(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}\dot{\psi}(t) & -\mu & 0 \\ \frac{k_2+M\mu}{d_2}\dot{\psi}(t) & -\frac{M\lambda(k_2+M\mu)(M\mu-d_2)}{d_2(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}\dot{\psi}(t) & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

Les inégalités (4.72) permettent de considérer la fonction de Lyapunov V définie positive ci-dessous :

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{M}{2d_2}x_1^2 + \frac{M(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{2d_2(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2 + \frac{(M\mu-d_2)}{2(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2 + \frac{(d_2-M\lambda)}{2(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2 \tag{4.79}$$

En la dérivant le long des champs de vecteurs décrits par le système (4.77), nous obtenons une fonction semi-définie négative.

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2 - \frac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2 - \frac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2 \tag{4.80}$$

Posons la matrice C telle que :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{(M\mu-d_2)(d_2-M\lambda)}{M^2\lambda\mu+d_2k_2}} & \sqrt{\frac{\mu(M\mu-d_2)}{(\mu-\lambda)(k_2+M\lambda)}} & \sqrt{\frac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(\mu-\lambda)(k_2+M\mu)}} \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

L'origine du système (4.77) est globalement exponentiellement stable si la paire $(A'(t), C)$ est uniformément complètement observable (cf. section 2.1.3.4 du chapitre 2). D'après le théorème (4.5.2), la paire $(A'(t), C)$ est uniformément complètement observable si $\dot{\psi}(t)$ est continuellement excitante. La proposition (4.5.4) est donc vérifiée.

Système Σ_{TV} avec $p_2 \neq 0$: Dans le cas où $p_2 \neq 0$, c'est-à-dire lors d'un suivi de trajectoire $(F_{x_r}, F_{y_r}) \neq (0, 0)$, le système (4.77) est réécrit sous la forme (4.82).

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{pmatrix} = A'(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.82}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov (4.79) est également modifiée :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= -\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2-\tfrac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2-\tfrac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2\\ &\quad -\tfrac{M}{d_2}p_2\left(x_1+x_2\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{M^2\lambda\mu+d_2k_2}\right)\end{aligned} \tag{4.83}$$

Lorsque $p_2 \neq 0$, la stabilisation à l'origine du système Σ_{TV} devient une stabilisation pratique. Dans l'hypothèse où $\dot{\psi}(t)$ est continuellement excitante, le système converge vers l'ensemble $\mathcal{I} = \{|x_1| < \varepsilon_1, |x_2| < \varepsilon_2, |x_3| < \varepsilon_3, |x_4| < \varepsilon_4\}$ avec ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 quatre fonctions dépendant des paramètres $\dot{\psi}(t), k_2, \mu, \lambda, d_2, M, p_2$.

4.5.4 Suivi de position du système $\Sigma_{glisseur}$ avec les deux commandes u_1 et u_2

Pour la suite nous considérons le système complet du Glisseur (4.63) que nous rappelons ci-dessous. La dynamique de lacet $\dot{\psi}$ n'est plus identifiée comme une variable du temps exogène, mais bien comme un état du système. Nous nous aidons des résultats précédents pour élaborer une loi de contrôle (u_1, u_2) capable de rendre l'origine du système asymptotiquement stable. Nous nous intéressons dans cette partie au suivi de position. L'objectif est donc de faire converger asymptotiquement le système vers $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (0, 0, 0, 0)$ tout en gardant la zéro dynamique $(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi})$ stable. Nous distinguons deux cas d'étude : la stabilisation en un point ($p_2 = u_{1_r} = 0$) et le suivi de trajectoire ($p_2 \neq 0$ et $u_{1_r} \neq 0$). Notons également que l'orientation du Glisseur n'est pas contrainte. Dans le cadre du suivi de position, nous retardons l'action de u_2 en procédant à une extension dynamique. La nouvelle commande virtuelle est notée u_2'.

$$(\Sigma_{glisseur})\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{e_1}\\ \dot{e_2}\\ \dot{e_3}\\ \dot{e_4}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{pmatrix}+B(u_1-u_{1_r})-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\p_2\end{pmatrix}\\ \ddot{\psi} = -\eta_3\dot{\psi}+u_2\\ \dot{u}_2 = u_2'\end{cases} \tag{4.84}$$

4.5.4.1 Stabilisation en un point : $p_2 = 0$ et $u_{1_r} = 0$

Le paragraphe précédent a montré qu'il suffisait que $\dot{\psi}$ soit continuellement excitante pour que la loi de commande $u_1 = u_{1r} - \frac{k_3}{M}e_3 + \frac{k_4}{M}\dot{\psi}e_4 - \frac{k_1}{M}e_1 + \frac{k_2}{M}\dot{\psi}e_2$ stabilise globalement et exponentiellement l'origine du système (4.61). L'idée est alors d'utiliser la commande u_2 pour rendre la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ continuellement excitante lorsque c'est nécessaire.

Proposition 4.5.5 *Soit $\mathcal{N}(\mathcal{C}(\dot{\psi}))$ le noyau de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(\dot{\psi})$ (4.66). S'il est possible de trouver une loi de contrôle u_2, telle que la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ soit continuellement excitante tant que les vecteurs du noyau $\mathcal{N}(\mathcal{C}(\dot{\psi} = 0))$ sont non nuls, alors l'origine du système (4.65) est globalement exponentiellement stable.*

Preuve Rappelons d'après l'équation (4.66) : $\mathcal{N}(\mathcal{C}(\dot{\psi} \neq 0)) = \varnothing$ et $\mathcal{N}(\mathcal{C}(\dot{\psi} = 0)) = (e_2, e_4)$.

– Premier cas : $(e_2, e_4) \neq (0, 0)$

Le noyau $\mathcal{N}(\mathcal{C}(\dot{\psi} = 0))$ est non nul, la vitesse de lacet est donc continuellement excitante et d'après la proposition (4.5.4), l'origine du système (4.65) est globalement exponentiellement stable.

– Deuxième cas : $(e_2, e_4) = (0, 0)$

Le noyau $\mathcal{N}(\mathcal{C}(\dot{\psi} = 0))$ est nul, la vitesse de lacet n'est plus continuellement excitante et est constante égale à zéro : $\dot{\psi} = 0$. Par ailleurs, le changement de coordonnées décrit à l'équation (4.75) indique que $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ssi $(e_2, e_4) = (0, 0)$. La paire $(A'(t), C)$ n'est plus uniformément complètement observable. En revanche, la fonction de Lyapunov $V(0, 0, x_3, x_4)$ (4.79) associée au système dynamique (4.77), avec $\dot{\psi} = 0$ (constant), nous assure la convergence des états x_3, x_4 (e_1 et e_3 par le changement de variables) vers zéro : $V(0, 0, x_3, x_4)$ est définie positive et $\dot{V}(0, 0, x_3, x_4)$ est définie négative. En effet, les valeurs propres λ et μ sont toujours bien définies, elles assurent la stabilité asymptotique et exponentielle de la partie commandable du système (4.65). Finalement l'origine du système (4.65) est globalement exponentiellement stable.

Remarque La condition d'excitation de la vitesse de lacet aurait pu se restreindre à $x_1 \neq 0$ puisque c'est le seul état qui rende la fonction $\dot{V}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ semi-définie négative et qui est responsable de la perte de la notion d'observabilité uniforme et complète (équations (4.80), (4.81)). La convergence de x_2 vers zéro n'est vraie que par la présence naturelle des frottements cinétiques de coefficient $\frac{d_2}{m} > 0$. Lorsque $\dot{\psi} = 0$, la dynamique de $x_2 = e_4$ n'est plus commandable. C'est pour cela qu'il est préférable de garder la condition d'excitation persistante pour $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$.

Montrons désormais qu'il est possible d'exprimer une commande u_2 qui rende la vitesse de lacet continuellement excitante tant que $(e_2, e_4) \neq (0, 0)$. Par exemple, il est possible de faire tendre $\dot{\psi}$ vers $-K'e_2$ (un gain $K' > 0$) et d'avoir $\ddot{\psi}$ dépendant de e_4. Même si $e_2 = -\frac{\dot{\psi}}{K'} = 0$, l'accélération angulaire n'est pas nulle tant que $e_4 \neq 0$; la vitesse de lacet est donc continuellement excitante lorsque $(e_2, e_4) \neq (0, 0)$ et elle remplit toutes les conditions de la définition (4.5.3). Reprenons la fonction de Lyapunov $V(x_1, x_2, x_3, x_4)$ précédente (4.79) et modifions la ainsi :

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{M}{2d_2}x_1^2 + \tfrac{M(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{2d_2(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2 + \tfrac{(M\mu-d_2)}{2(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2 + \tfrac{(d_2-M\lambda)}{2(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left(\dot{\psi} + K'e_2\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\ddot{\psi} + K'(-\dot{\psi}e_1 + e_4) + K_1(\dot{\psi} + K'e_2)\right)^2 \end{aligned} \tag{4.85}$$

avec $K', K_1 > 0$. Les termes ajoutés se présentent sous cette forme particulière afin d'utiliser la méthode classique de "Backstepping". Posons $R(e_1, e_2, e_4, \dot{\psi}) = K'(-\dot{\psi}e_1 + e_4) + K_1(\dot{\psi} + K'e_2)$ et K_2 un gain positif,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2 - \tfrac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2 - \tfrac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2 \\ &\quad + \left(\ddot{\psi} + K'(-\dot{\psi}e_1 + e_4)\right)\left(\dot{\psi} + K'e_2\right) \\ &\quad + \left(\dddot{\psi} + \dot{R}\right)\left(\ddot{\psi} + K'(-\dot{\psi}e_1 + e_4) + K_1(\dot{\psi} + K'e_2)\right) \end{aligned}$$

Pour mettre cette fonction de Lyapunov sous une forme adéquate, la commande $u_2'(t)$ peut être choisie selon l'expression :

$$u_2'(t) = \eta_3\ddot{\psi} - \dot{R} - K_2\left(\ddot{\psi} + K'(-\dot{\psi}e_1 + e_4) + K_1(\dot{\psi} + K'e_2)\right) - (\dot{\psi} + K'e_2) \tag{4.86}$$

En bouclant le système avec cette commande, la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2 - \tfrac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2 - \tfrac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2 \\ &\quad -K_1\left(\dot{\psi} + K'e_2\right)^2 - K_2\left(\ddot{\psi} + K'(-\dot{\psi}e_1 + e_4) + K_1(\dot{\psi} + K'e_2)\right)^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{4.87}$$

D'après le théorème de LaSalle, le système (4.84) composé d'états stationnaires va converger vers le plus grand invariant $\mathcal{I}$ tel que :

$$\mathcal{I} \subseteq \{\dot{V} = 0\} = \{x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, \dot{\psi} = -K'e_2, \ddot{\psi} = -K'(K'e_2e_1 + e_4)\}$$

Il est clair que la fonction $\dot{\psi}$ est continuellement excitante tant que $(e_2, e_4) \neq (0, 0)$; d'après la proposition (4.5.5), l'origine $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (0, 0, 0, 0)$ du système (4.65) est globalement exponentiellement stable. Il en résulte que $(\dot{\psi}, \ddot{\psi})$ tend également vers $(0, 0)$.

$$\mathcal{I} = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, \dot{\psi} = 0, \ddot{\psi} = 0\}$$

Finalement, la dynamique de zéro est stabilisée naturellement par cette loi de commande (u_1, u_2') et l'origine du système (4.84) est globalement exponentiellement stable.

4.5.4.2 Suivi de trajectoire : $u_{1_r} \neq 0$ et $p_2 \neq 0$

Les lois de contrôle (u_1, u_2') décrites plus haut ne permettent pas, dans le cadre du suivi de trajectoire, une stabilisation exacte. En effet, le terme p_2 n'étant plus nul, il apparaît dans l'expression de la dérivée de la fonction de Lyapunov (4.83).

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad = \quad & -\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2 - \tfrac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2 - \tfrac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2 \\ & -\tfrac{M}{d_2}p_2\left(x_1 + x_2\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{M^2\lambda\mu+d_2k_2}\right) \\ & -K_1\left(\dot{\psi} + K'e_2\right)^2 - K_2\left(\ddot{\psi} + K'(-\dot{\psi}e_1 + e_4) + K_1(\dot{\psi} + K'e_2)\right)^2\end{aligned} \tag{4.88}$$

La stabilisation demeure pratique ; c'est-à-dire que l'erreur de suivi converge asymptotiquement vers un voisinage de l'origine. La taille de ce voisinage dépend entre autres choses de la norme de p_2. Il est logique de penser qu'une trajectoire non admissible ne peut pas être stabilisée de manière exacte. En revanche, qu'en est-il lorsque c'est une trajectoire admissible ? Rappelons que $p_2 = -\sin(\psi - \psi_{r_{ad}})\frac{\tau_{1_{r_{ad}}}}{M}$ (4.62). Il est possible d'annuler ce terme perturbateur uniquement si $\psi = \psi_{r_{ad}}$. La notion d'orientation de référence prend donc une importance majeure pour le suivi de trajectoire et justifie l'approche du suivi de posture.

4.5.5 Suivi de posture du système $\Sigma_{glisseur}$ avec les deux commandes u_1 et u_2

En plus du suivi de position d'un point de référence $P_r(t) = (x_r(t), y_r(t))^\top$, le suivi de posture requiert le suivi d'une orientation de référence dans le temps que l'on note $\psi_r(t)$. L'objectif de cette partie est de proposer une loi de contrôle $(u_1(t), u_2(t))$ qui stabilise globalement et asymptotiquement le système du Glisseur vers une position et une orientation de référence. Nous avons vu que le suivi de posture est souhaitable pour assurer une stabilisation exacte lors de la poursuite de trajectoire, mais pose des restrictions pour la stabilisation en un point puisque la condition nécessaire de stabilisation de Brockett ne s'applique dans ce cas. Il n'est pas possible de stabiliser le Glisseur en un point d'équilibre par des retours d'états continus. Nous cherchons donc une loi de commande en temps variant pour parer à cette limitation. Nous repartons du système $\Sigma_{glisseur}$ (4.63).

$$(\Sigma_{glisseur})\left\{\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}\dot{e_1}\\ \dot{e_2}\\ \dot{e_3}\\ \dot{e_4}\end{pmatrix} & = & A\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{pmatrix}+B(u_1-u_{1_r})-\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ p_2\end{pmatrix}\\ \ddot{\psi} & = & -\eta_3\dot{\psi}+u_2\end{array}\right. \tag{4.89}$$

4.5.5.1 Stabilisation en un point : $u_{1_r}=0$ et $p_2=0$

La condition nécéssaire à retenir pour assurer la stabilité du système au chapitre précédent est décrite par la proposition (4.5.5). Nous reprenons cette idée dans ce chapitre. Il suffit de trouver une loi de commande $u_2(t)$ qui rende la vitesse de lacet $\dot{\psi}(t)$ continuellement excitante tant que $(e_2,e_4)\neq(0,0)$ et qui assure la convergence asymptotique de $\psi(t)$ vers $\psi_r(t)$. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$\begin{array}{rcl}V & = & \frac{M}{2d_2}x_1^2+\frac{M(d_2-m\lambda)(M\mu-d_2)}{2d_2(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2+\frac{(M\mu-d_2)}{2(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2+\frac{(d_2-M\lambda)}{2(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2\\ & & +\frac{1}{2}\left(\psi-\psi_r+K'e_2\sin(\omega t)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\dot{\psi}-\dot{\psi}^\star\right)^2\end{array} \tag{4.90}$$

avec

$$\dot{\psi}^\star=\frac{-K_1\left(\psi-\psi_r+K'e_2\sin(\omega t)\right)+\dot{\psi}_r-K'e_4\sin(\omega t)-K'\omega e_2\cos(\omega t)}{1-K'e_1\sin(\omega t)} \tag{4.91}$$

avec $1-K'e_1\sin(\omega t)>0$. L'expression de $\dot{\psi}^\star$ est déterminée par la méthode de "Backstepping" afin de linéariser la dynamique en lacet.

$$\begin{array}{rcl}\dot{V} & = & -\frac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2-\frac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2-\frac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2\\ & & +\Big((1-K'e_1\sin(\omega t))(\dot{\psi}-\dot{\psi}^\star)-K_1\left(\psi-\psi_r+K'e_2\sin(\omega t)\right)\Big)\left(\psi-\psi_r+K'e_2\sin(\omega t)\right)\\ & & +\left(\ddot{\psi}-\ddot{\psi}^\star\right)\left(\dot{\psi}-\dot{\psi}^\star\right)\end{array}$$

Finalement, la loi de contrôle

$$u_2(t)=\ddot{\psi}=\ddot{\psi}^\star-K_2(\dot{\psi}-\dot{\psi}^\star)-(1-K'e_1\sin(\omega t))(\psi-\psi_r+K'e_2\sin(\omega t)) \tag{4.92}$$

permet d'exprimer la dérivée de la fonction de Lyapunov comme une fonction semi-définie négative :

$$\begin{array}{rcl}\dot{V} & = & -\frac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2-\frac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2-\frac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2\\ & & -K_1\left(\psi-\psi_r+K'e_2\sin(\omega t)\right)^2\\ & & -K_2\left(\dot{\psi}-\dot{\psi}^\star\right)^2\end{array} \tag{4.93}$$

Le théorème de LaSalle peut être appliqué aux systèmes à temps variant comprenant uniquement des fonctions périodiques en temps. Le système converge donc vers le plus grand invariant $\mathcal{I}$ tel que :

$$\mathcal{I}\subseteq\{\dot{V}=0\}=\{x_2=0,x_3=0,x_4=0,\psi=\psi_r-K'e_2\sin(\omega t),\dot{\psi}=\frac{\dot{\psi}_r-K'e_4\sin(\omega t)-K'e_2\omega\cos(\omega t)}{1-K'e_1\sin(\omega t)}\}$$

Sous l'hypothèse d'un bon réglage du gain K' tel que $1-K'e_1\sin(\omega t)>0$, et d'une vitesse de lacet de référence $\dot{\psi}_r \neq K'e_4\sin(\omega t)+K'e_2\omega\cos(\omega t)\ \forall t$, alors il est clair que $\dot{\psi}$ est continuellement excitante tant que $(e_2,e_4)\neq(0,0)$. D'après la proposition (4.5.5), l'origine $(e_1,e_2,e_3,e_4)=(0,0,0,0)$ du système (4.89) est globalement exponentiellement stable. Il en résulte que $(\psi,\dot{\psi})$ tend vers $(\psi_r,\dot{\psi}_r)$.

$$\mathcal{I}=\{x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=0,\psi=\psi_r,\dot{\psi}=\dot{\psi}_r\} \tag{4.94}$$

4.5.5.2 Suivi de trajectoire : $u_{1_r}\neq 0$ et $p_2\neq 0$

Lorsque $p_2\neq 0$, la dérivée de la fonction de Lyapunov (4.90) devient alors :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2-\tfrac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2-\tfrac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2\\ &\quad -K_1\left(\psi-\psi_r+K'e_2\sin(\omega t)\right)^2\\ &\quad -K_2\left(\dot{\psi}-\dot{\psi}^\star\right)^2\\ &\quad -\tfrac{M}{d_2}p_2\left(x_1+x_2\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{M^2\lambda\mu+d_2k_2}\right)\end{aligned} \tag{4.95}$$

D'après (4.75), cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2-\tfrac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2-\tfrac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2\\ &\quad -K_1\left(\psi-\psi_r+K'e_2\sin(\omega t)\right)^2\\ &\quad -K_2\left(\dot{\psi}-\dot{\psi}^\star\right)^2\\ &\quad -p_2e_2-p_2e_4c_1\end{aligned} \tag{4.96}$$

avec

$$c_1=\frac{M}{d_2}\left(\frac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{M^2\lambda\mu+d_2k_2}+1\right)$$

Trajectoire de référence quelconque : Si l'on souhaite suivre une trajectoire de référence quelconque, $p_2=C_\psi\frac{F_{yr}}{M}-S_\psi\frac{F_{xr}}{M}$ (4.61). La stabilisation du système (4.89) est seulement pratique, p_2 perturbant le système. La simulation 9 illustre le cas du suivi d'une trajectoire circulaire non faisable puisque $\psi_{ref}=0$ rad.

Trajectoire de référence admissible : En revanche, une trajectoire de référence admissible s'accompagne de $p_2=-\sin(\psi-\psi_{r_{ad}})\frac{\tau_{1_{r_{ad}}}}{M}$ (4.62). La perturbation est donc caractérisée par une direction spécifique et s'annule lorsque l'orientation du système atteint cette direction. Le fonction périodique dans la commande du lacet s'annule une fois par période, ce qui amène à $\psi=\psi_{ref}$. À ce moment, le système est équivalent au cas de la stabilisation en un point fixe et converge vers l'origine. Nous n'avons pas réussi à prouver la stabilisation exacte du système sur une trajectoire admissible avec cette loi de contrôle ; néanmoins les simulations 7, 8 et 9 tendent à le confirmer. La fonction de Lyapunov n'est pas strictement décroissante, mais seulement décroissante sur les périodes de la fonction $\sin(\omega t)$ comme le montrent les figures 4.59, 4.65 et 4.70. Notons que la dérivée de la fonction de Lyapunov est strictement négative pour une stabilisation en un point d'équilibre (voir figure 4.54). La convergence du système pourrait être démontrée en utilisant le concept "d'Averaging" pour des fréquences d'oscillation élevées. Cela nécessite, en autres choses, de prouver la convergence du système moyenné sur une période d'oscillation. Malheureusement, le calcul analytique du système moyenné n'est pas trivial. Pour le moment, nous n'avons pas réussi à démontrer, même pour des fréquences élevées, la convergence exacte du Glisseur vers une trajectoire admissible. Cependant, les simulations effectuées pour cette approche semblent indiquer que ω n'a

pas besoin d'être grand pour assurer la convergence du Glisseur. Cette loi de commande paraît étonnamment robuste et souple, mais ses caractéristiques nécessitent une étude approfondie.

À titre d'exemple, nous avons implémenté pour la simuation 10, une loi de contrôle $u_2(t)$ légèrement différente, qui permet de supprimer la dépendance en temps qui n'est pas nécessaire lors de la poursuite d'une trajectoire admissible. Ceci est fait au moyen d'un nouvel état Φ de déphasage ayant sa propre dynamique, au même titre que la variable d'oscillation utilisée dans les fonctions transverses.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2 - \tfrac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2 - \tfrac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2 \\ &\quad -K_1\left(\psi-\psi_r+K'(e_2+c_1e_4)\sin(\omega t+\Phi)\right)^2 \\ &\quad -K_2\left(\dot{\psi}-\dot{\psi}^\star\right)^2 \\ &\quad -p_2e_2-p_2e_4c_1\end{aligned} \tag{4.97}$$

avec

$$\begin{aligned}\dot{\psi}^\star &= \tfrac{-K_1\left(\psi-\psi_r+K'(e_2+c_1e_4)\sin(\omega t+\Phi)\right)}{1-K'(e_1+c_1e_3)\sin(\omega t+\Phi)} \\ &\quad +\tfrac{\dot{\psi}_r-K'(e_4(1-c_1\eta_2)-c_1p_2)\sin(\omega t+\Phi)-K'(\omega+\dot{\Phi})(e_2+c_1e_4)\cos(\omega t+\Phi)}{1-K'(e_1+c_1e_3)\sin(\omega t+\Phi)}\end{aligned} \tag{4.98}$$

La dynamique en lacet est actionnée, indépendamment des autres états, par la seconde commande u_2, de sorte que $\psi = \psi_r - K'(e_2+c_1e_4)\sin(\omega t+\Phi)$. L'expression analytique de u_2 est obtenue par "Backstepping" afin d'obtenir l'équation (4.97). Le terme perturbateur dans la dérivée de la fonction de Lyapunov devient donc :

$$\begin{aligned}p_2(e_2+c_1e_4) &= -\sin(\psi-\psi_r)\tfrac{\tau_{1_r}}{M}(e_2+c_1e_4) \\ &= -\sin(-K'(e_2+c_1e_4)\sin(\omega t+\Phi))\tfrac{\tau_{1_r}}{M}(e_2+c_1e_4)\end{aligned}$$

La fonction de Lyapunov est strictement décroissante lorsque $\sin(\omega t+\Phi)\frac{\tau_{1_r}}{M} > 0$ et croissante lorsque $\sin(\omega t+\Phi)\frac{\tau_{1_r}}{M} < 0$. En imposant $\dot{\Phi} = -\omega$ à l'instant $t = t_1$ dès lors que $\sin(\omega t_1+\Phi(t_1))\frac{\tau_{1_r}}{M} > 0$, la commande devient invariante en temps tout en assurant la convergence du système. En effet, si l'on considère $\psi - \psi_r = -K'(e_2+c_1e_4)\sin(\omega t+\Phi)$, le théorème de LaSalle appliqué à la dérivée de la fonction de Lyapunov permet de conclure sur la stabilité de l'origine.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\tfrac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{(M^2\lambda\mu+d_2k_2)}x_2^2 - \tfrac{\mu(M\mu-d_2)}{(k_2+M\lambda)(\mu-\lambda)}x_3^2 - \tfrac{\lambda(d_2-M\lambda)}{(k_2+M\mu)(\mu-\lambda)}x_4^2 \\ &\quad -\sin(K'(e_2+c_1e_4)\sin(\Phi(t_1)))\tfrac{\tau_{1_r}}{M}(e_2+c_1e_4)\end{aligned} \tag{4.99}$$

Comme $\sin(\Phi(t_1))\frac{\tau_{1_r}}{M} > 0$ et $(e_2+c_1e_4) = \frac{M}{d_2}\left(x_1 + x_2\frac{(d_2-M\lambda)(M\mu-d_2)}{M^2\lambda\mu+d_2k_2}\right)$, la dérivée de Lyapunov est de signe strictement négatif et le plus grand invariant est l'ensemble $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 | x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$, il vient ensuite $\psi = \psi_r$.

Le scénario présenté dans la simulation 10 met en jeu trois comportements différents. De $t = 0s$ à $t = 16s$, le lacet de référence est imposé à $\psi_r = 0$ rad et $\dot{\Phi} = 0$. La trajectoire n'est donc pas admissible durant cette période. À partir de $t = 16s$ et jusqu'à $t = 22s$, le lacet de référence est réinitialisé de sorte que la trajectoire redevienne admissible. Le déphasage est alors toujours constant : $\dot{\Phi} = 0$. C'est à partir de $t = 22s$ jusqu'à la fin de la simulation que l'on change le déphasage dès lors que $\sin(\omega t_1+\Phi(t_1))\frac{\tau_{1_r}}{M} > 0$: $\dot{\Phi} = -\omega$. La loi de commande devient invariante en temps. Le système converge à chaque étape vers l'origine (figures 4.72 et 4.73). Nous avons également imposé des saturations sur le contrôle u_2 à cause de la singularité qui apparaît sur $\dot{\psi}^\star$.

4.5.6 Analyse des singularités

Pour expliquer la provenance des singularités sur $\dot{\psi}^\star$, nous nous cantonnons uniquement à la première version de $\dot{\psi}^\star$ (4.91). La principale limitation avec cette méthode est l'apparition de la

singularité $1 - K'e_1 \sin(\omega t) \neq 0$. Par ailleurs, il est toujours possible de saturer la commande. Même si celle-ci est saturée, la condition d'excitation persistante tient toujours et la convergence est maintenue. Cette singularité a pourtant un sens physique cohérent avec le système. Pour mieux le comprendre, nous allons considérer trois scénarii différents, schématisés par les figures (4.26), (4.27) et (4.28).

Remarque Nous rappelons que les notations des erreurs e_1 et e_2 qui suivent sont définies par $e_1 = C_\psi(x - x_{ref}) + S_\psi(y - y_{ref})$ et $e_2 = C_\psi(y - y_{ref}) - S_\psi(x - x_{ref})$.

– Premier cas : $e_1 < 0$, $e_2 > 0$ et $\psi_r = 0$ (figure (4.26))

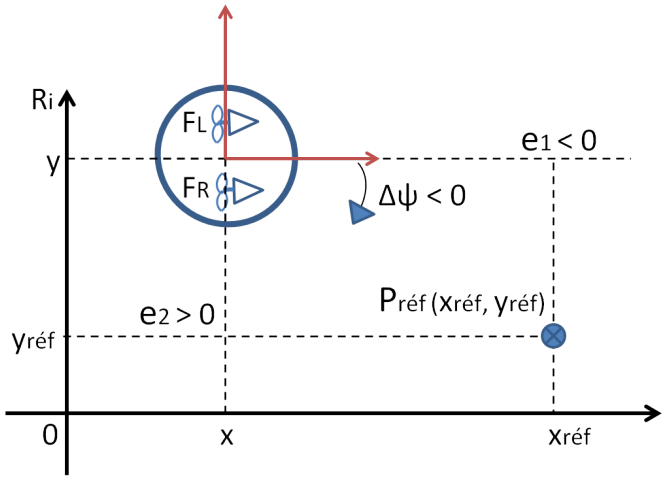

FIGURE 4.26 – Cas un.

Pour atteindre le point de référence avec une orientation asymptotiquement nulle, la stratégie la plus sensée et la plus économe est d'orienter le Glisseur dans la direction du point de référence et de le faire avancer en marche avant. Dans le cas présent, ceci se traduit par $\dot{\psi} < 0$ et $F_l + F_r > 0$.

– Deuxième cas : $e_1 > 0$, $e_2 > 0$ et $\psi_r = 0$ (figure (4.27))

Afin de garder une orientation proche de zéro, il est préférable dans ce cas de faire avancer le Glisseur en marche arrière tout en l'orientant vers le point de référence. Ceci implique donc $\dot{\psi} > 0$ et $F_l + F_r < 0$.

– Troisième cas : $e_1 = 0$, $e_2 > 0$ et $\psi_r = 0$ (figure (4.28))

Ce troisième scénario présente le cas d'un déplacement latéral pur. La stabilisation au point de référence en gardant une orientation asymptotiquement nulle est réalisable avec l'oscillation du Glisseur autour du lacet de référence. Pour générer ces oscillations, nous avons recours à une fonction périodique en temps ; la fonction sinusoïdale est utilisée à l'équation (4.90). Les forces (F_r, F_l) appliquées au Glisseur sont ajustées pour faire converger le Glisseur vers le point de référence. La vitesse de convergence est évidemment dépendante de l'amplitude des oscillations et de leur fréquence. Les stratégies visant à diriger le vecteur de poussée vers le point de référence ne sont plus possibles ici puisque, d'une part, elles rentrent en contradiction avec le maintien du lacet égal à zéro, mais également parce que d'autre part elles présentent des discontinuités lorsque $e_1 = 0$.

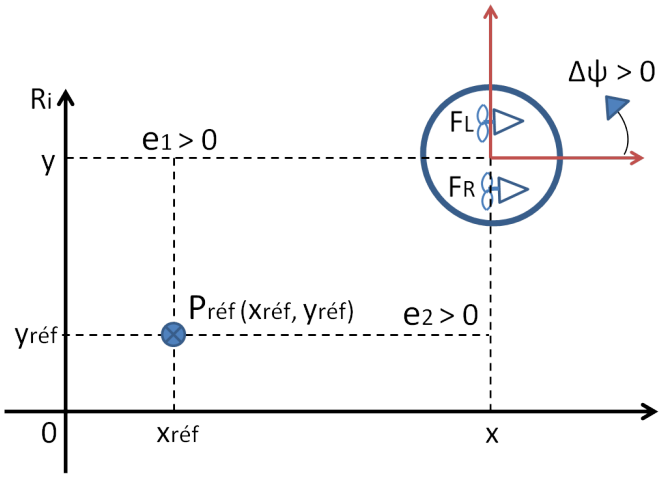

FIGURE 4.27 – Cas deux.

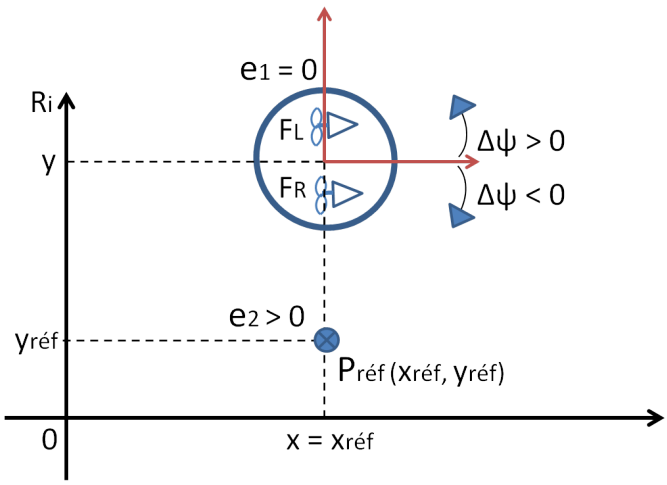

FIGURE 4.28 – Cas trois.

Finalement, le théorème de Brockett nous impose l'utilisation de lois de contrôle peu conventionnelles en utilisant, par exemple, des fonctions périodiques en temps. En effet, la stabilisation en un point nous oblige à utiliser ce genre de loi, alors que le suivi de trajectoire peut s'opérer avec des retours d'états continus plus classiques. La solution que nous avons proposée est en temps variant ; elle permet d'être générique et semble résoudre les deux problèmes de stabilisation et de suivi. En revanche, il apparaît clairement, d'après ces trois scénarii, que la solution périodique en temps n'est pas forcément la plus efficace en terme de vitesse de convergence ou de stabilité selon les cas. Le cas numéro trois paraît le plus adapté à cette solution à temps variant, c'est-à-dire lorsque e_1 est proche de zéro. La méthode que nous utilisons (équation (4.90)) fait osciller l'orientation tant que $e_2 \neq 0$, peu importe e_1. Nous savons que lorsque $e_1 = 0$, cette méthode est parfaitement adaptée. Qu'en est-il lorsque $e_1 \neq 0$ et suffisamment grand ?

Cette idée est schématisée à la figure (4.29) pour $e_1 < 0$ et à la figure (4.30) pour $e_1 > 0$. En faisant l'analogie avec les deux premiers cas vus précédemment, il est clair qu'une partie des oscillations est préférable. Les zones vertes sur les figures (4.29) et (4.30) représentent ces orientations qui semblent plus logiques et naturelles. C'est d'ailleurs un critère influençant la vitesse de convergence vers le point de référence.

– Cas $e_1 < 0$:

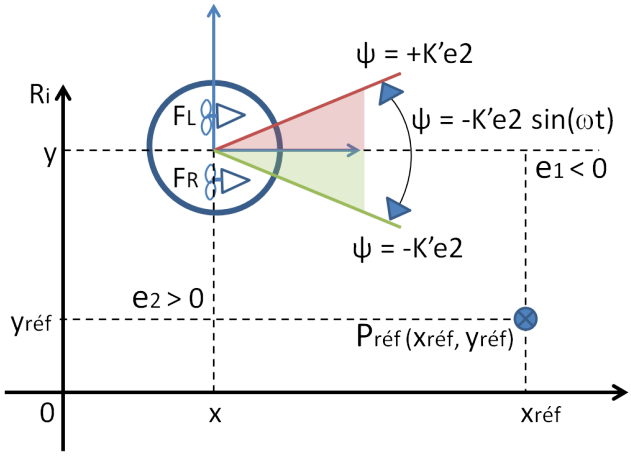

FIGURE 4.29 – Oscillations lorsque $e_2 > 0$, $e_1 < 0$ et $K' > 0$.

Idéalement, le lacet devrait se trouver de préférence dans la zone verte de la figure (4.29) c'est-à-dire lorsque $\sin(\omega t) > 0$.

– Cas $e_1 > 0$:

Contrairement au cas précédent, cette zone verte est caractérisée par le signe inverse du sinus : $\sin(\omega t) < 0$.

Ces zones dépendent donc du temps mais aussi du signe de e_1. Nous pouvons généraliser ces remarques en qualifiant ces zones vertes de "bonnes orientations", contrairement aux zones rouges décrites comme de "mauvaises orientations" :

– "bonnes orientations" : $e_1 \sin(\omega t) < 0$ pour $K' > 0$ ou $e_1 \sin(\omega t) > 0$ pour $K' < 0$.

– "mauvaises orientations" : $e_1 \sin(\omega t) > 0$ pour $K' > 0$ ou $e_1 \sin(\omega t) < 0$ pour $K' < 0$.

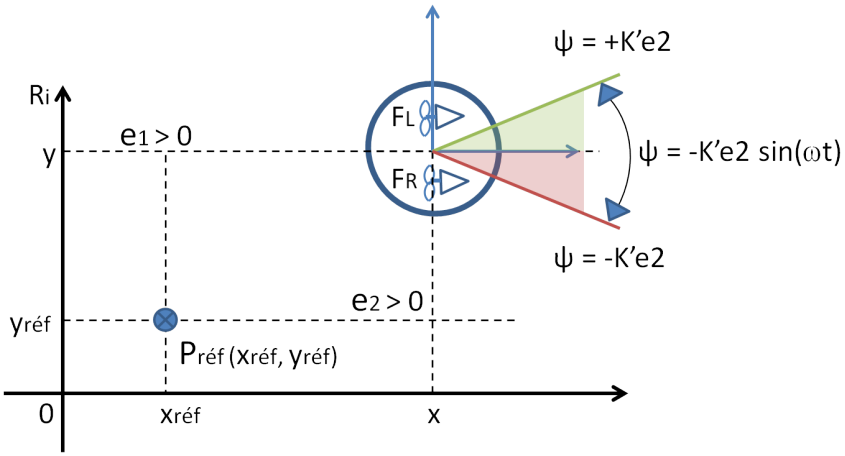

FIGURE 4.30 – Oscillations lorsque $e_2 > 0$, $e_1 > 0$ et $K' > 0$.

La singularité $1 - K'e_1 \sin(\omega t) \neq 0$ est donc liée à cette notion de "bonnes" ou de "mauvaises" orientations. En effet, si $e_1 \sin(\omega t) < 0$ avec $K' > 0$ c'est-à-dire lorsque le Glisseur se trouve dans la zone de "bonnes orientations" alors le système s'éloigne de la singularité puisque $1 - K'e_1 \sin(\omega t) > 1$. En revanche, dans le cas contraire correspondant à la zone de "mauvaises orientations" lorsque $e_1 \sin(\omega t) > 0$, le système tend à être instable en approchant de la singularité. Pour éviter que $K'e_1 \sin(\omega t)$ ne tende vers -1, deux possibilités peuvent être explorées : régler le gain K' éventuellement en le faisant varier et/ou saturer la commande.

4.5.7 Simulations

Étant donné que nous n'avons pu prouver la convergence exacte dans le cas d'un suivi de trajectoire admissible, nous avons illustré cette approche avec de nombreux scénarii de simulation. Le lecteur pourra étudier ces différents exemples pour se convaincre de la validité des différentes approches. Les cinq premières simulations concernent le suivi de position, les quatre suivantes, le suivi de posture et la dernière fait référence à la loi de contrôle (4.97) munie d'un état de déphasage Φ. Le modèle dynamique implémenté dans ces simulations est le suivant :

$$(\Sigma_{glisseur}) \left\{ \begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \\ \dot{e_3} \\ \dot{e_4} \end{pmatrix} & = & A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} + B(u_1 - u_{1_r}) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ \ddot{\psi} & = & -\eta_3 \dot{\psi} + u_2 \end{array} \right. \tag{4.100}$$

avec $M = 1.5$kg, $\eta_1 = \eta_2 = 0.815$, $\eta_3 = 0.37$.

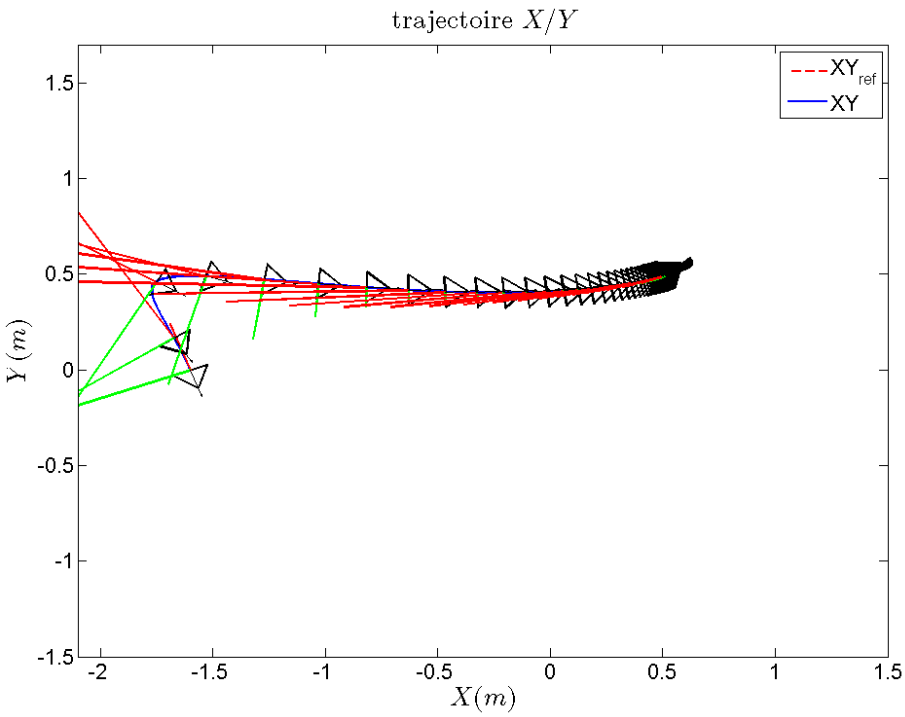

FIGURE 4.31 – Simulation 1 : Suivi de position, stabilisation en un point : $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

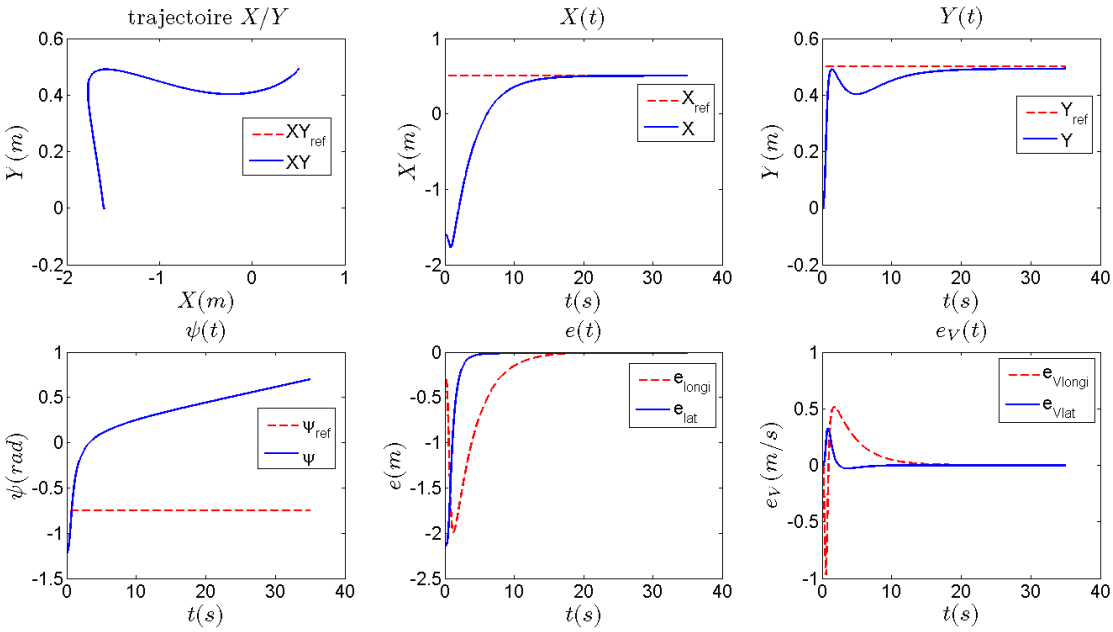

FIGURE 4.32 – Simulation 1 : Suivi de position, stabilisation en un point : $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

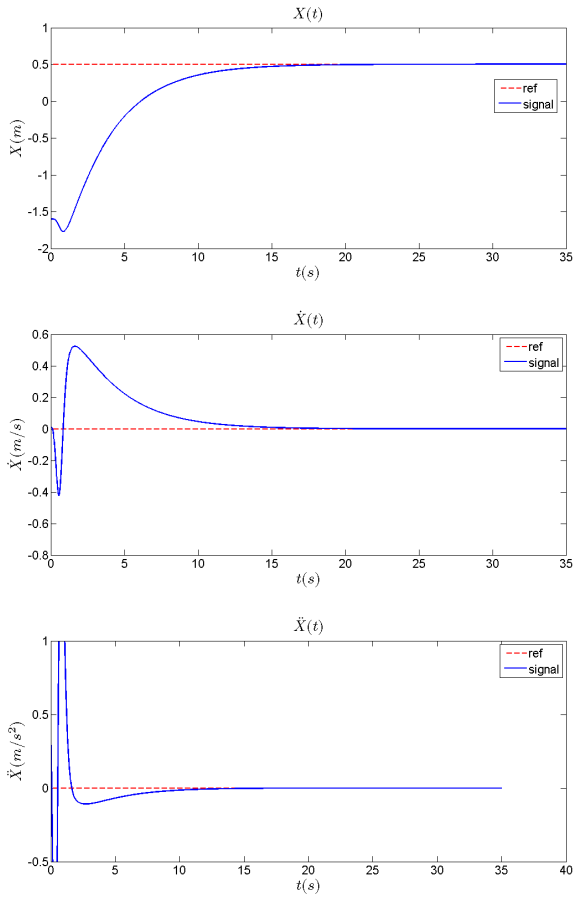

FIGURE 4.33 – Simulation 1 : Suivi de position, stabilisation en un point : $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

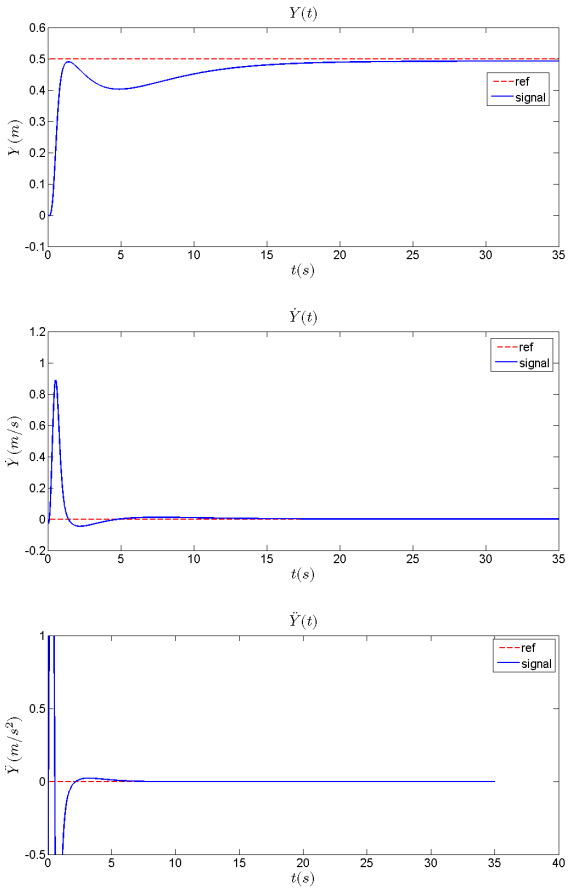

FIGURE 4.34 – Simulation 1 : Suivi de position, stabilisation en un point : $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

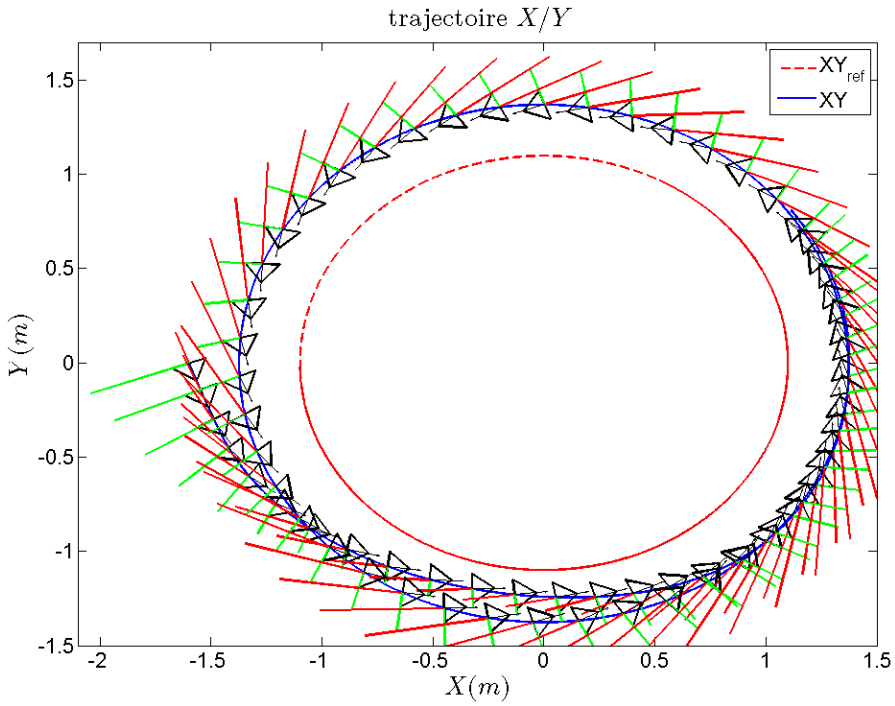

FIGURE 4.35 – Simulation 2 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

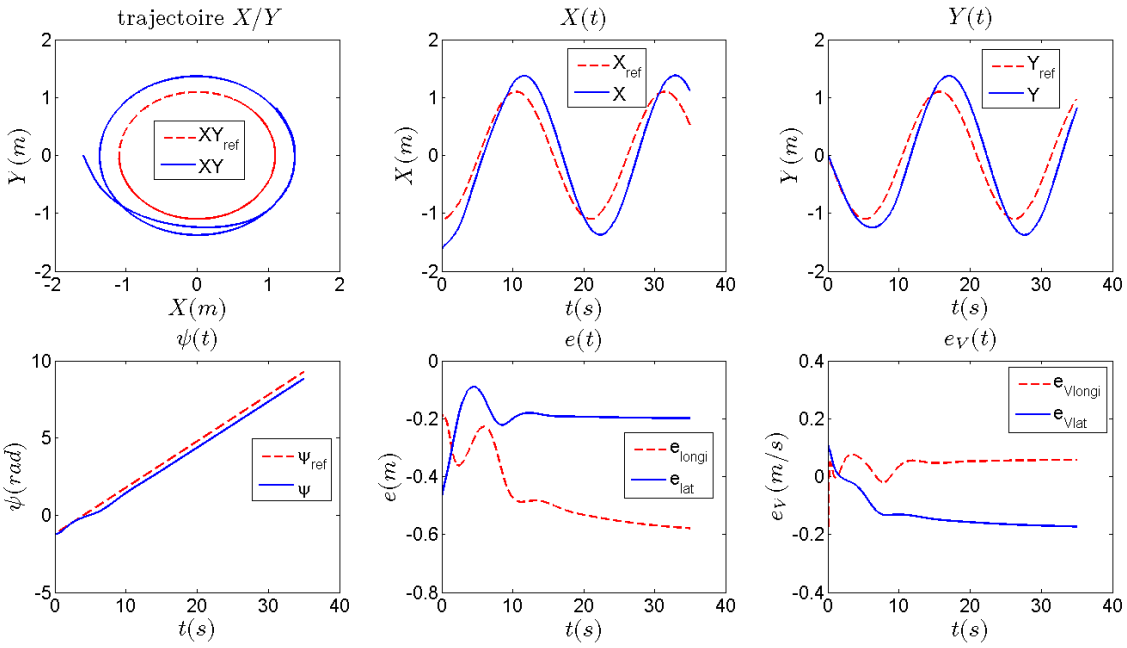

FIGURE 4.36 – Simulation 2 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

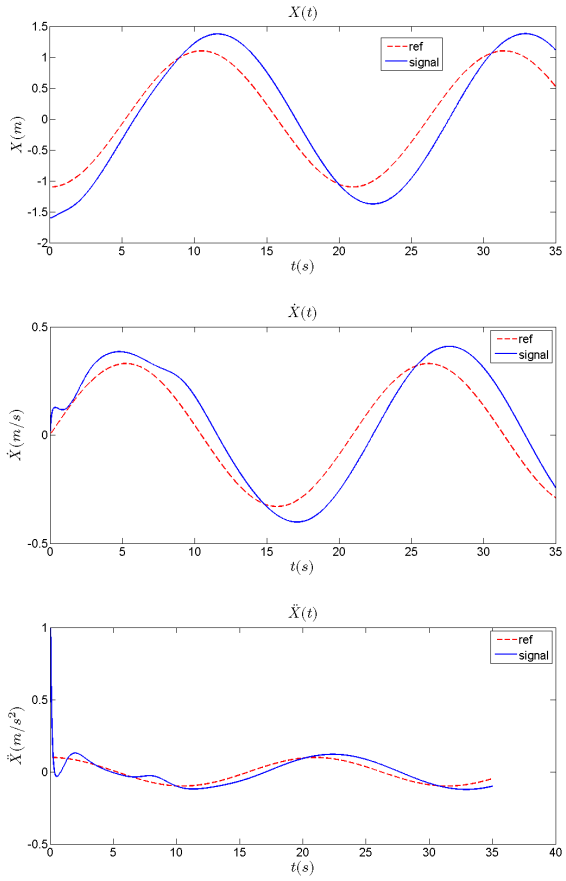

FIGURE 4.37 – Simulation 2 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

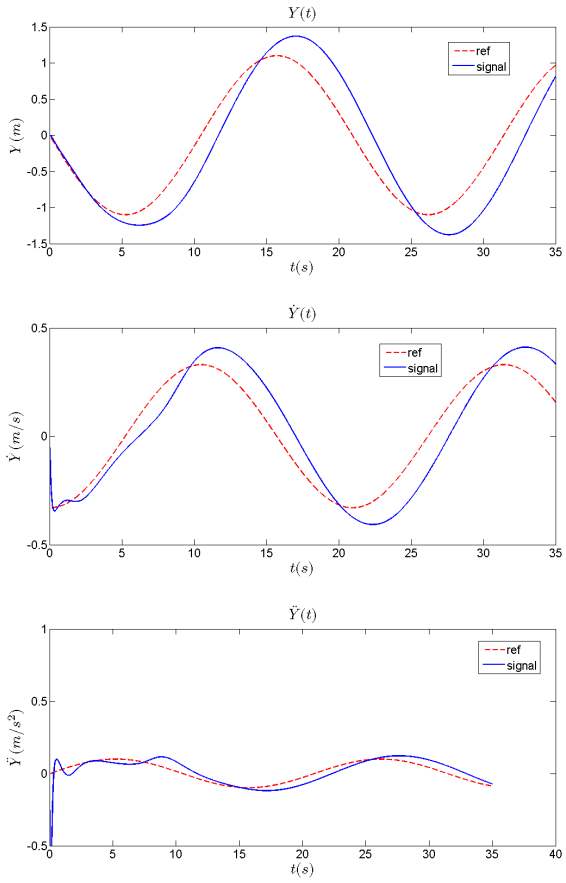

FIGURE 4.38 – Simulation 2 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

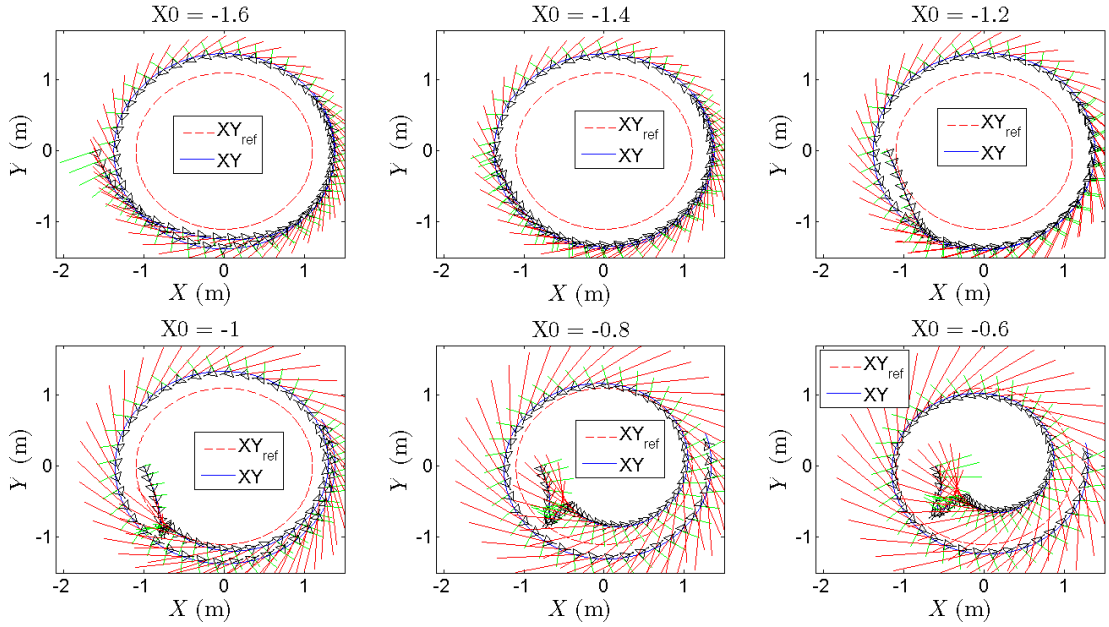

FIGURE 4.39 – Simulation 2 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6/-1.4/-1.2/-1.0/-0.8/-0.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

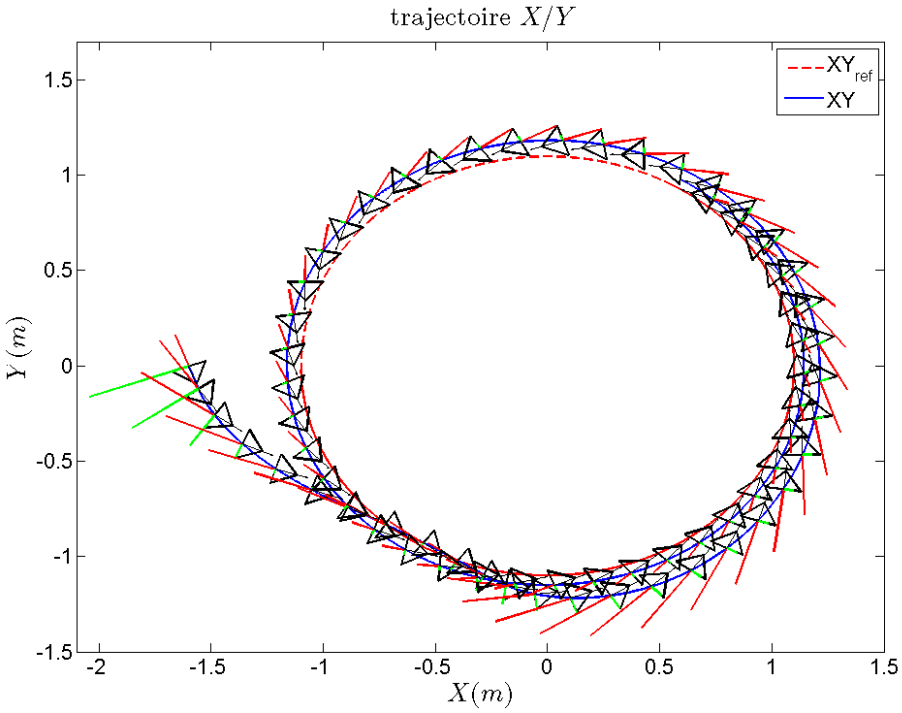

FIGURE 4.40 – Simulation 3 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 20$.

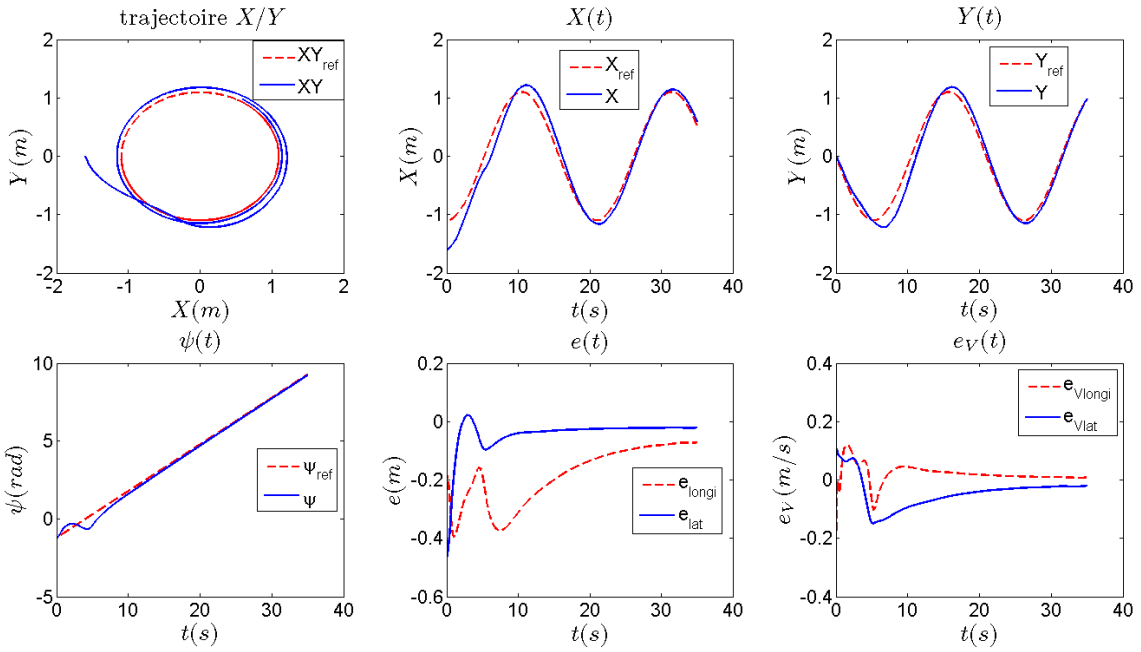

FIGURE 4.41 – Simulation 3 : Suivi de position, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 20$.

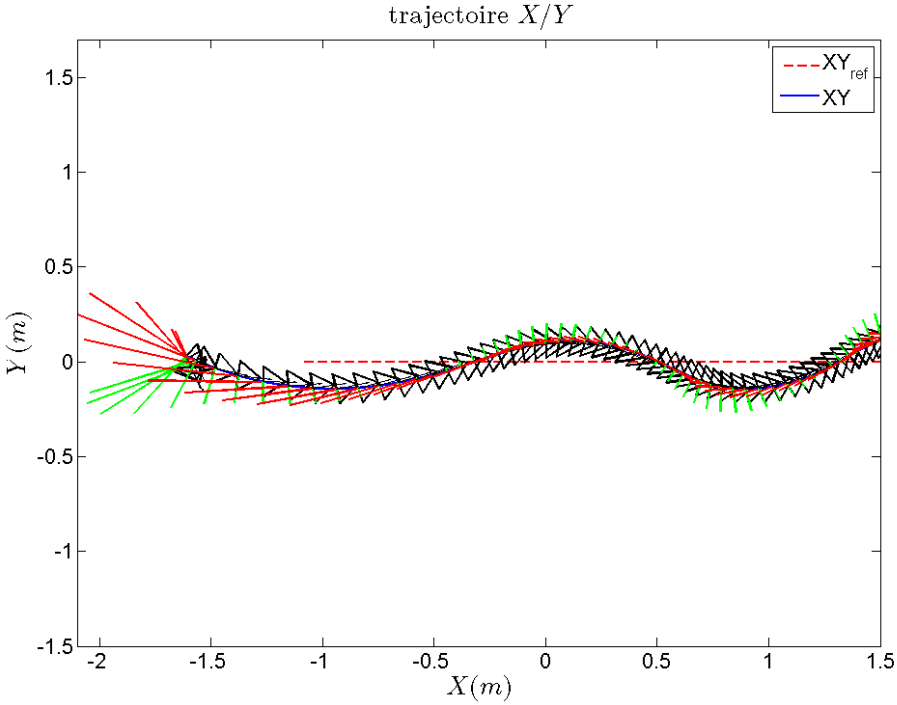

FIGURE 4.42 – Simulation 4 : Suivi de position, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

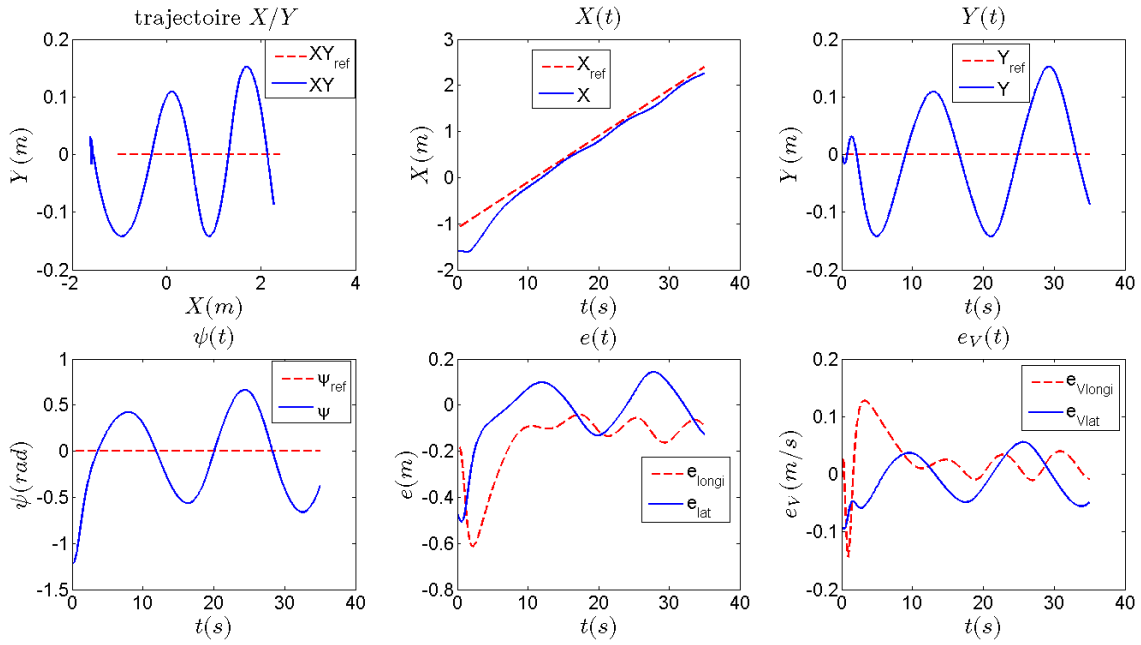

FIGURE 4.43 – Simulation 4 : Suivi de position, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

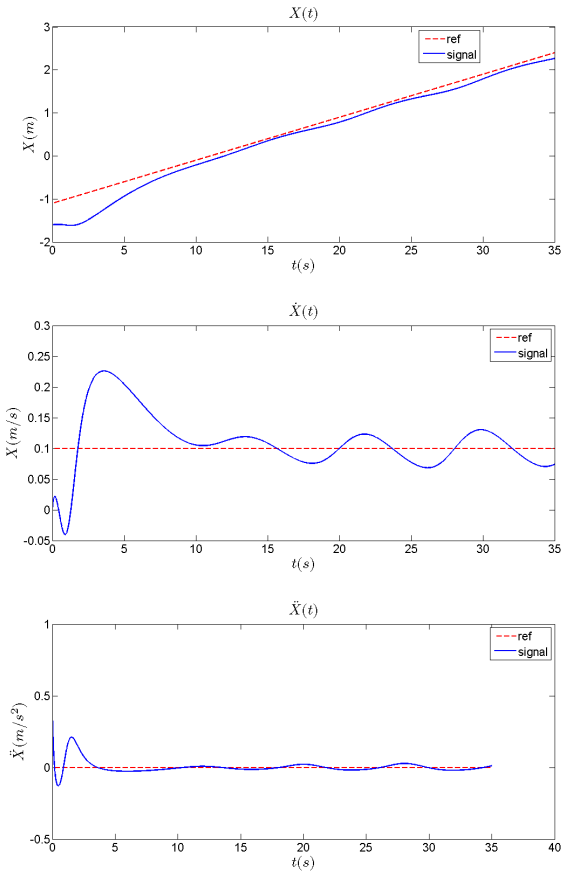

FIGURE 4.44 – Simulation 4 : Suivi de position, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

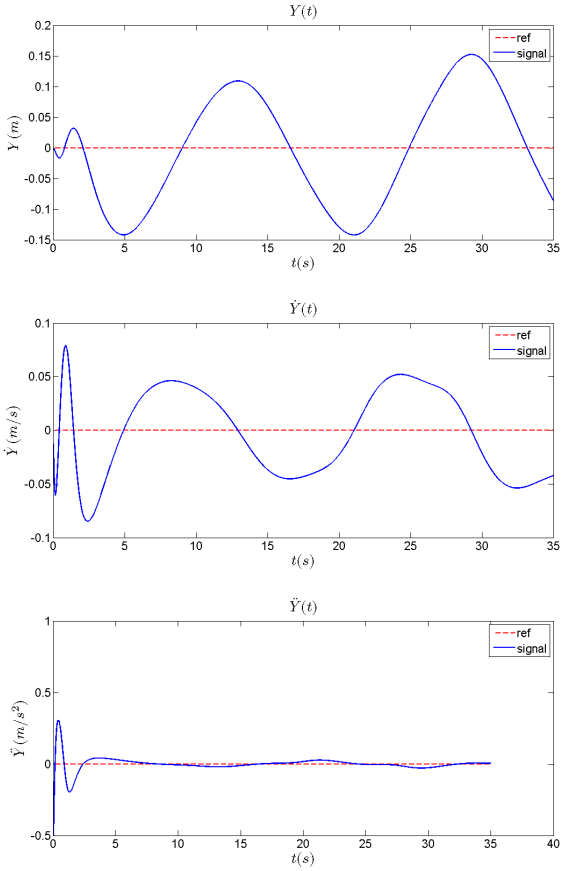

FIGURE 4.45 – Simulation 4 : Suivi de position, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

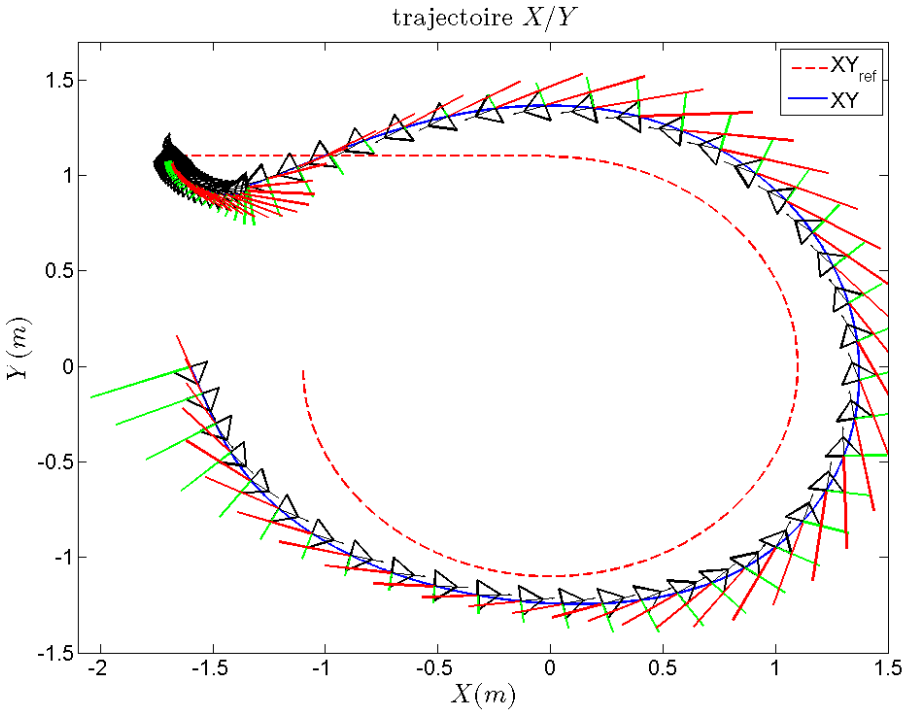

FIGURE 4.46 – Simulation 5 : Suivi de position, suivi d'une trajectoire puis stabilisation en un point, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

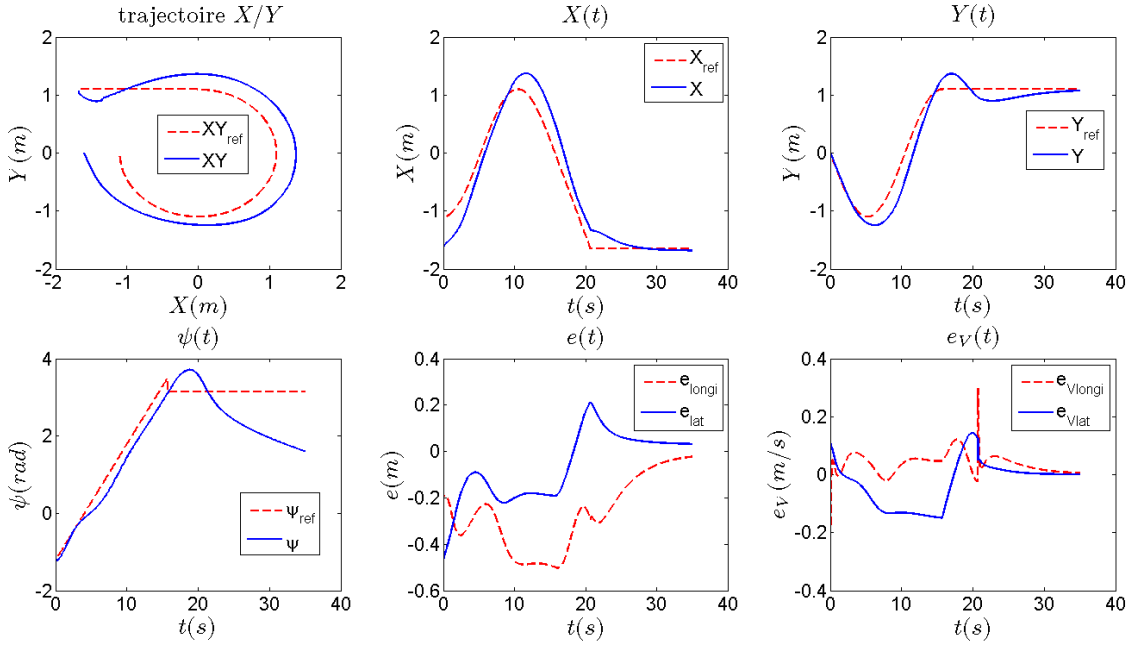

FIGURE 4.47 – Simulation 5 : Suivi de position, suivi d'une trajectoire puis stabilisation en un point, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

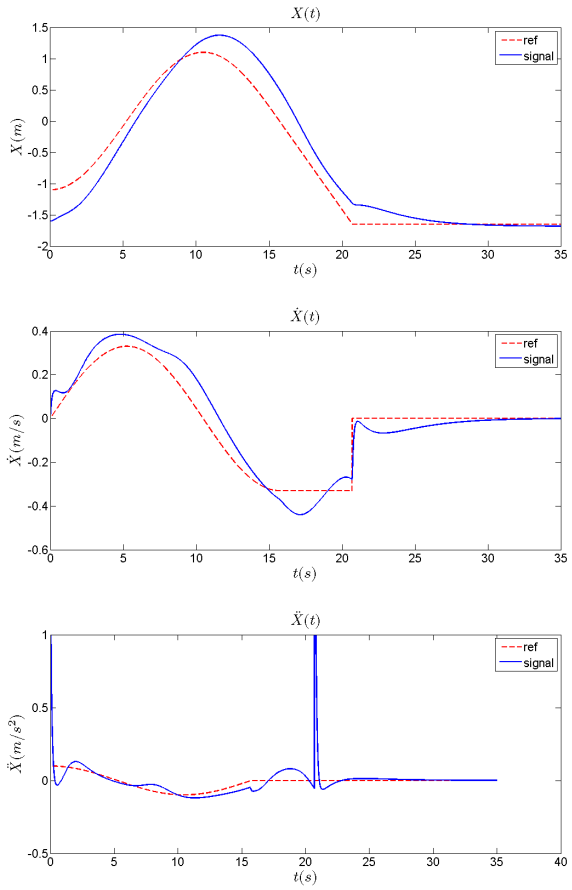

FIGURE 4.48 – Simulation 5 : Suivi de position, suivi d'une trajectoire puis stabilisation en un point, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

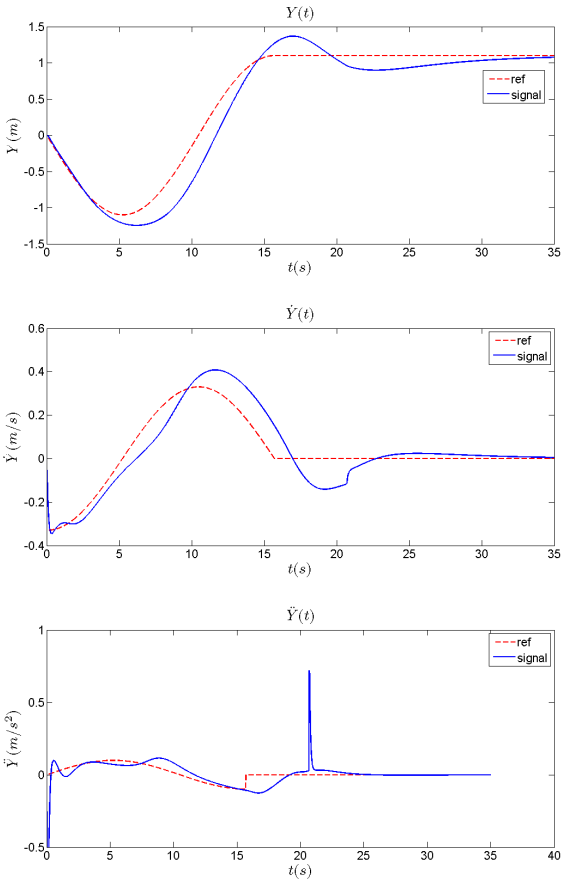

FIGURE 4.49 – Simulation 5 : Suivi de position, suivi d'une trajectoire puis stabilisation en un point, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3.3$, $k_4 = 8$, $K_1 = 1$, $K_2 = 4$, $K' = 2$.

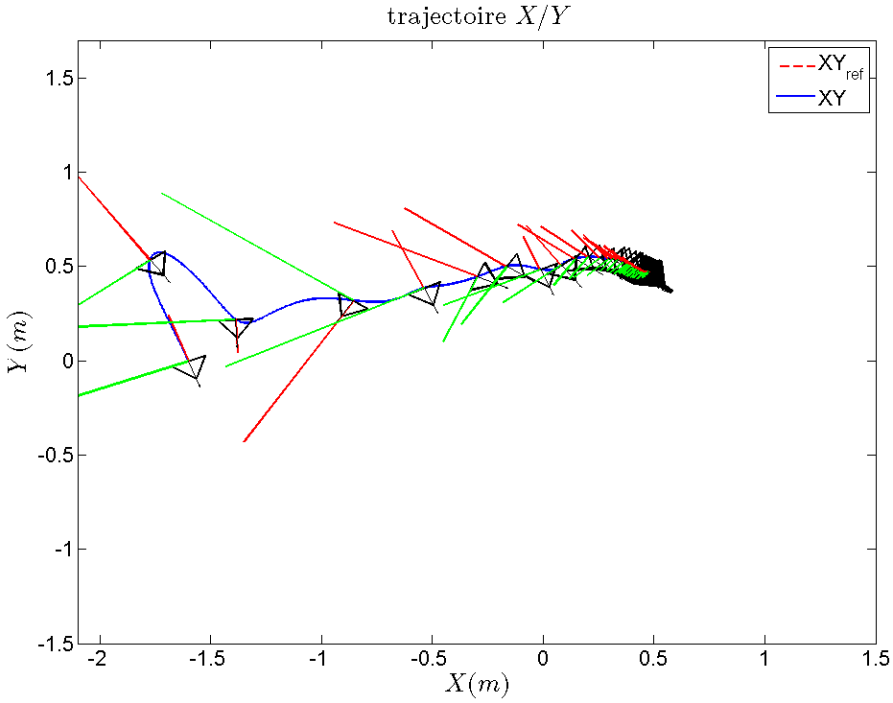

FIGURE 4.50 – Simulation 6 : Suivi de posture, stabilisation en un point, $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5, \psi_{ref} = -0.75)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

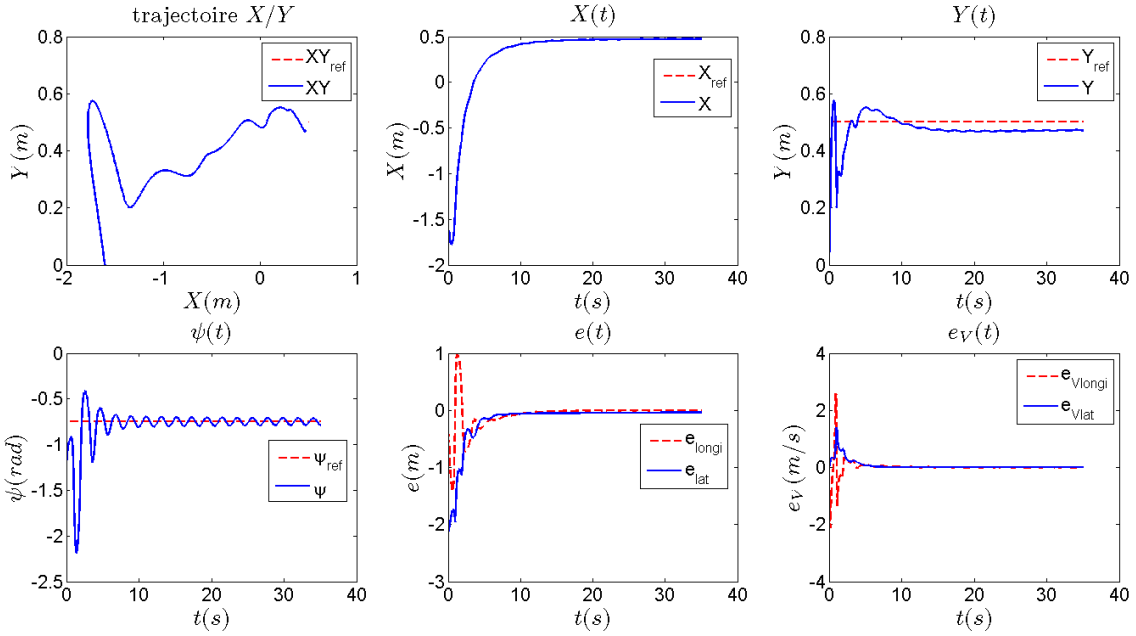

FIGURE 4.51 – Simulation 6 : Suivi de posture, stabilisation en un point, $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5, \psi_{ref} = -0.75)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

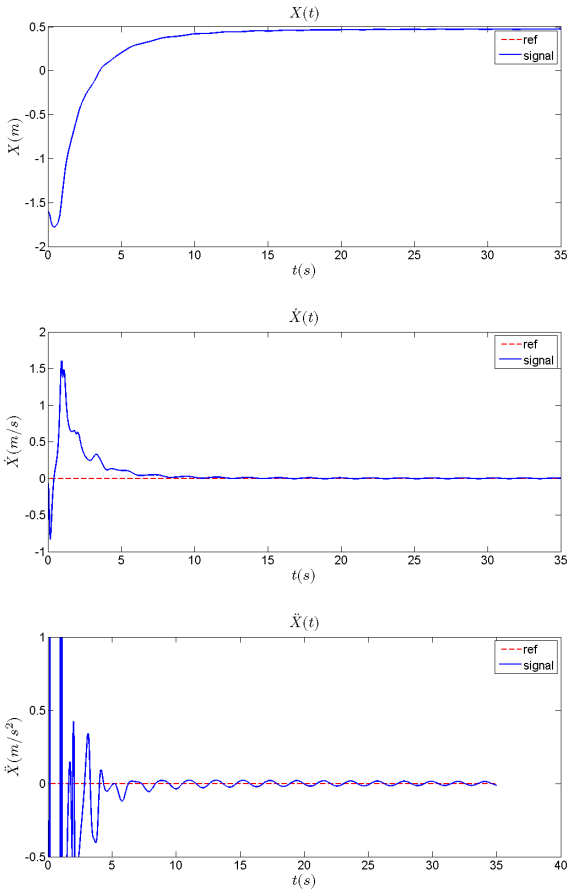

FIGURE 4.52 – Simulation 6 : Suivi de posture, stabilisation en un point, $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5, \psi_{ref} = -0.75)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

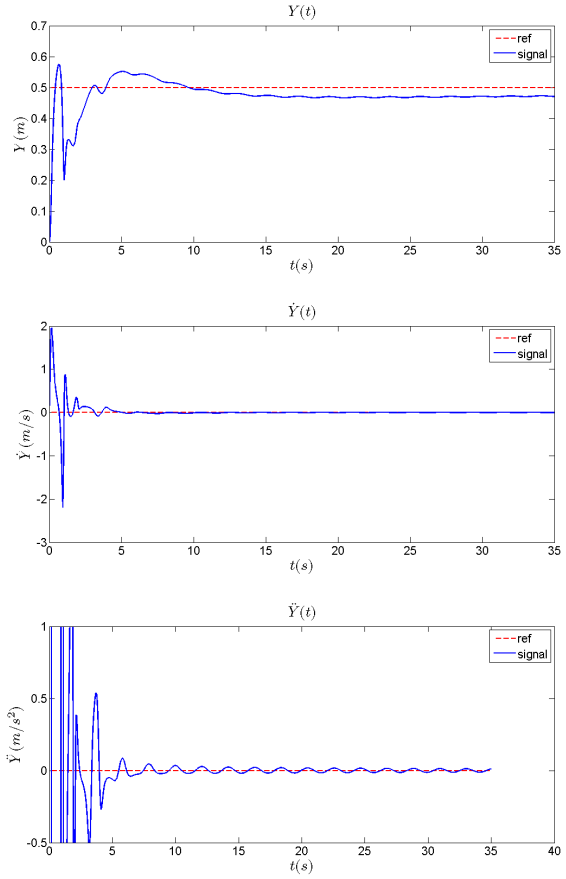

FIGURE 4.53 – Simulation 6 : Suivi de posture, stabilisation en un point, $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5, \psi_{ref} = -0.75)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

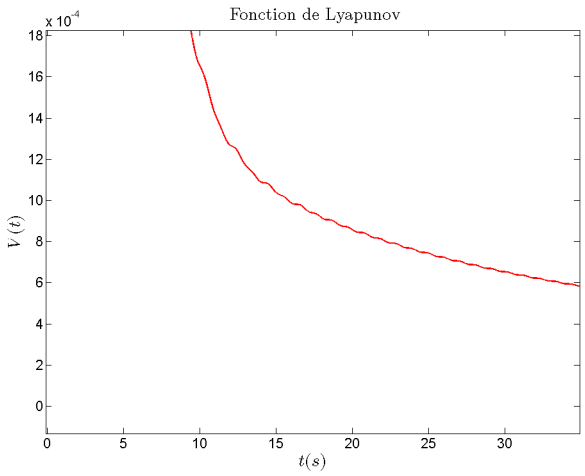

FIGURE 4.54 – Simulation 6 : Fonction de Lyapunov. Suivi de posture, stabilisation en un point, $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5, \psi_{ref} = -0.75)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

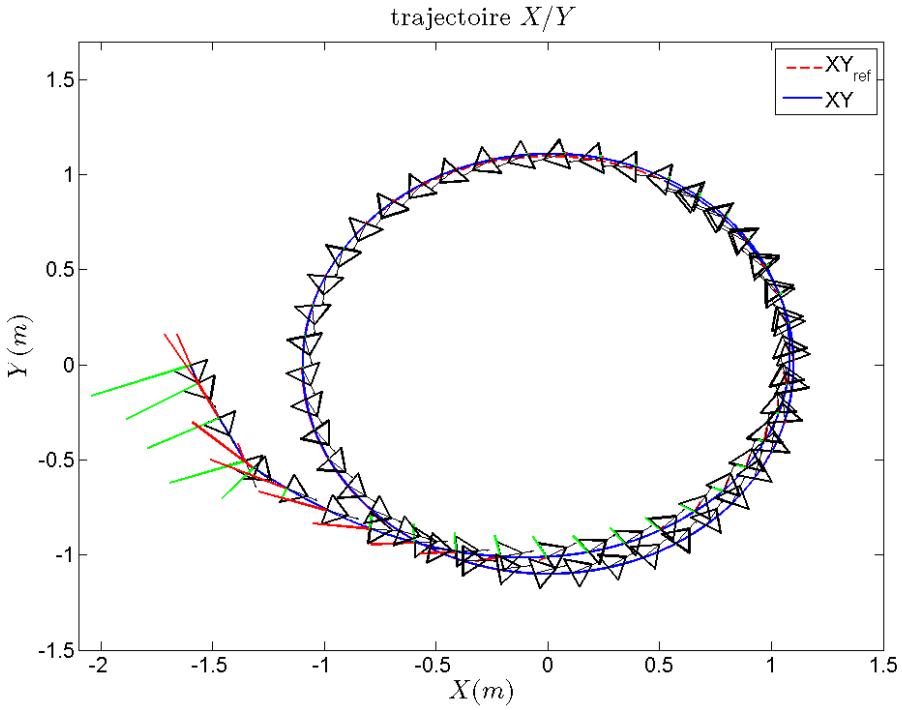

FIGURE 4.55 – Simulation 7 : Suivi de posture, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

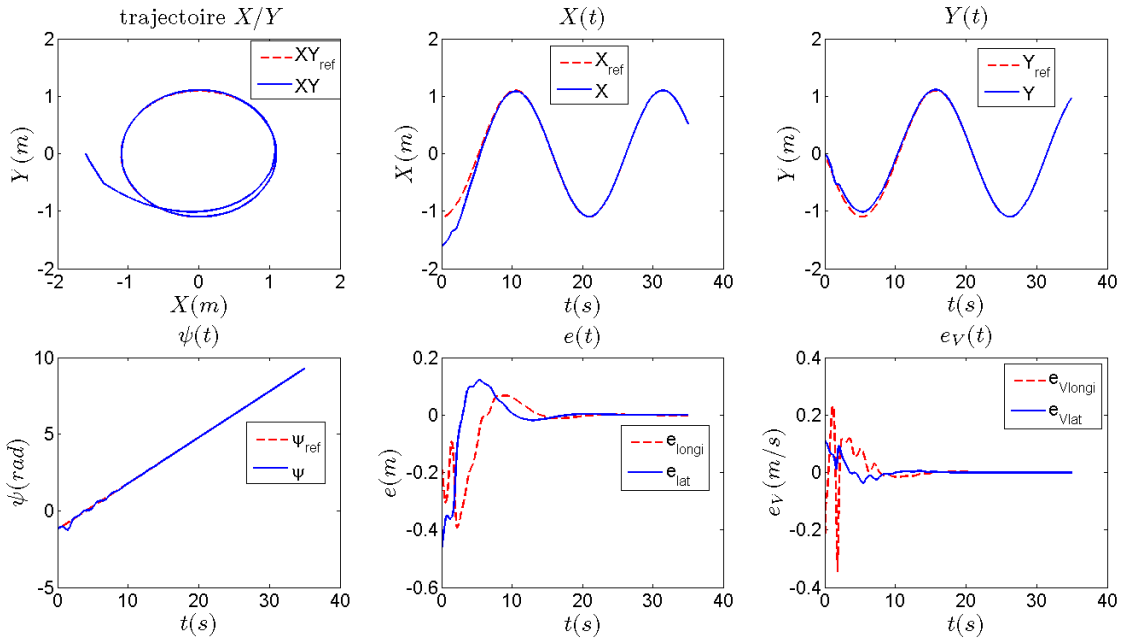

FIGURE 4.56 – Simulation 7 : Suivi de posture, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

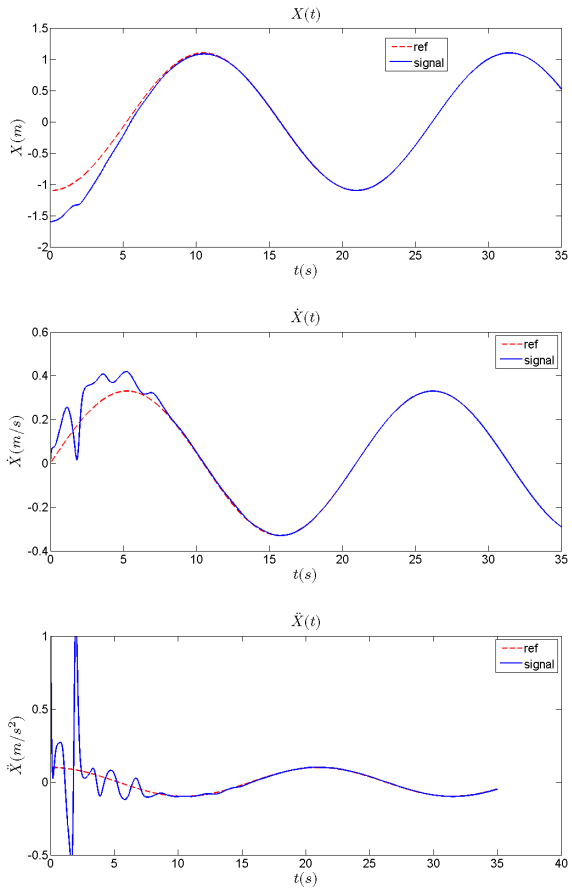

FIGURE 4.57 – Simulation 7 : Suivi de posture, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

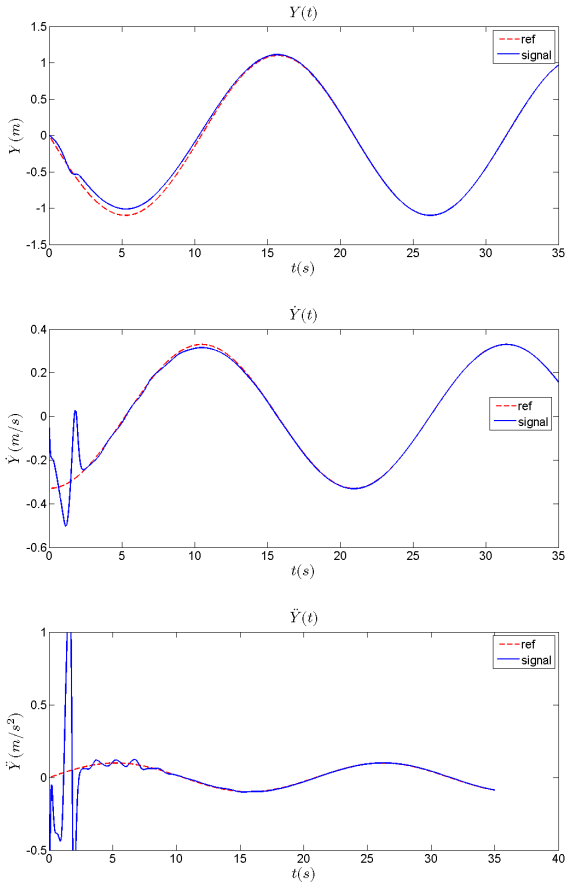

FIGURE 4.58 – Simulation 7 : Suivi de posture, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

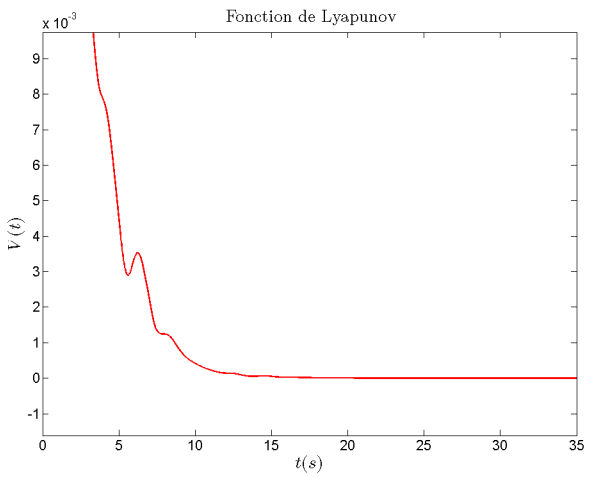

FIGURE 4.59 – Simulation 7 : Fonction de Lyapunov. Suivi de posture, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

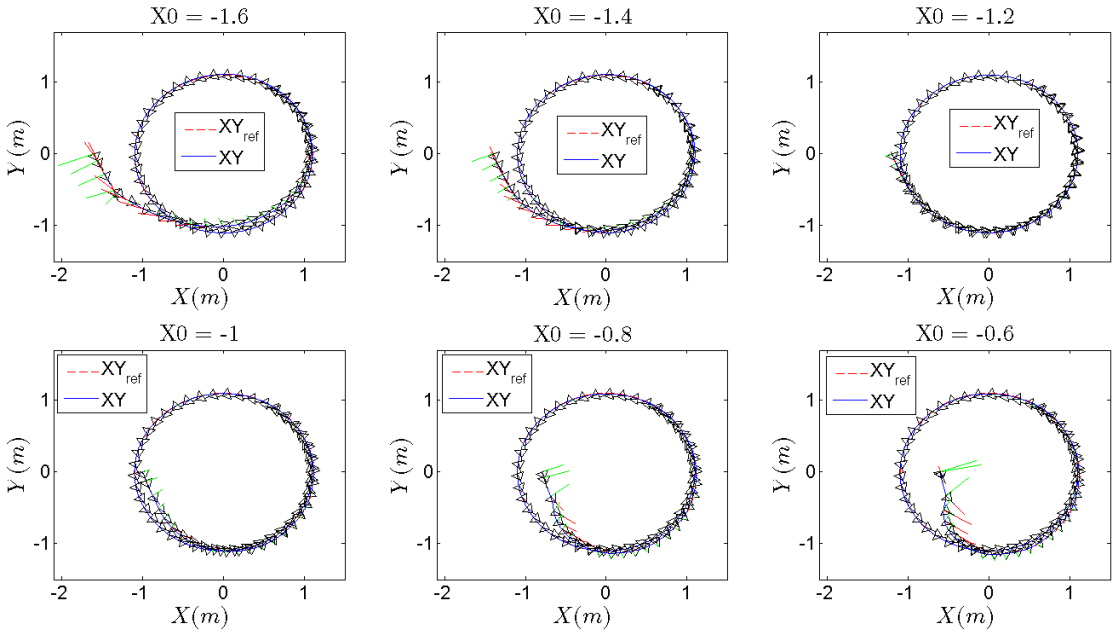

FIGURE 4.60 – Simulation 7 : Suivi de posture, suivi d'un cercle de rayon $1.1m$ (trajectoire admissible excitante $\dot{\psi}_r \neq 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6/-1.4/-1.2/-1.0/-0.8/-0.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

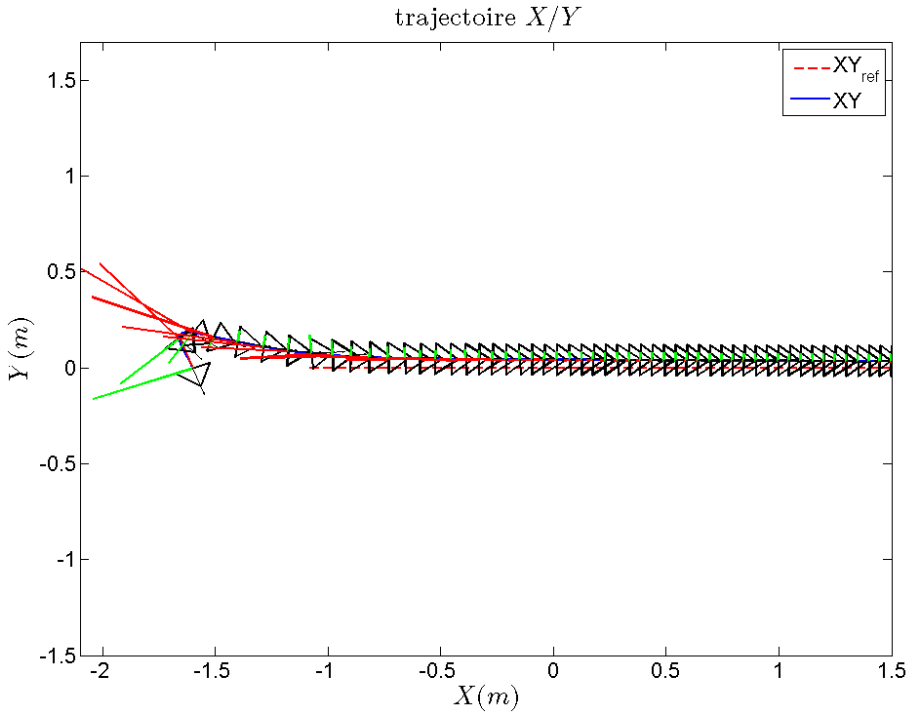

FIGURE 4.61 – Simulation 8 : Suivi de posture, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

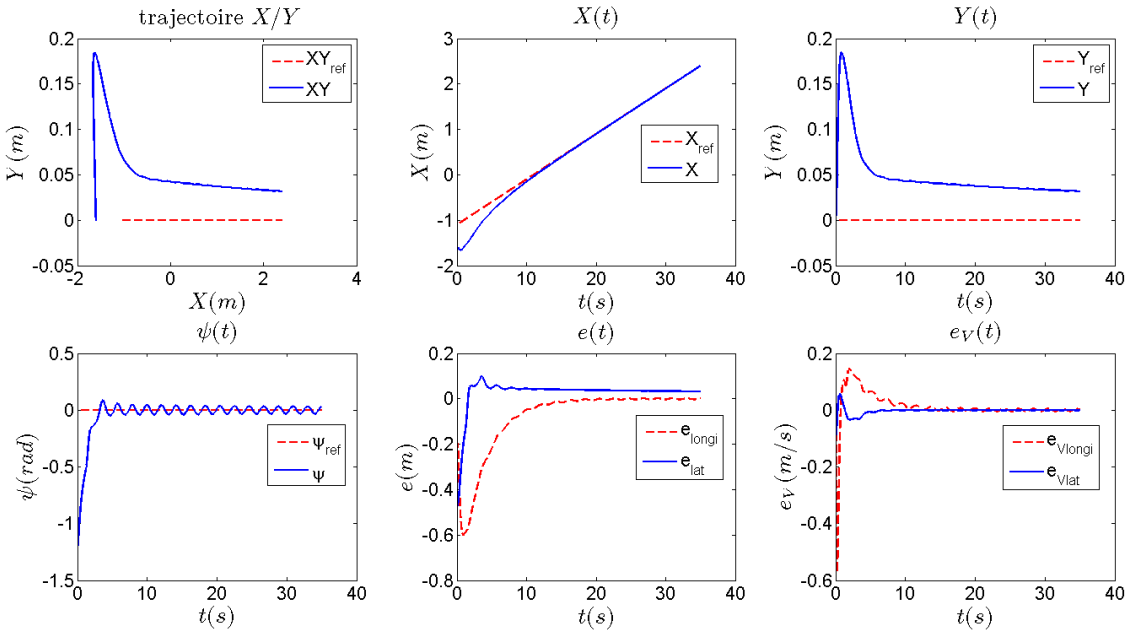

FIGURE 4.62 – Simulation 8 : Suivi de posture, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

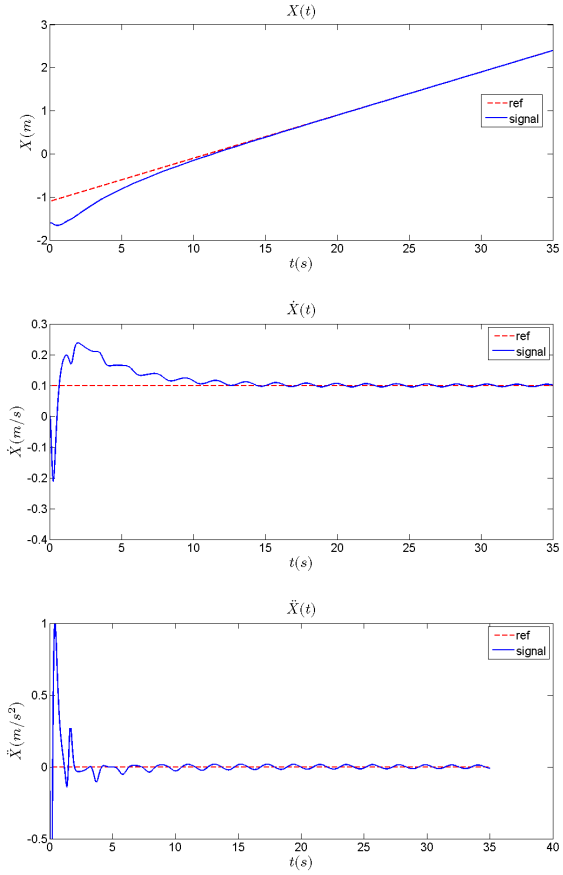

FIGURE 4.63 – Simulation 8 : Suivi de posture, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

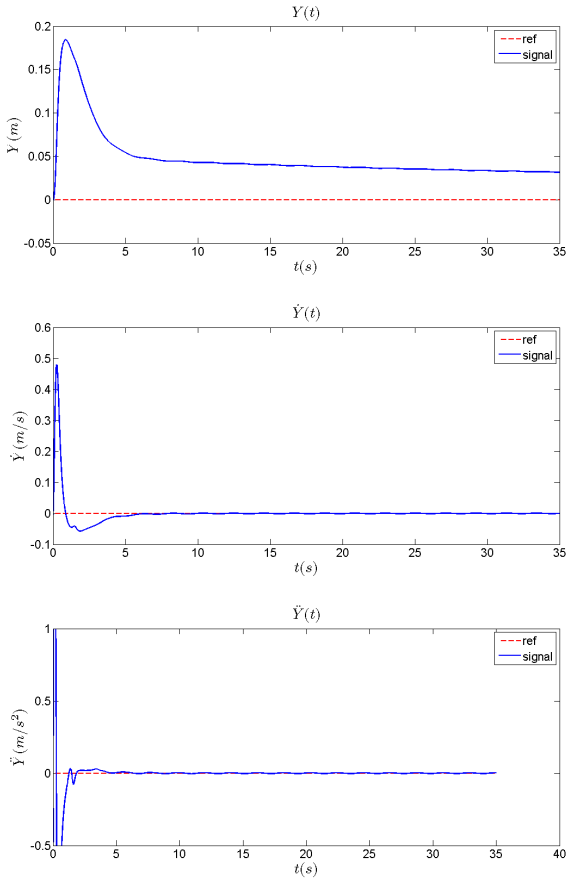

FIGURE 4.64 – Simulation 8 : Suivi de posture, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

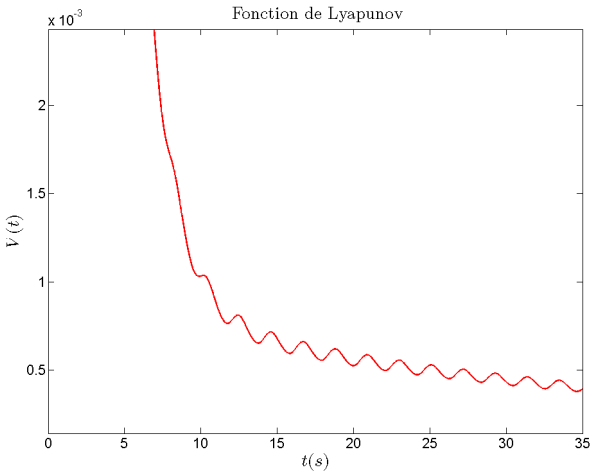

FIGURE 4.65 – Simulation 8 : Fonction de Lyapunov. Suivi de posture, suivi d'une droite (trajectoire admissible non excitante $\dot{\psi}_r = 0$), $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

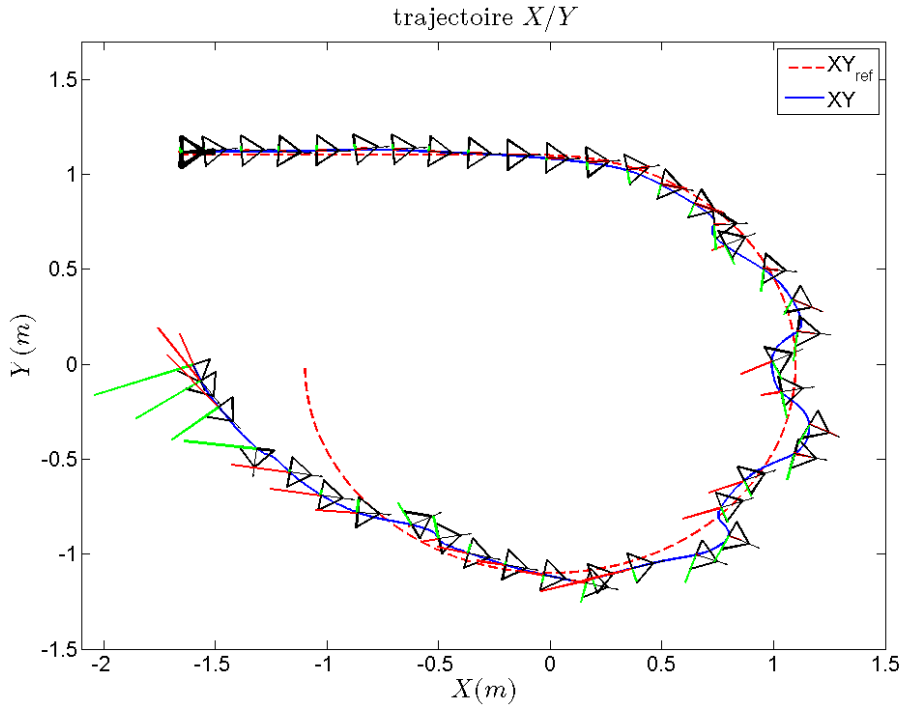

FIGURE 4.66 – Simulation 9 : Suivi de posture, suivi de trajectoire puis stabilisation en un point avec une orientation de référence constante $\psi_{ref} = 0$ tout au long de la simulation, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes.

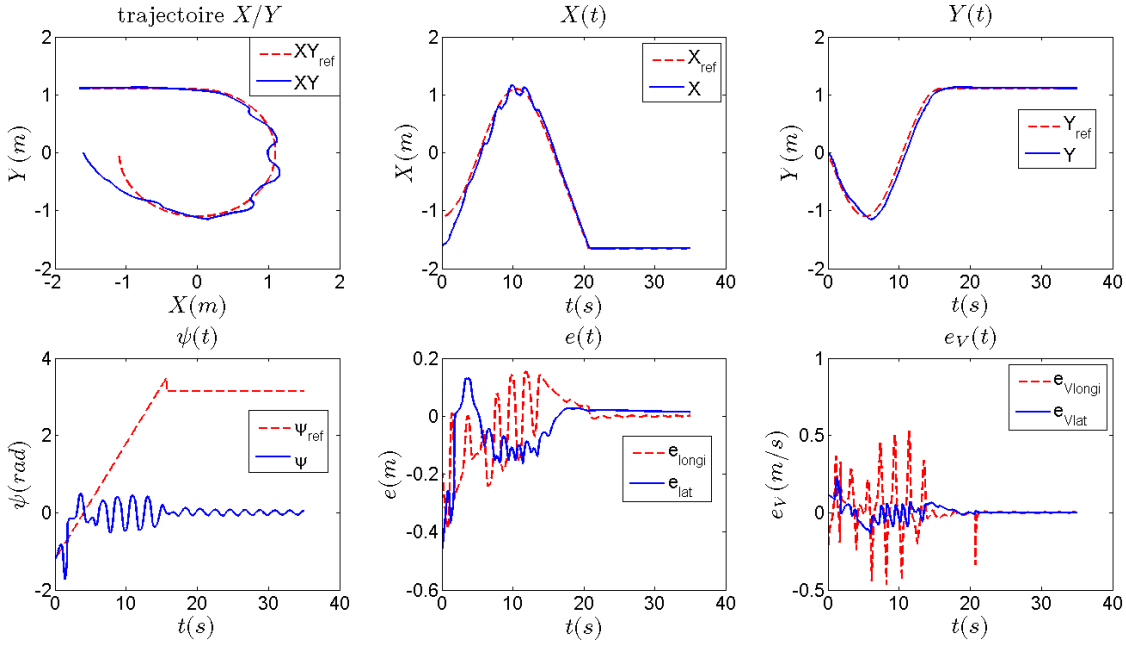

FIGURE 4.67 – Simulation 9 : Suivi de posture, suivi de trajectoire puis stabilisation en un point avec une orientation de référence constante $\psi_{ref} = 0$ tout au long de la simulation, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

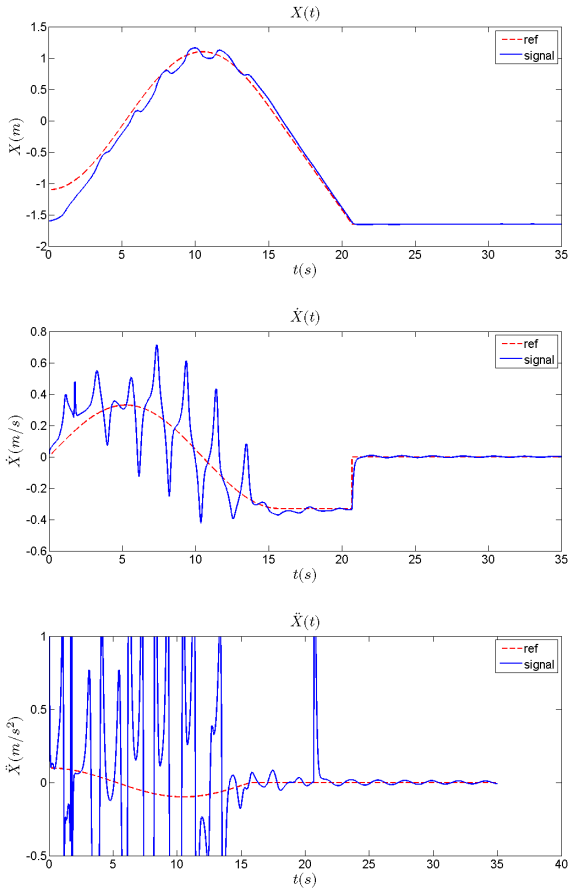

FIGURE 4.68 – Simulation 9 : Suivi de posture, suivi de trajectoire puis stabilisation en un point avec une orientation de référence constante $\psi_{ref} = 0$ tout au long de la simulation, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

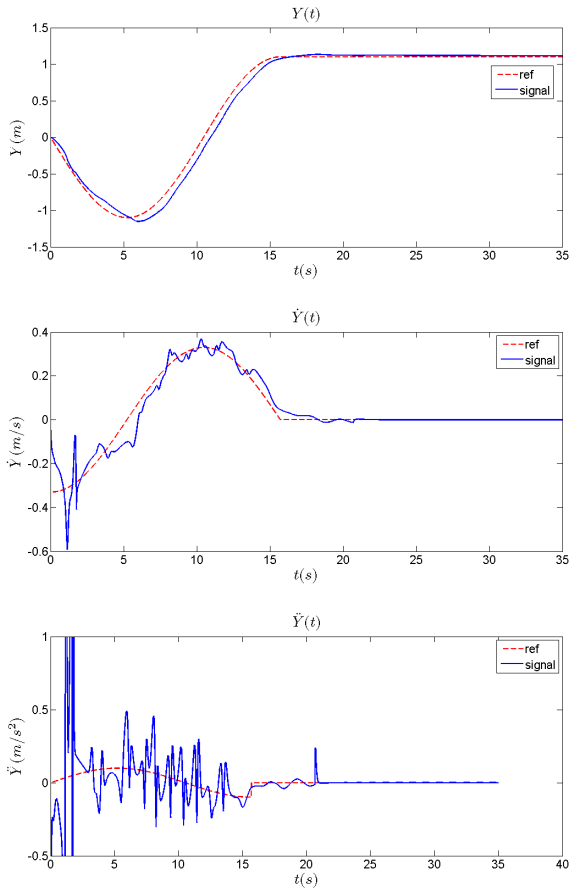

FIGURE 4.69 – Simulation 9 : Suivi de posture, suivi de trajectoire puis stabilisation en un point avec une orientation de référence constante $\psi_{ref} = 0$ tout au long de la simulation, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

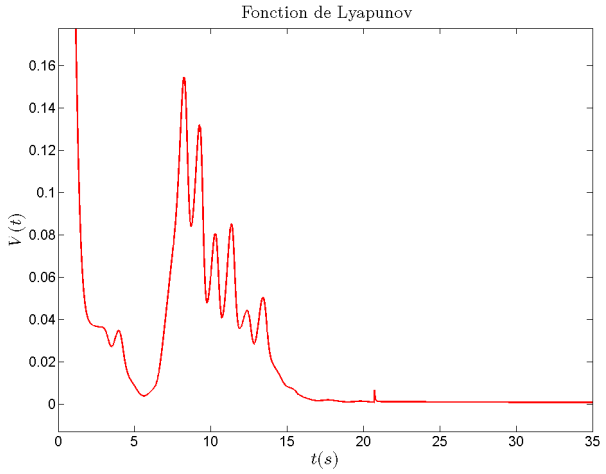

FIGURE 4.70 – Simulation 9 : Fonction de Lyapunov. Suivi de posture, suivi de trajectoire puis stabilisation en un point avec une orientation de référence constante $\psi_{ref} = 0$ tout au long de la simulation, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

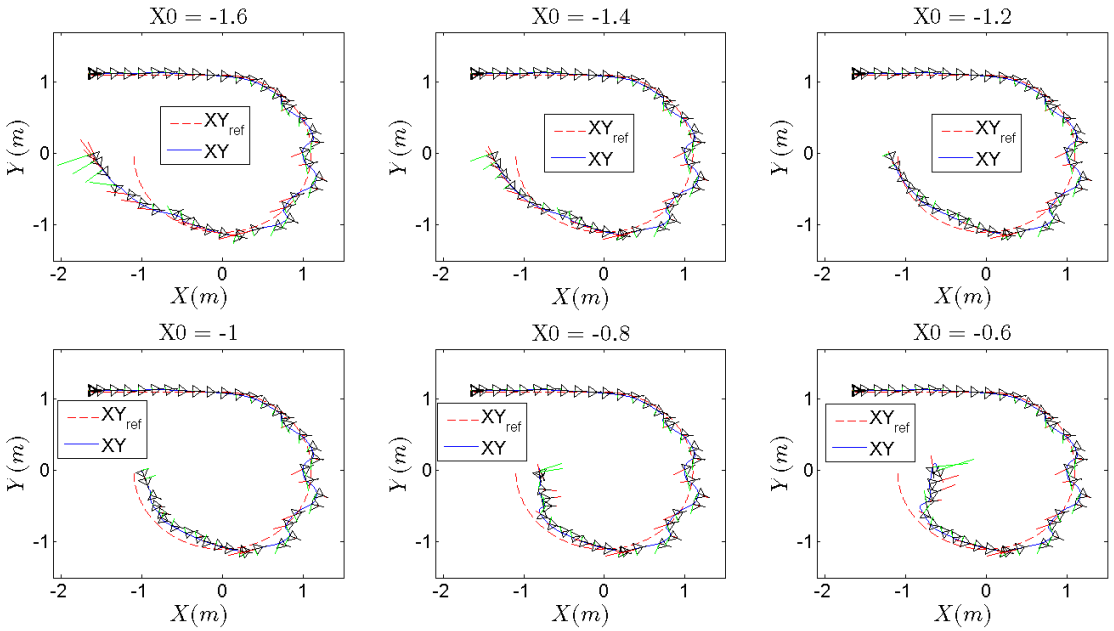

FIGURE 4.71 – Simulation 9 : Suivi de posture, suivi de trajectoire puis stabilisation en un point avec une orientation de référence constante $\psi_{ref} = 0$ tout au long de la simulation, $P_{init} = (x_{init} = -1.6/-1.4/-1.2/-1.0/-0.8/-0.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.

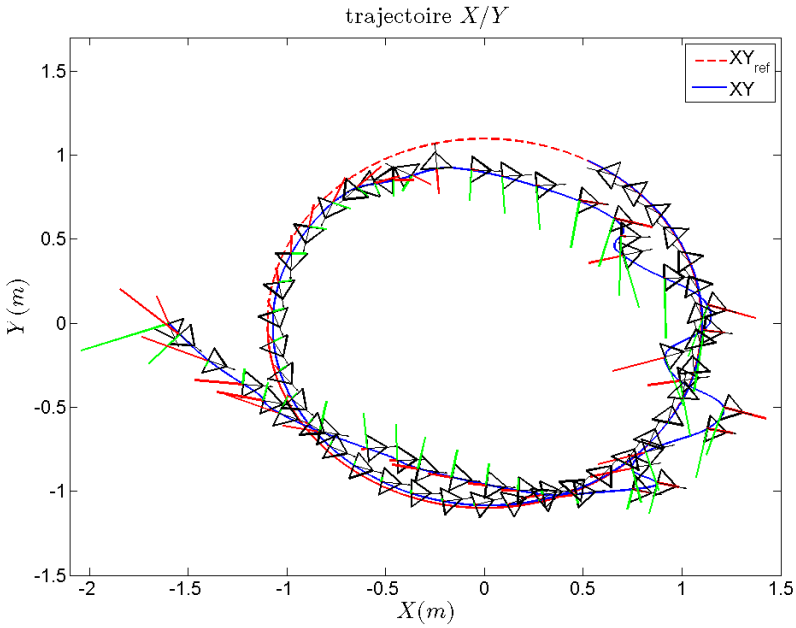

FIGURE 4.72 – Simulation 10 : Suivi de posture, suivi d'un cercle, $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5, \psi_{ref} = -0.75)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.
La figure illustre la trajectoire du glisseur symbolisé par un triangle dont la flèche indique l'orientation. Les erreurs longitudinale et transversale sont représentées respectivement par les lignes rouges et vertes. De $t = 0s$ à $t = 16s$, $\psi_{ref} = 0$ rad et $\dot{\Phi} = 0$; de $t = 16s$ à $t = 22s$ la référence en lacet est admissible et $\dot{\Phi} = 0$. De $t = 22s$ à $t = 35s$, le lacet est admissible et $\dot{\Phi} = -3$ dès lors que $\sin(\omega t + \Phi) > 0$.

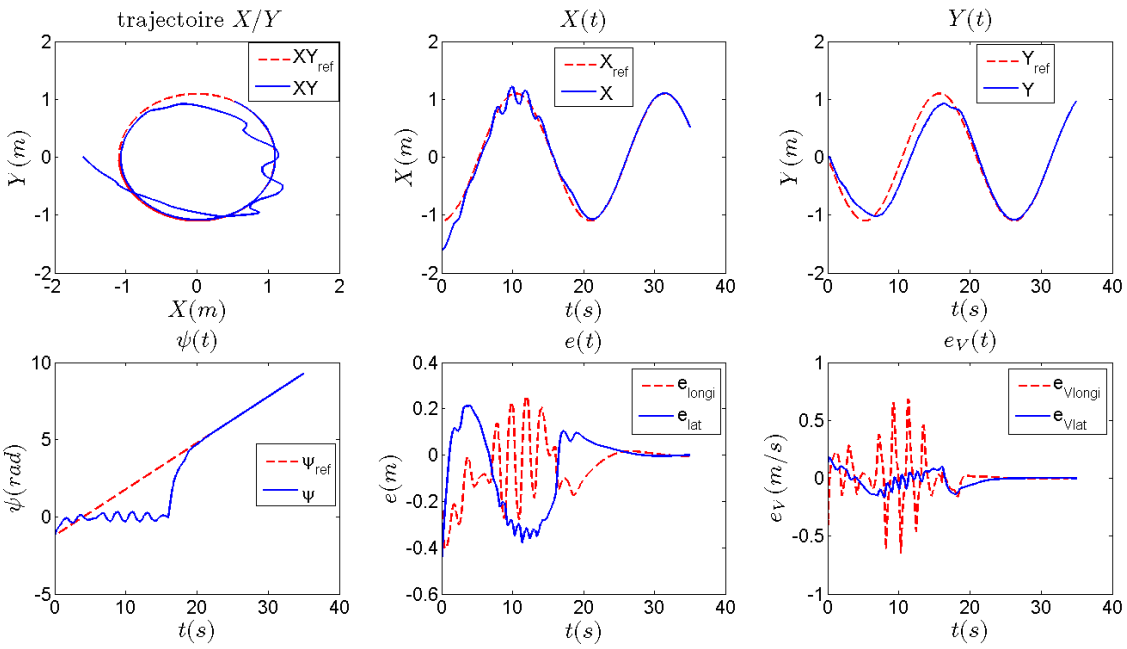

FIGURE 4.73 – Simulation 10 : Suivi de posture, suivi d'un cercle, $P_{ref} = (x_{ref} = 0.5, y_{ref} = 0.5, \psi_{ref} = -0.75)$, $P_{init} = (x_{init} = -1.6, y_{init} = 0, \psi_{init} = -1.218)$, les gains $k_1 = 10$, $k_3 = 3$, $k_4 = 15$, $K_1 = 1$, $K' = 1$, $\omega = 3$.
De $t = 0s$ à $t = 16s$, $\psi_{ref} = 0$ rad et $\dot{\Phi} = 0$; de $t = 16s$ à $t = 22s$ la référence en lacet est admissible et $\dot{\Phi} = 0$. De $t = 22s$ à $t = 35s$, le lacet est admissible et $\dot{\Phi} = -3$ dès lors que $\sin(\omega t + \Phi) > 0$.

Chapitre 5

Plateforme et Expérimentations

Sommaire

5.1 Matériels . . . 164
5.1.1 Plateforme expérimentale . . . 164
5.1.2 Système de Motion Capture . . . 164
5.1.2.1 Eléments du système de Motion Capture . . . 165
5.1.2.2 Le système de Motion Capture à l'usage . . . 166
5.1.3 Drone . . . 167
5.1.3.1 Base mécanique . . . 167
5.1.3.2 Mise à jour des programmes embarqués . . . 167
5.1.3.3 Mise en place de la constellation sur le drone . . . 168
5.1.4 Programme de contrôle . . . 170
5.1.4.1 Récupération des données du logiciel Motive . . . 170
5.1.4.2 Transformation des quaternions . . . 170
5.1.4.3 Dérivations des données . . . 171
5.1.4.4 Algorithme de Contrôle . . . 171
5.1.4.5 Communication avec le drone . . . 171
5.2 Identification . . . 172
5.2.1 Nouveau modèle du drone . . . 172
5.2.2 Forces et moments aérodynamiques . . . 174
5.2.2.1 Protocole expérimental pour l'identification des forces . . . 174
5.2.2.2 Protocole expérimental pour l'identification des moments . . . 176
5.2.3 Identification paramétrique de la dynamique du drone terrestre . . . 178
5.2.3.1 Réponse du système à un échelon . . . 178
5.2.3.2 Identification paramétrique de type "boîte grise" . . . 184
5.2.4 Variabilité du modèle . . . 189
5.2.4.1 La dynamique de lacet . . . 189
5.2.4.2 Frottements statiques . . . 196
5.3 Contrôle du drone par platitude . . . 197

La thése présentée comporte une forte composante expérimentale qui est exposée dans ce chapitre. Il y a une volonté, dans ce travail, d'acquérir une compréhension globale du contrôle d'un système mobile, que ce soit de l'élaboration théorique d'une loi de commande aux problèmes pratiques liés à son implémentation sur un système réel, en passant par une validation par simulations. Nous avons donc souhaité tester les contrôleurs décrits au chapitre précédent sur notre plateforme expérimentale. Faute de temps, nous n'avons testé qu'un seul bouclage : celui de la section 4.2.1 du chapitre 4. Avant d'implémenter ce contrôle, il a été nécessaire de préciser le modèle dynamique théorique développé jusqu'alors au moyen de plusieurs procédures d'identification. La variabilité du modèle employé est également mise en évidence dans ce chapitre. Cette partie expérimentale débute par la présentation de la plateforme et du matériel utilisés pour valider nos lois de contrôle. Le processus d'identification est décrit dans un second temps. Les résultats du suivi de trajectoire de notre drone, au moyen de l'approche par platitude, sont présentés et clôturent ce chapitre.

5.1 Matériels

5.1.1 Plateforme expérimentale

Les expérimentations menées cherchent à valider les résultats théoriques de contrôle décrits dans les chapitres précédents et qui asservissent le drone sur des trajectoires. La plateforme expérimentale permettant de tester ces contrôles est présentée dans ce chapitre. Pour bien décorréler les problématiques de SLAM et de contrôle, nous utilisons ici un système de Motion Capture afin d'obtenir en temps réel la position et l'orientation du drone pour l'asservissement en boucle fermée. Pour l'application qui nous intéresse, ce système est suffisamment précis (l'erreur est inférieure au millimètre) pour considérer ces informations de position et d'orientation comme une vérité terrain. De plus, pour des raisons pratiques, comme par exemple le réglage des différents gains des contrôleurs, l'algorithme de contrôle est implémenté sur un PC distant. Le schéma général de la plateforme est illustré sur la figure 5.1. Le système de Motion Capture placé tout autour de la salle d'expérimentation traque en temps réel la trajectoire du drone. Ce système envoie les données de position et d'orientation au PC distant qui effectue le traitement des informations, puis envoie les contrôles adéquats au PC embarqué sur le drone via des modules de communication sans fil de type ZigBee. Ces commandes sont transmises, au moyen d'un port série, au microcontrôleur gérant l'alimentation des moteurs et du servo-moteur sur le robot.

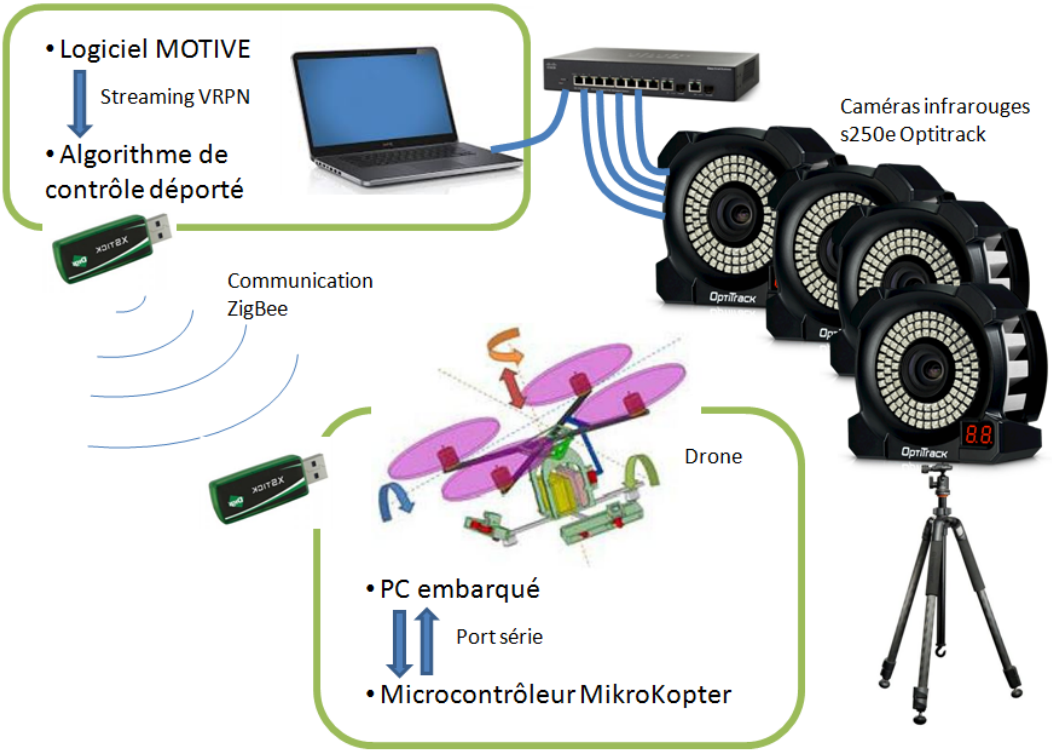

FIGURE 5.1 – Schéma de la plateforme expérimentale.

5.1.2 Système de Motion Capture

L'utilité première de ces systèmes de Motion Capture est la capture du mouvement du corps humain. Plusieurs caméras infrarouges sont disposées autour de l'environnement à traquer. Elles sont reliées via des câbles ethernet à une application serveur chargée de traiter les données brutes émises par les caméras. Les marqueurs réfléchissants, placés à des endroits stratégiques du corps,

sont alors traqués. Grâce au suivi des marqueurs sur plusieurs caméras, il est possible de reconstituer leurs positions et leurs orientations dans l'espace par triangulation. Ce genre de système sert dans de nombreuses applications, comme par exemple la modélisation d'avatar dont les mouvements sont de plus en plus réalistes dans les jeux vidéo ou au cinéma. Il peut être également employé dans le milieu médical, ou encore dans le milieu du sport pour visualiser et analyser les mouvements des sportifs. Dans cette étude, nous l'utilisons pour le bouclage de nos algorithmes de contrôle sur notre système mobile.

5.1.2.1 Eléments du système de Motion Capture

Pour notre application, nous avons opté pour un système de Motion Capture de la marque Optitrack. Le système comprend plusieurs éléments. Tout d'abord, les caméras infrarouges sont placées sur des trépieds aux quatre coins de la salle d'expérimentation et sont reliées via des câbles ethernet à un switch qui est lui-même relié à un ordinateur, sur lequel est installé le logiciel de tracking "Motive". À cela s'ajoutent les marqueurs réfléchissants (figure 5.4) avec leurs supports, formant des constellations dit "body" (figure 5.3). Des pièces "étalons" sont également fournies pour calibrer le système.

Caméras infrarouges Optitrack : Les caméras infrarouges utilisées sont les caméras S250e d'Optitrack (figure 5.2) d'une résolution de 832 x 832 et pouvant atteindre jusqu'à 250 images par seconde. Nous disposons de huit caméras pouvant ainsi traquer tout marqueur sur une surface d'environ $30m^2$; mais tout dépend de la configuration voulue, de la constellation utilisée et de la robustesse aux occlusions (un marqueur peut être caché temporairement par un élément du drone, d'un obstacle, voire d'un autre marqueur de la constellation dans certaines configurations). L'augmentation du nombre de caméras observant une même surface permet, entre autres, d'être plus robuste aux occlusions. Leur disposition dans la pièce n'est pas trivial et dépend du contexte.

FIGURE 5.2 – Caméra Optitrack s250e.

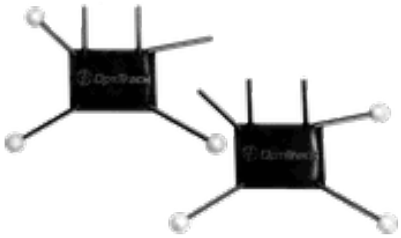

FIGURE 5.3 – Constellations de marqueurs Optitrack.

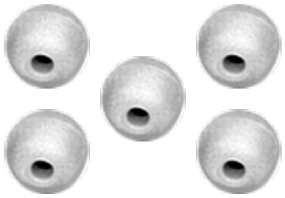

FIGURE 5.4 – Marqueurs réfléchissants Optitrack.

FIGURE 5.5 – Pièce d'étalonnage des positions relatives des caméras.

Logiciel MOTIVE : Le logiciel "MOTIVE" fourni avec le système récupère les images infrarouges, les traite et les filtre afin de traquer les constellations de marqueurs avec une précision inférieure au millimètre. L'acquisition des images et le traitement des données par le logiciel sont effectués en $4ms$ pour respecter la cadence des 250 images par seconde. Une des fonctionnalités du logiciel est la possibilité de transmettre les données de position et d'orientation directement à une application réseau ou locale sous certains protocoles, comme VRPN (Virtual Reality Peripheral Network) que nous utilisons ici. Les données émises sont les positions 3D des constellations ainsi que leurs orientations définies en quaternions.

5.1.2.2 Le système de Motion Capture à l'usage

Avantages d'un tel système : Un des principaux avantages d'un système de Motion Capture tel que celui choisi ici est la facilité d'installation : le système peut être nomade grâce aux trépieds, les branchements sont minimes (un seul câble par caméra comprenant l'alimentation et la récupération des données), la calibration est simple et rapide (environ une dizaine de minutes). La pièce d'étonnalage de la figure 5.5 permet, lorsqu'elle est traquée par l'ensemble des caméras, de retrouver les positions et les orientations relatives des caméras entre elles. Le repère absolu, dont le sol définit l'un des plans, est spécifié avec la pièce étalon de la figure 5.6. La fréquence d'acquisition peut atteindre 250Hz et la précision du système est inférieure au millimètre, ce qui permet de couvrir beaucoup d'applications. Finalement, c'est un système simple à installer, précis et clé en main.

Inconvénients : Quelques inconvénients doivent cependant être notés. Tout d'abord, le système ne fonctionne pas à l'extérieur, ou, du moins, pour le matériel présenté ici. Il est également sensible à la forme de la constellation à traquer. En effet, il est préférable d'avoir les marqueurs composant la constellation les plus espacés possibles et disposés de manière dissymétrique pour éviter les éventuelles occlusions. La précision du tracking est alors accrue. Les données de position et d'orientation des objets à traquer sont formalisées d'après les conventions du logiciel d'Optitrack qui peuvent être différentes selon les applications. Il faut faire attention aux repères employés, ainsi qu'aux conventions des angles d'euler affichés dans le logiciel. Un autre point qui peut être mentionné est le coût du système de Motion Capture, qui reste relativement élévé (aux alentours de 25000 euros pour le système présenté).

FIGURE 5.6 – Pièce d'étalonnage de la position du repère absolu.

5.1.3 Drone

La base mécanique du drone hybride terrestre/aérien, à l'étude ici, a été élaborée et assemblée au sein du laboratoire CAOR par une équipe d'élèves de Mines-Paristech sur la base d'un quadrirotor MikroKopter (figure 5.7).

5.1.3.1 Base mécanique

FIGURE 5.7 – Quadrotor MikroKopter.

Deux versions ont été réalisées entre 2011 et 2013. La première version a la capacité d'incliner complètement le plateau en croix supportant les quatre moteurs (figures 5.8 et 5.9). L'inclinaison des hélices pour la deuxième version ne se fait seulement que pour deux d'entre elles (figures 5.10, 5.11, 5.12 et 5.13), ce qui réduit l'inertie sur l'axe de tangage. Dans les deux versions, le plateau inférieur contient un PC embarqué, relié au microcontrôleur du MikroKopter par port série, ainsi que la batterie, et repose sur quatre ou trois billes selon la version. Ces dernières permettent au drone de se déplacer dans n'importe quelle direction à la manière d'un aéroglisseur. À titre d'information, les composants de la plateforme sont les suivants :

- PC embarqué Core2Duo sous Linux Ubuntu 11.04 avec module Wifi,
- carte électronique Mikrokopter avec centrale inertielle,
- batterie Vislero LiPo 4S 3300mAh 14.8V,
- servomoteur Hitec HS 5245MG,
- dongle ZigBee Digi XStick ZB.

5.1.3.2 Mise à jour des programmes embarqués

Programme du microcontrôleur : Le programme embarqué dans le microcontrôleur du Mikrokopter est open-source, ce qui nous permet de l'adapter à nos besoins. De plus, plusieurs options sont déjà intégrées dans le programme pour contrôler d'éventuels servo-moteurs, ou encore la puissance des gaz via un port série. Ce programme a été modifié et mis à jour dans le cadre de ce présent travail pour prendre en compte les deux modes de fonctionnement de notre drone hybride

FIGURE 5.8 – Drone hybride version 1.

FIGURE 5.9 – Schéma du drone hybride version 1.

terrestre/aérien. En ce qui concerne le mode terrestre, l'asservissement de l'assiette du drone est désactivé. Le contrôle du servo-moteur agissant sur le tangage des hélices, ainsi que le contrôle externe via le port série, sont par ailleurs activés.

Programme du PC embarqué : La finalité de la plateforme hybride présentée ici est d'explorer des environnements intérieurs en toute autonomie et en consommant le minimum d'énergie. En configuration optimale, des caméras 3D seront intégrées au chassis, option non réalisée ici faute de temps. La nécessité d'ajouter un PC embarqué est justifiée pour le traitement de ces données 3D qui, associées à un algorithme de SLAM, permettent de créer une carte de l'environnement et de localiser le drone dans celui-ci. Dans le contexte d'étude du suivi de trajectoire, il n'est pas nécessaire d'utiliser le PC embarqué. Néanmoins, pour une intégration plus aisée, ce dernier fait l'interface entre la communication sans fil ZigBee et le microcontrôleur qui agit directement sur les actionneurs. Finalement, le programme de contrôle distant envoie les commandes au PC embarqué grâce aux modules sans fil ZigBee qui, a son tour, transmet les informations au microcontrôleur MikroKopter via un port série (figure 5.1).

5.1.3.3 Mise en place de la constellation sur le drone

Pour mettre en place les lois de commandes développées dans cette thèse, un retour d'information de l'état du système en temps réel est nécessaire, ce qui est fait grâce au système de Motion Capture. Les variables d'état sont la position dans le plan du centre de gravité du drone (x, y), son lacet (ψ), l'inclinaison des hélices (θ) ainsi que les dérivées de ces paramètres jusqu'à l'ordre deux. Il est possible de récupérer ces informations avec un seul "body". Le placement de cette constellation de

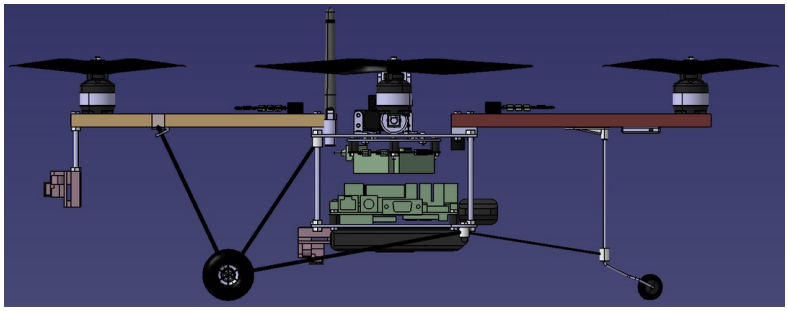

FIGURE 5.10 – Modélisation 3D du drone hybride version 2.

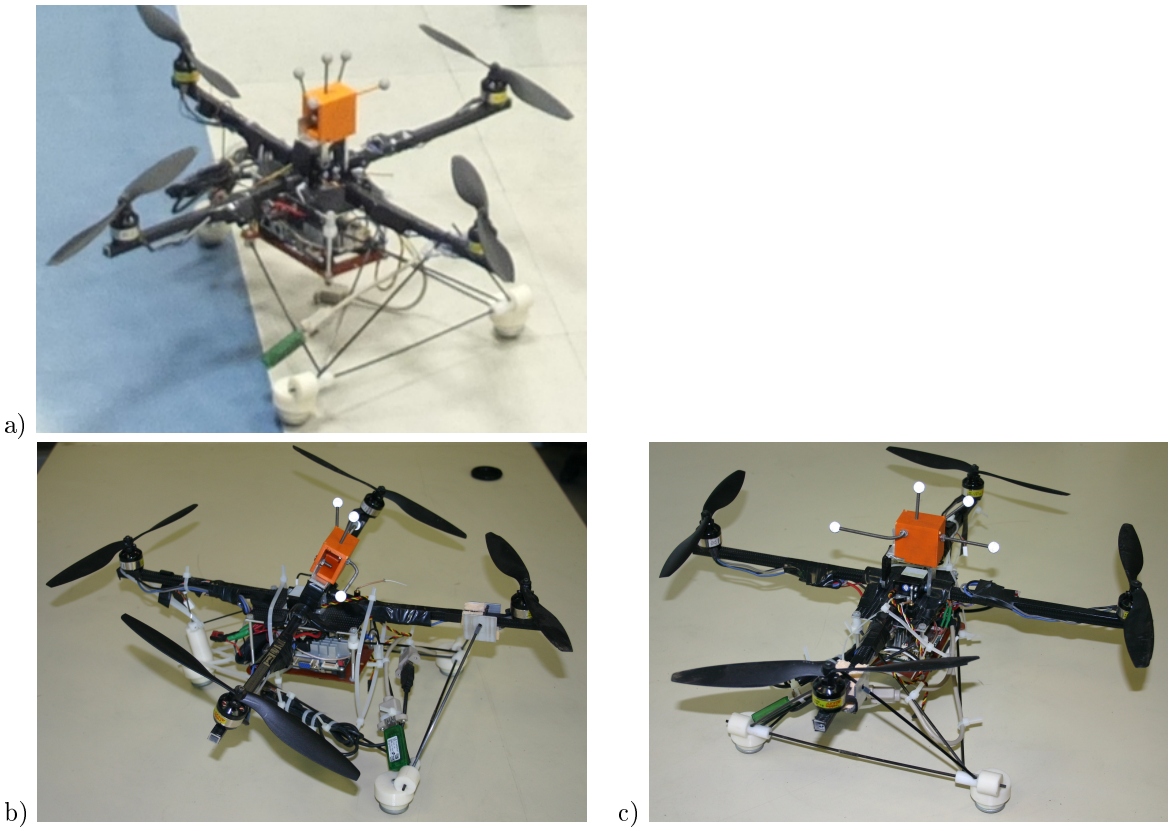

FIGURE 5.11 – Photos de la seconde version du drone hybride.

marqueurs sur le drone est illustré figure 5.11 ; ce placement spécifique présente l'avantage de fournir tout l'état à l'exception des dérivées. Il est important d'éloigner les marqueurs les uns des autres et de les disposer de manière dissymétrique. En effet, lorsque la constellation traquée est inclinée, des zones occultées peuvent apparaitre et réduire la précision du système. Il n'est pas aisé de prédire ces configurations particulières, mais les risques peuvent être réduits avec un plus grand nombre de caméras. En complément, il est nécessaire de bien initialiser l'orientation de la constellation dans l'axe du repère absolu défini avec la pièce d'étalonnage (figure 5.6) pour obtenir des informations de lacet cohérentes (l'axe X correspondant à un lacet nul). Pour s'assurer de cela, nous avons placé un gabarit sur la pièce d'étalonnage sur lequel s'encastre la constellation en question, afin que celle-ci soit bien orientée lors de l'initialisation avant d'être replacée sur le drone.

5.1.4 Programme de contrôle

Le programme de contrôle distant est un des points-clés du processus expérimental. Son architecture est décrite dans cette partie.

5.1.4.1 Récupération des données du logiciel Motive

La première partie du programme est consacrée à la récupération des données fournies par le logiciel Motive du système de Motion Capture. Ce dernier offre la possibilité d'envoyer les données de position 3D et d'orientation (quaternions) des constellations traquées, en créant un serveur VRPN (Virtual Reality Peripheral Network). Un client VRPN local (le logiciel MOTIVE est exécuté sur le même ordinateur) est donc implémenté dans la première partie du programme pour récupérer les informations du suivi à une fréquence de 250Hz.

5.1.4.2 Transformation des quaternions

Rappelons que la convention des angles d'Euler utilisée dans cette thèse est X-Y-Z [Wikipédia 2014a], ce qui implique l'équation suivante :

$$[u]_B = R_{zyx}(\psi, \theta, \phi)[u]_I \tag{5.1}$$

avec $R_{zyx}(\psi, \theta, \phi) = R_X(\phi)R_Y(\theta)R_Z(\psi)$, B désignant le repère du corps défini par les angles d'Euler, I le repère inertiel et R les matrices de rotations définies comme suit :

$$R_Z(\psi) = \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{pmatrix} \; R_X(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{pmatrix}$$

Afin de convertir les quaternions renvoyés par le système de Motion Capture en angles d'Euler selon les conventions employées ici, une correspondance des matrices de rotation est faite :

$$R_{zyx}(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} C_\psi C_\phi & -S_\psi C_\theta & S_\theta \\ C_\phi S_\psi + C_\psi S_\theta S_\phi & C_\psi C_\phi - S_\phi S_\theta S_\psi & -S_\phi C_\theta \\ S_\psi S_\phi - C_\psi C_\phi S_\theta & C_\phi S_\psi S_\theta + C_\psi S_\phi & C_\theta C_\phi \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, pour un quaternion de la forme $q = q_0 + q_1 X + q_2 Y + q_3 Z$, la matrice de rotation est la suivante :

$$R_q(q_0, q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{pmatrix}$$

Les formules de conversion sont dérivées de la correspondance terme à terme entre ces deux dernières matrices, pour finalement obtenir :

$$\begin{cases} \theta & = & arcsin(2(q_0 q_2 + q_1 q_3)) \\ \phi & = & -arctan(\frac{2(q_2 q_3 - q_0 q_1)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)}) \\ \psi & = & -arctan(\frac{2(q_1 q_2 - q_0 q_3)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)}) \end{cases}$$

Les utilisateurs du logiciel MOTIVE du système de Motion Capture Optitrack doivent cependant être vigilants quant à la définition des repères, des angles d'Euler et des quaternions affichés dans le logiciel. Par exemple, dans notre cas d'étude, il a été nécessaire d'inverser les élements q_2 et q_3 du quaternion q ainsi que les axes des repères pour aboutir aux bonnes valeurs numériques des angles.

5.1.4.3 Dérivations des données

Le système de Motion Capture ne fournit que la position 3D (x, y, z) et l'orientation en quaternions du drone. Pour effectuer un contrôle en position de la plateforme, il est nécessaire d'avoir connaissance des dérivées des états du système. Une partie du programme de contrôle distant est donc dédiée à la dérivation des signaux de position (x, y) et des angles d'Euler (lacet, tangage) jusqu'à l'ordre deux. Une simple différentiation est faite avec un pas d'échantillonnage de 4ms. Le résultat est très bruité et un filtrage est nécessaire. Le bruit provient entre autres des variations temporelles lors de la récupération des données qui varient légèrement autour des 4ms. Un simple filtre passe-bas est alors utilisé avec une fréquence de coupure de 2Hz. Ces processus impliquent évidemment des retards de plusieurs pas d'échantillonnage ; ils sont cependant négligeagles en regard de la dynamique du drone (voir la section 5.2).

5.1.4.4 Algorithme de Contrôle

Les algorithmes de contrôle par platitude sont implémentés dans ce programme distant. La génération de trajectoires y est également intégrée. L'avantage évident de ce programme déporté est la facilité de modification du code. Le filtrage, la génération de trajectoire ou encore le réglage des gains des contrôleurs sont ainsi modifiables aisément.

5.1.4.5 Communication avec le drone

Finalement, après avoir calculé les bonnes commandes, le programme transmet ces données au PC embarqué du drone via des modules ZigBee toutes les 30ms. Il n'a pas été possible d'augmenter cette fréquence de 33Hz sans perdre la fiabilité des données, probablement à cause de limitations Hardware des modules ZigBee. Néanmoins, la dynamique du système étant nettement plus lente, cette configuration suffit. L'envoi sans fil des informations engendre une latence d'environ 30ms, à laquelle s'ajoute 30ms de plus entre la réception des données par le PC embarqué jusqu'à l'exécution par les actionneurs.

5.2 Identification

5.2.1 Nouveau modèle du drone

Le modèle dynamique et la théorie développés jusqu'alors s'appuient exclusivement sur la première version du drone hybride (voir le chapitre 3 et la partie 5.1.3). Les expérimentations, quant à elles, mettent en jeu la seconde version mécanique du drone. Les différences entre ces deux versions ne remettent pas en cause la théorie mise en place, mais les commandes des actionneurs varient légèrement. Nous présentons dans cette section le nouveau modèle dynamique en mettant en avant les différences avec celui associé à la première version du drone. L'ancien modèle est rappelé ici :

$$\Sigma_{version1}\begin{cases} \ddot{x} &= C_\psi S_\theta u_1 \\ \ddot{y} &= S_\psi S_\theta u_1 \\ \ddot{\psi} &= \frac{\sin(\theta)}{C(\theta)+J_1}u_2 + \frac{\cos(\theta)}{C(\theta)+J_1}u_3 + \dot{\psi}\dot{\theta}\frac{\sin(2\theta)(J_{2''}-I_{2''})}{C(\theta)+J_1} \\ \ddot{\theta} &= u_4 - \frac{B(\theta)}{I_{2''}}\dot{\psi}^2 \end{cases} \tag{5.2}$$

avec

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \cos(\theta)\sin(\theta)(J_{2''} - I_{2''}) \\ C(\theta) &= \tfrac{1}{2}\left((I_{2''} + J_{2''}) + \cos(2\theta)(J_{2''} - I_{2''})\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{a}{M}\sum_{i=1}^{4}\omega_i^2 \\ u_2 &= \frac{al}{\sqrt{2}}(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ u_3 &= -b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \\ u_4 &= \frac{al}{\sqrt{2}I_{2''}}(\omega_3^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) + \frac{\Gamma_{servo}}{I_{2''}} \end{cases} \tag{5.3}$$

Les notations utilisées ici sont tirées du chapitre 3. La modification mécanique de la deuxième version amène une simplification importante puisque l'inclinaison des deux hélices (au lieu de quatre pour la version antérieure) ne fait tourner que deux bras de fixation à la place du plateau entier (figure 5.12 et 5.13). Le calcul des inerties s'en trouve simplifié, et il est raisonnable d'admettre que les inerties sur les axes X et Z sont identiques pour la version 2. En effet, la matrice d'inertie est différente entre les deux conceptions :

$$J_{G^{S_{2''}}version1} = \begin{pmatrix} I_{2''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2''} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2''} \end{pmatrix}_{R_2} \quad J_{G^{S_{2''}}version2} = \begin{pmatrix} L_{2''} & 0 & 0 \\ 0 & K_{2''} & 0 \\ 0 & 0 & L_{2''} \end{pmatrix}_{R_2}$$

En reprenant les calculs effectués pour la première version qui restent valides pour ce nouveau modèle, il apparait $B(\theta) = 0$ et $C(\theta) = L_{2''}$. Le modèle dynamique de la version 2 est alors écrit :

$$\Sigma_{version2}\begin{cases} \ddot{x} &= C_\psi S_\theta \frac{a}{M}u_1 \\ \ddot{y} &= S_\psi S_\theta \frac{a}{M}u_1 \\ \ddot{\psi} &= \frac{1}{J}(alS_\theta u_2 + bu_3 - C_\theta bu_1) \\ \ddot{\theta} &= u_4 \end{cases} \tag{5.4}$$

avec $J = J_1 + L_{2''}$ et

$$\begin{cases} u_1 &= \omega_2^2 + \omega_3^2 \\ u_2 &= \omega_2^2 - \omega_3^2 \\ u_3 &= \omega_1^2 + \omega_4^2 \\ u_4 &= \frac{\Gamma_{servo}}{K_{2''}} \end{cases} \tag{5.5}$$

En effet, seules les hélices 2 et 3 sont inclinables et permettent le déplacement du drone par l'application d'une poussée aérodynamique de norme $F = aS_\theta u_1$. En revanche, la dynamique en lacet est influencée par plusieurs éléments. Premièrement, la différence entre les forces aérodynamiques projetées dans le plan (c'est à dire lorsque $\theta \neq 0$) des hélices 2 et 3 a une action forte sur $\ddot{\psi}$ grâce au

bras de levier de longueur l : c'est le terme $alS_\theta u_2$. Par ailleurs, le mouvement des hélices crée en plus des forces, des moments aérodynamiques dépendant du sens de rotation des pales. La projection dans le plan horizontal des moments engendrés par les hélices 2 et 3 s'expriment alors comme ceci : $M_{23} = -C_\theta b u_1$. Ceux générés par les deux autres sont quant à eux de signe opposé : $M_{14} = bu_3$. Il est à noter que la dynamique en lacet reste commandable, même pour $\theta = 0$.

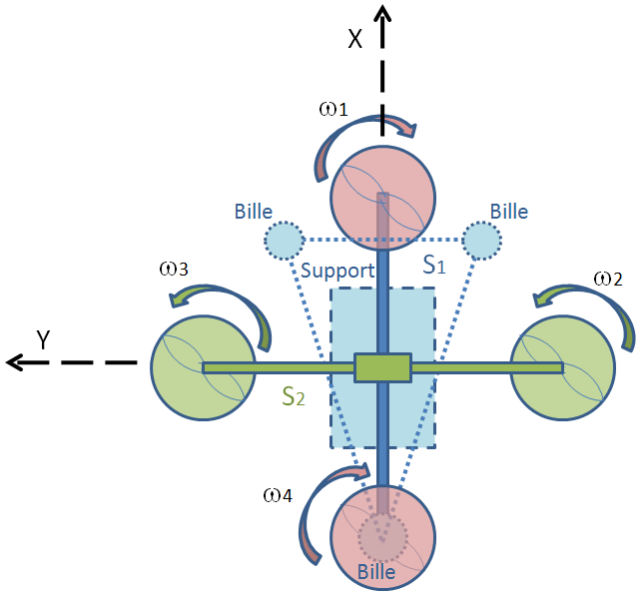

FIGURE 5.12 – Schéma de la nouvelle version du drone vue de haut.

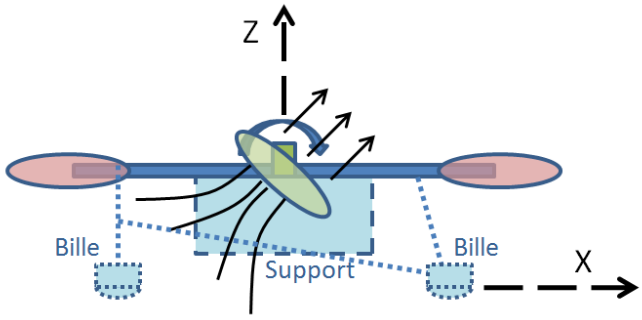

FIGURE 5.13 – Schéma de la nouvelle version du drone vue de profil.

5.2.2 Forces et moments aérodynamiques

Les forces et moments aérodynamiques en jeu dans ce système sont exclusivement ceux générés par les hélices. Rappelons leurs expressions simplifiées prises en compte dans le modèle dynamique : $\vec{F_i} = a\omega_i^2\vec{z_i}$ et $\vec{M_i} = \epsilon_i b\omega_i^2\vec{z_i}$ avec $\epsilon_i = \{-1; +1\}$ suivant le sens de rotation des pales de l'hélice i (chapitre 3). D'un point de vue plus pratique, on considère dans cette étude que la dynamique des moteurs est bien plus rapide que celle du drone, de sorte que l'on peut la considérer instantanée, c'est-à-dire que les variables de commande des moteurs sont proportionnelles aux vitesses de rotation des pales. En notant c_i la variable de commande du moteur i, nous obtenons : $\vec{F_i} = K_{F_{aero}}c_i^2\vec{z_i}$ et $\vec{M_i} = \epsilon_i K_{M_{aero}}c_i^2\vec{z_i}$. Nous proposons de vérifier expérimentalement ces expressions et d'identifier les valeurs des gains $K_{F_{aero}}$ et $K_{M_{aero}}$. Pour ce faire, nous avons mis en place deux expériences simples dont les schémas de principe sont illustrés figure 5.14 et 5.17.

5.2.2.1 Protocole expérimental pour l'identification des forces

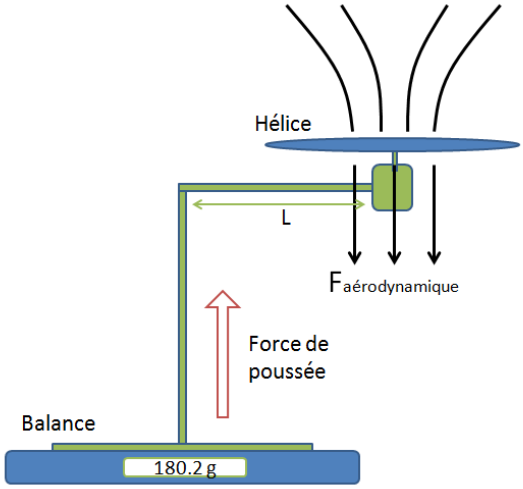

FIGURE 5.14 – Schéma de principe de l'identification de la poussée aérodynamique.

La première expérience cherche à visualiser la courbe de la force aerodynamique générée par les hélices en fonction des variables de commande c_i (variables sans dimension). Le principe est simple : la balance mesure (via une multiplication par la gravité $g = 9.21m/s^2$) la force résulante apparente entre le poids du support de masse m_0, soutenant le moteur, et la force aérodynamique de sens opposé F_{aero}. Pour chaque valeur $c_i \in [0; 250]$, une mesure de la force aérodynamique est ainsi faite : $F_{aero} = (m_0 - m_{apparent})g$. Il est nécessaire de déporter le moteur par rapport à l'axe de la balance pour que le flux d'air propulsé ne perturbe pas les mesures. Pour mettre en évidence ce phénomène, nous avons effectué un premier test ("test 1" de la figure 5.15) avec le moteur au dessus de la balance ($L = 0cm$). Le moteur est en revanche déporté ($L = 15cm$) pour les deux autres tests (2 et 3). Le graphique de la figure 5.15 nous montre une mesure perturbée et atténuée pour le test 1 qui est due à une force de pression supplémentaire du flux d'air sur la balance. Seuls les tests 2 et 3 sont alors exploitables. La deuxième chose que montre ce graphique est la répétabilité de l'expérience, puisque ces deux derniers tests donnent des résultats relativement similaires. Comme nous pouvions nous y attendre, le polynome de degré deux est une très bonne approximation des données : $F_i = ac_i^2 + bc_i$ avec $a = 0.0001$ et $b = 0.0148$ (figure 5.16). Cette mise en équation n'est valable que dans la plage de fonctionnement qui nous intéresse : $c_i \in [0; 120]$. Une saturation apparaît pour les valeurs $c_i > 120$: les forces aérodynamiques ne varient alors que linéairement

en fonction des contrôles (figure 5.15). La fonction de correspondance $F_i = ac_i^2 + bc_i$ est bijective puisque $a, b, F_i, c_i > 0$; l'opération inverse s'exprime donc ainsi : $c_i = \frac{-b+\sqrt{b^2+4aF_i}}{2a}$.

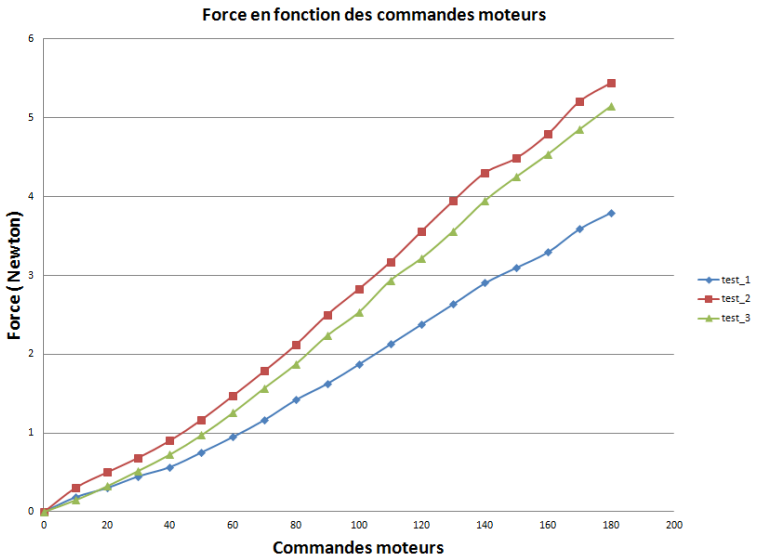

FIGURE 5.15 – Courbe de la force aérodynamique en fonction des variables de commande moteur : test 1 avec L = 0cm, test 2 et 3 avec L = 15cm.

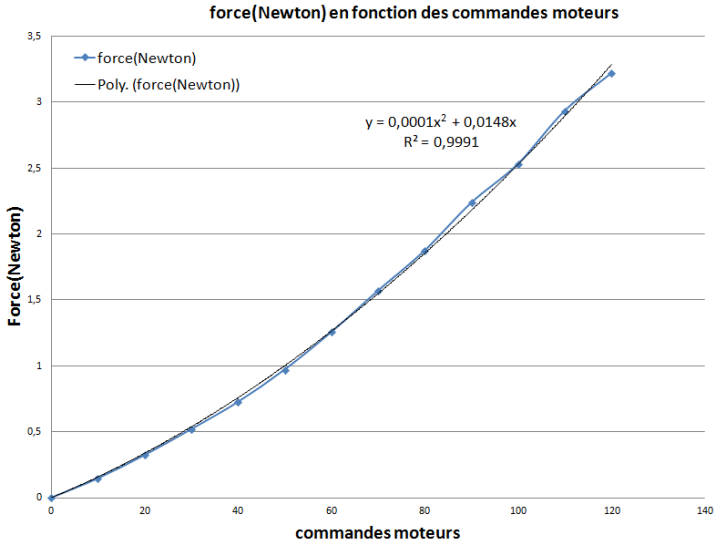

FIGURE 5.16 – Force aérodynamique en fonction des commandes moteur et la courbe de tendance de degré deux correspondante.

5.2.2.2 Protocole expérimental pour l'identification des moments

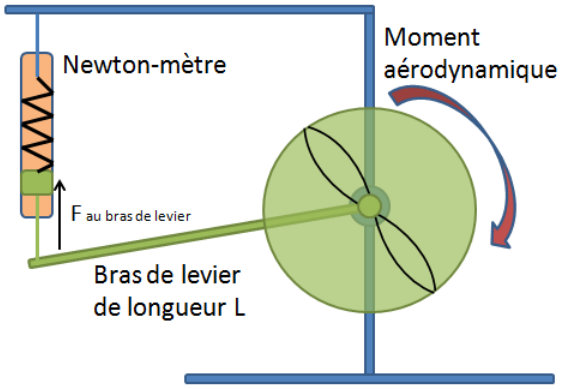

FIGURE 5.17 – Schéma de principe de l'identification du moment aérodynamique.

Le moment aérodynamique généré par les hélices peut être mesuré grâce au banc expérimental illustré à la figure 5.17. Nous avons effectué plusieurs tests pour vérifier la répétabilité de l'expérience (figure 5.18). Les forces mesurées F_L en Newtons au bras de levier $L = 0.221m$ sont proportionnelles au moment aérodynamique M_{aero} exprimé en N.m de la manière suivante : $M_{aero} = F_L L$. De la même manière que pour les forces de poussée, nous avons cherché à mettre en équations la fonction qui relie ces moments aux variables de commande moteur. Nous avons fait correspondre deux polynômes de degrés respectifs un et deux aux données (resp. figure 5.19 et 5.20). Comme précedemment, il n'est pas surprenant de voir le polynôme de degré deux correspondre plus fidèlement aux observations expérimentales. Rappelons que le modèle standard utilisé dans la littérature est $M = k\omega_i^2$ avec k une constante. Dans notre cas, les erreurs de modélisation restant faibles ; nous allons nous contenter d'un modèle linéaire simple : $F_L = 0.0022c$ (figure 5.19) ou encore $M_{aero_i} = dc_i$ (en N.m) avec $d = 0.00049$.

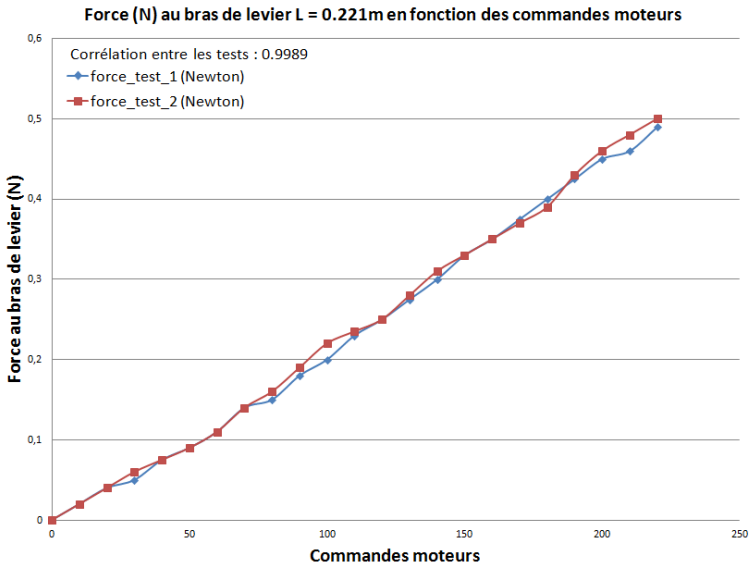

FIGURE 5.18 – Courbe de la force au bras de levier $L = 0.221m$ en fonction des variables de commande moteur. Les deux tests présentés ont été effectués dans les mêmes conditions.

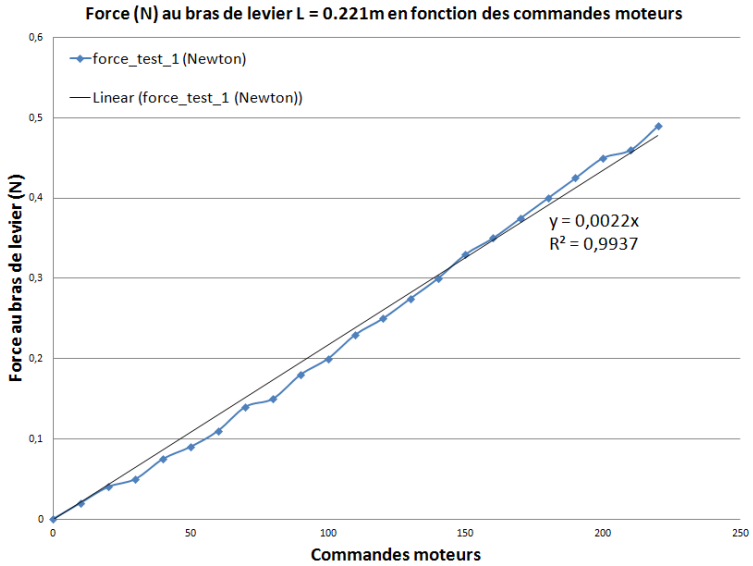

FIGURE 5.19 – Courbe de la force au bras de levier $L = 0.221m$ en fonction des variables de commande moteur et la courbe de tendance de degré un correspondante.

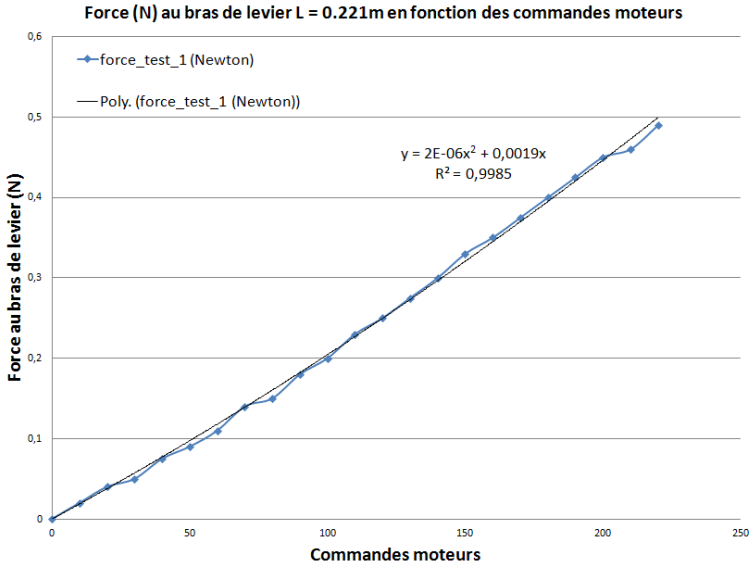

FIGURE 5.20 – Courbe de la force au bras de levier $L = 0.221m$ en fonction des variables de commande moteur et la courbe de tendance de degré deux correspondante.

5.2.3 Identification paramétrique de la dynamique du drone terrestre

En reprenant les équations dynamiques (5.4) et (5.5) du modèle de la version 2 du drone et les expressions des forces et des moments aérodynamiques en fonction des commandes moteur $F_i = ac_i^2 + bc_i$ et $M_i = dc_i$ avec $a = 0.0001, b = 0.0148$ et $d = 0.00049$, le système suivant est obtenu :

$$\Sigma_{version2} \begin{cases} \ddot{x} &= C_\psi S_\theta \frac{1}{M} u_1 \\ \ddot{y} &= S_\psi S_\theta \frac{1}{M} u_1 \\ \ddot{\psi} &= \frac{1}{J}(l S_\theta u_2 + u_3 - C_\theta u_4) \\ \ddot{\theta} &= u_5 \end{cases} \tag{5.6}$$

avec

$$\begin{cases} u_1 &= F_2 + F_3 = a(c_2^2 + c_3^2) + b(c_2 + c_3) \\ u_2 &= F_2 - F_3 = a(c_2^2 - c_3^2) + b(c_2 - c_3) \\ u_3 &= M_1 + M_4 = d(c_1 + c_4) \\ u_4 &= M_2 + M_3 = d(c_2 + c_3) \\ u_5 &= \frac{\Gamma_{servo}}{K_{2''}} \end{cases} \tag{5.7}$$

Ce chapitre a pour but d'évaluer l'exactitude du modèle développé jusqu'alors. Nous verrons que la simple réponse du système à des échelons dans les commandes va nous réveler l'absence de terme de frottement dans le système d'équations (5.6).

5.2.3.1 Réponse du système à un échelon

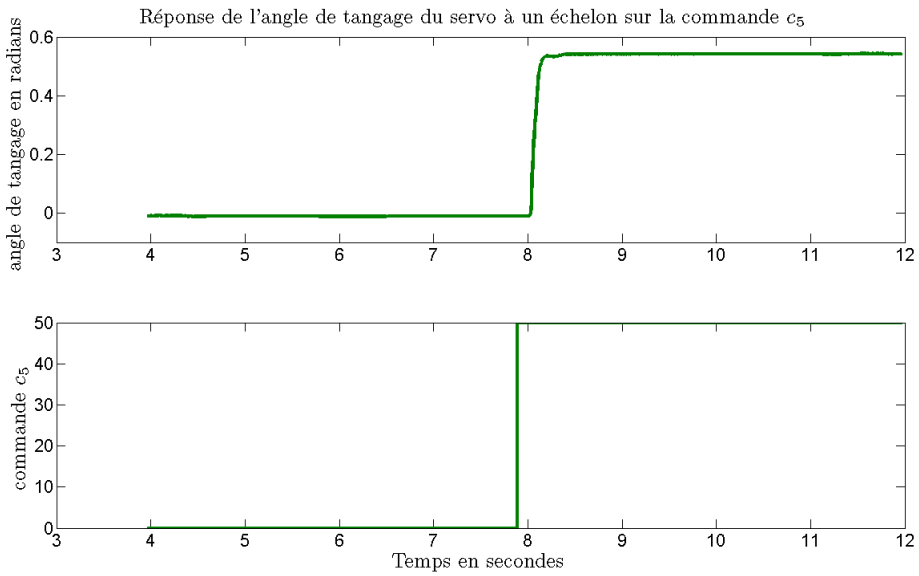

FIGURE 5.21 – Courbe de l'angle de tangage du servomoteur en réponse à un échelon dans la commande c_5.

dynamique en tangage : L'orientation des hélices 2 et 3 est possible grâce au servomoteur actionné numériquement avec la variable de commande c_5. Pour visualiser la dynamique du mouvement de tangage des propulseurs, nous avons enregistré la réponse du système (l'angle de tangage θ en radians) à une commande de type échelon (figure 5.21). L'identification de cette dynamique avec les modèles classiques du premier ou du second ordre a été possible grâce à la "toolbox" d'identification de MATLAB. Les paramètres de ces modèles ont été calculés de manière à correspondre au mieux aux données enregistrées. Les caractéristiques de ces modèles sont énumérées ci-dessous :

– modèle de premier ordre :

$$\frac{\theta}{c_5} = \frac{K_1}{1 + Tp_1 s} \tag{5.8}$$

ou encore en temporel

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{Tp_1}\theta + \frac{K_1}{Tp_1}c_5 \tag{5.9}$$

avec $K_1 = 0.0109$ et $Tp_1 = 0.21$.

– modèle du second ordre avec retard :

$$\frac{\theta}{c_5} = \frac{K_2}{(1 + Tp_{21}s)(1 + Tp_{22}s)} \exp(-Td_2 s) \tag{5.10}$$

ou sans considérer le retard

$$\ddot{\theta} = -\frac{Tp_{21} + Tp_{22}}{Tp_{21}Tp_{22}}\dot{\theta} - \frac{1}{Tp_{21}Tp_{22}}\theta + \frac{K_2}{Tp_{21}Tp_{22}}c_5 \tag{5.11}$$

avec $K_2 = 0.0108$, $Tp_{21} = 0.035$ $Tp_{22} = 0.034$ et $Td_2 = 0.12$.

Le modèle du second ordre avec retard correspond de manière relativement fidèle aux mesures comme le montre la figure 5.22. Le retard identifié de 120 ms est dû aux diverses étapes de communication entre le drone et le dispositif de capture de mouvements. Nous allons voir par la suite que les constantes de temps Tp_1, Tp_{21} et Tp_{22} des différents modèles présentés sont suffisamment petites par rapport à celles de la dynamique longitudinale et de rotation pour que l'on puisse considérer l'angle de tangage θ proportionnel à la commande c_5 :

$$\theta = Kc_5 \tag{5.12}$$

avec K = 0.0109.

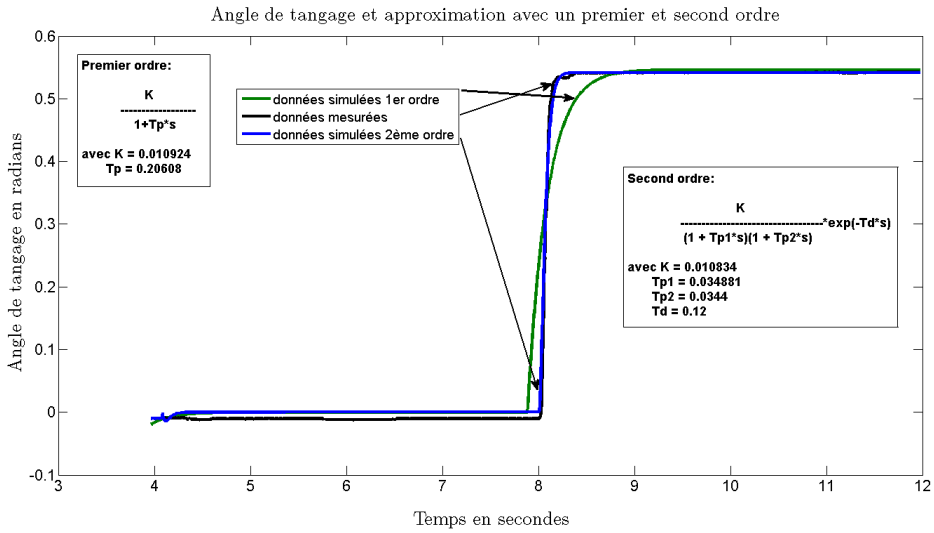

FIGURE 5.22 – Courbe de l'angle de tangage du servomoteur en réponse à un échelon dans la commande c_5 et les modèles du premier et du second ordre correspondants.

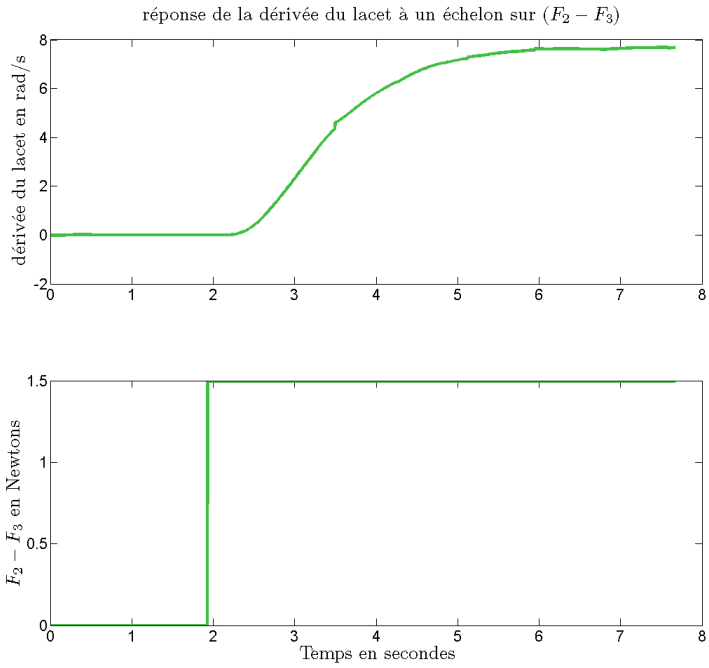

FIGURE 5.23 – Courbe de la vitesse de lacet en réponse à un échelon dans la commande $(F_2 - F_3)$.

dynamique en lacet : De la même manière, nous avons enregistré les données de vitesse de lacet du drone soumis à une commande en échelon des variables $F_2 - F_3$. Dans l'expérience présentée ici, l'angle de tangage est maintenu constant à 0.8 radians et les valeurs $F_2 + F_3$ et $F_2 - F_3$ passent respectivement de 0 Newton à $1.91N$ et $1.49N$ à $t = 1.9s$. De plus, afin d'éliminer les effets des moments aérodynamiques sur la dynamique en rotation, nous avons imposé $M_1 + M_4 = C_\theta(M_2 + M_3)$ avec les commandes c_1 et c_4. L'équation de rotation du système (5.6) devient alors :

$$\ddot{\psi} = \frac{l}{J} S_\theta (F_2 - F_3) \tag{5.13}$$

La figure 5.23 montre clairement l'effet du frottement cinétique puisque la vitesse en lacet atteint une asymptote. Les données ont également été comparées aux modèles de premier et second ordre avec retard (figures 5.24 et 5.25) :

- modèle de premier ordre :

$$\frac{\dot{\psi}}{(F_2 - F_3)} = \frac{K_1}{1 + Tp_1 s} \tag{5.14}$$

  ou encore en temporel

$$\ddot{\psi} = -\frac{1}{Tp_1}\dot{\psi} + \frac{K_1}{Tp_1}(F_2 - F_3) \tag{5.15}$$

  avec $K_1 = 5.26$ et $Tp_1 = 1.76$.
- modèle du second ordre avec retard :

$$\frac{\dot{\psi}}{(F_2 - F_3)} = \frac{K_2}{(1 + Tp_{21}s)(1 + Tp_{22}s)} \exp(-Td_2 s) \tag{5.16}$$

  ou sans considérer le retard

$$\dddot{\psi} = -\frac{Tp_{21} + Tp_{22}}{Tp_{21}Tp_{22}}\ddot{\psi} - \frac{1}{Tp_{21}Tp_{22}}\dot{\psi} + \frac{K_2}{Tp_{21}Tp_{22}}(F_2 - F_3) \tag{5.17}$$

  avec $K_2 = 5.26$, $Tp_{21} = 0.75$ $Tp_{22} = 0.75$ et $Td_2 = 0.12$.

Pour ne pas voir apparaître d'ordre de dérivée trop élevé impliquant des signaux de plus en plus bruités, nous nous contentons ici de la modélisation du premier ordre. En effet, celle-ci montre clairement l'apparition du frottement statique $-\frac{1}{T_1}\dot{\psi}$ dans l'équation temporelle (5.15). Ce terme non négligeable est à ajouter dans l'équation (5.13).

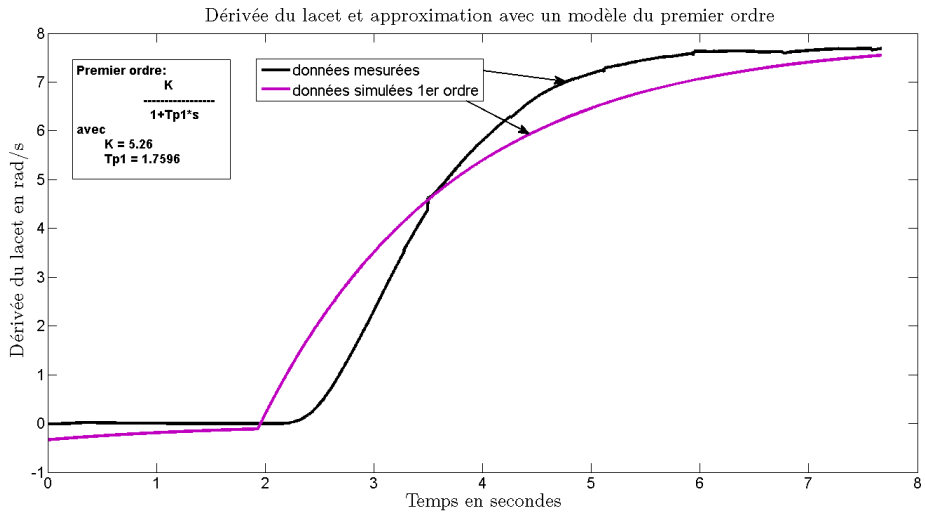

FIGURE 5.24 – Courbe de la dérivée en lacet en réponse à un échelon dans la commande $(F_2 - F_3)$ et le modèle du premier ordre correspondants.

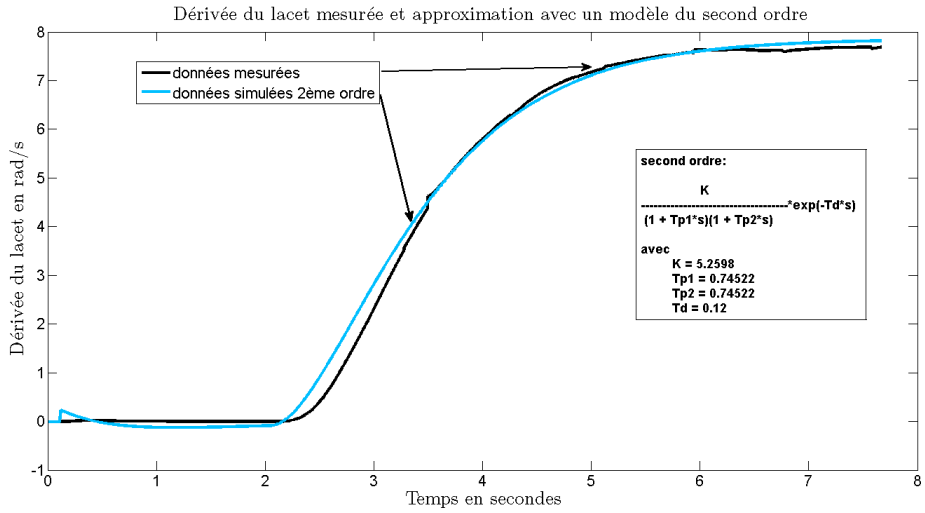

FIGURE 5.25 – Courbe de la dérivée en lacet en réponse à un échelon dans la commande $(F_2 - F_3)$ et le modèle du second ordre correspondant.

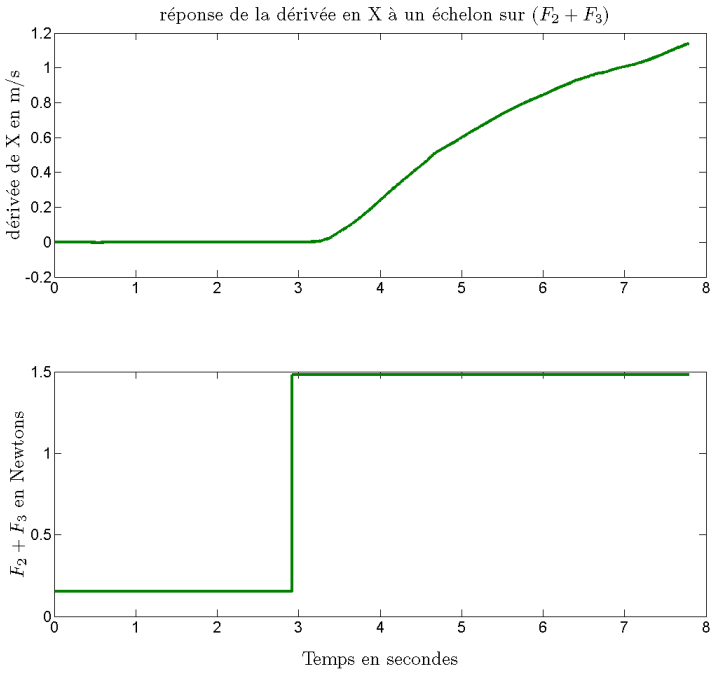

FIGURE 5.26 – Courbe de la vitesse de X en réponse à un échelon dans la commande $(F_2 + F_3)$.

dynamique longitudinale : Ces expériences ont été poursuivies pour les dynamiques longitudinales. Cette fois-ci, la réponse de la dérivée en X est enregistrée suite à l'application de la commande en échelon sur les variables $F_2 + F_3$. L'angle de tangage est toujours maintenu à 0.8 radians pendant l'enregistrement. En revanche, afin de maintenir le cap du drone sur l'axe X ($\psi = 0rad$), un contrôleur proportionnel est implémenté sur la dynamique en rotation ; il s'appuie sur l'identification de l'expérience précédente. Les forces $F_2 + F_3$ agissent alors uniquement selon l'axe X. Les modèles du premier et second ordre sont identifiés et sont présentés dans les figures 5.27 et 5.28 avec les paramètres suivants :

– modèle du premier ordre :

$$\frac{\dot{X}}{(F_2 + F_3)} = \frac{K_1}{1 + Tp_1 s} \tag{5.18}$$

avec $K_1 = 3.27$ et $Tp_1 = 17.6$.

– modèle du second ordre avec retard :

$$\frac{\dot{X}}{(F_2 + F_3)} = \frac{K_2}{(1 + Tp_{21}s)(1 + Tp_{22}s)} \exp(-Td_2 s) \tag{5.19}$$

avec $K_2 = 0.83$, $Tp_{21} = 1.22$ $Tp_{22} = 1.28$ et $Td_2 = 0.12$.

Pour les mêmes raisons déjà évoquées, nous nous satisfaisons de la modélisation du premier ordre même si elle ne correpond pas aussi bien aux données. Les dérivées en X enregistrées montrent encore la présence du frottement cinétique : $-\frac{1}{Tp_1}\dot{X}$. En revanche, les données ne permettent pas d'avoir une connaissance précise de paramètres tels que le gain K_1 et la constante de temps Tp_1. En effet, la durée de l'expérience n'est pas assez longue pour visualiser l'asymptote. L'espace d'expérimentation ne permet pas d'étendre cette durée. Il est donc nécessaire de changer le protocole expérimental et la méthode d'identification. Finalement, nous modifions le système d'équations (5.6) pour intégrer

la modélisation du frottement cinétique observé lors des expérimentations. Le système devient :

$$\Sigma_{version2}\begin{cases} \ddot{x} &= -\eta\dot{x} + C_\psi S_\theta \frac{1}{M} u_1 \\ \ddot{y} &= -\eta\dot{y} + S_\psi S_\theta \frac{1}{M} u_1 \\ \ddot{\psi} &= -\eta_3\dot{\psi} + \frac{1}{J}(lS_\theta u_2 + u_3 - C_\theta u_4) \\ \theta &= Kc_5 \end{cases} \tag{5.20}$$

avec

$$\begin{cases} u_1 &= F_2 + F_3 \\ u_2 &= F_2 - F_3 \\ u_3 &= M_1 + M_4 \\ u_4 &= M_2 + M_3 \end{cases} \tag{5.21}$$

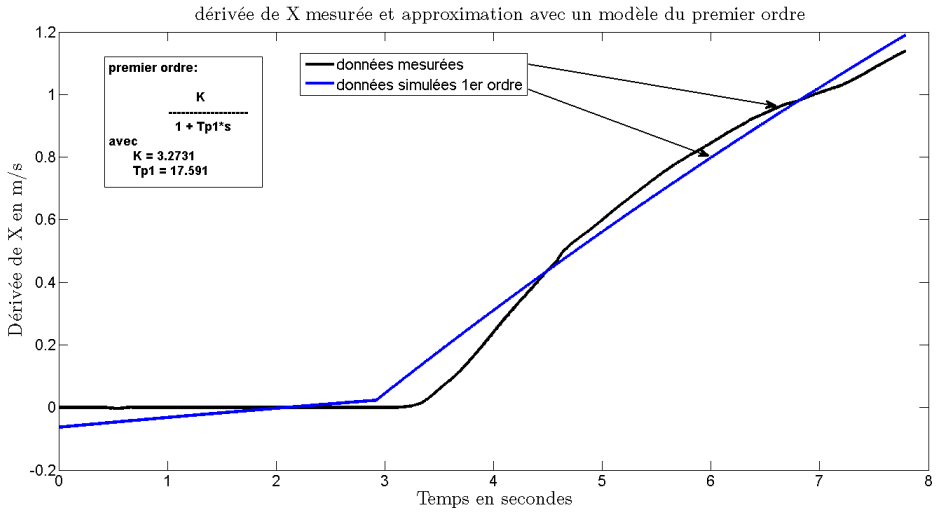

FIGURE 5.27 – Courbe de la dérivée en X en réponse à un échelon dans la commande $(F_2 + F_3)$ et le modèle du premier ordre correspondant.

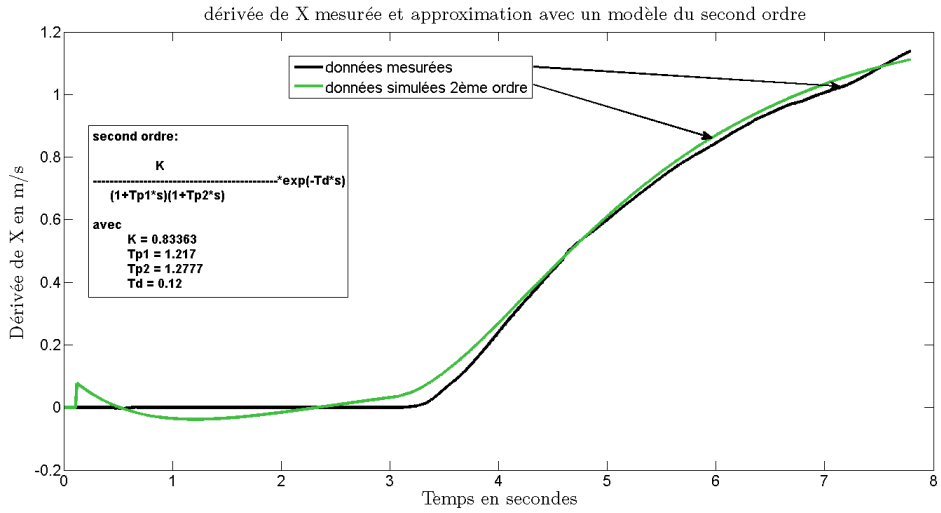

FIGURE 5.28 – Courbe de la dérivée en X en réponse à un échelon dans la commande $(F_2 + F_3)$ et le modèle du second ordre correspondant.

5.2.3.2 Identification paramétrique de type “boîte grise”

L'identification paramétrique de type “boîte grise” permet d'évaluer les paramètres d'un modèle analytique pour correspondre aux données réelles. Le modèle pris en compte est le suivant :

$$\Sigma_{version2} \begin{cases} \ddot{x} &= -\eta\dot{x} + C_\psi S_\theta P_{MK} u_1 \\ \ddot{y} &= -\eta\dot{y} + S_\psi S_\theta P_{MK} u_1 \\ \ddot{\psi} &= -\eta_3\dot{\psi} + P_{LJK} S_\theta u_2 + P_{JK} u_3 - P_{JK} C_\theta u_4 \\ \theta &= K c_5 \end{cases} \tag{5.22}$$

L'objectif est d'évaluer les paramètres suivants : $P_{MK}, P_{LJK}, P_{JK}, K, \eta_1$ et η_2. Comme jeux de données, nous avons utilisé les enregistrements des états du système soumis à des commandes excitées à certaines fréquences. Ces commandes peuvent être visualisées à la figure 5.29. La commande correspondant aux moments $M_1 + M_4$ (en N.m) est cependant imposée pour simplifier l'équation de la dynamique en lacet : $M_1 + M_4 = C_\theta(M_1 + M_3)$. Pour ces mêmes raisons, le paramètre P_{JK} du modèle analytique (5.22) ne peut pas être identifié. La trajectoire parcourue par le drone soumis aux commandes de la figure 5.29 est présentée à la figure 5.30. La “toolbox” d'identification de MATLAB permet alors d'estimer ces paramètres :

$$\begin{aligned} P_{MK} &= 0.72kg^{-1} \\ P_{LJK} &= 2.88kg^{-1}.m^{-1} \\ K &= 0.011rad^{-1} \\ \eta &= 0.815s^{-1} \\ \eta_3 &= 0.37s^{-1}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Ces résultats sont cohérents avec le modèle théorique (5.20). En effet, $P_{MK} = 0.72$ (en kg^{-1}) est équivalent à $\frac{1}{M} = 0.67$ avec $M = 1.5kg$. Prenons également le gain $K = 0.0109$ (en rad^{-1}), identifié précedemment dans la partie “réponse à un échelon” (5.12), ou encore $\eta_3 = 0.37$ équivalent à $1/T_p = 0.57$ de l'équation (5.15). Le paramètre P_{LJK} est égal à $\frac{l}{J} = 2.88kg^{-1}.m^{-1}$ d'après les équations dynamiques avec la longueur $l = 0.22m$ mesurée sur le drone, il est donc possible d'avoir une estimation de l'inertie de rotation $J = 0.0764kg.m^2$. Ainsi le paramètre $P_{JK} = \frac{1}{J}$ peut être approché par $P_{JK} = 13.09kg^{-1}.m^{-2}$. La mise en correspondance des données mesurées et des données simulées d'après le modèle paramétrique ci-dessus est visualisable sur les figures 5.31, 5.32 ou encore 5.33. Ce modèle a également été comparé à d'autres jeux de données. Les figures 5.34, 5.35, 5.36, 5.37 et 5.38 montrent les résultats de comparaison pour une seconde expérience de validation. Au vu des résultats, on peut conclure que le modèle en question est valide. Cependant, une réserve peut être émise puisque plusieurs facteurs tendent à changer fortement la dynamique, comme par exemple : le frottement statique, le frottement cinétique lors de changement de surface ou simplement au contact d'irrégularités au sol... Par ailleurs, ces expériences ont été effectuées pour un angle de tangage θ constant ; il est fort à parier que pour certaines inclinaisons des effets de sol apparaissent et perturbent ce modèle.

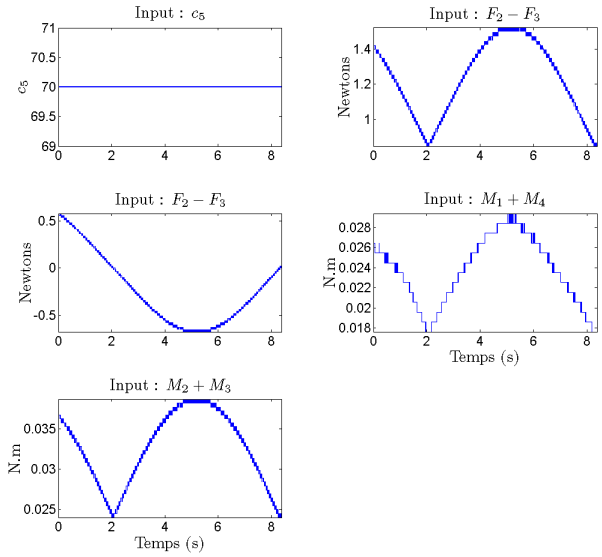

FIGURE 5.29 – Expérience 1 : commandes appliquées au sytème. **En haut à gauche** : commande c_5 en fonction du temps (en secondes) pour le contrôle du servomoteur. **En haut à droite** : F_2+F_3(en Newtons) en fonction du temps (en secondes). **Au milieu à gauche** : $F_2 - F_3$ (en newtons) dans le temps (en secondes), la pulsation du signal est $\omega = 0.5rad/s$. **Au milieu à droite** : $M_1 + M_4$ (en N.m) en fonction du temps (en secondes). **En bas à gauche** : $M_2 + M_3$ (en N.m) en fonction du temps (en secondes). **En bas à droite** : le lacet (en radians) en fonction du temps (en secondes) ; en revanche ce n'est pas une commande du système.

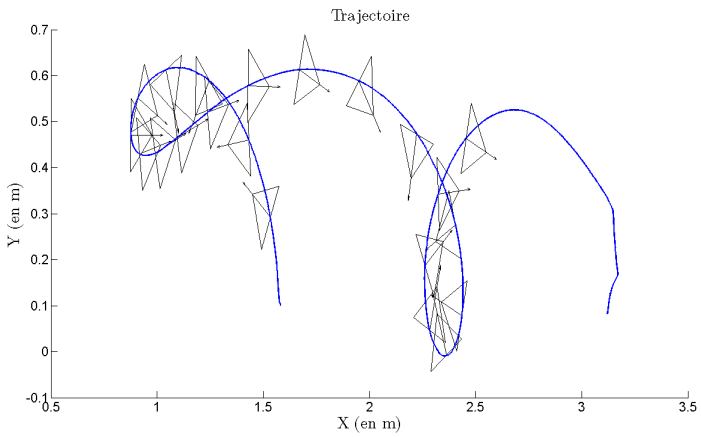

FIGURE 5.30 – Expérience 1 : trajectoire du drone. L'évolution de la position du drone dans le temps est visualisée avec la courbe bleue. Les triangles munis de flèches représentent les positions du drone ainsi que son orientation prise à différents instants régulièrement espacés. Les unités des axes sont exprimées en mètres.

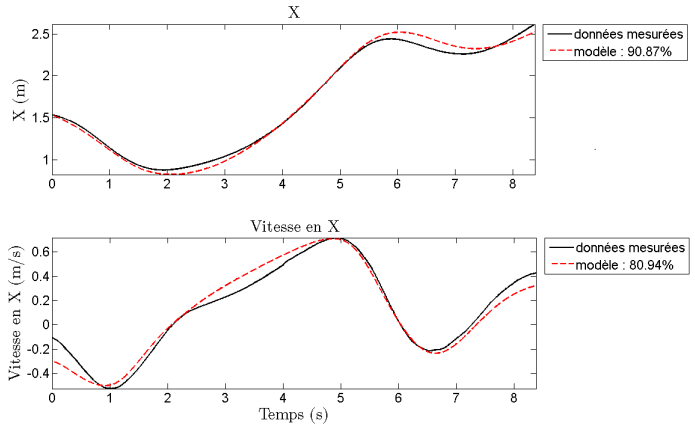

FIGURE 5.31 – Expérience 1 : évolution de X et sa dérivée en fonction du temps. **En traits pleins** : les données mesurées. **En traits discontinus** : données simulées.

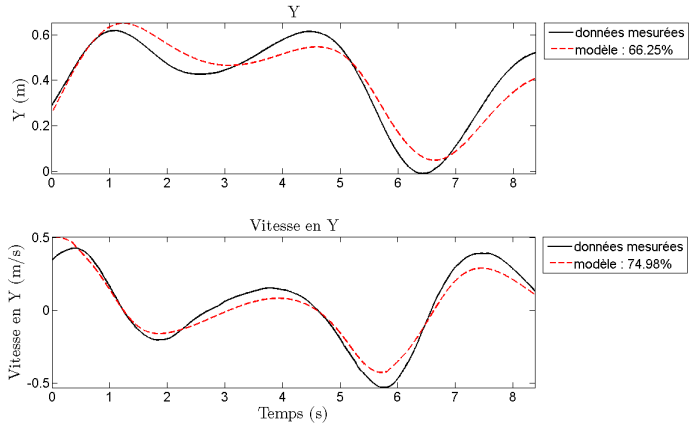

FIGURE 5.32 – Expérience 1 : évolution de Y et sa dérivée en fonction du temps. **En traits pleins** : les données mesurées. **En traits discontinus** : données simulées.

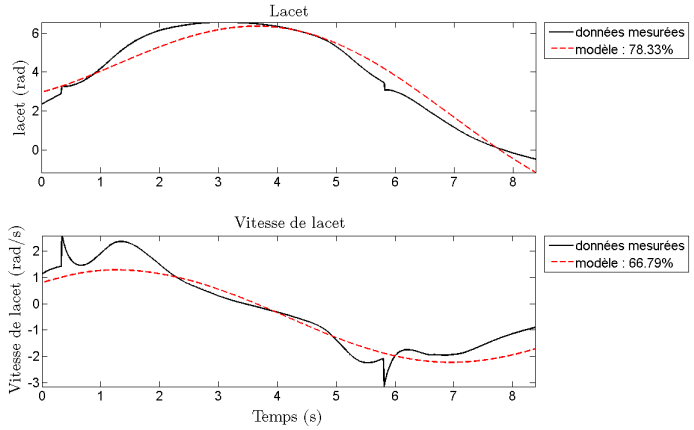

FIGURE 5.33 – Expérience 1 : évolution du lacet et sa dérivée en fonction du temps. **En traits pleins** : les données mesurées. **En traits discontinus** : données simulées.

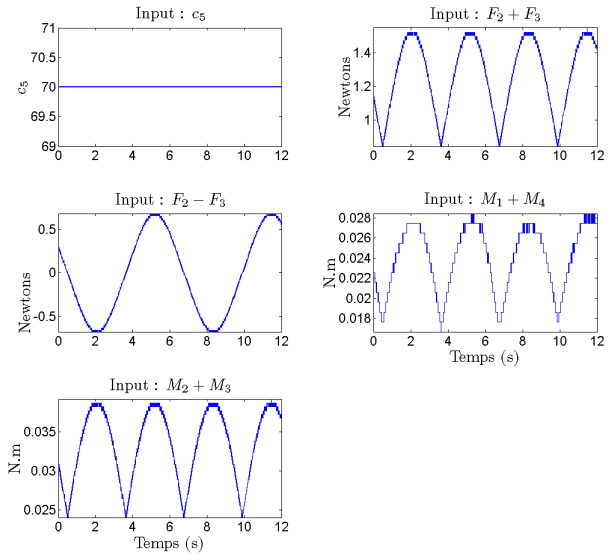

FIGURE 5.34 – Expérience 2 : commandes appliquées au sytème. **En haut à gauche** : commande c_5 en fonction du temps (en secondes) pour le contrôle du servomoteur. **En haut à droite** : F_2+F_3(en Newtons) en fonction du temps (en secondes). **Au milieu à gauche** : $F_2 - F_3$ (en newtons) dans le temps (en secondes), la pulsation du signal est $\omega = 1rad/s$. **Au milieu à droite** : $M_1 + M_4$ (en N.m) en fonction du temps (en secondes). **En bas à gauche** : $M_2 + M_3$ (en N.m) en fonction du temps (en secondes). **En bas à droite** : le lacet (en radians) en fonction du temps (en secondes) ; en revanche ce n'est pas une commande du système.

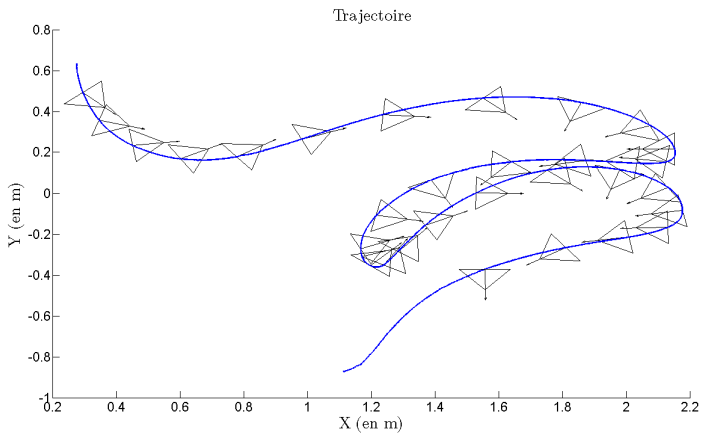

FIGURE 5.35 – Expérience 2 : trajectoire du drone. L'évolution de la position du drone dans le temps est visualisée avec la courbe bleue. Les triangles munis de flèches représentent les positions du drone ainsi que son orientation prise à différents instants régulièrement espacés. Les unités des axes sont exprimées en mètres.

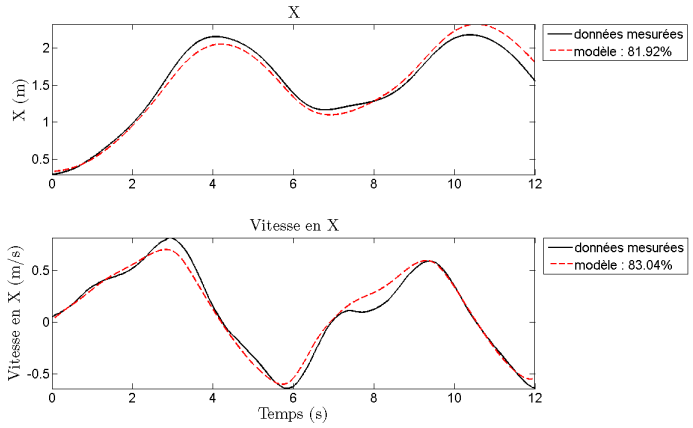

FIGURE 5.36 – Expérience 2 : évolution de X et sa dérivée en fonction du temps. **En traits pleins** : les données mesurées. **En traits discontinus** : données simulées.

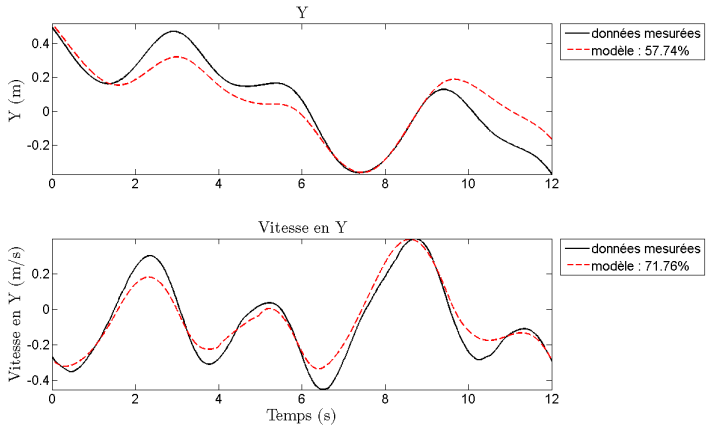

FIGURE 5.37 – Expérience 2 : évolution de Y et sa dérivée en fonction du temps. **En traits pleins** : les données mesurées. **En traits discontinus** : données simulées.

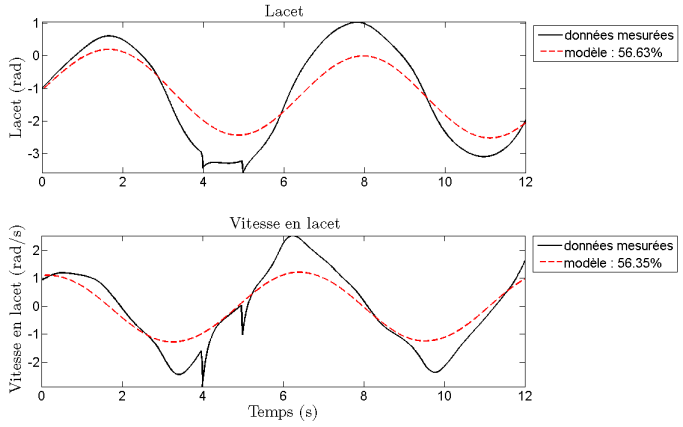

FIGURE 5.38 – Expérience 2 : évolution du lacet et sa dérivée en fonction du temps. **En traits pleins** : les données mesurées. **En traits discontinus** : données simulées.

5.2.4 Variabilité du modèle

Même si les résultats de l'identification de type "boîte grise" sont satisfaisant, le modèle paraît moins fiable pour la dynamique de rotation (figure 5.38). Cette partie cherche donc à caractériser les variabilités du modèle. Dans un premier temps, nous analysons l'évolution des gains P_{LJK} et des constantes de temps $\frac{1}{\eta_3}$ de la dynamique de lacet du système d'équations (5.22) pour différents points de fonctionnement $(F_2 - F_3, F_2 + F_3)$ et à angle de tangage $\theta = 0.8rad$ constant. En effet, pour une valeur de $F_2 - F_3$ peuvent correspondre plusieurs valeurs de $F_2 + F_3$. Contrairement à notre modélisation, nous verrons que ces paramètres sont également influencés par la commande $F_2 + F_3$. Il a également été mentionné l'importance de la rugosité du sol et des frottements statiques : la seconde partie expose ce phénomène qui invalide totalement le modèle pour des vitesses de déplacement faibles.

5.2.4.1 La dynamique de lacet

Si l'on réécrit l'équation (5.22) de la dynamique de rotation soumise aux entrées de commandes $M_1 + M_4 = C_\theta(M_1 + M_3)$ et $u_2 = F_2 - F_3$, nous obtenons :

$$\ddot{\psi} = -\eta_3\dot{\psi} + P_{LJK}S_\theta(F_2 - F_3) \tag{5.24}$$

Cette modélisation peut être vue comme un système du premier ordre

$$\frac{\dot{\psi}}{u_2} = \frac{K}{1 + T_{p1}s}$$

qui est équivalent à l'équation précédente (5.24) avec

$$\eta_3 = \frac{1}{T_{p1}} \text{ et } P_{LJK}S_\theta = \frac{K}{T_{p1}}.$$

Nous avons vu à la section 5.2.3.1 que cette modélisation reste grossière ; le modèle d'ordre deux présente une bien meilleure correspondance avec les données réelles. Néanmoins, elle reste suffisante et cohérente avec la théorie développée au chapitre 3. Pour voir l'évolution des paramètres η_3 et P_{LJK} pour différents points de fonctionnement $(F_2 - F_3, F_2 + F_3)$, nous avons associé à chaque enregistrement de $\dot{\psi}(t)$ du système soumis à des commandes en échelon $(F_2 - F_3, F_2 + F_3)$ un modèle du premier ordre au moyen de la boîte à outils d'identification de Matlab. L'ensemble des points de fonctionnement testé expérimentalement est représenté dans la figure 5.39. Ces points sont regroupés en quatre groupes caractéristiques distincts dits également "cluster" ; chaque "cluster" représente des points de fonctionnement proches sur l'axe $F_2 + F_3$. Les réponses temporelles du dernier cluster composé de dix points sont affichées à la figure 5.40. Pour la suite, nous noterons cluster i pour i allant de 1 à 4 de la manière suivante : le cluster 1 est composé d'un point (en bleu sur les figures), le cluster 2 (en rouge) de 4, le cluster 3 (en vert) est composé de 6 points et enfin le 4 (en noir) de 10. Les valeurs des gains K et des constantes de temps T_{p1} des modèles du premier ordre associées aux points de fonctionnement sont répertoriées dans le tableau 5.1 et présentées graphiquement par les figures 5.41, 5.42, 5.43 et 5.44.

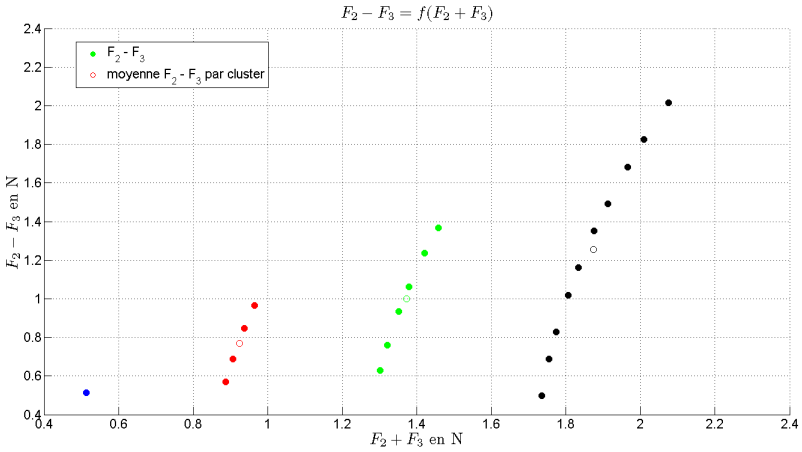

FIGURE 5.39 – Les différents points de fonctionnement $(F_2 - F_3, F_2 + F_3)$ testés et regroupés en 4 "clusters". Les cercles non pleins représentent les moyennes associées à chaque "cluster".

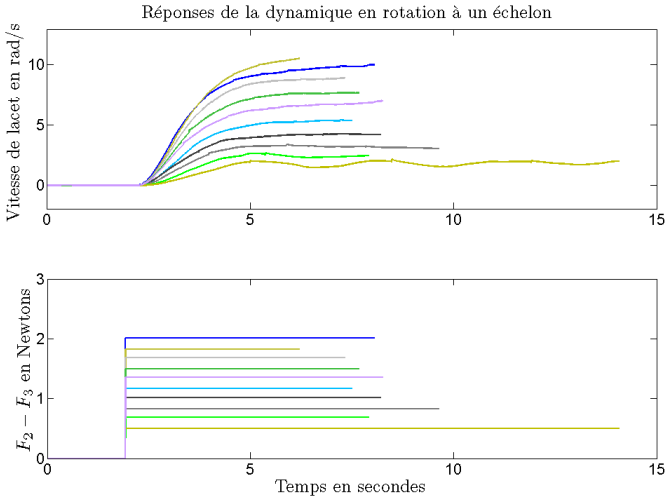

FIGURE 5.40 – Enregistrements de la réponse temporelle de $\dot{\psi}(t)$ du système soumis aux commandes en échelon $(F_2 - F_3)$. Les données correspondent au "cluster" 4 composé de 10 points.

$F_2 + F_3$ en N	$F_2 - F_3$ en N	K	T_{p1} en s
0.5133	0.5133	3.1912	2.3528
0.8873	0.5713	3.715	1.6395
0.9065	0.6895	4.268	2.0873
0.9377	0.8471	4.5995	2.3915
0.9653	0.9653	4.31	2.1211
1.3013	0.6293	3.36	1.4464
1.3205	0.7595	4.49	1.7638
1.3517	0.9331	4.5	2.0898
1.3793	1.0633	4.61	1.8103
1.4217	1.2369	4.58	1.6714
1.4577	1.3671	5.71	1.89
1.7353	0.4977	3.73	1.892
1.7553	0.6873	3.71	1.7646
1.7745	0.8295	3.95	1.597
1.8057	1.0191	4.24	1.6931
1.8333	1.1613	4.76	1.8335
1.8757	1.3509	5.05	1.7919
1.9117	1.4931	5.26	1.7596
1.9653	1.6827	5.39	1.7445
2.0097	1.8249	5.97	1.8887
2.0745	2.0145	4.89	1.6811

TABLE 5.1 – Caractérisation des gains et des constantes de temps des modèles du premier ordre associés aux réponses temporelles de $\dot{\psi}(t)$ du drone soumis aux commandes en échelon $(F_2 - F_3, F_2 + F_3)$.

Notons que les hélices ne permettent pas d'exercer des poussées aérodynamiques de signe négatif ; les valeurs $F_2 - F_3$ sont donc forcément inférieures à $F_2 + F_3$. Ceci limite le nombre d'expérimentations lorsque $F_2 + F_3$ est faible. Pour s'assurer de la fiabilité des résultats, il aurait fallu réitérer l'expérience plusieurs fois. Cependant, certains "patterns" apparaissent dans les résultats. Premièrement, le gain $P_{LJK} S_\theta = \frac{K}{T_{p1}}$ semble linéairement dépendant, avec un écart type relativement faible, de $F_2 - F_3$ dans la zone $F_2 - F_3 > 1N$. Pour $F_2 - F_3 < 1N$ cela est moins évident. Par ailleurs, l'écart type sur les données du cluster 2 dans la figure 5.43 est faible et laisse à penser que la dépendance en $F_2 + F_3$ est alors plus flagrante lorsque $F_2 - F_3 < 1N$. Remarquons tout de même que le gain, sensé être constant dans notre modèle, peut doubler selon les commandes appliquées. La loi de contrôle doit être suffisamment robuste à de tels changements. En ce qui concerne la constante de temps $T_{p1} = \frac{1}{\eta_3}$, son évolution peut s'expliquer physiquement avec le phénomène de battement des pales des rotors, plus connu sous le nom de "blade flapping". Ceci reste une explication plausible mais n'est pas affirmée ici ; il faudrait approfondir les tests pour s'en assurer. Les deux figures 5.42 et 5.44 montrent une évolution grandissante de l'écart type des mesures de ces constantes de temps lorsque la valeur des forces diminue. On pourrait penser que le système est plus sensible aux irrégularités du sol pour des valeurs faibles d'accélération. En revanche, la dépendance relative à la somme $F_2 + F_3$ peut s'expliquer avec le phénomène de "blade flapping" : T_{p1} diminue lorsque $F_2 + F_3$ augmente.

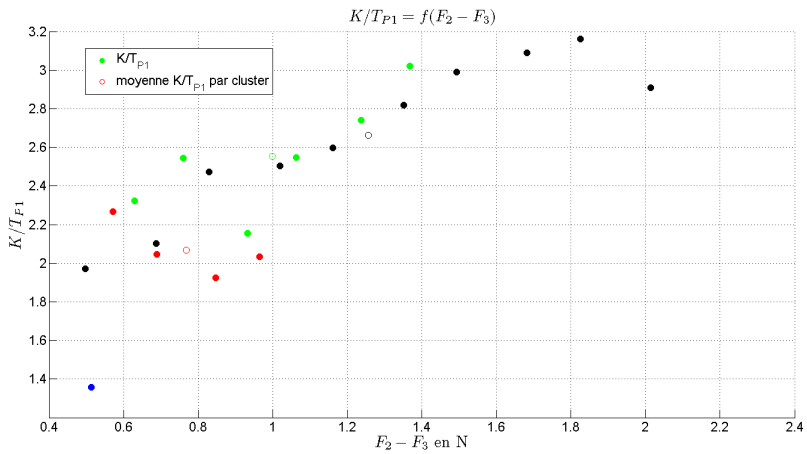

FIGURE 5.41 – Évolution du paramètre K/T_p en fonction des forces $F_2 - F_3$. Les cercles non pleins sont les moyennes associées à chaque "cluster".

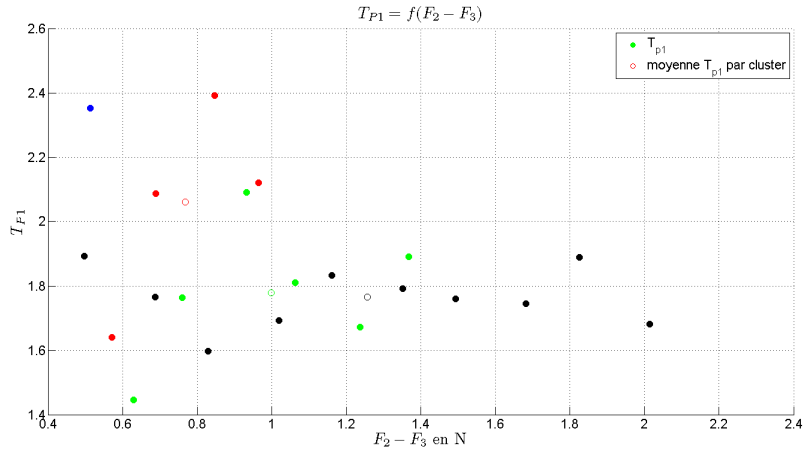

FIGURE 5.42 – Évolution des constantes de temps T_p en fonction des forces $F_2 - F_3$. Les cercles non pleins sont les moyennes associées à chaque "cluster".

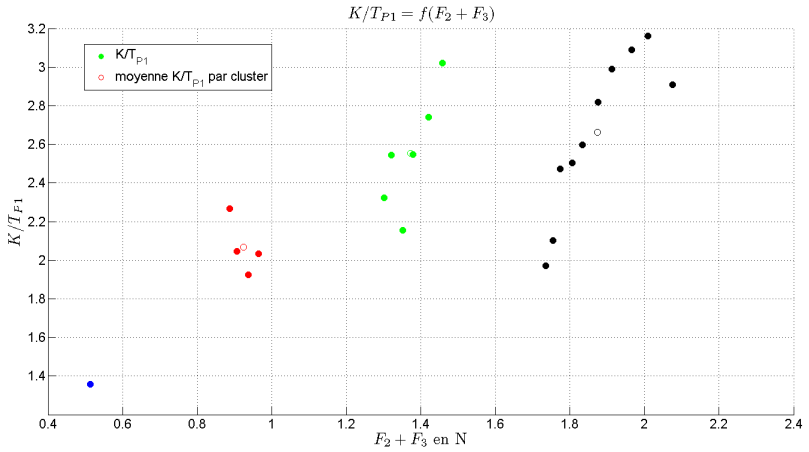

FIGURE 5.43 – Évolution du paramètre K/T_p en fonction des forces $F_2 + F_3$. Les cercles non pleins sont les moyennes associées à chaque "cluster".

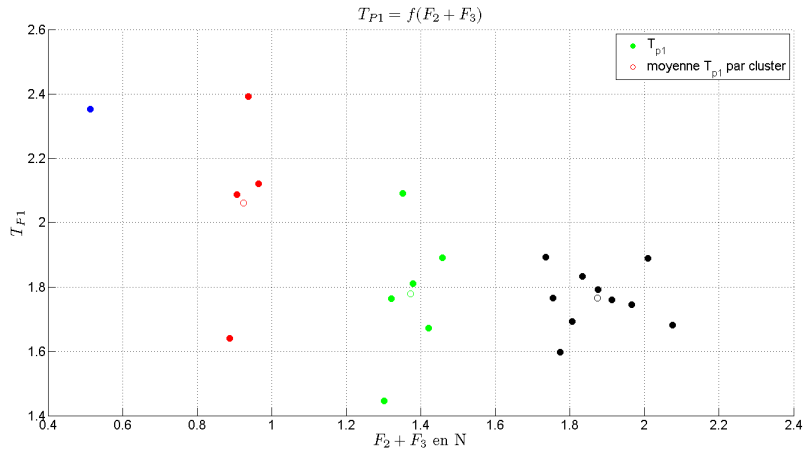

FIGURE 5.44 – Évolution des constantes de temps T_p en fonction des forces $F_2 + F_3$. Les cercles non pleins sont les moyennes associées à chaque "cluster".

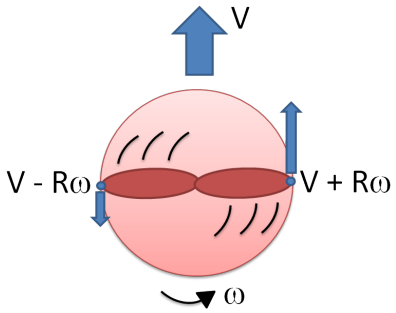

FIGURE 5.45 – Différentiel de vitesse du flux d'air sur les pales d'un rotor se déplaçant à une vitesse V.

Battement des pales des rotors : "blade flapping" Ce phénomène est très connu dans la théorie des pales de rotor, en particulier pour les hélicoptères. Il est caractérisé par l'apparition d'une force s'opposant au mouvement lorsqu'un rotor tournant à une vitesse de rotation ω est animé d'un déplacement linéaire à une vitesse V (figure 5.45). Un déséquilibre de vitesse du flux d'air sur la pale se crée suivant sa position par rapport au déplacement linéaire. Sur le schéma, la pale à droite a une vitesse plus grande $V + R\omega$ que la pale de gauche $V - R\omega$. Le phénomène de portance d'une aile dépend de la vitesse du flux d'air. Par conséquent, la portance est plus grande à droite qu'à gauche ; l'angle d'attaque de cette pale flexible a alors tendance à augmenter à droite et à diminuer à gauche. Ceci crée le phénomène de "blade flapping" et l'apparition d'un angle de battement α (figure 5.46) sur la pale avant du rotor.

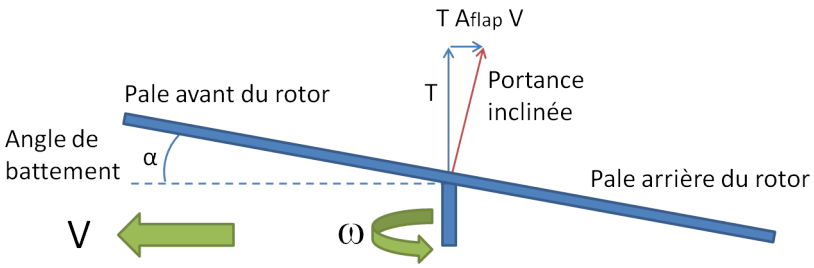

FIGURE 5.46 – Phénomène de "blade flapping".

Cet angle est responsable d'une force F_{da} s'opposant au mouvement dont la norme $F_{da} = TA_{flap}V$ dépend de la poussée aérodynamique du rotor T, de la vitesse linéaire V et d'un paramètre A_{flap} (cf. [Omari *et al.* 2014] pour plus de détails). Dans notre cas, les rotors sont inclinés d'un angle θ (cf. figure 5.47) :

$$\begin{aligned} F_d &= C_\theta F_{da} \\ &= C_\theta (TA_{flap}V_{ra}) \\ &= C_\theta (TA_{flap}C_\theta V_r) \\ &= C_\theta^2 A_{flap} T V_r \end{aligned}$$

Le point d'application de ces forces n'étant pas le centre de gravité, elles créent un couple résistant Q_d sur la dynamique en lacet (voir figure 5.48). Pour simplifier l'analyse, nous supposons que la vitesse linéaire des rotors dans les expériences précédentes est essentiellement due à la rotation, c'est-à-dire $V_r = \dot{\psi}L$. Sous cette hypothèse et d'après les notations de la figure 5.48, le couple Q_d

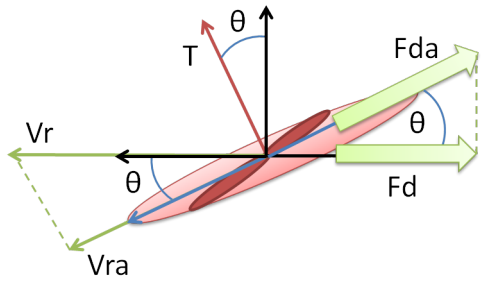

FIGURE 5.47 – Forces F_{da} et F_d engendrées par le phénomène de "blade flapping" pour un rotor incliné se déplaçant à une vitesse V_r dans le plan horizontal.

qui s'oppose au mouvement de rotation s'écrit :

$$\begin{aligned} Q_d &= -F_{d2}L + F_{d3}L \\ &= -(F_2 A_{flap} C_\theta^2 V_{r2})L + (F_3 A_{flap} C_\theta^2 V_{r3})L \\ &= -F_2 A_{flap} C_\theta^2 \dot{\psi} L^2 - F_3 A_{flap} C_\theta^2 \dot{\psi} L^2 \\ &= -A_{flap} L^2 C_\theta^2 \dot{\psi}(F_2 + F_3) \end{aligned}$$

Si l'on rajoute ce terme dans l'équation de $\ddot{\psi}$, nous obtenons :

$$\ddot{\psi} = -(\eta_3 + \frac{A_{flap} L^2 C_\theta^2}{J}(F_2 + F_3))\dot{\psi} + P_{LJK} S_\theta (F_2 - F_3).$$

La constante de temps du premier ordre associé devient donc

$$T_{p1} = \frac{1}{\eta_3 + \frac{A_{flap} L^2 C_\theta^2}{J}(F_2 + F_3)}.$$

Cette dernière équation apparaît être une bonne justification des observations faites sur la dépendance de T_{p1} par rapport à $F_2 + F_3$ à la figure 5.44.

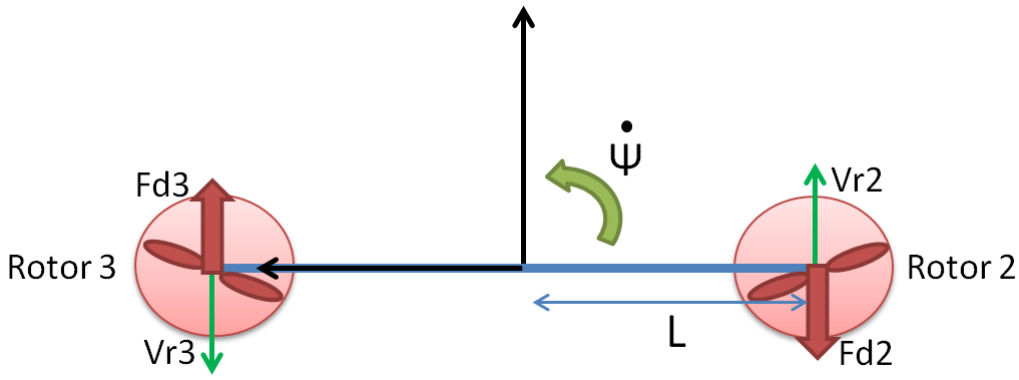

FIGURE 5.48 – Forces de frottements aérodynamiques F_{d2} et F_{d3} dues au battements des pales des rotors 2 et 3 lors d'une rotation du drone de vitesse $\dot{\psi}$.

5.2.4.2 Frottements statiques

Les graphiques précédents ont tendance à montrer que les écarts type des mesures des constantes de temps sont plus grandes pour des valeurs d'accélération et de vitesse faibles. Nous supposons que ceci est dû à une sensibilité accrue du système aux frottements au sol lors des faibles vitesses de déplacement. Pour justifier de leur importance, nous avons mis en avant à la figure 5.49 le phénomène de frottement statique qui bouleverse totalement l'architecture de notre modèle dynamique pour des vitesses proches de zéro. Un comportement présentant un hystérésis est clairement visible sur la figure 5.49. La valeur des commandes pour démarrer le drone n'est pas la même que pour l'arrêter. En effet, lorsque qu'un véhicule est à l'arrêt, les coefficients de frottement sont beaucoup plus élevés que lors d'un déplacement : ceci est désigné par le terme de frottement statique.

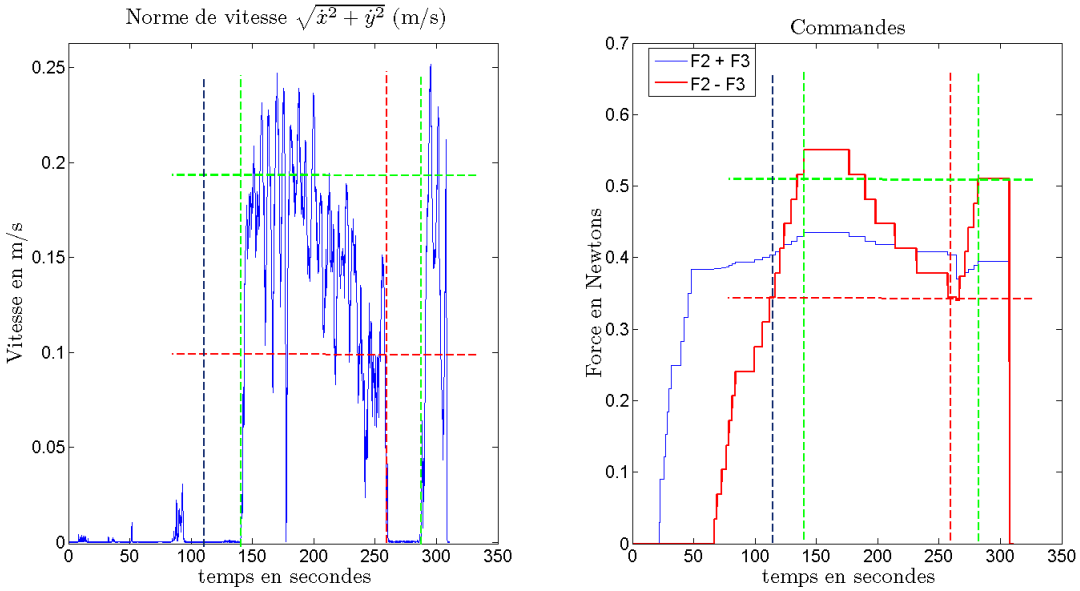

FIGURE 5.49 – Phénomène d'hystérésis causé par la présence des frottements statiques. Il est mis en avant par la correspondance entre la vitesse du véhicule et les commandes appliquées : l'énergie nécessaire pour démarrer le drone n'est pas la même que pour l'arrêter.

Finalement, le modèle utilisé pour la synthèse des lois de contrôle présentées au chapitre 4 est particulièrement inadéquat pour des vitesses inférieures à $0.15m/s$, et présente des variations de l'ordre de 50 à 100% sur les valeurs des paramètres P_{LJK} et η_3. D'après les observations faites dans cette section, il est possible d'affiner le modèle. La partie suivante montre que ceci n'est pas nécessaire, la loi de contrôle par platitude paraissant suffisamment robuste.

5.3 Contrôle du drone par platitude

La plateforme expérimentale a permis de valider le suivi d'une trajectoire circulaire au moyen de l'approche par platitude développée au chapitre 4.2.1. Le modèle dynamique sur lequel est basé le contrôle est issu du processus d'identification décrit dans la partie 5.2.3.2. Malgré la forte variabilité de ce modèle, les résultats présentés ici montrent le bon fonctionnement du bouclage. La principale difficulté du contrôleur testé est l'apparition de la singularité lorsque l'accélération du système est faible (voir 4.2.1). Cette instabilité est très limitative et suggère d'utiliser de faibles gains dans la commande. En reprenant les notations de l'équation (4.10), les gains implémentés pour l'expérimentation sont : $k_{0x} = k_{0y} = 0.21$, $k_{1x} = k_{1y} = 2$ et $k_{2x} = k_{2y} = 0.26$. L'angle de tangage est maintenu à $\theta = 0.8rad$ durant le suivi du cercle. Les résultats sont présentés aux figures 5.51, 5.52 et 5.53. Notons par ailleurs que la loi de contrôle utilisée ne permet pas la mise en mouvement du drone lorsqu'il est à l'arrêt ; la cause en revient à la présence des frottements statiques qui invalident notre modélisation. Pour pallier à cela, le système est soumis à une entrée de type rampe qui est visible dans les commandes (voir figure 5.53). Une fois le drone en mouvement, le contrôleur de suivi de la trajectoire circulaire prend le relai.

FIGURE 5.50 – Photos des différentes salles d'expérimentation équipées du système de Motion Capture. Les tests réalisés pour la procédure d'identification du modèle ont été effectués dans la salle de la figure a) ; quant aux tests de suivi de trajectoire, ils ont été menés dans la salle des figures b), c) et d). La nature très différente des sols entre l'identification et le suivi participe aux perturbations subies par le contrôleur, et donc à l'inexactitude du modèle.

Pour justifier de l'intérêt de notre système hybride sol/air, nous pouvons remarquer qu'une force d'environ 1 newton permet de faire avancer le système à une vitesse $V = 0.3m/s$, soit une puissance de $0.3W$. Pour maintenir ce même système dans les airs, il est nécessaire d'appliquer une force équivalente au poids de l'appareil $P = Mg = 15N$ avec $M = 1.5kg$. Si l'objectif est de réduire la consommation sur un trajet d'un point à un autre, l'énergie associée dépend du temps que met le

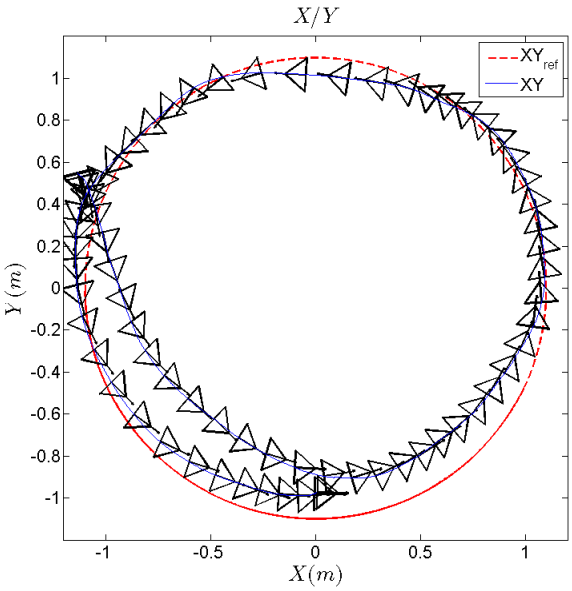

FIGURE 5.51 – Visualisation de la trajectoire réelle du drone (en bleu) et de la référence (en rouge). L'orientation du drone est symbolisée par un un triangle muni d'une flèche indiquant l'axe longitudinal du véhicule.

système à atteindre son objectif. Les systèmes aériens dans des endroits confinés ne peuvent aller beaucoup plus vite qu'un système mobile terrestre et, par conséquent, perdent beaucoup d'énergie à contrer la gravité.

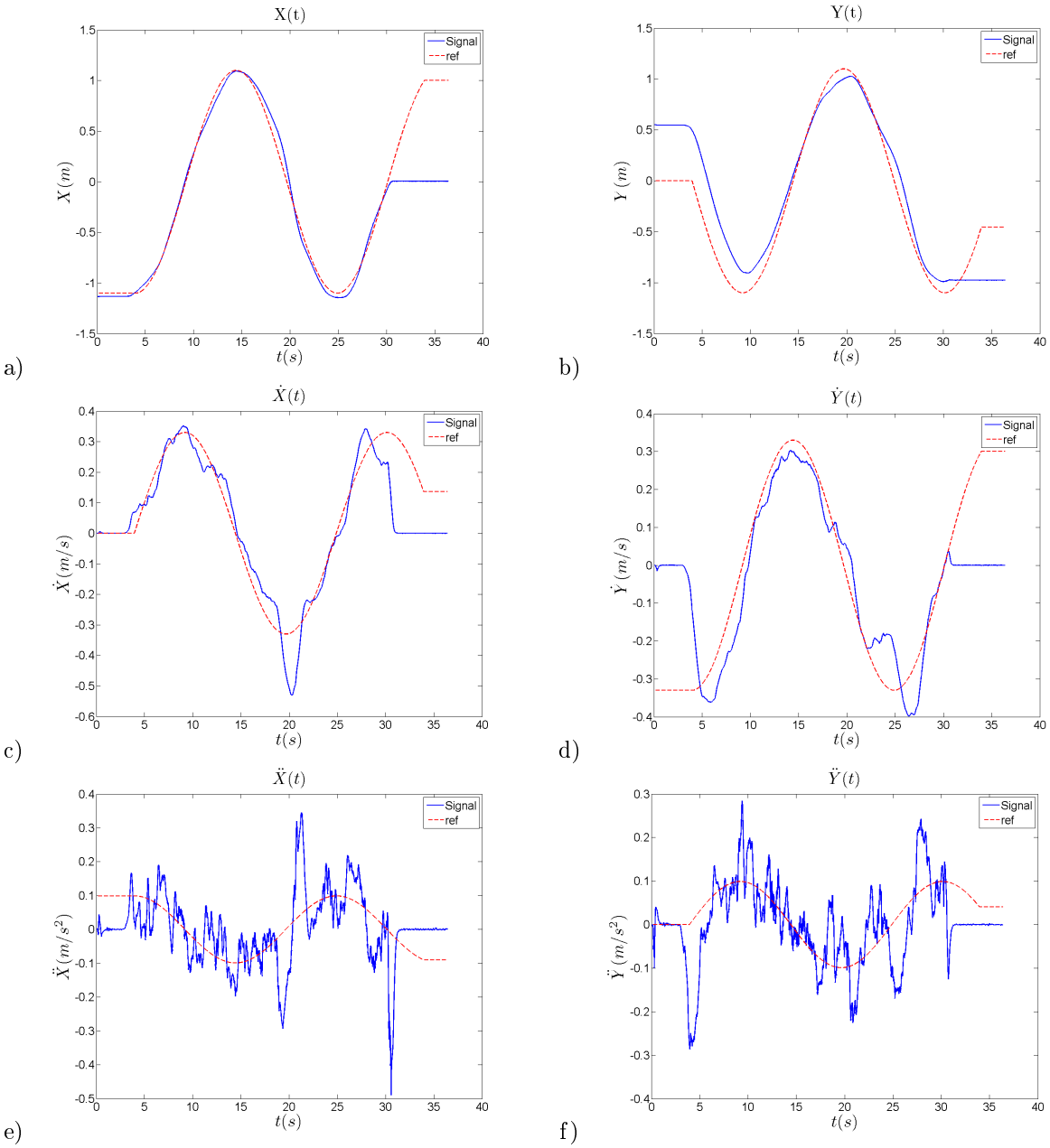

FIGURE 5.52 – Graphiques présentant les états du système lors du suivi de la trajectoire circulaire. Les figures a), c), e) et b), d), f) présentent respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ et $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$. Les tracés rouges indiquent les états de référence.

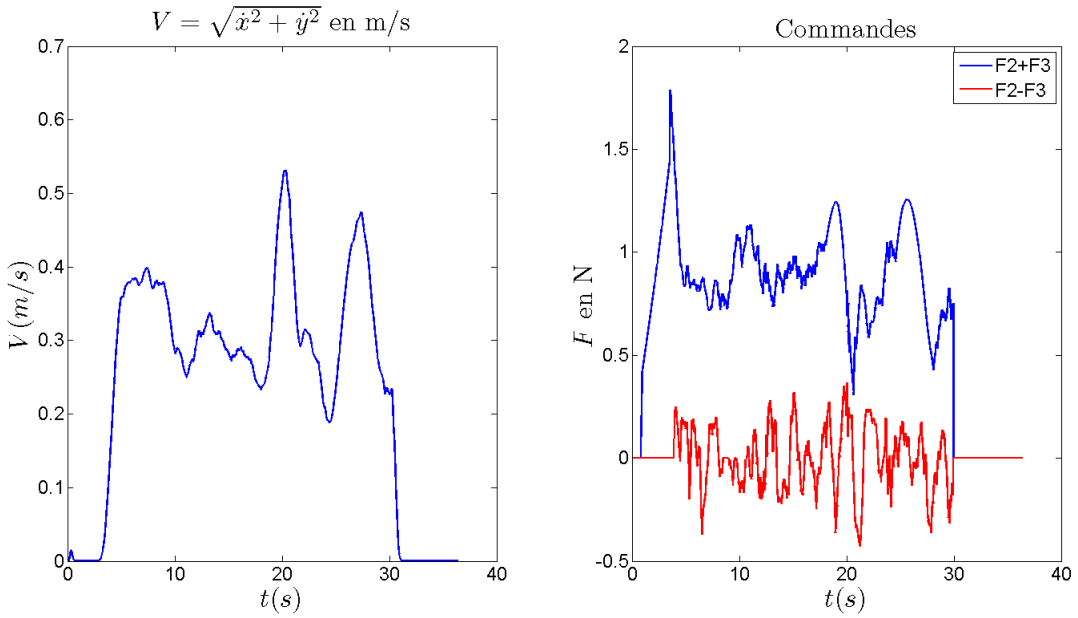

FIGURE 5.53 – La vitesse V du drone est affichée à gauche. Les commandes appliquées lors du suivi sont quant à elles visualisables à droite.

Chapitre 6

Conclusions

Le comportement dynamique de la plateforme choisie, sous-actionnée et potentiellement hybride terrestre et aérienne, avec mouvement glissant sur le sol, a permis de développer et d'expérimenter des algorithmes de contrôle, ainsi que d'identifier un certain nombre de problèmes théoriques d'intérêt : en effet, le théorème de Brockett stipule qu'il n'est pas possible d'utiliser des retours d'états continus pour stabiliser ce type de drone en un point fixe. Cette contrainte forte nous oblige à utiliser des méthodes de bouclages moins classiques : commandes en temps variant, commandes discontinues, stabilisation pratique, etc.

D'un point de vue théorique, à partir de la littérature, différents contrôles non linéaires ont été développés, capables de stabiliser le système, soit sur une trajectoire, soit en un point fixe, soit les deux. La loi de commande linéarisante avec l'approche par platitude a été utilisée pour le suivi de trajectoire : elle a permis une stabilisation exacte du système malgré une forte contrainte sur l'accélération, qui ne peut s'annuler le long de la trajectoire sous peine de l'apparition d'une singularité. Cette limitation est également présente pour la stabilisation pratique par "Backstepping". Nous avons montré par ailleurs une sensibilité prononcée aux perturbations. Un autre bouclage par retour d'états continus a aussi été développé, dérivant du concept des fonctions transverses. L'avantage majeur de cette loi par rapport aux précédentes réside dans son aptitude à suivre un point fixe aussi bien qu'une trajectoire de référence pas nécessairement admissible. Malgré le potentiel de cette loi, la stabilisation reste néanmoins pratique et le comportement du système bouclé, face à la saturation des commandes, n'apparaît pas facilement prévisible, surtout sur la zéro-dynamique d'oscillation. L'élaboration de commandes en temps variant a été abordée. La première visait à stopper le drone et non à le stabiliser en un point. L'intérêt pratique reste limité, mais l'exercice théorique est intéressant et a permis de se familiariser avec ce genre de bouclage. En dépit d'un manque de fondement théorique, la seconde loi de contrôle à temps variant (section 4.5 du chapitre 4) apparaît la plus prometteuse pour l'asservissement de notre drone en un point fixe ou sur une trajectoire quelconque. Les simulations effectuées avec cette loi de contrôle montrent d'excellentes performances associées à une grande souplesse d'utilisation. Les résultats numériques montrent une convergence systématique du système vers la référence, qu'elle soit un point fixe ou une trajectoire quelconque, sans avoir recours à plusieurs lois de contrôle "switchées". Il sera intéressant de poursuivre dans cette voie en explorant plusieurs aspects :

- prouver la stabilité globale et exacte du système,
- vérifier la validité de l'approche vis à vis de l'obstruction d'une loi de contrôle "universelle" présentée par Lizárraga [Lizárraga 2004],
- caractériser la robustesse du système, en particulier lors des oscillations de la fonction périodique en temps,
- tester expérimentalement l'approche.

D'un point de vue pratique, la forte composante expérimentale des travaux réalisés ici a permis de valider la commande linéarisante par platitude. Le suivi d'une trajectoire circulaire simple a été implémenté avec succès. En revanche, ce bouclage ne paraît pas adéquat pour des trajectoires plus complexes en raison de la singularité du contrôleur le rendant sensible aux perturbations. Par ailleurs, ce résultat montre que le modèle dynamique considéré est suffisant pour la synthèse de lois de contrôle. Ces expérimentations ont également permis de déceler l'importance des phénomènes de

frottements statiques, qu'il conviendra de ne pas négliger, surtout à basse vitesse : ainsi, on a montré que le modèle dans sa forme actuelle n'est plus valide pour des vitesses inférieures à $0.15m/s$, qui remettent en cause les bouclages de stabilisation en un point.

Un des enseignements de ce travail, auquel il faudra prêter attention, concerne les saturations des commandes non prises en compte lors des simulations. Les hélices ne pouvant générer une poussée que dans la direction associée à un sens de rotation, la dynamique en lacet n'est donc pas réellement indépendante de la dynamique longitudinale, puisque les forces aérodynamiques générées par les hélices 2 et 3 sont définies telles que$|F_2 - F_3| < |F_2 + F_3|$. Par exemple, dans la configuration actuelle de nos actionneurs, il n'est pas possible d'agir sur la rotation en imposant simultanément une accélération nulle sur l'axe longitudinal : $F_2 + F_3 = 0$ et $F_2 - F_3 \neq 0$. Si les deux axes supportant les hélices 2 et 3 pouvaient pivoter indépendamment l'un de l'autre, au moyen d'un nouveau servomoteur, ce problème serait évité. D'ailleurs, le drone pourrait être complètement actionné si tous les axes des hélices pouvaient pivoter indépendamment, et la synthèse de loi de commande en serait d'autant simplifiée avec un axe latéral commandable.

Quoique peu polyvalente dans sa forme actuelle simplifiée, avec contacts au sol glissants qui apparaissent peu réalistes dans un contexte d'exploration opérationnelle de bâtiments, la configuration mécanique de notre drone a néanmoins offert une plateforme dont l'exploitation théorique et expérimentale fut riche d'enseignements ; elle constitue un point de départ robuste pour la réalisation d'un drone hybride aérien et terrestre parfaitement autonome. Soulignons que les lois développées dans ce travail sont pertinentes pour la commande et le contrôle d'engins aéroglisseurs ou navals.

Bibliographie

[Aguiar & Hespanha 2003] Antonio Pedro Aguiar et Joao Pedro Hespanha. *Position tracking of underactuated vehicles.* In American Control Conference, 2003, volume 3, pages 1988–1993 vol.3, Juin 2003. (Cité en pages 48, 76 et 78.)

[Aguiar & Hespanha 2007] AP. Aguiar et J.P. Hespanha. *Trajectory-Tracking and Path-Following of Underactuated Autonomous Vehicles With Parametric Modeling Uncertainty.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, no. 8, pages 1362–1379, Août 2007. (Cité en page 48.)

[Aguiar *et al.* 2003] Antonio Pedro Aguiar, L. Cremean et J.P. Hespanha. *Position tracking for a nonlinear underactuated hovercraft : controller design and experimental results.* In 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. Proceedings, volume 4, pages 3858–3863 vol.4, Décembre 2003. (Cité en page 48.)

[ANR 2009] ANR. *Projet ANR -Agence Nationale de la Recherche- Défi Robotique : CArtographie par RObot d'un TErritoire "CAROTTE".* site web : http ://www.agence-nationale-recherche.fr/suivi-bilan/appels-a-projets-edition-2013/appel-detail/programme-contenus-et-interactions-defi-robotique-cartographie-par-robot-d-un-territoire-carotte-2009/, 2009. (Cité en page 1.)

[B 2013] B. *B the flying car.* site web : https ://www.kickstarter.com/projects/2017062404/b-go-beyond, 2013. (Cité en page 2.)

[Berge *et al.* 1999] Svein P. Berge, Kohei Ohtsu et Thor I. Fossen. *Nonlinear control of ships minimizing the position tracking errors.* Modeling Identification and Control, vol. 20, page 177–187, 1999. (Cité en pages 44 et 76.)

[Brockett 1983] R. W. Brockett. *Asymptotic stability and feedback stabilization.* DIFFERENTIAL GEOMETRIC CONTROL THEORY, pages 181—191, 1983. (Cité en pages 2 et 34.)

[Campion *et al.* 1991] G. Campion, B. d'Andréa-Novel et G. Bastin. *Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems.* In , Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, 1991, pages 1184–1189 vol.2, Décembre 1991. (Cité en page 25.)

[Canudas De Wit *et al.* 1997] Carlos Canudas De Wit, B. Siciliano et G. Bastin. Theory of robot control : The ZODIAC. Springer, 1 édition, 1997. (Cité en pages 25, 30 et 35.)

[Chauvin *et al.* 2003] Jonathan Chauvin, Laure Sinegre et Richard M. Murray. *Nonlinear trajectory generation for the caltech multi-vehicle wireless testbed.* In Submitted to 2003 European Control Conference, 2003. (Cité en page 48.)

[Chung *et al.* 2004] Timothy Chung, Lars Cremean, William B. Dunbar, Zhipu Jin, Eric Klavins, David Moore, Abhishek Tiwari, Dave van Gogh et Stephen Waydo. *A Platform for Cooperative and Coordinated Control of Multiple Vehicles.* In Sergiy Butenko, Robert Murphey et Panos M. Pardalos, editeurs, Recent Developments in Cooperative Control and Optimization, numéro 3 de Cooperative Systems, pages 75–104. Springer US, Janvier 2004. (Cité en page 48.)

[Coron & d'Andréa-Novel 1993] J. M. Coron et B. d'Andréa-Novel. *Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems. Application to mobile robots.* In IFAC SYMPOSIA SERIES, page 413–413, Bordeaux, France, 1993. PERGAMON PRESS. (Cité en pages 40, 98 et 99.)

[Coron & Pomet 1993] Jean-Michel Coron et Jean-Baptiste Pomet. *A remark on the design of time-varying stabilizing feedback laws for controllable systems without drift.* In IFAC Symposia Series, page 397–397. PERGAMON PRESS, 1993. (Cité en page 40.)

[Coron 1992] Jean-Michel Coron. *Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift.* Mathematics of Control, Signals and Systems, vol. 5, no. 3, pages 295–312, Septembre 1992. (Cité en page 40.)

[Coron 2009] Jean-Michel Coron. Control and nonlinearity. American Mathematical Society, 2009. (Cité en pages 21, 22, 23, 24 et 45.)

[Cremean *et al.* 2002] L. Cremean, W.B. Dunbar, D. van Gogh, J. Hickey, E. Klavins, J. Meltzer et R.M. Murray. *The Caltech Multi-Vehicle Wireless Testbed.* In Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002, volume 1, pages 86–88 vol.1, Décembre 2002. (Cité en page 48.)

[d'Andréa-Novel & Cohen de Lara 2000] Brigitte d'Andréa-Novel et Michel Cohen de Lara. Commande linéaire des systèmes dynamiques. Presses de l'Ecole des Mines, 2000. (Cité en pages 8, 9, 11, 12, 13 et 15.)

[Fantoni *et al.* 1999] I Fantoni, R. Lozano, F. Mazenc et K.Y. Pettersen. *Stabilization of a nonlinear underactuated hovercraft.* In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999, volume 3, pages 2533–2538 vol.3, 1999. (Cité en pages 25, 47 et 48.)

[Fliess *et al.* 1995] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon. *Design of trajectory stabilizing feedback for driftless at systems.* Proceedings of the Third ECC, Rome, page 1882–1887, 1995. (Cité en page 36.)

[Fossen *et al.* 1998] Thor I. Fossen, John-Morten Godhavn, Svein P. Berge et Karl-Petter Lindegaard. *Nonlinear control of underactuated ships with forward speed compensation.* IFAC NOLCOS'98, page 121–127, 1998. (Cité en page 44.)

[Fossen 1994] Thor I. Fossen. Guidance and control of ocean vehicles. Wiley-Blackwell, Chichester ; New York, Juin 1994. (Cité en pages 42 et 108.)

[Godhavn 1996] J. Godhavn. *Nonlinear tracking of underactuated surface vessels.* In , Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996, volume 1, pages 975–980 vol.1, Décembre 1996. (Cité en page 44.)

[HytaQ 2012] HytaQ. *HytaQ -Hybrid Terrestrial and Aerial Quadrotor-.* site web : http ://robots.net/article/3481.html, 2012. (Cité en page 2.)

[Jiang & Nijmeijer 1999] Zhong-Ping Jiang et H. Nijmeijer. *A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 2, pages 265–279, Février 1999. (Cité en page 44.)

[Jin *et al.* 2004] Z. Jin, S. Waydo, E.B. Wildanger, M. Lammers, H. Scholze, P. Foley, D. Held et R.M. Murray. *MVWT-II : the second generation Caltech Multi-Vehicle Wireless Testbed.* In American Control Conference, 2004. Proceedings, volume 6, pages 5321–5326 vol.6, Juin 2004. (Cité en page 48.)

[K. Y. Pettersen 1998] T. I. Fossen K. Y. Pettersen. *Underactuated Ship Stabilization Using Integral Control : Experimental Results With Cybership I.* In Symposium IFAC NOLCOS 1998, 1998. (Cité en pages 45 et 47.)

[Kanayama *et al.* 1990] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki et T. Noguchi. *A stable tracking control method for an autonomous mobile robot.* In , 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1990. Proceedings, pages 384–389 vol.1, Mai 1990. (Cité en page 30.)

[Kern 1982] G. Kern. *Uniform controllability of a class of linear time-varying systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 27, no. 1, pages 208–210, Février 1982. (Cité en page 22.)

[Khalil 1995] Hassan K. Khalil. Nonlinear systems. Prentice hall, 2 édition, 1995. (Cité en pages 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 35 et 66.)

[Kolmanovsky & McClamroch 1995] I Kolmanovsky et N.H. McClamroch. *Developments in nonholonomic control problems.* IEEE Control Systems, vol. 15, no. 6, pages 20–36, Décembre 1995. (Cité en page 25.)

[Lefeber *et al.* 2003] Erjen Lefeber, Kristin Ytterstad Pettersen et Henk Nijmeijer. *Tracking control of an underactuated ship.* IEEE transactions on control systems technology, vol. 11, no. 1, page 52–61, 2003. (Cité en pages 44, 70, 111, 112 et 113.)

[Leonard 1995] N.E. Leonard. *Periodic forcing, dynamics and control of underactuated spacecraft and underwater vehicles.* In , Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, 1995, volume 4, pages 3980–3985 vol.4, Décembre 1995. (Cité en page 45.)

[Lizárraga 2004] David A. Lizárraga. *Obstructions to the Existence of Universal Stabilizers for Smooth Control Systems.* Mathematics of Control, Signals and Systems, vol. 16, no. 4, pages 255–277, Mars 2004. (Cité en pages 48 et 201.)

[Martin & Salaun 2010] P. Martin et E. Salaun. *The true role of accelerometer feedback in quadrotor control.* In 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 1623–1629, Mai 2010. (Cité en pages 56 et 58.)

[Mazenc *et al.* 2002] Frédéric Mazenc, Kristin Pettersen et Henk Nijmeijer. *Global uniform asymptotic stabilization of an underactuated surface vessel.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 10, page 1759–1762, 2002. (Cité en page 46.)

[M'Closkey & Morin 1998] Robert M'Closkey et Pascal Morin. *Time-varying homogeneous feedback : Design tools for the exponential stabilization of systems with drift.* International Journal of Control, vol. 71, no. 5, pages 837–869, 1998. (Cité en page 45.)

[M'Closkey & Murray 1997] R.T. M'Closkey et R.M. Murray. *Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, no. 5, pages 614–628, Mai 1997. (Cité en page 41.)

[Morin & Samson 1997] P. Morin et C. Samson. *Control of nonlinear chained systems. From the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers.* In , Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, 1997, volume 1, pages 618–623 vol.1, Décembre 1997. (Cité en page 40.)

[Morin & Samson 2000] P. Morin et C. Samson. *Control of non-linear chained systems. From the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers.* IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 45, pages 141–146, 2000. (Cité en pages 40, 41 et 42.)

[Morin & Samson 2003] Pascal Morin et Claude Samson. *Practical stabilization of driftless systems on Lie groups : the transverse function approach.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 9, pages 1496–1508, Septembre 2003. (Cité en pages 50, 83, 84, 85, 86, 87, 88 et 89.)

[Morin & Samson 2005a] Pacal Morin et Claude Samson. *Stabilisation de trajectoires pour des véhicules non-holonomes ou sous-actionnés.* In JNRR'05, 2005, Guidel, Morbihan, Octobre 2005. (Cité en page 25.)

[Morin & Samson 2005b] Pascal Morin et Claude Samson. *Control of underactuated mechanical systems by the transverse function approach.* Rapport technique 5525, INRIA, 2005. (Cité en pages 50 et 84.)

[Morin & Samson 2005c] Pascal Morin et Claude Samson. *Control of underactuated mechanical systems by the transverse function approach.* In 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05, pages 7508–7513, Décembre 2005. (Cité en pages 50 et 84.)

[Morin & Samson 2006a] Pascal Morin et Claude Samson. *Control with transverse functions and a single generator of underactuated mechanical systems.* In 2006 45th IEEE Conference on Decision and Control, pages 6110–6115, Décembre 2006. (Cité en pages 50 et 84.)

[Morin & Samson 2006b] Pascal Morin et Claude Samson. *Trajectory tracking for nonholonomic and underactuated vehicles by the transverse function approach*, 2006. (Cité en page 50.)

[Morin & Samson 2006c] Pascal Morin et Claude Samson. *Trajectory Tracking for Nonholonomic Vehicles.* In Professor Dr-Ing habil Krzysztof Kozłowski, editeur, Robot Motion and Control,

numéro 335 de Lecture Notes in Control and Information Sciences, pages 3–23. Springer London, Janvier 2006. (Cité en page 42.)

[Morin & Samson 2009a] Pascal Morin et Claude Samson. *Commande*. Rapport technique, INRIA, 2009. (Cité en pages 25, 28, 38 et 39.)

[Morin & Samson 2009b] Pascal Morin et Claude Samson. *Control of Nonholonomic Mobile Robots Based on the Transverse Function Approach*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 25, no. 5, pages 1058–1073, Octobre 2009. (Cité en pages 83 et 85.)

[Morin & Samson 2009c] Pascal Morin et Claude Samson. *Transverse functions on special orthogonal groups for vector fields satisfying the LARC at the order one*. In Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009, pages 7472–7477, Décembre 2009. (Cité en page 50.)

[Murray & Sastry 1991] R.M. Murray et S.S. Sastry. *Steering nonholonomic systems in chained form*. In , Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, 1991, pages 1121–1126 vol.2, Décembre 1991. (Cité en page 38.)

[Murray *et al.* 1994] Richard M. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry et S. Shankara Sastry. A mathematical introduction to robotic manipulation. CRC press, 1994. (Cité en page 25.)

[Muwa 2013] Muwa. *Muwa -Quadrotor Wheel Can Fly, Float, and Roll-*. site web : http ://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/aerial-robots/iros-2013-quadrotor-wheel-can-fly-float-and-roll, 2013. (Cité en page 2.)

[Omari *et al.* 2014] Sammy Omari, Minh-Duc Hua, Guillaume Ducard et Tarek Hamel. *Nonlinear Control of VTOL UAVs Incorporating Flapping Dynamics*. In IROS, 2014. (Cité en page 194.)

[Oriolo *et al.* 2002] G. Oriolo, A De Luca et M. Vendittelli. *WMR control via dynamic feedback linearization : design, implementation, and experimental validation*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 10, no. 6, pages 835–852, Novembre 2002. (Cité en pages 37 et 71.)

[Panteley & Loria 2001] Elena Panteley et Antonio Loria. *Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems*. Automatica, vol. 37, no. 3, pages 453–460, Mars 2001. (Cité en page 44.)

[Parrot 2014] Parrot. *Mini drone Rolling spider*. site web : http ://www.parrot.com/fr/produits/rolling-spider/, 2014. (Cité en page 2.)

[Pettersen & Egeland 1996] K.Y. Pettersen et O. Egeland. *Exponential stabilization of an underactuated surface vessel*. In , Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996, volume 1, pages 967–972 vol.1, Décembre 1996. (Cité en pages 33, 45, 46 et 47.)

[Pettersen & Egeland 1997] K.Y. Pettersen et O. Egeland. *Robust control of an underactuated surface vessel with thruster dynamics*. In American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997, volume 5, pages 3411–3415 vol.5, Juin 1997. (Cité en page 45.)

[Pettersen & Nijmeijer 1998] K. Y. Pettersen et Henk Nijmeijer. *Tracking control of an underactuated surface vessel*. In Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on, volume 4, page 4561–4566. IEEE, 1998. (Cité en page 44.)

[Pettersen & Nijmeijer 1999] Kristin Y. Pettersen et Henk Nijmeijer. *Global practical stabilization and tracking for an underactuated ship-a combined averaging and backstepping approach*. Modeling Identification and Control, vol. 20, no. 4, page 189–200, 1999. (Cité en pages 48 et 49.)

[Pettersen & Nijmeijer 2001] K. Y. Pettersen et H. Nijmeijer. *Underactuated ship tracking control : Theory and experiments*. International Journal of Control, vol. 74, no. 14, pages 1435–1446, 2001. (Cité en page 44.)

[Pettersen *et al.* 2004] K.Y. Pettersen, F. Mazenc et H. Nijmeijer. *Global uniform asymptotic stabilization of an underactuated surface vessel : experimental results.* IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 12, no. 6, pages 891–903, Novembre 2004. (Cité en page 46.)

[Pommier 2005] Sylvie Pommier. *Préparation aux agrégations de mécanique et de génie mécanique : Dynamique Des Systemes de Solides*, 2005. (Cité en pages 51, 56 et 57.)

[Reyhanoglu 1996] M. Reyhanoglu. *Control and stabilization of an underactuated surface vessel.* In , Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996, volume 3, pages 2371–2376 vol.3, Décembre 1996. (Cité en page 47.)

[Samson & Ait-Abderrahim 1990] Claude Samson et Karim Ait-Abderrahim. *Mobile robot control. Part 1 : Feedback control of nonholonomic wheeled cart in cartesian space.* Rapport de recherche RR-1288, INRIA, 1990. (Cité en pages 30 et 35.)

[Samson 1991] Claude Samson. *Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart.* In Carlos Canudas de Wit, editeur, Advanced Robot Control, numéro 162 de Lecture Notes in Control and Information Sciences, pages 125–151. Springer Berlin Heidelberg, Janvier 1991. (Cité en page 39.)

[Samson 1995] Claude Samson. *Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 1, pages 64–77, Janvier 1995. (Cité en page 40.)

[Sepulchre 2011] R. Sepulchre. Constructive nonlinear control. Springer, London ; New York, softcover reprint of the original 1st ed. 1997 edition édition, Septembre 2011. (Cité en pages 43 et 71.)

[Sira-Ramírez & Ibáñez 2000] Hebertt Sira-Ramírez et Carlos Aguilar Ibáñez. *On the Control of the Hovercraft System.* Dynamics and Control, vol. 10, no. 2, pages 151–163, Avril 2000. (Cité en pages 44 et 71.)

[Sira-Ramírez 1999] H. Sira-Ramírez. *On the control of the underactuated ship : a trajectory planning approach.* In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999, volume 3, pages 2192–2197 vol.3, 1999. (Cité en page 44.)

[Sira-Ramírez 2002] Hebertt Sira-Ramírez. *Dynamic second-order sliding mode control of the hovercraft vessel.* IEEE transactions on control systems technology, vol. 10, no. 6, page 860–865, 2002. (Cité en page 44.)

[Transformer 2014] AT Transformer. *The Future of Roadable VTOL Aircraft and Modular Cargo Systems.* site web : https ://www.advancedtacticsinc.com/advanced-tactics-unveils-the-at-transformer/, 2014. (Cité en page 2.)

[Wichlund *et al.* 1995] K. Y. Wichlund, O.J. Sordalen et O. Egeland. *Control properties of underactuated vehicles.* In , 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995. Proceedings, volume 2, pages 2009–2014 vol.2, Mai 1995. (Cité en page 47.)

[Wikipédia 2014a] Wikipédia. *Angles d'Euler.* `http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles`, Juillet 2014. (Cité en pages 54 et 170.)

[Wikipédia 2014b] Wikipédia. *Polynôme de Hurwitz.* `http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Polyn%C3%B4me_de_Hurwitz&oldid=103934883`, Juillet 2014. (Cité en page 13.)

Conception et réalisation d'un drone hybride sol/air autonome

Résumé :

Ce travail est dédié au contrôle non linéaire d'un drone de type quadricoptère dont la spécificité est de pouvoir voler aussi bien que se déplacer en glissant sur le sol, à la façon d'un aéroglisseur. Dans un contexte d'exploration autonome de bâtiment, ce concept hybride permet d'économiser les batteries lorsqu'il n'est pas nécessaire de voler puisque le drone profite des surfaces planes pour se déplacer sans avoir à compenser la gravité ; il peut ainsi prolonger l'autonomie au-delà de la vingtaine de minutes typique d'un quadricoptère classique. Contrairement aux véhicules terrestres à roues, les capacités de franchissement de notre drone sont fortement augmentées car son aptitude au vol l'autorise à éviter les obstacles, à changer d'étage ou passer par une fenêtre. L'étude menée ici concerne essentiellement le déplacement surfacique de ce drone hybride, et vise à concevoir et implémenter une loi de contrôle capable d'asservir ce système sur des trajectoires planes au sol. Ce drone terrestre est similaire à un système sous actionné de type glisseur ; le problème de la stabilisation en un point est donc distingué du suivi de trajectoire en raison de la condition de Brockett que ce système ne satisfait pas ; notre plateforme ne peut donc pas être stabilisée par des retours d'états continus. En s'appuyant sur la littérature, cette thèse propose différentes approches théoriques en temps variant, fonctions transverses, platitude ou encore par "Backstepping" pour répondre à ces problèmes. Après une phase d'identification du modèle dynamique employé, la partie expérimentale, exploitant un système de Motion Capture pour récupérer les informations de position et d'orientation du système, valide ces lois de contrôle et de commande pour le suivi d'une trajectoire circulaire simple.

Mots clés : Quadricoptère, aéroglisseur, systèmes sous actionnés, contrôle non linéaire, suivi de trajectoire, stabilisation en un point, exploration autonome de bâtiment.

Design and construction of an autonomous hybrid ground/air drone for indoor applications

Abstract:

This thesis is dedicated to the non-linear control of a special hybrid quadrotor which is able to fly, and slide on the ground like an hovercraft. In the context of an autonomous indoor exploration this hybrid concept allows saving energy when flying is not necessary, since the drone can then slide on the ground without having to compensate for the gravity; autonomy can last beyond the 20 minutes typical of a standard quadrotor. Contrarily to wheeled mobile robots, the hybrid drone ability to move across space is strongly increased since it can fly to avoid obstacles, to move between two levels, to get in through a window. The study under consideration is essentially focused on the displacement of the drone on the ground and aims at designing and implementing a control law so that our system is able to track a 2D xy plane trajectory. This terrestrial quadrotor is similar to a slider underactuated vehicle. The point stabilisation is then separately studied from the trajectory tracking issue because of the Brockett condition, which is not satisfied in that case; our platform cannot be stabilized by means of continuous state feedbacks. This thesis proposes different theoretical developments based on the literature and deriving from time varying control laws, transverse functions, flatness or backstepping techniques to solve both point stabilisation and trajectory tracking. The experimental part of the thesis is based on the recovering of the drone position in real time and orientation via a Motion Capture system for feedback loop in the control law; the proposed dynamical model was validated as well as the control and command laws for the tracking of a circular trajectory.

Keywords: Quadrotors, hovercraft, underactuated system, non linear control, trajectory tracking, point stabilisation, autonomous indoor exploration.

MINES ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY