



**HAL**  
open science

# Conditions transparentes pour la diffraction d'ondes en milieu élastique anisotrope

Antoine Tonnoir

► **To cite this version:**

Antoine Tonnoir. Conditions transparentes pour la diffraction d'ondes en milieu élastique anisotrope. Mathématiques [math]. ENSTA ParisTech, 2015. Français. NNT : . tel-01170583

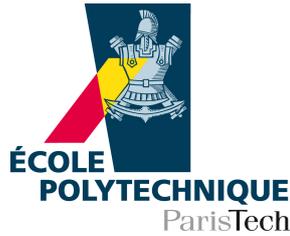
**HAL Id: tel-01170583**

**<https://pastel.hal.science/tel-01170583v1>**

Submitted on 1 Jul 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse

présentée en vue de l'obtention du grade de  
Docteur de l'ENSTA Paristech

« Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES »

par

**Antoine Tonnoir**

---

## Conditions transparentes pour la diffraction d'ondes en milieu élastique anisotrope.

---

Thèse soutenue publiquement le 12 Juin 2015 devant le jury composé de :

M.	MARTIN GANDER	Rapporteur
M.	JEAN VIRIEUX	Rapporteur
M.	FRANÇOIS ALOUGES	Examinateur
M.	NABIL GMATI	Examinateur
M.	VINCENT PAGNEUX	Examinateur
M <sup>me</sup>	ANNE-SOPHIE BONNET-BEN DHIA	Directrice de thèse
M <sup>me</sup>	SONIA FLISS	Co-directrice de thèse
M.	VAHAN BARONIAN	Co-directeur de thèse





---

# REMERCIEMENTS

---

Mes premiers remerciements vont à mes trois encadrants de thèse : Anne-Sophie, Sonia et Vahan. Je vous remercie pour tout ce que vous avez pu m'apprendre et apporter à ce travail, pour votre patience (en particulier lors de la rédaction) et votre disponibilité, pour votre aide, vos encouragements et votre soutien tout au long de ces années. J'ai été chanceux de travailler à vos côtés, et je vous en suis profondément reconnaissant.

Ensuite, je tiens à remercier Martin Gander et Jean Virieux pour avoir accepté la tâche de rapporteur. Je les remercie pour leur relecture attentive du manuscrit et leurs remarques. Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements à Nabil Gmati pour sa relecture de plusieurs chapitres, ainsi que pour les discussions toujours très enrichissantes que nous avons eues avoir ensemble. J'adresse également mes remerciements à Vincent Pagneux et François Alouges qui me font l'honneur d'être parmi mon jury de thèse. Je remercie tout particulièrement Vincent Pagneux pour nos discussions et ses conseils sur la théorie du 'cloaking'.

Merci également à tous les membres de l'équipe POEMS. C'est une chance de pouvoir faire sa thèse dans ce laboratoire, et j'ai beaucoup appris aussi bien des permanents que des non-permanents (notamment grâce aux séminaires des doctorants auxquels j'aurais aimé pouvoir davantage participer). Je remercie tous les doctorants avec qui j'ai pu échanger durant ces années de thèse (en particulier Simon Marmorat et Mathieu Chamaillard de ma génération). Je tiens à remercier également Pablo Merino dont j'ai pu encadrer le stage. Son dynamisme et sa bonne humeur ont rendu cette expérience fort agréable et très enrichissante. J'adresse également mes remerciements au service d'impression de l'ENSTA pour leur aide.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude envers ma 'grande' famille. Je remercie mes parents pour m'avoir poussé aussi loin dans les études, mes frères et soeurs pour leur soutien et aide. Pour terminer, j'ai une pensée toute particulière pour ma femme Ioana, son inconditionnel soutien, ses précieux encouragements tout au long de ma thèse et sa patience sans faille pendant toute la rédaction de mon travail.



---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Partie I Nouvelles conditions transparentes pour les guides d'ondes</b>	<b>7</b>
<b>1 Guide acoustique isotrope</b>	<b>9</b>
1.1 Formulation classique avec opérateur $DtN$	9
1.1.1 Introduction et démarche	9
1.1.2 Les modes dans un guide acoustique	11
1.1.3 Reformulation à l'aide d'un opérateur $DtN$	13
1.1.4 Discrétisation de la formulation en domaine borné	15
1.2 Nouvelles formulations avec recouvrement	16
1.2.1 Formulation multi-domaines avec recouvrement	17
1.2.2 Reformulation à l'aide d'un opérateur $DtR$ "avec recouvrement"	21
1.2.3 Discrétisation de la formulation en domaine borné	25
1.3 Étude de méthodes itératives de résolution	25
1.3.1 L'algorithme de Schwarz	27
1.3.2 Analyse spectrale dans le cas d'une géométrie séparable	29
1.3.3 Analyse spectrale dans le cas général	33
1.3.4 Les méthodes de décomposition de domaine comme préconditionneur pour GMRES	36
<b>2 Guide acoustique anisotrope</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction	41
2.2 Construction de l'opérateur $DtN$ via le changement de coordonnées	43
2.2.1 Introduction	43
2.2.2 Le calcul des modes	45
2.2.3 Opérateurs $DtN$ sur les frontières déformées	49
2.3 Utilisation du recouvrement pour construire de nouvelles conditions transparentes	51
2.3.1 Introduction et démarche	52
2.3.2 Décomposition modale via les relations de bi-orthogonalité	53
2.3.3 Formulation multi-domaines	56
2.3.4 Reformulation à l'aide d'un opérateur <i>Transparent to Robin</i>	58
2.3.5 Analyse spectrale dans le cas d'une géométrie séparable et pour un milieu isotrope	62
2.4 Résultats numériques	63
2.4.1 Comparaison des formulations $DtN$ sur les frontières déformées et $TtR$	63

2.4.2	Avantages de la formulation $TtR$	67
<b>3</b>	<b>Guide élastique anisotrope</b>	<b>69</b>
3.1	Introduction	70
3.1.1	Problème modèle	70
3.1.2	Notations	72
3.2	Description et calcul des modes	73
3.2.1	Classification des modes	73
3.2.2	Les relations de bi-orthogonalité	75
3.2.3	Le calcul numérique des modes par la méthode SAFE	78
3.3	Formulation multi-domaines pour les milieux orthotropes	80
3.3.1	Formulation multi-domaines $YtR$	80
3.3.2	Reformulation à l'aide d'un opérateur $YtR$	83
3.4	Formulation multi-domaines générale	85
3.4.1	Formulation multi-domaines $TtR$	85
3.4.2	Reformulation à l'aide d'un opérateur $TtR$	87
3.5	Algorithmes de Schwarz associés	88
3.5.1	Présentation des algorithmes	89
3.5.2	Analyse spectrale dans un cas d'école	90
3.5.3	Analyse spectrale dans le cas général	94
3.6	Résultats numériques	97
3.6.1	Validation qualitative de la formulation $TtR$	97
3.6.2	Comparaison des formulations $YtR$ et $TtR$	98
3.6.3	Avantages de la formulation $TtR$ par rapport aux méthodes de type couche absorbante	100
3.7	Annexe : caractères bien posé et consistant de l'algorithme $YtX$ et $TtX$ itératif	102
3.7.1	L'algorithme $YtX$ itératif	102
3.7.2	L'algorithme $TtX$ itératif	104

## Partie II Formulations multi-domaines pour la diffraction en milieu infini 107

<b>4</b>	<b>Présentation de la méthode</b>	<b>109</b>
4.1	Introduction et notations	110
4.1.1	Problème modèle en acoustique et approches classiques	110
4.1.2	Quelques notations	112
4.2	Décomposition du domaine en 4 demi-plans et un domaine borné	113
4.2.1	Description générale	113
4.2.2	Calcul analytique de la solution dans les demi-plans	116
4.2.3	Reformulation du problème en variables $p^a$ et $\varphi^j$	118
4.3	Aspects numériques	123
4.3.1	Formulation variationnelle	123
4.3.2	Discrétisation de la formulation variationnelle	124
4.3.3	Validation quantitative dans le cas isotrope	126
4.3.4	Validation qualitative dans le cas général	135
4.4	Le cas non dissipatif	137
4.4.1	Difficultés théoriques	137
4.4.2	Validations numériques	141

<b>5</b>	<b>Étude théorique de l'équation intégrale du problème extérieur</b>	<b>145</b>
5.1	Problème modèle . . . . .	146
5.1.1	Introduction . . . . .	146
5.1.2	Quelques rappels sur les opérateurs à noyau de Hilbert-Schmidt . . . . .	146
5.1.3	Le cas de l'opérateur de Laplace . . . . .	147
5.1.4	Application au problème modèle . . . . .	149
5.2	Extensions du cas modèle . . . . .	150
5.2.1	Le cas d'une fréquence complexe . . . . .	150
5.2.2	Le cas du système d'équations intégrales couplées . . . . .	154
5.3	Quelques remarques . . . . .	162
5.3.1	Le cadre fonctionnel $H^1$ . . . . .	162
5.3.2	Généralisation au cas anisotrope . . . . .	164
5.3.3	La formulation complète . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Extensions de la méthode</b>	<b>169</b>
6.1	Formulations avec recouvrement entre la zone bornée et les demi-plans . . . . .	170
6.1.1	Introduction . . . . .	170
6.1.2	Reformulation du problème en variables $p^b$ et $\varphi^j$ . . . . .	171
6.1.3	Intérêt du recouvrement pour une approche itérative de résolution . . . . .	175
6.2	Étude théorique des formulations avec recouvrement dans le cas dissipatif . . . . .	178
6.2.1	Résultats préliminaires . . . . .	178
6.2.2	Caractère Fredholm de la première formulation avec recouvrement . . . . .	179
6.2.3	Caractère Fredholm de la seconde formulation avec recouvrement . . . . .	181
6.3	Autres structurations des sous-domaines . . . . .	185
6.3.1	Introduction . . . . .	185
6.3.2	Diffraction par un polygone convexe borné . . . . .	185
6.3.3	Quelques résultats numériques . . . . .	189
<b>7</b>	<b>Extension au milieu élastique</b>	<b>193</b>
7.1	Formulation multi-domaines dans le cas élastique . . . . .	193
7.1.1	Introduction et description de la méthode . . . . .	193
7.1.2	Calcul analytique de la solution dans les demi-plans . . . . .	196
7.1.3	Remarques sur le cas sans dissipation . . . . .	201
7.2	Tests de validation qualitative . . . . .	203
7.2.1	Les diagrammes de lenteur . . . . .	204
7.2.2	Interprétation des résultats . . . . .	206
7.2.3	Comparaison avec d'autres méthodes numériques . . . . .	210
7.3	Approche itérative de résolution . . . . .	212
7.3.1	Introduction . . . . .	212
7.3.2	Résultats numériques . . . . .	213
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>215</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>219</b>



---

# INTRODUCTION

---

La motivation générale de cette thèse est la simulation numérique du contrôle non destructif (CND) par ondes ultrasonores. Plus spécifiquement, le but est de développer une méthode de calcul de la diffraction d'ondes par un défaut localisé dans une plaque élastique anisotrope. La thèse s'inscrit dans un contexte de collaboration entre le CEA LIST et le laboratoire POEMS (UMR CNRS-INRIA-ENSTA).

Le CND est un procédé d'inspection qui vise à vérifier l'intégrité d'une structure. Le principe est simple : en émettant une onde ultrasonore dans la pièce à contrôler et en mesurant les signaux en retour, on souhaite pouvoir déterminer la présence éventuelle d'un défaut (ou toute altération de la structure) et caractériser ce défaut (connaître sa position et sa forme). Cette méthode de contrôle est utilisée dans de nombreux domaines comme l'aéronautique, l'industrie du nucléaire ou encore le secteur automobile.

Dans diverses situations, les pièces à contrôler ont des géométries pouvant guider la propagation des ondes : typiquement le cas des tuyaux ou des plaques. Ces ondes guidées présentent l'avantage de se propager sur de longues distances sans perte d'énergie. Ainsi, elles permettent d'inspecter des zones éloignées de l'émetteur ou même inaccessibles (par exemple un tuyau enfoui dans le sol). Il est donc intéressant de développer des techniques de CND qui exploitent ces ondes guidées.

Cependant, le développement de telles techniques de contrôle soulève plusieurs difficultés. En effet, les résultats expérimentaux sont souvent très complexes et difficiles à interpréter. Un autre enjeu est la conception et l'optimisation de configurations de contrôle (choisir par exemple la position des émetteurs et des récepteurs). Face à ces besoins, la simulation numérique des expériences de CND est une aide précieuse. Depuis plusieurs années, le Département d'Imagerie et de Simulation pour le Contrôle (DISC) du CEA LIST développe la plate-forme CIVA pour la simulation du CND. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de cette thèse. Elle fait suite à deux précédentes thèses réalisées dans le cadre d'une collaboration entre le laboratoire POEMS et le DISC :

- la thèse de V. Baronian [7] qui porte sur la simulation numérique de la diffraction d'ondes par un défaut borné dans un guide élastique infini dans une direction. Ce type de configuration intervient par exemple pour le contrôle de tuyaux ou de rails.
- la thèse de L. Taupin [87] qui porte sur la simulation de la diffraction par un défaut linéique, invariant dans une direction, dans une plaque élastique anisotrope. On retrouve cette configuration en aéronautique pour le contrôle des plaques composites qui peuvent être modélisées par des matériaux élastiques anisotropes. Le défaut linéique correspond par exemple à un raidisseur ou à une soudure joignant deux plaques. L'invariance de la structure dans la direction du défaut permet de poser le problème de diffraction dans la

section transverse de la plaque.

Dans la continuité des travaux de V. Baronian et L. Taupin, la problématique de cette thèse est la simulation numérique de la diffraction des ondes par un défaut borné dans une plaque élastique anisotrope, en régime harmonique. La difficulté supplémentaire par rapport à ces précédents travaux est qu'ici la plaque est infinie dans deux directions. La géométrie arbitraire du défaut nous incite à utiliser une méthode éléments finis (EF), et donc l'objectif est de réussir à restreindre les calculs EF à une zone bornée autour du défaut tout en tenant compte du caractère infini de la plaque. Dans cette thèse, nous avons considéré principalement des cas bidimensionnels plus simples qui nous ont permis de mettre en place les ingrédients essentiels d'une méthode destinée au cas tridimensionnel de la plaque. Nous nous sommes intéressés au problème de diffraction par un défaut borné :

- Dans une guide infini dans une direction : Nous avons ainsi revisité les travaux de V. Baronian et L. Taupin et proposé plusieurs extensions. Cette étude constitue la première partie de la thèse.
- Dans un milieu infini dans les deux directions : Cette étude constitue la seconde partie de la thèse.

### **Lien avec les méthodes de décomposition de domaine :**

Nous avons exploité un point de vue qui a déjà été appliqué par différents auteurs au cas de l'équation de Helmholtz en domaine non borné [14, 15, 49]. Ce point de vue est inspiré par les méthodes de décomposition de domaine, qui avaient été initialement développées pour traiter des problèmes de grande taille en domaine borné sur des architectures parallèles [44, 79]. Citons pour le cas de l'équation de Helmholtz les travaux de B. Després [33] et M. Gander [37, 42, 41]. En particulier, l'intérêt d'introduire un recouvrement entre les sous-domaines et l'importance du choix des conditions de transmission entre les sous-domaines, pour assurer la convergence d'un algorithme itératif, fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature.

Pour les problèmes de diffraction qui nous occupent, on peut aussi écrire une formulation multi-domaines, la spécificité étant que certains sous-domaines sont non bornés. L'idée développée par N. Gmati, F. Ben Belgacem et al. [15] est de choisir ces domaines non bornés de sorte que la solution puisse y être représentée analytiquement, à l'aide de représentations intégrale ou modale. Ceci permet en fait d'éliminer les inconnues sur les domaines non bornés, et conduit à une formulation du problème en domaine borné, faisant intervenir une condition au limite non locale dite transparente. L'intérêt de ce point de vue est que l'on peut concevoir des conditions aux limites transparentes très diverses, en choisissant une formulation multi-domaines, avec ou sans recouvrement, et en modifiant les conditions de transmission entre sous-domaines.

Notre but est d'exploiter ce point de vue "décomposition de domaine" pour le cas de l'élasticité anisotrope. Soulignons que ce cas pose des difficultés spécifiques non résolues par les méthodes citées précédemment. Ceci nous a amené à développer des idées nouvelles, dont nous pensons qu'elles présentent également des avantages dans le cas acoustique.

### **Diffraction dans un guide unidirectionnel :**

Pour borner le domaine de calcul, il existe plusieurs approches classiques. Une première méthode très répandue car très performante dans de nombreux cas est l'utilisation de couches absorbantes parfaitement adaptées (PML en anglais) [16, 3]. Cependant, il est connu qu'en

présence d'ondes inverses, c'est à dire d'ondes dont les vitesses de groupe et les vitesses de phase sont de signes opposés, l'utilisation des PML conduit à des instabilités en régime temporel [12], et à un résultat faux en régime harmonique [18, 31]. Or, dans les guides élastiques (isotropes ou anisotropes), il existe des modes inverses pour certaines gammes de fréquences. Notons cependant qu'une méthode originale est proposée dans [18] pour reconstruire la bonne solution en combinant plusieurs solutions "fausses" calculées avec les PML.

Citons également la méthode de la "pole condition" [55] qui, tout comme les PML, exploite un prolongement analytique de la solution. Une version sophistiquée de cette méthode a récemment été développée pour les guides élastiques [53] et permet notamment d'éviter le problème des modes inverses.

Une seconde approche consiste à construire des conditions dites transparentes sur les bords du domaine EF. Cette technique a été utilisée dans la thèse de V. Baronian [7] pour des milieux orthotropes. Elle consiste à coupler une représentation modale de la solution dans les parties saines du guide avec une représentation EF dans la partie perturbée. En exprimant le raccord de ces deux représentations sur une même frontière artificielle, on construit des conditions transparentes. Cette méthode présente l'avantage de réduire les calculs EF à une zone petite autour du défaut. De plus, on peut reconstruire a posteriori la solution dans les parties saines du guide grâce aux représentations modales, ce qui n'est pas possible avec les méthodes de type couches absorbantes. En contrepartie, elle nécessite le calcul des modes, et les conditions transparentes sont non locales. Ces conditions créent donc des blocs denses dans la matrice issue de la discrétisation, ce qui pénalise les méthodes d'inversion directe comme la factorisation LU. Un premier objectif de la thèse a été de proposer une méthode itérative efficace de résolution. En s'inspirant des méthodes de décomposition de domaine avec recouvrement [62, 44, 41], nous avons mis en évidence l'intérêt d'introduire un recouvrement entre la zone EF et la zone modale pour accélérer une approche itérative de résolution.

Par ailleurs, la construction des conditions transparentes exploite les relations d'orthogonalité de Fraser [38] entre les modes, or ces relations ne sont plus valables pour un matériau anisotrope quelconque. Dans sa thèse, L. Taupin étend la méthode de V. Baronian au milieu anisotrope en inversant la matrice de Gram associée aux modes. Cependant, comme illustré dans la section 2.1 de cette thèse, la matrice de Gram peut être très mal conditionnée pour certaines anisotropies. Un second objectif de la thèse a donc été de proposer la construction de nouvelles conditions transparentes. L'idée ici a été d'exploiter les relations de bi-orthogonalité valables pour des milieux anisotropes. Nous avons également mis en évidence l'intérêt d'introduire un recouvrement entre les zones EF et modales pour construire ces conditions.

### **Diffraction dans un milieu infini :**

Pour le problème de diffraction dans un milieu bidimensionnel infini, il existe également plusieurs approches classiques. Une première approche consiste à construire des conditions transparentes sur une frontière artificielle entourant le défaut. Dans le cas isotrope, on peut décomposer la solution à l'extérieur d'un cercle sur les fonctions de Bessel, et ainsi obtenir des conditions transparentes [48]. Cependant, cette décomposition n'est plus possible pour un milieu anisotrope. Mentionnons également la méthode de couplage entre équation intégrale et éléments finis [30]. Le désavantage de cette approche est qu'elle nécessite le calcul numérique de la fonction de Green, qui est complexe et coûteux dans le cas de l'élasticité [1].

Par ailleurs, concernant la méthode des PML, il est bien connu qu'elle ne permet pas de traiter certaines classes de matériaux anisotropes [12]. Une autre méthode de type couche absorbante est la méthode des couches SMART [22, 66]. Cette technique présente l'avantage de s'appliquer pour des milieux anisotropes arbitraires (y compris en présence d'ondes inverses). Cependant, les couches utilisées ne sont pas parfaitement adaptées et créent une légère réflexion à l'interface entre le domaine d'intérêt et la couche.

L'objectif de la seconde partie de la thèse a été de développer et d'analyser une nouvelle méthode applicable pour un matériau anisotrope arbitraire. Nous nous sommes inspirés de travaux récents de S. Fliss sur les milieux périodiques [39] pour développer une méthode de type décomposition de domaine. L'idée est de coupler la représentation EF avec plusieurs représentations en ondes planes de la solution dans plusieurs demi-plans entourant le défaut. Grâce à l'homogénéité du milieu, nous pouvons utiliser la transformée de Fourier pour calculer analytiquement les représentations en ondes planes dans les demi-plans. La compatibilité entre les différentes représentations est assurée grâce à des équations intégrales non standard définies sur les droites formant les bords des demi-plans.

Tout au long de la thèse, les idées ont d'abord été développées pour l'équation scalaire acoustique, puis étendues au cas vectoriel élastique. Afin de tester et valider nos méthodes, nous avons écrit un code C++ qui permet de résoudre des problèmes bidimensionnels. De plus, les méthodes de la première partie ont également été testées pour des guides tridimensionnels par V. Baronian. La thèse se découpe en deux parties composées respectivement de 3 et 4 chapitres :

### Partie 1 : Nouvelles conditions transparentes pour les guides d'ondes.

- **Chapitre 1 : Guide acoustique isotrope** : L'objectif de ce chapitre, à vocation pédagogique, est de présenter les résultats classiques sur l'équation de Helmholtz. On rappelle tout d'abord la construction des conditions transparentes dans un guide acoustique à l'aide de la décomposition sur les modes transverses. Ensuite, nous décrivons l'intérêt d'introduire un recouvrement entre les zones EF et modales pour une résolution itérative.
- **Chapitre 2 : Guide acoustique anisotrope** : Le chapitre 2 porte sur le cas de l'équation de Helmholtz anisotrope. Contrairement au cas isotrope du chapitre 1, la difficulté est que les modes transverses ne forment plus une base orthogonale. Une première idée pour contourner cette difficulté est d'utiliser un changement de coordonnées astucieux qui permet d'appliquer les techniques du chapitre 1 sur des frontières artificielles adaptées à l'anisotropie (obliques dans le cas homogène). Cette idée ne s'étend pas au cas de l'élasticité, c'est pourquoi nous avons développé une seconde approche. Le principe de cette approche est d'introduire un recouvrement et une condition de transmission originale pour s'affranchir du manque d'orthogonalité des modes transverses. La "bonne surprise" est que cette méthode combine de nombreux avantages : en particulier, elle a toutes les qualités des formulations avec recouvrement (convergence rapide des algorithmes itératifs) sans les inconvénients (car elle ne fait pas apparaître de fréquences de boîte, y compris dans le plan complexe).
- **Chapitre 3 : Guide élastique anisotrope** : Dans ce chapitre, on cherche à appliquer les idées développées dans les deux premiers chapitres au cas élastique. La difficulté est à nouveau liée à la non orthogonalité des modes transverses, dont l'analyse est rendue

particulièrement délicate du fait du caractère vectoriel des équations de l'élasticité. Nous proposons tout d'abord diverses extensions avec recouvrement de la méthode de V. Baronian pour les matériaux orthotropes. Ensuite, pour le cas anisotrope pour lequel il n'existait pas de condition transparente, nous montrons comment étendre notre idée originale du chapitre 2. Ceci fournit une approche générale dont les bonnes propriétés sont validées numériquement.

## Partie 2 : Formulations multi-domaines pour la diffraction en milieu infini.

- **Chapitre 4 : Présentation de la méthode :** Ce chapitre a pour but de présenter, sur le cas modèle de l'équation de Helmholtz, les principaux ingrédients de la démarche que nous suivons dans la deuxième partie de la thèse. Nous détaillons comment calculer analytiquement (via la transformée de Fourier) les représentations de la solution en ondes planes dans 4 demi-plans s'appuyant sur les 4 bords d'un carré entourant le défaut. On se ramène ainsi à un problème qui couple l'inconnue sur le carré avec les 4 traces des inconnues sur les demi-plans. Contrairement aux problèmes résolus dans la première partie, il ne s'agit pas d'une formulation en domaine borné puisque les traces vivent sur des droites infinies qui doivent être tronquées pour la résolution numérique. La compatibilité des différentes représentations est assurée via des équations intégrales portant sur les 4 traces. Des premiers résultats numériques sont présentés en fin de chapitre, ainsi qu'une étude de l'influence des différents paramètres de discrétisation.
- **Chapitre 5 : Étude théorique de l'équation intégrale du problème extérieur :** Dans ce chapitre, nous proposons une analyse théorique des équations intégrales assurant la compatibilité des représentations dans les demi-plans, pour un milieu dissipatif. En particulier, on montre qu'étant donnée la solution dans le carré, le problème extérieur couplant uniquement les représentations en ondes planes relève de l'alternative de Fredholm et est bien posé. Ce chapitre exploite la théorie des opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt, ainsi que des propriétés de l'opérateur intégral de Laplace.
- **Chapitre 6 : Extensions de la méthode :** L'objectif de ce chapitre est de présenter plusieurs extensions possibles de la méthode développée au chapitre 4. Une idée naturelle est d'introduire un recouvrement entre les demi-plans et le carré. L'avantage considérable par rapport à la formulation sans recouvrement du chapitre 4 est que nous savons montrer cette fois le caractère Fredholm de la formulation complète (contrairement au résultat du chapitre précédent qui ne portait que sur les équations intégrales du problème extérieur). Ceci se traduit par une bonne vitesse de convergence d'une résolution itérative, confirmée par les tests numériques. Une seconde extension consiste à remplacer le carré par un polygone convexe. En particulier dans le cas d'un triangle, cela permet de réduire le nombre d'inconnues (3 traces au lieu de 4).
- **Chapitre 7 : Extension au milieu élastique :** Enfin, dans le dernier chapitre de la thèse, nous étendons au cas vectoriel élastique l'approche développée aux chapitres 4 et 6. La principale différence réside dans la résolution analytique dans les demi-plans. Des résultats numériques sont présentés, en particulier des comparaisons avec des méthodes numériques de type couches absorbantes.



---

---

**PREMIÈRE PARTIE**

**NOUVELLES CONDITIONS  
TRANSPARENTES POUR LES GUIDES  
D'ONDES**

---

---



# GUIDE ACOUSTIQUE ISOTROPE

---

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Formulation classique avec opérateur <math>DtN</math></b>	<b>9</b>
1.1.1	Introduction et démarche	9
1.1.2	Les modes dans un guide acoustique	11
1.1.3	Reformulation à l'aide d'un opérateur $DtN$	13
1.1.4	Discrétisation de la formulation en domaine borné	15
<b>1.2</b>	<b>Nouvelles formulations avec recouvrement</b>	<b>16</b>
1.2.1	Formulation multi-domaines avec recouvrement	17
1.2.2	Reformulation à l'aide d'un opérateur $DtR$ "avec recouvrement"	21
1.2.3	Discrétisation de la formulation en domaine borné	25
<b>1.3</b>	<b>Étude de méthodes itératives de résolution</b>	<b>25</b>
1.3.1	L'algorithme de Schwarz	27
1.3.2	Analyse spectrale dans le cas d'une géométrie séparable	29
1.3.3	Analyse spectrale dans le cas général	33
1.3.4	Les méthodes de décomposition de domaine comme préconditionneur pour GMRES	36

---

Ce premier chapitre a une vocation pédagogique et servira de prélude pour les suivants chapitres. Nous allons tout d'abord présenter le problème de radiation dans un guide acoustique infini localement perturbé et étudier plusieurs reformulations de ce problème adaptées au calcul numérique. Nous rappellerons la formulation classique avec opérateur *Dirichlet to Neumann* (noté  $DtN$ ) puis nous verrons une nouvelle formulation dérivée des méthodes de décomposition de domaine avec recouvrement. Enfin, dans la dernière partie, nous présenterons des méthodes itératives pour la résolution de notre problème et donnerons une analyse de leurs vitesses de convergence.

## 1.1 Formulation classique avec opérateur $DtN$

### 1.1.1 Introduction et démarche

Nous allons nous intéresser à la résolution de l'équation de Helmholtz dans un milieu non borné dans une direction (voir Figure 1.1) et borné dans les autres directions. Cette géométrie est appelée un guide d'onde car les ondes se propagent de manière guidées dans la direction infinie  $x$ . Pour simplifier, la présentation ainsi que les résultats numériques seront en 2D (la

généralisation au 3D ne pose pas de difficulté théorique). Nous noterons  $p$  le champ de pression acoustique qui vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta p + \omega^2 p = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu p = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\omega > 0$  est la pulsation (aussi appelée dans la suite fréquence),  $f$  un terme source et  $\nu$  la normale unitaire extérieure au domaine. La vitesse est considérée égale à 1 ce qui est toujours possible après adimensionnalisation.

**Remarque 1.1.1** Dans la suite, nous allons travailler avec l'équation (1.1). Cependant, ce qui est présenté se généralise sans difficulté au cas d'une équation du type :

$$\operatorname{div}(a\nabla u) + b\omega^2 u = f$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions scalaires supposées constantes en  $x$  hors d'un domaine borné de  $\Omega$ .

Nous allons faire les hypothèses suivantes :

1. Le domaine  $\Omega$  est connexe et se décompose en trois sous-domaines d'intérieurs disjoints

$$\Omega = \Omega_a^- \cup \Omega_a \cup \Omega_a^+,$$

où  $\Omega_a^\pm = \{(x, y), \pm x > a, y \in [-h, h]\}$  avec  $h$  et  $a$  deux réels positifs, et le sous-domaine  $\Omega_a$  est borné. On notera par  $\Sigma_a^-$  et  $\Sigma_a^+$  les frontières séparant ces trois sous-domaines.

2. La source  $f$  est à support compact inclus dans  $\Omega_a$ .

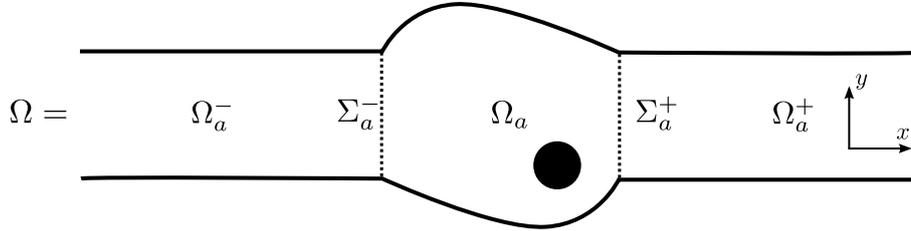


FIGURE 1.1 – Géométrie du guide d'ondes et notations.

Classiquement, pour compléter les équations (1.1), il est nécessaire d'imposer une *condition de radiation* pour définir le comportement de la solution à l'infini (i.e. en  $\pm x \rightarrow \infty$ ). Comme la source  $f$  est localisée, la solution  $p$  doit se propager vers l'infini et on dit qu'elle doit être *sortante*. Cette notion sera définie de façon précise dans la section 1.1.2. Notons que l'équivalent dans l'espace libre (i.e.  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ) est la *condition de Sommerfeld* (cf [86]).

Pour l'instant, définissons notre problème ainsi

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ sortante telle que} \\ & \begin{cases} \Delta p + \omega^2 p = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

On se place dans  $H_{\text{loc}}^1$  car on cherche une solution faible et parce que les solutions se propagent à l'infini sans décroître. Afin d'étudier et de résoudre le problème ci-dessus, nous allons utiliser la démarche suivante (cf [47]) :

1. À l'aide de la décomposition du domaine  $\Omega$  en une partie bornée  $\Omega_a$  et deux parties infinies  $\Omega_a^-$  et  $\Omega_a^+$ , nous allons donner une reformulation multi-domaines équivalente de notre problème initial.
2. Dans les parties invariantes, on exploitera la géométrie séparable pour faire une résolution analytique (voir section 1.1.2) et cela nous permettra d'expliciter la *condition de radiation*.
3. Grâce à cette représentation analytique de la solution dans les sous-domaines infinis, nous pourrons éliminer les inconnues dans les parties invariantes, et réécrire le problème seulement sur la partie bornée à l'aide de conditions dites transparentes sur les frontières  $\Sigma_a^\pm$  (voir section 1.1.3). Cette formulation nous permettra de faire l'analyse mathématique et la résolution numérique.

**Formulation multi-domaines** Commençons par la première étape : en s'appuyant sur les trois domaines introduits  $\Omega_a^-$ ,  $\Omega_a$ ,  $\Omega_a^+$ , on note  $p^-$ ,  $p^a$  et  $p^+$  les champs de pression dans ces trois domaines. Ces inconnues doivent vérifier les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ll} \Delta p^a + \omega^2 p^a = f & \text{dans } \Omega_a, \\ \partial_\nu p^a = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a \cap \partial\Omega, \end{array} \right. \\ & \text{et} \quad \left| \begin{array}{ll} \Delta p^\pm + \omega^2 p^\pm = 0 & \text{dans } \Omega_a^\pm, \\ \partial_\nu p^\pm = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a^\pm \cap \partial\Omega. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.3)$$

où  $p^\pm$  sont *sortantes* dans  $\Omega_a^\pm$  (nous expliciterons cette notion dans la section suivante). De plus,  $p^a$  et  $p^\pm$  doivent également vérifier les conditions de raccord :

$$\left| \begin{array}{ll} p^a = p^\pm & \text{sur } \Sigma_a^\pm, \\ \partial_\nu p^a = \partial_\nu p^\pm & \text{sur } \Sigma_a^\pm. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Les équations (1.3-1.4) nous donnent la formulation multi-domaines. Elle est bien équivalente au problème de départ (1.2) car :

- si  $p$  vérifie (1.2), alors ses restrictions  $p^-$ ,  $p^a$  et  $p^+$  dans les trois domaines respectifs  $\Omega_a^-$ ,  $\Omega_a$  et  $\Omega_a^+$  sont solutions de (1.3) et vérifient les conditions de raccord (1.4),
- si  $p^-$ ,  $p^a$  et  $p^+$  sont solutions de (1.3-1.4), alors la fonction  $p$  définie comme  $p^\pm$  dans  $\Omega_a^\pm$  et  $p^a$  dans  $\Omega_a$  est solution de (1.2) et est dans  $H_{loc}^1(\Omega)$  grâce aux conditions de raccord (1.4).

### 1.1.2 Les modes dans un guide acoustique

Nous allons maintenant nous focaliser sur les parties invariantes du domaine  $\Omega$ . Pour faciliter le discours, nous allons uniquement travailler dans  $\Omega_a^+$ , mais évidemment les mêmes calculs pourraient être fait dans  $\Omega_a^-$ . Rappelons que  $p^+$  vérifie les équations :

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta p^+ + \omega^2 p^+ = 0 & \text{dans } \Omega_a^+, \\ \partial_\nu p^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a^+. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Nous allons chercher à décomposer  $p^+$  sous la forme d'une série de solutions particulières de la forme  $\varphi(y)e^{i\beta x}$ , où  $\beta$  est un nombre complexe (appelé *nombre d'onde*) qui donnera la

propagation dans la direction infinie  $x$ , et  $\varphi$  une fonction donnant la résonance dans la direction transverse  $y$ . Ces solutions particulières seront appelées les **modes**.

En injectant cette forme de solution  $\varphi(y)e^{i\beta x}$  dans (1.5), on est ramené à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2}{dy^2} + \omega^2 \right) \varphi = \beta^2 \varphi & \text{dans } [-h, h], \\ \frac{d}{dy} \varphi = 0 & \text{en } \{y = \pm h\}, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $\beta^2$  joue le rôle de valeur propre et  $\varphi$  de vecteur propre. Ces valeurs propres sont données par la suite  $(\beta_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ , où

$$\beta_k = \begin{cases} \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2} & \text{si } \omega^2 - \left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2 \geq 0, \\ i\sqrt{\left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2 - \omega^2} & \text{si } \omega^2 - \left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2 < 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

et pour chaque valeur propre nous avons la fonction propre associée :

$$\varphi_k = N_k \cos\left((y+h)\frac{k\pi}{2h}\right), \quad (1.8)$$

avec  $N_k$  un coefficient de normalisation égal à 1 pour  $k = 0$  et égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  pour  $k \geq 1$ . Ainsi normalisée, la famille des  $(\varphi_k)_k$  vérifie le

**Lemme 1.1.2** *La famille de fonction  $(\varphi_k)_k$  forme une base orthonormale de  $L^2([-h, h])$ .*

La démonstration de ce lemme est immédiate en notant que les  $(\varphi_k)_k$  forment exactement la base de Fourier.

On déduit alors deux familles de modes :

$$P_k^+ = \varphi_k(y)e^{i\beta_k x}, \quad \text{et} \quad P_k^- = \varphi_k(y)e^{-i\beta_k x}, \quad (1.9)$$

qui se distinguent par leur 'sens' de propagation :

- pour  $\omega^2 - \left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2 \geq 0$ , c'est à dire  $\beta_k \in \mathbb{R}^+$ , on parle de modes propagatifs car ils se propagent dans tout le domaine (voir illustration 1.2). Ces modes sont en nombre fini et leur sens de propagation est donné par la vitesse de groupe  $V_g = \frac{d\omega}{d\beta}$ . Dans notre cas, en différenciant l'expression de  $\beta_k^2$  par rapport à  $\omega$ , on obtient pour les modes  $P_k^+$  :

$$\beta_k d\beta_k = \omega d\omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\omega}{d\beta_k} = \frac{\beta_k}{\omega} > 0.$$

Ces modes sont dit progressifs, c'est à dire qu'ils se déplacent vers la droite, et sont donc *sortants* dans  $\Omega_a^+$ . Au contraire, les modes  $P_k^-$  ont des vitesses de groupe  $V_g < 0$  et sont donc *rentrants*, dans  $\Omega_a^+$ .

- pour  $\omega^2 - \left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2 < 0$ , c'est à dire  $\beta_k \in i\mathbb{R}^+$ , on parle de modes évanescents (voir illustration 1.2) car ils décroissent aux infinis. Ils sont en nombre infini et leur sens de propagation est simplement donné par leur direction de décroissance. Ainsi les modes  $P_k^+$  se "propagent" vers la droite et sont *sortants* dans  $\Omega_a^+$ , et les modes  $P_k^-$  se "propagent" vers la gauche et sont *rentrants* dans  $\Omega_a^+$ .

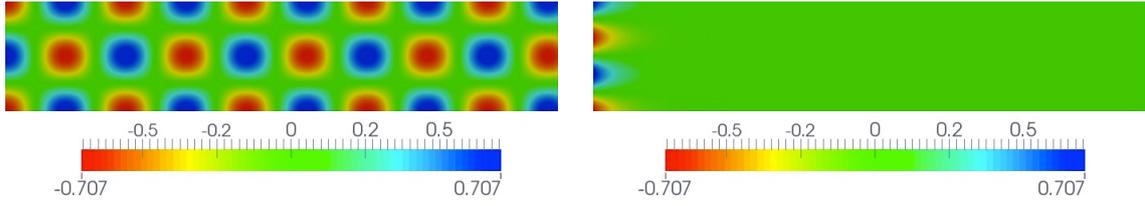


FIGURE 1.2 – À gauche un mode propagatif et un mode évanescent.

Grâce à ces deux familles de modes, nous pouvons définir la notion de *solution sortante* :

**Définition 1.1.1** La solution  $p^+$  dans  $\Omega_a^+$  sera dite **sortante** si elle se décompose sur la famille  $(P_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$ , c'est à dire s'il existe une suite de complexes  $a_k^+$  telle que

$$p^+(x, y) = \sum_{k \geq 0} a_k^+ \varphi_k(y) e^{i\beta_k(x-a)}.$$

On dira de manière similaire que la solution  $p^-$  est **sortante** dans  $\Omega_a^-$  si elle se décompose sur la famille  $(P_k^-)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Ainsi, pour une donnée de Dirichlet  $g_d^+$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$ , on obtient l'unique solution *sortante*  $p^+$  vérifiant  $p^+ = g_d^+$  sur  $\Sigma_a^+$  avec la formule explicite

$$p^+(x, y) = \sum_{k \geq 0} (g_d^+, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)} \varphi_k(y) e^{i\beta_k(x-a)}, \quad (1.10)$$

en décomposant la donnée sur la base des  $(\varphi_k)_k$ . De même, si on se donne une donnée de Neumann  $g_n^+$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$ , on obtient la solution *sortante* vérifiant  $\partial_\nu p^+ = g_n^+$  sur  $\Sigma_a^+$  par :

$$p^+(x, y) = \sum_{k \geq 0} \frac{(g_n^+, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)}}{i\beta_k} \varphi_k(y) e^{i\beta_k(x-a)}, \quad (1.11)$$

si  $\beta_k \neq 0$  pour tout  $k$ . Les fréquences pour lesquelles il existe  $k$  tel que  $\beta_k = 0$  sont appelées les *fréquences de coupure* et sont données par  $\omega = \frac{k\pi}{2h}$ .

**Hypothèse 1.1.3** Nous supposons dans la suite que  $\omega$  n'est pas une fréquence de coupure, c'est à dire :

$$\omega \notin I_c, \quad \text{où } I_c = \left\{ \frac{k\pi}{2h}, k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.12)$$

### 1.1.3 Reformulation à l'aide d'un opérateur $DtN$

À l'aide des expressions explicites obtenues dans les demi-guides, on va éliminer de la formulation multi-domaines (1.3-1.4) les inconnues  $p^\pm$ . Nous allons ainsi obtenir des conditions transparentes sur les frontières artificielles  $\Sigma_a^\pm$ . Par exemple, sur  $\Sigma_a^+$ , la relation de raccord (1.4) impose  $p^a = p^+$ . Donc, connaissant  $p^a|_{\Sigma_a^+}$ , nous obtenons l'unique solution *sortante*  $p^+$  vérifiant  $p^+ = p^a$  sur  $\Sigma_a^+$  par la formule (1.10). De plus, on sait également par la relation de raccord (1.4) que  $\partial_\nu p^a = \partial p^+$  sur  $\Sigma_a^+$ , et donc nous déduisons la relation  $\partial_\nu p^a = T_{D \rightarrow N}^+(p^a|_{\Sigma_a^+})$  entre  $p^a|_{\Sigma_a^+}$  et  $\partial_\nu p^a$ , où l'opérateur de *Dirichlet to Neumann*  $T_{D \rightarrow N}^+$  est défini par :

**Définition 1.1.2** Soit  $T_{D \rightarrow N}^+$  l'opérateur de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$  qui à  $g_d$  associe

$$T_{D \rightarrow N}^+(g_d) = \sum_{k \geq 0} i\beta_k (g_d, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)} \varphi_k.$$

On définit de manière similaire l'opérateur  $T_{D \rightarrow N}^-$  de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^-)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_a^-)$ .

Remarquons que pour  $T_{D \rightarrow N}^-$ , nous avons la même formule explicite car sur  $\Sigma_a^-$  la normale est opposée à la normale sur  $\Sigma_a^+$ . À l'aide de ces opérateurs  $T_{D \rightarrow N}^\pm$ , la formulation multi-domaines (1.3-1.4) peut être reformulé uniquement dans la partie bornée :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p^a \in H^1(\Omega_a) \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p^a + \omega^2 p^a = f & \text{dans } \Omega_a, \\ \partial_\nu p^a = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a \cap \partial\Omega, \\ \partial_\nu p^a = T_{D \rightarrow N}^\pm(p^a) & \text{sur } \Sigma_a^\pm. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Les deux formulations (1.13) et (1.3-1.4) sont équivalentes car :

- Si  $(p^-, p^a, p^+)$  sont solutions des problèmes couplés (1.3-1.4), alors il est immédiat que  $p^a$  est aussi solution de (1.13),
- Si  $p^a$  est solution de (1.13), alors en posant  $p^\pm = p^\pm(p^a|_{\Sigma_a^\pm})$  dans  $\Omega_a^\pm$ , nous reconstruisons une solution de (1.3-1.4). On note ici abusivement  $p^\pm(p^a|_{\Sigma_a^\pm})$  pour désigner la solution sortante  $p^+$  vérifiant  $p^+|_{\Sigma_a^+} = p^a|_{\Sigma_a^+}$ .

**Remarque 1.1.4** Nous avons construit des opérateurs Dirichlet to Neumann, mais on peut tout aussi bien à l'aide de la formule (1.11) et des relations de raccord (1.4) obtenir des opérateurs Neumann to Dirichlet qui relient les dérivées normales  $\partial_\nu p^a|_{\Sigma_a^\pm}$  aux traces  $p^a|_{\Sigma_a^\pm}$ . Ces opérateurs sont les inverses des opérateurs Dirichlet to Neumann  $T_{D \rightarrow N}^\pm$ . Numériquement, il est plus simple de considérer les opérateurs Dirichlet to Neumann car on a directement des conditions variationnelles.

Le problème (1.13) peut s'écrire sous une forme variationnelle classique :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p^a \in H^1(\Omega_a) \text{ telle que } \forall \tilde{p} \in H^1(\Omega_a) \\ & a(p^a, \tilde{p}) - t(p^a, \tilde{p}) = L(\tilde{p}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$  et  $t(\cdot, \cdot) = t^+(\cdot, \cdot) + t^-(\cdot, \cdot)$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(p^a, \tilde{p}) = \int_{\Omega_a} \nabla p^a \cdot \nabla \tilde{p} - \omega^2 p^a \tilde{p}, \\ t^\pm(p^a, \tilde{p}) = \langle T_{D \rightarrow N}^\pm p^a, \tilde{p} \rangle_{\Sigma_a^\pm} = \sum_{k \geq 0} i \beta_k (p^a, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} (\varphi_k, \tilde{p})_{L^2(\Sigma_a^\pm)}, \end{array} \right. \quad (1.15)$$

et où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_a^\pm}$  désigne le produit de dualité entre  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^\pm)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_a^\pm)$ . La forme linéaire continue  $L$  est définie par

$$L(\tilde{p}) = - \int_{\Omega_a} f \tilde{p}.$$

La formulation en domaine borné nous permet de retrouver un résultat classique :

**Théorème 1.1.5** Excepté pour au plus un ensemble dénombrable de fréquences  $\omega$  qui peuvent uniquement s'accumuler en  $+\infty$ , le problème (1.15) admet une unique solution.

**Preuve :** Montrons que le problème relève de l'**alternative de Fredholm** en prouvant qu'il s'écrit sous la forme "coercif + compact". La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  se décompose en une partie coercive (le produit hermitien  $H^1$ ) et une partie compacte (le produit  $L^2$ ) comme suit :

$$a(p, \tilde{p}) = (p, \tilde{p})_{H^1(\Omega_a)} - (\omega^2 + 1)(p, \tilde{p})_{L^2(\Omega_a)}.$$

On parle de partie compacte pour le produit  $L^2$  en identifiant cette forme bilinéaire à un opérateur (via le théorème de représentation de Riesz) qui est compact.

De plus, la forme bilinéaire  $t(\cdot, \cdot)$  se décompose également en deux parties :

- la partie associée aux modes évanescent, notée  $t_{evan} = t_{evan}^+(\cdot, \cdot) + t_{evan}^-(\cdot, \cdot)$ , où  $t_{evan}^\pm$  vérifient :

$$t_{evan}^\pm(p^a, p^a) = \sum_{k \geq k_0} i\beta_k |(p^a, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)}|^2 < 0, \quad (1.16)$$

avec  $k_0$  l'indice du premier mode évanescent. En effet, pour  $k \geq k_0$ , nous avons  $i\beta_k \in \mathbb{R}$  et  $i\beta_k < 0$ . Ainsi, la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega_a)} - t_{evan}(\cdot, \cdot)$  est coercive.

- Puis la partie associée aux modes propagatifs  $t_{prop}(\cdot, \cdot) = t_{prop}^+(\cdot, \cdot) + t_{prop}^-(\cdot, \cdot)$  où  $t_{prop}^\pm$  sont données par les sommes finies :

$$t_{prop}^\pm(p^a, \tilde{p}) = \sum_{k=0}^{k_0-1} i\beta_k (p^a, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} (\varphi_k, \tilde{p})_{L^2(\Sigma_a^\pm)}. \quad (1.17)$$

Ces formes bilinéaires sont "compactes" car le rang des opérateurs associés est fini. Par conséquent, la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega_a)} - t_{prop}$  est "compacte".

On obtient ainsi l'écriture 'coercif+compact' de notre problème et ce qui montre qu'il relève de l'alternative de Fredholm.

Enfin, on montre qu'il y a unicité de la solution excepté pour au plus une suite croissante de fréquences tendant vers l'infini en utilisant les propriétés de symétrie et de coercivité de  $a(\cdot, \cdot) - t_{evan}(\cdot, \cdot)$ , et le théorème du *min-max* sur les valeurs propres. ■

### 1.1.4 Discrétisation de la formulation en domaine borné

La formulation en domaine borné nous a permis de retrouver un résultat classique d'existence et unicité de la solution (voir théorème 1.1.5). De plus, elle nous permet de résoudre numériquement notre problème et nous allons maintenant décrire comment discrétiser la formulation variationnelle (1.14).

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  définie dans (1.15) est classique et ne présente aucune difficulté pour la discrétisation. En revanche, pour traiter les formes bilinéaires  $t^\pm(\cdot, \cdot)$  qui définissent  $t(\cdot, \cdot)$ , il est nécessaire de faire une approximation pour évaluer numériquement

$$t^\pm(p_j, p_i) = \sum_{k \geq 0} i\beta_k (p_j, \varphi^k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} (\varphi^k, p_i)_{L^2(\Sigma_a^\pm)}, \quad (1.18)$$

où  $p_i$  et  $p_j$  sont deux fonctions tests. L'idée est simplement de tronquer la série au  $N$ ème terme. Ainsi, ayant une somme finie, on peut évaluer numériquement cette expression.

En considérant la forme bilinéaire approchée  $t_N(\cdot, \cdot) = t_N^+(\cdot, \cdot) + t_N^-(\cdot, \cdot)$ , où  $t_N^\pm(\cdot, \cdot)$  correspondent aux séries tronquées dans l'expression ci-dessus (1.18), on résout alors le problème approché :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } p^a \in H^1(\Omega_a) \text{ telle que } \forall \tilde{p} \in H^1(\Omega_a) \\ a(p^a, \tilde{p}) - t_N(p^a, \tilde{p}) = L(\tilde{p}), \end{aligned} \quad (1.19)$$

**Remarque 1.1.6** *On montre (voir par exemple [50]) que cette formulation approchée (1.19) admet bien une solution. De plus, cette solution converge exponentiellement vite avec  $N$  vers la solution du problème exact (1.14), pour  $N$  plus grand que le nombre de modes propagatifs.*

Il est important de souligner que la discrétisation de la forme bilinéaire  $t_N(\cdot, \cdot)$  conduit à des blocs pleins dans la matrice issue de la discrétisation. En effet,  $t_N^+(\cdot, \cdot)$ , par exemple, couple tous les degrés de libertés sur la frontière  $\Sigma_a^+$  (de même avec  $t^-(\cdot, \cdot)$  sur  $\Sigma_a^-$ ). Pour des problèmes de grande taille, ces blocs denses pénalisent fortement l'inversion directe de la matrice issue de la discrétisation. Ce point motive l'étude de méthodes itératives pour résoudre notre problème, voir section 1.3.

Afin d'illustrer de manière qualitative les conditions transparentes, nous avons représenté sur la Figure 1.3 la résolution du problème (1.19) pour deux tailles de boîtes  $a = 1$  et  $a = 2$ , à la fréquence  $\omega = 8$  et avec le même terme source  $f$ . Nous avons dans les deux cas tronqué la série (1.18) à  $N = 10$ , ce qui revient pour  $\omega = 8$  à prendre les 3 modes propagatifs et les 7 premiers modes évanescents.

Sur ces simulations, on peut voir que la position des frontières où l'on écrit les conditions transparentes (marquées en noir) n'a pas d'influence sur la solution. En ce sens, elles sont donc transparentes. On a représenté en cercle pointillé le support de la source gaussienne. Par ailleurs, grâce à la formule explicite (1.10) on peut reconstruire la solution dans les domaines  $\Omega_a^\pm$ .

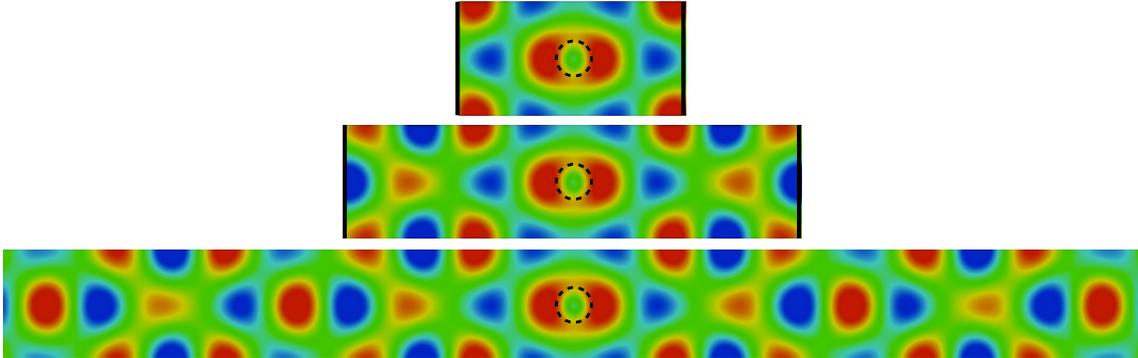


FIGURE 1.3 – Résolution du problème (1.19) pour  $\Omega_a = [-1, 1]$  en haut, puis  $\Omega_a = [-2, 2]$  au centre, et enfin reconstruction de la solution dans tout le domaine en bas. Le terme source  $f$  est représenté par le cercle en pointillé.

## 1.2 Nouvelles formulations avec recouvrement

L'approche classique que nous venons de rappeler fonctionne très bien pour les cas "académiques" 2D. Cependant, dans l'idée de développer une méthode adaptée à des configurations de grande taille (cas 3D élastique), cette approche devient non réalisable car l'inversion directe du système linéaire issue de la discrétisation est trop coûteuse. En effet, comme nous l'avons vu dans section 1.1.4, les opérateurs  $DtN$  induisent des blocs pleins dans la matrice qui pénalisent fortement les méthodes de factorisation directe.

Par conséquent, des approches itératives (voir section 1.3) pour la résolution du système

linéaire sont plus adaptées. En vu d'améliorer leurs vitesses de convergence, nous allons introduire une nouvelle formulation basée sur une approche décomposition de domaine avec recouvrement. Les intérêts de cette nouvelle formulation seront détaillés dans la section 1.3.2 et au prochain chapitre.

Jusqu'ici, les domaines  $\Omega_a$  et  $\Omega_a^\pm$  étaient d'intérieurs disjoints. L'idée va être maintenant de considérer la partie bornée plus 'grande' et chevauchant les parties infinies  $\Omega_a^+$  et  $\Omega_a^-$ . Introduisons le domaine

$$\Omega_b = B_l^- \cup \Omega_a \cup B_l^+,$$

où  $B_l^\pm$  sont les zones de recouvrement définies par  $B_l^\pm = \{a \leq \pm x \leq b\} \times [-h, h]$ , avec  $b \geq a$  (si  $b = a$ , on se retrouve dans la même situation que précédemment). On notera par  $\Sigma_b^\pm$  les frontières verticales en  $x = \pm b$  du domaine  $\Omega_b$  et on notera  $l = b - a \geq 0$  la distance entre  $\Sigma_a^\pm$  et  $\Sigma_b^\pm$ . Ces notations sont rappelées sur la Figure 1.4.

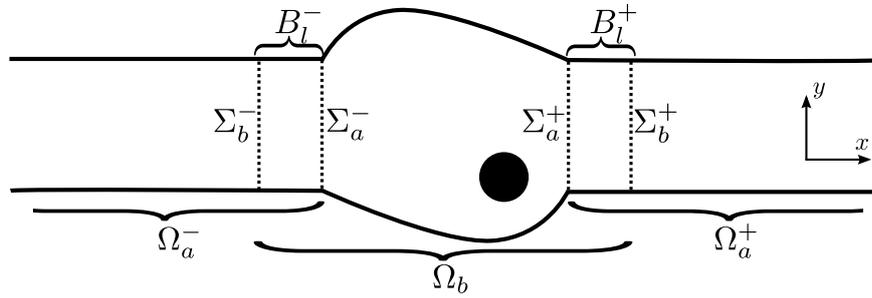


FIGURE 1.4 – Géométrie du guide et notations.

### 1.2.1 Formulation multi-domaines avec recouvrement

À l'aide des domaines  $\Omega_a^-$ ,  $\Omega_b$  et  $\Omega_a^+$ , nous proposons de construire une deuxième formulation multi-domaines du problème initial (1.2). Notons  $p^b$  le champ de pression dans le sous-domaines  $\Omega_b$ .  $p^b$  et  $p^\pm$  vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p^b + \omega^2 p^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \partial_\nu p^b = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \end{array} \right. & (1.20) \\ \text{et} & \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p^\pm + \omega^2 p^\pm = 0 & \text{dans } \Omega_a^\pm, \\ \partial_\nu p^\pm = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a^\pm \cap \partial\Omega. \end{array} \right. \end{aligned}$$

où  $p^\pm$  sont sortantes dans  $\Omega_a^\pm$ . Comme dans le cas sans recouvrement (1.3-1.4), ces équations (1.20) doivent être couplés par quatre conditions de transmission, cette fois définies sur les quatre frontières ( $\Sigma_b^-$ ,  $\Sigma_a^-$ ,  $\Sigma_a^+$ ,  $\Sigma_b^+$ ). À la différence du cas précédent, où l'on imposait nécessairement la continuité de la trace et de la dérivée normale, nous devons ici faire un choix pour la condition qu'on impose sur chaque frontière ( $\Sigma_b^-$ ,  $\Sigma_a^-$ ,  $\Sigma_a^+$ ,  $\Sigma_b^+$ ).

Une extension naturelle de ce qui a été vu serait d'imposer une condition de transmission de type Dirichlet sur  $\Sigma_a^\pm$  et de type Neumann sur  $\Sigma_b^\pm$ . Ici, nous expliquons pourquoi ci-après, nous allons généraliser en imposant des conditions de types Dirichlet et Robin :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p^b = p^\pm & \text{sur } \Sigma_a^\pm, \\ \partial_\nu p^b + \gamma p^b = \partial_\nu p^\pm + \gamma p^\pm & \text{sur } \Sigma_b^\pm, \end{array} \right. & (1.21)$$

**Remarque 1.2.1** *Bien évidemment, il existe de nombreux autres choix possibles pour ces conditions (par exemple deux conditions type Dirichlet ou deux de type Robin). En particulier, nous discuterons dans le prochain chapitre un choix plus complexe, voir la section 2.3.*

La question est de savoir si la formulation multi-domaines (1.20-1.21) est équivalente au problème initial (1.2). Notons qu'il est évident qu'une solution  $p$  du problème (1.2) nous permet de construire une solution de (1.20-1.21) en considérant simplement :

$$(p^- = p|_{\Omega_a^-}, p^b = p|_{\Omega_b}, p^+ = p|_{\Omega_a^+}).$$

L'autre sens est moins trivial et on comprend intuitivement que pour reconstruire simplement une solution  $p$  du problème initial à partir de  $(p^-, p^b, p^+)$  solution de (1.20-1.21),  $p^b$  et  $p^\pm$  doivent coïncider (être *compatibles*) dans les bandes  $B_l^\pm$ .

**Proposition 1.2.2** *Si toute solution  $(p^-, p^b, p^+)$  du problème avec recouvrement (1.20-1.21) vérifie :*

$$p^b = p^\pm \quad \text{dans} \quad B_l^\pm \quad (1.22)$$

*alors la formulation multi-domaines avec recouvrement (1.20-1.21) est équivalente au problème initial (1.2).*

**Preuve :** Si  $(p^-, p^b, p^+)$  est solution de (1.20-1.21), alors  $p$  défini par :

$$p = \begin{cases} p^\pm & \text{dans} \quad \Omega_a^\pm, \\ p^b & \text{dans} \quad \Omega_b, \end{cases} \quad (1.23)$$

est solution de (1.2). De plus, la fonction  $p$  est bien dans  $H_{loc}^1$  car par hypothèse  $p^b = p^\pm$ . ■

Étant donné cette proposition, il est naturel pour essayer de montrer l'équivalence entre les deux formulations (1.20-1.21) et (1.2) de considérer les différences  $v^\pm = p^b - p^\pm$  dans  $B_l^\pm$  et de vouloir prouver qu'elles sont nulles. Les fonctions  $p^b$  et  $p^\pm$  vérifiant les équations (1.20-1.21), nous obtenons directement que  $v^\pm$  est solution du problème homogène :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v^\pm + \omega^2 v^\pm = 0 & \text{dans} \quad B_l^\pm, \\ \partial_\nu v^\pm = 0 & \text{sur} \quad \partial B_l^\pm \cap \partial\Omega, \\ v^\pm = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_a^\pm, \\ \partial_\nu v^\pm + \gamma v^\pm = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_b^\pm. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Ainsi, si l'unique solution du problème est  $v^\pm = 0$ , alors nous avons équivalence entre les deux formulations (1.20-1.21) et (1.2) .

L'unicité de la solution pour les problèmes (1.24) dépend du choix du paramètre  $\gamma$  dans la condition sur  $\Sigma_b^\pm$  et nous avons le :

**Lemme 1.2.3** *Les problèmes (1.24) posés dans les bandes  $B_l^\pm$  ont :*

- si  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$  comme unique solution  $v^\pm = 0$ ,
- si  $\text{Im}(\gamma) = 0$  des fréquences propres  $\omega$  et donc des solutions  $v^\pm$  non nulles.

**Preuve :** Si  $\text{Im}(\gamma) = 0$ , alors on montre par des arguments classiques de théorie spectrale que les problèmes (1.24) admettent des fréquences propres.

Maintenant, supposons que  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ . Les calculs étant les mêmes dans  $B_l^+$  et  $B_l^-$ , nous allons uniquement travailler dans  $B_l^+$ . En testant nos équations (1.24) par  $\overline{v^+}$ , et en utilisant  $v^+|_{\Sigma_a^+} = 0$  et  $\partial_\nu v^+ = -\gamma v^+|_{\Sigma_b^+}$ , il vient :

$$\int_{B_l^+} |\nabla v^+|^2 - \omega^2 |v^+|^2 + \gamma \int_{\Sigma_b^+} |v^+|^2 = 0.$$

En prenant la partie imaginaire de cette expression, on déduit que  $v^+|_{\Sigma_b^+} = 0$  (car  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ ). De plus, on sait aussi que  $\partial_\nu v^+ + \gamma v^+|_{\Sigma_b^+} = 0$ , donc nous avons  $v^+|_{\Sigma_b^+} = \partial_\nu v^+ = 0$  sur  $\Sigma_b^+$ . Par un argument de prolongement unique, on déduit que  $v^+ = 0$  dans tout le domaine  $B_l^+$ . ■

On choisira donc dans la suite  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ . On déduit du lemme ci-dessus et de la proposition 1.2.2 la

**Proposition 1.2.4** *Pour tout  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ , la formulation multi-domaines (1.20-1.21) est équivalente au problème (1.2).*

### Les fréquences de "boite"

Dans le cas  $\text{Im}(\gamma) = 0$ , nous venons de voir que les problèmes posés dans les "boites"  $B_l^\pm$  admettent des fréquences propres. Intuitivement, il semble donc naturel qu'à ces fréquences nous n'avons plus l'équivalence entre la formulation multi-domaines (1.20-1.21) et le problème initial (1.2). Cependant, la démonstration de ce point n'est pas triviale et il nous a semblé intéressant de la détailler. Pour simplifier le discours, on se place dans le cas particulier  $\gamma = 0$  qui revient à imposer une condition de Neumann sur  $\Sigma_b^\pm$ .

La géométrie de  $B_l^\pm$  étant rectangulaire, on est en mesure de calculer explicitement les modes et fréquences propres. Typiquement, dans  $B_l^+$  la fonction  $v^+$  vérifiant les équations homogènes (1.24) se décompose sur les modes aller-retour :

$$v^+ = \sum_{k \geq 0} A_k^+ e^{i\beta_k(x-a)} \varphi_k(y) + A_k^- e^{-i\beta_k(x-a)} \varphi_k(y),$$

où l'on rappelle que  $e^{\pm i\beta_k x} \varphi_k(y)$  sont les modes du guides (voir sections 1.1.2). On déduit de la condition de Dirichlet homogène sur  $\Sigma_a^+$  et de l'orthogonalité des  $\varphi_k$  (voir le lemme 1.1.2) :

$$A_k^- = -A_k^+.$$

Ainsi, pour avoir une solution  $v^+$  non nulle du problème (1.24), on doit trouver un  $k_0$  tel que  $A_{k_0}^+ \neq 0$ . Il vient alors en utilisant la condition de Neumann homogène sur  $\Sigma_b^+$  et l'orthogonalité des modes qu'on doit vérifier :

$$e^{i\beta_{k_0} l} + e^{i\beta_{k_0} l} = 0, \quad \text{où l'on rappelle que } \beta_{k_0} = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k_0 \pi}{2h}\right)^2}. \quad (1.25)$$

On détermine ainsi l'ensemble des fréquences propres :

$$I_l = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ telle qu'il existe } k_0 \text{ vérifiant } \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k_0 \pi}{2h}\right)^2} l = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \right\}, \quad (1.26)$$

pour lesquelles les modes propres associés (dans  $B_l^+$ ) sont solutions non nulles de (1.24), et sont proportionnels à

$$(e^{i\beta_{k_0}(x-a)} - e^{-i\beta_{k_0}(x-a)})\varphi_{k_0}(y). \quad (1.27)$$

Remarquons que nécessairement  $\beta_{k_0}$  doit être réel pour vérifier la relation (1.25), donc l'indice  $k_0$  correspond à un mode propagatif. Les calculs sont les mêmes dans  $B_l^-$ .

**Remarque 1.2.5** *Nous parlons ici de fréquences propres pour la boîte  $B_l^+$ , mais on aurait pu tout aussi bien parler de "l propres" à une pulsation  $\omega$  fixée. En effet, l'ensemble  $I_l$  est "artificiel" dans le sens qu'il vient de notre méthode, et pour  $\omega$  fixé, on peut toujours choisir  $l$  pour éviter les modes de boîtes. De manière générale, ce sont les couples  $(\omega, l)$  de l'ensemble*

$$I = \{(\omega, l) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid \text{tel qu'il existe } k_0 \text{ vérifiant } \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k_0\pi}{2h}\right)^2} l = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\},$$

pour lesquelles il existe des solutions non nulles à (1.24).

Maintenant que nous avons caractérisé les éléments propres des boîtes  $B_l^\pm$ , nous pouvons énoncer la

**Proposition 1.2.6** *Si  $\omega \in I_l$ , alors la formulation multi-domaines (1.20-1.21) n'est pas équivalente au problème initial (1.2).*

**Preuve :** Pour prouver ce résultat, nous allons montrer que le problème (1.20-1.21) avec une source  $f = 0$  admet des solutions non nulles. Considérons le problème de diffraction de l'onde incidente  $e^{-i\beta_{k_0}(x-a)}\varphi_{k_0}(y)$  dans le guide  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \Delta p + \omega^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (1.28) \\ & \text{et telle que } p = p^{diff} + e^{-i\beta_{k_0}(x-a)}\varphi_{k_0}(y) \text{ dans } \Omega_a^+, \\ & \text{où } p^{diff} \text{ est sortante.} \end{aligned}$$

Ici,  $p$  n'est pas sortante dans  $\Omega_a^+$ . C'est la superposition d'une onde incidente rentrante  $e^{-i\beta_{k_0}(x-a)}\varphi_{k_0}(y)$  et du champ diffracté  $p^{diff}$  qui lui est sortant.

Ce problème admet une solution non nulle  $p$  et à partir de cette solution nous construisons :

- $p^- = p$  dans  $\Omega_a^-$ ,
- $p^b = p$  dans  $\Omega_b$ ,
- et  $p^+ = p^{diff} + e^{i\beta_{k_0}(x-a)}\varphi_{k_0}(y)$  dans  $\Omega_a^+$ .

Par définition,  $(p^-, p^b, p^+)$  est solution des équations (1.20) et on a bien  $p^\pm$  sortantes. De plus, les relations de transmission (1.21) sont également vérifiées car :

- dans  $B_l^-$ , nous avons  $v^- = p^b - p^- = 0$ , donc en particulier  $\partial_\nu p^b = \partial_\nu p^-$  sur  $\Sigma_b^-$  et  $p^- = p^b$  sur  $\Sigma_a^-$ .
- dans  $B_l^+$ , nous avons  $v^+ = p^b - p^+ = (e^{-i\beta_{k_0}(x-a)} - e^{i\beta_{k_0}(x-a)})\varphi_{k_0}(y)$ . La fonction  $v^+$  est donc un mode propre de la boîte  $B_l^+$  et est solution du problème (1.24). Par conséquent, nous avons  $v^+ = 0$  sur  $\Sigma_a^+$  et  $\partial_\nu v^+ = 0$  sur  $\Sigma_b^+$ , ce qui revient à vérifier les relations de transmission (1.21).

Nous avons ainsi construit  $(p^-, p^b, p^+)$  une solution non nulle du problème homogène (1.20-1.21). ■

De manière générale, on peut conjecturer que pour d'autres conditions de transmission, nous avons bien l'équivalence entre le problème initial (1.2) et la formulation multi-domaines (1.20-1.21) si et seulement si les problèmes de "boite" (1.24) admettent  $v^\pm = 0$  comme uniques solutions.

### 1.2.2 Reformulation à l'aide d'un opérateur $DtR$ "avec recouvrement"

Comme dans le cas sans recouvrement, à l'aide des décompositions modales dans  $\Omega_a^\pm$ , (voir la formule (1.10)), nous avons pu éliminer les inconnues  $p^\pm$  et donner une nouvelle formulation en domaine borné. Cette fois, nous utiliserons des opérateurs "Dirichlet to Robin", définis par

**Définition 1.2.1** Soit  $T_{D \rightarrow R}^{l,+}$  l'opérateur défini de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_b^+)$  qui à une donnée  $g_d$  associe

$$T_{D \rightarrow R}^{l,+}(g_d) = \sum_{k \geq 0} (g_d, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)} \varphi_k e^{i\beta_k l} (i\beta_k + \gamma).$$

De manière similaire, on définit l'opérateur  $T_{D \rightarrow R}^{l,-}$  qui va de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^-)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_b^-)$ .

**Remarque 1.2.7** Nous avons la même formule pour  $T_{D \rightarrow R}^{l,-}$  et  $T_{D \rightarrow R}^{l,+}$  car sur  $\Sigma_b^-$ , la normale est opposée à la normale sur  $\Sigma_b^+$  et car  $e^{-i\beta_k(-b+a)} = e^{i\beta_k l}$ .

Une propriété importante sur les opérateurs  $T_{D \rightarrow R}^{l,\pm}$  induite par le recouvrement est la

**Proposition 1.2.8** Pour tout  $l > 0$ , les opérateurs  $T_{D \rightarrow R}^{l,\pm}$  sont compacts.

La démonstration de cette proposition sera faite un peu plus loin.

Avec ces opérateurs, on peut dériver des *conditions transparentes* originales reliant des données sur des frontières séparées et obtenir le problème posé dans  $\Omega_b$  ainsi :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p^b + \omega^2 p^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \partial_\nu p^b = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ \partial_\nu p^b + \gamma p^b = T_{D \rightarrow R}^{l,\pm}(p^b|_{\Sigma_a^\pm}) & \text{sur } \Sigma_b^\pm. \end{array} \right. \end{array} \quad (1.29)$$

Ce problème est équivalent au problème initial (1.2). Sachant que le problème (1.2) est bien posé sauf pour un ensemble dénombrable de fréquences, voir théorème 1.1.5, on sait que le problème (1.29) admet une unique solution, sauf pour ces même fréquences.

Les résultats d'existence et unicité pour le problème (1.29) ont été obtenus par équivalence avec le problème initial. Cependant, comme nous le verrons dans le chapitre sur l'élasticité, nous ne pourrons plus utiliser l'équivalence pour montrer le caractère bien posé de la formulation en domaine borné.

Pour cette raison, il est intéressant de montrer directement que le problème relève de

**l'alternative de Fredholm analytique.** Autrement dit, on va montrer qu'il s'écrit sous la forme "coercif+compact" où la partie compacte dépend analytiquement de la fréquence  $\omega$ . Commençons par donner la formulation variationnelle de notre problème :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que } \forall \tilde{p} \in H^1(\Omega_b) \\ a_\gamma(p^b, \tilde{p}) - t_l(p^b, \tilde{p}) = L(\tilde{p}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

où les formes bilinéaires  $a_\gamma(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) - b_\gamma^-(\cdot, \cdot) - b_\gamma^+(\cdot, \cdot)$  et  $t_l(\cdot, \cdot) = t_l^+(\cdot, \cdot) + t_l^-(\cdot, \cdot)$  sont définies par :

$$\left\{ \begin{aligned} a(p^b, \tilde{p}) &= \int_{\Omega_b} \nabla p^b \cdot \overline{\nabla \tilde{p}} - \omega^2 p^b \overline{\tilde{p}}, \\ b_\gamma^\pm(p^b, \tilde{p}) &= \gamma \int_{\Sigma_b^\pm} p^b \overline{\tilde{p}}, \\ t^\pm(p^b, \tilde{p}) &= \int_{\Sigma_b^\pm} T_{D \rightarrow R}^{l, \pm}(p^b|_{\Sigma_a^\pm}) \overline{\tilde{p}} = \sum_{k \geq 0} (p^b, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} e^{i\beta_k l} (i\beta_k + \gamma) (\varphi_k, \tilde{p})_{L^2(\Sigma_b^\pm)}. \end{aligned} \right. \quad (1.31)$$

Remarquons qu'on ne peut pas reproduire la démonstration du cas  $l = 0$  car ici les formes bilinéaires  $t_l^\pm(\cdot, \cdot)$  :

$$t_l^\pm(p^b, \tilde{p}) = \sum_{k \geq 0} (i\beta_k + \gamma) (p^b, \varphi^k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} e^{i\beta_k l} \overline{(\tilde{p}, \varphi^k)_{L^2(\Sigma_b^\pm)}},$$

couplent des degrés de liberté sur des frontières séparées  $\Sigma_a^\pm$  et  $\Sigma_b^\pm$ . Par conséquent, on ne peut rien dire sur les signes de  $t^\pm(p^j, p^j)$ , où  $p^j$  est une fonction test, comme dans la preuve de 1.1.5.

On utilisera ici le découpage suivant :

- pour la partie coercive, on considérera la norme  $H^1(\Omega_b)$ ,
- et pour la partie compacte tout le reste, c'est à dire :

$$(\omega^2 + 1)(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega_b)} + b_\gamma^-(\cdot, \cdot) + b_\gamma^+(\cdot, \cdot) + t_l(\cdot, \cdot).$$

On sait que cette forme bilinéaire est associée (via le théorème de représentation de Riesz) à un opérateur compact par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve de du théorème 1.1.5, et par la proposition 1.2.8.

La dépendance analytique de la partie compacte peut être montrée sans difficulté pour  $\omega$  dans  $G$ , où  $G$  est la zone du plan complexe définie par :

$$G = \{\omega \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(\omega) \geq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(\omega) \geq 0\} \setminus I_c.$$

L'analyticité des opérateurs  $T_{D \rightarrow R}^{l, \pm}$  vient de l'analyticité des fonctions  $e^{i\beta_k l}$  par rapport à  $\omega$ . Remarquons que l'on doit exclure l'ensemble des fréquences de coupure  $I_c$  défini par 1.12 car la fonction :

$$e^{i\sqrt{\omega^2 - (k\pi/2h)^2} l},$$

n'est pas analytique pour ces valeurs de  $\omega$ .

Il nous reste finalement à démontrer la compacité des opérateurs  $T_{D \rightarrow N}^{l, \pm}$  pour tout  $\omega$  dans  $G$ . Notons que pour  $\omega \in G$  complexe tel que  $\operatorname{Im}(\omega) > 0$ , on étend la définition de  $\beta_k$  par :

$$\beta_k = i\sqrt{\omega^2 - (k\pi/2h)^2},$$

en considérant la racine complexe assurant  $\text{Im}(\beta_k) > 0$ .

Avant de montrer la proposition 1.2.8, commençons par rappeler une définition (qui nous sera utile) de la norme sur l'espace de Sobolev  $H^s([-h, h])$  pour  $s$  réel :

**Définition 1.2.2** Soit  $g$  une fonction de  $H^s([-h, h])$ . On définit la norme de  $g$  par

$$\|g\|_{H^s([-h, h])}^2 = \sum_{k \geq 0} |(g, \varphi_k)|^2 \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{(2h)^2}\right)^s$$

On peut maintenant donner la

**Preuve de la proposition 1.2.8** : Nous allons montrer le résultat pour  $T_{D \rightarrow N}^{l,+}$  uniquement, la démonstration pour  $T_{D \rightarrow R}^{l,-}$  étant la même. Pour montrer la compacité, nous allons prouver que  $T_{D \rightarrow R}^{l,+}$  est limite d'une suite d'opérateurs de rangs finis (les sommes partielles).

Pour cela, prouvons que le reste de la série  $R_N$  définie par :

$$R_N(g) = \sum_{k \geq N} (g, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)} \varphi_k e^{i\beta_k l} (i\beta_k + \gamma),$$

où  $g \in H^{\frac{1}{2}}([-h, h])$ , converge vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ , au sens de la norme d'opérateur, c'est à dire que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{\{\|g\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)}=1\}} \|R_N(g)\|_{H^{-1/2}([-h, h])} = 0.$$

Si  $\text{Im}(\omega) > 0$ , alors on a toujours  $|e^{i\beta_k l}| \leq |e^{i\beta_k(\text{Re}(\omega))l}|$  et on peut montrer qu'il existe une constante  $C_{\text{Im}(\omega)}$  telle que  $|i\beta_k| \leq C_{\text{Im}(\omega)} |\beta_k(\text{Re}(\omega))|$ . Par conséquent, nous allons uniquement considérer le cas plus difficile de  $\omega$  réel qui servira de majorant aux autres cas (à une constante multiplicative près indépendante de  $N$ ).

Supposons  $\text{Im}(\omega) = 0$  et  $N$  suffisamment grand pour avoir  $\beta_k = i\sqrt{(\frac{k\pi}{2h})^2 - \omega^2}$  pour tout  $k \geq N$ . Par définition de la norme sur  $H^{-\frac{1}{2}}([-h, h])$ , il vient alors pour tout  $g \in H^{1/2}([-h, h])$  :

$$\begin{aligned} \|R_N(g)\|_{H^{-\frac{1}{2}}([-h, h])}^2 &= \sum_{k \geq N} |(g, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)}|^2 e^{-2|\beta_k|l} \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{(2h)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} |i\beta_k + \gamma|^2, \\ &\leq 2e^{-2|\beta_N|l} \sum_{k \geq N} |(g, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)}|^2 \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{(2h)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (|\beta_k|^2 + \gamma^2). \end{aligned} \quad (1.32)$$

La majoration ci-dessus est obtenue en remarquant simplement que  $|i\beta_k + \gamma|^2 \leq 2(|\beta_k|^2 + |\gamma|^2)$  et que  $e^{-2|\beta_N|l} \geq e^{-2|\beta_k|l}$  pour tout  $k \geq N$ . Ensuite, en séparant la somme en deux :

— d'un coté le terme avec  $|\beta_k|^2$ , on utilise la majoration

$$|\beta_k|^2 \leq 1 + \frac{k^2 \pi^2}{(2h)^2},$$

— d'un autre coté le terme avec  $\gamma$ , on utilise la majoration simple

$$\left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{(2h)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{(2h)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \| R_N(g) \|_{H^{-\frac{1}{2}}([-h,h])} &\leq 2e^{-2|\beta_N|l} \sum_{k \geq N} |(g, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)}|^2 \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{(2h)^2}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + |\gamma|^2), \\ &\leq 2e^{-2|\beta_N|l} (1 + |\gamma|^2) \| g \|_{H^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

On a donc un majorant de la norme de l'opérateur  $R_N$  donné par  $e^{-2|\beta_N|l}(1 + |\gamma|^2)$  qui tend exponentiellement vite vers 0 avec  $N$ , ce qui prouve notre résultat. ■

**Remarque 1.2.9** *On peut montrer ce résultat de manière plus abstraite en notant que  $T_{D \rightarrow R}^{l,+}(g)$  donne  $\partial_\nu p^+ + \gamma p^+|_{\Sigma_b^+}$  sur  $\Sigma_b^+$ , où  $p^+$  est la solution sortante du problème dans  $\Omega_a^+$  vérifiant  $p^+|_{\Sigma_a^+} = g$ . Or,  $\Sigma_b^+$  est à l'intérieur du domaine  $\Omega_a^+$  et par conséquent, par des arguments de régularité de  $p^+$  (cf [61]), on montre que  $(\partial_\nu + \gamma)p^+$  est dans un espace plus régulier que  $H^{-\frac{1}{2}}$ , en particulier  $H^{\frac{1}{2}}$ . On termine en utilisant le théorème d'injection compacte des espaces de Sobolev. Cependant, nous avons préféré cette démonstration plus calculatoire afin de mettre en évidence le rôle des exponentielles dans les séries, et parce que dans le cas de l'élasticité nous devons adopter cette approche.*

**Remarque 1.2.10** *Si la pulsation  $\omega$  est une fréquence de coupure, on peut toujours effectuer la preuve de compacité ci-dessus. En revanche, on n'a plus l'analyticité en ce point comme nous l'avons déjà mentionné.*

Notre problème avec recouvrement relève donc du **théorème de Fredholm analytique** et nous pouvons donner le

**Théorème 1.2.11** *Le problème (1.29) (ou sous forme variationnelle (1.30)) est bien posé excepté pour au plus un ensemble dénombrable de fréquences qui peuvent s'accumuler autour des fréquences de coupures  $\omega = \frac{k\pi}{2h}$ .*

Ici bien sur, on sait par le théorème 1.1.5 que l'ensemble des fréquences pouvant poser problème tend nécessairement vers  $+\infty$  et ne s'accumulent jamais autour des fréquences de coupures.

**Preuve :** Sachant que le problème relève du théorème de **Fredholm**, pour montrer ce résultat, il faut trouver une fréquence  $\omega$  pour laquelle le problème admet une unique solution pour tout  $f$ . Considérons une fréquence  $\omega = i\omega_0 \in G$  imaginaire pure, où  $\omega_0$  est un réel strictement positif. Dans ce cas, le problème (1.29) est équivalent à :

$$\begin{cases} \Delta p - \omega_0^2 p = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu p = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.34)$$

qui admet une unique solution dans  $H^1(\Omega)$  simplement en appliquant le théorème de Lax-Milgram. ■

### 1.2.3 Discrétisation de la formulation en domaine borné

Pour discrétiser la formulation variationnelle (1.30), la procédure est similaire au cas sans recouvrement décrite dans la section 1.1.4. L'évaluation numérique des termes :

$$t_l^\pm(p^i, p^j) = \sum_{k \geq 0} (i\beta_k + \gamma) (p^i, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)} e^{i\beta_k l} (\varphi_k, p^j)_{L^2(\Sigma_b^+)}, \quad (1.35)$$

qui définissent  $t_l(\cdot, \cdot)$ , se fait en tronquant simplement la série après le  $N$ ème terme. Ainsi, on résout le problème approché :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que } \forall \tilde{p} \in H^1(\Omega_b) \\ a_\gamma(p^b, \tilde{p}) - t_l^N(p^b, \tilde{p}) = L(\tilde{p}), \end{aligned} \quad (1.36)$$

où la forme bilinéaire  $t_l^N(\cdot, \cdot)$  est définie à l'aide des séries tronquées de (1.35).

**Remarque 1.2.12** *Comme dans le cas sans recouvrement, on montre (ici plus facilement) que le problème approché (1.36) admet une unique solution qui converge exponentiellement vite avec  $N$  vers la solution du problème exact (1.30).*

*Une manière d'appréhender ce résultat est de remarquer que les termes de la série (1.35) sont équivalents à  $e^{-|\beta_k|l}$  pour  $k$  suffisamment grand. Par conséquent, la série converge exponentiellement vite et seul les premiers termes sont prépondérants.*

Pour  $l > 0$ , la discrétisation de la forme bilinéaire  $t_l$  conduit à des blocs denses comme dans le cas  $l = 0$ . Cependant, à la différence du cas sans recouvrement, ces blocs ne sont pas symétriques car ils viennent du couplage entre les degrés de liberté sur deux frontières séparés.

Ayant vu comment discrétiser la nouvelle formulation, on peut illustrer numériquement la proposition 1.2.6 qui montre que l'équivalence entre les problèmes (1.30) et (1.2) n'est pas vraie si  $\gamma = 0$  pour les fréquences de boîte (voir la fin de la section 1.2.1). Nous avons tracé sur la Figure 1.5 le conditionnement de la matrice obtenue après discrétisation du problème (1.36) pour  $\omega \in [0, 5]$ , dans trois cas :

- tout d'abord, nous avons pris  $a = b = 2$  et  $\gamma = 0$  comme cas de référence. On observe alors que la matrice est inversible, sauf aux fréquences de coupure (marquées par la ligne bleue).
- Ensuite, nous avons pris  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $\gamma = 3 + 5i$ . On obtient également que la matrice est inversible sauf aux coupures.
- Enfin, pour les paramètres  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $\gamma = 0$ , la matrice n'est pas inversible aux coupures et aux fréquences propres  $I_l$  des "boîtes"  $B_l^\pm$  (marquées par les lignes vertes).

## 1.3 Étude de méthodes itératives de résolution

Bien que le cas 2D acoustique ne présente aucune difficulté particulière, nous allons l'utiliser comme modèle pour étudier des méthodes itératives de résolution. La motivation réside dans le cas de configurations élastiques 3D réalistes pour lesquelles l'inversion directe du système linéaire issue de la discrétisation peut être très coûteuse, voir impossible. En effet, les conditions transparentes définies à l'aide des opérateurs *Dirichlet to Neumann* (ou *to Robin* pour le cas avec recouvrement) sont non locales (voir les sections 1.1.4 et 1.2.3) et créent des blocs denses dans la matrice globale.

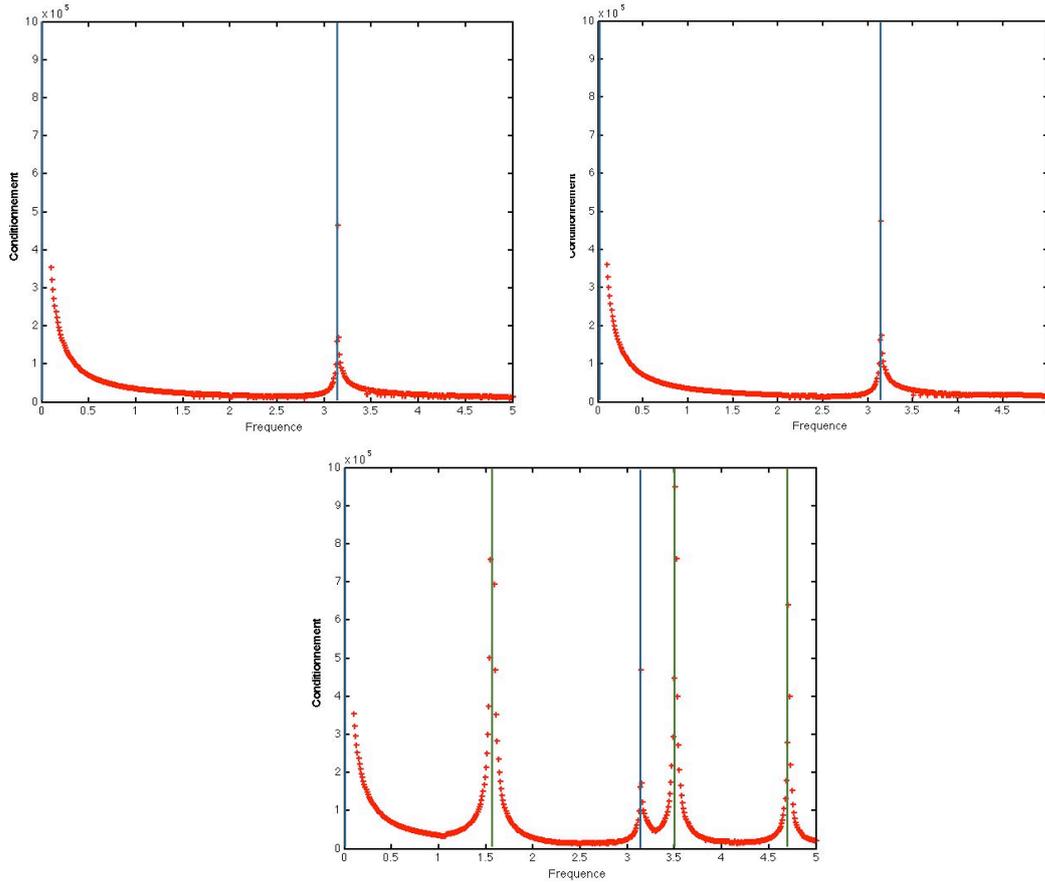


FIGURE 1.5 – En haut à gauche :  $a = b = 2$  et  $\gamma = 0$ , en haut à droite :  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $\gamma = 3 + 5i$ , en bas :  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $\gamma = 0$ .

Une manière naturelle de palier ce défaut est d'utiliser une méthode itérative de résolution. Typiquement, considérons le système linéaire :

$$MU = F,$$

où  $M$  est la matrice à inverser,  $U$  la solution recherchée et  $F$  le second membre. L'idée est de découper  $M$  sous la forme  $M = A + K$ , où  $A$  est la partie creuse facilement inversible et  $K$  les blocs denses, et de résoudre alors :

$$AU_{(n+1)} = F - KU_{(n)}.$$

Ainsi, en cas de convergence, on retrouve la solution exacte de notre problème, tout en évitant l'inversion directe du système linéaire "partiellement" dense.

Dans cette idée, la première approche abordée est l'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine. Cette technique introduite par Schwarz [85] consiste à diviser le domaine global  $\Omega$  en sous-domaines et de résoudre itérativement dans chaque sous-domaine. Bien sûr, il est nécessaire d'imposer des conditions de transmission sur les frontières des sous-domaines non incluses dans la frontière  $\partial\Omega$  du domaine global. Le choix de ces conditions est important car il détermine les propriétés de convergence de la méthode.

Dans le cas elliptique, on sait de manière classique que la méthode de Schwarz pour des

domaines bornés converge (cf. [79, 62, 44]). Notons que le cas de milieux infinis a également été étudié dans les travaux de F. Ben Belgacem et al. [14]. Dans ce cas, une représentation intégrale de la solution dans le domaine extérieur infini est utilisée avec une représentation élément fini dans un domaine borné.

Cependant, des difficultés apparaissent lorsqu'on souhaite considérer des équations plus générales et typiquement l'équation de Helmholtz. Cette problématique a été étudiée notamment dans les travaux de B. Després [33] et ceux de F. Collino et al. [29], qui traitent du cas d'une géométrie bornée. On montre qu'en utilisant des conditions de transmission entre les sous-domaines de type *Robin*, on peut assurer la convergence de la méthode.

Maintenant, si on se place dans un guide infini, l'utilisation des conditions de type Robin ne suffit plus pour assurer la convergence. Ce cas a été étudié notamment dans les travaux de N. Zrelli et N. Gmati [49]. Pour cette situation, on peut montrer un résultat de convergence faible (cf [49, 21]) en utilisant des techniques de relaxation.

Ces résultats de convergence faible ont été obtenus dans le cas acoustique et ne peuvent pas s'étendre au cas élastique. Par conséquent, nous avons adopté une autre approche et cherché à utiliser la méthode de Schwarz comme préconditionneur de la méthode GMRES (cf [82, 83]). L'algorithme GMRES permet d'assurer la convergence mais pour obtenir un taux de convergence raisonnable, il doit être préconditionné. Nous expliquerons en quoi notre choix de préconditionneur est intéressant. Soulignons qu'une approche similaire a été utilisée dans [15] pour des problèmes de diffraction dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.3.1 L'algorithme de Schwarz

Afin de discuter de manière générale du cas avec et sans recouvrement, nous allons considérer la décomposition  $(\Omega_a^-, \Omega_b, \Omega_a^+)$  du domaine  $\Omega$  où  $b \geq a$ . L'algorithme de Schwarz consiste à résoudre itérativement dans le domaine borné  $\Omega_b$ , puis dans les demi-guides. Mathématiquement, ce processus s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p_{(n)}^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{(n)}^b + \omega^2 p_{(n)}^b = f \text{ dans } \Omega_b, \\ \partial_\nu p_{(n)}^b = 0 \text{ sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ (\partial_\nu + \gamma)p_{(n)}^b = (\partial_\nu + \gamma)p_{(n)}^\pm \text{ sur } \Sigma_b^\pm, \end{array} \right. \end{aligned} \tag{1.37}$$

et trouver  $p_{(n)}^\pm \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_a^\pm)$  sortantes telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{(n)}^\pm + \omega^2 p_{(n)}^\pm = 0 \text{ dans } \Omega_a^\pm, \\ \partial_\nu p_{(n)}^\pm = 0 \text{ sur } \partial\Omega_a^\pm \cap \partial\Omega, \\ p_{(n)}^\pm = p_{(n-1)}^b \text{ sur } \Sigma_a^\pm. \end{array} \right.$$

où nous avons choisi pour simplifier notre étude comme conditions aux bords des sous-domaines :

- une condition type Robin sur  $\Sigma_b^\pm$ ,
- et une condition type Dirichlet sur  $\Sigma_a^\pm$ .

L'avantage calculatoire de cette approche est que la résolution dans  $\Omega_b$  (effectuée par éléments finis) nécessite uniquement l'inversion d'une matrice creuse. En effet, ici les conditions aux

bords sont des données. De plus, la résolution dans les demi-guides  $\Omega_a^\pm$  se fait simplement par projection de la donnée de trace sur  $\Sigma_a^\pm$  sur les modes (voir formule (1.10)), ce qui est peu coûteux. Cet algorithme semble donc présenter tous les avantages souhaités.

D'autre part, on souhaite que le processus itératif (1.37) ci-dessus soit **bien posé** et **consistant** dans le sens suivant :

**Définition 1.3.1** *On dira que l'algorithme itératif (1.37) est :*

1. **bien posé** si chacun des sous problèmes est bien posé,
2. **consistant** si pour toute donnée initiale, en cas de convergence, la solution limite  $(p^-, p^b, p^+)$  du processus itératif vérifie :
  - pour  $l = 0$  le raccord :

$$p^b = p^\pm \text{ sur } \Sigma_b^\pm \quad \text{et} \quad \partial_\nu p^b = \partial_\nu p^\pm \text{ sur } \Sigma_b^\pm,$$

- pour  $l > 0$ , la compatibilité

$$p^b = p^\pm \quad \text{dans} \quad B_l^\pm.$$

La définition de **consistance** revient à dire qu'en cas de convergence, la solution limite est solution de la reformulation *équivalente* multi-domaines du problème initial (1.2). En effet, nous avons vu que :

- pour  $l = 0$ , imposer la continuité de la trace et de la dérivée normale entre  $p^b$  et  $p^\pm$  sur les interfaces  $\Sigma_b^\pm$  donne une formulation multi-domaines équivalente au problème initial (voir section 1.1.1),
- pour  $l > 0$ , la condition de la proposition 1.2.2 impose la compatibilité  $p^b = p^\pm$  dans les bandes  $B_l^\pm$  pour que l'équivalence soit assurée.

Bien évidemment, on souhaite également que l'algorithme converge et ce point sera discuté dans la section suivante 1.3.2.

**Remarque 1.3.1** *De manière générale, d'autres choix de condition aux bords des sous-domaines  $\Omega_b$  et  $\Omega_a^\pm$  sont possibles mais elles doivent conduire à un algorithme **bien posé** et **consistant**. En particulier, nous discuterons dans la section 2.3 du chapitre 2 une autre possibilité.*

Vérifions maintenant qu'avec nos choix de conditions aux bords des sous-domaines, l'algorithme (1.37) est **bien posé** et **consistant**. Commençons par le caractère **bien posé**.

Les problèmes dans les demi-guides sont bien posés et se résolvent directement par projection modale (voir la formule (1.10)). Par conséquent, montrer que l'algorithme (1.37) est **bien posé** revient à prouver que le problème dans  $\Omega_b$  est bien posé.

**Lemme 1.3.2** *Le problème :*

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ \left| \begin{array}{ll} \Delta p^b + \omega^2 p^b = f & \text{dans} \quad \Omega_b, \\ \partial_\nu p^b = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ (\partial_\nu + \gamma)p^b = g_n^\pm & \text{sur} \quad \Sigma_b^\pm, \end{array} \right. \end{array} \quad (1.38)$$

*admet :*

- pour  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$  une unique solution,
- pour  $\text{Im}(\gamma) = 0$  un ensemble discret de fréquences propres.

Les données  $g_n^\pm$  et  $f$  sont respectivement dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_b^\pm)$  et  $L^2(\Omega_b)$ .

**Preuve :** Pour le cas  $\text{Im}(\gamma) = 0$ , la démonstration repose sur des arguments de théorie spectrale, comme pour le lemme 1.2.3.

Maintenant, si  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ , la démonstration de ce lemme se fait en deux étapes :

1. Tout d'abord, on montre l'unicité de la solution en prouvant que le problème homogène a comme unique solution  $p^b = 0$ . On utilise les mêmes arguments que la démonstration du lemme 1.2.3.
2. Ensuite, on montre que le problème relève de l'**alternative de Fredholm** et ayant prouvé l'unicité de la solution pour tout  $\omega$ , on obtient également son existence. ■

Avec ce lemme, on déduit que pour tout  $\gamma$  vérifiant  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ , l'algorithme (1.37) est **bien posé**. Sinon, si  $\text{Im}(\gamma) = 0$  le caractère **bien posé** est vrai pour presque toute fréquence.

Étudions maintenant la propriété de **consistance**. Supposons que l'algorithme converge vers une solution  $(p^-, p^b, p^+)$ . Nous allons distinguer deux cas :

- si  $l = 0$ , alors, d'après les équations (1.37), la solution limite vérifiera :

$$p^b = p^\pm \quad \text{et} \quad (\partial_\nu + \gamma)p^b = (\partial_\nu + \gamma)p^\pm \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^\pm.$$

Par conséquent, pour tout  $\gamma$ ,  $p^b$  et  $p^\pm$  se raccordent en trace et dérivée normale et donc l'algorithme est **consistant**.

- si  $l > 0$ , en posant  $v^\pm = p^b - p^\pm$ , on sait par le lemme 1.2.3 que nécessairement  $v^\pm = 0$  (et donc qu'on a la compatibilité  $p^b = p^\pm$ ) pour tout  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ .

Étant donné ces résultats, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

**Proposition 1.3.3** *Pour tout  $l \geq 0$  et  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ , l'algorithme itératif (1.37) est **bien posé** et **consistant**.*

**Remarque 1.3.4** *Soulignons que dans le cas  $\gamma = 0$ , l'algorithme itératif (1.37) :*

- n'est pas **bien posé** pour les fréquences propres du problème (1.38) posé dans  $\Omega_b$ ,
- et n'est pas **consistant** pour les fréquences propres des boîtes  $B_l^\pm$  par la proposition 1.2.6.

### 1.3.2 Analyse spectrale dans le cas d'une géométrie séparable

Dans ce qui suit, pour étudier la convergence, on considérera le terme source  $f = 0$  et on cherchera à montrer que  $p_{(n)}^b$  et  $p_{(n)}^+$  tendent vers 0 pour toute donnée initiale non nulle.

Dans un premier temps, nous allons étudier la convergence dans le cas particulier d'une géométrie séparable qui nous permettra de faire des calculs analytiquement. Nous allons considérer un domaine  $\Omega$  rectangulaire (voir Figure 1.6) défini par :

$$\Omega = [0, +\infty[ \times [-h, h].$$

On découpera alors ce domaine en

$$\Omega_b = [0, b] \times [-h, h], \quad \text{et} \quad \Omega_a^+ = [a, +\infty[ \times [-h, h],$$

et l'algorithme de Schwarz associé sera donc :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p_{(n)}^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_{(n)}^b + \omega^2 p_{(n)}^b = 0 & \text{dans } \Omega_b, \\ \partial_\nu p_{(n)}^b = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ (\partial_\nu + \gamma)p_{(n)}^b = (\partial_\nu + \gamma)p_{(n)}^\pm & \text{sur } \Sigma_b^+, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.39)$$

et trouver  $p_{(n)}^+ \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_a^+)$  sortante telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_{(n)}^+ + \omega^2 p_{(n)}^+ = 0 & \text{dans } \Omega_a^+, \\ \partial_\nu p_{(n)}^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a^+ \cap \partial\Omega, \\ p_{(n)}^+ = p_{(n-1)}^b & \text{sur } \Sigma_a^+. \end{array} \right.$$

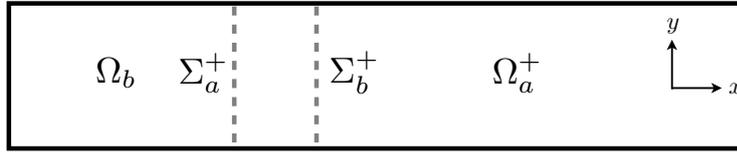


FIGURE 1.6 – Géométrie du demi-guide régulier.

Pour un choix de  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ , cet algorithme est **bien posé** et **consistant** (on le déduit de la proposition 1.3.3). De plus, étant donné la géométrie, nous pouvons utiliser la décomposition modale de la solution non seulement dans  $\Omega_a^+$  mais aussi dans  $\Omega_b$ . Nous avons donc :

— dans  $\Omega_b$ ,  $p_{(n)}^b$  qui s'exprime comme une somme sur les modes aller-retour :

$$p_{(n)}^b = \sum_{k \geq 0} B_{(n)}^k (e^{i\beta_k x} + e^{-i\beta_k x}) \varphi_k(y), \quad (1.40)$$

où  $B_{(n)}^k$  est un complexe. On trouve cette expression car on impose la *condition de Neumann*  $\partial p_{(n)}^b = 0$  sur  $\Sigma_0 = \{x = 0\} \times [-h, h]$ .

— dans  $\Omega_a^+$ ,  $p_{(n)}^+$  qui s'écrit comme une somme sur les *modes sortants* :

$$p_{(n)}^+ = \sum_{k \geq 0} A_{(n)}^k e^{i\beta_k(x-a)} \varphi_k(y), \quad (1.41)$$

où  $A_{(n)}^k$  est un complexe.

En utilisant les conditions de transmission définies sur  $\Sigma_a^\pm$  et  $\Sigma_b^\pm$ , on déduit la

**Proposition 1.3.5** *Nous avons les relations explicites entre  $B_{(n-1)}^k$  et  $B_{(n)}^k$ , et entre  $A_{(n-1)}^k$  et  $A_{(n)}^k$  :*

$$B_{(n)}^k = \lambda_k B_{(n-1)}^k, \quad \text{et} \quad A_{(n)}^k = \lambda_k A_{(n-1)}^k,$$

où les coefficients complexes  $\lambda_k$  sont donnés par :

$$\lambda_k = \frac{e^{i\beta_k l} (i\beta_k + \gamma) (e^{i\beta_k a} + e^{-i\beta_k a})}{e^{i\beta_k b} (i\beta_k + \gamma) + e^{-i\beta_k b} (\gamma - i\beta_k)}.$$

**Preuve :** Pour montrer ce résultat, partons de  $p_{(n-1)}^b$  donné par la formule (1.40). On déduit de la condition de transmission  $p_{(n)}^+ = p_{(n-1)}^b$  sur  $\Sigma_a^+$ , et en utilisant l'orthogonalité des modes entre eux, que pour tout  $k$  :

$$A_{(n)}^k = B_{(n-1)}^k (e^{i\beta_k a} + e^{-i\beta_k a}). \quad (1.42)$$

Puis, on itère notre processus en utilisant la condition  $(\partial_\nu + \gamma)p_{(n)}^b = (\partial_\nu + \gamma)p_{(n)}^\pm$  sur  $\Sigma_b^+$  :

$$\begin{aligned} i\beta_k B_{(n)}^k (e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}) + \gamma B_{(n)}^k (e^{i\beta_k b} + e^{-i\beta_k b}) &= A_{(n)}^k (i\beta_k e^{i\beta_k l} + \gamma e^{i\beta_k l}), \\ \Leftrightarrow B_{(n)}^k &= A_{(n)}^k \left( \frac{e^{i\beta_k l} (i\beta_k + \gamma)}{e^{i\beta_k b} (i\beta_k + \gamma) + e^{-i\beta_k b} (\gamma - i\beta_k)} \right), \\ \Leftrightarrow B_{(n)}^k &= B_{(n-1)}^k \frac{e^{i\beta_k l} (i\beta_k + \gamma) (e^{i\beta_k a} + e^{-i\beta_k a})}{e^{i\beta_k b} (i\beta_k + \gamma) + e^{-i\beta_k b} (\gamma - i\beta_k)}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

On retrouve le résultat énoncé et obtient la même relation pour  $A_{(n)}^k$ , en utilisant simplement l'équation (1.42). ■

Étant donné cette proposition, nous savons que le processus itératif (1.39) est **convergent** si et seulement si :

$$\text{Sup}_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k| < 1. \quad (1.44)$$

**Remarque 1.3.6** *Il est intéressant de noter que pour le choix particulier du paramètre  $\gamma = -i\beta_k$ , on annule le coefficient  $\lambda_k$ .*

Avec l'expression explicite des  $\lambda_k$ , on peut montrer le

**Lemme 1.3.7** *La limite de  $|\lambda_k|$  pour  $k$  tendant vers  $+\infty$  est :*

— pour  $l = 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = 1,$$

— pour  $l > 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = 0.$$

**Preuve :** Commençons par rappeler que pour  $k > k_0$ , où  $k_0$  est l'indice du dernier mode propagatif, nous avons :

$$\beta_k = i\sqrt{\left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2 - \omega^2}, \quad \text{où} \quad \left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2 - \omega^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Ainsi, pour tout  $k \rightarrow +\infty$ , l'expression des  $\lambda_k$  devient équivalente à :

$$\lambda_k = \frac{e^{-|\beta_k|l} (-|\beta_k| + \gamma) (e^{-|\beta_k|a} + e^{|\beta_k|a})}{e^{-|\beta_k|b} (-|\beta_k| + \gamma) + e^{|\beta_k|b} (\gamma + |\beta_k|)} \sim e^{-|\beta_k|l} \frac{e^{-|\beta_k|a}}{e^{|\beta_k|b}} = -e^{-2|\beta_k|l},$$

dont on déduit directement le résultat donné. ■

Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent de déduire :

**Cas sans recouvrement :** Si  $l = 0$ , l'algorithme ne peut pas converger car les coefficients  $\lambda_k$  tendent en module vers 1 (d'après le lemme ci-dessus).

**Cas avec recouvrement :** Si  $l > 0$ , nous ne savons a priori pas si l'algorithme converge. Cependant, pour les modes évanescents, nous savons que les  $\lambda_k$  associés tendent exponentiellement vite (avec  $k$ ) vers 0. En ce sens, on a amélioré la situation par rapport au cas  $l = 0$  et cette propriété des  $\lambda_k$  sera importante pour la suite (voir section 1.3.4).

De plus, dans le cas avec recouvrement la convergence peut être assurée pour les *basses fréquences*. En effet, si on considère

$$\omega < \frac{k\pi}{2h},$$

nous avons alors un unique mode propagatif associé à  $k = 0$ . En choisissant (voir remarque 1.3.6)

$$\gamma = -i\omega, \quad (1.45)$$

on annule le coefficient  $\lambda_0$  associé à ce mode propagatif. Pour les modes évanescents, c'est à dire  $k \geq 1$ , on peut facilement montrer que (voir la démonstration du lemme 1.3.7)

$$\forall k \geq 1, \lim_{l \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = 0, \quad (1.46)$$

où on rappelle que  $l$  représente la taille du recouvrement. Par conséquent, on peut toujours choisir un recouvrement "suffisant" et  $\gamma$  pour avoir  $|\lambda_k| < 1$  quel que soit  $k$ , ce qui assure la convergence.

Afin de mieux appréhender ces résultats, nous avons tracé sur la Figure 1.7 le module de  $\lambda_k$  en fonction de  $k$ , pour les paramètres :

$$\omega = 30, \quad \gamma = -i\omega, \quad \text{et} \quad l \in \{0, 1, 2\}.$$

On indique par la droite verticale verte la position du dernier mode propagatif  $k_0$  et par la droite horizontale rouge  $|\lambda| = 1$ . Sur ces résultats numériques, nous retrouvons bien les propriétés des  $\lambda_k$  vues précédemment, c'est à dire :

- pour  $\gamma = -i\omega$ , le coefficient  $\lambda_0 = 0$ ,
- si  $l = 0$ ,  $|\lambda_k|$  tend vers 1,
- si  $l > 0$ ,  $|\lambda_k|$  décroît exponentiellement vite avec  $k$  pour les *modes évanescents*.

De plus, on peut noter qu'augmenter le recouvrement n'améliore pas nécessairement la situation. Par exemple, on voit sur la Figure 1.7 que  $|\lambda_{k_0}|$  augmente en module en passant de  $l = 1$  à  $l = 2$ .

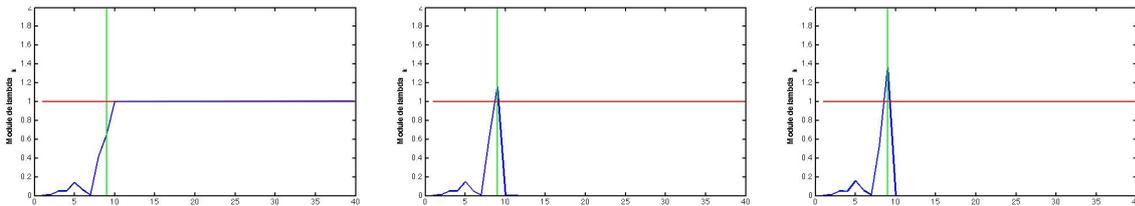


FIGURE 1.7 – Modules des  $\lambda_k$  en fonction de  $k$  avec  $\gamma = -i\omega$  pour  $\omega = 30$ . De gauche à droite, nous avons utilisé plusieurs recouvrements  $l \in \{0, 1, 2\}$ . La ligne verticale verte représente le numéro  $k_0$  du dernier mode propagatif.

Maintenant, sur la Figure 1.8, nous avons tracé

$$\rho(\lambda_k) = \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|,$$

en fonction de la fréquence pour les paramètres suivants :

$$\omega \in [0, 50], \quad l \in \{0, 1\}, \quad \text{et} \quad \gamma = -i\omega.$$

La ligne rouge horizontale indique la droite  $\rho(\lambda) = 1$ , valeur que  $\rho(\lambda_k)$  ne doit pas dépasser pour avoir la convergence. On observe ici

- pour  $l = 0$  : l'algorithme ne peut jamais converger et  $\rho(\lambda_k)$  tend vers 1 par valeur supérieure (attention à l'échelle),
- pour  $l > 0$  : on arrive à assurer la convergence pour les basses fréquences. Cependant, pour de plus hautes fréquences le recouvrement ne permet plus d'assurer la convergence.

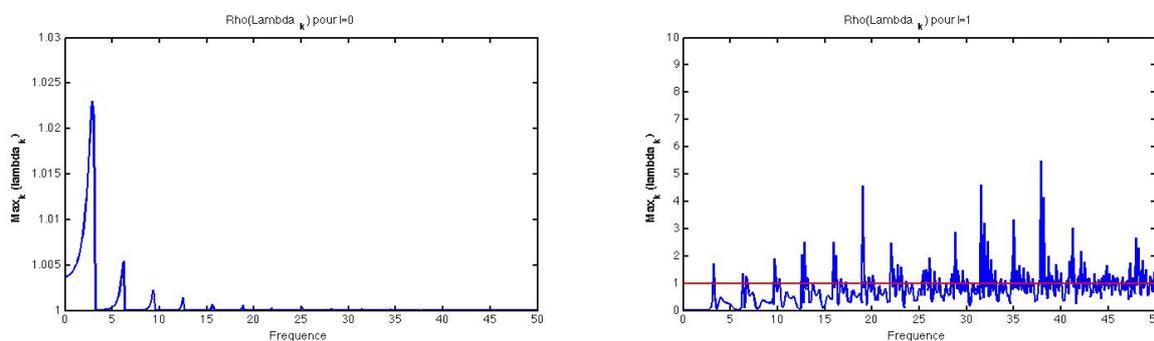


FIGURE 1.8 –  $\rho(\lambda_k)$  en fonction de la fréquence  $\omega \in [0, 50]$  en considérant  $\gamma = -i\omega$ . À gauche,  $l = 0$  et à droite,  $l = 1$ .

Il serait intéressant de chercher les paramètres  $l$  et  $\gamma$  "optimaux" (dans le sens de minimiser  $\rho(\lambda_k)$ ) ou encore utiliser des techniques de relaxation (voir [21, 49]) pour essayer d'obtenir la convergence. Une autre piste serait l'étude d'autres conditions de transmission aux bords des sous-domaines, en particulier l'utilisation de conditions optimisées (voir par exemple [42, 41, 49]). Cependant, cette étude est limitée au cas d'une géométrie séparable, et ne s'étend pas à une géométrie arbitraire de  $\Omega_b$  pour laquelle nous n'avons plus d'expression explicite des  $\lambda_k$ .

### 1.3.3 Analyse spectrale dans le cas général

Nous venons de voir que pour la géométrie particulière précédente, le recouvrement permet, dans certaines gammes de fréquences, de rendre l'algorithme convergent (en particulier pour les basses fréquences), mais surtout, qu'il n'y a qu'un nombre fini de  $\lambda_k$  dont les modules peuvent être plus grands que 1 (voir lemme 1.3.7). Nous allons maintenant nous intéresser à la généralisation de ce résultat pour une géométrie de  $\Omega_b$  arbitraire.

Pour simplifier, nous allons toujours nous placer dans le cas d'un demi-guide infini. Cependant, cette fois le domaine borné  $\Omega_b$  peut être perturbé et donc, nous ne pouvons plus résoudre analytiquement les équations dans  $\Omega_b$  grâce à la décomposition modale.

À l'aide de l'opérateur  $DtR T_{D \rightarrow R}^{l,+}$  donné dans la définition 1.2.1, on peut reformuler l'algo-

rithme itératif (1.39) uniquement sur  $\Omega_b$  ainsi :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p_{(n)}^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_{(n)}^b + \omega^2 p_{(n)}^b = 0 & \text{dans } \Omega_b, \\ \partial_\nu p_{(n)}^b = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ (\partial_\nu + \gamma)p_{(n)}^b = T_{D \rightarrow R}^{l,+}(p_{(n-1)}^b|_{\Sigma_a^+}) & \text{sur } \Sigma_b^+. \end{array} \right. \end{array} \quad (1.47)$$

Par le lemme 1.3.2, on sait que le problème ci-dessus est bien posé et que sa solution  $p_{(n)}^b$  dépend continûment de la donnée  $T_{D \rightarrow R}^{l,+}(p_{(n-1)}^b|_{\Sigma_a^+})$  sur le bord  $\Sigma_b^+$ . Nous pouvons alors donner la

**Définition 1.3.2** Soit  $R$  l'opérateur continu de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_b^+)$  dans  $H^1(\Omega_b)$ , qui à la donnée  $g = T_{D \rightarrow R}^{l,+}(p_{(n-1)}^b|_{\Sigma_a^+})$  sur  $\Sigma_b^+$  associe  $Rg = p_{(n)}^b$  solution du problème (1.47).

Avec cet opérateur, le processus itératif (1.47) se réécrit simplement

$$p_{(n)}^b = RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(p_{(n-1)}^b|_{\Sigma_a^+}), \quad (1.48)$$

et ainsi, nous pouvons généraliser la définition des  $\lambda_k$  :

**Définition 1.3.3** Considérons l'opérateur  $RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$  de  $H^1(\Omega_b)$  dans lui-même, où  $\cdot|_{\Sigma_a^+}$  est l'opérateur trace de  $H^1(\Omega_b)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$ . On définit l'ensemble  $(\lambda_k)_k$  comme le spectre de cette opérateur.

**Remarque 1.3.8** Notons qu'on généralise bien la définition 1.3.5 des  $\lambda_k$  car, pour la géométrie séparable, ces  $\lambda_k$  sont exactement des valeurs propres de  $RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$  et les vecteurs propres associés sont proportionnels à :

$$(e^{i\beta_k x} + e^{-i\beta_k x})\varphi^k(y).$$

Remarquons aussi que l'opérateur  $RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$  n'est clairement pas inversible (car la trace ne l'est pas) et 0 appartient donc au spectre de l'opérateur.

Maintenant que nous avons généralisé la définition des coefficients  $\lambda_k$ , nous allons généraliser la propriété de décroissance des  $|\lambda_k|$  obtenue dans le cas avec recouvrement. Nous savons par la proposition 1.2.8 que l'opérateur  $T_{D \rightarrow N}^{l,+}$  est compact. Par conséquent, en utilisant la continuité de l'opérateur  $R$  et de l'opérateur trace, il vient :

**Proposition 1.3.9** Pour tout  $l > 0$ , l'opérateur  $RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$  est compact. Par conséquent, la suite de ses valeurs propres  $\lambda_k$  est soit :

- un ensemble fini de valeurs complexes contenant 0,
- soit un ensemble infini dénombrable pouvant être ordonné de sorte que

$$|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = 0.$$

Bien qu'à la différence du cas précédent la vitesse de décroissance des  $\lambda_k$  n'est pas contrôlée, nous savons qu'au plus, pour tout  $l > 0$ , il y a un nombre fini de  $\lambda_k$  de modules plus grands que 1.

Illustrons numériquement la propriété sur les  $\lambda_k$  énoncée par la proposition 1.3.9. Tout d'abord, nous avons considéré  $\Omega_b$  rectangulaire et nous avons tracé (en rouge) sur la Figure 1.9 les valeurs propres de  $RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$  obtenues numériquement, c'est à dire après discrétisation. Dans ce cas, on connaît également les  $\lambda_k$  de manière exacte par la formule analytique de la

proposition 1.3.5, et nous les avons représentés en bleu. Les résultats présentés sont obtenus pour les paramètres :

$$\omega \in \{5, 10, 20\}, \quad a = 1, \quad l \in \{0, 1\}, \quad \text{et} \quad \gamma = -i\omega.$$

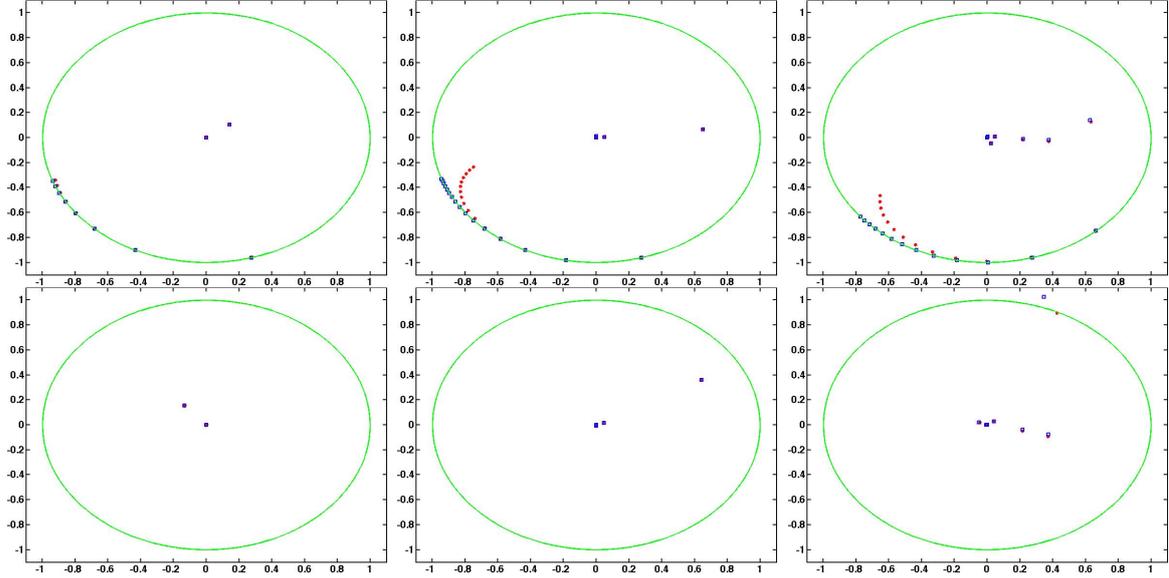


FIGURE 1.9 – Position des valeurs propres de  $RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$  dans le plan complexe pour la géométrie de  $\Omega_b$  rectangulaire : en bleu par le calcul exact et en rouge par le calcul numérique. En vert, on a représenté le cercle unité. En colonne nous avons la fréquence :  $\omega \in \{5, 10, 20\}$  et en ligne le recouvrement  $l \in \{0, 1\}$

Sur ces résultats (Figure 1.9), on observe un bon accord entre les  $\lambda_k$  calculés numériquement et exactement (au moins pour les premiers modes). Les différences observées (pour les  $k$  plus grands notamment) s’expliquent pour deux raisons :

- d’une part à cause de la troncature de la série modale définissant l’opérateur  $T_{D \rightarrow N}^{l,+}$  et qui est nécessaire pour discrétiser notre problème (voir sections 1.1.4 et 1.2.3),
- et d’autre part à cause de l’approximation éléments finis des opérateurs  $R$  et  $T$ .

Notons que sur la Figure 1.9, on retrouve les propriétés énoncées dans le lemme 1.3.7

- si  $l = 0$ , les  $\lambda_k$  tendent en module vers 1,
- si  $l > 0$ , les  $\lambda_k$  tendent en module vers 0.

Remarquons enfin que, dans le cas  $\omega = 20$  et  $l = 1$ , la méthode ne converge pas car un coefficient  $\lambda_k$  est hors du cercle unité dessiné en vert.

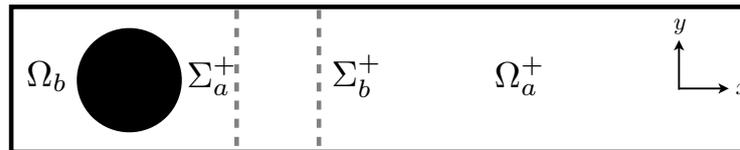


FIGURE 1.10 – Géométrie du demi-guide perturbé, le point noir symbolise un trou dans  $\Omega_b$ .

De plus, comme montré dans la proposition 1.3.9, le résultat sur les  $\lambda_k$  se généralise dans le cas avec recouvrement pour une géométrie perturbée. Par exemple, nous avons considéré le domaine  $\Omega_b$  percé d’un trou, symbolisé par le point noir sur le dessin 1.10. Sur la Figure 1.11,

nous avons représenté les valeurs propres de  $RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$ . Comme précédemment, nous avons pris les paramètres :

$$\omega \in \{5, 10, 20\}, \quad a = 1, \quad l \in \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \gamma = -i\omega.$$

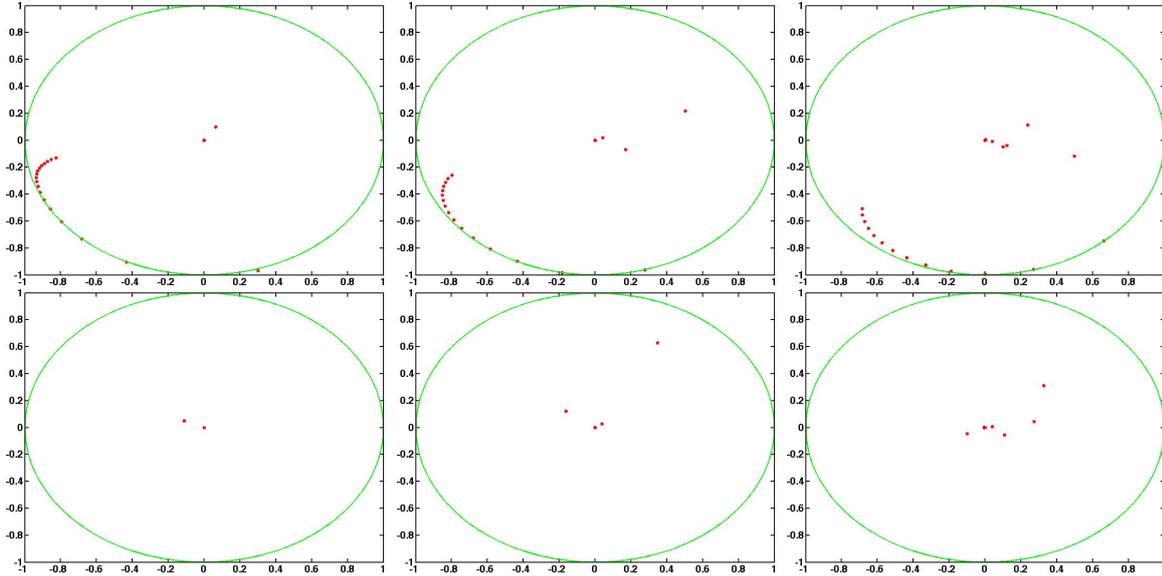


FIGURE 1.11 – Position des valeurs propres de  $RT_{D \rightarrow R}^{l,+}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$  dans le plan complexe pour la géométrie perturbée. En vert, on a représenté le cercle unité. En colonne nous avons la fréquence :  $\omega \in \{5, 10, 20\}$  et en ligne le recouvrement  $l \in \{0, 1\}$

### 1.3.4 Les méthodes de décomposition de domaine comme préconditionneur pour GMRES

La méthode de Schwarz présentée précédemment appartient aux méthodes dites *stationnaires*, comme les méthodes de Jacobi ou Gauss-Seidel (cf [83]). Le principal défaut de ces méthodes est que la convergence ne peut pas être assurée en général. Nous avons donc voulu utiliser une méthode itérative type GMRES qui assure la convergence. GMRES appartient à la famille des méthodes de Krylov (comme le gradient conjugué) et assure la convergence en construisant itérativement une base pour la solution.

Bien que la convergence soit assurée avec GMRES, pour avoir une vitesse de convergence raisonnable, il est nécessaire d'utiliser un bon préconditionneur. Considérons le système linéaire suivant :

$$MU = F,$$

où  $M$  est une matrice carrée inversible,  $F$  un vecteur représentant le second membre et  $U$  la solution recherchée. Un choix classique de préconditionneur est de prendre les matrices utilisées dans les algorithmes *stationnaires* :

- c'est à dire la diagonale de  $M$  pour la méthode de Jacobi,
- ou la partie triangulaire inférieure pour la méthode de Gauss-Seidel.

Ces choix algébriques ont le défaut qu'il est difficile d'obtenir des informations sur le taux de convergence de la méthode.

De manière générale, si on considère une décomposition de  $M = A + K$  pour laquelle l'algorithme itératif "naïf" associé :

$$AU_{(n+1)} = -KU_{(n)} + F,$$

a de bonnes propriétés, dans le sens que les valeurs propres de  $A^{-1}K$  sont presque toutes proches de 0, alors l'algorithme GMRES préconditionné par  $A$  aura un bon taux de convergence. Cette propriété sera justifiée dans la suite.

Nous proposons d'appliquer comme préconditionneur la matrice  $A$  utilisée dans la méthode de décomposition de domaine (1.47) (ce qui revient à la discrétisation de l'inverse de l'opérateur de résolution  $R$  donné dans la définition 1.3.2). La matrice  $K$  correspond elle à la discrétisation des opérateurs  $T_{D \rightarrow N}^{l, \pm}$ . Ce choix de préconditionneur présente deux avantages :

1. la matrice  $A$  étant creuse et symétrique, on peut utiliser des algorithmes performants de factorisation  $LU$ ,
2. la matrice  $A^{-1}K$  a presque toutes ses valeurs propres regroupées autour de 0 (pour  $l > 0$ ) car elle correspond à la discrétisation de l'opérateur  $RT_{D \rightarrow N}^{l, +}(\cdot|_{\Sigma_a^+})$  dont on sait par la proposition 1.3.9 que les valeurs propres tendent vers 0.

Justifions maintenant l'intérêt d'avoir les valeurs propres de  $A^{-1}K$  regroupées autour de 0. Pour ce faire, nous avons besoin de rappeler un résultat de [83] :

**Proposition 1.3.10** *Supposons la matrice  $M$  diagonalisable telle que  $M = XDX^{-1}$ , où  $D$  est diagonale et notons par  $(\lambda_k)_k$  la suite de ses valeurs propres. L'erreur de résidu obtenue après la  $m^{\text{ème}}$  étape de GMRES peut être majorée par :*

$$r_{(m)} \leq \kappa(X)r_{(0)} \min_{p \in P_m, p(0)=1} \left( \max_j |p(\lambda_j)| \right) \quad (1.49)$$

où  $\kappa(X) = \|X\| \|X^{-1}\|$ ,  $r_{(m)} = \|MU_{(m)} - F\|$  ( $U_{(m)}$  est la  $m^{\text{ème}}$  approximation de la solution  $U$  du système linéaire) et  $P_m$  désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $m$  vérifiant  $p(0) = 1$ .

On déduit de cette proposition que si les valeurs propres de  $M$  sont regroupées, alors GMRES converge rapidement. Pour comprendre cela, imaginons que toutes les valeurs propres soient réunies dans un disque de rayon  $\epsilon$  petit centré en 1. Alors, si on choisit le polynôme :

$$J_1(z) = \frac{\lambda - z}{\lambda},$$

où  $\lambda$  est l'une des valeurs propres  $\lambda_k$ , on peut utiliser la propriété ci-dessus (car  $J_1(0) = 1$ ) pour majorer l'erreur de résidu ainsi :

$$r_{(1)} \leq \kappa(X)r_{(0)} \max_{z \in (\lambda_j)_j} |J_1(z)| \leq \kappa(X)r_{(0)} \frac{2\epsilon}{|\lambda|}.$$

En effet, par hypothèse sur les  $\lambda_k$ , nous avons que

$$\forall k, \quad |\lambda - \lambda_k| \leq 2\epsilon.$$

De plus, sachant que  $\lambda$  est dans le disque centré en 1, nous avons

$$|\lambda| > 1 - \epsilon.$$

On en déduit qu'en une itération, l'erreur de résidu est de l'ordre de  $\epsilon$ . Ce résultat se généralise avec la

**Proposition 1.3.11** *Supposons que les valeurs propres  $(\lambda_k)_k$  de la matrice  $M$  soient regroupées dans un disque  $D_\epsilon$  de rayon  $\epsilon$  et centré en 1, sauf pour  $m$  d'entre elles. Alors, la norme du résidu après  $m + 1$  itérations est au plus en  $O(\epsilon)$ .*

**Preuve :** La démonstration repose sur les mêmes arguments que l'exemple ci-dessus. Considérons le polynôme :

$$J_{m+1}(z) = \frac{\prod_{j=0,m}(\lambda_j - z)}{\prod_{j=0,m}\lambda_j},$$

qui vérifie  $J_m(0) = 1$ . On suppose que :

- les  $m$  valeurs propres de  $\lambda_0$  à  $\lambda_{m-1}$  sont hors de  $D_\epsilon$ ,
- et que  $\lambda_m$  est dans le disque  $D_\epsilon$ .

Étant donné cette numérotation des  $(\lambda_k)_k$ , il vient pour tout  $\lambda_k$

$$|\prod_{j=0,m}(\lambda_j - \lambda_k)| \begin{cases} = 0 & \text{si } k \leq m, \\ \leq 2L^m \epsilon & \text{si } k \geq m + 1, \end{cases} \quad (1.50)$$

où  $L$  désigne la plus grande distance entre les  $(\lambda_k)_{k=0,m}$  et  $D_\epsilon$  :

$$L = \max_{p \in D_\epsilon, j \in [0,m]} |\lambda_j - p|.$$

On obtient l'expression ci-dessus (1.50) car pour tout  $k \geq m$ , la valeur propre  $\lambda_k$  est dans  $D_\epsilon$  et donc :

$$|\lambda_k - \lambda_m| \leq 2\epsilon.$$

Nous avons alors à la  $m^{\text{ème}}$  étape de GMRES la majoration suivante de l'erreur de résidu :

$$r_{(m+1)} \leq \kappa(X) r_{(0)} \frac{L^m}{\prod_{j=0,m}\lambda_j} \epsilon.$$

■

**Remarque 1.3.12** *Soulignons que l'analyse de convergence de GMRES que nous venons de faire ici est valable dans le cas d'une arithmétique exacte. En arithmétique flottante, il est nécessaire de prendre en compte l'inexactitude des calculs, et ces aspects sont notamment discutés dans [60, 78]*

Dans notre cas, choisir comme préconditionneur la matrice  $A$  utilisée dans la méthode de décomposition de domaine conduit à résoudre le système linéaire :

$$(Id + A^{-1}K)U = A^{-1}F,$$

et nous savons que les valeurs propres de  $Id + A^{-1}K$  se concentrent autour de 1, car celles de  $A^{-1}K$  se regroupent autour de 0.

Par conséquent, l'ajout du recouvrement devrait permettre une résolution plus rapide. Afin de valider numériquement ce résultat, nous avons considéré le problème :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ \left| \begin{array}{ll} \Delta p^b + \omega^2 p^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \partial_\nu p^b = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ (\partial_\nu + \gamma)p^b = T_{D \rightarrow R}^{l,+}(p^b|_{\Sigma_a^+}) & \text{sur } \Sigma_b^+, \end{array} \right. \end{array} \quad (1.51)$$

et pour différentes fréquences et différents recouvrements, nous avons indiqué dans le tableau ci-après le nombre d'itérations nécessaires à GMRES pour atteindre une erreur de résidu inférieure à  $10^{-14}$  :

	$l = 0$	$l = 0.1$	$l = 0.2$	$l = 0.5$	$l = 1$	$l = 2$
$\omega = 5$	10 ité.	7 ité.	6 ité.	6 ité.	4 ité.	3 ité.
$\omega = 10$	14 ité.	8 ité.	6 ité.	6 ité.	7 ité.	5 ité.
$\omega = 20$	19 ité.	9 ité.	8 ité.	8 ité.	7 ité.	9 ité.
$\omega = 50$	22 ité.	12 ité.	12 ité.	11 ité.	11 ité.	12 ité.

Ces résultats ont été obtenus en considérant une géométrie perturbée du domaine  $\Omega_b$ , avec les paramètres suivants :

$$a = 1, \quad \gamma = -i\omega,$$

et une source  $f$  gaussienne centrée en  $(0.5, 0.5)$ . Nous pouvons constater sur ces résultats plusieurs choses :

- l'ajout d'un recouvrement, même petit, améliore la vitesse de convergence par rapport au cas sans recouvrement.
- lorsque la fréquence augmente, le nombre d'itérations nécessaires pour avoir la convergence augmente. Il est difficile de construire des méthodes itératives pour l'équation de Helmholtz dont le nombre d'itérations pour assurer la convergence soit indépendant de la fréquence, voir par exemple les travaux de M. Gander [37] dans le cas d'un domaine borné.
- plus la fréquence augmente, moins le paramètre  $l$  a d'influence. Pour  $\omega = 50$ , on observe que le nombre d'itérations ne change quasiment pas avec  $l$ .
- à partir d'un certain recouvrement, le nombre d'itérations stagne et l'ajout du recouvrement n'améliore plus le taux de convergence.

Essayons d'expliquer un peu ces deux derniers points dans le cas de la géométrie régulière (voir l'analyse spectrale section 1.3.2). Dans ce cas, nous avons l'expression explicite des valeurs propres  $\lambda_k$  et on montre facilement pour les  $k > k_0$  associés aux modes évanescents ( $k_0$  représente l'indice du dernier mode propagatif) que :

$$|\lambda_k| \sim e^{-|\beta_k|l}.$$

Il vient par conséquent que pour  $l$  suffisamment grand, tous les  $\lambda_k$  associés aux modes évanescents sont regroupés autour de 0 dans le plan complexe, comme nous l'avons déjà vu, voir équation (1.46). Ainsi, augmenter  $l$  ne permet plus de regrouper davantage de valeurs propres, ce qui explique la stagnation observée sur le nombre d'itérations à partir d'un certain  $l$ .

D'autre part, on peut montrer que la suite des modules  $\{|\beta_{k_0+n}|^2\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  associés aux modes évanescents augmente de plus en plus vite avec la fréquence  $\omega$  (simplement parce que  $k_0$  augmente avec  $\omega$ ). À titre d'exemple, nous avons indiqué ci-dessous les premiers termes de cette suite pour  $\omega = 10$  et  $\omega = 50$  :

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\omega = 10$	$\sim 57$	$\sim 146$	$\sim 255$	$\sim 383$	$\sim 531$
$\omega = 50$	$\sim 26$	$\sim 352$	$\sim 697$	$\sim 1062$	$\sim 1447$

La conséquence de cette remarque est que les  $|\lambda_k|$  tendent plus vite vers 0 (avec  $k$ ). Pour une valeur de  $l$  fixée, on regroupe donc plus "vite" les valeurs propres associées aux modes évanescents autour de 0 en augmentant la fréquence  $\omega$ .

### Remarques sur l'optimisation du calcul avec la méthode GMRES

Pour résoudre le système linéaire

$$MU = F,$$

par GMRES, on construit itérativement la base de Krylov :

$$\kappa_r(M, F) = \{F, MF, M^2F, \dots, M^{r-1}F\}$$

dans laquelle la solution est décomposée. Ainsi, pour construire cette base, il est nécessaire d'effectuer une série de produit matrice vecteur  $MF$ .

Avec notre choix de préconditionneur, nous avons donc à calculer une série de produit du type  $(Id + A^{-1}K)V$ , où  $V$  est un vecteur arbitraire. Ce produit matrice vecteur peut être optimisé simplement en calculant successivement :

1. le produit  $KV$ ,
2. étant donné un calcul préalable de la factorisation LU de  $A$ , on applique la descente-remonté pour calculer  $A^{-1}KV$ ,
3. et enfin, on termine en effectuant simplement la somme des vecteurs  $V$  et  $A^{-1}KV$ .

De plus, le produit matrice-vecteur  $KV$  peut également être optimisé. Notons par exemple par  $K^+$  la partie de la matrice issue de la discrétisation de  $T_{D \rightarrow R}^{l,+}$ . Ces éléments  $K_{ij}^+$  sont construits avec les fonctions de base  $w_j$  à support intersectant  $\Sigma_a^+$  et  $w_i$  à support sur  $\Sigma_b^+$  ainsi :

$$K_{ij}^+ = \sum_{k=0}^N (w_j, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_a^+)} (i\beta_k + \gamma) e^{i\beta_k l} (w_i, \varphi_k)_{L^2(\Sigma_b^+)},$$

où  $N$  désigne le nombre de modes considéré dans la série définissant  $T_{D \rightarrow R}^{l,+}$  (voir section 1.2.3). Cette construction de  $K^+$  induit la factorisation naturelle :

$$K^+ = \left[ (w_i, \varphi_k)_{i,k} \right]_{N_b^+, N} \left[ ((i\beta_k + \gamma) e^{i\beta_k l})_{k,k} \right]_{N, N} \left[ (\varphi_k, w_j)_{k,j} \right]_{N, N_a^+},$$

où  $N_b^+$  et  $N_a^+$  sont les nombres de degrés de liberté sur  $\Sigma_b^+$  et  $\Sigma_a^+$ , et la matrice au centre est diagonale. On ramène donc le calcul du produit  $K^+V$  à

1. un produit matrice vecteur avec une matrice rectangulaire de taille  $N \times N_a^+$ ,
2. un produit matrice-vecteur par une matrice diagonale de taille  $N$ ,
3. un produit matrice-vecteur par une matrice rectangulaire de taille  $N_b^+ \times N$ .

# GUIDE ACOUSTIQUE ANISOTROPE

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>41</b>
<b>2.2</b>	<b>Construction de l'opérateur <math>DtN</math> via le changement de coordonnées</b>	<b>43</b>
2.2.1	Introduction	43
2.2.2	Le calcul des modes	45
2.2.3	Opérateurs $DtN$ sur les frontières déformées	49
<b>2.3</b>	<b>Utilisation du recouvrement pour construire de nouvelles conditions transparentes</b>	<b>51</b>
2.3.1	Introduction et démarche	52
2.3.2	Décomposition modale via les relations de bi-orthogonalité	53
2.3.3	Formulation multi-domaines	56
2.3.4	Reformulation à l'aide d'un opérateur <i>Transparent to Robin</i>	58
2.3.5	Analyse spectrale dans le cas d'une géométrie séparable et pour un milieu isotrope	62
<b>2.4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>63</b>
2.4.1	Comparaison des formulations $DtN$ sur les frontières déformées et $TtR$	63
2.4.2	Avantages de la formulation $TtR$	67

---

Ce deuxième chapitre porte sur la généralisation des résultats obtenus au premier chapitre au cas d'un milieu stratifié anisotrope. Cela correspond à remplacer l'opérateur  $\Delta$  par  $\text{div}(A\nabla)$  où  $A$  est une matrice symétrique définie positive dépendant de la variable transverse  $y$ . Nous allons présenter deux approches pour traiter ce problème :

- la première utilise l'idée d'un changement de coordonnées non orthogonales qui permet de calculer des opérateurs  $DtN$  simplement. Cette idée fonctionne très bien pour le cas scalaire mais sa généralisation au cas vectoriel de l'élasticité ne nous semble pas possible.
- La deuxième approche est basée sur la formulation avec recouvrement vue au chapitre précédent. Elle présente notamment l'avantage de s'étendre au cas de l'élasticité.

## 2.1 Introduction

Dans ce second chapitre, le problème modèle qui nous intéresse est le suivant :

$$\begin{array}{l}
 \text{Trouver } p \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ sortante telle que} \\
 \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(A(y)\nabla p) + \omega^2 p = f & \text{dans } \Omega, \\ A(y)\nabla p \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (2.1)
 \end{array}$$

où l'on rappelle que  $\omega$  représente la pulsation et  $f$  le terme source supposé à support compact. L'étude du problème ci-dessus est faite sous les mêmes hypothèses qu'au premier chapitre (voir section 1.1.1) et nous rappelons les notations géométriques sur la Figure 2.1.

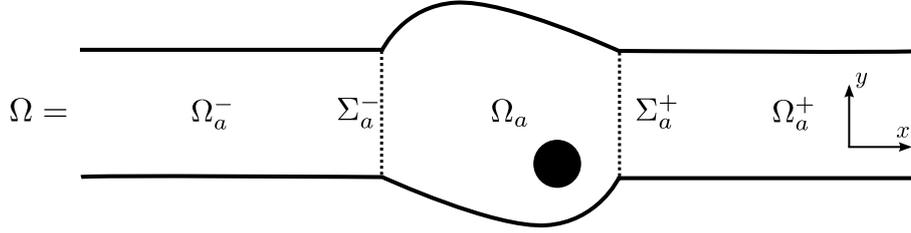


FIGURE 2.1 – Géométrie du guide d'ondes et notations.

La matrice  $A(y)$  est supposée symétrique définie positive et ses coefficients sont notés :

$$A(y) = \begin{pmatrix} c_1(y) & c_3(y) \\ c_3(y) & c_2(y) \end{pmatrix} \quad \text{et vérifient} \quad \begin{cases} c_1(y), c_2(y) > 0 \\ \text{et } c_1(y)c_2(y) - (c_3(y))^2 > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Afin d'alléger les notations, nous ne rappellerons pas dans la suite la dépendance en  $y$  de la matrice  $A$  ainsi que de ses coefficients  $c_1, c_2$  et  $c_3$ .

Le cas isotrope étudié au 1er chapitre correspond à  $A = Id$ . La notion d'*ondes sortantes* nécessaire pour définir le problème (2.1) sera précisée dans la section 2.2.2 par l'étude modale dans les parties uniformes du guide.

Ce type d'équation (2.1) apparaît lorsqu'on étudie en électromagnétisme certains matériaux diélectriques anisotropes (voir [63]), ou en élasticité lorsqu'on étudie les ondes de cisaillement de type  $SH$  dans une plaque pour certaines anisotropies. Un dernier cas de figure où l'on se ramène à ces équations est lorsque qu'on considère un modèle homogénéisé d'un problème avec des coefficients périodiques. Dans ce cas, soulignons que la matrice  $A$  ne dépend pas de  $y$ .

**Remarque 2.1.1** *Notons que dans la littérature, on parle d'anisotropie elliptique pour désigner ce type d'anisotropie qui apparaît dans l'équation (2.1). Dans la suite de la thèse, on y fera référence en parlant simplement de cas "acoustique anisotrope".*

Avant de rentrer dans le vif du sujet, intéressons nous aux difficultés rencontrées si on cherche à appliquer directement la démarche du premier chapitre. Pour le calcul des modes, nous avons cherché les solutions sous la forme  $\varphi(y)e^{i\beta x}$  des équations (2.1) dans les parties  $\Omega_a^\pm$  du guide. On est alors amené à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( c_2 \frac{d\varphi}{dy} \right) + i\beta \left( c_3 \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d}{dy} (c_3 \varphi) \right) + (\omega^2 - c_1 \beta^2) \varphi = 0 & \text{dans } [-h, h], \\ c_2 \frac{d\varphi}{dy} + i c_3 \beta \varphi = 0 & \text{sur } \{-h, h\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

ce qui revient à un problème aux valeurs propres généralisé (car  $c_1$  est variable) quadratique où  $\beta$  joue le rôle de la valeur propre. Bien que ce problème puisse se résoudre numériquement, nous ne pouvons plus appliquer les résultats de théorie spectrale sur les opérateurs auto-adjoints qui nous donnent de bonnes propriétés sur les modes vues dans le cas isotrope (voir

le lemme 1.1.2). A priori, les modes ne forment pas une base orthonormale de la section du guide.

Afin de souligner l'importance des relations d'orthogonalité, décrivons la construction de l'opérateur  $DtN$  sur la frontière verticale  $\Sigma_a^+$  pour un milieu anisotrope simple, en considérant  $A$  constant :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix},$$

où  $c$  est un paramètre. Pour caractériser cet opérateur, on doit construire la *solution sortante*  $p^+$  dans le demi-guide  $\Omega_a^+$  à partir de sa trace  $g_d$  sur  $\Sigma_a^+$ . La fonction  $p^+$  étant *sortante* dans  $\Omega_a^+$ , elle se décompose sous la forme

$$\sum_{k \geq 0} C_k^+ P_k^+(x, y),$$

où les  $C_k^+$  sont des coefficients complexes et les  $P_k^+$  représentent les modes *sortants* dans  $\Omega_a^+$ . De plus, elle doit vérifier sur  $\Sigma_a^+$

$$p^+|_{\Sigma_a^+} = g_d.$$

Même si on admet la complétude des modes, on doit résoudre le système suivant :

$$\forall j \geq 0, \quad \sum_{k \geq 0} C_k^+ (P_k^+, P_j^+)_{L^2(\Sigma_a^+)} = (g_d, P_j^+)_{L^2(\Sigma_a^+)},$$

pour obtenir les coefficients  $C_k^+$  de la décomposition modale. Si le milieu est anisotrope, c'est à dire  $c \neq 0$ , les modes ne sont a priori plus orthogonaux entre eux sur la frontière  $\Sigma_a^+$ . Par conséquent, la matrice (infinie) de Gram associée aux modes

$$\left[ (P_k^+, P_j^+)_{L^2(\Sigma_a^+)} \right]_{k,j}$$

n'est plus diagonale. De plus, cette matrice tronquée peut être très mal conditionnée et devenir impossible à inverser selon l'anisotropie. Pour s'en convaincre, nous avons représenté sur la Figure 2.2 le conditionnement de la matrice de Gram associée aux  $N$  premiers modes, en fonction de l'anisotropie  $c$ , pour les paramètres suivants :

$$\omega = 8, \quad N = 10, \quad \text{et} \quad c \in [0, 0.9].$$

Sur la Figure 2.2, on voit clairement que le conditionnement de la matrice explose avec l'anisotropie (échelle à  $10^8$ ). Soulignons que la matrice considérée ici est de taille  $10 \times 10$ . On ne peut donc pas utiliser cette approche pour construire des frontières transparentes pour toute anisotropie, et ces résultats nous incitent à exploiter au maximum des relations d'orthogonalité si elles existent. Notons toutefois que cette méthode a été utilisée dans la thèse de L. Taupin pour le cas de l'élasticité, voir [87].

## 2.2 Construction de l'opérateur $DtN$ via le changement de coordonnées

### 2.2.1 Introduction

La méthode que nous proposons ici est basée sur le constat suivant : changer le système de coordonnées pour un milieu acoustique est équivalent à modifier l'anisotropie du milieu. Cette

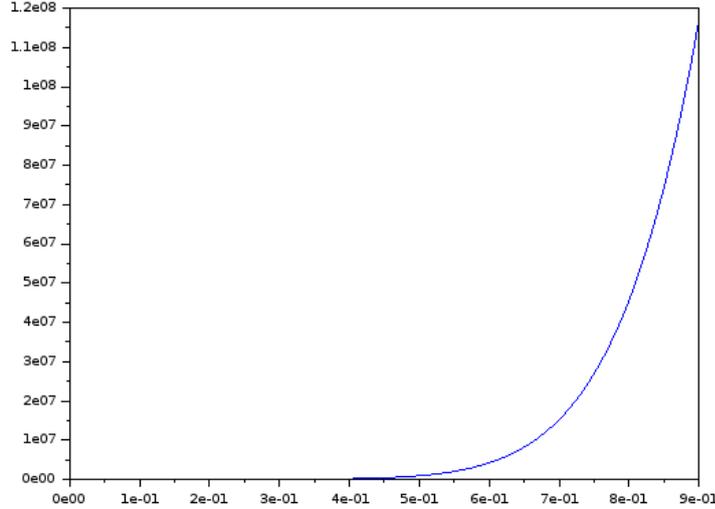


FIGURE 2.2 – Evolution du conditionnement de la matrice de Gram associée aux 10 premiers modes pris sur la frontière verticale  $\Sigma_a^+$  en fonction de l'anisotropie  $c \in [0, 0.9]$  en abscisse.

idée a été intensivement utilisée dans le domaine du 'cloaking' pour créer des matériaux "invisibles" (ou inaudibles en acoustique), voir [26] pour un article de revue. Une autre application que nous pouvons citer est la construction de guide coudé ne perturbant pas la propagation des ondes, voir [77].

Dans notre cas, l'idée est de se servir du changement de coordonnées pour construire l'opérateur  $DtN$  en se ramenant au cas isotrope dans les parties homogènes du guide. Cela nous permettra deux choses :

1. de se ramener à un problème aux valeurs propres linéaire pour le calcul des modes,
2. et surtout de retrouver des résultats de complétude et des relations d'orthogonalité.

La suite de la démarche pour reformuler le problème (2.1) en domaine borné est la même que celle présentée en introduction du premier chapitre (voir section 1.1.1). L'originalité par rapport à ce qui a été vu précédemment sera donc la résolution dans les parties homogènes du domaine.

Introduisons quelques notations utiles pour la suite. Le changement de coordonnées que nous proposons est le suivant :

$$(X, Y) = (x + \alpha(y), y), \quad (2.4)$$

où  $\alpha(y)$  est une fonction réelle que nous allons choisir selon l'anisotropie (i.e. en fonction de la matrice  $A$ ). Pour simplifier les notations, nous écrirons dans la suite  $\alpha$  à la place de  $\alpha(y)$ . Soulignons que ce changement de coordonnées **préserve une géométrie de type guide** car la coordonnée  $y$  est inchangée.

Au vu de ces nouvelles coordonnées  $(X, Y)$ , nous allons introduire les domaines :

$$\Omega_{a,\alpha} = \Omega \cap \{|X| \leq a\} \quad \text{et} \quad \Omega_{a,\alpha}^\pm = \Omega \cap \{\pm X \geq a\},$$

et définir les frontières artificielles  $\Sigma_{a,\alpha}^\pm$  séparant les domaines  $\Omega_{a,\alpha}$  et  $\Omega_{a,\alpha}^\pm$  ainsi

$$\Sigma_{a,\alpha}^\pm = \{\pm X = a\} \cap \Omega.$$

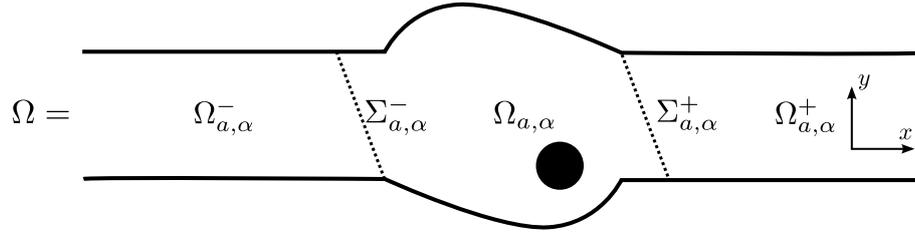


FIGURE 2.3 – Géométrie du guide d'ondes pour le cas anisotrope homogène.

Dans le cas d'un milieu homogène anisotrope (i.e.  $A$  est constant), nous verrons que le paramètre  $\alpha$  dépend linéairement de  $y$ . Par conséquent, les frontières  $\Sigma_{a,\alpha}^{\pm}$  sont des segments de droites obliques, comme représenté sur la Figure 2.3.

Dans le cas d'un milieu stratifié (i.e. la matrice  $A$  dépend de  $y$ ), le paramètre  $\alpha$  n'est plus nécessairement linéaire en  $y$ . Par conséquent, les frontières  $\Sigma_{a,\alpha}^{\pm}$  peuvent prendre des formes plus complexes comme illustré sur la Figure 2.4.

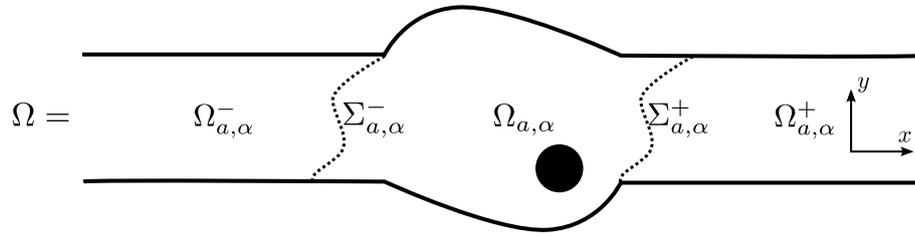


FIGURE 2.4 – Géométrie du guide d'ondes pour le cas anisotrope stratifié.

Enfin, on notera par  $(p^-, p^a, p^+)$  les restrictions de  $p$  à chaque sous-domaine  $(\Omega_{a,\alpha}^-, \Omega_{a,\alpha}, \Omega_{a,\alpha}^+)$  :

$$(p^-, p^a, p^+) = (p|_{\Omega_{a,\alpha}^-}, p|_{\Omega_{a,\alpha}}, p|_{\Omega_{a,\alpha}^+}).$$

### 2.2.2 Le calcul des modes

Commençons par présenter l'effet du changement de coordonnées sur les opérateurs différentiels qui interviennent dans notre problème. Dans les nouvelles coordonnées, l'opérateur  $\nabla$  se réécrit ainsi :

$$\nabla = R \nabla_{X,Y} \quad \text{où} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha' & 1 \end{bmatrix},$$

$\nabla_{X,Y}$  est le gradient en coordonnées  $(X, Y)$  et  $\alpha'$  est la dérivée de  $\alpha$ . Par conséquent, en notant :

$$\text{div} = \nabla^t,$$

il vient que l'opérateur  $\text{div}(A \nabla \cdot)$  se réécrit en coordonnées  $(X, Y)$  :

$$\text{div}(A \nabla \cdot) = \text{div}_{X,Y} (R^t A R \nabla_{X,Y} \cdot),$$

avec

$$R^t A R = \begin{bmatrix} c & c_3 + \alpha' c_2 \\ c_3 + \alpha' c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad c = c_1 + 2\alpha' c_3 + (\alpha')^2 c_2 > 0. \quad (2.5)$$

Pour vérifier que  $c > 0$ , il faut rappeler les hypothèses :

$$c_1 c_2 - (c_3)^2 > 0, \quad \text{et} \quad c_1, c_2 > 0.$$

Il vient alors que le polynôme défini pour  $z \in \mathbb{R}$  par

$$P(z) = c_1 + 2c_3z + c_2z^2,$$

a un discriminant strictement négatif, et donc il n'a pas de racine réelle. Son signe est alors donné par celui de  $c_2$  (ou  $c_1$ ) qui est positif. Par conséquent, pour tout  $z$  nous avons  $P(z) > 0$  et donc  $c = P(\alpha') > 0$ .

Étant donné (2.5), le choix "judicieux" de  $\alpha'$  est alors :

$$\alpha' = -\frac{c_3}{c_2}, \quad \text{et donc} \quad \alpha(y) = \int_{-h}^y -\frac{c_3(z)}{c_2(z)} dz + C^{ste}. \quad (2.6)$$

Notons que la  $C^{ste}$  peut être choisie arbitrairement car elle induit simplement une translation en  $x$ . Ainsi, si  $c_3/c_2$  est constant (ce qui est en particulier vrai pour  $A$  constant), nous avons alors  $\alpha = -c_3y/c_2$  et on retrouve la forme des frontières  $\Sigma_{a,\alpha}^\pm$  illustrées Figure 2.3.

Avec ce choix (2.6) de fonction  $\alpha$ , on diagonalise la matrice  $R^t AR$  qui devient

$$R^t AR = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad c = \frac{c_1c_2 - (c_3)^2}{c_2} > 0, \quad (2.7)$$

et les équations vérifiées par le champ de pression  $p^\pm$  dans les parties homogènes  $\Omega_{a,\alpha}^\pm$  du guide deviennent dans les nouvelles coordonnées :

$$c \frac{\partial^2 p^\pm}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial Y} \left( c_2 \frac{\partial p^\pm}{\partial Y} \right) + \omega^2 p^\pm = 0. \quad (2.8)$$

On rappelle que  $c$  et  $c_2$  dépendent uniquement de la coordonnée transverse  $y = Y$ . De plus, ces coefficients  $c$  et  $c_2$  étant positifs, on retrouve une équation de type Helmholtz.

Maintenant que nous avons étudié les équations volumiques, regardons la condition de surface libre  $A \nabla p^\pm \cdot \nu = 0$  aux bords du guide. Le terme  $A \nabla p^\pm$  devient avec les nouvelles coordonnées :

$$AR \nabla_{X,Y} p^\pm = \begin{bmatrix} c_1 + \alpha' c_3 & c_3 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \nabla_{X,Y} p^\pm = \begin{bmatrix} c \partial_X p^\pm + c_3 \partial_Y p^\pm \\ c_2 \partial_Y p^\pm \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

On obtient la deuxième égalité ci-dessus en remarquant que

$$c_1 + \alpha' c_3 = \frac{c_1c_2 - (c_3)^2}{c_2} = c.$$

Sur les bords  $\{Y = \pm h\}$  la normale unitaire est donnée par le vecteur  $(0, 1)^t$ , d'où le résultat

$$\partial_Y p^\pm = 0 \quad \text{en} \quad \{Y = \pm h\}. \quad (2.10)$$

Par ailleurs, il est important de souligner qu'en coordonnées  $(X, Y)$ , la géométrie des demi-guides  $\Omega_{a,\alpha}^\pm$  est **séparable** car elle s'écrit :

$$\Omega_{a,\alpha}^\pm = \{\pm X \geq a\} \times \{Y \in [-h, h]\}.$$

Par conséquent, avec ce choix de  $\alpha$ , nous avons :

— éliminé les dérivées croisées dans l'opérateur  $\text{div}(A \nabla \cdot)$ ,

- obtenu des conditions aux bords (2.10) impliquant uniquement les dérivées selon  $Y$ ,
- et réécrit les équations dans une géométrie *séparable* pour les sous-domaines  $\Omega_{a,\alpha}^\pm$ .

On peut donc de nouveau chercher les modes simplement sous la forme  $\varphi(Y)e^{i\beta X}$ , ce qui nous ramène à chercher les valeurs de  $\beta$  telles que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dY} \left( c_2 \frac{d\varphi}{dY} \right) + \omega^2 \varphi = c\beta^2 \varphi & \text{dans } [-h, h], \\ \frac{d\varphi}{dY} = 0 & \text{en } \{Y = \pm h\}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Contrairement au cas (2.3), on retrouve un problème aux valeurs propres généralisé *linéaire* où  $\beta^2$  joue le rôle de valeur propre et  $\varphi$  de vecteur propre.

**Remarque 2.2.1** *En général, on ne sait pas résoudre analytiquement le problème (2.11) et on obtient les éléments propres numériquement. Notons cependant que dans le cas où la matrice  $A$  est constante, on sait résoudre analytiquement.*

Afin de déduire simplement les propriétés sur les modes, nous allons utiliser la formulation variationnelle du problème aux valeurs propres (2.11) qui est donnée par :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\lambda, \varphi) \text{ tel que } \varphi \neq 0 \text{ et } \forall \tilde{\varphi} \in H^1([-h, h]) \\ & \quad | \quad s(\varphi, \tilde{\varphi}) = \lambda m_c(\varphi, \tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où les formes bilinéaires  $s(\cdot, \cdot)$  et  $m_c(\cdot, \cdot)$  sont définies par :

$$s(\varphi, \tilde{\varphi}) = \int_{-h}^h \omega^2 \varphi \bar{\tilde{\varphi}} - c_2 \frac{d\varphi}{dY} \frac{d\bar{\tilde{\varphi}}}{dY}, \quad \text{et} \quad m_c(\varphi, \tilde{\varphi}) = \int_{-h}^h c \varphi \bar{\tilde{\varphi}}. \quad (2.13)$$

**Lemme 2.2.2** *Les formes bilinéaires  $s(\cdot, \cdot)$  et  $m_c(\cdot, \cdot)$  sont hermitiennes.*

La démonstration de ce lemme est triviale. Il nous permet de déduire la

**Proposition 2.2.3** *Il existe une suite  $(\lambda_k, \varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments propres solutions du problème (2.12). De plus :*

- les valeurs propres  $\lambda_k$  sont réelles et tendent vers  $-\infty$ ,
- les fonctions propres  $\varphi_k$  associées forment une base de  $L^2([-h, h])$  et vérifient la relation d'orthogonalité suivante :

$$m_c(\varphi_k, \varphi_l) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_k \neq \lambda_l.$$

Grâce à la symétrie des formes bilinéaires, la démonstration de cette proposition repose simplement sur des arguments classiques de théorie spectrale. Dans la suite, nous supposons les fonctions  $(\varphi_k)_k$  normalisées selon le produit hermitien  $m_c(\cdot, \cdot)$  :

$$\forall k \geq 0 \quad m_c(\varphi_k, \varphi_k) = 1. \quad (2.14)$$

On déduit à partir des éléments propres  $(\lambda_k, \varphi_k)$  les deux familles de modes  $P_k^+$  et  $P_k^-$  (en coordonnées  $(x, y)$ ) :

$$P_k^\pm(x, y) = \varphi_k(y) e^{\pm i\beta_k(x + \alpha(y))}, \quad \text{où} \quad \beta_k = \sqrt{\lambda_k}. \quad (2.15)$$

Par convention, on choisira la racine complexe telle que  $\text{Im}(\beta_k) > 0$ . La suite des  $(\lambda_k)_k$  étant réelle et décroissante, les  $\beta_k$  sont :

- soit réels positifs pour  $\lambda_k \geq 0$ , ce qui correspond aux modes propagatifs. Ces derniers sont en nombre fini car la suite des  $\lambda_k$  décroît vers  $-\infty$ .
- soit imaginaires purs, ce qui correspond aux modes évanescents. Ces derniers sont en nombre infini comme dans le cas isotrope.

Les deux familles de modes se distinguent comme au premier chapitre, voir section 1.1.2, par leurs sens de "propagation" :

- les modes  $P_k^+$  se "propagent vers la droite",
- et les modes  $P_k^-$  se "propagent vers la gauche".

Nous pouvons maintenant (re)définir la notion de *solution sortante* dans les demi-guides  $\Omega_{a,\alpha}^\pm$  :

**Définition 2.2.1** La solution  $p^+$  dans  $\Omega_a^+$  sera dite **sortante** si elle se décompose sur la famille  $(P_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$ , c'est à dire s'il existe une suite de complexes  $C_k^+$  telle que

$$p^+(x, y) = \sum_{k \geq 0} C_k^+ \varphi_k(y) e^{i\beta_k((x+\alpha(y))-a)}.$$

On dira de manière similaire que la solution  $p^-$  est **sortante** dans  $\Omega_a^-$  si elle se décompose sur la famille  $(P_k^-)_{k \in \mathbb{N}}$ .

L'intérêt principal de cette approche est que l'on retrouve les propriétés de complétude et d'orthogonalité des modes, comme dans le cas isotrope. Cependant, à la différence du cas isotrope, les relations d'orthogonalité sont vérifiées non plus sur des frontières verticales, mais sur les frontières déformées  $\Sigma_{a,\alpha}^\pm$ . Ainsi, si on se donne par exemple une donnée  $g_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{a,\alpha}^+)$ , on peut la décomposer sur les modes :

$$g_d = \sum_{k \geq 0} m_c(g_d, \varphi_k) \varphi_k,$$

et la décomposition modale de la solution  $p^+$  dans  $\Omega_{a,\alpha}^+$  vérifiant  $p^+ = g_d$  sur  $\Sigma_{a,\alpha}^+$  est donnée par :

$$p^+(x, y) = \sum_{k \geq 0} m_c(g_d, \varphi_k) e^{i\beta_k((x+\alpha(y))-a)} \varphi_k(y). \quad (2.16)$$

### Illustrations numériques des modes :

Sur la Figure (2.5), nous avons représenté pour les paramètres

$$\omega = 8, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

les 3 modes propagatifs et les 3 premiers modes évanescents de la famille  $(P_k^+)_k$ . Dans ce cas, notons que

$$\alpha(y) = -\alpha_0 y \quad \text{où} \quad \alpha_0 = -0.5.$$

On observe sur la Figure 2.5 que les modes évanescents de la famille  $P_k^+$  sont croissants (en module) dans la section du guide. En effet, en utilisant l'expression (2.15) des modes, il vient pour les modes évanescents (pour lesquelles  $\text{Re}(\beta_k) = 0$ ) :

$$P_k^+(x, y) = e^{-|\beta_k|x} e^{-|\beta_k|\alpha_0 y} \varphi_k(y).$$

Or, pour notre choix d'anisotropie (2.17), le paramètre  $\alpha_0 = -0.5$  est strictement négatif, et donc les modes  $P_k^+$  évanescents sont exponentiellement croissants en  $y$ . Ce comportement explique

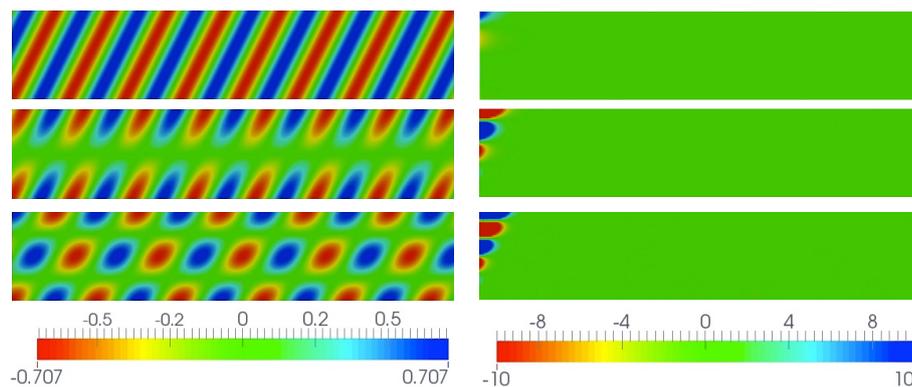


FIGURE 2.5 – Aspect des modes  $P_k^+$  dans le cas acoustique anisotrope pour les paramètres (2.17) : à gauche les 3 modes propagatifs, à droite les 3 premiers modes évanescents.

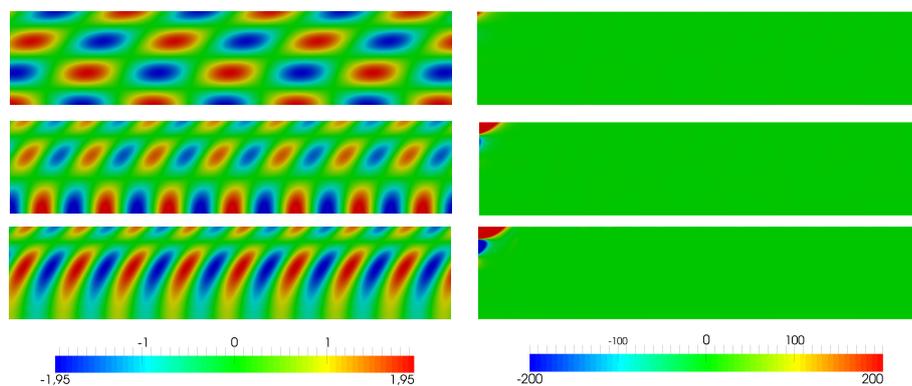


FIGURE 2.6 – Aspect des modes  $P_k^+$  dans le cas acoustique anisotrope pour les paramètres (2.18) : à gauche les 3 modes propagatifs, à droite les 3 premiers modes évanescents.

le mauvais conditionnement de la matrice de Gram associée aux modes qu'on observe sur la Figure 2.2.

De même, on peut illustrer les modes obtenus dans une seconde configurations où  $A$  n'est pas constant. Nous avons pris cette fois les paramètres suivants :

$$\omega = 10, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c_3(y) \\ c_3(y) & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad c_3(y) = \frac{y+h}{2h(1+\epsilon)} \quad \text{avec} \quad \epsilon = 0.001. \quad (2.18)$$

et nous avons représenté sur la Figure 2.6, 3 modes propagatifs et 3 modes évanescents. Dans ce cas, nous avons

$$\alpha(y) = \frac{(y+h)^2}{4h(1+\epsilon)}.$$

On observe également ici que, sur une section verticale, les modes évanescents augmentent (en module) très fortement (échelle entre  $-200$  et  $200$ ). Ceci s'explique pour les mêmes raisons que dans le cas précédent avec les paramètres constants (2.17).

### 2.2.3 Opérateurs $DtN$ sur les frontières déformées

À l'aide des représentations modales de la solution (2.16) dans les demi-guides  $\Omega_{a,\alpha}^\pm$ , nous pouvons (re)définir les opérateurs  $DtN$  vus au premier chapitre, mais cette fois sur les frontières déformées  $\Sigma_{a,\alpha}^\pm$  :

**Définition 2.2.2** Soit  $T_{D \rightarrow N}^{\alpha,+}$  l'opérateur de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{a,\alpha}^+)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{a,\alpha}^+)$  qui à  $g_d$  associe :

$$T_{D \rightarrow N}^{\alpha,+}(g_d) = \sum_{k \geq 0} i\beta_k c m_c(g_d, \varphi_k) \varphi_k,$$

sur  $\Sigma_{a,\alpha}^+$ . On définit de manière similaire l'opérateur  $T_{D \rightarrow N}^{\alpha,-}$  de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{a,\alpha}^-)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{a,\alpha}^-)$ .

L'expression de  $T_{D \rightarrow N}^{\alpha,-}$  est la même que celle de  $T_{D \rightarrow N}^{\alpha,+}$  car les normales sont opposées sur  $\Sigma_{a,\alpha}^-$  et  $\Sigma_{a,\alpha}^+$ . Soulignons que ces opérateurs  $T_{D \rightarrow N}^{\alpha,\pm}$  relient bien les traces  $p^a|_{\Sigma_{a,\alpha}^\pm}$  aux dérivées normales  $A\nabla p^a \cdot \nu$  sur  $\Sigma_{a,\alpha}^\pm$  car nous avons :

$$A\nabla_{(x,y)} p^a(x,y) \cdot \nu = \pm c \partial_X p^a(X,Y) \quad \text{sur} \quad \Sigma_{a,\alpha}^\pm. \quad (2.19)$$

On retrouve ce résultat en utilisant la formule (2.9) et le fait que la normale extérieur sur  $\Sigma_{a,\alpha}^\pm$  est donnée par le vecteur  $\pm(1, \alpha')$ .

La reformulation en domaine borné du problème (2.1) est donc :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p^a \in H^1(\Omega_{a,\alpha}) \text{ telle que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p^a) + \omega^2 p^a = f & \text{dans} \quad \Omega_{a,\alpha}, \\ A\nabla p^a \cdot \nu = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_{a,\alpha} \cap \partial\Omega, \\ A\nabla p^a \cdot \nu = T_{D \rightarrow N}^{\alpha,+}(p^a) & \text{sur} \quad \Sigma_{a,\alpha}^\pm, \end{array} \right. \end{array} \quad (2.20)$$

à partir de laquelle on montre comme pour le théorème 1.1.5 le

**Théorème 2.2.4** *Excepté pour au plus un ensemble dénombrable de fréquences  $\omega$  qui peuvent uniquement s'accumuler en  $+\infty$ , le problème (2.20) admet une unique solution.*

La formulation variationnelle ainsi que la discrétisation du problème (2.20) est identique au cas isotrope présenté au premier chapitre, voir 1.1.4.

Pour terminer cette section, discutons brièvement la difficulté qu'on rencontre en élasticité. La technique du changement de coordonnées a également été étudiée dans le cadre du "cloaking" pour les équations de l'élasticité (voir par exemple [72, 67]). Cependant, il a été montré dans [67] que la transformation des coordonnées change la nature de l'équation ce qui nous semble poser des difficultés. Par manque de temps, nous n'avons pas pu explorer davantage cette piste qui nous semble par ailleurs très intéressante.

### Illustrations numériques :

Afin d'illustrer ces nouvelles "frontières transparentes", nous avons calculé la solution du problème (2.20) pour différentes tailles de boîtes  $\Omega_{a,\alpha}$ . Sur la Figure 2.7, on a représenté la solution obtenue en considérant les paramètres (2.17) et en utilisant 2 tailles de boîte

$$\Omega_{a,\alpha} \quad \text{pour} \quad a = \{1, 2\}.$$

Afin de mieux observer la correspondance des résultats, nous avons aligné les trois résultats selon les axes de coordonnées  $(X, Y)$  (ceci est possible car ici la matrice  $A$  est constante). Les frontières artificielles bornant le domaine de calcul sont marquées en noires. Grâce aux décompositions modales dans les demi-guides  $\Omega_{a,\alpha}^\pm$  (voir formule (2.16)), on peut également

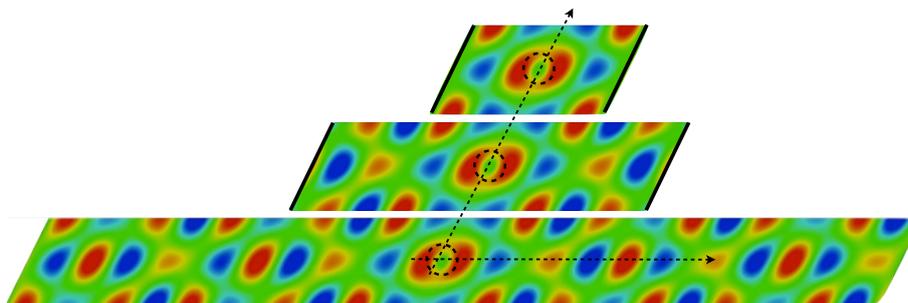


FIGURE 2.7 – Résolution du problème (2.20) avec les paramètres (2.17) dans  $\Omega_{a,\alpha}$  pour  $a = 1$  en haut, puis  $a = 2$  au centre, et reconstruction de la solution dans tout le domaine en bas. Le support du terme source  $f$  est représenté par le cercle en pointillé.

reconstruire la solution dans tout le domaine.

De même, on peut illustrer la méthode dans le cas d'un milieu stratifié en considérant les paramètres (2.18). Nous avons représenté sur la Figure 2.8 la solution du problème (2.20) également pour 2 tailles de boîtes

$$\Omega_{a,\alpha} \text{ pour } a = \{0.5, 1\},$$

ainsi que la reconstruction dans les demi-guides à l'aide des décompositions modales.

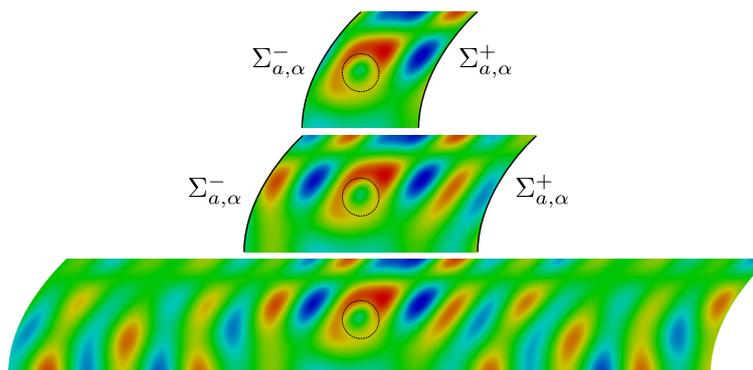


FIGURE 2.8 – Résolution du problème (2.20) avec les paramètres (2.18) dans  $\Omega_{a,\alpha}$  pour  $a = 0.5$  en haut, puis  $a = 1$  au centre, et reconstruction de la solution dans tout le domaine en bas. Le support du terme source  $f$  est représenté par le cercle en pointillé.

## 2.3 Utilisation du recouvrement pour construire de nouvelles conditions transparentes

En vue d'étudier le cas plus difficile de l'élasticité, nous allons maintenant présenter une seconde méthode pour construire des conditions transparentes sur des *frontières verticales séparées*. Les notations que nous allons utiliser sont rappelées sur la Figure 2.9 et ont été introduites dans la section 1.2 du premier chapitre. On rappelle qu'on note  $(p^-, p^b, p^+)$  les restrictions de  $p$  aux différents sous-domaines :

$$(p^-, p^b, p^+) = (p|_{\Omega_a^-}, p|_{\Omega_b}, p|_{\Omega_a^+}),$$

où  $p$  désigne la solution du problème (2.1).

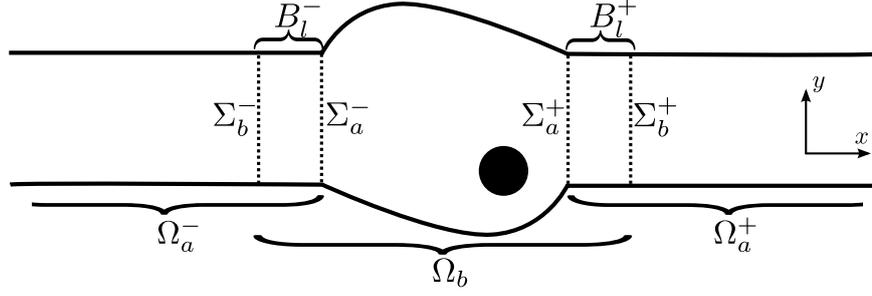


FIGURE 2.9 – Géométrie du guide et notations.

### 2.3.1 Introduction et démarche

Dans ce qui va suivre, nous allons manipuler les séries modales de manière formelle. La question de la convergence est abordée dans la section 2.3.4

Dans le cas de l'élasticité anisotrope, on ne sait pas (ou on ne peut pas) obtenir des relations d'orthogonalité entre les modes même sur des frontières obliques. Par conséquent, la construction d'opérateurs  $DtN$  (ou  $DtR$  voir section 1.2) requiert l'inversion de la matrice de Gram associée aux modes pour projeter la donnée de *Dirichlet*, ce que l'on souhaite éviter comme nous l'avons expliqué section 2.1.

Nous allons décrire ici de manière formelle la méthode que nous proposons. Elle s'appuie sur la formulation multi-domaines avec recouvrement décrite dans la section 1.2. Nous avons vu dans ce cas que nous devons faire un choix des conditions imposées sur les frontières  $\Sigma_a^\pm$  et  $\Sigma_b^\pm$ . Ce choix doit assurer la compatibilité de  $p^b$  et  $p^\pm$  dans les zones de recouvrement  $B_l^\pm$ , c'est à dire :

$$p^b = p^\pm \quad \text{dans} \quad B_l^\pm. \quad (2.21)$$

Sur les frontières "extérieures"  $\Sigma_b^\pm$ , nous allons imposer comme précédemment la condition de Robin :

$$A\nabla p^b \cdot \nu + \gamma p^b = A\nabla p^\pm \cdot \nu + \gamma p^\pm \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^\pm, \quad (2.22)$$

où  $\gamma$  est un paramètre complexe.

Pour la condition sur  $\Sigma_a^\pm$ , nous allons imposer une condition plus complexe et, afin de simplifier les explications, nous allons travailler dans  $B_l^+$ . D'une part,  $p^b$  étant solution de l'équation homogène :

$$\operatorname{div}(A\nabla p^b) + \omega^2 p^b = 0 \quad \text{dans} \quad B_l^+,$$

elle se décompose sur les modes aller et retour comme suit :

$$p^b(x, y) = \sum_{k \geq 0} C_k^+(p^b) e^{i\beta_k(x-a)} \mathcal{P}_k^+(y) + C_k^-(p^b) e^{-i\beta_k(x-a)} \mathcal{P}_k^-(x, y), \quad (2.23)$$

où les  $C_k^\pm(p^b)$  sont les amplitudes modales complexes de  $p^b$  "prises" en  $x = a$ , et les  $\mathcal{P}_k^\pm(y)$  sont les champs transverses des modes. Dans notre cas, en utilisant l'expression (2.15) des modes, il vient

$$\mathcal{P}_k^\pm = e^{\pm i\beta_k \alpha(y)} \varphi_k(y).$$

Dans toute la suite, on utilisera cette police de caractère pour définir les champs transverses des modes.

D'autre part,  $p^+$  doit être *sortante* dans  $\Omega_a^+$  et donc se décompose uniquement sur les modes *sortants* :

$$p^+(x, y) = \sum_{k \geq 0} C_k^+(p^+) e^{i\beta_k(x-a)} \mathcal{P}_k^+(y),$$

où les  $C_k^+(p^+)$  sont les amplitudes modales associées à  $p^+$ . La condition que nous proposons d'imposer sur  $\Sigma_a^+$  est la suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad C_k^+(p^b) = C_k^+(p^+). \quad (2.24)$$

Notons que cette condition est modale mais non locale.

Étant donnés nos choix de conditions (2.22) et (2.24), il vient maintenant deux questions :

1. Tout d'abord, ces conditions assurent-elles la compatibilité (2.21) dans la zone de recouvrement  $B_l^+$ ,
2. Ensuite, comment obtenir les coefficients  $C_k^\pm(p^b)$  de la décomposition modale (2.23) à partir des données éléments finis sur  $\Sigma_a^+$ ? Rappelons qu'ici les frontières sont verticales, et donc nous n'avons pas de relations d'orthogonalité permettant de calculer simplement la décomposition modale.

Dans la section suivante 2.3.2, nous commencerons par répondre à la seconde question. Nous verrons qu'à l'aide des relations de *bi-orthogonalité* (qui seront rappelées), on peut obtenir les coefficients de la décomposition modale de  $p^b$  dans  $B_l^\pm$  à partir de sa trace et de sa dérivée normale sur  $\Sigma_a^+$ .

Nous verrons ensuite dans la section 2.3.3, que nos choix de conditions (2.22-2.24) assurent également la compatibilité entre  $p^b$  et  $p^\pm$  dans les zones de recouvrement  $B_l^\pm$ .

### 2.3.2 Décomposition modale via les relations de bi-orthogonalité

#### Les relations de bi-orthogonalité :

Dans cette section, nous allons simplement rappeler le résultat, la démonstration est donnée dans les références [6, 57]. Notons qu'à l'aide de l'expression (2.15) des modes, nous pouvons également le démontrer directement. De plus, cette expression explicite des modes (2.15) nous sera utile dans la suite.

Introduisons quelques notations : on pose  $s$  la variable correspondant à la vitesse dans la direction  $x$  :

$$s = A \nabla p \cdot e_x,$$

où  $e_x$  est le vecteur unitaire dans la direction  $x$ . Avec ces variables  $p$  et  $s$  de pression/vitesse, on exprime les deux familles de modes définies par (2.15) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} P_k^\pm(x, y) \\ S_k^\pm(x, y) \end{bmatrix} = e^{\pm i\beta_k x} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^\pm(y) \\ \mathcal{S}_k^\pm(y) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

où  $\mathcal{P}_k^\pm$  et  $\mathcal{S}_k^\pm$  désignent les composantes transverses du mode  $(P_k^\pm, S_k^\pm)$ . Rappelons que nous avons vu dans la section précédente 2.2.2 que :

- les modes  $(P_k^+, S_k^+)_k$  associées aux  $(\beta_k)_k$  sont *sortants* dans  $\Omega_a^+$ ,
- et les modes  $(P_k^-, S_k^-)_k$  associées aux  $-(\beta_k)_k$  sont *sortants* dans  $\Omega_a^-$ .

Suivant ces notations, les *relations de bi-orthogonalité* entre les modes s'expriment ainsi :

**Proposition 2.3.1** *Soient  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2)$  deux modes associés respectivement à  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Il vérifient la relation de bi-orthogonalité :*

$$\int_{-h}^h \mathcal{P}_1 \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1 \mathcal{P}_2 = 0 \quad \text{si } \beta_1 \neq -\beta_2. \quad (2.26)$$

Pour les deux familles de modes  $(\pm\beta_k, \mathcal{P}_k^\pm, \mathcal{S}_k^\pm)$ , on déduit (attention aux indices) :

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \int_{-h}^h \mathcal{P}_k^\pm \mathcal{S}_l^\pm - \mathcal{S}_k^\pm \mathcal{P}_l^\pm = 0, \quad \text{et si } k \neq l, \quad \int_{-h}^h \mathcal{P}_k^\pm \mathcal{S}_l^\mp - \mathcal{S}_k^\pm \mathcal{P}_l^\mp = 0.$$

On remarque donc que deux modes d'une même famille sont bi-orthogonaux entre eux. Dans le cas où l'on considère un mode  $(\beta_k, \mathcal{P}_k^+, \mathcal{S}_k^+)$  et son "opposé"  $(-\beta_k, \mathcal{P}_k^-, \mathcal{S}_k^-)$ , nous noterons  $J_k$  le terme :

$$J_k = \int_{-h}^h \mathcal{P}_k^+ \mathcal{S}_k^- - \mathcal{S}_k^+ \mathcal{P}_k^-.$$

À l'aide de l'expression (2.15) des modes, nous pouvons démontrer que

$$J_k = 2i\beta_k \int_{-h}^h \frac{c_1 c_2 - (c_3)^2}{c_2} |\varphi_k|^2 dy \quad \text{où } c_1 c_2 - (c_3)^2 > 0,$$

et où les fonctions  $\varphi_k$  sont définies dans la proposition 2.2.3. Il est important de remarquer que ces coefficients  $J_k$  sont non nuls si les  $\beta_k$  sont différents de zéro, ce qui revient à éviter les fréquences de coupure. On peut alors normaliser l'ensemble des modes  $(\pm\beta_k, \mathcal{P}_k^\pm, \mathcal{S}_k^\pm)$  selon la relation de bi-orthogonalité.

### La décomposition modale :

Nous allons maintenant expliquer comment les relations de bi-orthogonalité nous permettent de connaître les coefficients  $C_k^\pm(p^b)$  de la décomposition modale (2.23) de  $p^b$  dans les zones de recouvrement  $B_l^\pm$ . Les explications seront données dans le domaine  $B_l^+$  mais bien évidemment, les mêmes idées s'appliquent dans  $B_l^-$ .

Considérons par exemple qu'on connaît le champ de pression/vitesse  $(p^b, s^b)$  sur la frontière verticale  $\Sigma_a^+$ . On rappelle qu'avec nos notations  $s^b$  est défini par :

$$s^b = A \nabla p^b \cdot e_x,$$

et correspond en  $x = a$  à la dérivée normale sur  $\Sigma_a^+$ . En supposant que l'ensemble des modes  $(\mathcal{P}_k^\pm, \mathcal{S}_k^\pm)$  forment une base complète de  $L^2([-h, h]) \times L^2([-h, h])$ , nous avons alors :

$$\begin{bmatrix} p^b \\ s^b \end{bmatrix} = \sum_{k \geq 0} C_k^+(p^b) \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^+ \\ \mathcal{S}_k^+ \end{bmatrix} + C_k^-(p^b) \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^- \\ \mathcal{S}_k^- \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

où les  $C_k^\pm(p^b)$  sont les coefficients de la décomposition modale dans  $B_l^+$ . On utilise un abus de notations ici en écrivant  $C_k^\pm(p^b)$ , car nous devrions écrire  $C_k^\pm(p^b, s^b)$  pour être exact.

**Remarque 2.3.2** *Pour le cas particulier d'un milieu isotrope, nous avons bien la complétude car nous retrouvons la base de Fourier, voir formule (1.8) du premier chapitre. Pour le cas général, nous supposons la complétude.*

Grâce aux *relations de bi-orthogonalité* (voir proposition 2.3.1), nous pouvons par simple projection sur les deux familles de modes  $(\mathcal{P}_k^+, \mathcal{S}_k^+)_k$  et  $(\mathcal{P}_k^-, \mathcal{S}_k^-)_k$  obtenir les coefficients  $C_k^\pm(p^b)$  par la formule suivante :

$$C_k^\pm(p^b) = \frac{1}{\pm J_k} \left[ (p^b, \mathcal{S}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^+)} - (s^b, \mathcal{P}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^+)} \right]. \quad (2.28)$$

Donc, étant donnée la trace de  $p^b$  et sa dérivée normale  $s^b$  sur  $\Sigma_a^+$ , on sait exprimer sa décomposition modale (2.23) dans la zone de recouvrement  $B_l^+$ , et donc déduire en particulier les coefficients  $C_k^+(p^b)$  nécessaires pour exprimer la condition de transmission (2.24) sur  $\Sigma_a^+$ .

Maintenant, pour obtenir "complètement" les coefficients  $C_k^\pm$  à partir d'une donnée variationnelle sur  $p^b$ , il reste une difficulté. En effet, nous utilisons ici la dérivée normale  $s^b$  sur  $\Sigma_a^+$ , ce qui n'est pas variationnel dans  $H^1$ . Pour donner un sens à  $(s^b, \mathcal{P}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^+)}$ , l'idée est d'utiliser une technique de relèvement. Posons  $\mathcal{L}(\cdot)$  un relèvement de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$  dans le domaine  $B_l^+$  qui vérifie pour  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$  :

1.  $\mathcal{L}(g) = g$  sur  $\Sigma_a^+$ ,
2.  $\mathcal{L}(g) = 0$  sur  $\Sigma_b^+$ ,
3.  $\mathcal{L}(g)$  est dans  $H^1(B_l^+)$ .

En appliquant la formule de Green au terme  $(s^b, \mathcal{P}_k^\mp)$ , il vient :

$$\int_{\Sigma_a^+} s^b \mathcal{P}_k^\mp = \int_{\Sigma_a^+} s^b \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp) = \int_{B_l^+} \operatorname{div}(A \nabla p^b) \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp) + A \nabla p^b \cdot \nabla \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp), \quad (2.29)$$

où le terme de bord sur  $\Sigma_b^+$  s'annule par définition de notre relèvement. Nous savons de plus que  $p^b$  vérifie :

$$\operatorname{div}(A \nabla p^b) + \omega^2 p^b = 0 \quad \text{dans } B_l^+.$$

Par conséquent, on peut remplacer dans (2.29) le terme  $\operatorname{div}(A \nabla p^b)$  par  $-\omega^2 p^b$ , et il vient :

$$\int_{\Sigma_a^+} s^b \mathcal{P}_k^\mp = \int_{B_l^+} -\omega^2 p^b \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp) + A \nabla p^b \cdot \nabla \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp).$$

Finalement, étant donnée  $p^b$  dans la zone  $B_l^+$  (et donc en particulier  $p^b$  sur  $\Sigma_a^+$ ), nous pouvons exprimer les coefficients  $C_k^\pm(p^b)$  de la décomposition modale à l'aide de la formule suivante (en remplaçant dans (2.28) la formule ci-dessus) :

$$C_k^\pm = \frac{1}{\pm J_k} \left[ \int_{-h}^h p^b|_{\Sigma_a^+} \mathcal{S}_k^\mp - \int_{B_l^+} -\omega^2 p^b \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp) + A \nabla p^b \cdot \nabla \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp) \right]. \quad (2.30)$$

Ainsi, nous pouvons utiliser les conditions de transmission (2.24) pour obtenir la *solution sortante*  $p^+$  dans  $\Omega_a^+$  associée à  $p^b$  par la formule suivante :

$$\begin{bmatrix} p^+(x, y) \\ s^+(x, y) \end{bmatrix} = \sum_{k \geq 0} C_k^+(p^b) \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^+ \\ \mathcal{S}_k^+ \end{bmatrix} e^{i\beta_k(x-a)}. \quad (2.31)$$

Soulignons que l'expression ci-dessus n'est pas égale (a priori) à  $(p^b, s^b)$  dans tout  $B_l^+$ . En effet, pour assurer cela, et donc la compatibilité (2.21), il faut montrer que  $C_k^-(p^b) = 0$  pour tout  $k$ . La condition de transmission (2.22) sur  $\Sigma_b^+$  va nous assurer de ce résultat comme nous allons le voir maintenant.

### 2.3.3 Formulation multi-domaines

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la formulation multi-domaines, et le but sera de montrer qu'elle est équivalente au problème initial (2.1). Les champs de pression  $p^b$  et  $p^\pm$  vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p^b) + \omega^2 p^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \end{array} \right. \\ \text{et} & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p^\pm) + \omega^2 p^\pm = 0 & \text{dans } \Omega_a^\pm, \\ A\nabla p^\pm \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a^\pm \cap \partial\Omega, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $p^\pm$  sont sortants dans les demi-guides  $\Omega_a^\pm$ . De plus, ces équations sont couplées par les *conditions de transmission* :

$$\begin{aligned} & C_k^\pm(p^b) = C_k^\pm(p^\pm) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{sur } \Sigma_a^\pm \\ \text{et} & A\nabla p^\pm \cdot \nu + \gamma p^\pm|_{\Sigma_b^\pm} = A\nabla p^b \cdot \nu + \gamma p^b|_{\Sigma_b^\pm} \quad \text{sur } \Sigma_b^\pm, \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dans la proposition 1.2.2 du premier chapitre, nous avons vu que pour montrer l'équivalence entre la formulation multi-domaines (2.32-2.33) et le problème initial (2.1), il faut vérifier la compatibilité des représentations  $p^b$  et  $p^\pm$  dans les zones de recouvrement  $B_l^\pm$  :

$$p^b = p^\pm \quad \text{dans } B_l^\pm. \quad (2.34)$$

Pour simplifier, nous allons uniquement travailler dans  $B_l^+$  mais les mêmes idées s'appliquent dans  $B_l^-$ . Posons  $v^+$  la fonction définie par

$$v^+ = p^b - p^+ \quad \text{dans } B_l^+.$$

Étant données les décompositions modales

$$p^b = \sum_{k \geq 0} C_k^+(p^b)P_k^+ + C_k^-(p^b)P_k^-, \quad \text{et} \quad p^+ = \sum_{k \geq 0} C_k^+(p^+)P_k^+ \quad \text{dans } B_l^+,$$

et étant donnée la condition de transmission  $C_k^+(p^b) = C_k^+(p^+)$ , il vient

$$v^+ = \sum_{k \geq 0} C_k^-(p^b)P_k^- \quad \text{dans } B_l^+. \quad (2.35)$$

Bien évidemment, on peut prolonger la fonction  $v^+$  dans tout le demi-guide parfait  $\tilde{\Omega}_b^+$  défini par

$$\tilde{\Omega}_b^+ = ]-\infty, b] \times [-h, h],$$

Ce domaine correspond au prolongement de  $B_l^+$  pour les  $x < a$ . La fonction  $v^+$  est *sortante* dans  $\tilde{\Omega}_b^+$  et est solution du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } v^+ \in H_{\text{loc}}^1(\tilde{\Omega}_b^+) \text{ sortante telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla v^+) + \omega^2 v^+ = 0 & \text{dans } \tilde{\Omega}_b^+, \\ A\nabla v^+ \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_b^+ \cap \partial\Omega, \\ A\nabla v^+ \cdot \nu + \gamma v^+ = 0 & \text{sur } \Sigma_b^+. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nous voyons ici que nous avons "éliminé" la boîte  $B_l^+$  en la remplaçant par le demi-guide infini  $\tilde{\Omega}_b^+$ . En ce sens, la condition de transmission sur  $\Sigma_a^+$  correspond à une *condition transparente* pour  $v^+$ . Il reste maintenant à prouver que  $v^+ = 0$ .

**Proposition 2.3.3** *Pour tout  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) < 0$ , le problème (2.36) admet comme unique solution  $v = 0$ . Par conséquent, la formulation multi-domaines (2.32-2.33), et le problème initial (2.1) sont bien équivalents.*

Afin de montrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.3.4** *Si  $v$  est une solution sortante, alors elle vérifie sur toute section  $\Sigma$  du demi-guide  $\tilde{\Omega}_b^+$  :*

$$\text{Im} \left( \int_{\Sigma} A \nabla v \cdot \nu \bar{v} \right) > 0,$$

où  $\nu$  représente la normale unitaire à  $\Sigma$  dans la direction des  $x < 0$ .

Ce lemme indique que le flux d'énergie à travers une section  $\Sigma$  du guide est positif, ce qui est cohérent avec la notion de solution *sortante* car l'énergie doit se "propager" vers l'infini. Sa démonstration est technique et on peut la trouver dans [7].

**Preuve de la proposition 2.3.3 :** Soit  $v^+$  une solution de (2.36). Dans le sous-domaine borné  $B_l^+$  du demi-guide  $\tilde{\Omega}_b^+$ , nous pouvons utiliser la formule de Green avec comme fonction test  $\bar{v}^+$ , et il vient en utilisant les conditions aux bords de (2.36) :

$$\int_{B_l^+} \omega^2 |v^+|^2 - A \nabla v^+ \cdot \bar{v}^+ + \int_{\Sigma_a^+} A \nabla v^+ \cdot \nu \bar{v}^+ - \gamma \int_{\Sigma_b^+} |v|^2 = 0.$$

En prenant la partie imaginaire de cette expression, nous obtenons alors :

$$\text{Im} \left( \int_{\Sigma_a^+} A \nabla v^+ \cdot \nu \bar{v}^+ \right) - \text{Im}(\gamma) \int_{\Sigma_b^+} |v|^2 = 0.$$

Or, d'après le lemme 2.3.4, la solution  $v^+$  étant sortante et ayant supposé  $\text{Im}(\gamma) < 0$ , nous avons ci-dessus la somme de 2 termes positifs qui est égale à 0, et donc :

$$\text{Im} \left( \int_{\Sigma_a^+} A \nabla v^+ \cdot \nu \bar{v}^+ \right) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma_b^+} |v|^2 = 0.$$

On déduit de la seconde égalité et de la condition sur le bord  $\Sigma_b^+$  vérifiée par  $v^+$  :

$$v^+ = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^+ \quad \text{et} \quad A \nabla v^+ \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^+.$$

On obtient finalement que  $v^+ = 0$  partout à l'aide d'un argument de prolongement unique. ■

**Remarque 2.3.5** *Précédemment, dans le cas Dirichlet to Neumann "avec recouvrement" (voir la proposition 1.2.6), nous avons vu que pour  $\gamma = 0$ , le problème était mal posé pour les fréquences liées à la zone de recouvrement  $B_l$ .*

*Ici, si  $\gamma = 0$ , le problème (2.36) peut être mal posé pour certaines fréquences correspondant à l'existence de modes localisés au bord du demi-guide  $\tilde{\Omega}_b^+$ , appelés modes de "bout", voir par exemple [76]. Ces fréquences sont différentes de celles des fréquences de "boite" que nous avons mise en évidence précédemment.*

*Notons par ailleurs que dans le cas isotrope, pour  $\gamma = 0$ , on peut montrer facilement que le problème (2.36) a toujours comme unique solution 0, sauf aux fréquences de coupure. En effet, on peut exploiter dans ce cas l'orthogonalité des modes sur  $\Sigma_b^+$  pour montrer le résultat. Il n'y a donc pas de mode de bout pour un milieu isotrope.*

### 2.3.4 Reformulation à l'aide d'un opérateur *Transparent to Robin*

Comme nous l'avons déjà vu au premier chapitre, pour réduire notre problème au domaine borné  $\Omega_b$ , il est nécessaire d'éliminer les inconnues  $p^\pm$  dans la formulation multi-domaines (2.32). Avec la formule (2.31), on sait exprimer la solution *sortante*  $p^\pm$  dans  $\Omega_a^\pm$  vérifiant la condition de transmission

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad C_k^\pm(p^b) = C_k^\pm(p^\pm) \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^\pm,$$

étant données la trace et la dérivée normale de  $p^b$  sur  $\Sigma_a^\pm$ . Ainsi, à l'aide de l'expression (2.31) de  $p^\pm$  et de la condition de transmission :

$$A\nabla p^b \cdot \nu + \gamma p^b = A\nabla p^\pm \cdot \nu + \gamma p^\pm \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^\pm,$$

nous pouvons relier la trace et la dérivée normale de  $p^b$  sur  $\Sigma_a^\pm$  à  $A\nabla p^b \cdot \nu + \gamma p^b$  sur les frontières extérieures  $\Sigma_b^\pm$ . Par exemple, il vient sur  $\Sigma_b^+$  :

$$A\nabla p^b \cdot \nu + \gamma p^b = \sum_{k \geq 0} C_k^+(p^b) (\mathcal{S}_k^+ + \gamma \mathcal{P}_k^+) e^{i\beta_k l}. \quad (2.37)$$

Jusqu'ici, les séries modales ont été manipulées de façon formelle, et nous allons maintenant nous poser la question de leurs convergences. Nous allons montrer ci-après que la série modale dans (2.37) a une convergence normale pour tout

$$l > \alpha_{max} = \alpha^+ - \alpha^-, \quad \text{où} \quad \alpha^- = \min_{y \in [-h, h]} (\alpha(y)) \quad \text{et} \quad \alpha^+ = \max_{y \in [-h, h]} (\alpha(y)). \quad (2.38)$$

Rappelons que  $\alpha$  a été défini précédemment par la formule (2.6). Géométriquement, cette condition (2.38) s'interprète comme le fait qu'il est nécessaire d'avoir un recouvrement  $l$  plus grand que la zone "couverte" par la frontière  $\Sigma_{a,\alpha}^+$  définie dans la section 2.2.1 (voir Figure 2.10).

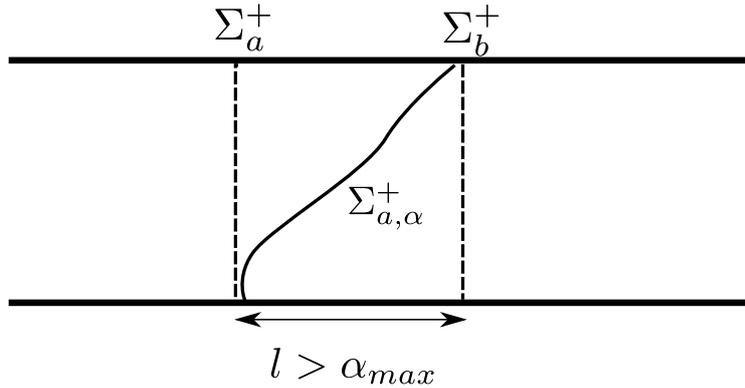


FIGURE 2.10 – Géométrie demi-guide  $\Omega_a^+$  et illustration de la condition (2.38).

Ainsi, nous allons réécrire nos conditions transparentes (2.37) à l'aide d'opérateurs "Transparent to Robin" définis ainsi :

**Définition 2.3.1** Pour  $l > \alpha_{max}$ , on définit l'opérateur  $T_{T \rightarrow R}^{l,+}$  de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_b^+)$  qui à  $p, s$  associe :

$$T_{T \rightarrow R}^{l,+}(v) = \sum_{k \geq 0} C_k^+(p, s) (\gamma \mathcal{P}_k^+ + \mathcal{S}_k^+) e^{i\beta_k l}, \quad (2.39)$$

où les coefficients  $C_k^+$  sont données par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad C_k^+(p, s) = \frac{1}{J_k} \left[ (p, \mathcal{S}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} - (s, \mathcal{P}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} \right].$$

De manière similaire, on peut définir l'opérateur  $T_{T \rightarrow R}^{l, \pm}$  de  $H^1(B_l^-)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_b^-)$ .

On rappelle que l'on note  $C_k^\pm(p^b) = C_k^\pm(p^b|_{\Sigma_a^\pm}, s^b|_{\Sigma_a^\pm})$ . De plus, nous avons vu qu'à l'aide de la technique du relèvement décrite section 2.3.2, on peut obtenir les coefficients  $C_k^\pm$  à l'aide de  $p^b$  dans la bande  $B_l^\pm$ .

Nous pouvons reformuler le problème initial 2.1 dans le domaine borné  $\Omega_b$  à l'aide des opérateurs  $T_{T \rightarrow R}^{l, \pm}$  :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A \nabla p^b) + \omega^2 p^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ A \nabla p^b \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ A \nabla p^b \cdot \nu + \gamma p^b = T_{T \rightarrow R}^{l, \pm}(p^b) & \text{sur } \Sigma_b^\pm, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Par équivalence au problème initial 2.1 et grâce au théorème 2.2.4, nous savons que le problème ci-dessus est bien posé.

Sous forme variationnelle, le problème (2.40) se réécrit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que } \forall \tilde{p} \in H^1(\Omega_b) \\ & a_\gamma(p^b, \tilde{p}) - t_l(p^b, \tilde{p}) = L(\tilde{p}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

où les formes bilinéaires  $a_\gamma(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) - b_\gamma^-(\cdot, \cdot) - b_\gamma^+(\cdot, \cdot)$  et  $t_l(\cdot, \cdot) = t_l^+(\cdot, \cdot) + t_l^-(\cdot, \cdot)$  sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(p^b, \tilde{p}) = \int_{\Omega_b} A \nabla p^b \cdot \tilde{p} - \omega^2 p^b \tilde{p}, \\ b_\gamma^\pm(p^b, \tilde{p}) = \int_{\Sigma_b^\pm} p^b \tilde{p}, \\ t_l^\pm(p^b, \tilde{p}) = \int_{\Sigma_b^\pm} T_{T \rightarrow R}^{l, \pm}(p^b) \tilde{p} = \sum_{k \geq 0} C_k^\pm(p^b) e^{i\beta_k l} ((\mathcal{S}_k^+ + \gamma \mathcal{P}_k^+), \tilde{p})_{L^2(\Sigma_b^\pm)}. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

En utilisant la technique du relèvement et la formule (2.30), il vient

$$\begin{aligned} t_l^\pm(p^b, \tilde{p}) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\pm J_k} & \left[ \int_{-h}^h p^b|_{\Sigma_a^\pm} \mathcal{S}_k^\mp - \int_{B_l^\pm} -\omega^2 p^b \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp) + A \nabla p^b \cdot \nabla \mathcal{L}(\mathcal{P}_k^\mp) \right] \\ & e^{i\beta_k l} ((\mathcal{S}_k^+ + \gamma \mathcal{P}_k^+), \tilde{p})_{L^2(\Sigma_b^\pm)}. \end{aligned}$$

Pour discrétiser le problème, il est nécessaire de tronquer les séries modales définissant les opérateurs  $T_{T \rightarrow R}^{l, \pm}$ , comme nous l'avons déjà présenté dans la section 1.1.4. La discrétisation éléments finis est classique.

**Remarque 2.3.6** Afin de réduire au plus les calculs pour les termes  $t_l^\pm(p^b, \tilde{p})$ , l'idée est de prendre un relèvement  $\mathcal{L}$  de la taille d'une maille. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'intégrer dans tout  $B_l^\pm$ .

Grâce à la convergence normale de la série, on peut prouver en suivant les mêmes idées qu'au premier chapitre (voir la proposition 1.2.8) la

**Proposition 2.3.7** *Pour tout  $l > \alpha_{max}$ , les opérateurs  $T_{T \rightarrow R}^{l, \pm}$  sont compacts.*

Comme dans la section 1.2.2 du premier chapitre, on peut déduire de ce résultat que le problème (2.40) relève du **théorème de Fredholm analytique**.

**Preuve de la convergence normale de la série modale :** Justifions maintenant la convergence normale de la série définie dans (2.37), autrement dit montrons que :

$$\sum_{k \geq 0} |C_k^+(p^b)| \|\mathcal{S}_k^+ + \gamma \mathcal{P}_k^+\|_{H^{-\frac{1}{2}}([-h, h])} |e^{i\beta_k l}| < +\infty. \quad (2.43)$$

Rappelons que pour les modes évanescents, nous avons :

$$\forall k \geq N, \quad \beta_k = i|\beta_k|, \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |\beta_k| = +\infty, \quad (2.44)$$

où  $N$  désigne le nombre de modes propagatifs. Dans le terme général de la série (2.43), on peut distinguer :

- d'une part le terme  $e^{i\beta_k l}$  dont nous savons qu'il décroît exponentiellement vite avec  $k$  pour les modes évanescents. En effet, les  $\beta_k$  associées aux modes évanescents vérifient (2.44), et donc nous avons pour ces modes,

$$e^{i\beta_k l} = e^{-|\beta_k| l} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

- d'autre part, les termes  $C_k^+(p^b)$ ,  $\mathcal{P}_k^+$  et  $\mathcal{S}_k^+$  dont les comportements dépendent de l'anisotropie. Rappelons que nous avons vu dans la section précédente, voir Figure 2.5, que pour un milieu anisotrope les modes évanescents peuvent être exponentiellement croissants dans la section verticale du guide.

Pour montrer le résultat (2.43), nous devons donc étudier le comportement des termes  $C_k^+(p^b)$ ,  $\mathcal{P}_k^+$  et  $\mathcal{S}_k^+$  pour  $k$  tendant vers  $+\infty$ . On montre facilement (par continuité de la trace et de l'opérateur de relèvement  $\mathcal{L}(\cdot)$ ) que les coefficients  $C_k^+(v)$  vérifient l'inégalité suivante :

$$|C_k^+(v)| \leq \frac{1}{|J_k|} \|v\|_{H^1(B_l^+)} \left( \|\mathcal{S}_k^-\|_{H^{-\frac{1}{2}}([-h, h])} + \|\mathcal{P}_k^-\|_{H^{\frac{1}{2}}([-h, h])} \right), \quad (2.45)$$

où  $v$  est une fonction de  $H^1(B_l^+)$ . Nous allons par conséquent nous concentrer sur l'étude des modes  $\mathcal{P}_k^\pm$  et  $\mathcal{S}_k^\pm$  pour étudier la convergence de la série (2.43).

Afin d'étudier les normes de  $\mathcal{P}_k^\pm$  et  $\mathcal{S}_k^\pm$ , nous aurons besoin d'utiliser leurs expressions (2.15) que nous avons obtenues grâce au changement de coordonnées :

$$P_k^\pm(x, y) = e^{\pm i\beta_k x} e^{\pm i\beta_k \alpha(y)} \varphi_k(y),$$

où  $\alpha(y)$  est défini par (2.6) et les  $\varphi_k$  sont des fonctions normalisées (voir équation (2.14)). Par définition de  $\mathcal{P}_k^\pm$ , nous avons :

$$\mathcal{P}_k^\pm(y) = e^{\pm i\beta_k \alpha(y)} \varphi_k(y).$$

Pour  $\mathcal{S}_k^\pm$ , nous devons passer par le calcul de la dérivée normale axiale du mode  $S_k^\pm$  :

$$\begin{aligned} S_k^\pm &= A \nabla P_k^\pm \cdot e_x = c_1 \partial_x P_k^\pm + c_3 \partial_y P_k^\pm, \\ &= \pm i\beta_k e^{\pm i\beta_k x} c_1 \mathcal{P}_k^\pm + c_3 e^{\pm i\beta_k x} \partial_y (\mathcal{P}_k^\pm). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Nous obtenons donc l'expression suivante des termes  $\mathcal{P}_k^\pm$  et  $\mathcal{S}_k^\pm$  :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^\pm \\ \mathcal{S}_k^\pm \end{bmatrix} = e^{\pm i\beta_k \alpha(y)} \begin{bmatrix} \varphi_k(y) \\ \pm i c_1 \beta_k \varphi_k(y) + c_3 (\pm i \beta_k \alpha'(y) \varphi_k(y) + \varphi_k'(y)) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

À partir de (2.47), nous allons étudier les normes des modes. Tout d'abord, notons que nous avons la majoration suivante :

$$\| \mathcal{P}_k^\pm \|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq \| \varphi_k \|_{H^{\frac{1}{2}}} \| e^{\pm i\beta_k \alpha(y)} \|_{H^{\frac{1}{2}}} . \quad (2.48)$$

D'après la définition des fonctions  $\varphi_k$ , voir proposition 2.2.3, on montre facilement que pour  $k$  grand :

$$\| \varphi_k \|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq \| \varphi_k \|_{H^1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |\beta_k|.$$

Il vient donc que pour  $k$  grand, le terme 'prépondérant' dans l'expression (2.48) est  $e^{\pm i\beta_k \alpha(y)}$  qui devient pour les modes évanescents :

$$e^{\mp |\beta_k| \alpha(y)}.$$

La fonction  $\alpha(y)$  étant bornée par  $\alpha^-$  et  $\alpha^+$  (voir l'équation (2.38)), on en déduit :

$$\| \mathcal{P}_k^+ \|_{H^{\frac{1}{2}}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\alpha^- |\beta_k|}, \quad \text{et} \quad \| \mathcal{P}_k^- \|_{H^{\frac{1}{2}}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\alpha^+ |\beta_k|}. \quad (2.49)$$

De manière similaire, on peut prouver que

$$\| \mathcal{S}_k^\pm \|_{H^{-\frac{1}{2}}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\mp \alpha^\mp |\beta_k|},$$

et donc, il vient :

$$\| \mathcal{S}_k^+ + \gamma \mathcal{P}_k^+ \|_{H^{-\frac{1}{2}}} \sim e^{-|\beta_k| \alpha^-}, \quad (2.50)$$

Finalement, le terme général de la série (2.37) se décompose en trois parties :

- $e^{i\beta_k l}$  qui, pour les modes évanescents s'écrit  $e^{-|\beta_k| l}$ , et donc décroît exponentiellement vite avec  $k$ ,
- $(\mathcal{S}_k^+ + \gamma \mathcal{P}_k^+)$  qui vérifie (2.50).
- et enfin  $C_k^+(p^b)$  qui vérifie pour  $k$  grand, d'après (2.45) et (2.49) :

$$|C_k^+(p^b)| \leq \| p^b \|_{H^1(B_l^+)} e^{|\beta_k| \alpha^+}$$

Le terme général de la série (2.43) vérifie donc :

$$|C_k^+(p^b)| \| \mathcal{S}_k^+ + \gamma \mathcal{P}_k^+ \|_{H^{-\frac{1}{2}}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-|\beta_k| l} e^{|\beta_k| (\alpha^+ - \alpha^- - l)}, \quad (2.51)$$

et on déduit la convergence de la série si

$$l > \alpha_{max} = \alpha^+ - \alpha^-. \quad (2.52)$$

■

### 2.3.5 Analyse spectrale dans le cas d'une géométrie séparable et pour un milieu isotrope

Nous avons présenté dans la section 1.3 du 1er chapitre une méthode de résolution itérative de notre problème. Elle consiste à utiliser l'algorithme GMRES préconditionné par l'approche décomposition de domaine. Nous avons vu qu'on peut avoir des informations sur le taux de convergence de la méthode itérative en étudiant la convergence de l'algorithme "naïf" de décomposition de domaine (méthode de Schwarz).

En particulier, dans le cas d'un demi-guide de géométrie séparable (voir Figure 1.6), il est possible de faire les calculs analytiquement pour un milieu **isotrope**. Nous n'allons pas reprendre les détails de calculs (voir la section 1.3.2 sur l'analyse spectrale dans le 1er chapitre), mais nous allons donner l'équivalent du résultat quand on utilise la formulation *Transparent to Neumann* (noté *TtN*) qui correspond à prendre  $\gamma = 0$  dans la condition de transmission de type Robien sur  $\Sigma_b^\pm$ .

On considère le domaine  $\Omega$  défini par :

$$\Omega = [0, +\infty[ \times [-h, h],$$

et on le décompose en

$$\Omega_b = [0, b] \times [-h, h], \quad \text{et} \quad \Omega_a^+ = [b, +\infty[ \times [-h, h].$$

En utilisant les conditions de transmission *TtN* (2.33) (dans le cas isotrope) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad C_k^+(p^b) = C_k^+(p^+) \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^+, \quad \text{et} \quad \partial_\nu p^+ = \partial_\nu p^b \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^\pm, \quad (2.53)$$

l'algorithme itératif de Schwarz s'écrit alors :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p_{(n)}^b \in H^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ \left| \begin{array}{ll} \Delta p_{(n)}^b + \omega^2 p_{(n)}^b = 0 & \text{dans} \quad \Omega_b, \\ \partial_\nu p_{(n)}^b = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ \partial_\nu p_{(n)}^b = \partial_\nu p_{(n)}^+ & \text{sur} \quad \Sigma_b^+, \end{array} \right. \end{array} \quad (2.54)$$

et trouver  $p_{(n)}^+ \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_a^+)$  sortante telle que

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta p_{(n)}^+ + \omega^2 p_{(n)}^+ = 0 & \text{dans} \quad \Omega_a^+, \\ \partial_\nu p_{(n)}^+ = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_a^+ \cap \partial\Omega, \\ \forall k \in \mathbb{N}, C_k^+(p_{(n)}^+) = C_k^+(p_{(n-1)}^b) & \text{sur} \quad \Sigma_a^+. \end{array} \right.$$

En suivant la procédure décrite section 1.3.2, on peut montrer dans ce cas que l'algorithme itératif ci-dessus converge si et seulement si :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k| < 1 \quad \text{où} \quad \lambda_k = \frac{e^{i\beta_k b}}{e^{i\beta_k b} + e^{-i\beta_k b}}.$$

Comme dans le cas des conditions de transmission *Dirichlet-to-Neumann*, on ne peut pas assurer la convergence de l'algorithme itératif (2.54). En revanche, on peut observer plusieurs choses :

- les coefficients  $\lambda_k$  ne dépendent pas de la taille du recouvrement  $l = b - a$ , mais directement de la taille  $b$  du domaine  $\Omega_b$ . Cela correspond au fait d'avoir "éliminé" la boîte  $B_l^+$  grâce à la condition de transmission sur  $\Sigma_a^+$ , comme nous l'avons expliqué dans la section 2.3.3.
- le comportement asymptotique  $k \rightarrow +\infty$  des coefficients  $\lambda_k$  est dans ce cas  $e^{-2|\beta_k|b}$ . Si on utilise une condition de transmission de type *Dirichlet* sur  $\Sigma_a^+$ , on trouve comme comportement asymptotique  $e^{-2|\beta_k|l}$  (voir la preuve du lemme 1.3.7). Il apparaît donc une décroissance plus forte en utilisant les conditions de transmission que nous avons présentées dans ce second chapitre.

Moralement, cette étude simple semble montrer que nos conditions de transmission (2.53) permettent d'obtenir tous les avantages du recouvrement pour tout  $l > 0$ , aussi petit soit il (au moins dans le cas isotrope, voir remarque ci-dessous). Nous allons valider cette conjecture dans la section 2.4.2.

**Remarque 2.3.8** *Comme nous l'avons vu, pour un milieu anisotrope on doit considérer un recouvrement  $l$  suffisamment grand lié à l'anisotropie (voir condition (2.52)). Par conséquent, l'intérêt de la formulation TtN pour une résolution itérative paraît plus discutable.*

*Cependant, l'idée dans ce cas serait d'utiliser la condition de transmission  $C_k^+(p^b) = C_k^+(p^+)$  sur les frontières déformées  $\Sigma_{a,\alpha}^\pm$ . Ainsi, les séries modales définissant nos opérateurs TtN convergent pour tout  $l > 0$ , et on récupère les avantages du recouvrement.*

**Remarque 2.3.9** *En décomposition de domaine, il est connu que les conditions de transmission optimales entre les sous domaines sont les conditions transparentes (voir [44, 71]). Cependant, ces conditions ne sont pas utilisées car, d'une part elles sont non locales, et d'autre part, selon la sous structuration du domaine, on ne peut pas les obtenir explicitement.*

*Dans notre cas, la condition de transmission modale qu'on impose sur  $\Sigma_a^+$  est une condition transparente du domaine  $\Omega_a^+$  vers le demi-guide parfait  $] -\infty, a] \times [-h, h]$ . Elle serait donc optimale pour un domaine  $\Omega_b$  correspondant au demi-guide parfait  $] -\infty, b] \times [-h, h]$ .*

## 2.4 Résultats numériques

### 2.4.1 Comparaison des formulations DtN sur les frontières déformées et TtR

Dans cette section, nous allons comparer les deux approches que nous avons exposées dans ce chapitre, c'est à dire :

- la formulation *Dirichlet to Neumann* utilisant les opérateurs  $T_{D \rightarrow N}^{\alpha, \pm}$  définis sur des *frontières déformées* (voir section 2.2.3). Rappelons que dans le cas où  $A = Id$ , les opérateurs  $T_{D \rightarrow N}^{\alpha, \pm}$  sont exactement les opérateurs *Dirichlet-to-Neumann* définis au premier chapitre.
- et la formulation *Transparent to Robin* utilisant les opérateurs  $T_{T \rightarrow R}^{l, \pm}$  définis sur des *frontières verticales séparées*.

Cela nous permettra également de présenter quelques validations numériques. Pour simplifier, nous avons considéré le problème de demi-guide suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ sortante telle que} \\ & \left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p) + \omega^2 p = f & \text{dans } \Omega, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.55)$$

où

$$\Omega = [0, +\infty[\times[-h, h], \quad \text{avec } h = 0.5.$$

Le premier test a été de vérifier (qualitativement) que nos deux approches conduisent au même résultat. Nous avons donc résolu le problème (2.55) avec nos deux formulations. Dans tous les résultats qui suivent, nous avons tronqué les séries modales définissant les opérateurs  $T_{T \rightarrow N}^{l,+}$  et  $T_{D \rightarrow N}^{\alpha,+}$  à 10 modes, ce qui correspond à prendre tous les modes propagatifs et quelques modes évanescents pour les fréquences que nous allons considérer. De plus, nous avons choisi le paramètre  $\gamma$  de la condition de transmission sur  $\Sigma_b^+$  égal à 0 (ce qui revient à une condition de type Neumann).

Sur la Figure 2.11, nous avons représenté la partie réelle de la solution du problème (2.55) calculée par nos deux méthodes pour les paramètres suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad \text{et } \omega = 8.$$

La frontière  $\Sigma_a^+$  est marquée en pointillé et  $\Sigma_b^+$  en trait noir. Le support du terme source (une gaussienne tronquée) est représenté par le cercle en pointillé. Qualitativement, on observe bien que les résultats sont les mêmes.

Soulignons qu'ici, la fonction  $\alpha(y) = 0$ , et donc  $\alpha_{max} = 0$ . Par conséquent, pour tout  $l > 0$  on vérifie la condition (2.52) qui assure la convergence de la série modale définissant l'opérateur  $T_{T \rightarrow R}^{l,+}$ . On peut donc rapprocher autant que l'on souhaite les deux frontières verticales  $\Sigma_a^+$  et  $\Sigma_b^+$ .

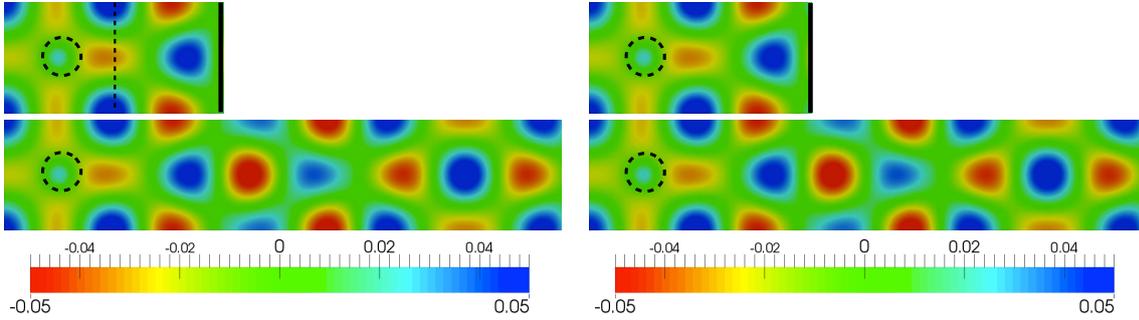


FIGURE 2.11 – Résolution du problème (2.55) par la formulation  $DtN$ , à droite, et par la formulation  $TtR$ , à gauche. En haut, on a représenté la solution dans le domaine  $\Omega_b$ , et en bas, la solution reconstruite. Le support du terme source est représenté par le cercle en pointillé.

Maintenant, nous avons considéré un cas anisotrope avec les paramètres suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad \text{et } \omega = 8,$$

et nous avons représenté sur la Figure 2.12 les résultats obtenus de la même façon. Ici également, les résultats sont concordants. Dans ce cas, la fonction  $\alpha(y) = -0.5(y + h)$  et donc  $\alpha_{max} = 0.5$ . Le recouvrement  $l$  étant égale à 1, on vérifie bien la condition (2.52).

Afin de voir l'influence de la taille  $l$  de la zone de recouvrement  $B_l^+$ , nous avons calculé la solution du problème (2.55) en considérant cette fois les paramètres suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 1.9, \quad b = 2, \quad \text{et } \omega = 8,$$

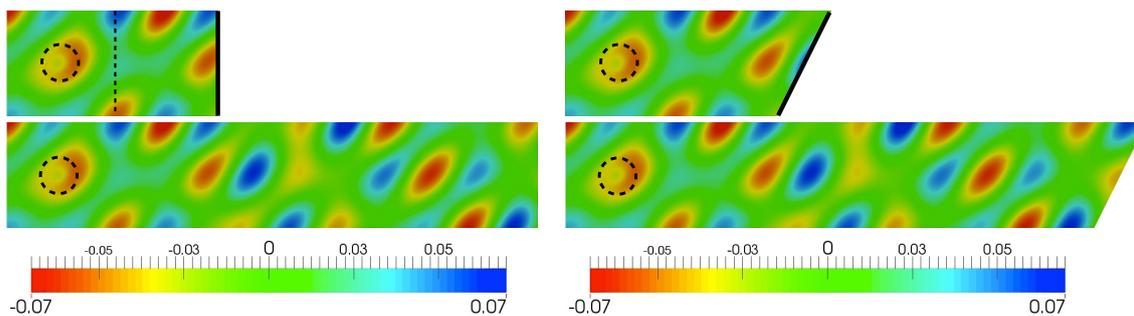


FIGURE 2.12 – Résolution du problème (2.55) par la formulation  $DtN$ , à droite, et par la formulation  $TtN$  pour  $l = 1$ , à gauche. En haut, on a représenté la solution dans le domaine  $\Omega_b$ , et en bas, la solution reconstruite. Le support du terme source est représenté par le cercle en pointillé.

c'est à dire en rapprochant les frontières  $\Sigma_a^+$  et  $\Sigma_b^+$ . Ici, nous avons  $\alpha_{max} = 0.5$  et  $l = 0.1$ , par conséquent on ne vérifie pas la condition (2.52). Sur la Figure 2.13, on observe dans ce cas une différence entre les solutions calculées par nos deux formulations. De plus, pour la formulation  $TtR$ , il apparaît également une discontinuité entre la solution reconstruite et celle calculée dans le domaine borné. On voit ici l'importance de prendre une taille  $l$  du recouvrement suffisamment

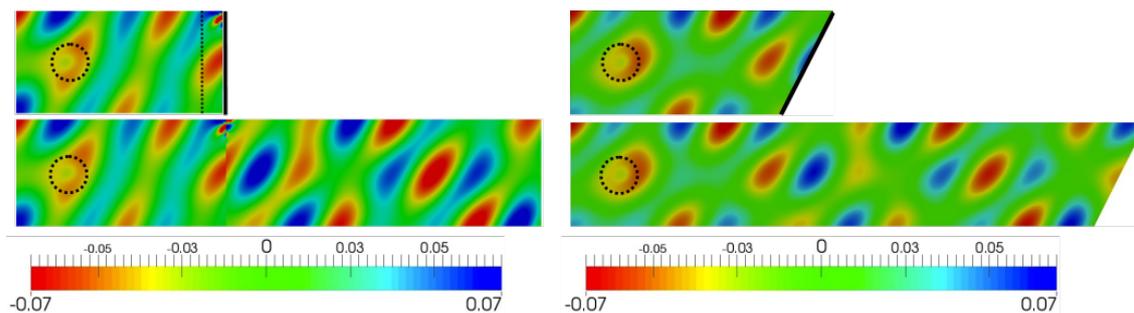


FIGURE 2.13 – Résolution du problème (2.55) par la formulation  $DtN$ , à droite, et par la formulation  $TtR$  pour  $l = 0.1$ , à gauche. En haut, on a représenté la solution dans le domaine  $\Omega_b$ , et en bas, la solution reconstruite. Le support du terme source est représenté par le cercle en pointillé.

grande pour assurer la convergence de la série modale, comme nous l'avons expliqué dans la section 2.3.4.

Afin de comparer quantitativement nos deux approches, nous avons effectué une étude de convergence des éléments finis. Pour cela, nous avons considéré le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ sortante telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p) + \omega^2 p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Sigma_0, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = \mathcal{S}_k & \text{sur } \Sigma_0, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.56)$$

où  $\mathcal{S}_k$  est la dérivée normale du mode  $k$ , et où

$$\Sigma_0 = \{x = 0\} \times [-h, h] \quad \text{et} \quad \Omega = [0, +\infty[ \times [-h, h].$$

La solution analytique de ce problème est simplement le mode  $P_k^+$  car le guide est sans perturbation. Ainsi, nous pouvons mesurer l'erreur relative  $L^2$  sur la frontière extérieure  $\Sigma_b^+$  bornant le domaine de calcul. Un premier test a été fait à basse fréquence dans un milieu isotrope avec les paramètres suivants :

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad k = 0, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons testé ensuite un cas anisotrope plus haute fréquence, avec les paramètres suivants :

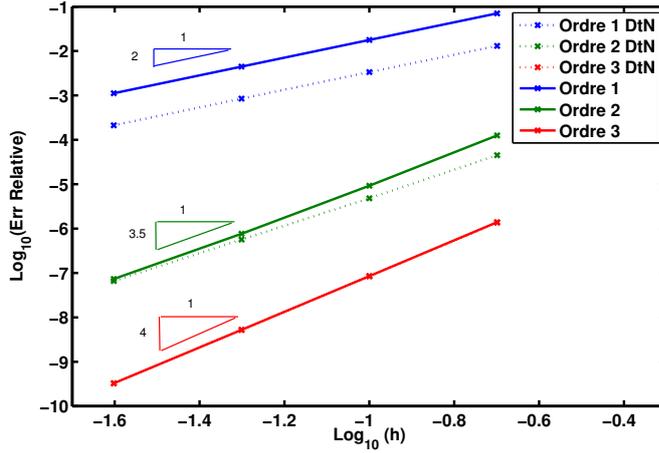


FIGURE 2.14 – Courbes de convergence : formulation  $DtN$  en pointillés et formulation  $TtR$  en traits pleins pour la fréquence  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .

$$\omega = 10, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad k = 2, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons représenté sur la Figure 2.14 et 2.15 les courbes de convergence obtenues par les deux formulations pour les deux fréquences proposées.

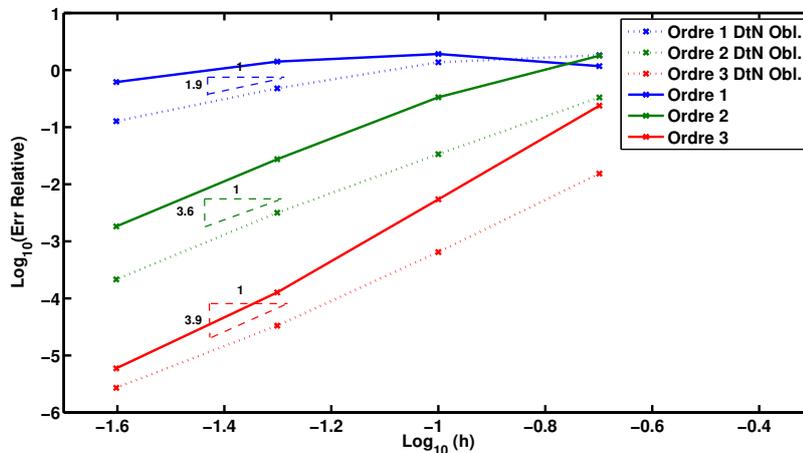


FIGURE 2.15 – Courbes de convergence : formulation  $DtN$  en pointillés et formulation  $TtR$  en traits pleins pour la fréquence  $\omega = 10$ .

Pour le premier test en basse fréquence, la formulation  $TtR$  donne des ordres de convergence en  $O(h^{\text{ordre}+1})$  (où  $h$  désigne ici le pas du maillage), excepté pour l'ordre 2 où on observe une convergence un peu meilleure. Ce résultat peut s'expliquer car on a utilisé un maillage régulier ou simplement parce que le régime de convergence n'est pas tout à fait atteint. Pour l'ordre 3, les deux courbes étant superposées, on ne voit pas celle en pointillée.

Dans le deuxième test plus haute fréquence et anisotrope, on observe des résultats similaires. Avec la méthode des frontières obliques, on obtient les mêmes ordres de convergence. Notons qu'en général, l'utilisation de l'approche  $DtN$  donne une erreur un peu meilleure.

### 2.4.2 Avantages de la formulation $TtR$

Dans le premier chapitre, nous avons présenté dans la section 1.2 une extension des opérateurs *Dirichlet to Neumann* en introduisant la notion de recouvrement. Cette nouvelle approche décrite dans le cas isotrope (voir remarque ci-dessous) a été introduite dans le but d'améliorer les approches itératives de résolution.

Maintenant, nous avons donc pour un milieu isotrope deux approches possibles exploitant le recouvrement :

- soit la formulation " $DtN$  ou  $DtR$  avec recouvrement" du premier chapitre,
- soit la formulation " $TtR$ " décrite dans ce chapitre.

Nous nous proposons ici de comparer ces deux formulations.

**Remarque 2.4.1** *Au vu de la section 2.2 de ce chapitre, on peut dans le cas anisotrope dériver des opérateurs  $DtN$  avec recouvrement (sur des frontières déformées séparées). L'étude étant similaire au cas isotrope, nous nous limiterons à ce cas plus simple à détailler.*

#### Remarque sur les fréquences de 'boite'

Précédemment, nous avons vu dans la remarque 2.3.5 que la formulation "*Transparent to Neumann*" (revient à prendre  $\gamma = 0$ ) évite le problème des fréquences de boite que nous avons identifiées au premier chapitre pour la formulation *Dirichlet to Neumann* avec recouvrement (voir la proposition 1.2.6).

Afin d'illustrer numériquement cette remarque 2.3.5, nous avons tracé sur la Figure 2.16 le conditionnement de la matrice issue de la discrétisation du problème (2.41) pour les paramètres :

$$\omega \in [0, 5], \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad \text{et} \quad \gamma = 0.$$

Nous avons également rappelé le résultat obtenu avec la formulation  $DtN$  avec recouvrement (celui de la Figure 1.5 du 1er chapitre). On observe qu'à la différence du cas  $DtN$  avec recouvrement, la matrice ici est toujours inversible (excepté aux fréquences de coupure marquées par les droites bleues). On élimine ainsi les fréquences de boite (marquées par les lignes verticales vertes) mise en évidence avec l'ajout du recouvrement dans le cas  $DtN$  avec recouvrement.

#### GMRES préconditionné par l'approche décomposition de domaine

Le but de cette dernière section est d'étudier l'influence de la taille du recouvrement  $l$  sur le nombre d'itérations nécessaires à GMRES pour converger (la description détaillée de la

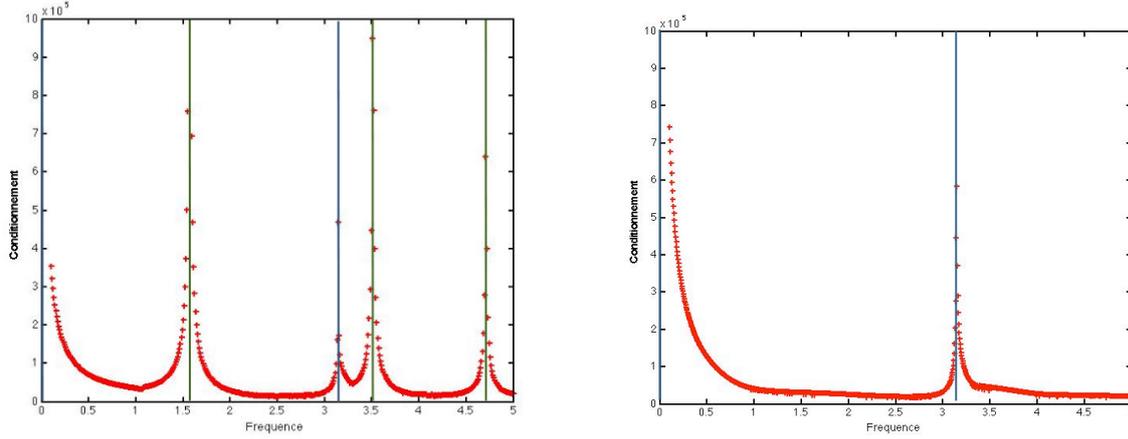


FIGURE 2.16 – Conditionnement de la matrice obtenue après discrétisation en fonction de la fréquence  $\omega$  dans le cas  $DtN$  avec recouvrement à gauche, et dans le cas  $TtN$  à droite. En lignes verticales bleues, nous avons marqué les fréquences de coupure ( $\omega = 0$  et  $\omega = \pi$ ) et en vert les fréquences de boîte.

méthode est donnée dans la section 1.3.4). Dans le cas  $DtN$  (ou  $DtR$ ) du premier chapitre, nous avons vu qu'augmenter  $l$  améliore la vitesse de convergence. Qu'en est il dans le cas  $TtR$ ?

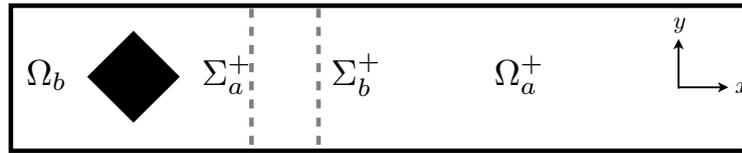


FIGURE 2.17 – Géométrie du demi-guide avec défaut.

Dans le tableau ci-dessous, nous avons indiqué pour différentes fréquences et différentes tailles de recouvrement le nombre d'itérations nécessaires à GMRES pour atteindre une erreur sur le résidu inférieure à  $10^{-14}$ . Dans chaque case, on a noté à gauche le nombre d'itérations en utilisant la formulation  $TtR$  et à droite la formulation  $DtR$  (on a repris les résultats du premier chapitre, voir à la fin de la section 1.3.4).

	$l = 0.1$	$l = 0.2$	$l = 0.5$	$l = 1$	$l = 2$
$\omega = 5$	4   7	4   6	4   6	3   4	4   3
$\omega = 10$	6   8	5   6	5   6	5   7	5   5
$\omega = 20$	7   9	7   8	7   8	7   7	7   9
$\omega = 50$	12   12	11   12	12   11	12   11	12   12

Le problème qu'on résout est la diffraction par un défaut représenté sur la Figure 2.17 d'une source gaussienne (tronquée). On observe sur ces résultats que :

- à la différence du cas  $DtR$ , le recouvrement n'a pas (ou peu) d'influence sur le nombre d'itérations pour la formulation  $TtR$ ,
- le nombre d'itérations dans le cas  $TtR$  pour  $l = 0.1$  est proche ou égale à celui dans le cas  $DtR$  pour le plus grand recouvrement  $l = 2$ . Par conséquent, il semble qu'on gagne le "maximum" de l'avantage du recouvrement pour tout  $l$  avec l'approche  $TtR$ .
- enfin, le nombre d'itérations augmente avec la fréquence, comme nous l'avons déjà observé au chapitre précédent.

# GUIDE ÉLASTIQUE ANISOTROPE

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>70</b>
3.1.1	Problème modèle	70
3.1.2	Notations	72
<b>3.2</b>	<b>Description et calcul des modes</b>	<b>73</b>
3.2.1	Classification des modes	73
3.2.2	Les relations de bi-orthogonalité	75
3.2.3	Le calcul numérique des modes par la méthode SAFE	78
<b>3.3</b>	<b>Formulation multi-domaines pour les milieux orthotropes</b>	<b>80</b>
3.3.1	Formulation multi-domaines $YtR$	80
3.3.2	Reformulation à l'aide d'un opérateur $YtR$	83
<b>3.4</b>	<b>Formulation multi-domaines générale</b>	<b>85</b>
3.4.1	Formulation multi-domaines $TtR$	85
3.4.2	Reformulation à l'aide d'un opérateur $TtR$	87
<b>3.5</b>	<b>Algorithmes de Schwarz associés</b>	<b>88</b>
3.5.1	Présentation des algorithmes	89
3.5.2	Analyse spectrale dans un cas d'école	90
3.5.3	Analyse spectrale dans le cas général	94
<b>3.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>97</b>
3.6.1	Validation qualitative de la formulation $TtR$	97
3.6.2	Comparaison des formulations $YtR$ et $TtR$	98
3.6.3	Avantages de la formulation $TtR$ par rapport aux méthodes de type couche absorbante	100
<b>3.7</b>	<b>Annexe : caractères bien posé et consistant de l'algorithme <math>YtX</math> et <math>TtX</math> itératif</b>	<b>102</b>
3.7.1	L'algorithme $YtX$ itératif	102
3.7.2	L'algorithme $TtX$ itératif	104

---

Ce troisième chapitre porte sur la résolution d'un problème de diffraction dans un guide élastique en régime harmonique. Pour étudier ce problème, nous allons reprendre la démarche des premier et second chapitres. Le but sera d'étendre les résultats vus précédemment au cas vectoriel de l'élasticité. Après une brève introduction sur les équations de l'élastodynamique, nous présenterons quelques résultats sur les modes dans un guide élastique. Leur étude est plus complexe que dans le cas scalaire acoustique et nous n'avons hélas pas autant d'informations.

Ensuite, à l'aide de cette étude modale, nous présenterons deux reformulations possibles du problème de diffraction. La première est une extension directe des travaux de V. Baronian [7] et s'applique aux milieux orthotropes (que nous définirons ci-après). La deuxième approche est applicable pour une anisotropie arbitraire et exploite les idées développées au chapitre précédent.

Enfin, nous étudierons des méthodes itératives de résolution de ces problèmes, une méthode directe pouvant devenir prohibitive dans le cas de configurations 3D.

## 3.1 Introduction

Dans la suite,  $d$  désignera la dimension égale à 2 ou 3 selon la configuration considérée. De plus, on utilisera la convention de sommation des indices d'Einstein.

### 3.1.1 Problème modèle

Nous allons nous intéresser à la résolution des équations de l'élastodynamique en régime harmonique dans un guide d'ondes de géométrie  $\Omega$  (voir Figure 3.1). La description de la méthode sera faite pour le cas général d'une géométrie 2D ou 3D de section  $S$  bornée.

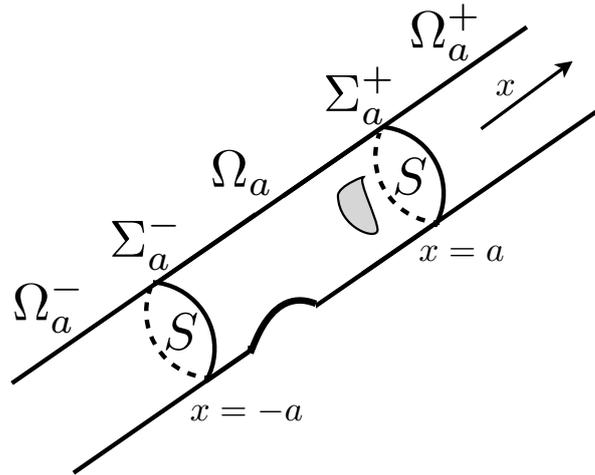


FIGURE 3.1 – Géométrie du guide d'ondes 3D et notations.

À la fréquence  $\omega$ , le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  (avec  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  en 2D et  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  en 3D) vérifie les équations classiques suivantes (voir [81]) :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}) \nu = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\rho$  est la densité du milieu, et le tenseur des contraintes  $\sigma(\mathbf{u})$  est relié au déplacement par la loi de Hooke :

$$\sigma(\mathbf{u})_{ij} = \tilde{\mathbf{C}}_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}), \text{ avec } i, j, k, l \in \begin{cases} \{x, y, z\} \text{ en } 3D, \\ \{x, y\} \text{ en } 2D. \end{cases} \quad (3.2)$$

Les tenseurs  $\epsilon$  et  $\tilde{\mathbf{C}}$  sont respectivement les tenseurs de déformation et de rigidité. Sous les hypothèses de petites déformations,  $\epsilon$  est donné par :

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}).$$

Les lois de la physique imposent que le *tenseur de rigidité*  $\tilde{\mathbf{C}}$  vérifie les propriétés de symétrie :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ijkl} = \tilde{\mathbf{C}}_{klij} = \tilde{\mathbf{C}}_{jikl}, \quad (3.3)$$

et est défini positif, c'est à dire que pour tout tenseur  $\xi$  d'ordre 2, on doit avoir :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha \|\xi\|^2 = \alpha|\xi_{ij}|^2 \quad (3.4)$$

où  $\alpha$  est une constante strictement positive. D'autre part, l'écriture du tenseur de rigidité peut être simplifiée à l'aide des *notations de Voigt*. On peut le représenter par une matrice réelle  $6 \times 6$  en 3D (et  $3 \times 3$  en 2D) définie ainsi :

$$\mathbf{C}_{p(i,j)p(k,l)} = \tilde{\mathbf{C}}_{ijkl},$$

où  $p(i, j) = p(j, i)$  et

$$\begin{aligned} \text{en 2D : } & p(x, x) = 1, p(y, y) = 2, p(x, y) = 3, \\ \text{en 3D : } & p(x, x) = 1, p(y, y) = 2, p(z, z) = 3, \\ & p(x, y) = 6, p(x, z) = 5, p(y, z) = 4. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dans la suite de notre étude, nous considérons trois types de matériaux élastiques : complètement **anisotropes**, **orthotropes** et **isotropes**. La structure des tenseurs  $\mathbf{C}$  associées à chacun de ces matériaux est représentée sur la Figure 3.2. On précisera explicitement à chaque fois le type de matériau considéré.

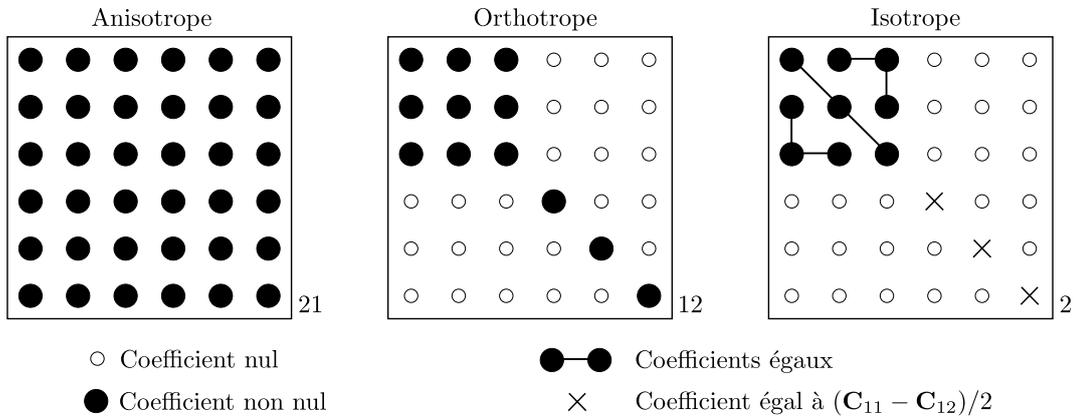


FIGURE 3.2 – Structure des matrices symétriques  $\mathbf{C}$  pour les 3 types de matériaux considérés pour un milieu 3D. L'indice en bas des matrices indique le nombre de coefficients  $\mathbf{C}_{ij}$  indépendants.

Rappelons les hypothèses de notre étude :

1. Le domaine  $\Omega$  est connexe et se décompose en  $\Omega = \Omega_a^- \cup \Omega_a \cup \Omega_a^+$ , voir Figure 3.1, où les domaines  $\Omega_a^\pm$  sont homogènes et définis par :

$$\Omega_a^\pm = \{\pm x \geq a\} \times S,$$

avec  $S$  la section bornée du guide (qui est un segment dans le cas 2D).

2. La source  $f$  est à support compact inclus dans  $\Omega_a$ .
3. La densité  $\rho$  est strictement positive et est indépendante de  $x$  dans les parties invariantes  $\Omega_a^\pm$  du guide.

4. Le tenseur de rigidité  $\mathbf{C}$  est également indépendant de  $x$  dans  $\Omega_a^\pm$ .

Sous ces hypothèses, nous souhaitons résoudre le problème de rayonnement suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in (H_{\text{loc}}^1(\Omega))^d \text{ sortante telle que} \\ & \left| \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u})\nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La notion de *solution sortante* sera précisée avec l'analyse modale dans la section 3.2.

Comme dans les chapitres précédents, afin de résoudre numériquement ce problème, on souhaite ramener les calculs à une zone bornée en tenant compte du caractère infini du guide. Nous allons construire des conditions transparentes à l'aide des modes. La méthode que nous avons développée s'inscrit donc dans la continuité des travaux de V. Baronian [7] et L. Taupin [87].

### 3.1.2 Notations

Introduisons quelques notations utiles pour la suite. On pose

$$\mathbf{t} = \sigma(\mathbf{u}) e_x = \begin{cases} [\sigma_{xx} \ \sigma_{yx} \ \sigma_{zx}]^t & \text{en 3D,} \\ [\sigma_{xx} \ \sigma_{yx}]^t & \text{en 2D,} \end{cases}$$

et, afin de pouvoir discuter simultanément les cas 2D et 3D, on définit les variables "transverses" suivantes :

$$\begin{aligned} \text{en 2D : } & \mathbf{x}_s = y, \quad \mathbf{u}_s = u_y, \quad \mathbf{t}_s = \sigma_{xy}, \quad \sigma_s = [\sigma_{yx} \ \sigma_{yy}], \quad \epsilon_s = [\epsilon_{yx} \ \epsilon_{yy}], \\ \text{en 3D : } & \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_s = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}, \quad \sigma_s = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \epsilon_s = \begin{bmatrix} \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, on notera  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_s)$  et  $\mathcal{T}(\mathbf{x}_s)$  les champs transverses des modes :

$$\mathbf{u} = e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s) \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = e^{i\beta x} \mathcal{T}(\mathbf{x}_s).$$

Pour l'étude des matériaux **orthotropes**, il est pratique d'utiliser les variables mixtes suivantes :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_s \\ u_x \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ -t_x \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Ces notations ont été introduites par V. Pagneux et A. Maurel [73, 74, 75] et sont commodes pour exprimer les relations de Fraser que nous allons rappeler dans la section 3.2.2. Elles sont dites mixtes car elles contiennent à la fois des composantes du champ de déplacement et des composantes du champ des contraintes. Enfin,  $\mathcal{X}(\mathbf{x}_s)$  et  $\mathcal{Y}(\mathbf{x}_s)$  désigneront les champs transverses des modes dans ces nouvelles variables :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = e^{i\beta x} \begin{bmatrix} \mathcal{X}(\mathbf{x}_s) \\ \mathcal{Y}(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix}.$$

## 3.2 Description et calcul des modes

Comme nous l'avons rappelé dans la section 1.1.2 du premier chapitre, le calcul des modes correspond à rechercher des solutions non nulles aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}\sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans un guide parfait } \mathbb{R} \times S, \\ \sigma(\mathbf{u}) \nu = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial S, \end{array} \right.$$

où on suppose que  $\mathbf{u}$  est de la forme

$$\mathbf{u}(x, \mathbf{x}_s) = e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s).$$

Injecter cette forme de la solution dans les équations revient à remplacer les dérivées  $\partial_x$  par  $i\beta$  dans les opérateurs différentiels. Ainsi, on se ramène à résoudre un problème aux valeurs propres en  $\beta$  posé dans la section  $S$  du guide :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \beta \in \mathbb{C} \text{ et } \mathcal{U} \in (H^1(S))^d \text{ non nulle tels que} \\ \mathbf{div}_\beta \sigma_\beta(\mathcal{U}) + \rho \omega^2 \mathcal{U} = 0 & \text{dans } S \\ \sigma_\beta(\mathcal{U}) \nu = 0 & \text{sur } \partial S, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

où  $\sigma_\beta(\cdot)$  et  $\mathbf{div}_\beta(\cdot)$  sont les opérateurs  $\sigma(\cdot)$  et  $\mathbf{div}(\cdot)$  obtenus en remplaçant  $\partial_x$  par  $i\beta$ . Ce problème aux valeurs propres est **quadratique** en  $\beta$  car l'opérateur différentiel  $\mathbf{div}\sigma(\cdot)$  est d'ordre 2 en  $x$ .

L'étude des modes en élasticité soulève de nombreuses difficultés théoriques comme l'existence d'un ensemble dénombrable de modes ou encore le caractère complet des modes (dans des espaces appropriés). Ces difficultés sont abordées dans différents articles [17, 65, 64, 74, 7] pour des cas particuliers (milieu **isotrope** ou **orthotrope**, géométrie canonique,...).

Dans cette section, nous ne prétendons pas répondre à ces questions difficiles. Le but est de présenter les résultats et conjectures qui nous seront utiles dans la suite. La première conjecture est la suivante :

**Conjecture 3.2.1** *L'ensemble des éléments propres solutions du problème (3.8) est dénombrable.*

Cette conjecture est vérifiable pour certaines configurations :

- le cas d'un guide 2D d'anisotropie arbitraire, en calculant l'équation de dispersion vérifiée par les modes (voir [81]),
- le cas d'un guide 3D **orthotrope** homogène de section  $S$  de géométrie arbitraire (voir [8]). Pour ce second cas, la démonstration est plus complexe et exploite des propriétés de symétrie du problème aux valeurs propres formulé en variable mixte  $[\mathbf{X} \ \mathbf{Y}]$  (voir [74, 7]).

En revanche, on ne sait pas démontrer la conjecture pour des guides 3D anisotropes.

### 3.2.1 Classification des modes

Dans l'ensemble des modes, on distingue 2 familles :

$$\mathbf{U}_k^+ = e^{i\beta_k^+ x} \mathcal{U}_k^+(\mathbf{x}_s) \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_k^- = e^{i\beta_k^- x} \mathcal{U}_k^-(\mathbf{x}_s), \quad (3.9)$$

par leurs "sens de propagation" : les  $\mathbf{U}_k^+$  vont vers la droite et les  $\mathbf{U}_k^-$  vers la gauche. On détermine les "sens de propagation" ainsi :

- si  $\beta_k^\pm$  est réel, on parle de mode *propagatif* et on caractérise le sens de propagation à l'aide du flux d'énergie à travers une section  $S$

$$\operatorname{Im} \left( \int_S \overline{\mathbf{U}_k^\pm} \cdot \sigma(\mathbf{U}_k^\pm) e_x \right) = \operatorname{Im} \left( \int_S \overline{\mathbf{U}_k^\pm} \cdot \mathbf{t}_k^\pm \right). \quad (3.10)$$

Si le flux est strictement positif, alors le mode est dit progressif et va vers la droite (sens des  $x$  croissants), et s'il est strictement négatif, il est dit rétrograde et va vers la gauche. Les fréquences pour lesquelles il existe un mode dont le flux est nul sont appelées *fréquences de coupure*. Nous ferons dans la suite une hypothèse excluant ces fréquences (voir 3.2.7).

- si  $\operatorname{Im}(\beta_k^\pm) \neq 0$  et  $\operatorname{Re}(\beta_k^\pm) = 0$ , on parle de mode *évanescent* comme en acoustique. Il décroît dans une direction sans osciller. Le "sens de propagation" est donné par la direction de décroissance, ou encore le signe de  $\operatorname{Im}(\beta_k^\pm)$ .
- si  $\operatorname{Im}(\beta_k^\pm) \neq 0$  et  $\operatorname{Re}(\beta_k^\pm) \neq 0$ , on parle de mode *inhomogène*. Ce troisième type de mode n'existe pas en acoustique. Il décroît exponentiellement vite dans une direction tout en oscillant. Le "sens de propagation" est donné, comme pour les modes évanescents, par le signe de  $\operatorname{Im}(\beta_k^\pm)$ .

Cette classification des modes  $\mathbf{U}_k^+$  et  $\mathbf{U}_k^-$  nous permet de définir la notion de solution *sortante* dans les demi-guides :

**Définition 3.2.1** *On dira qu'une solution  $\mathbf{u}$  est sortante dans  $\Omega_a^+$  si elle se décompose uniquement sur les modes  $\mathbf{U}_k^+$ . De même,  $\mathbf{u}$  est sortante dans  $\Omega_a^-$  si elle se décompose uniquement sur les modes  $\mathbf{U}_k^-$ .*

On suppose qu'il y a un nombre fini de modes propagatifs, et une infinité de modes évanescents et inhomogènes. On retrouve ce résultat avec la conjecture suivante

**Conjecture 3.2.2** *Pour toute constante  $D$ , le nombre de  $\beta$  solutions du problème aux valeurs propres (3.8) vérifiant  $|\operatorname{Im}(\beta)| < D$  est fini.*

On sait prouver ce résultat pour les modes de Lamb dans une plaque **isotrope** homogène (voir [73]). Intéressons nous maintenant aux propriétés de symétrie des valeurs propres :

**Conjecture 3.2.3** *Si  $\beta$  est une valeur propre du problème (3.8), alors  $-\bar{\beta}$ ,  $-\beta$  et  $\bar{\beta}$  sont également valeurs propres.*

Notons qu'il est facile de montrer que, si  $\beta$  est une valeur propre, alors  $-\bar{\beta}$  est aussi valeur propre. En effet, dire que  $(\beta, \mathcal{U})$  est un élément propre du problème (3.8) est équivalent à dire que  $e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)$  vérifie

$$\operatorname{div} \sigma(e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)) + \rho \omega^2 e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s) = 0 \quad \text{dans } \Omega_a^\pm. \quad (3.11)$$

En passant au conjugué dans l'expression ci-dessus, il vient que  $(-\bar{\beta}, \bar{\mathcal{U}})$  est également un élément propre de (3.8). La difficulté dans la conjecture ci-dessus est de montrer que  $-\beta$  (ou  $\bar{\beta}$ ) est aussi valeur propre.

Dans le cas **orthotrope**, on peut démontrer la conjecture 3.2.3 (voir [51, 7]). La preuve s'appuie sur des arguments de symétrie du problème aux valeurs propres formulé à l'aide des

variables mixtes  $[\mathbf{X} \ \mathbf{Y}]$ . Pour un milieu **anisotrope** arbitraire, on ne sait pas démontrer le résultat. Cependant, comme nous le verrons dans la section 3.2.3, les résultats numériques semblent valider ce résultat.

Néanmoins, sous l'hypothèse d'une symétrie centrale de la section  $S$  (supposée centrée selon l'axe  $e_x$ ), c'est à dire :

$$\mathbf{x}_s \in S \Leftrightarrow -\mathbf{x}_s \in S, \quad (3.12)$$

nous pouvons donner une démonstration simple de la conjecture. Notons que cette symétrie est toujours vraie en 2D. On montre que  $(-\beta, \mathcal{U}(-\mathbf{x}_s))$  est également un élément propre car  $e^{-i\beta x} \mathcal{U}(-\mathbf{x}_s)$  vérifie les équations (3.11). Ce résultat est direct en remplaçant  $(x, \mathbf{x}_s)$  par  $(-x, -\mathbf{x}_s)$  dans les équations (3.11), et en utilisant le fait que  $\mathbf{div}\sigma(\cdot)$  est un opérateur différentiel d'ordre 2.

Par ailleurs, on déduit de la conjecture que  $\beta_k^+ = -\beta_k^-$ . Pour les modes *évanescents* ou *inhomogènes*, ce résultat est direct car on utilise le signe de  $\text{Im}(\beta)$  pour déterminer le sens de propagation du mode. Pour les modes propagatifs, nous avons  $\beta$  réel et en on déduit pour le mode  $e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)$  :

$$\begin{aligned} \text{Im} \left( \int_S \overline{e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)} \cdot \sigma(e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)) e_x \right) &= -\text{Im} \left( \int_S \overline{e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)} \cdot \sigma(e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)) e_x \right) \\ &= -\text{Im} \left( \int_S \overline{e^{-i\beta x} \overline{\mathcal{U}(\mathbf{x}_s)}} \cdot \sigma(e^{-i\beta x} \overline{\mathcal{U}(\mathbf{x}_s)}) e_x \right). \end{aligned}$$

Il vient donc que les modes  $e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)$  et  $e^{-i\beta x} \overline{\mathcal{U}(\mathbf{x}_s)}$  ont des flux opposés, d'où le résultat. Nous noterons dans la suite simplement

$$\beta_k^+ = \beta_k \quad \text{et} \quad \beta_k^- = -\beta_k \quad (3.13)$$

Par ailleurs, en utilisant la conjecture 3.2.2, il vient :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Im}(\beta_k) = +\infty. \quad (3.14)$$

### 3.2.2 Les relations de bi-orthogonalité

Dans le cas élastique, les modes ne vérifient pas de relations d'orthogonalité. Nous devons exploiter les relations de bi-orthogonalité comme dans la section 2.3 du chapitre 2 pour obtenir les décompositions modales. Nous allons rappeler les relations générales s'appliquant à un milieu anisotrope arbitraire. Pour le cas d'un milieu orthotrope, on peut donner une relation plus fine démontrée initialement dans [38] pour un milieu **isotrope**, puis généralisée au cas orthotrope dans [8], appelée relation de Fraser.

#### Pour un milieu anisotrope général

En rappelant que  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_s)$  et  $\mathcal{T}(\mathbf{x}_s)$  désignent les champs transverses des modes (voir les notations dans la section 3.1.2), les relations de bi-orthogonalité s'expriment comme suit :

**Proposition 3.2.4** *Soient  $e^{i\beta_1 x} [\mathcal{U}^1, \mathcal{T}^1]$  et  $e^{i\beta_2 x} [\mathcal{U}^2, \mathcal{T}^2]$  deux modes. Ils vérifient la **relation de bi-orthogonalité** suivante :*

$$\int_S (\mathcal{U}^1 \cdot \mathcal{T}^2 - \mathcal{U}^2 \cdot \mathcal{T}^1) = 0 \quad \text{si} \quad \beta_1 \neq -\beta_2.$$

On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [57]. Étant données les 2 familles de modes et le résultat (3.13), on déduit des relations de bi-orthogonalité (attention aux exposants) :

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \int_S (\mathcal{U}_k^\pm \cdot \mathcal{T}_l^\pm - \mathcal{U}_l^\pm \cdot \mathcal{T}_k^\pm) = 0, \quad \text{et si } k \neq l, \quad \int_S (\mathcal{U}_k^\pm \cdot \mathcal{T}_l^\mp - \mathcal{U}_l^\pm \cdot \mathcal{T}_k^\mp) = 0. \quad (3.15)$$

On remarque donc que 2 modes d'une même famille sont nécessairement bi-orthogonaux entre-eux. Lorsque  $k = l$  dans l'expression ci-dessus, on note  $J_k$  le terme défini par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad J_k = \int_S (\mathcal{U}_k^+ \cdot \mathcal{T}_k^- - \mathcal{U}_k^- \cdot \mathcal{T}_k^+). \quad (3.16)$$

Ceci nous amène à introduire une nouvelle conjecture :

**Conjecture 3.2.5** *L'ensemble des fréquences  $\omega$  pour lesquelles il existe  $k$  tel que  $J_k = 0$  est dénombrable.*

Dans la suite, nous ferons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.2.6** *On suppose que la fréquence  $\omega$  est telle que  $J_k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .*

Cette hypothèse est importante car elle nous permet d'"ortho-normaliser" les modes par rapport à la relation de bi-orthogonalité.

**Remarque 3.2.7** *L'hypothèse 3.2.6 nous permet d'éviter les fréquences de coupure correspondant au cas où l'un des modes propagatifs a un flux d'énergie (3.10) nul. En effet, nous savons que si  $e^{i\beta x} \mathcal{U}(\mathbf{x}_s)$  est un mode, alors  $e^{-i\beta x} \overline{\mathcal{U}(\mathbf{x}_s)}$  est également un mode se propageant en sens opposé. En particulier, on déduit pour un mode propagatif  $e^{i\beta_k x} \mathcal{U}_k^+(\mathbf{x}_s)$  avec  $\beta_k$  réel que*

$$e^{-i\beta_k x} \overline{\mathcal{U}_k^+(\mathbf{x}_s)} = e^{-i\beta_k x} \mathcal{U}_k^-(\mathbf{x}_s).$$

Nous avons donc  $\mathcal{U}_k^- = \overline{\mathcal{U}_k^+}$  et  $\mathcal{T}_k^- = \overline{\mathcal{T}_k^+}$ . Par conséquent, le terme  $J_k$  associé vérifie :

$$J_k = \int_S (\mathcal{U}_k^+ \cdot \overline{\mathcal{T}_k^+} - \overline{\mathcal{U}_k^+} \cdot \mathcal{T}_k^+) = 2i \operatorname{Im} \left( \int_S \mathcal{U}_k^+ \cdot \overline{\mathcal{T}_k^+} \right).$$

$J_k$  est donc imaginaire pur et est égal à 2 fois le flux d'énergie associé au mode  $e^{i\beta_k x} \mathcal{U}_k^+(\mathbf{x}_s)$ . Si on suppose  $J_k \neq 0$  pour tout  $k$ , on exclut donc en particulier les fréquences de coupures.

À l'aide des relations de bi-orthogonalité (3.15), on peut obtenir les coefficients des décompositions modales de la solution dans les demi-guides homogènes, connaissant la trace de  $\mathbf{u}$  et la contrainte normale  $\mathbf{t}$  sur les bords  $\Sigma_a^\pm$ , comme nous l'avons vu dans la section 2.3.2.

**Hypothèse 3.2.8** *Nous supposons que la réunion des deux familles des modes  $\{\mathcal{U}_k^+ \ \mathcal{T}_k^+\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{\mathcal{U}_k^- \ \mathcal{T}_k^-\}_{k \in \mathbb{N}}$  forme une base complète de  $(L^2(S))^d \times (L^2(S))^d$ .*

Grâce à l'hypothèse ci-dessus, on peut affirmer qu'une solution des équations homogènes dans le demi-guide  $\Omega_a^+$  s'exprime comme la superposition de modes aller-retour :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \sum_{k \geq 0} A_k^+(\mathbf{u}) e^{i\beta_k(x-a)} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_k^+ \\ \mathcal{T}_k^+ \end{bmatrix} + A_k^-(\mathbf{u}) e^{-i\beta_k(x-a)} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_k^- \\ \mathcal{T}_k^- \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

où les amplitudes modales  $A^\pm(\mathbf{u})$  dépendent de  $\mathbf{u}|_{\Sigma_a^+}$  et  $\mathbf{t}|_{\Sigma_a^+}$ . Pour alléger l'écriture, nous les notons simplement  $A^\pm(\mathbf{u})$ . En utilisant les relations de bi-orthogonalité, il vient :

$$A_k^\pm(\mathbf{u}) = \frac{\pm 1}{J_k} \int_S \mathbf{u}|_{\Sigma_a^+} \mathcal{T}_k^\mp - \mathbf{t}|_{\Sigma_a^+} \mathcal{U}_k^\mp. \quad (3.18)$$

Notons que l'équivalent dans le cas scalaire acoustique (voir la section 2.3.2) est de se donner la trace  $p$  et la dérivée normale  $A \nabla p \cdot \nu$  sur  $\Sigma_a^\pm$  pour déterminer la décomposition modale.

### Pour un milieu orthotrope

Dans le cas d'un milieu orthotrope, il est possible de donner un autre résultat d'orthogonalité entre les modes. Dans les variables mixtes  $\mathbf{X} = [\mathbf{t}_s \ u_x]^t$  et  $\mathbf{Y} = [\mathbf{u}_s \ -t_x]^t$  introduites dans la section 3.1.2, les modes s'expriment ainsi

$$\mathbf{X}_k^\pm = e^{\pm i\beta_k x} \mathcal{X}_k^\pm(\mathbf{x}_s), \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}_k^\pm = e^{\pm i\beta_k x} \mathcal{Y}_k^\pm(\mathbf{x}_s).$$

Par des propriétés de symétrie du problème aux valeurs propres formulé dans ces variables mixtes, on peut montrer que les champs transverses vérifient :

$$\mathcal{X}_k^\pm = \pm \mathcal{X}_k, \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_k^\pm = \mathcal{Y}_k. \quad (3.19)$$

**Proposition 3.2.9** *Les champs transverses  $\mathcal{X}_k$  et  $\mathcal{Y}_j$  des modes vérifient :*

$$\int_S \mathcal{X}_k \cdot \mathcal{Y}_j = 0 \quad \text{si} \quad (\beta_k)^2 \neq (\beta_j)^2.$$

La démonstration de ce résultat est donné dans [8], et c'est une généralisation de la relation de Fraser [38] obtenue initialement pour les milieux **isotropes**. Nous l'appellerons dans la suite simplement relation de Fraser.

La proposition 3.2.9 nous permet en particulier de retrouver les relations de bi-orthogonalité 3.15. En effet, en utilisant la relation de Fraser et l'équation (3.19), il vient :

$$\begin{aligned} \forall k, j \in \mathbb{N}, \quad \int_S (\mathcal{U}_k^\pm \cdot \mathcal{T}_l^\pm - \mathcal{U}_l^\pm \cdot \mathcal{T}_k^\pm) &= \int_S \mathcal{X}_k \cdot \mathcal{Y}_j - \mathcal{X}_j \cdot \mathcal{Y}_k = 0 \\ \text{et si } k \neq j, \quad \int_S (\mathcal{U}_k^\pm \cdot \mathcal{T}_l^\mp - \mathcal{U}_l^\mp \cdot \mathcal{T}_k^\pm) &= \int_S \mathcal{X}_k \cdot \mathcal{Y}_j + \mathcal{X}_j \cdot \mathcal{Y}_k = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De plus, pour  $k = j$ , nous avons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad J_k = \int_S \mathcal{X}_k^+ \cdot \mathcal{Y}_k^- - \mathcal{X}_k^- \cdot \mathcal{Y}_k^+ = 2 \int_S \mathcal{X}_k \cdot \mathcal{Y}_k = 2J_k^F \quad \text{où} \quad J_k^F = \int_S \mathcal{X}_k \mathcal{Y}_k. \quad (3.21)$$

Grâce à l'hypothèse 3.2.6, nous avons que  $J_k \neq 0$ , et donc  $J_k^F$  aussi. Nous pouvons ainsi ortho-normaliser les modes d'une même famille  $\{\mathcal{X}_k^+ \ \mathcal{Y}_k^+\}_{k \in \mathbb{N}}$  par rapport à la relation de Fraser (idem avec la famille  $\{\mathcal{X}_k^- \ \mathcal{Y}_k^-\}_{k \in \mathbb{N}}$ ).

Ces remarques (le résultat (3.20) et la normalisation de chaque famille de modes) montrent, en un certain sens, que la relation de Fraser est un résultat plus fort que la relation de bi-orthogonalité (3.2.4).

Une différence majeure avec le cas anisotrope précédent est qu'ici, on peut décomposer la "moitié" de la donnée  $[\mathbf{u}|_{\Sigma_a^\pm} \ \mathbf{t}|_{\Sigma_a^\pm}]$ , c'est à dire  $\mathbf{Y}|_{\Sigma_a^\pm}$  ou  $\mathbf{X}|_{\Sigma_a^\pm}$ , sur une seule famille de modes, sous l'hypothèse :

**Hypothèse 3.2.10** *On suppose que la famille de champs transverses  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  forme une base de  $(L^2(S))^d$ . De même, on suppose que la famille  $\{\mathcal{Y}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  forme une base de  $(L^2(S))^d$*

Ainsi, étant donné  $\mathbf{Y}$  sur  $\Sigma_a^+$ , nous avons la décomposition suivante :

$$\mathbf{Y}|_{\Sigma_a^+} = \sum_{k \geq 0} A_k^+ \mathcal{Y}_k,$$

où les coefficients  $A_k^+$  sont obtenus grâce à la relation de Fraser 3.2.9 :

$$A_k^+ = \frac{1}{J_k^F} \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{Y}|_{\Sigma_a^+} \cdot \mathcal{X}_k d\mathbf{x}_s.$$

On obtient alors la solution sortante dans  $\Omega_a^+$  égale à  $\mathbf{Y}|_{\Sigma_a^+}$  sur  $\Sigma_a^+$  grâce à la décomposition modale :

$$\mathbf{u} = \sum_{k \geq 0} A_k^+ \mathcal{U}_k^+(\mathbf{x}_s) e^{i\beta_k(x-a)}. \quad (3.22)$$

Bien évidemment, on peut faire le même raisonnement pour une donnée  $\mathbf{X}$  sur  $\Sigma_a^+$  en projetant sur la famille de modes  $\mathcal{Y}_k$ .

Pour faire l'analogie avec le cas scalaire acoustique, se donner  $\mathbf{Y}$  ( $\mathbf{X}$ ) sur  $\Sigma_a^+$  pour un matériau élastique orthotrope est équivalent à se donner la trace  $p$  pour un milieu acoustique isotrope. Dans ce cas, on sait en effet projeter la donnée directement les modes, voir la section 1.1.2.

### 3.2.3 Le calcul numérique des modes par la méthode SAFE

À la différence du cas scalaire étudié au premier chapitre, nous ne pouvons plus dans le cas élastique faire un calcul analytique des modes, car on ne sait pas résoudre explicitement le problème (3.8). Même pour le cas **isotrope** et pour des géométries canoniques comme une plaque (les *modes de Lamb*, voir [58, 59]) ou un cylindre (les *modes de Pochhammer-Chree* [2]), le calcul des modes nécessite la résolution numérique d'une équation de dispersion.

Parmi les nombreuses méthodes numériques existantes pour calculer les modes (voir [57, 7] pour une présentation générale), nous avons choisi d'utiliser la méthode *SAFE* (Semi Analytical Finite Element method). Cette technique a notamment été employée pour des guides anisotropes 3D de sections rectangulaires dans [68, 69], ou encore pour des géométries moins standards comme des rails de train dans [52, 7].

Rappelons brièvement le principe de la méthode. Afin de résoudre le problème aux valeurs propres (3.8), on utilise sa forme variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \beta \in \mathbb{C} \text{ et } \mathcal{U} \in (H^1(S))^d \text{ non nulle tels que} \\ & \left| a_\beta(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}) = 0 \quad \forall \tilde{\mathcal{U}} \in (H^1(S))^d, \right. \end{aligned} \quad (3.23)$$

où la forme bilinéaire  $a_\beta(\cdot, \cdot)$  est donnée par :

$$a_\beta(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}) = \int_S \sigma_\beta(\mathcal{U}) : \epsilon_\beta(\tilde{\mathcal{U}}) - \rho \omega^2 \mathcal{U} \cdot \tilde{\mathcal{U}}.$$

L'opérateur  $\mathbf{div} \sigma(\cdot)$  étant un opérateur différentiel d'ordre 2, on montre facilement que la forme bilinéaire  $a_\beta$  se décompose ainsi :

$$a_\beta(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = -\beta^2 a_2(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + i\beta a_1(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + a_0(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}),$$

où  $a_0(\cdot, \cdot)$ ,  $a_1(\cdot, \cdot)$  et  $a_2(\cdot, \cdot)$  sont indépendantes de  $\beta$ . On a donc un problème aux valeurs propres **quadratique** en  $\beta$ . Après discrétisation du problème (3.23), on le résout numériquement en le linéarisant. Pour cela, l'idée est simplement d'introduire la variable auxiliaire  $\mathbf{v} = i\beta \mathbf{u}$  et d'écrire le problème aux valeurs propres discrétisé pour le couple  $(\mathbf{u} \ \mathbf{v})$ .

## Illustration numérique

Afin d'illustrer l'aspect des modes pour différents comportements élastiques, nous avons considéré les trois matériaux suivants (en 2D) :

<b>Sil</b> ( <i>isotrope</i> ) :	$\rho = 2.2$	$C_{11} = 7.85$	$C_{22} = 7.85$	$C_{33} = 3.12$	
		$C_{12} = 1.61$	$C_{13} = 0$	$C_{23} = 0.$	
<b>Tit</b> ( <i>orthotrope</i> ) :	$\rho = 4.5$	$C_{11} = 16.24$	$C_{22} = 18.07$	$C_{33} = 4.67$	
		$C_{12} = 6.9$	$C_{13} = 0$	$C_{23} = 0.$	(3.24)
<b>Mat</b> ( <i>anisotrope</i> ) :	$\rho = 2$	$C_{11} = 6$	$C_{22} = 21$	$C_{33} = 6.$	
		$C_{12} = 8$	$C_{13} = 2$	$C_{23} = 2.$	

Le deux premier matériaux correspondent à la Silice et au Titane (voir [81]). Pour le dernier **Mat**, nous l'avons choisi artificiellement.

Pour chacun de ces matériaux, nous avons représenté sur la Figure 3.3 la position dans le plan complexe des  $\beta$  solutions du problème aux valeurs propres (3.8) pour la fréquence  $\omega = 10$ . On a indiqué en rouge les  $\beta_k^+$  et en bleu les  $\beta_k^-$ . On retrouve les symétries données par la

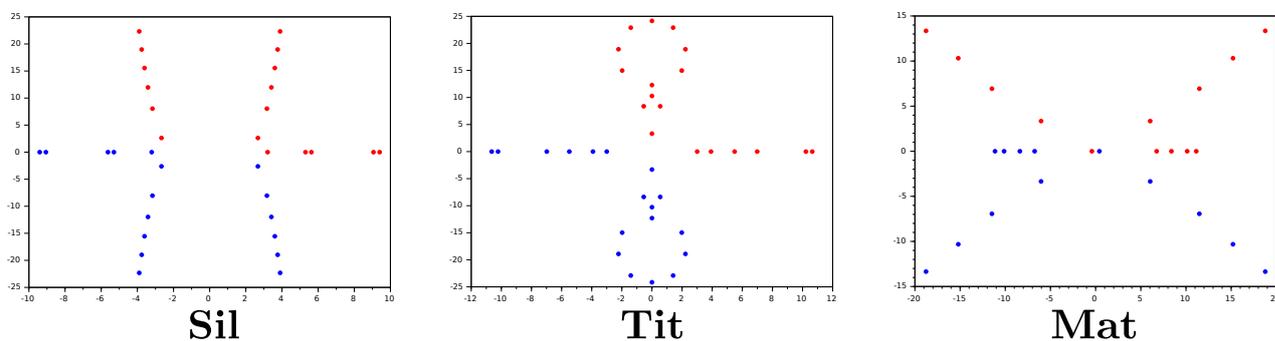


FIGURE 3.3 – Position des  $\beta_k^+$  (en rouge) et  $\beta_k^-$  (en bleu) dans le plan complexe pour les 3 matériaux (3.24) à  $\omega = 10$ .

conjecture 3.2.3, c'est à dire que si  $\beta$  est valeur propre, alors  $-\beta, \bar{\beta}$  et  $-\bar{\beta}$  le sont également. Ainsi, les modes inhomogènes vont par 4, les évanescents (sur l'axe imaginaire) par 2 et les propagatifs (sur l'axe réel) également par 2.

De plus, nous retrouvons que l'ensemble  $\{\beta_k^+\}_k$  des nombres d'onde associés aux modes progressifs ("allant" vers la droite) est l'opposé de l'ensemble  $\{\beta_k^-\}_k$  des nombres d'onde associés aux modes rétrogrades. Notons également que pour **Mat**, on peut observer la présence d'un *mode inverse* (le mode propagatif dont le module  $|\beta|$  est le plus petit).

Afin d'illustrer les trois types de modes existant dans un guide élastique, nous avons représenté sur la Figure 3.4 les parties réelles du champ de déplacement  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  pour trois modes : un propagatif, un inhomogène et un évanescent. Pour ces résultats, nous avons utilisé le matériau **Tit**. On peut remarquer que les modes dans un milieu orthotrope 2D vérifient des

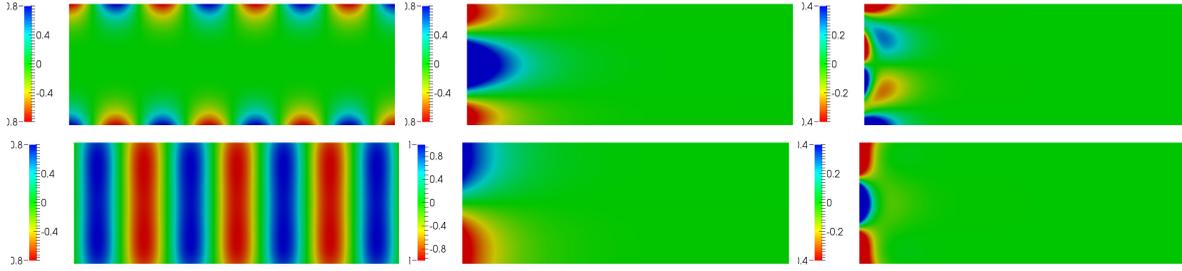


FIGURE 3.4 – Mode propagatif (à gauche), mode évanescent (au centre) et mode inhomogène (à droite). En haut, on a représenté la composante  $\text{Re}(u_x)$ , et en bas la composante  $\text{Re}(u_y)$ .

propriétés de symétrie (ou d'anti-symétrie selon la composante du champ de déplacement) par rapport à l'axe  $y = 0$  (la section du guide étant  $[-h, h]$ ).

Ces propriétés sont perdues dans le cas anisotrope, comme on peut le voir sur la Figure 3.5 où l'on a représenté un mode propagatif et deux modes inhomogènes pour le matériau **Mat**.

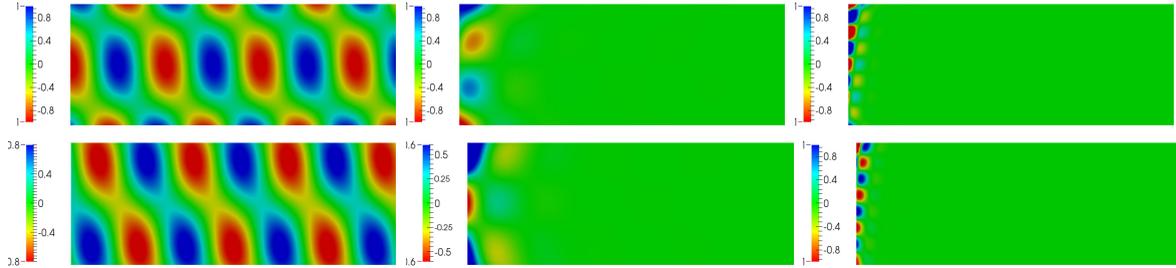


FIGURE 3.5 – Mode propagatif (à gauche) et modes inhomogènes (au centre et à droite). En haut, on a représenté la composante  $\text{Re}(u_x)$ , et en bas la composante  $\text{Re}(u_y)$ .

L'aspect des modes inhomogènes semble montrer une croissance (en module) dans la section du guide. Par conséquent, il semblerait que numériquement l'utilisation de frontières *obliques* pour écrire les conditions transparentes (comme présenté dans la section 2.2 du précédent chapitre) puisse présenter des avantages.

Cependant, on note que cette croissance dans la section du guide est moins "forte" que dans le cas acoustique. Bien évidemment, cela dépend a priori du milieu choisi. Par manque de temps ces questions n'ont pas été étudiées davantage, mais une étude plus approfondie serait intéressante.

Nous avons également vérifié numériquement notre conjecture 3.2.3 sur la symétrie des  $\beta_k^\pm$ . En considérant un matériau **anisotrope** et un guide de section non symétrique, nous avons représenté sur la Figure 3.6 la localisation des  $\beta_k$  dans le plan complexe.

### 3.3 Formulation multi-domaines pour les milieux orthotropes

#### 3.3.1 Formulation multi-domaines *YtR*

Dans cette section, nous allons étudier une première formulation multi-domaines du problème initial (3.6). Nous allons considérer le cas d'un milieu orthotrope. Bien évidemment, un

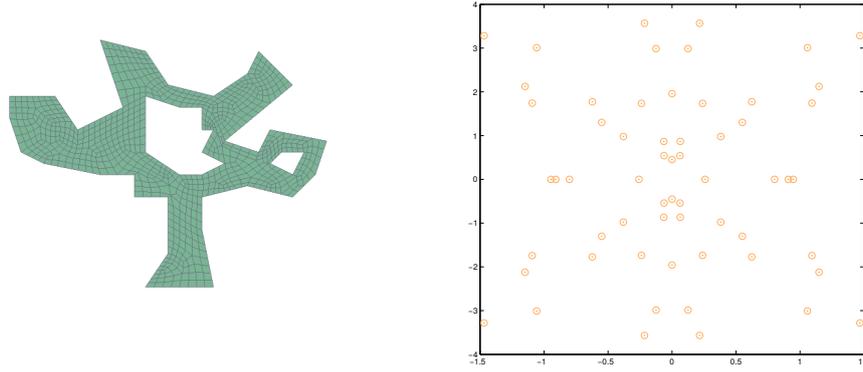


FIGURE 3.6 – Position des  $\beta_k^\pm$  dans le plan complexe pour un matériau anisotrope dans un guide 3D de section arbitraire (dessinée à gauche).

milieu orthotrope est un milieu anisotrope particulier, et on pourrait utiliser la technique que nous allons décrire dans la section 3.4. Cependant, le but ici est de présenter une méthode spécifiquement applicable pour le cas orthotrope. Ensuite, nous comparerons dans la section 3.6.2 les deux approches.

Ce cas correspond à une extension directe des travaux de V. Baronian, à la différence près que nous allons introduire un recouvrement entre les différents sous-domaines. Cette zone de recouvrement présente deux avantages :

- d'une part elle évite de devoir considérer la contrainte normale comme une variable supplémentaire, voir [7]. En effet, comme nous l'avons présenté dans la section 2.3.2 du second chapitre, on peut obtenir, via une technique de relèvement (rappelée ci-après dans la section 3.3.2), une formulation du problème uniquement en champ de déplacement.
- et d'autre part, elle présente des intérêts pour une approche itérative de résolution.

En contre-partie, on doit mailler une zone plus grande.

On définit les domaines  $\Omega_b$  et  $B_l^\pm$  (voir Figure 3.7) comme suit :

$$\Omega_b = B_l^- \cup \Omega_a \cup B_l^+, \quad \text{où} \quad B_l^\pm = \{\pm x \in [a, b]\} \cap \Omega,$$

Le paramètre  $l = b - a \geq 0$  représente la taille du recouvrement entre la zone éléments finis  $\Omega_b$  et les zones modales  $\Omega_a^\pm$ . Afin d'utiliser la technique du relèvement, on considère dans la suite  $l > 0$ .

On note respectivement  $\mathbf{u}^-$ ,  $\mathbf{u}^b$  et  $\mathbf{u}^+$  les restrictions de  $\mathbf{u}$  aux sous-domaines  $\Omega_a^-$ ,  $\Omega_b$  et  $\Omega_a^+$ . Ces inconnues vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^b = f & \text{dans} & \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu = 0 & \text{sur} & \partial \Omega_b \cap \partial \Omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}^\pm) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^\pm = 0 & \text{dans} & \Omega_a^\pm, \\ \sigma(\mathbf{u}^\pm) \nu = 0 & \text{sur} & \partial \Omega_a^\pm \cap \partial \Omega, \end{cases}$$

qui doivent être complétées par 4 conditions de transmission définies sur les frontières  $(\Sigma_b^-, \Sigma_a^-, \Sigma_a^+, \Sigma_b^+)$ , comme expliqué dans la section 1.2.1. Afin de pouvoir exploiter les relations



**Preuve :** La démonstration de ce résultat est similaire à celle du lemme 1.2.3 pour le cas acoustique. Il faut remarquer que la condition  $\mathbf{Y}(\mathbf{v}) = 0$  sur  $\Sigma_a^+$  indique simplement :

$$\mathbf{v}_s = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{v})_{xx} = 0, \quad (3.29)$$

ce qui correspond à imposer une partie de la trace et de la contrainte normale. Ainsi, en testant les équations (3.28) dans  $B_l^+$  par  $\mathbf{v}^+$  et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{B_l^+} \sigma(\mathbf{v}^+) : \epsilon(\overline{\mathbf{v}^+}) - \omega^2 |\mathbf{v}^+|^2 + \int_{\Sigma_a^+} \overline{\mathbf{v}^+} \sigma(\mathbf{v}^+) \nu - \gamma \int_{\Sigma_b^+} |\mathbf{v}^+|^2 = 0, \\ \Leftrightarrow & \int_{B_l^+} \sigma(\mathbf{v}^+) : \epsilon(\overline{\mathbf{v}^+}) - \omega^2 |\mathbf{v}^+|^2 - \gamma \int_{\Sigma_b^+} |\mathbf{v}^+|^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le terme de bord sur  $\Sigma_a^+$  disparaît car

$$\int_{\Sigma_a^+} \sigma(\mathbf{v}) \nu \cdot \mathbf{v} = \int_{\Sigma_a^+} \sigma_{Sx}(\mathbf{v}) \mathbf{v}_s + \sigma(\mathbf{v})_{xx} \mathbf{v}_x = 0$$

d'après l'équation (3.29). Enfin, en prenant la partie imaginaire de l'expression (3.30), il vient :

$$\text{Im}(\gamma) \int_{\Sigma_b^+} |\mathbf{v}^+|^2 = 0.$$

On en déduit que pour  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ , on a nécessairement  $\mathbf{v}^+|_{\Sigma_b^+} = 0$  et  $\sigma(\mathbf{v}^+) \nu = 0$  sur  $\Sigma_b^+$  (car  $\sigma(\mathbf{v}^+) \nu + \gamma \mathbf{v}^+ = 0$ ). On conclut par un argument de prolongement unique que  $\mathbf{v}^+ = 0$  dans tout  $B_l^+$  (voir [70]). ■

**Remarque 3.3.3** *Dans le cas où  $\gamma = 0$ , on peut montrer par des arguments de théorie spectrale que le problème homogène (3.28) posé dans la bande  $B_l^+$  admet des fréquences propres. Ces fréquences de "boite" ont également été mise en évidence au premier chapitre, voir section 1.2.1. Nous avons vu en acoustique qu'à ces fréquences, la formulation multi-domaines est mal posée, voir proposition 1.2.6. On peut démontrer par les mêmes arguments que la formulation multi-domaines 3.25-3.26 est mal posée à ces fréquences de boite.*

### 3.3.2 Reformulation à l'aide d'un opérateur $\mathbf{Y}tR$

Afin de reformuler le problème (3.25-3.26) en domaine borné, on doit éliminer les inconnues modales  $\mathbf{u}^\pm$ . Pour cela, nous allons définir des opérateurs reliant  $\mathbf{Y}^b$  sur les frontières intérieures à la donnée de Robin  $\sigma(\mathbf{u}^b) \nu + \gamma \mathbf{u}^b$  sur les frontières extérieures  $\Sigma_b^\pm$  à l'aide des décompositions modales décrites dans la section 3.2.2

**Définition 3.3.1** *Soit  $T_{Y \rightarrow R}^{l,+}$  l'opérateur qui à  $\mathbf{Y}$  sur  $\Sigma_a^+$  associe :*

$$T_{Y \rightarrow R}^{l,+}(\mathbf{Y}) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{J_k^F} \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{Y} \mathcal{X}_k dS \quad e^{i\beta_k l} (\mathcal{T}_k^+ + \gamma \mathcal{U}_k^+),$$

où  $J_k^F$  est donné par la formule (3.21). On peut définir de même un opérateur  $T_{Y \rightarrow R}^{l,-}$ .

**Remarque 3.3.4** *La définition de ces opérateurs est formelle car il n'est pas évident de montrer que les séries modales les définissant convergent. Si on suppose que les termes  $\frac{1}{J_k^F} \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{Y} \mathcal{X}_k$ , "n'explorent" pas exponentiellement vite en  $k$  (ce qui est en particulier vrai pour les modes de Lamb), alors les séries modales convergent. En effet, les termes  $e^{i\beta_k l}$  sont exponentiellement décroissants en  $k$  d'après (3.14). On peut ainsi montrer qu'elles ont une convergence normale, et déduire comme dans la proposition 1.2.8 que les opérateurs  $T_{Y \rightarrow R}^{l, \pm}$  sont compacts. Ce point nous permet alors de montrer que le problème (3.31) relève du théorème de Fredholm.*

Avec ces opérateurs, nous pouvons donner la formulation en domaine borné :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu + \gamma \mathbf{u}^b = T_{Y \rightarrow R}^{l, \pm}(\mathbf{Y}^b|_{\Sigma_a^\pm}) & \text{sur } \Sigma_b^\pm. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ce problème admet une formulation variationnelle uniquement en champ de déplacement. En effet, le terme  $(\mathbf{Y}^b, \mathcal{X}_k)_{L^2(\Sigma_a^+)}$  peut se réécrire :

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}^b, \mathcal{X}_k)_{L^2(\Sigma_a^+)} &= \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{u}_s^b(\mathcal{T}_k)_s + t_x^b(\mathcal{U}_k)_x \\ &= \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{u}_s^b(\mathcal{T}_k)_s + \mathbf{t}^b \cdot \tilde{\mathcal{U}}_k, \end{aligned}$$

où  $\tilde{\mathcal{U}}_k$  est défini par :

$$\tilde{\mathcal{U}}_k = \begin{cases} [(\mathcal{U}_k)_x \ 0]^t & \text{en 2D} \\ [(\mathcal{U}_k)_x \ 0 \ 0]^t & \text{en 3D} \end{cases}$$

La difficulté est de donner un sens variationnel aux termes  $(\mathbf{t}^b, \tilde{\mathcal{U}}_k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)}$ . Pour cela, on peut utiliser la technique du relèvement présentée dans la section 2.3.2. Par exemple dans  $B_l^+$ , posons  $\mathcal{L}(\cdot)$  le relèvement de  $(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+))^d$  dans  $(H^1(B_l))^d$  qui vérifie pour  $g \in (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^+))^d$  :

$$\mathcal{L}(g) = g \quad \text{sur } \Sigma_a^+, \quad \text{et } \mathcal{L}(g) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_b^+. \quad (3.32)$$

En utilisant le relèvement  $\mathcal{L}(\cdot)$  et la formule de Green, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{t}^b \cdot \tilde{\mathcal{U}}_k &= \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{t} \cdot \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}_k) \\ &= \int_{B_l^+} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}^b) \cdot \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}_k) + \sigma(\mathbf{u}^b) : \epsilon(\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}_k)) \end{aligned}$$

Nous savons de plus que  $\mathbf{u}^b$  vérifie :

$$\mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^b = 0 \quad \text{dans } B_l^+$$

Par conséquent, on obtient :

$$\int_{\Sigma_a^+} \mathbf{t}^b \cdot \tilde{\mathcal{U}}_k = \int_{B_l^+} \sigma(\mathbf{u}^b) : \epsilon(\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}_k)) - \rho \omega^2 \mathbf{u}^b \cdot \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}_k)$$

dont on déduit :

$$(\mathbf{Y}^b, \mathcal{X}_k)_{L^2(\Sigma_a^+)} = \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{u}_s^b(\mathcal{T}_k)_s + \int_{B_l^+} \sigma(\mathbf{u}^b) : \epsilon(\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}_k)) - \rho \omega^2 \mathbf{u}^b \cdot \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}_k). \quad (3.33)$$

Nous pouvons ainsi donner la formulation variationnelle du problème (3.31) uniquement en champ de déplacement :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que } \forall \tilde{\mathbf{u}} \in (H^1(\Omega_b))^d \\ & | a(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{t}_l(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) - b(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) = L(\tilde{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (3.34)$$

où les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $m(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot) = b^+(\cdot, \cdot) + b^-(\cdot, \cdot)$  et  $\tilde{t}_l(\cdot, \cdot) = \tilde{t}_l^+(\cdot, \cdot) + \tilde{t}_l^-(\cdot, \cdot)$  sont définies par :

$$\left| \begin{aligned} a(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega_b} \sigma(\mathbf{u}^b) : \epsilon(\tilde{\mathbf{u}}) - \omega^2 \mathbf{u}^b \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \\ b^\pm(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) &= \gamma \int_{\Sigma_b^\pm} \mathbf{u}^b \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \\ \tilde{t}_l^\pm(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) &= \int_{\Sigma_b^\pm} T_{Y \rightarrow R}^{l, \pm}(\mathbf{u}^b) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{J_k^F} (\mathbf{Y}, \mathcal{X}_k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} e^{i\beta_k l} (\mathcal{T}_k^+ + \gamma \mathcal{U}_k^+, \tilde{\mathbf{u}})_{L^2(\Sigma_b^\pm)}, \end{aligned} \right. \quad (3.35)$$

et où on remplace  $(\mathbf{Y}, \mathcal{X}_k)_{L^2(\Sigma_a^\pm)}$  par (3.33). La forme linéaire  $L(\cdot)$  est donnée par :

$$L(\tilde{\mathbf{u}}) = - \int_{\Omega_b} f \cdot \tilde{\mathbf{u}}.$$

Enfin, rappelons que pour discrétiser le problème sous forme variationnelle, il est nécessaire de tronquer la série définissant les formes bilinéaires  $\tilde{t}_l^\pm$ .

**Remarque 3.3.5** Afin de réduire au plus les calculs pour  $\tilde{t}_l^\pm(\cdot, \cdot)$ , l'idée est de prendre un relèvement s'annulant très vite, c'est à dire dont le support est le plus petit possible.

## 3.4 Formulation multi-domaines générale

### 3.4.1 Formulation multi-domaines *TtR*

Discutons maintenant le cas général. Pour un guide d'anisotropie arbitraire, les relations de Fraser (3.2.9) ne sont plus valables et on doit exploiter les relations de bi-orthogonalité (3.2.4). Afin de construire la formulation multi-domaines, nous allons reprendre la démarche présentée section 2.3 dans le chapitre précédent. On obtiendra ainsi une formulation *Transparent to Robin* (noté *TtR*).

Comme pour le cas orthotrope, les inconnues  $\mathbf{u}^\pm$  et  $\mathbf{u}^b$  vérifient les équations (3.25) dans les sous-domaines  $\Omega_a^\pm$  et  $\Omega_b$ . Nous allons proposer ici un second choix de conditions de transmission sur les frontières  $\Sigma_b^\pm$  et  $\Sigma_a^\pm$  des sous-domaines. Afin d'exploiter les relations de bi-orthogonalité (3.2.4), on considère comme conditions de transmission sur les frontières intérieures  $\Sigma_a^\pm$  les raccords des amplitudes modales "sortantes" :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k^+(\mathbf{u}^b) = A_k^+(\mathbf{u}^+) \quad \text{sur } \Sigma_a^+, \quad \text{et} \quad A_k^-(\mathbf{u}^b) = A_k^-(\mathbf{u}^-) \quad \text{sur } \Sigma_a^-,$$

où on rappelle la notation  $A_k^\pm(\mathbf{u})$  définie par (3.18) :

$$A_k^\pm(\mathbf{u}) = \frac{\pm 1}{J_k} \int_S \mathbf{u}|_{\Sigma_a^+} \mathcal{T}_k^\mp - \mathbf{t}|_{\Sigma_a^+} \mathcal{U}_k^\mp. \quad (3.36)$$

Sur les frontières  $\Sigma_b^\pm$ , nous allons utiliser une condition de type Robin. On a donc les conditions de transmission suivantes :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k^\pm(\mathbf{u}^b) &= A_k^\pm(\mathbf{u}^\pm) \quad \text{sur } \Sigma_a^\pm \\ \text{et } \sigma(\mathbf{u}^b)\nu + \gamma \mathbf{u}^b &= \sigma(\mathbf{u}^\pm)\nu + \gamma \mathbf{u}^\pm \quad \text{sur } \Sigma_b^\pm. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La question est maintenant de savoir si la formulation multi-domaines (3.25-3.37) est bien équivalente au problème initial (3.6). Comme précédemment, on montre ce résultat en vérifiant la compatibilité  $\mathbf{u}^b = \mathbf{u}^\pm$  dans les bandes  $B_l^\pm$ . Étudions la compatibilité dans  $B_l^+$ . La géométrie séparable de  $B_l^+$  nous permet de décomposer  $\mathbf{u}^b$  sur tous les modes :

$$\mathbf{u}^b = \sum_{k \geq 0} A_k^+(\mathbf{u}^b) e^{i\beta_k x} \mathcal{U}_k^+(\mathbf{x}_s) + A_k^-(\mathbf{u}^b) e^{-i\beta_k x} \mathcal{U}_k^-(\mathbf{x}_s) \quad \text{dans } B_l^+$$

et  $\mathbf{u}^+$  sur les modes sortants :

$$\mathbf{u}^+ = \sum_{k \geq 0} A_k^+(\mathbf{u}^+) e^{i\beta_k x} \mathcal{U}_k^+(\mathbf{x}_s) \quad \text{dans } B_l^+.$$

Posons la différence  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^b - \mathbf{u}^+$ , dont on veut montrer que  $\mathbf{v} = 0$  dans  $B_l^+$ . D'après la condition de transmission (3.37) sur  $\Sigma_a^+$ , il vient :

$$\mathbf{v} = \sum_{k \geq 0} A_k^-(\mathbf{u}^b) e^{-i\beta_k x} \mathcal{U}_k^-(\mathbf{x}_s) \quad \text{dans } B_l^+. \quad (3.38)$$

$\mathbf{v}$  est donc la somme de modes se propageant vers les  $x < 0$  et on peut donc la prolonger dans le demi-guide parfait :

$$\tilde{\Omega}_b^+ = ]-\infty, a] \times S \cup B_l^+.$$

$\mathbf{v}$  est alors une solution *sortante* dans  $\tilde{\Omega}_b^+$  des équations homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{v}) + \rho \omega^2 \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \tilde{\Omega}_b^+, \\ \sigma(\mathbf{v})\nu = 0 & \text{sur } \partial(\tilde{\Omega}_b^+) \setminus \Sigma_b^+, \\ \sigma(\mathbf{v})\nu + \gamma \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \Sigma_b^+, \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Pour assurer que  $\mathbf{v} = 0$ , nous avons besoin du paramètre complexe  $\gamma$ . En effet, si  $\operatorname{Im}(\gamma) = 0$ , il existe alors des fréquences pour lesquelles le problème (3.39) admet des solutions non nulles localisées aux bords du demi-guide  $\tilde{\Omega}_b^+$  appelées modes de bout, voir [76].

**Remarque 3.4.1** Dans la remarque 3.3.3, nous avons identifié pour  $\gamma = 0$  des fréquences de boîte liées aux recouvrements  $B_l^\pm$ . Ici, la condition de transmission imposée sur  $\Sigma_a^\pm$  nous permet "d'éliminer" ces fréquences de boîte en remplaçant le problème (3.28) posé dans  $B_l^\pm$  par le problème (3.39) posé dans le demi-guide parfait  $\tilde{\Omega}_b^\pm$ . Soulignons que les fréquences pour lesquelles il existe des modes de bout sont différentes des fréquences de boîte, et indépendantes de la taille  $l$  du recouvrement.

**Remarque 3.4.2** Dans le cas acoustique, nous avons vu que pour un milieu isotrope, nous n'avons pas besoin de la condition de Robin pour assurer la compatibilité des représentations dans  $B_l^\pm$  (voir la remarque 2.3.5). Ici, pour l'élasticité ce n'est plus vrai, et même pour un milieu isotrope il est nécessaire de considérer un paramètre  $\gamma$  dont la partie imaginaire est non nulle. L'équivalent du cas acoustique serait obtenu en considérant comme conditions de transmission  $\mathbf{Y}^b = \mathbf{Y}^\pm$  sur  $\Sigma_b^\pm$  car on peut alors exploiter les relations de Fraser pour un milieu isotrope, et montrer ainsi que  $\mathbf{v} = 0$ .

**Lemme 3.4.3** Pour tout  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) < 0$ , le problème (3.39) admet comme unique solution  $v = 0$ . Par conséquent, la formulation multi-domaines (3.25-3.37) et le problème initial (2.1) sont bien équivalents.

La démonstration de ce résultat repose sur les mêmes arguments que la démonstration de la proposition 2.3.3.

### 3.4.2 Reformulation à l'aide d'un opérateur $TtR$

Ayant montré l'équivalence entre la formulation multi-domaines (3.25-3.37) et le problème initial (3.6), nous pouvons maintenant discuter l'élimination des inconnues modales  $\mathbf{u}^\pm$  pour réécrire le problème en domaine borné. Introduisons (de manière formelle) les opérateurs *Transparent to Robin* :

**Définition 3.4.1** Soit  $T_{T \rightarrow R}^{l,+}$  l'opérateur qui à  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  sur  $\Sigma_a^+$  associe :

$$T_{T \rightarrow R}^{l,+}(\mathbf{u}) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{J_k} \left[ (\mathbf{u}, \mathcal{T}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^+)} - (\mathbf{t}, \mathcal{U}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^+)} \right] e^{i\beta_k l} (\mathcal{T}_k + \gamma \mathcal{U}_k).$$

De même, on peut définir l'opérateur  $T_{T \rightarrow R}^{l,-}$ .

À l'aide de ces opérateurs, nous pouvons éliminer  $\mathbf{u}^\pm$  dans la formulation multi-domaines et donner la reformulation en domaine borné suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu + \gamma \mathbf{u}^b = T_{T \rightarrow R}^{l,\pm}(\mathbf{u}^b) & \text{sur } \Sigma_b^\pm. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.40)$$

**Remarque 3.4.4** Comme dans le cas orthotrope, en supposant que les termes

$$\frac{[(\mathbf{u}, \mathcal{T}_k^\mp)_{\Sigma_a^+} - (\mathbf{t}, \mathcal{U}_k^\mp)_{\Sigma_a^+}]}{J_k},$$

"n'explorent pas" exponentiellement vite avec  $k$ , on peut montrer que les séries modales convergent. Ainsi, les opérateurs  $T_{O \rightarrow R}^{l,\pm}$  sont bien définis et compacts, et on peut également démontrer sous cette hypothèse que le problème (3.40) relève de l'alternative de Fredholm.

Si l'hypothèse ci-dessus n'est pas vérifiée, on suppose que, comme dans le cas acoustique anisotrope du second chapitre section 2.3.4, il est nécessaire de prendre un recouvrement  $l$  suffisamment grand (qui dépend uniquement de l'anisotropie) pour assurer la convergence des séries modales définissant les opérateurs  $T_{O \rightarrow R}^{l,\pm}$ .

Le problème (3.40) admet une formulation variationnelle en champ de déplacement unique-ment. Afin de l'obtenir, il est nécessaire de donner un sens variationnel au terme  $(\mathbf{t}^b, \mathcal{U}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^\pm)}$  utilisé dans la définition de  $T_{O \rightarrow R}^{l,\pm}$ . Pour cela, on utilise comme précédemment le relèvement  $\mathcal{L}(\cdot)$  vérifiant (3.32). Ainsi, en utilisant la formule de Green et les équations vérifiées par  $\mathbf{u}^b$  dans  $B_l^\pm$ , il vient :

$$(\mathbf{t}^b, \mathcal{U}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^\pm)} = (\mathbf{t}^b, \mathcal{L}(\mathcal{U}_k^\mp))_{L^2(\Sigma_a^\pm)} = \int_{B_l^\pm} \sigma(\mathbf{u}^b) : \epsilon(\mathcal{L}(\mathcal{U}_k^\mp)) - \rho \omega^2 \mathbf{u}^b \cdot \mathcal{L}(\mathcal{U}_k^\mp). \quad (3.41)$$

Sous forme variationnelle, le problème (3.40) s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que } \forall \tilde{\mathbf{u}} \in (H^1(\Omega_b))^d \\ | a(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) + t_l(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) - b(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) = L(\tilde{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

où les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $m(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  et la forme linéaire  $L(\cdot)$  sont définies par (3.35). La forme bilinéaire  $t_l(\cdot, \cdot) = t_l^+(\cdot, \cdot) + t_l^-(\cdot, \cdot)$  est définie par :

$$\begin{aligned} t_l^\pm(\mathbf{u}^b, \tilde{\mathbf{u}}) &= \int_{\Sigma_b^\pm} T_{T \rightarrow R}^{l,\pm}(\mathbf{u}^b) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{J_k} \left[ (\mathbf{u}, \mathcal{T}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^+)} - (\mathbf{t}, \mathcal{U}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^+)} \right] e^{i\beta_k l} (\mathcal{T}_k + \gamma \mathcal{U}_k, \tilde{\mathbf{u}})_{L^2(\Sigma_b^\pm)}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

où on remplace le terme  $(\mathbf{t}^b, \mathcal{U}_k^\mp)_{L^2(\Sigma_a^\pm)}$  par son expression (3.41). Comme précédemment, la discrétisation nécessite de tronquer les séries modales définissant les formes bilinéaires  $t_l^\pm(\cdot, \cdot)$ .

### 3.5 Algorithmes de Schwarz associés

Nous avons vu que les conditions transparentes sont des conditions non locales qui créent des blocs denses dans la matrice issue de la discrétisation du problème. Ces derniers pénalisent fortement les méthodes directes de résolution (comme la factorisation LU), et c'est pourquoi nous cherchons à développer une méthode itérative de résolution. Pour cela, nous allons reprendre les idées présentées dans la section 1.3 du premier chapitre. Nous allons discuter l'utilisation des méthodes de décomposition de domaine (méthode de Schwarz). Nous verrons que, de manière générale, on ne peut pas garantir la convergence de ces algorithmes. Cependant, combinées avec GMRES qui assure la convergence, les méthodes de Schwarz permettent de concevoir une méthode itérative efficace de résolution (voir section 1.3.4 du premier chapitre).

Nous proposerons et comparerons deux approches basées sur les formulations  $YtR$  et  $TtR$  que nous avons développées dans ce chapitre. Rappelons que la formulation  $YtR$  est applicable seulement pour les milieux **orthotropes**. Nous supposons donc dans la suite de cette section que le milieu est **orthotrope**.

### 3.5.1 Présentation des algorithmes

En s'appuyant sur la décomposition du domaine  $\Omega$  en trois sous-domaines  $\Omega_a^-$ ,  $\Omega_b$  et  $\Omega_a^+$ , l'algorithme de Schwarz consiste à résoudre itérativement :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}_{(n)}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que} \\ & \left| \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_{(n)}^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ + \text{conditions sur } \Sigma_b^\pm, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \text{et trouver } \mathbf{u}_{(n)}^\pm \in (H_{\text{loc}}^1(\Omega_a^\pm))^d \text{ sortante telle que} \\ & \left| \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^\pm) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_{(n)}^\pm = 0 & \text{dans } \Omega_a^\pm, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^\pm) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a^\pm \cap \partial\Omega \\ + \text{conditions sur } \Sigma_a^\pm, \end{array} \right. \end{aligned}$$

où  $\mathbf{u}_{(n)}^b$  et  $\mathbf{u}_{(n)}^\pm$  représentent l'approximation de la solution calculée à l'étape  $n$ . Rappelons qu'on se place dans le cas avec recouvrement, et on suppose donc  $l > 0$ . Les conditions de transmission sur les frontières  $\Sigma_a^\pm$  et  $\Sigma_b^\pm$  doivent être choisies de sorte que l'algorithme (3.44) soit **bien posé** et **consistant**, c'est à dire :

**Définition 3.5.1** *On dira que l'algorithme itératif (3.44) muni de conditions sur  $\Sigma_a^\pm$  et  $\Sigma_b^\pm$  est :*

1. **bien posé** si chacun des sous-problèmes est bien posé,
2. **consistant** si pour toute donnée initiale, en cas de convergence, la solution limite  $(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^b, \mathbf{u}^+)$  vérifie la compatibilité :

$$\mathbf{u}^b = \mathbf{u}^\pm \quad \text{dans } B_t^\pm.$$

Étant données les formulations *YtR* et *TtR* que nous avons présentées dans les sections 3.3 et 3.4, il vient naturellement deux choix de conditions de transmission :

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_{(n)}^\pm|_{\Sigma_a^\pm} = \mathbf{Y}_{(n-1)}^b|_{\Sigma_a^\pm} \quad \text{sur } \Sigma_a^\pm, \\ & \text{et } \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b)\nu + \gamma \mathbf{u}_{(n)}^b = \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^\pm)\nu + \gamma \mathbf{u}_{(n)}^\pm \quad \text{sur } \Sigma_b^\pm, \end{aligned} \quad (3.45)$$

et

$$\begin{aligned} & \forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k^\pm(\mathbf{u}_{(n)}^\pm) = A_k^b(\mathbf{u}_{(n-1)}^b) \quad \text{sur } \Sigma_a^\pm \\ & \text{et } \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b)\nu + \gamma \mathbf{u}_{(n)}^b = \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^\pm)\nu + \gamma \mathbf{u}_{(n)}^\pm \quad \text{sur } \Sigma_b^\pm. \end{aligned} \quad (3.46)$$

où on rappelle que les amplitudes modales  $A_k^\pm$  sont données par la formule (3.36). On en déduit deux algorithmes (3.44-3.45) (*YtR* itératif) et (3.44-3.46) (*TtR* itératif).

D'un point de vue numérique, notons que les processus itératifs (3.44-3.45) et (3.44-3.46) évite l'inversion d'une matrice avec des blocs denses. En effet, les conditions de transmission sur  $\Sigma_b^\pm$  sont des données pour le sous-problème dans  $\Omega_b$ . Par conséquent, on le résout en inversant uniquement une matrice éléments finis creuses.

**Le caractère bien posé :** Commençons par montrer que ces algorithmes sont **bien posés**.

**Lemme 3.5.1** Soient  $f \in L^2(\Omega_b)$  et  $g^\pm \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_b^\pm)$ . Pour tout  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ , le problème

$$\text{Trouver } \mathbf{u}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que } \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu + \gamma \mathbf{u}^b = g^\pm & \text{sur } \Sigma_b^\pm, \end{array} \right.$$

est bien posé.

**Preuve :** On procède comme dans le lemme 3.3.2 pour montrer que le problème homogène admet comme unique solution  $\mathbf{u}^b = 0$ . Par ailleurs, on montre que ce problème relève de l'alternative de Fredholm. Ayant montré l'unicité de la solution, on prouve également l'existence. ■

On déduit de ce lemme que le sous-problème dans  $\Omega_b$  est bien posé pour les deux algorithmes *YtR* itératif et *TtR* itératif. Reste la question des sous-problèmes dans les demi-guides  $\Omega_a^\pm$ . En utilisant les conditions de transmission (3.45), on sait résoudre explicitement dans  $\Omega_a^\pm$  grâce aux relations de Fraser 3.2.9. Avec les conditions (3.46), nous avons directement les coefficients  $A_k^\pm$  des décompositions modales de la solution sortante dans les demi-guides.

**Proposition 3.5.2** Pour tout  $\gamma \neq 0$ , les processus itératifs (3.44-3.45) et (3.44-3.46) sont **bien posés**.

**La consistance :** La démonstration de ce résultat a déjà été vue dans les lemmes 3.3.2 et 3.4.3.

**Proposition 3.5.3** Pour tout  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) < 0$ , les processus itératifs (3.44-3.45) et (3.44-3.46) sont **consistants**.

### 3.5.2 Analyse spectrale dans un cas d'école

Pour commencer, nous allons étudier le cas modèle d'un demi-guide parfait (voir Figure 3.8). On définit le domaine  $\Omega$  et le sous-domaine  $\Omega_b$  comme suit (par souci de simplicité, on utilise les mêmes notations que précédemment) :

$$\Omega = \mathbb{R}^+ \times S, \quad \Omega_b = [0, b] \times S, \quad \text{et on pose } \Sigma_0 = \{x = 0\} \times S.$$

Le processus itératif que l'on considère est :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}_{(n)}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que } \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_{(n)}^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b) \nu = 0 & \text{sur } [0, b] \times \partial S, \\ + \text{condition sur } & \Sigma_b^+, \end{array} \right. \\ & \text{et trouver } \mathbf{u}_{(n)}^+ \in (H_{\text{loc}}^1(\Omega_a^+))^d \text{ sortante telle que } \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^+) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_{(n)}^+ = 0 & \text{dans } \Omega_a^+, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^+) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a^+ \cap \partial\Omega \\ + \text{condition sur } & \Sigma_a^+. \end{array} \right. \end{aligned} \tag{3.47}$$

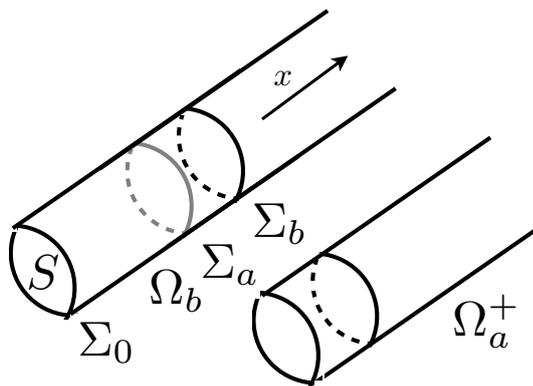


FIGURE 3.8 – Géométrie du demi-guide à géométrie séparable.

La géométrie séparable du demi-guide nous permet de décomposer  $\mathbf{u}^b$  et  $\mathbf{u}^+$  sur les modes. Afin de pouvoir découpler les modes et faire un calcul analytique du taux de convergence de l'algorithme (3.47), on doit imposer :

$$\mathbf{X}^b = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^0,$$

et utiliser la condition de transmission suivante :

$$\mathbf{X}_{(n)}^b|_{\Sigma_b^+} = \mathbf{X}_{(n)}^+|_{\Sigma_b^+} \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^+.$$

Ainsi, on pourra exploiter la relation de Fraser 3.2.9 pour faire les calculs. Les conditions de transmission que nous considérons sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{(n)}^+|_{\Sigma_a^+} &= \mathbf{Y}_{(n-1)}^b|_{\Sigma_a^+} \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^+, \\ \text{et} \quad \mathbf{X}_{(n)}^b|_{\Sigma_b^+} &= \mathbf{X}_{(n)}^+|_{\Sigma_b^+} \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^+, \end{aligned} \tag{3.48}$$

et

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k^+(\mathbf{u}_{(n)}^+) &= A_k^+(\mathbf{u}_{(n-1)}^b) \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^+ \\ \text{et} \quad \mathbf{X}_{(n)}^b|_{\Sigma_b^+} &= \mathbf{X}_{(n)}^+|_{\Sigma_b^+} \quad \text{sur} \quad \Sigma_b^+. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Les caractères **bien posé** et **consistant** des algorithmes (3.47-3.48) et (3.47-3.49) sont démontrés en Annexe de ce chapitre, voir la section 3.7. On montre que :

- l'algorithme (3.47-3.48) (*YtX* itératif) est **bien posé**, sauf pour les fréquences propres du problème homogène dans  $\Omega_b$  (voir proposition 3.7.3), et est **consistant**, sauf pour les fréquences de boîte (voir proposition 3.7.5)
- l'algorithme (3.47-3.49) (*TtX* itératif) est **bien posé**, sauf pour les fréquences propres du problème homogène dans  $\Omega_b$  et est **consistant** pour toute fréquence (voir proposition 3.7.6).

Discutons maintenant la question de la convergence. On considère  $f = 0$  et on souhaite prouver que pour toute donnée initiale  $\mathbf{u}_{(0)}^b$ ,  $\mathbf{u}_{(0)}^+$ , les suites  $\mathbf{u}_{(n)}^b$  et  $\mathbf{u}_{(n)}^+$  tendent vers 0. Étant donné  $\mathbf{X}_{(n)}^+$  sur  $\Sigma_b^+$ , nous allons calculer  $\mathbf{X}_{(n+1)}^+$  avec nos deux algorithmes. En suivant la même démarche que dans la preuve du lemme 3.7.4 (voir dans l'Annexe 3.7), on obtient la décomposition de  $\mathbf{u}^b$  dans  $\Omega_b$  :

$$\mathbf{u}_{(n)}^b = \sum_{k \geq 0} \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n)}^+ \mathcal{Y}_k \right) \frac{e^{i\beta_k x} \mathcal{U}_k^+(\mathbf{x}_s) + e^{-i\beta_k x} \mathcal{U}_k^-(\mathbf{x}_s)}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}} \quad \text{dans} \quad \Omega_b. \tag{3.50}$$

Notons que s'il existe un indice  $k$  pour lequel le terme au dénominateur s'annule, la fréquence correspond alors à une fréquence propre du problème homogène dans  $\Omega_b$  (voir le lemme 3.7.2 dans l'Annexe 3.7). Nous évitons ces fréquences pour lesquelles l'algorithme est mal posé.

### L'algorithme $YtX$ itératif :

Avec les condition de transmission (3.48), il vient sur  $\Sigma_a^+$  :

$$\mathbf{Y}_{(n+1)}^+ = \mathbf{Y}_{(n)}^b = \sum_{k \geq 0} \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n)}^+ \mathcal{Y}_k \right) \frac{e^{i\beta_k a} + e^{-i\beta_k a}}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}} \mathcal{Y}_k(\mathbf{x}_s).$$

Grâce aux relations de Fraser 3.2.9, on en déduit la décomposition modale de  $\mathbf{u}^+$  dans  $\Omega_a^+$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(n+1)}^+ &= \sum_{k \geq 0} \left( \int_{\Sigma_a^+} \mathbf{Y}_{(n+1)}^+ \mathcal{X}_k \right) e^{i\beta_k l} \mathcal{X}_k, \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n)}^+ \mathcal{Y}_k \right) \frac{e^{i\beta_k a} + e^{-i\beta_k a}}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}} e^{i\beta_k l} \mathcal{X}_k. \end{aligned}$$

Nous avons donc entre deux itérations la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n+1)}^+ \mathcal{Y}_k \right) = \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n)}^+ \mathcal{Y}_k \right) \lambda_k = \frac{(e^{i\beta_k a} + e^{-i\beta_k a}) e^{i\beta_k l}}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}},$$

dont on déduit le

**Lemme 3.5.4** *L'algorithme itératif (3.47-3.48) est convergent si et seulement si :*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k| < 1 \quad \text{où} \quad \lambda_k = \frac{(e^{i\beta_k a} + e^{-i\beta_k a}) e^{i\beta_k l}}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}}.$$

Grâce à l'expression explicite des  $\lambda_k$ , nous pouvons vérifier si la condition ci-dessus peut être respectée. Rappelons le résultat 3.14 sur les coefficients  $\beta_k$  :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Im}(\beta_k) = +\infty.$$

Bien que nous n'ayons pas justifié le caractère **bien posé** et **consistant** de l'algorithme  $YtX$  itératif dans le cas sans recouvrement, il est intéressant d'étudier formellement le comportement des coefficients  $\lambda_k$  pour  $l = 0$ .

— **Sans recouvrement** : pour  $l = 0$ , l'expression des  $\lambda_k$  se simplifie et devient :

$$\lambda_k = \frac{-i}{\tan(\beta_k a)}.$$

Le comportement pour  $k$  grand de  $\beta_k$  nous permet de déduire :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = -1.$$

Par conséquent, l'algorithme ne peut pas converger.

— **Avec recouvrement** : pour  $l > 0$ , on peut montrer que les  $\lambda_k$  vérifie pour  $k$  grand :

$$|\lambda_k| \underset{+\infty}{\sim} e^{-2\text{Im}(\beta_k)l}$$

$|\lambda_k|$  converge donc exponentiellement vite vers 0 et donc il n'y a qu'un nombre fini de  $\lambda_k$  dont les modules peuvent être plus grand que  $k$ . En ce sens, on a amélioré la situation par rapport au cas  $l = 0$ . Néanmoins, soulignons que on ne peut pas garantir la convergence car nous ne connaissons que le comportement asymptotique des  $\lambda_k$ . En particulier, on ne sait rien sur les  $\lambda_k$  associés aux modes propagatif.

### L'algorithme *TtX* itératif :

Discutons maintenant le cas des conditions de transmission (3.49). À partir de la décomposition (3.50) de  $\mathbf{u}^b$ , il vient en utilisant les conditions de transmission sur  $\Sigma_a^+$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k^+(\mathbf{u}_{(n+1)}^+) = A_k^+(\mathbf{u}_{(n)}^b) = \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n)}^+ \mathcal{Y}_k \right) \frac{e^{i\beta_k a}}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}}.$$

Les coefficients  $A_k^+(\mathbf{u}_{(n+1)}^+)$  donnent explicitement la décomposition modale de  $\mathbf{u}^+$  dans  $\Omega_a^+$ . On en déduit  $\mathbf{X}_{(n+1)}^+$  sur  $\Sigma_b^+$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(n+1)}^+ &= \sum_{k \geq 0} A_k^+(\mathbf{u}_{(n+1)}^+) e^{i\beta_k l} \mathcal{X}_k, \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n)}^+ \mathcal{Y}_k \right) \frac{e^{i\beta_k b}}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}} \mathcal{X}_k. \end{aligned}$$

Nous avons donc la relation entre deux itérations :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n+1)}^+ \mathcal{Y}_k \right) = \left( \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}_{(n)}^+ \mathcal{Y}_k \right) \frac{e^{i\beta_k b}}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}},$$

**Lemme 3.5.5** *L'algorithme itératif (3.47-3.49) est convergent si et seulement si :*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\tilde{\lambda}_k| < 1 \quad \text{où} \quad \tilde{\lambda}_k = \frac{e^{i\beta_k b}}{e^{i\beta_k b} - e^{-i\beta_k b}}.$$

Comme précédemment, on peut utiliser l'expression explicite des  $\tilde{\lambda}_k$  pour vérifier si la condition ci-dessus est vérifiée. Avec les conditions *TtX*, les  $\tilde{\lambda}_k$  ne dépendent pas de la taille  $l$  du recouvrement, mais de la taille  $b$  du domaine  $\Omega_b$ . Nous avons alors quel que soit le recouvrement  $l$  le comportement asymptotique :

$$|\tilde{\lambda}_k| \underset{+\infty}{\sim} e^{-2\text{Im}(\beta_k)b}.$$

Par conséquent,  $|\tilde{\lambda}_k|$  tend exponentiellement vite vers 0, et donc il y a au plus un nombre fini de  $\tilde{\lambda}_k$  dont les modules sont plus grands que 1. Ce résultat est important car il indique que pour tout  $l$ , on récupère le bénéfice du recouvrement, c'est à dire le comportement asymptotique des  $\tilde{\lambda}_k$ . De plus, la décroissance asymptotique des  $|\tilde{\lambda}_k|$  est plus forte que celle des  $|\lambda_k|$  car nous avons nécessairement  $b > l$ . Soulignons cependant qu'on ne peut pas non plus garantir la convergence car nous n'avons que le comportement asymptotique des  $\tilde{\lambda}_k$ .

Afin d'illustrer les remarques que nous venons de faire, nous avons représenté sur la Figure 3.9, la position des  $(\lambda_k)_k$  et des  $(\tilde{\lambda}_k)_k$  pour différents recouvrements  $l$  (échelle de couleur) :

$$a = 0.2, \quad \text{et} \quad l \in \{0, 0.002 \dots, 0.02\}.$$

Pour ce test, nous avons utilisé le matériau **Tit** et nous nous sommes placé à la fréquence  $\omega = 10$ . On peut observer sur ces résultats que :

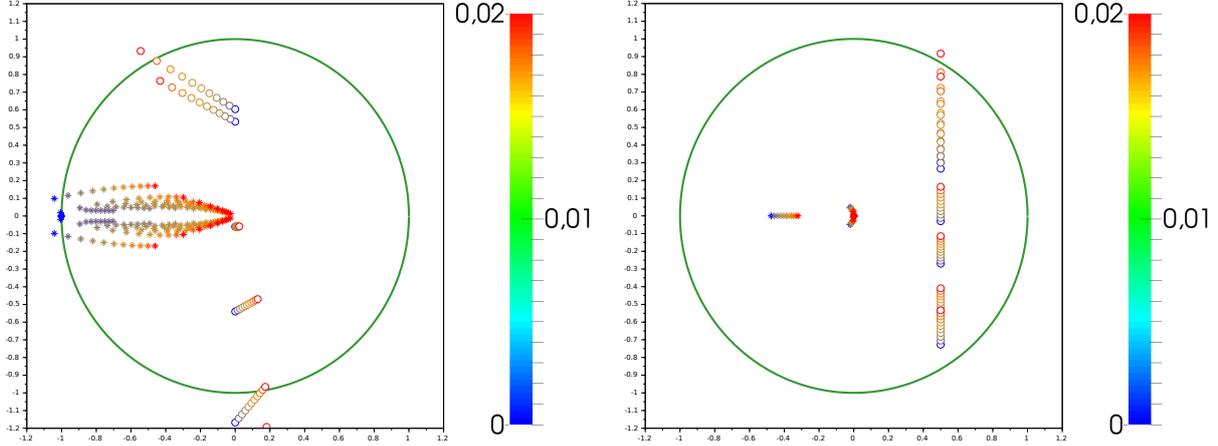


FIGURE 3.9 – Représentation dans le plan complexe des coefficients  $(\lambda_k)_k$  (à gauche) et  $(\tilde{\lambda}_k)_k$  (à droite) pour plusieurs  $l$ . Les étoiles (resp. les cercles) correspondent aux coefficients associés aux modes évanescents (resp. propagatifs). En vert, on a représenté le cercle unité

- pour certains  $l$ , des  $\lambda_k$  et des  $\tilde{\lambda}_k$  sont en dehors du cercle unité, et donc l'algorithme ne converge pas.
- plus  $l$  est grand, plus les  $\lambda_k$  et des  $\tilde{\lambda}_k$  sont concentrés autour de 0.
- les coefficients  $\tilde{\lambda}_k$  associés aux modes évanescents varient peu avec  $l$  et sont très concentrés autour de 0.
- la partie réelle des  $\tilde{\lambda}_k$  associés aux modes propagatifs est égale à  $1/2$ . On retrouve ce résultat avec l'expression des  $\tilde{\lambda}_k$  par le calcul direct.

### 3.5.3 Analyse spectrale dans le cas général

Essayons de généraliser les résultats du demi-guide parfait à la situation d'un demi-guide perturbé dans  $\Omega_b$ . On ne peut plus utiliser la décomposition modale dans  $\Omega_b$  et faire des calculs explicitement. Il n'est donc pas utile de considérer comme condition de transmission  $\mathbf{X}_{(n)}^b = \mathbf{X}_{(n)}^+$  sur  $\Sigma_b^+$ , et nous allons utiliser la condition de type Robin sur  $\Sigma_b^+$ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{(n)}^+|_{\Sigma_a^+} &= \mathbf{Y}_{(n-1)}^b|_{\Sigma_a^+} && \text{sur } \Sigma_a^+, \\ \text{et } \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b)\nu + \gamma \mathbf{u}_{(n)}^b &= \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^\pm)\nu + \gamma \mathbf{u}_{(n)}^\pm && \text{sur } \Sigma_b^+, \end{aligned} \quad (3.51)$$

et

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k^+(\mathbf{u}_{(n)}^+) &= A_k^b(\mathbf{u}_{(n-1)}^\pm) && \text{sur } \Sigma_a^+ \\ \text{et } \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b)\nu + \gamma \mathbf{u}_{(n)}^b &= \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^\pm)\nu + \gamma \mathbf{u}_{(n)}^\pm && \text{sur } \Sigma_b^+. \end{aligned} \quad (3.52)$$

La condition sur le bord  $\Sigma_0$  du demi-guide peut être prise arbitrairement, et on considère pour simplifier

$$\sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b)\nu = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0.$$

En choisissant  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) < 0$ , on sait que les algorithmes (3.47-3.51) (*YtR* itératif) et (3.47-3.52) (*TtR* itératif) sont **bien posés** et **consistants** (voir les propositions 3.5.2 et 3.5.3). Le sous-problème dans  $\Omega_b$  étant bien posé, on peut définir :

**Définition 3.5.2** Soit  $\mathcal{R}^b$  l'opérateur qui à une donnée  $g$  associe la solution  $\mathbf{u}^b$  du problème dans  $\Omega_b$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}\sigma(\mathbf{u}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^b = 0 & \text{dans } \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \setminus \Sigma_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu + \gamma \mathbf{u}^b = g & \text{sur } \Sigma_b^+. \end{array} \right.$$

Nous savons par des arguments classiques que l'opérateur  $\mathcal{R}^b$  est continu.

Dans les sections 3.3 et 3.4, nous avons vu qu'à l'aide des opérateurs  $T_{Y \rightarrow R}^{l,+}$  (voir définition 3.3.1) et  $T_{T \rightarrow R}^{l,+}$  (voir définition 3.4.1), on peut éliminer l'inconnue modale  $\mathbf{u}^+$  dans  $\Omega_a^+$ . On peut ainsi réécrire de manière condensée l'algorithme (3.47-3.51) (*YtR* itératif) comme suit :

$$\mathbf{u}_{(n+1)}^b = \mathcal{R}^b T_{Y \rightarrow R}^{l,+} (\mathbf{Y}_{(n)}^b |_{\Sigma_a^+})$$

**Lemme 3.5.6** L'algorithme itératif 3.47-3.51 est convergent si et seulement si :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k| < 1,$$

où les  $\lambda_k$  sont définis ici comme les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{R}^b T_{Y \rightarrow R}^{l,+} \mathbf{Y}(\cdot) |_{\Sigma_a^+}$ .

Ici, on ne connaît pas l'expression explicite des  $\lambda_k$  et donc le théorème ci-dessus n'est pas très utile. Cependant, dans le cas  $l > 0$ , nous avons vu dans la remarque 3.3.4 que, sous certaines hypothèses sur les modes, l'opérateur  $T_{Y \rightarrow R}^{l,+}$  est compact.  $\mathcal{R}^b$  étant continu, on déduit que  $\mathcal{R}^b T_{Y \rightarrow R}^{l,+} \mathbf{Y}(\cdot) |_{\Sigma_a^+}$  est aussi compact. Ainsi, on est assuré que ses valeurs propres forment une suite dont le seul point d'accumulation est 0, et donc il n'y a nécessairement qu'un nombre fini de  $\lambda_k$  dont les modules sont plus grands que 1. Cependant, nous n'avons pas d'information sur la vitesse de décroissance des  $|\lambda_k|$ .

Nous pouvons faire le même raisonnement pour l'algorithme (3.47-3.52) (*TtR* itératif). À l'aide de l'opérateur  $T_{T \rightarrow R}^{l,+}$ , on peut réécrire l'algorithme comme suit

$$\mathbf{u}_{(n+1)}^b = \mathcal{R}^b T_{T \rightarrow R}^{l,+} ((\mathbf{u}_{(n)}^b |_{\Sigma_a^+}, \mathbf{t}_{(n)}^b |_{\Sigma_a^+}))$$

On définit les coefficients  $\tilde{\lambda}_k$  comme les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{R}^b T_{T \rightarrow R}^{l,+} ((\cdot) |_{\Sigma_a^+}, \sigma(\cdot) \nu |_{\Sigma_a^+})$ . Nous savons également, voir la remarque 3.4.4, que pour tout  $l > 0$ , sous certaines hypothèses sur les modes, les opérateurs  $T_{T \rightarrow R}^{l,+}$  sont compacts. Cela nous permet de déduire que seul un nombre fini de  $\tilde{\lambda}_k$  ont des modules plus grands que 1. Mais comme pour le cas *YtR*, nous ne connaissons pas a priori la vitesse de décroissance des  $\tilde{\lambda}_k$ .

Afin d'illustrer ces remarques, nous avons calculé numériquement les coefficients  $\lambda_k$  et  $\tilde{\lambda}_k$  pour la fréquence  $\omega = 10$  dans le cas de la géométrie perturbée représentée Figure 3.10 et pour le matériau **Tit**. Pour différents recouvrements  $l \in \{0.1, 0.2, 0.5\}$ , nous avons représenté sur la Figure 3.11 les 20 plus grands (en module) coefficients  $\lambda_k$  et  $\tilde{\lambda}_k$  dans le plan complexe. Comme dans le cas du demi-guide parfait, on observe sur ces résultats :

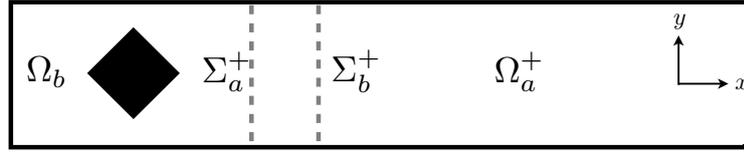
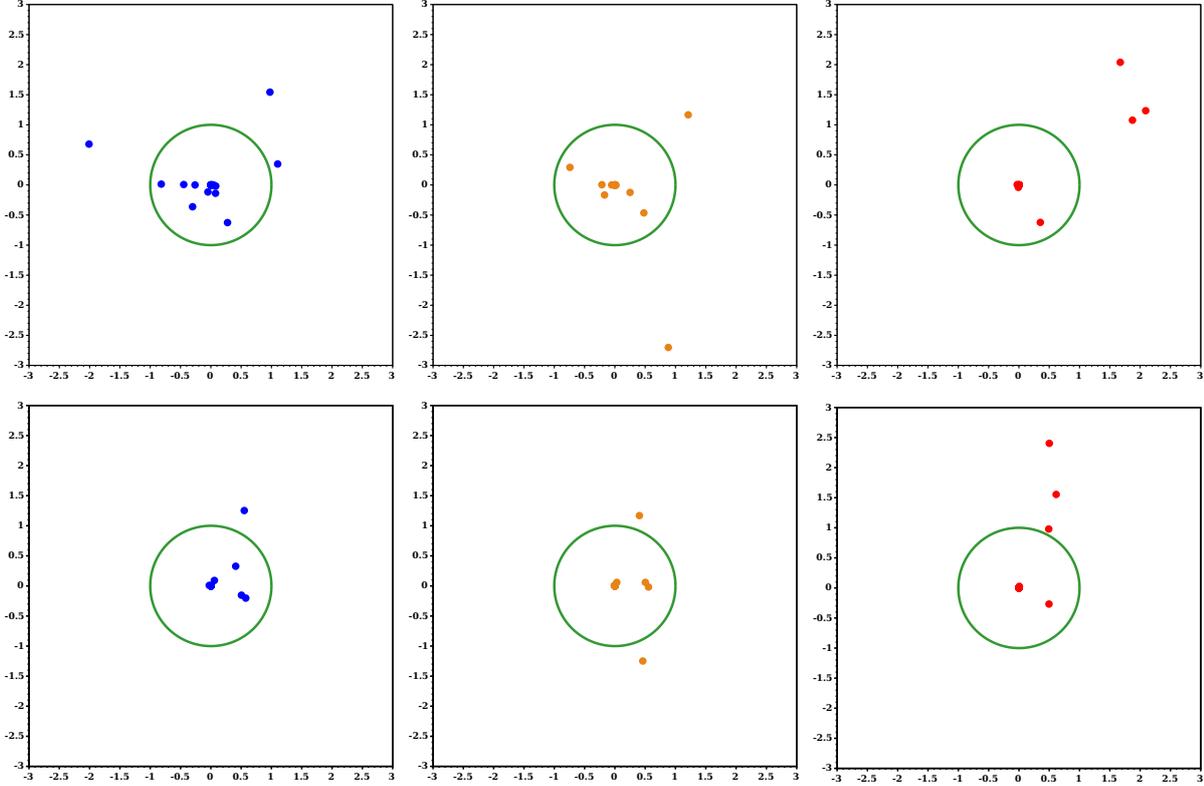


FIGURE 3.10 – Géométrie et notations pour le demi-guide avec obstacle.

FIGURE 3.11 – Position des coefficients  $\lambda_k$  (en haut) et  $\tilde{\lambda}_k$  (en bas) pour différents recouvrements de taille  $l \in \{0.1, 0.2, 0.5\}$  (de gauche à droite). Le cercle unité est dessiné en vert.

- qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients  $\lambda_k$  et  $\tilde{\lambda}_k$  hors du cercle unité,
- plus  $l$  est grand, plus on concentre de valeurs propres autour de 0,
- pour  $l$  petit, la formulation  $TtR$  concentre autour de 0 plus de valeurs propres que la formulation  $YtR$ ,
- pour  $l = 0.5$ , nous avons pour les formulations  $YtR$  et  $TtR$  4 coefficients éloignés de 0. Ces coefficients correspondent aux 4 modes propagatifs que nous avons à cette fréquence. Notons de plus que pour les  $\tilde{\lambda}_k$ , les parties réelles sont proches de  $1/2$ , comme dans le cas du demi-guide parfait, voir Figure 3.9.

On peut conclure de l'étude des propriétés spectrales des algorithmes  $YtR$  itératif et  $TtR$  itératif que :

1. plus la taille  $l$  du recouvrement est grand, plus on concentre de valeurs propres autour de 0,
2. le nombre valeurs propres  $\tilde{\lambda}_k$  éloignées de 0 varie peu avec  $l$ , et il semble toujours plus petit que le nombre de valeurs propres  $\lambda_k$  éloignées de 0. Grâce à la formulation  $TtR$ , on obtient donc les avantages du recouvrement pour tout  $l > 0$ , aussi petit soit-il.

Ces propriétés sont importantes pour connaître le taux de convergence de GMRES. En effet, nous avons vu dans la section 1.3.4 du chapitre 1 que plus les valeurs propres sont regroupées autour de 0, plus GMRES converge vite.

## 3.6 Résultats numériques

Dans cette sections, nous allons présenter tout d'abord une validation qualitative de la formulation *Transparent to Robin* (noté *TtR*) applicable pour un milieu anisotrope arbitraire (voir section 3.4). La validation pour la formulation *YtR* (voir section 3.3) a également été faite et donne les mêmes résultats qualitatifs.

Par ailleurs, nous allons comparer dans la section 3.6.2 les deux approches *YtR* et *TtR* applicables pour un matériau orthotrope :

- en terme de conditionnement de la matrice à inverser après discrétisation,
- puis, pour une méthode de résolution itérative.

Enfin, nous présenterons les avantages de la formulation *TtR* par rapport aux méthodes de type couches absorbantes.

### 3.6.1 Validation qualitative de la formulation *TtR*

Afin de valider numériquement la construction de nos conditions transparentes pour la formulation *TtR*, nous avons considéré le problème de rayonnement (3.40) pour deux tailles de domaine de calcul  $\Omega_b$ . Pour le matériau **Tit** (voir définition 3.24), nous avons représenté sur la Figure 3.12 la partie réelle du champ de déplacement  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  solution de (3.40) en prenant les paramètres suivants :

$$\omega = 10, \quad b \in \{0.5, 1\} \quad \text{et} \quad l = 0.1.$$

Les traits pleins sont les frontières extérieures  $\Sigma_b^\pm$ , et ceux en pointillés gris sont les frontières intérieures  $\Sigma_a^\pm$ . La source  $f$  est une gaussienne (tronquée) centrée dans le domaine  $\Omega_b$ . À l'aide des décompositions modales, nous avons représenté sur la Figure 3.13 la reconstruction de la solution dans tout le guide.

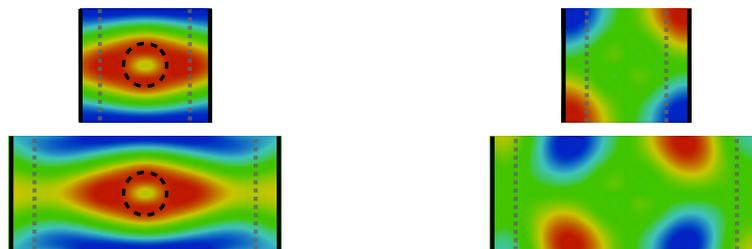


FIGURE 3.12 – Composante  $\text{Re}(u_x)$  à gauche et  $\text{Re}(u_y)$  à droite de la solution dans  $\Omega_b$  pour le matériau **Tit** pour deux tailles de boîte, en haut  $b = 0.5$ , en bas pour  $b = 1$ , et une même taille de recouvrement  $l = 0.1$ . Le support du terme source  $f$  est représenté par le cercle en pontillé.

La méthode s'appliquant également pour un milieu anisotrope arbitraire, nous avons effectué les mêmes simulations pour le matériau **Mat**. Sur la Figure 3.14, nous avons représenté les parties réelles des composantes  $(u_x, u_y)$  du champ de déplacement ainsi que la reconstruction dans tout le domaine.

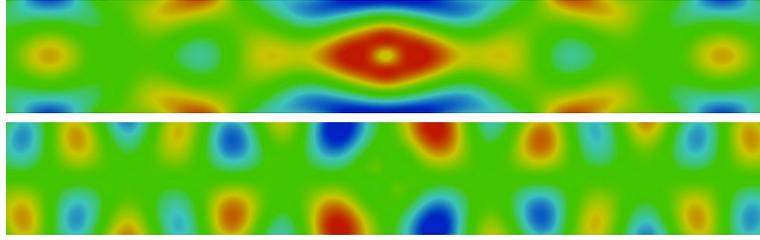


FIGURE 3.13 – Reconstruction de la solution du problème de radiation dans le guide complet pour le matériau **Tit** : en haut la composante  $\text{Re}(u_x)$  et en bas  $\text{Re}(u_y)$ .

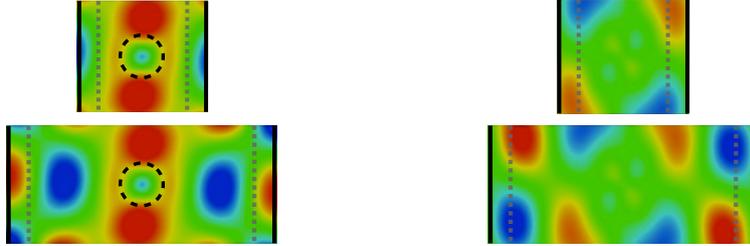


FIGURE 3.14 – Composante  $\text{Re}(u_x)$  à gauche et  $\text{Re}(u_y)$  à droite de la solution dans  $\Omega_b$  pour le matériau **Mat** pour deux tailles de boîte, en haut  $b = 0.5$ , en bas pour  $b = 1$ . Le support du terme source  $f$  est représenté par le cercle en pontillé.

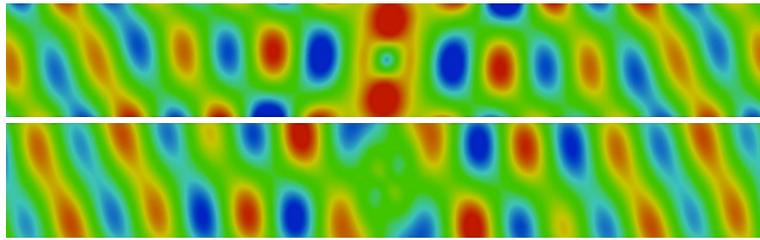


FIGURE 3.15 – Reconstruction de la solution dans le guide complet pour le matériau **Mat** : en haut la composante  $\text{Re}(u_x)$  et en bas  $\text{Re}(u_y)$ .

Ces différents résultats numériques (Figures 3.12 et 3.14) montrent qualitativement que les conditions que nous avons écrites sur les bords  $\Sigma_b^\pm$  sont *transparentes* car leurs positions n'ont pas d'influence sur la solution.

### 3.6.2 Comparaison des formulations *YtR* et *TtR*

#### Comparaison des formulations en terme de conditionnement

Dans la remarque 3.3.3 sur la formulation *YtR*, nous avons mis en évidence l'existence de fréquences de boîte liées aux zones de recouvrement  $B_l^\pm$  lorsque le paramètre  $\gamma$  de la condition de transmission sur  $\Sigma_b^\pm$  est nul. Nous avons vu au premier chapitre, voir section 1.2.1, qu'à ces fréquences, la reformulation du problème de diffraction n'est pas bien posée. Afin d'éliminer ces fréquences, l'idée est de prendre un paramètre  $\gamma$  dont la partie imaginaire est non nulle, voir le lemme 3.3.2. On déplace ainsi les fréquences de boîte dans le plan complexe ce qui assure que  $\omega$  (étant réel) n'est jamais une fréquence de boîte. Cependant, si ces fréquences complexes sont proches de l'axe réel, on peut s'attendre à ce qu'elles affectent notre méthode. C'est ce que nous allons vérifier maintenant.

Par ailleurs, nous avons vu dans la remarque 3.4.1 que la formulation  $TtR$  permet "d'éliminer" les effets de la boîte  $B_l^\pm$ . Un résultat similaire a été présenté dans le chapitre 2, voir la section 2.4.2.

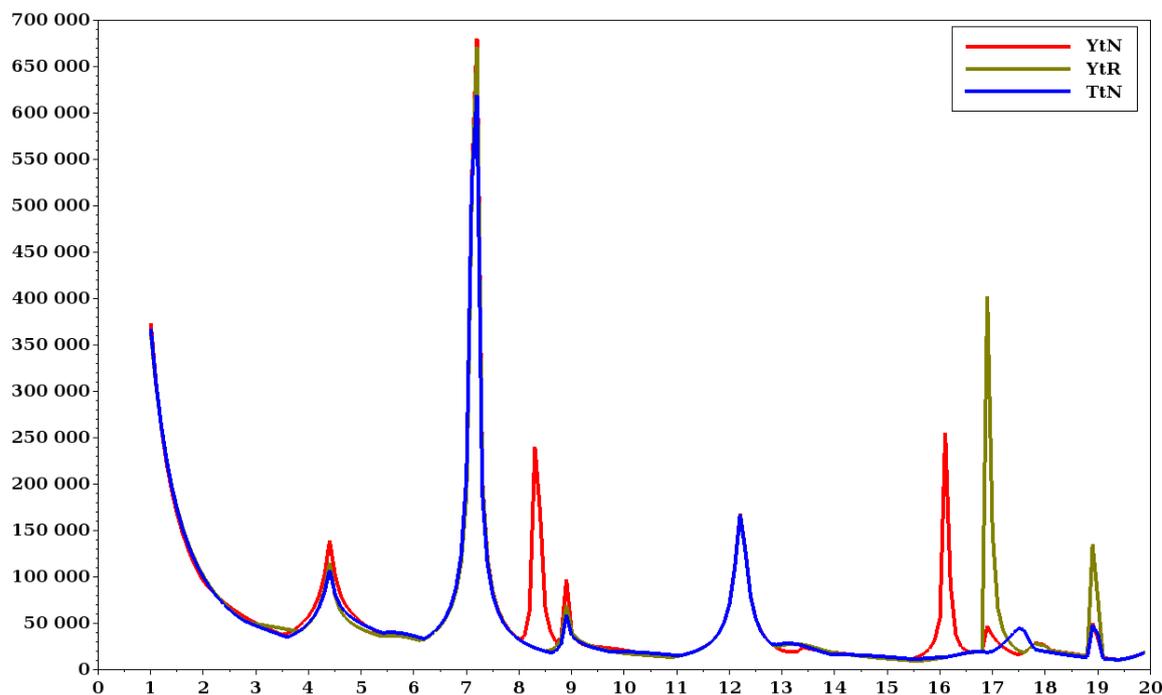


FIGURE 3.16 – Comparaison des conditionnements obtenus avec les 3 formulations  $YtN$ ,  $YtR$  et  $TtN$  en fonction de la fréquence  $\omega \in [1, 20]$ .

Afin d'illustrer ce point, nous avons calculé le conditionnement de la matrice issue de la discrétisation pour différentes fréquences en considérant :

- la formulation  $YtR$  avec le paramètre  $\gamma = 0$ , ce qui revient à une formulation du type *Y to Neumann* (notée  $YtN$ ),
- la formulation  $YtR$  avec le paramètre  $\gamma$  tel que  $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ ,
- et enfin la formulation  $TtR$  avec  $\gamma = 0$ , ce qui revient à une formulation du type *Transparent to Neumann* (notée  $TtN$ ).

Pour les tests, nous avons utilisé le matériau **Tit** (voir définition (3.24)) et la configuration géométrique de la Figure 3.10. Nous avons représenté sur la Figure 3.16 les conditionnements des matrices obtenus avec les 3 formulations :  $YtN$ ,  $YtR$  et  $TtN$ .

On observe que les conditionnements correspondant aux formulations  $YtN$  et  $YtR$  possèdent des pics supplémentaires par rapport au conditionnement correspond à la formulation  $TtN$ . Pour la formulation  $YtN$ , ces pics supplémentaires correspondent à des fréquences de boîte. Pour la formulation  $YtR$ , ils apparaissent pour les plus hautes fréquences. Comme nous l'avons expliqué, le paramètre  $\gamma$  complexe déplace les fréquences de boîte dans le plan complexe. Cependant, ces dernières peuvent être proche de l'axe réel et, par conséquent, pour  $\omega$  proche de ces fréquences, le conditionnement est grand. Ceci pose le problème du choix du paramètre  $\gamma$  dans la formulation  $YtR$ . Si  $\gamma$  est trop petit, les fréquences de boîte restent proches de l'axe réel, mais si  $\gamma$  est trop grand, elles se rapprochent à nouveau. Par ailleurs, on peut voir que la formulation  $TtN$

élimine les effets de la boîte  $B_l^+$ , les pics observés dans ce cas correspondent à des fréquences de coupures.

### Comparaison pour la résolution itérative via GMRES

Dans cette section, nous allons utiliser les méthodes de Schwarz décrites dans la section précédente comme préconditionneur pour GMRES (voir 1.3.4). Le but va être d'étudier de comparer les deux approches  $YtR$  et  $TtR$ , et de voir l'influence du paramètre  $l$  sur la vitesse de convergence de GMRES.

Pour simplifier, nous avons considéré comme cas test le problème de demi-guide (3.53). Sur la Figure 3.17, nous avons tracé l'évolution de l'erreur de résidu en fonction du nombre d'itérations de GMRES. Ces résultats ont été obtenus en considérant le matériau orthotrope **Tit** et la fréquence  $\omega = 10$ .

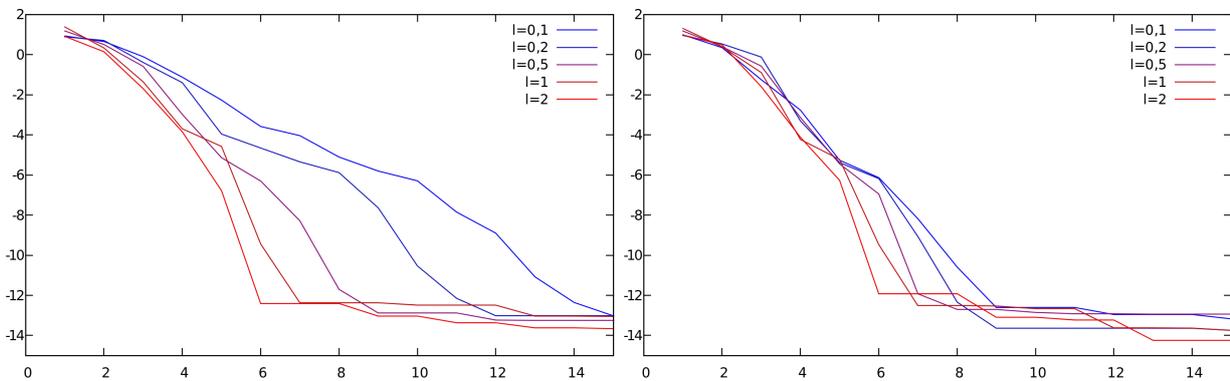


FIGURE 3.17 – Évolution de l'erreur de résidu (en  $\log_{10}$ ) en fonction de l'itération de GMRES pour différentes tailles de recouvrement  $l$ . À gauche, ce sont les résultats obtenus avec la formulation  $YtR$ , et à droite avec la formulation  $TtR$ .

Après un certain nombre d'itérations, on peut voir que l'erreur atteint un palier égale à l'erreur numérique (environ  $10^{-14}$ ). De plus, on observe sur ces résultats que :

- pour la formulation  $YtR$ , augmenter la taille  $l$  du recouvrement améliore la vitesse de convergence,
- pour la formulation  $TtR$ , l'influence de  $l$  est moins significative.

On observe également que pour  $l$  petit la formulation  $TtR$  a un taux de convergence meilleur que la formulation  $YtR$ . Cette approche  $TtR$  nous permet donc de tirer parti du recouvrement, aussi petit soit-il.

### 3.6.3 Avantages de la formulation $TtR$ par rapport aux méthodes de type couche absorbante

Nous avons souhaité comparer l'approche  $TtR$  avec d'autres méthodes numériques, et notamment la méthode des PML. Rappelons que la technique des PML fonctionne (très bien !) dans les cas où nous n'avons pas de modes inverses (voir [18, 31]). En présence d'ondes inverses, on peut utiliser des couches visco-élastiques pour borner le domaine de calcul (voir [23]). Ces couches dissipatives ont pour rôle d'absorber les ondes sortantes. Évidemment, le changement de milieu induit des réflexions parasites qu'on cherche à minimiser en utilisant un milieu lentement variable. Par conséquent, la taille de ces couches peut être très

grande. Notons que dans notre implémentation, la dissipation dans les couches a été modélisée par une fréquence complexe  $\omega_\epsilon^2 = \omega^2 + i\epsilon$  où  $\epsilon > 0$  est une fonction croissante lentement variable.

L'un des avantages des méthodes de type couche absorbante est qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser des conditions transparentes non locales pour borner le domaine de calcul. Ainsi, ces techniques nécessitent uniquement l'inversion d'une matrice éléments finis creuse, ce qui est peu coûteux.

Pour simplifier, nous avons considéré le problème modèle de demi-guide suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in (H_{\text{loc}}^1(\Omega))^2 \text{ sortante telle que} \\ \left. \begin{array}{ll} \mathbf{div}\sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Sigma_0, \\ \sigma(\mathbf{u}) \nu = \mathcal{T}_k & \text{sur } \Sigma_0, \end{array} \right\} \end{cases} \quad (3.53)$$

où  $\mathcal{T}_k$  est le champ transverse de la contrainte normale d'un mode  $k$  choisi. Le domaine  $\Omega$  est défini par (voir Figure 3.10) :

$$\Omega = [0, +\infty[ \times [-h, h] \setminus \mathcal{O}, \quad \text{et} \quad \Sigma_0 = \{x = 0\} \times [-h, h],$$

où  $\mathcal{O}$  est un obstacle carré situé à l'intérieur du demi-guide. En considérant les paramètres :

$$\omega = 10, \quad a = 0.8, \quad k = 0 \quad \text{et} \quad b = 1,$$

nous avons représenté sur les Figures 3.18 et 3.19 le module du champ de déplacement  $|\text{Re}(\mathbf{u})|$  solution de (3.53) pour les matériaux **Sil** et **Mat** (voir définition (3.24)). Pour le matériau **Mat**, le choix du mode  $k = 0$  correspond au mode inverse.

Dans le cas où il n'y a pas d'ondes inverses, Figure 3.18, on peut observer que les trois résultats concordent et donnent (visuellement) la même solution. Il est important de souligner que pour obtenir ces résultats, on a dû considérer une couche visco-élastique de taille trois fois plus grande que le domaine  $\Omega_b$ . Pour les PML, on a pris une couche PML de taille égale à la moitié de celle du domaine  $\Omega_b$  (on aurait même pu prendre une couche plus petite).

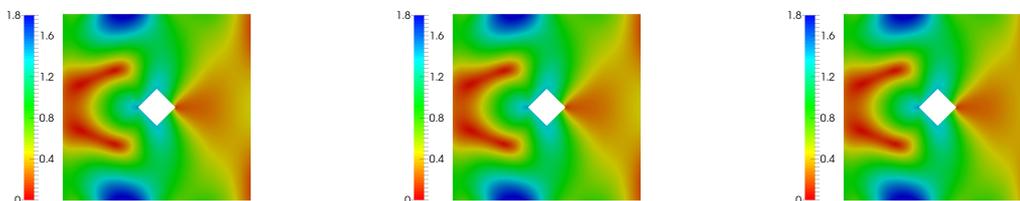


FIGURE 3.18 – Module  $|\text{Re}(\mathbf{u})|$  du champ de déplacement pour le matériau **Sil** obtenu par nos trois méthodes : à gauche les couches visco-élastiques, au centre les frontières transparentes, et à droite les PML.

En présence d'ondes inverses, Figure 3.19, on observe que la technique des PML conduit à une solution fautive. Soulignons que même si on essaie d'étendre la couche PML, le résultat converge vers ce résultat fautive.

En revanche, le résultat obtenu avec la méthode des couches visco-élastiques, bien qu'imparfait,

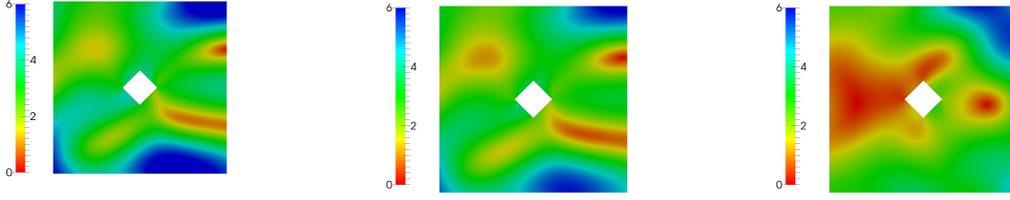


FIGURE 3.19 – Module  $|\text{Re}(\mathbf{u})|$  du champ de déplacement pour le matériau **Mat** obtenu par nos trois méthodes : à gauche les couches visco-élastiques, au centre les frontières transparentes, et à droite les PML .

se rapproche du résultat obtenu avec les conditions transparentes. Par ailleurs, il est important de souligner que pour obtenir cette simulation, il a fallu prendre une couche 15 fois plus grande que  $\Omega_b$ . La taille gigantesque de la couche est due au fait que nous devons imposer une variation du milieu beaucoup plus douce que pour le matériau précédent.

En conclusion, nous venons de voir qu'en présence de modes inverses, aucune des deux méthodes de type couche absorbante n'est satisfaisante. Ceci justifie l'intérêt de méthodes "exactes" comme celles que nous avons présentées.

### 3.7 Annexe : caractères bien posé et consistant de l'algorithme *YtX* et *TtX* itératif

Dans cette Annexe, nous allons montrer les caractères **bien posé** et **consistant** (voir définition 3.5.1) des algorithmes *YtX* et *TtX* itératif. Pour simplifier, nous nous sommes placés dans le cas d'un demi-guide.

#### 3.7.1 L'algorithme *YtX* itératif

On considère le processus itératif suivant :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } \mathbf{u}_{(n)}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que} \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_{(n)}^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b) \nu = 0 & \text{sur } [0, b] \times \partial S, \\ \mathbf{X}_{(n)}^b = 0 & \text{sur } \Sigma_a^0, \\ \mathbf{X}_{(n)}^b = \mathbf{X}_{(n)}^+ & \text{sur } \Sigma_b^+, \end{array} \right. \quad (3.54) \\
 & \text{et trouver } \mathbf{u}_{(n)}^+ \in (H_{\text{loc}}^1(\Omega_a^+))^d \text{ sortante telle que} \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^+) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_{(n)}^+ = 0 & \text{dans } \Omega_a^+, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^+) \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_a^+ \cap \partial\Omega \\ \mathbf{Y}_{(n)}^+ = \mathbf{Y}_{(n-1)}^+ & \text{sur } \Sigma_a^+. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

**Remarque 3.7.1** *On peut noter que, grâce à l'aspect itératif, la condition de transmission  $\mathbf{X}_{(n)}^b = \mathbf{X}_{(n)}^+$  sur  $\Sigma_b^\pm$  est variationnelle. En effet, elle revient simplement à imposer une partie*

de la contrainte et du déplacement (voir les notations dans la section 3.1.2) :

$$\mathbf{X}_{(n)}^b = \mathbf{X}_{(n-1)}^+ \Leftrightarrow \left[ \sigma_s(\mathbf{u}_{(n)}^b) \nu \quad (\mathbf{u}_{(n)}^b)_x \right]^t = \left[ \sigma_s(\mathbf{u}_{(n)}^+) \nu \quad (\mathbf{u}_{(n)}^+)_x \right]^t.$$

**Le caractère bien posé :** Nous savons que le problème dans le demi-guide  $\Omega_a^+$  est bien posé car on peut obtenir la décomposition modale de  $\mathbf{u}_{(n)}^+$  connaissant  $\mathbf{Y}_{(n)}^+|_{\Sigma_a^+}$  grâce aux relations de Fraser 3.2.9. Pour le problème dans  $\Omega_b$ , nous avons le lemme suivant :

**Lemme 3.7.2** *Le problème homogène :*

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^b = 0 & \text{dans } \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}^b) \nu = 0 & \text{sur } [0, b] \times \partial S, \\ \mathbf{X}^b = 0 & \text{sur } \Sigma_b^\pm, \end{array} \right. \end{array} \quad (3.55)$$

admet un ensemble dénombrable de fréquences propres.

La preuve de ce lemme est basée sur des arguments de théorie spectrale. On en déduit que si  $\omega$  n'est pas une fréquence propre du problème (3.55), alors le sous-problème dans  $\Omega_b$  est bien posé et donc :

**Proposition 3.7.3** *Si  $\omega$  n'est pas une fréquence propre de (3.55), l'algorithme (3.54) est bien posé.*

**La consistance :** Pour montrer la **consistance**, il faut prouver qu'en cas de convergence, les limites  $\mathbf{u}^b$  et  $\mathbf{u}^+$  du processus itératif (3.54) sont compatibles dans  $B_l^+$ , c'est à dire  $\mathbf{u}^b = \mathbf{u}^+$ . Posons la différence  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^b - \mathbf{u}^+$ . Étant données les équations vérifiées par  $\mathbf{u}^b$  et  $\mathbf{u}^+$ ,  $\mathbf{v}$  est vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{v}) + \rho \omega^2 \mathbf{v} = 0 & \text{dans } B_l^+, \\ \sigma(\mathbf{v}) \nu = 0 & \text{sur } [a, b] \times \partial S, \\ \mathbf{X}(\mathbf{v}) = 0 & \text{sur } \Sigma_b^+, \\ \mathbf{Y}(\mathbf{v}) = 0 & \text{sur } \Sigma_a^+. \end{array} \right. \quad (3.56)$$

où on note  $\mathbf{X}(\mathbf{v}) = [\sigma_s(\mathbf{v}) \nu \quad v_x]^t$  et  $\mathbf{Y}(\mathbf{v}) = [v_s \quad \sigma_{xx}(\mathbf{v}) \nu]^t$ .

**Lemme 3.7.4** *Le problème (3.56) admet une suite de fréquences propres tendant vers l'infini caractérisées par :  $\omega$  est une fréquence propre s'il existe  $k_0$  tel que*

$$\beta_{k_0} l \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{(\pi)}, \quad (3.57)$$

et le mode propre associé est de la forme :

$$e^{i\beta_{k_0}(x-a)} \mathcal{U}_{k_0}^+(\mathbf{x}_s) - e^{-i\beta_{k_0}(x-a)} \mathcal{U}_{k_0}^-(\mathbf{x}_s)$$

**Preuve :** La géométrie de  $B_l^+$  étant séparable, nous pouvons décomposer  $\mathbf{v}$  sur les modes comme suit :

$$\mathbf{X}(\mathbf{v}) = \sum_{k \geq 0} A_k^+ e^{i\beta_k(x-a)} \mathcal{X}_k - A_k^- e^{i\beta_k(x-a)} \mathcal{X}_k,$$

On rappelle que les champs transverses des modes vérifient  $\mathcal{X}_k^+ = \mathcal{X}_k$  et  $\mathcal{X}_k^- = -\mathcal{X}_k$ , voir section 3.2. En utilisant la condition  $\mathbf{X}^b = 0$  sur  $\Sigma_a$  et les relations de Fraser 3.2.9, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k^- = -A_k^+, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{X}(\mathbf{v}) = \sum_{k \geq 0} A_k^+ (e^{i\beta_k(x-a)} + e^{i\beta_k(x-a)}) \mathcal{X}_k.$$

De même, en utilisant la condition  $\mathbf{X}(\mathbf{v}) = 0$  sur  $\Sigma_b$  et les relations de Fraser, on déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k^+ (e^{i\beta_k l} - e^{i\beta_k l}) = 0.$$

Par conséquent,  $\omega$  est une fréquence propre s'il existe  $k_0$  tel que (3.57) soit vérifié. Dans ce cas, nous avons  $A_{k_0}^+$  non nul et  $A_k^+ = 0$  pour tout  $k \neq k_0$ . ■

On en déduit que si  $\omega$  n'est pas une fréquence propre du problème (3.56) posé dans  $B_l^+$  (i.e.  $\omega$  n'est pas une fréquence de boîte), alors la compatibilité  $\mathbf{u}^b = \mathbf{u}^+$  est assurée.

**Proposition 3.7.5** *Si  $\omega$  ne vérifie pas (3.57), alors l'algorithme itératif (3.54) est **consistant**.*

Par ailleurs, rappelons que pour ces fréquences de boîte, l'algorithme n'est pas consistant. La démonstration de ce résultat repose sur les mêmes arguments que ceux de la proposition 1.2.6 vue au premier chapitre.

En résumé, l'algorithme *YtX* itératif :

- est **bien posé** sauf pour les fréquences propres du problème (3.55),
- et est **consistant** sauf pour les fréquences de boîte (3.57).

### 3.7.2 L'algorithme *TtX* itératif

On considère le processus itératif suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}_{(n)}^b \in (H^1(\Omega_b))^d \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_{(n)}^b = f & \text{dans} \quad \Omega_b, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^b) \nu = 0 & \text{sur} \quad [0, b] \times \partial S, \\ \mathbf{X}_{(n)}^b = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_a^0, \\ \mathbf{X}_{(n)}^b = \mathbf{X}_{(n)}^+ & \text{sur} \quad \Sigma_b^+, \end{array} \right. \quad (3.58) \\ & \text{et trouver } \mathbf{u}_{(n)}^+ \in (H_{\text{loc}}^1(\Omega_a^+))^d \text{ sortante telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^+) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_{(n)}^+ = 0 & \text{dans} \quad \Omega_a^+, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^+) \nu = 0 & \text{sur} \quad \partial \Omega_a^+ \cap \partial \Omega \\ A_k^+(\mathbf{u}_{(n)}^+) = A_k^+(\mathbf{u}_{(n-1)}^b) & \text{sur} \quad \Sigma_a^+ \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Le caractère bien posé :** La résolution dans le demi-guide  $\Omega_a^+$  est immédiate par la condition de transmission choisie sur  $\Sigma_a^+$  (on se donne les coefficients de la décomposition modale de la solution sortante). Pour le sous-problème dans  $\Omega_b$ , c'est identique au cas précédent *YtX*, voir la proposition 3.7.3.

**La consistance :** Dans ce cas, nous avons vu (voir la formule 3.38) qu'en utilisant les décompositions modales de  $\mathbf{u}^b$  et  $\mathbf{u}^+$  dans  $B_l^+$ , et la condition sur  $\Sigma_a^+$ , on peut décomposer  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^b - \mathbf{u}^+$  comme suit :

$$\mathbf{v} = \sum_{k \geq 0} A_k^-(\mathbf{u}^b) e^{i\beta_k(x-a)} \mathcal{U}_k^-(\mathbf{x}_s).$$

Nous savons de plus que  $\mathbf{X}(\mathbf{v}) = 0$  sur  $\Sigma_b^+$ . Par conséquent, il vient en utilisant les relations de Fraser 3.2.9 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{\Sigma_b^+} \mathbf{X}(\mathbf{v}) \mathcal{Y}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_k^-(\mathbf{u}^b) e^{i\beta_k l} = 0.$$

On en déduit que pour tout  $k$ ,  $A_k^-(\mathbf{u}^b) = 0$  et donc  $\mathbf{v} = 0$ .

**Proposition 3.7.6** *L'algorithme itératif (3.58) est **consistant**.*

En résumé, l'algorithme  $TtX$  itératif :

- est **bien posé** sauf pour les fréquences propres du problème (3.55),
- et est **consistant** pour toutes les fréquences.



---

---

**DEUXIÈME PARTIE**

**FORMULATIONS MULTI-DOMAINES  
POUR LA DIFFRACTION EN MILIEU  
INFINI**

---

---



# PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE

---

## Sommaire

---

<b>4.1 Introduction et notations</b> . . . . .	<b>110</b>
4.1.1 Problème modèle en acoustique et approches classiques . . . . .	110
4.1.2 Quelques notations . . . . .	112
<b>4.2 Décomposition du domaine en 4 demi-plans et un domaine borné</b> . . . . .	<b>113</b>
4.2.1 Description générale . . . . .	113
4.2.2 Calcul analytique de la solution dans les demi-plans . . . . .	116
4.2.3 Reformulation du problème en variables $p^a$ et $\varphi^j$ . . . . .	118
<b>4.3 Aspects numériques</b> . . . . .	<b>123</b>
4.3.1 Formulation variationnelle . . . . .	123
4.3.2 Discrétisation de la formulation variationnelle . . . . .	124
4.3.3 Validation quantitative dans le cas isotrope . . . . .	126
4.3.4 Validation qualitative dans le cas général . . . . .	135
<b>4.4 Le cas non dissipatif</b> . . . . .	<b>137</b>
4.4.1 Difficultés théoriques . . . . .	137
4.4.2 Validations numériques . . . . .	141

---

Nous allons étudier dans ce chapitre le problème de diffraction dans un milieu acoustique, isotrope ou anisotrope, infini. Le but sera de donner une reformulation multi-domaines du problème de diffraction qui nous permettra de faire une résolution numérique. La difficulté par rapport à la première partie est qu'ici le domaine considéré est infini dans toutes les directions.

Après avoir présenté le problème modèle, nous expliquerons comment le reformuler de manière adaptée au calcul numérique. Nous montrerons que cette reformulation est bien équivalente au problème initial, puis nous détaillerons comment la discrétiser. Enfin, nous présenterons différents résultats numériques de validation.

*Dans la suite de ce chapitre, nous allons travailler en dimension 2. Cependant, la méthode s'applique également pour un milieu infini 3D.*

## 4.1 Introduction et notations

### 4.1.1 Problème modèle en acoustique et approches classiques

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la résolution numérique des équations du type Helmholtz anisotrope :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla p) + \omega^2 p = f & \text{dans } \Omega, \\ A\nabla p \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où l'on rappelle que  $\nu$  désigne la normale extérieure et  $p$  le champ de pression. Le domaine  $\Omega$  est défini par

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O},$$

où  $\mathcal{O}$  est un ensemble d'obstacles bornés. Afin d'étudier ce problème (4.1), nous allons faire les hypothèses suivantes :

- le terme source  $f$  est à support compact,
- et la matrice  $A$  modélisant l'anisotropie est symétrique définie positive, et est constante à l'extérieur d'un domaine borné. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} c_1, c_2 > 0, \\ c_1 c_2 - (c_3)^2 > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

**Remarque 4.1.1** *Bien évidemment, on peut étudier la situation où l'ensemble d'obstacles  $\mathcal{O}$  est réduit à l'ensemble vide, ce qui correspond au rayonnement de  $f$  dans l'espace libre  $\mathbb{R}^2$ .*

La méthode que nous souhaitons mettre en place devra à la fois

1. être adaptée au calcul numérique,
2. et s'étendre au cas de l'élasticité anisotrope.

Ce deuxième point exclut l'utilisation des méthodes classiques que nous allons rappeler ici.

Afin de définir un problème bien posé, il est nécessaire de compléter les équations (4.1) avec une condition définissant le comportement à l'infini de la solution. Dans le *cas isotrope* (c'est à dire  $A = Id$ ), on impose classiquement la *condition de Sommerfeld* [86] qui nous assure à la fois l'unicité de la solution et son caractère *sortant*.

Dans le *cas anisotrope*, une manière simple d'adapter la *condition de Sommerfeld* est d'utiliser un changement de coordonnées nous ramenant au cas isotrope. En effet, comme nous l'avons déjà vu au chapitre 2, voir section 2.2.1, changer le système de coordonnées est équivalent à changer l'anisotropie du milieu. Ainsi, en se ramenant au cas isotrope, on peut réécrire la *condition de Sommerfeld* dans le nouveau système de coordonnées. Cette idée est détaillée par exemple dans le cours [11].

Bien que l'idée du changement de coordonnées soit naturelle pour simplifier le problème (4.1) (en se ramenant au cas isotrope), nous n'allons pas l'exploiter ici car, comme nous l'avons précisé, on souhaite développer une méthode pouvant s'étendre au cas de l'élasticité.

Étant donnée une condition de radiation à l'infini, le problème (4.1) est bien posé. Afin de le résoudre numériquement, il est nécessaire de borner le domaine de calcul. Pour ce faire,

il existe dans la littérature plusieurs approches pour le cas isotrope que nous allons rappeler brièvement.

Citons tout d'abord la méthode des couches parfaitement adaptées [16] que nous avons déjà évoquée dans la première partie. Cette technique consiste à entourer le domaine d'intérêt (contenant les hétérogénéités) d'une couche absorbant les ondes sortantes sans créer de réflexions parasites.

Une seconde approche classique est l'utilisation d'une condition transparente définie sur une frontière artificielle entourant la zone d'intérêt, voir [47]. Pour un milieu isotrope, on sait exprimer la solution dans le domaine extérieur à un cercle sous la forme d'une série de fonctions de Bessel. À partir de cette représentation analytique de la solution, on peut définir un opérateur *Dirichlet to Neumann* permettant d'écrire la condition transparente sur le cercle.

L'extension au cas anisotrope **acoustique** de ces deux méthodes est possible en exploitant l'idée du changement de coordonnées nous ramenant au cas isotrope. La méthode des PML par exemple n'est pas applicable en présence d'ondes inverses (voir [12]). Cependant, dans le cas **acoustique**, un "remède" a été proposé dans [32, 34] à l'aide de couches spéciales exploitant un prolongement analytique de la solution adapté à l'anisotropie du milieu. Hélas, cette idée ne s'étend pas au cas élastique.

Pour la technique des conditions transparentes, il est nécessaire de pouvoir résoudre analytiquement le problème dans le domaine extérieur. L'idée est alors de considérer comme domaine extérieur le complémentaire (dans l'espace complet) d'une ellipse entourant les hétérogénéités. La forme de l'ellipse doit être choisie de sorte qu'après un changement de coordonnées nous ramenant au cas isotrope, le problème extérieur consiste à résoudre l'équation d'Helmholtz classique dans le complémentaire d'un cercle (qu'on sait résoudre analytiquement). Notons que l'utilisation d'un opérateur  $DtN$  sur une ellipse pour l'équation d'Helmholtz est décrite dans l'article [10]. Cependant, cette idée ne peut pas non plus s'étendre au cas de l'élasticité.

Mentionnons également la méthode de couplage entre équation intégrale et éléments finis (voir [30]). Le désavantage de cette approche est qu'elle nécessite le calcul numérique de la fonction de Green, qui est complexe et coûteux dans le cas de l'élasticité (voir [1]).

Citons enfin la méthode des couches absorbantes *SMART* [66, 22]. Cette méthode présente l'avantage de s'appliquer pour des milieux anisotropes arbitraires (y compris en élasticité). Cependant, les couches utilisées ne sont pas parfaitement adaptées et doivent donc être suffisamment larges et progressives pour minimiser la réflexion à l'interface entre le domaine d'intérêt et la couche.

Au vu de ces difficultés, nous avons souhaité développer une nouvelle approche. Afin de présenter cette méthode dans un cadre théorique simple, nous allons faire l'hypothèse que notre milieu est **dissipatif**. Nous détaillerons à la fin de ce chapitre les difficultés théoriques du cas non-dissipatif, et nous présenterons les questions restées ouvertes. La dissipation du milieu sera modélisée par une pulsation  $\omega_\epsilon$  complexe définie par :

$$\omega_\epsilon^2 = \omega^2 + i\epsilon, \quad \text{où } \epsilon > 0.$$

Finalement, le problème modèle que nous allons chercher à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ & \left| \begin{array}{l} \operatorname{div}(A\nabla p) + \omega_\epsilon^2 p = f \quad \text{dans } \Omega, \\ A\nabla p \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour alléger les notations, la dépendance de la solution  $p$  vis à vis de la dissipation  $\epsilon$  n'est pas précisée. On peut écrire ce problème sous forme variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } \tilde{p} \in H^1(\Omega) \\ & \left| a(p, \tilde{p}) = L(\tilde{p}), \right. \end{aligned} \quad (4.4)$$

où la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  et la forme linéaire  $L(\cdot)$  sont définies par

$$a(p, \tilde{p}) = \int_{\Omega} A\nabla p \cdot \nabla \tilde{p} - \omega_\epsilon^2 p \tilde{p}, \quad \text{et} \quad L(\tilde{p}) = \int_{\Omega} f \tilde{p}.$$

Grâce à la dissipation du milieu, nous pouvons montrer la

**Proposition 4.1.2** *Le problème (4.4) admet une unique solution.*

**Preuve :** Il suffit de montrer que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive pour appliquer le théorème de Lax-Milgram. Pour montrer ce résultat, l'idée est de factoriser  $\omega_\epsilon$  dans l'expression de la forme bilinéaire afin d'obtenir :

$$|a(p, p)| = |\omega_\epsilon| \left| \int_{\Omega} \frac{-\overline{\omega_\epsilon}}{|\omega_\epsilon|^2} A\nabla p \cdot \nabla \overline{p} + \omega_\epsilon |p|^2 \right| \geq |\omega_\epsilon| \operatorname{Im} \left( \int_{\Omega} \frac{-\overline{\omega_\epsilon}}{|\omega_\epsilon|^2} A\nabla p \cdot \nabla \overline{p} + \omega_\epsilon |p|^2 \right).$$

On en déduit :

$$|a(p, p)| \geq |\omega_\epsilon| \min \left( \frac{\epsilon}{|\omega_\epsilon|^2}, \epsilon \right) \int_{\Omega} A\nabla p \cdot \nabla \overline{p} + |p|^2.$$

Le terme à droite de l'inégalité correspond bien à une norme équivalente à la norme  $H^1(\Omega)$  car la matrice  $A$  est symétrique définie positive. ■

Remarquons que dans la preuve ci-dessus, la dissipation est indispensable et la constante de coercivité tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0.

### 4.1.2 Quelques notations

Pour la suite de ce chapitre (ainsi que pour les suivants), il est utile d'introduire quelques notations (résumées sur la Figure 4.1). Notons  $\Omega_a$  et son complémentaire  $\Omega_a^c$  dans  $\Omega$ , les domaines définis par :

$$\Omega_a = [-a, a]^2 \setminus \mathcal{O}, \quad \text{et} \quad \Omega_a^c = \mathbb{R}^2 \setminus [-a, a]^2,$$

où  $a$  est un réel strictement positif tel que  $\mathcal{O} \subset [-a, a]^2$  et  $\operatorname{supp}(f) \subset [-a, a]^2$ . Le carré  $\Omega_a$  (privé des obstacles  $\mathcal{O}$ ) correspond au *domaine intérieur* (zone perturbée contenant les hétérogénéités), et  $\Omega_a^c$  correspond au *domaine extérieur* qui est parfaitement homogène.

On va diviser le domaine  $\Omega_a^c$  en 4 demi-plans  $\Omega_a^j$  s'appuyant sur les 4 bords de  $\Omega_a$ . Afin de les définir simplement, introduisons les systèmes de coordonnées locales pour chaque côté  $j$  :

$$\begin{bmatrix} x^j \\ y^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad \theta_j = \frac{j\pi}{2}, \quad \text{pour} \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (4.5)$$

Passer d'un demi-plan à l'autre correspond simplement à faire une rotation d'angle  $\pi/2$ . Les demi-plans sont numérotés dans le sens trigonométrique en partant du coté droit qui est indicé par  $j = 0$ . On définit ainsi :

$$\Omega_a^j = \{x^j \geq a\} \times \{y^j \in \mathbb{R}\} \quad \text{pour } j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Les bords des demi-plans  $\Omega_a^j$  sont définis par les droites  $\Sigma_a^j$  :

$$\partial\Omega_a^j = \Sigma_a^j = \{x^j = a\} \times \{y^j \in \mathbb{R}\}, \quad \text{pour } j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Enfin, on divise de même la frontière du carré intérieur  $\Omega_a$  en quatre :

$$\Sigma_{aa}^j = \{x^j = a\} \times \{y^j \in [-a, a]\}, \quad \text{pour } j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

et on notera

$$\Sigma_{aa} = \bigcup_{j \in \{0, 1, 2, 3\}} \Sigma_{aa}^j.$$

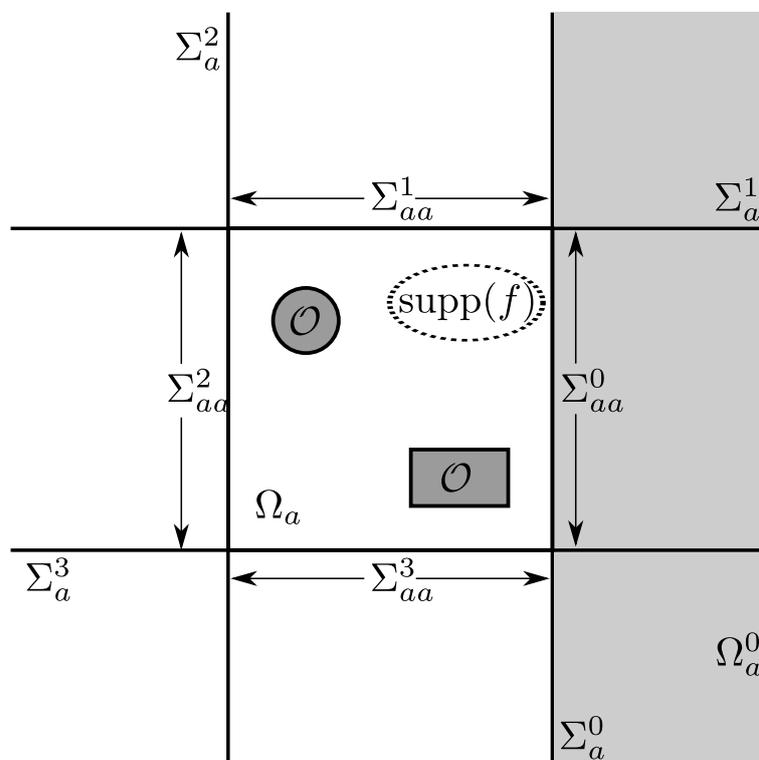


FIGURE 4.1 – Géométrie du domaine  $\Omega$  et notations. La partie en gris clair correspond au demi-plan  $\Omega_a^0$ .

## 4.2 Décomposition du domaine en 4 demi-plans et un domaine borné

### 4.2.1 Description générale

L'idée de la méthode est inspirée des travaux de S. Fliss et P. Joly pour les milieux périodiques [39, 40]. En s'appuyant sur la décomposition du domaine  $\Omega$  en 5 sous-domaines :

— les 4 demi-plans  $\Omega_a^j$ , dans lesquels on définit  $p^j = p|_{\Omega^j}$ ,  
 — et le domaine intérieur  $\Omega_a$ , dans lequel on définit  $p^a = p|_{\Omega_a}$ ,  
 on peut construire la formulation multi-domaines du problème initial (4.3). Par définition,  $p^a$  et  $p^j$  vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla p^a) + \omega_\varepsilon^2 p^a = f & \text{dans } \Omega_a, \\ A\nabla p^a \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\text{et } \begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla p^j) + \omega_\varepsilon^2 p^j = 0 & \text{dans } \Omega_a^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{cases}$$

De plus, on doit assurer la compatibilité de toutes les représentations de  $p$ . En effet, comme les demi-plans  $\Omega_a^j$  s'intersectent, nous avons deux représentations  $p^j$  et  $p^{j\pm 1}$  de la solution qui doivent coïncider dans chaque quart de plan  $\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$  (voir Figure 4.2) :

$$p^j = p^{j\pm 1} \quad \text{sur } \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Comme la solution  $p$  du problème initial est dans  $H^1(\Omega)$ , on doit également assurer un raccord en trace et en dérivée normale entre  $p^a$  et  $p^j$  sur les bords  $\Sigma_{aa}^j$  (voir Figure 4.2) :

$$p^j = p^a \quad \text{et} \quad A\nabla p^j \cdot \nu = A\nabla p^a \cdot \nu \quad \text{sur } \Sigma_{aa}^j, \quad \text{pour } j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (4.8)$$

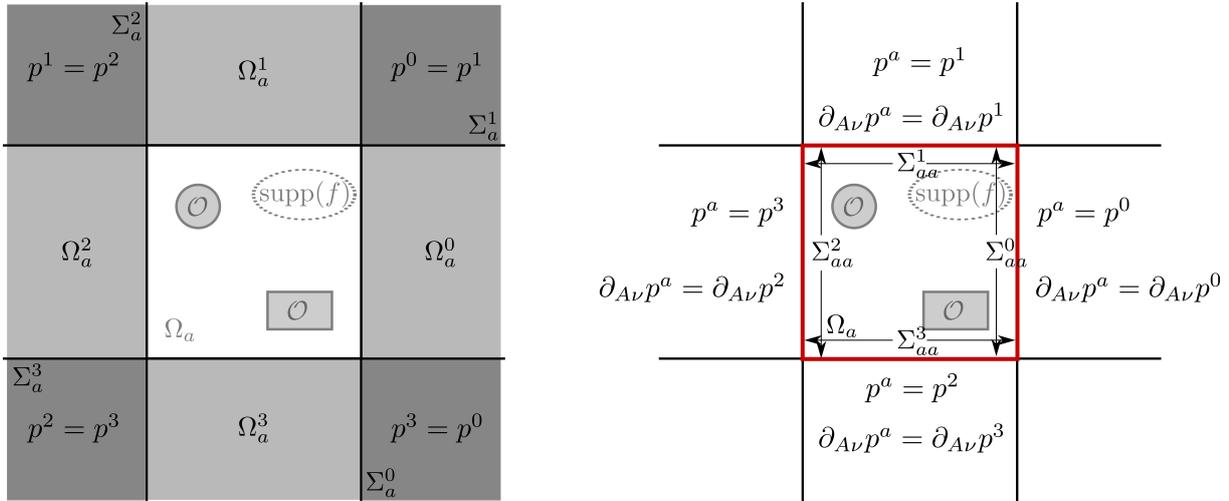


FIGURE 4.2 – Représentation schématique des relations de compatibilité : à gauche celles dans les quarts de plan (4.7) et à droite les relations (4.8) sur  $\Sigma_{aa}$  (en rouge). On a noté par  $\partial_{A\nu} = A\nabla(\cdot) \cdot \nu$ .

Pour la formulation multi-domaines, on doit choisir des conditions de transmission sur les bords  $\Sigma_a^j$  des sous-domaines  $\Omega_a^j$  qui assurent les relations de compatibilité (4.7) dans les quarts de plan. Nous proposons d'imposer la continuité des traces (voir Figure 4.3) :

$$p^j = p^{j\pm 1} \quad \text{sur } \partial(\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (4.9)$$

**Lemme 4.2.1** *Considérons  $p^0, p^1, p^2, p^3$  solutions des équations (4.6) dans les demi-plans. Les relations de compatibilité (4.7) et (4.9) sont équivalentes.*

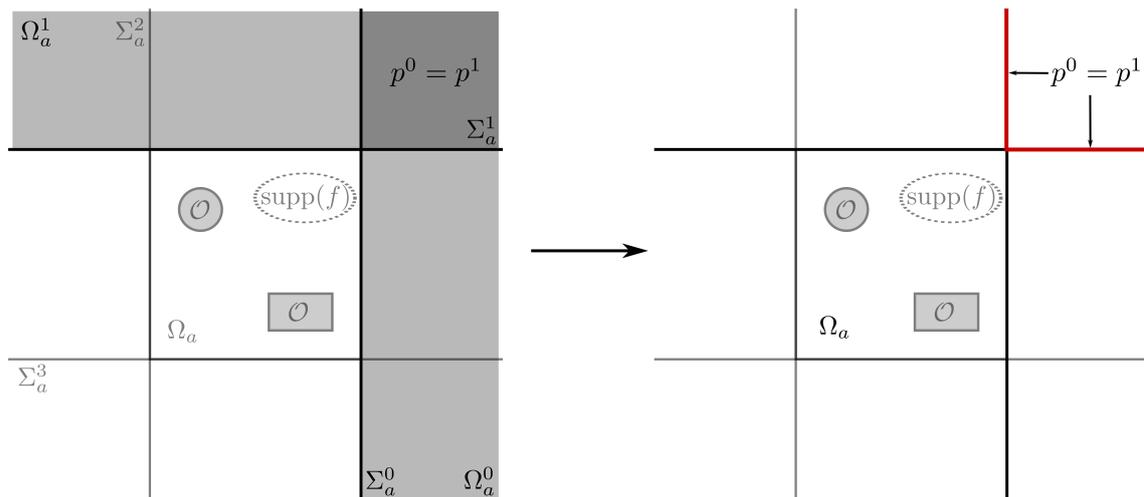


FIGURE 4.3 – Représentation schématique des relations de compatibilité (4.7) entre  $p^0$  et  $p^1$ . En rouge, on a représenté les demi-lignes sur lesquelles les conditions (4.9) sont imposées.

**Preuve :** On va prouver le résultat dans  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$ , les mêmes arguments s'appliquent dans les autres quarts de plan. Notons tout d'abord que si  $p^0$  et  $p^1$  vérifient la compatibilité (4.7) dans  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$ , alors ils vérifient en particulier les relations (4.9) sur le bord. Montrons la réciproque. Soit  $v$  la fonction de  $H^1(\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1)$  définie par :

$$v = p^0 - p^1.$$

Les fonctions  $p^0$  et  $p^1$  étant solutions de (4.6),  $v$  vérifie :

$$\operatorname{div}(A\nabla v) + \omega_\epsilon^2 v = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_a^0 \cap \Omega_a^1.$$

De plus, nous savons par les relations (4.9) que :

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial(\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1).$$

Or, l'unique solution  $H^1(\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1)$  du problème défini par les deux équations ci-dessus est  $v = 0$ . En effet, on montre, comme dans la preuve de la proposition 4.1.2, que, du fait de la dissipation, le problème relève du théorème de Lax-Milgram. On en déduit que  $p^0 = p^1$  dans tout le quart de plan. ■

Il est important de souligner que cette démonstration est possible car le milieu est dissipatif.

**Remarque 4.2.2** *Bien évidemment, d'autres choix de conditions de transmission sur les bords  $\partial(\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$  des quarts de plan sont possibles. Ils doivent simplement assurer la compatibilité des représentations dans les quarts de plan. Par exemple, on peut montrer que les conditions (4.7) sont équivalentes à imposer la compatibilité des dérivées normales :*

$$A\nabla p^j \cdot \nu = A\nabla p^{j\pm 1} \cdot \nu \quad \text{sur} \quad \partial(\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Ainsi, la formulation multi-domaines du problème de notre problème (4.3) est donnée par (4.6-4.8-4.9).

**Remarque 4.2.3** *Comme nous l'avons dit, la méthode que nous proposons est inspirée des travaux de S. Fliss et P. Joly sur les milieux périodiques. Dans leur cas, le réseau de périodicité du milieu impose une structuration des sous-domaines  $\Omega_a$  et  $\Omega_a^j$ . Dans notre cas, le milieu extérieur étant homogène, nous avons plus de liberté et nous verrons dans le chapitre 6 que nous pouvons étendre la méthode à des structurations des sous-domaines de  $\Omega$  plus variées.*

Maintenant, à partir de cette reformulation multi-domaines (4.6-4.8-4.9), le but sera d'éliminer les inconnues  $p^j$  et de les remplacer par leurs traces sur les droites  $\Sigma_a^j$ . Nous verrons dans la section 4.2.2 ci-après, qu'étant donnée la trace de  $p^j$  sur le bord  $\Sigma_a^j$  du demi-plan  $\Omega_a^j$ , on sait résoudre analytiquement les équations (4.6) dans  $\Omega_a^j$  en exploitant l'homogénéité du milieu et en utilisant la transformée de Fourier. On parlera de représentations analytiques de la solution.

**Remarque 4.2.4** *L'élimination des inconnues  $p^j$  correspond à l'élimination des inconnues  $p^-$  et  $p^+$  dans le premier chapitre. Ici, les  $p^j$  sont remplacés par leurs traces définies sur les droites infinies  $\Sigma_a^j$ . Dans le cas du guide, les inconnues  $p^-$  et  $p^+$  sont remplacées par leurs traces qui vivent sur les sections bornées du guide.*

## 4.2.2 Calcul analytique de la solution dans les demi-plans

Nous allons maintenant détailler le calcul analytique de la solution dans les demi-plans. Notons  $\varphi^j$  la trace de  $p$  sur  $\Sigma_a^j$  :

$$\varphi^j = p|_{\Sigma_a^j}, \quad \text{pour } j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (4.10)$$

Pour  $j$  fixé, si on connaît  $\varphi^j$ , on peut alors obtenir la solution  $p = p^j$  dans  $\Omega_a^j$ . En effet, quel que soit  $\psi^j \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$ , le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } P^j \in H^1(\Omega_a^j) \text{ tel que} \\ &\left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla P^j) + \omega_\varepsilon^2 P^j = 0 & \text{dans } \Omega_a^j, \\ P^j = \psi^j & \text{sur } \Sigma_a^j, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.11)$$

admet une unique solution qu'on notera  $P^j(\psi^j)$ . On prouve ce résultat par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration de la proposition 4.1.2. De plus, on sait par des arguments classiques sur la dépendance continue de la solution du problème (4.11) par rapport à la donnée que :

$$\forall \psi^j \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j), \quad \|P^j(\psi^j)\|_{H^1(\Omega_a^j)} \leq C^j \|\psi^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)}, \quad (4.12)$$

où  $C^j$  est une constante positive. Dans la suite de cette section, nous allons chercher à donner une formule explicite à  $P^j(\psi^j)$ . L'outil principal que nous allons utiliser est la transformée de Fourier dont nous rappelons la définition :

**Définition 4.2.1** *Pour une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on définit la transformée de Fourier  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$  de  $f$  par :*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-i\xi z} dz.$$

*Si  $\hat{f}$  est également dans  $L^1(\mathbb{R})$ , la transformée inverse est donnée par :*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi z} d\xi.$$

Rappelons qu'on peut étendre la définition de la transformée de Fourier au fonction  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on peut définir  $\hat{f}$  presque partout et  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ . De plus, la transformée de Fourier est un isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même et nous avons :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Afin de simplifier notre discours, les calculs seront présentés uniquement dans le demi-plan  $\Omega_a^0$ , l'extension aux autres demi-plans  $\Omega_a^j$  étant immédiate.

Soit  $\psi^0$  donnée. On veut expliciter  $P^0(\psi^0)$  solution de :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla P^0) + \omega_\epsilon^2 P^0 = 0 & \text{dans } \Omega_a^0, \\ P^0 = \psi^0 & \text{sur } \Sigma_a^0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Le milieu étant *homogène* dans  $\Omega_a^0$ , on peut appliquer la transformée de Fourier selon la variable  $y$  dans les équations (4.13), ce qui nous amène à résoudre l'équation différentielle ordinaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} c_1 \frac{\partial^2 \hat{P}^0(x, \xi)}{\partial x^2} + 2i\xi c_3 \frac{\partial \hat{P}^0(x, \xi)}{\partial x} + (\omega_\epsilon^2 - c_2 \xi^2) \hat{P}^0(x, \xi) = 0 & \text{sur } \{x > a\}, \\ \hat{P}^0(x, \xi) = \hat{\psi}^0(\xi) & \text{en } \{x = a\}, \end{cases} \quad (4.14)$$

où on rappelle que les  $c_i$  sont les coefficients de la matrice  $A$  (voir définition (4.2)). Le polynôme caractéristique de cette EDO possède deux racines :

$$\begin{aligned} r_+^0(\xi) &= \frac{-i\xi c_3 + i\sqrt{d(\xi)}}{c_1}, \quad \text{et } r_-^0(\xi) = \frac{-i\xi c_3 - i\sqrt{d(\xi)}}{c_1}, \\ \text{où } d(\xi) &= c_1 \left( \omega_\epsilon^2 - \left( \frac{c_1 c_2 - (c_3)^2}{c_1} \right) \xi^2 \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ci-dessus, on choisit la détermination de la racine carrée complexe qui conserve le signe de la partie imaginaire. La solution générale s'exprime donc sous la forme :

$$A(\xi) e^{r_+^0(\xi)x} + B(\xi) e^{r_-^0(\xi)x}.$$

La fonction  $P^0$  étant dans  $H^1(\Omega_a^0)$ , elle ne peut pas exploser quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $\hat{P}^0$  non plus. Il faut donc étudier le signe des parties réelles de  $r_\pm^0(\xi)$ . Nous avons :

$$\operatorname{Re}(r_-^0(\xi)) = \operatorname{Re} \left( \frac{-i\xi c_3 - i\sqrt{d(\xi)}}{c_1} \right) = \frac{1}{c_1} \operatorname{Im} \left( \sqrt{d(\xi)} \right).$$

Or  $d(\xi)$  est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive :

$$\operatorname{Im}(d(\xi)) = c_1 \epsilon > 0,$$

et donc  $\operatorname{Im}(\sqrt{d(\xi)}) > 0$ . On montre de plus facilement que  $\operatorname{Re}(r_+^0) = -\operatorname{Re}(r_-^0) < 0$ . Par conséquent, le terme  $e^{r_+^0(\xi)x}$  est exponentiellement décroissant avec  $x$  et le terme  $e^{r_-^0(\xi)x}$  est exponentiellement croissant. On en déduit que nécessairement

$$B(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, nous obtenons l'expression explicite de  $\hat{P}^0(\cdot, \xi)$  (en prenant en compte la condition en  $x = a$ ) :

$$\hat{P}^0(x, \xi) = e^{r_+^0(\xi)(x-a)} \hat{\psi}^0(\xi) \quad \text{où } r_+^0(\xi) = r_+^0(\xi), \quad \forall x \geq a.$$

Dans la suite, on notera simplement  $r^0(\xi)$  la racine  $r_+^0(\xi)$  à partie réelle négative. En appliquant la transformée inverse, on obtient alors sous forme intégrale la solution du problème (4.13) posé dans  $\Omega_a^0$ .

**Proposition 4.2.5** *Étant donnée  $\psi^j \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$ , la solution  $P^j$  du problème (4.11) s'exprime sous forme intégrale comme suit :*

$$P^j(\psi^j)(x^j, y^j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}^j(\xi) e^{r^j(\xi)(x^j-a)} e^{i\xi y^j} d\xi, \quad \forall (x^j, y^j) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}, \quad (4.16)$$

où les coordonnées  $(x^j, y^j)$  associées à chaque demi-plan ont été définies par (4.5), et les  $r^j$  sont définis par :

$$r^0(\xi) = r^2(\xi) = \frac{-i\xi c_3}{c_1} + i\sqrt{d_1(\xi)} \quad \text{où} \quad d_1(\xi) = \frac{\omega_\epsilon^2 c_1 - (c_1 c_2 - (c_3)^2) \xi^2}{(c_1)^2},$$

$$r^1(\xi) = r^3(\xi) = \frac{i\xi c_3}{c_2} + i\sqrt{d_2(\xi)} \quad \text{où} \quad d_2(\xi) = \frac{\omega_\epsilon^2 c_2 - (c_1 c_2 - (c_3)^2) \xi^2}{(c_2)^2}.$$

Grâce à l'expression (4.16), on peut noter que pour tout  $x^j > a$  la fonction  $P^j(\psi^j)$  est exponentiellement décroissante en  $x^j$ . De plus, on peut également voir qu'elle est infiniment dérivable pour tout  $x^j > a$ .

**Le cas d'un milieu isotrope :** Les expressions données dans la proposition 4.2.5 se simplifient dans le cas isotrope, c'est à dire pour  $A = Id$ . Les coefficients  $d_1(\xi)$  et  $d_2(\xi)$  sont alors égaux et nous avons :

$$d_1(\xi) = d_2(\xi) = \sqrt{\omega_\epsilon^2 - \xi^2}.$$

On en déduit que les racines vérifient :

$$r^0(\xi) = r^1(\xi) = r^2(\xi) = r^3(\xi) = i\sqrt{\omega_\epsilon^2 - \xi^2}. \quad (4.17)$$

Pour  $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^0)$ , nous obtenons finalement l'expression de  $P^0(\psi)$  suivante :

$$P^0(\psi)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{i\sqrt{\omega_\epsilon^2 - \xi^2}(x-a)} e^{i\xi y} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}(x-a)} e^{i\xi y} d\xi.$$

On peut faire une analogie entre la variable de Fourier  $\xi$  dans l'expression ci-dessus et l'indice  $k$  des décompositions modales de la solution dans un guide d'ondes (voir section 1.1.2 du premier chapitre). En particulier, si on considère (formellement) le cas sans dissipation  $\epsilon = 0$  :

- pour  $|\xi| < \omega$ , le terme  $e^{i\sqrt{\omega^2 - \xi^2}(x-a)} e^{i\xi y}$  est l'équivalent d'un mode propagatif, car il représente une onde qui se propage sans atténuation pour  $x > a$ ,
- pour  $|\xi| > \omega$ , le terme  $e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega^2}(x-a)} e^{i\xi y}$  est l'équivalent d'un mode évanescent, car il décroît exponentiellement vite pour  $x > a$ .

### 4.2.3 Reformulation du problème en variables $p^a$ et $\varphi^j$

Ayant vu comment exprimer  $p^j$  dans le demi-plan  $\Omega_a^j$  en fonction de sa trace sur  $\Sigma_a^j$ , nous allons éliminer les inconnues  $p^j$  et reformuler le problème (4.6-4.8-4.9) uniquement en variables  $p^a$  et  $\varphi^j = p|_{\Sigma_a^j} = p|_{\Sigma_a^j}$ . Nous savons par le lemme 4.2.1 que les relations de compatibilité (4.7) dans les quarts de plan  $\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$  sont équivalentes à imposer la compatibilité des traces :

$$p^j = p^{j\pm 1} \quad \text{sur} \quad \partial(\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}), \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

En variables  $\varphi^j$ , cela revient à écrire les 8 relations :

$$\varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j \quad \text{sur les demi-droites} \quad \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j, \quad \text{pour} \quad j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (4.18)$$

où les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  sont définis par

**Définition 4.2.2** On définit  $D_{j\pm 1}^j$  l'opérateur continu de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j)$ , qui à  $\psi^j$  associe :

$$D_{j\pm 1}^j \psi^j = P^j(\psi^j) \Big|_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j.$$

Ces opérateurs sont continus car  $P^j(\psi^j)$  dépend continûment de  $\psi^j$  (voir (4.12)) et l'application trace est continue. De plus, les  $D_{j\pm 1}^j$  ont une forme intégrale et nous avons leur expression explicite. Par exemple,  $D_1^0$  est donné par la formule suivante :

$$D_1^0(\varphi^0)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{r^0(\xi)(x-a)} \widehat{\varphi}^0(\xi) e^{i\xi a} d\xi.$$

**Remarque 4.2.6** Expliquons un peu notre choix de notation pour les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$ . L'indice supérieur indique le demi-plan  $\Omega_a^j$  dans lequel on calcule  $P^j(\psi^j)$ , et l'indice inférieur, la droite  $\Sigma_a^{j\pm 1}$  sur laquelle on prend la trace.

En plus de la compatibilité des  $p^j$  entre eux dans les quarts de plan, on doit assurer que les  $p^j$  se raccordent avec  $p^a$  en trace et en dérivée normale sur les bords  $\Sigma_{aa}^j$  du domaine intérieur, voir les équations (4.8). La compatibilité des traces se réécrit simplement avec les variables  $\varphi^j$  :

$$p^a = \varphi^j \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

La fonction  $p^a$  étant dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$  et  $\varphi^j$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j)$ , on peut définir leurs restrictions à  $\Sigma_{aa}^j$ . Pour le raccord en dérivée normale, c'est moins évident.

**Définition 4.2.3** On définit  $\Lambda^j$  l'opérateur continu de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$ , qui à  $\psi^j$  associe la dérivée normale de  $P^j(\psi^j)$  sur  $\Sigma_a^j$  :

$$\Lambda^j \psi^j = A \nabla P^j(\psi^j) \cdot e_j \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j \quad \text{pour} \quad j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

où  $e_j$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\Sigma_a^j$ .

Comme pour les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$ , les  $\Lambda^j$  sont continus car  $P^j$  dépend de manière continue de la donnée. Remarquons également que les  $\Lambda^j$  ont une forme intégrale explicite. Par exemple, nous avons :

$$\Lambda^0(\varphi^0)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (c_1 r^0(\xi) + c_3 i \xi) \widehat{\varphi}^0(\xi) e^{i\xi y} d\xi.$$

Notons que dans le cas isotrope (voir la formule des racines (4.17)), l'expression de  $\Lambda^0(\varphi^0)$  se simplifie ainsi :

$$\Lambda^0(\varphi^0)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} i \sqrt{\omega_c^2 - \xi^2} \widehat{\varphi}^0(\xi) e^{i\xi y} d\xi.$$

**Remarque 4.2.7** On peut de nouveau faire une analogie avec les guides d'ondes. En effet, l'expression ci-dessus est similaire à celle de l'opérateur  $DtN$  du premier chapitre (voir définition 1.1.2) :

$$T_{D \rightarrow N}^+(g) = \sum_{k \geq 0} i \beta_k(g, \varphi_k) \varphi_k \quad \text{où} \quad \beta_k = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k\pi}{2h}\right)^2},$$

où l'intégrale dans  $\Lambda^0$  est remplacée par la somme,  $\xi$  par  $k\pi/2h$ , et  $e^{i\xi y}$  par la fonction  $\varphi_k(y)$ .

Avec les opérateurs  $\Lambda^j$ , on aimerait écrire les raccords en dérivées normales sur  $\Sigma_{aa}^j$  comme suit :

$$\Lambda^j \varphi^j = A \nabla p^a \cdot \nu \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (4.19)$$

Seulement,  $\Lambda^j \varphi^j$  est définie dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$ , et on ne peut pas définir sa restriction dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j)$ . Remarquons que nous avons le même problème avec la dérivée normale  $A \nabla p^a \cdot \nu$  sur  $\Sigma_{aa}$ .

En revanche, on sait définir la restriction de  $\Lambda^j \varphi^j$  et  $A \nabla p^a \cdot \nu$  dans le dual de  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j)$ . On peut alors interpréter le raccord (4.19) dans  $\left[ H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j) \right]'$  :

$$\langle A \nabla p \cdot \nu, \tilde{p} \rangle_{\Sigma_{aa}^j} = \langle \Lambda^j \varphi^j, \tilde{p} \rangle_{\Sigma_{aa}^j}, \quad \forall \tilde{p} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j),$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_{aa}^j}$  désigne le produit de dualité entre  $\left[ H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j) \right]'$  et  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j)$ . Le problème ici est qu'on n'assure pas le raccord sur les coins du carré  $\Sigma_{aa}$ , et on ne sait alors plus montrer l'équivalence entre la formulation multi-domaines et le problème initial.

Dans la littérature, ce type de difficulté est connu en décomposition de domaine avec les "cross-points" (voir [45, 46]). Une solution proposée consiste à introduire un multiplicateur de Lagrange pour exprimer le raccord aux coins. Mentionnons également que ces problèmes apparaissent pour la méthode d'équation intégrale multi-traces [27].

Dans notre cas, pour palier cette difficulté au moins du point de vue théorique, nous avons choisi de considérer les  $\Lambda^j \varphi^j$  dans un espace plus régulier :  $L^2(\Sigma_a^j)$ . Cela revient à prendre  $\varphi^j \in H^1(\Sigma_a^j)$ . Il est alors possible de définir la restriction de  $\Lambda^j \varphi^j$  dans  $L^2(\Sigma_{aa}^j)$ , et de donner un sens à l'égalité (4.19) dans  $\left[ H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j) \right]'$  comme suit :

$$\langle A \nabla p \cdot \nu, \tilde{p} \rangle_{\Sigma_{aa}} = \sum_{j=0}^3 (\Lambda^j \varphi^j, \tilde{p})_{L^2(\Sigma_{aa}^j)}, \quad \forall \tilde{p} \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}), \quad (4.20)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_{aa}}$  désigne le produit de dualité entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$ .

**Remarque 4.2.8** *Nous savons par des arguments de régularité que la solution  $p$  du problème initial (4.3) est infiniment dérivable dès qu'on s'éloigne un peu de l'obstacle  $\mathcal{O}$  et du support de la source  $f$ . Par conséquent, les traces  $\varphi^j = p|_{\Sigma_a^j}$  sont dans  $H^s(\Sigma_a^j)$  pour tout  $s \geq 0$ . Il n'est donc pas incohérent de rechercher les  $\varphi^j$  dans  $H^1(\Sigma_a^j)$ .*

*Par ailleurs, soulignons que nous n'aurons plus ces difficultés liées aux espaces fonctionnels pour les  $\varphi^j$  dans le cas des formulations "avec recouvrement" entre la zone éléments finis et les demi-plans, voir la section 6.1 au chapitre 6.*

Étant données les relations de compatibilité (4.18) et (4.19), nous pouvons éliminer les inconnues  $p^j$  dans la formulation multi-domaines (4.6-4.8-4.9), et donner une nouvelle formulation

avec les variables  $p^a$  et  $\varphi^j$  :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p^a \in H^1(\Omega_a) \text{ et } \varphi^j \in H^1(\Sigma_a^j) \text{ tels que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p^a) + \omega_\epsilon^2 p^a = f & \text{dans } \Omega_a, \\ A\nabla p^a \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ A\nabla p^a \cdot \nu = \Lambda^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^j = p^a & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{array} \right. \end{array} \quad (4.21)$$

**Proposition 4.2.9** *Le problème (4.21) est équivalent au problème initial (4.3).*

**Preuve :** Tout d'abord, nous savons par construction que si  $p$  est solution du problème initial (4.3), alors :

$$p^a = p \quad \text{dans } \Omega_a, \quad \varphi^j = p|_{\Sigma_a^j} \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

est solution de (4.21). Soulignons que comme nous venons de l'expliquer dans la remarque 4.2.8, les traces  $\varphi^j = p|_{\Sigma_a^j}$  sont bien dans  $H^1(\Sigma_a^j)$ .

Réciproquement, considérons  $(p^a, (\varphi^j)_{j \in [0,3]})$  solution de (4.21). On définit dans chaque demi-plan  $p^j = P^j(\varphi^j)$ , où on rappelle que  $P^j$  est donné par 4.2.5. Les relations de compatibilité (4.18) nous assurent que :

$$p^j = p^{j\pm 1} \quad \text{sur } \partial(\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

À l'aide du lemme 4.2.1, on déduit la compatibilité  $p^j = p^{j\pm 1}$  dans tous les quarts de plan  $\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$ . Nous pouvons donc définir la fonction  $p_{ext} \in H^1(\Omega_a^c)$  ainsi :

$$p_{ext} = p^j \quad \text{dans } \Omega_a^j, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Par définition des  $p^j$ , nous savons que  $p_{ext}$  vérifie :

$$\operatorname{div}(A\nabla p_{ext}) + \omega_\epsilon^2 p_{ext} = 0 \quad \text{dans } \Omega_a^c.$$

De plus, les relations de compatibilité sur  $\Sigma_{aa}^j$

$$p^a = \varphi^j \quad \text{et} \quad A\nabla p^j \cdot \nu = \Lambda^j \varphi^j \quad \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

nous assurent que les fonctions  $p_{ext}$  et  $p^a$  se raccordent en trace et en dérivée normale sur les bords  $\Sigma_{aa}$  de  $\Omega_a$ . Par conséquent, on peut construire la fonction  $p \in H^1(\Omega)$  suivante :

$$p = \begin{cases} p^a & \text{dans } \Omega_a, \\ p_{ext} & \text{dans } \Omega_a^c, \end{cases}$$

qui est solution du problème initial (4.3). ■

Ayant montré l'équivalence, on sait que la reformulation (4.21) admet une unique solution. Cependant, nous n'avons pour l'instant pas réussi à montrer que le problème (4.21) était coercif ou relevait de l'alternative de Fredholm afin d'assurer son caractère bien posé. Typiquement, on

aimerait montrer qu'on peut écrire le problème (4.21) sous la forme "coercif+compact". Ce point nous semble difficile car, ayant choisi  $\varphi^j \in H^1(\Sigma_a^j)$ , on impose avec les relations de compatibilité

$$p^a = \varphi^j \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j,$$

que  $p^a|_{\Sigma_{aa}} \in H^1(\Sigma_{aa})$ . Ce point est problématique car on exige ainsi "trop" de régularité à la fonction  $p^a$  sur le bord  $\Sigma_{aa}$ .

Néanmoins, comme nous le verrons dans la section 4.3, numériquement tout se passe bien, et la méthode donne de bons résultats. Par ailleurs, dans le chapitre 6, nous proposerons deux nouvelles formulations "avec recouvrement" sur lesquelles nous pourrions montrer des résultats théoriques.

### Le sous-problème en $\varphi^j$ :

Considérons un instant le problème posé dans le domaine extérieur  $\Omega_a^c$  :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p_{ext} \in H^1(\Omega_a^c) \text{ tel que} \\ \left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p_{ext}) + \omega_\epsilon^2 p_{ext} = 0 & \text{dans } \Omega_a^c, \\ p_{ext} = g & \text{sur } \Sigma_{aa}, \end{array} \right. \end{array} \quad (4.22)$$

où  $g$  est une donnée dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$ . Nous savons que ce problème est bien posé (voir la preuve de la proposition 4.1.2). À l'aide de la décomposition du domaine  $\Omega_{ext}$  en 4 demi-plans  $\Omega_a^j$ , nous pouvons donner une formulation multi-domaines de ce problème avec les inconnues  $p^j = p_{ext}|_{\Omega_a^j}$ . De plus, nous venons de voir qu'on peut éliminer les inconnues  $p^j$  et les remplacer par les traces  $\varphi^j = p_{ext}|_{\Sigma_a^j}$  définies sur les droites  $\Sigma_a^j$ . Ainsi, on peut reformuler de manière équivalente le problème (4.22) comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi^j \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j) \text{ tels que} \\ \left| \begin{array}{ll} \varphi^j = g & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{array} \quad (4.23)$$

Soulignons qu'ici, considérer les traces  $\varphi^j \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$  ne pose pas la difficulté que nous avons présentée avec les opérateurs  $\Lambda^j$ , car on exprime dans la reformulation ci-dessus uniquement des raccords en trace et pas en dérivée normale.

Nous savons par équivalence avec le problème extérieur (4.22) que le problème reformulé (4.23) est bien posé, et donc on peut l'inverser. Notons formellement l'opérateur Ext qui à  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$  associe :

$$\operatorname{Ext}(g) = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

où les  $\varphi^j$  sont solutions de (4.23).

En composant les opérateurs Ext et  $\Lambda^j$ , on caractérise l'opérateur *Dirichlet to Neumann* qui à la trace  $g|_{\Sigma_{aa}}$  associe la dérivée normale  $A\nabla p_{ext}(g) \cdot \nu$  sur  $\Sigma_{aa}$ , où  $p_{ext}$  est solution de 4.22. Soulignons qu'on ne sait pas calculer Ext analytiquement, mais il est possible de le faire numériquement en discrétisant le problème (4.23) (voir la discrétisation section 4.3.2) et en inversant la matrice issue de la discrétisation. Cette approche est utilisée dans la méthode

développée par S. Fliss et P. Joly pour les milieux périodiques. De cette manière, on calcule numériquement l'opérateur DtN sur le carré  $\Sigma_{aa}$ .

Dans le chapitre 5, nous discuterons des propriétés théoriques du problème (4.23). En particulier, on s'intéressera à montrer que ce problème est de type Fredholm.

## 4.3 Aspects numériques

Dans cette section, nous allons décrire comment discrétiser la formulation (4.21). Nous commencerons par donner sa formulation variationnelle, puis nous décrirons la discrétisation du problème sous forme variationnelle. Ensuite, nous présenterons différents tests de validation : d'abord quantitatifs pour le cas isotrope, puis qualitatifs pour des cas anisotropes.

### 4.3.1 Formulation variationnelle

Afin d'écrire la formulation variationnelle du problème (4.21), il est nécessaire de tenir compte de manière forte de la condition de transmission :

$$\varphi^j = p^a \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j.$$

Pour cela, on introduit l'espace variationnel :

$$V = \left\{ (u, \psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3) \in H^1(\Omega_a) \times \prod_{j \in \{0,1,2,3\}} H^1(\Sigma_a^j), \right. \\ \left. \text{tel que } \forall j \in \{0,1,2,3\}, \quad \psi^j = u \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j \right\}. \quad (4.24)$$

Considérons un champ test  $(\tilde{p}, \tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\varphi}^3) \in V$ . Pour mettre le problème sous forme variationnelle, on procède en 2 étapes. Tout d'abord, en testant les équations dans  $\Omega_a$  par  $\tilde{p} \in H^1(\Omega_a)$ , il vient :

$$\int_{\Omega_a} \omega_c^2 p^a \tilde{p} - A \nabla p^a \cdot \nabla \tilde{p} + \langle A \nabla p^a \cdot \nu, \tilde{p} \rangle_{\Sigma_{aa}} = \int_{\Omega_a} f \tilde{p},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_{aa}}$  désigne le produit de dualité entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$ . On réécrit le terme de bord sur  $\Sigma_{aa}$  à l'aide de la formule (4.20) :

$$\int_{\Omega_a} \omega_c^2 p^a \tilde{p} - A \nabla p^a \cdot \nabla \tilde{p} + \sum_{k=0}^3 \int_{\Sigma_{aa}^k} \Lambda^k \varphi^k \tilde{p} = \int_{\Omega_a} f \tilde{p}.$$

Ensuite, on teste par  $\tilde{\varphi}^j$  les équations sur les demi-droites  $\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$  :

$$(\varphi^j, \tilde{\varphi})_{L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})} - (D_j^{j\mp 1} \varphi^{j\mp 1}, \tilde{\varphi})_{L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})} = 0.$$

Bien que les fonctions  $\varphi^j$  soient dans  $H^1(\Sigma_a^j)$ , nous utilisons le produit scalaire  $L^2$ . Nous verrons dans les résultats numériques ci-après que cette formulation variationnelle fonctionne très bien. Néanmoins, une extension serait d'utiliser des produits scalaire  $H^1$ .

Sous forme variationnelle, le problème (4.21) se réécrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (p^a, \varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \in V \text{ tel que } \forall (\tilde{p}, \tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\varphi}^3) \in V \\ \left| \begin{aligned} a(p^a, \tilde{p}) + \sum_{j=0}^3 \lambda^j(\varphi^j, \tilde{p}) &= L(\tilde{p}), \\ m^j(\varphi^j, \tilde{\varphi}^j) - d_j^{j\mp 1}(\varphi^{j\mp 1}, \tilde{\varphi}^j) &= 0 \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (4.25)$$

où la forme linéaire  $L(\cdot)$  est définie par

$$L(\tilde{p}) = - \int_{\Omega_a} f \tilde{p},$$

et les formes bilinéaires sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(p^a, \tilde{p}) = \int_{\Omega_a} \omega_\epsilon^2 p^a \tilde{p} - A \nabla p^a \cdot \nabla \tilde{p}, & m^j(\varphi^j, \tilde{\varphi}^j) = \int_{\Sigma_a^j \setminus \Sigma_{aa}^j} \varphi^j \tilde{\varphi}^j, \\ \lambda^j(\varphi^j, \tilde{p}) = \int_{\Sigma_{aa}^j} \Lambda^j \varphi^j \tilde{p} & d_{j\pm 1}^j(\varphi^j, \tilde{\varphi}^{j\pm 1}) = \int_{\Sigma_a^j \setminus \Sigma_{aa}^j} D_{j\pm 1}^j(\varphi^j) \tilde{\varphi}^{j\mp 1}. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Par ailleurs, il peut sembler que les équations en  $\varphi^j$  dans la formulation variationnelle (4.25) soient découplées des équations en  $p^a$ . Cependant, ce n'est pas le cas, car on impose de manière forte  $p^a = \varphi^j$  sur  $\Sigma_{aa}^j$  dans l'espace  $V$  défini par (4.24).

### 4.3.2 Discrétisation de la formulation variationnelle

Pour discrétiser la formulation variationnelle (4.25), on effectue une approximation par éléments finis de Lagrange 1D pour les inconnues  $\varphi^j$ , et 2D pour l'inconnue  $p^a$ . On cherche donc une approximation  $p_h^a$  ( $h$  désigne le pas de discrétisation) de  $p^a$  de la forme :

$$p_h^a(x, y) = \sum_{k=1}^{N_a} P_k^a u_k(x, y) \quad \text{dans } \Omega_a,$$

où les  $P_k^a$  sont des coefficients complexes, les  $u_k(x, y)$  les fonctions de base éléments finis en 2D, et  $N_a$  le nombre de fonctions de base. Afin d'avoir un espace d'approximation de dimension finie pour les inconnues  $\varphi^j$ , il est nécessaire de tronquer la droite  $\Sigma_a^j$  à une distance  $T > a$ . On note  $\Sigma_{aT}^j$  le segment tronqué défini par :

$$\Sigma_{aT}^j = \{x^j = a\} \times \{y^j \in [-T, T]\},$$

où les coordonnées locales sont définies par (4.5). Ainsi, on cherche une approximation  $\varphi_h^j$  de  $\varphi^j$  de la forme :

$$\varphi_h^j(z) = \sum_{k=1}^{N_j} \Phi_k^j w_k(z) \quad \text{sur } \Sigma_{aT}^j, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

où les  $\Phi_k^j$  sont des coefficients complexes, les  $w_k$  les fonctions de base éléments finis 1D et  $N_j$  le nombre de fonctions de base sur  $\Sigma_{aT}^j$ . Pour simplifier, nous avons utilisé la même discrétisation pour tous les segments  $\Sigma_{aT}^j$ . Nous avons donc  $N_j = N$  pour tout  $j$ . De plus, nous avons choisi une discrétisation régulière du segment  $\Sigma_{aT}^j$ . L'espace variationnel discret  $V_h \subset V$  est donné par :

$$V_h = \left\{ (u_h, \psi_h^0, \psi_h^1, \psi_h^2, \psi_h^3) \text{ tel que } u_h = \psi_h^j \text{ sur } \Sigma_a^j, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \right. \\ \left. u_h(x, y) = \sum_{k=1}^{N_a} U_k u_k(x, y), \quad \text{et } \psi_h^j(z) = \sum_{k=1}^N \Psi_k^j w_k(z), \quad \text{où } U_k, \Psi_k^j \in \mathbb{C} \right\}.$$

La dimension de  $V_h$  est  $N_a + 4N - N_{aa} - 4$ , où  $N_{aa}$  correspond au nombre de points de discrétisation sur la frontière  $\Sigma_{aa}$ . Le "-4" vient du fait qu'on compte les 4 coins de  $\Sigma_{aa}$  deux

fois avec la discrétisation des segments  $\Sigma_{aT}^j$ .

En plus de discrétiser les inconnues de notre problème, il est nécessaire d'approcher numériquement les formes bilinéaires  $d_{j\pm 1}^j(\cdot, \cdot)$  et  $\lambda^j(\cdot, \cdot)$  intervenant dans la formulation variationnelle. Ce type d'approximation a notamment été étudié dans les travaux d'Axel Tillequin [88, 20]. Pour détailler ce point, concentrons nous sur la forme  $\lambda^0(\cdot, \cdot)$ . On considère deux fonctions tests  $w_k$  et  $w_l$  (notons que la trace sur  $\Sigma_{aa}^j$  d'une fonction de base  $u_k(x, y)$  est une fonction de base  $w_k$ ). Nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda^0(w_k, w_l) &= \int_{-a}^a \Lambda^0(w_k) w_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}_k(\xi) (c_1 r^0(\xi) + c_3 i \xi) e^{i\xi y} d\xi w_l(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_k(z) e^{-i\xi z} dz (c_1 r^0(\xi) + c_3 i \xi) e^{i\xi y} d\xi w_l(y) dy, \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, il vient :

$$\lambda^0(w_j, w_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_1 r^0(\xi) + c_3 i \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} w_k(z) e^{-i\xi z} dz \int_{-a}^a w_l(y) e^{i\xi y} dy d\xi.$$

Dans l'expression ci-dessus, les intégrales en  $z$  et en  $y$  se calculent de manière similaire : elles correspondent respectivement à la transformée de Fourier et la transformée inverse des fonctions de base. Les fonctions  $w_k$  étant des polynômes par morceaux, nous pouvons faire le calcul explicitement. Par exemple, les fonctions de base  $w_k$  dans le cas  $\mathbb{P}_1$  sont définies comme suit :

$$w_k(z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|z-z_k|}{h}\right) & \text{si } |z - z_k| < h, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}, \quad \text{où } z_k = kh - T. \quad (4.27)$$

Ainsi, la transformée de Fourier d'une fonction de base  $w_k$  est :

$$\hat{w}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_k(z) e^{-i\xi z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{\xi^2 h} \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) e^{-iy_k \xi}.$$

On en déduit donc :

$$\lambda^0(w_k, w_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} (c_1 r^0(\xi) + c_3 i \xi) \left(\frac{4}{\xi^2 h} \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right)^2 e^{-i(y_k - y_l)\xi} d\xi.$$

L'intégrale en  $\xi$  est bien convergente mais ne peut pas être calculée explicitement. Pour l'évaluer, on doit utiliser une formule de quadrature, et donc tronquer l'intervalle d'intégration en  $\xi$  à  $[-T_\xi, T_\xi]$ , où  $T_\xi > 0$  est un paramètre réel. Cela conduit à évaluer numériquement  $\lambda^0(w_k, w_l)$  ainsi :

$$\lambda^0(w_k, w_l) \simeq \sum_{\xi \in \mathcal{Q}_{T_\xi}} q_\xi (c_1 r^0(\xi) + c_3 i \xi) \hat{w}_j(\xi) \hat{w}_i(\xi), \quad (4.28)$$

où  $\mathcal{Q}_{T_\xi}$  est l'ensemble des points de quadrature compris dans l'intervalle  $[-T_\xi, T_\xi]$ , et  $q_\xi$  le poids associé au noeud  $\xi \in \mathcal{Q}_{T_\xi}$ . Dans notre cas, nous avons choisi d'utiliser une quadrature de Gauss (composite) à deux points.

On peut remarquer que le calcul (4.28) correspond exactement au calcul des termes associés à un opérateur  $DtN$  dans le cas du guide d'onde (voir formule (1.31) dans le chapitre 1).

Pour résumer, la discrétisation du problème (4.25) nécessite :

1. de tronquer à une distance  $T$  les droites  $\Sigma_a^j$  afin d'avoir un espace de dimension finie pour discrétiser les inconnues  $\varphi^j$ ,
2. de tronquer les intégrales en  $\xi$  intervenant dans les formes bilinéaires  $\lambda^j(\cdot, \cdot)$  et  $d_{j\pm 1}^j(\cdot, \cdot)$ ,
3. et d'utiliser une formule de quadrature pour évaluer ces intégrales en  $\xi$ .

Pour être exact, on devrait noter dans la suite  $\varphi_{h,T,T_\xi,Q_\xi}^j$  (idem pour  $p_{h,T,T_\xi,Q_\xi}^a$ ) la solution approchée du problème (4.25). Pour alléger les notations, nous nous limiterons à écrire  $\varphi_h^j$  et  $p_h^a$  pour désigner la solution approchée du problème discrétisé.

**Remarque 4.3.1** *N'ayant aucune propriété sur la formulation (4.21) de notre problème, nous ne savons pas a priori si le problème discrétisé est bien posé et nous le supposons. On verra que numériquement tout se passe bien. De plus, pour la même raison, l'analyse numérique du problème n'est pas possible.*

### Reconstruction de la solution dans tout le domaine

Le problème (4.25) conduit au calcul de  $p_h^a$  dans  $\Omega_a$  et des traces  $\varphi_h^j$  sur les segments  $\Sigma_{aT}^j$ . Ces traces  $\varphi_h^j$  permettent de reconstruire la solution dans tout le domaine  $\Omega$ . En effet, à l'aide de l'expression explicite de la solution  $P^j(\varphi^j)$  dans chaque demi-plan  $\Omega_a^j$  donnée dans la proposition 4.2.5, on peut calculer a posteriori une approximation  $P^j(\varphi_h^j)$  de la solution dans le demi-plan  $\Omega_a^j$  connaissant  $\varphi_h^j$ .

Cependant, soulignons que  $P^j(\varphi_h^j)$  a une forme intégrale, et donc pour le calcul numérique, il est nécessaire de faire les mêmes approximations que précédemment : tronquer à  $T_\xi$  l'intégrale en  $\xi$  et utiliser une formule de quadrature. Par exemple, pour  $P^0(\varphi_h^0)$ , nous avons l'approximation suivante (en utilisant l'expression (4.17) des racines dans le cas isotrope) :

$$P^0(\varphi_h^0)(x, y) \simeq \sum_{k=0}^N \Phi_k^0 \sum_{\xi \in \mathcal{Q}_{T_\xi}} q_\xi \hat{w}_k(\xi) e^{i\sqrt{\omega_\xi^2 - \xi^2}(x-a)} e^{i\xi y} \quad \forall (x, y) \in \Omega_a^0, \quad (4.29)$$

où les coefficients  $\Phi_k^0$  sont les valeurs de  $\varphi_h^0$  aux noeuds  $y_k = kh - T$ . Soulignons qu'avec les méthodes classiques de type couches absorbantes, la reconstruction n'est pas possible. La contrepartie de notre approche est qu'elle nécessite de considérer 5 inconnues (ce qui bien sûr est plus coûteux pour la résolution).

**Remarque 4.3.2** *À cause des différentes approximations introduites lors de la discrétisation de notre problème, les relations de compatibilité sont imposées de manière non-exacte. Autrement dit, nous n'avons pas parfaitement*

$$P^j(\varphi^j) = P^{j\pm 1}(\varphi^{j\pm 1}) \quad \text{dans} \quad \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

*Ceci est vérifié uniquement à la limite  $T_\xi = +\infty$ ,  $T = +\infty$  et pour un calcul exact des intégrales en  $\xi$ .*

### 4.3.3 Validation quantitative dans le cas isotrope

Dans cette section, nous allons étudier de manière quantitative notre méthode. En effet, on peut obtenir dans une certaine configuration (que nous allons décrire ci-après) la solution

analytique du problème de diffraction. Ceci nous permet de mesurer l'erreur entre la solution approchée numériquement et la solution exacte. Nous vérifierons ainsi que la solution approchée converge vers la solution exacte en affinant la discrétisation.

Ainsi, au travers de plusieurs exemples, nous allons étudier l'influence des différents paramètres de discrétisation : l'approximation par éléments finis, la distance  $T$  de troncature des droites  $\Sigma_a^j$ , la distance  $T_\xi$  de troncature des intégrales en  $\xi$ , et la quadrature qu'on notera  $(\mathcal{Q}_{T_\xi}, q_\xi)$ .

### Le test de validation

Dans le cas isotrope parfaitement homogène, il est possible de connaître une solution analytique. Notons que pour un cas anisotrope, comme nous l'avons déjà expliqué, on peut se ramener au cas isotrope par un simple changement de coordonnées. Par conséquent, l'étude que nous allons mener ici pourrait tout aussi bien être faite pour un milieu anisotrope.

Nous avons considéré un milieu parfaitement homogène sans défaut  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Dans cette configuration, on cherche à résoudre le problème de radiation :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ telle que} \\ & | \Delta p + \omega_\epsilon^2 p = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Afin de connaître la solution analytiquement, nous avons considéré le terme source :

$$f(x, y) = \delta(x, y),$$

où  $\delta$  est la fonction Dirac. Dans ce cas, la solution  $p$  du problème (4.30) ci-dessus est simplement

$$p(x, y) = \frac{1}{4i} H(\omega_\epsilon r), \quad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

et où  $H(\cdot)$  désigne la fonction de Hankel de première espèce (voir [47]).

**Remarque 4.3.3** Numériquement, choisir  $f = \delta_{x,y}$  revient à prendre comme vecteur au second membre le vecteur des fonctions de base évaluées en  $(0, 0)$ . Typiquement, pour un maillage possédant un noeud en  $(0, 0)$ , le second membre correspond au vecteur nul, sauf à l'indice du noeud associé au point  $(0, 0)$ .

**Remarque 4.3.4** Une autre méthode pour connaître la solution exacte est de considérer un obstacle  $\mathcal{O}$  (par exemple carré ou un disque) sur le bord duquel on impose comme condition de Dirichlet :

$$p(x, y) = \frac{1}{4i} H(\omega_\epsilon \sqrt{x^2 + y^2}) \quad \forall (x, y) \in \partial\mathcal{O}.$$

À l'aide de ce résultat, nous pouvons mesurer l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte. Plus précisément, nous mesurons dans la suite l'erreur relative  $\text{err}_{\text{rel}}$  sur  $\Sigma_{aT}^j$  définie par :

$$\text{err}_{\text{rel}} = \left\| \frac{\varphi_h^0 - \varphi_{\text{exact}}}{\varphi_{\text{exact}}} \right\|_{L^2([-T, T])}, \quad \text{où } \varphi_{\text{exact}}(y) = \frac{1}{4i} H\left(\omega_\epsilon \sqrt{a^2 + y^2}\right).$$

Nous avons vérifié la méthode sur un premier cas. Pour les paramètres :

$$\omega = 10 + 0.5i, \quad T = 6, \quad T_\xi = 30, \quad (4.31)$$

et une quadrature  $(\mathcal{Q}_{T_\xi}, q_\xi)$  d'ordre 2 avec 600 points, nous représenté sur la Figure 4.4 la partie réelle de :

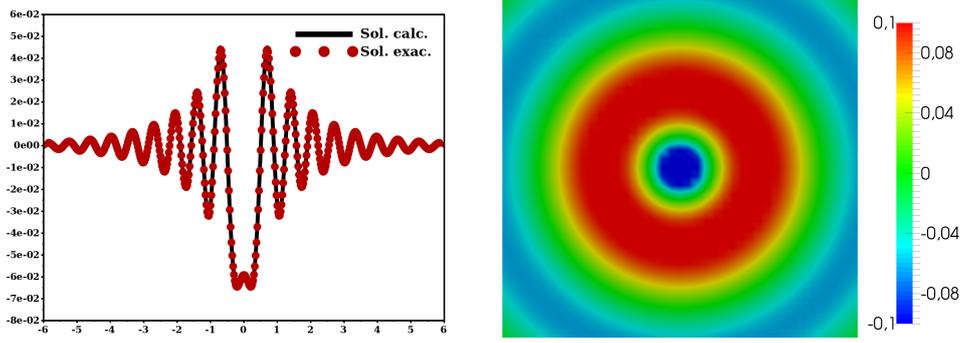


FIGURE 4.4 – Représentation de la partie réelle de  $\varphi_h^0$  et  $\varphi_{exac}$  (à gauche), et de  $p_h^a$  dans  $\Omega_a$  (à droite).

- la solution  $\varphi_h^0$  sur  $\Sigma_{aT}^0$  et la solution exacte  $\varphi_{exac}$ ,
- la partie réelle de  $p_h^a$  dans  $\Omega_a$ .

Sur ces résultats, on observe une bonne concordance qualitative entre  $\varphi_h^0$  et  $\varphi_{exac}$  sur  $\Sigma_{aT}^0$ . De plus, l'erreur  $err_{rel}$  dans ce cas est inférieure à 0.1%.

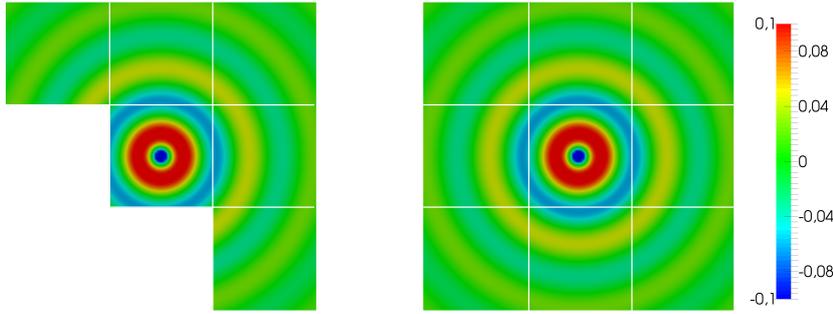


FIGURE 4.5 – Partie réelle de la reconstruction  $P^j(\varphi_h^j)$  dans  $\Omega_{aT_{rec}}^0$  et  $\Omega_{aT_{rec}}^1$  (à gauche), et puis  $P^j(\varphi_h^j)$  dans les quatre demi-plans  $\Omega_{aT_{rec}}^j$  (à droite).

Afin d'illustrer la reconstruction dans les demi-plans  $\Omega_a^j$  (voir formule (4.29)), nous avons représenté sur la Figure 4.5 (toujours pour les paramètres (4.31)) :

- la partie réelle de la solution  $p_h^a$  dans  $\Omega_a$  et les solutions reconstruites  $P^j(\varphi_h^j)$  dans les domaines :

$$\Omega_{aT_{rec}}^0 = [a, T_{rec}] \times [-T_{rec}, T_{rec}] \quad \text{et} \quad \Omega_{aT_{rec}}^1 = [-T_{rec}, T_{rec}] \times [a, T_{rec}],$$

où  $T_{rec}$  est la distance jusqu'à laquelle on reconstruit (ici  $T_{rec} = 1.5$ ),

- la partie réelle de la solution  $p_h^a$  dans  $\Omega_a$  et les reconstructions  $P^j(\varphi_h^j)$  dans les quatre sous-domaines  $\Omega_{aT_{rec}}^j$

De plus, on a marqué par des lignes blanches les droites (tronquées)  $\Sigma_a^j$ . On peut remarquer sur ces résultats que, visuellement, les représentations dans les demi-plans sont compatibles dans les quarts de plan.

### Influence du maillage

À l'aide du test décrit précédemment avec la fonction de Hankel, nous pouvons valider la convergence des éléments finis. En considérant les paramètres :

$$\omega = 5 + i, \quad T = 12, \quad T_\xi = 10, \quad (4.32)$$

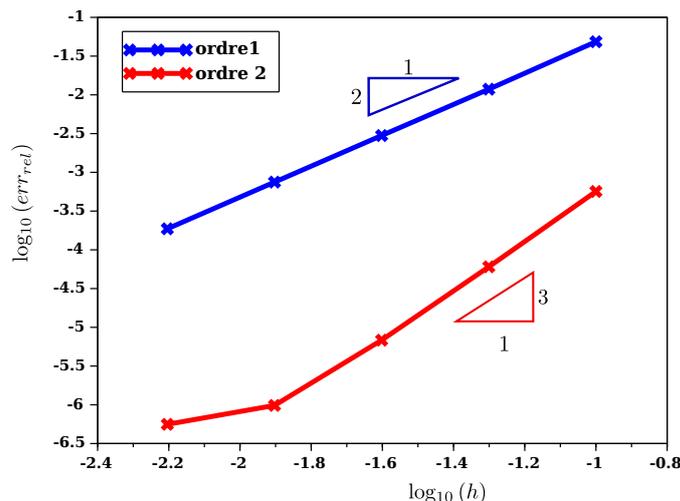


FIGURE 4.6 – Courbes de convergence pour les ordres 1 et 2 en utilisant les paramètres (4.32).

et une quadrature  $(Q_{T_\xi}, q_\xi)$  d'ordre 2 avec 600 intervalles, nous avons résolu le problème (4.30) pour différents pas  $h$  de discrétisation (les tailles des mailles du domaine  $\Omega_a$  sont proportionnelles à  $h$ ). Sur la Figure 4.6, nous avons représenté l'évolution du  $\log_{10}(\text{err}_{\text{rel}})$  en fonction du  $\log_{10}(h)$ . Nous avons utilisé des éléments finis d'ordre 1 et 2.

En première remarque, nous observons sur ces résultats que la méthode converge bien : l'erreur diminue avec le pas  $h$ . De plus, on retrouve les ordres de convergence classiques des éléments finis, c'est à dire que l'erreur  $L^2$  évolue en  $O(h^{\text{ordre}+1})$ .

Néanmoins, on peut remarquer que pour l'ordre 2 (la courbe rouge), la convergence semble se détériorer pour la plus petite valeur de  $h$ . Ce résultat s'explique car l'erreur est alors dominée par l'erreur liée aux autres paramètres d'approximation :  $T$ ,  $T_\xi$  et la quadrature. Nous allons maintenant étudier l'influence de ces trois paramètres séparément.

### Influence du paramètre $T$

L'intuition est que le paramètre  $T$  doit être choisi en fonction de la décroissance de la solution de notre problème. En effet, si la solution devient négligeable après une certaine distance  $T$ , on comprend que cette troncature aura peu d'influence. Pour vérifier ce point, nous avons fait une étude de convergence des éléments finis pour différentes valeurs de  $T$ . Nous avons considéré les paramètres suivants :

$$\omega_\epsilon = 10 + 0.1i, \quad T_\xi = 30, \quad T \in \{6, 12, 24\}, \quad (4.33)$$

et une quadrature de Gauss d'ordre 2 avec 600 intervalles. Soulignons qu'afin d'isoler l'influence de  $T$ , les paramètres  $T_\xi$  et la quadrature sont tels que les calculs d'erreurs restent inchangés en augmentant  $T_\xi$  ou en améliorant la quadrature.

Sur la Figure 4.7, nous avons représenté les courbes de convergence obtenues pour ces différentes valeurs de  $T$ . D'une part, on retrouve sur ces résultats la convergence des éléments finis avec les bons ordres (jusqu'à un certain palier). Soulignons que pour  $T = 12$  et  $T = 24$ , les courbes de convergence à l'ordre 1 sont superposées.

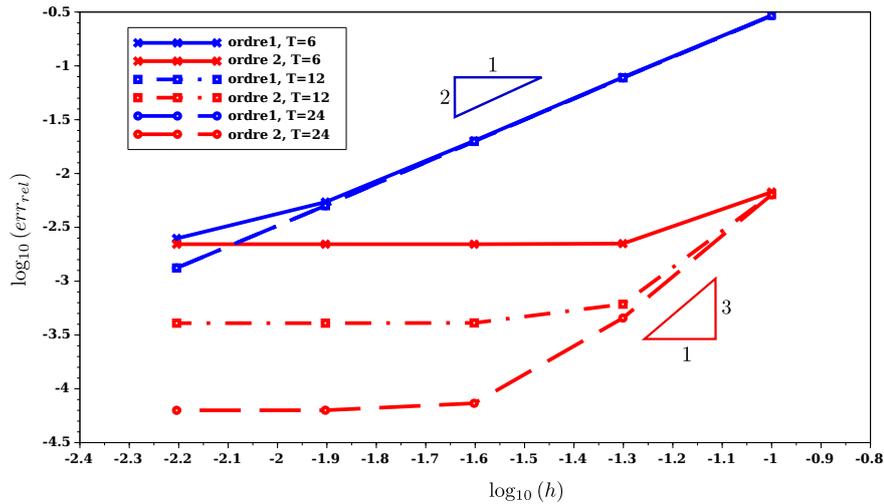


FIGURE 4.7 – Courbes de convergence pour les ordres 1 et 2 pour différentes valeurs de  $T$  (voir les paramètres (4.33))

D'autre part, on peut voir sur les courbes rouges (pour l'ordre 2) qu'à partir d'un certain pas  $h$ , l'erreur atteint un palier. Ce palier correspond à l'erreur commise par la troncature à la distance  $T$  des droites  $\Sigma_a^j$ . En effet, on observe qu'en augmentant la valeur de  $T$  le palier diminue.

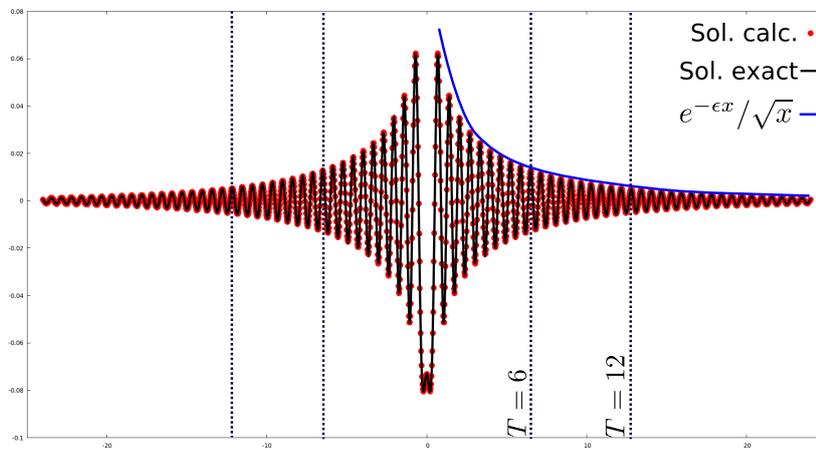


FIGURE 4.8 – Partie réelle de la solution calculée (en rouge) et solution exacte (en noir). En bleu, on a représenté le comportement asymptotique de la solution.

Remarquons enfin que, même pour  $T = 6$ , on peut atteindre une erreur relative inférieure à 1% ( $\sim 10^{-2.5}$ ). Or, à cette distance la solution exacte est clairement non négligeable comme on peut le voir sur le dessin de la Figure 4.8 où nous avons représenté :

- la solution approchée  $\varphi_h^j$  (en pointillés rouges) obtenue pour  $T = 24$  et avec un pas  $h$  petit,
- la solution exacte  $\varphi_{exact}$  (en trait noir),

— et le comportement asymptotique de la solution (en bleu).

La question est maintenant de savoir comment évolue ce palier de l'erreur en fonction du paramètre  $T$ . Pour les prochains résultats, nous avons donc pris un pas  $h$  suffisamment petit pour que l'erreur due aux éléments finis soit négligeable devant celle due au paramètre  $T$ . Sur la Figure 4.9, nous avons représenté l'évolution de  $\log_{10}(\text{err}_{\text{rel}})$  pour différentes absorptions  $\epsilon$  et différentes valeurs de  $T$  :

$$\omega_\epsilon \in \{10 + 0.5i, 10 + 0.2i, 10 + 0.1i, 10 + 0.05i\} \quad \text{et} \quad T \in \{1, 2, \dots, 14\}.$$

On observe que plus la dissipation  $\epsilon$  est grande, plus l'erreur décroît vite avec  $T$ . Le comporte-

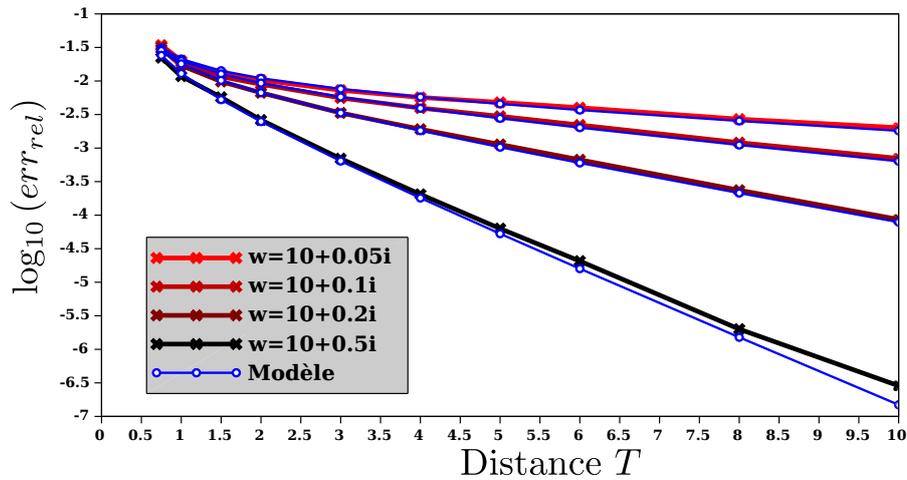


FIGURE 4.9 – Evolution de l'erreur relative (en  $\log_{10}$ ) en fonction de la distance  $T$  de troncature pour différentes dissipations  $\epsilon$ . La courbe "Modèle" correspond à celle de l'équation (4.34)

ment asymptotique de la fonction  $\varphi_{\text{exact}}$  étant  $e^{-\epsilon x}/\sqrt{x}$  (voir la Figure 4.8), on peut conjecturer que l'erreur évolue de la même manière. Or, ce modèle ne correspond pas aux résultats obtenus sur la Figure 4.9. On obtient expérimentalement une meilleure estimation de la forme

$$\text{err}_{\text{rel}} \sim \frac{e^{-2.2\epsilon(T-a)}}{\sqrt{T-a}}, \quad (4.34)$$

où on rappelle que  $a$  est la taille du domaine borné  $\Omega_a$ . Nous avons tracé sur la Figure 4.9 les courbes données par le modèle ci-dessus pour les différentes valeurs de  $\epsilon$ , et on observe une bonne concordance.

Pour la courbe associée à  $\omega = 10 + 0.5i$ , on observe un léger écart avec le modèle pour  $T = 10$ . Ce résultat s'explique car les erreurs dues aux autres paramètres (discrétisation éléments finis,  $T_\xi$  et la quadrature) ne sont plus négligeables.

**Remarque 4.3.5** *Il sera intéressant d'étudier le cas  $\epsilon = 0$  pour voir si on conserve la décroissance de l'erreur en  $\frac{1}{\sqrt{T}}$  ou voire mieux (voir section 4.4.2).*

### Influence du paramètre $T_\xi$

Pour ce paramètre, il semble logique de le prendre en fonction de la décroissance des intégrandes en  $\xi$  dans les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  et  $\Lambda^j$ . Analysons le cas de l'opérateur  $D_1^0$ . Dans le cas isotrope, nous avons l'expression explicite suivante :

$$D_1^0(\varphi^0)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}^0(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}(x-a)} e^{i\xi a} d\xi.$$

Pour  $\epsilon$  petit, on observe que l'intégrande  $e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}(x-a)}$  est oscillante en  $\xi$  et peu décroissante pour  $|\xi| < \omega$ . En revanche, pour  $|\xi| > \omega$  elle devient exponentiellement décroissante. Afin de bien visualiser cela, nous avons tracé sur la Figure 4.10, le module  $|e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}(x-a)}|$  en fonction de  $\xi$  pour  $x \in \{0.01, 0.1, 1\}$  (avec  $a = 0$ ) et  $\omega_\epsilon = 10 + 0.01i$ . Il paraît donc logique que pour

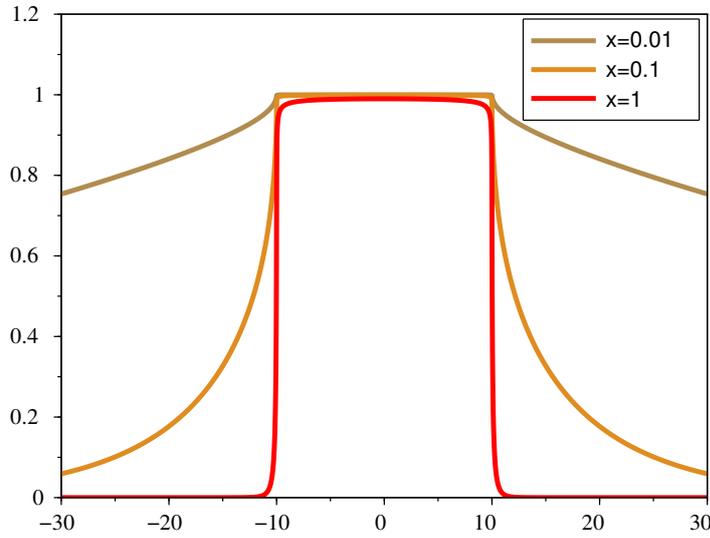


FIGURE 4.10 – Représentation de la partie réelle de  $\hat{\varphi}_{exac}(\xi)$  pour  $\omega = 5 + i$ .

pouvoir approcher numériquement ces intégrales, il soit nécessaire de prendre (au moins)  $T_\xi > \omega$ .

Pour les opérateurs  $\Lambda^j$ , on peut avoir la même intuition en utilisant l'analogie avec l'opérateur  $DtN$  du guide d'onde (voir remarque 4.2.7). On sait en effet que pour bien approcher l'opérateur  $DtN$ , il faut tronquer la série modale après le dernier mode propagatif. L'équivalent ici est de tronquer l'intégration en  $\xi$  à  $T_\xi > \omega$ .

Nous allons essayer de valider numériquement ce résultat. Sur la Figure 4.11, nous avons tracé pour différentes fréquences :

$$\omega_\epsilon \in \{20 + i, 10 + 0.5i, 15 + 0.2i\},$$

l'évolution de l'erreur  $\text{err}_{\text{rel}}$  (en  $\log_{10}$ ) en fonction du paramètre  $T_\xi - \text{Re}(\omega)$  en abscisse (les autres paramètres de discrétisation étant suffisamment précis pour engendrer une erreur négligeable). Sur ces résultats, nous pouvons observer que :

- pour  $T_\xi < \text{Re}(\omega_\epsilon)$ , l'erreur est relativement grande et ne varie pas vraiment avec  $T_\xi$ ,
- pour  $T_\xi > \text{Re}(\omega_\epsilon)$ , l'erreur semble décroître linéairement et avec (approximativement) la même pente pour toutes les fréquences.

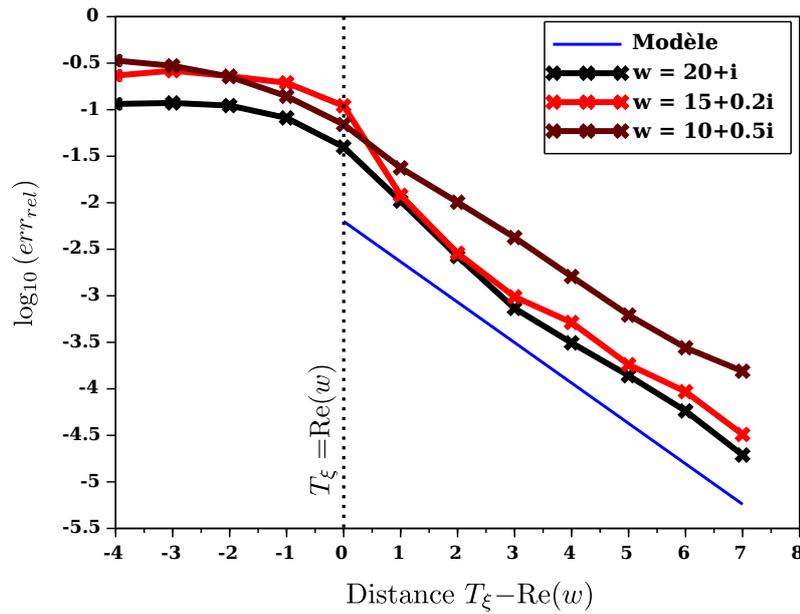


FIGURE 4.11 – Evolution de l'erreur relative (en  $\log_{10}$ ) en fonction du paramètre  $T_\xi - \text{Re}(\omega_\epsilon)$  pour différentes fréquences  $\omega_\epsilon$ . La courbe "Modèle" correspond à (4.35)

Nous supposons que l'erreur commise par le paramètre  $T_\xi$  suit le modèle suivant :

$$\text{err}_{rel} \sim e^{-(T_\xi - \text{Re}(\omega_\epsilon))}. \quad (4.35)$$

Nous avons tracé en bleu la courbe correspondant à ce modèle et on observe une assez bonne concordance.

### La quadrature ( $\mathcal{Q}_{T_\xi}, q_\xi$ )

Ce dernier paramètre doit être choisi en fonction de la régularité des intégrandes en  $\xi$ . Son importance est particulièrement significative pour un milieu peu dissipatif. En effet, pour une faible dissipation la transformée de Fourier de la solution est oscillante et présente des pics en  $|\xi| = \omega$  comme on peut le voir sur la Figure 4.12, où nous avons représenté  $\hat{\varphi}_{exact}(\xi)$  pour  $\omega_\epsilon = 10 + 0.001i$ . Il est donc important d'avoir une meilleure formule de quadrature pour mieux approcher ces intégrales.

**Remarque 4.3.6** *On explique les deux pics en  $|\xi| = \omega$  de  $\hat{\varphi}_{exact}(\xi)$  par le comportement à l'infini de  $\varphi_{exact}(y)$  :*

$$\varphi_{exact}(\pm y) \underset{y \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{e^{\pm i\omega_\epsilon y}}{\sqrt{|y|}},$$

À la limite  $\epsilon = 0$ , les pics de  $\hat{\varphi}_{exact}(\xi)$  correspondent à  $\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \omega^2}}$ .

Pour nos tests, nous avons donc considéré les paramètres suivants :

$$\omega = 10 + 0.001i, \quad T = 12, \quad T_\xi = 20. \quad (4.36)$$

Pour les 2 choix de quadrature suivants :

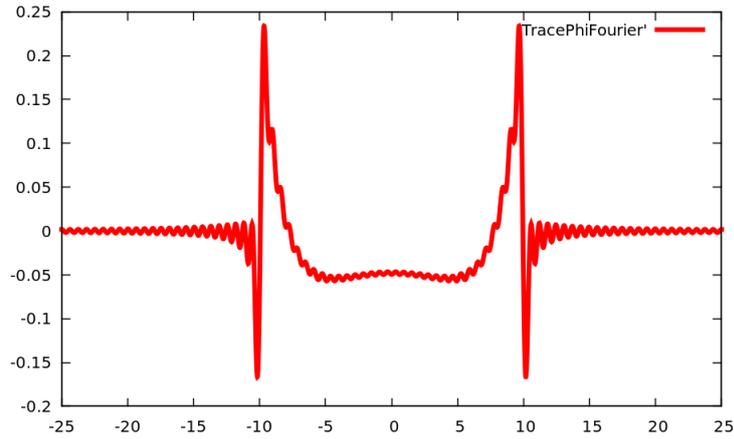


FIGURE 4.12 – Représentation de la partie réelle de  $\widehat{\varphi}_{exact}(\xi)$  pour  $\omega = 10 + 0.001i$ .

— une quadrature de Gauss d'ordre 2 avec 600 intervalles,  
 — et une quadrature de Gauss d'ordre 10 avec 600 intervalles,  
 nous avons tracé sur la Figure 4.13 les courbes de convergence des éléments finis. Tout d'abord,

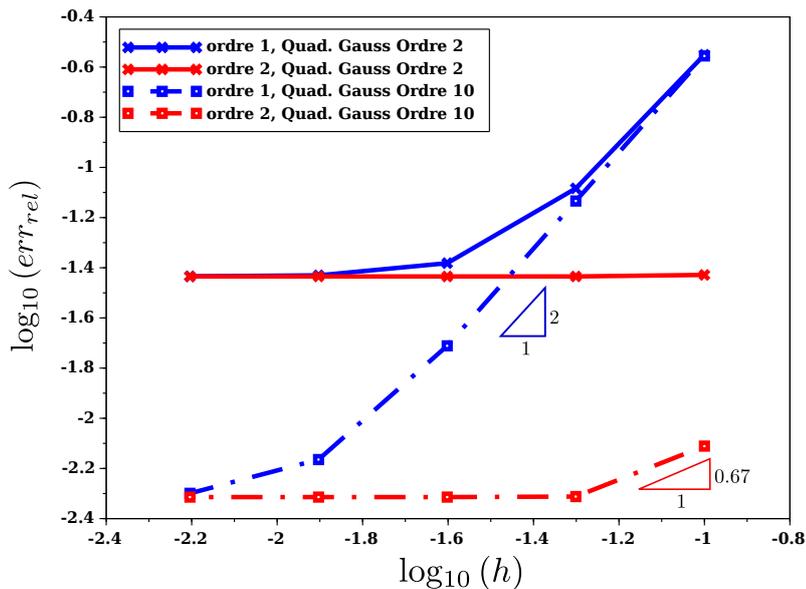


FIGURE 4.13 – Courbes de convergence pour les paramètres (4.36), pour des éléments finis d'ordres 1 et 2 et pour les différents ordres de quadrature.

on observe clairement que l'augmentation de l'ordre de quadrature améliore les courbes de convergence. On retrouve pour l'ordre 1 et la quadrature d'ordre 10 une bonne convergence des éléments finis.

Pour la quadrature d'ordre 10 et les éléments finis d'ordre 2, ce n'est plus la formule de quadrature qui pose problème. Dans ce cas, le problème vient du paramètre  $T$  qui devrait être choisi plus grand. La dissipation étant faible, la solution décroît lentement et il faut donc choisir  $T$  très grand pour rendre l'erreur associée à ce paramètre négligeable.

### 4.3.4 Validation qualitative dans le cas général

Nous allons discuter maintenant deux tests de validation qualitatifs simples : tout d'abord la transparence des conditions qu'on impose sur le bord  $\Sigma_{aa}$  du domaine intérieur  $\Omega_a$ , ensuite, la compatibilité des représentations dans les quarts de plan. On rappelle qu'on résout le problème de diffraction (4.3) à l'aide de la reformulation (4.21).

#### La transparence des conditions sur $\Sigma_{aa}^j$

Nous avons voulu vérifier que les conditions qu'on impose sur les bords  $\Sigma_{aa}^j$  de la boîte éléments finis ne créent pas de réflexions et sont bien transparentes. Pour cela, nous avons effectué plusieurs simulations avec différentes tailles de boîte, et le but a été d'observer (qualitativement) que les solutions obtenues par ces différentes simulations coïncident bien.

Nous avons considéré un milieu sans défaut avec les paramètres suivants :

$$\omega_\epsilon = 20 + 0.01i, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = 6, \quad \text{et} \quad T_\xi = 40, \quad (4.37)$$

La source  $f$  est à support compact centré en  $(0, 0)$ . Pour le domaine  $\Omega_a$ , nous avons choisi les géométries de forme suivante :

$$\Omega_a = [-a, a] \times [-a, a], \quad \text{avec} \quad a \in \{0.4, 0.6\},$$

$$\text{et} \quad \Omega_a = \left\{ \left( x \cos(\theta) + y \sin(\theta), -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \right), \quad \text{où} \quad (x, y) \in [-a, a] \times [-a, a] \right\}$$

$$\text{avec} \quad a = 0.5 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

La troisième boîte correspond à un carré pivoté d'un angle  $\theta$ . Pour ce cas, la méthode que nous venons de présenter s'applique de la même manière en considérant simplement les droites  $\Sigma_a^j$  s'appuyant sur les 4 bords du carré pivoté.

Sur la Figure 4.14, nous avons représenté la partie réelle de la solution  $p^a$  calculée pour ces trois géométries de  $\Omega_a$ . Comme nous pouvons le constater, les trois solutions coïncident qualitativement. Par conséquent, les conditions imposées sur les bords  $\Sigma_{aa}^j$  n'ont pas d'influence sur le calcul de  $p^a$  et sont, en ce sens, transparentes.

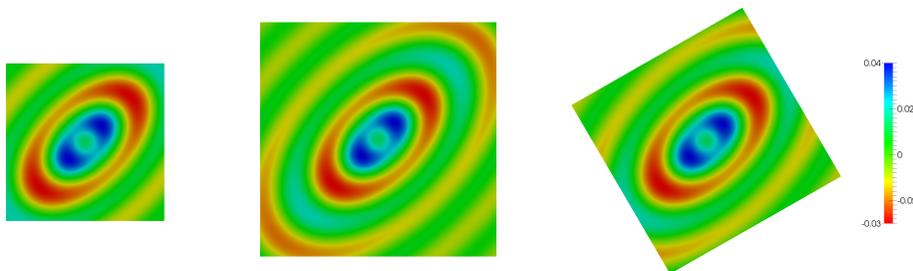


FIGURE 4.14 – Représentation de la partie réelle de la solution  $p^a$  dans le domaine  $\Omega_a$  pour plusieurs géométries de  $\Omega_a$  dans le cas anisotrope.

### La compatibilité des représentations dans les demi-plans

Comme nous l'avons expliqué à la fin de la section 4.3.2, on peut reconstruire a posteriori la solution  $P^j(\varphi_h^j)$  dans le demi-plan  $\Omega_a^j$  (voir formule (4.29)). On peut ainsi tester simplement si les relations qu'on impose sur les droites  $\Sigma_a^j$  assurent bien la compatibilité des  $P^j(\varphi_h^j)$  dans les quarts d'espace. Pour les paramètres (4.37), nous avons représenté sur la Figure 4.15 :

- la partie réelle de la solution  $p_h^a$  dans  $\Omega_a$  et la reconstruction  $P^0(\varphi_h^0)$  dans  $\Omega_a^0$ ,
- la partie réelle de la solution  $p_h^a$  dans  $\Omega_a$  et la reconstruction  $P^1(\varphi_h^1)$  dans  $\Omega_a^1$ ,
- et le module de la différence  $|P^0(\varphi_h^0) - P^1(\varphi_h^1)|$  dans le quart de plan  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$ .

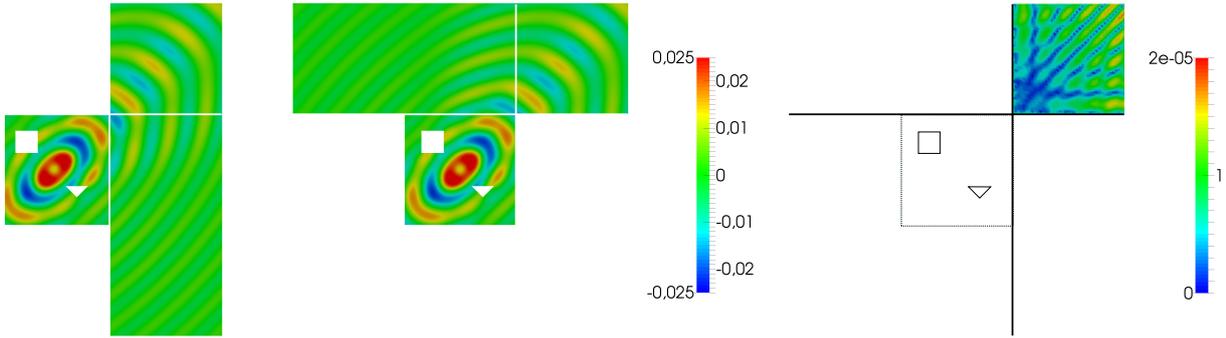


FIGURE 4.15 – Pour  $T_\xi = 40$  : Représentation de la partie réelle de la solution  $p_h^a$  dans le domaine  $\Omega_a$ , de la reconstruction  $P^0(\varphi_h^0)$  dans  $\Omega_a^0$  (à gauche), et de la reconstruction  $P^1(\varphi_h^1)$  (au centre). À droite, nous avons représenté le module  $|P^0(\varphi_h^0) - P^1(\varphi_h^1)|$  dans le quart de plan  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$ .

On observe que les deux représentations  $P^0(\varphi_h^0)$  et  $P^1(\varphi_h^1)$  sont visuellement identiques dans le quart de plan  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$ . De plus, la différence  $|P^0(\varphi_h^0) - P^1(\varphi_h^1)|$  est très petite, de l'ordre de  $10^{-5}$ , devant la solution qui est de l'ordre de  $10^{-2}$ .

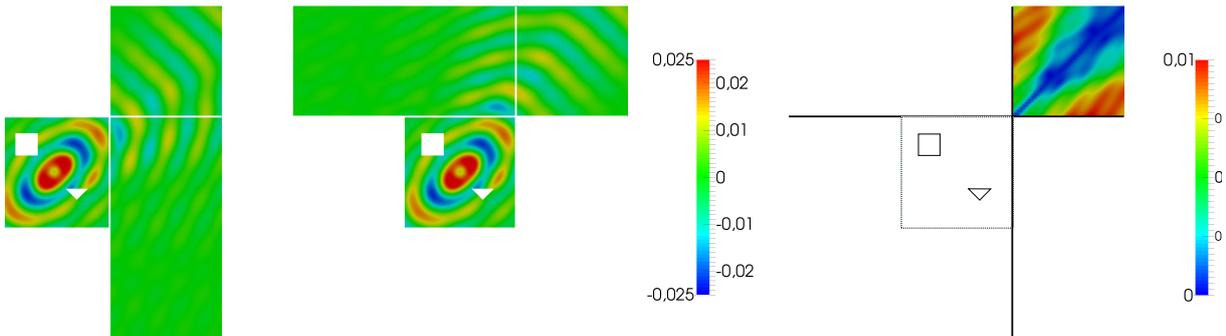


FIGURE 4.16 – Pour  $T_\xi = 15$  : Représentation de la partie réelle de la solution  $p_h^a$  dans le domaine  $\Omega_a$ , de la reconstruction  $P^0(\varphi_h^0)$  dans  $\Omega_a^0$  (à gauche), et de la reconstruction  $P^1(\varphi_h^1)$  (au centre). À droite, nous avons représenté le module  $|P^0(\varphi_h^0) - P^1(\varphi_h^1)|$  dans le quart de plan  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$ .

Afin d'illustrer l'influence du paramètre  $T_\xi$  sur les relations de compatibilité, nous avons effectué le même test mais en prenant  $T_\xi = 15$ . Nous avons représenté les résultats sur la Figure 4.16. Rappelons que dans notre analyse quantitative, nous avons vu qu'un choix "raisonnable" est  $T_\xi > \omega$ . Ici, ayant  $\omega = 20$ , on s'attend à ce que les représentations dans les demi-plans ne correspondent plus, et c'est ce qu'on observe. De plus, la mesure de l'erreur  $|P^0(\varphi_h^0) - P^1(\varphi_h^1)|$  est dans ce cas de l'ordre de  $10^{-2}$ , ce qui est très grand car c'est du même ordre que la solution.

## 4.4 Le cas non dissipatif

Dans cette section, nous allons nous intéresser au problème de diffraction dans le cas où le milieu est non-dissipatif. Nous commencerons par décrire le problème modèle. Ensuite, nous expliquerons les difficultés théoriques liées à la reformulation multi-domaines. Bien que nous ne sachions pas montrer l'équivalence entre la reformulation multi-domaines et le problème initial, nous verrons au travers de différents tests numériques que la méthode donne de bons résultats.

### 4.4.1 Difficultés théoriques

Le problème de diffraction que nous considérons ici est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ sortante telle que} \\ \left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p) + \omega^2 p = f & \text{dans } \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ A\nabla p \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{array} \right. \end{cases} \quad (4.38)$$

où la fréquence  $\omega \in \mathbb{R}^+$ . Par rapport au cas avec dissipation, nous devons agrandir à  $H_{loc}^1(\Omega)$  l'espace de recherche de la solution car il n'existe pas nécessairement une solution dans  $H^1(\Omega)$ . Pour un milieu isotrope (i.e.  $A = Id$ ), la notion de *solution sortante* est définie en utilisant la condition classique de Sommerfeld (ici rappelée en 2D) :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - i\omega \right) p = 0 \quad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.39)$$

Pour un milieu anisotrope, on l'adapte en utilisant un changement de coordonnées particulier décrit dans [11]. Cette condition exprime que l'énergie transportée par la solution se "propage" vers l'infini de manière radiale (i.e. dans toutes les directions), et n'en vient pas (la source ne rayonne pas de l'infini). On sait alors que le problème ci-dessus (4.38) admet une unique solution.

Afin de construire la formulation multi-domaines du problème (4.38), nous allons reprendre la démarche présentée dans la section 4.2. Nous expliquerons au fur et à mesure les difficultés liées au cas non dissipatif. On rappelle qu'on note :

$$p^a = p|_{\Omega_a}, \quad \varphi^j = p|_{\Sigma_a^j} \quad \text{et} \quad p^j = p|_{\Omega_a^j} \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

### Résolution dans les demi-plans

La première étape consiste à résoudre les équations homogènes dans les demi-plans  $\Omega_a^j$ . Notons que dans le cas sans dissipation, les traces  $\varphi^j$  de la solution  $p$  sur les droites  $\Sigma_a^j$  sont dans  $H_{loc}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$  mais ne sont pas a priori dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$ . Plus précisément, comme expliqué dans la thèse d'Axel Tillequin [88], l'espace fonctionnel approprié dépend de la fréquence  $\omega$ . Dans le cas isotrope, cet espace est défini ainsi :

$$V_\omega = \left\{ \psi \in L_{loc}^2(\mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|\xi^2 - \omega^2|} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \quad (4.40)$$

Nous allons décrire les calculs dans le demi-plan  $\Omega_a^0$ , la démarche étant la même dans les autres demi-plans. On souhaite résoudre les équations homogènes :

$$\operatorname{div}(A\nabla P^0) + \omega^2 P^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_a^0, \quad (4.41)$$

où  $P^0 = \psi^0$  est donnée sur  $\Sigma_a^0$ . En appliquant la transformée de Fourier en  $y$  (au sens des distributions) à (4.41), on est ramené à résoudre l'EDO homogène suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad c_1 \partial_{xx}^2 \hat{P}^0(x, \xi) + 2i\xi c_3 \partial_x \hat{P}^0(x, \xi) + (\omega^2 - c_2 \xi^2) \hat{P}^0(x, \xi) = 0,$$

où on rappelle que  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont les coefficients de la matrice  $A$ . Le polynôme caractéristique de cette EDO admet deux racines

$$r_{\pm}^0(\xi) = \frac{-i\xi c_3 \pm i\sqrt{d}}{c_1} \quad \text{où} \quad d = c_1 \left( \omega^2 - \left( \frac{c_1 c_2 - (c_3)^2}{c_1} \right) \xi^2 \right), \quad (4.42)$$

dont on déduit les solutions générales de l'EDO :

$$\hat{P}^0(x, \xi) = A(\xi) e^{r_+^0(\xi)x} + B(\xi) e^{r_-^0(\xi)x}, \quad (4.43)$$

où  $A(\xi)$  et  $B(\xi)$  sont des coefficients complexes. Dans le cas avec absorption (i.e.  $\epsilon > 0$ ), voir section 4.2.2, nous avons montré que  $B(\xi) = 0$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . En effet,  $\text{Re}(r_-^0(\xi))$  était alors strictement positif, et donc le terme  $e^{r_-^0(\xi)x}$  tendait vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . La solution recherchée étant dans  $H^1(\Omega_a^0)$  (pour un milieu dissipatif), nous devons nécessairement avoir  $B(\xi) = 0$  pour tout  $\xi$ .

Dans le cas non dissipatif, on déduit par absorption limite que la solution "physique" doit vérifier  $B(\xi) = 0$  pour tout  $\xi$ . Par ailleurs, on peut directement raisonner dans le cas sans dissipation. Nous avons :

$$\text{Re}(r_{\pm}^0(\xi)) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \leq \sqrt{\frac{\omega^2 c_1}{c_1 c_2 - (c_3)^2}}, \\ \mp \frac{\text{Im}(\sqrt{d})}{c_1} > 0 & \text{si } |\xi| > \sqrt{\frac{\omega^2 c_1}{c_1 c_2 - (c_3)^2}}. \end{cases}$$

Soulignons que nous avons choisi la racine complexe qui conserve le signe de la partie imaginaire (c'est à dire dont la coupure est sur  $\mathbb{R}^-$ ). De plus, nous ne cherchons plus une solution dans  $H^1(\Omega_a^0)$  mais dans  $H_{loc}^1(\Omega_a^0)$ . Il est donc moins évident de faire un "tri" entre les deux solutions  $e^{r_+^0(\xi)x}$  et  $e^{r_-^0(\xi)x}$  par rapport au cas sans-dissipation. Afin de faire ce tri, nous allons utiliser le caractère sortant de la solution  $P^0$  dans  $\Omega_a^0$ . En effet, en appliquant la transformée de Fourier inverse à (4.43), il vient :

$$P^0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{r_+^0(\xi)x} e^{i\xi y} + B(\xi) e^{r_-^0(\xi)x} e^{i\xi y},$$

ce qui correspond à une somme (intégrale en  $\xi$ ) d'ondes planes  $e^{r_+^0(\xi)x+i\xi y}$  et  $e^{r_-^0(\xi)x+i\xi y}$ . Comme dans le cas du guide d'ondes au premier chapitre, voir section 1.1.2, on peut définir un sens de "propagation" des ondes planes (qui sont l'équivalent des modes). Cela nous permettra de définir la notion de solution sortante dans le demi plan  $\Omega_a^0$ .

- Pour  $|\xi| > \sqrt{\frac{\omega^2 c_1}{c_1 c_2 - (c_3)^2}}$  : nous avons  $\mp \text{Re}(r_{\pm}^0) > 0$  et donc les ondes  $e^{r_+^0(\xi)x+i\xi y}$  et  $e^{r_-^0(\xi)x+i\xi y}$  sont respectivement exponentiellement décroissantes et croissantes dans le sens des  $x > 0$ . Elles sont l'équivalent des modes évanescents dans un guide acoustique. Leurs sens de décroissance indiquent leurs "sens de propagation", et donc les ondes  $e^{r_+^0(\xi)x+i\xi y}$  se propagent vers la droite, et les ondes  $e^{r_-^0(\xi)x+i\xi y}$  se propagent vers la gauche.

- Pour  $|\xi| \leq \sqrt{\frac{\omega^2 c_1}{c_1 c_2 - (c_3)^2}}$  : nous avons  $\text{Re}(r_{\pm}^0) = 0$ . Les ondes  $e^{r_+^0(\xi)x+i\xi y}$  et  $e^{r_-^0(\xi)x+i\xi y}$  oscillent et ne sont plus décroissantes ou croissantes en  $x$ . Elles correspondent aux modes propagatifs dans un guide acoustique. Une manière de caractériser leurs sens de propagation est d'étudier le signe de l'intensité acoustique (voir [81]) dans la direction  $x$  qui est donné par :

$$\begin{aligned} \text{Im} \left( A \nabla \left( e^{r_{\pm}^0(\xi)x+i\xi y} \right) \cdot e_x \overline{e^{r_{\pm}^0(\xi)x+i\xi y}} \right) &= e^{r_{\pm}^0(\xi)x+r_{\pm}^0(\xi)x} \text{Im} \left( c_1 r_{\pm}^0(\xi) + c_3 i \xi \right), \\ &= \pm \sqrt{d}, \end{aligned}$$

où  $e_x = (1, 0)$ . À l'aide du signe du terme ci-dessus, on peut déterminer la direction de propagation de l'énergie transportée par l'onde plane. On déduit que les ondes  $e^{r_+^0(\xi)x+i\xi y}$  se propagent vers la droite (car  $\sqrt{d} > 0$ ), et inversement pour les ondes planes  $e^{r_-^0(\xi)x+i\xi y}$ .

**Remarque 4.4.1** De manière générale, l'intensité acoustique d'une onde plane  $e^{ik_x x + ik_y y}$  dans la direction  $d = (d_x, d_y)$  est définie par

$$\text{Im} \left( A \nabla \left( e^{ik_x x + ik_y y} \right) \cdot d \overline{e^{ik_x x + ik_y y}} \right) = \text{Im} \left( d_x (c_1 i k_x + c_3 i k_y) + d_y (c_3 i k_x + c_2 i k_y) \right).$$

Une solution est donc *sortante* dans le demi-plan  $\Omega_a^0$  si elle s'écrit comme la "somme" d'ondes planes se propageant vers la droite. Par conséquent, il vient que  $B(\xi) = 0$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . Étant donnée  $\psi^0 \in H_{loc}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^0) \cap V_{\omega}$  (où l'espace  $V_{\omega}$  est défini par (4.40)), on notera dans la suite :

$$P^0(\psi^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}^0(\xi) e^{r_+^0(\xi)(x-a)} e^{i\xi y} d\xi, \quad \forall (x, y) \in \Omega_a^0, \quad \text{où } r^0(\xi) = r_+^0(\xi), \quad (4.44)$$

la solution *sortante* de l'équation homogène (4.41) vérifiant  $P^0(\psi^0) = \psi^0$  sur  $\Sigma_a^0$ . En particulier, par définition de  $\varphi^0$  nous avons

$$p^0 = p|_{\Omega_a^0} = P^0(\varphi^0).$$

De manière générale, dans le cas sans dissipation, les  $P^j(\cdot)$  sont définis dans la proposition (4.2.5), en remplaçant formellement  $\omega_{\epsilon}$  par  $\omega$ , et en considérant les fonctions  $\psi \in H_{loc}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j) \cap V_{\omega}$ .

### Les relations de compatibilité et la reformulation

Étant données les représentations en ondes planes dans les quatre demi-plans  $\Omega_a^j$ , nous pouvons maintenant discuter les relations de compatibilité. On sait qu'on doit assurer dans l'intersection des demi-plans

$$p^j = p^{j\pm 1} \quad \text{dans } \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (4.45)$$

Ces relations impliquent en particulier la compatibilité des traces sur les bords des demi-plans :

$$\varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j \quad \text{où } D_{j\pm 1}^j(\cdot) = P^j(\cdot)|_{\Sigma_a^{j\pm 1}} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (4.46)$$

Notons que l'expression explicite des opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  est la même que celle donnée dans la définition 4.2.2, en remplaçant  $\omega_{\epsilon}$  par  $\omega$ .

Par ailleurs, nous devons également assurer les raccords en traces et en dérivées normales sur les bords  $\Sigma_{aa}^j$  de  $\Omega_a^j$  :

$$\left. \begin{array}{l} p^a = \varphi^j|_{\Sigma_{aa}^j} \\ A\nabla p^a \cdot \nu|_{\Sigma_{aa}^j} = \Lambda^j(\varphi^j) \end{array} \right\} \text{ sur } \Sigma_{aa}^j, \quad \text{où } \Lambda^j(\cdot) = A\nabla P^j(\cdot) \cdot \nu|_{\Sigma_{aa}^j} \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (4.47)$$

Nous avons vu dans la section 4.2.3 qu'il y a une difficulté pour donner un sens au raccord des dérivées normales. Pour palier ce problème, on considère les inconnues  $\varphi^j \in H_{loc}^1(\Sigma_a^j) \cap V_\omega$ . Rappelons que les traces  $\varphi^j$  étant éloignées de l'obstacle  $\mathcal{O}$  et du support de la source  $f$ , nous savons par des arguments de régularité intérieure que  $\varphi^j = p|_{\Sigma_a^j} \in H_{loc}^s(\Sigma_a^j)$ , pour tout  $s \geq 0$ . On peut donc bien chercher  $\varphi^j \in H_{loc}^1(\Sigma_a^j) \cap V_\omega$ .

À l'aide des relations (4.46) et (4.47), nous pouvons reformuler le problème de diffraction (4.38) avec les variables  $p^a$  et  $\varphi^j$  ainsi :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p^a \in H^1(\Omega_a) \text{ et } \varphi^j \in H_{loc}^1(\Sigma_a^j) \cap V_\omega \text{ tels que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(A\nabla p^a) + \omega^2 p^a = f & \text{dans } \Omega_a, \\ A\nabla p^a \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ A\nabla p^a \cdot \nu = \Lambda^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^j = p^a & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{array} \quad (4.48)$$

Par construction, nous savons que ce problème admet au moins une solution. Cependant, à la différence du cas avec dissipation, nous ne savons pas montrer que cette reformulation est équivalente au problème initial (4.38), ou qu'elle admet une unique solution.

Supposons un moment que nous pouvons montrer l'unicité pour le problème (4.48). On peut noter que dans notre reformulation, on a imposé à la solution d'être *sortante* uniquement dans les 4 directions données par les 4 demi-plans  $\Omega_a^j$ , et pas de manière radiale comme dans la condition de Sommerfeld (4.39). Les 2 problèmes (4.38) et (4.48) étant supposés équivalents, on montre alors qu'une manière simple de caractériser la solution *sortante* du problème initial est d'imposer qu'elle soit *sortante* dans les 4 demi-plans uniquement. Ce point est d'autant plus important en élasticité où il n'existe pas d'équivalent de la condition de Sommerfeld pour les milieux anisotropes (pour les milieux isotropes, on peut formuler un équivalent via la décomposition de Helmholtz, voir [48]).

**Remarque 4.4.2** *Remarquons que si on cherche à montrer l'équivalence entre la formulation multi-domaines (4.48) et le problème initial (4.38) en suivant la démarche de la preuve de la proposition 4.2.9, on arrive pas à conclure. En effet, considérons  $(p^a, \{\varphi^j\}_{j \in \{0,1,2,3\}})$  solution de (4.48). On souhaite vérifier la compatibilité dans les quarts de plan, c'est à dire :*

$$P^j(\varphi^j) = P^{j\pm 1}(\varphi^{j\pm 1}) \quad \text{dans } \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (4.49)$$

Dans  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$  par exemple, si on considère la différence  $v = P^0(\varphi^0) - P^1(\varphi^1)$ , nous avons alors  $v$  solution des équations homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(A\nabla v) + \omega^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_a^0 \cap \Omega_a^1, \\ v = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1). \end{array} \right. \quad (4.50)$$

À la différence du cas sans dissipation, ce problème (4.50) n'est pas coercif. De plus, nous ne savons a priori pas si  $v$  vérifie la condition de Sommerfeld, ce qui nous aurait permis de conclure que  $v = 0$ . Nous savons juste que  $v$  est la différence de deux solutions sortantes dans deux demi-plans.

#### 4.4.2 Validations numériques

Malgré ces difficultés théoriques, nous avons testé numériquement la méthode. La discrétisation de la formulation multi-domaines (4.48) dans le cas sans dissipation ne présente pas de difficulté particulière. Notons simplement que nous devons tronquer à une distance  $T$  les droites  $\Sigma_a^j$  avant de mettre le problème sous forme variationnelle. Ainsi, on définit les fonctions  $\varphi^j$  dans  $H^1(\Sigma_{aT}^j)$ , et on peut appliquer une formulation variationnelle comme décrit dans la section 4.3.1. Pour le reste de la discrétisation, tout est similaire à ce que nous avons vu dans la section 4.3.2.

Rappelons qu'en plus de tronquer les droites  $\Sigma_a^j$ , nous devons faire deux autres approximations. Notre approche nécessite de tronquer à  $T_\xi$  l'intervalle d'intégration en  $\xi$  dans les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  et  $\Lambda^j$ . De plus, pour approcher ces intégrales, on doit utiliser une formule de quadrature. Nous avons donc 3 paramètres : la troncature  $T$ , la troncature  $T_\xi$  et la formule de quadrature noté  $(\mathcal{Q}_{T_\xi}, q_\xi)$ .

#### Influence des paramètres de discrétisation

L'influence des paramètres  $T$ ,  $T_\xi$  et la quadrature  $(\mathcal{Q}_{T_\xi}, q_\xi)$  a été étudiée dans la section 4.3.3 pour un milieu dissipatif. Nous avons pu voir notamment que la quadrature doit être adaptée à la dissipation car les intégrandes à approcher deviennent très oscillantes lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

Le but ici sera de vérifier numériquement les conjectures (4.34) et (4.35) faites sur l'influence des paramètres  $T$  et  $T_\xi$ . Pour cela, nous allons utiliser notre situation "test" décrite au début de la section 4.3.3. Rappelons qu'on mesure l'erreur relative (notée  $\text{err}_{\text{rel}}$ ) entre  $\varphi^0$  calculée numériquement et la trace de la solution exacte sur le segment  $\Sigma_{aT}^0$  correspondant aux droites tronquées.

**Remarque 4.4.3** *Nous avons testé la convergence des éléments finis et on observe comme dans l'exemple Figure 4.13 qu'ils convergent bien. Cependant, l'erreur due aux éléments finis est rapidement inférieure aux erreurs dues aux autres paramètres de discrétisation  $T$ ,  $T_\xi$  et  $(\mathcal{Q}_{T_\xi}, q_\xi)$ .*

Commençons avec le paramètre  $T$ . Nous avons vu précédemment dans le cas dissipatif que l'erreur induite par la troncature  $T$  semble se comporter en  $e^{-2\epsilon(T-a)}/\sqrt{T-a}$ . On rappelle que  $a$  désigne la taille du domaine  $\Omega_a$ . Dans le cas sans dissipation, ce modèle tend vers le comportement de l'erreur suivant :

$$\text{err}_{\text{rel}} \sim \frac{1}{\sqrt{T-a}}. \quad (4.51)$$

Nous avons essayé de vérifier numériquement cette hypothèse. Sur la Figure 4.17, nous avons représenté l'évolution de l'erreur relative (en  $\log_{10}$ ) en fonction du paramètre  $T$  pour deux fréquences  $\omega = 5$  et  $\omega = 10$ . On rappelle que les autres paramètres d'approximation sont choisis suffisamment précis pour ne pas avoir d'influence sur l'erreur. Les deux courbes bleues appelées

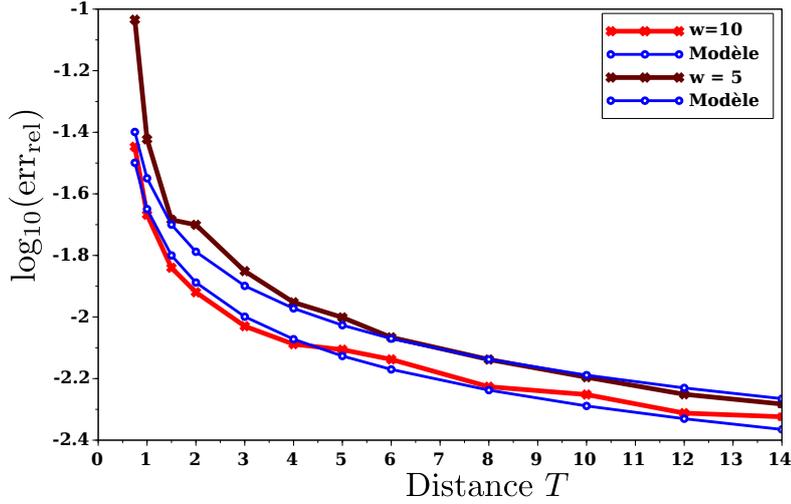


FIGURE 4.17 – Évolution de l'erreur  $\text{err}_{\text{rel}}$  en fonction du paramètre  $T$ .

*Modèles* correspondent aux courbes obtenues à l'aide de (4.51). Soulignons qu'afin de mieux voir la correspondance avec nos résultats, nous les avons simplement translaté verticalement. On observe ainsi que notre conjecture semble numériquement valide. Par ailleurs, on peut noter que l'échelle d'erreur est plus grande que dans le cas dissipatif, voir Figure 4.9.

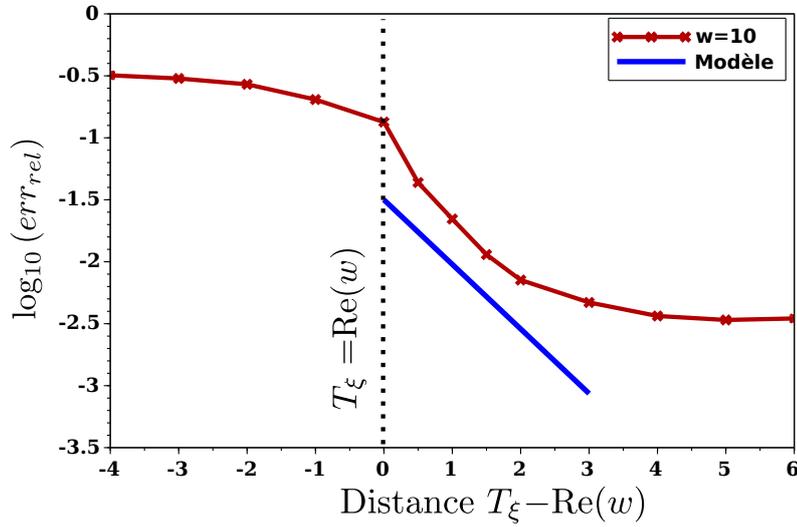


FIGURE 4.18 – Évolution de l'erreur  $\text{err}_{\text{rel}}$  en fonction du paramètre  $T_\xi - \omega$ .

Discutons maintenant l'influence du paramètre  $T_\xi$ . L'hypothèse que nous avons établie pour ce paramètre est la suivante :

$$\forall T_\xi > \omega, \quad \text{err}_{\text{rel}} \sim e^{-(T_\xi - \omega)}. \quad (4.52)$$

Sur la Figure 4.18, nous avons représenté l'évolution du  $\log_{10}(\text{err}_{\text{rel}})$  en fonction de  $T_\xi - \omega$  pour  $\omega = 10$ . Comme précédemment, on observe que pour  $T_\xi < \omega$ , l'erreur est grande et reste approximativement constante. Pour  $T_\xi > \omega$ , elle décroît vite au début (un peu plus vite que

notre modèle), puis atteint un palier correspondant à une erreur d'environ  $10^{-2.5}$ .

Ce palier est atteint car l'erreur due au paramètre  $T$  devient prépondérante. Sans la dissipation,  $\text{err}_{\text{rel}}$  décroît lentement avec  $T$ , et il devient très coûteux de prendre de grandes valeurs de  $T$ . C'est pourquoi nous n'avons pas pu pousser plus loin ce test.

**Remarque 4.4.4** *Une façon de résoudre ce problème serait d'ajouter à l'espace de discrétisation des variables  $\varphi^j$  la fonction test  $w = \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{x}}$ . Cette fonction permet de prendre en compte le comportement à l'infini de la solution. Faut de temps cette amélioration n'a pas été faite, mais serait très intéressante pour approfondir l'étude numérique dans le cas sans dissipation. Soulignons néanmoins qu'il n'est pas évident de prendre une telle fonction dans l'espace de discrétisation car elle n'est pas dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Par conséquent, le calcul du terme de masse  $(w, w)_{L^2}$  intervenant dans la discrétisation des équations de compatibilité (4.46) est impossible. Il est nécessaire de considérer un espace variationnel plus adapté comme décrit dans [88, 20].*

### Comparaison à d'autres méthodes

Comme second test, nous avons comparé les résultats de notre méthode avec ceux obtenus par deux autres approches :

- les couches parfaitement adaptées (PML), que nous avons déjà présentées,
- et les couches absorbantes non parfaitement adaptées utilisant un milieu dissipatif.

Rappelons que la méthode des PML est valide uniquement si aucune onde inverse ne se propage dans le milieu considéré. En revanche, la méthode des couches dissipatives fonctionne même en présence d'ondes inverses, mais elle nécessite de prendre des couches suffisamment larges pour réduire l'effet des réflexions parasites induites par le changement de milieu.

Pour comparer notre méthode aux deux autres approches citées ci-dessus, nous avons considéré deux cas tests. Tout d'abord, un milieu homogène (sans défaut) isotrope avec les paramètres suivants :

$$\omega = 20, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = 6, \quad T_\xi = 30.$$

Nous avons utilisé une quadrature de Gauss d'ordre 2 avec 600 intervalles. Sur la Figure 4.19, nous avons représenté la partie réelle de la solution obtenue en considérant une source  $f$  gaussienne (tronquée) localisée en  $(0, 0)$ . Cette solution a été calculée par les trois approches : PMLs (à gauche), notre méthode (au centre) et les couches dissipatives (à droite). Nous pouvons

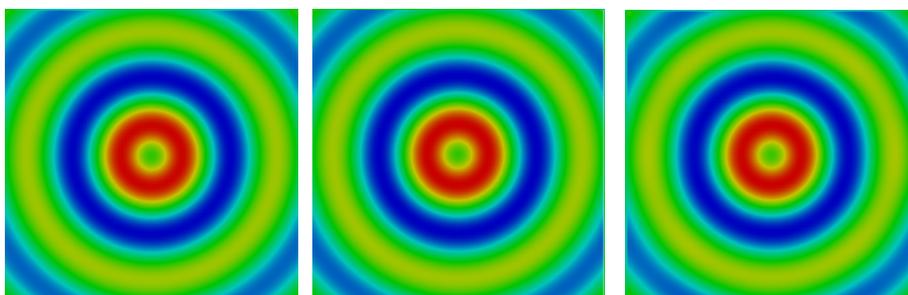


FIGURE 4.19 – Cas isotrope : Représentation de la partie réelle de la solution  $p^a$  dans le domaine  $\Omega_a$  en utilisant : à gauche les PML, au centre notre méthode, et à droite les couches dissipatives.

constater un (très) bon accord entre les trois méthodes.

Nous avons effectué le même test en considérant un milieu anisotrope avec les paramètres suivants :

$$\omega = 20, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = 6, \quad T_\xi = 30,$$

et la même quadrature. Sur la Figure 4.20, nous avons tracé la partie réelle de la solution obtenue à l'aide des trois méthodes. On observe maintenant que les PML conduisent à un résultat

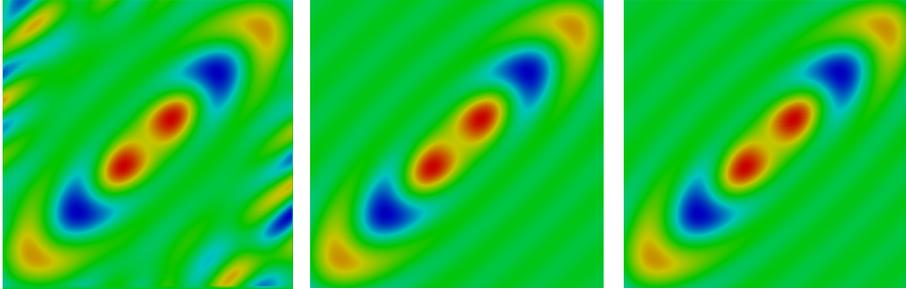


FIGURE 4.20 – Cas anisotrope : Représentation de la partie réelle de la solution  $p^a$  dans le domaine  $\Omega_a$  en utilisant : à gauche les PML, au centre notre méthode, et à droite les couches absorbantes.

différent (et faux) des deux autres approches. Les deux autres méthodes elles concordent bien.

**Remarque 4.4.5** *En régime temporel, il est bien connu que la solution calculée avec des PML et en présence d'ondes inverses est instable (voir [12]). Cependant, en régime harmonique on ne peut plus parler d'instabilité, et le comportement de l'erreur est moins évident. Dans le cas d'un guide d'ondes unidirectionnel, une analyse de l'erreur commise par l'utilisation de PML est donnée dans [18]. Ici, on peut observer que l'erreur commise en utilisant les PML semble localisée à l'interface entre le domaine "physique"  $\Omega_a$  et la couche PML (non représentée sur le dessin). Plusieurs tests nous ont montré que cette erreur dépend fortement du choix du coefficient PML. Une étude plus précise afin de mieux comprendre ce comportement est actuellement en cours.*

# ÉTUDE THÉORIQUE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DU PROBLÈME EXTÉRIEUR

---

## Sommaire

---

<b>5.1 Problème modèle</b>	<b>146</b>
5.1.1 Introduction	146
5.1.2 Quelques rappels sur les opérateurs à noyau de Hilbert-Schmidt	146
5.1.3 Le cas de l'opérateur de Laplace	147
5.1.4 Application au problème modèle	149
<b>5.2 Extensions du cas modèle</b>	<b>150</b>
5.2.1 Le cas d'une fréquence complexe	150
5.2.2 Le cas du système d'équations intégrales couplées	154
<b>5.3 Quelques remarques</b>	<b>162</b>
5.3.1 Le cadre fonctionnel $H^1$	162
5.3.2 Généralisation au cas anisotrope	164
5.3.3 La formulation complète	167

---

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'afin d'assurer la compatibilité des représentations dans les demi-plans, on impose des conditions de transmission sur les bords des demi-plans. Ces conditions de transmission s'expriment à l'aide d'opérateurs intégraux et l'objectif de ce chapitre est d'étudier leurs propriétés. En particulier, nous allons chercher à montrer que ces équations intégrales conduisent à un problème de type Fredholm. Ce point est important car il permet notamment de garantir la convergence des éléments finis.

Ce chapitre est décomposé en trois parties. Tout au long de ce chapitre, nous nous plaçons dans le cas d'un milieu dissipatif. La première partie présente une situation modèle permettant d'exposer les idées. Dans la deuxième partie, nous discuterons deux extensions du problème modèle permettant de montrer le caractère Fredholm des équations intégrales assurant la compatibilité des représentations dans les demi-espaces. Pour ces deux premières parties, on considère le cas d'un milieu isotrope, ce qui est plus simple pour les calculs, et on se place dans le cadre fonctionnel  $L^2$ . Nous terminerons ce chapitre avec quelques remarques sur certaines généralisations de nos résultats.

## 5.1 Problème modèle

### 5.1.1 Introduction

Dans cette section, le problème modèle que nous considérons est le suivant : étant donné  $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ ,

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^+) \text{ tel que} \\ & \left| \varphi - D\varphi = g \quad \text{sur } \mathbb{R}^+, \right. \end{aligned} \tag{5.1}$$

où l'opérateur  $D$  est défini par :

$$D\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} d\xi \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\xi y} dy. \tag{5.2}$$

$\widehat{\varphi}(\xi)$  correspond à la transformée de Fourier (voir définition 4.2.1) de  $\varphi$  prolongée par 0 sur  $\mathbb{R}^-$ . Par ailleurs, soulignons que  $D$  correspond à l'opérateur qui à  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$  associe la trace  $D\psi = p|_{\mathbb{R}^+ \times \{y=0\}}$  de  $p$ , où  $p$  est la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \text{ telle que} \\ & \left| \begin{array}{ll} \Delta p - p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ p = \psi & \text{sur } \{x = 0\} \times \mathbb{R}^+, \\ p = 0 & \text{sur } \{x = 0\} \times \mathbb{R}^-. \end{array} \right. \end{aligned} \tag{5.3}$$

On retrouve l'expression (5.2) de  $D$  en résolvant le problème ci-dessus à l'aide de la transformée de Fourier, comme dans la section 4.2.2 du chapitre précédent. De plus, on sait grâce au théorème de trace que l'opérateur  $D$  est continu de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . Il est plus difficile de montrer le résultat directement avec l'expression (5.2) de  $D$ .

Dans la suite de cette section, nous allons retrouver la continuité de  $D$  et nous allons calculer sa norme. Cela nous permettra de prouver que le problème modèle (5.1) est bien posé.

### 5.1.2 Quelques rappels sur les opérateurs à noyau de Hilbert-Schmidt

Ces rappels nous seront utiles principalement pour les sections 5.2.1 de ce chapitre, et 6.2 du prochain chapitre. Considérons une fonction  $k(\cdot, \cdot)$  définie sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . On définit, pour l'instant de manière formelle, l'opérateur à noyau  $T_k$  associé à  $k(\cdot, \cdot)$  comme suit : à toute fonction  $\psi$  définie sur  $\mathbb{R}^+$ , on associe la fonction  $T_k\psi$  également définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$T_k\psi(x) = \int_0^{+\infty} k(x, \xi)\psi(\xi)d\xi, \quad \forall x \geq 0. \tag{5.4}$$

Lorsque le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  est dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , alors pour tout  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , la fonction  $T_k\psi$  est également dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . En effet, il vient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \| T_k\psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 &= \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} k(x, \xi)\psi(\xi)d\xi \right|^2 dx, \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |k(x, \xi)|^2 d\xi dx \cdot \| \psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2. \end{aligned}$$

On en déduit que l'opérateur  $T_k$  est borné et sa norme vérifie :

$$\|T_k\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))}^2 \leq \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |k(x, \xi)|^2 d\xi dx \quad (5.5)$$

On parle alors d'opérateur de Hilbert-Schmidt.

**Théorème 5.1.1** *Si le noyau  $k(\cdot, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , alors l'opérateur associé  $T_k$  est compact sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$ .*

Ce résultat classique est important et nous l'utiliserons abondamment dans la suite. On peut en trouver une démonstration dans [84].

De manière générale, il faut souligner qu'un opérateur à noyau  $T_k$  peut être continu sans que son noyau  $k(\cdot, \cdot)$  soit dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ . Un exemple simple est la transformée de Fourier qui correspond au noyau  $k(x, \xi) = \frac{e^{-ix\xi}}{\sqrt{2\pi}}$  (ici le domaine de  $k(\cdot, \cdot)$  est  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ). Le noyau n'est clairement pas dans  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , et on sait par ailleurs que cette transformation de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  est de norme 1. L'ensemble des opérateurs à noyau de Hilbert-Schmidt est un sous-ensemble des opérateurs à noyau continus. On peut définir une norme sur ce sous-ensemble :

$$\|T_k\|_{H.S.} = \|k(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)}.$$

Soulignons que cette norme est toujours plus grande que la norme "classique" des opérateurs, voir l'inégalité (5.5).

Dans notre cas, l'opérateur  $D$  défini par (5.2) peut être vu comme la composition de la transformée de Fourier et d'un opérateur à noyau :

$$D\psi = T_k \hat{\psi}, \quad \text{où } k(x, \xi) = \frac{e^{-\sqrt{1+\xi^2}x}}{\sqrt{2\pi}} \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  est ici défini sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Malheureusement, on ne peut pas appliquer directement la théorie des opérateurs de Hilbert-Schmidt à  $T_k$  car le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  n'est pas dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ . Pour s'en convaincre, il suffit de faire le calcul direct :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-\sqrt{1+\xi^2}x}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 d\xi dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-\sqrt{1+\xi^2}x}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 dx d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-2\sqrt{1+\xi^2}x} dx d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{1+\xi^2}} d\xi = +\infty. \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.1.3 Le cas de l'opérateur de Laplace

Un exemple bien connu d'opérateur à noyau qui n'est pas de Hilbert-Schmidt est la transformée de Laplace, notée  $L$ . Nous allons détailler cet exemple qui nous sera utile pour la suite. La transformée de Laplace est définie comme un opérateur à noyau  $L = T_k$  où le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  est :

$$k(x, \xi) = e^{-x\xi}, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \quad (5.8)$$

Comme précédemment pour  $D$  (voir équation (5.7)), le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  ci-dessus n'est pas dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ . Néanmoins,  $L$  est un opérateur continu dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ .

**Théorème 5.1.2** *L'opérateur  $L$  est borné dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$  et vérifie*

$$\| L \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))} \leq \sqrt{\pi}.$$

**Preuve :** Pour montrer ce résultat, nous utilisons la démarche présentée dans [54]. On commence par majorer l'intégrale comme suit :

$$|L\psi(x)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \psi(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x\xi}{2}} \xi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x\xi}{2}} \xi^{\frac{1}{4}} |\psi(\xi)| d\xi.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$|L\psi(x)|^2 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \xi^{-\frac{1}{2}} d\xi \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \xi^{\frac{1}{2}} |\psi(\xi)|^2 d\xi. \quad (5.9)$$

À l'aide de deux changements de coordonnées astucieux, nous pouvons calculer explicitement la première intégrale ci-dessus. Commençons par poser  $Y = x\xi$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \xi^{-\frac{1}{2}} d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-Y} \frac{Y^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{x} dY = x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-Y} Y^{-\frac{1}{2}} dY$$

Ensuite, en posant  $z = \sqrt{Y}$ , il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} y^{-\frac{1}{2}} dy = 2x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} x^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.10)$$

Utilisons ce résultat dans (5.9). En intégrant en  $x$  l'expression (5.9) et en appliquant le théorème de Fubini, il vient :

$$\| L\psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \leq \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x\xi} \xi^{\frac{1}{2}} |\psi(\xi)|^2 d\xi dx = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x\xi} dx \xi^{\frac{1}{2}} |\psi(\xi)|^2 d\xi.$$

Or, nous venons de voir avec (5.10) qu'on peut calculer explicitement l'intégrale en  $x$  ci-dessus. Ainsi, il vient :

$$\| L\psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \leq \pi \int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} |\psi(\xi)|^2 d\xi = \pi \| \psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2,$$

d'où le résultat. ■

**Remarque 5.1.3** *On peut prouver (voir [36]) que la norme de l'opérateur  $L$  est exactement  $\sqrt{\pi}$ . Une manière de s'en convaincre est de remarquer que (comme nous l'avons vu avec l'équation (5.10) dans la démonstration) :*

$$Lu(x) = \sqrt{\pi}u(x), \quad \text{où } u(x) = x^{-1/2}.$$

*Soulignons cependant que ce n'est pas une preuve car la fonction  $u(x)$  n'est pas une fonction propre de  $L$  (elle n'est pas dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ ).*

En remarquant que  $e^{-\sqrt{1+\xi^2}x} < e^{-\xi x}$  pour tout  $(\xi, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , et en reprenant la preuve du théorème 5.1.2, on montre :

**Lemme 5.1.4** *L'opérateur  $T_k$  associé à  $k(x, \xi) = e^{-\sqrt{1+\xi^2}x}$  est continu et sa norme vérifie  $\| T_k \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))} \leq \sqrt{\pi}$ .*

### 5.1.4 Application au problème modèle

Nous allons maintenant utiliser ce que nous venons de voir pour le problème modèle. On rappelle qu'on identifie  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$  à la fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  égale à  $\psi$  sur  $\mathbb{R}^+$  et 0 sur  $\mathbb{R}^-$ . Par définition (5.2) de  $D$ , nous avons pour tout  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$  :

$$\begin{aligned}
 D\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \psi(y) e^{-i\xi y} dy e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} d\xi, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \psi(y) e^{-i\xi y} dy e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} d\xi + \int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} \psi(y) e^{-i\xi y} dy e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(|y|) e^{-i\xi y} dy e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} d\xi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T_k \widehat{\psi}_s(x), \quad \text{où } \psi_s(y) = \psi(|y|),
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

et le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  de l'opérateur  $T_k$  ci-dessus est défini par :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad k(x, \xi) = e^{-\sqrt{\xi^2+1}x}. \tag{5.12}$$

La fonction  $\psi_s(y) = \psi(|y|)$  correspond à symétriser  $\psi$  sur tout  $\mathbb{R}$ . Il est utile pour la suite de remarquer que sa transformée de Fourier vérifie :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\psi}_s(-\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(|y|) e^{i\xi y} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(|y|) e^{-i\xi y} dy = \widehat{\psi}_s(\xi).
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

L'opérateur  $D$  est donc la composition entre la transformée de Fourier du symétrisé de  $\psi$ , et l'opérateur à noyau  $T_k$ . D'après le lemme 5.1.4, on déduit que  $D$  continu, et de plus nous avons :

**Théorème 5.1.5** *L'opérateur  $D$  de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  dans lui-même est continu et sa norme vérifie :*

$$\| D \| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Remarque 5.1.6** *On pense qu'il y a même égalité car nous avons formellement :*

$$Du(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} u(x), \quad \text{pour } u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

*Encore fois, ceci n'est pas une démonstration car  $u \notin L^2(\mathbb{R}^+)$ .*

**Preuve :** Soit  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . En utilisant le résultat de (5.11) et le lemme 5.1.4, il vient :

$$\begin{aligned}
 \| D\psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| T_k \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))} \| \widehat{\psi}_s \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| \widehat{\psi}_s \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que  $\widehat{\psi}_s(-\xi) = \widehat{\psi}_s(\xi)$  (voir équation (5.13)), et donc (en utilisant l'égalité de Plancherel) :

$$\|\widehat{\psi}_s\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \int_0^{+\infty} |\widehat{\psi}_s(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}_s(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2} \|\psi_s\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Or, par définition de la fonction  $\psi_s(y) = \psi(|y|)$ , nous avons  $\|\psi_s\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2 \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ . On en déduit donc :

$$\|D\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

■

**Corollaire :** *Le problème modèle (5.1) est bien posé et admet une unique solution.*

**Preuve :** Définissons la série suivante :

$$\sum_{k \geq 0} D^k.$$

Grâce au théorème 5.1.5, on montre que cette série est convergente car :

$$\left\| \sum_{k \geq 0} D^k \right\|^2 \leq \sum_{k \geq 0} \|D^k\|^2 = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2k} < +\infty$$

Elle nous permet ainsi de définir un opérateur continu de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  dans lui-même. De plus, cette série nous donne l'inverse de  $I - D$  :

$$(I - D) \sum_{k \geq 0} D^k = \sum_{k \geq 0} D^k (I - D) = I.$$

$I - D$  est donc inversible et d'inverse continu.

■

## 5.2 Extensions du cas modèle

Nous allons maintenant étudier deux extensions du cas modèle. Tout d'abord, le cas d'une fréquence complexe dans la section 5.2.1, puis le cas d'un système d'équations intégrales couplées dans la section 5.2.2.

### 5.2.1 Le cas d'une fréquence complexe

Dans cette section, on considère le problème suivant : pour une donnée  $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ ,

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^+) \text{ tel que} \\ &| \varphi - D_{\omega_\epsilon} \varphi = g \text{ sur } \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{5.14}$$

L'opérateur  $D_{\omega_\epsilon}$  est défini ainsi :

$$D_{\omega_\epsilon} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2} x} d\xi, \quad \forall x \geq 0, \tag{5.15}$$

où  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . On rappelle que pour le calcul de la transformée de Fourier, on prolonge  $\psi$  sur  $\mathbb{R}^-$  par 0. Remarquons par ailleurs que  $D_{\omega_\epsilon}$  correspond à l'opérateur qui à  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$  associe la trace  $D_{\omega_\epsilon}\psi = p|_{\mathbb{R}^+ \times \{y=0\}}$  de  $p$  où  $p$  est la solution du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \text{ telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + \omega_\epsilon^2 p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ p = \psi & \text{sur } \{x = 0\} \times \mathbb{R}^+, \\ p = 0 & \text{sur } \{x = 0\} \times \mathbb{R}^-. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.16)$$

**Théorème 5.2.1** *L'opérateur  $I - D_{\omega_\epsilon}$  de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  dans lui-même est de type Fredholm.*

**Preuve :** Pour montrer ce résultat, on décompose  $I - D_{\omega_\epsilon}$  en une partie inversible et une partie compacte :

$$I - D_{\omega_\epsilon} = I - D + D - D_{\omega_\epsilon}.$$

Nous savons par le corollaire 5.1.4 que  $I - D$  est un opérateur inversible. Il reste donc à montrer que  $D - D_{\omega_\epsilon}$  est compact. Par définition, nous avons :

$$[(D - D_{\omega_\epsilon})\psi](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(\xi) \left( e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} - e^{-\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x} \right) d\xi = T_{\tilde{k}}\widehat{\psi}(x),$$

où  $T_{\tilde{k}}$  est l'opérateur à noyau associé à

$$\tilde{k}(x, \xi) = e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} - e^{-\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x}, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Pour montrer que  $T_{\tilde{k}}$  est compact, nous allons montrer qu'il est de Hilbert-Schmidt (voir le théorème 5.1.1). On va donc montrer que  $\tilde{k}(\cdot, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ , c'est à dire :

$$\|\tilde{k}\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})} = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} - e^{-\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x}|^2 d\xi dx < +\infty. \quad (5.17)$$

Pour ce faire, on découpe l'intégrale en  $x$  en deux parties, et on va montrer que chaque partie est bien définie. Pour tout  $a > 0$  fixé, nous avons :

$$\|\tilde{k}\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})} = \int_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{k}(x, \xi)|^2 d\xi dx + \int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{k}(x, \xi)|^2 d\xi dx \quad (5.18)$$

1. Commençons avec l'intégrale sur  $[a, +\infty[$  :

$$\int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} - e^{-\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x}|^2 d\xi dx \leq \int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sqrt{\xi^2+1}x} + e^{-2\operatorname{Re}(\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x)} d\xi dx.$$

L'intégrale de  $e^{-2\sqrt{\xi^2+1}x}$  est bornée. En effet, nous avons en appliquant le théorème de Fubini :

$$\int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sqrt{\xi^2+1}x} d\xi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sqrt{\xi^2+1}a}}{2\sqrt{\xi^2+1}} d\xi < +\infty.$$

On montre exactement de même que

$$\int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\operatorname{Re}(\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x)} d\xi dx < +\infty,$$

en utilisant la dissipation. En effet, comme  $\epsilon > 0$ , le terme  $\operatorname{Re}(\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2})$  ne s'annule jamais quel que soit  $\xi \in \mathbb{R}$ . De plus, la limite de  $\operatorname{Re}(\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2})$  quand  $|\xi| \rightarrow +\infty$  est  $+\infty$ , et donc le terme  $e^{-2\operatorname{Re}(\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x)}$  tend exponentiellement vite vers 0 avec  $\xi$  pour tout  $x > 0$ .

2. Discutons maintenant l'intégrale entre  $[0, a]$  dans (5.18) :

$$\int_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\sqrt{\xi^2+1}x} - e^{-\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x}|^2 d\xi dx = \int_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sqrt{\xi^2+1}x} |1 - e^{-q(\xi)x}|^2 d\xi dx \quad (5.19)$$

où

$$q(\xi) = \left( \sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2} - \sqrt{\xi^2 + 1} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

On peut reformuler  $q(\xi)$  comme suit :

$$q(\xi) = \frac{-(1 + \xi^2) + (\xi^2 - \omega_\epsilon^2)}{\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2} + \sqrt{\xi^2 + 1}} = \frac{-(1 + \omega_\epsilon^2)}{\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2} + \sqrt{\xi^2 + 1}}.$$

$q(\xi)$  est donc borné pour tout  $\xi$  et est décroissant en  $1/\xi$  pour  $|\xi| \rightarrow +\infty$ . Par ailleurs, on peut montrer qu'il existe des constantes  $C > 0$  et  $C' > 0$  telles que pour tout complexe  $z$  vérifiant  $|z| < C$ , nous avons :

$$|1 - e^z| \leq C'|z|.$$

On en déduit en particulier que pour  $a$  assez petit, nous avons  $|q(\xi)x| < C$  (car  $x \in [0, a]$  et  $|q(\xi)|$  est borné), et donc :

$$|1 - e^{-q(\xi)x}|^2 \leq (C')^2 |xq(\xi)|^2.$$

Par conséquent, en injectant cette inégalité dans l'équation (5.19), il vient :

$$\int_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{k}(x, \xi)|^2 d\xi dx \leq (C')^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |q(\xi)|^2 \int_0^a x^2 e^{-2\sqrt{\xi^2+1}x} dx d\xi$$

Dans l'intégrale en  $x$ , nous avons pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-2\sqrt{\xi^2+1}x} < 1$  et  $x^2 < a^2$ . De plus,  $|q(\xi)|^2$  étant intégrable sur  $\mathbb{R}$ , le terme ci-dessus est borné.

Avec les points 1 et 2 ci-dessus, nous avons montré (5.17), et donc que  $T_{\tilde{k}}$  est de Hilbert-Schmidt. ■

On déduit aisément de ce théorème la continuité de  $D_{\omega_\epsilon}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . En effet en remarquant simplement que  $D_{\omega_\epsilon} = D_{\omega_\epsilon} - D + D$ , par continuité de  $D$  et comme  $D_{\omega_\epsilon} - D$  est un opérateur à noyau de Hilbert-Schmidt (voir la preuve ci-dessus), il vient :

**Proposition 5.2.2** *L'opérateur  $D_{\omega_\epsilon}$  de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  dans lui-même est continu.*

De plus, grâce au théorème 5.2.1 ci-dessus, nous savons que le problème (5.14) relève de l'alternative de Fredholm. De plus, on montre qu'il est bien posé :

**Proposition 5.2.3** *Le problème (5.14) est bien posé.*

**Preuve :** Comme le problème (5.14) relève de l'alternative de Fredholm, on montre qu'il est bien posé en prouvant qu'il admet une unique solution. Soit  $\varphi$  une solution pour la donnée  $g = 0$ . Nous avons donc  $\varphi = D_{\omega_\epsilon}\varphi$ . Posons

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}x} e^{i\xi y} d\xi, \quad (5.20)$$

Par définition, nous savons que  $p \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + \omega_\epsilon^2 p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ p(0, y) = p(y, 0) = \varphi(y) & \text{pour tout } y > 0, \\ p = 0 & \text{sur } \{x = 0\} \times \mathbb{R}^-. \end{array} \right.$$

1. Si la fonction  $p$  était dans  $H^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ , on pourrait conclure facilement que  $p = 0$ . En effet, la partie anti-symétrique (par rapport à la droite  $y = x$ ) de  $p$  dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  est donnée par :

$$p_a(x, y) = p(x, y) - p(y, x), \quad \forall (x, y) \geq 0,$$

et vérifie  $p^a \in H^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$  solution de

$$\begin{cases} \Delta p_a + \omega_\epsilon p_a = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ p_a = 0 & \text{sur } \{x = 0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^+ \times \{y = 0\}. \end{cases} \quad (5.21)$$

L'unique solution  $H^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$  de ce problème est  $p^a = 0$ , ce qui revient à  $p(x, y) = p(y, x)$  dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . En particulier, nous avons donc  $\partial_\nu p = 0$  le long de la droite  $y = x$ . On en déduit que  $p$  est solution du problème homogène (voir Figure 5.1) :

$$\begin{cases} \Delta p + \omega_\epsilon^2 p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \cup \{(x, y) \geq 0 \mid x \leq y\}, \\ p = 0 & \text{sur } \{x = 0\} \times \mathbb{R}^-, \\ \partial_\nu p = 0 & \text{sur } \{(x, y) > 0 \mid y = x\}. \end{cases} \quad (5.22)$$

Or, ce problème admet comme unique solution  $p = 0$  dans  $H^1$ .

2. Seulement,  $p$  n'est pas dans  $H^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  mais dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ . Le problème vient uniquement du comportement de la fonction à l'origine  $(0, 0)$ , car la donnée  $\varphi$  est  $C^\infty(]0, +\infty[)$ . En effet, nous savons que  $\varphi = D_{\omega_\epsilon} \varphi$  et  $D_{\omega_\epsilon}$  est régularisant sur  $x > 0$ . La question revient donc à étudier la régularité de la fonction au voisinage de l'origine  $(0, 0)$ . Nous allons commencer par étudier la régularité de la fonction  $p^a$  solution de (5.21), puis celle de  $p$  solution de (5.22). Classiquement, nous savons que cette étude revient à étudier la



FIGURE 5.1 – Étude de la régularité des solutions au voisinage de  $(0, 0)$  pour les problèmes (5.21) (à gauche) et (5.22) (à droite).

régularité des solutions du Laplacien au voisinage de  $(0, 0)$ .

- (a) **Régularité des solutions du problème (5.21)** (voir Figure 5.1) : On s'intéresse aux solutions des équations homogènes

$$\begin{cases} \Delta p^a = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ p^a = 0 & \text{sur } \partial(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+). \end{cases}$$

Par définition, nous savons que  $p^a$  doit être au moins dans  $L^2$  au voisinage de  $(0, 0)$ . En utilisant les coordonnées polaires et en cherchant les solutions à variables séparées, on obtient  $p^a$  de la forme  $p^a = r^k \sin(\alpha\theta)$ , où l'angle  $\theta$  est mesuré à partir

la demi-droite  $\{x = 0\} \times \mathbb{R}^+$ . Afin de vérifier les conditions aux bords, nous avons nécessairement  $\alpha = 2$ . Il vient alors pour vérifier  $\Delta p^a = 0$  que  $k = \pm 2$ . Si  $k = -2$ , la fonction  $p^a = r^{-2} \sin(2\theta)$  n'est pas  $L^2$  au voisinage de  $(0, 0)$ , donc on ne considère pas ces solutions. Par ailleurs, si  $k = 2$ , la fonction  $p^a$  est dans  $H^1$ , et on sait alors prouver que le problème (5.21) est bien posé.

- (b) **Régularité des solutions du problème (5.22)** (voir Figure 5.1) : On s'intéresse maintenant aux solutions des équations homogènes :

$$\begin{cases} \Delta p + \omega_\epsilon^2 p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \cup \{(x, y) \geq 0 \mid x \leq y\}, \\ p = 0 & \text{sur } \{x = 0\} \times \mathbb{R}^-, \\ \partial_\nu p = 0 & \text{sur } \{(x, y) > 0 \mid y = x\}. \end{cases}$$

De même que précédemment, la recherche de solutions à variables séparées en coordonnées polaires nous conduit à  $p$  de la forme  $p = r^k \cos(\alpha\theta)$ , où ici  $\theta$  est mesuré à partir de la demi-droite  $\{y = x\}$ . Afin de respecter les conditions aux bords, il vient que  $\alpha = \frac{2}{3}$ . On en déduit alors  $k = \pm \frac{2}{3}$ . Pour  $k = \frac{2}{3}$ , la fonction  $p$  associée est dans  $H^1$  au voisinage de  $(0, 0)$ , et donc on conclut comme précédemment.

Maintenant, si  $k = -\frac{2}{3}$ , la fonction  $p$  associée est  $L^2$  au voisinage de  $(0, 0)$ . Cependant, sa trace sur la demi-droite  $\{x = 0\} \times \mathbb{R}^+$  définie par :

$$p|_{\{x=0\} \times \mathbb{R}^+}(r) = r^{-\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} r^{-\frac{2}{3}},$$

n'est pas dans  $L^2$  au voisinage de 0. Or, par définition de  $p$  (voir formule (5.20)), nous avons  $p|_{\{x=0\} \times \mathbb{R}^+} = \varphi \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . Par conséquent, cette singularité est exclue. ■

## 5.2.2 Le cas du système d'équations intégrales couplées

Dans la suite, les notations géométriques sont indiquées sur la Figure 5.2, et ont été introduites dans la section 4.1.2 du chapitre précédent. Nous allons étudier le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi^j \in L^2(\Sigma_a^j) \text{ tels que} \\ & \begin{cases} \varphi^j = g & \text{sur } \Sigma_{aa} \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.23)$$

où  $g \in L^2(\Sigma_{aa})$  est une donnée, et  $a$  est une constante strictement positive. On rappelle également la définition 4.2.2 des opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  dans le cas isotrope :

$$D_{j\pm 1}^j \psi(x^j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}(x^j - a)} e^{\pm i\xi y_j} d\xi \Big|_{y^j = a}, \quad \forall x^j \geq a,$$

où les coordonnées locales  $(x^j, y^j)$  sont définies ainsi :

$$\begin{bmatrix} x^j \\ y^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{où } \theta_j = \frac{j\pi}{2}, \quad \text{pour tous } j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (5.24)$$

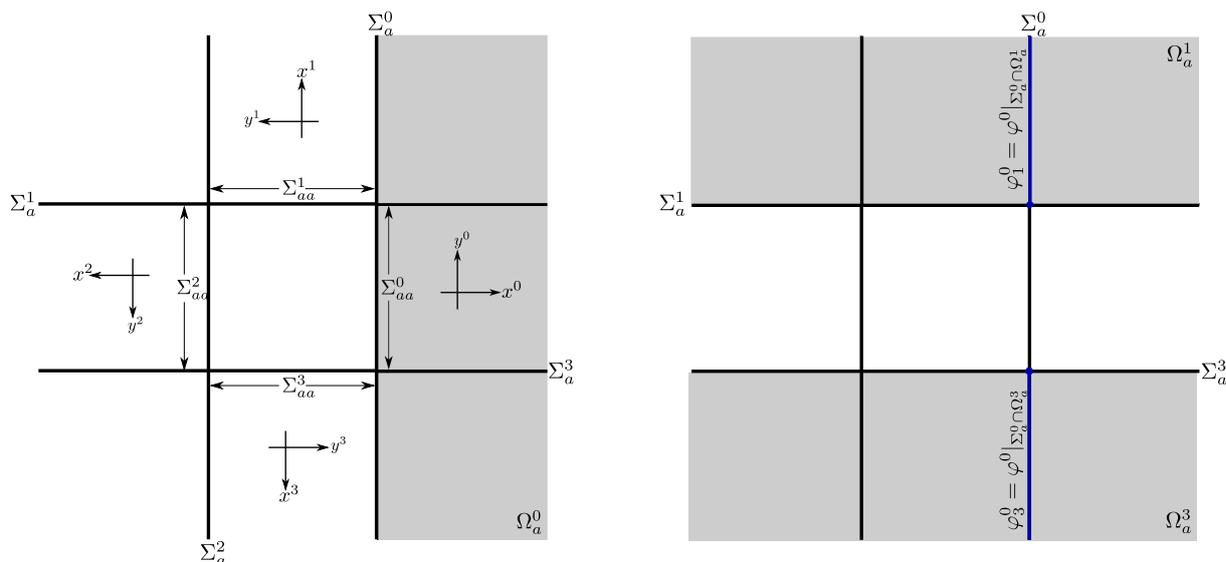


FIGURE 5.2 – Rappel des notations géométriques pour le problème extérieur (à gauche), et représentation des inconnues  $\varphi_1^0$  et  $\varphi_3^0$  sur les demi-droites en bleues  $\Sigma_a^0 \cap \Omega_a^1$  et  $\Sigma_a^0 \cap \Omega_a^3$  (à droite). Les parties en gris clair correspondent à des demi-plans.

Nous avons vu à la fin de la section 4.2.3 dans le chapitre 4 que le problème (5.23) correspond à la reformulation en variables  $\varphi^j$  du problème extérieur lorsque la donnée  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$  :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p_{ext} \in H^1(\Omega_a^c) \text{ telle que} \\ & \left| \begin{array}{ll} \Delta p + \omega_\epsilon^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_a^c, \\ p = g & \text{sur } \Sigma_{aa}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.25)$$

**Proposition 5.2.4** *Les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  sont continus de  $L^2(\Sigma_a^j)$  dans  $L^2(\Omega_a^j \cap \Sigma_a^{j\pm 1})$ .*

**Preuve :** On peut réécrire l'opérateur  $D_{j\pm 1}^j$  comme suit :

$$\begin{aligned} D_{j\pm 1}^j \psi(x^j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left( \widehat{\psi}(\xi) e^{\pm i\xi y^j} + \widehat{\psi}(-\xi) e^{\mp i\xi y^j} \right) e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}(x^j - a)} d\xi|_{y^j=a}, \\ &= D_{\omega_\epsilon} \tilde{\psi}_\pm(x^j - a), \quad \text{où } \tilde{\psi}_\pm(\xi) = \left( \widehat{\psi}(\xi) e^{\pm i\xi y^j} + \widehat{\psi}(-\xi) e^{\mp i\xi y^j} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\tilde{\psi}_\pm \in L^2(\mathbb{R}^+)$  (car  $\widehat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ ) et le résultat de la proposition 5.2.2, on déduit la continuité des opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$ . ■

Le but ici est de démontrer que le problème (5.23) en variables  $\varphi^j$  relève de l'alternative de Fredholm. Notons  $\varphi_{j\pm 1}^j$  la restriction de  $\varphi^j$  à la demi-droite  $\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$  (voir Figure 5.2) :

$$\varphi_{j\pm 1}^j = \varphi^j|_{\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}} \quad \text{sur } \Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}.$$

Ces fonctions  $\varphi_{j\pm 1}^j$  sont dans  $L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$ . Nous allons nous servir de ces fonctions comme nouvelles inconnues du problème (5.23). De plus, posons  $\chi_{j\pm 1}^j$  l'opérateur qui à  $\varphi_{j\pm 1}^j$  associe son extension par 0 sur la droite  $\Sigma_a^j$  :

$$\chi_{j\pm 1}^j \varphi_{j\pm 1}^j = \begin{cases} \varphi_{j\pm 1}^j & \text{sur } \Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}, \\ 0 & \text{sur } \Sigma_a^j \setminus (\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}). \end{cases}$$

De même, on pose  $\chi_a^j$  l'opérateur qui à  $g$  sur  $\Sigma_{aa}^j$  associe l'extension de  $g$  par 0 sur tout  $\Sigma_a^j$  :

$$\chi_a^j g = \begin{cases} g & \text{sur } \Sigma_{aa}^j, \\ 0 & \text{sur } \Sigma_a^j \setminus \Sigma_{aa}^j \end{cases}$$

On notera dans la suite  $g^j = \chi_a^j g$ . À l'aide de ces opérateurs, nous allons réécrire les relations de compatibilité sur les demi-droites  $\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j$  en utilisant les inconnues  $\varphi_{j\pm 1}^j$ . Par exemple,  $\varphi^0$  vérifie :

$$\varphi^0 = D_1^0 \varphi^1 \quad \text{sur } \Sigma_a^0 \cap \Omega_a^1. \quad (5.26)$$

Par définition, nous avons  $\varphi_1^0 = \varphi^0|_{\Sigma_a^0 \cap \Omega_a^1}$ . De plus, nous pouvons réécrire  $\varphi^1$  comme suit :

$$\varphi^1 = \chi_0^1 \varphi_0^1 + \chi_a^1 g + \chi_2^1 \varphi_2^1.$$

Ainsi la relation (5.26) se réécrit :

$$\varphi_1^0 - D_0^1 [\chi_0^1 \varphi_0^1 + \chi_a^1 g + \chi_2^1 \varphi_2^1] = 0.$$

De manière générale, les 8 relations de compatibilité se réécrivent sous forme matricielle comme suit :

$$\Phi - \mathbb{D}\Phi = F, \quad (5.27)$$

où  $\Phi \in \Pi_{j=0}^3 \Pi_{\pm} L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$  et  $F \in \Pi_{j=0}^3 \Pi_{\pm} L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$  sont les vecteurs :

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} \varphi_3^0 & \varphi_1^0 & \varphi_0^1 & \varphi_2^1 & \varphi_1^2 & \varphi_3^2 & \varphi_2^3 & \varphi_0^3 \end{array} \right]^t, \\ F &= \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} D_0^3 g^3 & D_0^1 g^1 & D_1^0 g^0 & D_1^2 g^2 & D_2^1 g^1 & D_2^3 g^3 & D_3^0 g^0 & D_3^2 g^2 \end{array} \right]^t, \end{aligned}$$

et  $\mathbb{D}$  est la matrice d'opérateurs :

$$\mathbb{D} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ D_0^1 \chi_0^1 & D_0^1 \chi_2^1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} D_0^3 \chi_2^3 & D_0^3 \chi_0^3 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} D_1^0 \chi_3^0 & D_1^0 \chi_1^0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ D_1^2 \chi_1^2 & D_1^2 \chi_3^2 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} D_2^1 \chi_0^1 & D_2^1 \chi_2^1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ D_2^3 \chi_2^3 & D_2^3 \chi_0^3 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ D_3^0 \chi_3^0 & D_3^0 \chi_1^0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} D_3^2 \chi_1^2 & D_3^2 \chi_3^2 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (5.28)$$

**Remarque 5.2.5** Par continuité des opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$ , nous savons que le second membre  $F$  est bien dans  $\Pi_{j=0}^3 \Pi_{\pm} L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$ .

Afin de mieux appréhender "l'action" des opérateurs  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j$  et (attention aux indices  $\pm$ )  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\mp 1}^j$ , nous avons représenté sur la Figure 5.3 "l'action" des opérateurs  $D_1^0 \chi_1^0$  (qui est similaire à l'opérateur  $D_{\omega_\epsilon}$  vu précédemment) et  $D_1^0 \chi_3^0$ .

On note  $\mathbb{I}$  l'opérateur identité de  $\Pi_{j=0}^3 \Pi_{\pm} L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$  dans lui-même.

**Théorème 5.2.6** L'opérateur  $\mathbb{I} - \mathbb{D}$  de  $\Pi_{j=0}^3 \Pi_{\pm} L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$  dans lui-même est de type Fredholm.

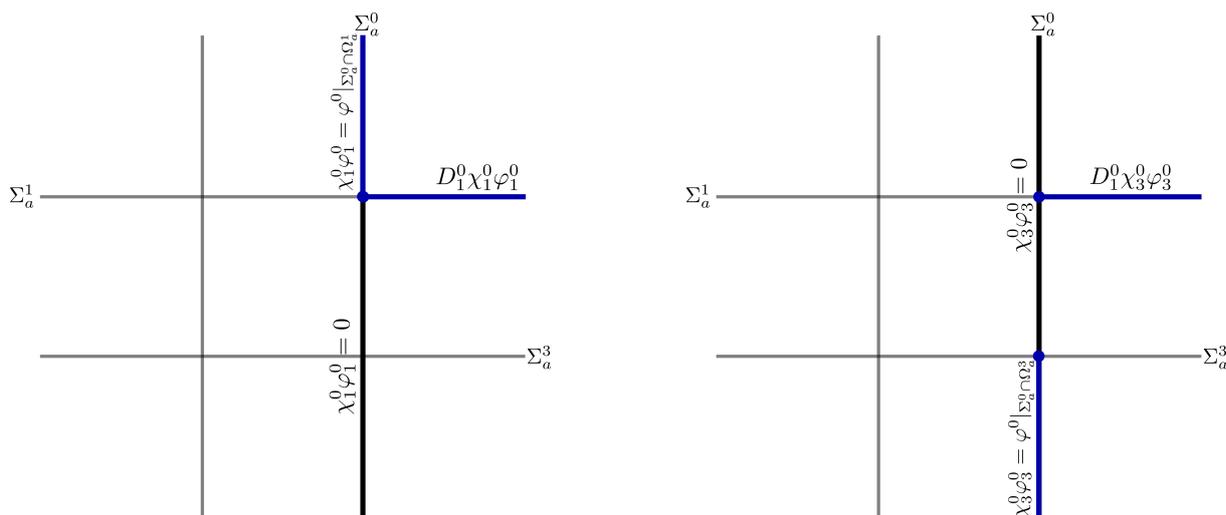


FIGURE 5.3 – Représentation schématique des opérateurs  $D_1^0 \chi_1^0$  et  $D_1^0 \chi_3^0$  agissant respectivement sur  $\varphi_1^0$  et  $\varphi_3^0$ .

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de plusieurs résultats intermédiaires. L'idée générale est la même que celle de la preuve du théorème 5.2.1, c'est à dire que nous allons décomposer l'opérateur  $\mathbb{I} - \mathbb{D}$  comme suit :

$$\mathbb{I} - \mathbb{D} = \mathbb{I} - \mathbb{L} + \mathbb{L} - \mathbb{D},$$

et nous allons montrer, en choisissant  $\mathbb{L}$  de manière appropriée, que

1.  $\mathbb{I} - \mathbb{L}$  est inversible,
2. et que  $\mathbb{L} - \mathbb{D}$  est compact

Commençons par définir  $\mathbb{L}$  :

$$\mathbb{L}_{(i,j)} = \mathbb{M}_{(i,j)} D_a, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 8\} \quad (5.29)$$

où l'opérateur  $D_a$  est défini de  $L^2([a, +\infty[)$  dans lui-même par :

$$D_a \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2+1}(x-a)} e^{i\xi a} d\xi \quad \forall x \geq a,$$

et  $\mathbb{M}$  est la matrice  $8 \times 8$  définie par :

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

On peut noter que  $\mathbb{M}$  est une *matrice de permutation*. De plus, les termes non nuls dans la matrice  $\mathbb{M}$  sont aux mêmes positions que les termes  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j$  dans la matrice  $\mathbb{D}$ , voir la formule 5.28.

**Lemme 5.2.7** *L'opérateur  $D_a$  de  $L^2([a, +\infty[)$  dans lui-même est continu et sa norme vérifie :*

$$\| D_a \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Preuve :** Pour montrer ce résultat, il suffit de noter que l'opérateur  $D_a$  peut se réécrire pour tout  $x \geq a$  :

$$\begin{aligned} D_a(\psi)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_a^{+\infty} \psi(y) e^{-i\xi y} dy e^{i\xi a} e^{-\sqrt{\xi^2+1}(x-a)} d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \psi(z+a) e^{-i\xi z} dz e^{-\sqrt{\xi^2+1}(x-a)} d\xi \\ &= D(\psi_a)(x-a) \quad \text{où} \quad \psi_a(y) = \psi(y+a). \end{aligned}$$

On exploite alors directement le théorème 5.1.5. ■

On déduit de ce lemme le corollaire suivant :

**Corollaire :** *En identifiant chacune des demi-droites  $\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$  à l'intervalle  $[a, +\infty[$ , l'opérateur  $\mathbb{I} - \mathbb{L}$  est inversible.*

**Preuve :** La démonstration de ce résultat est simple. La matrice  $\mathbb{M}$  étant une matrice de permutation, on sait qu'elle est de norme 1, c'est à dire que  $\| \mathbb{M}V \| = \| V \|$  où  $V$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^8$  et  $\| \cdot \|$  désigne ici la norme euclidienne. Par conséquent, on déduit que pour tout  $\Psi \in (L^2([a, +\infty[))^8$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \| \mathbb{L}\Psi \|_{(L^2([a, +\infty[))^8}^2 &= \| \mathbb{M}D_a\Psi \|_{(L^2([a, +\infty[))^8}^2, \\ &= \sum_{j=1}^8 \| D_a\Psi_j \|_{L^2([a, +\infty[)}^2 \leq \frac{1}{2} \| \Psi \|_{(L^2([a, +\infty[))^8}^2. \end{aligned}$$

Soulignons que dans la notation ci-dessus, on comprend par  $D_a\Psi$  le vecteur  $[D_a\Psi_j]_{j \in \{1, \dots, 8\}}$ . La norme de  $\mathbb{L}$  étant strictement inférieure à 1, on peut procéder comme dans la preuve du corollaire 5.1.4 pour définir l'inverse de  $\mathbb{I} - \mathbb{L}$  comme suit :

$$(\mathbb{I} - \mathbb{L})^{-1} = \sum_{k \geq 0} \mathbb{L}^k.$$

■

Il nous reste maintenant à démontrer que l'opérateur  $\mathbb{L} - \mathbb{D}$  est compact. Pour ce faire, nous allons montrer que chaque terme non nul de la matrice d'opérateurs  $\mathbb{L} - \mathbb{D}$  est compact. Pour les opérateurs  $D_a - D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j$ , on montre comme pour l'opérateur  $D - D_{\omega_\epsilon}$  (voir démonstration du théorème 5.2.1) le lemme suivant :

**Lemme 5.2.8** *Les opérateurs  $D_a - D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j$  de  $L^2([a, +\infty[)$  dans lui-même sont compacts, où on a identifié les demi-droites  $\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$  à l'intervalle  $[a, +\infty[$ .*

**Preuve :** Pour démontrer ce résultat, on écrit  $D_a - D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j$  comme la composition d'un opérateur à noyau  $T_k$  de Hilbert-Schmidt avec la transformée de Fourier. Par exemple, pour  $D_a - D_1^0 \chi_1^0$ , le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  de l'opérateur  $T_k$  est :

$$k(x, \xi) = \frac{e^{i\xi a}}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\sqrt{\xi^2+1}(x-a)} - e^{-\sqrt{\xi^2-\omega_\epsilon^2}(x-a)} \right]$$

On prouve que cette fonction  $k(\cdot, \cdot)$  est bien dans  $L^2([a, +\infty[ \times \mathbb{R})$  comme dans les points 1 et 2 de la preuve du théorème 5.2.1. ■

Il nous faut maintenant vérifier que les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\mp 1}^j$  sont compacts pour prouver le théorème 5.2.6, et c'est ici la "nouveauité" par rapport à ce que nous avons vu jusqu'ici.

**Lemme 5.2.9** *Les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\mp 1}^j$  de  $L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\mp 1})$  dans  $L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$  sont compacts.*

**Preuve :** Nous allons montrer uniquement le résultat pour l'opérateur  $D_1^0 \chi_3^0$  (voir représentation schématique sur la Figure 5.3), la même démarche s'applique pour les autres opérateurs. On identifie la demi-droite  $\Sigma_a^0 \cap \Omega_a^3$  (resp.  $\Sigma_a^0 \cap \Omega_a^1$ ) à l'intervalle  $] -\infty, -a]$  (resp.  $[a, +\infty[$ ). On rappelle que pour tout  $\psi \in L^2(] -\infty, -a])$ , nous avons :

$$D_1^0 \chi_3^0 \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-a} \psi(y) e^{-i\xi y} dy e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon(x-a)}} e^{i\xi a} d\xi, \quad \forall x \geq a.$$

Décomposons l'opérateur  $D_1^0 \chi_3^0$  comme suit :

$$D_1^0 \chi_3^0 = D_1^0 \chi_3^0 - D'_a + D'_a.$$

où  $D'_a$  est défini de  $L^2(] -\infty, -a])$  dans  $L^2([a, +\infty[$  par :

$$D'_a \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{-a} \psi(y) e^{-i\xi y} dy e^{-\sqrt{\xi^2 + 1}(x-a)} e^{i\xi a} d\xi, \quad \forall x \geq a.$$

On montre que l'opérateur  $D_1^0 \chi_3^0 - D'_a$  est compact comme dans la preuve du théorème 5.2.1 (en disant que c'est la composition d'un opérateur à noyau de Hilbert-Schmidt avec la transformée de Fourier).

Montrons maintenant que  $D'_a$  est compact. On découpe l'opérateur  $D'_a$  en deux parties :

$$D'_a \psi = \chi_{[a, a+l]} D'_a \psi + \chi_{[a+l, +\infty[} D'_a \psi,$$

où  $l > 0$  et  $\chi_{[b, c]}$  désigne la fonction indicatrice de l'intervalle  $[b, c]$ . Montrons que chaque terme est compact :

1. L'opérateur  $\chi_{[a+l, +\infty[} D'_a$  correspond à la composition d'un opérateur à noyau avec la transformée de Fourier. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \chi_{[a+l, +\infty[} D'_a \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[a+l, +\infty[}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + 1}(x-a)} e^{i\xi a} d\xi \\ &= T_k \widehat{\psi}(x), \end{aligned}$$

où  $T_k$  est l'opérateur à noyau associé à :

$$k(x, \xi) = \chi_{[a+l, +\infty[}(x) e^{-\sqrt{\xi^2 + 1}(x-a)} e^{i\xi a}, \quad \forall (x, \xi) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}.$$

On peut montrer que  $k(\cdot, \cdot)$  est dans  $L^2([a, +\infty[ \times \mathbb{R})$  (voir le point 1 dans la preuve du théorème 5.2.1), et donc que  $T_k$  est de Hilbert-Schmidt.

2. Pour l'opérateur  $\chi_{[a,a+l]}D'_a$ , la technique est nouvelle par rapport à ce que nous avons vu. Notons pour  $x$  fixé l'intégrande  $F(\xi)$  de  $\chi_{[a,a+l]}D'_a\psi$  :

$$\chi_{[a,a+l]}D'_a\psi(x) = \chi_{[a,a+l]}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)d\xi \quad \text{où} \quad F(\xi) = \frac{e^{-\sqrt{\xi^2+1}(x-a)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{-a} \psi(y)e^{-i\xi(y-a)} dy$$

On peut prolonger analytiquement la fonction  $F(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{C}^+ \setminus i[1, +\infty[$ , où  $\mathbb{C}^+$  désigne l'ensemble des complexes de partie imaginaire positive. La coupure  $i[1, +\infty[$  vient de notre choix de détermination de la racine complexe. Notons que ce prolongement analytique est possible grâce au terme  $e^{-i\xi(y-a)}$  qui est exponentiellement décroissant pour tout  $\xi$  tel que  $\text{Im}(\xi) > 0$  (car  $y - a < 0$ ).

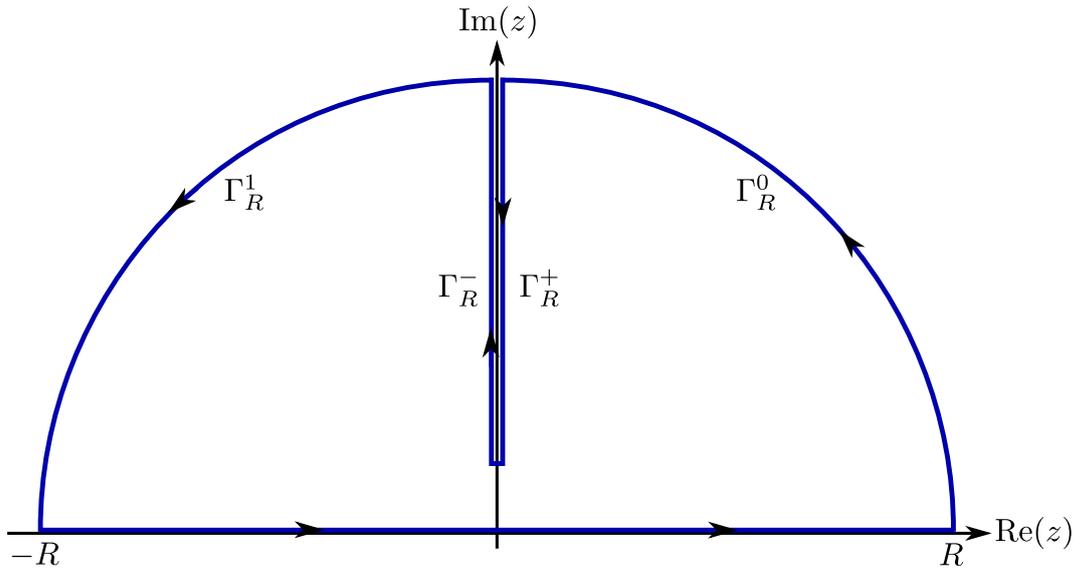


FIGURE 5.4 – Schéma du contour  $\mathcal{C}_R$  dans le demi-plan complexe  $\mathbb{C}^+$ .

Afin d'évaluer l'intégrale en  $\xi$ , nous allons utiliser le théorème des résidus. Considérons le contour  $\mathcal{C}_R$  défini par (voir Figure 5.4) :

$$\mathcal{C}_R = [-R, R] \cup \Gamma_R^0 \cup \Gamma_R^+ \cup \Gamma_R^- \cup \Gamma_R^1,$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_R^0 &= \{Re^{i\theta}, \quad \forall \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \}, \\ \Gamma_R^1 &= \{Re^{i\theta}, \quad \forall \theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \}, \\ \Gamma_R^\pm &= \{i\eta + 0^\pm, \quad \forall \eta \in [1, R] \}. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des résidus, nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{C}_R} F(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_{-R}^R F(\xi) = - \left[ \int_{\Gamma_R^0} F(\xi) + \int_{\Gamma_R^+} F(\xi) + \int_{\Gamma_R^-} F(\xi) + \int_{\Gamma_R^1} F(\xi) \right]$$

On montre que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R^i} F(\xi) = 0, \quad \text{pour } i \in \{0, 1\}.$$

De plus, on obtient en utilisant les paramétrisations de  $\Gamma_R^\pm$  :

$$\int_{\Gamma_R^+} F(\xi) = -i \int_1^R e^{-i\sqrt{\eta^2-1}} \int_{-\infty}^{-a} \psi(y)e^{\eta(y-a)} dy d\eta$$

et

$$\int_{\Gamma_R^-} F(\xi) = i \int_1^R e^{i\sqrt{\eta^2-1}} \int_{-\infty}^{-a} \psi(y) e^{\eta(y-a)} dy d\eta$$

On déduit finalement en faisant tendre  $R$  vers  $+\infty$  :

$$\chi_{[a,a+l]} D'_a \psi(x) = \chi_{[a,a+l]}(x) \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \sin\left(\sqrt{\eta^2-1}(x-a)\right) \int_{-\infty}^{-a} \psi(y) e^{\eta(y-a)} dy d\eta.$$

Maintenant, en utilisant le changement de variable  $z = -y - a$  dans l'expression ci-dessus, il vient :

$$\chi_{[a,a+l]} D'_a \psi = T_k L(\tilde{\psi}), \quad \text{où } \tilde{\psi}(z) = \psi(-z - a),$$

$L$  correspond à la transformée de Laplace, et l'opérateur à noyau  $T_k$  est défini par le noyau :

$$k(x, \eta) = \frac{\chi_{[a,a+l]}(x)}{\pi} \sin\left(\sqrt{\eta^2-1}(x-a)\right) e^{-2\eta a}, \quad \forall (x, \eta) \in [a, +\infty[ \times [1, +\infty[.$$

On conclut en montrant que ce noyau est bien dans  $L^2([a, +\infty[ \times [1, +\infty[)$ , et donc  $T_k$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt. ■

Grâce au théorème 5.2.6, nous savons que le problème (5.23) relève de l'**alternative de Fredholm**. On montre de plus son caractère **bien posé** en suivant une démarche similaire à la démonstration de la proposition 5.2.3 :

**Proposition 5.2.10** *Le problème (5.23) est bien posé.*

**Preuve :** Afin de montrer que le problème (5.23) est bien posé, on va montrer l'unicité de la solution. Considérons une solution du problème homogène avec  $g = 0$ . On pose  $v$  la différence définie par  $v = P^0(\varphi^0) - P^1(\varphi^1)$  dans  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$  (voir définition des  $P^j(\cdot)$  dans la proposition 4.2.5). Par définition, on montre que satisfait les équations homogènes :

$$\begin{cases} \Delta v + \omega_\epsilon v = 0 & \text{dans } \Omega_a^0 \cap \Omega_a^1, \\ v = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1) \end{cases}$$

Comme dans le point 2 de la preuve de la proposition 5.2.3, en étudiant la régularité de  $v$  au voisinage du coin  $(a, a)$ , on démontre que la seule solution du problème ci-dessus est  $v = 0$ . En procédant de même dans tous les quarts de plan, on montre la compatibilité :

$$P^j(\varphi^j) = P^{j\pm 1}(\varphi^{j\pm 1}) \quad \text{dans } \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4/\mathbb{Z}.$$

On en déduit qu'on peut construire une fonction  $p_{ext}$  vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta p_{ext} + \omega_\epsilon p_{ext} = 0 & \text{dans } \Omega_a^c \cap \Omega_a^1, \\ p_{ext} = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1) \end{cases}$$

Comme dans le point 2 (b) de la preuve de la proposition 5.2.3, on montre que nécessairement  $p_{ext} = 0$  en étudiant la régularité de  $p_{ext}$  au voisinage des coins du carré  $\Sigma_{aa}$  et en utilisant que la trace de  $p_{ext}|_{\Sigma_a^j}$  sur les droites  $\Sigma_a^j$  doit être dans  $L^2$ . ■

Soulignons enfin que, pour une donnée  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}) \subset L^2(\Sigma_{aa})$ , nous savons que le problème extérieur (5.25) admet une unique solution  $p_{ext} \in H^1(\Omega_a^c)$ . On déduit alors la solution du problème (5.23) en posant  $\varphi^j = p_{ext}|_{\Sigma_a^j}$ . La fonction  $p_{ext}$  étant dans  $H^1(\Omega_a^c)$ , nous avons donc  $\varphi^j \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$  :

**Corollaire :** Si  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$ , alors les solutions  $\varphi^j$  du problème (5.23) sont dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j)$ .

### 5.3 Quelques remarques

Pour clore ce chapitre, nous allons faire quelques remarques sur des généralisations des résultats que nous venons d'établir.

#### 5.3.1 Le cadre fonctionnel $H^1$

L'analyse que nous avons menée ci-dessus est dans le cas de fonctions  $\varphi^j \in L^2(\Sigma_a^j)$ . Or, dans la formulation multi-domaines (4.21) que nous avons décrite au chapitre 4, nous avons choisi (pour des raisons techniques, voir section 4.2.3) de prendre les traces  $\varphi^j \in H^1(\Sigma_a^j)$ . Une question naturelle est alors de savoir si on peut étendre notre analyse au cadre fonctionnel  $H^1$ .

Nous allons reprendre les grandes lignes et montrer qu'il est possible d'étendre les résultats. Le problème modèle que nous devons considérer est le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^+) \text{ tel que} \\ & | \varphi - D_\eta \varphi = g \quad \text{sur } \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{5.31}$$

où  $g$  est une donnée de  $H^1(\mathbb{R}^+)$ , et l'opérateur  $D_\eta$  est défini ainsi :

$$D_\eta \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} d\xi \quad \forall x \geq 0,$$

où  $\eta$  est un paramètre strictement positif que nous choisirons pour assurer que la norme dans  $\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^+))$  de  $D_\eta$  soit inférieure à 1. Rappelons que pour le calcul de la transformée de Fourier, on étend la fonction  $\psi$  par 0 sur tout  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 5.3.1** *L'opérateur  $D_\eta$  est continu de  $H^1(\mathbb{R}^+)$  dans lui-même et sa norme vérifie :*

$$\| D_\eta \|_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^+))} \leq \sqrt{\frac{1 + \eta}{2}}.$$

**Preuve :** Soit  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^+)$ . En remarquant que  $e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} \leq e^{-\xi x}$  et en utilisant le théorème 5.1.2, il vient

$$\| D_\eta \psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| \psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \tag{5.32}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$[D_\eta \psi]'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\xi^2 + \eta} \hat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} d\xi = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\xi^2 + \eta} \hat{\psi}_s(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} d\xi,$$

où  $\psi_s(y) = \psi(|y|)$ . On en déduit :

$$\| [D_\eta \psi]' \|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| \sqrt{\xi^2 + \eta} \widehat{\psi}_s(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

La fonction  $\psi_s \in H^1(\mathbb{R})$  et nous savons que  $\widehat{\psi}_s(-\xi) = \widehat{\psi}_s(\xi)$ . Par conséquent, il vient :

$$\| \sqrt{\xi^2 + \eta} \widehat{\psi}_s(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 = \frac{1}{2} \| \sqrt{\xi^2 + \eta} \widehat{\psi}_s(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2} [\eta \| \psi_s \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \| \psi'_s \|_{L^2(\mathbb{R})}^2].$$

En rappelant que  $\| \psi_s \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2 \| \psi_s \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2$  et  $\| \psi'_s \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2 \| \psi'_s \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2$ , on obtient :

$$\| [D_\eta \psi]' \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \leq \frac{1}{2} [\eta \| \psi \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 + \| \psi' \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2]$$

On déduit le résultat énoncé à l'aide de cette majoration et de (5.32). ■

En choisissant  $\eta < 1$ , on assure que la norme de l'opérateur est plus petite que 1, et donc en utilisant les arguments de la preuve du corollaire 5.1.4, on démontre :

**Proposition 5.3.2** *L'opérateur  $I - D_\eta$  est inversible pour tout  $\eta < 1$ .*

À partir du problème modèle (5.31), on peut étendre au cas d'une fréquence complexe. On montre que l'opérateur  $D_{\omega_\epsilon}$  (voir définition (5.15)) est bien défini de  $H^1(\mathbb{R}^+)$  dans lui-même et que

**Proposition 5.3.3** *L'opérateur  $D_\eta - D_{\omega_\epsilon}$  est compact de  $H^1(\mathbb{R}^+)$  dans lui-même.*

**Preuve :** Nous n'allons pas détailler toute la preuve qui est technique, mais simplement donner les idées principales. Pour montrer ce résultat, on revient à la définition d'un opérateur compact. Étant donnée une suite bornée  $\psi_n \in H^1(\mathbb{R}^+)$ , on veut montrer qu'il existe une sous-suite de  $(D_\eta - D_{\omega_\epsilon})\psi_n$  qui converge dans  $H^1(\mathbb{R}^+)$ . La suite étant bornée dans  $H^1$ , elle est en particulier bornée dans  $L^2$ . On en déduit qu'il existe une sous-suite de  $(D - D_{\omega_\epsilon})\psi_n$  convergente dans  $L^2$ , car  $D - D_{\omega_\epsilon}$  est compact de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  dans lui-même.

Pour démontrer notre résultat, il reste à montrer que l'on peut également extraire une sous-suite de  $[(D - D_{\omega_\epsilon})\psi_n]'$  convergente dans  $L^2$ . Pour ce faire, on montre que l'opérateur  $[(D - D_{\omega_\epsilon})]'$  est la composition d'un opérateur à noyau de Hilbert-Schmidt et avec la transformée de Fourier. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} [(D - D_{\omega_\epsilon})\psi]'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}_s(\xi) \left[ -\sqrt{\xi^2 + \eta} e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} + \sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon} e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon}x} \right] d\xi, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\xi^2 + 1} \widehat{\psi}_s(\xi) \left[ -\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} + \frac{\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon}x} \right] d\xi, \\ &= T_k \left( \sqrt{\xi^2 + 1} \widehat{\psi}_s(\xi) \right) (x), \end{aligned}$$

où  $\psi_s(y) = \psi(|y|) \in H^1(\mathbb{R})$ , et l'opérateur à noyau  $T_k$  est défini par :

$$k(x, \xi) = \left[ -\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} + \frac{\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon}x} \right], \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Par les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 5.2.1, on prouve que ce noyau est bien dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ . Pour le point 1, les arguments sont identiques. Pour le point 2, c'est un peu plus subtile car il faut utiliser la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} |k(x, \xi)| &= \left| \frac{\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \left[ e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon}x} - e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} \right] + e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} \left[ \frac{\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} - \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \right] \right|, \\ &\leq \left| \frac{\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \right| |e^{-\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon}x} - e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x}| + e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta}x} \left| \frac{\sqrt{\xi^2 - \omega_\epsilon^2} - \sqrt{\xi^2 + \eta}}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \right|. \end{aligned}$$

Comme  $(\psi_n)_s \in H^1(\mathbb{R})$  est borné, nous savons que  $\sqrt{\xi^2 + 1}(\hat{\psi}_n)_s(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$  est borné. On en déduit le résultat souhaité grâce à la compacité de  $T_k$ . ■

On déduit ainsi que l'opérateur  $I - D_{\omega_\epsilon}$  est de type **Fredholm** dans  $\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^+))$ . Par ailleurs, le caractère **bien posé** du problème (5.14) dans  $H^1$  s'obtient plus facilement que dans le cas  $L^2$ . En effet, il suffit de reprendre la première partie de la démonstration de la proposition 5.2.3. Il n'est plus nécessaire de faire l'étude de la régularité de la fonction au voisinage de  $(0, 0)$ .

Soulignons enfin qu'on peut également généraliser au cas du système d'équations intégrales couplées, comme dans la section 5.2.2. Le dernier point technique, que nous ne détaillerons pas, consiste à étendre le lemme 5.2.9 au cas de fonctions  $H^1$ . Les idées sont les mêmes que pour la démonstration de la proposition ci-dessus.

### 5.3.2 Généralisation au cas anisotrope

Nous nous intéressons ici à la généralisation de notre analyse théorique au cas d'un milieu anisotrope. On se place de nouveau ici dans le cadre fonctionnel  $L^2$ . Pour un milieu anisotrope, les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  sont définis par :

$$D_{j\pm 1}^j \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\xi) e^{r^j(\xi)(x^j - a)} e^{\pm i\xi y^j} d\xi \Big|_{y^j = a}, \quad \forall x \geq a$$

où les coordonnées locales  $(x^j, y^j)$  sont données dans la formule (5.24), et on rappelle l'expression des racines  $r^j(\xi)$  (voir la proposition 4.2.5) :

$$\begin{aligned} r^0(\xi) = r^2(\xi) &= \frac{-i\xi c_3}{c_1} - \sqrt{d_1(\xi)} \quad \text{où} \quad d_1(\xi) = \frac{(c_1 c_2 - (c_3)^2) \xi^2 - \omega_\epsilon^2 c_1}{(c_1)^2}, \\ r^1(\xi) = r^3(\xi) &= \frac{i\xi c_3}{c_2} - \sqrt{d_2(\xi)} \quad \text{où} \quad d_2(\xi) = \frac{(c_1 c_2 - (c_3)^2) \xi^2 - \omega_\epsilon^2 c_2}{(c_2)^2}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $c_1, c_2, c_3$  correspondent aux coefficients de la matrice  $A$  définissant l'anisotropie du milieu (voir la section 4.1.1 du chapitre 4). Afin de reprendre la démarche de la section 5.2.2, il paraît naturel de considérer maintenant une matrice d'opérateur  $\mathbb{L}$  (voir définition (5.29)) adaptée à l'anisotropie. Plus précisément, on considère

$$\mathbb{L}_{(i,j)} = \mathbb{M}_{(i,j)} D_l, \quad \text{où} \quad l = \begin{cases} 1 & \text{pour } i \in \{0, 2\} \\ 2 & \text{pour } i \in \{1, 3\} \end{cases}$$

où  $\mathbb{M}$  est définie par (5.30), et les opérateurs  $D_1$  et  $D_2$  sont définis de  $L^2([a, +\infty[)$  dans lui-même par :

$$D_l \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\alpha_l \xi^2 + 1}(x-a)} e^{-i\xi \frac{c_3}{c_l}(x-a)} e^{i\xi a} d\xi, \quad \forall x \geq a, \quad \text{et pour } l \in \{1, 2\}.$$

Les coefficients  $\alpha_l$  sont donnés par :

$$\alpha_1 = \frac{c_1 c_2 - (c_3)^2}{(c_1)^2}, \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{c_1 c_2 - (c_3)^2}{(c_2)^2}.$$

Ce choix d'opérateur  $D_l$  permet de généraliser le lemme (5.2.8), c'est à dire de montrer la compacité de  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j - D_l$  avec  $l = 1$  pour  $j \in \{0, 2\}$ , et  $l = 2$  pour  $j \in \{1, 3\}$ .

**Proposition 5.3.4** *Les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j - D_l$  de  $L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$  sont compacts.*

**Preuve :** Nous allons donner les idées de la démonstration pour  $D_1^0 \chi_1^0 - D_1$ , les mêmes arguments s'appliquent pour les autres opérateurs. On identifie les demi-droites  $\Sigma_a^0 \cap \Omega_a^1$  et  $\Sigma_a^1 \cap \Omega_a^0$  à l'intervalle  $[a, +\infty[$ . Le but est de montrer que  $D_1^0 \chi_1^0 - D_1$  peut s'écrire comme la composition d'un opérateur à noyau  $T_k$  de Hilbert-Schmidt avec de la transformée de Fourier. Le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  obtenu est :

$$k(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\sqrt{\alpha_1 \xi^2 + 1}(x-a)} - e^{[r^0(\xi) + i\xi \frac{c_3}{c_1}](x-a)} \right) e^{-i\xi \frac{c_3}{c_1}(x-a)} e^{i\xi a}, \quad \forall (x, \xi) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}.$$

Pour montrer que ce noyau est bien dans  $L^2([a, +\infty[ \times [a, +\infty[)$ , on reprend les points 1 et 2 de la démonstration du théorème 5.2.1. Pour le point 1, c'est identique. Pour le point 2, il est utile de souligner qu'ici :

$$\begin{aligned} q(\xi) &= \left( r^0(\xi) + i\xi \frac{c_3}{c_1} \right) + \sqrt{\alpha_1 \xi^2 + 1} = -\sqrt{\alpha_1 \xi^2 - \omega_\epsilon^2 c_1} + \sqrt{\alpha_1 \xi^2 + 1}, \\ &= \frac{(\omega_\epsilon^2 c_1 + 1)}{\sqrt{\alpha_1 \xi^2 - \omega_\epsilon^2 c_1} + \sqrt{\alpha_1 \xi^2 + 1}}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

$q(\xi)$  étant borné et dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on conclut comme précédemment. ■

On observe dans la preuve ci-dessus que le choix du coefficient  $\alpha_l$  n'est pas anodin. En particulier, pour un autre choix on ne sait plus démontrer la compacité car le terme  $q(\xi)$  (voir équation (5.33)) n'est alors plus borné.

Par ailleurs, le résultat du lemme 5.2.9 pour les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\mp 1}^j$  reste valide dans le cas anisotrope, la démonstration étant la même.

Afin de pour utiliser l'analyse théorique précédente, il reste un point à vérifier : que la norme de  $\mathbb{L}$  soit inférieure à 1. En effet, ce point est nécessaire pour montrer l'inversibilité de  $\mathbb{I} - \mathbb{L}$ , voir corollaire 5.1.4. Une condition **suffisante** pour avoir la norme de  $\mathbb{L}$  plus petite que 1 est que les normes de  $D_1$  et  $D_2$  soient inférieures à 1.

**Proposition 5.3.5** *Les opérateurs  $D_1$  et  $D_2$  définis de  $L^2([a, +\infty[)$  dans lui-même sont continus et leurs normes vérifient :*

$$\| D_l \|_{\mathcal{L}(L^2([a, +\infty[))} \leq \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\alpha_l}}}, \quad l \in \{1, 2\}.$$

**Preuve :** Montrons ce résultat pour  $D_1$ . Comme dans la preuve du lemme 5.2.7, on montre que :

$$D_1 \psi(x) = D \psi_a(x - a), \quad \text{où} \quad \psi_a(y) = \psi(y + a),$$

et  $D$  est l'opérateur défini par :

$$D\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\alpha_1 \xi^2 + 1} x} e^{-i\xi \frac{c_3}{c_1}(x-a)} d\xi$$

En posant le changement de variable  $\sqrt{\alpha_1} \xi = \eta$ , l'intégrale ci-dessus devient :

$$D\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\alpha_1}}\right) e^{-\sqrt{\eta^2 + 1} x} e^{-i\frac{\eta c_3}{\sqrt{\alpha_1} c_1}(x-a)} d\eta$$

En remarquant que  $|e^{-\sqrt{\eta^2 + 1} x} e^{-i\frac{\eta c_3}{\sqrt{\alpha_1} c_1} x}| \leq e^{-|\eta|x}$ , et en utilisant le théorème 5.1.5, il vient :

$$\| D\psi(x) \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \leq \frac{1}{2\alpha_1} \left\| \widehat{\psi}_s\left(\frac{\eta}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2.$$

où  $\psi_s(y) = \psi(|y|)$ . On montre aisément que

$$\left\| \widehat{\psi}_s\left(\frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 = \sqrt{\alpha} \|\psi_s\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2,$$

ce qui nous permet de conclure. ■

Remarquons que grâce à ce résultat et à la proposition 5.3.4, on peut montrer la continuité des opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  dans  $L^2$ . En effet, il suffit de décomposer  $D_{j\pm 1}^j = D_{j\pm 1}^j - D_l + D_l$  (avec  $l = 0$  ou  $1$  selon  $j$ ).

**Proposition 5.3.6** *Les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  de  $L^2(\Sigma_a^j)$  dans  $L^2(\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j)$  sont continus.*

On déduit de la proposition 5.3.5 qu'une condition suffisante pour avoir la norme de  $\mathbb{L}$  inférieure à 1 est que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  soient plus grands que  $1/4$ . Avec les coefficients  $c_1, c_2$  et  $c_3$ , cette condition revient à :

$$c_1 c_2 - (c_3)^2 > \frac{\max((c_1)^2, (c_2)^2)}{4}. \tag{5.34}$$

Dans les cas où cette condition n'est pas vérifiée, nous ne savons donc a priori pas si le problème est de type Fredholm. Cependant, soulignons que la condition ci-dessus n'est clairement pas optimale. Comme nous l'avons dit, on souhaite avoir  $\|\mathbb{L}\| < 1$ , et la condition ci-dessus est suffisante (et pas nécessaire). Dans cette idée, on pourrait améliorer le résultat ci-dessus en cherchant la condition nécessaire pour assurer  $\|\mathbb{L}\| < 1$ . Il nous semble, mais ce n'est pas démontré, que la condition nécessaire pour avoir  $\|\mathbb{L}\| < 1$  est que le produit des normes  $\|D_1\| \|D_2\|$  soit inférieur à 1. En utilisant les majorations des normes de  $D_1$  et  $D_2$  données dans la proposition 5.3.5, cette condition conduirait à vérifier :

$$\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} > \frac{1}{4} \iff \frac{(c_1 c_2 - (c_3)^2)}{(c_1 c_2)} > \frac{1}{4}. \tag{5.35}$$

Notons que dans le cas  $c_3 = 0$ , cette condition est toujours vérifiée. Par ailleurs, si  $c_3 \neq 0$  et la condition ci-dessus n'est pas vérifiée, une manière d'arranger le problème est de "tourner" les droites  $\Sigma_a^j$  de façon à ce qu'elles soient orthogonales aux directions principales de l'anisotropie, c'est à dire aux vecteurs propres de la matrice  $A$ . En effet, cette rotation des droites permet de réécrire l'opérateur  $\text{div}(A\nabla \cdot)$  dans les coordonnées locales  $(x^j, y^j)$  sous la forme  $\text{div}(A'\nabla \cdot)$  où la matrice  $A'$  est diagonale (voir section 2.2 au chapitre 2).

Soulignons enfin que, même si  $c_3 \neq 0$  et la condition (5.35) ci-dessus n'est pas vérifiée, le

problème peut être bien posé sans être Fredholm. Notons que numériquement, on observe de bons résultats.

Nous avons donc le caractère **Fredholm** du système d'équations intégrales couplées dans le cas anisotrope (modulo la condition (5.35)). De plus, on montre le caractère **bien posé** en prouvant l'unicité du problème homogène. Pour cela, l'idée est simplement de reprendre la démarche de la preuve de la proposition 5.2.10. Notons que pour faire l'étude de la régularité au voisinage des coins dans le cas anisotrope, la technique consiste à se ramener au cas isotrope à l'aide d'un changement de coordonnées, voir section 2.2.

### 5.3.3 La formulation complète

En "résumé" de ce que nous avons vu dans ce chapitre, nous savons que le système d'équations intégrales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ \varphi^j = g \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j, \end{array} \right. \quad (5.36)$$

où  $g$  est donnée, relève de l'**alternative de Fredholm** et est **bien posé** (unicité de la solution) lorsqu'on se place dans le cadre fonctionnel  $L^2$  ou  $H^1$  (pour le cas anisotrope, notre analyse est valable sous la condition (5.34)). Cette étude nous permet donc d'assurer qu'on peut résoudre numériquement ce problème (on aura bien la convergence des éléments finis).

De plus, comme nous l'avons expliqué à la fin de la section 4.2.3 du chapitre 4, la résolution du problème (5.36) nous permet de calculer numériquement l'opérateur *Dirichlet to Neumann* qui à  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$  associe  $\partial_\nu p_{ext}$  sur  $\Sigma_{aa}$ , où  $p_{ext}$  est solution du problème extérieur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p_{ext} \in H^1(\Omega_a^c) \text{ tel que} \\ \text{div}(A\nabla p_{ext}) + \omega_\epsilon^2 p_{ext} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_a^c, \\ p_{ext} = g \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}. \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Avec cet opérateur  $DtN$ , il est alors possible d'éliminer les inconnues  $\varphi^j$  dans le problème (4.21) couplé avec l'inconnue  $p^a$  dans le domaine borné  $\Omega_a$  (voir section 4.2.3).

Seulement, "l'inversion numérique" du système d'équations intégrales (5.36) est très coûteuse, et par conséquent, on souhaite conserver la formulation multi-domaines "complète", c'est à dire avec les inconnues  $p^a$  et  $\varphi^j$ . La difficulté dans ce cas est qu'on ne sait pas démontrer de propriété sur la formulation (4.21) du chapitre 4.

Dans le chapitre suivant, nous allons introduire de nouvelles formulations "avec recouvrement" entre la zone bornée  $\Omega_a$  et les demi-plans  $\Omega_a^j$ . Nous verrons que grâce à ce recouvrement, nous n'aurons pas besoin de considérer  $\varphi^j \in H^1(\Sigma_a^j)$ , et on pourra montrer le caractère Fredholm de ces nouvelles formulations.



# EXTENSIONS DE LA MÉTHODE

---

## Sommaire

---

<b>6.1 Formulations avec recouvrement entre la zone bornée et les demi-plans</b> . . . . .	<b>170</b>
6.1.1 Introduction . . . . .	170
6.1.2 Reformulation du problème en variables $p^b$ et $\varphi^j$ . . . . .	171
6.1.3 Intérêt du recouvrement pour une approche itérative de résolution . . . . .	175
<b>6.2 Étude théorique des formulations avec recouvrement dans le cas dissipatif</b> . . . . .	<b>178</b>
6.2.1 Résultats préliminaires . . . . .	178
6.2.2 Caractère Fredholm de la première formulation avec recouvrement . . . . .	179
6.2.3 Caractère Fredholm de la seconde formulation avec recouvrement . . . . .	181
<b>6.3 Autres structurations des sous-domaines</b> . . . . .	<b>185</b>
6.3.1 Introduction . . . . .	185
6.3.2 Diffraction par un polygone convexe borné . . . . .	185
6.3.3 Quelques résultats numériques . . . . .	189

---

Le but de ce chapitre est de présenter, toujours pour un milieu acoustique, plusieurs extensions possibles de la méthode décrite au chapitre 4 pour résoudre le problème de diffraction en milieu infini. Pour commencer, nous décrirons une extension de notre approche inspirée des méthodes de décomposition de domaine avec recouvrement. Elle consiste à introduire un recouvrement entre le sous-domaine borné et les demi-plans. Nous présenterons deux nouvelles formulations "avec recouvrement" qui présentent des avantages tant pour les aspects théoriques que numériques.

Nous présenterons une analyse théorique dans le cas dissipatif de ces deux nouvelles formulations. En particulier, nous montrerons en s'appuyant sur les résultats du chapitre 5 le caractère Fredholm de ces formulations. De plus, nous verrons que l'on peut tirer parti du recouvrement pour accélérer une méthode de résolution itérative.

Enfin, une dernière extension que nous proposons consiste à changer la structuration des sous-domaines. En effet, le milieu extérieur étant parfaitement homogène, nous avons la liberté de choisir différemment l'agencement et le nombre de demi-plans. Typiquement, nous verrons qu'on peut considérer le cas d'une boîte éléments finis triangulaire avec trois demi-plans s'appuyant sur les bords du triangle.

## 6.1 Formulations avec recouvrement entre la zone bornée et les demi-plans

Dans cette section comme dans la suite de ce chapitre, on notera  $\omega_\epsilon = \omega + i\epsilon$  la fréquence qui pourra être réelle pure (avec  $\epsilon = 0$ ) pour un milieu non dissipatif, ou bien complexe (avec  $\epsilon > 0$ ) pour un milieu dissipatif. On précisera dans les résultats énoncés si le milieu est dissipatif ou non. De plus, on notera :

$$V = \begin{cases} H^1(\Omega) & \text{si } \epsilon > 0, \\ H^1_{loc}(\Omega) + \text{Condition de radiation} & \text{si } \epsilon = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Dans le cas sans dissipation, la condition de radiation impose que la fonction soit *sortante* (voir section 4.4.2 du chapitre 4). Le problème que nous allons chercher à reformuler est le suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } p \in V \text{ telle que} \\ &\left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p) + \omega_\epsilon^2 p = f & \text{dans } \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ A\nabla p \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Rappelons que ce problème admet une unique solution  $p$ .

### 6.1.1 Introduction

Le but de cette section est de proposer de nouvelles formulations multi-domaines en introduisant un recouvrement entre la zone bornée et les demi-plans. On désignera dans la suite par formulations "avec recouvrement" les formulations ayant un recouvrement entre le domaine borné et les demi-plans. Pour commencer, nous allons introduire quelques notations géométriques. Posons  $\Omega_b$  le domaine défini par :

$$\Omega_b = [-b, b]^2 \setminus \mathcal{O}.$$

On note  $\Sigma_{bb}$  la frontière de  $\Omega_b$  et on pose :

$$\Sigma_{bb}^j = \{x^j = b\} \times \{y^j \in [-b, b]\} \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

où les coordonnées locales  $(x^j, y^j)$  sont définies par :

$$\begin{bmatrix} x^j \\ y^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{où } \theta_j = \frac{j\pi}{2}, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (6.3)$$

Enfin, on note  $B_l$  la zone de recouvrement définie par :

$$B_l = \Omega_a^c \cap \Omega_b \quad \text{où } l = b - a \geq 0.$$

Le paramètre  $l$  représente l'épaisseur de la couronne  $B_l$ . Le cas  $l = 0$  correspond à la situation du chapitre 4, et on considérera dans la suite de cette section  $l > 0$ . Nous avons rappelé ces nouvelles notations ainsi que celles du chapitre 4 sur la Figure 6.1.

Dans la suite, on désigne par  $p^b$  la restriction de la solution  $p$  du problème (6.2) au domaine  $\Omega_b$  :

$$p^b = p|_{\Omega_b} \quad \text{dans } \Omega_b,$$

et on rappelle que les  $p^j$  désignent les restrictions de  $p$  aux demi-plans  $\Omega_a^j$ , et les  $\varphi^j$  désignent les traces de  $p|_{\Sigma_a^j}$  sur les droites  $\Sigma_a^j$ .

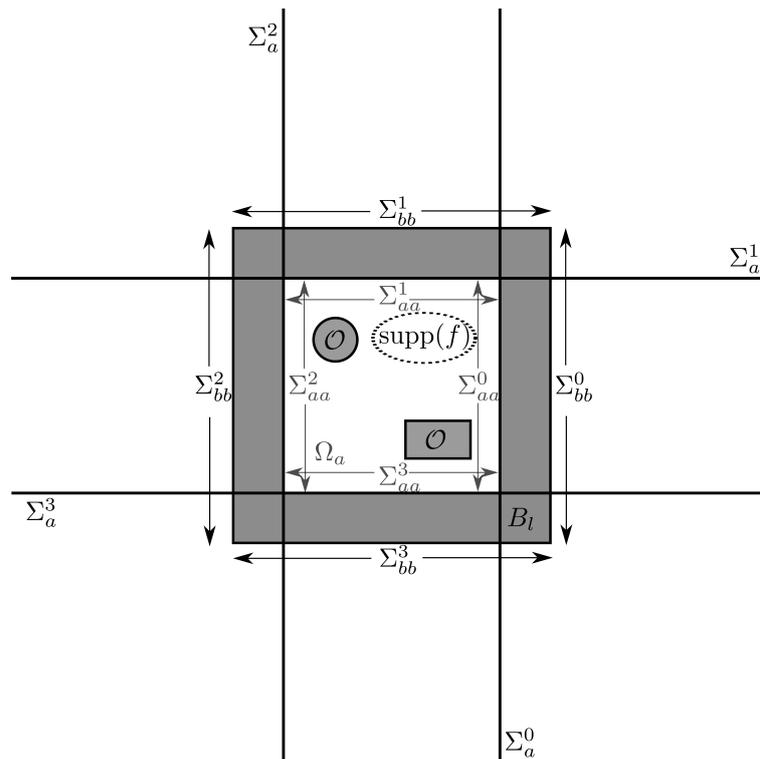


FIGURE 6.1 – Géométrie du domaine  $\Omega$  et notations. La couronne en gris clair correspond à la zone de recouvrement  $B_l$ .

### 6.1.2 Reformulation du problème en variables $p^b$ et $\varphi^j$

Comme nous l'avons déjà vu, on doit assurer dans l'intersection des demi-plans les relations de compatibilité suivantes :

$$p^j = p^{j\pm 1} \quad \text{dans} \quad \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \quad \text{pour} \quad j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Avec l'introduction du recouvrement, on doit également assurer la compatibilité entre  $p^b$  et les  $p^j$  dans  $B_l$ , c'est à dire :

$$p^b = p^j, \quad \text{dans} \quad B_l \cap \Omega_a^j.$$

En particulier, dans les sous domaines  $\Omega_b \cap \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$ , nous avons 3 représentations différentes de la solution qui "coexistent" (voir Figure 6.2) :  $p^j$  dans  $\Omega_a^j$ ,  $p^{j\pm 1}$  dans  $\Omega_a^{j\pm 1}$ , et  $p^b$  dans  $\Omega_b$ . Par conséquent, on doit vérifier :

$$p^b = p^j = p^{j\pm 1}, \quad \text{dans} \quad B_l \cap \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}. \quad (6.4)$$

Afin de satisfaire ces différentes relations de compatibilité, nous devons choisir des conditions de transmission sur les frontières  $\Sigma_a^j$  et  $\Sigma_{bb}^j$ . Il existe de nombreuses possibilités et, pour simplifier notre étude, nous allons nous limiter à deux cas qui nous paraissent être des extensions "naturelles" du cas sans recouvrement.

Nous allons considérer sur les bords  $\Sigma_{bb}^j$  du domaine  $\Omega_b$  des conditions de Neumann :

$$A \nabla p^b \cdot \nu = \Lambda_l^j(\varphi^j) \quad \text{sur} \quad \Sigma_{bb}^j, \quad \text{où} \quad \Lambda_l^j(\cdot) = A \nabla P^j(\cdot) \cdot \nu|_{\Sigma_{bb}^j} \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (6.5)$$

Les  $P^j(\cdot)$  sont définis dans la proposition 4.2.5. À l'aide des expressions explicites des  $P^j(\cdot)$ , on peut donner, sous formes intégrales, l'expression des  $\Lambda_l^j$ . Par exemple, pour  $\Lambda_l^0$ , nous avons :

$$\Lambda_l^0(\varphi^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (c_1 r^0(\xi) + c_3 i \xi) e^{r^0(\xi)l} e^{i\xi y} \widehat{\varphi}^0(\xi) d\xi.$$

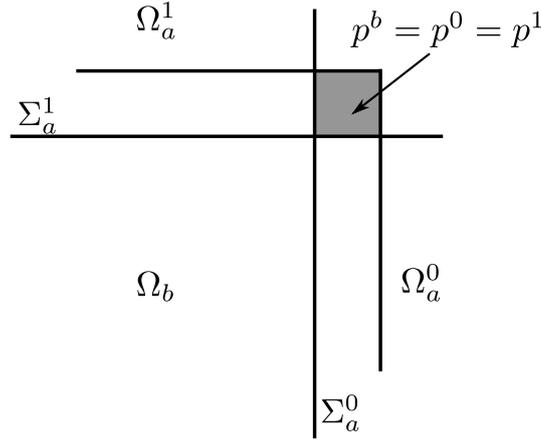


FIGURE 6.2 – Représentation schématique des relations de compatibilité (6.4) entre  $p^b$ ,  $p^0$  et  $p^1$  dans le coin en haut à droite de  $\Omega_b$ .

On peut noter dans l'expression ci-dessus le terme  $e^{r^0(\xi)l}$ . D'après la définition de  $r^0(\xi)$  donnée dans la proposition 4.2.5, on montre facilement que  $\text{Re}(r^0(\xi))$  tend vers  $-\infty$  quand  $\xi$  tend vers  $\pm\infty$ . Par conséquent, grâce au recouvrement  $l > 0$ , l'intégrande de  $\Lambda_l^0$  devient exponentiellement décroissante. Ce résultat est important car il permet de montrer que  $\Lambda_l^j \varphi^j$  est dans  $H^s(\Sigma_{bb}^j)$  pour tout  $s \geq 0$ . Ainsi, en considérant  $\varphi^j \in L_{loc}^2(\Sigma_a^j)$ , on peut sans difficulté donner un sens au raccord en dérivée normale sur les bords  $\Sigma_{bb}^j$  comme suit :

$$\langle A \nabla p^a \cdot \nu, \tilde{p} \rangle = \sum_{k=0}^3 (\Lambda^j \varphi^j, \tilde{p})_{L^2(\Sigma_{bb}^j)}, \quad \forall \tilde{p} \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{bb}^j),$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{bb}^j)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{bb}^j)$ . De plus, nous verrons dans la section 6.2 que ce recouvrement donne également des propriétés de compacité à l'opérateur  $\Lambda_l^j$ .

Il reste maintenant à définir des conditions de transmission sur les droites  $\Sigma_a^j$ . Sur les segments  $\Sigma_{aa}^j$  des droites  $\Sigma_a^j$ , nous allons considérer une condition de transmission de type Dirichlet :

$$p^b = p^j \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Sur les demi-droites  $\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$ , nous proposons de considérer les deux conditions suivantes :

- soit on utilise "au maximum" la compatibilité entre les représentations analytiques  $p^j = p^{j\pm 1}$  dans  $\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \cap B_l$ , ce qui conduit à (voir Figure 6.3) :

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur} \quad \Omega_a^j \cap \Sigma_a^{j\pm 1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ \varphi^j = p^b & \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Ces relations sont exactement celles que nous avons décrites au chapitre 4 section 4.2.1, et analyser dans le chapitre 5, voir la section 5.2.2.

- soit on utilise "au maximum" la compatibilité  $p^b = p^j$  dans  $\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \cap B_l$ , ce qui conduit à (voir Figure 6.3) :

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur} \quad \Omega_b^j \cap \Sigma_a^{j\pm 1}, \\ \varphi^j = p^b & \text{sur} \quad \Sigma_{ab}^j. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Rappelons que le domaine  $\Omega_b^j$  est défini selon nos notations par :

$$\Omega_b^j = \{x^j \geq b\} \times \{y^j \in \mathbb{R}\} \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

où les coordonnées locales  $(x^j, y^j)$  sont données dans (6.3).

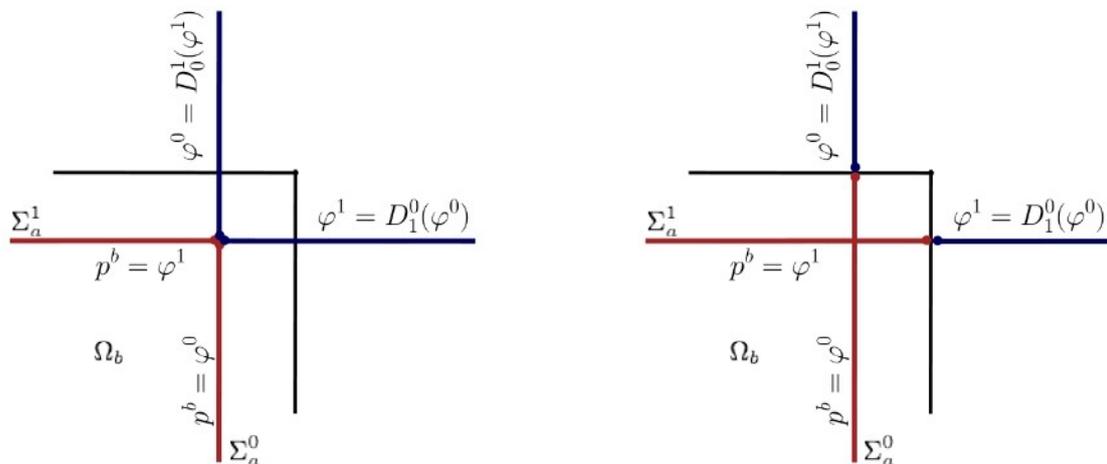


FIGURE 6.3 – Représentation schématique des relations de compatibilité (6.6) à gauche, et (6.7) à droite, pour  $p^b$ ,  $\varphi^0$  et  $\varphi^1$ .

En considérant ces deux choix de conditions (6.6) et (6.7), on déduit deux nouvelles formulations du problème (6.2). Tout d'abord, en utilisant (6.5-6.6), il vient :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ et } \varphi^j \in V^j \text{ tels que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p^b) + \omega_\epsilon^2 p^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = \Lambda_i^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_{bb}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^j = p^b & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.8)$$

où les espaces  $V^j$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \text{si } \epsilon > 0 : & \quad V^j = H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j), \\ \text{si } \epsilon = 0 : & \quad V^j = H_{loc}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j) \cap V_\omega. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Avec les conditions de transmission (6.5-6.7), on obtient la reformulation suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ et } \varphi^j \in V^j \text{ tels que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p^b) + \omega_\epsilon^2 p^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = \Lambda_i^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_{bb}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^j = p^b & \text{sur } \Sigma_{ab}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_b^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Par construction, nous savons que ces deux nouvelles formulations admettent au moins une solution. Discutons maintenant la question de l'équivalence.

**Proposition 6.1.1** *Pour un milieu dissipatif, la formulation (6.8) est équivalente au problème (6.2).*

**Preuve :** La démonstration est similaire à celle de la proposition 4.2.9. À partir d'une solution du problème reformulé (6.8), nous allons reconstruire la solution  $p$  du problème (6.2). La réciproque étant évidente, nous prouverons ainsi l'équivalence entre les deux formulations.

Soit  $(p^b, (\varphi^j)_{j \in \{0,1,2,3\}})$  une solution de (6.8). Grâce au lemme 4.2.1, nous savons que les relations de compatibilité sur les demi-droites  $\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j \pm 1}$  assurent

$$P^j(\varphi^j) = P^{j \pm 1}(\varphi^{j \pm 1}) \quad \text{dans} \quad \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j \pm 1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, nous pouvons définir la fonction  $p_{ext}$  dans  $H^1(\Omega_a^c)$  comme suit :

$$p_{ext} = P^j(\varphi^j) \quad \text{dans} \quad \Omega_a^j, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Maintenant, il reste à montrer que dans la zone de recouvrement  $B_l$  nous avons :

$$p^b = p_{ext} \quad \text{dans} \quad B_l.$$

Posons la différence  $v = p^b - p_{ext}$  définie dans  $B_l$ . Étant données les équations vérifiées par  $p^b$  et  $p_{ext}$  dans  $B_l$ , ainsi que les conditions de transmission

$$\varphi^j = p^b \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j, \quad \text{et} \quad A \nabla p^b \cdot \nu = \Lambda_l^j(\varphi^j) \quad \text{sur} \quad \Sigma_{bb}^j,$$

on déduit que  $v$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A \nabla v) + \omega_\epsilon^2 v = 0 & \text{dans} \quad B_l, \\ v = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_{aa}, \\ A \nabla v \cdot \nu = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_{bb}. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Or, grâce à la dissipation, ce problème vérifie toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, et donc admet comme unique solution  $v = 0$ . On peut ainsi reconstruire dans tout l'espace la solution  $p$  du problème initial (4.3) ainsi :

$$p = \begin{cases} p^b & \text{dans} \quad \Omega_b, \\ p_{ext} & \text{dans} \quad \Omega_a^c, \end{cases}$$

■

**Remarque 6.1.2** *Comme dans la section 1.2.1 du premier chapitre, l'introduction de la zone de recouvrement laisse présager l'apparition de fréquences de "boite" dans le cas sans dissipation (en supposant que l'on sache montrer la compatibilité des représentations dans les demi-plans). En effet, le problème (6.11) n'est alors plus coercif et admet des fréquences propres. Bien évidemment, une façon simple de palier cette difficulté est d'utiliser des conditions de transmission de type Robin, comme nous l'avons fait dans la première partie.*

Discutons maintenant la question de l'équivalence pour la deuxième formulation (6.10). Dans ce cas, nous ne savons pas montrer directement l'équivalence avec le problème initial (6.2). En effet, les conditions de transmission sur les droites  $\Sigma_a^j$  n'assurent pas a priori la compatibilité des

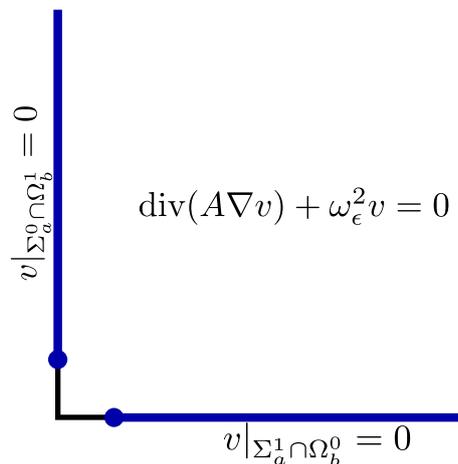


FIGURE 6.4 – Représentation des équations vérifiées par  $v = P^0(\varphi^0) - P^1(\varphi^1)$  dans le quart de plan  $\Omega_a^0 \cap \Omega_a^1$  pour la formulation (6.10).

représentations  $P^j(\varphi^j)$  dans l'intersection des demi-plans (même pour un milieu dissipatif), et on ne peut donc pas reproduire la démonstration ci-dessus. Pour illustrer ce point, considérons une solution de (6.10). En utilisant les conditions de transmission (6.7) sur les droites  $\Sigma_a^j$ , nous savons que la différence  $v = P^0(\varphi^0) - P^1(\varphi^1)$  vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla v) + \omega_\epsilon^2 v = 0 & \text{dans} & \Omega_a^0 \cap \Omega_a^1, \\ v = 0 & \text{sur} & (\Sigma_a^0 \cap \Omega_b^1) \cup (\Sigma_a^1 \cap \Omega_b^0). \end{cases}$$

La condition  $v = 0$  sur le bord du quart de plan n'étant pas jusqu'au coin  $(a, a)$  (voir Figure 6.4), on ne peut pas conclure que  $v = 0$ . La difficulté est de réussir à exploiter l'ensemble des conditions de transmission (6.5-6.7) pour montrer la compatibilité des différentes représentations, et pour l'instant, nous n'avons pas réussi. Néanmoins, on arrive à prouver dans le cas dissipatif que la formulation (6.10) admet une unique solution pour presque toute fréquence (voir la section suivante), ce qui nous donne l'équivalence indirectement.

### 6.1.3 Intérêt du recouvrement pour une approche itérative de résolution

Les deux reformulations que nous venons de décrire, ainsi que celle du chapitre 4, conduisent au calcul de 5 inconnues :  $p^b$  et les  $\varphi^j$ . De plus, les relations de compatibilité qu'on impose via les opérateurs intégraux  $D_{j\pm 1}^j$  et  $\Lambda_l^j$  entre les différentes représentations sont non locales. Par conséquent, la résolution numérique du problème est assez lourde et on souhaite développer une méthode de résolution efficace.

Comme dans la première partie de la thèse, l'idée a été d'utiliser un algorithme itératif de résolution. Une première approche naturelle est de considérer, par exemple pour la reformula-

tion (6.10), l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l}
 \text{Trouver } p_{(n)}^b \in H^1(\Omega_b) \text{ et } \varphi_{(n)}^j \in V^j \text{ tels que} \\
 \left. \begin{array}{ll}
 \operatorname{div}(A\nabla p_{(n)}^b) + \omega_\epsilon^2 p_{(n)}^b = f & \text{dans } \Omega_b, \\
 A\nabla p_{(n)}^b \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\
 A\nabla p_{(n)}^b \cdot \nu = \Lambda_l^j \varphi_{(n-1)}^j & \text{sur } \Sigma_{bb}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\
 \varphi_{(n)}^j = p_{(n-1)}^b & \text{sur } \Sigma_{ab}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\
 \varphi_{(n)}^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi_{(n-1)}^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_b^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},
 \end{array} \right\} \quad (6.12)
 \end{array}$$

où  $p_{(n)}^b$  et  $\varphi_{(n)}^j$  représentent l'approximation de la solution à l'étape  $(n)$ . L'avantage principal de cet algorithme est qu'il implique uniquement l'inversion des matrices creuses éléments finis, les termes de couplage étant ainsi au second membre.

Cependant, ce type de méthode (dite stationnaire) ne converge pas dans le cas général. Comme au premier chapitre (voir section 1.3.4), l'idée a été d'utiliser la méthode GMRES préconditionné par l'algorithme stationnaire (6.12) ci-dessus. On assure ainsi la convergence du processus itératif tout en conservant l'avantage "calculatoire" d'inverser uniquement une matrice creuse pour le calcul du préconditionneur.

Nous avons voulu étudier l'influence du recouvrement sur la vitesse de résolution par GMRES. Pour cela, nous avons comparé le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une erreur de résidu inférieure à  $10^{-10}$  en utilisant nos trois formulations : (4.21) ("sans recouvrement" vu au chapitre 4), (6.8) et (6.10) ("avec recouvrement").

Le cas test que nous avons choisi est de prendre comme terme source  $f$  deux gaussiennes tronquées décentrées, et comme obstacle  $\mathcal{O}$  un carré et un triangle, comme représenté sur la Figure 6.5. Pour les caractéristiques du milieu, nous avons choisi un cas isotrope :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et pour les paramètres de la méthode :

$$a = 0.5, \quad b \in \{0.5, 0.6, 0.7, 1\}, \quad T = 12, \quad T_\xi = \omega + 10.$$

Nous avons utilisé une quadrature de Gauss d'ordre 2 avec 600 intervalles, et les éléments finis utilisés sont d'ordre 2.

Sur la Figure 6.5, nous avons représenté la partie réelle de la solution obtenue dans  $\Omega_b$  et reconstruite dans les demi-plans  $\Omega_a^0$  et  $\Omega_a^1$  pour  $\omega_\epsilon = 50$ . Ces résultats sont obtenus à l'aide de nos trois formulations. Pour la formulation "sans recouvrement", nous avons pris  $a = b = 0.5$ , et pour les formulations "avec recouvrement", nous avons pris  $a = 0.5$  et  $b = 0.6$ . On observe (qualitativement) que nos trois formulations donnent la même solution.

Dans le tableau ci-dessous, nous avons indiqué le nombre d'itérations nécessaires à GMRES pour atteindre une erreur de résidu inférieure à  $10^{-10}$ , pour différentes fréquences et différentes tailles de recouvrement  $l = b - a$  :

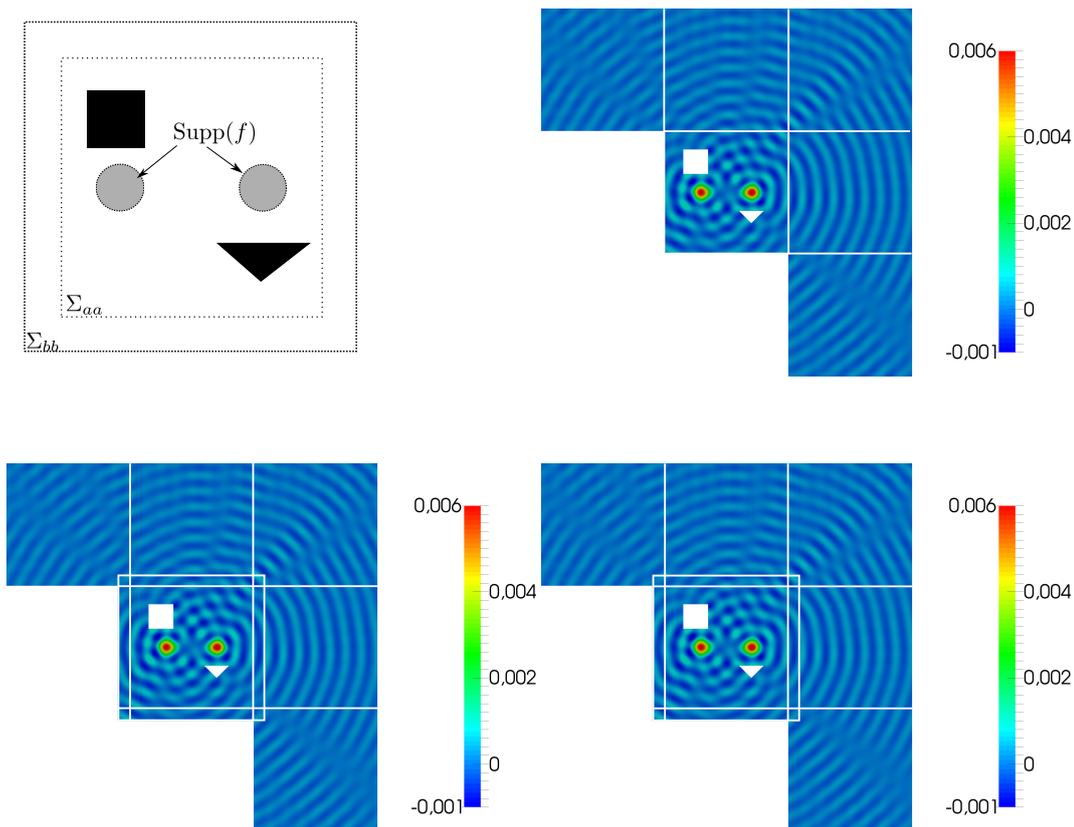


FIGURE 6.5 – Géométrie du cas test (en haut à gauche) et partie réelle de la solution dans  $\Omega_b$  et reconstruite dans  $\Omega_a^0$  et  $\Omega_a^1$  (pour  $\omega_\epsilon = 50$ ). Résultats obtenus avec les formulations (4.21) (en haut à droite), (6.8) (en bas à gauche) et (6.10) (en bas à droite).

	$l = 0$	$l = 0.1$		$l = 0.2$		$l = 0.5$	
$\omega = 10 + 0.5i$	26 ité.	15 ité.	13 ité.	14 ité.	11 ité.	13 ité.	9 ité.
$\omega = 15$	29 ité.	17 ité.	14 ité.	16 ité.	13 ité.	15 ité.	12 ité.
$\omega = 20 + i$	24 ité.	13 ité.	11 ité.	13 ité.	9 ité.	12 ité.	7 ité.
$\omega = 20$	28 ité.	17 ité.	14 ité.	15 ité.	15 ité.	14 ité.	12 ité.
$\omega = 50$	27 ité.	16 ité.	15 ité.	16 ité.	15 ité.	16 ité.	15 ité.

Dans les cas avec recouvrement  $l > 0$ , on a inscrit dans les colonnes dédoublées :

- à gauche le nombre d'itérations en utilisant la deuxième formulation (6.8),
- et à droite le nombre d'itérations en utilisant la troisième formulation (6.10).

Les résultats ci-dessus nous permettent de tirer plusieurs conclusions. Tout d'abord, on peut voir que le recouvrement permet, comme on l'espérait, de réduire le nombre d'itérations. Même pour un recouvrement petit ( $l = 0.1$ ), les gains sont déjà intéressants.

Ensuite, dans les cas avec recouvrement  $l > 0$ , on peut noter que la troisième formulation (6.10) est globalement un peu meilleure que la deuxième formulation (6.8). Ceci est d'autant plus vrai quand la dissipation est forte, par exemple pour  $\omega_\epsilon = 20 + i$ . Ce résultat s'explique car, pour cette formulation, nous verrons dans la proposition 6.2.9 que les opérateurs  $\Lambda_l^j$  et  $D_{j\pm 1}^j$  sont compacts, et ils deviennent même contractants pour  $\epsilon$  ou  $l$  suffisamment grand.

Par ailleurs, soulignons que pour la formulation (6.8), l'ajout du recouvrement a une influence uniquement sur les opérateurs  $\Lambda_l^j$  par rapport au cas "sans recouvrement". Il semble

donc que l'opérateur  $\Lambda_l^j$  soit plus "important" que les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  pour de réduire le nombre d'itérations.

Enfin, une dernière remarque que l'on peut faire est que le nombre d'itérations semble indépendant de la fréquence. Ceci est une curiosité par rapport à ce que nous avons pu observer dans le cas du guide dans la première partie et par rapport à ce qui est décrit dans [37]. En effet, usuellement, le nombre d'itérations pour résoudre l'équation d'Helmholtz dépend de la fréquence  $\omega_\epsilon$ . Nous n'avons pas pu approfondir cette question pour l'instant.

## 6.2 Étude théorique des formulations avec recouvrement dans le cas dissipatif

Dans cette section, nous allons montrer que les deux nouvelles formulations (6.8) et (6.10) relève de l'**alternative de Fredholm** dans le cas d'un milieu **dissipatif**. Ce résultat est important car il permet de garantir en particulier la convergence de notre méthode de discrétisation. Pour montrer ce résultat, nous allons exploiter ce que nous avons vu au chapitre 5. Par ailleurs, afin de faire l'analyse théorique, on considère :

$$\varphi^j \in L^2(\Sigma_a^j) \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Soulignons qu'à la fin de la section, nous résumons les propriétés théoriques que nous savons montrer.

### 6.2.1 Résultats préliminaires

Avant de commencer, donnons deux résultats qui nous seront utiles pour l'étude des deux formulations :

**Lemme 6.2.1** *Les racines  $r^j(\xi)$  (voir proposition 4.2.5) vérifient :*

$$\operatorname{Re}(r^j(\xi)) \leq m_\epsilon < 0, \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(r^j(\xi)) \underset{|\xi| \rightarrow +\infty}{\sim} -C|\xi|, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

où  $C$  est une constante strictement positive. De plus, la constante  $m_\epsilon$  vérifie :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} m_\epsilon = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} m_\epsilon = +\infty.$$

On montre simplement ce lemme par le calcul direct grâce à la dissipation  $\epsilon > 0$ .

De plus, grâce au recouvrement entre le domaine  $\Omega_b$  et les demi-plans  $\Omega_a^j$ , nous pouvons montrer le résultat suivant :

**Lemme 6.2.2** *Les opérateurs  $\Lambda_l^j$  de  $L^2(\Sigma_a^j)$  dans  $L^2(\Sigma_{bb}^j)$  sont continus et compacts.*

**Preuve :** Prouvons le résultat pour  $\Lambda_l^0$ , la même démarche s'applique pour tous les  $\Lambda_l^j$ . On identifie la droite  $\Sigma_a^0$  à  $\mathbb{R}$  et le segment  $\Sigma_{bb}^0$  à  $[-b, b]$ . Pour tout  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , nous avons :

$$\Lambda_l^0 \psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\xi) (c_1 r^0(\xi) + i c_3 \xi) e^{r^0(\xi)l} e^{i\xi y} d\xi = T_k \hat{\psi}(y), \quad \forall y \in [-b, b],$$

où  $T_k$  est l'opérateur à noyau défini par le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  suivant :

$$k(y, \xi) = (c_1 r^0(\xi) + i c_3 \xi) e^{r^0(\xi)l} e^{i\xi y}, \quad \forall (y, \xi) \in [-b, b] \times \mathbb{R}.$$

Montrons que  $k(\cdot, \cdot) \in L^2([-b, b] \times \mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \int_{\mathbb{R}} |k(y, \xi)|^2 d\xi dy &= \int_{-b}^b \int_{\mathbb{R}} |c_1 r^0(\xi) + ic_3 \xi|^2 e^{2\operatorname{Re}(r^0(\xi))l} d\xi dy, \\ &= 2b \int_{\mathbb{R}} |c_1 r^0(\xi) + ic_3 \xi|^2 e^{2\operatorname{Re}(r^0(\xi))l} d\xi < +\infty. \end{aligned}$$

On obtient ce résultat grâce aux propriétés sur  $r^0(\xi)$  données dans le lemme 6.2.1. Le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  étant dans  $L^2([-b, b] \times \mathbb{R})$ , nous savons que l'opérateur  $T_k$  est de Hilbert-Schmidt, et donc  $\Lambda_l^0$  est compact (voir section 5.1.2). ■

### 6.2.2 Caractère Fredholm de la première formulation avec recouvrement

Comme au chapitre 5, voir section 5.2.2, on pose  $\varphi_{j\pm 1}^j$  la restriction de  $\varphi^j$  à la demi-droite  $\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$  :

$$\varphi_{j\pm 1}^j = \varphi^j|_{\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}} \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}.$$

De plus, on introduit les opérateurs  $\chi_{j\pm 1}^j$  définis par :

$$\chi_{j\pm 1}^j \varphi_{j\pm 1}^j = \begin{cases} \varphi^j & \text{sur} \quad \Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}, \\ 0 & \text{sur} \quad \Sigma_a^j \setminus (\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}), \end{cases}$$

et les opérateurs  $\chi_a^j$  définis par :

$$\chi_a^j \varphi^j|_{\Sigma_{aa}^j} = \begin{cases} \varphi^j|_{\Sigma_{aa}^j} & \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j, \\ 0 & \text{sur} \quad \Sigma_a^j \setminus \Sigma_{aa}^j. \end{cases}$$

Par linéarité des opérateurs  $\Lambda_l^j$ , nous avons :

$$\Lambda_l^j \varphi^j = \Lambda_l^j \chi_{j+1}^j \varphi_{j+1}^j + \Lambda_l^j \chi_a^j \varphi^j|_{\Sigma_{aa}^j} + \Lambda_l^j \chi_{j-1}^j \varphi_{j-1}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (6.13)$$

Soulignons que cette décomposition (6.13) est possible car les opérateurs  $\Lambda_l^j$  sont continus de  $L^2(\Sigma_a^j)$  dans  $L^2(\Sigma_{bb}^j)$ , et les fonctions  $\chi_{j\pm 1}^j \varphi_{j\pm 1}^j$  et  $\chi_a^j \varphi^j|_{\Sigma_{aa}^j}$  sont des fonctions de  $L^2(\Sigma_a^j)$ . Cette remarque est également valable pour les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  (qui sont bien continus de  $L^2(\Sigma_a^j)$  dans  $L^2(\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j)$ , voir la proposition 5.3.6).

En particulier, en utilisant les conditions de transmission  $p^b = \varphi^j$  sur les segments  $\Sigma_{aa}^j$ , on peut éliminer  $\varphi^j$  sur les segments  $\Sigma_{aa}^j$  dans la formulation (6.8). On réécrit alors le problème

(6.8) comme suit :

$$\begin{array}{l}
 \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ et } \varphi_{j\pm 1}^j \in L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}) \text{ tels que} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{div}(A\nabla p^b) + \omega_\epsilon^2 p^b = f \quad \text{dans} \quad \Omega_b, \\
 A\nabla p^b \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{O}, \\
 A\nabla p^b \cdot \nu = \Lambda_l^j \chi_a^j p^b|_{\Sigma_{aa}^j} \\
 \quad + \Lambda_l^j [\chi_{j-1}^j \varphi_{j-1}^j + \chi_{j+1}^j \varphi_{j+1}^j] \quad \text{sur} \quad \Sigma_{bb}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\
 \varphi_j^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \chi_a^j p^b|_{\Sigma_{aa}^j} \\
 \quad + D_{j\pm 1}^j [\chi_{j-1}^j \varphi_{j-1}^j + \chi_{j+1}^j \varphi_{j+1}^j] \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},
 \end{array} \right\} \quad (6.14)
 \end{array}$$

Remarquons qu'à partir de la solution du problème (6.8) (où les  $\varphi^j \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j) \subset L^2(\Sigma_a^j)$ ), on déduit trivialement une solution du problème (6.14) ci-dessus. De plus, nous avons même l'équivalence entre les deux formulations :

**Proposition 6.2.3** *Pour un milieu dissipatif, les problèmes (6.14) et (6.8) sont équivalents.*

**Preuve :** Prouvons qu'à partir d'une solution du problème (6.14), on sait reconstruire la solution du problème (6.8). Considérons une solution  $p^b, (\varphi_{j\pm 1}^j)_{j \in \{0,1,2,3\}}$  du problème ci-dessus. Sachant que  $p^b \in H^1(\Omega_b)$ , nous avons en particulier  $p^b|_{\Sigma_{aa}} \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa})$ . On déduit du corollaire 5.2.2 vu au chapitre 5 que  $\varphi^j \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)$ . On a donc construit la solution du problème (6.8), ce qui montre l'équivalence entre les deux formulations. ■

Nous allons maintenant montrer qu'on peut réécrire le problème (6.14) ci-dessus sous forme opérateur comme la somme d'un opérateur inversible et d'un opérateur compact agissant sur l'ensemble des inconnues  $p^b$  et  $(\varphi_{j\pm 1}^j)_{j \in \{0,1,2,3\}}$ .

Introduisons l'opérateur  $R$  associé (via le théorème de représentation de Riesz) à la forme bilinéaire suivante :

$$\forall \tilde{p} \in H^1(\Omega_b), \quad \langle R p^b, \tilde{p} \rangle = \int_{\Omega_b} \omega_\epsilon^2 p^b \tilde{p} - A\nabla p^b \cdot \tilde{p}, \quad (6.15)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $H^1(\Omega_b)$  et son dual. Nous savons que la forme bilinéaire ci-dessus est coercive, grâce à la dissipation (voir la proposition 4.1.2), et est continue. Notons que cette forme bilinéaire apparaît dans la formulation variationnelle du problème (6.14), et elle vient des équations vérifiées par  $p^b$  dans  $\Omega_b$  (pour plus de détails sur la formulation variationnelle, voir la section 4.3.1). On en déduit que  $R$  est un opérateur inversible et continu. De plus, grâce aux propriétés sur la forme bilinéaire, on peut montrer que  $R$  est d'inverse continu.

Dans la section 5.2.2 du chapitre 5, nous avons vu que les équations portant sur les inconnues  $\varphi_{j\pm 1}^j$  peuvent s'écrire sous forme matricielle à l'aide d'une matrice d'opérateurs  $\mathbb{I} - \mathbb{D}$  de taille  $8 \times 8$  agissant sur le vecteur :

$$\Phi = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc}
 \varphi_3^0 & \varphi_1^0 & \varphi_0^1 & \varphi_2^1 & \varphi_1^2 & \varphi_3^2 & \varphi_2^3 & \varphi_0^3
 \end{array} \right]^t.$$

$\mathbb{I}$  est la matrice d'opérateurs identités, et  $\mathbb{D}$  est défini avec les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j$  par la formule (5.28). La différence par rapport au chapitre 5 est qu'ici, on a en plus les termes  $D_{j\pm 1}^j \chi_a^j p^b|_{\Sigma_{aa}^j}$

## 6.2. Étude théorique des formulations avec recouvrement dans le cas dissipatif 181

qui ne sont plus au second membre. Sur ces opérateurs  $D_{j\pm 1}^j \chi_a^j(\cdot|_{\Sigma_{aa}^j})$ , nous avons le résultat suivant :

**Proposition 6.2.4** *L'opérateur  $D_{j\pm 1}^j \chi_a^j$  de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j)$  dans  $L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$  est compact.*

**Preuve :** On démontre ce résultat en remarquant que  $D_{j\pm 1}^j \chi_a^j$  correspond à la composition entre l'identité de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{aa}^j)$  dans  $L^2(\Sigma_{aa}^j)$ , qui est compact, et  $D_{j\pm 1}^j \chi_a^j$  qui est continu de  $L^2(\Sigma_{aa}^j) \subset L^2(\Sigma_a^j)$  dans  $L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1})$ . ■

De plus, nous savons par le théorème 5.2.6 que l'opérateur  $\mathbb{I} - \mathbb{D}$  se décompose en un opérateur coercif  $\mathbb{I} - \mathbb{L}$ , et un l'opérateur compact  $\mathbb{L} - \mathbb{D}$ . Finalement, on peut réécrire le problème (6.14) sous forme opérateur comme la somme d'un opérateur inversible :

$$\left[ \begin{array}{c|c} R & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \left[ \begin{array}{c} \mathbb{I} - \mathbb{L} \end{array} \right] \end{array} \right]$$

agissant sur le vecteur  $[p^a, [\Phi]]$ , et d'un opérateur compact :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \sum_{j=0}^3 \Lambda_l^j \chi_a^j(\cdot|_{\Sigma_{aa}^j}) & [\Lambda_l^0 \chi_3^0 \quad \Lambda_l^0 \chi_1^0] \quad \cdots \quad [\Lambda_l^3 \chi_2^3 \quad \Lambda_l^3 \chi_0^3] \\ \hline \left[ \begin{array}{c} D_3^0 \chi_a^0(\cdot|_{\Sigma_{aa}^0}) \\ D_1^0 \chi_a^0(\cdot|_{\Sigma_{aa}^0}) \\ \vdots \\ D_2^3 \chi_a^3(\cdot|_{\Sigma_{aa}^3}) \\ D_0^3 \chi_a^3(\cdot|_{\Sigma_{aa}^3}) \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \mathbb{L} - \mathbb{D} \end{array} \right] \end{array} \right]$$

On prouve ainsi le résultat suivant :

**Théorème 6.2.5** *Pour un milieu dissipatif, la formulation (6.14) relève de l'alternative de Fredholm.*

Soulignons enfin que nous avons directement le caractère **bien posé** du problème (6.14) grâce à l'équivalence avec le problème (6.8) (car on est assuré ainsi de l'unicité de la solution du problème homogène).

**Proposition 6.2.6** *Le problème (6.14) est bien posé.*

### 6.2.3 Caractère Fredholm de la seconde formulation avec recouvrement

Avec ce que nous avons présenté pour la formulation précédente, l'étude de ce second cas sera plus rapide car nous allons utiliser les mêmes ingrédients. Dans la formulation (6.10), on impose le raccord  $p^b = \varphi^j$  sur le segment  $\Sigma_{ab}^j$ . Nous allons donc dans ce cas éliminer  $\varphi^j$  non plus sur  $\Sigma_{aa}^j$  mais sur le segment  $\Sigma_{ab}^j$ . Posons les restrictions  $\tilde{\varphi}_{j\pm 1}^j$  aux demi-droites  $\Sigma_a^j \cap \Omega_b^j$  :

$$\tilde{\varphi}_{j\pm 1}^j = \tilde{\chi}_{j\pm 1}^j \varphi^j \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^j \cap \Omega_b^{j\pm 1},$$

De plus, on définit les opérateurs :

$$\tilde{\chi}_{j\pm 1}^j \tilde{\varphi}_{j\pm 1}^j = \begin{cases} \varphi^j & \text{sur } \Sigma_a^j \cap \Omega_b^{j\pm 1}, \\ 0 & \text{sur } \Sigma_a^j \setminus (\Sigma_a^j \cap \Omega_b^{j\pm 1}), \end{cases}$$

et les opérateurs  $\chi_b^j$  :

$$\chi_b^j \varphi^j|_{\Sigma_{ab}^j} = \begin{cases} \varphi^j|_{\Sigma_{ab}^j} & \text{sur } \Sigma_{ab}^j, \\ 0 & \text{sur } \Sigma_a^j \setminus \Sigma_{ab}^j. \end{cases}$$

À l'aide des inconnues  $\tilde{\varphi}_{j\pm 1}^j$  définis sur les demi-droites  $\Sigma_a^j \cap \Omega_b^{j\pm 1}$ , on peut reformuler le problème (6.10) comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p^b \in H^1(\Omega_b) \text{ et } \varphi_{j\pm 1}^j \in L^2(\Sigma_a^j \cap \Omega_b^{j\pm 1}) \text{ tels que} \\ \left. \begin{array}{l} \text{div}(A\nabla p^b) + \omega_\epsilon^2 p^b = f \quad \text{dans } \Omega_b, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ A\nabla p^b \cdot \nu = \Lambda_l^j \chi_b^j p^b|_{\Sigma_{ab}^j} \quad \text{sur } \Sigma_{bb}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \quad + \Lambda_l^j [\tilde{\chi}_{j-1}^j \varphi_{j-1}^j + \tilde{\chi}_{j+1}^j \varphi_{j+1}^j] \\ \varphi_j^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \chi_b^j p^b|_{\Sigma_{ab}^j} \quad \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ \quad + D_{j\pm 1}^j [\tilde{\chi}_{j-1}^j \varphi_{j-1}^j + \tilde{\chi}_{j+1}^j \varphi_{j+1}^j] \end{array} \right\} \quad (6.16) \end{array}$$

Afin de montrer que ce problème se réécrit sous forme opérateur comme la somme d'un opérateur inversible et d'un opérateur compact, nous avons besoin du résultat suivant :

**Proposition 6.2.7** *Les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  de  $L^2(\Sigma_a^j)$  dans  $L^2(\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_b^j)$  sont compacts.*

**Preuve :** Montrons que le résultat pour  $D_1^0$ . On identifie la droite  $\Sigma_a^0$  (resp.  $\Sigma_a^1 \cap \Omega_a^0$ ) à  $\mathbb{R}$  (resp.  $[b, +\infty[$ ). Pour tout  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , nous avons :

$$D_1^0 \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\xi) e^{r^0(\xi)(x-a)} e^{i\xi a} d\xi = T_k \hat{\psi}(x), \quad \forall x \geq a,$$

où  $T_k$  est l'opérateur à noyau défini par le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  suivant :

$$k(x, \xi) = \frac{e^{r^0(\xi)(x-a)} e^{i\xi a}}{\sqrt{2\pi}} \quad \forall (x, \xi) \in [b, +\infty[ \times \mathbb{R}.$$

Nous allons montrer que  $T_k$  est de Hilbert-Schmidt, c'est à dire que  $k(\cdot, \cdot) \in L^2([b, +\infty[ \times \mathbb{R})$  :

$$\int_b^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |k(x, \xi)|^2 dx d\xi = \int_b^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{r^0(\xi)(x-a)}|^2}{2\pi} dx d\xi.$$

En appliquant le théorème de Fubini, il vient :

$$\begin{aligned} \int_b^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |k(x, \xi)|^2 dx d\xi &= \int_b^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{r^0(\xi)(x-a)}|^2}{2\pi} dx d\xi, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\text{Re}(r^0(\xi))l}}{2\pi \text{Re}(r^0(\xi))} d\xi < +\infty. \end{aligned}$$

## 6.2. Étude théorique des formulations avec recouvrement dans le cas dissipatif 183

On montre le résultat ci-dessus en utilisant les propriétés sur  $r^0(\xi)$  du lemme 6.2.1. ■

Cette proposition nous permet de montrer que le problème (6.16) sous forme opérateur s'écrit comme la somme d'un opérateur inversible :

$$\mathbb{M} = \left[ \begin{array}{c|c} R & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \left[ \begin{array}{c} \mathbb{I} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (6.17)$$

agissant sur le vecteur  $[p^a, [\Phi]]$ , où  $R$  a été défini par l'équation 6.15, et d'un opérateur compact :

$$\mathbb{K} = \left[ \begin{array}{c|c} \sum_{j=0}^3 \Lambda_l^j \chi_b^j(\cdot |_{\Sigma_{aa}^j}) & [\Lambda_l^0 \tilde{\chi}_3^0 \quad \Lambda_l^0 \tilde{\chi}_1^0 \quad \cdots \quad [\Lambda_l^3 \tilde{\chi}_2^3 \quad \Lambda_l^3 \tilde{\chi}_0^3]] \\ \hline \begin{bmatrix} D_3^0 \chi_b^0(\cdot |_{\Sigma_{aa}^0}) \\ D_1^0 \chi_b^0(\cdot |_{\Sigma_{aa}^0}) \\ \vdots \\ D_2^3 \chi_b^3(\cdot |_{\Sigma_{aa}^3}) \\ D_0^3 \chi_b^3(\cdot |_{\Sigma_{aa}^3}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ -\tilde{\mathbb{D}} \\ \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (6.18)$$

La matrice d'opérateurs  $\tilde{\mathbb{D}}$  est définie comme  $\mathbb{D}$  (voir formule (5.28)) en remplaçant simplement les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j\pm 1}^j$  (resp.  $D_{j\pm 1}^j \chi_{j-1}^j$ ) par  $D_{j\pm 1}^j \tilde{\chi}_{j\pm 1}^j$  (resp.  $D_{j-1}^j \tilde{\chi}_{j\pm 1}^j$ ). Grâce à la proposition 6.2.7, nous savons que  $\tilde{\mathbb{D}}$  est compact. On en déduit le résultat suivant :

**Théorème 6.2.8** *Le problème (6.16) relève de l'alternative de Fredholm.*

Reste maintenant à montrer le caractère bien posé du problème (6.16), ce qui revient à prouver l'unicité de la solution. Dans ce cas, la difficulté est que nous ne savons pas montrer l'équivalence entre le problème (6.16) et le problème initial (6.2). On ne sait donc pas montrer directement l'unicité de la solution.

Afin de montrer le caractère bien posé, nous proposons d'utiliser le théorème de Fredholm analytique. Nous allons montrer qu'il existe une fréquence complexe  $\omega_\epsilon$  pour laquelle le problème est bien posé. Pour cela, nous avons besoin de la proposition suivante :

**Proposition 6.2.9** *Les normes des opérateurs  $\Lambda_l^j$  et  $D_{j\pm 1}^j$  définis de  $L^2(\Sigma_a^j)$  dans respectivement  $L^2(\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_b^j)$  et  $L^2(\Sigma_{bb}^j)$  vérifient*

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \|\Lambda_l^j\|_{\mathcal{L}(L^2)} &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \|D_{j\pm 1}^j\|_{\mathcal{L}(L^2)} = 0 \\ \text{et } \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \|\Lambda_l^j\|_{\mathcal{L}(L^2)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \|D_{j\pm 1}^j\|_{\mathcal{L}(L^2)} = 0, \end{aligned}$$

où on rappelle que les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  et  $\Lambda_l^j$  dépendent de  $\omega_\epsilon$  (donc de la dissipation  $\epsilon$ ) et de  $l$ .

**Preuve :** Montrons le résultat pour  $D_1^0$ , la même démarche s'applique pour les autres opérateurs. Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 6.2.7 que pour tout  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , nous avons :

$$\| D_1^0 \psi \|_{L^2([b, +\infty[)} = \| T_k \widehat{\psi} \|_{L^2([b, +\infty[)} \leq \| T_k \| \| \psi \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

où  $T_k$  est un opérateur à noyau défini par le noyau  $k(\cdot, \cdot)$  :

$$k(x, \xi) = \frac{e^{r^0(\xi)(x-a)} e^{i\xi a}}{\sqrt{2\pi}} \quad \forall (x, \xi) \in [b, +\infty[ \times \mathbb{R}.$$

Nous avons vu que la norme  $\| D_1^0 \|$  est majorée par la norme Hilbert-Schmidt  $\| \cdot \|_{H.S}$  de  $T_k$  qui est la norme  $L^2$  du noyau  $k(\cdot, \cdot)$  (voir rappels dans la section 5.1.2). De plus, nous avons vu dans la preuve de la proposition 6.2.7 que :

$$\int_b^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |k(x, \xi)|^2 dx d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\operatorname{Re}(r^0(\xi))l}}{2\pi \operatorname{Re}(r^0(\xi))} < +\infty.$$

D'après les propriétés de  $r^0(\xi)$  données dans le lemme 6.2.1, nous savons que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , le terme  $e^{2\operatorname{Re}(r^0(\xi))l}$  tend vers 0 quand  $l$  tend  $+\infty$ , ou  $\epsilon$  tend  $+\infty$ . On déduit alors, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, que l'intégrale ci-dessus tend vers 0 quand  $l$  (ou  $\epsilon$ ) tend vers  $+\infty$ , ce qui prouve le résultat. ■

Cette proposition est importante car elle nous permet d'affirmer qu'il existe toujours un recouvrement  $l$  suffisamment grand pour rendre la norme de  $\mathbb{K}$  (voir formule (6.18)) inférieure à 1. On en déduit alors que pour ce  $l$ , le problème (6.16) est bien posé en utilisant la série de Neumann associée l'opérateur  $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}$  (par continuité de  $\mathbb{M}^{-1}$ , on sait qu'on peut choisir  $l$  suffisamment grand pour avoir  $\| \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} \| < 1$ ).

De même, pour  $l$  fixé, nous pouvons montrer que  $\mathbb{K}$  dépend analytiquement de  $\omega_\epsilon$  pour tout  $\epsilon > 0$ . Or, pour  $\epsilon$  suffisamment grand, nous savons que sa norme devient inférieure à 1. On en déduit qu'il existe une fréquence complexe  $\omega_\epsilon$  telle que le problème (6.16) soit bien posé. On peut ainsi appliquer le théorème de Fredholm analytique :

**Proposition 6.2.10** *Pour un milieu dissipatif, le problème (6.16) est bien posé, sauf pour au plus un ensemble dénombrable de fréquences complexes  $\omega_\epsilon$  pouvant s'accumuler sur l'axe réel.*

Ce résultat nous permet notamment de déduire l'équivalence avec le problème initial (6.2) pour presque toutes les fréquences complexes. La question de savoir s'il existe ou non des fréquences complexes pour lesquelles le problème est mal posé reste ouverte.

Pour clore cette section théorique, résumons les propriétés que nous savons montrer dans le cas dissipatif sur les deux formulations "avec recouvrement".

	Formulation de type <b>Fredholm</b>	<b>bien posée</b>
Formulation (6.8)	Oui	Oui
Formulation (6.10)	Oui	Oui, pour presque toute fréquence

## 6.3 Autres structurations des sous-domaines

### 6.3.1 Introduction

La méthode que nous proposons consiste à coupler entre elles plusieurs représentations analytiques de la solution dans des demi-plans ainsi qu'une représentation éléments finis dans un domaine borné. Le milieu extérieur étant parfaitement homogène, nous pouvons choisir la structuration des sous-domaines différemment de ce que nous avons présenté jusqu'ici. En particulier, une généralisation de notre approche est de considérer comme domaine borné un polygone **convexe** (comme illustré Figure 6.6) contenant les obstacles  $\mathcal{O}$  et la source  $f$ . Pour les représentations analytiques, on utilise les demi-plans s'appuyant sur les différentes faces du polygones.

**Remarque 6.3.1** Notons que dans l'article [13] de S. Fliss et al., afin de considérer un réseau de périodicité hexagonal, une autre structuration des sous-domaines est également proposée.

Nous avons besoin de la propriété de convexité du polygone pour assurer qu'aucun demi-plan n'intersecte la zone perturbée du domaine, sans quoi on ne peut pas donner la représentation en ondes planes.

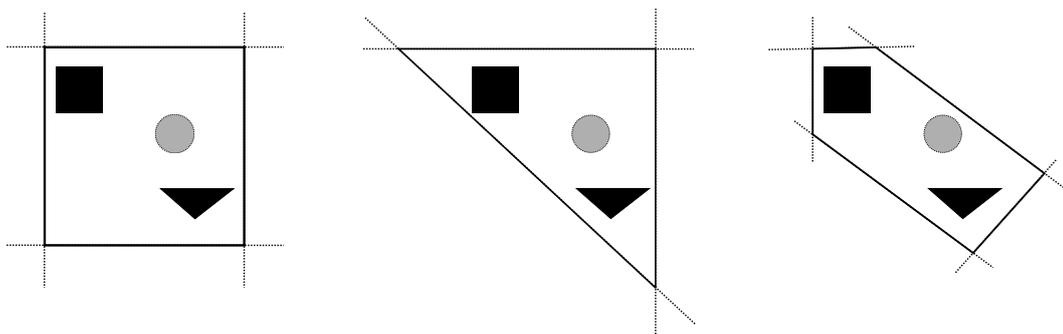


FIGURE 6.6 – Différentes formes possibles de la boîte éléments finis. En lignes pointillées, on a représenté les bords des demi-plans s'appuyant sur les cotés du polygones. Le disque gris représente le support de la source  $f$ .

Bien évidemment, afin de réduire au plus le coût de calcul, le polygone le mieux adapté est le triangle car on se ramène alors à 3 représentations analytiques et une dans le domaine bornée. C'est d'autant plus important en 3D où l'on considère alors un tétraèdre (4 faces au lieu de 6 pour le cube). Remarquons enfin qu'un intérêt de choisir la forme de la boîte éléments finis est qu'on peut ainsi l'adapter à l'aspect d'un obstacle allongé. Cela évite notamment le maillage d'une zone éléments finis trop grande.

### 6.3.2 Diffraction par un polygone convexe borné

Le problème modèle que nous allons considérer dans cette section est le suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p \in V \text{ telle que} \\ \left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p) + \omega_\epsilon^2 p = 0 & \text{dans } \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}, \\ p = g & \text{sur } \partial\mathcal{P}, \end{array} \right. \end{array} \quad (6.19)$$

où  $g$  est une donnée de Dirichlet sur le bord d'un polygone  $\mathcal{P}$  supposé convexe et borné. Dans cette situation, il est possible de donner une formulation multi-domaines du problème (6.19)

sans utiliser une boîte éléments finis. En effet, l'idée est simplement de considérer les représentations en ondes planes dans les demi-plans s'appuyant sur les bords de  $\mathcal{P}$ . Ces travaux ont été menés par P. Alonso lors de son stage de Master 2 effectué au sein de POEMS (voir [4]). Les résultats numériques ci-après ont été obtenus par P. Alonso.

Notons que ce type de problème a notamment été étudié par S. N. Chandler-Wilde dans le cas haute fréquence dans plusieurs articles [5, 24, 25] en utilisant une méthode d'équation intégrale. Plus précisément, le problème considéré est la diffraction d'une onde plane par un obstacle polygonal borné, ce qui revient dans notre cas à considérer un milieu non dissipatif, et une donnée de Dirichlet  $g$  correspondant à la trace d'une onde incidente (voir à la fin de la section 6.3.3). Notre méthode correspond au "négatif" de la méthode utilisée par S. N. Chandler-Wilde.

**Remarque 6.3.2** *D'un point de vue numérique, si le polygone possède beaucoup de cotés il est bien sûr moins coûteux de "l'entourer" d'une boîte éléments finis (par exemple triangulaire ou rectangulaire) afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.*

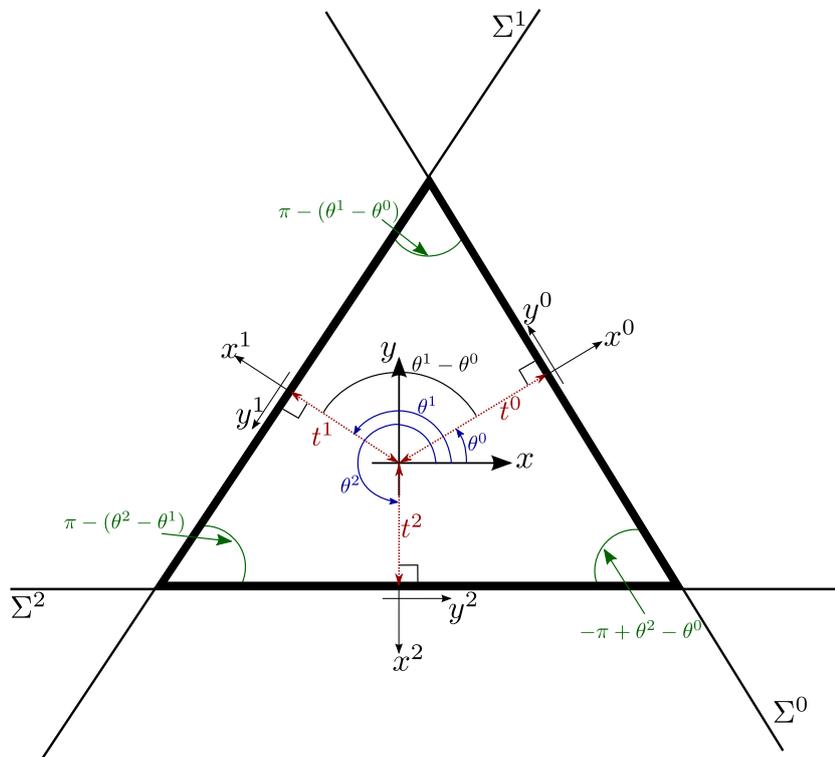


FIGURE 6.7 – Paramétrisation du polygone dans le cas d'un triangle.

### Géométrie du polygone.

On considère que le polygone  $\mathcal{P}$  possède  $N \geq 3$  cotés. Afin de caractériser  $\mathcal{P}$ , nous utilisons les  $N$  droites s'appuyant sur les  $N$  cotés du polygone (voir Figure 6.7). Ce choix de caractérisation de  $\mathcal{P}$  est motivé par la représentation analytique de la solution que nous allons donner dans les demi-plans. Pour définir simplement ces droites, il est utile d'introduire les coordonnées locales suivantes :

$$\begin{bmatrix} x^j \\ y^j \end{bmatrix} = R_j \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad R_j = \begin{bmatrix} \cos(\theta^j) & -\sin(\theta^j) \\ \sin(\theta^j) & \cos(\theta^j) \end{bmatrix} \quad \text{pour} \quad j \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (6.20)$$

et où  $\theta^j$  est un angle de rotation associé au coté  $j$  de  $\mathcal{P}$ . Dans ces coordonnées locales, on définit les droites  $\Sigma^j$  ainsi :

$$\Sigma^j = \{x^j = t^j\} \times \{y^j \in \mathbb{R}\} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

où la constante  $t^j > 0$  représente la distance de la droite  $\Sigma_a^j$  au centre du repère (pour un polygone régulier, cette distance est appelée *apothème* et correspond au rayon du cercle inscrit). De même, on définit les demi-plans  $\Omega^j$  par :

$$\Omega^j = \{x^j \geq t^j\} \times \{y^j \in \mathbb{R}\} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Sans perte de généralité, on considère que les angles  $\theta^j$  sont ordonnés ainsi :

$$0 \leq \theta^0 < \theta^1 < \dots < \theta^{N-1} < 2\pi.$$

De plus, afin d'assurer qu'on définit bien un polygone convexe borné, les  $\theta^j$  doivent vérifier :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \quad 0 < \theta^j - \theta^{j-1} < \pi \quad \text{et} \quad 0 < -\pi + \theta^{N-1} - \theta^0 < \pi. \quad (6.21)$$

Ces conditions impliquent que chaque angle du polygone est inférieur à  $\pi$ , ce qui assure la convexité et également le caractère borné. En effet, on montre facilement que l'angle du polygone formé par les 2 droites  $\Sigma^j$  et  $\Sigma^{j-1}$  est égal à  $\pi - (\theta^j - \theta^{j-1})$  (voir Figure 6.7), et nous avons :

$$0 < \pi - (\theta^j - \theta^{j-1}) < \pi \quad \Leftrightarrow \quad \pi > \theta^j - \theta^{j-1} > 0.$$

Notre polygone  $\mathcal{P}$  est alors complètement défini par l'ensemble des angles  $\{\theta^j\}_j$  et l'ensemble des translations  $\{t^j\}_j$ . Par exemple, le triangle équilatéral de la Figure 6.7 est décrit par :

$$\{\theta^j\}_{j \in \{0,1,2\}} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \text{et} \quad \{t^j\}_{j \in \{0,1,2\}} = \{1, 1, 1\}.$$

Notons qu'on retrouve facilement les sommets  $S_{j,j\pm 1}$  du polygone  $\mathcal{P}$  ainsi :

$$S_{j,j\pm 1} = \Sigma^j \cap \Sigma^{j\pm 1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/(N-1)\mathbb{Z}.$$

### Reformulation du problème.

Décrivons maintenant comment reformuler le problème (6.19). On définit :

$$\varphi^j = p|_{\Sigma_a^j} \quad \text{sur} \quad \Sigma^j \quad \text{et} \quad p^j = p|_{\Omega^j} \quad \text{dans} \quad \Omega^j.$$

À partir de ces traces, on peut donner les représentations analytiques de la solution dans les demi-plans  $\Omega^j$  en suivant la même démarche que dans la section 4.2.2. Dans le demi-plan  $\Omega^j$ , les équations vérifiées par  $p^j$  se réécrivent en coordonnées  $(x^j, y^j)$  comme suit (voir section 2.2.2) :

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div}_{(x^j, y^j)} (R_j^t A R_j \nabla_{(x^j, y^j)} p^j) + \omega_c^2 p^j = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^j, \\ p^j|_{\Sigma^j} = \varphi^j \quad \text{sur} \quad \Sigma^j, \end{array} \right. \quad (6.22)$$

où  $\nabla_{(x^j, y^j)}$  (resp.  $\operatorname{div}_{(x^j, y^j)}$ ) désigne le gradient (resp. la divergence) en coordonnées  $(x^j, y^j)$ . La matrice  $A$  étant supposée symétrique définie positive, l'équation ci-dessus est également une équation d'Helmholtz anisotrope. À l'aide de la transformée de Fourier (en  $y^j$ ), sa résolution

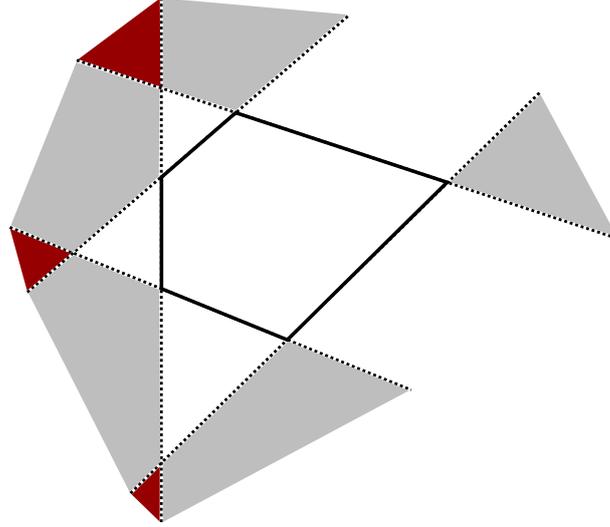


FIGURE 6.8 – Zone de recouvrement des demi-plans : en rouge les zones où 3 représentations coexistent, en gris, celles où 2 coexistent.

est similaire à ce que nous avons vu section 4.4.1 dans le cas non dissipatif et 4.2.2 dans le cas dissipatif. Elle conduit alors à la représentation suivante de la solution dans  $\Omega^j$  :

$$p^j(x^j, y^j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}^j(\xi) e^{r^j(\xi)(x^j - t^j)} e^{i\xi y^j} d\xi \quad \forall \{x^j \geq t^j\} \times \{y^j \in \mathbb{R}\}. \quad (6.23)$$

Dans la suite, on note  $P^j(\varphi^j)$  la solution du problème (6.22) dans le demi-plan  $\Omega^j$  donnée par la formule explicite ci-dessus.

Discutons maintenant les relations de compatibilité. Dans l'intersection des demi-plans, nous devons avoir :

$$p^j = p^{j\pm 1} \quad \text{dans} \quad \Omega^j \cap \Omega^{j\pm 1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/(N-1)\mathbb{Z}. \quad (6.24)$$

Remarquons que dans certaines configurations comme illustré Figure 6.8, 3 (ou plus) représentations de la solution peuvent exister dans l'intersection de 3 (ou plus) demi-plans, et on doit alors vérifier

$$p^{j-1} = p^j = p^{j+1} \quad \text{dans} \quad \Omega^{j-1} \cap \Omega^j \cap \Omega^{j+1}. \quad (6.25)$$

En imposant les relations (6.24), les relations ci-dessus (6.25) sont bien vérifiées. En effet, par (6.24) il vient :

$$p^j = p^{j+1} \quad \text{dans} \quad \Omega^j \cap \Omega^{j+1} \quad \text{et} \quad p^j = p^{j-1} \quad \text{dans} \quad \Omega^j \cap \Omega^{j-1},$$

dont on déduit en particulier la relation (6.25).

Comme précédemment, nous allons imposer la compatibilité uniquement sur les bords des demi-plans :

$$\varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j \quad \text{sur} \quad \Sigma^{j\pm 1} \cap \Omega^j \quad \text{où} \quad D_{j\pm 1}^j \varphi^j = P^j(\varphi^j)|_{\Sigma^{j\pm 1} \cap \Omega^j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/(N-1)\mathbb{Z}. \quad (6.26)$$

On peut montrer, dans le cas dissipatif, que ces relations (6.26) sont équivalentes aux relations (6.24). La preuve de ce résultat est similaire à celle du lemme 4.2.1.

Ci-dessus, la définition des  $D_{j\pm 1}^j(\cdot)$  est abstraite, mais on peut obtenir une expression explicite. Pour cela, il suffit de paramétrer la droite  $\Sigma^{j\pm 1}$  dans les coordonnées locales  $(x^j, y^j)$ . Notons  $\alpha_{jj\pm 1}$  l'écart entre deux angles successifs :

$$\alpha_{jj\pm 1} = \theta^{j\pm 1} - \theta^j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/(N-1)\mathbb{Z}.$$

Dans les coordonnées locales  $(x^j, y^j)$ , les droites  $\Sigma^{j\pm 1}$  sont données par :

$$\Sigma^{j\pm 1} = \{(x^j, y^j) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \cos(\alpha_{jj\pm 1}) x^j - \sin(\alpha_{jj\pm 1}) y^j = t^{j\pm 1}\}.$$

On en déduit alors facilement la paramétrisation de la demi-droite  $\Sigma^{j\pm 1} \cap \Omega^j$  dans les coordonnées  $(x^j, y^j)$  :

$$\Sigma^{j\pm 1} \cap \Omega^j = \{t \geq t^j\} \times \left\{ \frac{t \cos(\alpha_{jj\pm 1}) - t^{j\pm 1}}{\sin(\alpha_{jj\pm 1})} \right\}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/(N-1)\mathbb{Z}.$$

En remplaçant dans la formule (6.23) les coordonnées  $(x^j, y^j)$  par la paramétrisation ci-dessus, on obtient l'expression explicite des opérateurs  $D_{j\pm 1}^j(\cdot)$  :

$$\forall t \geq t^j, \quad D_{j\pm 1}^j(\varphi^j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}^j(\xi) e^{r^j(\xi)(t-t^j)} e^{i\xi \frac{t \cos(\alpha_{jj\pm 1}) - t^{j\pm 1}}{\sin(\alpha_{jj\pm 1})}} d\xi \quad \forall j \in \mathbb{Z}/(N-1)\mathbb{Z}. \quad (6.27)$$

Soulignons que d'après (6.21), nous avons  $\pi > \alpha_{jj\pm 1} = \theta^{j\pm 1} - \theta^j > 0$ , et donc le terme  $\sin(\alpha_{jj\pm 1}) \neq 0$ .

À l'aide des relations de compatibilité (6.26), nous pouvons reformuler le problème (6.19) uniquement avec les variables  $\varphi^j$  ainsi :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi^j \in V^j \text{ tels que } \forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ & \left| \begin{array}{ll} \varphi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \varphi^j & \text{sur } \Sigma^{j\pm 1} \cap \Omega^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/(N-1)\mathbb{Z}, \\ \varphi^j = g & \text{sur } \partial\mathcal{P} \cap \Sigma^j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.28)$$

où on rappelle que les espaces  $V^j$  sont définis par (6.9).

### 6.3.3 Quelques résultats numériques

La méthode pour discrétiser le problème (6.28) est similaire à celle décrite dans la section 4.3.2. Comme précédemment, nous avons 3 paramètres d'approximation : la troncature  $T$  des droites  $\Sigma^j$ , la troncature  $T_\xi$  des intégrales en  $\xi$ , et enfin la quadrature  $(\mathcal{Q}_{T_\xi}, q_\xi)$ .

#### Validation avec la fonction de Hankel

Pour commencer, nous avons validé la formulation (6.28). Dans le cas isotrope, on connaît la solution exacte si on impose sur le bord du polygone :

$$\forall (x, y) \in \partial\mathcal{P}, \quad g(x, y) = \frac{1}{4i} H(\omega_\epsilon \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (6.29)$$

où on rappelle que  $H(\cdot)$  désigne la fonction de Hankel. La solution exacte est alors simplement :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad p(x, y) = \frac{1}{4i} H(\omega_\epsilon \sqrt{x^2 + y^2}).$$

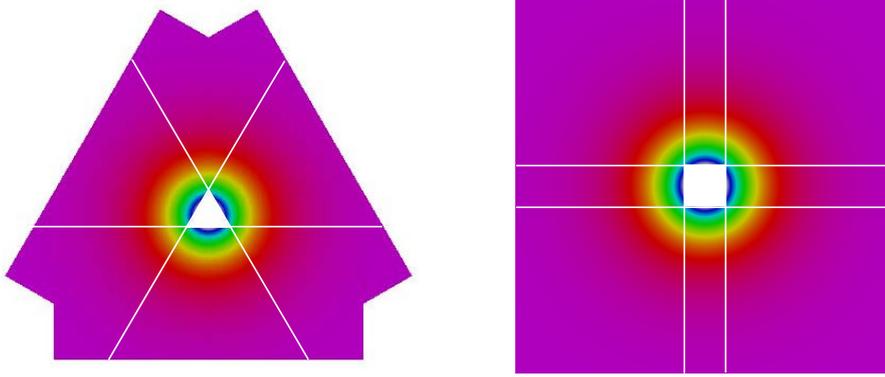


FIGURE 6.9 – Solution du problème (6.28) pour  $\omega_\epsilon = i$  reconstruite dans les différents demi-plans dans les cas d'un triangle (à gauche) et d'un carré (à droite). En lignes blanches, nous avons représenté les droites  $\Sigma^j$ .

Nous avons choisi  $\omega_\epsilon = i$  (la composante réelle est nulle). Dans les cas d'un polygone carré et d'un polygone triangulaire, nous avons représenté la solution (reconstruite dans les demi-plans) du problème (6.28) sur la Figure 6.9.

On vérifie sur ces résultats que la solution obtenue est radiale, comme la solution exacte. D'autre part, la mesure de l'erreur relative sur l'une des droites  $\Sigma^j$  nous confirme qu'on calcule la bonne solution (dans ces cas, on obtient une erreur de l'ordre de 1%).

### L'aplatissement du polygone

Une question qui nous a parue intéressante est la suivante : Que se passe-t'il lorsque l'un des angles du polygone tend vers 0 ? Pour répondre à cette question, nous avons considéré la situation de 3 triangles de plus en plus aplatis. Pour  $\omega_\epsilon = i$ , nous avons imposé sur le bord du polygone la donnée  $g$  définie par (6.29). Sur la Figure 6.10, nous avons représenté les solutions obtenues pour les trois triangles considérés. Notons que dans les trois situations, la discrétisation éléments finis est choisie aussi précise.

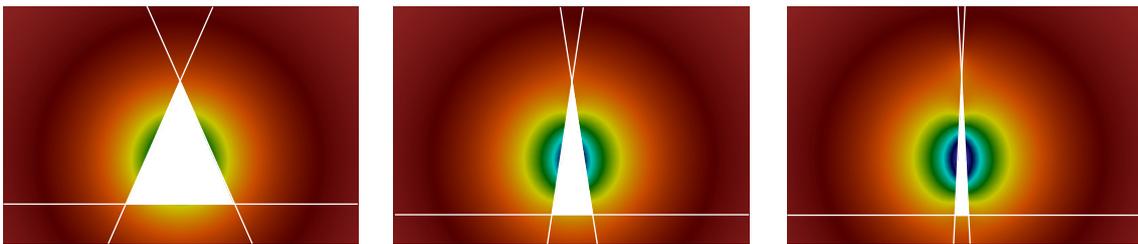


FIGURE 6.10 – Solution du problème (6.28) pour  $\omega_\epsilon = i$  reconstruite dans les différents demi-plans pour des triangles de plus en plus aplatis. En lignes blanches, nous avons représenté les droites  $\Sigma^j$ .

On observe sur ces résultats que la solution pour le triangle le plus aplati est clairement fautive car elle n'est plus radiale. Il apparaît donc que l'aplatissement du polygone détériore la solution calculée. On comprend ce résultat car dans la formule (6.27) définissant les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$ , il apparaît qu'on divise par  $\sin(\alpha_{jj\pm 1})$ . Or, lorsqu'on aplatit le triangle, ce terme tend vers 0 car  $\alpha_{jj\pm 1}$  tend vers  $\pi$ . L'intégrande en  $\xi$  dans (6.27) devient donc de plus en plus oscillante, et par conséquent elle est plus difficile à calculer numériquement.

### Le problème de diffraction

Dans cette dernière section, nous considérons le problème de diffraction d'une onde plane par le polygone  $\mathcal{P}$ . Le milieu est considéré non dissipatif, c'est à dire que  $\omega_\epsilon = \omega$  est réel. Étant donnée une onde plane incidente  $p_{inc} = e^{i(k_x x + k_y y)}$ , où  $k_x$  et  $k_y$  sont réels, le problème de diffraction se formule comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(A\nabla p) + \omega^2 p = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ p = 0 & \text{sur} \quad \partial\mathcal{P}. \end{array} \right. \\ p = p_{inc} + p_{dif} \quad \text{où } p_{dif} \text{ est sortant.} \end{array} \quad (6.30)$$

À l'aide de notre reformulation (6.28), nous pouvons résoudre le problème ci-dessus pour le champ diffracté en utilisant comme donnée de Dirichlet :

$$\forall (x, y) \in \partial\mathcal{P}, \quad g(x, y) = -p_{inc}(x, y).$$

Sur la Figure 6.11, nous avons représenté la partie réelle du champ diffracté  $p_{dif}$  solution du problème de diffraction (6.30). Nous avons choisi la fréquence  $\omega = 10$  et un milieu isotrope. L'obstacle considéré est un triangle. Enfin, nous avons calculé le champ diffracté pour 2 ondes planes définis par :  $e^{i\omega y}$  pour l'image de gauche et  $e^{i\frac{\omega}{\sqrt{2}}(x+y)}$  pour l'image de droite.

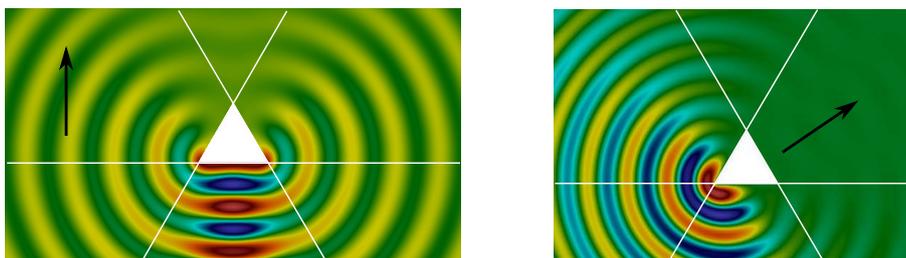


FIGURE 6.11 – Champ diffracté solution du problème (6.30) pour  $\omega = 10$  reconstruit dans les différents demi-plans. En lignes blanches, nous avons représenté les droites  $\Sigma^j$ . La flèche noire indique la direction de propagation de l'onde plane.



# EXTENSION AU MILIEU ÉLASTIQUE

---

## Sommaire

---

<b>7.1 Formulation multi-domaines dans le cas élastique</b> . . . . .	<b>193</b>
7.1.1 Introduction et description de la méthode . . . . .	193
7.1.2 Calcul analytique de la solution dans les demi-plans . . . . .	196
7.1.3 Remarques sur le cas sans dissipation . . . . .	201
<b>7.2 Tests de validation qualitative</b> . . . . .	<b>203</b>
7.2.1 Les diagrammes de lenteur . . . . .	204
7.2.2 Interprétation des résultats . . . . .	206
7.2.3 Comparaison avec d'autres méthodes numériques . . . . .	210
<b>7.3 Approche itérative de résolution</b> . . . . .	<b>212</b>
7.3.1 Introduction . . . . .	212
7.3.2 Résultats numériques . . . . .	213

---

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'extension de la méthode présentée au chapitre 4 au cas d'un milieu élastique. L'intérêt de l'approche que nous avons proposée est qu'elle exploite essentiellement l'homogénéité du milieu à l'extérieur d'un domaine borné via la transformée de Fourier. Par conséquent, elle s'adapte facilement au cas vectoriel de l'élasticité, et nous allons détailler dans une première partie les changements nécessaires pour appliquer notre méthode.

Dans une seconde partie, nous verrons plusieurs tests de validations numériques. Nous décrirons les diagrammes de lenteur qui permettent de caractériser un matériau élastique. Ces diagrammes nous seront utiles pour pouvoir interpréter les résultats numériques souvent très complexes. Ainsi, nous pourrons faire une première validation qualitative de notre méthode. Enfin, nous ferons une seconde validation qualitative de nos résultats en les comparant avec ceux obtenus à l'aide d'autres méthodes numériques : les PML et les couches visco-élastiques.

Enfin, dans la troisième partie, nous présenterons brièvement une approche itérative de résolution basée sur les idées présentées dans la section 6.1.3 du chapitre précédent.

## 7.1 Formulation multi-domaines dans le cas élastique

### 7.1.1 Introduction et description de la méthode

La présentation des équations de l'élasticité a déjà été faite au chapitre 3, voir section 3.1, et ne sera donc pas rappelée ici. Soulignons simplement que l'inconnue  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  est vectorielle.

Nous allons nous intéresser à la résolution du problème de radiation suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2 \text{ tel que} \\ & \left| \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}) + \omega_\epsilon^2 \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Pour étudier ce problème, on se place sous les mêmes hypothèses que dans le chapitre 4 (voir section 4.1.1), c'est à dire :

- $\mathcal{O}$  est un ensemble d'obstacles bornés,
- la source  $f$  est à support compact,
- le tenseur de rigidité  $\mathbf{C}$  caractéristique du milieu est constant à l'extérieur d'un domaine borné,
- et on modélisera un milieu dissipatif à l'aide de la fréquence complexe

$$\omega_\epsilon = \omega + i\epsilon, \quad \text{où } \epsilon > 0.$$

Les notations géométriques sont rappelées sur la Figure 7.1, et ont été introduites dans la section 4.1.2. Nous avons choisi de considérer le milieu dissipatif pour simplifier les explications. Le cas sans dissipation sera discuté dans la section 7.1.3.

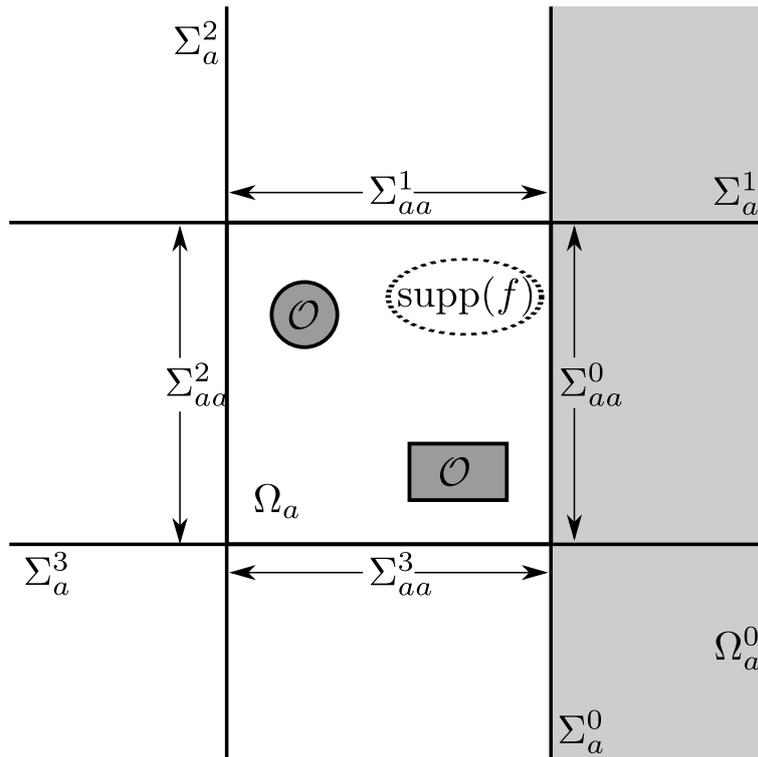


FIGURE 7.1 – Notations et géométrie.

Sous l'hypothèse d'un milieu dissipatif, on peut montrer, en utilisant le théorème de Lax-Milgram (comme dans la preuve 4.1.2) et les inégalités de Korn (voir [35]), la proposition suivante :

**Proposition 7.1.1** *Le problème (7.1) admet une unique solution dans  $H^1(\Omega)$ .*

Afin de donner une formulation multi-domaines du problème (7.1), nous allons reprendre la démarche présentée dans le chapitre 4. En s'appuyant sur la décomposition de  $\Omega$  en 5 sous domaines :

- 4 demi-plans homogènes  $\Omega_a^j$ ,
- et une zone bornée  $\Omega_a$  contenant le défaut et le support de  $f$ ,

le principe est de coupler les différentes représentations de la solution dans chaque sous-domaine. Le point clé de notre approche est qu'on peut obtenir une représentation analytique de la solution dans un demi-plan  $\Omega_a^j$  en fonction de sa trace sur le bords  $\Sigma_a^j$ . Dans le cas élastique, la résolution est un peu plus complexe que dans le cas acoustique, et est décrite dans la section 7.1.2. Excepté ce point, le reste de l'approche est identique.

Notons  $\mathbf{u}^j$ ,  $\Phi^j$  et  $\mathbf{u}^a$  les restrictions de la solution  $\mathbf{u}$  aux différents sous domaines :

$$\Phi^j = \mathbf{u}|_{\Sigma_a^j}, \quad \mathbf{u}^j = \mathbf{u}|_{\Omega_a^j}, \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^a = \mathbf{u}|_{\Omega_a}.$$

On note également  $\mathbf{U}^j(\Psi^j)$  la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{U}^j \in (H^1(\Omega_a^j))^2 \text{ telle que} \\ & \left. \begin{array}{l} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{U}^j) + \omega_\epsilon^2 \mathbf{U}^j = 0 \quad \text{dans } \Omega_a^j, \\ \mathbf{U}^j = \Psi^j \quad \text{sur } \Sigma_a^0, \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

où  $\Psi^j$  est donnée sur  $\Sigma_a^j$ . Le milieu étant dissipatif, on montre facilement (par le théorème de Lax-Milgram et les inégalités de Korn) que ce problème admet une unique solution qu'on notera  $\mathbf{U}^j(\Psi^j)$ . Cette solution est pour l'instant définie ici de façon abstraite, mais nous donnerons dans la section 7.1.2 son expression explicite. Notons que par unicité de la solution du problème (7.2) et par définition de  $\Phi^j$ , nous avons :

$$\mathbf{U}^j(\Phi^j) = \mathbf{u}^j = \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega_a^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Dans l'intersection des demi-plans, les représentations  $\mathbf{U}^j(\Phi^j)$  de la solution doivent vérifier :

$$\mathbf{U}^j(\Phi^j) = \mathbf{U}^{j\pm 1}(\Phi^{j\pm 1}) \quad \text{dans } \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (7.3)$$

De plus, sur les bords  $\Sigma_{aa}^j$  du domaine borné  $\Omega_a$ , nous devons assurer les raccords en trace et dérivée normale entre  $\mathbf{u}^a$  et  $\mathbf{U}^j(\Phi^j)$  :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^a|_{\Sigma_{aa}^j} = \mathbf{U}^j(\Phi^j)|_{\Sigma_{aa}^j} \\ \sigma(\mathbf{u}^a) \cdot \nu|_{\Sigma_{aa}^j} = \sigma(\mathbf{U}^j(\Phi^j)) \cdot \nu|_{\Sigma_{aa}^j} \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (7.4)$$

Comme dans le cas acoustique, nous devons choisir des conditions de transmission sur les bords des quarts de plan  $\Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1}$  qui assurent la compatibilité (7.3). On impose la compatibilité des traces ce qui s'écrit à l'aide des variables  $\Phi^j$  :

$$D_{j\pm 1}^j(\Phi^j) = \Phi^{j\pm 1} \quad \text{sur } \Omega_a^j \cap \Omega_a^{j\pm 1} \quad \text{où} \quad D_{j\pm 1}^j(\cdot) = \mathbf{U}^j(\cdot)|_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (7.5)$$

**Lemme 7.1.2** *Les relations de compatibilité (7.3) et (7.5) sont équivalentes.*

Dans un sens, la démonstration de ce lemme est trivial, et dans l'autre, on utilise la dissipation du milieu et les mêmes arguments donnés dans la preuve du lemme 4.2.1.

À l'aide des relations (7.4) et (7.5), nous pouvons donner la formulation multi-domaines du problème de diffraction (7.1) comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^a \in (H^1(\Omega_a))^2 \text{ et } \Phi^j \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)\right)^2 \text{ tels que} \\ \left. \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^a) + \omega_\epsilon^2 \mathbf{u}^a = f & \text{dans } \Omega_a, \\ \sigma(\mathbf{u}^a) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O}, \\ \sigma(\mathbf{u}^a) \cdot \nu = \Lambda^j \Phi^j & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \Phi^j = \mathbf{u}^a & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \Phi^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \Phi^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{array} \right\} \end{array} \quad (7.6)$$

**Lemme 7.1.3** *Les problèmes (7.1) et (7.6) sont équivalents.*

La démonstration de cette proposition est construite comme celle de la proposition (4.2.9)

**Remarque 7.1.4** *Dans la formulation (7.6), nous avons considéré les inconnues  $\Phi^j \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^j)\right)^2$ . Cependant, comme nous l'avons expliqué dans la section 4.2.3 du chapitre 4, cela pose une difficulté pour donner un sens aux raccords des dérivées normales sur les bords  $\Sigma_{aa}^j$ . Une manière de palier ce problème est de prendre les  $\Phi^j$  dans  $(H^1(\Sigma_a^j))^2$ .*

*Rappelons également que cette difficulté n'existe plus lorsqu'on utilise les formulations avec recouvrement, voir section 6.1 dans le chapitre précédent, ce qui est bien évidemment envisageable pour le cas élastique. Par ailleurs, l'analyse théorique de ces formulations faite dans la section 6.2 pour le cas acoustique reste à faire dans le cas élastique, et il nous semble qu'on peut montrer le caractère Fredholm et bien posé de ces formulations.*

## 7.1.2 Calcul analytique de la solution dans les demi-plans

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution analytique des équations homogènes dans les demi-espaces  $\Omega_a^j$ . Les calculs seront présentés uniquement dans le demi-plan  $\Omega_a^0$ , la même démarche s'applique bien évidemment dans les autres demi-plans  $\Omega_a^j$ . Le but est donc, étant donnée  $\Psi = (\Psi_x, \Psi_y)$  une fonction de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^0) \times H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^0)$ , de résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}^0 \in (H^1(\Omega_a^0))^2 \text{ telle que} \\ \left| \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{U}^0) + \omega_\epsilon^2 \mathbf{U}^0 = 0 & \text{dans } \Omega_a^0, \\ \mathbf{U}^0 = \Psi & \text{sur } \Sigma_a^0. \end{array} \right. \end{array} \quad (7.7)$$

Nous allons calculer explicitement  $\mathbf{U}^0$  à l'aide de la transformée de Fourier définie précédemment par 4.2.1.

Pour faire les calculs, il est utile d'utiliser une autre écriture des équations de l'élasticité (7.23). Comme présenté dans [56], on peut réécrire les équations (7.23) sous forme "éclatée"

ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{13} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x^0 \\ U_y^0 \end{bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{bmatrix} 2C_{13} & C_{12} + C_{33} \\ C_{12} + C_{33} & 2C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x^0 \\ U_y^0 \end{bmatrix} \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{bmatrix} C_{33} & C_{23} \\ C_{23} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x^0 \\ U_y^0 \end{bmatrix} + \omega_\epsilon^2 \begin{bmatrix} U_x^0 \\ U_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

où on rappelle que les  $C_{ij}$  sont les coefficients du tenseur de rigidité  $\mathbf{C}$  écrit à l'aide des notations de Voigt (voir section 3.1 ou pour plus de détails [81]). En appliquant la transformée de Fourier en  $y$  aux équations (7.8), il vient pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{13} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{U}_x^0 \\ \widehat{U}_y^0 \end{bmatrix} + i\xi \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 2C_{13} & C_{12} + C_{33} \\ C_{12} + C_{33} & 2C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{U}_x^0 \\ \widehat{U}_y^0 \end{bmatrix} \\ - \xi^2 \begin{bmatrix} C_{33} & C_{23} \\ C_{23} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{U}_x^0 \\ \widehat{U}_y^0 \end{bmatrix} + \omega_\epsilon^2 \begin{bmatrix} \widehat{U}_x^0 \\ \widehat{U}_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

ce qui correspond à un système couplé de deux EDOs d'ordre 2 à coefficients constants paramétrés par la variable de Fourier  $\xi$ . Pour résoudre ce système, la démarche est la suivante :

1. on détermine une EDO d'ordre 4 vérifiée par chacune des deux composantes  $\widehat{U}_x^0$  et  $\widehat{U}_y^0$ . On pourra en déduire la forme générale de  $\widehat{U}_x^0$  et  $\widehat{U}_y^0$ .
2. Ensuite, en injectant cette forme générale de la solution dans le système (7.9), et en utilisant la condition en  $x = a$  :

$$\widehat{U}_x^0(a, y) = \widehat{\Psi}_x \quad \text{et} \quad \widehat{U}_y^0(a, y) = \widehat{\Psi}_y, \quad (7.10)$$

nous obtiendrons la solution de notre problème.

Pour la suite, il est utile d'introduire les opérateurs suivants :

**Définition 7.1.1** Soient  $\widehat{F}_1$ ,  $\widehat{F}_2$  et  $\widehat{A}$  les opérateurs de  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$  définis pour tout  $v \in H^2(\mathbb{R}^+)$  :

$$\begin{cases} \widehat{F}_1(v) = C_{11} \frac{d^2 v}{dx^2} + 2i\xi C_{13} \frac{dv}{dx} + (\omega_\epsilon^2 - C_{33}\xi^2) v, \\ \widehat{F}_2(v) = C_{33} \frac{d^2 v}{dx^2} + 2i\xi C_{23} \frac{dv}{dx} + (\omega_\epsilon^2 - C_{22}\xi^2) v, \\ \widehat{A}(v) = C_{13} \frac{d^2 v}{dx^2} + i\xi(C_{12} + C_{33}) \frac{dv}{dx} - C_{23}\xi^2 v. \end{cases}$$

Remarquons que ces opérateurs commutent entre eux. Grâce à ces trois opérateurs, les équations (7.9) se réécrivent simplement :

$$\begin{cases} \widehat{F}_1(\widehat{U}_x^0) = -\widehat{A}(\widehat{U}_y^0), \\ \widehat{F}_2(\widehat{U}_y^0) = -\widehat{A}(\widehat{U}_x^0). \end{cases} \quad (7.11)$$

Le milieu  $\Omega_a^j$  étant homogène, on peut montrer (par des arguments de régularité intérieure) que la solution  $\mathbf{U}^0$  du problème (7.23) est plus régulière que  $H^1$  dans l'intérieur de  $\Omega_a^0$ , et est même infiniment dérivable. On peut donc appliquer nos opérateurs  $\widehat{F}_1$ ,  $\widehat{F}_2$  et  $\widehat{A}$  aux composantes du champ de déplacement. En particulier, on a que :

$$\widehat{F}_1 \widehat{F}_2 \left( \widehat{U}_j^0 \right) = \widehat{A}^2 \left( \widehat{U}_j^0 \right), \quad \text{où } j = \{x, y\}, \quad (7.12)$$

ce qui revient à une EDO d'ordre 4 en  $x$ .

Pour résoudre l'EDO d'ordre 4 (7.12), nous devons déterminer les racines du polynôme caractéristique associé à cette équation. Le polynôme caractéristique associé à (7.12) est :

$$P(r) = \alpha_4 r^4 + \alpha_3 r^3 + \alpha_2 r^2 + \alpha_1 r + \alpha_0 \quad (7.13)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_4 = C_{11}C_{33} - C_{13}^2, \\ \alpha_3 = 2i\xi (C_{11}C_{23} - C_{12}C_{13}), \\ \alpha_2 = \omega_\epsilon^2 (C_{11} + C_{33}) - \xi^2 (C_{11}C_{22} + 2C_{13}C_{23} - C_{12}^2 - 2C_{12}C_{33}), \\ \alpha_1 = 2i\xi [\omega_\epsilon^2 (C_{13} + C_{23}) - \xi^2 (C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23})], \\ \alpha_0 = (\omega_\epsilon^2 - \xi^2 C_{33})(\omega_\epsilon^2 - \xi^2 C_{22}) - \xi^4 C_{23}^2. \end{cases}$$

**Conjecture 7.1.5** *Pour presque tout  $\xi$ , le polynôme  $P(r)$  admet 4 racines complexes distinctes.*

**Preuve dans le cas orthotrope :** Pour un milieu orthotrope, le polynôme  $P(r)$  se simplifie grandement car les coefficients  $\alpha_3$  et  $\alpha_1$  deviennent nuls. Par conséquent, on doit alors résoudre :

$$P(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_4 r^4 + \alpha_2 r^2 + \alpha_0 = 0.$$

Commençons par montrer la conjecture 7.1.5. En posant  $z = r^2$ , cette équation devient :

$$\alpha_4 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_0 = 0,$$

c'est à dire un polynôme de degré 2. Notons  $z_1$  et  $z_2$  ses deux racines données par :

$$z_1 = \frac{-\alpha_2 + \sqrt{d}}{2\alpha_4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\alpha_2 - \sqrt{d}}{2\alpha_4}, \quad \text{où} \quad d = \sqrt{(\alpha_2)^2 - 4\alpha_4\alpha_0}. \quad (7.14)$$

Pour presque tout  $\xi$ , on peut affirmer que  $z_1 \neq z_2$ . En effet, pour avoir une racine double le déterminant  $d$  doit s'annuler, ce qui revient à :

$$(\alpha_2)^2 - 4\alpha_4\alpha_0 = 0$$

C'est une équation polynomiale en  $\xi$  (d'ordre 4), et par conséquent elle ne peut être vérifiée que pour au plus 4 valeurs de  $\xi$ . Ce premier point montre que pour presque tout  $\xi$ , le polynôme  $P(r)$  admet 4 racines distinctes données par  $\pm\sqrt{z_1}$  et  $\pm\sqrt{z_2}$ . ■

Notons  $r_1, r_2, r_3$  et  $r_4$  les 4 racines du polynôme  $P(r)$ . Soulignons que ces racines dépendent de  $\xi$ , mais pour alléger les notations, cette dépendance ne sera pas précisée. L'expression générale des solutions de notre EDO d'ordre 4 (7.12) est alors :

$$\widehat{U}_j^0 = \gamma_j^1 e^{r_1(x-a)} + \gamma_j^2 e^{r_2(x-a)} + \gamma_j^3 e^{r_3(x-a)} + \gamma_j^4 e^{r_4(x-a)} \quad \text{pour} \quad j \in \{x, y\}, \quad (7.15)$$

où  $\gamma_j^1, \gamma_j^2, \gamma_j^3, \gamma_j^4$  sont des coefficients complexes. Afin d'obtenir la solution du système d'EDOs couplées (7.11), on injecte cette forme générale des solutions (7.15) dans le système (7.11). Ainsi, il vient :

$$\sum_{j \in \{0,1,2,3\}} \begin{bmatrix} \gamma_x^j \widehat{F}_1 (e^{r_j(x-a)}) |_{x=a} \\ \gamma_y^j \widehat{F}_2 (e^{r_j(x-a)}) |_{x=a} \end{bmatrix} e^{r_j(x-a)} = \sum_{j \in \{0,1,2,3\}} \begin{bmatrix} -\gamma_y^j \widehat{A} (e^{r_j(x-a)}) |_{x=a} \\ -\gamma_x^j \widehat{A} (e^{r_j(x-a)}) |_{x=a} \end{bmatrix} e^{r_j(x-a)}.$$

Ces équations doivent être vérifiées pour tout  $x > a$ . Par conséquent, les coefficients  $\gamma_x^j$  et  $\gamma_y^j$  doivent vérifier :

$$\begin{bmatrix} \widehat{F}_1(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} & \widehat{A}(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} \\ \widehat{A}(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} & \widehat{F}_2(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x^j \\ \gamma_y^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (7.16)$$

Par définition des racines  $r_j$ , nous savons que le système linéaire ci-dessus a un déterminant nul, ce qui est rassurant sinon tous nos coefficients  $\gamma_x^j$  et  $\gamma_y^j$  seraient nécessairement nuls.

**Conjecture 7.1.6** *Pour presque tout  $\xi$ , le terme  $\widehat{A}(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} \neq 0$*

**Preuve dans le cas orthotrope :** Dans le cas orthotrope, nous avons :

$$\widehat{A}(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} = i\xi(C_{12} + C_{33})r_j.$$

Sauf pour  $\xi = 0$ , le terme ci-dessus est non nul si  $r_j$  est non nul. Or, pour qu'une racine  $r_j$  soit nulle, il faut que le coefficient  $\alpha_0$  de  $P(r)$  soit égal à 0, c'est à dire :

$$\alpha_0 = 0 \Leftrightarrow (\omega_\epsilon^2 - \xi^2 C_{33})(\omega_\epsilon^2 - \xi^2 C_{22}) = 0$$

L'égalité est vraie si et seulement si  $\omega_\epsilon^2 = \xi^2 C_{33}$  ou  $\omega_\epsilon^2 = \xi^2 C_{22}$ , ce qui ne est impossible car  $\xi \in \mathbb{R}$  et nous avons  $\text{Im}(\omega_\epsilon^2) = \epsilon > 0$ . Par ailleurs, soulignons que dans le cas non-dissipatif, la conjecture reste vraie car l'égalité ci-dessus ne peut être vérifiée que pour au plus 4 valeurs de  $\xi$ . ■

**Remarque 7.1.7** *Notons que pour les preuve des conjectures 7.1.5 et 7.1.6 dans le cas orthotrope sont également valables pour un milieu non dissipatif.*

On peut ainsi déterminer pour chaque  $j$  une relation entre  $\gamma_x^j$  et  $\gamma_y^j$  :

$$\gamma_y^j = t^j \gamma_x^j, \quad \text{où} \quad t^j = \frac{-\widehat{F}_1(e^{r_j(x-a)})|_{x=a}}{\widehat{A}(e^{r_j(x-a)})|_{x=a}}, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (7.17)$$

Comme pour les racines  $r_j$ , la dépendance en  $\xi$  des coefficients  $t^j$  n'est pas précisée afin d'alléger les notations. Les solutions générales du système (7.11) sont donc données par :

$$\begin{bmatrix} \widehat{U}_x^0 \\ \widehat{U}_y^0 \end{bmatrix} = \sum_{j \in \{0, 1, 2, 3\}} \gamma_x^j \begin{bmatrix} 1 \\ t^j \end{bmatrix} e^{r_j(x-a)} \quad (7.18)$$

Elles s'expriment comme une combinaison linéaire de quatre solutions particulières associées aux termes  $e^{r_j(x-a)}$ . Comme dans le cas acoustique (voir section 4.2.2), nous allons éliminer deux de ces solutions particulières à l'aide du comportement à l'infini de  $\widehat{\mathbf{U}}^0$ .

**Conjecture 7.1.8** *Parmi les 4 racines du polynôme (7.13), nous avons pour presque tout  $\xi$  deux racines dont les parties réelles sont strictement positives, et deux racines dont les parties réelles sont strictement négatives.*

**Preuve dans le cas orthotrope :** Nous avons vu dans la preuve de la conjecture 7.1.5 que les 4 racines du polynôme  $P(r)$  sont données par  $\pm\sqrt{z_1}$  et  $\pm\sqrt{z_2}$ . Par conséquent, pour montrer que 2 racines ont des parties réelles strictement positives, et 2 ont des parties réelles strictement négatives, il nous faut montrer que  $\sqrt{z_1}$  et  $\sqrt{z_2}$  ont des parties réelles non nulles. Ceci est vrai car les parties imaginaires des racines  $z_1$  et  $z_2$  ne peuvent pas être non nulles. En effet, supposons que  $\text{Im}(z_1) = 0$ , il vient alors :

$$-\text{Im}(\alpha_2) + \text{Im}(\sqrt{d}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(\sqrt{d}) = \epsilon(C_{11} + C_{33}).$$

On en déduit alors que  $\text{Im}(\sqrt{d})$  est indépendant de  $\xi$ , ce qui est faux (on peut le vérifier par le calcul direct). Le même raisonnement s'applique pour la racine  $z_2$ . ■

Supposons que  $r_3$  et  $r_4$  correspondent aux racines dont les parties réelles sont strictement positives. Les termes associés  $e^{r_3(x-a)}$  et  $e^{r_4(x-a)}$  sont donc exponentiellement croissants avec  $x$ . Or, on cherche une solution dans  $H^1(\Omega_a^0)$  du problème de demi-plan (7.23). Par conséquent, nous avons nécessairement les coefficients  $\gamma_x^3$  et  $\gamma_x^4$  égaux à 0. On peut alors réécrire les équations (7.18) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \widehat{U}_x^0 \\ \widehat{U}_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{r_1(x-a)} & 0 \\ 0 & e^{r_2(x-a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x^1 \\ \gamma_x^2 \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

Enfin, pour déterminer complètement la solution du problème (7.23), il nous reste à utiliser la condition (7.10) en  $x = a$  qui nous permettra de déterminer les coefficients  $\gamma_x^1$  et  $\gamma_x^2$ .

**Lemme 7.1.9** *Grâce à la dissipation, nous avons  $t_1 \neq t_2$  pour presque tout  $\xi$ .*

**Preuve :** On montre facilement cette propriété grâce à la dissipation. En effet, supposons qu'il existe un intervalle  $[a, b]$  dans lequel  $t_1 = t_2 = t$  pour tout  $\xi \in [a, b]$ . On va construire une solution non nulle du problème homogène (7.23) pour la donnée  $\Psi = 0$ .

Posons  $\gamma_x^2 = -\gamma_x^1$  et  $\gamma_x^1$  est choisi arbitrairement non nul pour  $\xi \in [a, b]$  et nul en dehors. La fonction (7.19) est alors donnée par :

$$\begin{bmatrix} \widehat{U}_x^0 \\ \widehat{U}_y^0 \end{bmatrix} = \gamma_x^1 \begin{bmatrix} e^{r_1(x-a)} - e^{r_2(x-a)} \\ t(e^{r_1(x-a)} - e^{r_2(x-a)}) \end{bmatrix}$$

et elle vérifie  $\widehat{U}_x^0(a, \cdot) = \widehat{U}_y^0(a, \cdot) = 0$ . En appliquant la transformée de Fourier inverse, il vient  $\mathbf{U}^0(a, \cdot) = [0 \ 0]$  sur  $\Sigma_a^j$ . On obtient donc une solution non nulle du problème homogène (7.23). Or, ce problème étant bien posé, nous avons une contradiction car la seule solution est  $\mathbf{U}^0 = 0$ . ■

**Remarque 7.1.10** *Dans le cas orthotrope, on montrera dans la suite d'une autre manière ce résultat. L'intérêt de l'autre approche est qu'elle n'exploite pas la dissipation.*

Grâce à ce lemme, nous pouvons déterminer pour presque tout  $\xi$  de manière unique les coefficients  $\gamma_x^j$  en fonction de la donnée en  $x = a$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x^1 \\ \gamma_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_x \\ \widehat{\Psi}_y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \gamma_x^1 \\ \gamma_x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{bmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_x \\ \widehat{\Psi}_y \end{bmatrix}.$$

En utilisant le résultat ci-dessus et en appliquant la transformée de Fourier inverse à (7.19), nous obtenons la représentation analytique de la solution dans le demi-plan  $\Omega_a^0$  :

$$\begin{bmatrix} U_x^0 \\ U_y^0 \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi y}}{\sqrt{2\pi} (t_2 - t_1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{r_1(x-a)} & 0 \\ 0 & e^{r_2(x-a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_x \\ \widehat{\Psi}_y \end{bmatrix} d\xi. \quad (7.20)$$

### 7.1.3 Remarques sur le cas sans dissipation

Comme abordé dans la section 4.4.2, le cas non dissipatif pose certaines difficultés supplémentaires. Nous allons voir ici les difficultés spécifiques au cas de l'élasticité. Le problème qui nous intéresse est le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in (H_{loc}^1(\Omega))^2 \text{ sortante telle que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Là encore, il est nécessaire de définir la notion de solution *sortante*. Dans le cas d'un milieu **isotrope**, il est possible d'obtenir l'équivalent de la condition de Sommerfeld (4.39) à l'aide de la décomposition d'Helmholtz, voir [48]. En revanche, il n'existe pas d'équivalent dans le cas **anisotrope**.

Notre reformulation multi-domaines, en la supposant bien posée, serait une manière simple de définir la notion de solution *sortante* quel que soit l'anisotropie. En effet, nous verrons qu'on sait facilement caractériser une solution *sortante* dans un demi-plan  $\Omega_a^j$ . Avec notre formulation multi-domaines, on impose à  $\mathbf{u}$  d'être *sortante* uniquement dans 4 demi-plans.

#### Le "tri" des ondes planes

La résolution analytique dans les demi-plans pour un milieu non-dissipatif nécessite quelques adaptations que nous allons détailler. Comme précédemment, la description est faite uniquement dans  $\Omega_a^0$ . Jusque l'obtention de la forme générale (7.18) des solutions des deux EDOs couplées (7.11), tout est similaire. La différence réside dans le "tri" des racines  $r^j$ . En appliquant la transformée de Fourier inverse à (7.18), il vient :

$$\begin{bmatrix} U_x^0 \\ U_y^0 \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j \in \{0,1,2,3\}} \frac{\gamma_x^j}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} 1 \\ t_j \end{bmatrix} e^{r_j(x-a)} e^{i\xi y} d\xi. \quad (7.22)$$

Notre solution s'exprime donc comme la somme (intégrale en  $\xi$ ) d'ondes planes  $[1 \ t_j]^t e^{r_j(x-a)+i\xi y}$ . Dans un milieu non-dissipatif, certaines ondes planes sont propagatives, c'est à dire que le terme  $r_j$  associé est imaginaire pur (ce qui contre-dit notre conjecture 7.1.8 valable uniquement dans le cas dissipatif). L'onde associée ne décroît alors pas avec  $x$ . Par conséquent, le "tri" entre les 4 ondes  $[1 \ t_j]^t e^{r_j(x-a)+i\xi y}$  est plus délicat et doit se faire en utilisant le caractère *sortant* de la solution dans le demi-plan  $\Omega_a^0$  (ou le principe d'absorption limite). On distingue deux situations :

- si  $\text{Re}(r_j) \neq 0$  : dans ce cas, on dira que l'onde plane  $[1 \ t_j]^t e^{r_j(x-a)+i\xi y}$  est *évanescence*. Son "sens de propagation" est alors donné par sa direction de décroissance.
- si  $\text{Re}(r_j) = 0$  : dans ce cas, on dira que l'onde plane  $[1 \ t_j]^t e^{r_j(x-a)+i\xi y}$  est *propagative*. Pour connaître son sens de propagation, on doit étudier le signe du vecteur d'énergie

(voir [81]) dans la direction  $e_x = [1 \ 0]^t$ , qui est donnée par :

$$\operatorname{Im} \left( \sigma \left( \begin{bmatrix} 1 \\ t_j \end{bmatrix} e^{r_j(x-a)+i\xi y} \right) e_x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t_j \end{bmatrix} \overline{e^{r_j(x-a)+i\xi y}} \right).$$

Si le signe de l'expression ci-dessus est positif, alors l'onde plane est dite *progressive* et son sens de propagation est celui des  $x$  croissants. Inversement, si le signe est négatif, l'onde plane est dite *rétrograde* et son sens de propagation est celui des  $x$  décroissants.

Avec cette caractérisation du sens de propagation des ondes planes, on définit une solution *sortante* dans  $\Omega_a^0$  comme une solution qui se décompose uniquement sur les ondes planes *sortantes*.

**Conjecture 7.1.11** *Pour presque tout  $\xi$ , nous avons parmi les 4 ondes planes  $[1 \ t_j]^t e^{r_j(x-a)+i\xi y}$  deux qui se déplacent vers la gauche, et deux vers la droite.*

À l'aide de cette conjecture, nous pouvons "éliminer" deux ondes planes dans la décomposition (7.22), et retrouver la forme (7.19) de la solution du système d'EDO couplées (7.11).

### La condition sur le bord du demi-plan

Afin de terminer la résolution dans le demi-plan, il reste à utiliser la donnée sur le bord  $\Sigma_a^0$  pour déterminer les coefficients  $\gamma_x^1$  et  $\gamma_x^2$  dans la formule (7.19). Étant donnée la trace  $\Psi$  sur  $\Sigma_a^0$ , on peut déterminer de manière unique ces coefficients si le lemme 7.1.9 est toujours vrai, c'est à dire si  $t_1 \neq t_2$ .

**Conjecture 7.1.12** *Pour presque tout  $\xi$ , nous avons  $t_1 \neq t_2$ .*

**Preuve de la conjecture 7.1.12 dans le cas orthotrope :** Nous allons montrer ce résultat par l'absurde. Supposons  $t_1 = t_2$ . Nous avons alors par définition de  $t_1$  et  $t_2$  (voir formule (7.17)) :

$$\begin{aligned} t_1 = t_2 &\Leftrightarrow \frac{C_{11}(r_1)^2 + (\omega^2 - C_{33}\xi^2)}{i\xi(C_{12} + C_{33})r_1} = \frac{C_{11}(r_2)^2 + (\omega^2 - C_{33}\xi^2)}{i\xi(C_{12} + C_{33})r_2}, \\ &\Leftrightarrow [C_{11}(r_1)^2 + (\omega^2 - C_{33}\xi^2)]r_2 = [C_{11}(r_2)^2 + (\omega^2 - C_{33}\xi^2)]r_1, \\ &\Leftrightarrow [(\omega^2 - C_{33}\xi^2) - C_{11}r_1r_2](r_1 - r_2) = 0. \end{aligned}$$

Notons que les preuves des conjectures 7.1.6 et 7.1.5 données précédemment dans le cas orthotrope restent vraies pour un milieu non-dissipatif (voir remarque 7.1.7). Ainsi, on est assuré que les racines  $r_1$  et  $r_2$  sont non nulles et différentes pour presque tout  $\xi$ . On en déduit donc :

$$r_1r_2 = \frac{\omega^2 - C_{33}\xi^2}{C_{11}}$$

D'autre part, nous savons d'après (7.16) que  $t_j$  peut également être défini par :

$$t_j = \frac{-\widehat{A}(e^{r_j(x-a)})|_{x=a}}{\widehat{F}_2(e^{r_j(x-a)})|_{x=a}} \quad \text{pour } j \in \{1, 2\}.$$

Soulignons que nécessairement  $\widehat{F}_2(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} \neq 0$ . En effet, par définition des racines  $r_j$  nous avons

$$\widehat{F}_1(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} \widehat{F}_2(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} - \widehat{A}^2(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Comme  $\widehat{A}(e^{r_j(x-a)})|_{x=a}$  est non nul, on en déduit  $\widehat{F}_1(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} \neq 0$  et  $\widehat{F}_2(e^{r_j(x-a)})|_{x=a} \neq 0$ .

En utilisant  $t_1 = t_2$  et l'expression de  $\widehat{F}_2$  dans le cas orthotrope, il vient :

$$r_1 r_2 = \frac{C_{33}}{\omega^2 - C_{22}\xi^2}$$

Avec les deux expressions du produit  $r_1 r_2$ , nous déduisons l'égalité suivante :

$$(\omega^2 - C_{22}\xi^2)(\omega^2 - C_{33}\xi^2) = C_{33}C_{11},$$

qui ne peut être vraie que pour au plus 4 valeurs de  $\xi$ , d'où le résultat. ■

Il est important de souligner que selon la donnée imposée sur  $\Sigma_a^0$ , il n'est pas toujours possible de déterminer de manière unique les coefficients  $\gamma_x^1$  et  $\gamma_x^2$ . Autrement dit, le problème dans le demi-plan peut être mal posé. Par exemple, considérons comme donnée la contrainte normale  $\sigma(\mathbf{U}^0)e_x$  sur  $\Sigma_a^0$ . On peut montrer (voir [81]) que le problème homogène :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}^0 \in (H_{loc}^1(\Omega_a^0))^2 \text{ sortante telle que} \\ \left| \begin{array}{ll} \mathbf{div}\sigma(\mathbf{U}^0) + \omega^2\mathbf{U}^0 = 0 & \text{dans } \Omega_a^0, \\ \sigma(\mathbf{U}^0)e_x = 0 & \text{sur } \Sigma_a^0, \end{array} \right. \end{array} \quad (7.23)$$

admet des solutions non nulles pour certaines fréquences  $\omega$  qui sont décroissantes dans la direction des  $x > 0$ . Ces solutions correspondent à des ondes de surface appelées *ondes de Rayleigh*.

## 7.2 Tests de validation qualitative

Dans cette section, nous allons présenter différents tests numériques pour valider qualitativement notre méthode. Pour ces tests, nous utiliserons les quatre matériaux définis ci-dessous :

<b>Iso</b> ( <i>isotrope</i> ) :	$C_{11} = 20$ $C_{22} = 20$ $C_{33} = 2$ $C_{12} = 16$ $C_{13} = 0$ $C_{23} = 0.$	(7.24)
<b>Ortho<sub>1</sub></b> ( <i>orthotrope</i> ) :	$C_{11} = 20$ $C_{22} = 20$ $C_{33} = 2$ $C_{12} = 3.8$ $C_{13} = 0$ $C_{23} = 0.$	
<b>Ortho<sub>2</sub></b> ( <i>orthotrope</i> ) :	$C_{11} = 4$ $C_{22} = 20$ $C_{33} = 2$ $C_{12} = 7.5$ $C_{13} = 0$ $C_{23} = 0.$	
<b>Ani</b> ( <i>anisotrope</i> ) :	$C_{11} = 6$ $C_{22} = 21$ $C_{33} = 30.$ $C_{12} = 8$ $C_{13} = 2$ $C_{23} = 10.$	

Les trois premiers matériaux correspondent à des choix utilisés dans l'article [12]. Le dernier matériau a été choisi arbitrairement. Par ailleurs, les résultats présentés sont obtenus dans le cas **sans dissipation** et la fréquence est notée simplement  $\omega \in \mathbb{R}^+$ . La discrétisation de la formulation multi-domaine (7.6) n'est pas détaillée car on procède comme décrit dans la section 4.3.2 du chapitre 4. Rappelons simplement qu'il est nécessaire de faire 3 approximations spécifiques à notre approche :

- tronquer à une distance  $T$  les droites  $\Sigma_a^j$ ,
- tronquer à  $T_\xi$  l'intervalle d'intégration en  $\xi$  des intégrales définissant les opérateurs  $D_{j\pm 1}^j$  et  $\Lambda^j$ ,
- et enfin utiliser une formule de quadrature pour évaluer numériquement ces intégrales.

### 7.2.1 Les diagrammes de lenteur

Afin de comprendre un peu mieux les résultats numériques que nous allons présenter dans la suite, il est utile de donner quelques informations sur les diagrammes de lenteur (ou courbe de lenteur) caractérisant un matériau élastique (pour une description plus complète, voir [12, 81]). Les diagrammes de lenteur sont définis à l'aide des solutions de l'équation homogène (en régime temporel) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \mathbf{div} \sigma(\mathbf{U}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (7.25)$$

de la forme :

$$\mathbf{U}(x, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_x^o \\ \mathbf{U}_y^o \end{bmatrix} e^{i(Vt - (k_x x + k_y y))}, \quad (7.26)$$

où  $\vec{k} = (k_x, k_y)$  est un vecteur réel de norme  $\|\vec{k}\| = 1$ , et  $V$  est un réel positif indiquant la *vitesse de phase*. Les composantes  $\mathbf{U}_x^o$  et  $\mathbf{U}_y^o$  sont des constantes complexes. Les solutions de la forme (7.26) sont appelées *ondes planes*, et nous verrons ensuite le lien avec notre définition donnée section 7.1.3. En injectant l'expression (7.26) dans (7.25), on est amené à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\Gamma \begin{bmatrix} \mathbf{U}_x^o \\ \mathbf{U}_y^o \end{bmatrix} - V^2 \begin{bmatrix} \mathbf{U}_x^o \\ \mathbf{U}_y^o \end{bmatrix} = 0, \quad \text{où } \Gamma_{il} = \tilde{C}_{ijkl} k_j k_k \quad \forall i, l \in \{1, 2\}, \quad (7.27)$$

où  $V^2$  joue le rôle de valeur propre. On rappelle que les  $\tilde{C}_{ijkl}$  sont les coefficients matériaux (voir section 3.1.1). Cette équation est appelée équation de *Christoffel* et  $\Gamma$  le tenseur de *Christoffel*. Par des propriétés de symétrie des  $C_{ijkl}$ , on montre que  $\Gamma$  est symétrique. Ainsi, pour (presque) toute direction  $\vec{k} = (k_1, k_2)$ , on peut démontrer que ce problème aux valeurs propres admet deux solutions réelles. De plus,  $\Gamma$  étant symétrique, les vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont **orthogonaux** entre eux.

**Remarque 7.2.1** Dans le cas **isotrope**, le vecteur propre  $\mathbf{U}^o = (U_x^o, U_y^o)$  peut être :

- soit aligné avec la direction  $\vec{k}$ , on parle alors d'**onde P**. Ce sont les ondes de compression.
- soit orthogonale à  $\vec{k}$ , on parle alors d'**ondes S**. Ce sont les ondes de cisaillement.

Les ondes P ont une plus grande longueur d'onde et se déplacent plus vite que les ondes S.

Pour un matériau **anisotrope**, les vecteurs propres ne sont plus parfaitement alignés ou orthogonaux à  $\vec{k}$ . On parle alors d'**onde quasi-P** et **quasi-S**, où l'**onde quasi-P** est associée au vecteur propre le "plus aligné" avec la direction  $\vec{k}$ . De manière générale, les ondes quasi-P ont une longueur d'onde plus grande que les ondes quasi-S.

Grâce aux ondes planes, on définit la courbe de lenteur  $\mathcal{C}_l$  d'un matériau ainsi :

$$\mathcal{C}_l = \left\{ \left( \frac{k_1}{V}, \frac{k_2}{V} \right) \quad \forall \vec{k} \text{ tel que } \|\vec{k}\| = 1 \text{ et } V^2 \text{ soit valeur propre de } (7.27) \right\}.$$

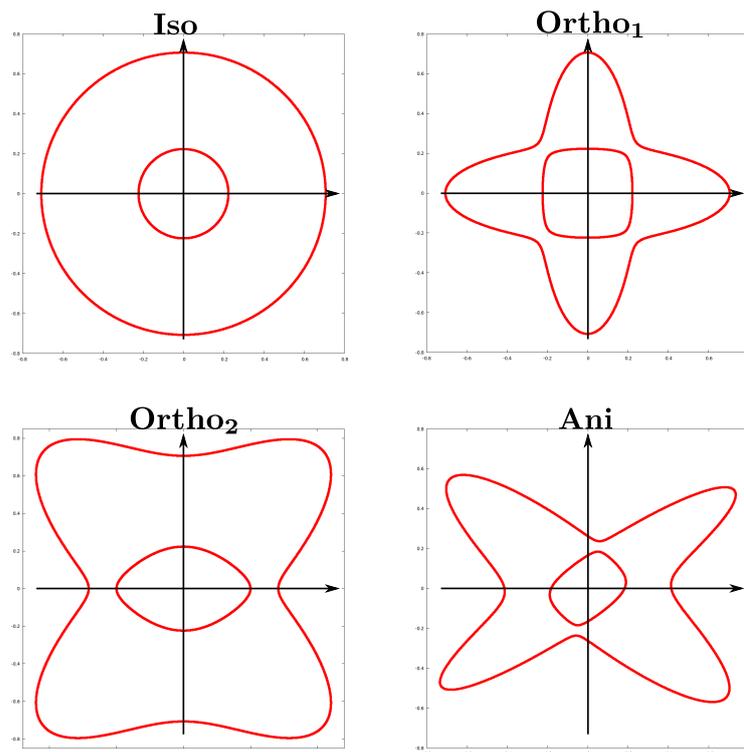


FIGURE 7.2 – Diagrammes de lenteur pour les différents matériaux.

Pour les différents matériaux (7.24), nous avons représenté sur la Figure 7.2 les diagrammes de lenteur associés.

Dans chaque direction  $\vec{k}$ , on indique sur  $\mathcal{C}_l$  l'inverse de la *vitesse de phase*, ce qui correspond à la "lenteur" de l'onde plane. Cette courbe  $\mathcal{C}_l$  permet de déterminer plusieurs choses. Tout d'abord, à l'aide des vecteurs tangents à la courbe, on peut obtenir les vitesses de groupe associées aux ondes planes (voir [12]). La vitesse de groupe indique la direction de propagation de l'énergie d'une onde plane. Cela permet notamment de prédire la localisation d'une onde émise par une source ponctuelle.

De plus, grâce aux courbes de lenteur, on détermine facilement si dans un milieu donné, il existe des **ondes inverses**. Une onde plane dans la direction  $\vec{k} = (k_1, k_2)$  est dite **inverse** si sa vitesse de groupe  $V^g = (V_1^g, V_2^g)$  vérifie :

$$V_1^g \frac{k_1}{V} < 0 \quad \text{ou} \quad V_2^g \frac{k_2}{V} < 0.$$

Cette condition est représentée géométriquement sur la Figure 7.3.

Dans la section précédente, nous avons appelé ondes planes les fonctions paramétrées par  $\xi$

$$\mathbf{u}_\xi^j = \begin{bmatrix} 1 \\ t_j \end{bmatrix} e^{r_j x + i \xi y}, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (7.28)$$

où pour chaque  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $r_j$  est racine du polynôme (7.13) et  $t_j$  est défini par (7.17). Nous savons par construction des  $\mathbf{u}_\xi^j$  que

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_\xi^j) + \omega^2 \mathbf{u}_\xi^j = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2.$$

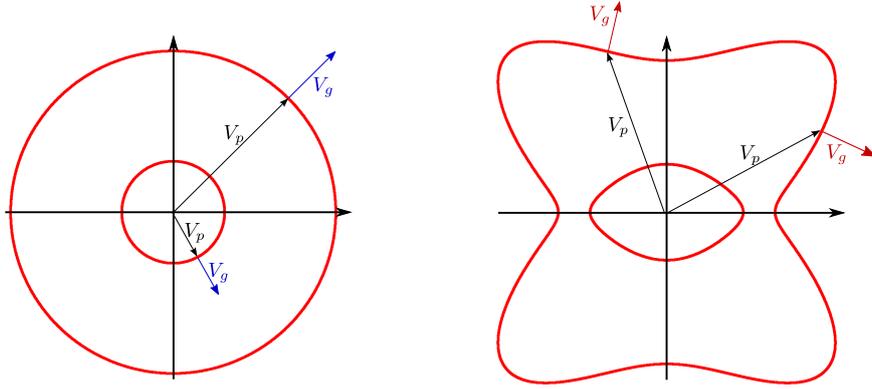


FIGURE 7.3 – Représentation des vecteurs  $V^p = (\frac{k_1}{V}, \frac{k_2}{V})$  (vitesse de phase) et  $V^g$  (vitesse de groupe) pour les matériaux **Iso** et **Ortho<sub>2</sub>**. En rouge, nous avons représenté les vitesses de groupe de 2 ondes inverses.

On en déduit alors :

$$\operatorname{div} \sigma \left( \begin{bmatrix} 1 \\ t_j \end{bmatrix} e^{-\frac{r_j}{N}x - \frac{i\xi}{N}y} \right) = \frac{\omega^2}{N^2} \begin{bmatrix} 1 \\ t_j \end{bmatrix} e^{-\frac{r_j}{N}x - \frac{i\xi}{N}y},$$

ce qui est exactement l'équation (7.27) en prenant les paramètres suivant :

$$V = \frac{\omega}{N}, \quad \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{Im}(r_j)/N \\ -\xi/N \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{U}_x^0 \\ \mathbf{U}_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t_j \end{bmatrix}, \quad \text{où } N = \sqrt{\xi^2 + |r_j|^2}, \quad (7.29)$$

pour tout  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}$  tel que  $\operatorname{Re}(r_j) = 0$ .

**Remarque 7.2.2** Réciproquement, avec la définition (7.26) des ondes planes, on retrouve les fonctions (7.28) en fixant le paramètre  $k_1$  (équivalent de  $\xi$ ) et la valeur propre  $V$  (équivalent de  $\omega$ ), et en cherchant  $k_2$  (équivalent de  $r_j$ ) solution de (7.27).

Ainsi, le calcul des racines  $r_j$  nous permet de donner une définition équivalente du diagramme de lenteur :

$$\mathcal{C}_l = \bigcup_{j \in \{1, 2, 3, 4\}} \left\{ \left( \frac{-\operatorname{Im}(r_j)}{\omega}, -\frac{\xi}{\omega} \right) \mid \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } \operatorname{Re}(r_j) = 0 \right\}.$$

**Remarque 7.2.3** Dans le cas d'un milieu dissipatif, la courbe  $\mathcal{C}_l$  est réduite à l'ensemble vide car toutes les racines  $r_j$  ont une partie réelle non nulle. Dans un tel milieu, il n'existe pas d'ondes planes propagatives.

## 7.2.2 Interprétation des résultats

Maintenant que nous avons décrit comment obtenir les courbes de lenteur et leur utilité, nous allons présenter les premiers résultats numériques obtenus avec notre méthode. La section précédente nous permettra de mieux les comprendre, en particulier pour les milieux anisotropes pour lesquels les résultats sont très complexes. Le problème modèle que nous considérons est le rayonnement d'une source  $f$  dans l'espace complet  $\mathbb{R}^2$  (i.e. sans obstacle) :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u} \in (H_{loc}^1(\Omega))^2 \text{ sortante telle que} \\ \left| \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = f \text{ dans } \Omega = \mathbb{R}^2. \right. \end{aligned} \quad (7.30)$$

À l'aide de notre formulation multi-domaines, nous avons résolu le problème (7.30) pour différents milieux. Dans les résultats qui vont suivre, nous avons fixé la fréquence  $\omega = 20$ . Nous avons commencé avec le matériau **Iso**. Dans ce cas, on peut choisir  $f$  pour générer une solution  $\mathbf{u}$  s'exprimant uniquement comme

- la superposition d'ondes planes P en prenant  $f$  à rotationnel nul,
- ou la superposition d'ondes planes S en prenant  $f$  à divergence nulle.

Cela correspond à un découplage entre les ondes P et S possible dans un milieu **isotrope** parfaitement homogène (voir [81]). Nous avons représenté sur la Figure 7.4 :

- les parties réelles des composantes  $u_x$  et  $u_y$  du champ de déplacement, et le module  $|\mathbf{u}| = \sqrt{\text{Re}(u_x)^2 + \text{Re}(u_y)^2}$  du champ de déplacement pour une source  $f$  générant une **onde P**,
- et la même chose pour une source  $f$  générant une **onde S**.

Notons que nous représentons également la solution reconstruite dans les demi-plans  $\Omega_a^j$ .

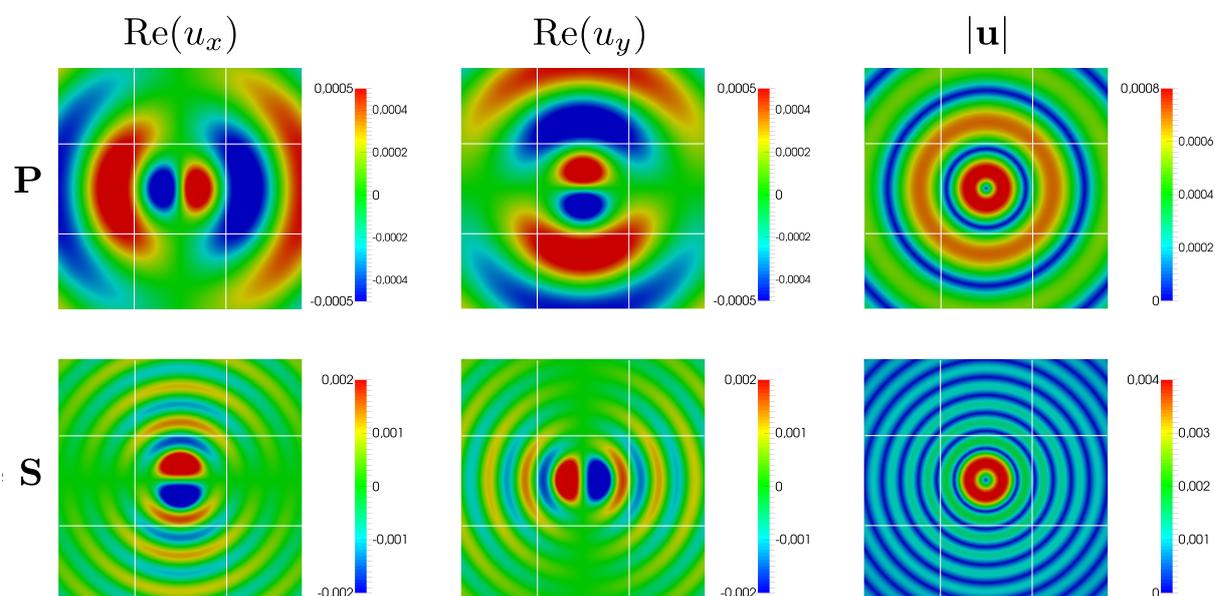


FIGURE 7.4 – Matériau **Iso** : Partie réelle de  $u_x$  (à gauche), de  $u_y$  (au centre) et module  $|\mathbf{u}|$  pour une onde P (en haut) et une onde S (en bas). Les droites  $\Sigma_a^j$  sont représentées en blanc.

Sur ce premier résultat, nous observons plusieurs choses. Comme évoqué dans la remarque 7.2.1, l'**onde P** est polarisée dans la direction de propagation. Par exemple, dans la direction  $e_x = (1, 0)$ , on observe que la composante  $\text{Re}(u_y) = 0$  (idem pour la partie imaginaire non représentée ici). Pour l'**onde S**, c'est l'inverse, elle est polarisée dans la direction orthogonale au déplacement. Dans la direction  $e_y = (0, 1)$ , c'est la composante  $u_x$  qui est nulle. Par ailleurs, on note que les composantes  $u_x$  et  $u_y$  vérifient des propriétés de symétrie.

De plus, on retrouve également que l'**onde P** a une plus grande longueur d'onde que l'**onde S**. Enfin, on observe sur les modules  $|\mathbf{u}|$  que les ondes sont radiales ce qui est caractéristique d'un milieu **isotrope**.

Nous avons effectué les mêmes simulations dans le cas du matériau **Ortho<sub>1</sub>** et nous avons présenté les résultats sur la Figure 7.5. Ici, les 2 types d'ondes quasi-P et quasi-S ne peuvent plus être découplés. Néanmoins, on suppose qu'en choisissant  $f$  à rotationnel nul, l'onde générée s'exprime "essentiellement" comme une superposition d'ondes planes quasi-P (de même avec  $f$  à divergence nulle et les ondes planes quasi-S).

Comme pour le cas isotrope, on observe sur ces résultats que l'onde quasi-P a une longueur d'onde plus grande que l'onde quasi-S. De plus, on retrouve les polarisations des ondes : par exemple la composante  $u_x$  pour l'onde quasi-P est nulle dans la direction  $e_y = (0, 1)$ . Enfin, dans un milieu orthotrope, on retrouve également des propriétés de symétrie entre les composantes  $u_x$  et  $u_y$ .

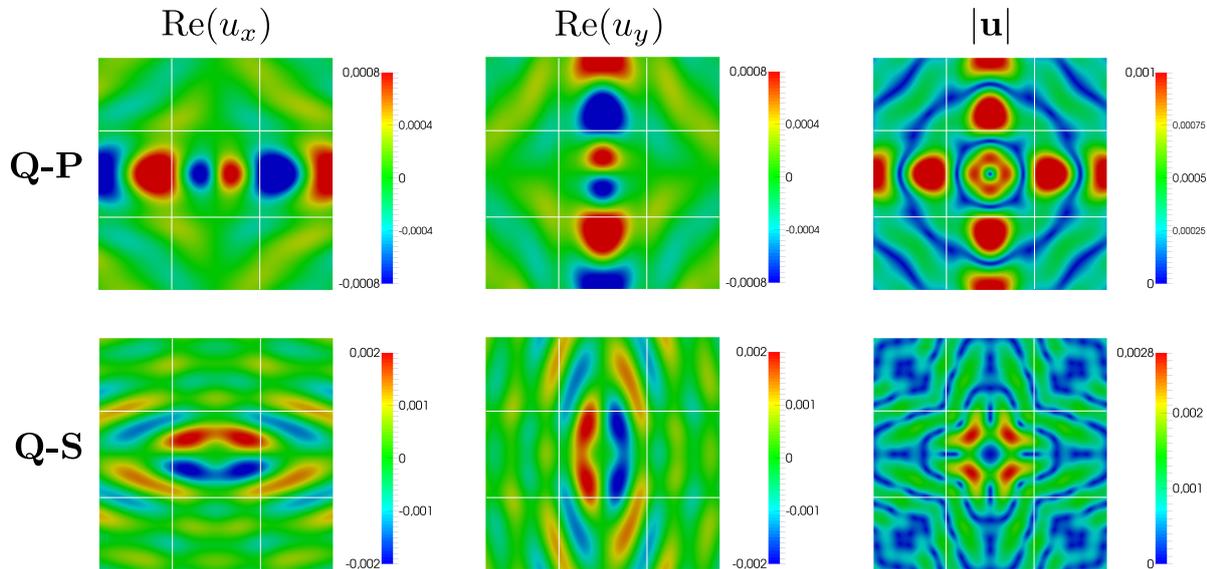


FIGURE 7.5 – Matériau **Ortho<sub>1</sub>** : Partie réelle de  $u_x$  (à gauche), de  $u_y$  (au centre) et module  $|\mathbf{u}|$  pour une onde quasi-P (en haut) et une onde quasi-S (en bas). Les droites  $\Sigma_a^j$  sont représentées en blanc.

À l'aide des diagrammes de vitesse, nous allons essayer de comprendre la localisation de l'énergie des solutions, c'est à dire les zones où  $|\mathbf{u}|$  est grand (zone en rouge). D'une part, nous savons que la solution  $\mathbf{u}$  du problème (7.30) peut s'écrire comme la somme (infinie) d'ondes planes (comme nous l'avons fait dans les demi-plans) car le domaine est parfaitement homogène. D'autre part, nous avons vu que les diagrammes de vitesse nous permettent de connaître pour chaque onde plane la direction  $V^g$  de propagation de l'énergie. Par conséquent,  $\mathbf{u}$  sera "concentrée" dans les directions  $\vec{d}$  regroupant "le plus" d'ondes planes dont les vitesses de groupe  $V^g$  sont colinéaires (ou presque) à  $\vec{d}$ .

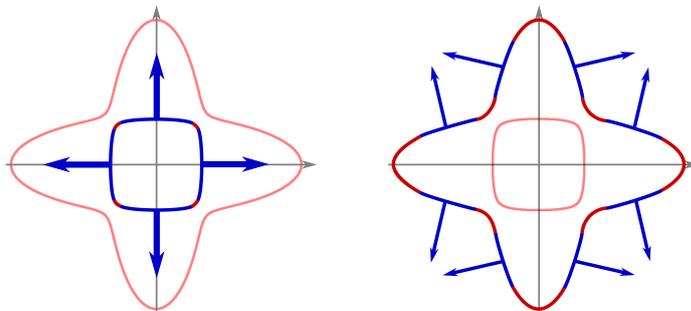


FIGURE 7.6 – Matériau **Ortho<sub>1</sub>** : Directions de propagation de l'énergie pour les ondes quasi-P (à droite) et les ondes quasi-S (à gauche).

Typiquement, pour **Ortho**<sub>1</sub>, nous avons représenté sur la Figure 7.6 les zones des surfaces de lenteur regroupant les ondes planes quasi-P et quasi-S dont les vitesses de groupe  $V^g$  sont presque alignées à une direction  $\vec{d}$  représentée par la flèche bleue. Ces flèches indiquent les directions "majoritaires" de propagation de l'énergie. En somme, l'énergie de  $\mathbf{u}$  se propage dans les directions normales aux zones "plates" de la courbe de lenteur.

Connaissant les directions de propagation de l'énergie, nous pouvons mieux appréhender les résultats de la Figure 7.5. Pour l'onde quasi-P,  $|\mathbf{u}|$  est concentrée dans les directions  $e_x$ ,  $-e_x$ ,  $e_y$  et  $-e_y$  correspondant aux directions "principales" de propagation de l'énergie. Pour l'onde quasi-S, on observe une concentration locale de l'énergie (en rouge) dans les directions (approximativement)  $\pm(1, 1)$  et  $\pm(1, -1)$ . Cette concentration locale correspond à la zone d'intersection des directions "principales" de propagation de l'énergie pour les ondes planes quasi-S.

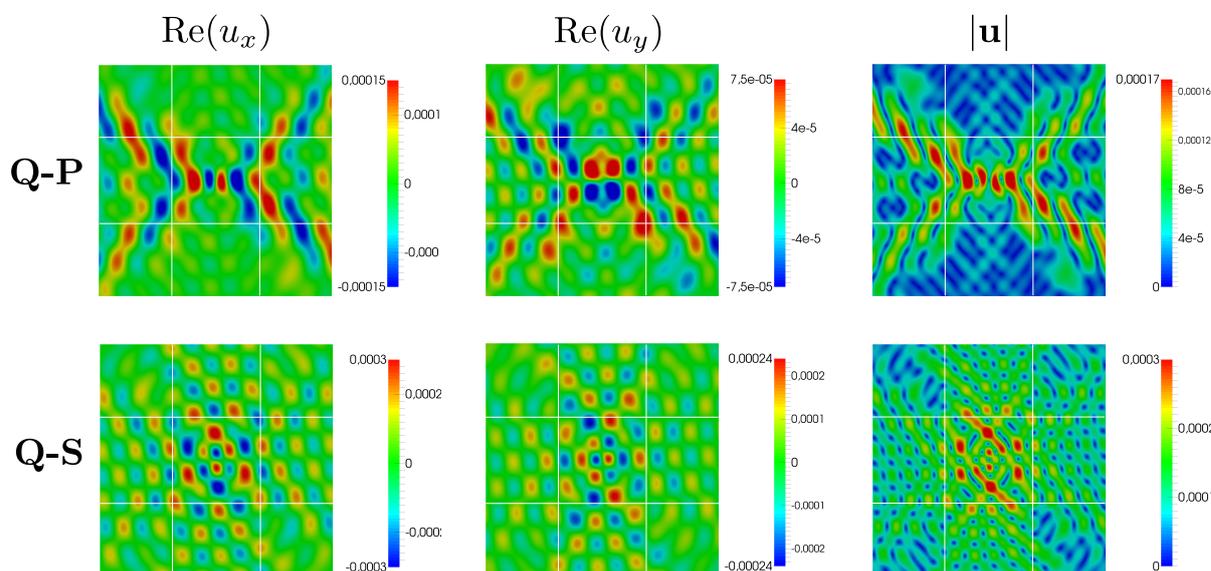


FIGURE 7.7 – Matériau **Ani** : Partie réelle de  $u_x$  (à gauche), de  $u_y$  (au centre) et module  $|\mathbf{u}|$  pour une onde P (en haut) et une onde S (en bas). Les droites  $\Sigma_a^j$  sont représentées en blanc.

Le dernier cas que nous avons testé est le milieu **Ani**. Nous avons essayé de comprendre les résultats de la Figure 7.7 à l'aide du diagramme de lenteur, comme nous venons de le faire pour le matériau **Ortho**<sub>1</sub>. Tout d'abord, nous pouvons constater que l'anisotropie rend les résultats très complexes. Rappelons que dans cette situation les ondes quasi-P et quasi-S ne sont pas découplées ce qui complexifie davantage les résultats. De plus, on observe que les composantes  $u_x$  et  $u_y$  n'ont plus de propriétés de symétrie comme précédemment.

En utilisant le diagramme de lenteur, nous avons essayé de comprendre (autant que possible) ces résultats. Sur la Figure 7.8, nous avons représenté les directions principales de propagation de l'énergie pour les ondes quasi-P et quasi-S. On retrouve ainsi que pour l'onde quasi-P (sur la Figure 7.7), le module  $|\mathbf{u}|$  est grand dans les directions de propagation de l'énergie. Pour l'onde quasi-S, c'est moins évident. Néanmoins, on retrouve une concentration locale de l'énergie à l'intersection des directions principales de propagation de l'énergie.

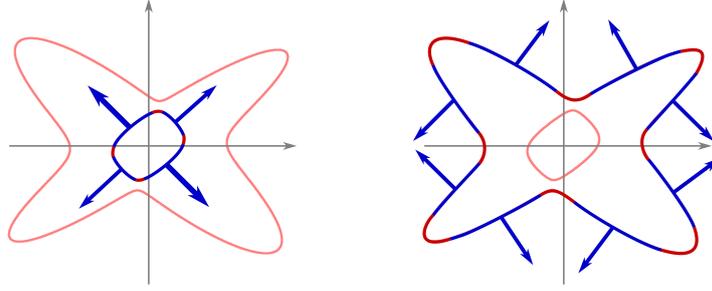


FIGURE 7.8 – Matériau **Ani** : Directions de propagation de l'énergie pour les ondes quasi-P (à droite) et les ondes quasi-S (à gauche).

### 7.2.3 Comparaison avec d'autres méthodes numériques

Pour terminer cette section, nous allons valider (toujours qualitativement) notre méthode en comparant nos résultats avec ceux obtenus par 2 autres méthodes :

- les couches PML,
- et les couches visco-élastiques.

Nous avons déjà présenté et utilisé ces méthodes précédemment dans la section 3.6.3. Rappelons simplement que la technique des PML conduit à un résultat faux en présence d'ondes inverses [12]. Grâce aux diagrammes de lenteurs (voir Figure 7.2), nous savons que la technique des PML donnera donc un résultat faux si on l'utilise pour les matériaux **Ortho<sub>2</sub>** et **Ani**.

Le problème modèle que nous cherchons à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u} \in (H_{loc}^1(\Omega))^2 \text{ sortante telle que} \\ &\left| \begin{array}{ll} \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O}, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (7.31)$$

où  $\mathcal{O}$  est l'ensemble de deux obstacles : un carré et un triangle comme présenté sur la Figure 7.9. La source  $f$  est choisie centrée et à divergence nulle pour générer une onde quasi-S.

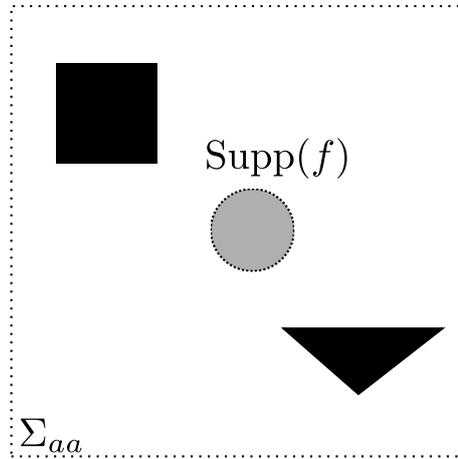


FIGURE 7.9 – Géométrie des défauts et position de la source pour le problème (7.31).

Sur la Figure 7.10, nous avons représenté le module  $|\mathbf{u}|$  de la solution du problème (7.31) dans  $\Omega_a$  obtenue à l'aide des trois méthodes : les PML, notre méthode et les couches visco-

élastiques. Pour la technique des couches visco-élastiques, notons qu'il a été nécessaire d'utiliser

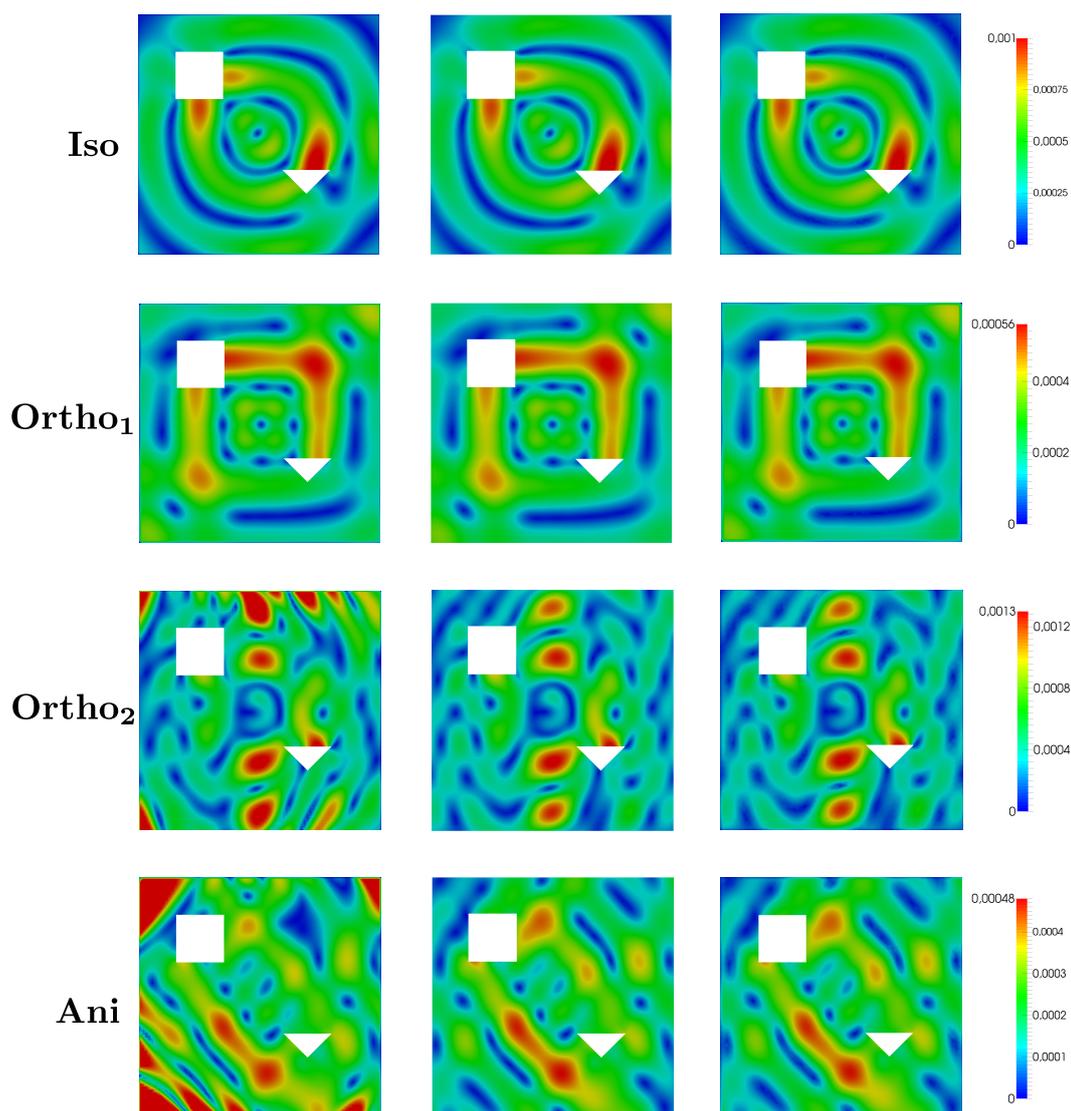


FIGURE 7.10 – Comparaison des trois méthodes : PML (à gauche), notre approche (au centre) et les couches visco-élastiques (à droite) pour différents matériaux.

des couches très grandes, et par conséquent, pour limiter le temps de calcul, la discrétisation est moins précise. Néanmoins, on observe sur la Figure ci-dessus que cette méthode donne des résultats très similaires (qualitativement) à notre approche pour tous les milieux.

De plus, pour les matériaux **Iso** et **Ortho<sub>1</sub>**, on observe que l'utilisation des PML donne des résultats concordants avec ceux des autres méthodes. On valide ainsi notre approche. Enfin, une dernière remarque concerne l'utilisation des PML pour les milieux **Ortho<sub>2</sub>** et **Ani**. Comme nous l'avons précisé précédemment, il existe dans ces milieux des ondes inverses et cela conduit à des résultats faux, comme on peut l'observer.

Une étude quantitative de l'erreur commise en utilisant notre approche aurait été intéressante, mais n'a pas pu être faite faute de temps. Notons par ailleurs qu'il n'est pas évident d'obtenir une solution analytique pour un milieu élastique. Dans un matériau isotrope sans défaut, c'est possible en utilisant la décomposition de Helmholtz et les fonctions de Bessel (voir [48]).

## 7.3 Approche itérative de résolution

### 7.3.1 Introduction

Au chapitre 6, nous avons décrit plusieurs extensions possibles de la formulation multi-domaines que nous avons développée au chapitre 4. Une première idée consistait à introduire un recouvrement entre le domaine borné et les demi-plans. Une seconde idée était de considérer une autre structuration des demi-plans, ce qui permet notamment de réduire le nombre d'inconnues dans la formulation multi-domaines. Bien évidemment, ces deux extensions sont applicables pour le cas élastique.

De plus, comme nous l'avons présenté dans la section 6.1.3 du chapitre 6, on peut également utiliser une méthode itérative pour résoudre le problème de diffraction reformulé à l'aide de notre formulation multi-domaines. Ce point devient d'ailleurs rapidement nécessaire car les équations intégrales portant sur des inconnues vectorielles  $\Phi^j$  créent d'importants blocs denses dans la matrice issue de la discrétisation qui pénalisent très fortement les méthodes directes.

Une version itérative simple de notre formulation multi-domaines (7.6) qui permet de pallier cette difficulté est l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_{(n)}^a \in (H^1(\Omega_a))^2 \text{ et } \Phi_{(n)}^j \in (H^1(\Sigma_a^j))^2 \text{ tels que} \\ \left. \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^a) + \omega_\epsilon^2 \mathbf{u}_{(n)}^a = f & \text{dans } \Omega_a, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^a) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O}, \\ \sigma(\mathbf{u}_{(n)}^a) \cdot \nu = \Lambda^j \Phi_{(n-1)}^j & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \Phi_{(n)}^j = \mathbf{u}_{(n-1)}^a & \text{sur } \Sigma_{aa}^j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \Phi_{(n)}^{j\pm 1} = D_{j\pm 1}^j \Phi_{(n-1)}^j & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{array} \right\} \end{array} \quad (7.32)$$

où  $\mathbf{u}_{(n)}^a$  et  $\Phi_{(n)}^j$  représentent l'approximation de la solution à l'étape  $(n)$  de l'algorithme. Ce processus itératif présente l'avantage d'éviter l'inversion d'une matrice partiellement dense car les termes liés aux équations intégrales sont ainsi au second membre.

Cependant, comme nous l'avons déjà expliqué, ce type d'algorithme ne converge pas dans le cas général. L'idée est alors de s'en servir comme préconditionneur pour GMRES (voir section 1.3.4 du premier chapitre). On garantit ainsi la convergence tout en conservant l'avantage "calculatoire" de la méthode.

De plus, il est également possible de tirer parti pour une résolution itérative des formulations "avec recouvrement" entre le domaine borné et les demi-plans. Ainsi, nous avons pu tester trois formulations multi-domaines : "sans recouvrement" (voir (7.6)), et les deux formulations "avec recouvrement" introduites au chapitre 6, voir section 6.1.

**Remarque 7.3.1** *Une extension intéressante du point de vue numérique, mais que nous n'avons pas encore pu mettre en œuvre, serait de considérer une formulation multi-domaines "avec recouvrement" et uniquement 4 sous-domaines : 3 demi-plans et un domaine borné. On aurait alors moins d'inconnues (donc la résolution serait moins coûteuse), et on profiterait du recouvrement pour une résolution itérative.*

### 7.3.2 Résultats numériques

Dans cette dernière section, nous avons testé la résolution itérative avec GMRES préconditionné par l'algorithme (7.32) pour les trois formulations ("sans recouvrement", et les deux "avec recouvrement"). Dans le tableau ci-dessous, nous avons indiqué le nombre d'itérations nécessaires à GMRES pour atteindre une erreur sur le résidu inférieure à  $10^{-10}$ . Nous avons considéré différentes fréquences et différentes tailles de recouvrement  $l$  entre le domaine borné et les demi-plans.

	$l = 0$	$l = 0.1$		$l = 0.2$		$l = 0.5$	
$\omega = 10 + 0.5i$	37 ité.	27 ité.	25 ité.	24 ité.	20 ité.	22 ité.	18 ité.
$\omega = 15$	42 ité.	29 ité.	27 ité.	26 ité.	22 ité.	25 ité.	21 ité.
$\omega = 20 + i$	38 ité.	24 ité.	21 ité.	22 ité.	19 ité.	19 ité.	15 ité.
$\omega = 20$	44 ité.	28 ité.	25 ité.	26 ité.	22 ité.	24 ité.	23 ité.
$\omega = 50$	45 ité.	27 ité.	26 ité.	26 ité.	26 ité.	26 ité.	29 ité.

Dans les cas avec recouvrement  $l > 0$ , on a inscrit dans les colonnes dédoublées :

- à gauche le nombre d'itérations en utilisant la formulation multi-domaines inspirée de la formulation (6.8) en acoustique,
- et à droite le nombre d'itérations en utilisant la troisième formulation inspirée de la formulation (6.10) en acoustique.

Ces résultats numériques ont été obtenus en considérant le matériau **Iso** (voir définition 7.24) et dans la configuration géométrie représenté Figure 7.9.

Dans le tableau ci-dessus, on observe plusieurs choses similaires à ce que nous avons vu dans la section 6.1.3 pour le cas acoustique. Tout d'abord, l'ajout du recouvrement (même petit) permet de réduire le nombre d'itérations nécessaires à GMRES pour atteindre la convergence. Ce résultat est d'autant plus marqué dans le cas d'un milieu dissipatif. En effet, comme nous l'avons vu dans l'analyse théorique section 6.2, les opérateurs intégraux assurant la compatibilité deviennent compacts et même contractants pour une dissipation  $\epsilon$  grande pour la troisième formulation. Enfin, on remarque que le nombre d'itérations varie peu par rapport à la fréquence, ce qui est là encore une curiosité.



---

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

---

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au développement de méthodes numériques pour résoudre des problèmes de diffraction dans deux configurations : le guide d'ondes infini unidirectionnel (dans la première partie), et le milieu bidimensionnel infini dans les deux directions (dans la deuxième partie). L'objectif était de proposer des méthodes applicables à des milieux anisotropes arbitraires, et performantes pour la résolution numérique. Dans chacun des cas, nous avons essayé de répondre à ces attentes en proposant de nouvelles formulations des problèmes, basées sur les approches de type décomposition de domaine. Nous avons pu tester numériquement ces méthodes, et également mener une analyse théorique de ces dernières dans le cas dissipatif. Dans la continuité directe de ces travaux, il vient plusieurs questions.

## **Le guide unidirectionnel :**

Dans la première partie, l'étude théorique que nous avons menée dans le cas scalaire est a priori complète. Néanmoins, une extension de ces travaux serait de s'intéresser à d'autres choix de conditions de transmission entre les sous-domaines. Plus précisément, comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, une piste intéressante serait de considérer des conditions optimisées (voir [42, 41, 49]) sur les frontières du sous-domaine borné. Rappelons que pour les frontières des demi-guides, le choix des conditions de transmission est imposée par la nécessité de pouvoir résoudre via les décompositions modales, et donc il semble plus difficile de pouvoir les changer. Par ailleurs, une étude numérique plus approfondie, en particulier pour des configurations 3D serait intéressante et est en cours.

Dans le chapitre 3, nous avons étendu les résultats des chapitres 1 et 2 au cas des guides élastiques. Nous avons vu que l'étude des modes dans ce cas soulève de nombreuses questions théoriques. Afin de pouvoir mener une analyse théorique précise de nos méthodes en élasticité, il serait important de clarifier ces questions. Typiquement, il serait utile de connaître le comportement des modes évanescents dans la section transverse d'un guide anisotrope. Nous avons vu en effet que ces derniers déterminent la convergence des séries modales qu'on utilise pour construire les conditions transparentes. Dans le cas acoustique (chapitre 2), nous avons vu que les modes évanescents peuvent être exponentiellement croissants dans la section du guide, ce qui a une répercussion sur les méthodes numériques. Pour cette raison, on peut se demander s'il serait intéressant d'utiliser des frontières obliques (ou déformées) dans des cas élastiques anisotropes, et si oui, quelle serait la forme optimale de ces frontières.

## **Diffraction dans un milieu 2D :**

La deuxième partie de la thèse conduit à davantage de questions, à la fois théorique et

numérique. Commençons avec les points théoriques. Dans le chapitre 4, nous avons proposé une première formulation multi-domaines du problème de diffraction. Nous avons présenté la difficulté que nous rencontrons pour exprimer les raccords en dérivée normale entre les représentations dans les demi-plans et la solution dans la zone bornée. Rappelons néanmoins que numériquement tout fonctionne bien. Une question est donc de savoir si on peut obtenir une formulation multi-domaines sans recouvrement entre la zone bornée et les demi-plans sur laquelle on peut faire une analyse théorique et numérique.

Dans le chapitre 6, nous avons introduit deux nouvelles formulations "avec recouvrement" entre la zone bornée et les demi-plans. L'un des avantages de ces nouvelles formulations est qu'elles nous ont permis de montrer le caractère Fredholm des problèmes reformulés (dans le cas avec dissipation). Une question est néanmoins restée ouverte pour la dernière formulation : existe-t-il des fréquences complexes pour lesquelles cette troisième formulation serait mal posée ?

Nous avons testé numériquement ces différentes formulations, dans les cas avec et sans dissipation. Nous avons observé que, dans les deux cas, la méthode donne de bons résultats. Néanmoins, pour le cas sans dissipation, nous n'avons pas de résultats théoriques. Il serait intéressant de réussir à montrer des propriétés théoriques (notamment l'unicité de la solution) pour un milieu non-dissipatif. En particulier, cela permettrait de donner une caractérisation simple d'une solution sortante dans un milieu élastique en imposant que la solution soit sortante dans quatre directions (ou trois directions comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 6).

D'un point de vue numérique, nous avons vu que nos formulations multi-domaines nécessitent la discrétisation de 5 inconnues (ou 4 en utilisant seulement 3 demi-plans), et les équations intégrales assurant la compatibilité des représentations créent des blocs denses dans la matrice issue de la discrétisation. Afin d'éviter une inversion directe (très vite trop coûteuse), nous avons proposé une résolution itérative via GMRES. Une amélioration possible de la méthode serait de chercher à optimiser le produit matrice-vecteur intervenant dans la méthode, en suivant par exemple des idées similaires aux  $\mathcal{H}$ -matrices.

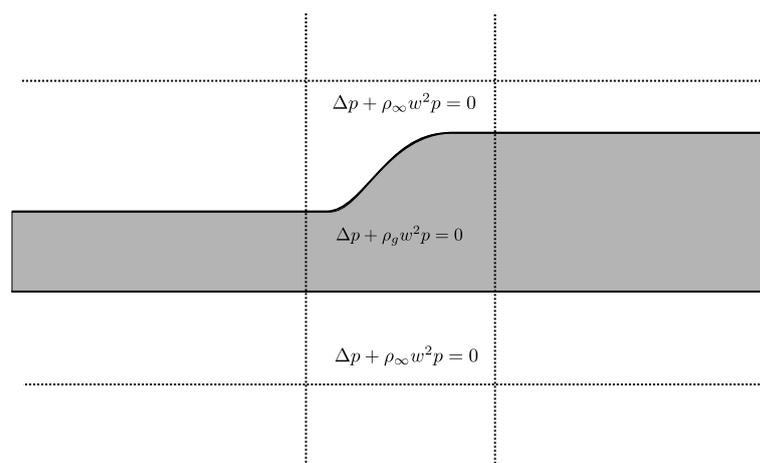


FIGURE 7.11 – Schéma de la jonction entre deux guides ouverts.

La deuxième partie de la thèse ouvre également d'autres perspectives. Par exemple, on pourrait s'intéresser à "remplacer" la transformée de Fourier par d'autres transformations. Typiquement, dans le cas d'un milieu périodique, on peut exprimer la solution dans un demi-plan via la transformée de Floquet (voir les travaux de S. Fliss [39, 40]). Une question restée ouverte

est l'étude des propriétés des équations intégrales assurant la compatibilité des représentations dans les demi-plans. On peut se demander s'il est possible d'adapter les travaux du chapitre 5 à ce cas. Une autre situation très intéressante à étudier est la jonction de guides ouverts (voir Figure 7.11). Dans les travaux de B. Goursaud et al. [19], il est montré qu'on peut exprimer la solution dans un demi-plan via une transformée de Fourier généralisée (sur le dessin, on a représenté en ligne pointillée les bords des demi-plans). La méthode que nous avons proposé permettrait donc a priori de traiter ce type de problème.

De plus, avec ce que nous avons vu dans le chapitre 6 (choisir la structuration des demi-plans), il semble qu'il serait également possible d'étudier la situation de jonction de guides ouverts "obliques" (voir Figure 7.12) dans le cas où les guides forment des angles entre eux supérieurs à  $\pi/2$  (sinon les demi-plans intersectent deux guides et on ne sait alors plus donner de représentations analytiques de la solution), voir Figure 7.12.

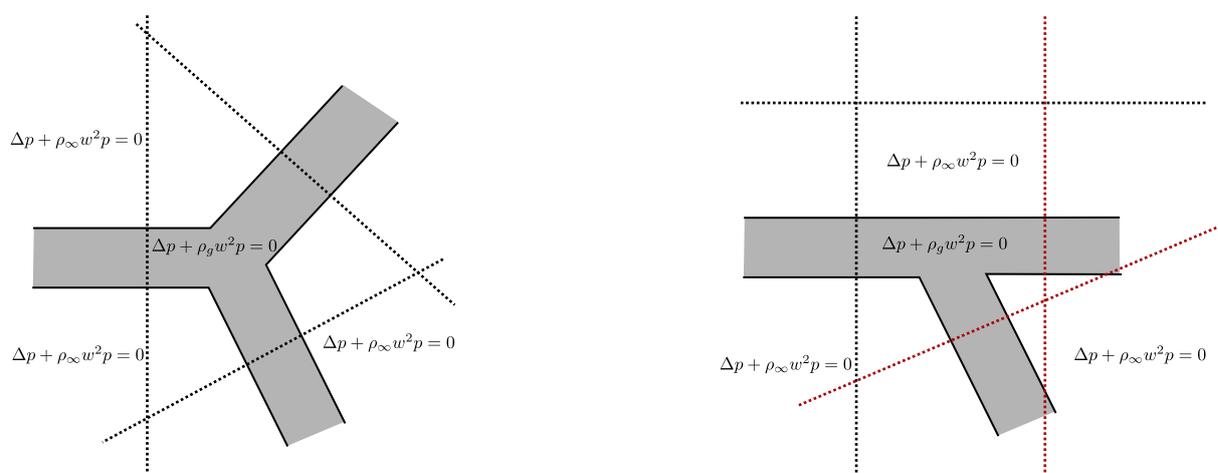


FIGURE 7.12 – Schéma de deux configurations de jonction "obliques" de guides ouverts : à gauche une situation envisageable avec notre approche, et à droite un cas non envisageable.

### Lien avec le cas de la plaque 3D :

Nous avons expliqué en introduction que la motivation initiale de la thèse était de développer une méthode numérique pour calculer la diffraction dans une plaque élastique anisotrope 3D. Les outils que nous avons développés dans la thèse nous permettent de concevoir une méthode pour traiter ce cas. Le principe est simple : si on sait donner une représentation de la solution dans une "demi-plaque" homogène, alors on peut utiliser la même démarche que pour le milieu 2D (voir Figure 7.13). Notons que dans ce cas, les équations de compatibilité entre les représentations dans les demi-plaques sont écrites non plus sur des droites mais sur des bandes 2D infinies.

La question est donc : comment obtenir une représentation analytique dans une demi-plaque ? Dans le cas scalaire acoustique, on peut résoudre analytiquement les équations dans une demi-plaque homogène étant donnée la trace sur le bord de la demi-plaque. En suivant les idées du chapitre 4, nous avons pu ainsi tester la méthode pour une "plaque acoustique" (voir Figure 7.14).

Dans le cas élastique, on ne sait pas exprimer la solution dans une demi-plaque uniquement à l'aide de sa trace. Une idée serait alors, en appliquant la transformée de Fourier, de se ramener

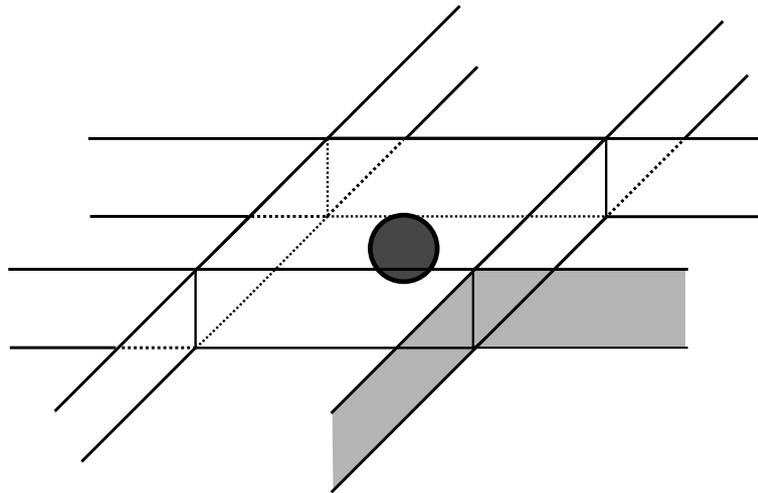


FIGURE 7.13 – Schéma de la plaque 3D. En gris clair, on a représenté deux demi-bandes infinies sur lesquelles on impose les relations de compatibilité entre deux représentations dans deux demi-plaques. Le point noir représente un défaut borné.

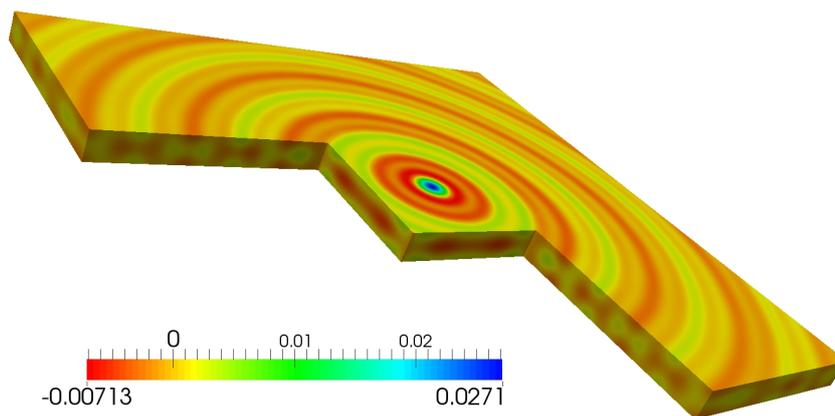


FIGURE 7.14 – Partie réelle du champ diffracté dans une plaque "acoustique" isotrope représentée dans la zone éléments finis et reconstruite dans deux demi-plaques

à une série de problèmes paramétrés par la variable de Fourier  $\xi$  posés dans un demi-guide. Pour chaque  $\xi$  (étant donnée une discrétisation), la méthode consisterait à calculer les modes associés à ce problème de guide. Enfin, afin d'obtenir la représentation modale de la solution, on exploiterait les relations de bi-orthogonalité. Cependant, la configuration de la plaque soulève de nombreuses questions et difficultés sur lesquelles nous souhaitons continuer à travailler.

---

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Achenbach J. D. et Wang C. Y. (1995), *Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids*, Proc. of the Royal Soc. of London. Math. and Phys. Sc., 449(1937), 441-458.
- [2] Achenbach J. D. (1973), *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland Publishing company, Amsterdam.
- [3] Appelö D. et Kreiss G. (2006), *A new absorbing layer for elastic waves*, J. Comput. Phys., 215, 642-660.
- [4] Alonso P. E. M. (2014), *Méthode de résolution d'équations elliptiques dans le plan privé d'un polygone*, Rapport de stage, ENSTA Paristech.
- [5] Arden S., Chandler-Wilde S. N. et Langdon S. (2007), *A collocation method for high frequency scattering by convex polygons*, J. Comput. and Appl. Math., 204, 334-343.
- [6] Auld B.A (1973), *Acoustic fields and waves in solids vol II*, Krieger publishing, Malabar, Florida.
- [7] Baronian V. (2009), *Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées. Application au Contrôle Non Destructif*, Thèse de doctorat, École Polytechnique.
- [8] Baronian V., Bonnet-Ben Dhia A.-S. et Lunéville E. (2010) *Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide*, J. Comput. Appl. Math., 234(6), 1945–1952.
- [9] Baronian V., Bonnet-Ben Dhia A.-S., Fliss S. et Tonnoir A., (2015) *Iterative methods for scattering problems in unbounded isotropic elastic waveguides*, soumis à Computer Methods in applied mech. and eng.
- [10] Barucq H., St-Guirons A. G. D. et Tordeux S. (2012), *Non-reflecting boundary condition on ellipsoidal boundary*. Num. Ana. and App., 5(2), 109-115.
- [11] Barucq H., Diaz J. et Tordeux S. (2012), *Introduction à l'analyse mathématique de l'équation d'Helmholtz*, Polycopié de cours.
- [12] Bécache E., Fauqueux S. et Joly P. (2003), *Stability of perfectly matched layers, group velocity and anisotropic waves*, J. Comput. Physics, 188, 399–433.
- [13] Besse C., Coatleven J., Fliss S., Lacroix-Violet I. et Ramdani K. (2012), *Transparent boundary conditions for locally perturbed infinite hexagonal periodic*, preprint.
- [14] Ben Belgacem F., Fournié M., Gmati N. et Jelassi F. (2005), *On the Schwarz algorithms for elliptic exterior boundary value problems*. ESAIM-M2AN, 39(4).
- [15] Ben Belgacem F., Gmati N. et Jelassi F. (2009), *Convergence bounds of GMRES with Schwarz's preconditioner for the scattering problem*. Int. J. Numer. Meth. Engng., 80, 191–209.

- [16] Berenger J. P. (1994), *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 114, 185–200.
- [17] Besserer H. et Malischewsky P. G. (2004), *Mode series expansions at vertical boundaries in elastic waveguides*, Wave Motion, 39, 41–59.
- [18] Bonnet-Ben Dhia A.-S., Chambeyron C. et Legendre G. (2014), *On the use of perfectly matched layers in the presence of long or backward guided elastic waves*, Wave Motion, 51, 266–283.
- [19] Bonnet-Ben Dhia A.-S., Goursaud B. et Hazard C. (2011), *Mathematical analysis of the junction of two acoustic open waveguides*, SIAM J. on Applied Mathematics, 71(6), 2048–2071.
- [20] Bonnet-Ben Dhia A.-S. et Tillequin A. (2001), *A generalized mode matching method for scattering problems with unbounded obstacles*, J. Comput. Acous., 9, 1611–1631.
- [21] Boudendir Y. (2002), *Techniques de décomposition de domaine et méthode d'équations intégrales*, Thèse de doctorat.
- [22] Brossier R., Métivier L., Labbé S. et Virieux J. (2014), *A robust absorbing layer method for anisotropic seismic wave modeling*, J. Comput. Phys., 279, 218–240.
- [23] Castaings M., Drozd M., Moreau L. et Lowe M. J. S., (2006) *Efficient Numerical Modelling of Absorbing Regions for Boundaries Of Guided Waves Problems*, Quantitative NonDestructive Evaluation, 820(1), 126–133.
- [24] Chandler Wilde S.N. et Langdan S. (2007), *A Galerkin boundary element method for high frequency scattering by convex polygons*, SIAM J. on Numer. Ana., 43, 610–640.
- [25] Chandler Wilde S.N., Langdan S. et Mokgolele M. (2012), *A high frequency boundary element method for scattering by convex polygons with impedance boundary conditions*, Comm. in Comput. Phys., 11, 573–593.
- [26] Chen H., et Chan C. T. (2010), *Acoustic cloaking and transformation acoustics*, J. of Physics D : Applied Physics, 43(11).
- [27] Claeys X. (2014), *Quasi-local multi-trace boundary integral formulations*, arXiv preprint.
- [28] Collino F. et Tsogka C. (2001), *Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media*, Geophysics, 66(1), 294–307.
- [29] Collino F., Ghameni S. et Joly P. (2000), *Domain decomposition method for harmonic wave propagation : a general presentation*, Computer Methods in applied mech. and eng.
- [30] Colton D. et Kreiss R. (2013), *Integral equation methods in scattering theory*, SIAM.
- [31] Craster R. V., Adams S. D.M. et Skelton E. A. (2007), *Guided elastic waves and perfectly matched layers*, Wave Motion, 44(7-8), 573–592.
- [32] Demaldent E. et Imperiale S. (2013), *Perfectly matched transmission problem with absorbing layers : Application to anisotropic acoustics in convex polygonal domains*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 96, 689–711
- [33] Després B. (1991), *Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique*, Thèse de Doctorat, Université Paris IX Dauphine.
- [34] Diaz J. et Joly P. (2006), *A time domain analysis of PML models in acoustics*, Computer Methods in applied mech. and eng., 195(29), 3820–3853.
- [35] Duvaut G. (1990), *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris.

- [36] Epstein C. L. et Schotland J. (2008), *The Bad Truth about Laplace's Transform*, SIAM Review 50, 3, 504-520.
- [37] Ernst O.G. et Gander M.J. (2012), *Why it is difficult to solve Helmholtz problems with classical iterative methods*, Numerical Analysis of Multiscale Problems, 323-363, Springer.
- [38] Fraser W. B. (1976), *Orthogonality relation for the Rayleigh-Lamb modes of vibration of a plate*, J. Acoust. Soc. Am., 59, 215-216.
- [39] Fliss S. (2009), *Étude mathématique et numérique de la propagation des ondes dans des milieux périodiques localement perturbés*, Thèse de Doctorat, École polytechnique.
- [40] Fliss S. et Joly P. (2009), *Exact boundary conditions for time-harmonic wave propagation in locally perturbed periodic media*, Applied Numerical Mathematics, 59(9), 2155-2178.
- [41] Gander M. J. et Zhang H. (2014), *Optimized Schwarz methods with overlap for the Helmholtz equation*, Domain Decomposition Methods in Sci. and Eng. XXI, Springer International Publishing, 207-215.
- [42] Gander M. J., Magoulès F. et Nataf F. (2002), *Optimized Schwarz Methods without Overlap for the Helmholtz Equation*, SIAM, J. on Sci. Comput., 24, 38-60.
- [43] Gander M. J., Halpern L. et Nataf F. (1999), *Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Schwarz waveform relaxation*, 11<sup>th</sup> Inter. Conf. on Domain Decomposition methods, 27-36.
- [44] Gander M. J. (2008) *Schwarz methods over course of time*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, 31, 228-255.
- [45] Gander M. J. et Santugini-Repiquet K. (2014), *Cross-points in domain decomposition methods with a finite element discretization*, arXiv preprint.
- [46] Gander M. J. et Kwok F. (2012), *Best Robin parameters for optimized Schwarz methods at cross points*, SIAM J. on Sc. Comput., 34(4), 1849-1879.
- [47] Givoli D. (1992), *Numerical method for problems in infinite Domains*, Elsevier Science Limited, Amsterdam.
- [48] Givoli D. et Keller J. B. (1990), *Non reflecting boundary conditions for elastic waves*, Wave motion, 12, 267-279.
- [49] Gmati N. et Zrelli N. (2006), *Numerical study of some iterative solvers for acoustics in unbounded domains*, ARIMA, 4,1-23.
- [50] Goldstein C. (1982), *A finite element method for solving scattering Helmholtz type equations in waveguides and other unbounded domains*, Maths. of Comput., 39, 309-324.
- [51] Gregory R. D. (1983), *A note on bi-orthogonality relations for elastic cylinders of general cross section*, J. of elasticity, 13(3), 351-355.
- [52] Hayashi T., Rose J. L. et Song W. J. (2004), *Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example*, Ultrasonics, 41, 175-183.
- [53] Halla M. et Nannen L., *Hardy space infinite elements for time-harmonic two-dimensional elastic waveguide problems*, ASC Report.
- [54] Haase M., (2012) *Lectures on functional analysis*, Delft Institute of Applied Mathematics.
- [55] Hohage T., Schmidt F. et Zschiedrich L. (2003), *Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition I : Theory*, SIAM J. on math. analysis, 35(1), 183-210.
- [56] Impériale S. (2012), *Etude mathématique et numérique de capteurs piézoélectriques*, Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine.

- [57] Jezzine K. (2006), *Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructif par ondes élastiques guidées*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1.
- [58] Lamb H. (1889), *On the flexure of an elastic plate*, Proc. London Math. Soc., 21, 70–90.
- [59] Lamb H. (1917), *On waves in an elastic plate*, Proc. Roy. Soc. London A, 93, 114–128.
- [60] Liesen J. et Strakos Z. (2012), *Krylov subspace methods : principles and analysis*, Oxford University Press.
- [61] Lions J.L. et Magenes E. (1968) *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris.
- [62] Lions P.L. (1988), *On the Schwarz alternating method. I*, First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, 1-42.
- [63] Lu M. et Fejer M. M. (1993), *Anisotropic dielectric waveguides*, JOSA A, 10(2), 246-261.
- [64] Kirrmann P. (1995), *On the completeness of Lamb modes*, J. Elasticity, 37, 39-69
- [65] Kostyuchenko A. G. et Orazov M. B. (1986), *Problem of oscillations of an elastic half cylinder and related self-adjoint quadratic pencils*, J. of Soviet Math., 33.
- [66] Métivier L., Tago J. et Virieux J. (2014), *SMART layers : a simple and robust alternative to PML approaches for elastodynamics*, Geophys. J. Int., 199(2), 700-706.
- [67] Milton G. W., Briane M. et Willis J. R. (2006), *On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form*, New Journal of Physics, 8(10), 248.
- [68] Mukdadi O. M. et Datta S. K. (2003), *Transient ultrasonic guided waves in layered plates with rectangular cross section*, J. Appl. Phys., 93, 9360–9370.
- [69] Mukdadi O. M. et Datta S. K. (2003), *Transient ultrasonic guided waves in bi-layered anisotropic plates with rectangular cross section*, Rev. Prog. QNDE, 23, 238–245.
- [70] Nakamura G., Uhlmann G. et Wang J.-N. (2004), *Unique continuation property for elliptic systems and crack determination in anisotropic elasticity*, Contemp. Math. (PDE and Inverse Problems), AMS, 362,312-338.
- [71] F. Nataf, F. Rogier et E. De Sturler (1994), *Optimal Interface Conditions for Domain Decomposition Methods*, Tech. Report 301, CMAP, École Polytechnique.
- [72] Norris A. N. et Shuvalov A. L. (2011) *Elastic cloaking theory*, Wave Motion, 48(6), 525–538.
- [73] Pagneux V. et Maurel A. (2002), *Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides*, Proceedings de la "Royal Society of London", Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 458(2024), 1913-1930.
- [74] Pagneux V. et Maurel A. (2004), *Scattering matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids*, J. Acoust. Soc. Am., 116, 1913-1920.
- [75] Pagneux V. et Maurel A. (2006), *Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness*, Proceedings de la "Royal Society of London", Mathematical, Physical and Engineering Science, 462(2068), 1315-1339.
- [76] Pagneux V. (2006), *Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate*, J. Acoust. Soc. Am., 120(2), 649-656.
- [77] Berraquero C. P., Maurel A. , Petitjeans P. et V. Pagneux (2013), *Experimental realization of a water-wave metamaterial shifter*, Phys. Rev. E, American Physical Society.
- [78] Paige C. C., Rozloznik M. et Strakos Z. (2006), *Modified Gram-Schmidt (MGS), least squares, and backward stability of MGS-GMRES*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 28(1), 264-284.

- [79] Quarteroni A. et Valli A. (1999), *Domain decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Oxford University press, Oxford.
- [80] Roitberg I., Vassiliev, D. et Weidl T. (1998), *Edge resonance in an elastic semi-strip*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 51(1), 1-14.
- [81] Royer D. et Dieulesaint E. (1996), *Ondes élastiques dans les solides*, Tomes 1, Masson.
- [82] Saad Y. et Schultz M.H. (1986), *GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems*, SIAM Journal on scientific and statistical computing, 7(3), 856-869.
- [83] Saad Y. (2003), *Iterative methods for sparse linear systems*, Siam.
- [84] Schwartz L. (1978), *Analyse hilbertienne*, École Polytechnique.
- [85] Schwarz H.A. (1869), *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, J. für die reine und angewandte Mathematik.
- [86] Sommerfeld A. et Bethe M. (1933), *Electron Theory of metals*, Handbook of Physics.
- [87] Taupin L. (2011), *Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique.
- [88] Tillequin A. (2001), *Une méthode de raccordement modal généralisée pour les problèmes de jonction de guides d'ondes*, Thèse de doctorat, École Polytechnique.

**Titre :** Conditions transparentes pour la diffraction d'ondes en milieu élastique anisotrope.

**Résumé :** Cette thèse est motivée par la simulation numérique du Contrôle Non Destructif par ultrasons. Elle vise à concevoir une méthode de calcul par éléments finis (EF) de la diffraction d'ondes élastiques harmoniques en temps par un défaut borné dans une plaque anisotrope infinie. L'objectif est de tenir compte du caractère non borné de la plaque tout en restreignant les calculs EF à une zone bornée autour du défaut. Ce point est difficile en raison de l'anisotropie, et, en particulier, les méthodes de type couches absorbantes parfaitement adaptées sont inopérantes.

Dans cette thèse, nous avons considéré principalement des cas bidimensionnels plus simples qui nous ont permis de mettre en place les ingrédients essentiels d'une méthode destinée au cas tridimensionnel de la plaque. La première partie traite du problème de diffraction dans une bande infinie. L'approche classique consiste à écrire des conditions transparentes en raccordant sur une frontière le déplacement et la contrainte axiale exprimés à l'aide des modes de la plaque dans les parties saines d'une part, et des EF dans la zone perturbée d'autre part. Nous avons mis en évidence l'intérêt d'écrire ces raccords sur deux frontières séparées en introduisant un recouvrement entre le domaine modal et EF. Nous pouvons ainsi exploiter les relations de bi-orthogonalité valables pour une anisotropie arbitraire, et également accélérer la convergence des méthodes itératives de résolution. Dans la seconde partie, qui constitue le cœur de la thèse, nous avons étudié le problème de diffraction dans un milieu anisotrope infini dans les deux directions. L'idée clé est que l'on peut exprimer (via la transformée de Fourier) la solution dans un demi-plan en fonction de sa trace sur son bord. Ainsi, l'approche consiste à coupler plusieurs représentations analytiques de la solution dans des demi-plans entourant le défaut (au moins 3) avec la représentation EF. La difficulté est d'assurer la compatibilité de ces représentations, en particulier dans les intersections infinies des demi-plans. Cela nous conduit à une reformulation couplant, via des opérateurs intégraux, à la fois la solution dans un domaine borné contenant le défaut, et ses traces sur les bords des demi-plans. Numériquement, une troncature et une discrétisation dans les variables d'espace et de Fourier sont nécessaires.

Pour chacune de ces deux parties, les méthodes ont été implémentées et validées à l'aide d'un code C++ développé pendant la thèse, d'abord dans le cas scalaire acoustique plus simple, puis dans le cas de l'élasticité.

**Mots-clés :** Conditions aux limites transparentes - Milieu anisotrope - Méthodes de Décomposition de Domaine - Élasticité - Guide d'ondes

**Title:** Transparent conditions for the diffraction of elastic waves in anisotropic media

**Abstract:** This thesis is motivated by the numerical simulation of Non Destructive Testing by ultrasonic waves. It aims at designing a method to compute by Finite Element (EF) the diffraction of elastic waves in time-harmonic regime by a bounded defect in an anisotropic plate. The goal is to take into account an infinite plate and to restrict the FE calculations to a bounded area. This point is difficult due to the anisotropy and, in particular, methods such as perfectly matched layers fail.

In this thesis, we have mainly considered two-dimensional cases that enabled us to implement the main ingredients of a method designed for the three-dimensional case of the plate. The first part deals with the diffraction problem in an infinite strip. The classical approach consists in writing transparent conditions by matching on a boundary the displacement and the axial stress using a modal expansion in the safe part of the plate, and the FE representation in the perturbed area. We have shown the interest of imposing these matching conditions on two separated boundaries, by introducing an overlap between the modal domain and the FE domain. Thus, we can take advantage of the bi-orthogonality relations valid for general anisotropy, and also improve the rate of convergence of iterative methods of resolution. In the second part, that represents the main part of the thesis, we discuss the diffraction problem in an anisotropic medium infinite in the two directions. The key idea is that we can express the solution (via the Fourier transform) in a half-plane given its trace on the boundary. Therefore, the approach consists in coupling several analytical representations of the solution in half-planes surrounding the defect (at least 3) with the FE representation. The difficulty is to ensure that all these representations match, in particular in the infinite intersections of the half-planes. It leads to a formulation which couples, via integral operators, the solution in a bounded domain including the defect, and its traces on the edge of the half-planes. The approximation releases a truncation and a discretization both in space and Fourier variables.

For each of these two parts, the methods have been implemented and validated with a C++ code developed during the thesis, first in the scalar acoustic case, and then in the elastic case.

**Keywords:** Transparent boundary conditions - Anisotropic medium - Domain Decomposition methods - Elasticity - Waveguide