



HAL
open science

Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil

Jérémy Bleyer

► **To cite this version:**

Jérémy Bleyer. Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil. Génie civil. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1043 . tel-01218303

HAL Id: tel-01218303

<https://pastel.hal.science/tel-01218303>

Submitted on 20 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Pôle de recherche et d'enseignement supérieur

Ecole doctorale SIE

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

de l'Université Paris-Est

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Jérémy BLEYER

intitulée

**Méthodes numériques pour le calcul à la
rupture des structures de génie civil**

soutenue le 17 juillet 2015, devant le jury composé de :

Géry DE SAXCÉ	Rapporteur	Université Lille 1
Mohammed HJIAJ	Rapporteur	INSA Rennes
Dieter WEICHERT	Examineur	RWTH Aachen University
Joseph PASTOR	Examineur	Université de Savoie
Ghazi HASSEN	Examineur	Ecole des Ponts ParisTech
Xavier CESPEDES	Invité	STRAINS
Patrick DE BUHAN	Directeur de thèse	Ecole des Ponts ParisTech

*« L'imagination veut toujours
à la fois rêver et comprendre,
rêver pour mieux comprendre,
comprendre pour mieux rêver. »*

Gaston Bachelard

Remerciements

Cette thèse a trouvé son origine en partie grâce à Xavier Céspedes et Mathieu Arquier après mon stage scientifique au sein de Setec Tpi. Ils avaient initié des premiers travaux dans la mise en œuvre numérique du calcul à la rupture pour les structures de génie civil, en lien avec Patrick de Buhan. J'ai ensuite eu la chance de le rencontrer à l'Ecole des Ponts ParisTech et ses qualités scientifiques et pédagogiques m'ont tout de suite donné envie de démarrer cette thèse à ses côtés. Je tiens donc à les remercier pour avoir été à l'origine de ce travail.

J'aimerais remercier Géry de Saxcé et Mohammed Hjjaj d'avoir accepté de rapporter mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont pu porter à mes travaux. Je souhaiterais remercier Dieter Weichert de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury. Je tiens aussi à remercier vivement Joseph Pastor et Ghazi Hassen qui ont examiné avec attention ce travail.

Je voudrais ensuite remercier chaleureusement Patrick de Buhan pour avoir dirigé cette thèse, en me guidant avec enthousiasme vers les différentes pistes de travail tout en me laissant une grande autonomie qui m'a permis de m'épanouir durant ces 3 ans. Je le remercie également de la confiance qu'il m'a accordée en m'intégrant au sein de l'équipe pédagogique du cours de Plasticité & Calcul à la Rupture et d'Homogénéisation en Calcul à la Rupture. Cette expérience m'a fait découvrir le goût de l'enseignement, toujours dans le souci de la rigueur scientifique et de la pédagogie.

Je tiens encore à remercier Xavier Céspedes, Mathieu Arquier et toute l'équipe de STRAINS pour avoir suivi avec grand intérêt mon travail ainsi que pour toutes les discussions qui m'ont permis de garder à l'esprit les applications de ces travaux au monde de l'ingénieur.

Je souhaite également remercier Gabriel Peyré, Guillaume Carlier, Vincent Duval, Jean-Marie Mirebeau du CEREMADE de l'Université Paris-Dauphine, Ioan Ionescu de l'Université Paris 13 et Myriam Comte de l'Université Pierre et Marie Curie pour les discussions passionnantes que nous avons pu avoir ensemble sur les aspects mathématiques des problématiques abordées dans cette thèse.

Un grand merci à Duc Toan Pham du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment pour sa collaboration sur les aspects de résistance au feu des panneaux en béton armé qui a contribué à proposer un exemple d'application très intéressant à ce travail.

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe Multi-échelles et du laboratoire Navier en général que j'ai pu rencontrer. Je souhaiterais remercier en particulier Luc, Eric, Ghazi, Denis, Camille et Sébastien pour la bonne ambiance au sein du couloir. Je voudrais également remercier vivement Marie-Françoise et Rachida pour leur aide et disponibilité sans faille. Bien sûr, je n'oublierai pas tous les bons moments que j'ai

pu partager avec Maxime, Maged, François, Thomas, Stijn, LinLin, Yassine et tous les autres membres de l'équipe. Merci à vous tous, ainsi que Mathilde, Alexandre et Camille et tous mes amis, qu'il serait trop long de citer, pour tous les moments de bonne humeur, les sorties sportives ou non...

Enfin, j'aimerais remercier du fond du cœur mes parents ainsi que mes frères et sœurs pour leur confiance en moi et sur qui je peux toujours compter. Je terminerais en remerciant celle qui partage ma vie depuis tant d'années. Merci donc à toi, Marion, pour ton amour et ton soutien qui me permettent d'avancer au quotidien dans la joie et la sérénité.

Résumé

Ce travail tente de développer des outils numériques efficaces pour une approche plus rationnelle et moins empirique du dimensionnement à la ruine des ouvrages de génie civil. Contrairement aux approches traditionnelles reposant sur une combinaison de calculs élastiques, l'adoption de coefficients de sécurité et une vérification locale des sections critiques, la théorie du calcul à la rupture nous semble être un outil prometteur pour une évaluation plus rigoureuse de la sécurité des ouvrages.

Dans cette thèse, nous proposons de mettre en œuvre numériquement les approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture à l'aide d'éléments finis dédiés pour des structures de plaque en flexion et de coque en interaction membrane-flexion. Le problème d'optimisation correspondant est ensuite résolu à l'aide du développement, relativement récent, de solveurs de programmation conique particulièrement efficaces.

Les outils développés sont également étendus au contexte de l'homogénéisation périodique en calcul à la rupture, qui constitue un moyen performant de traiter le cas des structures présentant une forte hétérogénéité de matériaux. Des procédures numériques sont spécifiquement développées afin de déterminer puis d'utiliser dans un calcul de structure des critères de résistance homogènes équivalents.

Enfin, les potentialités de l'approche par le calcul à la rupture sont illustrées sur deux exemples complexes d'ingénierie : l'étude de la stabilité au feu de panneaux en béton armé de grande hauteur ainsi que le calcul de la marquise de la gare d'Austerlitz.

Mots-clés : Calcul à la rupture ; Analyse Limite ; Éléments finis ; Programmation conique ; Plaques en flexion ; Coques ; Homogénéisation périodique

Abstract

This work aims at developing efficient numerical tools for a more rational and less empirical assessment of civil engineering structures yield design. As opposed to traditional methodologies relying on combinations of elastic computations, safety coefficients and local checking of critical members, the yield design theory seems to be a very promising tool for a more rigorous evaluation of structural safety.

Lower bound static and upper bound kinematic approaches of the yield design theory are performed numerically using dedicated finite elements for plates in bending and shells in membrane-bending interaction. Corresponding optimization problems are then solved using very efficient conic programming solvers.

The proposed tools are also extended to the framework of periodic homogenization in yield design, which enables to tackle the case of strong material heterogeneities. Numerical procedures are specifically tailored to compute equivalent homogeneous strength criteria and to use them, in a second step, in a computation at the structural level.

Finally, the potentialities of the yield design approach are illustrated on two complex engineering problems : the stability assessment of high-rise reinforced concrete panels in fire conditions and the computation of the Paris-Austerlitz railway station canopy.

Keywords : Yield design ; Limit Analysis ; Finite elements ; Conic programming ; Plates in bending ; Shells ; Periodic homogenization

Table des matières

Organisation du manuscrit	1
Partie I : Introduction	5
1 La théorie du calcul à la rupture et ses domaines d'application	7
1.1 Les limites des approches traditionnelles du dimensionnement à la ruine des ouvrages	8
1.1.1 Une forte évolution des outils et moyens de calcul, peu suivie par la pratique de l'ingénieur	8
1.1.2 Le calcul à la rupture comme outil pour l'ingénieur	9
1.2 Principe général de l'approche par le calcul à la rupture	9
1.2.1 Données d'un problème de calcul à la rupture	9
1.2.2 Domaine des chargements potentiellement supportables	10
1.2.3 Approche statique par l'intérieur de K	11
1.2.4 Approche cinématique par l'extérieur de K	11
1.3 Quelques exemples d'application du calcul à la rupture	14
1.3.1 Mécanique des sols et géotechnique	14
1.3.2 Structures en maçonnerie	15
1.3.3 Vérification des dalles en béton armé	15
1.3.4 Méthode des bielles et tirants pour les structures en béton armé .	16
1.3.5 Autres domaines	17
1.4 Conclusions	18
2 Approches numériques du calcul à la rupture : verrous et outils	19
2.1 Aspects généraux	20
2.1.1 Formulation numérique	20
2.1.2 Les quatre composantes de la mise en œuvre du calcul à la rupture	22
2.2 Techniques de discrétisation pour le calcul à la rupture	23
2.2.1 Méthodes (semi-)analytiques	23
2.2.2 Méthode des éléments finis	24
2.2.3 Méthodes sans maillage	25
2.2.4 Bilan	26
2.3 Procédures d'optimisation pour le calcul à la rupture	26
2.3.1 Algorithmes à directions de descente	27
2.3.2 Techniques de régularisation	27

2.3.3	Approche par Lagrangien Augmenté	28
2.3.4	Programmation linéaire	29
2.3.5	Programmation non-linéaire	30
2.3.6	Approches par calculs élastiques	32
2.3.7	Bilan	32
2.4	Logiciels de calcul à la rupture	33
2.4.1	TALREN	33
2.4.2	LIMITSTATE	33
2.4.3	OPTUMG2	34
2.4.4	Procédures numériques	35
2.4.5	Développements en cours	35
2.5	Conclusions	36

Partie II : Calcul à la rupture des structures homogènes par éléments finis **37**

3 Éléments finis pour le calcul à la rupture des plaques minces **39**

3.1	Formulation générale du calcul à la rupture des plaques en flexion	40
3.1.1	Modèle de plaque : efforts intérieurs et équations d'équilibre	40
3.1.2	Dualisation par le principe des puissances virtuelles	41
3.1.3	Calcul à la rupture des plaques minces en flexion	43
3.2	État de l'art du calcul à la rupture des plaques minces en flexion	47
3.2.1	Méthode des lignes de rupture	47
3.2.2	Éléments finis pour l'approche cinématique	47
3.2.3	Éléments finis pour l'approche statique	48
3.2.4	Autres méthodes	49
3.3	Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique	50
3.3.1	Discrétisation	50
3.3.2	Formulation du problème d'optimisation	53
3.4	Exemples de validation	55
3.4.1	Plaque carrée obéissant au critère de Johansen	55
3.4.2	Plaque carrée obéissant à un critère de von Mises	57
3.4.3	Influence de la distorsion des éléments	60
3.4.4	Exemple de calcul de plancher de bâtiment	60
3.5	Conclusions et perspectives	64

4 Éléments finis pour le calcul à la rupture des plaques épaisses **65**

4.1	Formulation générale du calcul à la rupture pour les plaques épaisses . .	66
4.1.1	Approche statique	66
4.1.2	Approche cinématique	66
4.1.3	Critères de résistance pour les plaques épaisses dans l'espace (\underline{M}, V)	67
4.2	Mise en œuvre par éléments finis de l'approche statique	72

Table des matières

4.2.1	Équations d'équilibre, de saut et conditions aux limites	72
4.2.2	Écriture du critère de résistance	75
4.2.3	Optimisation	76
4.3	Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique	77
4.3.1	Discrétisation	77
4.3.2	Formulation du problème d'optimisation	78
4.3.3	Commentaires concernant le type d'éléments finis considéré	80
4.4	La problématique du verrouillage en cisaillement	81
4.4.1	Verrouillage des éléments finis formulés en déplacement/vitesse	81
4.4.2	Verrouillage ou non des éléments finis considérés	82
4.4.3	Éléments finis en efforts généralisés pour l'approche statique	83
4.5	Exemples de validation	84
4.5.1	Plaque carrée sous charge uniformément répartie	84
4.5.2	Problème de la plaque en L	88
4.6	Conclusions et perspectives	89
5	Éléments finis pour le calcul à la rupture des coques minces	91
5.1	Cinématique et puissance des efforts intérieurs	92
5.2	Discrétisation et implémentation par éléments finis	93
5.2.1	Repère local	93
5.2.2	Choix des éléments finis	94
5.2.3	Intersection de plusieurs coques	95
5.3	Critères de résistance généralisés en interaction effort membranaire- moment de flexion	95
5.3.1	Critères approchés dans le cas d'un matériau de von Mises	96
5.3.2	Cas général : une approche par changement d'échelle	98
5.3.3	Approximations numériques du critère généralisé	99
5.3.4	Prise en compte d'armatures de renforcement	101
5.3.5	Conclusion	103
5.4	Exemples de validation	104
5.4.1	Ruine d'un portique en forme d'arc semi-circulaire	104
5.4.2	Diagrammes d'interaction d'une poutre caisson	105
5.4.3	Coque cylindrique bi-encastée	110
5.5	Phénomène de verrouillage en membrane	112
5.5.1	Illustration du point de vue de l'approche statique	112
5.5.2	Illustration du point de vue de l'approche cinématique	114
5.6	Conclusions et perspectives	117

Partie III : Homogénéisation numérique en calcul à la rup-

ture pour les structures hétérogènes	119
6 Homogénéisation périodique en calcul à la rupture : application aux plaques hétérogènes périodiques	121
6.1 Homogénéisation périodique en calcul à la rupture	122
6.1.1 Principe de la démarche	122
6.1.2 Travaux antérieurs	124
6.1.3 Difficultés sur le plan numérique	125
6.2 Homogénéisation des plaques minces	126
6.2.1 Problème hétérogène et problème homogène équivalent	127
6.2.2 Modèle de plaque mince de Love-Kirchhoff	128
6.2.3 Espaces des champs statiquement et cinématiquement admissibles et mode de chargement sur la cellule de base	129
6.2.4 Définitions statique et cinématique de G^{hom}	131
6.3 Détermination numérique du critère macroscopique	132
6.3.1 Approche statique par l'intérieur	132
6.3.2 Approche cinématique par l'extérieur	133
6.4 Exemples de calcul de critères macroscopiques	134
6.4.1 Plaque renforcée	134
6.4.2 Plaque perforée	136
6.5 Conclusions et perspectives	139
7 Approximation numérique de critères de résistance	141
7.1 Différentes stratégies d'approximation	142
7.1.1 Linéarisation	142
7.1.2 Tirer parti de la performance des solveurs de programmation conique	142
7.1.3 Une autre stratégie	143
7.2 Algorithme d'approximation par union convexe d'ellipsoïdes	144
7.2.1 Notations et hypothèses de départ	144
7.2.2 Principe général	144
7.2.3 Implémentation	145
7.3 Illustrations	147
7.3.1 Quelques itérations de l'algorithme (cas plan)	147
7.3.2 Exemple d'approximation d'un critère à 3 dimensions	149
7.4 Conclusions et perspectives	151
8 Calcul à la rupture sur une structure homogénéisée	153
8.1 Calcul à la rupture d'une plaque mince homogénéisée	154
8.1.1 Le cas particulier de la méthode des lignes de rupture	154
8.1.2 Démarche générale d'homogénéisation et approximation	156
8.2 Mise en œuvre numérique par éléments finis et programmation conique .	158
8.2.1 Formulation conique pour l'approche statique	158
8.2.2 Formulation conique pour l'approche cinématique	159

Table des matières

8.2.3	Estimations d'erreurs <i>a priori</i>	160
8.3	Exemples d'application	161
8.3.1	Plaque rectangulaire renforcée	161
8.3.2	Plaque circulaire trouée	166
8.4	Conclusions et perspectives	170
Partie IV : Application à des structures complexes		171
9	Stabilité au feu de panneaux en béton armé de grande hauteur	173
9.1	Position du problème et principe d'une démarche de résolution	174
9.1.1	Panneaux de grande hauteur	174
9.1.2	Comportement au feu d'un panneau de grandes dimensions	175
9.1.3	Principe d'une analyse en trois étapes	176
9.2	Détermination de la configuration d'équilibre déformée	177
9.2.1	Géométrie initiale	177
9.2.2	Calculs thermo-élastiques	177
9.3	Détermination du critère de résistance dépendant de la température	178
9.3.1	Dégradation des capacités de résistance	178
9.3.2	Détermination du critère de résistance en efforts généralisés	179
9.4	Calcul à la rupture sur la géométrie déformée	181
9.4.1	Travaux précédents	181
9.4.2	Modélisation par éléments finis de coque	182
9.5	Analyse numérique de la stabilité des panneaux	183
9.5.1	Influence de la largeur du panneau et effet de la mise en température	183
9.5.2	Influence de la hauteur du panneau	191
9.5.3	Prise en compte de joints entre panneaux	192
9.6	Conclusions et perspectives	196
10	Dimensionnement à la rupture de la marquise de la gare d'Austerlitz	197
10.1	La marquise de la gare d'Austerlitz : une structure complexe	198
10.1.1	Présentation de la structure	198
10.1.2	Hypothèses de modélisation	199
10.1.3	Caractéristiques mécaniques des matériaux	200
10.1.4	Description des combinaisons de cas de charge	202
10.2	Homogénéisation de la coque hétérogène	203
10.2.1	Modélisation de la cellule de base	203
10.2.2	Évaluation numérique du critère de résistance macroscopique	205
10.2.3	Approximation du critère	205
10.2.4	Critère de résistance de la coque homogénéisée	208
10.3	Résultats de l'analyse	209
10.3.1	Notion de facteur de sécurité	209
10.3.2	Étude de convergence	209

10.3.3 Facteur de sécurité pour les différentes configurations	212
10.4 Conclusions	214

Conclusions et perspectives 215

A Éléments d’analyse et d’optimisation convexe 223

A.1 Analyse convexe	223
A.1.1 Ensembles et fonctions convexes	223
A.1.2 Opérations préservant la convexité	224
A.1.3 Dualité	225
A.1.4 Propriétés et exemples de fonctions d’appui	226
A.2 Optimisation convexe et conique	227
A.2.1 Formulation générale	227
A.2.2 Dualité	228
A.2.3 Programmation linéaire, quadratique et conique du second ordre .	228
A.2.4 Programmation conique du second ordre	229
A.2.5 Programmation semi-définie positive	230

B Procédure de choix des directions de calcul pour la détermination des critères de résistance macroscopiques 231

B.1 Principe de la procédure	231
B.1.1 Cas de l’approche statique par l’intérieur	231
B.1.2 Cas de l’approche cinématique par l’extérieur	235
B.1.3 Extensions	235

Bibliographie 237

Organisation du manuscrit

Les structures de génie civil deviennent de plus en plus complexes tant dans l'utilisation de matériaux fortement hétérogènes (béton armé, béton fibré, planchers mixtes acier/béton...) qu'à travers l'adoption de géométries courbes dans l'espace. L'outil numérique devient alors un élément indispensable à l'étude de la sécurité à la ruine de telles structures. Néanmoins, une approche rationnelle du dimensionnement des ouvrages à la rupture fait encore défaut à l'heure actuelle, la majorité des règles de dimensionnement reposant sur une combinaison de calculs élastiques, l'adoption de coefficients de sécurité et une vérification locale des sections critiques. Ce travail se propose de développer des outils numériques efficaces permettant d'estimer la charge de ruine des structures du génie civil en se fondant sur des bases théoriques (mécaniques et mathématiques) rigoureuses, à travers l'utilisation de la *théorie du calcul à la rupture*.

La **Partie I** est consacrée à l'introduction des enjeux de cette thèse tout en présentant les principes de la théorie du calcul à la rupture. Après une présentation générale de ses aspects théoriques, le chapitre 1 situe, plus en détails, les exemples d'application actuels du calcul à la rupture dans le domaine du génie civil. Les progrès encore timides de la diffusion du calcul à la rupture auprès des professionnels du génie civil peuvent, en partie, s'expliquer par l'existence de difficultés du point de vue de sa mise en œuvre pratique et, notamment, numérique. Le chapitre 2 est consacré à la présentation des spécificités de la mise en œuvre numérique du calcul à la rupture et propose d'identifier les verrous scientifiques à l'origine de ces difficultés, mais également les outils actuellement disponibles permettant de lever ces verrous.

Jusqu'à présent, les développements numériques du calcul à la rupture ont été réalisés essentiellement dans le cadre de la mécanique des milieux continus bidimensionnels ou tridimensionnels. Bien que la démarche du calcul à la rupture s'étende naturellement à des modélisations de type *milieux continus généralisés* (poutres, arcs, plaques, coques, etc.), les développements numériques tirant entièrement parti des possibilités offertes par le calcul à la rupture dans ce contexte sont relativement rares. La **Partie II** propose ainsi une contribution dans ce sens, à travers le développement d'éléments finis dédiés à la mise en œuvre numérique du calcul à la rupture pour différents modèles mécaniques.

Plus particulièrement, le chapitre 3 traite du cas des plaques minces en flexion, se concentrant uniquement sur la mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur. Contrairement à de nombreux travaux de la littérature, nous proposons d'utiliser des éléments finis combinant à la fois taux de courbure virtuelle et discontinuité de vitesse virtuelle de rotation dans le calcul de la puissance résistante maximale.

Le chapitre 4 s'intéresse au cas des plaques épaisses pour lesquelles la résistance à l'effort tranchant n'est plus supposée être infinie. À notre connaissance, nous proposons pour la première fois, une mise en œuvre par éléments finis de l'approche statique par l'intérieur pour ce type de structure. Pour l'approche cinématique par l'extérieur, nous proposons également des éléments finis présentant, *a priori*, des discontinuités du champ de vitesse et du champ de rotation. Le phénomène de verrouillage en cisaillement dans le contexte du calcul à la rupture est examiné en comparant le cas des éléments finis continus et discontinus.

Enfin, le chapitre 5 généralise le travail réalisé au chapitre précédent au cas des structures de coque. Plus précisément, la géométrie est discrétisée en facettes triangulaires planes et nous superposons un élément fini de membrane à un élément fini de plaque en flexion pour l'approche statique comme pour l'approche cinématique. Nous nous concentrons également sur la formulation de critères de résistance en interaction effort membranaire-moment de flexion. La problématique du verrouillage en membrane pour les coques très minces est également rapidement évoquée.

Le développement de nouvelles techniques de construction fait que de nombreux ouvrages sont aujourd'hui constitués de matériaux hétérogènes ou composites : construction mixte acier-béton, sols renforcés, polymères renforcés de fibres, etc. Dans le cas particulier d'une variation spatiale périodique des hétérogénéités matérielles au sein d'une structure, la théorie de l'*homogénéisation périodique* constitue un moyen performant de simplifier les calculs en introduisant le concept de structure homogène équivalente. Largement développée dans le cadre d'un comportement élastique, la théorie de l'homogénéisation s'étend également au contexte du calcul à la rupture. La **Partie III** s'intéresse donc à la mise en œuvre numérique de l'homogénéisation en calcul à la rupture, dans une démarche allant du matériau à l'ouvrage. Cette partie s'inscrit dans le prolongement d'un travail effectué sur le calcul à la rupture des structures de poutres composites [Bleyer et de Buhan, 2013d].

Le chapitre 6 est dédié à la détermination numérique de critères de résistance homogènes équivalents, première étape de la démarche d'homogénéisation. La formulation du problème auxiliaire de calcul à la rupture conduisant à la définition du critère de résistance macroscopique est illustrée dans le contexte des plaques minces hétérogènes. La mise en œuvre numérique par éléments finis du calcul à la rupture des plaques minces en flexion est alors étendue à la résolution du problème auxiliaire.

Afin de pouvoir utiliser les critères de résistance déterminés numériquement dans un calcul à l'échelle de la structure homogénéisée, il est nécessaire de pouvoir en donner une expression analytique permettant de formuler le problème d'optimisation correspondant. Le chapitre 7 propose ainsi un algorithme réalisant une approximation du critère de résistance par une union convexe d'ellipsoïdes.

Le chapitre 8 aborde la problématique du calcul à l'échelle de la structure homogénéisée à l'aide de critères de résistance approchés. Nous verrons, en particulier, que l'approximation par union convexe d'ellipsoïdes est tout à fait adaptée à une formulation du problème d'optimisation comme un problème de programmation conique. Quelques

Organisation du manuscrit

exemples numériques serviront à illustrer le principe général ainsi que le degré de précision de la démarche combinant homogénéisation et approximation.

Enfin, la **Partie IV** illustre les potentialités de l'approche du calcul à la rupture ainsi que l'efficacité des outils numériques développés au cours de la thèse sur deux exemples complexes d'ingénierie.

Le premier exemple, étudié au chapitre 9, traite de la stabilité au feu de panneaux en béton armé de grande hauteur. La stabilité de ce type de structure est pilotée, d'une part par une déformation d'origine thermique conduisant à une configuration géométrique courbe, d'autre part par la dégradation des capacités de résistance des matériaux due à la présence d'un gradient thermique dans l'épaisseur du panneau. Les éléments finis de coque développés au cours de la thèse servent alors à évaluer la stabilité de ces panneaux à partir de la connaissance de leur configuration géométrique déformée.

Dans le chapitre 10, nous proposons une vérification, par le calcul à la rupture, d'un ouvrage réel : la marquise de la gare d'Austerlitz. Cette coque courbe en béton armé, perforée par un réseau périodique de pavés de verre, est relativement complexe à étudier du fait de la forte hétérogénéité introduite par les pavés de verre. Une démarche d'homogénéisation périodique est alors proposée afin d'évaluer la sécurité de la structure vis-à-vis de la ruine pour différents types de chargement, typiques de ceux utilisés pour le dimensionnement de la structure aux États Limites Ultimes.

* *

*

Première partie

Introduction

Chapitre 1

La théorie du calcul à la rupture et ses domaines d'application

Résumé : *L'objet de ce chapitre est de présenter, de façon générale, la théorie du calcul à la rupture. Les potentialités de cette approche sont évoquées dans la contexte de l'ingénierie du génie civil à travers quelques exemples d'application pour le dimensionnement des ouvrages.*

Sommaire

1.1	Les limites des approches traditionnelles du dimensionnement à la ruine des ouvrages	8
1.1.1	Une forte évolution des outils et moyens de calcul, peu suivie par la pratique de l'ingénieur	8
1.1.2	Le calcul à la rupture comme outil pour l'ingénieur	9
1.2	Principe général de l'approche par le calcul à la rupture	9
1.2.1	Données d'un problème de calcul à la rupture	9
1.2.2	Domaine des chargements potentiellement supportables	10
1.2.3	Approche statique par l'intérieur de K	11
1.2.4	Approche cinématique par l'extérieur de K	11
1.3	Quelques exemples d'application du calcul à la rupture	14
1.3.1	Mécanique des sols et géotechnique	14
1.3.2	Structures en maçonnerie	15
1.3.3	Vérification des dalles en béton armé	15
1.3.4	Méthode des bielles et tirants pour les structures en béton armé	16
1.3.5	Autres domaines	17
1.4	Conclusions	18

1.1 Les limites des approches traditionnelles du dimensionnement à la ruine des ouvrages

1.1.1 Une forte évolution des outils et moyens de calcul, peu suivie par la pratique de l'ingénieur

Les méthodes de dimensionnement des ouvrages de génie civil ont subi, au cours de ces dernières années, une évolution remarquable du fait du développement des capacités de calcul numérique. Les logiciels de calcul de structures, fondés sur des modèles de barres ou de poutres en flexion, se sont progressivement enrichis de nouvelles fonctionnalités telles que les analyses dynamiques sous séisme, les calculs d'instabilité géométrique, etc. Le développement de logiciels par éléments finis de coque ou volumiques permet à présent de traiter des structures de géométrie beaucoup plus complexe, faisant de moins en moins appel au sens mécanique de l'ingénieur.

Il est frappant de constater que la pratique du dimensionnement des ouvrages par l'ingénieur fait appel, en très grande majorité, uniquement à des calculs en régime élastique. Si les limites de ce type de calcul pour décrire le comportement d'un ouvrage aux *États Limites Ultimes* (ELU) sont évidentes, force est de constater que les analyses incluant des non-linéarités matérielles (comportement élastoplastique, endommageable, etc.) restent encore hors de portée à l'heure actuelle pour des structures complexes. En effet, ces modèles peuvent être relativement lourds à mettre en œuvre numériquement et la ruine de la structure est, en général, détectée à travers la non-convergence de l'algorithme de résolution.

D'autre part, les normes réglementaires de dimensionnement des ouvrages nécessitent d'étudier un grand nombre de combinaisons de cas de charge différentes, nécessitant alors autant de calculs non-linéaires.

La prise en compte de la résistance des matériaux dans le dimensionnement des ouvrages se fait alors par l'intermédiaire d'une procédure *a posteriori* consistant à vérifier la résistance locale d'une section sous l'action d'un chargement macroscopique déterminé par un calcul élastique global à l'échelle de la structure. Cette démarche, fortement ancrée dans la pratique de l'ingénieur, peut poser de sérieux problèmes dans certains cas : dimensionnement excessif des aciers de renfort empêchant une bonne mise en œuvre du béton sur le chantier, incapacité à identifier les zones critiques de la structure, etc. S'il est globalement admis que ce type d'approche est largement sécuritaire en général, il est impossible d'évaluer rationnellement la marge de sécurité dont dispose l'ingénieur qui dimensionne la structure. Dans le contexte environnemental actuel, il pourrait alors être intéressant de disposer de cette information afin de concevoir des structures plus légères, moins consommatrices en matériaux de construction et dont la sécurité est mieux maîtrisée.

1.2. Principe général de l'approche par le calcul à la rupture

1.1.2 Le calcul à la rupture comme outil pour l'ingénieur

Le développement de méthodes numériques, plus simples d'utilisation que des calculs élastoplastiques et qui permettent une analyse rationnelle de la ruine des structures, est donc un enjeu majeur pour le dimensionnement aux ELU. L'ambition de cette thèse est de développer de telles méthodes fondées sur la *théorie du calcul à la rupture* dont l'objet consiste à déterminer la charge de ruine d'une structure à partir de l'analyse des conditions assurant la compatibilité entre l'*équilibre de la structure* et la vérification locale d'un *critère de résistance* en tout point de la structure. En particulier, il s'agit d'une méthode *directe* qui s'affranchit d'un calcul pas-à-pas le long d'un trajet de chargement jusqu'à la ruine, évitant ainsi les difficultés liées à ce type de calcul.

Le caractère rigoureux des fondements théoriques du calcul à la rupture ainsi que la simplicité de la mise en œuvre de ses deux approches (statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur) permettent, non seulement d'obtenir un encadrement de la charge ultime par une borne inférieure et supérieure, mais fournissent également des informations précieuses pour l'ingénieur sur le comportement à la ruine de la structure : zones les plus fortement sollicitées, représentation du mécanisme de ruine, etc.

1.2 Principe général de l'approche par le calcul à la rupture

Nous rappelons dans cette section le principe général du raisonnement fondé sur le calcul à la rupture : voir entre autres [Salençon, 1983, de Buhan, 2007, Salençon, 2013]. Puisque la suite de ce travail se concentre essentiellement sur des modèles de milieux continus généralisés (plaques, coques,...), nous adopterons la notation symbolique Σ pour désigner l'ensemble des efforts intérieurs d'un modèle mécanique quelconque. Σ peut donc désigner un tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ pour une modélisation de type milieu continu 3D, un moment de flexion M pour des structures de poutres planes en flexion simple, un tenseur des efforts membranaires $\underline{\underline{N}}$ ainsi qu'un tenseur des moments de flexion $\underline{\underline{M}}$ pour une coque...

1.2.1 Données d'un problème de calcul à la rupture

Il convient, en premier lieu, de définir la *géométrie* du système mécanique occupant un domaine Ω de bord $\partial\Omega$. Une des hypothèses d'utilisation du calcul à la rupture est celle des *petites perturbations*, signifiant que les changements de géométrie sont négligés, Ω désignant aussi bien la configuration géométrique initiale qu'actuelle du système étudié.

Nous supposons que le système est soumis à un *mode de chargement à n paramètres*, représenté par un vecteur $\underline{Q} = (Q_i, i = 1, \dots, n)$. Ces données relatives au chargement proviennent en général de forces volumiques (pesanteur par exemple) ou d'actions de contact appliquées au bord de la structure.

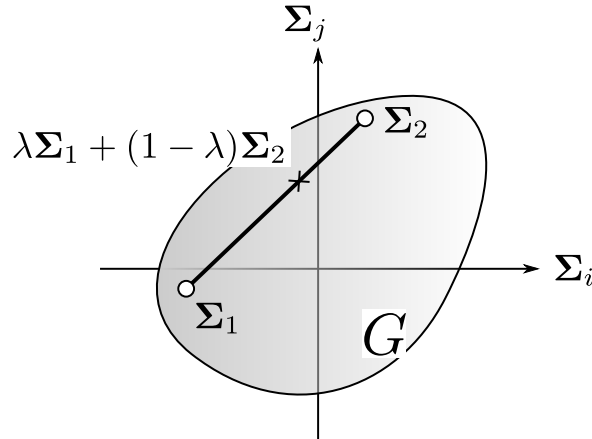


FIGURE 1.1 – Domaine de résistance convexe G dans l'espace des efforts intérieurs généralisés

Une donnée essentielle pour mettre en œuvre la démarche de calcul à la rupture est relative au *critère de résistance* défini en tout point $\underline{x} \in \Omega$. Ce critère de résistance est, en général, décrit via le domaine de résistance $G(\underline{x})$ dans l'espace des efforts intérieurs Σ (Figure 1.1). Ainsi, un état d'efforts intérieurs $\Sigma \in G$ sera dit *admissible au sens du critère de résistance*, le cas où $\Sigma \notin G$ étant physiquement impossible.

Le domaine de résistance $G(\underline{x})$ décrivant les capacités de résistance locales du matériau constitutif possède généralement les deux propriétés suivantes :

- il contient l'origine *i.e.* le matériau résiste à l'état de sollicitation nul :

$$\Sigma = \mathbf{0} \in G(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1.1)$$

- c'est un ensemble *convexe* :

$$\forall \Sigma_1, \Sigma_2 \in G(\underline{x}) \Rightarrow \lambda \Sigma_1 + (1 - \lambda) \Sigma_2 \in G(\underline{x}), \quad \forall \lambda \in [0; 1], \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1.2)$$

1.2.2 Domaine des chargements potentiellement supportables

Le vocable « *analyse limite*¹ », en général mieux connu que celui de « *calcul à la rupture*² », fait référence au même type de démarche, restreinte au cas particulier des matériaux élastiques, parfaitement-plastiques obéissant au principe du travail plastique maximal [Hill, 1950]. Dans ce cadre bien précis, l'analyse limite permet de déterminer, de façon certaine, les *chargements limites* de la structure. Si de telles hypothèses sur le comportement du matériau ne peuvent être retenues, le calcul à la rupture fournit une réponse à la stabilité de la structure à travers la détermination du domaine K des *chargements potentiellement supportables*. L'adverbe *potentiellement* fait ici référence

1. *limit analysis* en anglais
2. *yield design* en anglais

1.2. Principe général de l'approche par le calcul à la rupture

au fait qu'il ne s'agit que d'une présomption de stabilité (hormis dans les conditions particulières de l'analyse limite où il s'agit alors d'une certitude), s'appuyant uniquement sur une condition nécessaire. En particulier, il n'est pas assuré que les chargements extrêmes ainsi déterminés puissent être effectivement atteints le long d'un trajet de chargement [de Buhan, 2007]. Il est en revanche certain que les chargements situés à l'extérieur de K ne peuvent être supportés.

Ce domaine est défini comme l'ensemble des chargements \underline{Q} tel qu'il soit possible de mettre en évidence un champ d'efforts intérieurs $\underline{\Sigma}(\underline{x})$ statiquement admissible (S.A.) avec \underline{Q} et vérifiant, en tout point de Ω , le critère de résistance, soit :

$$\underline{Q} \in K \iff \begin{cases} \exists \underline{\Sigma}(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} & \text{(condition d'équilibre)} \\ \underline{\Sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega & \text{(condition de résistance)} \end{cases} \quad (1.3)$$

où les conditions pour qu'un champ d'efforts intérieurs $\underline{\Sigma}(\underline{x})$ soit statiquement admissible regroupent les *équations d'équilibre local* (avec un chargement volumique éventuellement), les *équations de continuité* des efforts intérieurs ainsi que les *conditions aux limites en efforts* du problème.

La condition $\underline{Q} \in K$ représente donc une condition *nécessaire* de stabilité de la structure au sens du calcul à la rupture. Notons que, puisque $\underline{\Sigma} = \underline{0} \in G$, $\underline{Q} = \underline{0} \in K$. De plus, puisque G est un domaine convexe et par linéarité des conditions définissant l'équilibre, K est également un ensemble convexe dans l'espace des paramètres de chargement.

1.2.3 Approche statique par l'intérieur de K

L'approche *statique par l'intérieur* du domaine des chargements potentiellement supportables revient à mettre en œuvre, de façon directe, la définition (1.3), c'est-à-dire à exhiber, par tout moyen disponible, un champ d'efforts intérieurs vérifiant les propriétés requises. La valeur du chargement \underline{Q} équilibrée par ce champ appartiendra alors au domaine K . Construisant de cette façon plusieurs chargements potentiellement supportables, l'enveloppe convexe, notée K^{stat} , de tous ces chargements sera alors incluse dans K par convexité : $K^{stat} \subseteq K$, constituant ainsi une approche par l'intérieur du domaine K (Figure 1.2). Le long d'un trajet de chargement donné (radial par exemple), la valeur maximale obtenue par une telle approche représente une *borne inférieure* du chargement extrême de la structure le long de ce trajet de chargement.

1.2.4 Approche cinématique par l'extérieur de K

L'approche *cinématique par l'extérieur* du domaine des chargements potentiellement supportables consiste à identifier des chargements n'appartenant pas au domaine K .

1.2.4.1 Principe des puissances virtuelles

Soit $\widehat{\underline{U}}$ un champ de *vitesse généralisée*³ *virtuelle* qui n'est astreint à aucune des limites imposées aux mouvements réels (liaisons cinématiques par exemple). En par-

3. champ de vitesse pour le milieu continu 3D, vitesse de flèche pour les poutres en flexion, etc.

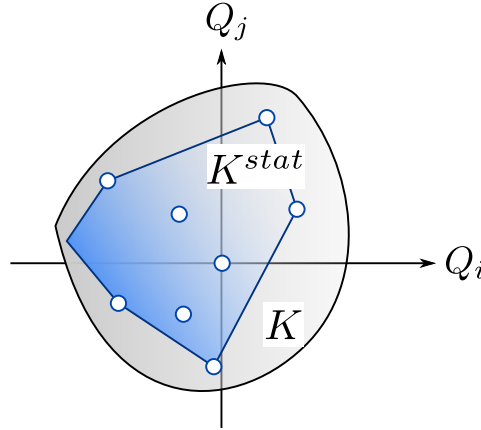


FIGURE 1.2 – Approche statique par l'intérieur du domaine des chargement potentiellement supportables

ticulier, ce champ peut présenter des discontinuités $[[\widehat{\mathbf{U}}]]$ à la traversée de surfaces de discontinuité notées Γ . En supposant que ce champ soit cinématiquement admissible (C.A.) avec les conditions aux limites en vitesse sur le bord $\partial\Omega$, on peut introduire un vecteur des *paramètres cinématiques généralisés* $\widehat{\underline{q}}$, associé par dualité au vecteur des paramètres de chargement \underline{Q} , de telle sorte que la puissance virtuelle des efforts extérieurs développée dans ce champ de vitesse s'écrit :

$$P_{ext}(\widehat{\mathbf{U}}) = \underline{Q} \cdot \widehat{\underline{q}} \quad (1.4)$$

Le *principe des puissances virtuelles* permet de reformuler, de manière complètement équivalente, les équations d'équilibre de la structure sous forme dualisée en écrivant l'égalité de la puissance virtuelle des efforts extérieurs $P_{ext}(\widehat{\mathbf{U}})$ et de la puissance virtuelle de déformation $P_d(\widehat{\mathbf{U}})$, soit ici :

$$\Sigma \text{ S.A. avec } \underline{Q} \iff \forall \widehat{\mathbf{U}} \text{ C.A. avec } \widehat{\underline{q}}, \quad (1.5)$$

$$\underline{Q} \cdot \widehat{\underline{q}} = P_d(\widehat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}]) d\Omega + \int_{\Gamma} ((\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot [[\widehat{\mathbf{U}}]]) dS$$

où $\mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}]$ représente le taux de déformation virtuelle généralisée associé par dualité aux efforts intérieurs généralisés et $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$ correspond au vecteur contrainte généralisé des efforts intérieurs sur la surface Γ .

1.2.4.2 Puissance résistante maximale

À partir de l'expression (1.5) du principe des puissances virtuelles, on introduit la *puissance résistante maximale*, valeur maximale de la puissance de déformation compte tenu du critère de résistance du matériau en tout point. Cette dernière a pour expression :

$$P_{rm}(\widehat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega} \pi(\mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}]; \underline{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; [[\widehat{\mathbf{U}}]]) dS \quad (1.6)$$

1.2. Principe général de l'approche par le calcul à la rupture

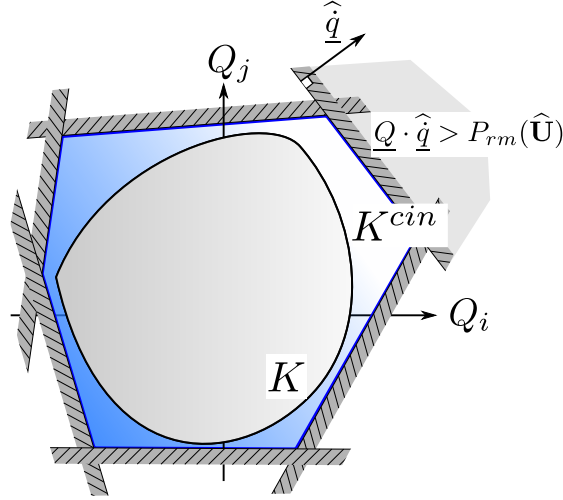


FIGURE 1.3 – Approche cinématique par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables

où :

$$\pi(\mathbf{D}; \underline{x}) = \sup_{\Sigma \in G(\underline{x})} \{\Sigma \cdot \mathbf{D}\} \quad \text{et} \quad \pi(\underline{n}; \widehat{\mathbf{V}}) = \sup_{\Sigma \in G(\underline{x})} \{(\Sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \widehat{\mathbf{V}}\} \quad (1.7)$$

sont les *fonctions d'appui* du domaine de résistance G^4 .

Il découle immédiatement de (1.3),(1.5),(1.6),(1.7) que :

$$\underline{Q} \in K \iff \forall \widehat{\mathbf{U}} \text{ C.A. avec } \widehat{q}, \quad \underline{Q} \cdot \widehat{q} \leq P_{rm}(\widehat{\mathbf{U}}) \quad (1.8)$$

Cette dernière inégalité peut s'interpréter géométriquement de la façon suivante : pour un champ de vitesse virtuelle $\widehat{\mathbf{U}}$ donné, le domaine K est inclus dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par l'hyperplan d'équation $\underline{Q} \cdot \widehat{q} = P_{rm}(\widehat{\mathbf{U}})$.

En considérant différents champs de vitesse virtuelle (mécanismes de ruine), on obtient un domaine convexe K^{cin} correspondant à l'intersection d'autant de demi-espaces et qui contient K . On obtient donc une approche par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables : $K \subseteq K^{cin}$ (Figure 1.3). Pour une direction de chargement donnée, la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture conduit donc à la détermination d'une *borne supérieure* du chargement extrême de la structure.

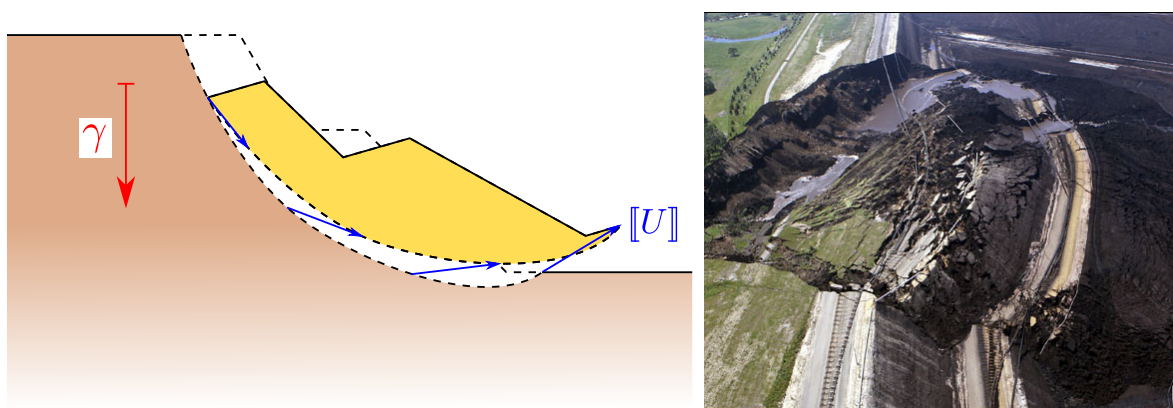
4. Dans le cas où le critère de résistance est *non borné* dans certaines directions, ces fonctions d'appui peuvent prendre des valeurs infinies. Il apparaît alors une ou plusieurs conditions sur le taux de déformation virtuelle ou sur la discontinuité de vitesse pour que ces fonctions prennent une valeur finie. Ces conditions sont appelées *conditions de pertinence* [Salençon, 1983]. D'autres propriétés des fonctions d'appui sont données en Annexe A.

En pratique, l'analyse de la ruine d'une structure au sens du calcul à la rupture s'effectue en mettant en œuvre l'approche statique par l'intérieur ainsi que l'approche cinématique par l'extérieur afin d'obtenir un *encadrement* de la frontière du domaine des chargements potentiellement supportables K .

1.3 Quelques exemples d'application du calcul à la rupture

Nous évoquons, dans cette section, quelques exemples d'application de l'approche par le calcul à la rupture dans le domaine du génie civil.

1.3.1 Mécanique des sols et géotechnique



(a) Approche cinématique à l'aide d'un mécanisme par bloc en rotation (b) Effondrement d'une mine de charbon à Yallourn, Australie (source : American Geophysical Union)

FIGURE 1.4 – Problèmes de stabilité de talus

La mécanique des sols est un des principaux domaines dans lequel l'approche par le calcul à la rupture a permis d'effectuer d'importants progrès dans le dimensionnement des ouvrages (talus, remblais, fondations, etc.). C'est d'ailleurs Coulomb qui a jeté les bases du raisonnement de calcul à la rupture dans le cadre d'un problème de géotechnique [Coulomb, 1773]. L'intérêt porté par les mécaniciens des sols à ce type d'approche est certainement lié à la difficulté de caractériser, de façon satisfaisante, le comportement mécanique des sols (état initial, loi de comportement, etc.). Le calcul à la rupture offre l'avantage de ne nécessiter qu'une connaissance du critère de résistance du matériau, relativement facile à évaluer expérimentalement, et permet donc d'apporter une première réponse quant à la stabilité d'un ouvrage sans avoir à décrire son évolution le long d'un trajet de chargement.

La mise en œuvre analytique des approches statique et cinématique a permis d'obtenir des solutions analytiques exactes dans certains cas (capacité portante d'un sol cohérent [Prandtl, 1920], coefficients de poussée-butée) ou des encadrements satisfaisants

1.3. Quelques exemples d'application du calcul à la rupture

de la charge ultime. Ainsi, l'utilisation de mécanismes de ruine par blocs séparés par des surfaces de glissement fait actuellement partie de la pratique de l'ingénieur dans le dimensionnement des ouvrages de géotechnique (Figure 1.4).

Un autre intérêt majeur du calcul à la rupture dans ce domaine concerne le fait qu'il est relativement facile de prendre en compte la présence de renforcements (clous, pieux, palplanches) ou de joints (roches fracturées), même pour des approches analytiques.

1.3.2 Structures en maçonnerie

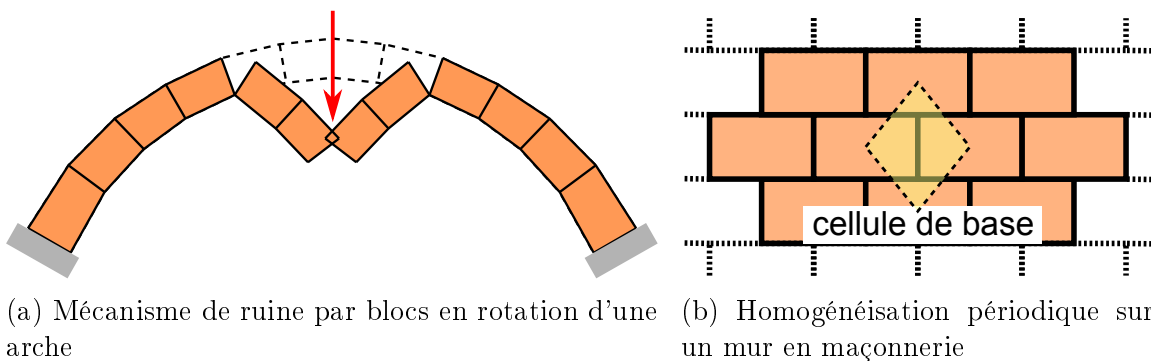


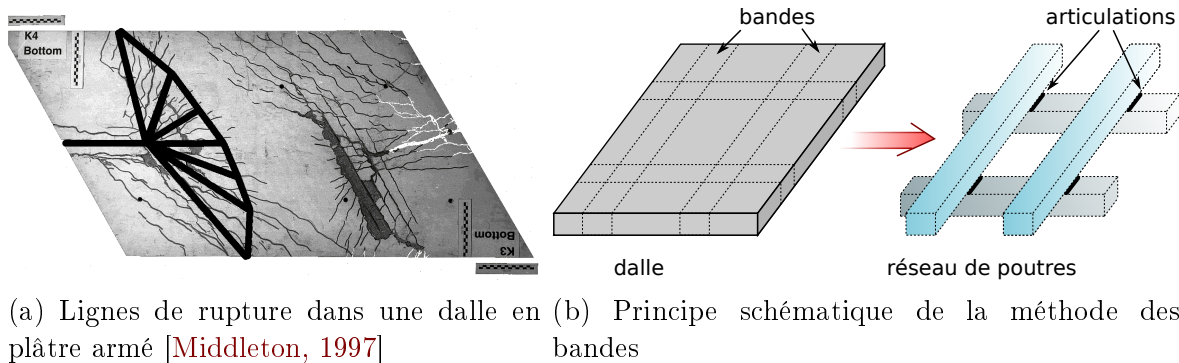
FIGURE 1.5 – Exemples d'application du calcul à la rupture sur les structures maçonnées

Le calcul à la rupture a également été appliqué au calcul de stabilité des arcs et voûtes en maçonnerie. Les premières approches ont, par exemple, consisté à discrétiser l'arc en voussoirs infiniment résistants, séparés par des joints sans résistance à la traction [Heyman, 1966]. La mise en œuvre des approches statique et cinématique est alors relativement simple et permet de trouver les lignes de pression optimales ainsi que les mécanismes de ruine mettant en jeu des blocs en rotation (Figure 1.5a).

Le développement de cette approche dans le domaine de la maçonnerie a permis de traiter des cas plus complexes tels que des dômes, des bâtiments ou des ponts en maçonnerie. De plus, l'approche par homogénéisation périodique a également permis de prendre en compte l'effet de joints en ciment par exemple en résolvant de manière analytique un problème de calcul à la rupture formulé sur le motif (cellule de base) du milieu périodique (Figure 1.5b). Un critère de résistance macroscopique du milieu maçonné brique + joints peut ainsi être déterminé de manière analytique [de Buhan et de Felice, 1997, Sab, 2003, Milani *et al.*, 2006].

1.3.3 Vérification des dalles en béton armé

La vérification des dalles en béton armé par la méthode des « *lignes de rupture* » [Johansen, 1962] correspond en réalité à la mise en œuvre d'une approche cinématique pour les plaques en flexion à l'aide de mécanismes constitués uniquement de blocs rigides en rotation (Figure 1.6a). Les lignes de rupture correspondent aux lignes de discontinuité de rotation de ces différents blocs, généralisant la notion de rotule plastique dans le cas des structures de poutres en flexion.



(a) Lignes de rupture dans une dalle en plâtre armé [Middleton, 1997] (b) Principe schématique de la méthode des bandes

FIGURE 1.6 – Exemples d'application du calcul à la rupture sur les dalles en flexion

La simplicité des mécanismes mis en jeu permet alors d'effectuer les calculs à la main, l'art de l'ingénieur résidant dans la capacité à identifier la position des lignes de rupture conduisant aux mécanismes de ruine les plus critiques. Bien qu'il s'agisse uniquement d'une approche cinématique par l'extérieur, ne se situant donc pas du côté de la sécurité et pouvant amener à surestimer la capacité de résistance de la dalle, cette méthode a été largement diffusée dans la pratique de l'ingénieur. Nous reviendrons plus en détails sur cette méthode au chapitre 3.

Mentionnons également la « *méthode des bandes* » [Hillerborg, 1996] qui constitue une approche statique par l'intérieur permettant de générer des champs de moments de flexion en « découpant » la dalle en bandes que l'on modélise ensuite comme des poutres en flexion (Figure 1.6b). Bien entendu, cette méthode ne permet pas de prendre en compte l'effet du moment de torsion entre les différentes bandes.

1.3.4 Méthode des bielles et tirants pour les structures en béton armé

L'idée de modéliser le comportement mécanique d'une poutre en béton armé par un treillis constitué d'éléments en traction représentant l'acier et d'éléments en compression représentant le béton [Ritter, 1899, Mörsch, 1912] a permis de faire d'importants progrès dans le dimensionnement des structures simples (Figure 1.7a). L'extension de ce type de raisonnement à des structures plus complexes a donné naissance à la « *méthode des bielles et tirants* » [Schlaich *et al.*, 1987]. Cette méthode est définie de la façon suivante selon l'Eurocode 2 [EN 1992-1-1, 2004] :

« La modélisation par bielles et tirants consiste à définir des bielles, qui représentent des zones où transitent les contraintes de compression, des tirants, qui représentent les armatures, et des nœuds, qui assurent leur liaison. Il convient de déterminer les efforts dans ces éléments de telle sorte qu'à l'état-limite ultime, ils continuent à équilibrer les charges appliquées. »

Cette approche s'apparente donc à la mise en œuvre d'une approche statique par l'intérieur à l'aide de champs de contraintes simples, uniaxiaux dans les bielles et les tirants et multiaxiaux au niveau des nœuds, au niveau desquels le critère de résistance doit être

1.3. Quelques exemples d'application du calcul à la rupture

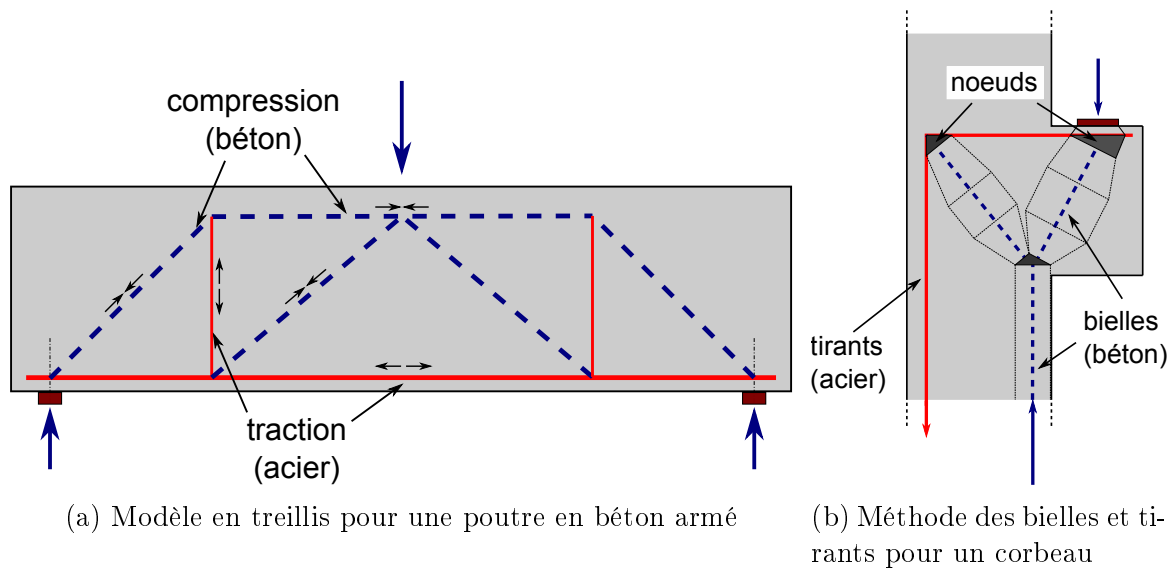


FIGURE 1.7 – Méthode de dimensionnement des structures en béton armé

vérifié (Figure 1.7b).

L'Eurocode 2 précise que cette analogie par treillis de poutres peut être utilisée pour la vérification des zones de la structure ayant un comportement de poutre en flexion de Bernoulli (dites *régions sans discontinuités* ou régions de *type B*), tandis que la méthode des bielles et tirants reste nécessaire pour la vérification de zones plus complexes telles qu'au niveau des appuis, d'efforts concentrés, de discontinuités géométriques, etc. (dites *régions de discontinuités* ou régions de *type D*).

La recherche « à la main » des schémas de bielles et tirants optimaux reste toutefois délicate (surtout dans le cas 3D) et fait appel à l'art de l'ingénieur pour identifier le cheminement des charges. Ce type de compétences étant certainement en train de disparaître petit à petit, l'Eurocode 2 propose également d'effectuer un calcul par éléments finis en élasticité linéaire avec un matériau homogène afin de déterminer la distribution et les directions principales des contraintes, permettant d'identifier un tel cheminement.

1.3.5 Autres domaines

On peut également mentionner une extension importante des approches statique et cinématique au cas des chargements cycliques sous la forme des théorèmes d'adaptation de Melan [Melan, 1936] et Koiter [Koiter, 1960], appliqués en général à l'étude de la fatigue des matériaux et des structures métalliques.

Dans le domaine du génie mécanique, les approches par le calcul à la rupture ont également été appliquées au problème du formage des métaux [Avitzur, 1980] (emboutissage, laminage, moulage, etc.), problématique complexe dans laquelle les changements de géométrie jouent un rôle important.

1.4 Conclusions

Malgré l'attrait potentiel qu'offre l'approche par le calcul à la rupture, on constate que ce type de démarche reste relativement peu diffusé dans le monde du génie civil, se limitant à des domaines particuliers, tels que ceux évoqués précédemment.

Plusieurs aspects peuvent expliquer, selon nous, ce manque de diffusion :

- le premier aspect est relatif à la quasi-absence de ce type d'approche dans la formation d'ingénieur. En effet, il existe, à l'heure actuelle, très peu de cours traitant de ce sujet en France et à l'étranger. De plus, la détermination des charges extrêmes d'une structure par des méthodes directes est, en général, traité au sein d'un cours de plasticité (analyse limite), cours qui, bien souvent, se concentre uniquement sur les aspects locaux du comportement, laissant de côté les aspects relatifs au calcul de structures.
- le deuxième élément explicatif concerne le contexte réglementaire des Eurocodes. La normalisation propose, à l'heure actuelle, des démarches relativement simples (calculs élastiques et vérification locale) qui incitent très peu les professionnels à explorer d'autres démarches innovantes pour la vérification des structures aux ELU. Ainsi, l'absence de dynamique réelle d'innovation dans le monde du génie civil et le faible spectre de diffusion dans le monde de l'enseignement contribuent aux (trop) timides progrès des démarches innovantes du dimensionnement des ouvrages.
- le dernier point est relatif aux verrous existant sur le plan numérique et qui freinent la diffusion de logiciels dédiés dans le domaine du génie civil. En effet, il est nécessaire de pouvoir disposer d'outils numériques efficaces pour pouvoir prétendre à une diffusion auprès des professionnels. Comme nous le verrons dans la suite de ce travail, la résolution numérique d'un problème de calcul à la rupture n'est pas chose aisée et il est essentiel de pouvoir prendre en compte des aspects courants de la pratique de l'ingénieur tels que l'hétérogénéité des matériaux constitutifs ou encore l'interaction entre efforts généralisés (effort membranaire et moment de flexion par exemple).

L'objectif majeur de cette thèse est de répondre en partie au troisième aspect lié aux difficultés sur le plan numérique. À cet effet, le chapitre suivant s'intéressera plus en détails à ces verrous d'ordre numérique et effectuera un état des lieux des travaux de recherche dans ce domaine, tout en présentant les outils qui nous serviront tout au long de ce travail.

* *
*

Chapitre 2

Approches numériques du calcul à la rupture : verrous et outils

Résumé : *Ce chapitre présente les aspects numériques liés à la mise en œuvre du calcul à la rupture, identifiant ainsi l'origine des difficultés d'ordre pratique ainsi que les outils disponibles à l'heure actuelle pour surmonter ces dernières. Une revue bibliographique de différents travaux relatifs aux techniques de discrétisation ainsi qu'aux procédures d'optimisation sera présentée. Enfin, on mentionnera également quelques logiciels en lien avec la mise en œuvre numérique du calcul à la rupture.*

Sommaire

2.1	Aspects généraux	20
2.1.1	Formulation numérique	20
2.1.2	Les quatre composantes de la mise en œuvre du calcul à la rupture	22
2.2	Techniques de discrétisation pour le calcul à la rupture	23
2.2.1	Méthodes (semi-)analytiques	23
2.2.2	Méthode des éléments finis	24
2.2.3	Méthodes sans maillage	25
2.2.4	Bilan	26
2.3	Procédures d'optimisation pour le calcul à la rupture	26
2.3.1	Algorithmes à directions de descente	27
2.3.2	Techniques de régularisation	27
2.3.3	Approche par Lagrangien Augmenté	28
2.3.4	Programmation linéaire	29
2.3.5	Programmation non-linéaire	30
2.3.6	Approches par calculs élastiques	32
2.3.7	Bilan	32
2.4	Logiciels de calcul à la rupture	33
2.4.1	TALREN	33
2.4.2	LIMITSTATE	33
2.4.3	OPTUMG2	34
2.4.4	Procédures numériques	35
2.4.5	Développements en cours	35
2.5	Conclusions	36

2.1 Aspects généraux

2.1.1 Formulation numérique

Pour plus de simplicité, considérons ici le cas d'un mode de chargement à un seul paramètre Q dont on cherche à déterminer la valeur extrême Q^+ au sens du calcul à la rupture. En pratique, on considérera une valeur de référence Q_0 et on cherchera la valeur extrême λ^+ du multiplicateur sans dimension λ de telle sorte que $\lambda^+Q_0 = Q^+$.

2.1.1.1 Approche statique par l'intérieur

La mise en œuvre numérique de l'approche statique consiste à considérer une *approximation* SA_h de dimension finie de l'espace SA des champs d'efforts intérieurs statiquement admissibles avec le chargement. Par exemple, cette approximation peut être construite par la méthode des éléments finis en discrétisant le domaine Ω en un ensemble d'éléments et en considérant une interpolation particulière du champ d'efforts intérieurs $\Sigma(\underline{x})$ dépendant d'un nombre fini de paramètres sur chaque élément. Par linéarité des équations définissant SA , leur version discrétisée conduit à une relation linéaire de la forme $\mathbf{A}\Sigma = \mathbf{F}$ entre le vecteur des inconnues statiques Σ représentant le champ discrétisé d'efforts intérieurs généralisés et le vecteur des efforts extérieurs généralisés \mathbf{F} associé au paramètre de chargement Q .

De plus, il faut également choisir un nombre fini N_c de points \underline{x}_c , $c = 1, \dots, N_c$, pour lesquels le critère devra être vérifié.

La résolution numérique du problème de calcul à la rupture ainsi discrétisé revient alors à résoudre le problème d'*optimisation* de dimension finie suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_s = \max_{\Sigma} \quad & \lambda \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{H}\Sigma = \lambda\mathbf{F}_0 \\ & \Sigma(\underline{x}_c) \in G(\underline{x}_c), \forall c = 1, \dots, N_c \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le caractère « *par l'intérieur* » de l'approche numérique est conservé à condition que :

- la version discrétisée des équations d'équilibre, de continuité et les conditions aux limites implique la vérification de la version continue de ces dernières :

$$\mathbf{A}\Sigma = \mathbf{F} \implies \Sigma(\underline{x}) \text{ S.A. avec } Q, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.2)$$

définissant ainsi un sous-espace de SA : $SA_h \subseteq SA$;

- la vérification du critère de résistance en un nombre fini de points de Ω implique que le critère de résistance soit vérifié sur tout le domaine :

$$\Sigma(\underline{x}_c) \in G(\underline{x}_c), \forall c = 1, \dots, N_c \implies \Sigma(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.3)$$

Si ces deux conditions sont réunies, alors la valeur optimale obtenue par la résolution de (2.1) constitue une *borne inférieure* de la valeur exacte : $\lambda_s \leq \lambda^+$. Au contraire, si l'une des deux conditions (2.2) ou (2.3) n'est pas vérifiée, la valeur calculée n'est qu'une approximation de la valeur exacte, dont on ne connaît pas le statut.

2.1. Aspects généraux

2.1.1.2 Approche cinématique par l'extérieur

De la même manière, la mise en œuvre numérique de l'approche cinématique consiste à considérer une *approximation* V_h de dimension finie de l'espace V des champs de vitesse virtuelle $\widehat{\mathbf{U}}$ cinématiquement admissibles. Cette approximation peut également être construite par la méthode des éléments finis en considérant une interpolation particulière de la vitesse virtuelle généralisée dépendant d'un nombre fini de paramètres sur chaque élément. Le taux de déformation virtuelle généralisée \mathbf{d} (correspondant à la discrétisation du champ $\mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}]$) est obtenu à partir d'une relation linéaire de la forme $\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{u}$, le reliant au vecteur \mathbf{u} des inconnues cinématiques associées à $\widehat{\mathbf{U}}$. De même, la discontinuité de vitesse $[[\mathbf{u}]]$ est également reliée aux inconnues cinématiques par une relation linéaire de la forme $[[\mathbf{u}]] = \mathbf{C}\mathbf{u}$.

En général, il est également nécessaire d'approcher les intégrales sur Ω et sur Γ définissant la puissance résistante maximale par une formule d'intégration numérique de la forme suivante :

$$\int_{\Omega} (\star) d\Omega \approx \sum_{i=1}^N \omega_i (\star_i) ; \quad \int_{\Gamma} (\star) dS \approx \sum_{j=1}^M \omega'_j (\star_j) \quad (2.4)$$

La résolution numérique revient alors à résoudre le problème d'*optimisation* de dimension finie suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_c = \min_{\mathbf{u}} \quad & \sum_{i=1}^N \omega_i \pi(\mathbf{d}_i) + \sum_{j=1}^M \omega'_j \pi(\underline{n}; [[\mathbf{u}]]_j) \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{F}_0^T \cdot \mathbf{u} = 1 \\ & \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{u} \\ & [[\mathbf{u}]] = \mathbf{C}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où la puissance des efforts extérieurs dans le chargement de référence associé à Q_0 a été normalisée à 1.

Le caractère « *par l'extérieur* » de l'approche numérique est conservé à condition que :

- la version discrétisée de la définition des taux de déformation et des discontinuités de vitesse implique la version continue de la définition de ces dernières pour l'interpolation considérée ;
- les fonctions d'appui relatives aux taux de déformation et aux discontinuités de vitesse soient calculées de manière exacte (en particulier que les conditions de pertinence soient respectées dans le cas d'un critère non borné) ;
- les formules d'approximation des intégrales (2.4) fournissent en réalité une approximation par excès de la valeur exacte :

$$\int_{\Omega} (\star) d\Omega \lesssim \sum_{i=1}^N \omega_i (\star_i) ; \quad \int_{\Gamma} (\star) dS \lesssim \sum_{j=1}^M \omega'_j (\star_j) \quad (2.6)$$

Si ces trois conditions sont réunies, alors la valeur optimale obtenue par la résolution de (2.5) constitue une borne supérieure de la valeur exacte : $\lambda_c \geq \lambda^+$. Au contraire, si

l'une de ces conditions n'est pas vérifiée¹, la valeur calculée n'est qu'une approximation de la valeur exacte dont on ne connaît pas le statut.

2.1.2 Les quatre composantes de la mise en œuvre du calcul à la rupture

La mise en œuvre pratique d'une démarche de calcul à la rupture repose alors sur quatre composantes essentielles, dépendantes les unes des autres :

- **le modèle mécanique** : il s'agit ici du travail de l'ingénieur consistant à faire un choix de modélisation pour les différents éléments d'une structure tridimensionnelle complexe à l'aide d'une modélisation de barre en traction/compression, de poutre en flexion, de plaque, de coque, etc. Ce choix conditionne donc le type d'efforts intérieurs, la forme des équations d'équilibre, celle du critère de résistance, etc.
- **le critère de résistance** : il s'agit ici de faire une hypothèse quant à la modélisation des capacités de résistance, à l'échelle locale du matériau, dans le cas d'une modélisation de type milieu continu ou bien à l'échelle d'un élément structural (section de poutre par exemple) dans le cas d'une modélisation simplifiée. Dans ce dernier cas, le critère de résistance macroscopique portant sur les variables généralisées peut être obtenu par une démarche de changement d'échelle à partir du critère de résistance local du matériau constitutif. Quel que soit le type de modélisation retenue, une description analytique du critère de résistance est néanmoins nécessaire.
- **la technique de discrétisation** : cette composante est relative au choix de la méthode permettant de générer un ensemble fini de champs d'efforts intérieurs statiquement admissibles ou de champs de vitesse virtuelle cinématiquement admissibles. Nous avons déjà mentionné des méthodes permettant de générer manuellement de tels champs (lignes de rupture, méthode des bandes, etc.) ainsi que la méthode des éléments finis en maillant le domaine Ω et en effectuant un choix d'interpolation particulier.
- **la procédure d'optimisation** : il s'agit de l'élément essentiel dans la perspective d'une mise en œuvre numérique. Une discrétisation manuelle des champs peut, en effet, conduire à un nombre restreint d'inconnues à optimiser, de sorte que l'optimisation peut se faire manuellement sur des exemples simples. Néanmoins, sur des exemples plus complexes ou dans le cas d'une discrétisation plus générale (méthode des éléments finis par exemple), la mise en œuvre de l'approche statique nécessite la résolution d'un problème d'optimisation linéaire sous contraintes convexes non-linéaires en général (contraintes $\Sigma(\underline{x}_c) \in G(\underline{x}_c)$). De même, la mise en œuvre de l'approche cinématique nécessite de minimiser une fonction convexe non-linéaire sous contraintes linéaires. Le choix de l'algorithme

1. On verra plus tard qu'on peut tout de même obtenir une borne supérieure, même si la troisième condition (2.6) n'est pas vérifiée, en post-traitant le champ de vitesse virtuelle optimal et en calculant exactement la valeur de la puissance résistante maximale associée.

2.2. Techniques de discrétisation pour le calcul à la rupture

d'optimisation représente donc un enjeu crucial et dépend de la forme du problème à résoudre, qui dépend elle-même de la forme du critère de résistance. En effet, si le critère de résistance est un critère linéaire par morceaux par exemple, on obtient un problème d'optimisation linéaire sous contraintes linéaires.

Le premier point concernant la modélisation mécanique est au cœur du propos de ce travail, puisque nous avons fait le choix de travailler principalement sur des modélisations de type milieux continus généralisés (poutres, arcs, plaques, coques). Ce choix est motivé, d'une part par le faible nombre de travaux s'étant intéressés à ces sujets dans le cadre d'une approche numérique du calcul à la rupture et, d'autre part, par le fait que ce type de modélisation nous semble plus adapté aux besoins du génie civil dont la majorité des ouvrages est constituée d'éléments unidimensionnels de poutres et d'arcs ou bidimensionnels de plaques et coques.

Pour les mêmes raisons, nous privilégierons l'utilisation de critères de résistance en variables généralisées, lesquels seront déterminés à partir de la donnée du critère de résistance local des matériaux constitutifs ainsi que de la distribution spatiale de ces matériaux au sein de la structure. Ce type de démarche de changement d'échelle s'inscrit également dans l'objectif de pouvoir apporter une réponse à la caractérisation de la résistance des structures hétérogènes ou composites.

La suite de ce chapitre s'attache à effectuer une présentation, non exhaustive, des deux dernières composantes, à savoir la *technique de discrétisation* et la *procédure d'optimisation*, justifiant ainsi les choix qui seront effectués dans la suite de ce travail.

2.2 Techniques de discrétisation pour le calcul à la rupture

2.2.1 Méthodes (semi-)analytiques

Nous avons déjà évoqué, à l'occasion de la présentation de quelques exemples d'application du calcul à la rupture au chapitre précédent, des méthodes de discrétisation reposant sur l'utilisation d'une classe restreinte de mécanismes de ruine pour l'approche cinématique par l'extérieur : blocs rigides, surfaces de rupture en géotechnique, lignes de rupture pour les dalles en flexion, rotules pour les systèmes de barres fléchies, etc. De même, ce type d'approche peut être mis en œuvre dans le cadre d'une approche statique par l'intérieur (méthode des bandes, méthode des bielles et tirants).

L'utilisation de classes restreintes de champs de contrainte ou de champs de vitesse conduit à une formulation relativement simple du problème à résoudre, le critère pouvant s'écrire, en général, à l'aide de contraintes linéaires. Un des inconvénients majeurs est que la qualité des bornes obtenues par ce type d'approche dépend, en général, très fortement de la géométrie du mécanisme ou du champ de contrainte choisi. Il peut alors

être délicat de trouver la géométrie optimale, la dépendance du problème aux paramètres géométriques étant, en général, relativement complexe (problème non-convexe nécessitant l'emploi d'outils d'optimisation coûteux en temps de calcul).

2.2.2 Méthode des éléments finis

L'utilisation de la méthode des éléments finis permet de construire des classes de champs de contrainte ou de mécanismes de ruine beaucoup plus riches que les approches précédentes. En particulier pour l'approche cinématique, il est possible de construire des champs de vitesse virtuelle conduisant à un taux de déformation dans chaque élément et/ou présentant des discontinuités de vitesse au niveau des arêtes du maillage. Cette dernière caractéristique constitue une particularité de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis en calcul à la rupture, par comparaison à la méthode des éléments finis classique (dans le cadre de l'élasticité par exemple), restreinte à l'utilisation de champs de déplacement continus. De même, la mise en œuvre numérique de l'approche statique nécessite l'utilisation d'éléments finis en contraintes (ou en efforts intérieurs de façon plus générale), approche relativement peu développée en dehors du cadre du calcul à la rupture.

On peut faire remonter l'utilisation de la méthode des éléments finis en calcul à la rupture aux travaux de [Lysmer, 1970, Anderheggen et Knöpfel, 1972, Pastor et Turgeman, 1976, Pastor, 1976]. En ce qui concerne plus particulièrement l'approche cinématique, l'utilisation de champs de vitesse virtuelle discontinus par la méthode des éléments finis a été proposée dans [Pastor et Turgeman, 1976, Bottero *et al.*, 1980], puis repris dans des travaux plus récents [Sloan et Kleeman, 1995, Krabbenhoft *et al.*, 2005, Makrodimopoulos et Martin, 2008]. Signalons, à cette occasion, que la majorité des travaux ayant contribué au développement de la méthode des éléments finis en calcul à la rupture a concerné la résolution de problèmes, relevant souvent du domaine de la géotechnique, en déformation plane pour des critères de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb.

L'utilisation de l'approche par éléments finis peut présenter, dans certains cas, certaines difficultés inhérentes à la méthode des éléments finis elle-même ou propres au contexte du calcul à la rupture. Par exemple, dans le cadre d'une approche statique par l'intérieur, la propriété (2.3) ne peut être vérifiée exactement pour une interpolation quadratique du champ de contrainte dans un élément. En revanche, dans le cas de champs à variations linéaires dans un élément triangulaire à bords droits, la vérification du critère de résistance aux sommets de l'élément suffit à assurer (2.3) en raison de la convexité du critère.

Certaines formulations par éléments finis peuvent également souffrir du phénomène de *verrouillage numérique*. Par exemple, dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle en déformation plane pour des critères purement cohérents (von Mises, Tresca), la condition de pertinence de ces critères nécessite d'utiliser des champs de vitesse virtuelle incompressibles ($\text{tr } \underline{\underline{d}} = 0$). Il est bien connu que des éléments triangulaires avec interpolation linéaire continue du champ de vitesse conduisent à un « *verrouillage*

2.2. Techniques de discrétisation pour le calcul à la rupture

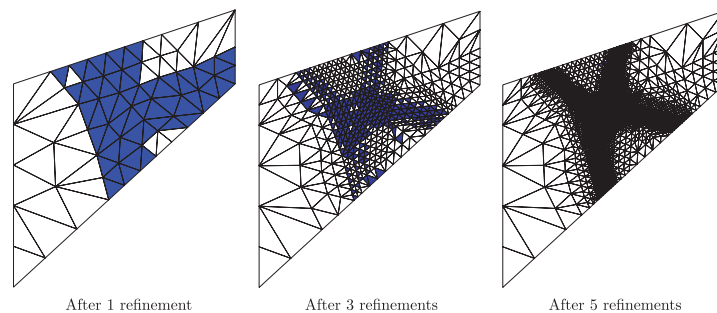


FIGURE 2.1 – Procédure de remaillage adaptatif, tiré de [Ciria *et al.*, 2008]

volumique » [Nagtegaal *et al.*, 1974], l'interpolation choisie n'étant pas assez riche pour assurer la condition d'incompressibilité de manière non triviale. En revanche, l'utilisation d'éléments finis discontinus permet de s'affranchir de ces difficultés.

Mentionnons également l'existence des approches par éléments finis dites « *mixtes* » qui reposent sur une interpolation simultanée du champ de contrainte et du champ de vitesse virtuelle [Casciaro et Cascini, 1982, Capsoni, 1999], ainsi que [Christiansen et Larsen, 1983, Capsoni et Corradi, 1999] dans le cas des plaques en flexion. L'écriture de l'équilibre par le principe des puissances virtuelles pour cette classe de champs conduit à une formulation approchée de l'équilibre et donc à une approximation de la charge ultime, le statut de borne étant perdu *a priori*. La difficulté liée à ce type d'approche réside dans le fait que la convergence numérique n'est pas automatiquement assurée quel que soit le choix des espaces d'interpolation du champ de contrainte et du champ de vitesse virtuelle. Malgré cela, les approches mixtes permettent de s'affranchir des problèmes de verrouillage numérique dans certains cas.

Enfin, la mise en œuvre numérique par éléments finis peut être couplée à une approche de remaillage adaptatif [Christiansen et Pedersen, 2001, Ciria, 2004, Ciria *et al.*, 2008], procédure consistant à effectuer un premier calcul sur un maillage uniforme puis à raffiner le maillage dans les régions contribuant le plus à la qualité de la solution au sens d'un indicateur bien choisi (zones de déformations fortement localisées par exemple). Ce type d'approche permet ainsi d'améliorer la qualité des bornes obtenues en évitant de raffiner le maillage de manière uniforme sur toute la structure, ce qui est d'autant plus utile dans le cas de mécanismes de ruine localisés (Figure 2.1).

2.2.3 Méthodes sans maillage

Certains auteurs ont également proposé des stratégies alternatives à la méthode des éléments finis, ne reposant pas sur l'utilisation d'un maillage. Certaines de ces méthodes utilisent, par exemple, une distribution de nœuds au sein du domaine Ω , à partir desquels des fonctions de forme très régulières sont définies [Le *et al.*, 2012, Liu et Zhao, 2013]. L'intérêt réside dans l'absence de maillage à générer, offrant une plus grande souplesse

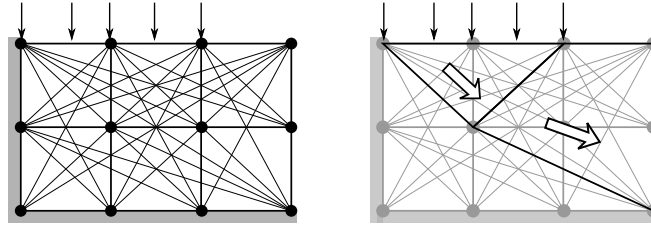


FIGURE 2.2 – Principe de l'approche *Discontinuity Layout Optimization*

dans le contexte des procédures de raffinement adaptatif. La vérification des conditions aux limites et les procédures d'intégration numérique sont néanmoins plus complexes que dans le cas de la méthode des éléments finis et il n'est pas facile de donner un statut clair de borne aux estimations calculées.

Dans le contexte de l'approche cinématique, cette classe de méthodes consiste donc à générer des champs de vitesse virtuelle très réguliers, d'ordre élevé. Dans une démarche totalement opposée, il est possible de considérer uniquement des champs de vitesse virtuelle de blocs rigides en translation ou rotation. Ainsi, l'approche « *Discontinuity Layout Optimization* » (DLO) [Smith et Gilbert, 2007] considère un nombre important de lignes de discontinuité de vitesse potentielles à partir d'un ensemble de nœuds (Figure 2.2). Une procédure d'optimisation permet ensuite de trouver l'arrangement optimal de ces discontinuités conduisant au meilleur majorant de la charge ultime.

Enfin, mentionnons également la méthode « *Discontinuity Velocity Domain Splitting* » (DVDS) [Ionescu et Oudet, 2010] qui repose sur la même idée de générer des mécanismes de ruine par mouvements de blocs rigides. Dans cette approche, la forme des lignes de rupture délimitant les blocs est décrite par une méthode de lignes de niveau (level-set) et est optimisée par un algorithme génétique.

2.2.4 Bilan

Si chaque type de méthode possède ses propres avantages et inconvénients en fonction du contexte d'utilisation, il est indéniable que l'approche par éléments finis constitue la méthode la plus générale, permettant de mettre en œuvre les deux approches du calcul à la rupture pour une large variété de modèles mécaniques, en préservant, dans certaines conditions, le statut de borne et en offrant la possibilité d'inclure ou non des discontinuités de vitesse virtuelle dans le contexte de l'approche cinématique. C'est donc pour toutes ces raisons que nous avons choisi d'adopter une approche par éléments finis dans la suite de ce travail.

2.3 Procédures d'optimisation pour le calcul à la rupture

Contrairement aux approches numériques classiques en mécanique des solides et des structures, consistant à résoudre un problème linéaire ou non-linéaire par une procé-

2.3. Procédures d'optimisation pour le calcul à la rupture

dure itérative, les problèmes de calcul à la rupture se formulent naturellement comme des problèmes d'*optimisation convexe sous contraintes* (non-linéaires en général). Nous revenons ici sur quelques procédures d'optimisation dédiées à la résolution de ce type de problème.

2.3.1 Algorithmes à directions de descente

La formulation du problème par l'approche cinématique revient à minimiser une fonction convexe non-linéaire $P_{rm}(\hat{\mathbf{U}})$ sous la contrainte linéaire $P_{ext}(\hat{\mathbf{U}}) = 1$ dans l'espace des champs de vitesse virtuelle cinématiquement admissibles. Le problème peut se reformuler comme un problème convexe sans contrainte consistant à minimiser la fonctionnelle $J = P_{rm} - P_{ext}$, le chargement étant potentiellement supportable au sens du calcul à la rupture si le minimum de J est égal à 0.

Il est donc relativement naturel de souhaiter recourir à l'utilisation d'algorithmes à *directions de descente* tels que les algorithmes du gradient, du gradient conjugué, de Newton, BFGS, etc. Bien que ces algorithmes assurent, en théorie, la convergence vers le minimum global dans le cas d'une fonction convexe, en pratique, leur performance se détériore fortement dans le cas d'une fonction non-différentiable, ce qui est malheureusement le cas ici. En effet, prenons le cas d'un critère de résistance régulier tel que le critère de von Mises de résistance à la cission k . Sa fonction d'appui est donnée par :

$$\pi(\underline{d}) = k\sqrt{2\underline{d} : \underline{d}} \quad \text{pour } \text{tr } \underline{d} = 0 \quad (2.7)$$

cette fonction est non-différentiable lorsque $\underline{d} = \underline{0}$, *i.e.* dans les zones « rigides » du mécanisme de ruine. Cette situation se produit donc très fréquemment en pratique et les situations où la fonction d'appui devient non-différentiable sont encore plus fréquentes lorsque le critère est non-régulier (Tresca, Mohr-Coulomb, etc.), rendant les algorithmes de descente inutilisables en pratique.

2.3.2 Techniques de régularisation

Une des techniques proposées pour surmonter la difficulté de non-différentiabilité évoquée précédemment consiste à régulariser la fonction d'appui par un petit paramètre ϵ de sorte à la rendre différentiable en tout point. Ainsi, la fonction d'appui initiale π est remplacée par une fonction d'appui régularisée π_ϵ telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi_\epsilon = \pi$, la minimisation s'effectuant alors sur la fonctionnelle régulière J_ϵ associée à π_ϵ .

Il existe plusieurs façons d'effectuer cette régularisation mais l'une des plus répandues consiste à approcher la fonction d'appui, vue comme la puissance dissipée dans le contexte d'un comportement parfaitement plastique, par celle correspondant à un comportement visco-plastique de type Norton-Hoff [Friaâ, 1978, Guennouni et Le Tallec, 1982]. Si le comportement des algorithmes de minimisation s'en trouve amélioré pour une valeur fixe non nulle de ϵ , la convergence des algorithmes se détériore fortement lorsque l'on diminue ϵ afin d'obtenir la solution exacte. Il n'est donc pas facile de déterminer une valeur optimale de ϵ , suffisamment faible pour bien approcher la fonction d'appui mais suffisamment grande pour garantir une bonne convergence lors de la

minimisation.

2.3.3 Approche par Lagrangien Augmenté

Une autre difficulté concernant la minimisation de l'approche cinématique est relative au fait que le problème peut être vu comme un problème d'optimisation sans contraintes² :

$$\min_{\widehat{\mathbf{U}}} P_{rm}(\widehat{\mathbf{U}}) - P_{ext}(\widehat{\mathbf{U}}) = \min_{\widehat{\mathbf{U}}} \int_{\Omega} \pi(\mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}]) d\Omega - P_{ext}(\widehat{\mathbf{U}}) \quad (2.8)$$

ou bien comme un problème avec contraintes :

$$\begin{aligned} \min_{\widehat{\mathbf{U}}, \mathbf{d}} \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}) d\Omega - P_{ext}(\widehat{\mathbf{U}}) \\ \text{t.q. } \mathbf{d} = \mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si les deux formulations sont équivalentes, il a été observé qu'il était plus favorable d'un point de vue numérique de découpler la non-linéarité (provenant de la fonction π) de l'opérateur différentiel \mathbf{D} associant la vitesse virtuelle $\widehat{\mathbf{U}}$ au taux de déformation virtuelle \mathbf{d} , introduit ici comme une variable d'optimisation supplémentaire. Le traitement de la contrainte $\mathbf{d} = \mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}]$ s'effectue alors par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$ et l'ajout un terme de pénalisation dans la fonctionnelle à minimiser :

$$\min_{\widehat{\mathbf{U}}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}_r(\widehat{\mathbf{U}}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) \quad (2.10)$$

avec le Lagrangien pénalisé :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\widehat{\mathbf{U}}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) = \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}) d\Omega - P_{ext}(\widehat{\mathbf{U}}) + \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}] - \mathbf{d}) \right) d\Omega \\ + \frac{r}{2} \int_{\Omega} \left\| \mathbf{D}[\widehat{\mathbf{U}}] - \mathbf{d} \right\|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.11)$$

où $r > 0$ joue le rôle de paramètre de pénalisation. Cette méthode est connue sous le nom de méthode du « *Lagrangien Augmenté* » [Fortin et Glowinski, 1982, Vicente da Silva et Antao, 2007] et offre de nombreux avantages. En particulier, il n'est pas nécessaire de faire tendre le paramètre de pénalisation r vers $+\infty$ pour assurer la vérification de la contrainte à l'optimum du fait de la présence du multiplicateur de Lagrange. L'autre intérêt majeur, que nous évoquons sans rentrer dans les détails, est que la résolution du problème fait intervenir, à chaque itération, la résolution de deux sous-problèmes qui sont plus simples à résoudre que le problème initial. Néanmoins, le comportement de l'algorithme peut dépendre fortement du choix de r et il n'est pas évident d'en déterminer *a priori* une valeur optimale en toute circonstance.

2. Dans un souci de concision, nous ignorons le terme de discontinuité de vitesse dans l'expression de P_{rm} et nous raisonnons uniquement sur le problème non discrétisé.

2.3. Procédures d'optimisation pour le calcul à la rupture

Il existe une grande variété de méthodes s'apparentant plus ou moins à ce type d'approche, notamment l'algorithme des directions alternées (ADMM³ en anglais), l'algorithme de Douglas-Rachford, les algorithmes proximaux [Carlier *et al.*, 2011], etc. Si cette classe générale d'algorithmes a connu un succès récent dans le domaine du traitement de l'image [Combettes et Wajs, 2005], il semble que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence devient prohibitif pour des problèmes de mécanique des structures de grande dimension.

2.3.4 Programmation linéaire

Une stratégie complètement différente a consisté à se tourner vers les résultats obtenus dans le domaine de l'optimisation convexe, notamment via le développement d'algorithmes dédiés à la résolution de problèmes d'optimisation de fonctions linéaires sous contraintes linéaires, relevant du domaine de la *programmation linéaire*. Pour plus de détails concernant l'analyse et l'optimisation convexe, le lecteur est invité à se référer à l'Annexe A ainsi qu'à l'ouvrage de référence [Boyd et Vandenberghe, 2004].

La résolution d'un problème de programmation linéaire tel que :

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{2.12}$$

consiste à trouver le sommet du polyèdre $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \text{ t.q. } \mathbf{Ax} = \mathbf{B}\}$ qui se trouve le plus éloigné de l'origine dans la direction définie par le vecteur $-\mathbf{c}$.

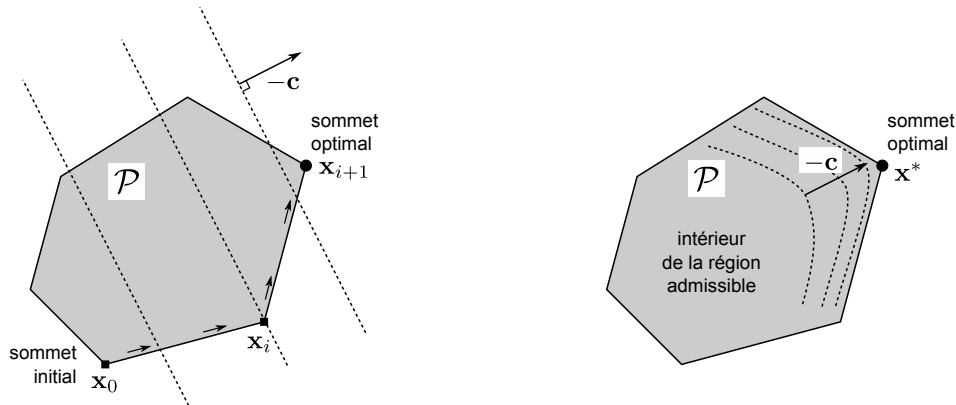
2.3.4.1 Algorithme du simplexe

L'*algorithme du simplexe*, développé par [Dantzig *et al.*, 1955], constitue le premier algorithme de résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes. L'idée, relativement simple, consiste à parcourir les sommets du polyèdre en progressant sur sa frontière dans le sens de la direction $-\mathbf{c}$, de telle sorte que la fonction objectif diminue à chaque nouveau sommet (Figure 2.3a). Le minimum est obtenu une fois qu'il n'est plus possible de progresser.

Si l'on est certain d'obtenir le minimum en un nombre fini d'itérations, ce nombre peut être extrêmement grand suivant le point choisi pour l'initialisation et suivant la taille du problème. La complexité en temps de calcul de cet algorithme est exponentielle.

Néanmoins, l'algorithme du simplexe a permis de faire de nombreux progrès et de résoudre numériquement des problèmes de calcul à la rupture en programmation linéaire [Lysmer, 1970, Anderheggen et Knöpfel, 1972, Faccioli et Vitiello, 1973, Pastor, 1976, Pastor et Turgeman, 1976]. Afin d'obtenir un problème de programmation linéaire à partir de critères de résistance non-linéaires, ces différents travaux ont proposé de construire des linéarisations par l'intérieur et par l'extérieur du critère de résistance, de manière à préserver le statut de borne du résultat final. Néanmoins, le nombre de

3. *Alternate Direction Method of Multipliers*



(a) Illustration du principe de l'algorithme du simplexe

(b) Illustration du principe d'un algorithme de points intérieurs

FIGURE 2.3 – Algorithmes de résolution d'un problème de programmation linéaire, inspiré de [Boyd et Vandenberghe, 2004].

facettes utilisées pour linéariser le critère a une influence notable sur la qualité du résultat [Olsen, 1998] et introduit un nombre important de contraintes supplémentaires, limitant donc la taille des problèmes pouvant être résolus avec les moyens de l'époque.

2.3.4.2 Algorithmes de points intérieurs

En 1984, une avancée considérable est effectuée lorsque Karmarkar propose un algorithme permettant de résoudre un problème de programmation linéaire avec une complexité en temps de calcul polynomiale [Karmarkar, 1984], soit largement plus rapide que l'algorithme du simplexe pour les problèmes de grande taille. Contrairement à ce dernier, l'algorithme de Karmarkar est une méthode de « *points intérieurs* » consistant à progresser à l'intérieur du polyèdre \mathcal{P} pour atteindre la solution optimale de manière asymptotique (Figure 2.3b) [Nesterov *et al.*, 1994, Boyd et Vandenberghe, 2004]. L'amélioration des algorithmes de points intérieurs permet à présent de résoudre des problèmes de programmation linéaire de très grande taille et trouve de nombreuses applications en économie, traitement du signal, apprentissage de données, etc.

2.3.5 Programmation non-linéaire

Certains auteurs tels que [Zouain *et al.*, 1993, Borges *et al.*, 1996, Lyamin et Sloan, 2002] ont cherché à développer des algorithmes consistant à résoudre directement le problème de programmation non-linéaire, sans linéariser le critère, en appliquant une méthode de quasi-Newton sur les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker. Si la performance de ces algorithmes était très encourageante, le nombre d'itérations nécessaires étant très peu sensible à la taille du problème, ce type de méthode nécessitait de calculer les dérivées du critère de résistance et pouvait donc poser des difficultés pour des critères non-réguliers.

2.3. Procédures d'optimisation pour le calcul à la rupture

2.3.5.1 Algorithmes de points intérieurs

L'utilisation d'algorithmes de points intérieurs dans la résolution de problèmes de calcul à la rupture en programmation non-linéaire a été, tout d'abord, proposé par [Andersen *et al.*, 1998, Andersen *et al.*, 2000] dans le cas de l'approche cinématique pour un critère de von Mises ainsi que par [Pastor, 2001, Pastor et Loute, 2005], puis par [Krabbenhoft et Damkilde, 2003] dans un cadre plus général. Il a également été souligné, dans ce dernier article, que la version discrétisée de l'approche cinématique (resp. de l'approche statique) peut se reformuler comme un problème de type statique (resp. cinématique) en résolvant le problème d'optimisation dual associé au problème initial. Ce type de reformulation permet notamment d'éviter de travailler avec la fonction d'appui, mais directement avec l'expression du critère de résistance tout en conduisant à une borne supérieure à l'optimum.

2.3.5.2 Programmation conique

Les travaux de [Nesterov *et al.*, 1994] ont permis de montrer que les algorithmes de points intérieurs pour la programmation linéaire pouvaient être étendus au cas de la programmation non-linéaire, et en particulier au cas de la programmation « conique » *i.e.* consistant à minimiser une fonction linéaire sous contraintes linéaires et non-linéaires pouvant s'écrire sous la forme d'un cône. Dans [Nesterov et Todd, 1997], il a été montré que ces algorithmes présentaient la convergence optimale du cas linéaire dans le cas de cônes particuliers tels que les cônes de Lorentz du second-ordre (cf. Annexe A), donnant naissance à la *programmation conique du second-ordre* (SOCP). Il s'agit-là d'une avancée très importante dans la mesure où de nombreux problèmes peuvent se formuler comme un problème SOCP. Les problèmes de programmation linéaire en font bien entendu partie, mais également les problèmes avec fonction objectif ou contraintes quadratiques (pour des formes quadratiques semi-définies positives), normes euclidiennes, etc.

En ce qui concerne l'application au calcul à la rupture, de nombreux critères de résistance peuvent se reformuler de la sorte, tels que le critère de von Mises (en 2D et 3D), les critères de Tresca et Mohr-Coulomb (en 2D), le critère de Nielsen pour les plaques, etc. On trouvera plus de détails sur la formulation conique de critères de résistance dans [Bisbos, 2006, Krabbenhoft *et al.*, 2007, Bisbos et Pardalos, 2007, Makrodimopoulos, 2010].

Toutefois, le succès de ce type de formulation n'aurait pas eu lieu sans le développement de solveurs d'optimisation conique performants. On peut citer, à cet effet, SEDUMI⁴, SDPT3⁵, CPLEX⁶, MOSEK⁷, etc. En particulier, MOSEK, conçu à partir des travaux de [Andersen *et al.*, 2003], peut certainement être considéré, à ce jour, comme le solveur de référence en termes de robustesse et de rapidité, en particulier

4. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>

5. <http://www.math.nus.edu.sg/~mattohkc/sdpt3.htm>

6. <http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/>

7. <http://www.mosek.com>

pour les problèmes de grande taille.

Enfin, mentionnons également l’extension des algorithmes de points intérieurs à la classe encore plus générale des problèmes de *programmation semi-définie positive* (SDP) faisant intervenir des matrices semi-définies positives comme variables d’optimisation en plus de variables scalaires classiques. Cette formulation englobe les problèmes SOCP et permet, par exemple, de traiter des problèmes de calcul à la rupture pour un critère de Mohr-Coulomb en 3D [Bisbos et Pardalos, 2007, Gueguin *et al.*, 2014a]. Néanmoins, les performances actuelles des algorithmes en SDP n’atteignent pas encore celles du cas SOCP et offrent donc des capacités de calcul relativement limitées pour l’instant.

2.3.6 Approches par calculs élastiques

Il existe également une classe d’approches fondées sur une démarche plus mécanique que mathématique, consistant à simuler l’état de la structure à la ruine par une succession de calculs élastiques (fictifs). À partir des champs de contrainte et de vitesse calculés à une étape donnée de la procédure, les modules élastiques fictifs sont modifiés localement de sorte que le champ de contrainte obtenu avec le nouveau module se trouve sur la frontière du critère de résistance ou que la densité d’énergie élastique soit égale à la dissipation plastique correspondant au champ de vitesse virtuelle. Ainsi, la variation spatiale des modules d’élasticité fictifs sert à reproduire la redistribution des efforts au sein de la structure avant la ruine. Différentes méthodes sont alors obtenues suivant la façon dont sont ajustés les modules élastiques : « *Linear Matching Method* » [Mackenzie *et al.*, 1994], « *Elastic Compensation Method* » [Ponter et Carter, 1997] par exemple. Pour plus de détails concernant ce type d’approche, on pourra se reporter à [de Domenico, 2014].

2.3.7 Bilan

Il existe évidemment une abondante littérature et de nombreux développements récents dans le domaine de l’optimisation convexe. Il serait certainement extrêmement intéressant de faire une comparaison plus systématique des nombreux algorithmes existants dans le cadre du calcul à la rupture, voire de travailler à une méthode particulièrement bien adaptée à la structure interne du problème.

Néanmoins, les travaux récents consacrés à la mise en œuvre numérique du calcul à la rupture semblent tous indiquer des performances nettement supérieures des algorithmes de type *points intérieurs*, en particulier dans le cas non-linéaire de la programmation conique, par rapport aux autres stratégies possibles. L’existence d’un solveur dédié et optimisé en termes de performances tel que MOSEK nous a conduit à faire le choix de ce type d’approche pour ce travail, l’objectif étant alors d’illustrer la généralité de cet outil sur différents types de calculs en mécanique des structures.

2.4. Logiciels de calcul à la rupture

2.4 Logiciels de calcul à la rupture

Mentionnons, pour clore ce chapitre, quelques logiciels ou procédures numériques dédiées à la mise en œuvre d'une approche par le calcul à la rupture.

2.4.1 TALREN

TALREN⁸, développé par le bureau d'études Terrasol, est un logiciel qui permet la vérification de la stabilité des ouvrages géotechniques (talus, remblais, barrages), avec ou sans renforcements (clous, pieux, terre armée, etc.). TALREN dispose, depuis un peu plus d'une dizaine d'années, d'un module de calcul à la rupture mettant en œuvre une approche cinématique par blocs en rotation le long de surfaces de glissement (spirales logarithmiques dans le cas d'un matériau frottant, Figure 2.4).

L'utilisateur définit une discrétisation permettant de générer un nombre fini de mécanismes de ruine potentiels. Le majorant de la charge extrême (ou facteur de stabilité) est calculé pour chaque mécanisme et le mécanisme correspondant au plus petit majorant est alors identifié.

Mentionnons également l'existence, dans les années 1990, du logiciel STARS [de Buhan *et al.*, 1992, Anthoine *et al.*, 1992] mettant en œuvre le même type de démarche pour le calcul d'ouvrages en sols renforcés.

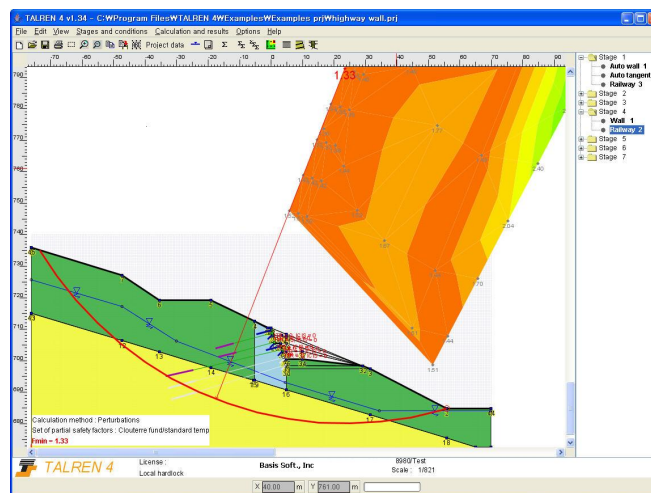


FIGURE 2.4 – Aperçu d'écran du logiciel TALREN

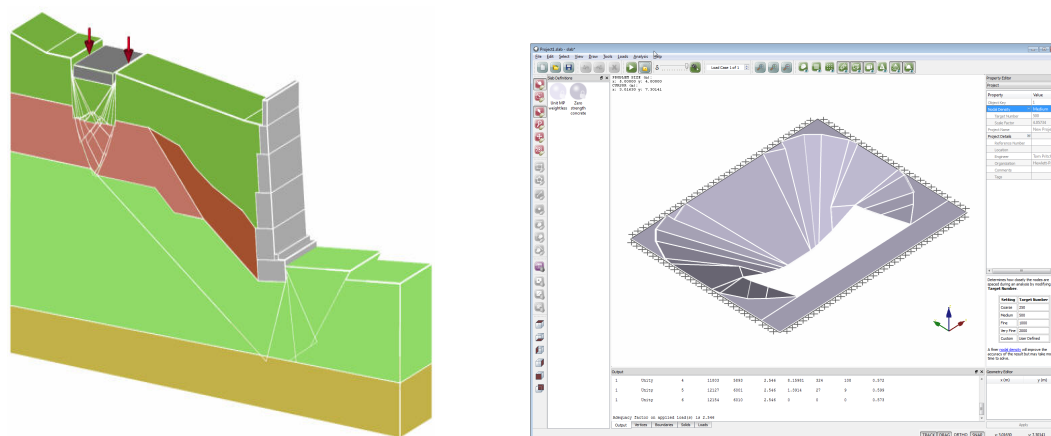
2.4.2 LIMITSTATE

LimitState⁹ est une entreprise développant des logiciels à destination des ingénieurs du génie civil. Initialement fondée par des membres de l'Université de Sheffield (Royaume-Uni), LimitState propose une gamme de plusieurs logiciels dont trois

8. <http://www.terrasol.fr/fr/logiciels/logiciels-terrasol/talren-v5>

9. <http://www.limitstate.com>

concernent l'identification de mécanismes de ruine pour différents types de structures : LIMITSTATE:RING (depuis 2007) pour les ponts et arches en maçonnerie, LIMITSTATE:GEO (depuis 2008) pour les ouvrages géotechniques et LIMITSTATE:SLAB (depuis 2014) pour les plaques en flexion. LIMITSTATE:RING considère directement des mécanismes de ruine de blocs rigides en translation/rotation pour les éléments maçonnés. LIMITSTATE:GEO et LIMITSTATE:SLAB identifient, respectivement, des surfaces de rupture pour les milieux continus 2D/3D et des lignes de rupture pour les plaques en flexion par la mise en œuvre la méthode DLO mentionnée précédemment (Figure 2.5).



(a) Aperçu d'un mécanisme de ruine en 3D (LIMITSTATE:GEO)

(b) Aperçu d'un mécanisme de ruine de plaque en flexion (LIMITSTATE:SLAB)

FIGURE 2.5 – Aperçus d'écran des logiciels de la gamme LIMITSTATE

2.4.3 OPTUMG2

OPTUMG2¹⁰ est un logiciel de calcul par éléments finis (en 2D) pour les ouvrages géotechniques, développé par la société OptumCE en partie fondée par K. Krabbenhøft et A. Lyamin de l'Université de Newcastle (Australie). Sorti en 2013, il s'agit vraisemblablement du premier logiciel mettant en œuvre de manière systématique une approche par éléments finis du calcul à la rupture, pour la statique comme pour la cinématique. En ce qui concerne la procédure d'optimisation, OPTUMG2 tire avantage des progrès récents dans le domaine de la programmation conique. Plusieurs critères de résistance pour le sol sont disponibles et il offre également la possibilité d'inclure des éléments de barres, de poutres en flexion ou d'interfaces. Une procédure de remaillage adaptatif est également disponible afin d'améliorer la qualité des bornes obtenues (Figure 2.6). Enfin, mentionnons qu'OPTUMG2 permet également de réaliser des analyses élastoplastiques, la particularité étant que la résolution d'un cas de charge incrémental est réalisée par optimisation [Krabbenhøft *et al.*, 2007, Krabbenhøft *et al.*, 2007], de la même manière qu'en calcul à la rupture.

10. <http://www.optumce.com>

2.4. Logiciels de calcul à la rupture

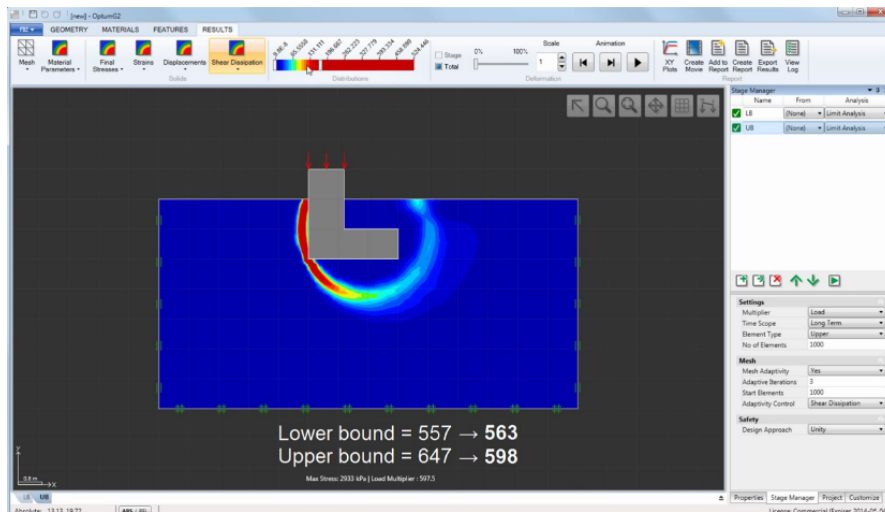


FIGURE 2.6 – Aperçu d'écran du logiciel OPTUMG2

2.4.4 Procédures numériques

Le logiciel aux éléments finis CAST3M¹¹, développé par le CEA, inclut une procédure LIMEMECA permettant de déterminer l'état limite d'une structure de poutre en identifiant les mécanismes de ruine indépendants. Il existe également une procédure appelée @ANA_LIM qui met en œuvre la *Linear Matching Method* pour un critère de von Mises ou de Tresca.

Le logiciel aux éléments finis CESAR-LCPC¹², développé par la société ITECH et l'IFSTTAR, inclut un module appelé LIM1 mettant en œuvre une approche cinématique fondée sur les techniques de régularisation évoquées en 2.3.2. Ce type d'approche est également disponible au sein de CODE_ASTER¹³ (EdF).

2.4.5 Développements en cours

Le bureau d'études anglais Ramsay Maunder Associates¹⁴ développe actuellement un logiciel, intitulé EQUILIBRIUM FINITE ELEMENTS (EFE), destiné à la mise en œuvre de l'approche statique par l'intérieur pour les plaques en flexion.

Le bureau d'études français Strains¹⁵ développe CAPACITY, un logiciel destiné à la vérification de la résistance des assemblages métalliques par la mise en œuvre des approches du calcul à la rupture par éléments finis 3D et programmation conique.

11. <http://www-cast3m.cea.fr/>

12. <http://www.itech-soft.com/cesar/>

13. <http://www.code-aster.org/>

14. <http://www.ramsay-maunder.co.uk/r--d/>

15. <http://www.strains.fr/software.html>

2.5 Conclusions

Ce chapitre s'est concentré sur les aspects numériques de la mise en œuvre de la démarche du calcul à la rupture. Il avait été évoqué, au chapitre 1, que la relativement faible diffusion du calcul à la rupture dans la pratique de l'ingénierie pouvait, en partie, s'expliquer par des verrous d'ordre numérique qui limitaient le nombre de logiciels mettant en œuvre ce type de démarche. Nous avons pu constater qu'il existe effectivement certaines difficultés qu'il convient de ne pas négliger : développement d'éléments finis spécifiques (en contraintes, avec discontinuités), préservation du statut de borne, caractère non-régulier des problèmes d'optimisation...

Ainsi, l'existence d'une procédure d'optimisation efficace est, sans doute, l'élément critique permettant d'envisager, ou non, le développement d'un logiciel pour un usage professionnel. Nous avons vu que de nombreuses stratégies ont été proposées pour la résolution des problèmes d'optimisation en calcul à la rupture. À l'heure actuelle, il semble que les algorithmes de points intérieurs pour la programmation linéaire et conique constituent la piste la plus prometteuse, d'autant que de nombreux solveurs dédiés (libres ou commerciaux) sont aujourd'hui disponibles.

Nous avons donc choisi d'utiliser avantageusement la performance de ces algorithmes pour le développement des outils qui seront présentés dans cette thèse. Nous verrons, en particulier, que l'utilisation de solveurs de programmation conique guidera certains choix de modélisation, notamment du point de vue de la formulation du critère de résistance, celui-ci conditionnant fortement le type de problème d'optimisation à résoudre. Il est également intéressant de constater que le nombre de logiciels dédiés au calcul à la rupture était relativement restreint jusqu'à présent, ces derniers étant souvent limités à des domaines bien particuliers. En revanche, la diffusion récente de logiciels plus ambitieux tels que LIMITSTATE et OPTUMG2, ainsi que les développements de logiciels encore en cours, invitent à penser que les techniques numériques sont aujourd'hui matures pour une diffusion plus large de l'approche numérique du calcul à la rupture.

* *
*

Deuxième partie

Calcul à la rupture des structures homogènes par éléments finis

Chapitre 3

Éléments finis pour le calcul à la rupture des plaques minces

Résumé : *Ce chapitre présente une mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture pour des plaques minces en flexion à travers l'utilisation d'éléments finis combinant à la fois taux de courbure virtuelle et discontinuité de vitesse de rotation dans le calcul de la puissance résistante maximale. Différents degrés d'interpolation sont considérés pour le champ de vitesse virtuelle. Le problème discret est ensuite formulé comme un problème de programmation conique du second-ordre (SOCP) et résolu à l'aide du solveur MOSEK. La comparaison avec des éléments finis assurant la continuité C^1 du champ de vitesse virtuelle (i.e. la continuité C^0 du taux de rotation) montre que ces éléments discontinus sont plus efficaces, notamment dans le cas de supports encastres. Différents exemples numériques servent à valider la formulation présentée.*

Sommaire

3.1	Formulation générale du calcul à la rupture des plaques en flexion	40
3.1.1	Modèle de plaque : efforts intérieurs et équations d'équilibre	40
3.1.2	Dualisation par le principe des puissances virtuelles	41
3.1.3	Calcul à la rupture des plaques minces en flexion	43
3.2	État de l'art du calcul à la rupture des plaques minces en flexion	47
3.2.1	Méthode des lignes de rupture	47
3.2.2	Éléments finis pour l'approche cinématique	47
3.2.3	Éléments finis pour l'approche statique	48
3.2.4	Autres méthodes	49
3.3	Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique	50
3.3.1	Discrétisation	50
3.3.2	Formulation du problème d'optimisation	53
3.4	Exemples de validation	55
3.4.1	Plaque carrée obéissant au critère de Johansen	55
3.4.2	Plaque carrée obéissant à un critère de von Mises	57
3.4.3	Influence de la distorsion des éléments	60
3.4.4	Exemple de calcul de plancher de bâtiment	60
3.5	Conclusions et perspectives	64

3.1 Formulation générale du calcul à la rupture des plaques en flexion

Cette première section a pour but de poser, dans un premier temps, le problème du calcul à rupture dans le cadre général d'une modélisation de type *plaque*, notamment concernant l'écriture des équations d'équilibre et de leur dualisation par le principe des puissances virtuelles. On s'intéressera ensuite au cas particulier des *plaques minces en flexion* et de la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture pour ce type de structure.

3.1.1 Modèle de plaque : efforts intérieurs et équations d'équilibre

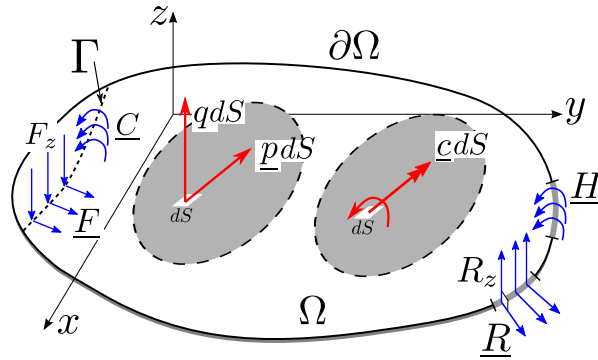


FIGURE 3.1 – Efforts extérieurs de la modélisation de type plaque

Il serait trop long de revenir ici sur tous les aspects de la modélisation mécanique de type *plaque* et de son rapport à une modélisation comme milieu continu 3D. Nous partirons donc directement du modèle bidimensionnel de plaque en considérant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dont les efforts intérieurs sont décrits par un tenseur symétrique des efforts membranaires $\underline{\underline{N}}$, un tenseur symétrique des moments de flexion $\underline{\underline{M}}$ et un vecteur d'efforts tranchants \underline{V} . Pour une présentation plus complète du modèle dans le cadre du calcul à la rupture, le lecteur intéressé pourra se référer au chapitre 10 de l'ouvrage [Salençon, 2013].

Se donnant un repère cartésien $(O; \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, on supposera que la plaque Ω est située dans le plan $(O; \underline{e}_x, \underline{e}_y)$. Les *efforts* extérieurs considérés dans cette modélisation sont (Figure 3.1) :

- une densité surfacique d'efforts situés dans le plan de la plaque, notée $\underline{p} = p_x \underline{e}_x + p_y \underline{e}_y$;
- une densité surfacique d'efforts transversaux, notée $q \underline{e}_z$;

3.1. Formulation générale du calcul à la rupture des plaques en flexion

- une densité surfacique de couples situés dans le plan de la plaque, notée $\underline{c} = c_x \underline{e}_x + c_y \underline{e}_y$;
- une densité linéique (sur une ligne Γ) d'efforts transversaux $F_z \underline{e}_z$, d'efforts tangentiels $\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y$ ou de couples tangentiels $\underline{C} = C_x \underline{e}_x + C_y \underline{e}_y$;
- une densité linéique d'efforts de contact au bord du domaine $\partial\Omega$ comprenant une composante \underline{R} dans le plan de la plaque et une composante suivant la direction transversale à la plaque $R_z \underline{e}_z$;
- une densité linéique de couples de contact comprenant uniquement une composante \underline{H} dans le plan de la plaque.

Dans ces conditions, les équations d'équilibre local s'écrivent :

$$\operatorname{div} \underline{N} + \underline{p} = \underline{0} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \underline{V} + \underline{q} = \underline{0} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \underline{M} + \underline{V} + \underline{c} = \underline{0} \quad (3.3)$$

Tandis que les équations de saut à travers une ligne Γ de normale unitaire \underline{n} en présence des densités linéiques précédentes sont données par :

$$\llbracket \underline{N} \cdot \underline{n} \rrbracket + \underline{F} = \underline{0} \quad (3.4)$$

$$\llbracket \underline{V} \cdot \underline{n} \rrbracket + F_z = 0 \quad (3.5)$$

$$\llbracket \underline{M} \cdot \underline{n} \rrbracket + \underline{C} = \underline{0} \quad (3.6)$$

où $\llbracket \star \rrbracket = (\star)^+ - (\star)^-$ désigne la discontinuité de la quantité \star à travers Γ dont la normale pointe de la région $-$ vers la région $+$.

Enfin, les efforts extérieurs de contact sur un bord de normale sortante \underline{n} sont reliés aux efforts intérieurs par les relations suivantes :

$$\underline{N} \cdot \underline{n} = \underline{R} \quad (3.7)$$

$$\underline{V} \cdot \underline{n} = R_z \quad (3.8)$$

$$\underline{M} \cdot \underline{n} = \underline{H} \quad (3.9)$$

3.1.2 Dualisation par le principe des puissances virtuelles

La dualisation des équations d'équilibre précédentes par le principe des puissances virtuelles fait intervenir une cinématique virtuelle en un point de la plaque composée (Figure 3.2) :

- d'une vitesse virtuelle \widehat{u} située dans le plan de la plaque ainsi que d'une vitesse virtuelle transversale (hors-plan) $\widehat{w} \underline{e}_z$ de la particule attachée au point en question ;
- d'une vitesse angulaire $\widehat{\theta}$ caractérisant la rotation de la microstructure attachée au même point. On lui associe un vecteur $\widehat{\beta} = \underline{e}_z \wedge \widehat{\theta}$, ces deux vecteurs étant situés dans le plan de la plaque.

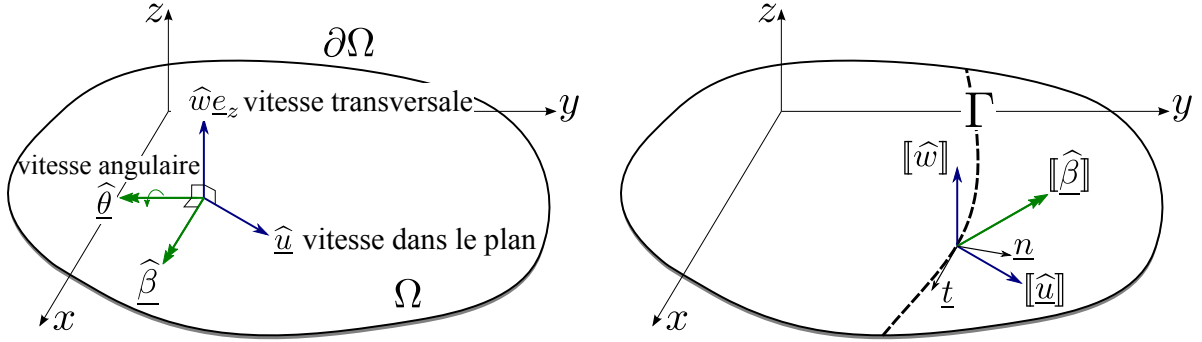


FIGURE 3.2 – Cinématique virtuelle de la plaque (à gauche) et discontinuités de vitesse à travers une ligne (à droite)

Le principe des puissances virtuelles fait alors intervenir la *puissance virtuelle des efforts intérieurs* donnée par :

$$P_{int}(\underline{\hat{u}}, \hat{w}, \underline{\hat{\beta}}) = - \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{N}} : ({}^s \nabla \underline{\hat{u}}) + \underline{V} \cdot (\nabla \hat{w} - \underline{\hat{\beta}}) + \underline{\underline{M}} : ({}^s \nabla \underline{\hat{\beta}}) \right) d\Omega \quad (3.10)$$

où ${}^s \nabla$ correspond à la partie symétrique du gradient par rapport aux coordonnées x, y du plan.

Dans le cas où les champs de vitesse virtuelle présentent une *discontinuité* à travers une ligne Γ , l'expression précédente est complétée par la contribution de ces discontinuités donnée par l'intégrale linéique suivante :

$$P_{int}^{\Gamma}([\underline{\hat{u}}], [\hat{w}], [\underline{\hat{\beta}}]) = - \int_{\Gamma} \left((\underline{\underline{N}} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{\hat{u}}] + (\underline{V} \cdot \underline{n}) [\hat{w}] + (\underline{\underline{M}} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{\hat{\beta}}] \right) dl \quad (3.11)$$

La puissance des efforts extérieurs dans cette cinématique virtuelle s'écrit alors :

$$P_{ext}(\underline{\hat{u}}, \hat{w}, \underline{\hat{\beta}}) = \int_{\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{\hat{u}} + q \hat{w} + \underline{c} \cdot \underline{\hat{\beta}}) d\Omega + \int_{\Gamma} (\underline{F} \cdot \underline{\hat{u}} + F_z \hat{w} + \underline{C} \cdot \underline{\hat{\beta}}) dl + \int_{\partial\Omega} (\underline{R} \cdot \underline{\hat{u}} + R_z \hat{w} + \underline{H} \cdot \underline{\hat{\beta}}) dl \quad (3.12)$$

On supposera, dans toute la suite, que les efforts appliqués à la plaque dépendent de plusieurs paramètres représentés par un vecteur \underline{Q} , de telle sorte que la puissance des efforts extérieurs peut s'écrire sous la forme suivante dans tout champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible :

$$\forall (\underline{\hat{u}}, \hat{w}, \underline{\hat{\beta}}) \text{ C.A. avec } \underline{\hat{q}}, P_{ext}(\underline{\hat{u}}, \hat{w}, \underline{\hat{\beta}}) = \underline{Q} \cdot \underline{\hat{q}} \quad (3.13)$$

où $\underline{\hat{q}}$ représente le vecteur des paramètres cinématiques associés à \underline{Q} par dualité. On parle alors de *mode de chargement* à n paramètres où n est la dimension de \underline{Q} .

3.1. Formulation générale du calcul à la rupture des plaques en flexion

3.1.3 Calcul à la rupture des plaques minces en flexion

3.1.3.1 Approche statique

En toute généralité, un critère de résistance pour un modèle de plaque fait intervenir un domaine convexe G ou, de manière équivalente, une fonction convexe f des trois types d'efforts intérieurs \underline{N} , \underline{M} et \underline{V} :

$$(\underline{N}, \underline{M}, \underline{V}) \in G = \{(\underline{N}, \underline{M}, \underline{V}) \text{ tels que } f(\underline{N}, \underline{M}, \underline{V}) \leq 0\} \quad (3.14)$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas particulier des plaques minces en flexion *i.e.* des problèmes pour lesquels la plaque peut être considérée comme *infinitement résistante* vis-à-vis de l'effort membranaire et de l'effort tranchant. Cette situation se produit notamment dans le cas où l'épaisseur h de la plaque est négligeable devant la dimension caractéristique L du problème ($h \ll L$) et où le chargement pertinent correspond à des efforts transversaux ou des couples de flexion. Dans ce cas, le critère de résistance généralisé ne porte que sur le tenseur des moments de flexion :

$$\underline{M} \in G = \{\underline{M} \text{ tel que } f(\underline{M}) \leq 0\} \quad (3.15)$$

Dans le contexte du mode de chargement à n paramètres introduit précédemment, le domaine K des chargements \underline{Q} potentiellement supportables est alors défini, au sens du calcul à la rupture, de la façon suivante :

$$K = \{\underline{Q}; \exists \underline{M} \text{ statiquement admissible (S.A.) avec } \underline{Q} \text{ et } \underline{M}(x) \in G \quad \forall x \in \Omega\} \quad (3.16)$$

Il est à noter que le terme « *statiquement admissible* » fait *a priori* référence aux équations d'équilibre local, équations de saut et conditions aux limites (3.1)-(3.9) dans lesquelles intervient \underline{M} . Néanmoins, la situation est légèrement plus compliquée dans la mesure où l'hypothèse de résistance infinie vis-à-vis de l'effort membranaire et de l'effort tranchant autorise de travailler avec une classe moins régulière de champs pour \underline{N} et \underline{V} . Comme nous le verrons juste après, cela conduit à une cinématique virtuelle de Love-Kirchhoff, dont les équations d'équilibre et de saut correspondantes par dualité sont moins restrictives que celles présentées précédemment [Krabbenhoft et Damkilde, 2002]. Néanmoins, nous intéressants dans ce chapitre uniquement à l'approche cinématique, nous ne détaillerons pas plus avant cet aspect.

3.1.3.2 Approche cinématique

L'approche cinématique du domaine K est obtenue à l'aide du principe des puissances virtuelles :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}}, \underline{\hat{\beta}}) \text{ C.A. avec } \underline{\hat{q}}, \forall (\underline{N}, \underline{M}, \underline{V}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} \\ P_{ext}(\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}}, \underline{\hat{\beta}}) = -P_{int}(\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}}, \underline{\hat{\beta}}) \leq P_{rm}(\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}}, \underline{\hat{\beta}}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

où l'on a introduit la *puissance résistante maximale* définie par :

$$P_{rm}(\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}}, \underline{\hat{\beta}}) = \int_{\Omega} \pi \left({}^s \underline{\nabla} \underline{\hat{u}}, \underline{\nabla} \underline{\hat{w}} - \underline{\hat{\beta}}, {}^s \underline{\nabla} \underline{\hat{\beta}} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi \left(\underline{n}; \llbracket \underline{\hat{u}} \rrbracket, \llbracket \underline{\hat{w}} \rrbracket, \llbracket \underline{\hat{\beta}} \rrbracket \right) dl \quad (3.18)$$

avec les fonctions d'appui suivantes :

$$\pi \left(\underline{\underline{s}} \nabla \widehat{\underline{u}}, \nabla \widehat{\underline{w}} - \widehat{\underline{\beta}}, \underline{\underline{s}} \nabla \widehat{\underline{\beta}} \right) = \sup_{\substack{(\underline{N}, \underline{V}, \underline{M}); \\ f(\underline{M}) \leq 0}} \left\{ \underline{N} : \underline{\underline{s}} \nabla \widehat{\underline{u}} + \underline{V} \cdot (\nabla \widehat{\underline{w}} - \widehat{\underline{\beta}}) + \underline{M} : \underline{\underline{s}} \nabla \widehat{\underline{\beta}} \right\} \quad (3.19)$$

$$\pi \left(\underline{n}; \llbracket \widehat{\underline{u}} \rrbracket, \llbracket \widehat{\underline{w}} \rrbracket, \llbracket \widehat{\underline{\beta}} \rrbracket \right) = \sup_{\substack{(\underline{N}, \underline{V}, \underline{M}); \\ f(\underline{M}) \leq 0}} \left\{ (\underline{N} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \widehat{\underline{u}} \rrbracket + (\underline{V} \cdot \underline{n}) \llbracket \widehat{\underline{w}} \rrbracket + (\underline{M} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \widehat{\underline{\beta}} \rrbracket \right\} \quad (3.20)$$

Il apparaît alors clairement dans (3.19) et (3.20) que l'hypothèse de résistance infinie vis-à-vis de \underline{N} et \underline{V} conduit à des valeurs finies des fonctions d'appuis, et donc de la puissance résistante maximale, uniquement dans le cas où les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\underline{\underline{s}} \nabla \widehat{\underline{u}} = \underline{0} \quad (3.21)$$

$$\nabla \widehat{\underline{w}} - \widehat{\underline{\beta}} = \underline{0} \quad (3.22)$$

$$\llbracket \widehat{\underline{u}} \rrbracket = \underline{0} \quad (3.23)$$

$$\llbracket \widehat{\underline{w}} \rrbracket = 0 \quad (3.24)$$

Les relations (3.21) et (3.23) correspondent à une déformation et des discontinuités membranaires nulles, tandis que la deuxième ligne (3.22) correspond à la *condition cinématique de Love-Kirchhoff* reliant le taux de rotation au gradient du champ de vitesse transversale que l'on interprète ici comme une *condition de pertinence* liée à la résistance infinie vis-à-vis de l'effort tranchant. Dans ce cas, la déformation généralisée apparaissant en dualité du moment de flexion devient :

$$\underline{\underline{\widehat{\chi}}} = \underline{\underline{s}} \nabla \widehat{\underline{\beta}} = \underline{\underline{s}} \nabla (\nabla \widehat{\underline{w}}) \quad (3.25)$$

et est appelée *taux de courbure virtuelle*. La définition (3.19) se simplifie alors en :

$$\pi \left(\underline{\underline{\widehat{\chi}}} \right) = \sup_{\underline{M}; f(\underline{M}) \leq 0} \left\{ \underline{M} : \underline{\underline{\widehat{\chi}}} \right\} \quad (3.26)$$

La condition de pertinence (3.24) pour les discontinuités liée à la résistance infinie à l'effort tranchant impose également que le champ de vitesse transversale soit continu. Le taux de rotation $\widehat{\underline{\beta}}$ étant relié au gradient de $\widehat{\underline{w}}$, la discontinuité de ce dernier à travers une ligne Γ est nécessairement normale à celle-ci en vertu du lemme d'Hadamard [Salençon, 2001, Salençon, 2013] :

$$\llbracket \widehat{\underline{\beta}} \rrbracket = \llbracket \nabla \widehat{\underline{w}} \rrbracket = \llbracket \partial_n \widehat{\underline{w}} \rrbracket \underline{n} \quad (3.27)$$

La fonction d'appui (3.20) relative aux discontinuités se réduit alors à :

$$\pi \left(\underline{n}; \llbracket \partial_n \widehat{\underline{w}} \rrbracket \right) = \sup_{\underline{M}; f(\underline{M}) \leq 0} \left\{ M_{nn} \llbracket \partial_n \widehat{\underline{w}} \rrbracket \right\} \quad (3.28)$$

3.1. Formulation générale du calcul à la rupture des plaques en flexion

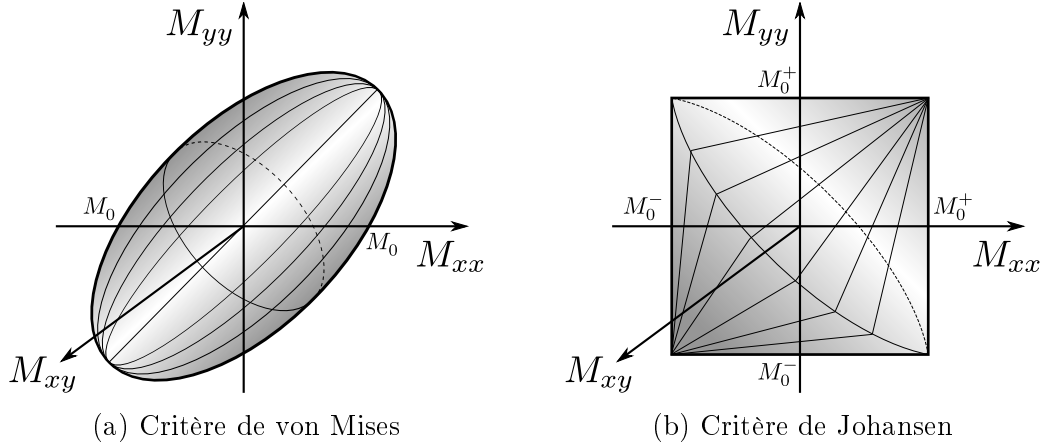


FIGURE 3.3 – Représentation des critères dans l'espace (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})

La mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture pour les plaques minces en flexion repose donc sur la construction de champs de vitesse transversale \hat{w} tels que¹ :

- \hat{w} est cinématiquement admissible ;
- \hat{w} est continu sur tout le domaine Ω ;
- \hat{w} est deux fois différentiable dans Ω excepté le long de *lignes de ruptures* ou *charnières* Γ au travers desquelles il convient de calculer la contribution des discontinuités du vecteur rotation².

Dans le cas d'un mode de chargement à un paramètre, par exemple une densité surfacique d'efforts transversaux $q = \lambda q_0$ où q_0 est une valeur de référence et λ un facteur multiplicatif, la détermination du chargement limite $q^+ = \lambda^+ q_0$ revient à résoudre le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} \lambda^+ = \min_{\hat{w} \text{ C.A.}} & \int_{\Omega} \pi(\underline{s}\nabla(\nabla\hat{w})) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; [[\partial_n \hat{w}]]) dl \\ \text{t.q.} & \int_{\Omega} q_0 \hat{w} d\Omega = 1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.1.3.3 Critères de résistance usuels pour les plaques minces en flexion

Dans la suite, on considérera deux critères de résistance isotropes usuels pour les plaques en flexion :

- le critère de von Mises (Figure 3.3a)

$$\sqrt{M_{xx}^2 + M_{yy}^2 - M_{xx}M_{yy} + 3M_{xy}^2} \leq M_0 \quad (3.30)$$

1. L'espace fonctionnel *ad hoc* correspond à l'espace $HB(\Omega)$ des fonctions à Hessien borné. [Demengel, 1983, Demengel, 1984]

2. À noter que ces charnières peuvent également être situées le long du bord $\partial\Omega$ de la plaque.

où M_0 représente la résistance en flexion uniaxiale de la plaque. Ce critère est représenté par un ellipsoïde dans l'espace (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) .

- le critère de Johansen [Johansen, 1962] (Figure 3.3b)

$$-M_0^- \leq M_I, M_{II} \leq M_0^+ \quad (3.31)$$

où M_I et M_{II} sont les valeurs principales de \underline{M} et M_0^+ (resp. M_0^-) représente la résistance en flexion uniaxiale positive (resp. négative) de la plaque. A noter que ce critère peut se réécrire de la façon suivante dans l'espace (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) :

$$\begin{aligned} (M_0^- + M_{xx})(M_0^- + M_{yy}) &\geq M_{xy}^2 \\ (M_0^+ - M_{xx})(M_0^+ - M_{yy}) &\geq M_{xy}^2 \\ -M_0^- &\leq M_{xx}, M_{yy} \leq M_0^+ \end{aligned} \quad (3.32)$$

correspondant à l'intersection de deux cônes.

Pour ces deux critères, les fonctions d'appui sont données par :

- critère de von Mises

$$\pi(\underline{\hat{\chi}}) = \frac{2}{\sqrt{3}} M_0 \sqrt{\hat{\chi}_{xx}^2 + \hat{\chi}_{yy}^2 + \hat{\chi}_{xx}\hat{\chi}_{yy} + \hat{\chi}_{xy}^2} \quad (3.33)$$

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \partial_n \hat{w} \rrbracket) = \frac{2}{\sqrt{3}} M_0 \llbracket \partial_n \hat{w} \rrbracket \quad (3.34)$$

- critère de Johansen

$$\pi(\underline{\hat{\chi}}) = \max \{ M_0^+ \hat{\chi}_I; -M_0^- \hat{\chi}_I \} + \max \{ M_0^+ \hat{\chi}_{II}; -M_0^- \hat{\chi}_{II} \} \quad (3.35)$$

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \partial_n \hat{w} \rrbracket) = \max \{ M_0^+ \llbracket \partial_n \hat{w} \rrbracket; -M_0^- \llbracket \partial_n \hat{w} \rrbracket \} \quad (3.36)$$

3.2 État de l'art du calcul à la rupture des plaques minces en flexion

3.2.1 Méthode des lignes de rupture

Une mise en œuvre particulière de l'approche cinématique du calcul à la rupture pour les plaques en flexion, appelée « *méthode des lignes de ruptures* », a été proposée dans [Johansen, 1962] et consiste à considérer un champ de vitesse transversale continu et linéaire par morceaux en divisant la plaque en plusieurs régions subissant un mouvement de corps rigide. La ligne correspondant à l'interface entre deux régions, appelée *ligne de rupture* ou *charnière*, est alors le siège d'une discontinuité de vitesse de rotation entre les deux régions adjacentes. Ainsi, seul le terme de discontinuité de rotation contribue au calcul de la puissance résistante maximale, le taux de courbure virtuel étant nul dans chaque région.

Ce choix particulier de champ de vitesse virtuel fait que la puissance résistante maximale est très facile à calculer. Dans certains cas, il est possible d'obtenir la solution exacte avec des mécanismes très simples. Un nombre important de solutions, complètes ou approchées, est présenté dans l'ouvrage [Save *et al.*, 1997]. Ainsi, cette approche a connu un attrait important de la part des ingénieurs, notamment pour la conception de dalles en béton armé. Néanmoins, son efficacité repose sur la qualité du mécanisme de ruine choisi et il peut être relativement difficile d'optimiser ce choix de façon analytique.

Quoi qu'il en soit, la méthode des lignes de rupture est trop restrictive dans le cas général pour fournir la solution exacte d'un problème de calcul à la rupture pour les plaques en flexion, même avec une infinité de lignes de rupture [Bræstrup, 1971]. On peut, en effet, montrer que la méthode des lignes de rupture ne peut approcher la charge ultime exacte d'une plaque carrée de von Mises simplement appuyée sous pression uniforme à moins de 10%.

Malgré son utilisation courante par les ingénieurs, de récents calculs [Ramsay *et al.*, 2014] ont également montré que les bornes supérieures obtenues à l'aide de mécanismes de dimensionnement usuels pouvaient surestimer la charge ultime exacte de près de 40%, alors que les réglementations suggèrent en général d'appliquer un coefficient de sécurité de l'ordre de 10%. L'outil numérique est donc indispensable afin d'estimer avec précision et fiabilité ces charges ultimes.

3.2.2 Éléments finis pour l'approche cinématique

Des approches numériques ont été développées afin d'automatiser la méthode des lignes de rupture. [Chan, 1972, Anderheggen et Knöpfel, 1972, Munro et Da Fonseca, 1978] ont proposé de discrétiser la structure en éléments finis triangulaires, les lignes de rupture potentielles étant donc situées selon les bords des éléments. Cette formulation conduit à un problème de programmation linéaire qui peut être résolu par l'algorithme du simplexe ou par des algorithmes de points intérieurs. Ce type de discrétisation présente néanmoins une forte dépendance au maillage et notamment à l'orientation des bords des éléments. Afin d'éviter ce problème, certains auteurs [Johnson, 1994, Jen-

nings, 1996, Thavalingam *et al.*, 1998] ont proposé des approches itératives optimisant la disposition du maillage en fonction de la solution approchée calculée. Mais ce type d'optimisation est difficile à effectuer dans la mesure où le problème à résoudre n'est pas convexe. L'approche *Discontinuity Layout Optimization* (DLO)[Gilbert *et al.*, 2014] se fonde sur un réseau prédéfini de nœuds (et non pas sur un maillage) et optimise la configuration des lignes de ruptures construites à partir de ce réseau.

Une étape naturelle a ensuite consisté à utiliser des éléments finis de plaque développés dans le cadre de l'élasticité linéaire. Cependant, il est relativement compliqué de construire rigoureusement des éléments finis de plaque vérifiant simultanément la cinématique de Love-Kirchhoff et la continuité du vecteur rotation [Zienkiewicz *et al.*, 2005, Ciarlet, 1978]. Certains éléments classiques tel que l'élément DKT³ assurent cette condition en un nombre fini de points de l'élément mais pas de manière exacte sur tout l'élément. On peut donc se poser la question de la pertinence des résultats de l'approche cinématique obtenus dans ce cas, le statut de borne supérieure étant inévitablement perdu. Le même type de problématique apparaît dans le cadre d'une formulation mixte, interpolant à la fois le champ de vitesse et celui des efforts intérieurs.

Enfin, certains auteurs ont proposé d'utiliser des éléments finis assurant la continuité C^1 de manière exacte, au prix d'un nombre de degrés de liberté relativement important [Capsoni et Corradi, 1999, Le *et al.*, 2010a].

Il semblerait que les seuls auteurs (en dehors de la littérature consacrée à la méthode des lignes de rupture par éléments finis) ayant considéré des champs de vitesse uniquement continus et, donc, autorisant une contribution des discontinuités de rotation à la puissance résistante maximale soient Hodge et Belytschko qui ont considéré un champ quadratique par élément [Hodge et Belytschko, 1968]. Le lecteur intéressé trouvera dans [Bleyer *et al.*, 2014] un résultat de Γ -convergence de la solution discrète vers la solution continue pour les éléments finis au moins quadratiques.

3.2.3 Éléments finis pour l'approche statique

Certains travaux se sont penchés sur la formulation de l'approche statique des plaques minces en flexion par éléments finis. Si cette approche reste relativement simple à formuler, mentionnons tout de même que le choix du degré d'interpolation du champ de moment de flexion peut entraîner certaines difficultés. En effet, une interpolation linéaire du champ de moment fait que $\text{div } \underline{M}$ est constant dans chaque élément ce qui fait, par exemple, que l'on ne peut pas considérer de densités surfaciques d'efforts transversaux. Une interpolation au moins quadratique est alors nécessaire. Dans le cas contraire, il convient alors de considérer des distributions linéiques équivalentes d'efforts transversaux sur le bord des éléments [Krabbenhoft et Damkilde, 2002].

D'autre part, le choix d'une interpolation quadratique fait qu'il est *a priori* impossible de vérifier le critère de résistance de manière exacte dans chaque élément. Dans [Nguyen-Dang et König, 1976, Le *et al.*, 2010a], un critère portant sur la moyenne a été introduit dans le cas d'un matériau de von Mises. Nous proposerons une stratégie alternative dans

3. Discrete Kirchhoff Triangle

3.2. État de l'art du calcul à la rupture des plaques minces en flexion

le chapitre suivant.

3.2.4 Autres méthodes

Enfin, mentionnons également le développement récent de méthodes sans maillage pour la discrétisation des deux approches : EFG⁴ pour la statique [Le *et al.*, 2010b] et la cinématique [Le *et al.*, 2009], C^1 -NEM⁵ [Zhou *et al.*, 2012] pour la cinématique. Des approches isogéométriques fondées sur une interpolation d'ordre élevée de la géométrie et du champ de vitesse ont également été proposées [Nguyen-Xuan *et al.*, 2014].

On peut se poser la question de la pertinence de ce type d'approches pour le calcul à la rupture dans la mesure où :

- les méthodes sans maillage font appel à des fonctions de formes dont le support n'est pas restreint à un seul élément, introduisant des nombreux schémas d'approximation dans le calcul des équations d'équilibre ou des déformations généralisées ;
- l'écriture du critère de résistance s'en trouve alors grandement compliquée et n'est donc, en pratique, jamais vérifié de manière exacte ;
- les conditions aux limites sont également vérifiées de manière approchée.

Ainsi, ces méthodes ont l'inconvénient d'accumuler différents niveaux d'approximation par rapport à une formulation rigoureuse par éléments finis, perdant ainsi la simplicité du raisonnement du calcul à la rupture. Enfin, ces méthodes utilisent, en général, une interpolation de degré élevé, *i.e.* au moins C^1 , voire plus, du champ de vitesse. Dans la mesure où les champs optimaux présentent très souvent des discontinuités, il paraît inutile de vouloir à tout prix travailler avec des champs très réguliers. De manière générale, les exemples numériques n'ont pas permis de montrer que ces méthodes permettent de mieux approcher les solutions optimales, bien qu'il soit difficile de faire une comparaison rigoureuse en terme de finesse de l'interpolation avec des méthodes par éléments finis.

4. Element-Free Galerkin

5. C^1 Natural Element Method

3.3 Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique

Dans cette section, l'approche cinématique par l'extérieur est mise en œuvre en considérant une discrétisation par éléments finis de la plaque et différentes interpolations du champ de vitesse. Le problème d'optimisation correspondant est ensuite formulé comme un problème de *programmation conique du second-ordre* (SOCP⁶) pour les deux critères considérés. Afin d'alléger les notations, on omettra dans la suite le symbole $\hat{\cdot}$ lié au caractère virtuel des champs de vitesse.

3.3.1 Discrétisation

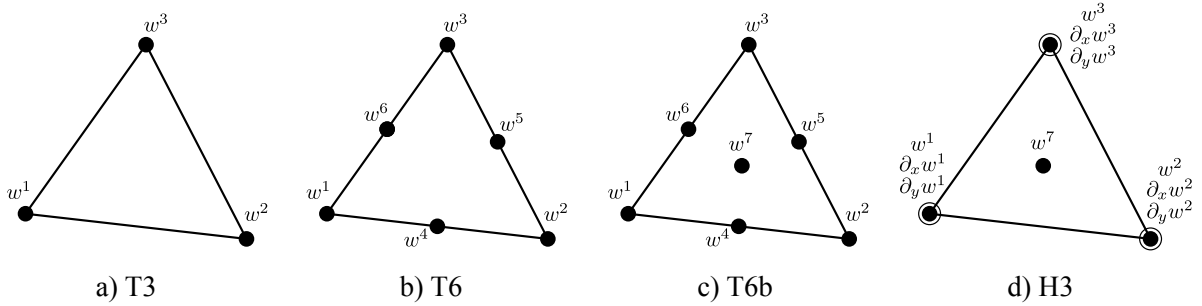


FIGURE 3.4 – Éléments finis triangulaires et degrés de liberté associés

On suppose que le domaine Ω de la plaque est discrétisée selon un ensemble N_E d'éléments finis triangulaires Ω_e . La particularité essentielle de notre approche consiste à considérer des degrés de liberté du champ de vitesse virtuelle attachés, non pas à un nœud du maillage comme dans la méthode des éléments finis traditionnelle, mais à un élément du maillage. Ainsi, un même nœud géométrique sera, *a priori*, le siège d'autant de valeurs du champ de vitesse virtuelle qu'il y a d'éléments partageant le nœud en question⁷.

Dans les exemples suivants, on considérera 4 types d'interpolation différentes pour le champ de vitesse : la première (T3) considère une interpolation linéaire de w correspondant donc à des éléments de charnières pures, la deuxième (T6) considère une interpolation quadratique, la troisième (T6b) généralise la deuxième en rajoutant une fonction de forme cubique de type *bulle* et la quatrième est une interpolation cubique de type Hermite (H3) *i.e.* en interpolant à la fois le champ w et ses dérivées (Figure 3.4). Dans tous les cas, les degrés de liberté attachés à un élément e seront notés \mathbf{u}_e et ordonnés de la façon suivante :

6. Second-Order Cone Programming

7. Si ce point de vue peut paraître inutile dans le cas des plaques minces du fait de la continuité de \hat{w} , nous le retenons ici dans un souci de cohérence avec les chapitres suivants dans lesquels il devient essentiel.

3.3. Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique

- pour T3 :

$$\mathbf{u}_e = \langle w^1 \quad w^2 \quad w^3 \rangle^T \quad (3.37)$$

- pour T6 :

$$\mathbf{u}_e = \langle w^1 \quad w^2 \quad w^3 \quad w^4 \quad w^5 \quad w^6 \rangle^T \quad (3.38)$$

- pour T6b :

$$\mathbf{u}_e = \langle w^1 \quad w^2 \quad w^3 \quad w^4 \quad w^5 \quad w^6 \quad w^7 \rangle^T \quad (3.39)$$

- pour H3 :

$$\mathbf{u}_e = \langle w^1 \quad \partial_x w^1 \quad \partial_y w^1 \quad w^2 \quad \partial_x w^2 \quad \partial_y w^2 \quad w^3 \quad \partial_x w^3 \quad \partial_y w^3 \quad w^7 \rangle^T \quad (3.40)$$

où x^i représente la valeur de la quantité x au nœud i de l'élément en question, les indices de 1 à 3 indiquant les 3 sommets du triangle, les indices de 4 à 6 indiquant les milieux des côtés du triangle et l'indice 7 le centre de gravité de celui-ci. Ainsi, le nombre total de degrés de liberté sera de $n_{dof}N_E$ où n_{dof} correspond au nombre de degrés de liberté par élément, *i.e.* la longueur de \mathbf{u}_e .

De manière classique, on attache à chaque élément e un élément de référence de côté unité dans un plan paramétré par ξ et η à partir desquels sont exprimées les fonctions de formes liées à chaque type d'interpolation. Ne considérant que des éléments triangulaires à bords droits, la transformation géométrique entre le triangle courant et le triangle de référence sera donc une transformation affine.

Nous ne donnons dans la suite que les grandes lignes de la formulation discrète. Pour plus de détails, notamment concernant l'expression des fonctions de forme et de leur dérivées, on pourra se référer à [Bleyer et de Buhan, 2013c].

3.3.1.1 Contribution du terme de taux de courbure à la puissance résistante maximale

Le calcul du terme de courbure de la puissance résistante maximale, noté

$$P_{rm}^{def} = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{\chi}}) d\Omega \quad (3.41)$$

nécessite de calculer, dans un premier temps, le taux de courbure $\underline{\underline{\chi}}$ relié au Hessian du champ de vitesse par (3.25). Dans le cas des éléments de charnières pures (T3), ce dernier est identiquement nul. Il est constant par élément pour T6 et linéaire pour T6b et H3. Le calcul des dérivées secondes des fonctions de forme et de la matrice jacobienne de la transformation géométrique permet donc d'exprimer, à travers une matrice \mathbf{B} , les composantes du tenseur $\underline{\underline{\chi}}$ dans chaque élément en fonction de ses valeurs aux sommets du triangle :

$$\chi_e^i = \mathbf{B}^i \mathbf{u}_e \quad \forall i = 1, \dots, 3 \quad (3.42)$$

où $\chi_e^i = \langle \chi_{xx} \quad \chi_{yy} \quad 2\chi_{xy} \rangle^T$ au sommet i de l'élément e .

Il convient ensuite d'évaluer numériquement l'intégrale (3.41) en sommant sur tous les éléments et en évaluant l'intégrale sur chaque élément. Or, la fonction d'appui $\pi(\underline{\underline{\chi}})$

pouvant admettre une expression relativement complexe, il est généralement impossible de calculer cette intégrale de manière exacte. Une première approche consiste alors à évaluer l'intégrale élémentaire par une quadrature de Gauss ou autre. Une alternative intéressante, soulignée dans [Makrodimopoulos et Martin, 2007], consiste à remarquer que puisque $\underline{\chi}$ varie, au plus, linéairement dans chaque élément, que $\pi(\underline{\chi})$ est une fonction convexe et que le triangle possède des bords droits, alors on dispose de l'approximation par excès suivante :

$$P_{rm}^{def} = \sum_{e=1}^{N_E} \int_{\Omega_e} \pi(\underline{\chi}) d\Omega \lesssim \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{i=1}^3 \frac{A_e}{3} \pi(\chi_e^i) \quad (3.43)$$

où A_e correspond à l'aire de l'élément e . Cette approche a l'intérêt de conserver le caractère de borne supérieure du résultat final et ne fait intervenir que le calcul de la fonction d'appui aux trois sommets du triangle.

3.3.1.2 Contribution du terme de discontinuités à la puissance résistante maximale

On s'attache, à présent, à calculer le terme de discontinuité de la puissance résistante maximale, noté

$$P_{rm}^{disc} = \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \llbracket \partial_n w \rrbracket) dl \quad (3.44)$$

Considérons une arête j du maillage. Si j n'appartient pas à la frontière, il existe alors deux éléments e et e' possédant l'arête j en commun. Les discontinuités du champ de vitesse w à travers l'arête j , notées $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket^j$, sont calculées par l'intermédiaire d'une relation du type :

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket^j = \mathbf{D}_j \mathbf{u}_j \quad (3.45)$$

où $\mathbf{u}_j = \langle \mathbf{u}_e \ \mathbf{u}_{e'} \rangle^T$. Afin de satisfaire la condition de pertinence (3.24), on imposera donc $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket^j = 0$ sur toutes les arêtes du maillage. De la même manière, on peut calculer la discontinuité normale du gradient de w à travers l'arête j à travers une relation du type :

$$\llbracket \theta_n \rrbracket^j = \mathbf{n}_j^T \mathbf{G}_j \mathbf{u}_j \quad (3.46)$$

où \mathbf{n}_j est le vecteur normal à l'arête j et \mathbf{G}_j est une matrice permettant de calculer le gradient du champ de vitesse.

De la même manière que précédemment, l'intégrale (3.44) est donc calculée en sommant sur toutes les arêtes du maillage. Dans le cas de l'interpolation linéaire (T3) et quadratique (T6), la discontinuité normale du gradient est constante ou linéaire ce qui permet d'évaluer l'intégrale élémentaire soit de manière exacte, soit en l'approximant par excès par la même approche que précédemment. Dans le cas d'une interpolation cubique, la variation du gradient est quadratique, on ne peut donc pas utiliser l'approche précédente. Dans ce cas, on a choisi d'approximer l'intégrale à l'aide d'une formule des

3.3. Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique

trapèzes à n_d points :

$$P_{rm}^{disc} = \sum_{j=1}^{N_D} \int_{\Gamma_j} \pi(\underline{n}; [\partial_n w]) dl \approx \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{n_d} l_j \omega_k \pi(\underline{n}; [\theta_n]_k^j) \quad (3.47)$$

où $[\theta_n]_k^j$ est la valeur du saut du gradient normal au point k de la quadrature, ω_k le poids correspondant à ce point, l_j la longueur de l'arête j et N_D le nombre d'arêtes actives *i.e.* contribuant à la puissance résistante maximale (arêtes internes au maillage et situées sur la frontière où la rotation est bloquée (encastrement)).

Il est à noter que le caractère de borne supérieure du résultat final est perdu *a priori* avec ce type d'approximation. Néanmoins, pour des maillages suffisamment fins et un nombre de points d'intégration n_d suffisant, l'intégrale est suffisamment bien approchée. De plus, il est très facile de post-traiter le champ de vitesse optimal obtenu, en évaluant de manière exacte cette intégrale afin de conserver le statut de borne supérieure dans tous les cas.

3.3.2 Formulation du problème d'optimisation

Nous formulons, à présent, le problème d'optimisation discret correspondant à (3.29). En collectant l'ensemble des degrés de liberté dans un vecteur global \mathbf{u} et en notant \mathbf{f} le vecteur global correspondant aux efforts extérieurs, la mise en œuvre de l'approche cinématique fournit donc une borne supérieure $\lambda_c \geq \lambda^+$ du multiplicateur ultime exact et revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \lambda^+ \leq \lambda_c = \min_{\mathbf{u}} \quad & \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{i=1}^3 \frac{A_e}{3} \pi(\boldsymbol{\chi}_e^i) + \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{n_d} l_j \omega_k \pi(\underline{n}; [\theta_n]_k^j) \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{u} = 1 \\ & \mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi} \\ & \mathbf{n}\mathbf{G}\mathbf{u} = [\boldsymbol{\theta}_n] \\ & \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.48)$$

où $\mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi}$ correspond à l'assemblage de toutes les relations (3.42), $\mathbf{n}\mathbf{G}\mathbf{u} = [\boldsymbol{\theta}_n]$ à l'assemblage des relations (3.46) et $\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à l'assemblage des relations (3.45).

À ce stade, nous sommes en présence d'un problème d'optimisation d'une fonction non-linéaire sous contraintes linéaires. À l'aide de l'épigraphe des fonctions d'appui (cf. Annexe A), on peut reformuler le problème précédent comme la minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes linéaires et non-linéaires. On montre, à présent, que ces contraintes non-linéaires peuvent s'écrire comme des contraintes coniques du second-ordre pour les deux critères de résistance considérés.

3.3.2.1 Formulation conique : critère de von Mises

La fonction d'appui pour le critère de von Mises s'écrit :

$$\pi(\boldsymbol{\chi}_e^i) = M_0 \sqrt{\boldsymbol{\chi}_e^{iT} \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}_e^i} \quad \text{avec } \mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

En introduisant la factorisation de Cholesky \mathbf{C} de la matrice \mathbf{Q} telle que $\mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$, on peut réécrire :

$$\pi(\boldsymbol{\chi}_e^i) = M_0 \|\mathbf{C}^T \boldsymbol{\chi}_e^i\| \quad \text{avec } \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

De sorte que la minimisation de $\pi(\boldsymbol{\chi}_e^i)$ équivaut à la minimisation :

$$\begin{aligned} \min \quad & M_0 t_e^i \\ \text{t.q.} \quad & \|\mathbf{C}^T \boldsymbol{\chi}_e^i\| \leq t_e^i \end{aligned} \quad (3.51)$$

qui correspond donc à une contrainte conique du second-ordre (cône de Lorentz) sur le quadruplet formé par la variable auxiliaire t_e^i et le vecteur $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\chi}_e^i$.

Pour le terme de discontinuité, celui-ci se réduit à une valeur absolue $\pi(\underline{n}; \llbracket \theta_n \rrbracket_k^j) = \frac{2}{\sqrt{3}} M_0 |\llbracket \theta_n \rrbracket_k^j|$ dont la minimisation est équivalente à

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{2}{\sqrt{3}} M_0 s_k^j \\ \text{t.q.} \quad & \llbracket \theta_n \rrbracket_k^j \leq s_k^j \\ & -\llbracket \theta_n \rrbracket_k^j \leq s_k^j \end{aligned} \quad (3.52)$$

soit 2 contraintes linéaires d'inégalité.

Ainsi, l'introduction de variables auxiliaires t_e^i et s_k^j et des contraintes (3.51)-(3.52) dans (3.48) conduit à minimiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires et coniques du second-ordre. Il s'agit donc d'un problème de programmation conique du second-ordre (SOCP) que l'on résout à l'aide du solveur MOSEK [Mosek, 2014].

3.3.2.2 Formulation conique : critère de Johansen

D'après [Makrodimitopoulos, 2010], la fonction d'appui du critère de Johansen peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\chi}_e^i) &= M_0^+ \langle 1 \ 1 \ 0 \rangle \cdot \boldsymbol{\chi}_e^{i+} + M_0^- \langle 1 \ 1 \ 0 \rangle \cdot \boldsymbol{\chi}_e^{i-} \\ \text{avec} \quad \boldsymbol{\chi}_e^i &= \mathbf{diag}(1, 1, \sqrt{2})(\boldsymbol{\chi}_e^{i+} - \boldsymbol{\chi}_e^{i-}) \\ \boldsymbol{\chi}_e^{i+}, \boldsymbol{\chi}_e^{i-} &\in \mathcal{L}_r^3 \end{aligned} \quad (3.53)$$

où $\mathcal{L}_r^n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2} \text{ t.q. } \|z\|^2 \leq 2xy; x, y \geq 0\}$ désigne la rotation du cône de Lorentz de dimension n . Il s'agit aussi d'une contrainte conique du second-ordre (cf. Annexe A).

Le terme de discontinuité se traite d'une manière similaire au cas du critère de von Mises. En effet, la minimisation de $\pi(\underline{n}; \llbracket \theta_n \rrbracket_k^j)$ est équivalente à

$$\begin{aligned} \min \quad & s_k^j \\ \text{t.q.} \quad & M_0^+ \llbracket \theta_n \rrbracket_k^j \leq s_k^j \\ & -M_0^- \llbracket \theta_n \rrbracket_k^j \leq s_k^j \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.4 Exemples de validation

Cette section a pour but de valider les éléments finis proposés sur des exemples dont on dispose de solutions connues et de comparer leurs performances par rapport à d'autres éléments de la littérature (notamment des éléments finis assurant la continuité C^1 du vecteur rotation). On modélisera également, à titre d'exemple, le plancher d'un bâtiment et on étudiera l'influence de l'orthotropie sur le mécanisme de ruine.

Pour tous les exemples, on a fixé le nombre de points d'intégration par arête à $n_d = 5$.

3.4.1 Plaque carrée obéissant au critère de Johansen

Le premier problème est celui d'une plaque carrée de côté L , sous un chargement transversal uniformément réparti d'intensité q et obéissant au critère de Johansen de moment limite en flexion positive et négative valant $M_0^+ = M_0^- = M_0$.

3.4.1.1 Bords en appuis simples

On considère tout d'abord le cas d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre côtés. On dispose dans ce cas d'une solution exacte dont le mécanisme de ruine correspond à 4 lignes de rupture le long des diagonales de la plaque et dont la charge ultime vaut $q^+ = 24M_0/L^2$. On utilise dans un premier temps un maillage structuré (Figure 3.5a) avec des bords d'éléments situés le long des diagonales (par symétrie, on ne modélise qu'un quart de la plaque). On obtient alors la charge ultime exacte à 10^{-3} près pour les quatre types d'éléments T3, T6, T6b et H3 et un mécanisme optimal correspondant bien à la solution (Figure 3.5b). Par ailleurs, on constate bien que le terme dû à la déformation de courbure dans la puissance résistante maximale est quasiment nul, la totalité de la puissance étant produite par les discontinuités de rotation.

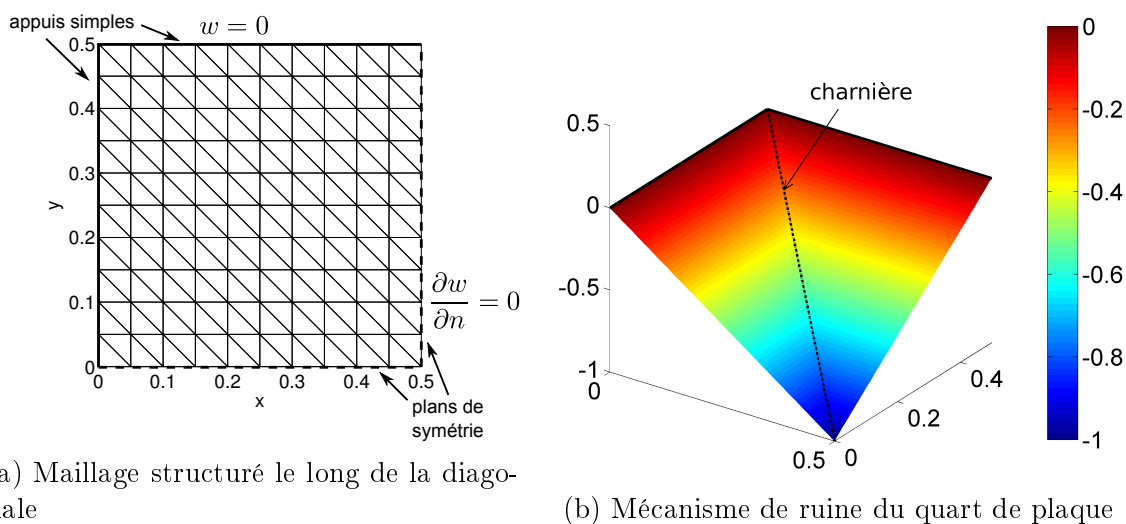


FIGURE 3.5 – Mécanisme de ruine avec charnière le long de la diagonale

Étudions, à présent, l'influence de la disposition des éléments sur la qualité de la solution pour les différents éléments finis considérés. Pour cela, nous examinons deux

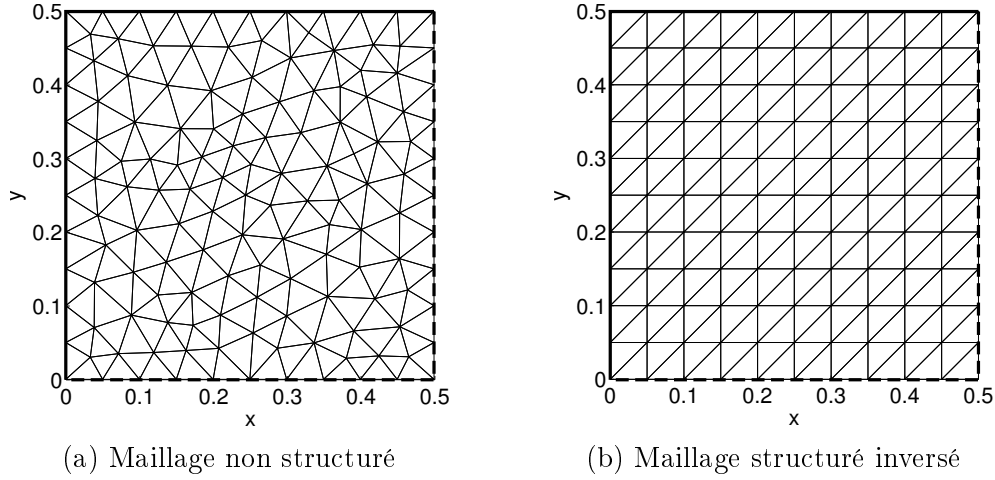


FIGURE 3.6 – Maillages dont les bords d’éléments ne sont pas situés sur la charnière (représentés avec 10 éléments par côté du quart de plaque)

types de maillages dont les bords d’éléments ne sont plus situés sur la diagonale *a priori* : un maillage non-structuré (Figure 3.6a) et un maillage structuré dans le sens opposé (Figure 3.6b). Le tableau 3.1 reproduit les bornes supérieures obtenues pour chaque élément suivant les maillages retenus. La contribution relative de P_{rm}^{def} à la puissance totale est aussi indiquée dans chaque cas. On constate alors que les éléments de charnière pure (T3) ne permettent pas d’obtenir une bonne estimation de la valeur exacte, même en raffinant le maillage. Ceux-ci sont donc bien trop dépendant de l’agencement des bords des éléments dans le maillage. En revanche, les autres éléments présentent une dépendance au maillage bien plus faible et convergent vers la solution exacte en augmentant le nombre d’éléments. On constate qu’en augmentant le degré d’interpolation du champ de vitesse et donc de la courbure, le terme de courbure devient prépondérant et la qualité de l’estimation s’améliore.

En post-traitant le mécanisme optimal obtenu, on peut calculer les directions et les valeurs principales χ_I, χ_{II} du taux de courbure. En multipliant ces valeurs principales par la longueur caractéristique de l’élément correspondant, on obtient l’équivalent de la discontinuité de rotation à travers l’élément, les directions principales donnant l’orientation des axes de rotation. Il est donc possible de représenter, sur un même graphique, un champ de discontinuités de rotation équivalent en plus des discontinuités situées à travers les arêtes du maillage. C’est ce que nous avons représenté sur les Figure 3.7a-3.7d pour les éléments T6 et H3 avec les deux types de maillages. Les directions principales du tenseur de courbure récréent bien localement, de manière diffuse, l’orientation de la charnière le long de la diagonale. De plus, on comprend que l’élément H3 présente de meilleures performances que T6 puisqu’il permet de recréer un champ de courbure équivalent à une discontinuité de rotation le long de la diagonale dans une région plus étroite que pour T6.

3.4. Exemples de validation

Maillage	T3	T6	T6b	H3
<i>Exact</i>	<i>24</i>			
Non structuré (5 él./côté)	29.21 (0%)	25.74 (75%)	25.65 (75%)	24.97 (88%)
Non structuré (10 él./côté)	30.29 (0%)	25.30 (84%)	25.17 (86%)	24.55 (94%)
Structuré inversé (5 él./côté)	44.68 (0%)	30.13 (70%)	29.28 (77%)	26.50 (89%)
Structuré inversé (10 él./côté)	44.31 (0%)	28.19 (76%)	27.48 (80%)	25.31 (94%)

TABLEAU 3.1 – Valeurs des bornes supérieures (adimensionnées par M_0/L^2) obtenues pour chaque élément suivant les différents types et finesses de maillage. La contribution relative de P_{rm}^{def} à la puissance totale est exprimée entre parenthèses.

3.4.1.2 Bords encastrés

Le problème de la plaque encastrée a été résolu analytiquement par [Fox, 1974], la charge ultime valant $q^+ = 42.851M_0/L^2$. Le mécanisme est relativement compliqué car il est formé de portions de surfaces développables, de surfaces anticlastiques (où la courbure locale est positive dans une direction et négative dans la direction orthogonale), ainsi que de zones où le champ de vitesse est nul près des coins. La Figure 3.8a représente la convergence des bornes supérieures vers la solution exacte pour les différents éléments finis en fonction de la taille caractéristique des éléments (le premier maillage structuré a été utilisé). On constate à nouveau que l'élément T3 présente une convergence extrêmement faible tandis que les autres éléments présentent une précision à taille de maille fixée et une vitesse de convergence d'autant plus grande que l'ordre d'interpolation du champ de vitesse est élevé. Sur la Figure 3.8b, le champ de discontinuité de rotation équivalent ainsi que celui produit par les arêtes des éléments ont été représentés. On constate effectivement la présence de zones sans déformation près du coin ainsi que la présence de zones anticlastiques.

3.4.2 Plaque carrée obéissant à un critère de von Mises

Nous étudions à présent le cas d'un critère de von Mises. Nous ne disposons plus de solutions analytiques mais uniquement d'estimations numériques. Ce problème a été récemment traité par Le [Le *et al.*, 2010a] en utilisant des éléments finis HCT (Hsieh-Clough-Tocher) assurant la continuité C^1 du champ de vitesse, donc sans discontinuités de rotation. Les Figures 3.9a et 3.9b représentent ainsi la convergence des éléments HCT, T6, T6b et H3 dans le cas de bords en appuis simples et encastrés. L'erreur relative a été calculée à partir d'une solution numérique de référence pour des maillages plus fins que ceux utilisés ici, soit $q^+ = 25.02M_0/L^2$ [Capsoni et Corradi, 1999] pour les appuis simples et $q^+ = 44.20M_0/L^2$ [Bleyer et de Buhan, 2013c, Bleyer et de Buhan, 2013b] pour le cas encastré.

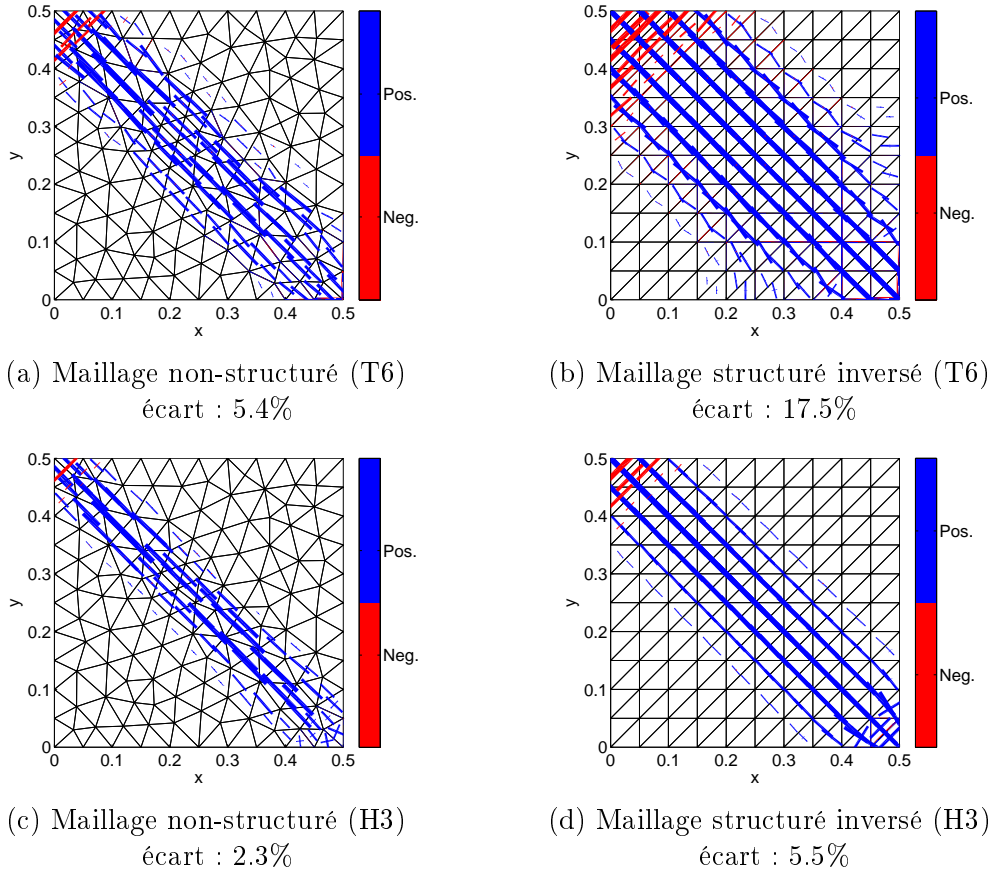


FIGURE 3.7 – Champs de discontinuité de rotation équivalent dû à la courbure. La largeur des segments indique localement la valeur relative de la discontinuité de rotation équivalente, l'orientation étant donnée par les directions principales du tenseur de courbure. Les couleurs indiquent si l'on se trouve en flexion positive (bleu) ou négative (rouge). L'écart relatif à la valeur exacte de la charge limite est rappelé à chaque fois.

Dans le cas simplement appuyé, l'élément HCT présente une précision et une vitesse de convergence légèrement supérieures à celles de l'élément H3. Cela est dû au fait que l'interpolation du champ de vitesse est plus riche puisque cet élément possède 12 degrés de libertés et est constitué de 3 sous-éléments avec une interpolation cubique du champ de vitesse dans chaque sous-élément. En revanche, dans le cas encastré, la performance de l'élément HCT est nettement dégradée, sa précision, à taille de maille fixée, étant bien plus faible que celle de l'élément quadratique T6. Même sa vitesse de convergence est plus faible et proche de celle de T6. Ces figures illustrent donc bien le fait que malgré le haut degré d'interpolation de l'élément HCT, la non-prise en compte des discontinuités de rotations a pour effet de dégrader fortement les performances de l'élément dans les cas où celles-ci deviennent prépondérantes.

3.4. Exemples de validation

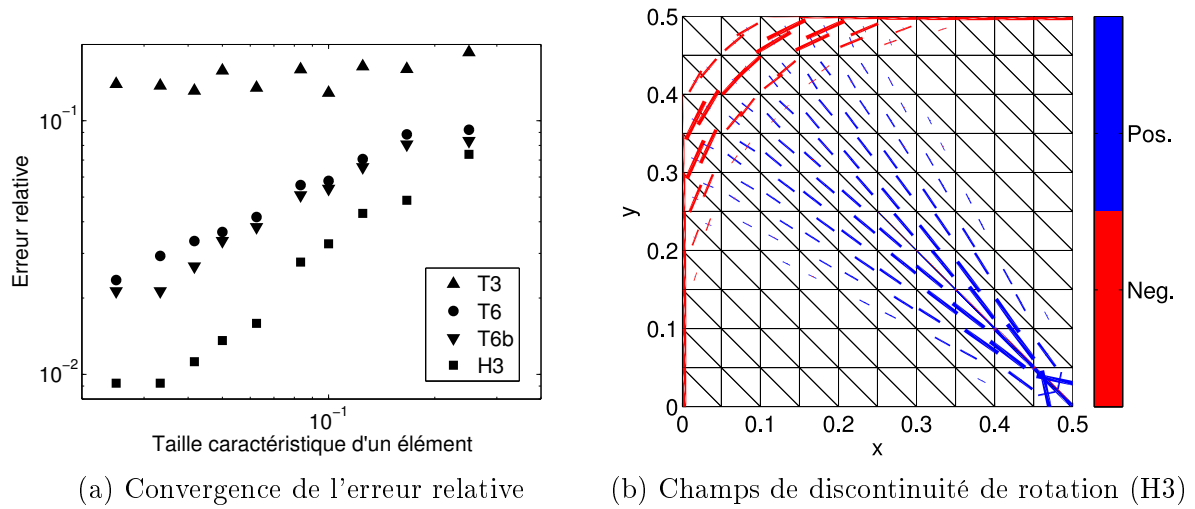


FIGURE 3.8 – Plaque carrée avec bords encastés

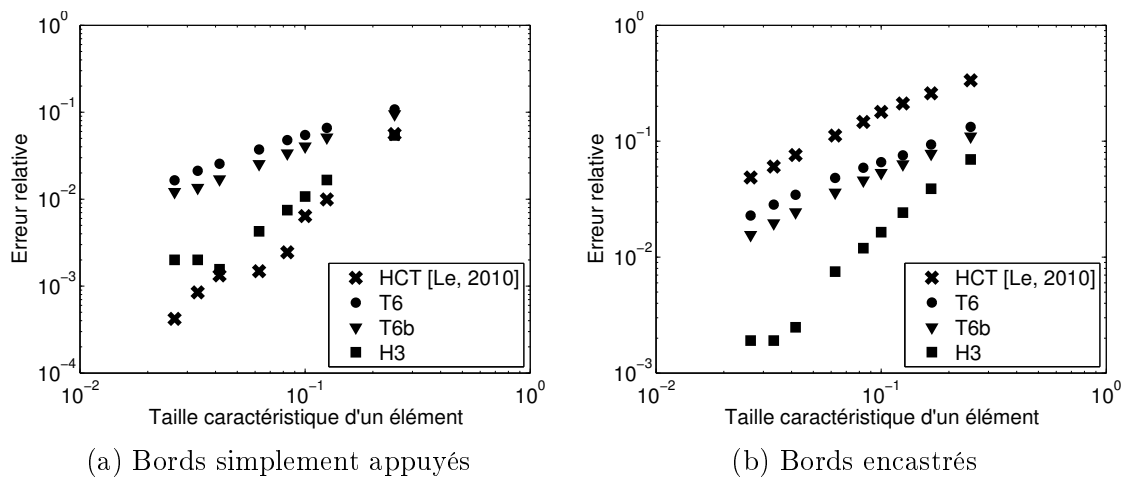


FIGURE 3.9 – Courbes de convergence pour le problème de la plaque carrée de von Mises

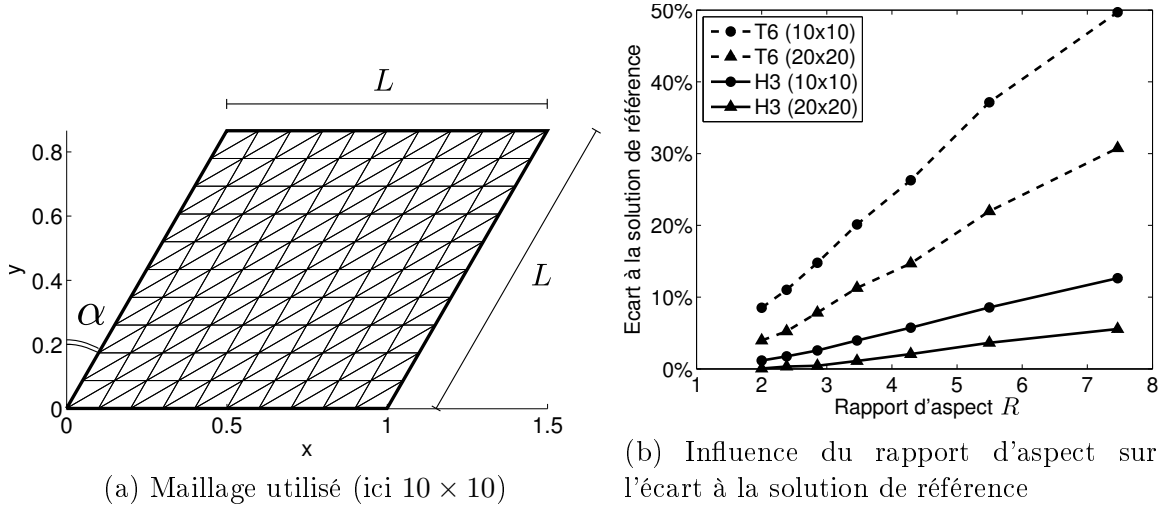


FIGURE 3.10 – Exemple de la plaque rhomboédrique pour étudier l'influence de la distorsion des éléments

3.4.3 Influence de la distorsion des éléments

Nous nous intéressons ici à l'influence de la distorsion des éléments T6 et H3 sur la qualité de la solution obtenue. Pour cela, nous avons considéré une plaque rhomboédrique (Figure 3.10a), en appui simple sur ses quatre côtés, sous chargement uniforme et obéissant au critère de von Mises, maillée selon un maillage structuré orienté le long de la grande diagonale. Le rapport d'aspect des éléments est défini comme $R = E_{max}/h_{min}$ où E_{max} désigne la longueur du plus grand côté de l'élément et h_{min} celle de la plus petite hauteur. Ainsi, on a $R = 2 \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})$ où α est l'angle indiqué sur la Figure 3.10a. Nous avons fait varier l'angle α afin d'augmenter le rapport d'aspect des éléments et nous avons comparé la charge ultime calculée avec ce maillage à la charge ultime de référence obtenue avec un maillage optimisé (*i.e.* pour lequel le rapport d'aspect des éléments reste faible). L'écart à cette solution de référence est représenté sur la Figure 3.10b.

On constate alors que l'élément fini T6 est beaucoup plus sensible à la distorsion que l'élément H3. Bien que ce dernier souffre également de l'influence de la distorsion des éléments, l'écart à la solution de référence reste modéré, de l'ordre de 5% pour un rapport d'aspect proche de 4.

3.4.4 Exemple de calcul de plancher de bâtiment

Nous considérons, à présent, un exemple d'application proche d'un cas réel d'ingénierie. La structure considérée représente un plancher de bâtiment de forme polygonale, certains bords étant libres d'autres étant simplement appuyés. Ce plancher présente également un trou rectangulaire en son centre. La structure est soumise à une pression uniformément répartie d'intensité unitaire et obéit au critère de Johansen ($M_0 = 1$). La géométrie de la structure est représenté sur la Figure 3.11 tirée de [Gilbert *et al.*, 2014].

3.4. Exemples de validation

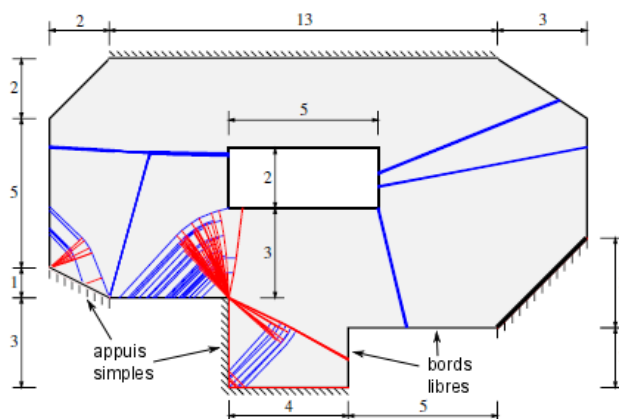


FIGURE 3.11 – Géométrie du plancher de bâtiment et solution obtenue par la procédure DLO [Gilbert *et al.*, 2014]

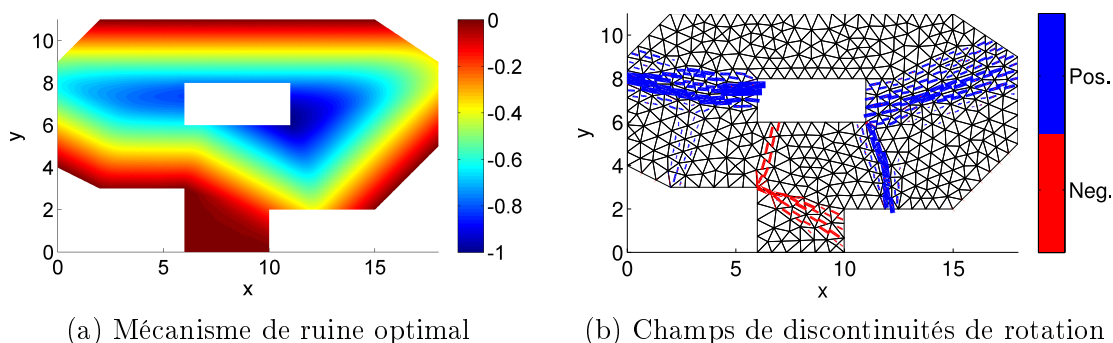


FIGURE 3.12 – Calcul de plancher (cas isotrope)

Sur cette même figure, la solution obtenue par la procédure DLO a été représentée sous la forme de lignes bleues (resp. rouges) pour les charnières en flexion positive (resp. négative). Ce type de représentation est en général prisée par les ingénieurs qui peuvent ainsi identifier les zones les plus sollicitées pour éventuellement les renforcer et également afin de s'en inspirer pour imaginer des mécanismes de ruine relativement simples pour vérifier les calculs numériques.

La Figure 3.12 représente le mécanisme optimal ainsi que les champs de discontinuités de rotation obtenus grâce à notre approche (éléments H3) pour ce problème. On constate en particulier que les champs de rotation de la Figure 3.12b reproduisent relativement bien l'ensemble des charnières obtenus par la procédure DLO et que notre approche permet donc également de produire des informations utiles aux ingénieurs. De plus, pour un maillage relativement grossier, on obtient une borne supérieure de 0.1386 soit seulement 2.3% de plus que la procédure DLO (0.1355) avec une discrétisation relativement fine et 2.4% de moins (0.142) que [Le *et al.*, 2015] avec des éléments HCT

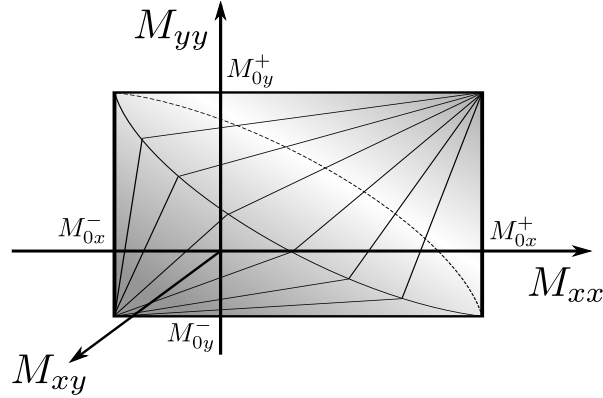


FIGURE 3.13 – Représentation du critère de Nielsen

et un maillage similaire.

Enfin, nous terminons l'étude de cet exemple en considérant une généralisation orthotrope dans les directions x et y du critère de Johansen, aussi appelé critère de Nielsen (Figure 3.13). Dans ce cas, la fonction d'appui (3.53) est remplacée par [Makrodimopoulos, 2010] :

$$\pi(\boldsymbol{\chi}_e^i) = \langle M_{0x}^+ \ M_{0y}^+ \ 0 \rangle \cdot \boldsymbol{\chi}_e^{i+} + \langle M_{0x}^- \ M_{0y}^- \ 0 \rangle \cdot \boldsymbol{\chi}_e^{i-} \quad (3.55)$$

tandis que la fonction d'appui relative aux discontinuités est donnée par :

$$\pi(\underline{n}, [[\partial_n \hat{w}]]) = (n_x)^2 \max\{M_{0x}^+ [[\partial_n \hat{w}]]; -M_{0x}^- [[\partial_n \hat{w}]]\} + (n_y)^2 \max\{M_{0y}^+ [[\partial_n \hat{w}]]; -M_{0y}^- [[\partial_n \hat{w}]]\} \quad (3.56)$$

Sur les Figures 3.14 à 3.16, nous avons représenté les solutions obtenues pour un rapport entre la résistance à la flexion selon y et celle selon x successivement égal à $M_{0y}/M_{0x} = 2, 5$ et 10 (résistance identique en flexion positive et négative $M_{0x}^\pm = M_{0x}$ et $M_{0y}^\pm = M_{0y}$). On constate alors une évolution du mécanisme avec l'augmentation du degré d'anisotropie. Dans le cas où la résistance à la flexion selon y est 10 fois supérieure à celle selon x , on observe que le mécanisme optimal obtenu tend à privilégier des situations où la flexion se fait selon la direction x , ce qui n'était pas le cas dans la situation isotrope. La rapidité des calculs (de l'ordre de quelques secondes ici) permet ainsi d'envisager d'optimiser le dimensionnement en considérant différents dispositifs de construction et de renforcement et de choisir celui qui fournit la situation la plus satisfaisante du point de vue de l'ingénieur.

3.4. Exemples de validation

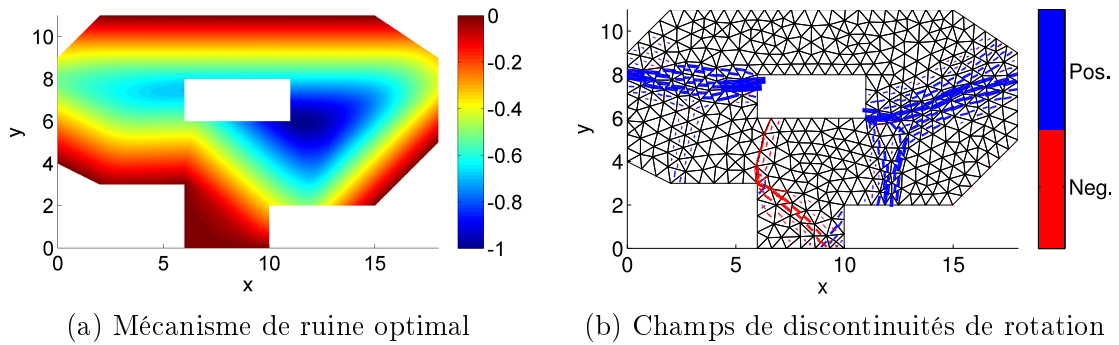


FIGURE 3.14 – Calcul de plancher (cas orthotrope : $M_{0y} = 2$, $M_{0x} = 1$)
majorant de la charge limite : 0.2334

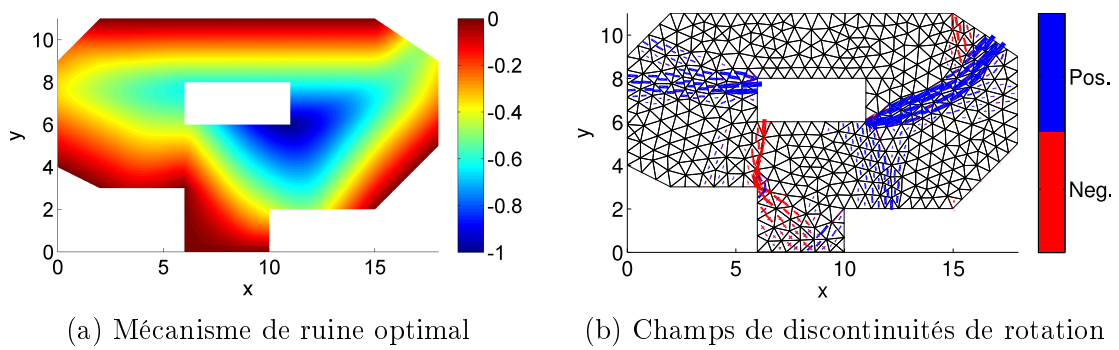


FIGURE 3.15 – Calcul de plancher (cas orthotrope : $M_{0y} = 5$, $M_{0x} = 1$)
majorant de la charge limite : 0.4878

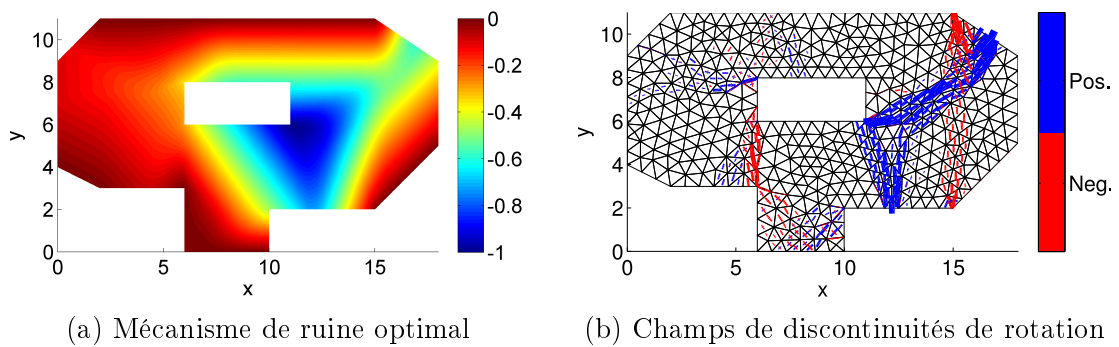


FIGURE 3.16 – Calcul de plancher (cas orthotrope : $M_{0y} = 10$, $M_{0x} = 1$)
majorant de la charge limite : 0.8182

3.5 Conclusions et perspectives

Ce chapitre s'est intéressé à la mise en œuvre d'éléments finis performants pour l'approche cinématique des plaques minces en flexion. La particularité de ce modèle mécanique requiert d'interpoler le champ de vitesse virtuelle de manière continue, tandis que les discontinuités de la composante normale du gradient sont autorisées pourvu qu'elles soient prises en compte dans le calcul de la puissance résistante maximale.

Peu d'éléments finis intégrant ces discontinuités avaient été proposés jusque-là, or, nous avons vu qu'il est très facile de formuler de tels éléments. L'inclusion de ces discontinuités en calcul est donc d'autant plus naturelle dans le cas des plaques qu'il est difficile de construire des éléments finis assurant la continuité C^1 du champ de vitesse comme cela est nécessaire dans le cas de l'élasticité.

Cependant, nous avons également vu qu'il est nécessaire de prendre en compte un terme de déformation de courbure pour converger vers la solution. En effet, une interpolation du champ de vitesse linéaire par morceaux, correspondant à des éléments de charnières pures, est trop dépendant de la géométrie du maillage et ne produit que des bornes supérieures qui ne sont pas toujours de bonne qualité.

Notre approche combine ainsi les deux types de mécanisme de ruine élémentaires, conduisant alors à une faible dépendance vis à vis du maillage, du fait du terme de déformation et de très bonnes performances dans le cas de mécanismes localisés (cas d'un critère de Johansen, bords encastrés...).

Il est bien entendu possible d'imaginer étudier d'autres types d'éléments finis (Lagrange cubique par exemple) et de comparer leurs différentes performances. Grâce au formalisme de la programmation conique, il est également possible de prendre en compte des conditions de contact⁸ pour modéliser le cas de soulèvement d'appuis (appuis unilatéraux). Enfin, une extension intéressante concerne la prise en compte d'une interaction de la plaque avec des poutres de rive, ce qui est également relativement aisé à implémenter si l'on dispose du critère de résistance de la poutre en question.

* *
 *
 *

8. il suffit de rajouter une contrainte linéaire du type $w \geq 0$ à tous les nœuds situés sur la frontière en question

Chapitre 4

Éléments finis pour le calcul à la rupture des plaques épaisses

Résumé : *Ce chapitre propose d'étendre le travail du chapitre précédent au cas des plaques épaisses présentant, à la différence des plaques minces, une résistance finie vis-à-vis de l'effort tranchant. Nous proposons de mettre en œuvre, par éléments finis, à la fois l'approche statique et l'approche cinématique. En particulier, l'utilisation de champs de vitesses discontinus pour l'approche cinématique permet d'éviter naturellement le phénomène de verrouillage en cisaillement fréquemment rencontré pour ce type de problème. Pour les deux approches, le problème est formulé comme un problème de programmation conique. Les deux approches seront ensuite validées sur quelques exemples.*

Sommaire

4.1	Formulation générale du calcul à la rupture pour les plaques épaisses	66
4.1.1	Approche statique	66
4.1.2	Approche cinématique	66
4.1.3	Critères de résistance pour les plaques épaisses dans l'espace $(\underline{M}, \underline{V})$	67
4.2	Mise en œuvre par éléments finis de l'approche statique	72
4.2.1	Équations d'équilibre, de saut et conditions aux limites	72
4.2.2	Écriture du critère de résistance	75
4.2.3	Optimisation	76
4.3	Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique	77
4.3.1	Discretisation	77
4.3.2	Formulation du problème d'optimisation	78
4.3.3	Commentaires concernant le type d'éléments finis considéré	80
4.4	La problématique du verrouillage en cisaillement	81
4.4.1	Verrouillage des éléments finis formulés en déplacement/vitesse	81
4.4.2	Verrouillage ou non des éléments finis considérés	82
4.4.3	Éléments finis en efforts généralisés pour l'approche statique	83
4.5	Exemples de validation	84
4.5.1	Plaque carrée sous charge uniformément répartie	84
4.5.2	Problème de la plaque en L	88
4.6	Conclusions et perspectives	89

4.1 Formulation générale du calcul à la rupture pour les plaques épaisses

Cette section reprend la présentation de la section 3.1 en la particulierisant au cas d'une résistance finie vis-à-vis de l'effort tranchant. On s'intéresse ensuite à un critère de résistance d'interaction entre moment de flexion et effort tranchant.

4.1.1 Approche statique

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas des plaques épaisses en interaction flexion-effort tranchant. Contrairement au chapitre précédent, on suppose ici que la plaque possède une résistance finie vis-à-vis de l'effort tranchant, tandis qu'on conserve l'hypothèse d'une résistance infinie vis-à-vis de l'effort membranaire. Cette hypothèse devient pertinente dans le cas où la plaque ne peut plus être considérée comme mince *i.e.* dans le cas où l'on est dans un régime intermédiaire pour l'élancement L/h (typiquement de l'ordre de 10). On parle alors de plaque *épaisse*. Le critère de résistance généralisé porte alors à la fois sur le moment de flexion $\underline{\underline{M}}$ et l'effort tranchant \underline{V} :

$$(\underline{\underline{M}}, \underline{V}) \in G = \{(\underline{\underline{M}}, \underline{V}) \text{ tel que } f(\underline{\underline{M}}, \underline{V}) \leq 0\} \quad (4.1)$$

Le domaine K des chargements \underline{Q} potentiellement supportables est alors défini de la façon suivante :

$$K = \{Q; \exists(\underline{\underline{M}}, \underline{V}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} \text{ et } (\underline{\underline{M}}(x), \underline{V}(x)) \in G \quad \forall x \in \Omega\} \quad (4.2)$$

où l'espace des champs $(\underline{\underline{M}}, \underline{V})$ statiquement admissibles correspond aux champs vérifiant les équations (3.2),(3.3),(3.5),(3.6),(3.8),(3.9).

Dans le cas d'un mode de chargement à un paramètre composé uniquement d'une densité surfacique d'efforts transversaux $q = \lambda q_0$, la détermination du chargement limite $q^+ = \lambda^+ q_0$ par l'approche statique revient à résoudre le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} \lambda^+ = \max_{\underline{\underline{M}}, \underline{V}} \quad & \lambda \\ \text{t.q.} \quad & \text{div } \underline{V} + \lambda q_0 = 0 \quad (\Omega) \\ & \text{div } \underline{\underline{M}} + \underline{V} = \underline{0} \quad (\Omega) \\ & \llbracket \underline{V} \cdot \underline{n} \rrbracket = 0 \quad (\Gamma) \\ & \llbracket \underline{\underline{M}} \cdot \underline{n} \rrbracket = \underline{0} \quad (\Gamma) \\ & \text{C.L.} \quad (\partial\Omega) \\ & (\underline{\underline{M}}(x), \underline{V}(x)) \in G \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.1.2 Approche cinématique

Dans le cas d'une résistance infinie vis-à-vis de \underline{N} uniquement, seules les conditions de pertinence (3.21) et (3.23) doivent être vérifiées, la condition cinématique de Love-Kirchhoff n'est donc plus nécessaire dans ce cas. Notant alors

$$\widehat{\gamma} = \nabla \widehat{w} - \widehat{\beta} \quad (4.4)$$

4.1. Formulation générale du calcul à la rupture pour les plaques épaisses

le taux de cisaillement virtuel apparaissant en dualité de l'effort tranchant et toujours $\underline{\hat{\chi}} = {}^s\nabla\underline{\hat{\beta}}$ le taux de courbure virtuelle, la fonction d'appui (3.19) se réduit ici à :

$$\pi(\underline{\hat{\chi}}, \underline{\hat{\gamma}}) = \sup_{\substack{(\underline{M}, \underline{V}); \\ f(\underline{M}, \underline{V}) \leq 0}} \left\{ \underline{M} : \underline{\hat{\chi}} + \underline{V} \cdot \underline{\hat{\gamma}} \right\} \quad (4.5)$$

Le champ de vitesse transversale n'étant plus nécessairement continu, la discontinuité du vecteur rotation à travers une ligne Γ n'est plus nécessairement normale à cette dernière et on a donc pour la fonction d'appui (3.20) liée aux discontinuités :

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \underline{\hat{\beta}} \rrbracket, \llbracket \underline{\hat{w}} \rrbracket) = \sup_{\substack{(\underline{M}, \underline{V}); \\ f(\underline{M}, \underline{V}) \leq 0}} \left\{ (\underline{M} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \underline{\hat{\beta}} \rrbracket + (\underline{V} \cdot \underline{n}) \llbracket \underline{\hat{w}} \rrbracket \right\} \quad (4.6)$$

La mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture pour les plaques épaisses repose donc sur la construction de champs de vitesse transversale $\underline{\hat{w}}$ et de champs de rotation $\underline{\hat{\beta}}$ tels que¹ :

- $\underline{\hat{w}}$ et $\underline{\hat{\beta}}$ sont cinématiquement admissibles ;
- $\underline{\hat{w}}$ et $\underline{\hat{\beta}}$ sont une fois différentiables dans Ω excepté le long de lignes Γ (qu'on pourrait appeler *lignes de ruptures généralisées*) au travers desquelles il convient de calculer la contribution des discontinuités du vecteur rotation et du champ de vitesse transversale.

Dans le cas du mode de chargement précédent, la détermination du chargement limite $q^+ = \lambda^+ q_0$ par l'approche cinématique revient à résoudre le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} \lambda^+ = \min_{\substack{\underline{\hat{w}}, \underline{\hat{\beta}} \text{ C.A.}}} & \int_{\Omega} \pi \left({}^s\nabla\underline{\hat{\beta}}, \underline{\nabla}\underline{\hat{w}} - \underline{\hat{\beta}} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \llbracket \underline{\hat{\beta}} \rrbracket, \llbracket \underline{\hat{w}} \rrbracket) dl \\ \text{t.q.} & \int_{\Omega} q_0 \underline{\hat{w}} d\Omega = 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.1.3 Critères de résistance pour les plaques épaisses dans l'espace $(\underline{M}, \underline{V})$

4.1.3.1 Commentaires d'ordre général

La construction d'un critère de résistance prenant en compte l'interaction entre moment de flexion et effort tranchant fait l'objet de débats depuis de nombreuses années. Par exemple, Drucker [Drucker, 1956] a souligné, dans le cas des poutres, le fait qu'il est impossible de déterminer un critère de résistance local ne dépendant que

1. L'espace fonctionnel *ad hoc* correspond à l'espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée pour $\underline{\hat{w}}$ et $BD(\Omega)$ des fonctions à déformation bornée pour $\underline{\hat{\beta}}$. [Temam et Strang, 1980]

de la section droite de la poutre, alors que cela est possible pour les interactions effort normal-moment de flexion par exemple. En effet, un tel critère dépend *a priori* d'une longueur interne et/ou du chargement imposé. La problématique reste la même dans le cas des plaques.

Si la détermination de critères de résistance en efforts généralisés peut se déduire d'une procédure de changement d'échelle en résolvant un problème de calcul à la rupture sur un milieu continu 3D élémentaire avec un mode de chargement bien posé, la difficulté provient ici du couplage entre $\underline{\underline{M}}$ et \underline{V} dans l'équation d'équilibre, ces deux paramètres du mode de chargement n'étant alors plus indépendants.

Plutôt que d'étudier en détails la problématique de la détermination d'un tel critère de résistance par une méthode de changement d'échelle, nous prenons ici le parti de se donner une certaine forme pour le critère de résistance qu'on pourrait qualifier de « forfaitaire ». Ce parti pris est motivé, d'une part par les dispositions réglementaires de dimensionnement qui introduisent parfois une limitation de l'effort tranchant et, d'autre part, par notre objectif de produire des outils de calcul de structures à destination de l'ingénieur.

4.1.3.2 Critère de résistance

Nous notons ici $G_M \subset \mathbb{R}^3$ l'intersection du critère de résistance complet G avec le sous-espace correspondant à des efforts tranchants nuls ($\underline{V} = \underline{0}$). Ce critère G_M sera pris égal au critère de von Mises pour les plaques minces en flexion (3.30) dans toute la suite.

De la même manière, l'intersection de G avec le sous-espace correspondant à des moments de flexion nuls ($\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{0}}$) sera noté $G_V \subset \mathbb{R}^2$ et sera pris égal à un critère isotrope limitant la norme du vecteur d'effort tranchant :

$$\underline{V} \in G_V = \left\{ \underline{V} \text{ t.q. } \sqrt{V_x^2 + V_y^2} - V_0 \leq 0 \right\}$$

Les résistances en flexion pure M_0 et en effort tranchant pur V_0 peuvent être reliées à la résistance uniaxiale en traction/compression σ_0 d'un milieu continu 3D homogène d'épaisseur h obéissant au critère de von Mises par les relations suivantes :

$$M_0 = \frac{\sigma_0 h^2}{4} \quad ; \quad V_0 = \frac{\sigma_0 h}{\sqrt{3}} \quad (4.8)$$

On considérera deux situations différentes pour le critère complet dans l'espace $(\underline{\underline{M}}, \underline{V})$ [Bleyer et de Buhan, 2014c] :

- le cas *sans interaction* entre $\underline{\underline{M}}$ et \underline{V} (Figure 4.1a) :

$$G = \{ (\underline{\underline{M}}, \underline{V}) \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } \underline{\underline{M}} \in G_M \text{ et } \underline{V} \in G_V \} = G_M \times G_V \quad (4.9)$$

- le cas *avec interaction* entre $\underline{\underline{M}}$ et \underline{V} (Figure 4.1b) :

$$G = \{ (\underline{\underline{M}}, \underline{V}) \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } f_{MV}(\underline{\underline{M}}, \underline{V}) \leq 0 \} \quad (4.10)$$

4.1. Formulation générale du calcul à la rupture pour les plaques épaisses

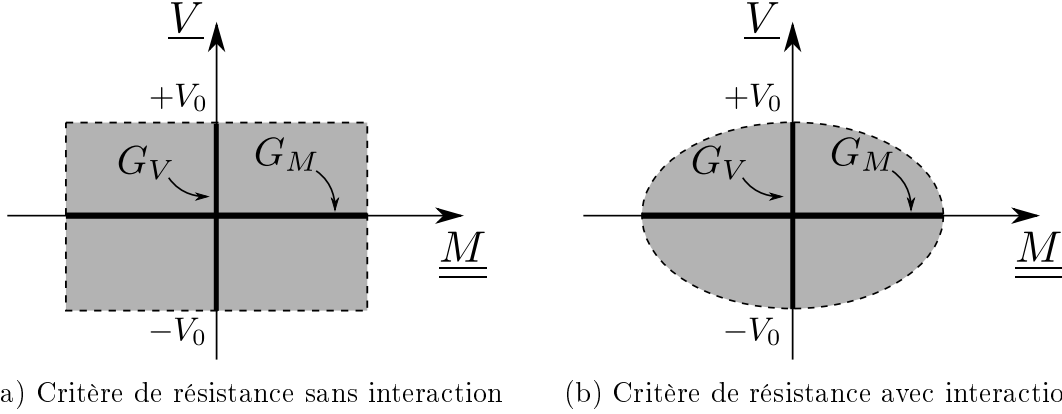


FIGURE 4.1 – Représentation schématique des critères de résistance dans l'espace $(\underline{M}, \underline{V})$

où :

$$f_{MV}(\underline{M}, \underline{V}) = \sqrt{\frac{M_{xx}^2 + M_{yy}^2 - M_{xx}M_{yy} + 3M_{xy}^2}{M_0^2} + \frac{V_x^2 + V_y^2}{V_0^2}} - 1 \quad (4.11)$$

Le premier critère s'obtient comme le produit cartésien des critères en flexion pure G_M et en effort tranchant pur G_V de telle sorte qu'il n'y a pas d'interaction entre l'effort tranchant et le moment de flexion dans l'écriture de ce critère.

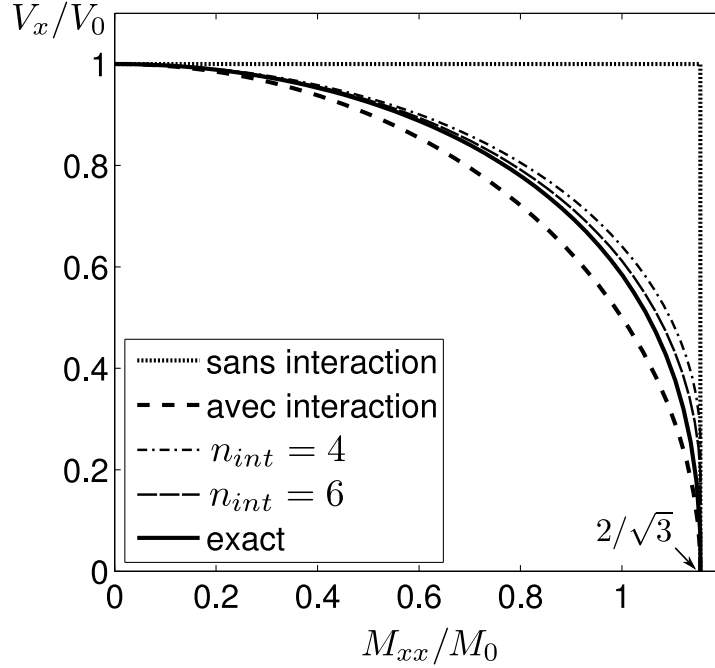
Le deuxième critère en revanche est représenté par un ellipsoïde dans \mathbb{R}^5 , l'intersection de ce dernier avec le sous-espace $(\underline{V} = \underline{0})$ étant donnée par G_M tandis que celle avec $(\underline{M} = \underline{0})$ est donnée par G_V . Ainsi, ce critère est contenu dans le critère sans interaction.

Une situation intéressante correspond au cas où $V_0L/M_0 \rightarrow \infty$ où L est une dimension caractéristique de la plaque. D'après les expressions (4.8), ce régime correspond au cas où l'élanement $L/h \rightarrow \infty$, *i.e.* la situation où la plaque peut-être considérée comme mince. Le critère de résistance G , qu'il y ait interaction ou non, dégénère donc en un critère de résistance de la forme $G = G_M \times \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire ne limitant que le moment de flexion à travers le critère G_M , tandis que la résistance à l'effort tranchant devient infinie. On retrouve donc bien les hypothèses du chapitre précédent et on s'attend à retrouver les résultats de ce dernier dans le cas où $V_0L/M_0 \rightarrow \infty$.

4.1.3.3 Calcul des fonctions d'appui

Le calcul des fonctions d'appui des deux critères considérés s'effectue très facilement en se servant des propriétés exposées dans l'Annexe A. On remarque, en effet, que le critère sans interaction (4.10) peut également être défini comme la somme de Minkowski des critères en flexion pure et en effort tranchant pur, soit $G = (G_M \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times G_V)$, on a alors :

$$\pi(\underline{\hat{\chi}}, \underline{\hat{\gamma}}) = \pi_{G_M}(\underline{\hat{\chi}}) + \pi_{G_V}(\underline{\hat{\gamma}}) = \frac{2}{\sqrt{3}} M_0 \sqrt{\hat{\chi}_{xx}^2 + \hat{\chi}_{yy}^2 + \hat{\chi}_{xx}\hat{\chi}_{yy} + \hat{\chi}_{xy}^2} + V_0 \sqrt{\hat{\gamma}_x^2 + \hat{\gamma}_y^2} \quad (4.12)$$


 FIGURE 4.2 – Projection de G dans le plan (M_{xx}, V_x) pour différents choix de critère

$$\pi(\underline{n}; [\hat{\beta}], [\hat{w}]) = \pi_{G_M}(\underline{n}; [\hat{\beta}]) + \pi_{G_V}(\underline{n}; [\hat{w}]) = \frac{1}{\sqrt{3}} M_0 \sqrt{4[\hat{\beta}_n]^2 + [\hat{\beta}_t]^2} + V_0 |[\hat{w}]| \quad (4.13)$$

Quant au critère avec interaction, on se sert tout simplement de l'expression générale de la fonction d'appui pour un ellipsoïde. On trouve alors :

$$\pi(\underline{\hat{\chi}}, \underline{\hat{\gamma}}) = \sqrt{\frac{4M_0^2}{3} (\hat{\chi}_{xx}^2 + \hat{\chi}_{yy}^2 + \hat{\chi}_{xx}\hat{\chi}_{yy} + \hat{\chi}_{xy}^2) + V_0^2 (\hat{\gamma}_x^2 + \hat{\gamma}_y^2)} \quad (4.14)$$

$$\pi(\underline{n}; [\hat{\beta}], [\hat{w}]) = \sqrt{\frac{M_0^2}{3} (4[\hat{\beta}_n]^2 + [\hat{\beta}_t]^2) + V_0^2 [\hat{w}]^2} \quad (4.15)$$

4.1.3.4 Lien avec le milieu continu 3D

Le critère avec interaction choisi ici n'est pas sans lien avec la modélisation de la plaque comme un milieu continu 3D. En effet, ce critère a déjà été proposé dans les travaux [Papadopoulos et Taylor, 1991, Ibrahimbegović et Frey, 1993] et peut être vu comme une extension au cas des plaques du critère d'interaction d'une poutre de section en I avec une âme évanescente.

Certains auteurs [Lublinter, 1990, Capsoni et Corradi, 1999] ont également proposé de construire le critère de résistance en interaction flexion-effort tranchant en intégrant la fonction π du critère de résistance en *contrainte plane* relatif au milieu continu 3D dans une cinématique de Reissner-Mindlin *i.e.* un champ de vitesse dont le taux de

4.1. Formulation générale du calcul à la rupture pour les plaques épaisses

déformation virtuel est de la forme :

$$\underline{\hat{d}}(z) = \begin{bmatrix} -z\hat{\underline{\chi}} & \hat{\underline{\gamma}}/2 \\ \hat{\underline{\gamma}}^T/2 & d_{zz}(z) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Ainsi, dans le cas d'un critère local de von Mises², la fonction d'appui du critère généralisé est donnée par :

$$\pi(\hat{\underline{\chi}}, \hat{\underline{\gamma}}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{4z^2 (\hat{\chi}_{xx}^2 + \hat{\chi}_{yy}^2 + \hat{\chi}_{xx}\hat{\chi}_{yy} + \hat{\chi}_{xy}^2) + \hat{\gamma}_x^2 + \hat{\gamma}_y^2} dz \quad (4.17)$$

L'expression exacte de l'intégrale précédente étant, en général, trop complexe pour être utilisée efficacement dans une procédure d'optimisation, il est préférable d'approcher cette expression par une formule d'intégration numérique. En particulier, dans le cas d'une quadrature à deux points d'intégration dans l'épaisseur de la plaque situés en $z = \pm h/4$ et en tenant compte des relations (4.8), on vérifie sans peine que l'expression approchée de (4.17) est donnée par (4.14) correspondant au critère d'interaction considéré ici. On voit également qu'avec l'approche fondée sur l'intégration de la fonction d'appui 3D, on peut envisager des formes plus complexes du critère de résistance en augmentant le nombre de points d'intégration, l'expression obtenue pouvant toujours se formuler à l'aide de contraintes coniques du second-ordre.³

À titre d'illustration, nous avons tracé sur la Figure 4.2 la projection du critère dans le plan (M_{xx}, V_x) dans le cas sans interaction, avec interaction avec l'expression (4.14) ainsi qu'avec l'expression (4.17) pour différents nombres de points d'intégration ($n_{int} = 4, 6$) ainsi qu'avec sa valeur exacte. On constate effectivement une différence entre ces différents critères. Néanmoins, nous nous concentrons dans la suite sur les deux premiers qui encadrent le critère obtenu avec (4.17), qui, comme nous l'avons déjà souligné, pourrait tout à fait être utilisé dans notre approche.

2. la composante d_{zz} est alors « ajustée » pour que $\text{tr } \underline{\hat{d}} = 0$

3. Le critère généralisé s'exprime alors comme la somme de Minkowski de plusieurs ellipsoïdes de \mathbb{R}^5 .

4.2 Mise en œuvre par éléments finis de l'approche statique

La mise en œuvre numérique de l'approche statique est effectuée en discrétisant la plaque en N_E éléments finis triangulaires et en interpolant le champ de moment de flexion $\underline{\underline{M}}$ et d'effort tranchant \underline{V} . À nouveau, chaque degré de liberté est attaché à un élément et non pas à un nœud du maillage. On suppose, pour simplifier, que le chargement ne comporte que des densités surfaciques ou linéiques d'efforts transversaux.

4.2.1 Équations d'équilibre, de saut et conditions aux limites

Dans chaque élément e , on considère une interpolation quadratique à 6 nœuds pour chaque composante du moment de flexion tandis que le vecteur des efforts tranchants est interpolé linéairement (Figure 4.3) [Bleyer et de Buhan, 2014c]. En utilisant les fonctions de forme classiques linéaires $N_i^1(\xi, \eta)$ et quadratiques $N_i^2(\xi, \eta)$, on a les relations suivantes :

$$\mathbf{V}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i^1(\xi, \eta) \mathbf{V}^i \quad (4.18)$$

$$\mathbf{M}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 N_i^2(\xi, \eta) \mathbf{M}^i \quad (4.19)$$

où $\mathbf{M} = \langle M_{xx} \ M_{yy} \ M_{xy} \rangle^T$, $\mathbf{V} = \langle V_x \ V_y \rangle^T$ et (ξ, η) les coordonnées dans l'élément de référence.

Puisque le moment de flexion varie de manière quadratique et l'effort tranchant de manière linéaire, la quantité $\text{div } \underline{\underline{M}} + \underline{V}$ varie linéairement dans chaque élément. Afin de vérifier l'équation d'équilibre local en moment (3.3) en tout point de l'élément, il est donc suffisant de la vérifier aux trois sommets du triangle. De la même manière, puisque $\text{div } \underline{V}$ est constant dans l'élément, seules des densités surfaciques d'efforts transversaux constantes par élément sont possibles pour cette interpolation (Figure 4.4) et l'équation (3.2) peut être écrite en un seul point pour être satisfaite dans tout l'élément. Ainsi, la version discrétisée de l'équilibre local s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [D_M^1] & [N_V^1] \\ [D_M^2] & [N_V^2] \\ [D_M^3] & [N_V^3] \\ 0 & [D_V] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{M}^6 \\ \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{V}^2 \\ \mathbf{V}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_e \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

où q_e représente l'intensité de la densité surfacique d'efforts transversaux dans l'élément e , $[D_M^i]$ (resp. $[N_V^i]$) permet de calculer $\text{div } \underline{\underline{M}}$ (resp. \mathbf{V}) au sommet i tandis que $[D_V]$

4.2. Mise en œuvre par éléments finis de l'approche statique

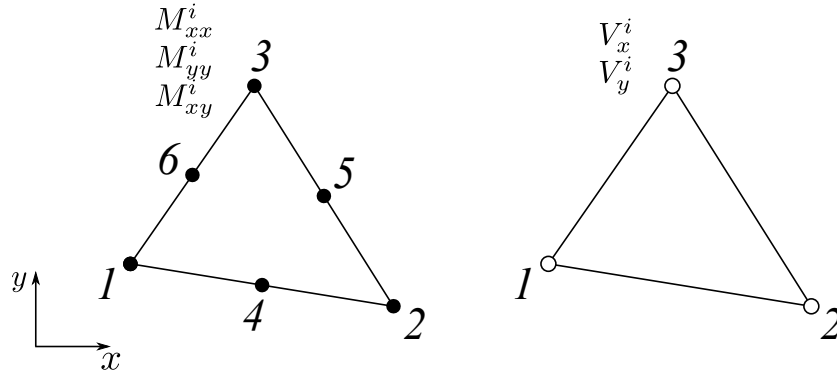


FIGURE 4.3 – Degrés de liberté par élément avec une interpolation quadratique pour \underline{M} et linéaire pour \underline{V}

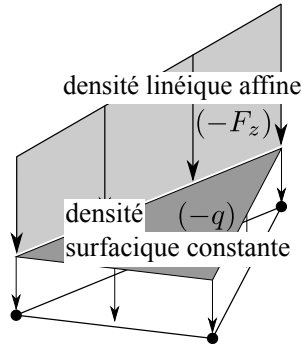


FIGURE 4.4 – Chargements admissibles cohérents avec les interpolations choisies

permet de calculer $\text{div } \underline{V}$.

L'équation de saut pour le moment de flexion entre deux éléments adjacents e et e' doit être vérifiée aux trois nœuds de l'arête qu'ils ont en commun (Figure 4.5a). Soit $i = 1, 2, 3$ un nœud de l'élément e et $i' = 1', 2', 3'$ le nœud correspondant dans e' , on a alors :

$$\begin{bmatrix} [b] & 0 & 0 & -[b] & 0 & 0 \\ 0 & [b] & 0 & 0 & -[b] & 0 \\ 0 & 0 & [b] & 0 & 0 & -[b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^1 \\ \mathbf{M}^2 \\ \mathbf{M}^3 \\ \mathbf{M}^{1'} \\ \mathbf{M}^{2'} \\ \mathbf{M}^{3'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

avec $[b] = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ n_x t_x & n_y t_y & n_x t_y + n_y t_x \end{bmatrix}$, \underline{t} étant un vecteur tangent unitaire de l'arête.

L'équation de saut pour l'effort tranchant n'a besoin d'être vérifiée qu'aux deux extrémités de l'arête (Figure 4.5b). Considérant une variation linéaire de la densité linéique

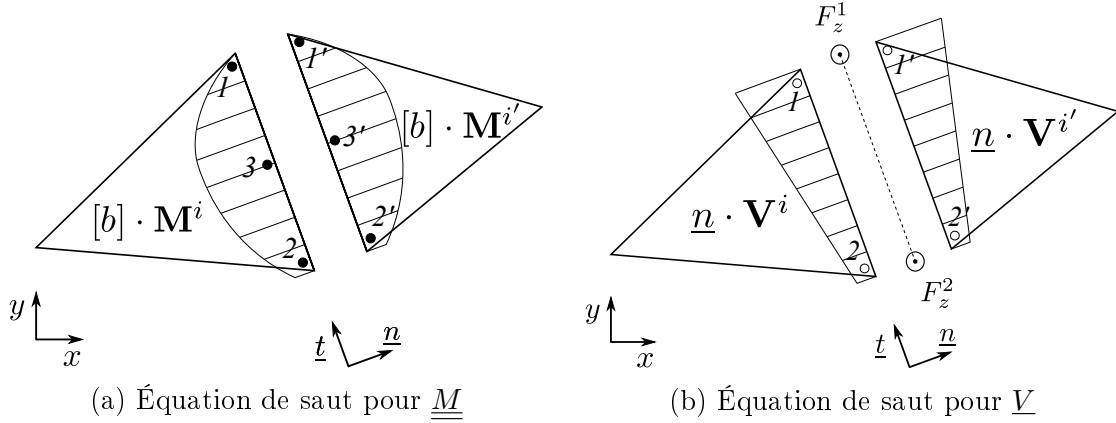


FIGURE 4.5 – Écriture des équations de saut entre deux éléments adjacents

d'efforts transversaux F_z entre les nœuds 1 et 2, l'équation de saut s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{n} \rangle & 0 & -\langle \underline{n} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \underline{n} \rangle & 0 & -\langle \underline{n} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{V}^1 \\ \underline{V}^2 \\ \underline{V}^{1'} \\ \underline{V}^{2'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_z^1 \\ -F_z^2 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Les conditions aux limites sont écrites de la même manière que les équations de saut précédentes en écrivant tout ou partie⁴ des équations suivantes (ici dans le cas d'efforts extérieurs donnés nuls (bord libre)) :

$$\begin{bmatrix} [b] & 0 & 0 \\ 0 & [b] & 0 \\ 0 & 0 & [b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{M}^1 \\ \underline{M}^2 \\ \underline{M}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{n} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \underline{n} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{V}^1 \\ \underline{V}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Toutes ces contributions élémentaires de l'équilibre local, des équations de saut ou des conditions aux limites sont assemblées dans un système linéaire global reliant le vecteur des inconnues d'efforts généralisés $\underline{\Sigma}$ à un vecteur des efforts extérieurs \underline{F} sous la forme :

$$\mathbf{H}\underline{\Sigma} + \underline{F} = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

4. dans le cas de conditions aux limites partielles *i.e.* ne portant que sur certaines composantes des efforts

4.2. Mise en œuvre par éléments finis de l'approche statique

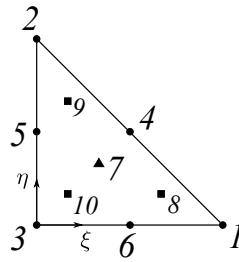


FIGURE 4.6 – Position des points de vérification du critère dans l'élément de référence jusqu'à $N_c = 10$

Point	ξ	η	Point	ξ	η
1	1	0	6	1/2	0
2	0	1	7	1/3	1/3
3	0	0	8	2/3	1/6
4	1/2	1/2	9	1/6	2/3
5	0	1/2	10	1/6	1/6

TABLEAU 4.1 – Coordonnées des points de vérification du critère dans le triangle de référence

4.2.2 Écriture du critère de résistance

4.2.2.1 Vérification du critère de résistance

Afin d'obtenir une borne inférieure rigoureuse, le critère de résistance doit être vérifié *a priori* en tout point de l'élément. Malheureusement, la variation quadratique de \underline{M} dans l'élément rend impossible la détermination *a priori* des points où le critère sera maximal. Comme nous l'avons déjà souligné, les auteurs de [Nguyen-Dang et König, 1976, Le *et al.*, 2010a] proposent de vérifier le critère de résistance en moyenne dans l'élément, perdant ainsi le statut de borne inférieure.

Nous proposons ici une autre approche consistant à vérifier le critère en un nombre fini N_c de points situés dans l'élément. Le critère peut bien entendu être violé entre ces points, mais il est toujours possible d'imaginer une procédure de post-traitement analysant le champ d'efforts intérieurs optimal afin de déterminer les maxima exacts du critère de résistance. Si ce dernier est violé, on peut soit chercher à réoptimiser localement en raffinant le champ d'effort jusqu'à vérifier le critère, soit appliquer un coefficient multiplicatif sur l'estimation de la charge limite afin de vérifier le critère de manière exacte. Quoi qu'il en soit, la pratique montre que pour des maillages suffisamment fins, la différence sur la charge ultime est négligeable. La position des points de vérification du critère retenue pour la suite sont représentés sur la Figure 4.6 et leurs coordonnées reportées dans le Tableau 4.1.

4.2.2.2 Formulation conique du critère de résistance

Notons c un point de vérification du critère dans l'élément e . Le critère de von Mises en flexion G_M et le critère en effort tranchant G_V au point c s'écrivent :

$$\mathbf{M}^c \in G_M \Leftrightarrow \|\mathbf{J}\mathbf{M}^c\| - M_0 \leq 0 \quad \text{avec } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{V}^c \in G_V \Leftrightarrow \|\mathbf{V}^c\| - V_0 \leq 0 \quad (4.27)$$

Ainsi, en introduisant les variables auxiliaires suivantes $\mathbf{z}^c = \left\langle \frac{1}{M_0}\mathbf{J}\mathbf{M}^c, \frac{1}{V_0}\mathbf{V}^c \right\rangle^T$, les deux critères de résistance peuvent s'écrire :

- pour le cas sans interaction :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}_{1 \rightarrow 3}^c\| &\leq 1 \\ \|\mathbf{z}_{4 \rightarrow 5}^c\| &\leq 1 \end{aligned} \quad \forall c = 1, \dots, N_c \cdot N_E \quad (4.28)$$

- pour le cas avec interaction :

$$\|\mathbf{z}^c\| \leq 1 \quad \forall c = 1, \dots, N_c \cdot N_E \quad (4.29)$$

Dans chaque cas, le critère de résistance peut donc être formulé à l'aide d'une ou deux contraintes coniques du second-ordre de différentes tailles, que l'on symbolisera sous la forme $\mathbf{z}^c \in \mathcal{C}$. Mentionnons enfin que dans le cas sans interaction, il est inutile de vérifier la partie portant sur l'effort tranchant pour tous les points de vérification mais uniquement aux sommets du triangle dans la mesure où V varie linéairement et G_V est convexe.

4.2.3 Optimisation

Le vecteur des efforts extérieurs est, à présent, supposé proportionnel à un chargement de référence \mathbf{F}_0 : $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{F}_0$. La résolution de l'approche par l'intérieur pour ce problème fournit alors une borne inférieure⁵ $\lambda_s \leq \lambda^+$ du multiplicateur ultime exact λ^+ pour le problème considéré. Cette borne inférieure est obtenue en résolvant le problème de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_s = \max \quad & \lambda \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma} + \lambda\mathbf{F}_0 = \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \langle \mathbf{z}^1 \quad \dots \quad \mathbf{z}^{N_c \cdot N_E} \rangle^T \\ & \mathbf{z}^c \in \mathcal{C} \quad \forall c = 1, \dots, N_c \cdot N_E \end{aligned} \quad (4.30)$$

où les relations définissant les variables auxiliaires ont été assemblées dans la relation $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \langle \mathbf{z}^1 \quad \dots \quad \mathbf{z}^{N_c \cdot N_E} \rangle^T$. Ce problème requiert donc de maximiser une fonction linéaire sous contraintes d'égalités linéaires et sous des contraintes coniques du second-ordre. La taille de ce problème d'optimisation conique dépend donc du type de critère retenu.

⁵. sous réserve que le critère de résistance soit vérifié de manière exacte dans chaque élément

4.3 Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique

La mise en œuvre numérique de l'approche cinématique est effectuée en discrétisant la plaque en N_E éléments finis triangulaires et en interpolant le champ de vitesse transversale w et le champ de rotation $\underline{\beta}$. Différents types d'interpolation seront considérés ; on étudiera notamment les conséquences du choix d'une interpolation assurant la continuité ou non de w et $\underline{\beta}$ [Bleyer *et al.*, 2015a].

4.3.1 Discrétisation

Nous considérerons dans la suite deux degrés différents d'interpolation pour les champs virtuels : la première ($w3$) considère une interpolation linéaire pour w ainsi que pour $\underline{\beta}$ dans chaque élément tandis que la seconde ($w6$) considère une interpolation quadratique pour w et linéaire pour $\underline{\beta}$. Dans ce qui suit, les degrés de liberté sont à nouveau attachés à un élément et non à un nœud du maillage, les champs w et $\underline{\beta}$ étant donc *discontinus*. Les degrés de liberté attachés à un élément e seront notés \mathbf{u}_e et ordonnés de la façon suivante :

- pour $w3$:

$$\mathbf{u}_e = \langle w^1 \quad w^2 \quad w^3 \quad \beta_x^1 \quad \beta_y^1 \quad \dots \quad \beta_y^3 \rangle^T \quad (4.31)$$

- pour $w6$:

$$\mathbf{u}_e = \langle w^1 \quad \dots \quad w^6 \quad \beta_x^1 \quad \beta_y^1 \quad \dots \quad \beta_y^3 \rangle^T \quad (4.32)$$

avec les mêmes notations que dans le chapitre précédent.

4.3.1.1 Contribution du terme de déformation de courbure et de cisaillement à la puissance résistante maximale

Le terme de déformation de la puissance résistante maximale est défini par :

$$P_{rm}^{def} = \int_{\Omega} \pi(\underline{\chi}, \underline{\gamma}) d\Omega \quad (4.33)$$

Les déformations de courbure et de cisaillement sont alors exprimées aux trois sommets de l'élément de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\chi}_e^i = \mathbf{B}_i^b \mathbf{u}_e \quad ; \quad \boldsymbol{\gamma}_e^i = \mathbf{B}_i^s \mathbf{u}_e \quad \forall i = 1, \dots, 3 \quad (4.34)$$

où $\boldsymbol{\chi}_e^i = \langle \chi_{xx} \quad \chi_{yy} \quad 2\chi_{xy} \rangle^T$ et $\boldsymbol{\gamma}_e^i = \langle \gamma_x \quad \gamma_y \rangle^T$ au sommet i et où les matrices \mathbf{B}_i^b et \mathbf{B}_i^s font intervenir les fonctions de forme et leurs dérivées premières. À noter que, pour les deux interpolations, $\underline{\chi}$ est constant par élément tandis que $\underline{\gamma}$ est linéaire. Ainsi, les déformations généralisées varient, au plus, linéairement dans l'élément, on peut approcher chaque contribution élémentaire par excès comme dans [Makrodimopoulos et Martin, 2007], de sorte que l'on obtient :

$$P_{rm}^{def} \lesssim \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{i=1}^3 \frac{A_e}{3} \pi(\boldsymbol{\chi}_e^i, \boldsymbol{\gamma}_e^i) \quad (4.35)$$

4.3.1.2 Contribution du terme de discontinuités à la puissance résistante maximale

Le terme de discontinuité de la puissance résistante maximale, noté

$$P_{rm}^{disc} = \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \llbracket \underline{\beta} \rrbracket, \llbracket w \rrbracket) dl \quad (4.36)$$

nécessite de calculer les discontinuités de vitesse à travers chaque arête du maillage. On note $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket^j$ le vecteur rassemblant les discontinuités de la rotation normale $\llbracket \beta_n \rrbracket$, tangentielle $\llbracket \beta_t \rrbracket$ et de la vitesse transversale $\llbracket w \rrbracket$ à travers une arête j . Ces discontinuités sont exprimées à partir des degrés de liberté par une relation du type :

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket^j = \mathbf{D}_j \mathbf{u}_j \quad (4.37)$$

Comme précédemment, dans le cas de l'interpolation linéaire ($w3$), les discontinuités varient linéairement sur chaque arête ce qui permet de majorer l'intégrale (4.36) en fonction des valeurs de la fonction $\pi(\underline{n}; \llbracket \underline{\beta} \rrbracket, \llbracket w \rrbracket)$ aux extrémités des arêtes. Tandis que dans le cas de l'interpolation quadratique ($w6$), on choisit d'approcher les intégrales élémentaires par une formule des trapèzes à n_d points :

$$P_{rm}^{disc} = \sum_{j=1}^{N_D} \int_{\Gamma_j} \pi(\underline{n}; \llbracket \underline{\beta} \rrbracket, \llbracket w \rrbracket) dl \approx \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{n_d} l_j \omega_k \pi(\underline{n}; \llbracket \beta_n \rrbracket_k^j, \llbracket \beta_t \rrbracket_k^j, \llbracket w \rrbracket_k^j) \quad (4.38)$$

où $\llbracket x \rrbracket_k^j$ désigne la valeur du saut de la quantité x au point k de la quadrature, ω_k le poids correspondant à ce point, l_j la longueur de l'arête j et N_D le nombre d'arêtes actives.

4.3.2 Formulation du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation discret correspondant à (4.7) s'obtient donc de la même façon que dans le chapitre précédent et s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \lambda^+ \leq \lambda_c = \min_{\mathbf{u}} & \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{i=1}^3 \frac{A_e}{3} \pi(\chi_e^i, \gamma_e^i) + \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{n_d} l_j \omega_k \pi(\underline{n}; \llbracket \beta_n \rrbracket_k^j, \llbracket \beta_t \rrbracket_k^j, \llbracket w \rrbracket_k^j) \\ \text{t.q.} & \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{u} = 1 \\ & \mathbf{B}^b \mathbf{u} = \chi \\ & \mathbf{B}^s \mathbf{u} = \gamma \\ & \mathbf{D} \mathbf{u} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \end{aligned} \quad (4.39)$$

où $\mathbf{B}^b \mathbf{u} = \chi$ et $\mathbf{B}^s \mathbf{u} = \gamma$ correspondent à l'assemblage des relations (4.34) et $\mathbf{D} \mathbf{u} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ à l'assemblage des relations (4.37). Il est à noter qu'il n'y a plus de condition de pertinence à vérifier puisque la discontinuité de vitesse transversale contribue à présent à la puissance résistante maximale.

Comme dans le chapitre précédent, nous montrons comment reformuler l'expression des fonctions d'appui à l'aide de contraintes coniques du second-ordre pour les critères considérés, permettant l'utilisation du solveur conique MOSEK pour la résolution de (4.39).

4.3. Mise en œuvre par éléments finis de l'approche cinématique

4.3.2.1 Formulation conique : critère avec interaction

Avec les notations précédentes et d'après l'expression (4.14), la fonction d'appui du critère avec interaction peut se réécrire de la façon suivante :

$$\pi(\boldsymbol{\chi}_e^i, \boldsymbol{\gamma}_e^i) = \sqrt{\boldsymbol{\chi}_e^{iT} \mathbf{Q}_b \boldsymbol{\chi}_e^i + \boldsymbol{\gamma}_e^{iT} \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}_e^i} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}_b = \frac{M_0^2}{3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_s = \frac{V_0^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

En introduisant $\mathbf{r}_e^i = \langle \boldsymbol{\chi}_e^i \quad \boldsymbol{\gamma}_e^i \rangle^T$ et les factorisations de Cholesky respectives \mathbf{C}_b , \mathbf{C}_s des matrices précédentes, on a :

$$\pi(\boldsymbol{\chi}_e^i, \boldsymbol{\gamma}_e^i) = \|\mathbf{C}^T \mathbf{r}_e^i\|$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b^T \\ \mathbf{C}_s^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_b = \frac{M_0}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_s = \frac{V_0}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

De sorte que la minimisation de $\pi(\boldsymbol{\chi}_e^i, \boldsymbol{\gamma}_e^i)$ équivaut à la minimisation :

$$\begin{aligned} \min \quad & t_e^i \\ \text{t.q.} \quad & \|\mathbf{C}^T \mathbf{r}_e^i\| \leq t_e^i \end{aligned} \quad (4.42)$$

qui correspond donc à une contrainte conique du second-ordre sur le 6-uplet formé par la variable auxiliaire t_e^i et le vecteur \mathbf{r}_e^i .

En suivant la même démarche, le terme de discontinuité (4.15) peut s'écrire :

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \beta_n \rrbracket_k^j, \llbracket \beta_t \rrbracket_k^j, \llbracket w \rrbracket_k^j) = \|\mathbf{L} \mathbf{d}_k^j\|$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} M_0 & 0 \\ 0 & 0 & V_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_k^j = \langle \llbracket \beta_n \rrbracket_k^j \quad \llbracket \beta_t \rrbracket_k^j \quad \llbracket w \rrbracket_k^j \rangle^T \quad (4.43)$$

dont la minimisation est équivalente à :

$$\begin{aligned} \min \quad & s_k^j \\ \text{t.q.} \quad & \|\mathbf{L} \mathbf{d}_k^j\| \leq s_k^j \end{aligned} \quad (4.44)$$

soit une contrainte conique de dimension 4.

4.3.2.2 Formulation conique : critère sans interaction

D'après l'expression (4.12), minimiser $\pi(\boldsymbol{\chi}_e^i, \boldsymbol{\gamma}_e^i)$ dans le cas sans interaction équivaut à la minimisation :

$$\begin{aligned} \min \quad & t_e^i + t_e^i \\ \text{t.q.} \quad & \|\mathbf{C}_b^T \boldsymbol{\chi}_e^i\| \leq t_e^i \\ & \|\mathbf{C}_s^T \boldsymbol{\gamma}_e^i\| \leq t_e^i \end{aligned} \quad (4.45)$$

soit deux contraintes coniques de dimensions 4 et 3.

De même, la minimisation de (4.15) revient à :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & s_k^j + s_k^{j'} \\
 \text{t.q.} \quad & \|\mathbf{L}_b \mathbf{b}_k^j\| \leq s_k^j \\
 & V_0 \llbracket w \rrbracket_k^j \leq s_k^{j'} \\
 & -V_0 \llbracket w \rrbracket_k^j \leq s_k^{j'}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

avec $\mathbf{b}_k^j = \langle \llbracket \beta_n \rrbracket_k^j \quad \llbracket \beta_t \rrbracket_k^j \rangle^T$, soit une contrainte conique de dimension 3 et 2 contraintes linéaires d'inégalité.

4.3.3 Commentaires concernant le type d'éléments finis considéré

Jusqu'à présent, nous avons formulé le problème discret de l'approche cinématique en considérant des éléments finis discontinus et en prenant en compte la contribution des discontinuités de vitesse dans le calcul de la puissance résistante maximale. Une autre approche aurait pu consister à considérer des éléments finis classiques *i.e.* avec une interpolation nodale continue. Il est néanmoins très facile⁶ d'obtenir des éléments continus avec l'approche retenue en imposant directement la contrainte $\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ce qui permet d'omettre les quantités relatives au terme de discontinuité.

Ces éléments continus étant donc aisément disponibles, il sera intéressant de comparer leurs performances vis-à-vis des éléments discontinus, en particulier dans la limite de plaque mince. Ainsi, nous considérons à présent les quatre types d'éléments finis suivants :

- *w3-c* : élément continu, interpolation linéaire de la vitesse transverse w
- *w6-c* : élément continu, interpolation quadratique de la vitesse transverse w
- *w3-d* : élément discontinu, interpolation linéaire de la vitesse transverse w
- *w6-d* : élément discontinu, interpolation quadratique de la vitesse transverse w

Il est à noter que, dans chaque cas, la vitesse de rotation est interpolée linéairement dans un élément mais est continue dans les deux premiers cas et discontinue pour les deux autres.

6. bien que certainement sous-optimal en terme d'efficacité numérique

4.4 La problématique du verrouillage en cisaillement

4.4.1 Verrouillage des éléments finis formulés en déplacement/vitesse

Le verrouillage en cisaillement correspond à un manque de robustesse dans la limite de plaque mince de certains éléments finis de plaque épaisse formulés en déplacement (ou en vitesse dans le cas de l'approche cinématique du calcul à la rupture). Généralement, le verrouillage en cisaillement se manifeste par une détérioration de la solution par éléments finis correspondant à un *maillage donné* lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers 0 (limite de plaque mince). Cette détérioration est, en général, attribuée à la présence de déformations de cisaillement parasites, censées disparaître à la limite de plaque mince. Ainsi, pour obtenir une solution numérique suffisamment proche de la solution de plaque mince, la taille de maille doit être de plus en plus fine à mesure que l'épaisseur de la plaque tend vers 0. D'un point de vue mathématique, cela signifie que la convergence de la solution discrète n'est pas uniforme vis-à-vis de l'épaisseur.

L'origine du verrouillage en cisaillement provient d'une inadéquation entre l'espace fonctionnel discret de plaque épaisse et de l'espace fonctionnel correspondant au modèle de plaque mince. Par exemple, si l'on considère une interpolation linéaire et continue du déplacement transversal w et de la rotation $\underline{\beta}$, la condition cinématique de Love-Kirchhoff $\nabla w - \underline{\beta} = \underline{0}$ doit être vérifiée dans chaque élément à la limite de plaque mince, de sorte que $\underline{\beta}$ devient constant dans chaque élément à la limite. Étant continu, $\underline{\beta}$ sera donc constant sur tout le domaine et w sera, quant à lui, affine sur tout le domaine. Dans le cas de conditions aux limites non triviales, par exemple $w = 0$ et/ou $\underline{\beta} = \underline{0}$ sur une partie de la frontière, les seuls champs possibles satisfaisant ces propriétés à la limite seront $w = 0$ et $\underline{\beta} = \underline{0}$ sur tout le domaine. Ce choix de discrétisation conduira donc à une solution discrète convergeant vers la solution nulle lorsque l'épaisseur tend vers 0, au lieu de converger vers la solution de plaque mince.

Le problème de verrouillage en cisaillement a fait l'objet de nombreux travaux dans le cas des plaques élastiques [Arnold, 1981, Arnold *et al.*, 2007]. Différents auteurs ont proposé un grand nombre de stratégies numériques visant à, soit éliminer le phénomène, soit à en atténuer les effets. On peut notamment citer les approches par intégration réduite, les approches mixtes, les méthodes B-bar, etc... En revanche, très peu de travaux se sont penchés sur le problème du verrouillage en cisaillement dans la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture et de l'analyse limite. Les seuls travaux disponibles sur ce sujet [Capsoni et Corradi, 1999, Capsoni et Vicente da Silva, 2011, Le, 2013] ont, tout naturellement, cherché à appliquer les mêmes stratégies de stabilisation qui se sont montrées efficaces dans le cas de l'élasticité. Un des inconvénients majeurs dans le cas de l'approche cinématique concerne le fait que toutes ces techniques reposent plus ou moins sur une modification ou une relaxation des équations de compatibilité reliant la vitesse au taux de déformation, de sorte que *le statut de*

borne supérieure est immédiatement perdu. Le deuxième argument poussant à chercher une autre façon de résoudre le problème consiste à remarquer que les espaces fonctionnels mis en jeu dans l'approche cinématique sont très différents, et en particulier plus vastes, que ceux mis en jeu dans le cas de l'élasticité, notamment à travers la possibilité de prendre en compte des discontinuités du champ de vitesse. Pour ces raisons, il nous paraît raisonnable de se poser la question de la problématique du verrouillage en cisaillement en gardant à l'esprit cet aspect.

4.4.2 Verrouillage ou non des éléments finis considérés

Nous avons déjà mentionné le fait que les éléments finis continus avec interpolation linéaire de w et de $\underline{\beta}$ ($w3$ -c) verrouillent dans la limite de plaque mince. Ces éléments ont été considérés dans [Capsoni et Corradi, 1999, Capsoni et Vicente da Silva, 2011] et une méthode B-bar avait alors été proposée.

En ce qui concerne une interpolation quadratique et continue ($w6$ -c), cet élément correspond à la limite à un élément de plaque mince dans lequel le champ de vitesse est continu sur tout le domaine et quadratique dans chaque élément. Cependant, la condition de Love-Kirchhoff fait que son gradient (égal au vecteur rotation) doit lui aussi être continu. Or, il est bien connu qu'il est impossible d'assurer à la fois la continuité d'un champ scalaire ainsi que celle de son gradient (continuité C^1) avec une interpolation quadratique dans chaque triangle (sauf cas trivial, par exemple un champ affine et un gradient constant). Ainsi, dans ce cas aussi, les seuls champs satisfaisant ces conditions en toute généralité sont les champs identiquement nuls. On s'attend donc à ce que les éléments finis $w6$ -c verrouillent également malgré l'adéquation entre le degré d'interpolation de $\underline{\nabla}w$ et celui de $\underline{\beta}$.

En ce qui concerne les éléments finis discontinus, la vitesse transversale w doit être continue dans la limite de plaque mince. Du fait de la condition de Love-Kirchhoff $\underline{\beta} = \underline{\nabla}w$ et du lemme de Hadamard [Salençon, 2001], la composante tangentielle du vecteur rotation doit également être continue. Ainsi, $w3$ -d devient, dans la limite de plaque mince, un élément fini dont la vitesse est linéaire et continue et dont le vecteur rotation est constant par morceaux avec des discontinuités potentielles dans sa composante normale à travers les arêtes du maillage. Ainsi, ce cas limite correspond exactement à l'élément fini de charnière pure (T3) considéré dans le chapitre précédent. Bien que l'on ait souligné le fait que cet élément ne permet pas d'obtenir la solution exacte de plaque mince en toute généralité, on peut néanmoins en conclure que l'élément $w3$ -d ne va pas verrouiller⁷ mais va converger vers la borne supérieure de charnière pure correspondant au maillage en question.

7. On considère donc qu'un élément verrouille dans le cas où les bornes supérieures obtenues dans la limite de plaque mince divergent vers l'infini (*i.e.* correspondant à $w = 0$). Ainsi, même si $w3$ -d ne converge pas vers la solution exacte de plaque mince, on considère qu'il ne verrouille pas dans la mesure où il fournit quand même des bornes supérieures finies.

4.4. La problématique du verrouillage en cisaillement

De la même manière, $w6-d$ correspond, à la limite, à un élément fini de plaque mince dont la vitesse est quadratique par élément, continue et donc dont le vecteur rotation est linéaire avec des discontinuités potentielles dans sa composante normale à travers les arêtes, correspondant donc exactement à l'élément de plaque mince T6 considéré dans le chapitre précédent dont on a montré qu'il convergeait vers la solution exacte. On en conclut donc que l'élément $w6-d$ ne verrouillera pas dans la limite de plaque mince mais convergera vers la borne supérieure qu'on obtiendrait avec un élément fini de plaque mince de type T6.

4.4.3 Éléments finis en efforts généralisés pour l'approche statique

Si les éléments finis formulés en contrainte sont rarement utilisés dans le contexte de l'élasticité, ils sont essentiels dans la mise en œuvre du calcul à la rupture pour obtenir des bornes inférieures et l'on est donc fondé à s'interroger sur l'existence du phénomène de verrouillage en cisaillement pour les éléments finis de plaques épaisses formulés en efforts généralisés.

On peut, tout d'abord, remarquer que, dans le cas des plaques épaisses, le champ de moment de flexion appartient à l'espace des champs de tenseurs symétriques d'ordre 2 qui sont bornés sur tout le domaine et dont la divergence est également bornée sur tout le domaine du fait de l'équation (3.3) et de la résistance finie à l'effort tranchant. Dans le cas d'une plaque mince, cette résistance devient infinie de sorte que $\text{div } \underline{\underline{M}}$ n'est plus astreint à rester bornée. On peut également constater que cela conduit aussi à des conditions de continuité plus faibles que dans le cas de la plaque épaisse. Ainsi, l'espace fonctionnel des champs de moments de flexion dans le cas des plaques minces est plus grand que celui du cas des plaques épaisses. C'est là une différence fondamentale vis-à-vis de l'approche cinématique dans laquelle l'espace fonctionnel des champs de vitesse du modèle de plaque mince est au contraire plus petit que celui des plaques épaisses du fait de la condition de Love-Kirchhoff.

Ainsi, une interpolation du moment de flexion dans le modèle de plaque mince, restera valide dans le cas des plaques minces. On peut donc s'attendre à ce que le phénomène de verrouillage en cisaillement ne se manifeste pas dans le cas de l'approche statique par l'intérieur.

4.5 Exemples de validation

Cette section présente quelques exemples de validation des éléments finis proposés.

4.5.1 Plaque carrée sous charge uniformément répartie

Le premier problème est celui d'une plaque carrée de côté L , sous un chargement transversal uniformément réparti d'intensité q et obéissant au critère d'interaction effort tranchant-moment de flexion.

4.5.1.1 Ruine dominée par l'effort tranchant

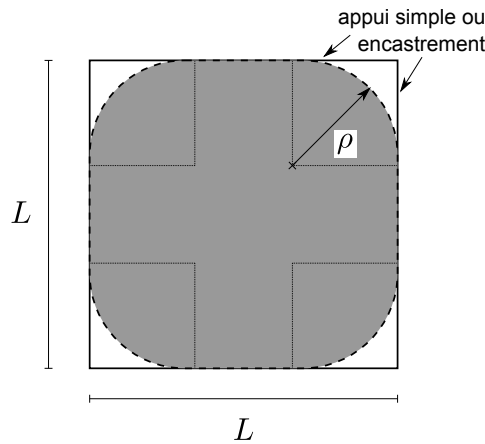


FIGURE 4.7 – Ensemble de Cheeger (en gris) et mécanisme de ruine solution pour la plaque carrée

On se place dans le régime asymptotique (peu réaliste) $h/L \gg 1$ de sorte que la ruine de la plaque est pilotée par l'effort tranchant uniquement, la résistance à la flexion étant infinie. La solution de ce problème ne dépend pas des conditions aux limites en rotation (appuis simples ou encastremets) et le mécanisme de ruine est relié à la notion d'ensemble de Cheeger. Soit $\mathcal{C} \subseteq \Omega$ un sous-ensemble de Ω , alors l'ensemble de Cheeger est le sous-ensemble \mathcal{C}^* qui minimise le rapport périmètre/surface $|\partial\mathcal{C}|/|\mathcal{C}|$. On peut alors montrer que le mécanisme de ruine optimal est $w = A\chi_{\mathcal{C}^*}$ où A est une constante de normalisation et $\chi_{\mathcal{C}^*}$ est la fonction indicatrice de \mathcal{C}^* , valant 1 pour un point dans \mathcal{C}^* et 0 sinon⁸.

Ainsi, dans le cas où Ω est un carré de côté L , l'ensemble de Cheeger correspond à un carré dont les coins ont été arrondis par des cercles de rayon $\rho = \frac{1}{2+\sqrt{\pi}}L$ [Strang, 1979, Overton, 1985]. Le mécanisme de ruine optimal correspond donc à une vitesse constante dans cet ensemble et nulle dans les 4 coins (Figure 4.7). La charge ultime

8. Dans le cas d'un chargement uniforme et d'un critère de résistance homogène, P_{ext} est proportionnel à la surface $|\mathcal{C}|$ et P_{rm} au périmètre $|\partial\mathcal{C}|$. L'optimisation sur un champ w de la forme $A\chi_{\mathcal{C}}$ revient donc à minimiser le rapport $|\partial\mathcal{C}|/|\mathcal{C}|$.

4.5. Exemples de validation

exacte est alors donnée par $q_{tr}^+ = V_0/\rho = (2 + \sqrt{\pi})V_0L$.

Maillage	$w3-c$	$w3-d$	$w6-c$	$w6-d$
5 él./côté	15.2%	4.3%	8.8%	2.9%
10 él./côté	7.7%	2.9%	4.4%	1.5%
25 él./côté	3.2%	1.4%	0.9%	0.7%

TABLEAU 4.2 – Erreurs relatives à la charge ultime analytique de la plaque carrée pour la ruine dominée par l’effort tranchant obtenues pour chaque interpolation suivant différentes finesses de maillage

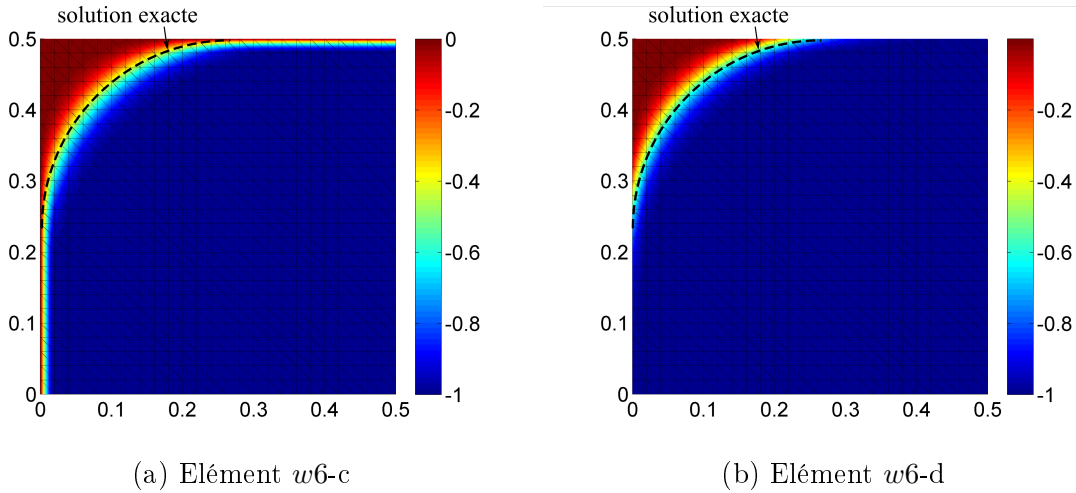


FIGURE 4.8 – Mécanisme de ruine optimal pour le problème de la plaque carrée pour la ruine dominée par l’effort tranchant (les isocouleurs représentent la variation relative du déplacement transversal w)

Ce problème est résolu numériquement en discrétisant un quart de la plaque par un maillage structuré avec les 4 types d’interpolation considérés. Le tableau 4.2 donne les écarts relatifs à la charge ultime analytique pour les 4 interpolations et différentes finesses de maillage. On constate, comme on pouvait s’y attendre, que les éléments à interpolation quadratique présentent un taux de convergence plus rapide que ceux à interpolation linéaire et que les éléments discontinus ont une précision bien supérieure à leurs équivalents continus. Sur la Figure 4.8, on constate que le mécanisme de ruine optimal est correctement reproduit, la discontinuité de vitesse sur le bord de la plaque étant approchée par une déformation localisée sur un élément pour l’élément continu $w6-c$.

À titre de comparaison, la résolution numérique de ce problème par l’approche statique fournit une borne inférieure dont l’écart relatif avec la solution analytique est de 0.4% pour le maillage avec 5 éléments/côté et de 0.02% pour le maillage avec 25 éléments/côté.

On constate donc que l'approche statique fournit, dans de nombreuses situations, de meilleures estimations que l'approche cinématique (même avec des éléments discontinus) pour une même finesse de maillage.

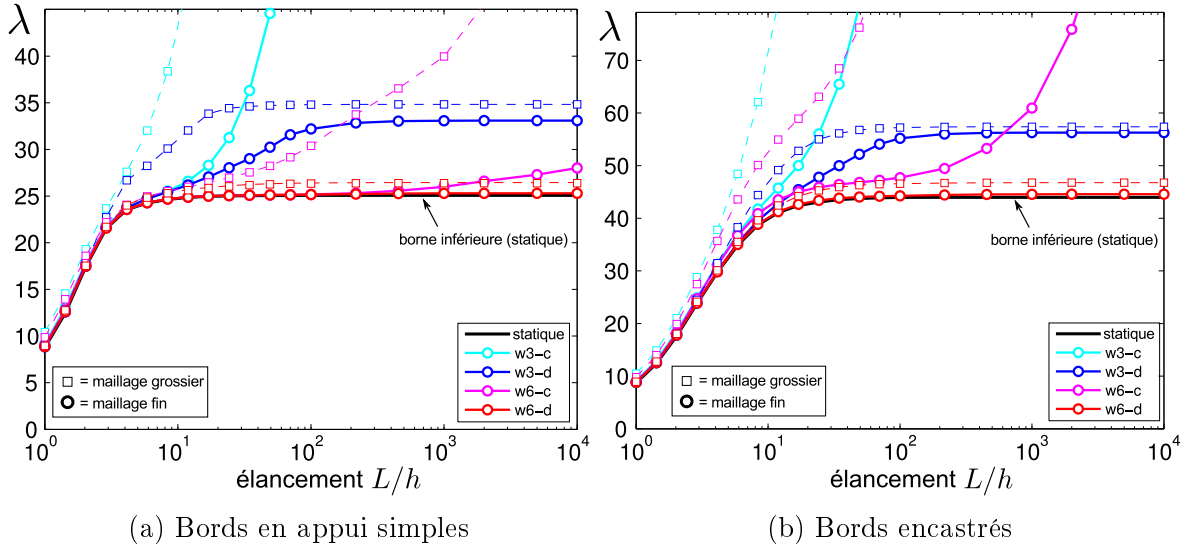


FIGURE 4.9 – Influence de l'élanement sur les bornes supérieures associées à différentes interpolations pour le problème de la plaque carrée ($\lambda = qL^2/M_0$)

4.5.1.2 Influence de l'élanement et verrouillage en cisaillement

Le problème précédent est maintenant étudié en faisant varier l'élanement L/h entre 1 et 10^4 et en distinguant le cas de bords en appuis simples ou encastrés. À la limite $L/h \rightarrow \infty$, on s'attend à retrouver la charge ultime correspondant à un modèle de plaque mince en flexion, la plaque devenant infiniment résistante à l'effort tranchant. Le quart de plaque est discrétisé avec deux finesses de maillage pour les 4 types d'éléments : un maillage grossier avec 3 éléments/côté et un maillage fin avec 15 éléments/côté. Le problème est également résolu par une approche statique avec le maillage fin. L'évolution de la charge ultime en fonction de l'élanement est représentée sur la Figure 4.9a pour le cas simplement appuyé et Figure 4.9b pour le cas encasté.

On constate, tout d'abord, que les bornes supérieures obtenues par les interpolations discontinues ($w3-d$ et $w6-d$) convergent, à la limite $L/h \rightarrow \infty$, vers une valeur constante correspondant exactement aux bornes supérieures que l'on aurait obtenues avec un modèle de plaque mince en flexion en utilisant des éléments T3 pour $w3-d$ et T6 pour $w6-d$. Ainsi, en raffinant le maillage, la solution obtenue par $w3-d$ converge vers la borne supérieure obtenue en ne faisant jouer que des charnières, borne supérieure dont on sait qu'elle ne donne pas la solution exacte dans le cas général. En revanche, on constate que les bornes supérieures fournies par les éléments $w6-d$ sont extrêmement proches de la borne inférieure et convergent donc vers la solution du modèle de plaque mince lorsque $L/h \rightarrow \infty$.

A contrario, les interpolations continues ($w3-c$ et $w6-c$) sont victimes d'un verrouillage

4.5. Exemples de validation

en cisaillement à la limite $L/h \rightarrow \infty$ puisque les bornes supérieures obtenues divergent pour des valeurs élevées de l'élanement. On constate, de plus, que cet effet est plus prononcé pour $w3-c$ que $w6-c$ et que l'élanement critique à partir duquel les solutions divergent augmente lorsque l'on raffine le maillage. On observe, enfin, que le verrouillage est nettement plus sévère dans le cas des bords encastres que dans le cas simplement appuyé.

4.5.1.3 Influence de l'interaction effort tranchant-moment de flexion

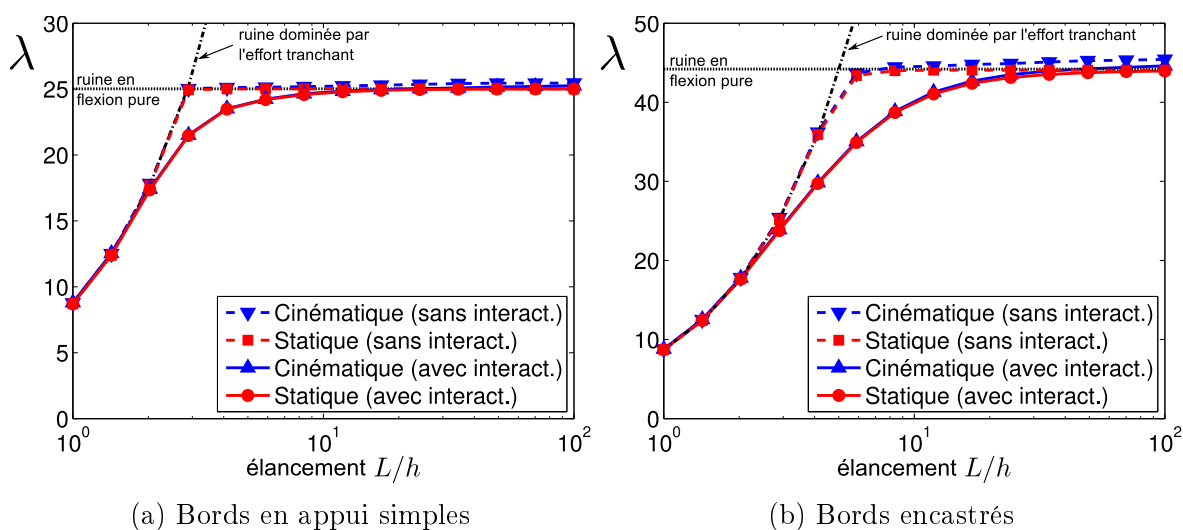


FIGURE 4.10 – Influence du choix du critère sur l'évolution de la charge ultime pour le problème de la plaque carrée ($\lambda = qL^2/M_0$)

On compare à présent l'influence du choix du critère de résistance, avec ou sans interaction effort tranchant-moment de flexion, sur l'évolution de la charge ultime du problème de la plaque carrée en fonction de l'élanement de la structure. Celle-ci est représentée sur la Figure 4.10 pour les deux critères selon les approches statiques et cinématiques (élément $w6-d$) pour un maillage de 15 éléments par côté. On constate à nouveau un très bon encadrement des approches statiques et cinématiques pour les deux critères. Les résultats obtenus dans le cas d'un critère sans interaction montrent une transition brutale entre un régime où la ruine est pilotée par la solution en effort tranchant uniquement ($q_{tr}^+ = V_0/\rho$) pour les élanements proches de 1 et un régime où la ruine correspond à la solution en flexion pure du modèle de plaque mince (cf. chapitre précédent) pour les élanements grands devant 1. Le cas d'un critère avec interaction montre en revanche une transition régulière entre ces deux régimes pour les élanements modérés. Il est à noter que l'écart entre les deux critères est plus important dans le cas encastres que dans le cas simplement appuyé.

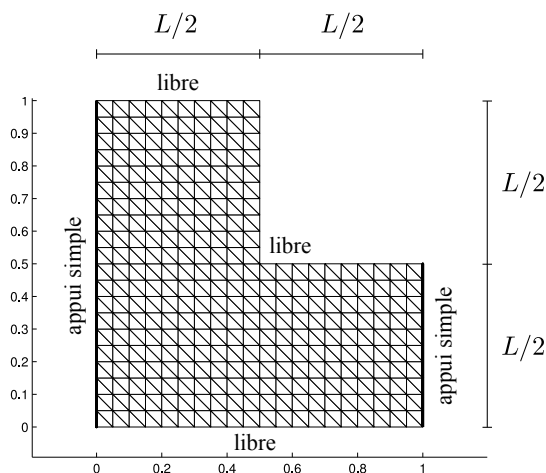


FIGURE 4.11 – Problème de la plaque en « L » : géométrie et maillage

	$\frac{L}{h} = 1$	2	4	8	10	20	40	80	100
Statique	3.70	5.69	5.89	6.00	6.03	6.08	6.10	6.11	6.11
Cinématique	3.70	5.79	5.98	6.09	6.11	6.15	6.16	6.16	6.16
éléments DSG [Le, 2013] (maillage adaptatif)	3.73	5.80	5.98	6.08	6.10	6.14	6.16	6.18	6.18

TABLEAU 4.3 – Encadrement de la charge ultime obtenu par les approches statiques et cinématiques pour le problème de la plaque en L

4.5.2 Problème de la plaque en L

On considère à présent le problème d'une plaque en forme de « L » sous chargement transversal uniformément réparti d'intensité q et simplement appuyée sur deux de ses bords, les autres étant libres d'efforts (Figure 4.11). On considère ici un critère en interaction.

Une borne supérieure $\lambda_c = q_c L^2 / M_0 = \frac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6.16 \geq \lambda^+$ peut être obtenue en considérant une charnière parallèle aux supports et située au milieu de la plaque. Le problème a été résolu par les deux approches en considérant un maillage structuré de 600 éléments tel que celui représenté sur la Figure 4.11. Le tableau 4.3 reporte les encadrements de la charge ultime obtenus pour différentes valeurs de l'élançement. On constate tout d'abord que l'approche cinématique tend, dans la limite de plaque mince, vers la solution analytique donnée par la charnière au milieu de la plaque. D'autre part, l'écart entre l'approche statique et l'approche cinématique est inférieur à 2% quelle que soit la valeur de l'élançement. Enfin, il est intéressant de noter que l'approche cinématique avec 600 éléments donne des résultats d'une meilleure précision que les éléments DSG utilisés dans [Le, 2013], combinés à une procédure de remaillage adaptatif. Notons que ce problème est résolu en quelques secondes sur un ordinateur de bureau standard.

4.6 Conclusions et perspectives

Ce chapitre a eu pour objet de prendre en compte une résistance finie à l'effort tranchant en plus de la résistance à la flexion de la plaque. Nous avons fait le choix de retenir des critères de résistance relativement simples, prenant en compte ou non l'interaction entre les résistances à la flexion et à l'effort tranchant. À notre connaissance, c'est la première fois que des éléments finis en efforts généralisés ont été proposés pour la mise en œuvre de l'approche statique des plaques épaisses.

Pour l'approche cinématique, des éléments finis discontinus avec une cinématique de Reissner-Mindlin (vitesse transversale et vitesse de rotation) ont été développés, et nous avons montré que la prise en compte des discontinuités de vitesse entre les éléments était, d'une part, naturelle dans le cadre du calcul à la rupture et, d'autre part, très efficace du point numérique dans la mesure où le phénomène de verrouillage numérique en cisaillement disparaît complètement. Les éléments finis discontinus autorisent donc une meilleure précision que leurs équivalents continus dans le cas de mécanismes localisés ainsi qu'une plus grande souplesse d'utilisation puisqu'il devient alors inutile de développer des stratégies complexes pour s'affranchir du verrouillage en cisaillement.

Les extensions de ce chapitre sont nombreuses dans la mesure où on peut considérer différents critères de résistance pour la partie du critère en flexion pure (critère de Johansen/Nielsen par exemple) ou encore une interaction avec des poutres de rive qui auraient également une résistance finie à l'effort tranchant. Il semblerait également intéressant d'étudier plus en détails les situations dans lesquelles le dimensionnement d'une plaque à l'effort tranchant devient prépondérant. Les exemples que nous avons considérés ici restent, en effet, relativement théoriques compte-tenu des valeurs peu réalistes des élancements faisant intervenir l'effort tranchant dans la ruine de la plaque. Néanmoins, il est bien connu que celle-ci peut devenir prépondérante dans le cas de plaques multicouches (avec un fort contraste de propriétés mécaniques entre les couches) même pour des élancements relativement importants.

Enfin, d'un point de vue plus fondamental, une question qui reste en suspens concerne l'obtention d'un critère de résistance en interaction effort tranchant/moment de flexion à partir d'une démarche de changement d'échelle.

* *
*

Chapitre 5

Éléments finis pour le calcul à la rupture des coques minces

Résumé : *Ce chapitre propose de traiter le cas des structures de type « coque » en combinant les éléments de plaque développés précédemment à des éléments de membrane. L'approche statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur sont toutes les deux mises en œuvre numériquement. Bien que la démarche soit générale, on se restreint ici au cas des coques minces et un accent particulier est porté à la formulation du critère de résistance généralisé en interaction effort membranaire-moment de flexion. Quelques exemples numériques servent à illustrer les performances de ces éléments. On donne également un aperçu de leurs limites vis-à-vis du phénomène de verrouillage en membrane dans le cas d'une coque très mince.*

Sommaire

5.1	Cinématique et puissance des efforts intérieurs	92
5.2	Discrétisation et implémentation par éléments finis	93
5.2.1	Repère local	93
5.2.2	Choix des éléments finis	94
5.2.3	Intersection de plusieurs coques	95
5.3	Critères de résistance généralisés en interaction effort membranaire-moment de flexion	95
5.3.1	Critères approchés dans le cas d'un matériau de von Mises	96
5.3.2	Cas général : une approche par changement d'échelle	98
5.3.3	Approximations numériques du critère généralisé	99
5.3.4	Prise en compte d'armatures de renforcement	101
5.3.5	Conclusion	103
5.4	Exemples de validation	104
5.4.1	Ruine d'un portique en forme d'arc semi-circulaire	104
5.4.2	Diagrammes d'interaction d'une poutre caisson	105
5.4.3	Coque cylindrique bi-encastrée	110
5.5	Phénomène de verrouillage en membrane	112
5.5.1	Illustration du point de vue de l'approche statique	112
5.5.2	Illustration du point de vue de l'approche cinématique	114
5.6	Conclusions et perspectives	117

5.1 Cinématique et puissance des efforts intérieurs

La coque est décrite par une surface courbe Ω de l'espace \mathbb{R}^3 auquel est attaché un repère cartésien orthonormé $(O; \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. En tout point $\underline{x} \in \Omega$, on désigne par $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ une base unitaire du plan tangent à Ω en ce point. La normale unitaire à la coque est définie comme étant $\underline{\nu} = \underline{a}_1 \wedge \underline{a}_2$. L'ensemble $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{\nu})$ forme un repère local à la coque en ce point.

La cinématique de la coque est définie en tout point par :

- un vecteur de vitesse virtuelle $\underline{U}(\underline{x}) = U_x \underline{e}_x + U_y \underline{e}_y + U_z \underline{e}_z$, exprimé ici en fonction de ses composantes dans le repère global. Il sera plus commode d'exprimer la vitesse de la coque en fonction d'une composante dans le plan tangent notée $\underline{u} = u_1 \underline{a}_1 + u_2 \underline{a}_2$ et d'une composante transversale notée w de sorte que $\underline{U} = \underline{u} + w \underline{\nu}$ (Figure 5.1a).
- un vecteur de vitesse de rotation virtuelle $\underline{\Theta}(\underline{x}) = \Theta_x \underline{e}_x + \Theta_y \underline{e}_y + \Theta_z \underline{e}_z$, exprimé ici en fonction de ses composantes dans le repère global. Il sera également plus commode d'exprimer cette vitesse de rotation en fonction d'une composante dans le plan tangent notée $\underline{\theta} = \theta_1 \underline{a}_1 + \theta_2 \underline{a}_2$ et d'une composante transversale notée ϑ de sorte que $\underline{\Theta} = \underline{\theta} + \vartheta \underline{\nu}$ (Figure 5.1b). On introduit également le vecteur $\underline{\beta} = \underline{\nu} \wedge \underline{\theta}$ qui appartient lui aussi au plan tangent à Ω .

En un point de la coque, la cinématique retenue correspond donc à une superposition d'une cinématique de Reissner-Mindlin $(w, \underline{\theta})$ attachée au plan tangent, d'une cinématique de membrane (\underline{u}) dans le plan tangent et d'une rotation de torsion autour de la normale au plan tangent ϑ .

La densité surfacique de puissance de déformation développée en un point $\underline{x} \in \Omega$ est donnée par :

$$p_{def} = \underline{\underline{N}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) + \underline{\underline{M}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}) + \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\gamma}}(\underline{x}) \quad (5.1)$$

où les différents tenseurs des efforts et déformations généralisés introduits précédemment dans le cas de la modélisation de plaque appartiennent ici au plan tangent à la coque en \underline{x} . L'expression (5.1) suppose qu'aucune puissance n'est développée par la composante de torsion autour de la normale à la coque, cette hypothèse de résistance infinie vis-à-vis de la torsion dans le plan est retenue dans toute la suite.

À noter que les expressions de ces déformations généralisées en fonction du vecteur vitesse \underline{U} et de la vitesse de rotation $\underline{\Theta}$ ainsi que les équations d'équilibre local vérifiées par les efforts généralisés font intervenir des outils de géométrie différentielle tels que la première et deuxième forme fondamentale de la coque Ω et induisent un couplage entre les termes de flexion et de membrane.

5.2. Discrétisation et implémentation par éléments finis

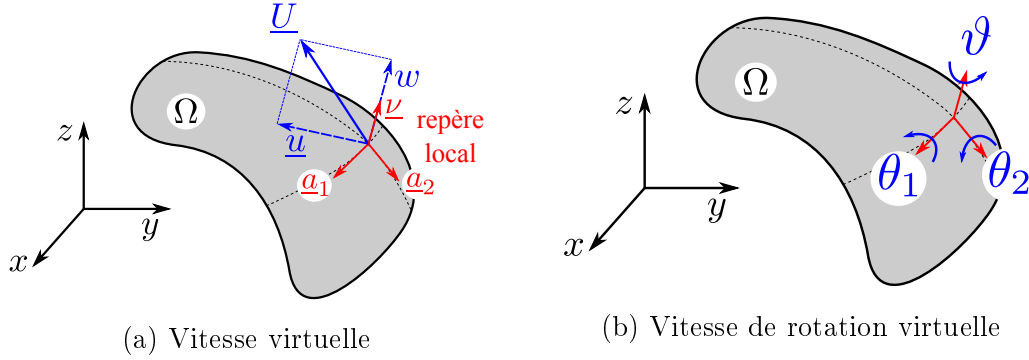


FIGURE 5.1 – Cinématique virtuelle d'une coque

5.2 Discrétisation et implémentation par éléments finis

Afin de s'affranchir des difficultés techniques évoquées précédemment, liées à la géométrie courbe de la coque, et afin de tirer directement parti du travail présenté dans les chapitres précédents, nous avons fait le choix de discrétiser la géométrie de la coque en un ensemble d'éléments triangulaires ou « *facettes planes* », de sorte que les termes de flexion et de membrane sont découplés dans chaque élément et correspondent à la superposition d'un élément de plaque en flexion et d'un élément de membrane. Le couplage membrane-flexion se produira alors en écrivant les relations de continuité entre deux facettes adjacentes non coplanaires.

Dans un souci de concision, cette section relative à la discrétisation par éléments finis plans sera relativement courte dans la mesure où les éléments de plaque ont été présentés dans les chapitres précédents et les éléments de membrane bien connus. On se contentera de préciser les spécificités liées à la géométrie de coque.

5.2.1 Repère local

Dans chaque élément, les tenseurs d'efforts et de déformations généralisés seront exprimés en fonction de leurs composantes dans une base $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ du plan tangent qui correspond ici au plan engendré par l'élément en question, ainsi $\underline{N} = N_{11}\underline{a}_1 \otimes \underline{a}_1 + N_{22}\underline{a}_2 \otimes \underline{a}_2 + N_{12}(\underline{a}_1 \otimes \underline{a}_2 + \underline{a}_2 \otimes \underline{a}_1)$ par exemple.

Le choix du repère local n'a pas d'influence sur la solution. Comme cela est fait traditionnellement pour les éléments de coque, le repère local d'un élément de nœuds de coordonnées \underline{X}_i , $i = 1, 2, 3$, est défini de la façon suivante :

- calcul de la normale unitaire à la facette :

$$\underline{\nu} = \frac{(\underline{X}_2 - \underline{X}_1) \wedge (\underline{X}_3 - \underline{X}_1)}{\|(\underline{X}_2 - \underline{X}_1) \wedge (\underline{X}_3 - \underline{X}_1)\|}$$

- si $\underline{\nu} \wedge \underline{e}_y \neq 0$, alors $\underline{a}_1 = (\underline{e}_y \wedge \underline{\nu}) / \|\underline{e}_y \wedge \underline{\nu}\|$, sinon $\underline{a}_1 = \underline{e}_x$;

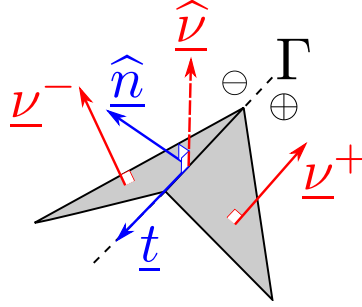


FIGURE 5.2 – Définition d'un plan tangent moyen à l'interface entre deux facettes non coplanaires

- puis $\underline{a}_2 = (\underline{\nu} \wedge \underline{a}_1) / \|\underline{\nu} \wedge \underline{a}_1\|$.

Ce repère local permet alors de construire les matrices de rotation permettant d'exprimer une quantité exprimée dans le repère global $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ dans le repère local $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{\nu})$ et inversement.

5.2.2 Choix des éléments finis

5.2.2.1 Approche statique

Pour l'approche statique, nous combinons l'élément fini de la section 4.2 du chapitre 4 (moment de flexion quadratique, effort tranchant linéaire) à un élément de membrane avec interpolation linéaire pour \underline{N} .

On complète donc les équations d'équilibre local par l'équilibre en projection dans le plan de l'élément. Les équations de continuité à travers une ligne Γ de vecteur tangent \underline{t} en l'absence d'efforts extérieurs sur cette ligne sont modifiées de la façon suivante :

$$\llbracket \underline{M} \cdot \underline{n} \rrbracket = \underline{M}^+ \cdot \underline{n}^+ - \underline{M}^- \cdot \underline{n}^- = \underline{0} \quad (5.2)$$

$$\llbracket \underline{R} \rrbracket = \underline{R}^+ - \underline{R}^- = \underline{0} \quad (5.3)$$

où $\underline{R}^\pm = \underline{N}^\pm \cdot \underline{n}^\pm + (\underline{V}^\pm \cdot \underline{n}^\pm) \underline{\nu}^\pm$ correspond à la résultante des efforts de part et d'autre de l'interface, $\underline{n}^\pm = \underline{\nu}^\pm \wedge \underline{t}$ et $\underline{\nu}^\pm$ est la normale à l'élément situé du côté \pm de l'interface (Figure 5.2).

5.2.2.2 Approche cinématique

Pour l'approche cinématique, nous souhaitons réutiliser l'élément présenté dans la section 4.3 du chapitre 4 combiné à un élément fini de membrane. Pour cela, nous considérons, dans chaque élément, une interpolation quadratique du champ de vitesse global \underline{U} et une interpolation linéaire du champ de rotation $\underline{\Theta}$. Ces champs sont encore une fois discontinus d'un élément à l'autre *a priori*. Nous retrouvons donc bien l'élément $w6$ -d combiné à un élément de membrane avec interpolation quadratique discontinue de la partie plane de la vitesse.

Le calcul des déformations généralisées se fait sans peine, la difficulté provient ici de

5.3. Critères de résistance généralisés en interaction effort membranaire-moment de flexion

l'expression des discontinuités à travers une arête Γ . Puisque nous devons distinguer la partie transversale de la discontinuité de sa partie dans le plan tangent, il nous faut définir une normale à la surface de la coque en Γ . La normale étant discontinue à la traversée de Γ , nous introduisons une normale moyenne, notée $\hat{\underline{\nu}}$ définie par (Figure 5.2) :

$$\hat{\underline{\nu}} = \frac{\underline{\nu}^+ + \underline{\nu}^-}{\|\underline{\nu}^+ + \underline{\nu}^-\|} \quad (5.4)$$

La discontinuité transversale, par exemple, sera alors donnée par $[[w]] = (\underline{U}^+ - \underline{U}^-) \cdot \hat{\underline{\nu}}$. Cette expression montre que $[[w]]$ couplera les composantes planes et transversales des vitesses des deux éléments adjacents. On définira, de même, $\hat{\underline{n}} = \underline{t} \wedge \hat{\underline{\nu}}$ pour les discontinuités normales à Γ dans le plan tangent.

Enfin, l'hypothèse faite sur la composante de torsion autour de la normale à la coque conduit à imposer la nullité de la déformation de torsion $\underline{\nabla}\vartheta = \underline{0}$ dans chaque élément ainsi que la continuité de la composante de la rotation normale à la coque soit $[[\vartheta]] = (\underline{\Theta}^+ - \underline{\Theta}^-) \cdot \hat{\underline{\nu}} = 0$ à travers Γ .

5.2.3 Intersection de plusieurs coques

Le cas de plusieurs parties de coques s'intersectant en une même ligne Γ ne pose pas de réelles difficultés supplémentaires. Il suffit de généraliser les relations de saut en sommant toutes les contributions à l'équilibre de l'arête et d'écrire les discontinuités de vitesses pour chaque paire d'arête, la puissance résistante maximale liée à cette arête correspond alors à la somme des contributions de chacune de ces paires.

5.3 Critères de résistance généralisés en interaction effort membranaire-moment de flexion

La principale difficulté de la mise en œuvre du calcul à la rupture pour les structures de type coque réside certainement dans la formulation du critère de résistance généralisé. *A priori*, ce dernier est un ensemble convexe dans un espace à 8 dimensions (3 composantes pour le tenseur des efforts membranaires et des moments de flexion et 2 composantes pour le vecteur d'efforts tranchants). Bien que l'ensemble de ce chapitre (discrétisation + formulation du critère) se généralise sans peine au cas des coques épaisses¹ *i.e.* admettant une résistance finie à l'effort tranchant, nous nous concentrons dans la suite sur le cas des coques minces admettant une résistance infinie à l'effort tranchant. La difficulté persiste tout de même dans la mesure où le critère de résistance appartient désormais à un espace à 6 dimensions.

On pourrait penser, à ce stade, qu'il aurait été préférable de traiter le cas des coques

1. Dans le cas où l'épaisseur reste négligeable devant tout rayon de courbure R de la coque. En effet, on peut généraliser facilement l'approche pour les plaques épaisses (*i.e.* $h \ll L$ avec L la longueur caractéristique dans le plan de la coque) au cas des coques épaisses modérément courbes *i.e.* $h \ll L$ mais $h \ll R$. Le cas des coques épaisses fortement courbes ($R \sim L$ et donc $h \ll R$) est plus complexe et fait intervenir des termes géométriques d'ordre supérieur dans l'écriture de la relation entre les efforts généralisés et les contraintes locales.

par une modélisation en éléments finis 3D dégénérés² et de travailler directement avec un tenseur des contraintes pour éviter la difficulté de formuler un critère de résistance généralisé. Nous allons montrer dans la suite qu'il est tout à fait possible de s'affranchir de cette difficulté en gardant une modélisation en efforts généralisés tout en exprimant le critère de résistance généralisé via le critère local formulé en contraintes.

5.3.1 Critères approchés dans le cas d'un matériau de von Mises

La formulation d'un critère de résistance généralisé à 6 dimensions en interaction effort membranaire-moment de flexion ($\underline{N} - \underline{M}$) est trop complexe en général pour obtenir des expressions analytiques exactes. Ilyushin [Ilyushin, 1956] a réussi à paramétriser analytiquement cette hypersurface dans le cas d'une coque homogène d'épaisseur h constituée d'un matériau de von Mises (de résistance uniaxiale σ_0) mais cette paramétrisation est trop complexe pour pouvoir être utilisée en tant que telle dans un calcul de structure. Introduisant les notations adimensionnelles suivantes :

$$\underline{n} = \underline{N}/(\sigma_0 h) \quad (5.5)$$

$$\underline{m} = \underline{M}/(\sigma_0 h^2/4) \quad (5.6)$$

$$Q_n = n_{11}^2 + n_{22}^2 - n_{11}n_{22} + 3n_{12}^2 \quad (5.7)$$

$$Q_m = m_{11}^2 + m_{22}^2 - m_{11}m_{22} + 3m_{12}^2 \quad (5.8)$$

$$Q_{nm} = n_{11}m_{11} + n_{22}m_{22} - \frac{1}{2}(n_{11}m_{22} + n_{22}m_{11}) + 3n_{12}m_{12} \quad (5.9)$$

différents auteurs ont alors proposé des approximations faisant intervenir des expressions plus simples :

- [Ilyushin, 1956]

$$\sqrt{Q_n + Q_m + \frac{1}{\sqrt{3}}|Q_{nm}|} \leq 1 \quad (5.10)$$

- [Hodge, 1959]

$$\sqrt{Q_m} + Q_n \leq 1 \quad (5.11)$$

- [Owen et Figueiras, 1983]

$$\sqrt{Q_m + Q_n} \leq 1 \quad (5.12)$$

- approximation « sandwich » [Prager, 1961]

$$\sqrt{Q_n + Q_m + 2|Q_{nm}|} \leq 1 \quad (5.13)$$

Ces différentes approximations sont exactes dans le cas de sollicitations de membrane pure ($\underline{M} = \underline{0}$) et de flexion pure ($\underline{N} = \underline{0}$), mais elles diffèrent dans la façon de représenter l'interaction $N - M$. Pour une présentation plus complète de ces différentes

2. Autre grande famille d'éléments finis de coque que celle des éléments finis en efforts généralisés. Néanmoins, leur formulation reste technique du fait de la courbure géométrique et n'aurait pas permis de réutiliser efficacement le travail des chapitres précédents.

5.3. Critères de résistance généralisés en interaction effort membranaire-moment de flexion

Approximation	Écart par défaut	Écart par excès
(5.10)	7.1%	3.4%
(5.11)	16.7%	0%
(5.12)	4.5%	15.5%
(5.13)	20%	0%

TABLEAU 5.1 – Écarts maximaux des différentes approximations par rapport au critère exact pour une coque de von Mises

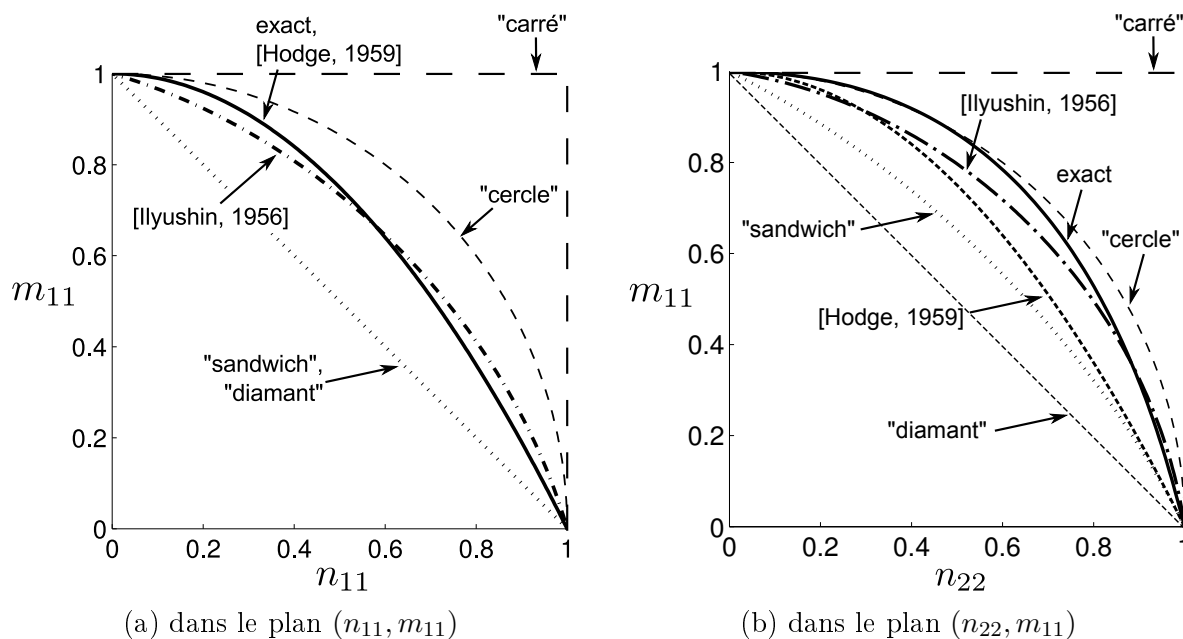


FIGURE 5.3 – Représentations du critère exact et des différentes approximations pour une coque de von Mises

approximations, nous renvoyons aux travaux de Robinson [Robinson, 1971]. Ce dernier a également étudié la précision de ces approximations en calculant numériquement la distance maximale de ces surfaces avec la surface exacte. Les résultats, tirés de [Robinson, 1971], sont reportés dans le Tableau 5.1.

Enfin, mentionnons qu'il est possible de considérer d'autres approximations relativement grossières telles que :

- critère *sans interaction* ou critère « carré ». Ce critère revient à prendre le produit cartésien des critères en membrane pure et en flexion pure :

$$\begin{cases} \sqrt{Q_n} \leq 1 \\ \sqrt{Q_m} \leq 1 \end{cases} \quad (5.14)$$

- critère avec *interaction linéaire* : ce critère revient à prendre l'enveloppe convexe

des critères en membrane pure et en flexion pure, parfois appelé critère en « diamant » :

$$\sqrt{Q_n} + \sqrt{Q_m} \leq 1 \quad (5.15)$$

- critère avec *interaction non-linéaire ellipsoïdale* : ce critère revient à considérer un ellipsoïde engendré par les critères en membrane pure et en flexion pure, qu'on peut qualifier de critère en « cercle ». Dans le cas du matériau de von Mises, il correspond à (5.12).

Ces différents critères ont été représentés dans les plans (n_{11}, m_{11}) (Figure 5.3a) et (n_{22}, m_{11}) (Figure 5.3b) à titre d'illustration.

Cas d'autres critères constitutifs

Dans le cas où le matériau constitutif de la coque obéit à un autre critère que celui de von Mises (critère de Tresca par exemple), d'autres approximations sont nécessaires. On peut, par exemple, réutiliser l'approche dite « sandwich » consistant à assimiler la coque homogène à deux membranes inférieure et supérieure [Hodge, 1954, Lubliner, 1990]. Il est également possible de réutiliser les approximations précédentes en encadrant le critère de Tresca par le critère de von Mises de la façon suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} G_{\text{von Mises}} \subset G_{\text{Tresca}} \subset G_{\text{von Mises}} \quad (5.16)$$

Enfin, si l'on connaît l'expression des critères en membrane et flexion pures, on généralise facilement les critères en « diamant », « cercle » et « carré ».

5.3.2 Cas général : une approche par changement d'échelle

5.3.2.1 Formulation statique

Dans le cas où la coque est constituée d'un matériau dont les propriétés de résistance sont *homogènes dans le plan de la coque*, on peut montrer que le critère de résistance généralisé s'obtient à partir du critère de résistance local $\mathcal{G}(\xi)$ en considérant, dans l'épaisseur de la coque, un état de *contraintes planes* et ne dépendant que de la variable d'épaisseur ξ [Save *et al.*, 1997, Dallot *et Sab*, 2008] :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in G \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma}(\xi) = \sigma_{ij}(\xi) \underline{a}_i \otimes \underline{a}_j \in \mathcal{G}(\xi) \quad \forall \xi \in [-h/2; h/2] \text{ et } i, j = 1, 2 \\ N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(\xi) d\xi \\ M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (-\xi) \sigma_{ij}(\xi) d\xi \end{cases} \quad (5.17)$$

Cette formulation est le résultat d'une approche par changement d'échelle et fournit donc une représentation implicite du critère généralisé en fonction du critère local dans l'épaisseur de la coque. Le premier intérêt de cette formulation réside dans sa généralité puisqu'elle est valable pour n'importe quel critère local \mathcal{G} en tout point de l'épaisseur. Le deuxième intérêt réside dans le fait qu'elle fournit naturellement une stratégie d'approximation du critère exact utilisable numériquement comme nous le verrons ensuite.

5.3. Critères de résistance généralisés en interaction effort membranaire-moment de flexion

5.3.2.2 Formulation cinématique

La fonction d'appui $\pi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\chi}})$ associée à G est définie par :

$$\pi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\chi}}) = \sup_{(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in G} \left\{ \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}} \right\} \quad (5.18)$$

soit d'après (5.17) :

$$\begin{aligned} \pi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\chi}}) &= \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\xi) \in \mathcal{G}(\xi)} \left\{ \left(\int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\sigma}}(\xi) d\xi \right) : \underline{\underline{\epsilon}} + \left(\int_{-h/2}^{h/2} (-\xi) \underline{\underline{\sigma}}(\xi) d\xi \right) : \underline{\underline{\chi}} \right\} \\ &= \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\xi) \in \mathcal{G}(\xi)} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\sigma}}(\xi) : (\underline{\underline{\epsilon}} - \xi \underline{\underline{\chi}}) d\xi \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \pi_{loc}^{CP}(\underline{\underline{\epsilon}} - \xi \underline{\underline{\chi}}; \xi) d\xi \end{aligned} \quad (5.19)$$

La fonction d'appui généralisée s'obtient donc en intégrant, dans l'épaisseur, la fonction d'appui du critère de résistance local en contrainte plane $\pi_{loc}^{CP}(\underline{\underline{d}}; \xi)$ pour un taux de déformation virtuel correspondant à une cinématique de Love-Kirchhoff.

5.3.3 Approximations numériques du critère généralisé

5.3.3.1 Approximation par l'intérieur

La formulation (5.17) n'étant pas utilisable en tant que telle pour une implémentation numérique, nous proposons de construire une *approximation par l'intérieur* de G en se restreignant à un tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(\xi)$ constant par couches. Ainsi, si l'épaisseur de la coque est représentée par n couches $[h_{k-1}; h_k]$ pour $k = 1, \dots, n$ et avec $h_0 = -h/2$, $h_n = h/2$, alors on définit le critère macroscopique G^{stat} suivant :

$$(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in G^{stat} \subseteq G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \sigma_{ij}^k \text{ tels que} \\ \sigma_{ij}^k \underline{\underline{a}}_i \otimes \underline{\underline{a}}_j \in \mathcal{G}(\xi) \\ N_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \sigma_{ij}^k \\ M_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_{k-1}^2 - h_k^2}{2} \right) \sigma_{ij}^k \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, n \text{ et } i, j = 1, 2 \\ \forall \xi \in [h_{k-1}; h_k] \end{array} \quad (5.20)$$

En pratique, on supposera que le critère local reste constant par couche $\mathcal{G}(\xi) = \mathcal{G}_k$ de sorte que l'on ait besoin de vérifier le critère local en un seul point de la couche correspondante.

Cette approche permet donc d'obtenir une approximation du critère généralisé d'une coque en toute généralité (quel que soit \mathcal{G}) et dont on peut contrôler la précision en faisant varier le nombre n de couches. Une conséquence importante du point de vue

de l'implémentation numérique est que, si la coque est constituée d'un matériau dont le critère local peut s'exprimer à l'aide de contraintes coniques, alors l'approximation précédente du critère généralisé pourra également se formuler à l'aide de contraintes coniques de même nature.

5.3.3.2 Approximation par l'extérieur

Nous proposons également de construire une approximation par l'extérieur du critère généralisé à partir de l'expression (5.19) de sa fonction d'appui. En effet, constatant que $\pi_{loc}^{CP}(\underline{d})$ est une fonction convexe et que son argument varie de manière affine par rapport à ξ^3 , l'approximation de l'intégrale par une « formule des trapèzes » à $n > 1$ points fournit une majoration de cette dernière. Ainsi, on a :

$$\pi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\chi}}) \leq \sum_{k=1}^n \omega_k \pi_{loc}^{CP}(\underline{\underline{\epsilon}} - \xi_k \underline{\underline{\chi}}) \quad (5.21)$$

où $\omega_k = h/(n-1)$ pour tout $k \notin \{1, n\}$, $\omega_1 = \omega_n = h/2/(n-1)$ et $\xi_k = -\frac{h}{2} + \frac{h}{n-1}(k-1)$. Cette majoration conduit donc à une approche par l'extérieur $G^{kin} \supseteq G$ du critère généralisé de la coque, qui tend vers le critère exact lorsque $n \rightarrow \infty$.

Cette approche permet également de contrôler la précision de l'approximation en faisant varier n et l'implémentation à l'aide de contraintes coniques est possible tant que le critère local, et donc sa fonction d'appui, peut se formuler à l'aide de telles contraintes coniques.

5.3.3.3 Estimations d'erreurs

À ce stade, il est intéressant de s'interroger sur la qualité des approches par approximation qui viennent d'être proposées. Nous avons tout d'abord représenté l'allure du critère obtenu pour différentes approximations par l'intérieur et par l'extérieur en faisant varier le degré de discrétisation n , dans le plan (n_{11}, m_{11}) (Figure 5.4a) et dans le plan (n_{22}, m_{11}) (Figure 5.4b) pour une coque homogène de von Mises. On peut noter la qualité de l'approximation du critère exact obtenue pour des valeurs de $n \geq 4$ ou 5. Pour l'approximation par l'intérieur avec $n = 2$, on retrouve l'approximation de type « sandwich » mentionnée précédemment.

Afin de quantifier l'erreur d'approximation de façon plus générale, nous avons évalué la frontière de différents critères en échantillonnant uniformément l'espace \mathbb{R}^6 en 10 000 points. Nous avons ensuite calculé la *distance maximale* entre les critères obtenus suivant différentes approximations et le critère exact (que nous avons assimilé au critère obtenu par (5.20) ou (5.21) avec $n = 100$). Les résultats ont été représentés sur la Figure

3. Ici encore, le statut de borne supérieure n'est assuré que si le critère et donc sa fonction d'appui sont uniformes par couche, ce que l'on suppose. Dans le cas contraire, on n'obtient qu'une approximation sans statut de borne.

5.3. Critères de résistance généralisés en interaction effort membranaire-moment de flexion

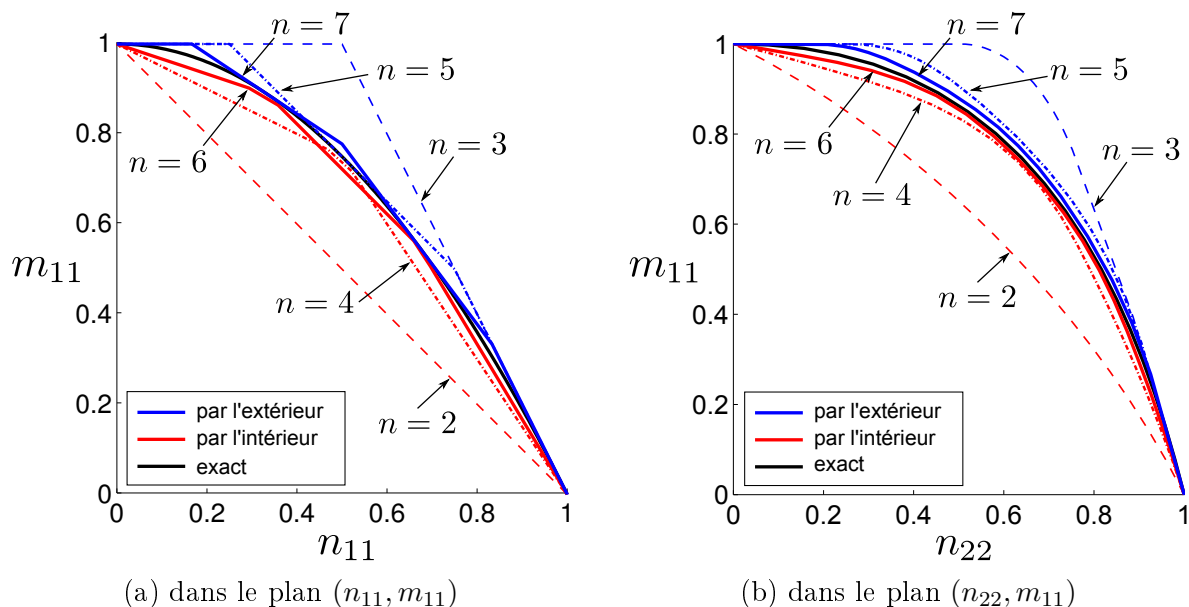


FIGURE 5.4 – Représentations du critère exact et des approximations par l'intérieur et par l'extérieur pour une coque de von Mises

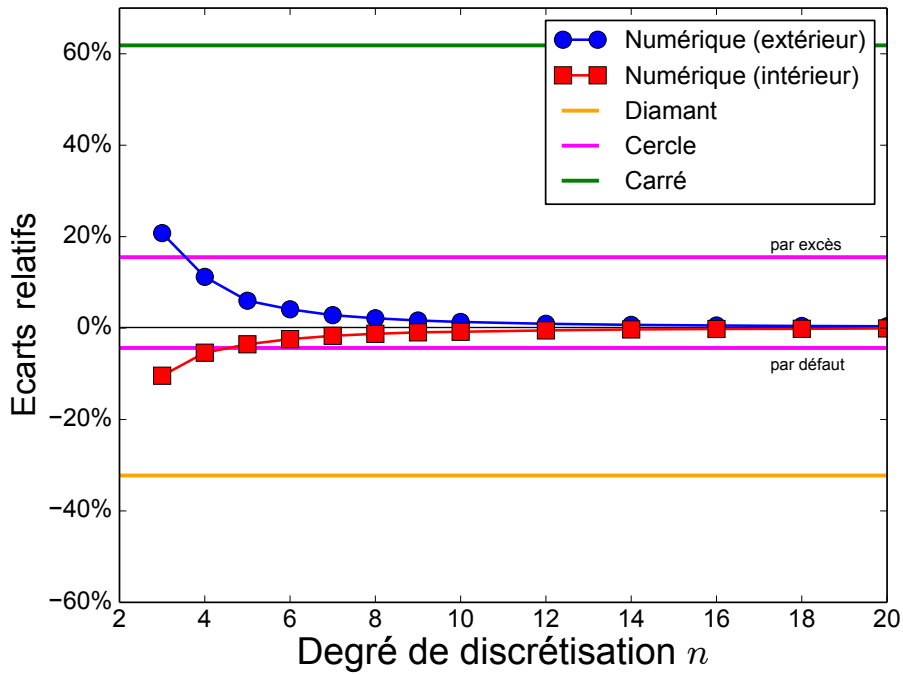
5.5a dans le cas d'une coque homogène constituée d'un matériau de von Mises et sur la Figure 5.5b pour un matériau de type Rankine, *i.e.* avec un critère limitant la valeur absolue des contraintes principales : $|\sigma_I|, |\sigma_{II}| \leq \sigma_0$.

On constate alors que les deux approximations numériques proposées sont déjà relativement satisfaisantes pour $n = 3$ (encadrement de -15% à $+20\%$). De plus, la convergence des deux approches semble relativement rapide, le critère exact étant encadré à 5% près pour $n = 7$. On observe également que l'approximation numérique reste de précision similaire pour le cas du critère de Rankine tandis que les critères en « diamant » et en « cercle » sont bien moins précis. Mentionnons que, pour les cas étudiés, ces derniers ainsi que le critère en « carré » sont exacts pour des sollicitations de membrane pure et de flexion pure, tandis qu'on observe des écarts très importants pour une sollicitation quelconque. L'approche proposée, quant à elle, ne repose pas explicitement sur l'utilisation des critères en membrane et flexion pures et semble ainsi plus adaptée à des sollicitations quelconques.

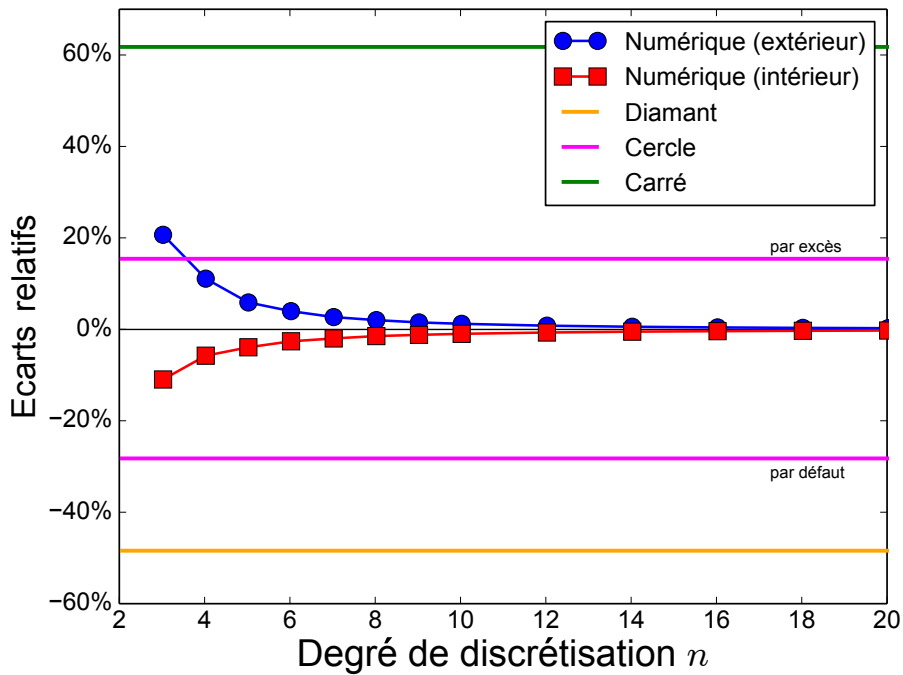
5.3.4 Prise en compte d'armatures de renforcement

Considérons une coque renforcée dans la direction \underline{e}_α de son plan tangent par un lit d'armatures situé à une distance d de la surface moyenne et de fraction volumique⁴ $\eta \ll 1$. Si la résistance uniaxiale des armatures f_s est très grande devant celle du matériau qu'elles viennent renforcer et dans l'hypothèse d'adhérence totale des armatures à ce dernier, alors on peut montrer que le critère G_r du milieu renforcé peut s'écrire comme la somme (au sens de Minkowski) du critère du matériau constitutif G_0 et d'un critère

4. $\eta = S/(eh)$ où S est la section d'une barre d'acier et e l'espacement entre deux barres consécutives



(a) Coque homogène de von Mises



(b) Coque homogène de Rankine

FIGURE 5.5 – Ecart relatif maximum des différentes approximations (approximation numérique par l'intérieur (5.20) et par l'extérieur (5.21) en fonction de n , approximation de type « cercle » (5.12), « diamant » (5.15) et « carré » (5.14)) par rapport au critère exact.

5.3. Critères de résistance généralisés en interaction effort membranaire-moment de flexion

correspondant à la contribution du renfort [de Buhan et Taliervo, 1991] :

$$G_r = G_0 \oplus G_a = \left\{ (\underline{N}, \underline{M}) = (\underline{N}_0, \underline{M}_0) + (\tilde{N} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha, -d \tilde{N} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha) \right. \\ \left. \text{tels que } (\underline{N}_0, \underline{M}_0) \in G_0 \text{ et } |\tilde{N}| \leq N_s \right\} \quad (5.22)$$

où $N_s = f_s h \eta$ est homogène à un effort membranaire (en N/m).

Dans ce cas, la fonction d'appui du milieu renforcé (π_r) est donnée, en fonction de celle du milieu non renforcé (π_0), par :

$$\pi_r(\underline{\epsilon}, \underline{\chi}) = \pi_0(\underline{\epsilon}, \underline{\chi}) + N_s |\epsilon_{\alpha\alpha} - d \chi_{\alpha\alpha}| \quad (5.23)$$

La généralisation des expressions (5.22) et (5.23) à plusieurs nappes d'armatures d'orientations différentes ainsi qu'au cas où les armatures ont des résistances différentes en traction et compression est immédiate.

Cette formulation de type « multiphasique » est très intéressante du point de vue numérique puisqu'elle évite de discrétiser les armatures dont la contribution est directement prise en compte de façon très simple dans l'expression du critère macroscopique. En général, les armatures longitudinales présentes dans les dalles et coques en béton armé vérifient les hypothèses précédentes permettant ainsi d'utiliser une telle formulation.

5.3.5 Conclusion

In fine, il est possible de choisir différentes approximations du critère de résistance en fonction de la nature du problème. Dans certains cas, le mécanisme de ruine peut être relativement peu influencé par le choix du critère de résistance (notamment dans le cas d'un problème en flexion pure ou membrane pure, où la majorité des approximations coïncident). Dans ce cas, il peut être préférable d'utiliser une approximation relativement grossière de ce dernier et de raffiner le maillage de la coque afin d'obtenir une meilleure description du mécanisme de ruine.

En revanche, dans les cas où l'interaction entre membrane et flexion est importante, le choix du critère de résistance peut avoir une plus grande influence, notamment sur la valeur de la charge de ruine. La formulation générale par changement d'échelle implicite devient alors intéressante malgré un coût numérique plus important. Son intérêt est d'autant plus grand lorsque le critère du matériau constitutif est complexe ou varie dans l'épaisseur.

5.4 Exemples de validation

Cette section a pour but de valider les éléments finis précédents sur différents exemples. Le premier est un exemple unidimensionnel dont on connaît la solution complète grâce à une modélisation de type *arc courbe*. Le deuxième exemple concerne la détermination de diagrammes d'interactions pour une poutre caisson modélisée à l'aide d'éléments de coque. Enfin, le dernier exemple, purement tridimensionnel et faisant intervenir effort membranaire et moment de flexion, sera confronté à la solution d'un problème 1D de poutre en flexion dans la limite des grands élancements. Nous considérons dans la suite $n = 4$ couches pour l'approximation par l'intérieur du critère et une formule des trapèzes à $n = 5$ points pour l'approche cinématique par l'extérieur.

5.4.1 Ruine d'un portique en forme d'arc semi-circulaire

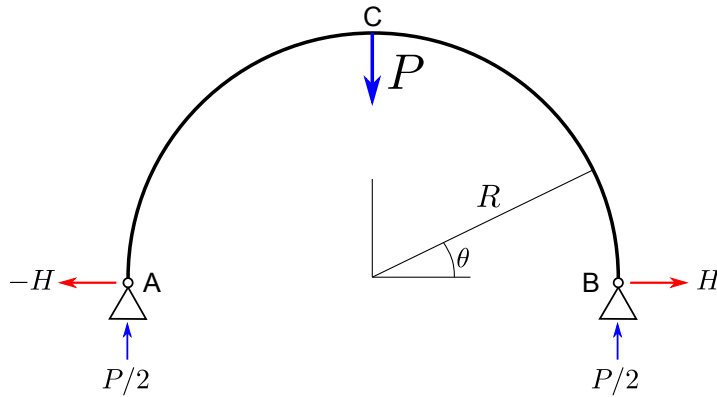


FIGURE 5.6 – Portique en forme d'arc semi-circulaire

Une coque cylindrique de section semi-circulaire de rayon R est simplement appuyée en A et en B et soumise à un effort vertical concentré en C d'intensité P (Figure 5.6). La coque obéit au critère de résistance de Rankine, de résistance uniaxiale σ_0 tandis que son épaisseur est fixée à $t = 0.001R$, valeur suffisamment faible pour considérer la résistance à l'effort membranaire comme infinie pour ce problème. Le problème ne faisant pas intervenir la direction transversale, on considère uniquement une tranche discrétisée à l'aide d'un seul élément dans cette direction avec des conditions aux limites appropriées. La circonférence est, quant à elle, discrétisée à l'aide de 100 éléments (on ne modélise en réalité que le demi-portique du fait de la symétrie du problème).

La charge ultime pour ce problème peut être déterminée analytiquement, le problème étant hyperstatique de degré 1 avec, par exemple, la réaction de poussée horizontale H comme inconnue hyperstatique. En un point de l'arc paramétré par l'angle θ , la distribution de moments statiquement admissible est de la forme suivante [de Buhan, 2007] :

$$M_{\theta\theta}(\theta) = HR \sin \theta + PR(1 - \cos \theta)/2 \quad \text{si } \theta \in [0; \pi/2]$$

5.4. Exemples de validation

avec $M_{\theta\theta}(\theta) = M_{\theta\theta}(\pi - \theta)$ pour $\theta \in [\pi/2; \pi]$. Les sections potentiellement critiques sont le point C et un point intermédiaire d'angle $\theta_0 = \tan^{-1}(-2H/P)$ ainsi que son symétrique. L'écriture du critère de résistance sur le moment de flexion en ces trois points conduit à une charge ultime égale à $P^+ = 8M_0/R$, la valeur de la poussée associée étant $H = -3M_0/R$, où $M_0 = \sigma_0 t^2/4$.

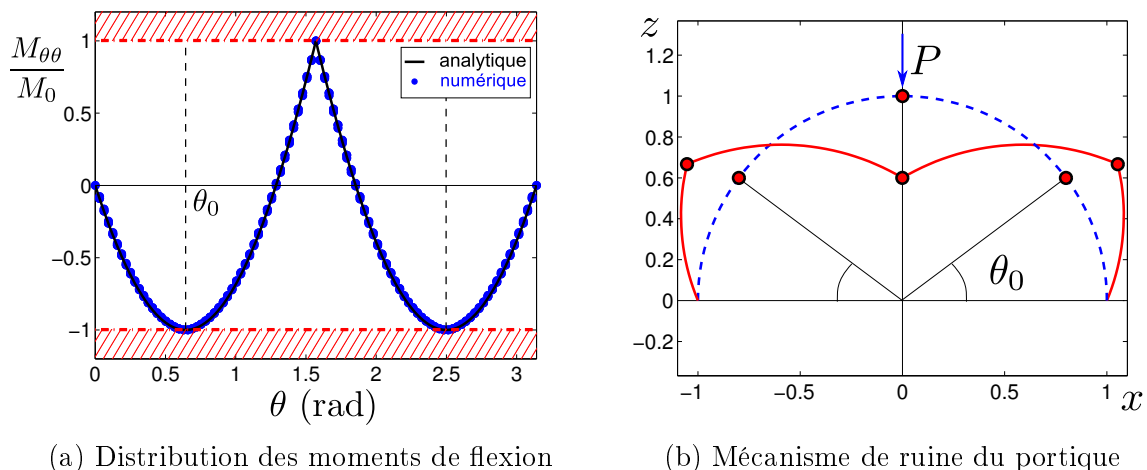


FIGURE 5.7 – Solutions numériques pour le problème du portique

La mise en œuvre numérique par éléments finis de l'approche statique pour ce problème fournit la valeur exacte de P^+ avec une précision de l'ordre de 10^{-4} . On s'intéresse en particulier à la distribution des moments de flexion obtenue numériquement le long du portique. On constate sur la Figure 5.7a que l'allure de cette distribution est confondue avec la solution analytique. En particulier, les trois sections potentiellement critiques en $\theta = \theta_0$, $\pi/2$ et $\pi - \theta_0$ sont retrouvées par la solution numérique.

Enfin, la mise en œuvre numérique de l'approche cinématique fournit également la valeur exacte de P^+ avec la même précision⁵. De plus, l'allure du mécanisme de ruine (Figure 5.7b) correspond à celui associé à la statique précédente [de Buhan, 2007] *i.e.* mettant en jeu des discontinuités de rotation aux trois sections potentiellement critiques précédentes.

5.4.2 Diagrammes d'interaction d'une poutre caisson

Nous nous intéressons dans cet exemple à la détermination de différents diagrammes d'interaction d'une poutre caisson dont la géométrie de la section est représentée sur la Figure 5.8. Le matériau constitutif obéit au critère de von Mises de résistance uniaxiale σ_0 . Un tronçon de poutre de longueur L suivant la direction x est encastré à son extrémité

5. Dans le cas où les discontinuités du champ de vitesse sont autorisées. L'utilisation de champs continus fait que l'estimation est moins précise, de l'ordre de quelques % d'écart pour ce maillage.

$x = 0$ et une vitesse de déplacement $\underline{U}(L, y, z) = \underline{U}^d(y, z)$ est imposée sur la section située en $x = L$. Le reste de la poutre est libre d'effort. Mentionnons que les conditions aux limites retenues ne sont pas celles correspondant au problème de Saint-Venant et que l'on s'attend donc à ce que les solutions calculées soient différentes de celles correspondant à ce dernier.

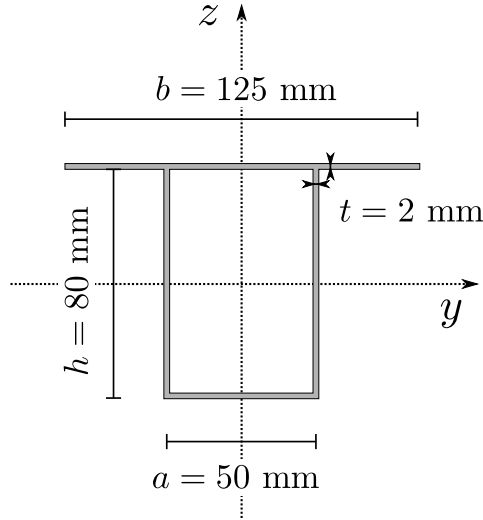


FIGURE 5.8 – Géométrie de la section de la poutre caisson

5.4.2.1 Diagramme d'interaction en flexion composée

La vitesse imposée est de la forme $\underline{U}^d(y, z) = (\delta - \alpha z)\underline{e}_x$. On montre alors facilement que pour tout \widehat{U} C.A. avec \underline{U}^d , on a :

$$P_{ext}(\widehat{U}) = \delta N + \alpha M \quad \text{avec} \quad N = \int_{x=L} \sigma_{xx} dS, \quad M = \int_{x=L} -z \sigma_{xx} dS \quad (5.24)$$

Il s'agit donc d'un *mode de chargement à deux paramètres* : un effort normal N et un moment de flexion M autour de l'axe y . La mise en œuvre de l'approche cinématique sur ce problème nous permet alors de construire, dans le plan (N, M) , un ensemble de droites d'équation $\delta N + \alpha M = P_{rm}(\delta, \alpha)$ pour différentes valeurs des paramètres cinématiques (δ, α) , délimitant ainsi une approche par l'extérieur du diagramme d'interaction \mathcal{D} en flexion composée.

Nous construisons également une approche par l'intérieur analytique de \mathcal{D} reposant sur un choix de champs de contraintes uniaxiaux de la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} -\sigma_0 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } e \leq z \leq h/2 \\ \sigma_0 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } -h/2 \leq z \leq e \end{cases} \quad (5.25)$$

5.4. Exemples de validation

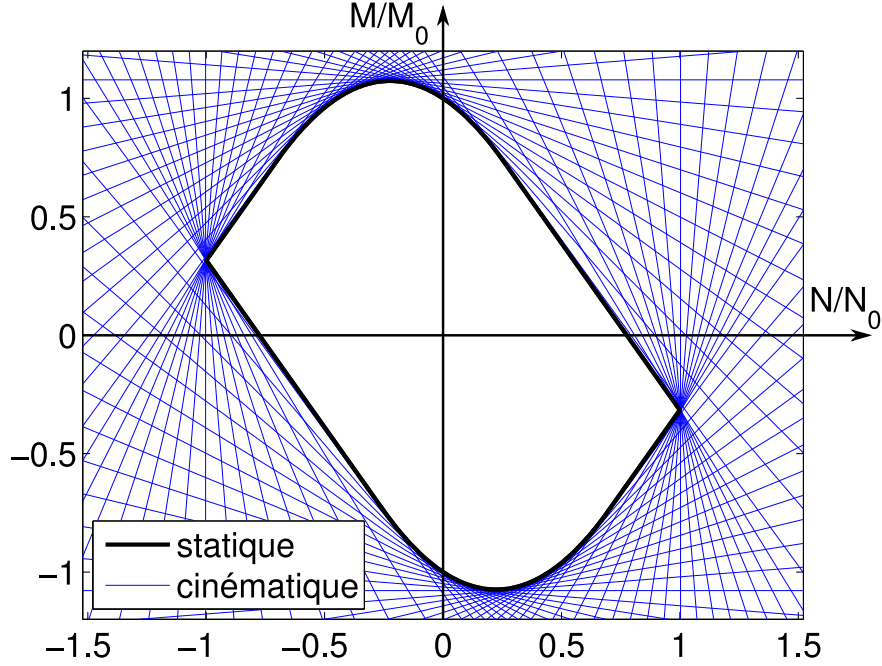


FIGURE 5.9 – Diagramme d’interaction en flexion composée (N, M) de la poutre caisson. $N_0 = \sigma_0 t(b + a + 2h)$, $M_0 = \sigma_0 t \left(\frac{h}{2}(h + b + a) - \frac{(b-a)^2}{8} \right)$

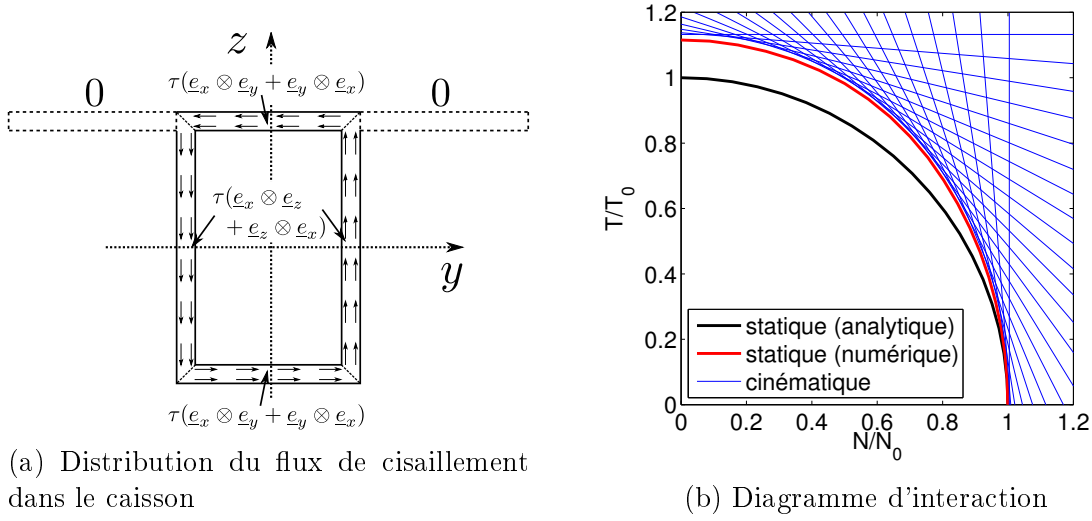
où $e \in [-h/2; h/2]$ décrit l’ordonnée de « l’axe neutre ». Avec un tel champ (statiquement admissible), nous obtenons une approche par l’intérieur $\mathcal{D}^{int} \subseteq \mathcal{D}$ définie par :

$$\mathcal{D}^{int} = \{(N = n(e)\sigma_0 t, M = m(e)\sigma_0 t) \text{ pour } e \in [-h/2; h/2]\} \quad (5.26)$$

$$n(e) = \begin{cases} a - b + 4e & \text{si } |e| < h/2 \\ \pm(a + b + 2h) & \text{si } e = \pm h/2 \end{cases}, \quad m(e) = \begin{cases} \frac{h}{2}(b + a + h) - 2e^2 & \text{si } |e| < h/2 \\ \mp \frac{h}{2}(b - a) & \text{si } e = \pm h/2 \end{cases}$$

qui consiste en l’union d’une portion de parabole et de deux points. Il convient de compléter cet ensemble par son symétrique par rapport à l’origine pour obtenir une approche par l’intérieur complète.

L’approche cinématique est mise en œuvre numériquement sur un tronçon de poutre de longueur $L = 2$ m maillé à l’aide de 1000 éléments triangulaires. Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 5.9 et comparés à la précédente approche statique analytique. On constate un excellent accord entre les deux approches. On vérifie en particulier que l’approche cinématique (bien que très proche) est toujours supérieure à l’approche statique. Il est à noter qu’une approche statique numérique avec les éléments finis présentés précédemment aurait fourni un résultat très proche du fait de la simplicité du champ de contrainte optimal. En revanche, il est intéressant de noter la


 FIGURE 5.10 – Poutre caisson en interaction effort normal-torsion (N, T)

qualité des résultats fournis par l'approche cinématique dont les mécanismes optimaux sont loin d'être triviaux compte-tenu du choix d'un tronçon de faible longueur et des conditions aux limites n'autorisant pas le glissement tangentiel.

5.4.2.2 Diagramme d'interaction en interaction effort normal-torsion

La vitesse imposée est, à présent, de la forme $U^d(y, z) = \delta \underline{e}_x + \omega r \underline{e}_\theta$ où $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ et \underline{e}_θ est le vecteur orthoradial du repère polaire situé dans le plan $x = L$. Nous sommes à nouveau en présence d'un mode de chargement à 2 paramètres : N et $T = \int_{x=L} r \sigma_{x\theta} dS$, moment de torsion autour de l'axe \underline{e}_x .

Nous construisons à nouveau une approche par l'intérieur analytique du diagramme d'interaction dans l'espace (N, T) en considérant la superposition d'un état de contrainte uniaxial uniforme $\underline{\sigma} = \sigma \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ et d'un flux de cisaillement dans la partie fermée du caisson tel que représenté sur la Figure 5.10a. Ce champ est constant dans l'épaisseur de la coque et il équilibre un moment de torsion maximal égal à $T_0 = \frac{\sigma_0 t}{\sqrt{3}} 2ah$ pour $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$. En superposant ces deux types de champs de contrainte, on construit facilement une approche par l'intérieur donnée par :

$$\mathcal{D}^{int} = \left\{ (N, T) \text{ tels que } \sqrt{\left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_0}\right)^2} \leq 1 \right\} \quad (5.27)$$

Pour ce problème, nous avons calculé les solutions numériques fournies par les approches statique et cinématique avec le maillage précédent. Ces solutions sont représentées sur la Figure 5.10b et comparées à la précédente approche statique analytique.

5.4. Exemples de validation

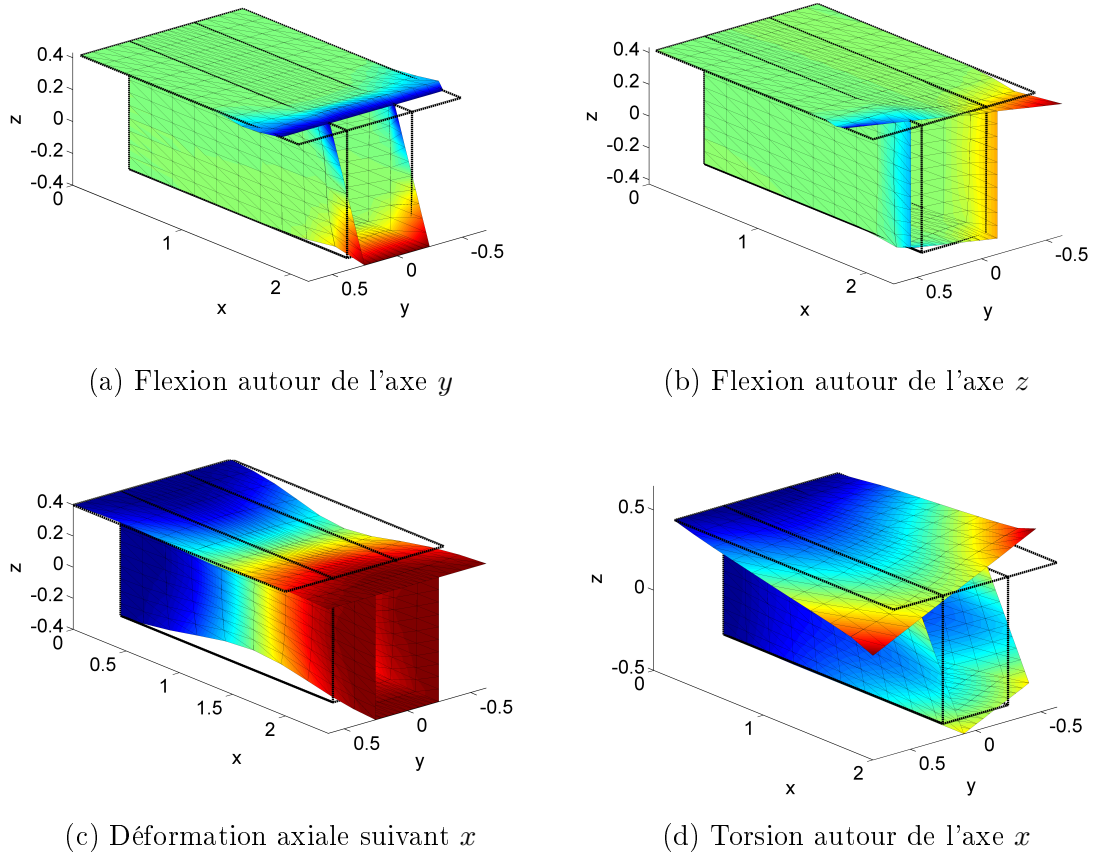


FIGURE 5.11 – Mécanismes de ruine pour différents modes de chargement (les isocouleurs représentent l'intensité de U_x pour les figures (a), (b) et (c) et $\|U_y e_y + U_z e_z\|$ pour (d))

On constate cette fois-ci un écart significatif avec l'approche statique analytique, de l'ordre de 10% en torsion pure. Cela est dû d'une part à la simplicité de la statique de torsion pure utilisée puisque les 2 ailes supérieures ne participent pas à la résistance à la torsion dans la statique considérée. D'autre part, les champs optimaux en torsion pure sont plus compliqués que précédemment. En effet, le choix des conditions aux limites crée une torsion gênée due à la tendance au gauchissement de la section et la faible longueur du tronçon fait que les effets de bord ne peuvent être négligés. Ainsi, l'écart à l'approche analytique diminue en augmentant la longueur du tronçon. Malgré tout, cet exemple permet surtout de valider les deux approches numériques sur un exemple plus complexe, l'écart entre ces dernières étant inférieur à 2%.

Pour finir, nous avons représenté sur la Figure 5.11 les mécanismes de ruine obtenus pour 4 modes de chargement élémentaires : flexion autour de l'axe y , flexion autour de l'axe z , déformation axiale selon x et torsion autour de l'axe x . On peut notamment constater la relative complexité de ces mécanismes dont la variation n'est pas linéaire

le long du tronçon.

5.4.3 Coque cylindrique bi-encastree

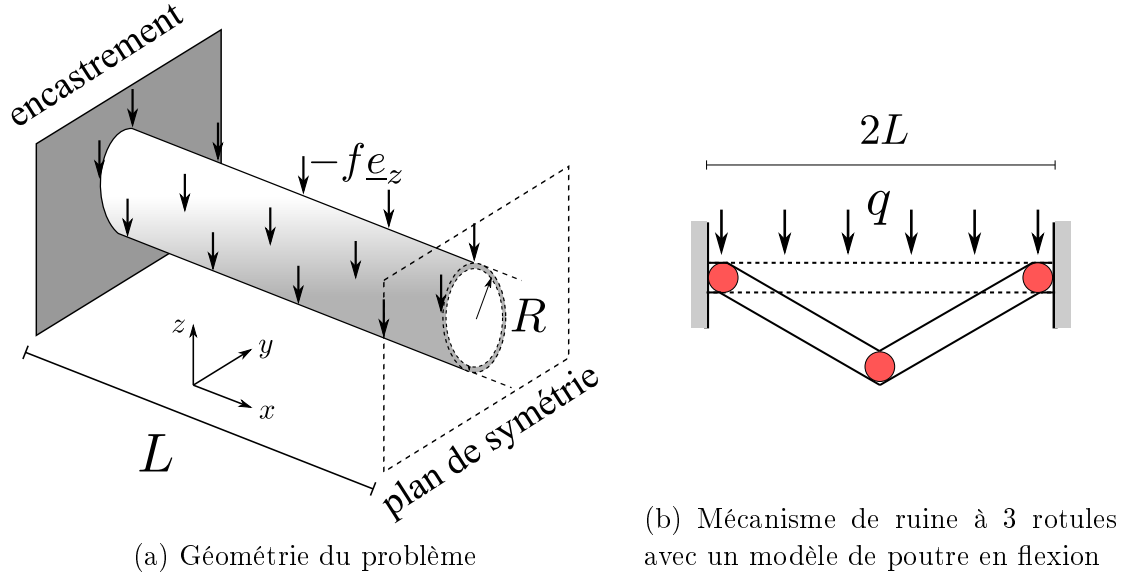


FIGURE 5.12 – Problème de la coque cylindrique bi-encastree

Cet exemple s'intéresse à la charge ultime d'une coque cylindrique de rayon R , d'épaisseur t et de longueur $2L$, encastree à ses deux extrémités. La géométrie de la coque est représentée sur la Figure 5.12a. Le chargement correspond à une densité surfacique uniforme d'efforts verticaux $-f\mathbf{e}_z$ et seule la moitié de la coque est considérée en appliquant des conditions de symétrie appropriées sur la surface $x = L$. Dans la suite, on fixe le rapport $t/R = 0.01$ et on considère différentes valeurs de l'élancement structurel $2L/R$.

À titre de comparaison, nous avons calculé la charge ultime prédite par un modèle uni-dimensionnel de poutre en flexion dont le mécanisme de ruine est un mécanisme de poutre à 3 rotules situées aux encastresments et à mi-portée (Figure 5.12b). Cette charge ultime est égale à $q^+ = 16M_0/(2L)^2$ où q est la charge linéique équivalente (*i.e.* $q = 2\pi Rf$) et M_0 est le moment ultime de la poutre de section circulaire donné par $M_0 = 4t(R^2 + \frac{t^2}{12})\sigma_0 \approx 4tR^2\sigma_0$. On en déduit donc la charge ultime fournie par ce modèle de poutre en flexion :

$$f_{poutre}^+ = \frac{32}{\pi}\sigma_0 t \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \quad (5.28)$$

Nous avons mis en œuvre les approches statique et cinématique sur ce problème en considérant des maillages structurés avec 40 éléments le long de la circonférence et des éléments de longueur $R/4$ dans la direction longitudinale. Les charges ultimes calculées, adimensionnées par rapport à celle du modèle de poutre en flexion (5.28), ont été représentées sur la Figure 5.13 pour différentes valeurs de l'élancement. À titre de

5.4. Exemples de validation

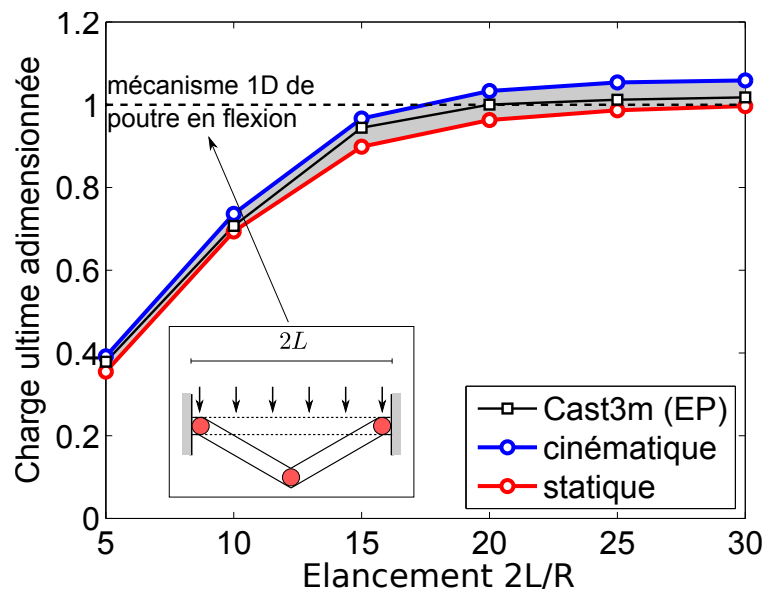


FIGURE 5.13 – Évolution de la charge ultime en fonction de l'élancement du cylindre

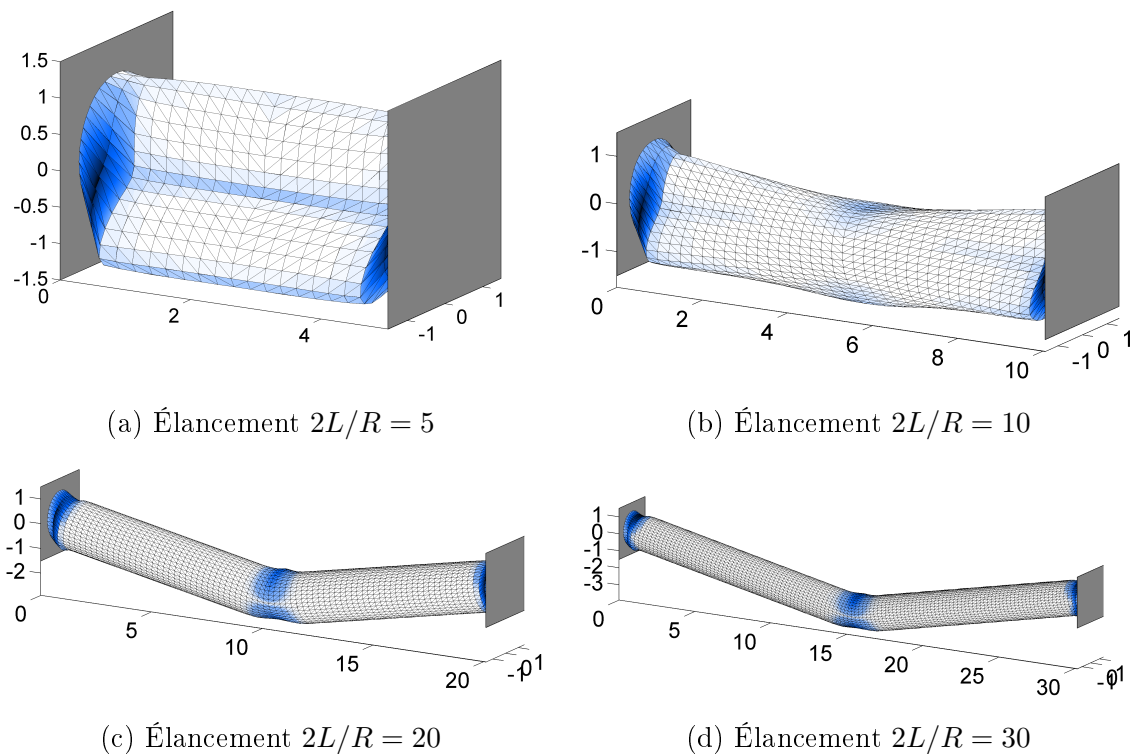


FIGURE 5.14 – Mécanisme de ruine et densité de déformation pour différents élancements

comparaison, nous avons également reporté les charges ultimes obtenues par un calcul élastoplastique avec éléments de coque à l'aide du code élément fini CAST3M [Verpeaux *et al.*, 1988] pour des maillages similaires.

Tout d'abord, on peut remarquer que les résultats du calcul élastoplastique se situent entre les bornes inférieures de l'approche statique et les bornes supérieures de l'approche cinématique, confortant ainsi nos propres calculs. On constate très clairement une évolution de la charge limite vers une valeur proche du modèle de poutre en flexion pour des valeurs élevées de l'élançement. Pour des valeurs plus modérées, la valeur de la charge ultime est plus faible, l'allure de ces courbes rappelant les résultats obtenues dans le cas des plaques épaisses en interaction flexion-effort tranchant (cf. chapitre 4).

Ces résultats sont confirmés lorsque l'on représente l'allure des mécanismes de ruine pour différents élançements (Figure 5.14). On observe un mécanisme de ruine semblable à une rupture par effort tranchant pour les faibles élançements, malgré le fait que la coque soit elle-même infiniment résistante à l'effort tranchant. En particulier pour $2L/R = 5$, la section circulaire présente un mode de ruine faisant apparaître trois charnières dans la direction longitudinale. Pour les valeurs plus élevées, on retrouve un mécanisme de ruine de type poutre en flexion présentant une déformation localisée près des encastremets et à mi-portée, rappelant les trois rotules du mécanisme 1D. Mentionnons pour finir que les mécanismes de ruine obtenus ici sont tout à fait semblables à ceux obtenus par le calcul élastoplastique réalisé avec CAST3M.

5.5 Phénomène de verrouillage en membrane

5.5.1 Illustration du point de vue de l'approche statique

Nous illustrons ici le problème du « *verrouillage en membrane* » en considérant une tranche infinitésimale de coque cylindrique de rayon R , d'épaisseur t , soumise à une pression p . Il est facile de voir que les efforts intérieurs se réduisent à un effort membranaire orthoradial $N_{\theta\theta} = pR$.

Supposons à présent que la coque soit discrétisée par un ensemble de N facettes planes (des segments ici) de longueur $l = 2R \sin \alpha$ où $\alpha = \pi/N$ représente également la moitié de l'angle formé par deux facettes successives (Figure 5.15). La pression p , appliquée de manière uniforme sur chaque segment, produit un effort tranchant linéaire $V_\theta = -\frac{pl}{2}\xi$ et un moment de flexion quadratique dans chaque segment : $M_{\theta\theta} = -\frac{pl^2}{8}\xi^2 + cte$ où $\xi \in [-1; 1]$ représente l'abscisse adimensionnée de chaque segment. La continuité des efforts entre chaque segment impose la relation suivante :

$$2N_{\theta\theta} \sin \alpha + \llbracket V_\theta \rrbracket \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{\theta\theta} = \frac{pl}{2} \cotan \alpha = pR \cos \alpha \quad (5.29)$$

On constate bien qu'à la limite $N \rightarrow \infty$, soit $\alpha \rightarrow 0$, on a $N_{\theta\theta} \rightarrow pR$. Supposons, pour simplifier, que le critère de résistance soit découplé en effort normal et moment de

5.5. Phénomène de verrouillage en membrane

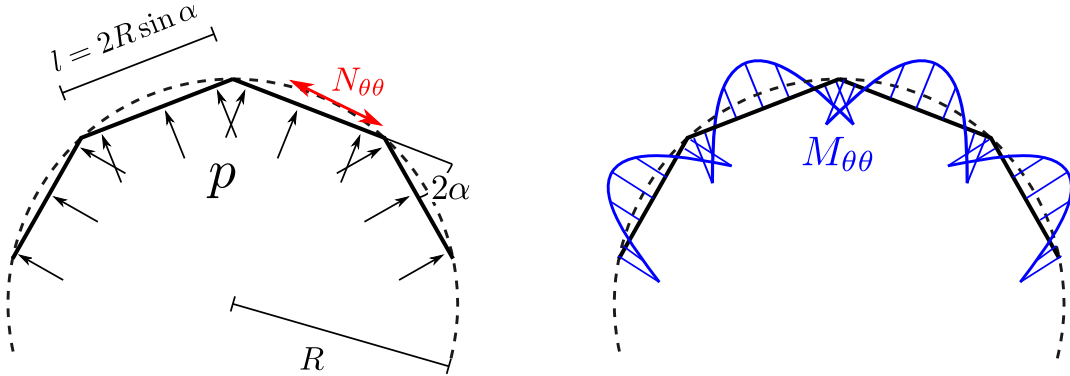


FIGURE 5.15 – Coque cylindrique sous pression uniforme. Discretisation par facettes planes et « moments parasites »

flexion de sorte qu'il s'écrive :

$$|N_{\theta\theta}| \leq N_0 = \sigma_0 t \quad \text{et} \quad |M_{\theta\theta}(\xi)| \leq M_0 = \sigma_0 t^2 / 4 \quad \forall \xi \in [-1; 1] \quad (5.30)$$

On doit alors vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} |pR \cos \alpha| &\leq \sigma_0 t \\ \left| \frac{p}{2} R^2 \sin \alpha - cte \right| &\leq \sigma_0 t^2 / 4 \\ |cte| &\leq \sigma_0 t^2 / 4 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Choissant $cte = \frac{p}{4} R^2 \sin \alpha$ afin de maximiser la valeur p^* de la pression saturant ces contraintes, on obtient :

$$p^* = \min \left\{ \frac{\sigma_0 t}{R \cos \alpha}; \frac{\sigma_0 t^2}{R^2 \sin \alpha} \right\} = \frac{\sigma_0 t}{R \cos \alpha} \cdot \min \left\{ 1; \frac{t}{R} \cotan \alpha \right\} \quad (5.32)$$

Suivant la valeur du coefficient $\kappa = \frac{t}{R} \cotan \alpha$, la valeur maximale de p sera pilotée soit par la saturation du critère en effort normal ($\kappa \geq 1$) : $p^* = \frac{\sigma_0 t}{R \cos \alpha}$, soit par la saturation du critère en moment de flexion ($\kappa \leq 1$) : $p^* = \frac{\sigma_0 t^2}{R^2 \sin \alpha}$. Ainsi, si κ est petit devant 1, on peut obtenir une valeur de p^* très éloignée de celle pilotée par l'effort normal, même si N est très grand. En effet, supposons que N soit suffisamment grand pour que $\alpha \approx 10^{-2}$ mais que $t/R \approx 10^{-4}$ (coque très mince), alors $\kappa \approx 10^{-2}$ et la valeur de p^* obtenue sera 100 fois plus faible que celle pilotée par l'effort normal $\frac{\sigma_0 t}{R \cos \alpha} \approx \frac{\sigma_0 t}{R}$.

En conclusion, l'approximation par facettes planes peut conduire, dans la mise en œuvre de l'approche statique, à l'apparition de moments de flexion « parasites » pour des problèmes correspondant à un état membranaire pur dans le cas continu. L'estimation de la charge ultime ainsi obtenue est alors dépendante d'un rapport faisant intervenir la finesse du maillage et l'épaisseur de la coque. La convergence de cette estimation vers la

charge ultime théorique n'est plus uniforme vis-à-vis de ce paramètre, *i.e.* plus la coque est mince, plus le maillage doit être fin pour obtenir une bonne estimation. Ce type de verrouillage est appelé *verrouillage en membrane*. Malgré le nombre important de travaux en élasticité visant à développer des éléments finis de coque qui ne verrouillent pas, il semble que ce problème ne soit toujours pas complètement résolu. En particulier, l'apparition du verrouillage en membrane n'est pas uniquement lié à la discrétisation en facettes planes, bien que les éléments de ce type y soient sans doute plus sensibles, mais également aux choix effectués pour les différents espaces d'interpolations ainsi que la géométrie du problème considéré.

5.5.2 Illustration du point de vue de l'approche cinématique

Afin de souligner les difficultés liées au problème du verrouillage en membrane, nous considérons une coque cylindrique de rayon R et de hauteur H alignée selon la direction \underline{e}_z . La coque est encadrée en $z = 0$, libre d'efforts en $z = L$ et soumise à une pression interne $\underline{q} = p(z)\underline{e}_r$ avec $p(z) = p_0(1 - z/H)$. Le matériau constitutif obéit au critère de Rankine. Nous fixons, dans la suite, $R = 1$ et $H = 2$ tandis que nous allons considérer trois valeurs distinctes pour l'épaisseur, soit $t = 0.2, 0.02$ ou 0.002 .

Nous avons résolu ce problème par l'approche cinématique en considérant deux maillages différents : l'un structuré selon les génératrices du cylindre, l'autre non structuré, les deux maillages ayant environ le même nombre d'éléments. Les mécanismes de ruine pour les différentes configurations sont représentés sur la Figure 5.16. On constate que les deux types de maillages donnent une solution très similaire dans le cas $t = 0.2$. En revanche, la qualité de la solution se dégrade lorsque l'épaisseur diminue dans le cas du maillage non structuré. En particulier, pour $t = 0.002$, le mécanisme obtenu est fortement localisé du fait de l'existence de déformations de courbure parasites et ne correspond plus du tout à la solution obtenue avec le maillage structuré. Il est intéressant de remarquer que le fait d'orienter le bord des éléments du maillage le long des lignes caractéristiques de la surface a un effet bénéfique sur le verrouillage en membrane, comme mentionné dans [Chapelle, 2001] dans le cas de l'élasticité. Ainsi, il convient, dans le cas général, d'utiliser des maillages non structurés pour tester la robustesse d'un élément fini de coque au verrouillage en membrane.

5.5. Phénomène de verrouillage en membrane

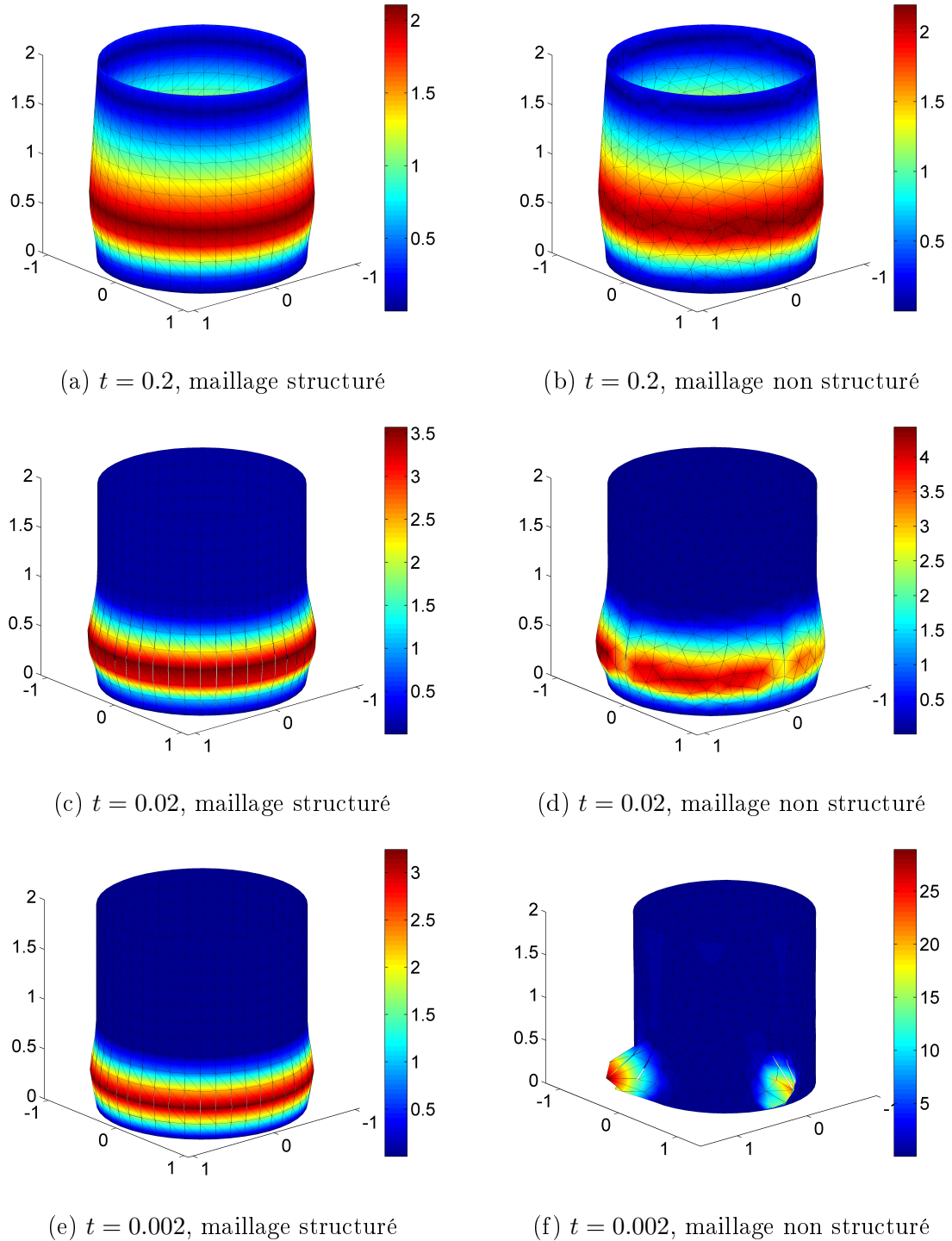


FIGURE 5.16 – Influence de l'épaisseur et du type de maillage sur le mécanisme de ruine (les isocouleurs représentent la composante radiale U_r du champ de vitesse).

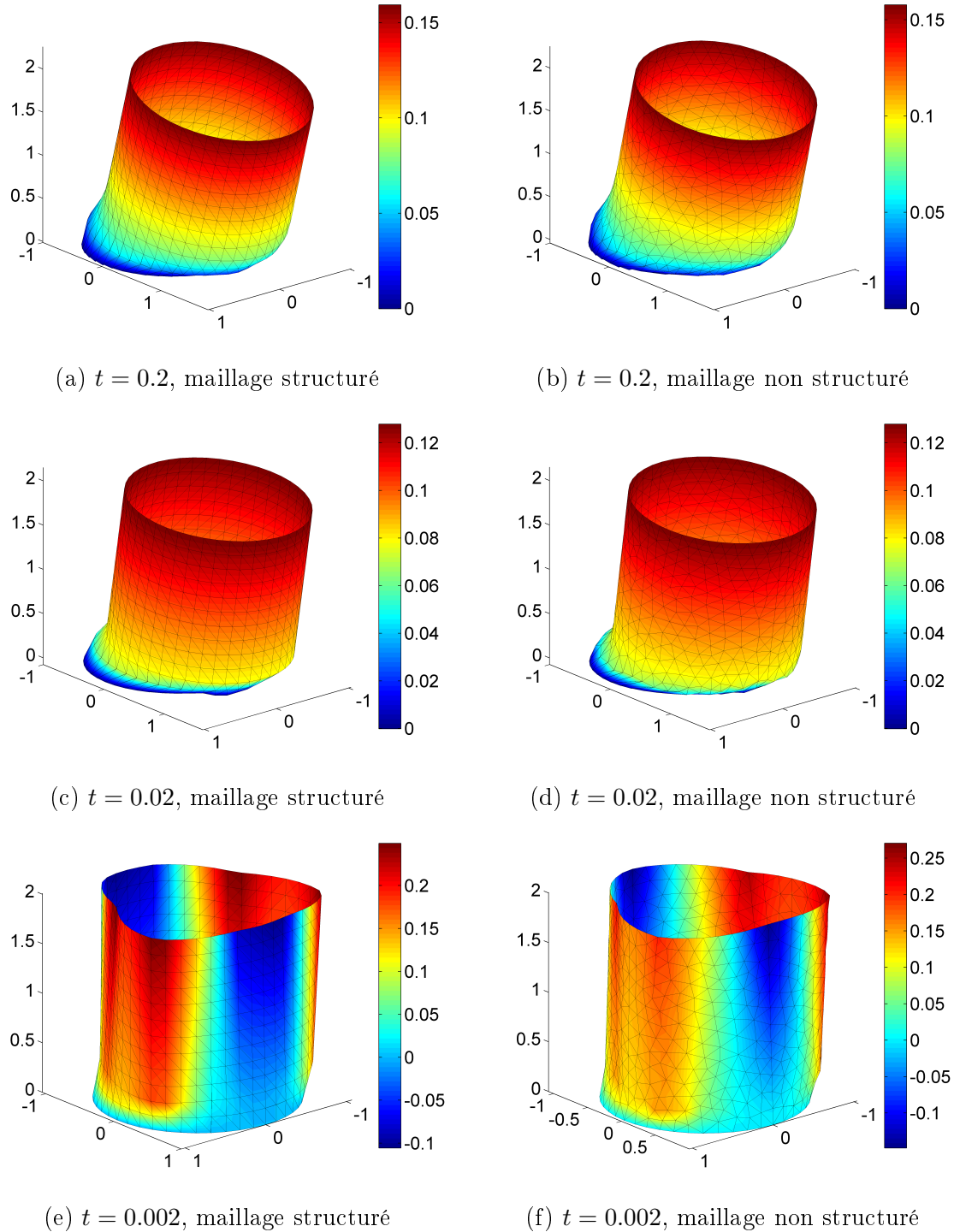


FIGURE 5.17 – Influence de l'épaisseur et du type de maillage sur le mécanisme de ruine (les contours représentent la composante radiale U_x du champ de vitesse).

5.6. Conclusions et perspectives

La difficulté majeure liée au verrouillage en membrane consiste en ce que ses effets dépendent grandement de la géométrie, des conditions aux limites et du chargement. En effet, il est connu que le verrouillage en membrane se manifeste différemment selon que le comportement asymptotique de la coque quand l'épaisseur tend vers zéro correspond à un état dominé en membrane ou en flexion. Sans s'étendre sur le sujet, nous avons effectué les mêmes calculs que précédemment en considérant cette fois-ci un chargement du type $\underline{q} = p(z)\underline{e}_x$. On constate sur la Figure 5.17 que les mécanismes de ruine entre les deux types de maillages sont cette fois-ci très proches quelle que soit la valeur de l'épaisseur dans la gamme considérée.

5.6 Conclusions et perspectives

Ce chapitre s'est intéressé à la combinaison d'éléments finis de plaque en flexion avec des éléments finis de membrane pour traiter le cas des structures de coque discrétisées à l'aide de facettes planes. Ce choix de discrétisation est motivé par la simplicité de la superposition de ces deux types d'éléments, bien que l'écriture de relations de continuité à l'interface entre deux éléments non coplanaires exige une attention particulière.

L'accent a également été mis sur la formulation d'un critère de résistance en interaction effort membranaire-moment de flexion. Si des approximations de tels critères pour des coques homogènes de Tresca ou de von Mises existaient dans la littérature, nous avons proposé une construction systématique d'approximations par l'intérieur et par l'extérieur quel que soit le critère de résistance du matériau constitutif. En particulier, si ce dernier peut s'écrire à l'aide de contraintes coniques, il en est alors de même pour le critère de la coque en efforts généralisés.

Différents exemples numériques ont permis de valider les éléments finis développés par comparaison avec des solutions analytiques, ainsi que des calculs élastoplastiques. Nous avons également mentionné les limites de ces éléments, notamment dans le cas des coques très minces, à travers l'apparition du phénomène de verrouillage en membrane.

Il paraît naturel de vouloir poursuivre ce travail en développant des éléments de coque courbes. Néanmoins, il n'est pas sûr que cela suffise à s'affranchir du verrouillage en membrane, ce problème ne semblant pas résolu en élasticité à l'heure actuelle.

D'autre part, nous avons mentionné que les éléments utilisés ici s'étendent sans mal au cas des coques modérément épaisses présentant une résistance finie à l'effort tranchant. Comme dans le chapitre 4, le problème principal relatif à cette question reste la formulation du critère de résistance prenant en compte une interaction entre les différents efforts généralisés.

* *
* *

Troisième partie

Homogénéisation numérique en calcul à la rupture pour les structures hétérogènes

Chapitre 6

Homogénéisation périodique en calcul à la rupture : application aux plaques hétérogènes périodiques

Résumé : *Cette partie traite de la mise en œuvre numérique des approches par homogénéisation en calcul à la rupture, particularisées au cas des plaques minces en flexion. Ce premier chapitre présente la démarche générale de l'homogénéisation en calcul à la rupture, notamment concernant la détermination du critère de résistance macroscopique du milieu homogène équivalent. Les approches par éléments finis développées dans la partie précédente sont ensuite adaptées au cas de l'homogénéisation périodique. En lien avec ces questions, une procédure judicieuse du choix des directions de calcul pour la détermination des critères macroscopiques est présentée en Annexe B.*

Sommaire

6.1	Homogénéisation périodique en calcul à la rupture	122
6.1.1	Principe de la démarche	122
6.1.2	Travaux antérieurs	124
6.1.3	Difficultés sur le plan numérique	125
6.2	Homogénéisation des plaques minces	126
6.2.1	Problème hétérogène et problème homogène équivalent	127
6.2.2	Modèle de plaque mince de Love-Kirchhoff	128
6.2.3	Espaces des champs statiquement et cinématiquement admissibles et mode de chargement sur la cellule de base	129
6.2.4	Définitions statique et cinématique de G^{hom}	131
6.3	Détermination numérique du critère macroscopique	132
6.3.1	Approche statique par l'intérieur	132
6.3.2	Approche cinématique par l'extérieur	133
6.4	Exemples de calcul de critères macroscopiques	134
6.4.1	Plaque renforcée	134
6.4.2	Plaque perforée	136
6.5	Conclusions et perspectives	139

6.1 Homogénéisation périodique en calcul à la rupture

6.1.1 Principe de la démarche

6.1.1.1 Idée intuitive du concept d'homogénéisation en calcul à la rupture

Considérons le cas d'un problème de calcul à la rupture pour une structure composée de deux milieux présentant des capacités de résistance différentes tel que le problème de la capacité portante Q^+ d'un sol renforcé par des inclusions (Figure 6.1). On se place, de plus, dans le cas où l'hétérogénéité matérielle varie de manière *périodique* au sein de la structure (inclusions régulièrement espacées d'une distance e).

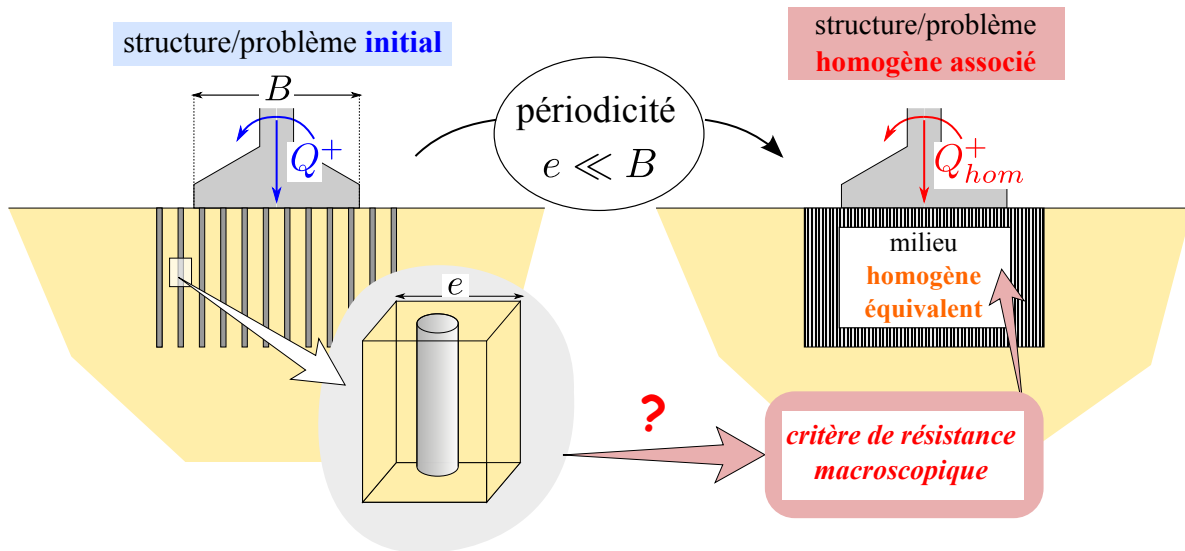


FIGURE 6.1 – Une idée intuitive de l'homogénéisation en calcul à la rupture

L'idée intuitive de l'homogénéisation périodique en calcul à la rupture consiste à remarquer que, dans le cas où le nombre d'inclusions est suffisamment grand, la capacité portante du sol renforcé peut être déterminée en résolvant un problème homogène associé au problème initial. Ce problème homogène associé correspond à la même géométrie et au même chargement, seule la zone du milieu renforcé est remplacée par un milieu homogène bien choisi, *équivalent du point de vue des capacités de résistance*. Plus le nombre d'hétérogénéités sera important, ou de manière équivalente, plus le rapport e/B entre l'espacement et la longueur caractéristique de la structure sera petit, plus la charge ultime relative au problème homogène associé Q_{hom}^+ sera proche de la charge ultime du problème hétérogène initial de telle sorte que :

$$\lim_{e/B \rightarrow 0} Q^+ = Q_{hom}^+ \quad (6.1)$$

6.1. Homogénéisation périodique en calcul à la rupture

6.1.1.2 Définition d'un problème auxiliaire

Le résultat précédent n'est bien entendu valable qu'à condition de donner un sens précis au critère de résistance du milieu homogène équivalent ou critère « macroscopique », noté G^{hom} . Cette définition, assurant la validité de la démarche d'homogénéisation, repose sur la résolution d'un *problème auxiliaire de calcul à la rupture* formulé sur une *cellule de base* du milieu hétérogène périodique. Une cellule de base \mathcal{A} est un domaine contenant toute l'information de l'hétérogénéité matérielle, de telle sorte que le domaine tout entier peut être reproduit par pavage périodique de la cellule de base¹.

On définit alors l'espace des champs de contrainte statiquement admissibles avec un chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ au sens de l'homogénéisation périodique de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \text{ S.A. avec } \underline{\underline{\Sigma}} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ est continu dans } \mathcal{A} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ est } \mathcal{A} - \text{antipériodique} \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\mathcal{A}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) dA = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \end{cases} \quad (6.2)$$

c'est-à-dire que $\underline{\underline{\sigma}}$ est en équilibre avec des forces de volume nulles, le vecteur contrainte $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ est continu et antipériodique sur les bords de la cellule de base ($\underline{T}(\underline{\xi}^+) = -\underline{T}(\underline{\xi}^-)$ pour deux points $\underline{\xi}^+$ et $\underline{\xi}^-$ en vis-à-vis sur le bord) et la moyenne du champ des contraintes microscopiques $\underline{\underline{\sigma}}$ est égale à la contrainte *macroscopique* $\underline{\underline{\Sigma}}$.

On définit également l'espace des champs de vitesse cinématiquement admissibles sur la cellule de base de la façon suivante :

$$\underline{U}(\underline{\xi}) \text{ C.A.} \Leftrightarrow \underline{U}(\underline{\xi}) = \underline{F} \cdot \underline{\xi} + \underline{v}(\underline{\xi}) \text{ avec } \underline{v}(\underline{\xi}) \text{ } \mathcal{A} - \text{périodique} \quad (6.3)$$

i.e. le champ de vitesse virtuelle se décompose comme la somme d'une partie linéaire correspondant à un taux de déformation homogène égal à $\underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{F} + \underline{F}^T)$ et d'une fluctuation de vitesse \underline{v} qui est périodique.

Ces deux définitions (6.2) et (6.3) assurent que la cellule de base est soumise à un *mode de chargement à 6 paramètres* (composantes de $\underline{\underline{\Sigma}}$) dont les paramètres cinématiques associés s'interprètent comme les composantes du taux de déformation macroscopique \underline{D} . On dispose alors du lemme de Hill-Mandel généralisé :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A.}, \forall \underline{U} \text{ C.A.} \quad \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{d} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{d} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{D} \quad (6.4)$$

où \underline{d} est le taux de déformation virtuel associé au champ de vitesse virtuelle \underline{U} . C'est cette propriété d'équivalence entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique qui

1. Bien évidemment une telle définition n'assure pas l'unicité du choix de la cellule de base mais les résultats suivants ne dépendent pas du choix de cette cellule.

rend possible la démarche de changement d'échelle, de la même manière que dans le cas de l'homogénéisation en élasticité.

6.1.1.3 Définitions statique et cinématique de G^{hom}

La définition du critère de résistance macroscopique G^{hom} correspond alors à l'ensemble des états de contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$ tels qu'il existe un champ de contrainte microscopique $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi})$ défini pour tout point $\underline{\xi} \in \mathcal{A}$ de la cellule de base qui soit statiquement admissible avec le chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ et qui vérifie le critère de résistance initial $G(\underline{\xi})$ en tout point de la cellule i.e. :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \text{ S.A. avec } \underline{\underline{\Sigma}} \text{ au sens de (6.2),} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \in G(\underline{\xi}) \quad \forall \underline{\xi} \in \mathcal{A} \end{cases} \quad (6.5)$$

Cette définition est à rapprocher de la définition statique par l'intérieur (1.3) du domaine des chargements potentiellement supportables d'une structure, G^{hom} correspondant à ce dernier pour la cellule de base soumise au mode de chargement à 6 paramètres précédents.

De la même manière qu'il est possible de donner une définition cinématique du domaine des chargements potentiellement supportables (1.8), il est possible de caractériser G^{hom} d'un point de vue cinématique en comparant la puissance des efforts extérieurs dans la cellule de base à la puissance résistante maximale développée dans tout champ de vitesse virtuel de la manière suivante² :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \underline{\underline{U}} \text{ C.A. avec } \underline{\underline{D}} \text{ au sens de (6.3),} \\ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq P_{rm}(\underline{\underline{U}}) = \int_{\mathcal{A}} \pi(\underline{\underline{d}}; \underline{\xi}) dA = |\mathcal{A}| \langle \pi(\underline{\underline{d}}; \underline{\xi}) \rangle \end{cases} \quad (6.6)$$

où $\pi(\underline{\underline{d}}; \underline{\xi})$ représente la fonction d'appui du critère local $G(\underline{\xi})$ au point considéré. D'après la définition précédente, on pourra alors, pour un champ de déformation macroscopique donné, caractériser G^{hom} par la valeur de sa fonction d'appui $\Pi^{hom}(\underline{\underline{D}})$ définie par :

$$\Pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \sup_{\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom}} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \inf_{\underline{\underline{U}} \text{ C.A. avec } \underline{\underline{D}}} |\mathcal{A}| \langle \pi(\underline{\underline{d}}; \underline{\xi}) \rangle = \inf_{\underline{\underline{v}} \text{ périodique}} |\mathcal{A}| \langle \pi(\underline{\underline{D}} + {}^s\nabla \underline{\underline{v}}; \underline{\xi}) \rangle \quad (6.7)$$

où le problème de minimisation permettant de calculer la valeur de la fonction d'appui macroscopique peut être formulé en fonction du champ de vitesse C.A. avec la valeur de $\underline{\underline{D}}$ prescrite ou bien directement en fonction de la fluctuation périodique $\underline{\underline{v}}$.

6.1.2 Travaux antérieurs

Les premiers travaux concernant l'homogénéisation périodique en calcul à la rupture (ou analyse limite) remontent à [Suquet, 1985] et [de Buhan, 1986]. Différents travaux ont analysé les conditions nécessaires à la vérification du résultat (6.1) [Bouchitté, 1986,

2. L'expression de la puissance résistante maximale est à compléter par le terme de discontinuité de vitesse dans le cas où le champ $\underline{\underline{U}}$ (ou, de manière équivalente, $\underline{\underline{v}}$) est discontinu.

6.1. Homogénéisation périodique en calcul à la rupture

[Lewiński et Telega, 2000], tandis que l'on trouvera dans [de Buhan, 1986] un contre-exemple pour lequel on a uniquement $\lim_{e/B \rightarrow 0} Q^+ < Q_{hom}^+$.

Il est à noter que la détermination analytique des critères de résistance est relativement rare, limitée en général à des géométries simples ou des directions de chargement particulières [Maghous, 1991]. Dans certaines circonstances, le critère homogénéisé des milieux renforcés ou à joints prend une forme analytique relativement simple [de Buhan, 1986, Maghous *et al.*, 1998, de Buhan et Taliercio, 1991].

L'outil numérique s'avère cependant essentiel lorsque l'on souhaite traiter des cas plus complexes. Des critères de résistances pour différents types de structures hétérogènes ont pu être ainsi déterminés : on peut notamment citer le cas des milieux poreux [Pastor et Turgeman, 1983, Turgeman et Pastor, 1987], les membranes périodiques sollicitées dans leur plan [Maghous, 1991, Francescato et Pastor, 1998], les murs en maçonnerie [Sab, 2003, Milani *et al.*, 2006], les sols renforcés [Hassen *et al.*, 2013, Gueguin *et al.*, 2014a], etc.

6.1.3 Difficultés sur le plan numérique

L'intérêt de la démarche d'homogénéisation consiste bien entendu à s'affranchir de la résolution d'un problème de structure hétérogène pour lequel on serait obligé de décrire chaque hétérogénéité de manière individuelle, nécessitant ainsi des maillages très fins pour capturer les variations locales des propriétés mécaniques, ce qui conduit à des temps de calcul rédhibitoires.

Le prix à payer pour s'affranchir de ces difficultés réside donc dans la résolution du problème auxiliaire formulé sur la cellule de base. Il apparaît alors une différence fondamentale entre l'utilisation de l'homogénéisation en élasticité linéaire et de son utilisation en calcul à la rupture. À notre sens, cette difficulté supplémentaire est la raison principale du faible développement à l'heure actuelle de l'homogénéisation en calcul à la rupture.

En effet, la quantité d'intérêt d'un calcul d'homogénéisation en élasticité linéaire est la raideur homogénéisée \mathbb{C}^{hom} , caractérisée par, au maximum, 21 coefficients scalaires indépendants pour un milieu continu 3D anisotrope quelconque. Ces derniers peuvent être déterminés en résolvant 21 problèmes auxiliaires pour des valeurs particulières du chargement macroscopique. Une fois ces 21 coefficients scalaires déterminés, il suffit de les réimplanter dans le calcul de la matrice de rigidité globale de la structure homogénéisée et de résoudre le problème homogène équivalent. Cette dernière étape ne présente aucune difficulté supplémentaire (pour le même maillage) par rapport à un calcul n'étant pas issu d'une démarche d'homogénéisation.

En revanche, dans le cas du calcul à la rupture, la quantité d'intérêt est le critère de résistance macroscopique, domaine convexe dans un espace à 6 dimensions pour le

milieu continu 3D. En particulier, il n'est *a priori* pas déterminé par un nombre fini de paramètres scalaires. On ne peut donc qu'en construire une approximation en échantillonnant un nombre fini de directions de \mathbb{R}^6 . La première difficulté provient du nombre important de directions à considérer pour que l'approximation soit satisfaisante, ainsi que du choix pertinent de ces directions. En effet, dans le cas d'un milieu anisotrope, le critère pouvant être très allongé dans une direction privilégiée, une discrétisation uniforme des directions de calculs ne sera alors pas adaptée. Ainsi, nous proposons en Annexe B une procédure adaptative permettant un choix judicieux des directions de calcul pour décrire le critère homogénéisé, quel que soit le degré d'anisotropie.

Le deuxième problème apparaissant dans la mise en œuvre pratique est relative à l'utilisation d'un critère homogénéisé (décrit par un nuage de points issus des calculs précédents) dans le calcul de structure du problème homogène équivalent. La résolution numérique des problèmes de calcul à la rupture repose sur une démarche d'optimisation qui nécessite une description analytique du critère de résistance, qui plus est, sous une forme utilisable par les solveurs disponibles (ex. linéaire, conique du second-ordre, semi-définie positive...). Or, le critère homogénéisé est décrit numériquement et n'a aucune raison de ressembler à des critères de résistance existants et ayant une forme analytique adaptée aux solveurs. On pourrait alors imaginer fitter sur G^{hom} les paramètres d'un critère analytique donné, tel que le critère de Hill anisotrope par exemple. Cette démarche nous paraît peu satisfaisante compte-tenu des efforts déployés pour calculer G^{hom} .

Une autre approche consiste à linéariser le critère macroscopique afin d'obtenir *in fine* un problème de programmation linéaire à l'échelle du calcul de structure. On trouvera ainsi dans [Nguyen-Dang, 1984, Malena et Casciaro, 2008] un exemple de linéarisation de diagrammes d'interactions effort membranaire-moments de flexion pour des structures 3D de poutres composites. Plus récemment, nous avons proposé une démarche d'approximation non-linéaire [Bleyer et de Buhan, 2013d] fondée sur la programmation conique pour traiter le même type de structures. Cette approche a également été étendue au cas des sols renforcés par colonnes ou tranchées [Gueguin *et al.*, 2013, Gueguin *et al.*, 2014b, Gueguin, 2014].

Les deux chapitres suivants seront ainsi dédiés à la présentation d'une approche par approximation plus sophistiquée que celles évoquées ici. On signalera, à titre d'information, des travaux relatifs à l'homogénéisation numérique en élasticité non-linéaire [Yvonnet *et al.*, 2009] et en visco-élasticité [Michel et Suquet, 2003] confrontés au même type de problématique.

6.2 Homogénéisation des plaques minces

Cette section se propose à présent d'appliquer l'approche par homogénéisation périodique en calcul à la rupture au cas de la flexion des plaques minces périodiques.

6.2. Homogénéisation des plaques minces

6.2.1 Problème hétérogène et problème homogène équivalent

Nous considérons ici le cas d'un problème de calcul à la rupture d'une plaque mince en flexion (cf. chapitre 3) obéissant à un critère de résistance $G(\underline{x})$ variant de manière périodique dans le plan de la plaque :

$$G(\underline{x}) = G(\underline{x} + n_1 \underline{a}_1 + n_2 \underline{a}_2) \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \quad (6.8)$$

où $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ sont deux vecteurs du plan définissant les directions de périodicité de G . On définira ici la cellule de base à partir du parallélogramme délimité par \underline{a}_1 et \underline{a}_2 et nous noterons a la longueur caractéristique de la cellule de base (Figure 6.2).

Dans le cas où $a \ll L$, L étant la longueur caractéristique de la plaque dans son plan, nous allons chercher à substituer au problème hétérogène initial un problème de plaque mince en flexion obéissant au critère macroscopique homogène G^{hom} .

La détermination de G^{hom} reposant sur la résolution d'un problème de calcul à la rupture défini sur la cellule de base, il est important d'accorder ici une attention particulière à la modélisation de cette dernière. En effet, dans le cadre de la modélisation de plaque mince, l'épaisseur h de la plaque est telle que $h \ll L$, néanmoins, la mise en œuvre d'une démarche d'homogénéisation suppose également que $a \ll L$. En conséquence, deux situations se présentent³ :

- $h \ll a$ *i.e.* l'épaisseur reste négligeable devant la dimension de la cellule de base, c'est typiquement le cas des plaques métalliques perforées. Dans ce cas, nous sommes fondés à conserver une modélisation de plaque mince pour la cellule de base.
- $h \sim a$ *i.e.* l'épaisseur est comparable à la dimension de la cellule de base (cas des dalles en béton armé par exemple). Dans ce cas, une modélisation de plaque mince pour la cellule de base n'est plus pertinente et une modélisation de type milieu continu 3D devient nécessaire pour décrire cette dernière. On trouvera dans [Bourgeois, 1997, Sab, 2003, Dallot et Sab, 2008, Bleyer *et al.*, 2015c] des exemples d'application de ce deuxième cas. En décomposant la cellule de base en $\mathcal{A} = \mathcal{S} \times [-h/2; h/2]$ où \mathcal{S} est la surface moyenne, l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles avec un moment macroscopique $\underline{\underline{M}}$ est, dans ce cas, défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \text{ S.A. avec } \underline{\underline{M}} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} & \text{dans } \mathcal{A} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} & \text{est continu dans } \mathcal{A} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} & \text{est antipériodique sur } \partial \mathcal{A} \setminus \{\xi_3 = \pm h/2\} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm \underline{e}_3) = \underline{\underline{0}} & \text{sur } \xi_3 = \pm h/2 \\ \underline{\underline{M}} = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \int_{\mathcal{A}} -\xi_3 \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) dA = h \langle -\xi_3 \underline{\underline{\sigma}} \rangle \end{cases} \quad (6.9)$$

On constate alors que cette définition est proche de (6.2) à la différence près que le champ de contrainte local est relié au moment macroscopique par une relation

3. Le troisième cas $h \gg a$ est également possible en théorie mais peu réaliste en pratique.

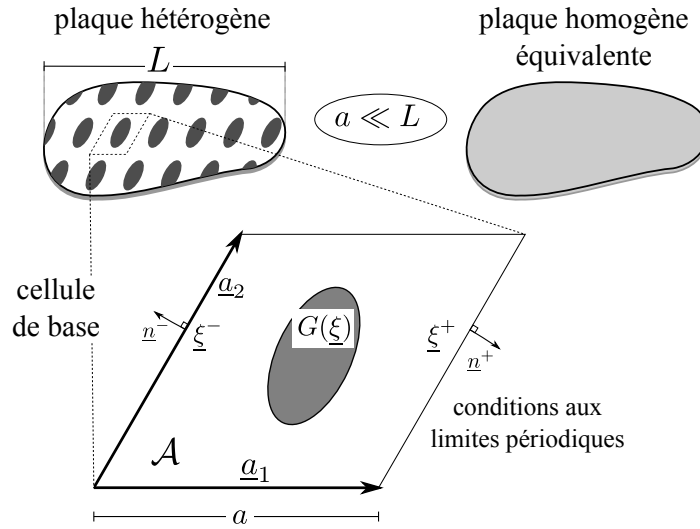


FIGURE 6.2 – Homogénéisation d’une plaque périodique et cellule de base modélisée comme une plaque mince

de moyenne différente et que les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure sont ici des conditions d’effort libre tandis que les conditions d’antipériodicité ne portent que sur les faces latérales de la cellule.

Nous nous proposons dans la suite de traiter uniquement le cas $h \ll a$ où la cellule de base peut être modélisée comme une plaque mince en flexion. On trouvera des résultats en élasticité dans [Duvaut et Metellus, 1976] et des résultats de Γ -convergence du problème hétérogène vers le problème homogénéisé dans [Lewiński et Telega, 2000].

6.2.2 Modèle de plaque mince de Love-Kirchhoff

On rappelle ici brièvement les équations d’équilibre du modèle de plaque mince de Love-Kirchhoff [Krabbenhoft et Damkilde, 2002, Bleyer et de Buhan, 2014a].

L’équation d’équilibre local en présence uniquement d’une densité surfacique d’efforts transversaux q s’écrit :

$$\operatorname{div} (\operatorname{div} \underline{\underline{M}}) + q = 0 \quad (6.10)$$

Les conditions de continuité ne découlent pas trivialement de celles du modèle de Reissner-Mindlin du fait de la condition cinématique de Love-Kirchhoff reliant la rotation au gradient de la vitesse. Cela se remarque par exemple en écrivant le principe des puissances virtuelles et en observant que la vitesse et la composante tangentielle de son gradient sur une ligne ne sont pas indépendants. En introduisant l’effort tranchant équivalent $K = (\operatorname{div} \underline{\underline{M}}) \cdot \underline{n} + \partial_t M_{nt}$ le long d’une ligne Γ , on a alors les relations de saut suivantes :

$$\begin{aligned} \llbracket M_{nn} \rrbracket &= 0 \\ \llbracket K \rrbracket &= 0 \end{aligned} \quad \text{à travers } \Gamma \quad (6.11)$$

6.2. Homogénéisation des plaques minces

à compléter par des équations de saut de la composante de torsion en un coin c_j :

$$R_j = \llbracket M_{nt}(c_j) \rrbracket = 0 \quad \text{en } c_j \quad (6.12)$$

en l'absence d'efforts concentrés.

Enfin, les conditions aux limites en efforts s'expriment par des équations analogues à (6.11) et (6.12) portant sur M_{nn} , K et R_j , les variables duales associées étant respectivement la composante normale du gradient $\partial_n w$ et la vitesse transversale w pour les conditions aux limites en vitesse.

6.2.3 Espaces des champs statiquement et cinématiquement admissibles et mode de chargement sur la cellule de base

L'espace des champs de moments de flexion $\underline{m}(\underline{\xi})$ statiquement admissibles avec un moment de flexion macroscopique \underline{M} est construit en prenant en compte des efforts extérieurs nuls, des conditions aux limites de périodicité/antipériodicité et en reliant le moment local au moment macroscopique par la relation de moyenne. On définit ainsi [Bleyer et de Buhan, 2014a] :

$$\underline{m}(\underline{\xi}) \in SA(\underline{M}) \iff \begin{cases} \operatorname{div} (\operatorname{div} \underline{m}) (\underline{\xi}) = 0 & \text{dans } \mathcal{A} & (6.13) \\ \llbracket m_{nn} \rrbracket = 0 & \text{à travers } \Gamma & (6.14) \\ \llbracket K \rrbracket = 0 & \text{à travers } \Gamma & (6.15) \\ R_j = 0 & \text{en } c_j \text{ dans } \mathcal{A} & (6.16) \\ m_{nn} & \mathcal{A} - \text{périodique} & (6.17) \\ K & \mathcal{A} - \text{antipériodique} & (6.18) \\ R_j & \mathcal{A} - \text{antipériodique} & (6.19) \\ \underline{M} = \langle \underline{m}(\underline{\xi}) \rangle & & (6.20) \end{cases}$$

où \mathcal{A} désigne toujours la cellule de base, ici modélisée comme un domaine à deux dimensions.

De la même manière que dans le cas du milieu continu 3D, un champ de vitesse w cinématiquement admissible sera construit, dans une cinématique de Love-Kirchhoff, comme la superposition d'un champ correspondant à une courbure homogène (macroscopique) $\underline{\chi}$ et d'une fluctuation périodique v . On définit ainsi [Bleyer et de Buhan, 2014a] :

$$w(\underline{\xi}) \in CA(\underline{\chi}) \iff \begin{cases} w(\underline{\xi}) = \frac{1}{2} \underline{\xi} \cdot \underline{\chi} \cdot \underline{\xi} + v(\underline{\xi}) & \text{dans } \mathcal{A} & (6.21) \\ v(\underline{\xi}) & \text{continu dans } \mathcal{A} & (6.22) \\ v(\underline{\xi}) & \mathcal{A} - \text{périodique} & (6.23) \\ \partial_n v(\underline{\xi}) & \mathcal{A} - \text{antipériodique} & (6.24) \end{cases}$$

Cette définition appelle plusieurs remarques :

- $w(\underline{\xi})$ est continu
- le saut de son gradient $\underline{\nabla} w$ à travers une ligne Γ est nécessairement normal à celle-ci de sorte que $\llbracket \underline{\nabla} w \rrbracket = \llbracket \partial_n w \rrbracket \underline{n} = \llbracket \partial_n v \rrbracket \underline{n}$

Homogénéisation périodique en calcul à la rupture : application aux plaques hétérogènes périodiques

- $\underline{\nabla}v(\underline{\xi})$ est \mathcal{A} -périodique
- la rotation de la particule attachée au point $\underline{\xi}$ est donnée par $\underline{\nabla}w(\underline{\xi}) = \underline{\chi} \cdot \underline{\xi} + \underline{\nabla}v(\underline{\xi})$. Cette rotation est elle aussi obtenue comme la superposition d'un terme de courbure homogène et d'une fluctuation périodique $\underline{\nabla}v(\underline{\xi})$ du vecteur rotation.
- la courbure locale est donnée par $\underline{\kappa}(\underline{\xi}) = {}^s\underline{\nabla}\underline{\nabla}w(\underline{\xi}) = \underline{\chi} + {}^s\underline{\nabla}\underline{\nabla}v(\underline{\xi})$.
- en utilisant la formule de Green, on obtient que :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\kappa} \rangle &= \underline{\chi} + \langle {}^s\underline{\nabla}\underline{\nabla}v \rangle \\ &= \underline{\chi} + \frac{1}{|\mathcal{A}|} \left(\int_{\partial\mathcal{A}} \frac{1}{2} (\underline{\nabla}v \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{\nabla}v) dl - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} ([\underline{\nabla}v] \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes [\underline{\nabla}v]) dl \right) \end{aligned}$$

Or, le terme de bord s'annule car $\underline{\nabla}v \otimes \underline{n}$ est antipériodique. Ainsi, on a la relation suivante :

$$\underline{\chi} = \langle \underline{\kappa} \rangle + \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\Gamma} [[\partial_n v]] (\underline{n} \otimes \underline{n}) dl \quad (6.25)$$

L'écriture du principe des puissances virtuelles permet d'établir que les espaces $SA(\underline{M})$ et $CA(\underline{\chi})$ sont en dualité au sens du lemme de Hill-Mandel généralisé.

En effet, on a $\forall \underline{m} \in SA(\underline{M}), \forall w \in CA(\underline{\chi}), P_{ext}(w) = -P_{int}(w)$, soit en présence de discontinuités :

$$\begin{aligned} P_{ext}(w) &= \int_{\mathcal{A}} \underline{m} : \underline{\kappa} dA + \int_{\Gamma} m_{nn} [[\partial_n v]] dl \\ &= \int_{\mathcal{A}} \underline{m} : \underline{\chi} dA + \int_{\mathcal{A}} \underline{m} : {}^s\underline{\nabla}\underline{\nabla}v dA + \int_{\Gamma} m_{nn} [[\partial_n v]] dl \end{aligned}$$

En utilisant deux fois la formule de la divergence,

$$\begin{aligned} P_{ext}(w) &= \left(\int_{\mathcal{A}} \underline{m} dA \right) : \underline{\chi} + \int_{\mathcal{A}} \operatorname{div} \operatorname{div} \underline{m} v dA \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{A}} m_{nn} \partial_n v dl + \int_{\partial\mathcal{A}} m_{nt} \partial_t v dl - \int_{\partial\mathcal{A}} (\operatorname{div} \underline{m}) \cdot \underline{n} v dl \end{aligned}$$

puis l'identité $m_{nt} \partial_t v = \partial_t (m_{nt} v) - v \partial_t m_{nt}$ et sachant que $\operatorname{div} \operatorname{div} \underline{m} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{ext}(w) &= \left(\int_{\mathcal{A}} \underline{m} dA \right) : \underline{\chi} + \int_{\partial\mathcal{A}} m_{nn} \partial_n v dl + \int_{\partial\mathcal{A}} \partial_t (m_{nt} v) dl - \int_{\partial\mathcal{A}} K v dl \\ &= \left(\int_{\mathcal{A}} \underline{m} dA \right) : \underline{\chi} + \int_{\partial\mathcal{A}} m_{nn} \partial_n v dl + \sum_j R_j v(c_j) - \int_{\partial\mathcal{A}} K v dl \end{aligned}$$

Enfin, compte-tenu des conditions de périodicité/antipériodicité (6.17), (6.18), (6.19), (6.23) et (6.24), on observe que les trois derniers termes s'annulent. De sorte que, d'après (6.20) et (6.25), on en déduit la relation suivante :

$$P_{ext}(w) = |\mathcal{A}| \underline{M} : \underline{\chi} = |\mathcal{A}| \underline{M} : \left(\langle \underline{\kappa} \rangle + \int_{\Gamma} [[\partial_n v]] (\underline{n} \otimes \underline{n}) dl \right) \quad (6.26)$$

6.2. Homogénéisation des plaques minces

La cellule de base est donc soumise à un *mode de chargement à 3 paramètres* qui sont les composantes du moment macroscopique $\underline{\underline{M}}$ et dont les paramètres cinématiques associés sont les composantes de la courbure macroscopique $\underline{\underline{\chi}}$.

En l'absence de discontinuités, la relation (6.26) se réduit à :

$$\forall \underline{\underline{m}} \in SA(\underline{\underline{M}}), \forall w \in CA(\underline{\underline{\chi}}), \quad \langle \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\kappa}} \rangle = \langle \underline{\underline{m}} \rangle : \langle \underline{\underline{\kappa}} \rangle = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}} \quad (6.27)$$

6.2.4 Définitions statique et cinématique de G^{hom}

D'après ce qui précède, on définit G^{hom} de la façon suivante :

$$\underline{\underline{M}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{m}}(\underline{\underline{\xi}}) \in SA(\underline{\underline{M}}), \\ \underline{\underline{m}}(\underline{\underline{\xi}}) \in G(\underline{\underline{\xi}}) \quad \forall \underline{\underline{\xi}} \in \mathcal{A} \end{cases} \quad (6.28)$$

Pour mettre en œuvre l'approche statique permettant de construire G^{hom} par l'intérieur, il suffit donc d'exhiber un champ local de moment de flexion vérifiant (6.13)-(6.20) et vérifiant le critère local en tout point.

D'après (6.26), la définition équivalente de G^{hom} au sens de l'approche cinématique par l'extérieur devient ici :

$$\underline{\underline{M}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall w \in CA(\underline{\underline{\chi}}), \\ \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}} \leq P_{rm}(w) = \frac{1}{|A|} \left(\int_{\mathcal{A}} \pi(\underline{\underline{\kappa}}; \underline{\underline{\xi}}) dA + \int_{\Gamma} \pi(\underline{\underline{n}}; [\partial_n v]) dl \right) \end{cases} \quad (6.29)$$

où $\pi(\underline{\underline{\chi}}; \underline{\underline{\xi}})$ représente la fonction d'appui du critère local $G(\underline{\underline{\xi}})$ au point considéré. D'après la définition précédente, on définit également la fonction d'appui macroscopique $\Pi^{hom}(\underline{\underline{\chi}})$ associée au critère de résistance macroscopique par :

$$\begin{aligned} \Pi^{hom}(\underline{\underline{\chi}}) &= \inf_{w \in CA(\underline{\underline{\chi}})} \frac{1}{|A|} \left(\int_{\mathcal{A}} \pi(\underline{\underline{\kappa}}; \underline{\underline{\xi}}) dA + \int_{\Gamma} \pi(\underline{\underline{n}}; [\partial_n v]) dl \right) \\ &= \inf_{v \in CA_0} \frac{1}{|A|} \left(\int_{\mathcal{A}} \pi(\underline{\underline{\chi}} + {}^s \underline{\underline{\nabla \nabla v}}; \underline{\underline{\xi}}) dA + \int_{\Gamma} \pi(\underline{\underline{n}}; [\partial_n v]) dl \right) \end{aligned} \quad (6.30)$$

où $CA_0 = CA(\underline{\underline{0}})$ correspond à l'ensemble des fluctuations périodiques v cinématiquement admissibles avec une courbure macroscopique nulle.

6.3 Détermination numérique du critère macroscopique

Cette section, relativement brève, présente quelques éléments relatifs au calcul de G^{hom} à partir d'une discrétisation par éléments finis de la cellule de base. La démarche est très similaire à celle présentée dans la partie relative au calcul des structures homogènes par éléments finis. On s'attachera donc uniquement à souligner les particularités liées à la résolution du problème auxiliaire.

6.3.1 Approche statique par l'intérieur

Pour l'approche statique par l'intérieur, nous choisissons de discrétiser le champ local $\underline{m}(\xi)$ par une interpolation constante par élément, donnant lieu à l'élément de Morley [Olsen, 1998, Le et al., 2010b]. Ce choix est motivé par la simplicité de l'élément et le fait que la densité surfacique d'efforts est nulle sur la cellule de base, évitant ainsi les difficultés liées à l'élément de Morley pour les densités non nulles [Le et al., 2010b].

Du fait de la variation constante de \underline{m} par élément, l'effort tranchant équivalent est toujours nul $K = 0$ de sorte que (6.15) et (6.18) sont automatiquement vérifiées de même que l'équation d'équilibre local (6.13). Il convient donc d'écrire uniquement la relation linéaire exprimant la continuité de m_{nn} (6.14) à travers chaque arête intérieure et celle de m_{nt} (6.16) à travers chaque sommet intérieur au maillage.

Les conditions de périodicité/antipériodicité (6.17) et (6.19) pour m_{nn} et m_{nt} sont écrites de la même façon à travers une relation linéaire entre les composantes liées à tout couple de points du bord situés en vis-à-vis⁴.

La continuité et la périodicité des champs s'exprime donc sous la forme $\mathbf{C}\mathbf{m} = \mathbf{0}$ où \mathbf{m} regroupe l'ensemble des degrés de libertés relatifs au champ de moment de flexion local.

La relation de moyenne (6.20) s'écrit quant à elle sous la forme :

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathcal{A}|} [A_1 \mathbf{I}_3 \quad A_2 \mathbf{I}_3 \quad \dots \quad A_{N_E} \mathbf{I}_3] \mathbf{m} = \mathbf{A}\mathbf{m} \quad (6.31)$$

où A_e désigne l'aire de l'élément e et \mathbf{I}_3 la matrice identité d'ordre 3.

L'écriture du critère de résistance local s'effectue une seule fois par élément et on supposera que le critère est tel qu'il puisse s'écrire sous une forme conique du second-ordre $\mathbf{m}_e \in \mathcal{C}^e$ comme ceux présentés au chapitre 3.

La détermination de G^{hom} peut alors s'effectuer par trajets de chargement radiaux à partir de l'origine en considérant une direction de calcul $\underline{\underline{M}}_0$ et en maximisant le

4. Ces bords doivent donc être maillés de la même façon.

6.3. Détermination numérique du critère macroscopique

multiplicateur λ tel que $\lambda \underline{\underline{M}}_0 \in G^{hom}$. On est alors amené à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda, \mathbf{m}} \lambda \\ & \text{t.q.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & -\mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\ & \mathbf{m}_e \in \mathcal{C}^e \quad \forall e = 1, \dots, N_E \end{aligned} \quad (6.32)$$

Les équations définissant l'ensemble SA étant strictement satisfaites et le critère de résistance étant strictement vérifié, l'ensemble des points obtenus en résolvant le problème précédent pour différentes directions de calcul fournit donc une approche par l'intérieur $G^{stat} \subseteq G^{hom}$ du critère macroscopique exact.

6.3.2 Approche cinématique par l'extérieur

Pour l'approche cinématique par l'extérieur, nous pouvons utiliser n'importe quel élément fini de plaque tels que ceux ayant fait l'objet du chapitre 3. Dans tous les exemples numériques, nous avons utilisé l'élément H3 du fait de sa précision supérieure.

Nous choisissons ici de discrétiser la fluctuation périodique $v(\underline{\xi})$ plutôt que le champ complet $w(\underline{\xi})$ bien que cela ne change pas grand chose.

Le terme de courbure local sera alors obtenu à travers la matrice \mathbf{B} de (3.42) et en ajoutant la courbure macroscopique de sorte qu'aux trois sommets de l'élément e :

$$\boldsymbol{\kappa}_e^i = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}^i \mathbf{v}_e \quad \forall i = 1, \dots, 3 \quad (6.33)$$

où \mathbf{v}_e réunit les degrés de liberté élémentaires dans l'élément e de la fluctuation périodique.

De la même façon que dans l'approche statique, nous exprimons les relations de périodicité/antipériodicité (6.23) et (6.24) à travers une relation linéaire entre les degrés de liberté correspondants à deux points en vis-à-vis : $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

La valeur de la fonction d'appui macroscopique $\Pi^{hom}(\underline{\underline{\chi}})$ pour une courbure macroscopique $\underline{\underline{\chi}}$ donnée s'obtient alors en résolvant le problème de minimisation suivant similaire à (3.48) :

$$\begin{aligned} \Pi_{cin}^{hom}(\underline{\underline{\chi}}) = \min_{\mathbf{v}} & \frac{1}{|\mathcal{A}|} \left(\sum_{e=1}^{N_E} \sum_{i=1}^3 \frac{A_e}{3} \pi(\boldsymbol{\kappa}_e^i) + \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{n_d} l_j \omega_k \pi(\underline{n}; \llbracket \theta_n \rrbracket_k^j) \right) \\ \text{t.q.} & \quad \mathbf{B}\mathbf{v} - \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\chi} \\ & \quad \mathbf{n}\mathbf{G}\mathbf{v} = \llbracket \theta_n \rrbracket \\ & \quad \mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.34)$$

où la normalisation des efforts extérieurs a disparu, le chargement (courbure macroscopique) apparaissant comme second membre de la relation reliant la vitesse à la

courbure. Le terme de discontinuité est identique.

La valeur optimale de la fonction objectif, notée $\Pi^{cin}(\underline{\chi})$, fournit alors une borne supérieure de la fonction d'appui macroscopique pour chaque direction de calcul : $\Pi^{hom}(\underline{\chi}) \leq \Pi^{cin}(\underline{\chi}) \forall \underline{\chi}$. Ainsi, en calculant sa valeur pour différentes directions de calcul $\underline{\chi}$, l'ensemble des hyperplans d'équation $\underline{M} : \underline{\chi} \leq \Pi^{cin}(\underline{\chi})$ définit une approximation par l'extérieur $G^{cin} \supseteq G^{hom}$ du critère macroscopique exact.

6.4 Exemples de calcul de critères macroscopiques

6.4.1 Plaque renforcée

Pour commencer, nous considérons le cas d'une plaque constituée d'un matériau obéissant au critère de von Mises avec une résistance à la flexion $M_{01} = 1$ renforcée dans la direction y par un réseau de bandes de largeur $e = 0.05$, espacées d'une distance $a = 1$ et constituées d'un matériau obéissant au même critère avec une résistance à la flexion $M_{02} = 40$. La géométrie ainsi que le maillage de la cellule de base sont représentés sur la Figure 6.3.

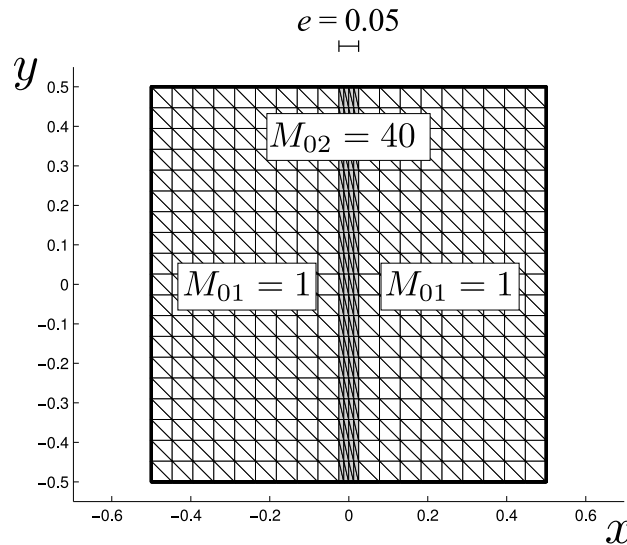


FIGURE 6.3 – Géométrie et maillage de la cellule de base pour une plaque renforcée par des bandes orientées selon y

Nous pouvons déjà remarquer que le critère de résistance macroscopique G^{hom} sera encadré par l'intérieur par le critère de von Mises du matériau le plus faible $G_{\text{von Mises}}(M_{01})$ (approche statique avec $\underline{m}(\underline{\xi}) = \underline{M}$ équivalant à la borne de Reuss en élasticité) et par l'extérieur par le critère de von Mises du matériau de résistance moyenne $G_{\text{von Mises}}(\langle M_0 \rangle)$ (approche cinématique avec $v(\underline{\xi}) = 0$ équivalant à la borne

6.4. Exemples de calcul de critères macroscopiques

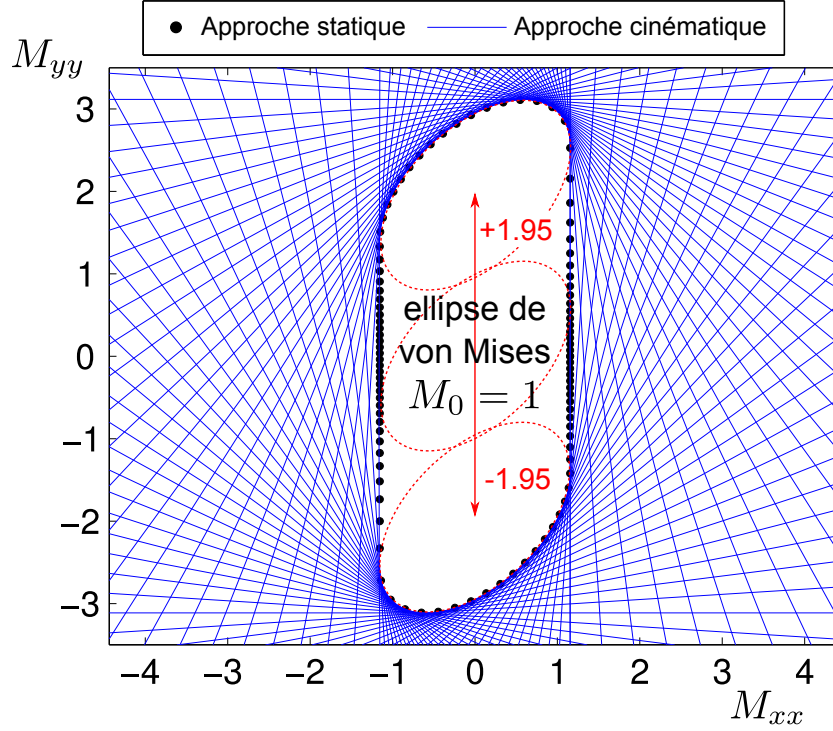


FIGURE 6.4 – Résultats des approches statique (points noirs) et cinématique (plan tangents en bleu) de G^{hom} dans le plan (M_{xx}, M_{yy}) pour le problème de la plaque renforcée.

de Voigt en élasticité où $\langle M_0 \rangle = M_{01}(1 - \frac{e}{a}) + M_{02}\frac{e}{a} = 2.95$.

Il est également possible d'améliorer l'approche statique par l'intérieur en considérant un champ de moments de flexion constant par morceaux de la forme suivante :

$$\underline{m}(\underline{\xi}) = M_{xx}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \begin{cases} m_{yy}^1 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + m_{xy}^1 (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) & \text{si } |x| \leq e/2 \\ m_{yy}^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + m_{xy}^2 (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) & \text{si } e/2 \leq |x| \leq a/2 \end{cases}$$

$$\text{avec } M_{yy} = m_{yy}^1 \left(1 - \frac{e}{a}\right) + m_{yy}^2 \frac{e}{a}, \quad M_{xy} = m_{xy}^1 \left(1 - \frac{e}{a}\right) + m_{xy}^2 \frac{e}{a} \quad (6.35)$$

qui est bien statiquement admissible avec \underline{M} . Dans la limite d'une faible fraction de renforcement $e/a \ll 1$ et d'un ratio de renforcement élevé $M_{02}/M_{01} \gg 1$, cette approche par l'intérieur coïncide avec le domaine macroscopique exact. Dans le plan $(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} = 0)$, cette approche s'obtient en translatant le domaine de résistance du milieu 1 par un vecteur de coordonnées $(0, \pm(M_{02} - M_{01})\frac{e}{a}, 0)$, construction similaire au cas du renforcement d'un milieu continu 3D par un réseau d'inclusions linéiques [de Buhan et Taliercio, 1991].

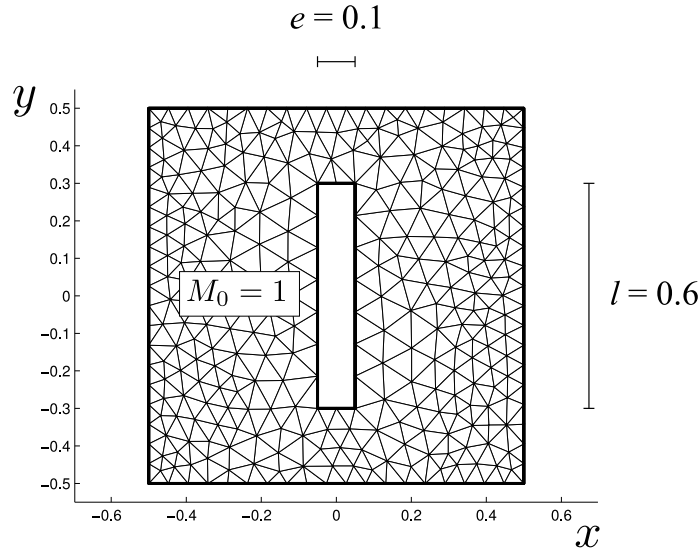


FIGURE 6.5 – Géométrie et maillage de la cellule de base pour une plaque perforée par un trou rectangulaire

Les résultats de la mise en œuvre numérique de l’approche statique et cinématique pour cet exemple ont été représentés sur la Figure 6.4 dans le plan $(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} = 0)$. On constate en particulier que les deux approches coïncident parfaitement, déterminant G^{hom} de manière exacte. De plus, G^{hom} coïncide ici avec la construction précédente où l’ellipse de von Mises correspondant au critère du matériau 1 a été translatée de ± 1.95 selon la direction M_{yy} .

6.4.2 Plaque perforée

Le deuxième exemple consiste en une plaque perforée par un trou rectangulaire de dimensions $e = 0.1$ dans la direction x et $l = 0.6$ dans la direction y , la cellule de base étant de côté unitaire $a = 1$ (Figure 6.5). Le matériau constitutif obéit au critère de von Mises avec $M_0 = 1$.

À titre d’illustration, l’allure du champ de moment de flexion local optimal $\underline{m}(\xi)$ a été représenté sur la Figure 6.6 pour un moment de flexion macroscopique de la forme $\underline{M} = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$. On constate que le moment de flexion maximal apparaît de part et d’autre du trou dans la direction y .

Différents mécanismes de ruine (champ de vitesse w optimal) ont été représentés sur la Figure 6.7 pour différentes valeurs de la courbure macroscopique : flexion pure suivant x ($\chi_{xx} = 1, \chi_{yy} = \chi_{xy} = 0$), flexion pure suivant y ($\chi_{xx} = 0, \chi_{yy} = 1, \chi_{xy} = 0$) et torsion pure ($\chi_{xx} = \chi_{yy} = 0, \chi_{xy} = 1$). Dans le cas de la flexion suivant x , on observe une tendance à la localisation du mécanisme de ruine optimal sous la forme d’une ligne

6.4. Exemples de calcul de critères macroscopiques

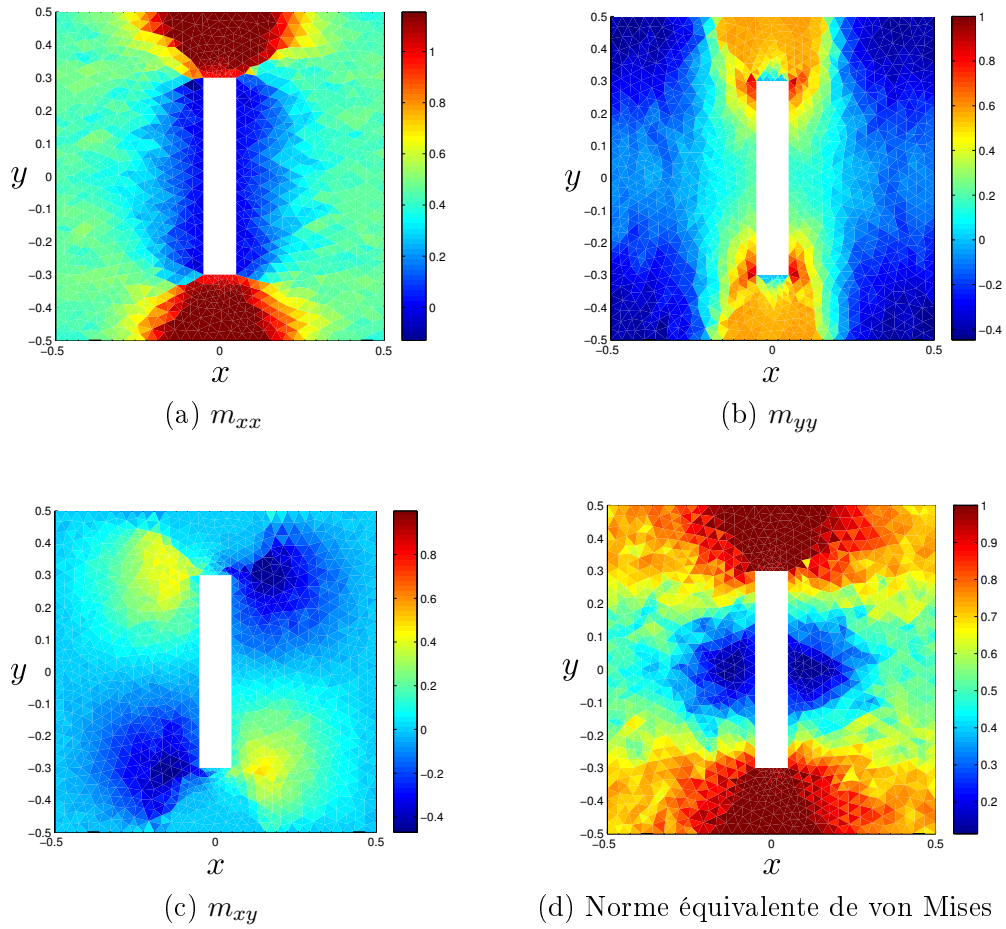


FIGURE 6.6 – Iso-valeurs du champ local $\underline{m}(\xi)$ pour un moment macroscopique de la forme $\underline{M} = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$

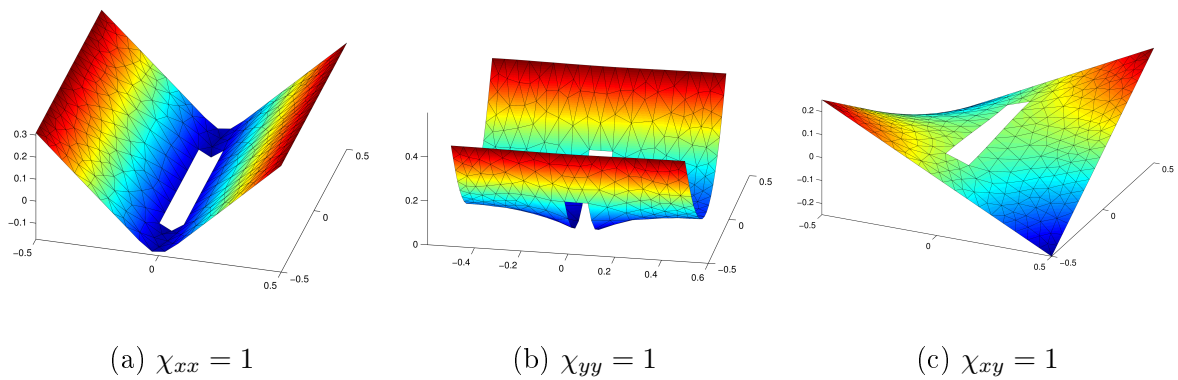


FIGURE 6.7 – Mécanismes de ruine de la cellule de base pour 3 courbures macroscopiques différentes (flexion pure suivant x , y et torsion pure)

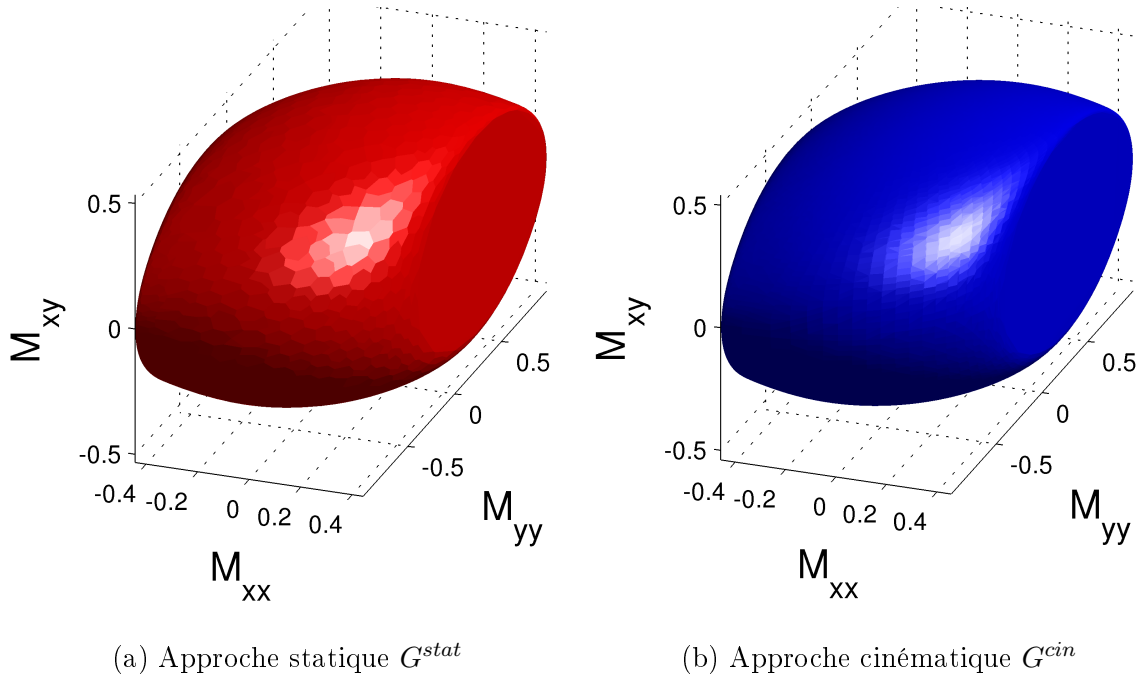


FIGURE 6.8 – Critères de résistance macroscopiques de la plaque perforée obtenus par l’approche statique et cinématique (écart maximal de l’ordre de 2%)

de rupture alignée dans la direction du trou suivant y . En revanche, le mécanisme optimal pour une flexion suivant y est plus complexe (du fait de la faible largeur du trou) et fait intervenir une courbure macroscopique suivant la direction y ainsi que des zones de contre-courbure suivant x près du trou liées à la forme particulière du critère de von Mises. Enfin, le cas de la torsion pure fait apparaître un mécanisme correspondant à une courbure de torsion homogène $w(\underline{\xi}) = xy$ correspondant à une fluctuation périodique nulle $v(\underline{\xi}) = 0$. En effet, du fait des conditions aux limites et des conditions de saut particulières du modèle de Love-Kirchhoff (pas de condition de continuité de M_{nt} à travers une ligne), le champ de torsion uniforme $\underline{m} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$ est statiquement admissible, vérifie le critère de résistance et est associé en tout point à une courbure locale de torsion pure.

Enfin, les critères de résistance macroscopiques obtenus par l’approche statique et cinématique ont été représentés sur la Figure 6.8 dans l’espace (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) . On ne distingue presque pas de différences entre les deux approches à l’œil nu, l’écart maximal entre ces deux surfaces étant de l’ordre de 2%. Notons que la forme du critère obtenu est relativement complexe, ressemblant plus ou moins à un ellipsoïde tronqué par deux plans parallèles au plan (M_{yy}, M_{xy}) .

6.5 Conclusions et perspectives

Ce chapitre a présenté la démarche générale de l'homogénéisation en calcul à la rupture pour les milieux hétérogènes périodiques et s'est proposé de l'appliquer au cas des plaques minces en flexion. Le problème auxiliaire de calcul à la rupture permettant de déterminer le critère de résistance macroscopique du milieu homogène équivalent a été formulé du point de vue de l'approche statique ainsi que de celui de l'approche cinématique. En particulier, nous avons montré que la définition proposée des espaces des champs de moments de flexion statiquement admissibles et des champs de vitesse cinématiquement admissibles sur la cellule de base assurait que ces derniers étaient en dualité au sens du lemme de Hill-Mandel et définissait ainsi un mode de chargement macroscopique sur la cellule de base. Nous avons également utilisé des éléments finis de la littérature ainsi que ceux développés au chapitre 3 pour résoudre numériquement, par l'approche statique et cinématique, le problème auxiliaire de calcul à la rupture formulé sur la cellule de base. La performance des solveurs d'optimisation conique ainsi que la précision des éléments finis étudiés permettent d'encadrer, de façon rigoureuse et précise, le critère de résistance macroscopique exact dans un temps de calcul relativement raisonnable (environ 1 à 2 secondes d'optimisation par direction de calcul pour les exemples présentés).

La résolution numérique du problème auxiliaire par éléments finis et programmation conique est tout à fait générale et peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes d'homogénéisation en calcul à la rupture. Par exemple, nous avons mentionné que, pour le cas où l'épaisseur de la plaque est de l'ordre de la taille des hétérogénéités, la cellule de base est modélisée comme un volume en milieu continu 3D et le problème auxiliaire peut-être résolu à l'aide d'éléments finis dédiés. Ainsi, il est possible de déterminer numériquement les critères de résistance macroscopiques pour une grande classe de problèmes.

Il est néanmoins peu utile de déterminer de tels critères homogénéisés si l'on est incapable de les réutiliser dans le calcul de structure homogène équivalent. Nous avons déjà mentionné les difficultés inhérentes à cette étape de la démarche d'homogénéisation et nous proposons dans la suite une méthode d'approximation numérique permettant de remédier à ces dernières.

* *
*

Chapitre 7

Approximation numérique de critères de résistance

Résumé : *Ce chapitre traite de la problématique de l'approximation numérique d'un critère de résistance issu, par exemple, d'une procédure d'homogénéisation. Nous proposons un algorithme construisant une approximation par une union convexe d'ellipsoïdes. Ce choix permet d'obtenir une approximation de bonne précision avec relativement peu de paramètres et qui peut se formuler à l'aide de contraintes coniques du second-ordre.*

Sommaire

7.1	Différentes stratégies d'approximation	142
7.1.1	Linéarisation	142
7.1.2	Tirer parti de la performance des solveurs de programmation conique	142
7.1.3	Une autre stratégie	143
7.2	Algorithme d'approximation par union convexe d'ellipsoïdes	144
7.2.1	Notations et hypothèses de départ	144
7.2.2	Principe général	144
7.2.3	Implémentation	145
7.3	Illustrations	147
7.3.1	Quelques itérations de l'algorithme (cas plan)	147
7.3.2	Exemple d'approximation d'un critère à 3 dimensions	149
7.4	Conclusions et perspectives	151

7.1 Différentes stratégies d'approximation

7.1.1 Linéarisation

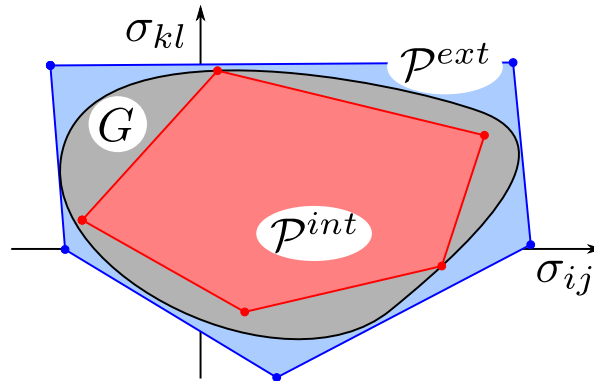


FIGURE 7.1 – Linéarisation de G par l'intérieur (\mathcal{P}^{int}) et par l'extérieur (\mathcal{P}^{ext})

L'idée de linéariser un critère de résistance est apparue relativement tôt dans la littérature dans la mesure où les seuls solveurs disponibles au début du développement numérique du calcul à la rupture étaient des solveurs de programmation linéaire (algorithme du simplexe notamment). Plusieurs auteurs ont alors proposé des stratégies de linéarisation des critères de résistance non-linéaires usuels (von Mises ou Mohr-Coulomb par exemple) par un polyèdre (cf. Figure 7.1) afin de pouvoir utiliser de tels solveurs [Lysmer, 1970, Anderheggen et Knöpfel, 1972, Pastor et Turgeman, 1976]. Cette stratégie de linéarisation a également été utilisée pour trouver des solutions analytiques pour des problèmes de coque [Hodge, 1954]. La précision de l'approximation du critère initial peut être améliorée en augmentant le nombre de côtés du polyèdre et donc le nombre de contraintes linéaires nécessaires à l'écriture du critère linéarisé.

Du fait des performances limitées de l'algorithme du simplexe, cette approche permettait de ne résoudre en pratique que des problèmes de petite taille. De plus, dans le cas de calculs tridimensionnels, le nombre de facettes nécessaires pour linéariser un critère de façon satisfaisante devient très élevé. Si cette approche par linéarisation a pu être améliorée en utilisant des stratégies de linéarisation plus efficaces [Ben-Tal et Nemirovski, 2001], c'est essentiellement le développement de solveurs performants pour la programmation non-linéaire (conique en particulier) qui a permis de faire d'importants progrès puisqu'il est devenu inutile de linéariser le critère de résistance initial.

7.1.2 Tirer parti de la performance des solveurs de programmation conique

Il est assez remarquable que les algorithmes de points intérieurs aient pu être étendus au cas de la programmation conique de manière aussi efficace que pour le cas de la programmation linéaire, de telle sorte qu'il est presque aussi rapide de résoudre

7.1. Différentes stratégies d'approximation

un problème de programmation conique du second-ordre avec m contraintes coniques qu'un problème de programmation linéaire avec m contraintes linéaires, pour le même nombre de variables d'optimisation. Cette constatation nous a incité à généraliser l'idée de linéarisation, qui consiste à approcher un convexe par des primitives géométriques simples (points, plans), à des primitives plus complexes pouvant se formuler à l'aide de contraintes coniques du second-ordre (ellipsoïdes par exemple).

L'idée d'approcher un ensemble convexe par une *somme d'ellipsoïdes* est alors apparue naturellement dans la mesure où la fonction d'appui du domaine correspondant s'écrit comme une somme de normes quadratiques, exemple connu de fonction pouvant se réécrire à l'aide de contraintes coniques [Andersen *et al.*, 1998]. Nous avons pu mettre en œuvre cette approche dans le cas particulier de l'approximation des diagrammes d'interaction membrane-flexion de poutres composites [Bleyer et de Buhan, 2013d]. Néanmoins, après quelques recherches dans la littérature dédiée à la géométrie convexe, il s'est avéré que cette stratégie d'approximation reste limitée dans le cas général. En effet, une somme d'ellipsoïdes ne permet pas d'approcher efficacement n'importe quel ensemble convexe. Il semble, toutefois, que cette limitation ait peu d'importance dans le cas de critères de résistance non bornés tels que celui d'un sol renforcé par exemple [Gueguin *et al.*, 2013, Gueguin *et al.*, 2014b].

7.1.3 Une autre stratégie

Nous avons alors cherché une façon plus générale d'approcher un critère de résistance tout en conservant une formulation conique du second-ordre. Puisque tout convexe peut être approché par un polyèdre que l'on peut décrire comme l'enveloppe convexe de ses sommets, il est possible de généraliser la notion de polyèdre en remplaçant les sommets par des ellipsoïdes et en considérant donc une *union convexe d'ellipsoïdes* comme surface d'approximation. Ainsi, un ellipsoïde permet d'intégrer une information locale sur la courbure du convexe autour du point en question et conduit à penser qu'il sera possible d'obtenir une approximation avec une bonne précision et relativement peu d'ellipsoïdes. Enfin, nous verrons par la suite qu'il est possible de formuler un critère de résistance (ainsi que sa fonction d'appui) décrit par une union convexe d'ellipsoïdes à l'aide de contraintes coniques du second-ordre. La section suivante s'attachera à présenter rapidement le principe d'un algorithme permettant de construire ce type d'approximation.

Bien entendu, il est également possible d'imaginer d'autres constructions que celle-ci. Par exemple, un polyèdre pouvant être également décrit comme l'intersection d'un ensemble d'hyperplans, on peut étendre cette notion en considérant une intersection d'ellipsoïdes où chaque ellipsoïde serait tangent au convexe de départ au même point que l'hyperplan correspondant mais aurait, en plus, la même courbure que le convexe en ce point. Cette approche n'a pas été étudiée dans la mesure où la stratégie reposant sur une union convexe s'est révélée très satisfaisante.

7.2 Algorithme d'approximation par union convexe d'ellipsoïdes

Dans cette section, nous présentons un algorithme permettant d'approcher un ensemble convexe déterminé numériquement par une union convexe de plusieurs ellipsoïdes [Bleyer et de Buhan, 2013a]. L'algorithme construit à chaque itération un nouvel ellipsoïde afin d'améliorer l'approximation obtenue à l'itération précédente.

7.2.1 Notations et hypothèses de départ

Nous nous plaçons dans la suite dans \mathbb{R}^3 et nous supposons que l'ensemble convexe borné G à approximer est décrit numériquement par les valeurs $(\pi_j)_{j=1,\dots,M}$ prises par sa fonction d'appui pour M valeurs différentes \mathbf{d}_j du taux de déformation¹. La fonction d'appui étant positivement homogène de degré 1, nous supposons également que les directions \mathbf{d}_j sont des vecteurs unitaires et nous notons \mathbb{S} la sphère unité de \mathbb{R}^3 . Ainsi, G est décrit comme l'intersection de l'ensemble des hyperplans d'équation $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}_j \leq \pi_j$ pour $j = 1, \dots, M$. Comme nous l'avons vu dans l'Annexe B, si G provient d'une procédure d'homogénéisation, nous avons directement accès aux valeurs numériques de sa fonction d'appui dans le cas d'une approche cinématique, tandis qu'elles sont données indirectement par les variables duales dans le cas d'une approche statique.

7.2.2 Principe général

L'algorithme itératif détermine, à chaque itération, un ellipsoïde \mathcal{E}_n construit de façon à approcher la frontière de G dans une certaine région. L'approximation à la fin de l'itération est obtenue en considérant l'union convexe des ellipsoïdes construits jusqu'à présent et nous la notons :

$$\mathcal{P}_n = \mathbf{conv} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}_i \right\} \quad (7.1)$$

La fonction d'appui de \mathcal{P}_n , notée Π_n , s'exprime analytiquement en fonction des paramètres géométriques des ellipsoïdes \mathcal{E}_i (cf. Annexe A). Nous pouvons ainsi calculer la différence entre les fonctions d'appuis de G et de l'approximation courante \mathcal{P}_n pour toutes les directions \mathbf{d}_j . L'idée de l'algorithme consiste alors à déterminer la direction \mathbf{d}_0 pour laquelle l'écart entre les deux fonctions d'appuis (et donc l'écart entre G et \mathcal{P}_n) est le plus grand. L'itération suivante construira alors un nouvel ellipsoïde \mathcal{E}_{n+1} approchant G autour de la région correspondant à la direction \mathbf{d}_0 . On définit ensuite :

$$\mathcal{P}_{n+1} = \mathbf{conv} \left\{ \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i \right\} = \mathbf{conv} \{ \mathcal{P}_n \cup \mathcal{E}_{n+1} \} \quad (7.2)$$

1. Les notations $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{d} désignent, de manière générale, les composantes des efforts intérieurs généralisés et des taux de déformations généralisés associés. On peut donc, par exemple, les remplacer par les composantes de $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{\chi}}$ dans le cas d'un critère de plaque mince en flexion.

7.2. Algorithme d'approximation par union convexe d'ellipsoïdes

L'algorithme construit naturellement une approximation par l'intérieur du critère initial. Il est néanmoins possible de se servir de cette dernière pour approcher le critère par l'extérieur en appliquant un facteur multiplicatif à l'ensemble de l'approximation de sorte que cette dernière devienne une approximation par l'extérieur.

7.2.3 Implémentation

Initialisation : Plusieurs choix sont possibles pour initialiser l'algorithme. On peut l'initialiser avec un ellipsoïde dégénéré en un point tel que l'origine du repère ou encore le barycentre du convexe G . Le choix de l'initialisation ne semble pas influencer grandement la qualité de l'approximation.

Détermination d'un voisinage de \mathbf{d}_0 : Les ellipsoïdes que nous allons calculer servent à approcher G dans un voisinage autour d'une direction \mathbf{d}_0 . Ce voisinage est construit en déterminant les m directions les plus proches de \mathbf{d}_0 au sens du produit scalaire $\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{d}_j$ pour tout j . On choisit en pratique $m = 10$.

Point de tangence : Nous notons $\boldsymbol{\sigma}_0$ le point de tangence de l'hyperplan de normale \mathbf{d}_0 et tangent à G . Nous disposons, soit des coordonnées des points de tangence comme données de l'algorithme (ce qui est normalement le cas si G est issu d'une procédure d'homogénéisation), soit il est possible de le calculer en résolvant un problème de programmation linéaire relativement peu coûteux.

Caractérisation de la géométrie locale : L'ingrédient principal de l'algorithme consiste à caractériser la géométrie locale de G autour de \mathbf{d}_0 à l'aide de la fonction d'appui. En effet, cette dernière nous renseigne sur la courbure de G via l'endomorphisme de Weingarten W . Les valeurs propres et vecteurs propres de ce dernier correspondent aux courbures et directions principales de la surface de G . Le lien entre W et la fonction d'appui π lorsque celle-ci est de classe C^2 est donné par la relation suivante [Gravesen, 2007, Sir *et al.*, 2008] :

$$W = -(\text{Hess}_{\mathbb{S}} \pi(\mathbf{d}) + \pi(\mathbf{d})\text{Id})^{-1} \quad (7.3)$$

où $\text{Hess}_{\mathbb{S}} \pi(\mathbf{d})$ correspond au Hessien de la fonction $\pi(\mathbf{d})$ par rapport à la sphère unité \mathbb{S} . Ainsi, si λ est une valeur propre de $\text{Hess}_{\mathbb{S}} \pi(\mathbf{d})$, le vecteur propre associé est une direction principale de la courbure dans le plan tangent et le rayon de courbure principal associé est donné par $\rho = |\lambda + \pi(\mathbf{d})|$.

Calcul de $\text{Hess}_{\mathbb{S}} \pi(\mathbf{d}_0)$: Le Hessien devant se calculer par rapport à la sphère unité, nous le déterminons en écrivant un développement de Taylor du second-ordre sur la sphère unité autour de la direction \mathbf{d}_0 [Absil *et al.*, 2009] :

$$\pi(\mathbf{d}) \approx \pi(\mathbf{d}_0) + \langle \text{grad}_{\mathbb{S}} \pi(\mathbf{d}_0), \text{Log}_{\mathbf{d}_0}(\mathbf{d}) \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Log}_{\mathbf{d}_0}(\mathbf{d}), \text{Hess}_{\mathbb{S}} \pi(\mathbf{d}_0) \text{Log}_{\mathbf{d}_0}(\mathbf{d}) \rangle \quad (7.4)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire du plan tangent à \mathbb{S} en \mathbf{d}_0 , $\text{grad}_{\mathbb{S}} \pi(\mathbf{d}_0)$ correspond au gradient de $\pi(\mathbf{d})$ par rapport à \mathbb{S} et $\text{Log}_{\mathbf{d}_0}(\mathbf{d})$ représente la projection logarithmique de \mathbf{d} sur le plan tangent et qui s'écrit ici [Sen, 2008] :

$$\text{Log}_{\mathbf{d}_0}(\mathbf{d}) = \frac{\theta}{\sin \theta} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_2) \quad (7.5)$$

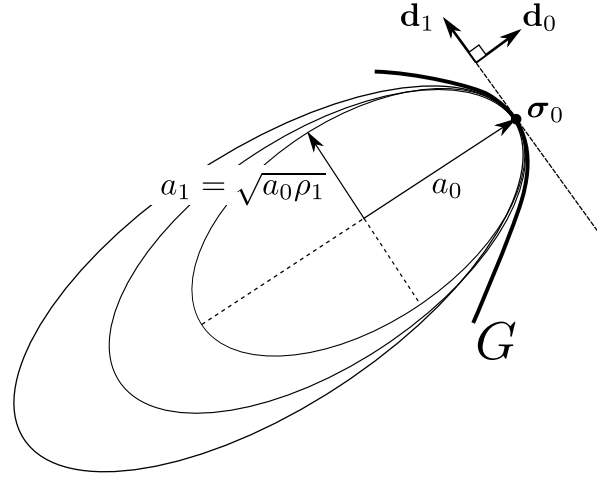


FIGURE 7.2 – Ensemble d’ellipses de même courbure en σ_0 et tangentes à G (ellipses osculatrices)

avec $\theta = \arccos(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_0)$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base orthonormée du plan tangent.

Numériquement, les composantes de la matrice Hessienne dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sont déterminées en minimisant, au sens des moindres carrés, le reste du troisième ordre dans le développement de Taylor. Une analyse spectrale de cette matrice permet alors de déterminer ses valeurs propres λ_1, λ_2 et ses vecteurs propres $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$.

Construction d’un ensemble d’ellipsoïdes de courbure donnée : Une fois la courbure locale de G déterminée en \mathbf{d}_0 on cherche à construire un ensemble d’ellipsoïdes de même courbure et tangent à G au point σ_0 . Plus précisément, nous construisons un ensemble d’ellipsoïdes (osculateurs), contenus dans G , tangents à ce dernier en σ_0 , dont les axes principaux sont donnés par les vecteurs $\{\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ et dont les rayons de courbures en σ_0 dans les directions \mathbf{d}_1 et \mathbf{d}_2 sont donnés respectivement par $\rho_1 = |\lambda_1 + \pi(\mathbf{d}_0)|$ et $\rho_2 = |\lambda_2 + \pi(\mathbf{d}_0)|$.

Il se trouve que l’ensemble d’ellipsoïdes vérifiant ces différentes propriétés est décrit par un seul paramètre indépendant, par exemple, la demi-longueur a_0 de l’axe principal de direction \mathbf{d}_0 . En effet, σ_0 se situant à l’extrémité de l’axe principal a_0 , les demi-longueurs a_1 et a_2 des deux autres axes principaux sont reliées aux rayons de courbure de la façon suivante (Figure 7.2) :

$$\rho_1 = \frac{a_1^2}{a_0} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{a_2^2}{a_0} \quad (7.6)$$

Détermination du « meilleur » ellipsoïde : Il s’agit ici de déterminer le meilleur ellipsoïde de l’ensemble précédent paramétré par le scalaire a_0 qui approche G dans le voisinage considéré. Pour ce faire, nous estimons une valeur maximale raisonnable pour a_0 , par exemple le demi-diamètre de G dans la direction \mathbf{d}_0 :

$$a_{max} = \frac{\pi(\mathbf{d}_0) + \pi(-\mathbf{d}_0)}{2} \quad (7.7)$$

7.3. Illustrations

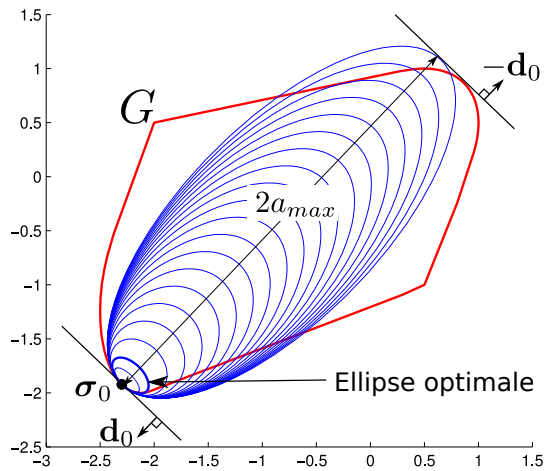


FIGURE 7.3 – Discrétisation de l’ensemble d’ellipses de même courbure et choix de l’ellipse optimale ($N_d = 20$).

Le segment $[0; a_{max}]$ est alors discrétisé en N_d valeurs correspondant à N_d ellipsoïdes différents ($N_d = 200$ en pratique). Parmi ceux-ci, nous ne conservons que ceux situés strictement à l’intérieur de G . Enfin, parmi ces derniers, nous retenons celui qui réalise le minimum de la différence au sens des moindres carrés entre $\pi(\mathbf{d})$ et sa propre fonction d’appui dans un voisinage de \mathbf{d}_0 . Cette étape est illustrée sur la Figure 7.3 pour un ensemble convexe du plan \mathbb{R}^2 .

7.3 Illustrations

7.3.1 Quelques itérations de l’algorithme (cas plan)

À titre d’illustration, nous reprenons l’ensemble convexe G de la Figure 7.3 et nous représentons sur la Figure 7.4 les 6 premières itérations de l’algorithme. Initialisé par le barycentre représenté par une croix noire, l’algorithme construit bien, à chaque étape, une ellipse optimale dans les régions les plus éloignées de l’approximation obtenue à l’étape précédente (enveloppe convexe en noir). La courbure locale semble bien correctement calculée dans les régions régulières et il est intéressant de constater que le calcul du Hessien permet de rendre compte de points de courbure nulle ou très faible dans les coins du critère, de sorte que l’on obtient des ellipses très allongées. Cet algorithme semble donc robuste vis-à-vis du caractère irrégulier du critère, aspect essentiel dans la mesure où de nombreux critères homogénéisés présentent de telles zones non régulières. Enfin, on obtient au bout de 5 itérations une approximation de très bonne qualité.

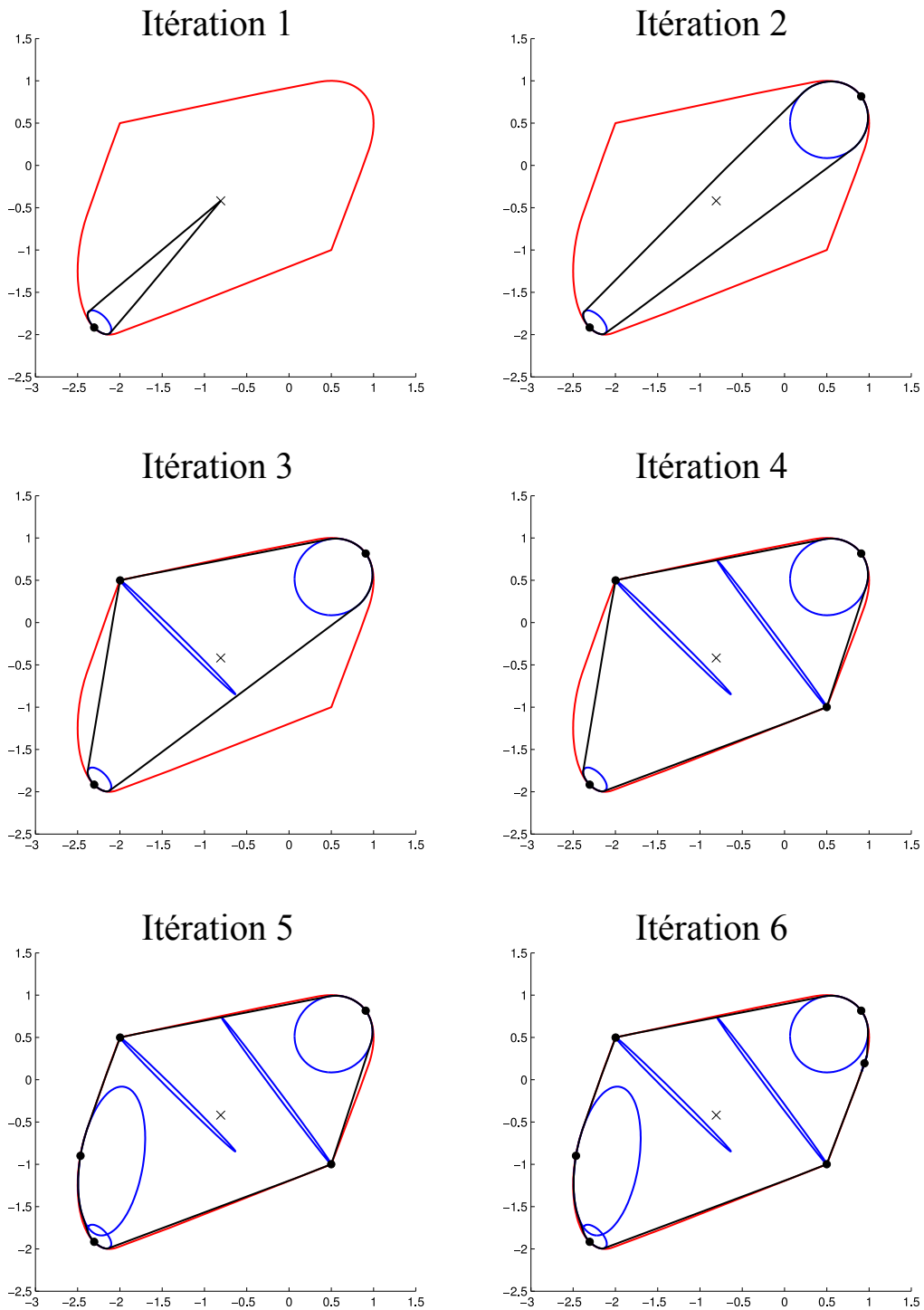


FIGURE 7.4 – Les 6 premières itérations de l’algorithme pour un ensemble convexe du plan (en rouge). La courbe noire représente l’approximation à chaque étape, obtenue en prenant l’enveloppe convexe des ellipses calculées (en bleu). Les points noirs représentent les points de tangence σ_0 .

7.3. Illustrations

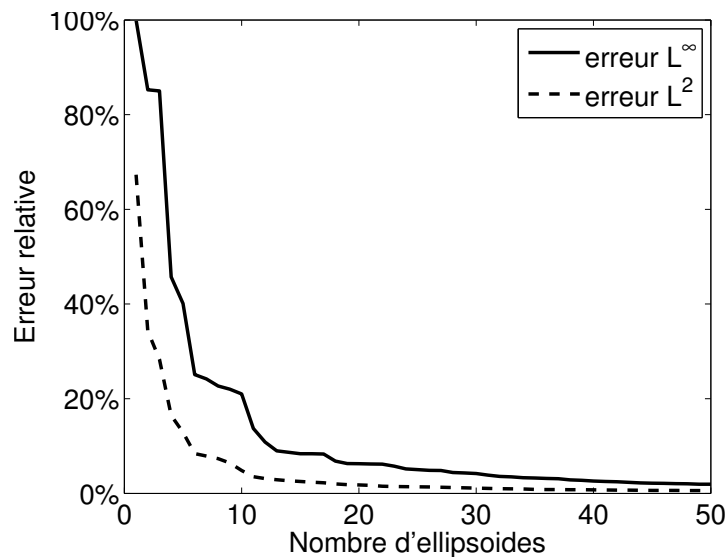


FIGURE 7.5 – Évolution de l'erreur relative maximale (L^∞) et quadratique moyenne (L^2) en fonction du nombre d'ellipsoïdes

7.3.2 Exemple d'approximation d'un critère à 3 dimensions

L'algorithme a été mis en œuvre pour le critère de résistance de la plaque perforée de la section 6.4.2 du chapitre précédent (Figure 6.8). Cet dernier est décrit numériquement par 4000 points dans l'espace (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) . La Figure 7.5 représente l'évolution des erreurs relatives (maximales et au sens quadratique moyen) entre la fonction d'appui de l'approximation réalisée par union convexe d'ellipsoïdes et celle du critère initial, en fonction du nombre d'ellipsoïdes. On constate que les erreurs décroissent relativement rapidement, l'erreur maximale passant de 20% pour 10 ellipsoïdes à 6.3% pour 20 ellipsoïdes et moins de 2% pour 50 ellipsoïdes. La Figure 7.6 permet de comparer l'allure des approximations obtenues pour différents nombres d'ellipsoïdes avec la surface initiale.

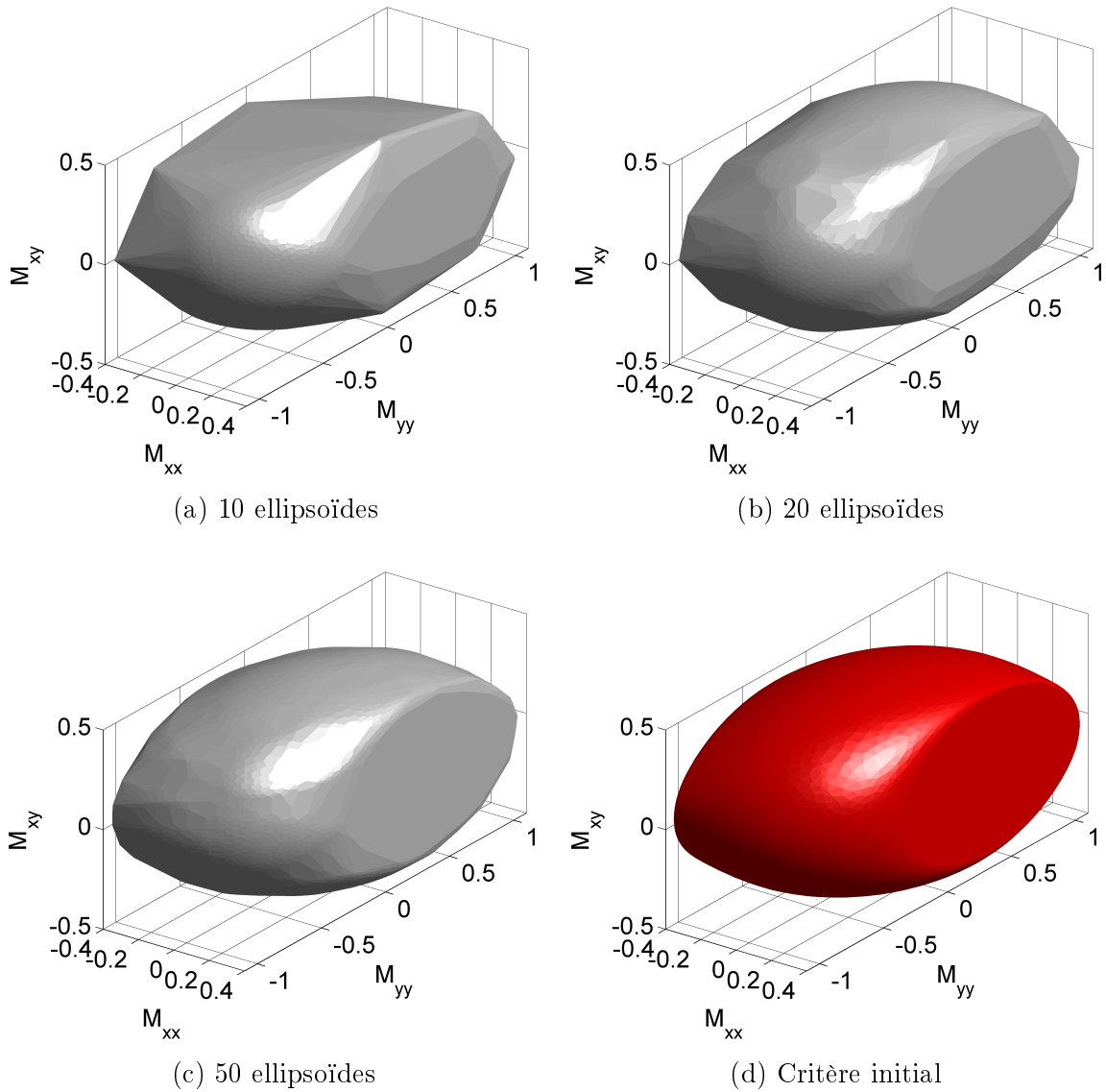


FIGURE 7.6 – Approximation du critère de résistance macroscopique de la plaque perforée (exemple 6.4.2)

7.4 Conclusions et perspectives

Ce chapitre s'est attaché à discuter de différentes techniques d'approximation d'un critère de résistance obtenu numériquement dans le but de pouvoir formuler un problème de calcul à la rupture utilisant une telle approximation, à l'aide des solveurs d'optimisation existants. Nous avons proposé un algorithme permettant d'approcher une surface à l'aide d'une union convexe d'ellipsoïdes, un choix particulièrement bien adapté au formalisme de la programmation conique, comme nous le verrons dans la suite. L'algorithme tire parti de la description géométrique discrète d'un domaine convexe, notamment via les valeurs de sa fonction d'appui calculées pour un nombre important de directions, information que l'on obtient notamment par la résolution du problème auxiliaire dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Le principe même de l'algorithme est relativement simple et consiste à tirer parti de la connaissance de la courbure locale du convexe en un point afin de l'approcher par des primitives géométriques plus complexes que des plans (dans le cas d'une linéarisation), en l'occurrence des ellipsoïdes de même courbure.

Bien que pouvant être amélioré sur bien des aspects (initialisation, ellipsoïde non aligné avec les courbures principales, etc.), l'algorithme donne des résultats très satisfaisants et permet d'approcher un critère numérique par un nombre modéré d'ellipsoïdes pour une précision satisfaisante. À quelques modifications près, cet algorithme peut également s'étendre au cas de critères de résistance non bornés [Bleyer et de Buhan, 2013a]. Ce chapitre, relativement sommaire, se veut donc être une ouverture vers une amélioration et une généralisation des méthodes d'approximation pour les critères de résistance déterminés numériquement et nous allons à présent nous servir de cette approche comme d'un outil pour le calcul à la rupture numérique des structures homogénéisées.

* *
*
*
*

Chapitre 8

Calcul à la rupture sur une structure homogénéisée

Résumé : *La problématique de la mise en œuvre numérique du calcul à la rupture sur une structure homogénéisée est abordée dans ce chapitre. Cet aspect est particularisé au cas des plaques minces en flexion, bien que la portée de ce chapitre se veuille plus générale. Après avoir abordé le cas particulier de la méthode des lignes de rupture, nous proposons une démarche générale combinant homogénéisation et approximation afin de mener les calculs sur la structure homogénéisée jusqu'à leur terme. En particulier, nous montrerons que le choix d'approximation retenu dans le chapitre 7 conduit à une formulation numérique de l'approche statique et cinématique sous la forme d'un problème de programmation conique du second-ordre (SOCP). Nous montrerons également qu'il est possible d'avoir une bonne estimation a priori des erreurs numériques induites au cours du calcul.*

Sommaire

8.1	Calcul à la rupture d'une plaque mince homogénéisée	154
8.1.1	Le cas particulier de la méthode des lignes de rupture	154
8.1.2	Démarche générale d'homogénéisation et approximation	156
8.2	Mise en œuvre numérique par éléments finis et programmation conique	158
8.2.1	Formulation conique pour l'approche statique	158
8.2.2	Formulation conique pour l'approche cinématique	159
8.2.3	Estimations d'erreurs <i>a priori</i>	160
8.3	Exemples d'application	161
8.3.1	Plaque rectangulaire renforcée	161
8.3.2	Plaque circulaire trouée	166
8.4	Conclusions et perspectives	170

8.1 Calcul à la rupture d'une plaque mince homogénéisée

Dans le chapitre 6, nous avons formulé le critère de résistance macroscopique d'une plaque mince périodique comme solution d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture sur la cellule de base. Nous souhaitons, à présent, pouvoir utiliser les techniques présentées au chapitre 3 pour résoudre un problème de plaque homogénéisée associé à un critère macroscopique déterminé numériquement. Nous traitons tout d'abord le cas particulier de la méthode des lignes de rupture avant de proposer une démarche plus générale.

8.1.1 Le cas particulier de la méthode des lignes de rupture

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 3, la méthode des lignes de rupture présente l'avantage d'être relativement simple à mettre en œuvre analytiquement, ainsi que numériquement. Cela reste vrai dans le cas d'une structure homogénéisée, *i.e.* quelle que soit la complexité du critère de résistance. En effet, dans le cas d'un champ de vitesse virtuelle transversale affine par morceaux, la puissance résistante maximale de la structure est réduite au terme portant uniquement sur les discontinuités de vitesse de rotation à travers un ensemble de lignes de rupture Γ de normale \underline{n} :

$$P_{rm}(w) = \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \llbracket \partial_n w \rrbracket) dl \quad (8.1)$$

Dans le cas d'un calcul sur une structure homogénéisée, la fonction d'appui présente dans l'expression précédente correspond en réalité à la fonction d'appui du critère macroscopique $\pi(\underline{n}; \llbracket \partial_n w \rrbracket) = \Pi^{hom}(\underline{n}; \llbracket \partial_n w \rrbracket)$ relative aux discontinuités de rotation. Celle-ci est donnée par :

$$\Pi^{hom}(\underline{n}; \llbracket \partial_n w \rrbracket) = \sup_{\underline{M} \in G^{hom}} \{M_{nn} \llbracket \partial_n w \rrbracket\} = \Pi^{hom}(\underline{\chi} = \llbracket \partial_n w \rrbracket \underline{n} \otimes \underline{n}) \quad (8.2)$$

Supposons, à présent, que le critère de résistance soit symétrique par rapport à l'origine¹ ($\underline{M} \in G^{hom} \Leftrightarrow (-\underline{M}) \in G^{hom}$), alors $\Pi^{hom}(\underline{\chi}) = \Pi^{hom}(-\underline{\chi})$ pour tout $\underline{\chi}$: les résistances à la flexion positive et négative sont identiques. D'après les relations précédentes et compte-tenu du fait que les fonctions d'appui sont positivement 1-homogènes,

1. Cette hypothèse sert uniquement à simplifier le propos. Dans le cas général d'un critère non symétrique, on peut écrire

$$\Pi^{hom}(\underline{n}; \llbracket \partial_n w \rrbracket) = \begin{cases} \llbracket \partial_n w \rrbracket \Pi_0^+(\alpha) & \text{si } \llbracket \partial_n w \rrbracket \geq 0 \\ -\llbracket \partial_n w \rrbracket \Pi_0^-(\alpha) & \text{si } \llbracket \partial_n w \rrbracket \leq 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

L'anisotropie est alors caractérisée par l'orientation de la charnière α et le signe de la résistance en flexion, positive ou négative, correspondant respectivement à $\Pi_0^+(\alpha)$ et $\Pi_0^-(\alpha)$.

8.1. Calcul à la rupture d'une plaque mince homogénéisée

nous pouvons écrire que :

$$\Pi^{hom}(\underline{n}; \llbracket \partial_n w \rrbracket) = \llbracket \partial_n w \rrbracket \left(\sup_{\underline{M} \in G^{hom}} \{M_{nn}\} \right) = \llbracket \partial_n w \rrbracket \Pi^{hom}(\underline{n} \otimes \underline{n}) \quad (8.4)$$

Ainsi, la fonction d'appui pour les discontinuités de rotation relative à de tels critères de résistance en flexion s'écrit sous la forme du produit de l'intensité de la discontinuité de rotation $\llbracket \partial_n w \rrbracket$ et d'une fonction $\Pi^{hom}(\underline{n} \otimes \underline{n})$ ne dépendant que de la normale à la ligne de rupture. La normale étant unitaire, cette fonction peut, par exemple, se récrire à l'aide d'une fonction $\Pi_0(\alpha) = \Pi^{hom}(\underline{n} \otimes \underline{n})$ ne dépendant que d'une variable scalaire α correspondant à l'orientation de la normale dans le plan par rapport à la direction x : $\underline{n} = \cos \alpha \underline{e}_x + \sin \alpha \underline{e}_y$.

La fonction $\Pi_0(\alpha)$ renferme alors toute l'information relative à l'*anisotropie du critère* en ce qui concerne les lignes de rupture. Pour un critère isotrope, nous avons bien sûr $\Pi_0(\alpha) = cte$. Pour un critère anisotrope, la valeur de la résistance à la flexion le long d'une charnière dépendra donc de son orientation par rapport au matériau. À titre d'illustration, nous avons représenté sur la Figure 8.1 l'évolution de cette fonction pour la détermination statique et cinématique de G^{hom} dans l'exemple 6.4.2 de la plaque perforée. Comme on pouvait s'y attendre, on constate que la résistance à la flexion est la plus faible lorsque la charnière est alignée dans le sens du trou tandis qu'elle est la plus élevée pour une orientation proche la direction orthogonale au trou.

L'intérêt de cette représentation réside dans le fait que, une fois la géométrie des lignes de rupture fixée, la fonction $\Pi_0(\alpha)$ peut être évaluée pour chaque charnière du mécanisme. L'expression de la fonction d'appui dépendant simplement de $\llbracket \partial_n w \rrbracket$ via sa valeur absolue, l'optimisation du mécanisme s'effectue de la même façon que dans le cas homogène isotrope. Cela reste vrai dans le cas d'une mise en œuvre de la méthode des lignes de rupture par éléments finis dans la mesure où la position de ces dernières est prédéterminée par les arêtes du maillage. Il est facile de voir que le problème qui en résulte reste un problème de programmation linéaire²[Bleyer et de Buhan, 2014b].

La simplicité de l'extension de la méthode des lignes de ruptures à des critères de résistance anisotropes quelconques, pouvant notamment provenir d'une démarche d'homogénéisation, est bien entendue liée à la simplicité de la cinématique utilisée dans laquelle seules des discontinuités de rotation sont autorisées. Ce cas particulier est à rapprocher du cas des critères de résistance homogénéisés pour les sols constitués de matériaux purement cohérents [de Buhan, 1986]. Dans ce cas, le critère macroscopique reste purement cohérent et la mise en œuvre de l'approche cinématique, à l'échelle de la structure, par des mécanismes par blocs rigides est très similaire. Malheureusement, ce type de considérations reste limité à des cas simples tels que ceux évoqués et une démarche différente est nécessaire pour traiter des cas plus généraux.

2. cela reste vrai dans le cas d'un critère non symétrique par rapport à l'origine

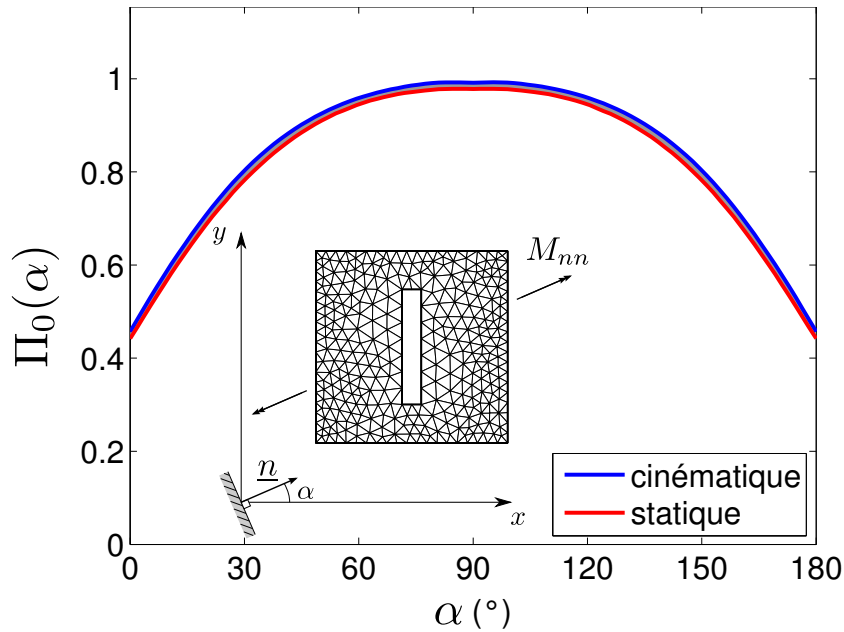


FIGURE 8.1 – Évolution de la fonction $\Pi_0(\alpha)$ relative à la plaque perforée pour différentes valeurs de l'orientation de la charnière.

8.1.2 Démarche générale d'homogénéisation et approximation

Le calcul sur la structure homogène équivalente consiste à résoudre le problème suivant, dans le cadre d'un mode de chargement à un seul paramètre pour un chargement de référence q_0 :

$$\begin{aligned} \lambda_{hom} = \max \quad & \lambda \\ \text{t.q.} \quad & \underline{\underline{M}}(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \lambda q_0 \\ & \underline{\underline{M}}(\underline{x}) \in G^{hom} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (8.5)$$

Comme nous l'avons déjà souligné, la résolution du problème homogène équivalent (8.5) n'est pas simple puisque nous ne disposons que d'une approximation par l'intérieur G^{stat} et par l'extérieur G^{cin} du critère macroscopique exact : $G^{stat} \subseteq G^{hom} \subseteq G^{cin}$, ces deux approximations étant décrites numériquement en résolvant le problème auxiliaire (voir chapitre 6). La résolution exacte de (8.5) dans lequel G^{hom} aurait été remplacé par G^{stat} (resp. G^{cin}) fournit une borne inférieure $\lambda_{hom}^s \leq \lambda_{hom}$ (resp. supérieure $\lambda_{hom}^c \geq \lambda_{hom}$) de la charge ultime du problème homogénéisé.

Puisqu'il est hors de portée de résoudre ces deux problèmes, nous proposons alors :

- d'approximer les critères numériques G^{stat} et G^{cin} respectivement par l'intérieur et par l'extérieur à l'aide de l'algorithme présenté dans le chapitre précédent. Nous noterons les approximations obtenues G_{app}^{stat} et G_{app}^{cin} ;
- de définir deux problèmes à l'échelle de la structure :

8.1. Calcul à la rupture d'une plaque mince homogénéisée

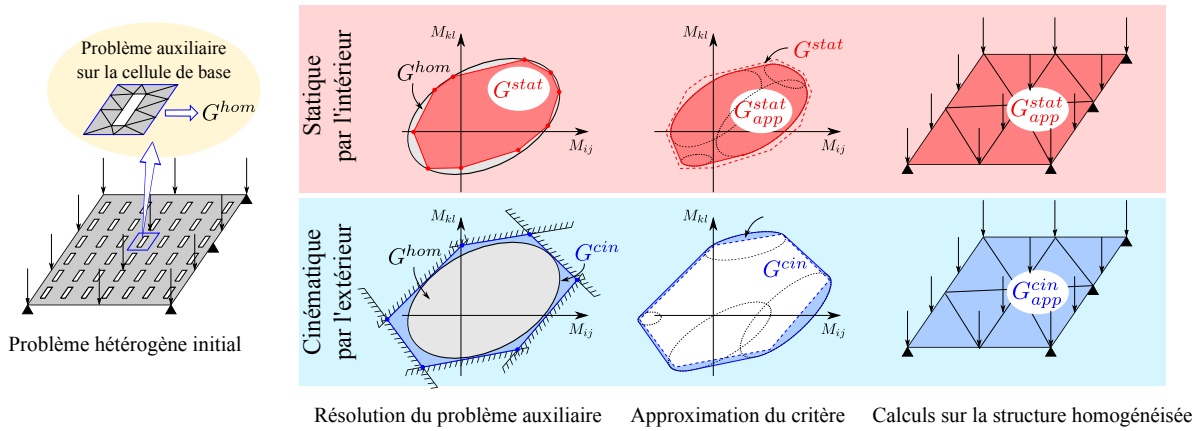


FIGURE 8.2 – Schématisation du principe de la démarche d'homogénéisation/approximation

- le premier correspondant à (8.5) associé à G_{app}^{stat} :

$$\lambda_{app}^s = \max_{\text{t.q.}} \lambda \quad \begin{array}{l} \underline{\underline{M}}(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \lambda q_0 \\ \underline{\underline{M}}(\underline{x}) \in G_{app}^{stat} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{array} \quad (8.6)$$

- le deuxième correspondant à (8.5) associé à G_{app}^{cin} :

$$\lambda_{app}^c = \max_{\text{t.q.}} \lambda \quad \begin{array}{l} \underline{\underline{M}}(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \lambda q_0 \\ \underline{\underline{M}}(\underline{x}) \in G_{app}^{cin} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{array} \quad (8.7)$$

- de résoudre numériquement (8.6) par la mise en œuvre d'une *approche statique par l'intérieur* et de résoudre numériquement (8.7) par la mise en œuvre d'une *approche cinématique par l'extérieur*, fournissant alors respectivement une borne inférieure $\lambda_{app,h}^s \leq \lambda_{app}^s$ et une borne supérieure $\lambda_{app,h}^c \geq \lambda_{app}^c$.³

Associées à l'étape initiale consistant à résoudre le problème auxiliaire sur la cellule de base, ces différentes étapes définissent le principe de la démarche d'homogénéisation/approximation qui peut s'appliquer pour d'autres modèles mécaniques que le modèle de plaque mince en flexion considéré dans ce chapitre. La Figure 8.2 résume schématiquement le principe de la démarche. Une des caractéristiques essentielles est relative à la *conservation du statut de borne inférieure et supérieure* à chaque étape, de sorte que ce statut est conservé jusqu'au calcul de structure (Figure 8.3).

3. L'indice h fait ici référence à la discrétisation par éléments finis caractérisée par une taille de maille h .

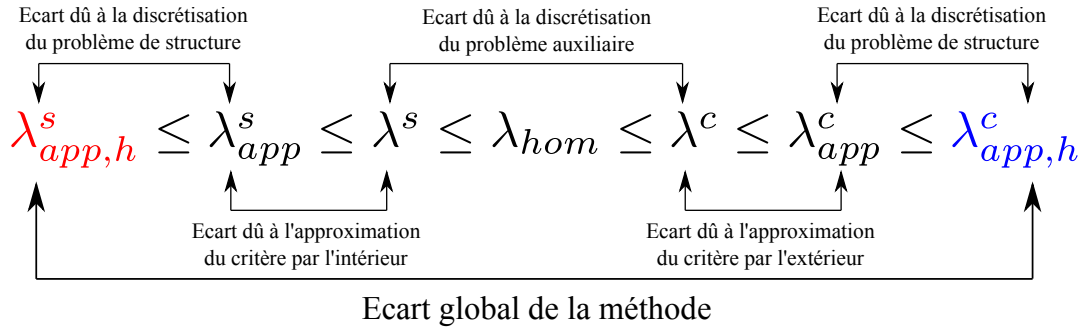


FIGURE 8.3 – Relations d'ordre entre les différents encadrements de la charge ultime exacte et origine des écarts (en couleurs : quantités effectivement calculables) : inspiré de [Gueguin, 2014]

8.2 Mise en œuvre numérique par éléments finis et programmation conique

8.2.1 Formulation conique pour l'approche statique

La mise en œuvre numérique de l'approche statique par l'intérieur pour le problème (8.6) reprend les mêmes ingrédients que ceux évoqués dans les chapitres relatifs aux calculs par éléments finis sur les structures homogènes en ce qui concerne la discrétisation des équations d'équilibre, de saut et des conditions aux limites. Le seul point technique provient ici de la formulation du critère approché G_{app}^{stat} à l'aide de contraintes coniques.

Supposons donc que ce dernier soit décrit par une union convexe de n ellipsoïdes $\mathcal{E}_i \in \mathbb{R}^3$ ($i = 1, \dots, n$) caractérisés par une matrice symétrique définie positive \mathbf{Q}_i et un centre de coordonnées \mathbf{c}_i de telle sorte que :

$$\mathbf{M}_i \in \mathcal{E}_i \iff \sqrt{(\mathbf{M}_i - \mathbf{c}_i)^T \mathbf{Q}_i^{-1} (\mathbf{M}_i - \mathbf{c}_i)} = \|\mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{M}_i - \mathbf{c}_i)\| \leq 1 \quad (8.8)$$

où $\mathbf{Q}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i^T$ avec \mathbf{C}_i sa factorisation de Cholesky.

D'après la définition de l'union convexe d'un nombre fini d'ensembles, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{M} \in G_{app}^{stat} = \text{conv} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}_i \right\} \iff \exists (\mathbf{M}_i, t_i) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)^n \text{ t.q. } \begin{cases} \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{M}_i \\ \sum_{i=1}^n t_i = 1 \\ \mathbf{M}_i \in \mathcal{E}_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (8.9)$$

8.2. Mise en œuvre numérique par éléments finis et programmation conique

Alors, d'après (8.8) et en introduisant la variable auxiliaire $\mathbf{r}_i = \mathbf{C}_i^{-1}(t_i \mathbf{M}_i - t_i \mathbf{c}_i)$, l'expression du critère de résistance peut s'écrire :

$$\mathbf{M} \in G_{app}^{stat} = \text{conv} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}_i \right\} \iff \exists (\mathbf{r}_i, t_i) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)^n \text{ t.q.} \begin{cases} \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{C}_i \mathbf{r}_i + t_i \mathbf{c}_i) \\ \sum_{i=1}^n t_i = 1 \\ \|\mathbf{r}_i\| \leq t_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (8.10)$$

En un point donné de la structure homogénéisée, le critère G_{app}^{stat} peut donc s'écrire à l'aide de n contraintes coniques du second-ordre ainsi que de 4 contraintes linéaires reliant le moment de flexion \mathbf{M} et $4n$ variables auxiliaires (\mathbf{r}_i, t_i) .

8.2.2 Formulation conique pour l'approche cinématique

De la même manière, la résolution numérique du problème (8.7) par une approche cinématique s'effectue avec les mêmes éléments finis que ceux du chapitre 3. Plus précisément, la borne supérieure λ_{app}^c est obtenue en résolvant le problème d'optimisation (3.48) dans lequel la fonction d'appui utilisée est celle correspondant au critère approché par l'extérieur G_{app}^{cin} . L'enjeu consiste alors à reformuler ce problème comme un problème standard de programmation conique.

Dans le cas où ce dernier est également décrit par une union convexe de n ellipsoïdes \mathcal{E}'_i caractérisés par des matrices semi-définies positives $\mathbf{Q}'_i = \mathbf{C}'_i \mathbf{C}'_i{}^T$ et des centres \mathbf{c}'_i , sa fonction d'appui relative aux taux de courbure virtuelle est donnée par (cf. Annexe A) :

$$\pi_{G_{app}^{cin}}(\boldsymbol{\chi}) = \max_{i=1, \dots, n} \{ \pi_{\mathcal{E}'_i}(\boldsymbol{\chi}) \} = \max_{i=1, \dots, n} \{ \|\mathbf{C}'_i{}^T \boldsymbol{\chi}\| + \mathbf{c}'_i{}^T \boldsymbol{\chi} \} \quad (8.11)$$

Suivant la même démarche que celle du chapitre 3 pour la reformulation à l'aide de contraintes coniques, minimiser $\pi_{G_{app}^{cin}}(\boldsymbol{\chi})$ équivaut à la minimisation suivante :

$$\begin{aligned} \min \quad & t_0 \\ \text{t.q.} \quad & t_i + \mathbf{c}'_i{}^T \boldsymbol{\chi} \leq t_0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & \|\mathbf{C}'_i{}^T \boldsymbol{\chi}\| \leq t_i \end{aligned} \quad (8.12)$$

où l'on a introduit $n + 1$ variables auxiliaires t_0, t_i . Cette reformulation fait donc intervenir n contraintes linéaires d'inégalité et n contraintes coniques du second-ordre sur le quadruplet formé par les vecteurs $\mathbf{C}'_i{}^T \boldsymbol{\chi}$ et les scalaires t_i .

En ce qui concerne le terme de discontinuité de rotation, celui-ci se traite de la façon évoquée en 8.1.1, la reformulation de ce terme ne faisant apparaître que des contraintes linéaires. En particulier, il est possible de conserver la valeur de la fonction $\Pi_0(\alpha)$ relative au critère non approché G^{cin} au lieu de celle relative au critère approché G_{app}^{cin} .

8.2.3 Estimations d'erreurs *a priori*

Comme illustré sur la Figure 8.3, le principe de la démarche introduit différentes sources d'approximations conduisant *in fine* à des écarts numériques potentiels entre les bornes inférieure et supérieure effectivement calculées $\lambda_{app,h}^s$ et $\lambda_{app,h}^c$. Il est alors utile de pouvoir estimer chacune de ces sources d'écart ainsi que l'écart global potentiel entre ces deux bornes. À cet effet, nous introduisons les erreurs relatives suivantes :

- ϵ_0 représente l'écart relatif maximal dû à la résolution numérique du problème auxiliaire par l'approche statique et cinématique. Cet écart est mesuré par la distance relative maximale entre les ensembles G^{stat} et G^{cin} qui peut être donnée par l'écart maximal entre les fonctions d'appuis :

$$\epsilon_0 = \max_{\underline{\chi} \text{ t.q. } \|\underline{\chi}\|=1} \left\{ \frac{\pi_{G^{cin}}(\underline{\chi}) - \pi_{G^{stat}}(\underline{\chi})}{\pi_{G^{stat}}(\underline{\chi})} \right\} = \left\| \frac{\pi_{G^{cin}} - \pi_{G^{stat}}}{\pi_{G^{stat}}} \right\|_{\infty} \quad (8.13)$$

- $\epsilon_{(n)}^s$ représente l'écart relatif maximal dû à l'approximation de G^{stat} par l'intérieur par une union convexe de n ellipsoïdes G_{app}^{stat} . Il est mesuré de la même façon par :

$$\epsilon_{(n)}^s = \left\| \frac{\pi_{G^{stat}} - \pi_{G_{app}^{stat}}}{\pi_{G^{stat}}} \right\|_{\infty} \quad (8.14)$$

- $\epsilon_{(n)}^c$ représente l'écart relatif maximal dû à l'approximation de G^{cin} par l'extérieur par une union convexe de n ellipsoïdes G_{app}^{cin} :

$$\epsilon_{(n)}^c = \left\| \frac{\pi_{G_{app}^{cin}} - \pi_{G^{cin}}}{\pi_{G^{cin}}} \right\|_{\infty} \quad (8.15)$$

- $\epsilon_{(h)}^s$ et $\epsilon_{(h)}^c$ représentent respectivement l'écart relatif dû à la discrétisation par éléments finis de l'approche statique et cinématique du problème de structure homogénéisée.

Il est facile de voir que la charge ultime exacte peut alors être encadrée de la façon suivante :

$$(1 - \epsilon_0 - \epsilon_{(n)}^s)\lambda_{hom} \leq \lambda_{app}^s \leq \lambda^s \leq \lambda_{hom} \leq \lambda^c \leq \lambda_{app}^c \leq (1 + \epsilon_0 + \epsilon_{(n)}^c)\lambda_{hom} \quad (8.16)$$

In fine, l'écart relatif entre les bornes effectivement calculées par éléments finis peut être estimé de la façon suivante :

$$\frac{\lambda_{app,h}^c - \lambda_{app,h}^s}{\lambda_{hom}} \leq \delta = \epsilon_0 + \epsilon_{(n)}^s + \epsilon_{(n)}^c + \epsilon_{(h)}^s + \epsilon_{(h)}^c \quad (8.17)$$

8.3 Exemples d'application

Les exemples suivants mettent en application la démarche proposée. Pour la résolution numérique de l'approche statique associée à G_{app}^{stat} , les éléments finis utilisés correspondent aux éléments finis de plaque épaisse du chapitre 4 dans le cas particulier d'une résistance infinie à la résistance à l'effort tranchant. Pour la résolution de l'approche cinématique associée à G_{app}^{cin} , les éléments de plaque mince de type H3 présentés au chapitre 3 ont été utilisés.

8.3.1 Plaque rectangulaire renforcée

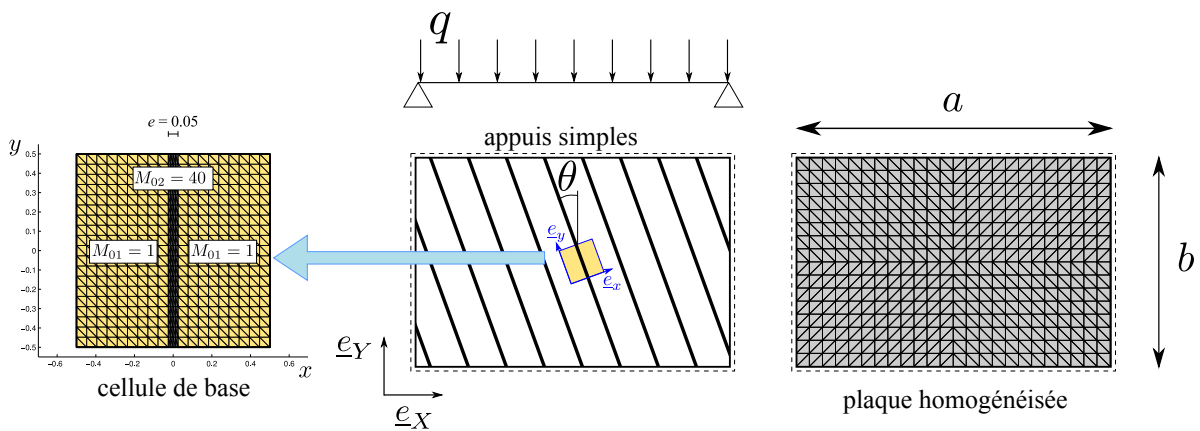


FIGURE 8.4 – Homogénéisation d'une plaque renforcée

Le premier exemple consiste en une plaque rectangulaire de côtés $a \times b$ simplement appuyée sur ses quatre bords et sous un chargement transversal uniformément réparti d'intensité q . La plaque est constituée d'un matériau obéissant au critère de von Mises de résistance à la flexion $M_{01} = 1$ renforcé par un réseau de bandes parallèles obéissant au même type de critère de résistance à la flexion avec $M_{02} = 40$. La fraction surfacique du matériau de renfort est de 5% et le réseau de renforts est orienté dans une direction faisant un angle θ avec la direction \underline{e}_Y de la plaque (voir Figure 8.4). La cellule de base du matériau hétérogène périodique pour ce problème correspond en fait à celle étudiée dans l'exemple 6.4.1 du chapitre 6. La charge ultime pour ce problème sera calculée, pour différentes orientations θ , par rapport à la charge ultime q_0 du problème non renforcé pour deux configurations géométriques : une plaque carrée $a = b = 1$ ($q_0 \approx 25.02M_{01}/a^2$) et une plaque rectangulaire avec $a = 1.5$ et $b = 1$ ($q_0 \approx 17.69M_{01}/b^2$). Le maillage utilisé pour tous les calculs est celui représenté sur la Figure 8.4 dans le cas de la plaque rectangulaire tandis qu'un maillage similaire de 10 éléments par côté a été utilisé pour la plaque carrée.

L'écart relatif maximal entre les domaines G^{stat} et G^{cin} obtenus après résolution du problème auxiliaire pour plusieurs milliers de valeurs différentes du chargement macro-

Calcul à la rupture sur une structure homogénéisée

Écart relatif	$\epsilon_{(n)}^s$	$\epsilon_{(n)}^c$
10 ell.	17.43%	17.99%
30 ell.	5.20%	4.51%
50 ell.	3.09%	2.45%

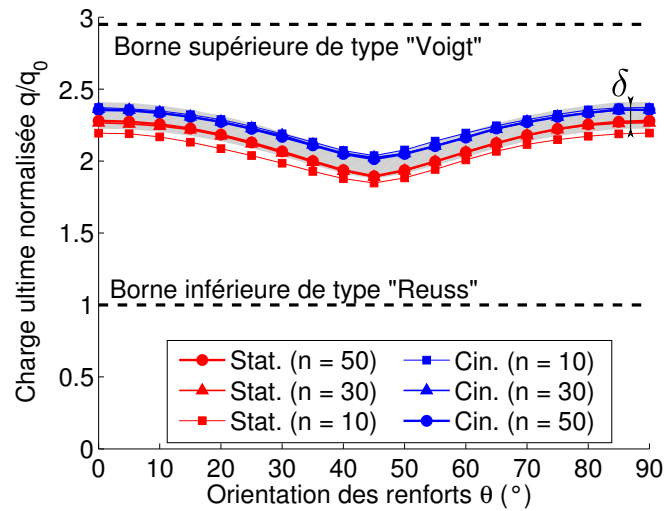
TABLEAU 8.1 – Tableau des écarts relatifs pour différentes approximations

scopique a été mesuré à $\epsilon_0 = 2.22\%$. Ces deux domaines ont été approchés par une union convexe de $n = 10, 30$ et 50 ellipsoïdes. Les écarts relatifs correspondants ont été reportés dans le Tableau 8.1. Enfin, l'écart relatif dû à la discrétisation par éléments finis du problème de structure homogénéisée ne peut malheureusement pas être calculé *a priori*. Nous avons constaté que, pour le problème homogène non renforcé correspondant au maillage utilisé, les écarts des deux approches était de l'ordre de $\epsilon_{(h)}^s + \epsilon_{(h)}^c \approx 0.3\%$. Ainsi, on s'attend à ce que l'écart relatif maximal final δ entre les deux bornes calculées soit de l'ordre de 8% pour une approximation avec 50 ellipsoïdes.

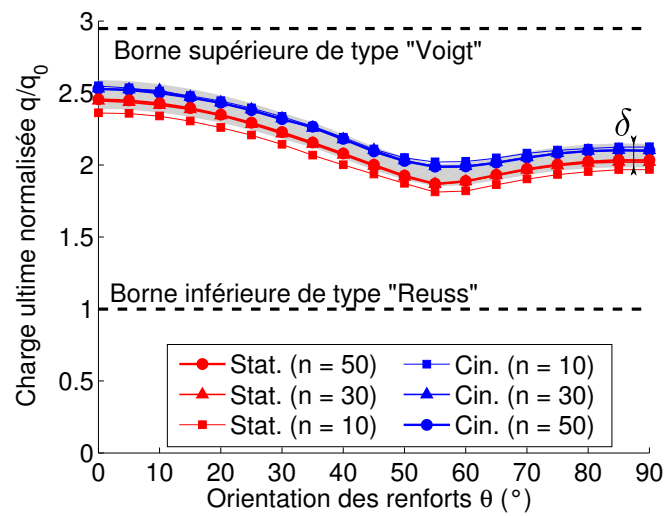
Remarque d'ordre pratique : Contrairement au principe général de la méthode présenté plus tôt dans ce chapitre, le domaine G^{cin} n'a pas été approché par l'extérieur pour les approximations avec union convexe d'ellipsoïdes. En réalité, la résolution de l'approche cinématique a été effectuée avec des domaines G_{app}^{cin} directement obtenus par l'algorithme et approchant donc G^{cin} par l'intérieur. En revanche, une opération de post-traitement a été effectuée en récupérant le mécanisme de ruine optimal et en réévaluant *a posteriori* la puissance résistante maximale à l'aide d'une fonction d'appui correspondant à une approximation par l'extérieur de G^{cin} . La charge limite ainsi calculée est alors bien une borne supérieure au final. Cette approche a été retenue dans la mesure où des approximations par l'extérieur rigoureuses de G^{cin} pour un faible nombre d'ellipsoïdes sont de mauvaise qualité du fait du principe même de l'algorithme qui effectue une construction par l'intérieur. De plus, bien que les mécanismes de ruine obtenus soient associés à une approximation par l'intérieur, ils sont très proches de ceux qui auraient été obtenus avec une approximation par l'extérieur, l'évaluation *a posteriori* de P_{rm} étant alors proche de l'optimum calculé initialement.

La Figure 8.5 représente l'évolution des différentes bornes supérieures et inférieures de $\lambda^{hom} = q/q_0$ pour le problème de la plaque carrée (Figure 8.5a) et celui de la plaque rectangulaire (Figure 8.5b) en fonction de l'orientation des renforts et pour les différents degrés d'approximation. On constate tout d'abord que les bornes inférieures (en rouge) augmentent lorsque le degré d'approximation augmente tandis que les bornes supérieures (en bleu) diminuent, réduisant ainsi l'encadrement de λ^{hom} . La zone grisée représente l'estimation de l'écart maximal $\delta \approx 8\%$ auquel on pouvait s'attendre pour $n = 50$. L'écart relatif entre les bornes supérieure et inférieure pour $n = 50$ varie, dans les deux cas, entre 3% et 6% suivant l'orientation des renforts.

8.3. Exemples d'application



(a) Plaque carrée



(b) Plaque rectangulaire

FIGURE 8.5 – Évolution de la charge ultime normalisée du problème homogénéisé en fonction de l'orientation des renforts

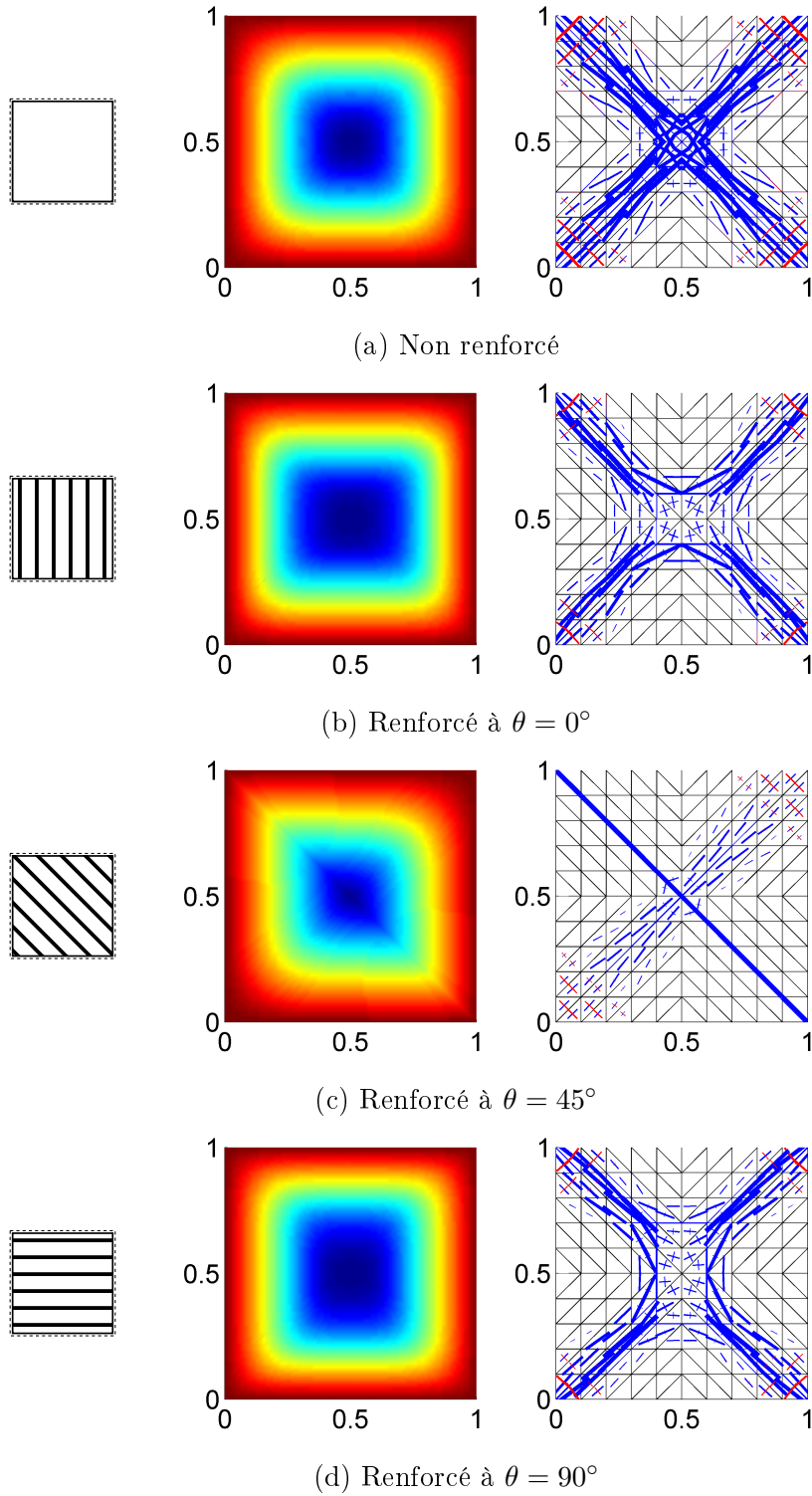


FIGURE 8.6 – Mécanisme de ruine et champ de discontinuité de rotation équivalente pour la plaque carrée dans différentes configurations

8.3. Exemples d'application

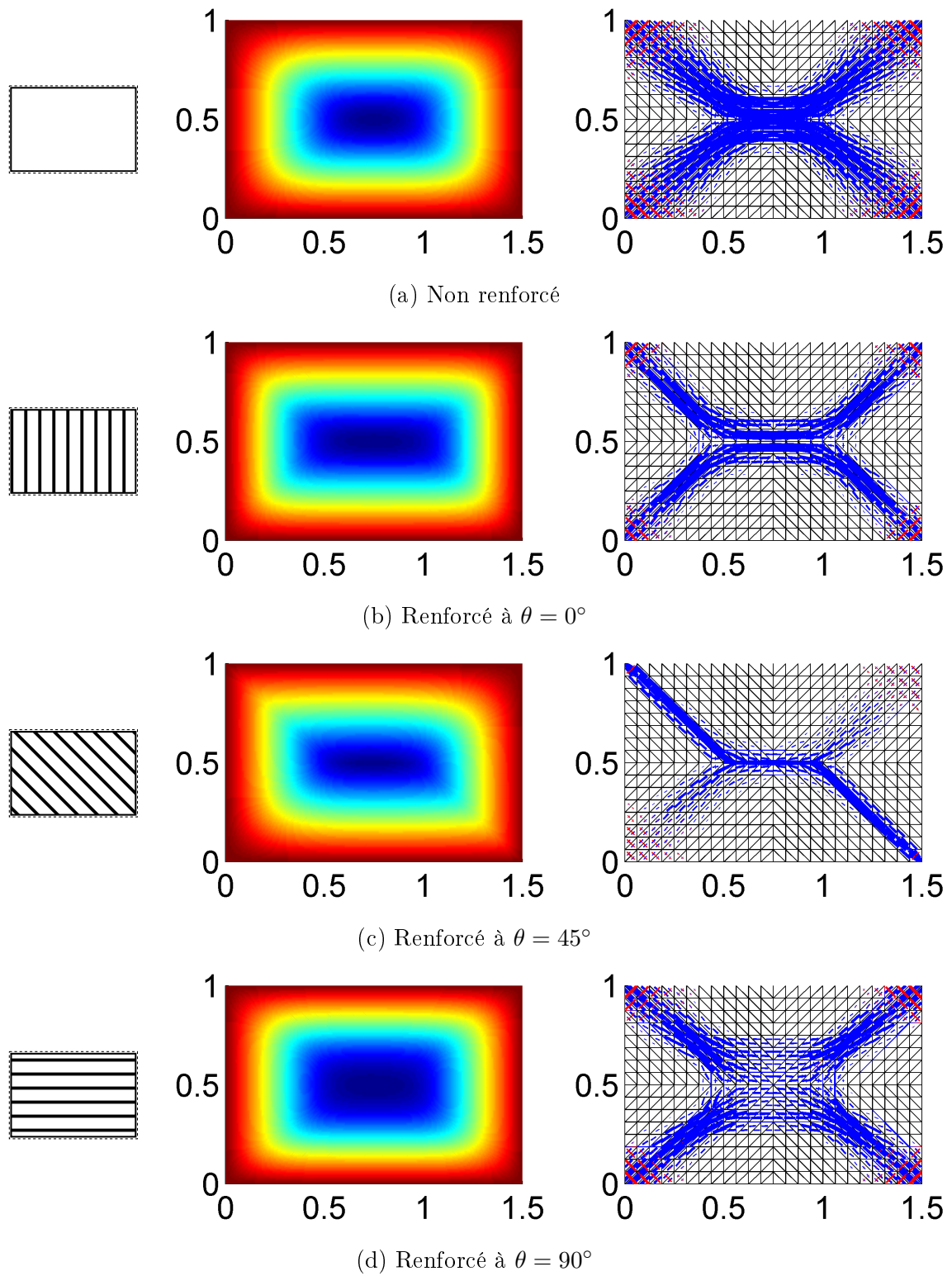


FIGURE 8.7 – Mécanisme de ruine et champ de discontinuité de rotation équivalente pour la plaque rectangulaire ($a = 1.5$, $b = 1$) dans différentes configurations

On observe également très peu de différences entre les résultats correspondant à $n = 30$ et $n = 50$, signe que l'approximation est de relativement bonne qualité pour $n = 30$. L'amélioration entre $n = 10$ et $n = 30$ est plus significative pour l'approche statique que pour l'approche cinématique dans la mesure où la procédure de post-traitement pour évaluer la borne supérieure utilise la même fonction d'appui quelle que soit la valeur de n . Cela indique que le mécanisme obtenu pour $n = 10$ est très proche de celui obtenu pour $n = 50$.

À titre d'information, nous avons indiqué les valeurs de la borne inférieure de type « Reuss » obtenue en remplaçant le matériau hétérogène par le matériau le plus faible (i.e. $q = q_0$) ainsi que celle de la borne supérieure de type « Voigt » obtenue en remplaçant le matériau hétérogène par le matériau de résistance à la flexion égale la résistance moyenne $\langle M_0 \rangle = 0.95M_{01} + 0.05M_{02} = 2.95$ (i.e. $q = q_0 \langle M_0 \rangle / M_{01}$). Les résultats obtenus sont bien entendus relativement éloignés de ces deux bornes et l'anisotropie du critère de résistance macroscopique entraîne une évolution significative de la charge ultime en fonction de l'orientation des renforts. Afin d'illustrer plus précisément l'influence de cette anisotropie, nous avons représenté sur les Figures 8.6 et 8.7 le mécanisme de ruine ainsi que le champ de discontinuité de rotation équivalente obtenus pour différentes orientations. Pour la plaque carrée renforcée à 45° , on constate que le mécanisme de ruine présente une ligne de rupture nette le long de la diagonale alignée dans la direction des renforts, de sorte que ces derniers ne contribuent pas à la puissance résistante maximale le long de cette charnière. En revanche, le long de l'autre diagonale, le mécanisme optimal présente des zones de courbure, contribuant de manière moins importante à la puissance résistante maximale qu'une charnière orthogonale aux renforts. De même, pour la plaque rectangulaire, les mécanismes de ruine diffèrent sensiblement de celui correspondant à une plaque non renforcée. On retrouve également une forme de localisation du mécanisme dans la direction des renforts pour les cas $\theta = 45^\circ$ et $\theta = 90^\circ$.

8.3.2 Plaque circulaire trouée

Dans ce deuxième exemple, nous traitons le cas d'une plaque circulaire de rayon R sous chargement uniforme q en appui simple sur son bord. La plaque est constituée d'un matériau de von Mises de résistance $M_0 = 1$ perforée par un réseau orthogonal de trous de forme circulaire ou carrée (Figure 8.8). Différentes cellules de base sont alors considérées en faisant varier la dimension b du trou par rapport à celle de la cellule de base a . Dans les simulations numériques, nous avons retenu les rapports suivants : $b/a = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8\}$ pour les deux formes de trou. Nous définissons également la valeur de la porosité :

$$\phi = \begin{cases} \frac{b^2}{a^2} & \text{pour les trous carrés} \\ \frac{\pi b^2}{4 a^2} & \text{pour les trous circulaires} \end{cases} \quad (8.18)$$

Le cas $b = 0$ correspond au problème d'une plaque homogène de von Mises, problème pour lequel la charge ultime $q^+(\phi = 0) = q_0$ est encadrée par :

8.3. Exemples d'application

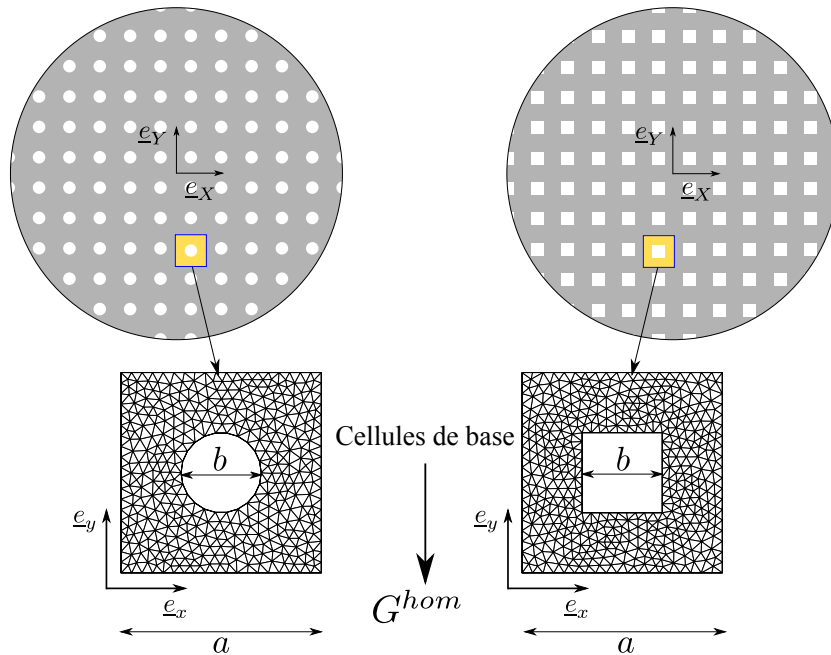
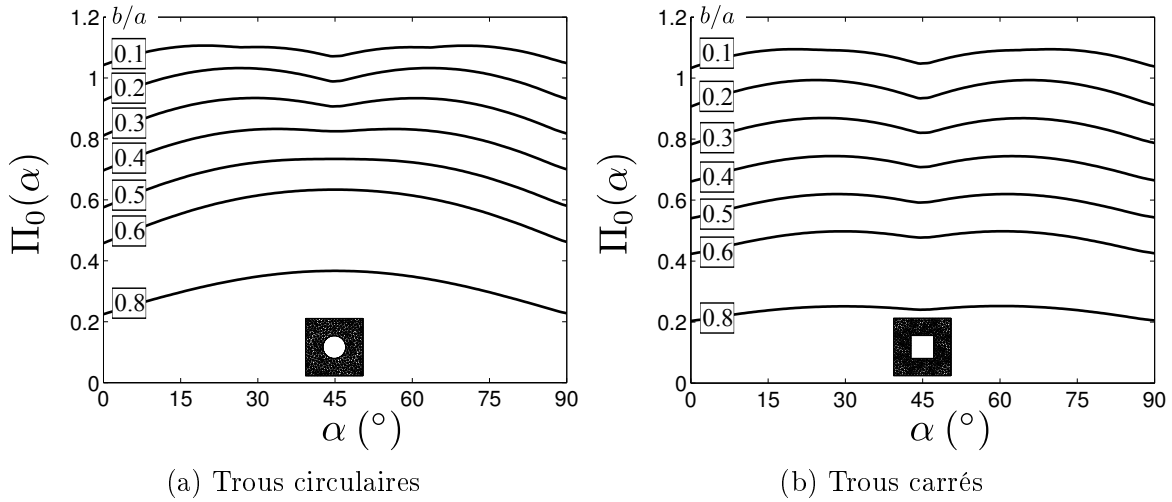


FIGURE 8.8 – Plaque circulaire perforée par un réseau de trous circulaires ou carrés

$6.52M_0/R^2 \leq q_0 \leq 6.53M_0/R^2$ [Bleyer et de Buhan, 2013c, Bleyer et de Buhan, 2014c]. De plus, lorsque $b = a$ tous les trous sont connectés entre eux et la résistance à la flexion de la plaque devient nulle (malgré le fait que $\phi < 1$ dans le cas des trous circulaires), ainsi $q^+ = 0$. Nous nous proposons d'étudier l'évolution de q^+ en fonction de ϕ .

Pour les 14 configurations de cellule de base considérées, nous avons déterminé l'encadrement du critère de résistance macroscopique par les ensembles G^{stat} et G^{cin} . Pour les maillages de cellule de base considérés, la détermination d'un domaine de résistance nécessitait environ 1 heure de calcul (environ 1 seconde de calcul par direction de chargement macroscopique, le domaine étant décrit numériquement par plusieurs milliers de directions de chargement). Chaque critère a été approché à l'aide de 50 ellipsoïdes, ce qui nécessitait environ 2 minutes de calcul par critère. Enfin, les calculs sur le problème de structure homogénéisée en maillant un quart de plaque (421 éléments) ont nécessité environ 5 à 10 secondes pour 10 ellipsoïdes jusqu'à 40 à 60 secondes pour 50 ellipsoïdes. On remarque donc que le coût-calcul le plus élevé correspond à la détermination du critère macroscopique. Néanmoins, cette étape (de même que l'approximation) est effectuée *une fois pour toute* et les résultats peuvent être réutilisés pour différents calculs de structure. En ce qui concerne ces derniers, malgré la complexité de l'écriture du critère, le temps de calcul reste raisonnable, d'autant que la précision est déjà relativement satisfaisante avec un faible nombre d'ellipsoïdes.


 FIGURE 8.9 – Fonction $\Pi_0(\alpha)$ pour différentes tailles de trous

À titre de comparaison, il est relativement facile d'obtenir des bornes supérieures de la valeur exacte de $q^+(\phi)$. La plus simple correspond à la borne supérieure de type « Voigt », pour laquelle le matériau homogène équivalent obéit au critère de von Mises de résistance à la flexion $\langle M_0 \rangle = (1-\phi)M_0$, de sorte que $q^+(\phi)/q_0 \leq q_{\text{Voigt}}/q_0 = 1-\phi$. Cette borne supérieure ne dépend pas de la forme du trou mais uniquement de la porosité. Une borne supérieure plus précise peut-être obtenue de manière semi-analytique à partir de la connaissance de la fonction $\Pi_0(\alpha)$ caractérisant la résistance à la flexion le long d'une charnière d'orientation α . Comme nous l'avons déjà souligné, cette fonction peut s'obtenir directement en résolvant plusieurs problèmes auxiliaires paramétrés par l'angle α , ou peut être déduite du domaine G^{cin} , une fois ce dernier déterminé. Cette fonction est représentée sur la Figure 8.9 pour les différentes formes et tailles de trous retenues. Nous considérons alors un mécanisme de ruine de la plaque en forme de cône⁴ *i.e.* $w(r) = w_0(1 - \frac{r}{R})$. Un calcul simple montre alors qu'une borne supérieure est donnée par :

$$q^+ \leq q_{\text{cône}} = \frac{6}{R^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi_0(\alpha) d\alpha = \frac{6\overline{\Pi_0(\alpha)}}{R^2} \quad (8.19)$$

En effet, le mécanisme en forme de cône correspond à une infinité de charnières reliant le centre de la plaque aux points du bord, il est donc naturel que la borne supérieure correspondante fasse intervenir une moyenne de la fonction $\Pi_0(\alpha)$. Contrairement à la borne de Voigt, cette borne supérieure dépend à la fois de la porosité et de la forme du trou par l'intermédiaire de la fonction $\Pi_0(\alpha)$.

L'évolution de la charge ultime normalisée $q^+(\phi)/q_0$ calculée numériquement pour les différentes configurations a été représentée en noir sur la Figure 8.10. Pour 10 el-

4. mécanisme de ruine exact dans le cas d'une plaque homogène circulaire de Tresca

8.3. Exemples d'application

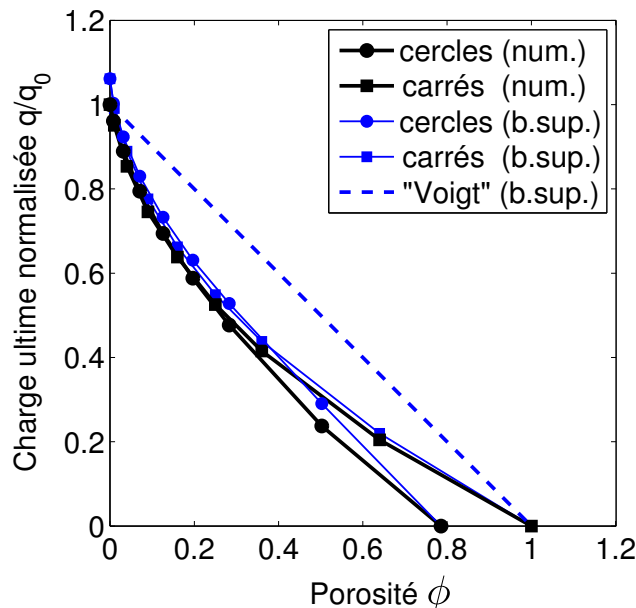


FIGURE 8.10 – Évolution de la charge ultime normalisée $q^+(\phi)/q_0$ en fonction de la porosité pour les deux formes de trous (noir). Différentes bornes supérieures sont représentées en bleu (pointillés : Voigt, traits pleins : (8.19) pour les deux formes de trous)

lipsoïdes, l'écart entre les deux bornes calculées est de l'ordre de 5% pour ce problème (pour les différentes tailles et formes de trous) tandis qu'il est de l'ordre de 2% pour 50 ellipsoïdes. L'écart étant relativement faible, nous avons uniquement représenté la quantité $q^+(\phi)/q_0 = (\lambda_{app,h}^s + \lambda_{app,h}^c)/2$, approximation à 1% près de la valeur exacte. La borne de Voigt ainsi que la borne supérieure semi-analytique (8.19) ont été représentées en bleu. On constate tout d'abord que la borne de Voigt surestime largement la charge ultime exacte et ne permet pas de rendre compte de l'influence de la forme des trous sur la solution. Les bornes supérieures semi-analytiques sont en revanche beaucoup plus proches de la solution exacte (surestimation de l'ordre de 5 à 10%). Il est intéressant de constater que pour une gamme de porosité faible (typiquement $\phi < 0.2$), la valeur de la charge ultime dépend uniquement de la porosité et non de la forme du trou, ce à quoi l'on pouvait s'attendre. En revanche, la forme du trou influence nettement la solution pour des valeurs élevées de la porosité.

8.4 Conclusions et perspectives

Une démarche combinant homogénéisation et approximation a été proposée afin d'évaluer la charge ultime dans le cas de structures hétérogènes périodiques, illustrée sur le cas des plaques minces en flexion. À partir de la détermination numérique d'un encadrement du critère de résistance macroscopique du milieu homogène équivalent, des approximations fondées sur des unions convexes d'ellipsoïdes ont été déterminées à l'aide de l'algorithme présenté au chapitre précédent. Ces approximations, relativement précises et exprimables à l'aide de contraintes coniques, sont utilisées pour résoudre le problème de calcul à la rupture homogénéisé à l'échelle de la structure à l'aide de formulations par éléments finis telles que celles présentées et utilisées dans les chapitres 3 et 4. Une caractéristique essentielle de l'approche concerne la préservation du statut de bornes (inférieures et supérieures) tout au long de la démarche, permettant par exemple d'estimer l'écart final induit par les différentes approximations effectuées au cours de celle-ci. Malgré la forme plus complexe des critères de résistance utilisés, les exemples numériques traités semblent indiquer que la précision de l'encadrement final reste satisfaisante, même avec un faible nombre d'ellipsoïdes, pour un temps de calcul raisonnable.

Le travail effectué ici se veut une ouverture vers une généralisation de la démarche, les perspectives d'améliorations sont donc nombreuses. En ce qui concerne les aspects techniques, l'algorithme d'approximation peut certainement être amélioré sur de nombreux points, notamment pour les approximations par l'extérieur. Il serait intéressant de pouvoir évaluer le nombre minimal de directions macroscopiques nécessaires à une bonne description des critères macroscopiques ou encore de réaliser l'étape d'approximation de manière simultanée à la résolution du problème auxiliaire. Enfin, on peut imaginer coupler la description de plus en plus précise du critère via le nombre d'ellipsoïdes aux itérations du solveur d'optimisation.

Sur le plan de la modélisation, pourvu que le critère de résistance s'exprime dans un espace à 3 dimensions, ce type d'approche se généralise à d'autres types de structures telles que les structures de poutres en interaction effort normal/moments de flexion, les structures 2D en déformations ou contraintes planes (sols renforcés par ex.), etc. Une difficulté majeure concerne le cas des structures de coques ou celui des milieux continus 3D quelconques pour lesquels le critère de résistance macroscopique évolue dans un espace à au moins 6 dimensions. Si, théoriquement, l'approche se généralise aussi à ce cas, il est fort probable que les difficultés techniques (notamment le nombre de directions de calculs pour décrire le critère de résistance) rendent la méthode impraticable. Néanmoins, cela n'a pas été testé dans le cadre de cette thèse, et mériterait certainement que l'on s'y intéresse.

* *
 *
 *

Quatrième partie

Application à des structures complexes

Chapitre 9

Stabilité au feu de panneaux en béton armé de grande hauteur

Résumé : *Ce chapitre traite de l'analyse de la ruine de panneaux en béton armé de grande hauteur en condition d'incendie. La stabilité de ce type de structure est pilotée, d'une part par une déformation d'origine thermique conduisant à une configuration géométrique courbe, d'autre part par la dégradation des capacités de résistance des matériaux due à la présence d'un gradient thermique dans l'épaisseur du panneau. Nous proposons alors d'effectuer une analyse de la stabilité par le calcul à la rupture sur la configuration déformée à l'aide des éléments finis de coque développés au chapitre 5.*

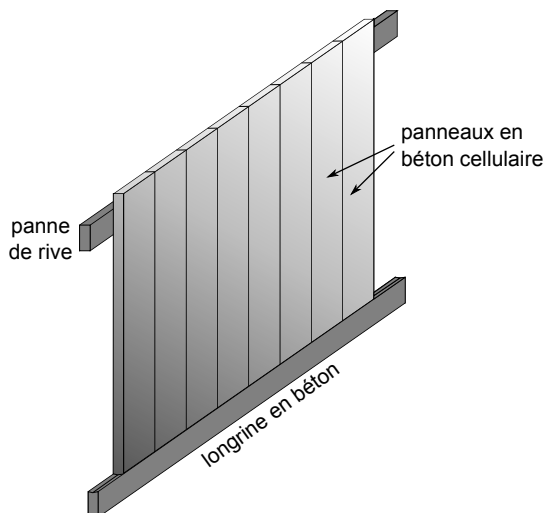
Sommaire

9.1	Position du problème et principe d'une démarche de résolution	174
9.1.1	Panneaux de grande hauteur	174
9.1.2	Comportement au feu d'un panneau de grandes dimensions	175
9.1.3	Principe d'une analyse en trois étapes	176
9.2	Détermination de la configuration d'équilibre déformée	177
9.2.1	Géométrie initiale	177
9.2.2	Calculs thermo-élastiques	177
9.3	Détermination du critère de résistance dépendant de la température	178
9.3.1	Dégradation des capacités de résistance	178
9.3.2	Détermination du critère de résistance en efforts généralisés	179
9.4	Calcul à la rupture sur la géométrie déformée	181
9.4.1	Travaux précédents	181
9.4.2	Modélisation par éléments finis de coque	182
9.5	Analyse numérique de la stabilité des panneaux	183
9.5.1	Influence de la largeur du panneau et effet de la mise en température	183
9.5.2	Influence de la hauteur du panneau	191
9.5.3	Prise en compte de joints entre panneaux	192
9.6	Conclusions et perspectives	196

9.1 Position du problème et principe d'une démarche de résolution

9.1.1 Panneaux de grande hauteur

Les panneaux en béton armé préfabriqués sont de plus en plus utilisés dans la construction des bâtiments industriels de grande hauteur. Ils peuvent être assemblés en bandes verticales juxtaposées (Figure 9.1a) ou en bandes horizontales superposées (Figure 9.1b). Reposant généralement sur une longrine en béton en pied, les panneaux en pose verticale peuvent être associés à des poutres de rive ou bien à des poteaux dans le cas d'une pose horizontale. Si l'assemblage en position verticale est limité par la longueur maximale d'un panneau (de l'ordre de 8 à 12 m), l'assemblage en position horizontale permet d'atteindre des hauteurs pouvant dépasser 20 m.



(a) Schématisation en pose verticale



(b) Bâtiment industriel de grande hauteur avec panneaux HEBEL en pose horizontale (source : <http://www.xellahebel.fr>)

FIGURE 9.1 – Panneaux en béton armé préfabriqués pour les bâtiments industriels

Ces parois peuvent être amenées à assurer le rôle de murs coupe-feu en limitant la propagation d'un éventuel incendie à d'autres zones du bâtiment tout en conservant, durant un certain temps, une résistance mécanique suffisante avant la ruine de l'ouvrage. L'évaluation de la tenue au feu de telles structures est donc un enjeu de dimensionnement majeur nécessitant une approche plus sophistiquée que les approches traditionnelles adaptées aux panneaux de plus petites dimensions, dont le comportement au feu diffère très sensiblement de celui des panneaux de grandes dimensions.

9.1. Position du problème et principe d'une démarche de résolution

9.1.2 Comportement au feu d'un panneau de grandes dimensions

Le dimensionnement de structures en béton armé traditionnelles en condition d'incendie tient compte de la dégradation de la raideur et des capacités de résistance du béton et de l'acier sous l'effet d'une augmentation de température. La prise en compte de cette dégradation dans l'évaluation de la résistance d'une section en béton armé conduit à la détermination de diagrammes d'interaction en effort membranaire-moment de flexion dépendant de la température (Figure 9.2a). Néanmoins, cet aspect ne suffit pas à modéliser la ruine des structures de grande hauteur.

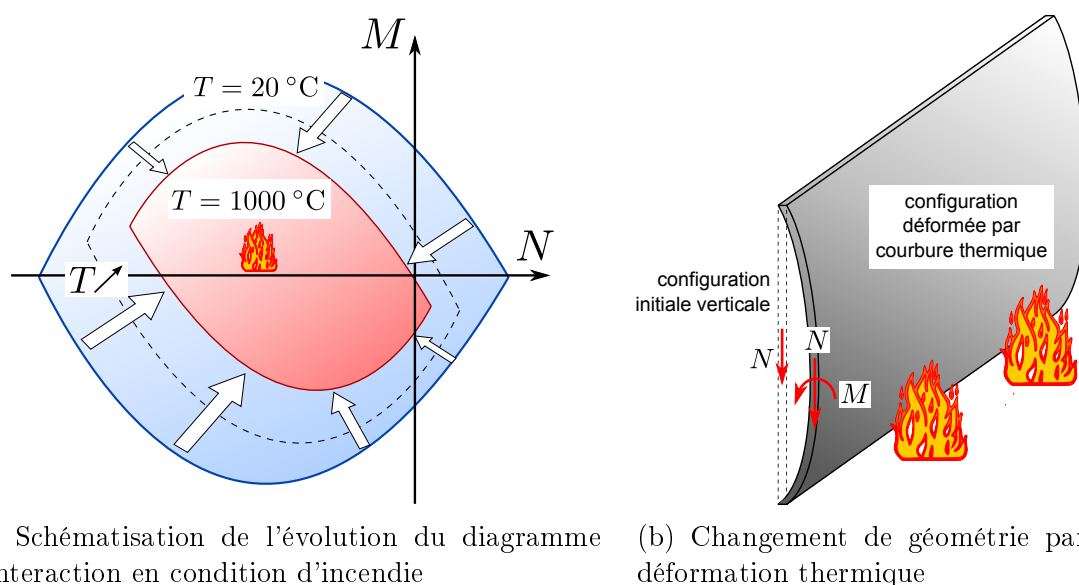


FIGURE 9.2 – Effet du feu sur le comportement mécanique des panneaux de grande hauteur : dégradation des capacités de résistance et changement de géométrie

En effet, sous l'action de déformations d'origine thermique, les structures élancées telles que ce type de panneaux sont amenées à subir d'importants déplacements transversaux qui ne peuvent plus être négligés. En configuration déformée, l'excentricité du poids propre du panneau engendre l'apparition de moments de flexion venant s'ajouter aux efforts membranaires de compression déjà présents à l'état initial (Figure 9.2b). Cet « effet du second-ordre » dû à l'excentrement provoqué par les non-linéarités géométriques est connu sous le nom d'effet $P - \Delta$. L'excentricité initiale est également amplifiée par l'apparition de ces moments de flexion supplémentaires et des déformations de courbure qui leurs sont associées. Ainsi, il s'agit de la conjonction de l'effet de *dégradation des propriétés de résistance* des matériaux sous l'effet de la température et de l'effet de *changement de géométrie* qui conduit à la ruine potentielle de la structure. L'analyse de la stabilité de telles structures est, par conséquent, relativement complexe, car contrairement à ce qui se passe dans un problème classique de calcul à la rupture, la géométrie de ce dernier n'est pas donnée, mais doit être préalablement calculée.

9.1.3 Principe d'une analyse en trois étapes

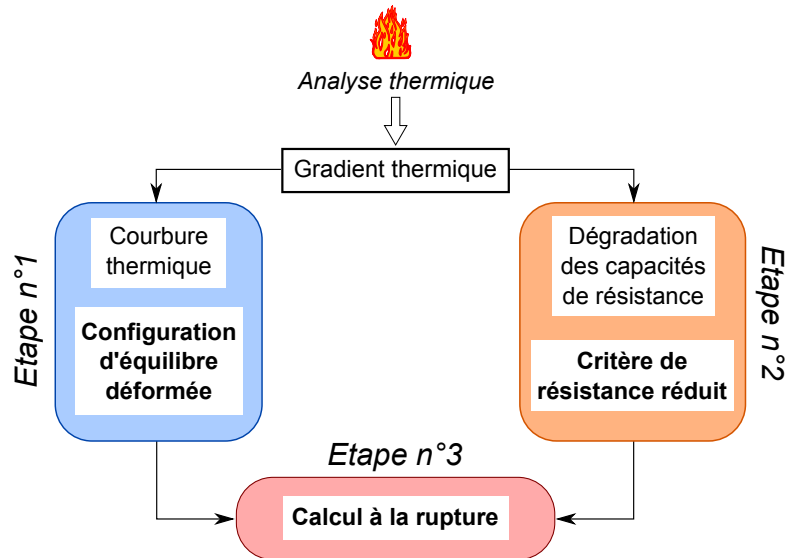


FIGURE 9.3 – Une démarche en trois étapes pour l'analyse de la stabilité au feu des panneaux de grande hauteur

Afin de s'affranchir des difficultés liées à un calcul thermo-élasto-plastique prenant en compte l'effet des non-linéarités géométriques et la dégradation des capacités de résistance du béton et de l'acier, nous proposons de mettre en œuvre une démarche simplifiée schématisée sur la Figure 9.3 et reposant sur trois étapes distinctes :

- **Étape n°1 : Détermination de la configuration d'équilibre déformée.**
À partir d'un gradient thermique provoqué par une augmentation de température sur une des faces du mur représentant un incendie, cette étape consiste à déterminer la configuration d'équilibre due à la déformation thermique et au poids propre du mur.
- **Étape n°2 : Détermination du critère de résistance dépendant de la température.**
À partir de ce même gradient thermique et de façon complètement indépendante de l'étape précédente, cette étape consiste à évaluer le critère de résistance en interaction effort membranaire-moment de flexion dépendant de la température par l'intermédiaire de la dégradation des capacités de résistance des matériaux.
- **Étape n°3 : Calcul à la rupture en configuration déformée.**
La dernière étape consiste à mettre en œuvre les approches du calcul à la rupture sur la géométrie déformée déterminée dans la première étape en prenant en compte le critère de résistance réduit obtenu dans la deuxième étape. Le résultat de cette étape fournira un encadrement du facteur de stabilité relatif à la configuration étudiée.

9.2 Détermination de la configuration d'équilibre déformée

9.2.1 Géométrie initiale

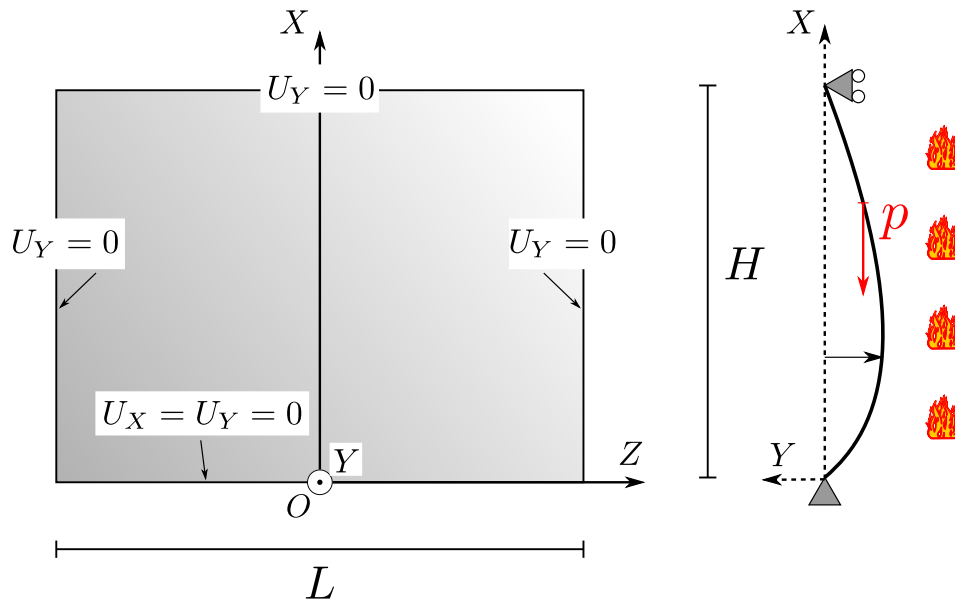


FIGURE 9.4 – Configuration géométrique initiale et conditions aux limites

En configuration initiale, *i.e.* avant l'application du chargement thermique, le panneau est modélisé comme une plaque verticale de hauteur H et de largeur L située dans le plan (OXZ) . Les différentes conditions aux limites indiquées sur la Figure 9.4 correspondent à un appui simple sur les quatre côtés (rotation libre) du panneau, tandis que le déplacement vertical est bloqué au niveau du bord inférieur.

Le mur est uniquement soumis à son poids propre, représenté par une densité surfacique uniforme verticale d'intensité p , et à un chargement thermique faisant progressivement croître la température de la face $Y \leq 0$ de $T = 20\text{ °C}$ à $T = 1050\text{ °C}$, correspondant à un feu ISO 834 [EN 1991-1-2, 2002] pendant 120 min.

9.2.2 Calculs thermo-élastiques

Le calcul de la configuration d'équilibre déformée (étape n°1) est réalisé à l'aide du code éléments finis MARC [MSC Software Corporation, 2007] dans le cadre d'un comportement thermo-élastique et avec les particularités suivantes :

- le calcul est réalisé en *transformations finies* : les déformations thermo-élastiques ainsi que les rotations restent petites devant l'unité, mais en revanche, le *changement de géométrie* créé par l'apparition de déplacements hors-plan et l'excentricité du poids propre est pris en compte à travers l'apparition d'une distribution de moments de flexion. Les courbures élastiques qui en résultent sont alors intégrées aux

équations d'équilibre afin de déterminer, de manière itérative, la configuration d'équilibre finale.

- l'influence de la température sur les modules élastiques du béton et de l'acier est prise en compte par l'intermédiaire de courbes expérimentales fournissant, par exemple, l'évolution du module d'Young du béton en fonction de la température [EN 1992-1-2, 2004].

Pour plus de détails concernant ces différents aspects, le lecteur est invité à se référer à [Pham, 2014, Pham *et al.*, 2015b].

9.3 Détermination du critère de résistance dépendant de la température

La deuxième étape vise à déterminer l'expression du critère de résistance en efforts généralisés du panneau en prenant en compte l'influence de la température sur les capacités de résistance des matériaux.

9.3.1 Dégradation des capacités de résistance

L'influence de la température sur les propriétés de résistance du béton et de l'acier est prise en compte à travers l'introduction de *coefficients de réduction* (sans dimension), notés k_c et k_y , dont la variation avec la température est fournie par l'Eurocode 2 [EN 1992-1-2, 2004] et représentée sur la Figure 9.5a. La résistance à la compression du béton et la résistance uniaxiale de l'acier en un point du panneau caractérisé par une température T seront alors données par :

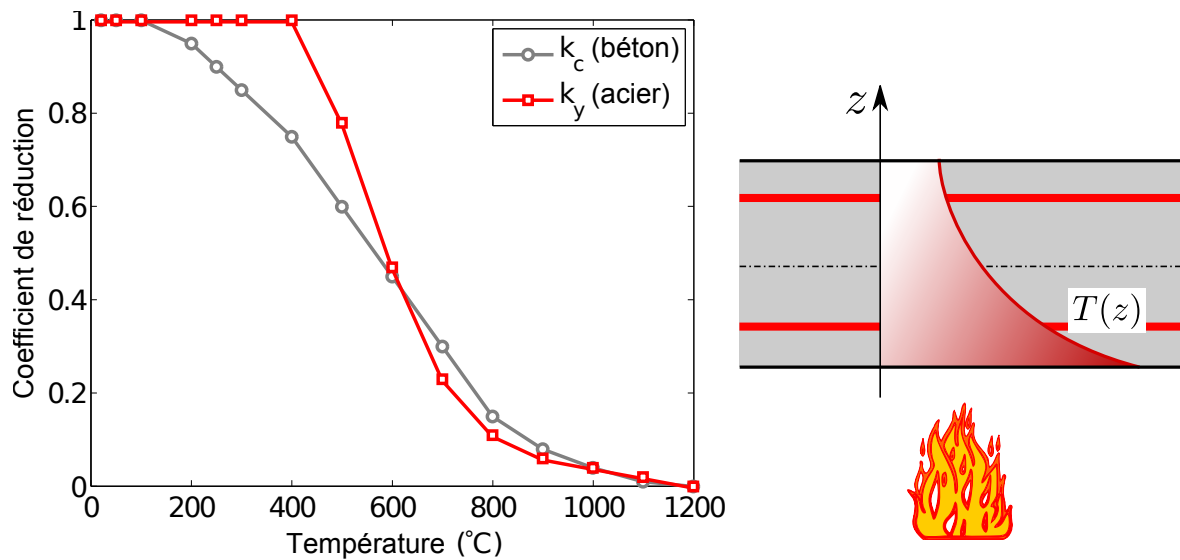
$$f_c(T) = k_c(T) \cdot f_{c,amb} \quad \text{pour le béton} \quad (9.1)$$

$$f_y(T) = k_y(T) \cdot f_{y,amb} \quad \text{pour l'acier} \quad (9.2)$$

où $f_{c,amb}$ et $f_{y,amb}$ représentent les résistances respectives du béton et de l'acier à température ambiante. On peut remarquer que la résistance à la compression du béton décroît graduellement à partir de la température ambiante tandis que la résistance de l'acier reste égale à la résistance à température ambiante jusqu'à 400 °C environ. Au delà, la résistance chute relativement rapidement. À noter que, pour une température de 1000 °C, la résistance de l'acier et du béton sont de l'ordre de 4% de la résistance à température ambiante.

L'analyse thermique pour une température d'incendie donnée permet de connaître l'allure du gradient thermique $T(z)$ présent dans l'épaisseur du panneau (Figure 9.5b). À travers l'utilisation des coefficients de réduction précédents, ce gradient thermique se traduit en termes de gradient de propriétés de résistance du béton et de l'acier dans l'épaisseur du panneau. Pour une température donnée, il est donc nécessaire de déterminer le critère de résistance en efforts généralisés (diagrammes d'interaction) d'une plaque dont les propriétés de résistance ne sont pas uniformes dans son épaisseur.

9.3. Détermination du critère de résistance dépendant de la température



(a) Coefficients de réduction des résistances du béton et (b) Gradient thermique dans de l'acier en fonction de la température l'épaisseur du panneau

FIGURE 9.5 – Dégradation des capacités de résistance du panneau

9.3.2 Détermination du critère de résistance en efforts généralisés

Dans le cas d'une modélisation du panneau comme une poutre [Pham *et al.*, 2015a], la détermination du diagramme d'interaction effort normal-moment de flexion $N - M$ de cette poutre a été effectuée en posant un problème auxiliaire de calcul à la rupture sur un tronçon de poutre. Dans ce cas relativement simple, le calcul peut être mené jusqu'au bout de manière analytique.

Dans le cas plus complexe d'une modélisation du panneau comme une plaque en géométrie non déformée, nous adoptons la même démarche de changement d'échelle en formulant un problème auxiliaire sur une cellule de base représentative du milieu hétérogène formé par le béton et les renforts en acier (Figure 9.6). Celle-ci consiste en un parallélépipède de hauteur h , égale à l'épaisseur du panneau, et de côté e correspondant à l'espacement entre les armatures d'acier. Ces dernières sont placées en quatre nappes orientées selon des directions orthogonales \underline{e}_x et \underline{e}_y et situées à une distance d des surfaces supérieure et inférieure du panneau (on se place désormais dans un repère local $Oxyz$).

Le critère de résistance en efforts généralisés est obtenu en résolvant ce problème auxiliaire. La résolution de ce dernier peut s'effectuer de manière numérique en résolvant un problème auxiliaire tridimensionnel [Bleyer *et al.*, 2015c]. Néanmoins, il est ensuite nécessaire d'approximer le critère obtenu pour mettre en œuvre le calcul sur la structure homogène équivalente.

Une autre approche consiste à tirer parti des constructions (5.17) et (5.19) du critère

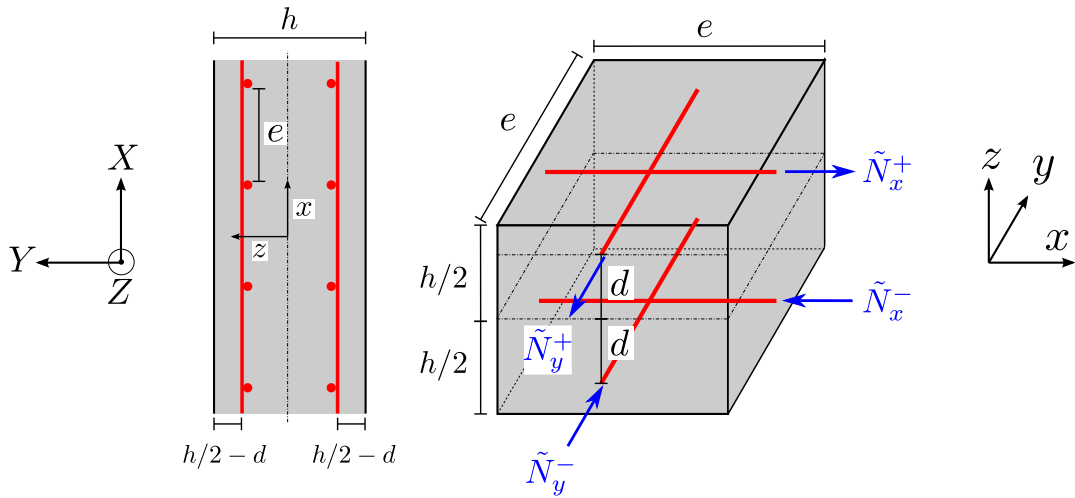


FIGURE 9.6 – Problème auxiliaire pour la détermination du critère de résistance du panneau en béton armé

de résistance généralisé d'une coque homogène dans son plan du chapitre 5. En effet, dans le cas où les armatures d'acier sont absentes, nous sommes bien dans le cadre d'une coque homogène dans son plan mais hétérogène dans son épaisseur. Connaissant le critère de résistance du béton en contraintes planes en tout point de l'épaisseur, il est alors possible d'exprimer le critère de résistance généralisé de manière semi-analytique. Comme mentionné au chapitre 5, la présence des armatures d'acier est prise en compte en modélisant ces dernières, au sein du béton, comme des éléments unidimensionnels, parfaitement adhérents, travaillant en traction/compression. Rappelons que cette approche équivaut à une approche par l'intérieur du critère généralisé exact, qui coïncide avec ce dernier dans la limite d'une faible fraction volumique de renfort et d'un fort contraste entre la résistance de l'acier et du béton.

Dans la suite, nous adopterons, pour le béton, un critère de résistance en contraintes planes de Mohr-Coulomb tronqué en traction (résistance à la traction nulle)¹ :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{G}(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{xx}\sigma_{yy} \geq \sigma_{xy}^2 \\ (f_c(z) + \sigma_{xx})(f_c(z) + \sigma_{yy}) \geq \sigma_{xy}^2 \\ -f_c(z) \leq \sigma_{xx}, \sigma_{yy} \leq 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

où z désigne la cote du point dans l'épaisseur de la section et $f_c(z)$ la résistance à la compression du béton en ce point obtenue grâce à (9.1) pour la température $T(z)$ du point en question.

1. Dans ce cas, le critère devient équivalent au critère de Rankine sans résistance à la traction, l'angle de frottement n'intervenant pas dans le cas d'une résistance à la traction nulle.

9.4. Calcul à la rupture sur la géométrie déformée

En ce qui concerne l'acier, chaque armature vérifiera un critère de la forme :

$$|\tilde{N}_{x,y}^\pm| \leq S f_y(z) \quad (9.4)$$

où $\tilde{N}_{x,y}^\pm$ représente les efforts axiaux dans les armatures, $S = \pi\phi^2/4$ sa section et $f_y(z)$ la résistance à la traction/compression de l'acier obtenue grâce à (9.2) pour la température $T(z)$ du point en question.

Avec les notations précédentes, le critère de résistance G du panneau s'écrira finalement :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in G \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma}(z) = \sigma_{ij}(z) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, N_i^\pm \text{ et } i, j = x, y \\ N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(z) dz + \frac{\tilde{N}_i^+ + \tilde{N}_i^-}{e} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i \\ M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (-z) \sigma_{ij}(z) d\xi - \frac{h/2 - d}{e} (\tilde{N}_i^+ - \tilde{N}_i^-) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i \\ \text{tels que } \underline{\sigma}(z) \in \mathcal{G}(z) \text{ et } |\tilde{N}_i^\pm| \leq S f_y(z) \quad \forall z \in [-h/2; h/2] \end{cases} \quad (9.5)$$

critère qui dépend implicitement du gradient de température à travers les distributions $f_c(z)$ et $f_y(z)$ dans l'épaisseur du panneau.

9.4 Calcul à la rupture sur la géométrie déformée

La troisième étape de la démarche consiste à se servir de la configuration déformée calculée dans la première étape comme configuration géométrique sur laquelle seront mises en œuvre les approches du calcul à la rupture.

9.4.1 Travaux précédents

Les travaux de Pham [Pham, 2014, Pham *et al.*, 2015b] ont étudié le cas simplifié de la déformation plane en modélisant le panneau comme une poutre droite en configuration initiale et courbe en configuration déformée. Compte-tenu des conditions aux limites, cette structure simplifiée s'avère être isostatique, permettant de déterminer directement la distribution des efforts membranaires et des moments de flexion en équilibre avec le poids propre. La stabilité de la structure a alors pu être étudiée en comparant cette distribution d'efforts statiquement admissibles avec le diagramme d'interaction associé au gradient de température étudié. Cette étude préliminaire a mis en évidence le fait que la rupture du panneau est extrêmement sensible à une légère augmentation de sa hauteur. Il est également intéressant de souligner que le mécanisme de ruine associé à cette modélisation simplifiée fait intervenir une discontinuité de rotation (rotule) du panneau dans sa partie basse (située à plus du tiers de la hauteur du panneau pour les paramètres étudiés).

Dans une deuxième partie, les travaux de Pham ont modélisé le panneau comme une plaque en configuration initiale. L'approche cinématique a été mise en œuvre sur la configuration déformée² en considérant un mécanisme de ruine simple mettant en jeu

2. approchée par des plans afin de simplifier les calculs

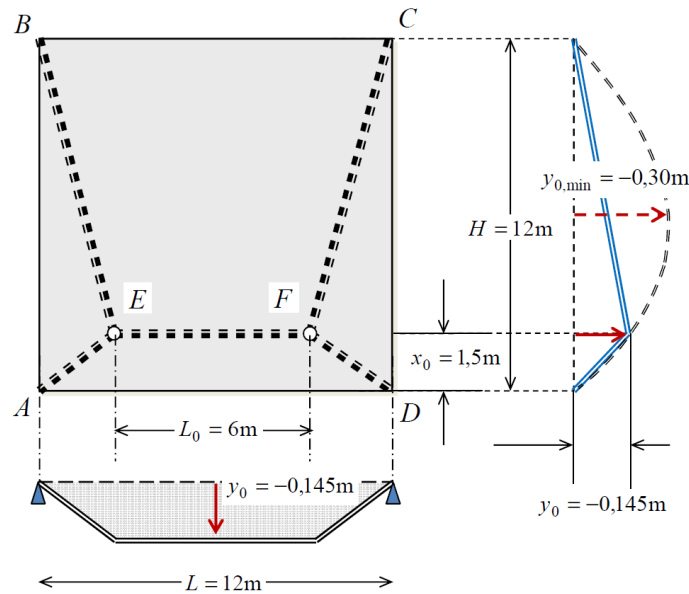


FIGURE 9.7 – Mécanisme optimal avec charnières pour une configuration $L = H = 12$ m, issu de [Pham, 2014]

des charnières (Figure 9.7) et dépendant de 5 paramètres.

Les résultats de cette approche, comparés aux résultats de la modélisation 1D, ont souligné l'importance des conditions aux limites des bords verticaux du panneau sur l'amplitude de la configuration déformée ainsi que sur la stabilité du panneau. Dans les configurations étudiées, les mécanismes de ruine optimaux pour la classe de mécanismes considérée semblent faire intervenir une charnière située à environ $1/8^e$ de la hauteur du panneau.

9.4.2 Modélisation par éléments finis de coque

Nous proposons ici de recourir aux outils développés dans cette thèse pour mettre en œuvre numériquement les approches du calcul à la rupture sur le panneau dans sa configuration déformée. Cette dernière sera donc modélisée comme une coque courbe discrétisée en facettes planes à l'aide des éléments finis présentés au chapitre 5. L'analyse de la stabilité de la structure est effectuée en calculant un encadrement du *facteur de stabilité* défini comme le facteur multiplicatif sans dimension du chargement (ici le poids propre uniquement) pour lequel se produira la ruine de la structure au sens du calcul à la rupture.

9.5 Analyse numérique de la stabilité des panneaux

Les différents calculs présentés dans cette section ont été effectués avec les valeurs numériques suivantes :

$$h = 15 \text{ cm}, p = 3.68 \text{ kN/m}^2, E_{c,amb} = 19.2 \text{ GPa}, f_{c,amb} = 32 \text{ MPa} \quad (9.6)$$

où $E_{c,amb}$ correspond au module d'Young du béton à température ambiante. Les renforts en acier sont constitués de 2 lits d'aciers HA6, espacés de 10 cm, situés à 3 cm des faces supérieure et inférieure du panneau et orientés selon les directions \underline{e}_X et \underline{e}_Z , soit :

$$e = 10 \text{ cm}, d = 4.5 \text{ cm}, \phi = 6 \text{ mm}, f_{y,amb} = 500 \text{ MPa} \quad (9.7)$$

L'ensemble des calculs de configurations déformées a été réalisé par Duc Toan Pham.

9.5.1 Influence de la largeur du panneau et effet de la mise en température

Pour cette première série de calculs, nous avons considéré trois configurations géométriques différentes (Figure 9.8) correspondant à un panneau très élancé dans la direction verticale ($L = 3 \text{ m}, H = 12 \text{ m}$), un panneau carré ($L = H = 12 \text{ m}$) ainsi qu'un panneau très élancé dans la direction horizontale ($L = 30 \text{ m}, H = 12 \text{ m}$) .

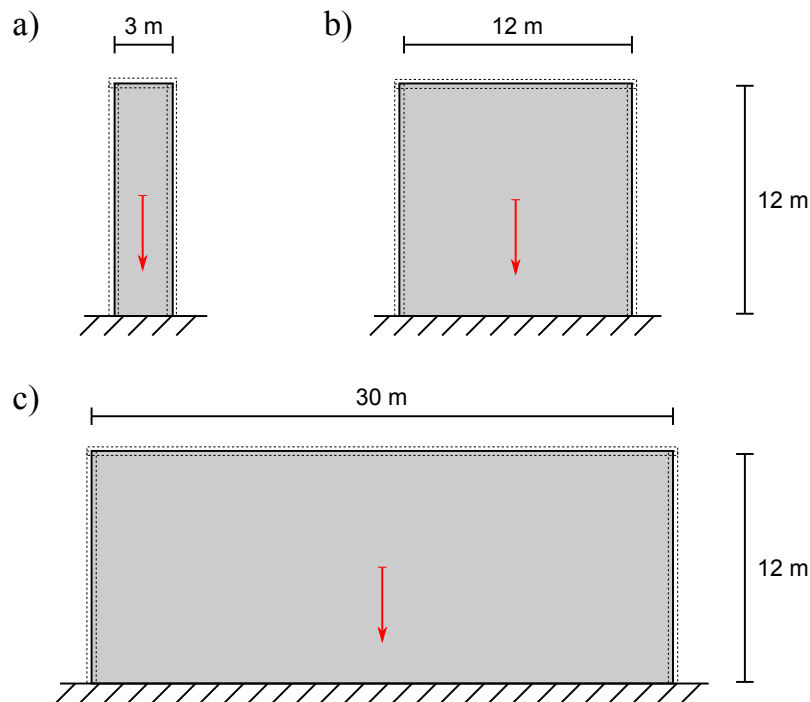


FIGURE 9.8 – Trois configurations géométriques de panneaux de même hauteur ($H = 12 \text{ m}$) et de différentes largeurs ($L = 3, 12, 30 \text{ m}$)

9.5.1.1 Montée en température

Pour cette série de calculs, nous avons effectué l'analyse complète de la stabilité du panneau telle que décrite précédemment (Figure 9.3) toutes les 10 min pour un incendie de type ISO 834 pendant une durée de 120 min. La Figure 9.9a représente l'évolution du profil de température dans l'épaisseur du panneau toutes les 20 min à partir d'une situation initiale ($t = 0$ min) à une température ambiante de 20 °C. On constate que

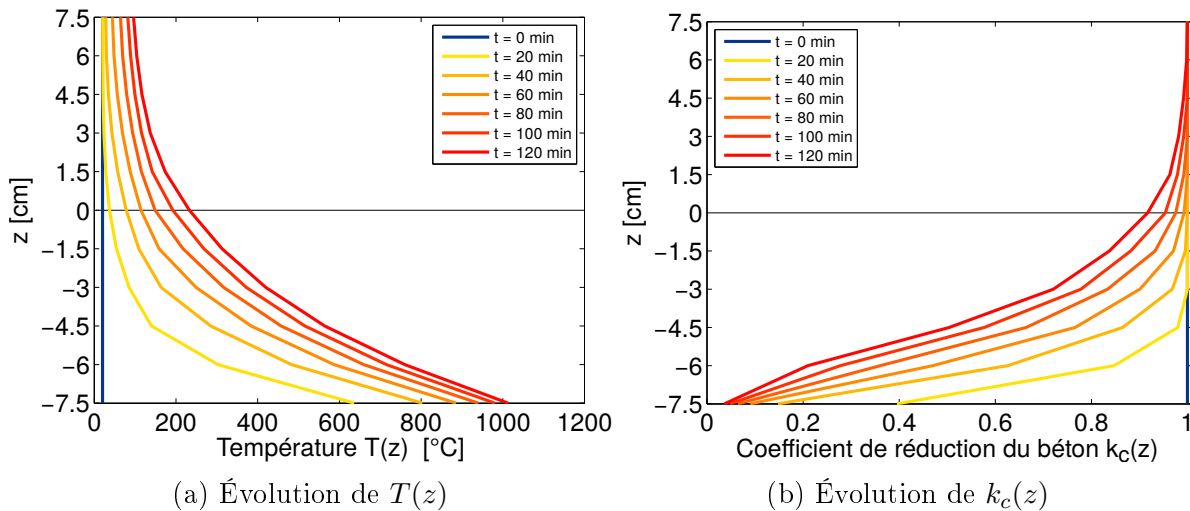


FIGURE 9.9 – Évolutions du profil de température $T(z)$ et du coefficient de réduction du béton $k_c(z)$ dans la section du panneau à différents instants

l'évolution de la température de la face exposée au feu ($z = -h/2$) est très rapide (600 °C au bout de 20 min) et atteint une température supérieure à 1000 °C après 120 min d'exposition. En revanche, la diffusion jusqu'à la face supérieure est relativement lente, la température de celle-ci étant de l'ordre de 100 °C après 120 min. De ce fait, la perte de résistance du béton est très modérée dans la moitié supérieure de l'épaisseur, en revanche la moitié inférieure subit une perte de résistance importante, de l'ordre de 10% après 20 min et environ 50% à 120 min. Enfin, la résistance des aciers situés en face inférieure ne commence à diminuer qu'à partir de 60 min et est réduite d'environ 40% au bout de 120 min. La résistance des aciers en face supérieure n'est, quant à elle, pas modifiée (la température restant inférieure à 400 °C). Ces remarques permettent ainsi d'interpréter l'évolution des diagrammes d'interaction du panneau au cours de l'incendie (Figure 9.10).

9.5.1.2 Amplitude des changements de géométrie

Nous avons représenté sur la Figure 9.11 l'amplitude maximale du déplacement hors-plan correspondant à la configuration d'équilibre induite par la déformation thermique et les effets du second-ordre, à différents instants au cours de l'incendie et pour les 3 configurations géométriques considérées. Comme on pouvait s'y attendre, la largeur du

9.5. Analyse numérique de la stabilité des panneaux

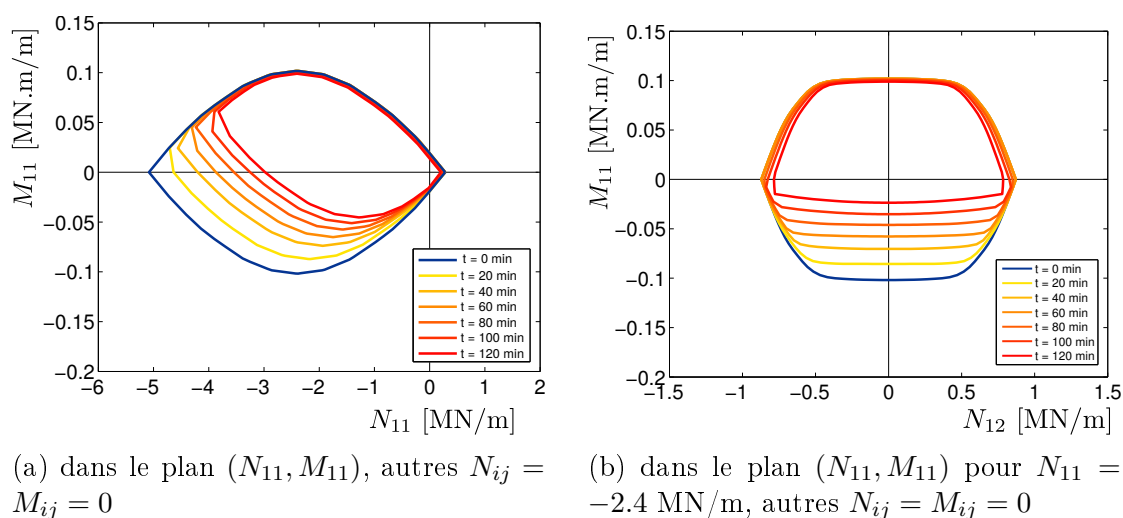


FIGURE 9.10 – Evolution des diagrammes d'interaction en fonction de la durée d'incendie

panneau influence très significativement la valeur maximale de ce déplacement. Toutefois, l'excentrement reste modéré puisque le ratio entre le déplacement maximal hors-plan et la hauteur du panneau est de l'ordre de 4% pour $L = 30$ m et 2.5% pour $L = 12$ m, ce qui justifie *a posteriori* l'hypothèse des petites rotations. À titre d'illustration, les isovalues du déplacement hors-plan ainsi que l'allure de la configuration déformée ont été reportées sur la Figure 9.12.

9.5.1.3 Analyse de stabilité

La résolution du problème de calcul à la rupture posé sur la géométrie déformée (troisième étape) a été effectuée en maillant une moitié seulement du panneau, le nombre d'éléments étant compris entre 500 et 1000 suivant la géométrie. Nous avons utilisé une valeur de $n = 10$ (resp. $n = 11$) pour le degré d'approximation du critère de résistance généralisé pour l'approche statique (resp. cinématique) tel qu'introduit au chapitre 5.

Géométrie	Statique	Cinématique	Écart relatif
$L = 3$ m	67.5	78.5	15%
$L = 12$ m	32.4	35.3	8.7%
$L = 30$ m	7.9	8.5	7.6%

TABLEAU 9.1 – Encadrement du facteur de stabilité à 120 min ($H = 12$ m)

Le Tableau 9.1 présente les valeurs numériques des bornes supérieures et inférieures du facteur de sécurité obtenues pour les différentes configurations après 120 min d'exposition au feu. On constate à nouveau que la largeur du panneau influence très largement la valeur du facteur de stabilité, ce dernier diminuant d'un facteur 4 lorsque la largeur

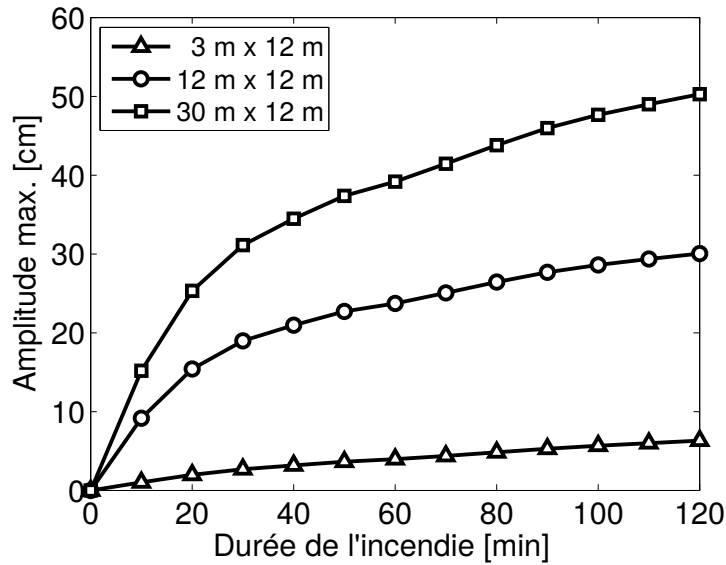


FIGURE 9.11 – Amplitude maximale du déplacement hors-plan (direction Y) de la configuration d'équilibre

passe de 12 m à 30 m. Il est intéressant de rapprocher ces valeurs de la valeur du facteur de stabilité obtenu sans prendre en compte l'effet du changement de géométrie (configuration verticale) et de la dégradation des capacités de résistance. Dans ce cas, la stabilité du panneau est pilotée par la résistance en compression $N_{c,amb}$ de ce dernier, atteinte au pied du panneau, le mécanisme de ruine correspondant à un mouvement de bloc rigide vers le bas associé à une discontinuité de vitesse purement axiale en $X = 0$. La valeur exacte est alors donnée par :

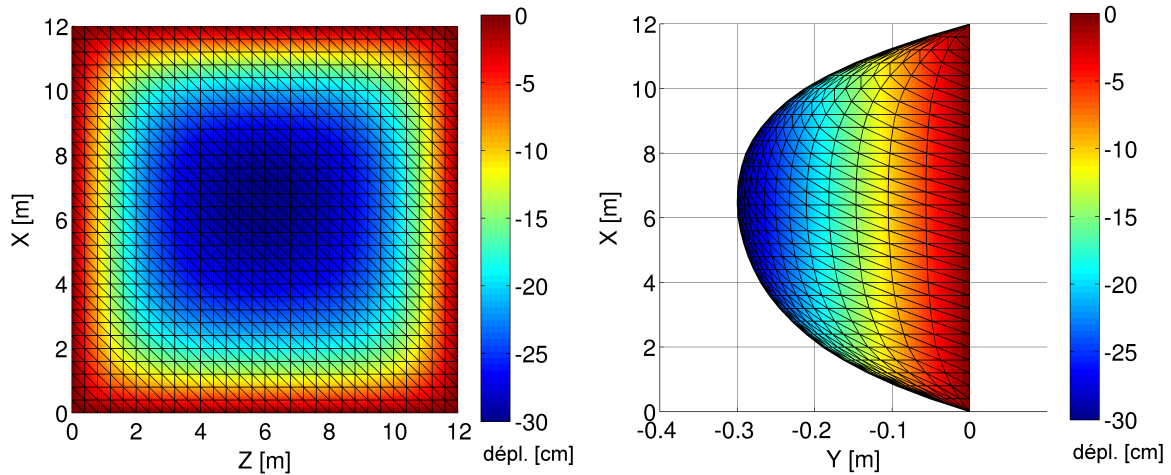
$$F.S._{compression} = \frac{N_{c,amb}}{pH} \quad \text{avec} \quad N_{c,amb} = hf_{c,amb} + \frac{2S}{e}f_{y,amb} \quad (9.8)$$

Avec les valeurs numériques retenues, on a ici $F.S._{compression} = 115.14$. On peut constater que cette valeur ne dépend pas de la largeur du panneau et qu'elle est nettement supérieure aux valeurs numériques prenant en compte l'effet conjugué du changement de géométrie et de la dégradation des capacités de résistance.

Remarquons également que l'utilisation d'un mécanisme de ruine constitué de 5 charnières considéré par Pham [Pham, 2014] dans le cadre d'une modélisation de plaque avait conduit à une majoration du facteur de sécurité égale à 36.7 pour le panneau carré $L = H = 12$ m, soit une valeur légèrement supérieure à celle correspondant à l'approche cinématique numérique obtenue ici.

Dans le cas du panneau de 3 m de large, le mécanisme de ruine optimal correspond approximativement au mécanisme de bloc en translation verticale évoqué précédemment, la ruine étant donc essentiellement pilotée par la résistance en compression. On

9.5. Analyse numérique de la stabilité des panneaux



(a) Vue de face dans le plan (OXZ)

(b) Vue de face dans le plan (OYZ) (les axes ne sont pas à la même échelle)

FIGURE 9.12 – Configuration d'équilibre à $t = 120$ min pour le panneau carré ($L = 12$ m). Les isovaleurs représentent l'amplitude (en cm) du déplacement hors-plan selon Y .

peut d'ailleurs généraliser la borne supérieure (9.8) à la prise en compte de la dégradation de la résistance en compression du panneau de la façon suivante :

$$F.S._{\text{compression},T} = \frac{N_c(T)}{pH} \quad (9.9)$$

avec $N_c(T) = \left(\int_{-h/2}^{h/2} k_c(z) dz \right) f_{c,amb} + \frac{S}{e} (k_y(d) + k_y(-d)) f_{y,amb}$

On trouve, dans ce cas, une borne supérieure égale à $F.S._{\text{compression},T} = 88.1$ après 120 min d'exposition, soit une valeur relativement proche de la valeur correspondant à l'approche cinématique numérique pour $L = 3$ m.

En revanche, les mécanismes de ruine pour les configurations $L = 12$ m (Figure 9.13) et $L = 30$ m (Figure 9.14) sont bien plus complexes et semblent faire intervenir une ruine en flexion dans la partie centrale du panneau à une hauteur de l'ordre de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{3}$ de la hauteur totale, la partie supérieure du panneau subissant une rotation autour de Z ainsi qu'un mouvement vertical vers le bas. À noter également, que le mécanisme correspondant à $L = 30$ m fait apparaître une légère discontinuité de vitesse horizontale en traction dans le plan de la coque au niveau de la ligne moyenne $Z = 6$ m.

Enfin, nous avons représenté sur la Figure 9.15 l'évolution du facteur de stabilité correspondant à différentes configurations d'équilibre intermédiaires au cours de l'exposition au feu. À titre de comparaison, nous avons reporté, en pointillés noirs, la borne supérieure (9.10) obtenue en considérant un mécanisme de ruine en compression pure, et en tenant compte de la dégradation des capacités de résistance. Comme souligné précédemment, on voit que le facteur de stabilité du panneau de 3 m est relativement

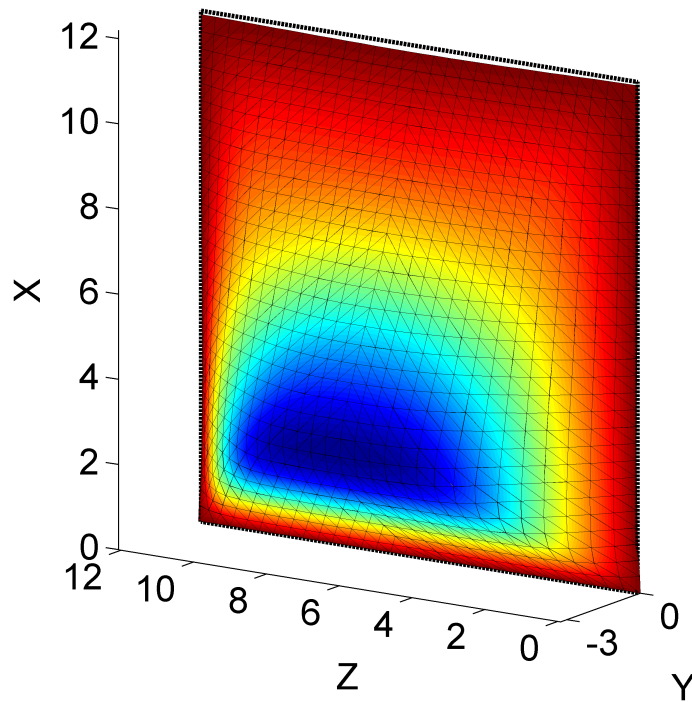


FIGURE 9.13 – Mécanisme de ruine pour le panneau de dimensions $12\text{ m} \times 12\text{ m}$ après 120 min (isovaleurs = amplitude relative de la vitesse virtuelle hors-plan U_Y).

proche de cette borne supérieure.

On peut également constater que la chute du facteur de stabilité par rapport à la résistance initiale en géométrie non déformée est d'autant plus brutale que le panneau est large. En revanche, après 40-60 min d'exposition, la baisse relative du facteur de stabilité s'effectue à la même vitesse, quelle que soit la largeur du panneau, de l'ordre de 5% toutes les 10 min.

Notons également que la contribution relative des armatures de renfort au facteur de stabilité de la structure évolue elle aussi très fortement puisqu'elle est de l'ordre de 6% à $t = 0$ min pour atteindre, après 120 min d'exposition au feu, 40% pour $L = 12\text{ m}$ et près de 85 % pour $L = 30\text{ m}$. Les armatures jouent donc un rôle prépondérant dans la limitation de la perte de résistance du panneau due au feu.

9.5. Analyse numérique de la stabilité des panneaux

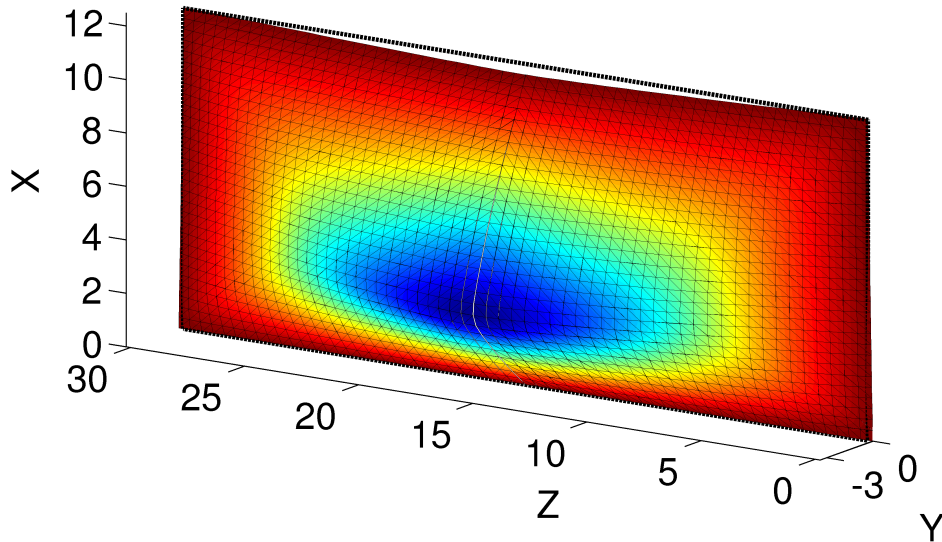


FIGURE 9.14 – Mécanisme de ruine pour le panneau de dimensions 30 m×12 m après 120 min

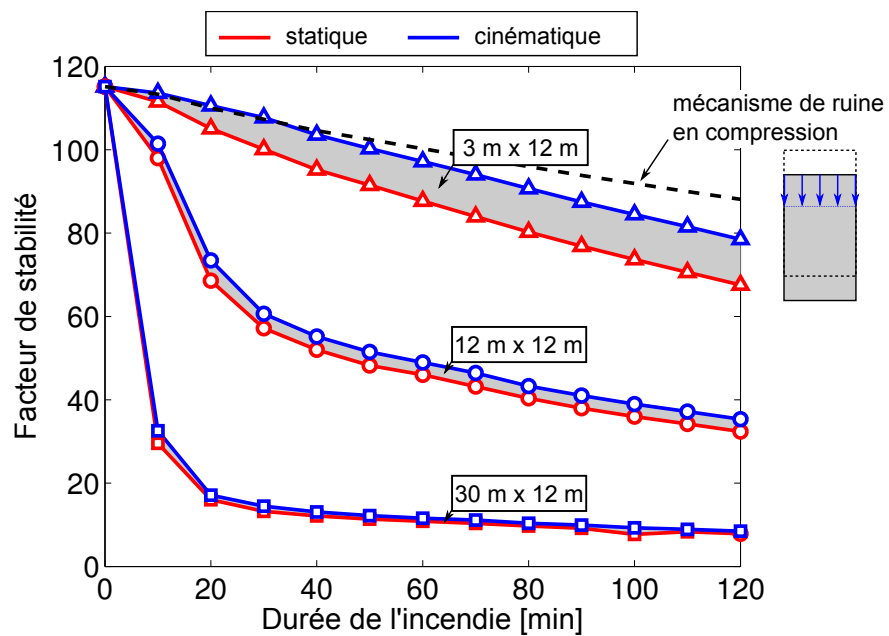


FIGURE 9.15 – Évolution du facteur de stabilité au cours de l'exposition au feu pour les trois largeurs de panneau

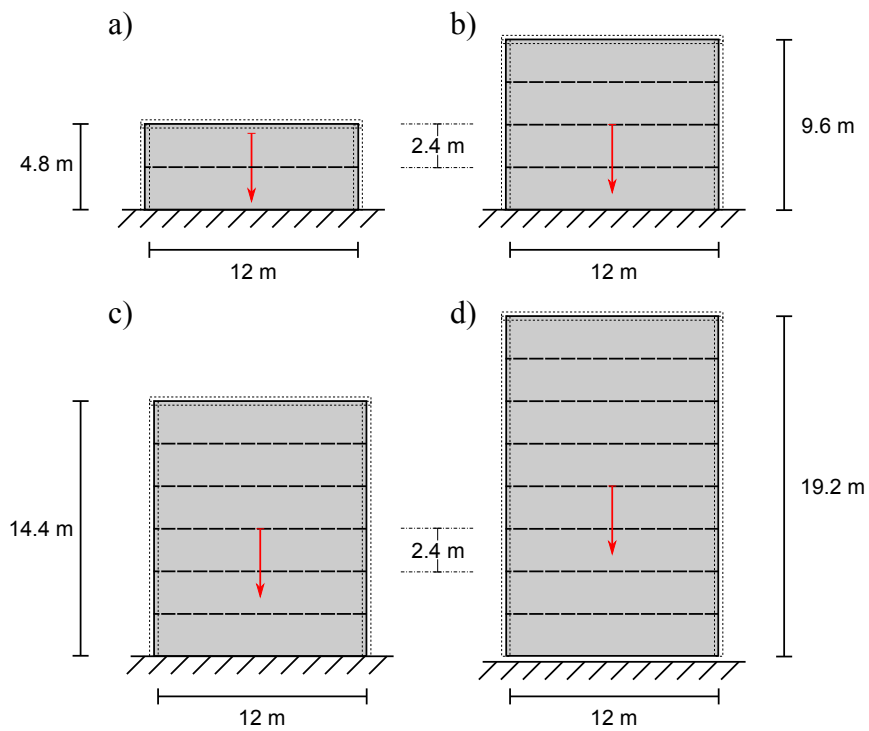


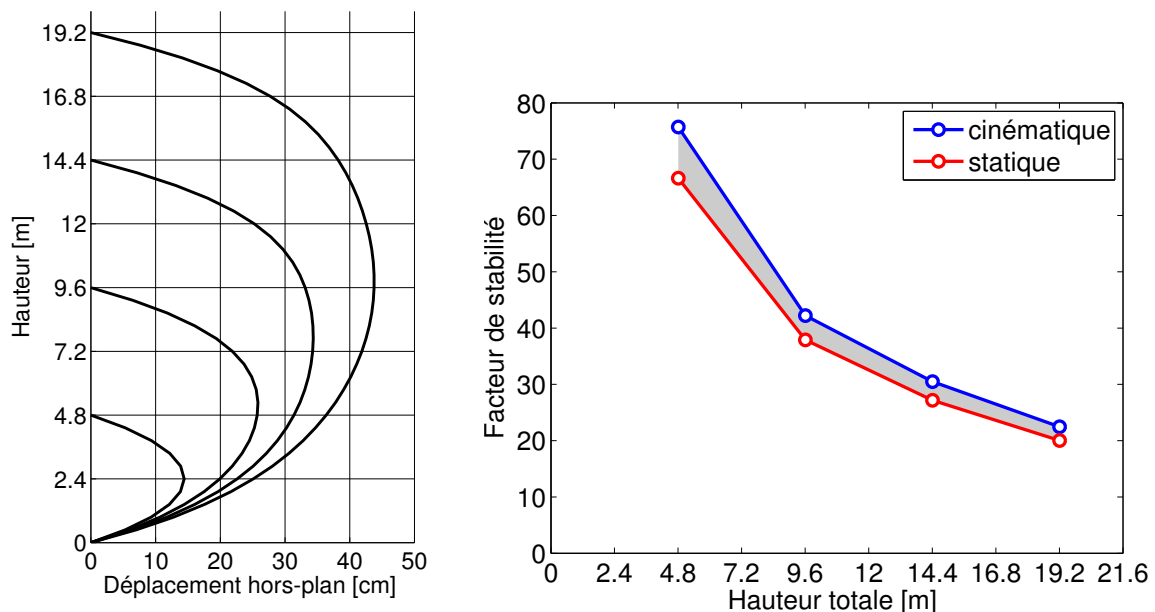
FIGURE 9.16 – Quatre configurations géométriques de panneaux de même largeur ($L = 12\text{ m}$) superposés verticalement (hauteur totale $H = 4.8, 9.6, 14.4, 19.2\text{ m}$)

9.5. Analyse numérique de la stabilité des panneaux

9.5.2 Influence de la hauteur du panneau

Dans cette deuxième série de calculs, nous fixons à présent la largeur à $L = 12$ m et considérons quatre valeurs distinctes pour la hauteur : $H = 4.8$ m, 9.6 m, 14.4 m, et 19.2 m. Ce choix correspond à la superposition verticale de 2, 4, 6 et 8 panneaux individuels de dimensions 2.4 m×12 m en position horizontale (Figure 9.16).

De la même façon que précédemment, la hauteur H a une influence notable sur l'amplitude de la configuration déformée. Le profil de cette configuration après 120 min le long du plan moyen ($Z = 6$ m) du panneau a été représenté sur la Figure 9.17a. L'évolution correspondante du facteur de stabilité à 120 min a été reportée sur la Figure 9.17b. Bien que l'on observe une nette diminution du facteur de stabilité avec l'augmentation de la hauteur, on constate également que ce dernier reste à des valeurs proches de 20 pour les valeurs numériques retenues ici. En pratique, il est possible de superposer des panneaux de la sorte jusqu'à une hauteur totale avoisinant les 20 m pour des bâtiments industriels de grande hauteur. Pour le chargement considéré, la stabilité de ce type de structure en configuration déformée semble donc assurée.



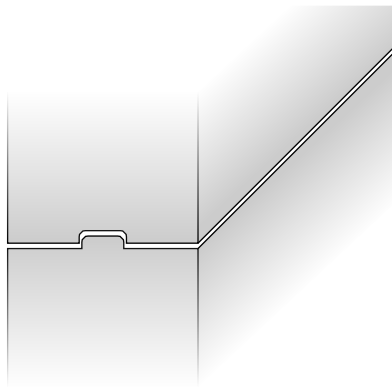
(a) Profil de la déformée dans le plan moyen $Z = 6$ m (les axes ne sont pas à la même échelle) (b) Évolution de l'encadrement du facteur de stabilité en fonction de la hauteur

FIGURE 9.17 – Influence de la hauteur totale sur la stabilité du panneau

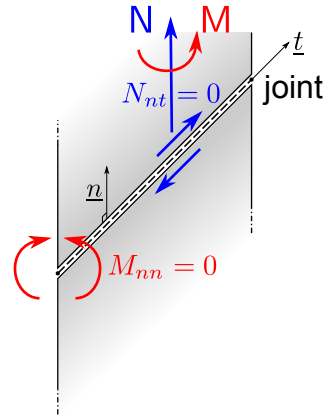
9.5.3 Prise en compte de joints entre panneaux

Dans tout ce qui précède, et notamment dans les paragraphes 9.5.1-9.5.2, nous avons modélisé le panneau comme une plaque continue, vérifiant le même critère de résistance généralisé en tout point. Or, le dispositif permettant d'atteindre de telles hauteurs correspond en réalité à la superposition de panneaux individuels, placés en position horizontale. La connexion entre deux panneaux adjacents n'est donc pas parfaite, les bords des panneaux étant souvent emboîtés par un système d'encoches mâle-femelle (Figure 9.18a). Afin de tenir compte du caractère imparfait de cette connexion, nous avons choisi de modéliser cette dernière par un joint orienté dans la direction horizontale \underline{t} , de normale verticale \underline{n} dans le plan des panneaux, présentant une résistance nulle en flexion autour du joint (charnière), ainsi qu'en effort membranaire de cisaillement tangentiel (glissement parfait). Le critère de résistance d'un tel joint s'écrit alors :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in G \iff \begin{cases} \exists(\underline{N}, \underline{M}) \text{ tels que} \\ \underline{n} \cdot \underline{N} \cdot \underline{n} = N \\ \underline{t} \cdot \underline{N} \cdot \underline{n} = 0 \\ \underline{n} \cdot \underline{M} \cdot \underline{n} = 0 \\ \underline{t} \cdot \underline{M} \cdot \underline{n} = M \\ (\underline{N}, \underline{M}) \in G \end{cases} \quad (9.10)$$



(a) Exemple de connexion entre deux panneaux



(b) Modélisation mécanique de la connexion

FIGURE 9.18 – Prise en compte de la connexion entre panneaux

Les approches statique et cinématique sont modifiées de manière à prendre en compte un tel critère de résistance au niveau des connexions situées tous les 2.4 m dans la direction verticale X , tel que représenté sur la Figure 9.16. Le maillage éléments finis est ainsi construit de telle sorte que des bords d'éléments soient situés le long de ces connexions, les expressions du critère de résistance et de la fonction d'appui étant modifiées uniquement pour ces arêtes. En particulier, pour l'approche cinématique, la fonction d'appui

9.5. Analyse numérique de la stabilité des panneaux

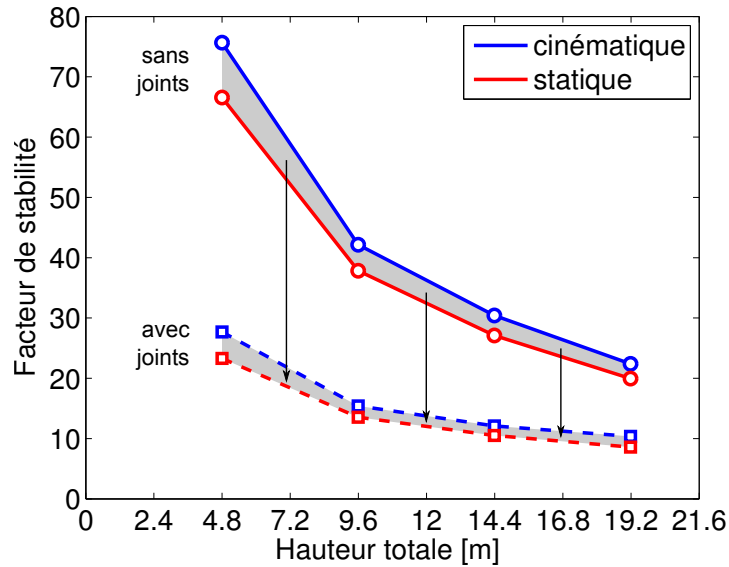


FIGURE 9.19 – Facteur de stabilité de l’assemblage de panneaux avec prise en compte de joints entre panneaux

du joint est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \Pi(\underline{n}; \llbracket u_n \rrbracket, \llbracket \beta_t \rrbracket) &= \sup_{(N, M) \in G} \{N \llbracket u_n \rrbracket + M \llbracket \beta_t \rrbracket\} \\
 &= \inf_{\hat{v}, \hat{\beta}} \pi(\underline{n}; \llbracket u_n \rrbracket \underline{n} + \hat{v} \underline{t}, \hat{\beta} \underline{n} + \llbracket \beta_t \rrbracket \underline{t})
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

où $\pi(\underline{n}; \llbracket u \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$ est la fonction d’appui généralisée du panneau pour les discontinuités de vitesse.

La Figure 9.19 présente les résultats obtenus pour l’encadrement du facteur de stabilité en prenant en compte la présence des joints entre les différents panneaux. On constate une réduction importante du facteur de stabilité, de l’ordre de 60% pour les différentes configurations géométriques. Pour la hauteur maximale de 19.2 m avec 7 joints entre les panneaux, le facteur de stabilité reste toutefois encore largement supérieur à 1. Notons cependant que les calculs ont été menés, dans un souci de simplicité, à partir des mêmes configurations déformées sans la prise en compte des joints. En effet, la présence de ces derniers a certainement une influence non négligeable sur l’amplitude de la configuration géométrique déformée. La prise en compte de cette influence supplémentaire, défavorable du point de vue de la sécurité, conduirait ainsi à une réduction encore plus importante du facteur de stabilité.

Enfin, nous terminons cette étude en comparant l’allure des mécanismes de ruine pour les différentes configurations géométriques avec ou sans la prise en compte des joints entre panneaux (Figures 9.20-9.23). On constate alors une très nette différence

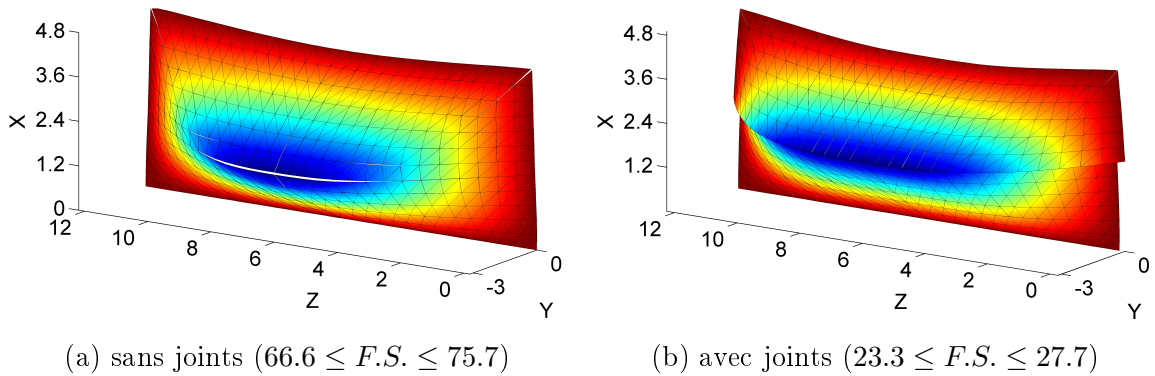


FIGURE 9.20 – Mécanismes de ruine de la configuration à 2 panneaux ($H = 4.8$ m)

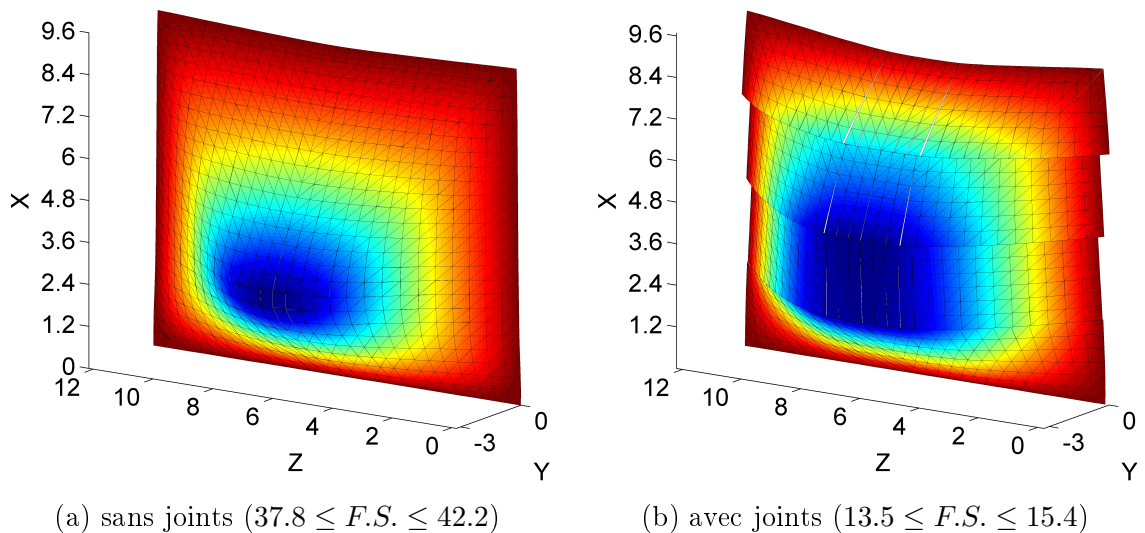


FIGURE 9.21 – Mécanismes de ruine de la configuration à 4 panneaux ($H = 9.6$ m)

dans les différents mécanismes de ruine correspondant à la prise en compte ou non des joints. En particulier, en présence de ces derniers, on observe bien une localisation d'une discontinuité de rotation au niveau du joint situé à 2.4 m pour le cas où $H = 4.8$ m, tandis qu'en l'absence de joints, on observe une discontinuité de vitesse, moins importante, au niveau des bords d'éléments situés juste en dessous (à $X = 2$ m, la hauteur d'un élément étant de 40 cm). De manière générale pour l'ensemble des configurations géométriques, la prise en compte des joints conduit à des mécanismes de ruine où chaque panneau glisse horizontalement l'un sur l'autre, on observe également de faibles discontinuités de vitesse en traction dans le plan des panneaux au niveau de la partie centrale de ces derniers (autour de $Z = 6$ m).

9.5. Analyse numérique de la stabilité des panneaux

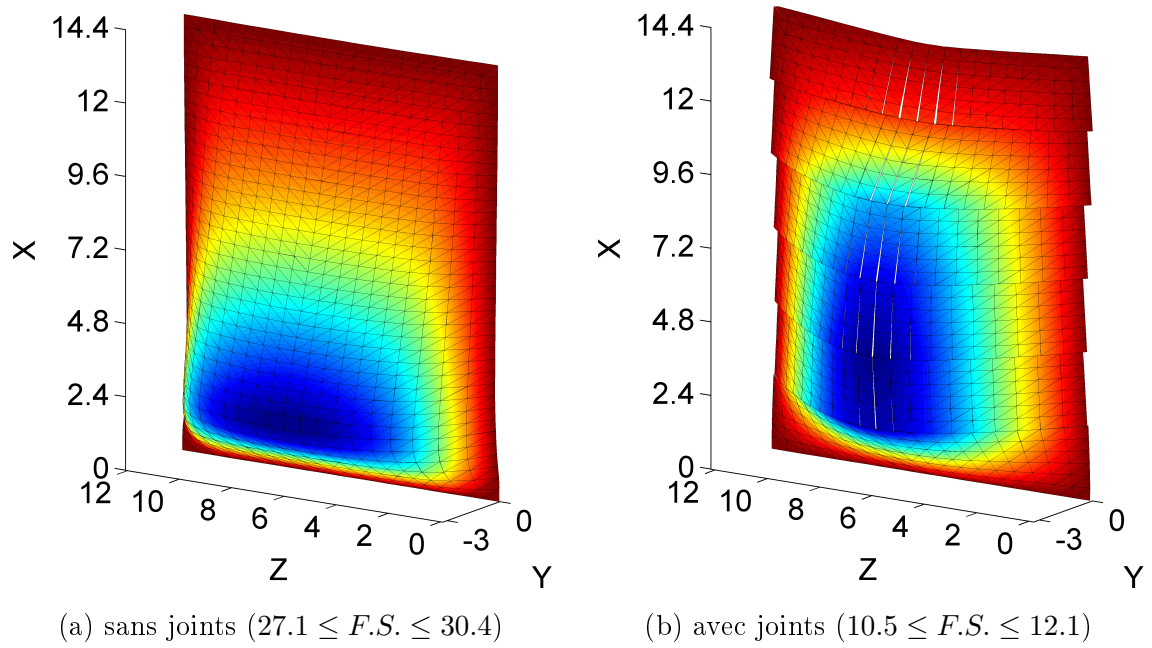


FIGURE 9.22 – Mécanismes de ruine de la configuration à 6 panneaux ($H = 14.4$ m)

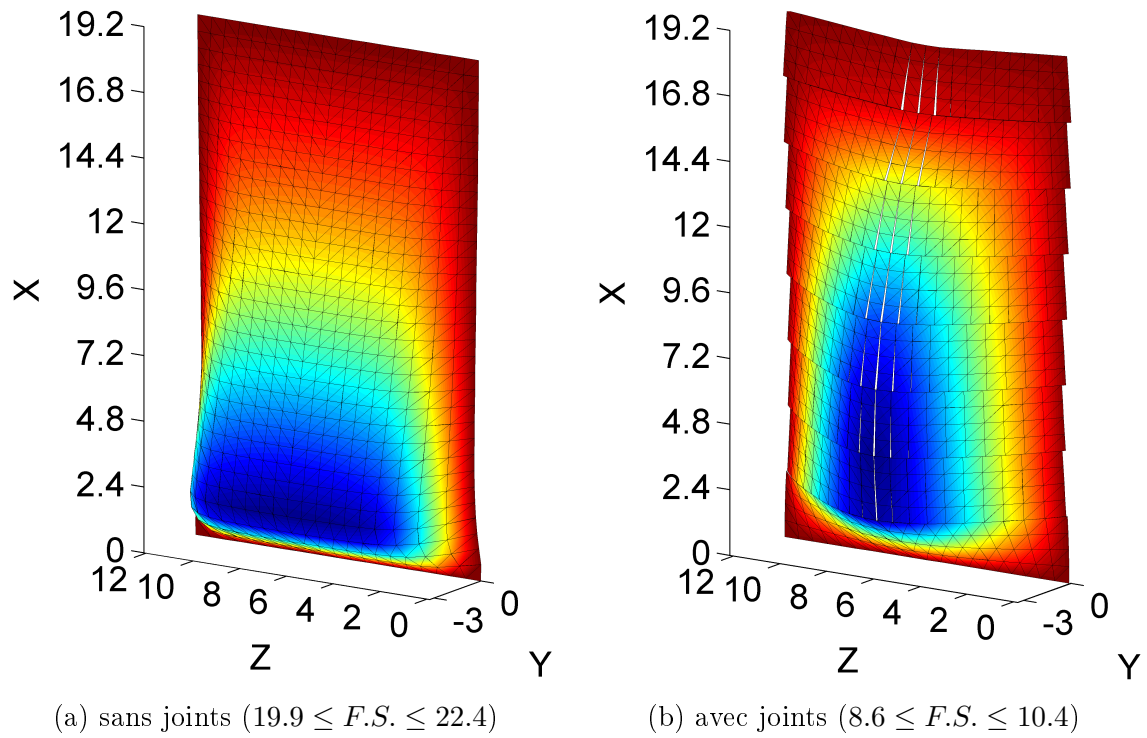


FIGURE 9.23 – Mécanismes de ruine de la configuration à 8 panneaux ($H = 19.2$ m)

9.6 Conclusions et perspectives

Ce chapitre a été l'occasion de mettre en application les outils développés précédemment, notamment les éléments de coque du chapitre 5, dans le contexte de l'analyse de la stabilité au feu de panneaux en béton armé pour les bâtiments industriels de grande hauteur. L'approche par le calcul à la rupture permet d'apporter des éléments de réponse à une problématique complexe faisant intervenir des changements de géométrie ainsi qu'une dégradation des capacités de résistance des matériaux sous l'effet du feu. Les éléments finis de coque, et notamment la formulation très générale retenue pour l'écriture du critère de résistance, permet d'obtenir des encadrements du facteur de stabilité de l'ordre de 10 à 20%, en des temps de calculs très raisonnables (de l'ordre de la minute pour les cas étudiés dans ce chapitre).

Cette analyse a permis de mettre en évidence la sensibilité du facteur de stabilité aux dimensions du panneau, notamment du fait de l'influence notable des changements de géométrie. Cela a également été l'occasion d'illustrer la possibilité de prendre en compte des critères de résistance d'interface (des joints ici) différents du milieu environnant. Bien entendu, ce chapitre ne prétend pas effectuer une étude exhaustive et représentant fidèlement les conditions de mise en œuvre de tels panneaux rencontrés en pratique, il s'agit bien ici d'une illustration de la performance des outils développés.

Ainsi, les conditions aux limites et le comportement des joints entre les panneaux qui ont été étudiés, correspondent à des simplifications des conditions rencontrées en pratique. En effet, le déplacement horizontal des bords verticaux des panneaux n'est possible, en général, que dans la direction allant du bord en question vers l'intérieur du panneau du fait de la présence, de part et d'autre du panneau, d'un poteau ou d'un autre ensemble de panneaux. De même, les conditions de connexion entre panneaux en pose horizontale peuvent varier et il est tout à fait possible d'envisager des comportements de joints plus complexes, tels qu'un comportement sans résistance à la traction, une résistance réduite à la torsion, un glissement tangentiel frottant, etc.

* *
 *
 *

Chapitre 10

Dimensionnement à la rupture de la marquise de la gare d'Austerlitz

Résumé : *Ce chapitre se propose d'appliquer une partie des outils présentés dans les chapitres précédents au calcul à la rupture d'une structure réelle complexe : la marquise de la gare d'Austerlitz, une coque courbe en béton armé, perforée par un réseau de pavés de verre de forme cylindrique. Nous nous proposons alors de remplacer la coque hétérogène par une coque homogène équivalente grâce à une démarche d'homogénéisation périodique. Après avoir présenté les caractéristiques de la structure et les hypothèses de modélisation retenues, nous discuterons de la détermination du critère de résistance macroscopique. Nous évaluons ensuite un encadrement du facteur de sécurité pour différentes combinaisons de chargement typiques de celles utilisées pour le dimensionnement de la structure aux États Limites Ultimes.*

Sommaire

10.1 La marquise de la gare d'Austerlitz : une structure complexe .	198
10.1.1 Présentation de la structure	198
10.1.2 Hypothèses de modélisation	199
10.1.3 Caractéristiques mécaniques des matériaux	200
10.1.4 Description des combinaisons de cas de charge	202
10.2 Homogénéisation de la coque hétérogène	203
10.2.1 Modélisation de la cellule de base	203
10.2.2 Évaluation numérique du critère de résistance macroscopique	205
10.2.3 Approximation du critère	205
10.2.4 Critère de résistance de la coque homogénéisée	208
10.3 Résultats de l'analyse	209
10.3.1 Notion de facteur de sécurité	209
10.3.2 Étude de convergence	209
10.3.3 Facteur de sécurité pour les différentes configurations	212
10.4 Conclusions	214

10.1 La marquise de la gare d'Austerlitz : une structure complexe

10.1.1 Présentation de la structure

Le réaménagement de la gare de Paris-Austerlitz constitue un important projet de génie civil, piloté par la SNCF. Les travaux, qui ont débuté en 2012 et doivent s'achever en 2020, comportent la rénovation de la gare et de sa halle historique ainsi que la création d'un nouveau quartier constitué de nouveaux logements, bureaux et commerces. L'un des enjeux de ces travaux consiste à créer un pôle de vie aux abords de la gare en favorisant les modes doux de circulation et l'accès aux piétons. Ainsi, le projet prévoit la construction d'une imposante marquise¹ à l'entrée de la gare côté Seine (Figure 10.1a). Afin de protéger les voyageurs tout en créant un espace agréable, les architectes ont choisi de retenir la solution d'une coque courbe en béton armé, perforée par un réseau de pavés de verre de forme cylindrique permettant le passage de la lumière (Figure 10.1b).



(a) Entrée côté Seine

(b) Détails de la marquise

FIGURE 10.1 – Vue d'architecte du projet de réaménagement côté Seine (source <http://www.sncf.com>)

Du fait de la forme courbe de la coque et de l'hétérogénéité induite par les pavés de verre, le comportement mécanique de la structure est difficile à prévoir et nécessite donc de recourir à l'utilisation d'outils de calcul numérique. L'analyse qui suit repose sur des informations sommaires provenant d'une note technique qui nous a été transmise par le bureau d'études SETEC TPI qui avait réalisé une étude préliminaire de la structure. Les choix de modélisation retenus dans la suite peuvent donc ne pas refléter la réalité du projet final, mais cette analyse se veut plus être une illustration sur un cas réaliste, qu'une étude quantitative précise.

1. En architecture, une marquise est un auvent vitré situé au dessus d'une porte ou d'un perron. On en trouve fréquemment à l'entrée des gares.

10.1. La marquise de la gare d'Austerlitz : une structure complexe

10.1.2 Hypothèses de modélisation

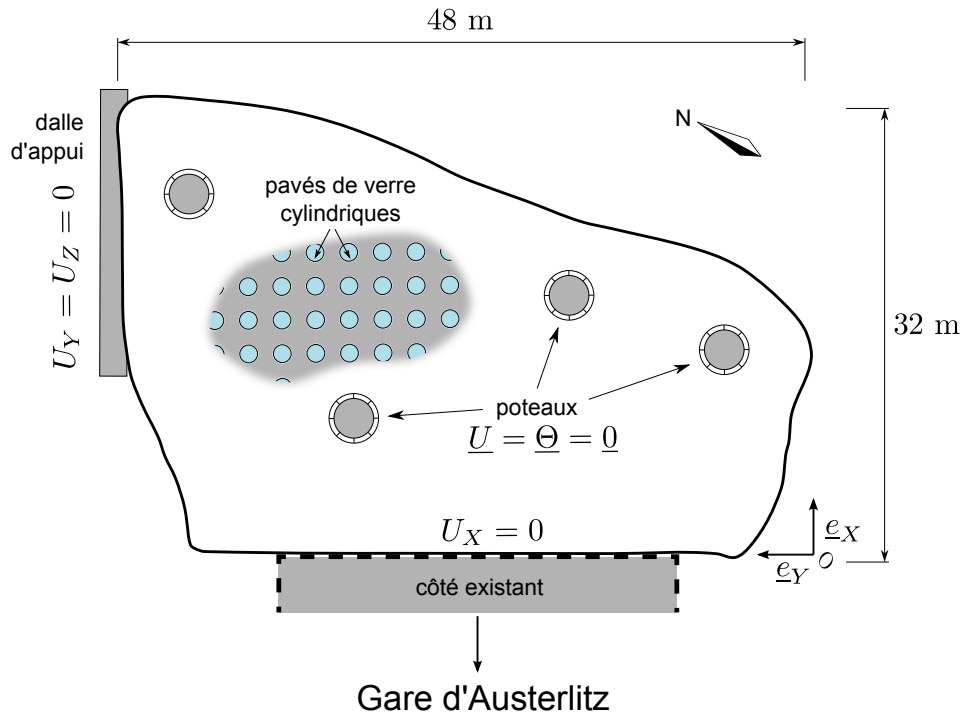


FIGURE 10.2 – Vue en plan schématique de la structure

La marquise est modélisée comme une coque courbe d'épaisseur constante $h = 14$ cm, d'environ 32 m dans la direction e_X , 48 m dans la direction e_Y et 6.4 m dans la direction verticale e_Z (Figure 10.2). Quatre poteaux en béton armé de diamètre important supportent la coque par l'intermédiaire de chapeaux évasés. Dans la suite, nous avons supposé que les poteaux étaient infiniment résistants et que la coque était encadrée à ce niveau ($\underline{U} = \underline{\Theta} = \underline{0}$); ils ne seront donc pas modélisés. La coque prenant également appui sur une dalle située à l'extrémité gauche, on supposera que les composantes selon Y et Z du déplacement y sont bloquées ($U_Y = U_Z = 0$), tandis que la rotation reste libre. Enfin, la coque est reliée à la structure existante de la gare par l'intermédiaire de suspentes qui bloquent le déplacement normal dans le plan de la coque ($U_X = 0$).

La géométrie de la surface moyenne de la coque est discrétisée par un maillage élément fini constitué de facettes triangulaires planes (Figure 10.3).

Dans le projet, les pavés de verre ne sont pas répartis de manière strictement périodique sur toute la coque. Celle-ci est composée de différentes zones à l'intérieur desquelles la répartition est périodique (espacement de 27 cm) mais différant entre elles par la dimension des pavés qui les composent. Il semble que la répartition de la taille des trous ait été effectuée en fonction de la distribution des efforts dans la coque de

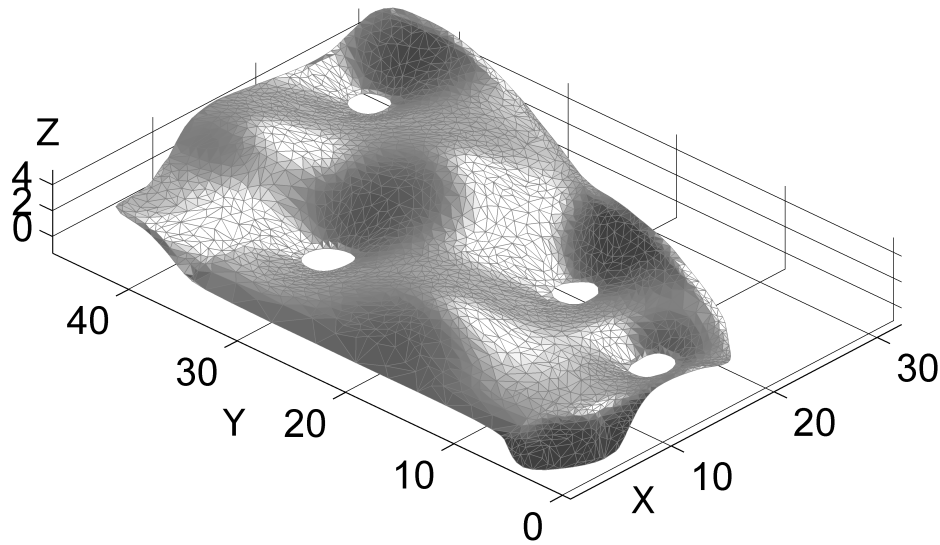


FIGURE 10.3 – Géométrie de la surface courbe (maillage de 5000 éléments triangulaires)

béton homogène calculés en régime élastique, les trous les plus petits étant placés dans les zones fortement sollicitées, les plus grands dans les zones les moins sollicitées. Ne disposant pas de la géométrie de ces zones, et par souci de simplicité, nous supposons que la coque est perforée d'un réseau unique de trous, orienté selon les directions \underline{e}_X et \underline{e}_Y . En revanche, nous effectuerons des calculs pour les 3 géométries de trous considérées dans le projet et représentées sur les Figure 10.4a-10.4c. Suivant la dimension des pavés, la quantité d'acier varie de 8 à 3 HA8 (barres de diamètre 8 mm). On supposera que les renforts sont identiques dans les directions \underline{e}_X et \underline{e}_Y .

10.1.3 Caractéristiques mécaniques des matériaux

Béton : Le béton constituant la coque est de type B50, soit une résistance à la compression nominale $f_{c,k} = 50$ MPa. Pour le dimensionnement, nous retiendrons une valeur réduite du coefficient de sécurité $\gamma_c = 1.5$ pour le béton, soit $f_{c,d} = f_{c,k}/\gamma_c = 33.3$ MPa. Nous retiendrons également une résistance à la traction égale à $f_{t,d} = 3$ MPa. Le critère de résistance du béton est modélisé par un critère de type Mohr-Coulomb tronqué en traction à la valeur $f_{t,d}$ avec un angle de frottement interne conventionnellement pris égal à $\phi = 37^\circ$.

Nous retiendrons une masse volumique du béton de $\rho = 2500$ kg/m³.

Acier : Les aciers de renfort sont des aciers de classe S500, de résistance à la traction/compression uniaxiale $f_{y,k} = 500$ MPa. Nous retiendrons une valeur réduite du coefficient de sécurité pour l'acier $\gamma_s = 1.15$, soit $f_{y,d} = f_{y,k}/\gamma_s = 435$ MPa.

Verre : Compte-tenu de la fragilité du verre, nous supposerons dans la suite que le verre des pavés ne participe pas à la résistance mécanique de la structure et modéliserons donc les pavés par des trous cylindriques.

10.1. La marquise de la gare d'Austerlitz : une structure complexe

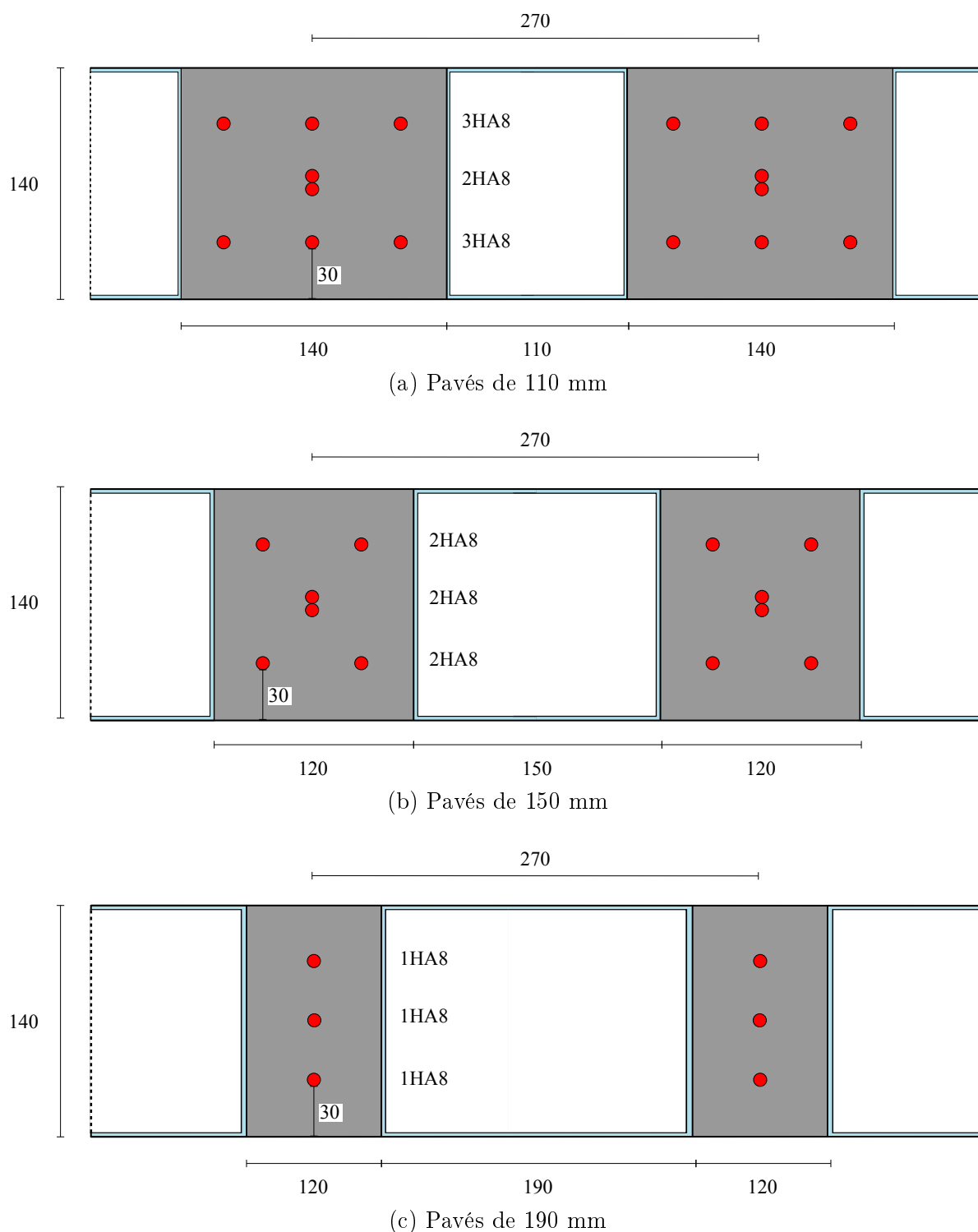


FIGURE 10.4 – Vue en coupe verticale de la géométrie des pavés de verre et des aciers de renfort (dimensions en mm)

10.1.4 Description des combinaisons de cas de charge

Les charges surfaciques élémentaires de poids propre, de neige, de vent et dues éventuellement aux piétons sont décrites dans le Tableau 10.1 et schématisées sur la Figure 10.5.

	Type	Direction	Notation	Intensité	Répartition
G	Poids propre	vertical	$\underline{q}_G = -q_G \underline{e}_Z$	3.43 kN/m ²	uniforme
Q	Neige	vertical	$\underline{q}_N = -q_N \underline{e}_Z$	0.62 kN/m ²	uniforme
	Vent	normal (soulèvement)	$\underline{q}_V = q_V \underline{\nu}$	0.98 kN/m ²	uniforme ou moitié $X \geq 15$ m
	Piétons	vertical	$\underline{q}_P = -q_P \underline{e}_Z$	0.75 kN/m ²	moitié $X \leq 15$ m

TABLEAU 10.1 – Caractéristiques des charges élémentaires considérées

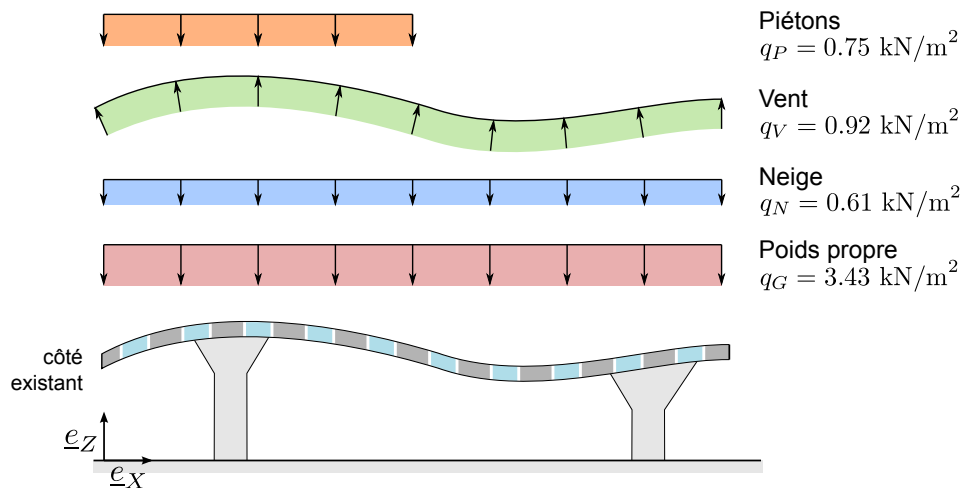


FIGURE 10.5 – Représentation schématique des charges élémentaires dans le plan $(\underline{e}_X, \underline{e}_Z)$

Nous considérons trois combinaisons de chargement différentes que l'on retrouve dans le dimensionnement de la structure aux ELU :

- Combinaison n°1 (poids propre + neige) : $\underline{q}_1 = 1.35\underline{q}_G + 1.5\underline{q}_N$
- Combinaison n°2 (résistance au soulèvement) : $\underline{q}_2 = \underline{q}_G + 1.5\underline{q}_V$ (le vent est considéré sur toute la structure)
- Combinaison n°3 (cas asymétrique piétons + vent) : $\underline{q}_3 = 1.35\underline{q}_G + 1.5\underline{q}_P + 0.9\underline{q}_V$. La charge due aux piétons est considérée sur la moitié proche de la gare ($X \leq 15$ m) et le vent sur l'autre moitié ($X \geq 15$ m).

10.2 Homogénéisation de la coque hétérogène

La prise en compte des hétérogénéités de la structure du point de vue de ses capacités de résistance est un point délicat qui a été souligné lors des études préliminaires réalisées par SETEC TPI. Afin de traiter cette difficulté, nous proposons de mettre en œuvre une *démarche d'homogénéisation périodique* en remplaçant la coque hétérogène par une coque homogène équivalente.

10.2.1 Modélisation de la cellule de base

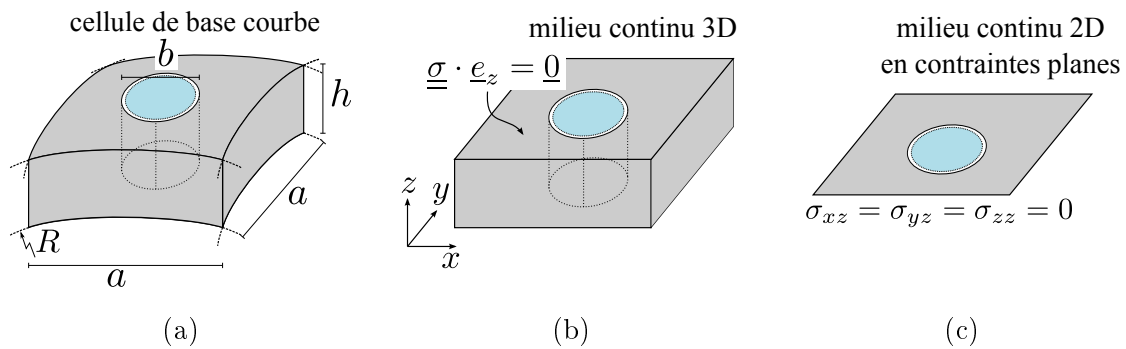


FIGURE 10.6 – Différentes modélisations de la cellule de base

Afin d'appliquer la démarche d'homogénéisation, il convient, tout d'abord, de s'interroger sur la modélisation de la cellule de base. Nous pouvons remarquer que, bien que la coque soit courbe, l'espacement entre deux hétérogénéités a , c'est-à-dire la taille de la cellule, est faible par rapport au rayon de courbure minimal R de la structure. En effet, nous avons ici $a = 27$ cm tandis que nous avons évalué le rayon de courbure à $R = 20$ m. Il est donc justifié de remplacer la cellule de base courbe (Figure 10.6a) par un parallépipède formé par les directions $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ pour la démarche d'homogénéisation. En revanche, nous ne sommes pas dans le cas $h \ll a$ traité dans le chapitre 6, puisque la coque a une épaisseur de $h = 14$ cm. Comme nous l'avons mentionné à cette occasion, le cas où $h \sim a$ suggère de modéliser la cellule de base comme un milieu continu 3D (Figure 10.6b).

A priori, nous sommes donc amenés à déterminer le critère de résistance macroscopique de la coque dans l'espace à 6 dimensions des efforts généralisés (N_{ij}, M_{ij}) en résolvant un problème auxiliaire tridimensionnel. Malheureusement, plusieurs difficultés d'ordre pratique apparaissent :

- la surface étant à 6 dimensions, il est nécessaire de calculer un nombre très important de points pour avoir une représentation du critère suffisamment précise² ;
- les calculs sur la cellule de base tridimensionnelle nécessitent un plus grand nombre d'inconnues pour discrétiser la cellule ainsi qu'un coût en temps de calcul plus élevé

2. Cet effet est connu sous le nom de « fléau de la dimension » (Richard Bellman).

à nombre d'inconnues identique (du fait de l'augmentation de la largeur de bande des matrices, de l'augmentation de la dimension des contraintes coniques, etc.);

- le fait de modéliser le béton à l'aide d'un critère de Mohr-Coulomb fait que le problème d'optimisation correspondant ne sera plus un problème de programmation conique du second-ordre (SOCP). En effet, le critère de Mohr-Coulomb en 3D, ne peut pas se représenter à l'aide de contraintes coniques du second-ordre mais uniquement à l'aide de matrices semi-définies positives [Bisbos et Pardalos, 2007]. Le problème d'optimisation correspondant devient donc un problème de programmation semi-définie positive (SDP). Bien que la version 7 de MOSEK permette de résoudre ce type de problème, les quelques tests numériques que nous avons menés semblent indiquer que la performance de l'algorithme est nettement moins bonne que dans le cas SOCP. En particulier, on devient très vite limité en termes de taille de problème et la qualité numérique de la solution est relativement instable en fonction de la direction de chargement pour un maillage donné.

La performance actuelle des algorithmes de programmation SDP limite donc notre ambition pour ce problème. Néanmoins, il est possible de tirer parti de la géométrie particulière de la cellule de base.

En effet, si l'on oublie momentanément la présence des armatures métalliques, les cellules de base que l'on considère sont invariantes dans la direction \underline{e}_z . Nous proposons alors de simplifier le problème en déterminant le critère de résistance macroscopique en *contraintes planes* de la cellule de base (Figure 10.6c), sans les armatures. Nous avons déjà mentionné que, dans le cas d'une coque homogène dans son plan, le critère de résistance généralisé en interaction (\underline{N} , \underline{M}) pouvait s'obtenir à partir du critère local en contraintes planes du matériau constitutif (voir chapitre 5). Ainsi, c'est uniquement la *présence d'hétérogénéités dans le plan longitudinal* qui impose la prise en compte d'un état de contraintes 3D complet pour la détermination du critère macroscopique équivalent.

Nous avons mené des calculs tridimensionnels (non présentés ici dans un souci de concision) qui semblent indiquer que :

- la prise en compte des composantes hors-plan du tenseur de contraintes $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ a une influence très faible sur la partie membranaire du critère ;
- cette influence diminue lorsque h/a augmente ;
- cette influence diminue lorsque b/a diminue.

La dernière remarque est cohérente avec le fait que l'importance de la prise en compte des composantes hors-plan est pilotée par la présence d'hétérogénéités dans le plan de la plaque. Cette influence est donc d'autant plus faible que la taille relative b/a des hétérogénéités est faible. Concernant la deuxième remarque, rappelons que lorsque $h/a \ll 1$, on s'attend à obtenir le critère de résistance en flexion coïncidant avec celui obtenu dans le cadre d'une modélisation de plaque de Love-Kirchhoff. Or, ce modèle suppose une résistance infinie à l'effort tranchant de la plaque. Un modèle 3D ne permet d'obtenir les mêmes résultats que si les composantes hors-plan de la contrainte peuvent prendre de grandes valeurs.

10.2. Homogénéisation de la coque hétérogène

Ainsi, le fait de ne pas considérer la présence des composantes hors-plan dans l'approche en contraintes planes aura une influence d'autant plus modérée sur le critère macroscopique que la plaque est épaisse et que la dimension des hétérogénéités est faible par rapport à l'épaisseur. Enfin, soulignons que le critère obtenu en contraintes planes constitue, dans tous les cas, une *approche par l'intérieur* du critère obtenu par une approche 3D complète, et que l'on se situe donc du côté de la sécurité.

10.2.2 Évaluation numérique du critère de résistance macroscopique

Le calcul numérique du critère de résistance macroscopique en contraintes planes est réalisé en résolvant le problème auxiliaire correspondant à l'aide d'éléments finis triangulaires avec interpolation linéaire du champ de contraintes pour l'approche statique et interpolation quadratique du champ de vitesse virtuelle pour l'approche cinématique. La procédure de détermination automatique des directions de calculs décrite dans l'Annexe B a été utilisée pour les deux approches.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la résistance mécanique du verre a été négligée, tandis que nous avons retenu un critère de résistance de Mohr-Coulomb tronqué en traction en *contraintes planes* pour le béton. Le problème d'optimisation correspond donc à un problème SOCP.

10.2.3 Approximation du critère

Suivant la démarche d'homogénéisation/approximation évoquée dans la partie précédente, il convient à présent de se pencher sur la question de l'approximation du critère de résistance macroscopique. Deux approches peuvent être envisagées :

- la première consiste à obtenir de manière semi-analytique le critère en efforts généralisés $(\underline{N}, \underline{M})$ de la coque à partir du critère homogénéisé en contraintes planes du matériau constitutif et d'approximer cet ensemble convexe à 6 dimensions ;
- la deuxième consiste, dans un premier temps, à approximer le critère homogénéisé en contraintes planes du matériau constitutif (surface à 3 dimensions), puis à obtenir de manière semi-analytique le critère en efforts généralisés $(\underline{N}, \underline{M})$.

Nous avons tenté de mettre en œuvre la première approche en approchant la surface à 6 dimensions à l'aide d'une union convexe d'ellipsoïdes comme au chapitre 8. Bien que l'algorithme du chapitre 7 permette de déterminer de tels ellipsoïdes, nous avons été limité par le nombre d'ellipsoïdes offrant un encadrement raisonnable du critère ainsi que par la taille des problèmes d'optimisation accessibles à notre puissance de calcul.

De la même manière, la mise en œuvre de la deuxième approche en approchant le critère en contraintes planes par une union convexe d'ellipsoïdes conjuguée à une discrétisation implicite dans l'épaisseur de la coque pour obtenir le critère en efforts généralisés conduit à des problèmes de trop grande taille pour pouvoir être résolus sur des ordinateurs standards.

Dimensionnement à la rupture de la marquise de la gare d'Austerlitz

Nous avons donc choisi de conserver la deuxième approche en limitant notre ambition de vouloir décrire précisément le critère de résistance homogénéisé en contraintes planes. Pour cela, nous avons remarqué que le critère obtenu était de forme relativement proche du critère de Mohr-Coulomb en contraintes planes tronqué en traction du béton, avec des résistances réduites pour des sollicitations situées dans le plan $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, 0)$. En revanche, le critère obtenu n'est pas isotrope, l'allure du critère étant différente pour des sollicitations orientées à 45° par exemple. On constate également une résistance au cisaillement pur plus faible que celles prédites par les résistances en traction/compression mesurées dans le plan $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, 0)$. Ces remarques nous amènent à proposer d'approcher le critère homogénéisé en contraintes planes par un critère de type Rankine, modifié de façon à tenir compte de l'anisotropie observée et s'écrivant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (\sigma_t - \sigma_{xx})(\sigma_t - \sigma_{yy}) \geq \zeta \sigma_{xy}^2 \\ (\sigma_c + \sigma_{xx})(\sigma_c + \sigma_{yy}) \geq \zeta \sigma_{xy}^2 \\ -\sigma_c \leq \sigma_{xx}, \sigma_{yy} \leq \sigma_t \end{cases} \quad (10.1)$$

où σ_c (resp. σ_t) représente la limite en compression (resp. traction) uniaxiale dans la direction x ou y tandis que le coefficient $\zeta \geq 0$ peut être relié à la valeur maximale τ_0 de la contrainte de cisaillement de la façon suivante :

$$\zeta = \left(\frac{2\tau_0}{\sigma_c + \sigma_t} \right)^2 \quad (10.2)$$

le cas où $\zeta = 1$ permet de retrouver la version isotrope du critère.

Les Figures 10.7a-10.7c représentent le critère de résistance macroscopique obtenu pour la géométrie de pavés n°1 (Figure 10.4a) pour différentes sollicitations ainsi que l'allure du critère de résistance approché par (10.1), ainsi que sa version isotrope correspondant à $\zeta = 1$.

On constate que, pour des sollicitations de traction/compression suivant les directions x et y (Figure 10.7a), on retrouve effectivement un critère du type Mohr-Coulomb tronqué en traction avec des valeurs de résistance plus faibles. L'approximation retenue néglige l'effet de l'angle de frottement dans la zone en traction dans la mesure où celle-ci aura très peu d'influence sur le critère final en efforts généralisés.

Pour des sollicitations de traction/compression orientées à 45° (Figure 10.7b), l'anisotropie du critère est évidente et l'approximation retenue constitue une approche par l'intérieur du critère dans ce cas. On constate que pour des sollicitations dans le plan $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})$ (Figure 10.7c), la version isotrope de l'approximation surestime la valeur de la résistance au cisaillement. De manière générale sur l'ensemble de l'espace des contraintes planes, la version anisotrope fournit une approximation de meilleure qualité que la version isotrope.

10.2. Homogénéisation de la coque hétérogène

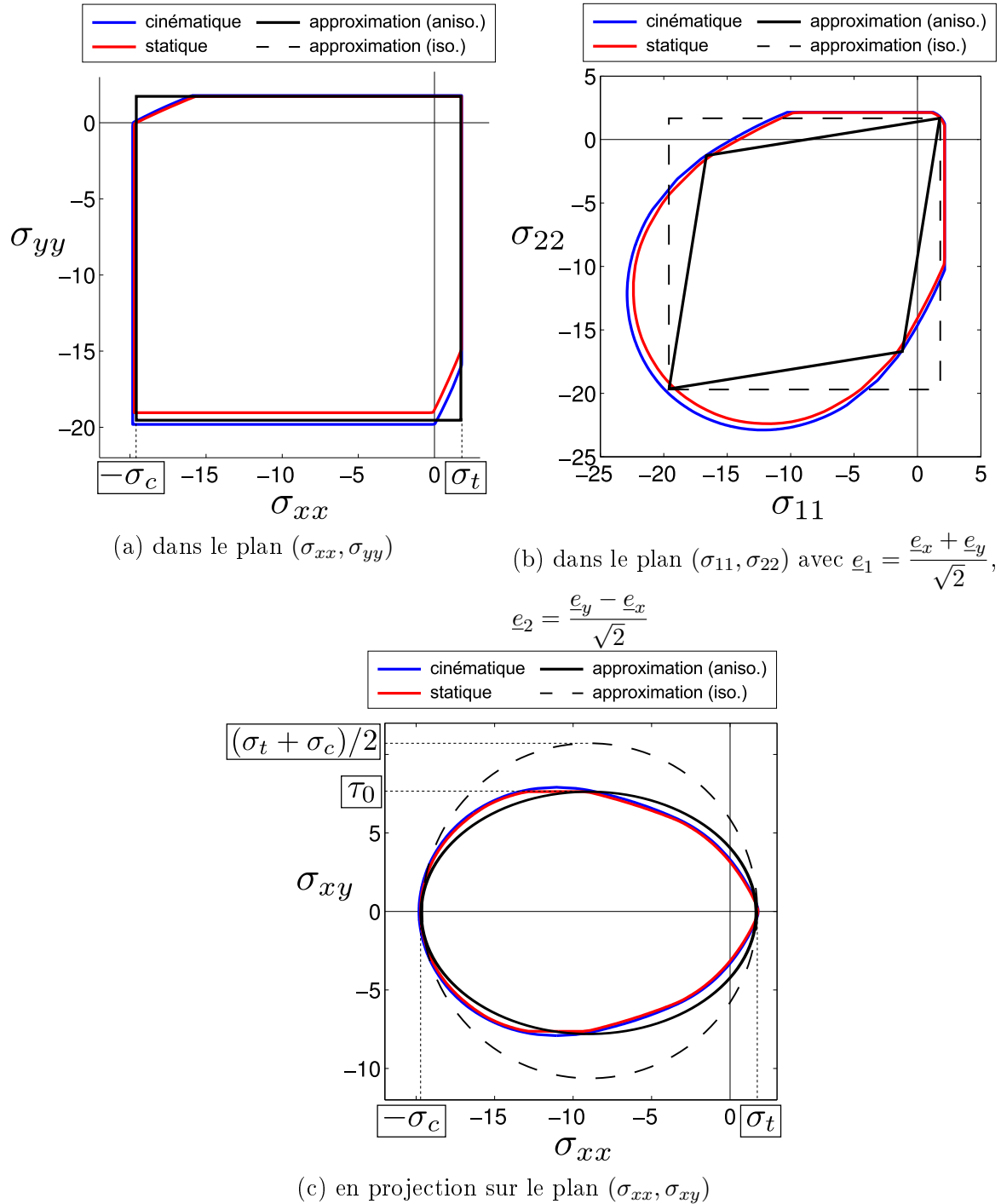


FIGURE 10.7 – Critère de résistance macroscopique en contraintes planes et approximations (anisotrope $\zeta \neq 1$, isotrope $\zeta = 1$) pour différentes sollicitations

Dimensionnement à la rupture de la marquise de la gare d'Austerlitz

Géométrie	σ_c	σ_t	τ_0
n°1 : 110 mm	19.6 MPa	1.8 MPa	7.7 MPa
n°2 : 150 mm	14.8 MPa	1.3 MPa	5.1 MPa
n°3 : 190 mm	10.0 MPa	0.9 MPa	2.9 MPa
<i>Béton seul</i>	<i>33.3 MPa</i>	<i>3 MPa</i>	<i>18.2 MPa</i>

TABLEAU 10.2 – Valeurs numériques des paramètres du critère de résistance macroscopique approché pour les trois géométries de pavés

Le Tableau 10.2 récapitule les valeurs des paramètres du critère approché retenues pour les 3 géométries de pavés. Il est à noter que les résistances en traction/compression obtenues sont très proches de celles données par les résistances initiales du béton $f_{c,d}$ et $f_{t,d}$ réduites du coefficient $1 - \frac{b}{a}$ qui constitue une borne inférieure de la résistance exacte [Maghous, 1991].

10.2.4 Critère de résistance de la coque homogénéisée

Nous utilisons donc le critère de résistance (10.1) comme critère de résistance du matériau constitutif de la coque. Remarquons tout d'abord que ce dernier peut s'écrire à l'aide de contraintes coniques du second-ordre de la façon suivante :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_t \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{Bmatrix} \sigma_c \\ \sigma_c \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10.3)$$

avec $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathcal{L}_r^3$

avec, pour rappel, $\mathcal{L}_r^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ t.q. } z^2 \leq 2xy; x, y \geq 0\}$.

La fonction d'appui correspondante s'écrit quant à elle :

$$\pi(\mathbf{d}) = \sigma_t \langle 1 \ 1 \ 0 \rangle \cdot \mathbf{d}^+ + \sigma_c \langle 1 \ 1 \ 0 \rangle \cdot \mathbf{d}^- \quad (10.4)$$

avec $\mathbf{d} = \mathbf{diag}(1, 1, \sqrt{2\zeta})(\mathbf{d}^+ - \mathbf{d}^-)$
 $\mathbf{d}^+, \mathbf{d}^- \in \mathcal{L}_r^3$

L'écriture du critère de résistance de la coque homogénéisée s'obtient alors suivant la démarche d'intégration implicite dans l'épaisseur décrite au chapitre 5, en ajoutant la contribution des armatures de renfort suivant (5.22) dans ce même chapitre, en fonction de la géométrie de pavés considérée.

10.3 Résultats de l'analyse

10.3.1 Notion de facteur de sécurité

Dans la suite, nous nous intéressons à la valeur du *facteur de sécurité* (ou *facteur de confiance*) calculée pour une géométrie de pavés et une combinaison de chargements données. D'un point de vue pratique, ce facteur sans dimension est calculé exactement de la même manière que les charges ultimes dont on a parlé jusqu'à présent et on n'en détermine en réalité qu'un encadrement par les approches statiques et cinématiques.

La valeur numérique de ce facteur de sécurité peut s'interpréter comme le coefficient multiplicatif à appliquer à l'ensemble du chargement qui conduirait à la ruine potentielle de la structure. Il est également possible de l'interpréter comme la valeur par laquelle il faudrait diviser l'ensemble des valeurs des résistances des matériaux de la structure pour conduire à la ruine potentielle de la structure.

Ainsi, dans l'analyse que nous effectuons ici, le poids propre n'est pas une charge fixe à partir de laquelle on détermine la valeur ultime de la surcharge que peut supporter la structure, bien que ce type de calcul soit tout à fait possible. Nous nous intéressons ici à la marge de sécurité dont on dispose vis-à-vis de la ruine de la structure par rapport aux valeurs des chargements et des résistances considérées pour le dimensionnement aux États Limites Ultimes de la structure.

10.3.2 Étude de convergence

Nous avons commencé par réaliser une étude de convergence numérique pour le cas de la géométrie de pavés n°1 et pour la combinaison de chargement n°1. Trois maillages différents de 1000, 2000 et 5000 éléments ont été utilisés. Nous avons également fait varier le degré de discrétisation n utilisé dans la procédure d'intégration implicite dans l'épaisseur de la coque pour l'écriture du critère en efforts généralisés.

Les encadrements du facteur de sécurité obtenus pour ces différentes configurations sont reportés sur la Figure 10.8. On constate que n a une influence très modérée sur la valeur de la borne calculée à partir de $n = 4$ ou 5. En revanche, la finesse du maillage a une influence relativement importante sur la qualité de la borne calculée. Pour le maillage de 5000 éléments, on obtient un écart relatif entre les deux bornes de 24%. La convergence relativement lente des bornes par rapport à la finesse du maillage peut s'expliquer, d'une part, par la complexité de la géométrie qui induit d'importantes variations locales des champs optimaux, comme on peut le voir sur la Figure 10.9 représentant les différentes composantes des efforts membranaires et des moments de flexion. D'autre part, une grande partie de cet écart provient vraisemblablement de la discrétisation en facettes planes de la géométrie courbe.

Néanmoins, il est intéressant de constater que le facteur de sécurité est de l'ordre de 4, ce qui laisse une marge de sécurité très importante compte-tenu des coefficients de sécurité et de combinaisons ELU déjà appliqués lors du dimensionnement. Notons que, dans la note technique préliminaire, il a été supposé que la coque était dimensionnée

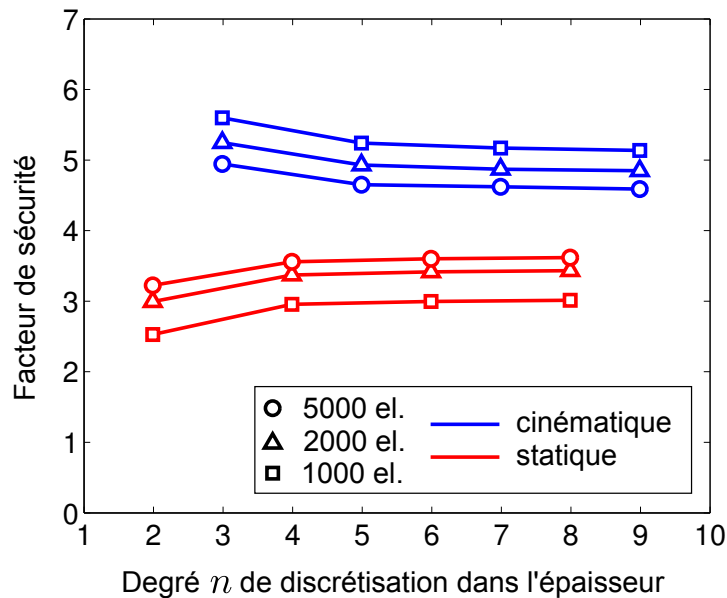


FIGURE 10.8 – Etude de convergence du facteur numérique pour différents maillages et degrés de discrétisation du critère généralisé

essentiellement à la flexion et que les efforts membranaires pouvaient être négligés pour le dimensionnement du ferrailage. Un moment de flexion maximal de 30 kN.m/m avait été retenu comme ordre de grandeur pour le prédimensionnement du ferrailage. Pour le cas considéré ici, la résistance à l'effort membranaire uniaxial est donnée par :

$$N_0^+ = \sigma_t h + \sum_{i=1}^{n_{ac}} N_s^i = 0.89 \text{ MN/m} \quad \text{en traction} \quad (10.5)$$

$$N_0^- = \sigma_c h + \sum_{i=1}^{n_{ac}} N_s^i = 3.39 \text{ MN/m} \quad \text{en compression} \quad (10.6)$$

On constate donc que l'effort membranaire atteint sa valeur maximale en traction sur une grande partie de la structure ce qui laisse à penser que l'effort membranaire joue un rôle important dans le fonctionnement mécanique de la structure et a une influence non négligeable sur ses capacités de résistance. La résistance au moment de flexion uniaxial maximal vaut, quant à elle, $M_0 = 71.8 \text{ kN.m/m}$, on observe là aussi que le moment de flexion atteint sa valeur maximale en flexion positive ou négative sur une grande partie de la structure.

10.3. Résultats de l'analyse

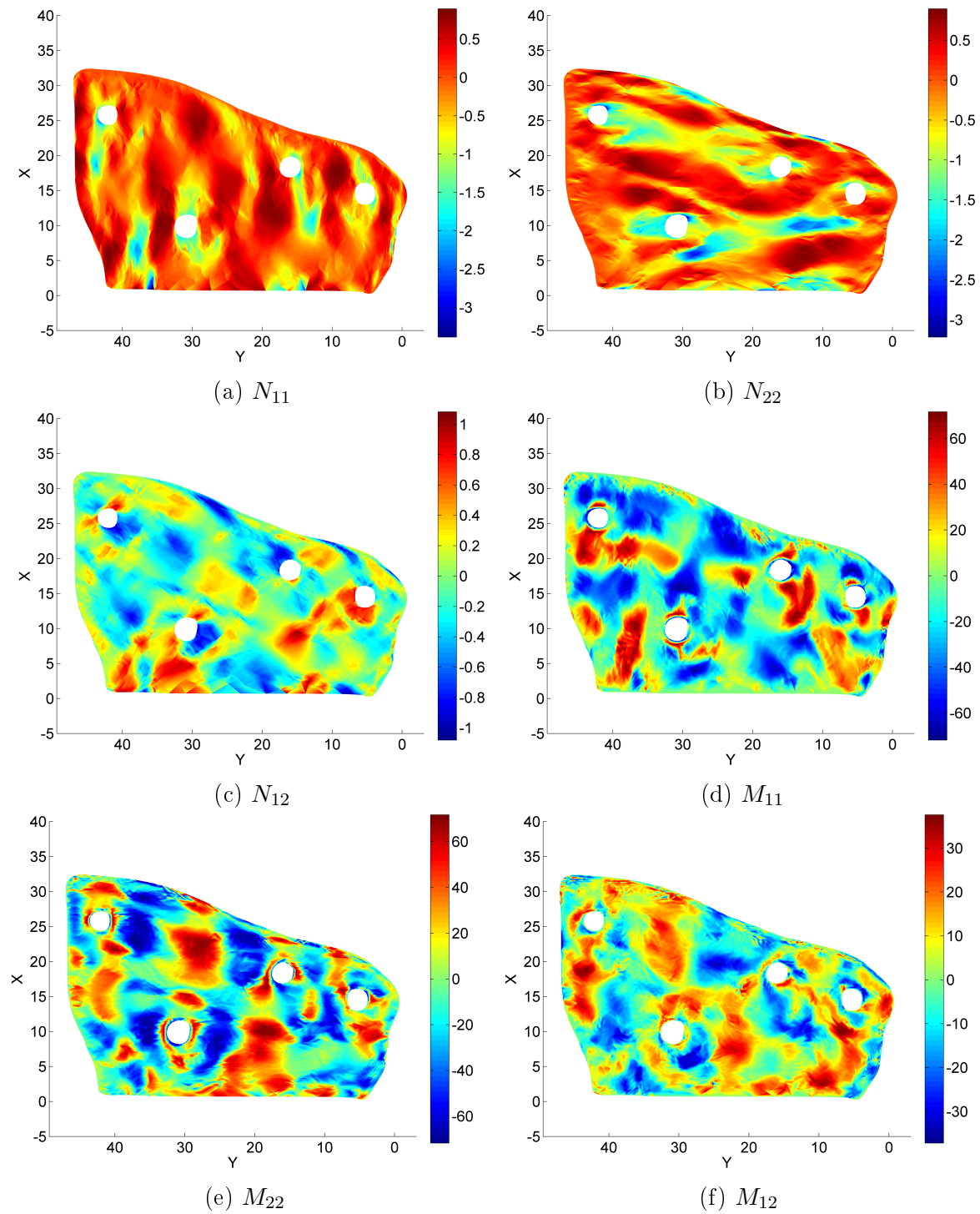


FIGURE 10.9 – Composantes du tenseur des efforts membranaires \underline{N} en MN/m et des moments de flexion \underline{M} en kN.m/m (la direction \underline{a}_1 du repère local est selon \underline{e}_X , la direction \underline{a}_2 selon \underline{e}_Y .)

Dimensionnement à la rupture de la marquise de la gare d'Austerlitz

Enfin, la représentation du mécanisme de ruine (Figure 10.10) montre une ruine en flexion de la partie de la structure en porte-à-faux située à l'extrémité Nord. Il semble donc que cette zone soit plus vulnérable que le reste de la structure, ce qui avait également été relevé dans l'étude préliminaire, suggérant éventuellement de renforcer cette dernière.

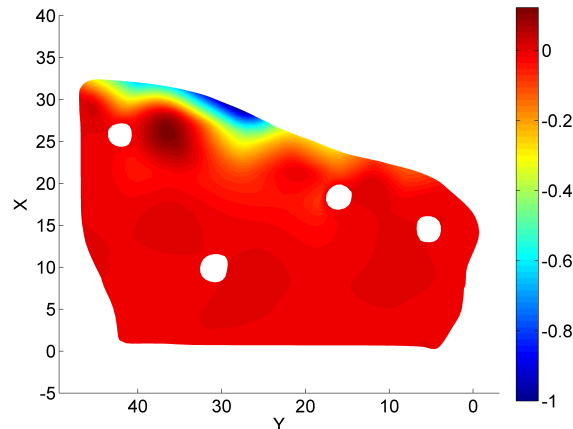


FIGURE 10.10 – Mécanisme de ruine obtenu par l'approche cinématique (isovaleurs de l'intensité relative de la composante verticale U_Z)

10.3.3 Facteur de sécurité pour les différentes configurations

Dans ce qui suit, nous avons utilisé le maillage de 5000 éléments et un degré de discrétisation de $n = 8$ pour l'approche statique et $n = 7$ pour l'approche cinématique. Mentionnons ici que les problèmes d'optimisation correspondant à ces valeurs sont de très grande taille : de l'ordre de 4 à 5 millions de variables d'optimisation, 3 millions de contraintes linéaires et 1 million de contraintes coniques. Le temps d'optimisation nécessaire à MOSEK pour résoudre de tels problèmes sur un ordinateur de bureau standard est de l'ordre de 15 à 20 minutes.

Nous avons calculé les encadrements du facteur de sécurité pour les trois géométries de pavés et les trois combinaisons de chargement différentes. Les résultats sont reportés dans le Tableau 10.3. Comme on pouvait s'y attendre, la valeur du facteur de sécurité décroît sensiblement suivant la géométrie de pavés utilisée. Compte-tenu du fait que la structure réelle comprend les trois géométries sur différentes zones, le facteur de sécurité devrait se situer dans ce cas entre ceux correspondant aux géométries n°1 et 3. D'autre part, il semble que la combinaison de chargement la plus critique soit la première, *i.e.* celle relative à la combinaison du poids propre et d'une charge uniforme de neige. La résistance au soulèvement dû au vent (combinaison n°2) présente des facteurs de sécurité deux fois plus importants. La combinaison n°3 relative au poids propre et à un chargement asymétrique dû à la combinaison du vent et des charges dues aux piétons

10.3. Résultats de l'analyse

Géométrie de pavés	Combinaison n°1	Combinaison n°2	Combinaison n°3
n°1 : 110 mm	3.6—4.6	8.0—10.3	4.7—6.4
n°2 : 150 mm	2.6—3.3	5.7—7.4	3.3—4.6
n°3 : 190 mm	1.4—1.9	3.2—4.2	1.8—2.6

TABLEAU 10.3 – Encadrement du facteur de sécurité (statique—cinématique) pour les différentes configurations étudiées

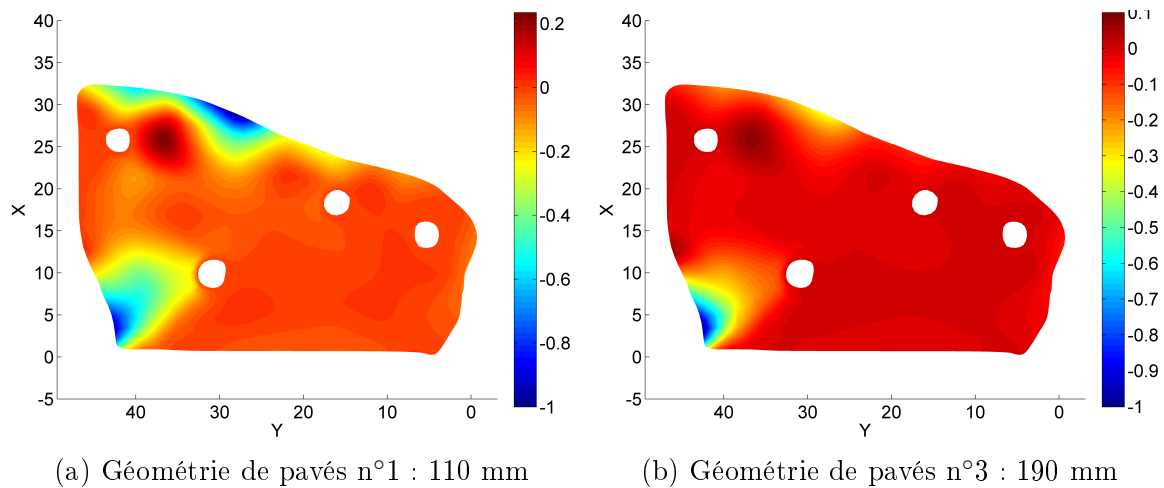


FIGURE 10.11 – Mécanisme de ruine pour la combinaison asymétrique n°3 pour deux géométries de pavés

présente des facteurs de sécurité proches de la première, mais légèrement supérieurs. L'allure du mécanisme de ruine pour cette combinaison (Figure 10.11) montre une vulnérabilité de la zone située à l'extrémité Ouest, en particulier pour les pavés de 190 mm.

10.4 Conclusions

Ce chapitre a permis d'illustrer la mise en œuvre d'une partie des outils développés dans cette thèse sur un cas d'étude réel, relativement complexe. Une approche par homogénéisation périodique a été utilisée afin de remplacer la coque hétérogène par une coque homogène équivalente. Bien que ne disposant pas de toutes les informations concernant la géométrie réelle de la marquise, des encadrements du facteur de sécurité pour différentes configurations géométriques et différentes combinaisons de chargements ont été obtenus. Les valeurs calculées semblent relativement raisonnables et montrent que, même en tenant compte de coefficients de sécurité dans la valeur des résistances des matériaux et dans les combinaisons des chargements aux ELU, la structure dispose d'une marge de sécurité confortable compte-tenu des hypothèses de modélisation retenues.

Les calculs effectués sont d'une taille relativement importante même pour des maillages de quelques milliers d'éléments et nécessitent plusieurs minutes d'optimisation. L'écart final sur l'encadrement est de l'ordre de 20 à 30%. Malgré tout, l'approche par le calcul à la rupture fournit des informations précieuses quant au mode de ruine de la structure, permettant éventuellement d'en modifier le dimensionnement. Il est également important de garder à l'esprit que le dimensionnement aux ELU par combinaison de calculs élastiques peut parfois trouver ses limites et une analyse mécanique plus complexe s'avérer nécessaire, l'approche par le calcul à la rupture devenant alors attractive pour l'ingénieur.

Il semble évident sur cet exemple que la discrétisation de la coque par facettes planes présente certaines limites du point de vue de la vitesse de convergence du facteur de sécurité par rapport à la finesse du maillage. Il conviendrait alors d'étudier la formulation d'éléments finis de coque courbes en calcul à la rupture pour améliorer cet aspect. D'autre part, l'homogénéisation de critères de résistance à 6 dimensions présente des difficultés d'ordre technique qui font que les méthodes développées précédemment sont difficiles à mettre en œuvre en pratique dans ce cas. Il serait alors intéressant d'envisager d'autres stratégies d'approximation sur la base des travaux effectués dans cette thèse.

* *

*

Conclusions et perspectives

Conclusions

Dans le but de proposer une nouvelle approche plus rationnelle du dimensionnement à la ruine des ouvrages de génie civil, la théorie du calcul à la rupture a été mise en œuvre numériquement tout au long de ce travail, en développant différents outils relatifs à la modélisation des structures de plaques et coques, homogènes et hétérogènes.

Le chapitre 1 a rappelé le cadre théorique du calcul à la rupture et a évoqué différents exemples d'application dans le domaine du génie civil. Dans le chapitre 2, nous avons évoqué les spécificités de la mise en œuvre numérique du calcul à la rupture, en insistant sur les points de blocage qui sont certainement à l'origine du développement relativement lent des approches numériques dans ce domaine. Nous avons insisté, plus particulièrement, sur les aspects relatifs aux techniques de discrétisation et aux procédures d'optimisation, justifiant ainsi notre choix portant sur l'utilisation de la méthode des éléments finis et des outils de programmation conique. Ce chapitre a également été l'occasion d'effectuer une revue des logiciels (peu nombreux) dédiés à cette approche.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous nous sommes concentrés sur le développement d'éléments finis dédiés à la mise en œuvre numérique du calcul à la rupture pour différents modèles mécaniques.

Au chapitre 3, nous avons proposé plusieurs éléments finis pour la mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur dans le cas des plaques minces en flexion, combinant à la fois taux de courbure virtuelle et discontinuité de vitesse virtuelle de rotation dans le calcul de la puissance résistante maximale. Cette approche présente deux avantages : premièrement, la difficulté de construire des éléments finis de plaque assurant la continuité de la vitesse transversale et celle de la vitesse de rotation (continuité C^1) est évitée ; deuxièmement, ces éléments présentent une précision supérieure à des éléments C^1 d'ordre plus élevé, notamment dans le cas de conditions aux limites d'encastrement.

Le chapitre 4 traite du cas, plus général, des plaques épaisses *i.e.* admettant une résistance finie à l'effort tranchant. Nous avons considéré deux critères de résistance généralisés différents, prenant en compte ou non une interaction entre les moments de flexion et les efforts tranchants. Des éléments finis en efforts généralisés ont été proposés, pour la première fois, pour ce type de structure. Nous avons également formulé des éléments finis présentant des discontinuités du champ de vitesse et du champ de rotation pour la mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur. Nous avons montré que les éléments finis discontinus présentent des performances

bien supérieures aux éléments finis continus, évitant naturellement le phénomène de verrouillage en cisaillement, contrairement à ces derniers.

L'extension au cas des structures de coque a été effectuée au chapitre 5. Plutôt que de se concentrer sur le développement, relativement complexe, d'éléments finis de coque courbes, nous avons fait le choix de discrétiser la géométrie en facettes planes afin de mettre à profit les éléments finis de plaque développés précédemment en les superposant à un élément fini de membrane. L'un des points qui nous a paru essentiel dans la mise en œuvre du calcul à la rupture pour les coques est relatif à la formulation d'un critère de résistance en efforts généralisés et, plus précisément, en interaction effort membranaire-moment de flexion dans le cas des coques minces. Si certains critères approchés ont déjà été proposés dans la littérature pour des critères particuliers, nous proposons ici une méthode, fondée sur un changement d'échelle implicite, permettant d'obtenir des approximations par l'intérieur et par l'extérieur du critère généralisé, indépendamment du critère du matériau constitutif de la coque. Malgré l'utilisation d'éléments finis discontinus, nous avons constaté que ces derniers souffrent du phénomène de verrouillage en membrane dans la limite des coques très minces, comme de nombreux autres éléments en dehors du contexte du calcul à la rupture.

Après nous être intéressés au développement d'éléments finis pour les structures homogènes, la troisième partie a été consacrée à une mise en œuvre numérique de la démarche d'homogénéisation périodique pour les structures hétérogènes.

La démarche d'homogénéisation périodique en calcul à la rupture a été formulée au chapitre 6 dans le contexte particulier des plaques minces en flexion. En particulier, nous avons défini un problème auxiliaire de calcul à la rupture sur la cellule de base permettant de donner une définition claire du critère de résistance macroscopique. Les éléments finis de plaque mince en flexion du chapitre 3 ont été utilisés afin de résoudre le problème auxiliaire sur la cellule de base et de déterminer numériquement le critère de résistance macroscopique. L'annexe B a également proposé une stratégie de choix des directions de calculs, adaptée au caractère anisotrope des critères calculés.

À notre connaissance, très peu de travaux se sont intéressés à la problématique du calcul à la rupture à l'échelle de la structure homogénéisée. Or, cette étape pose un vrai problème dans la mesure où les critères de résistance macroscopiques sont, en général, déterminés numériquement. Il devient donc nécessaire d'approcher ces critères afin d'être en mesure de formuler le problème d'optimisation à résoudre à l'échelle de la structure. Plutôt que de linéariser le critère macroscopique, nous avons proposé au chapitre 7 un algorithme permettant de construire une approximation par union convexe d'ellipsoïdes. Nous avons pu ainsi obtenir une approximation de très bonne qualité avec relativement peu de paramètres, tout en préservant la structure de programmation conique du second ordre du problème d'optimisation à l'échelle du calcul de structure. Le chapitre 8 constitue ainsi la dernière étape de la démarche combinant homogénéisation et approximation en mettant en œuvre le calcul à l'échelle de la structure homogénéisée à l'aide de critères de résistance approchés. Nous avons

Conclusions et perspectives

également montré qu'il est possible d'estimer, dans une certaine mesure, l'erreur d'approximation finale induite par les différentes étapes de la démarche. Une des caractéristiques essentielle de cette dernière est relative au fait que le caractère de borne des approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur est conservé jusqu'au calcul de structure. Malgré la complexité du problème à résoudre, les exemples numériques ont montré que l'encadrement final des charges extrêmes est satisfaisant, tandis que le temps de calcul reste raisonnable.

Dans le but d'illustrer de manière plus convaincante les potentialités que recèle l'approche du calcul à la rupture, la dernière partie de ce travail s'est proposée d'examiner deux cas d'étude de l'évaluation de la sécurité d'ouvrages de génie civil. Ces deux exemples présentent des problématiques relativement complexes auxquelles l'approche par le calcul à la rupture permet d'apporter une réponse.

Au chapitre 9, nous avons examiné la problématique de la stabilité au feu de panneaux en béton armé de grande hauteur. La complexité de ce type de structure provient du fait que la ruine est fortement influencée par la conjonction d'un effet de changement de géométrie, provoqué par une déformation d'origine thermique, et d'une dégradation des capacités de résistance des matériaux due à la présence d'un gradient thermique dans l'épaisseur du panneau. Sur la base des travaux de Pham, nous avons proposé d'évaluer la stabilité d'une telle structure en mettant en œuvre la démarche du calcul à la rupture sur la géométrie déformée, déterminée au préalable par un calcul thermo-élastique en transformations finies. L'analyse numérique de la stabilité a alors été effectuée à l'aide des éléments finis de coque développés au chapitre 5 et la formulation générale du critère de résistance macroscopique proposée à cette occasion nous a permis de prendre en compte l'influence de la dégradation des propriétés de résistance du béton et de l'acier dans l'épaisseur du panneau. Des encadrements du facteur de stabilité ont été obtenus dans différentes configurations géométriques et nous avons montré qu'il était également possible de prendre en compte la présence de joints entre différents panneaux de manière relativement simple.

Enfin, nous nous sommes intéressés, au chapitre 10, à la vérification, par le calcul à la rupture, de la marquise de la gare d'Austerlitz, actuellement en cours de construction. La complexité de l'analyse de la stabilité de cette structure provient de sa géométrie puisqu'il s'agit d'une coque courbe en béton armé, perforée par un réseau périodique de pavés de verre. La présence d'une forte hétérogénéité des matériaux constituant la coque a été l'occasion de proposer une démarche d'homogénéisation périodique permettant d'effectuer le calcul sur une structure homogène équivalente. Si la complexité de la structure ne nous a pas permis de transposer tous les aspects de la démarche proposée dans la troisième partie, il nous a quand même été possible d'évaluer la sécurité de la structure vis-à-vis de la ruine pour différents types de chargement, typiques de ceux utilisés pour le dimensionnement de la structure aux États Limites Ultimes. En particulier, nous avons pu montrer que la structure dispose d'une marge de sécurité confortable compte-tenu des hypothèses de modélisation retenues (coefficients de sécurité sur les résistances des matériaux, coefficients de combinaison des cas de charge, approximations

par l'intérieur du critère de résistance, etc.).

Perspectives

Si les développements réalisés au cours de cette thèse ont permis d'identifier des outils numériques efficaces (éléments finis, programmation conique) pour le calcul à la rupture des structures de génie civil tout en illustrant leur performance sur des problématiques complexes (hétérogénéité des matériaux notamment), il existe de nombreuses pistes de prolongement de ce travail qu'il serait intéressant d'explorer. Nous en mentionnons ici quelques unes.

Développement d'un outil de calcul à la rupture pour les structures de plaque et de coque

La diffusion à plus grande échelle des travaux réalisés dans cette thèse passe certainement par la création et la mise à disposition d'un code de calcul général dédié au calcul à la rupture par éléments finis des structures de plaque et coque, mettant en œuvre de manière systématique les approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur. La première amélioration qu'il serait intéressant d'y intégrer concerne le couplage avec une méthode de remaillage adaptatif. Combinée à l'efficacité des éléments finis incluant des discontinuités, l'utilisation d'une telle procédure permettrait d'obtenir relativement facilement un encadrement très précis de la charge extrême sur des exemples complexes.

Le couplage des éléments de plaque et coque à des éléments de poutre ou d'interface (exemple des joints du chapitre 9) apporterait également une plus-value intéressante à la démarche.

Il serait également intéressant de réexaminer les principes de dimensionnement des dalles en béton armé vis-à-vis du poinçonnement de poteaux sous l'angle du calcul à la rupture. Cette étude pourrait éventuellement constituer un guide à la formulation d'un critère de résistance en effort tranchant dans une modélisation de plaque épaisse.

Si ces aspects permettraient d'enrichir sans trop de problèmes les travaux effectués ici, le développement d'éléments finis de coque courbes requiert certainement plus de travail. Ce serait également l'occasion de comparer, de manière approfondie, les performances de tels éléments par rapport à une discrétisation en facettes planes, que ce soit en termes de précision de l'estimation des charges ultimes ou vis-à-vis du phénomène de verrouillage en membrane. Mentionnons également que nous avons utilisé des éléments finis de coques (modérément) épaisses dans le cas particulier d'un critère de résistance avec résistance infinie à l'effort tranchant, correspondant au cas particulier des coques minces. Il pourrait alors être plus avantageux en termes de coût de calcul de développer des éléments finis spécifiques au cas des coques minces.

Enfin, l'utilisation de plaques ou coques multicouches dans les structures du génie civil devient de plus en plus fréquente : on peut penser au renforcement de structures

Conclusions et perspectives

en béton armé par collage de composites, aux plaques « sandwich », aux plaques en bois lamellé-collé, etc. Si l'écriture du critère de résistance généralisé d'une coque par changement d'échelle implicite semble tout à fait adaptée à ce type de structure, ces dernières présentent néanmoins certaines spécificités qu'il conviendrait de modéliser. En effet, dans certaines situations, de forts contrastes de propriétés mécaniques existent entre les couches et la prise en compte de l'influence de l'effort tranchant devient prépondérante. Il conviendrait alors d'accorder une attention toute particulière à la détermination d'un critère de résistance en effort tranchant.

La modélisation des effets d'interfaces (colle par exemple) entre les différentes couches est également un élément important à prendre en compte dans la modélisation des capacités de résistance des structures multicouches.

Dimensionnement des structures massives

La démarche menée dans ce travail dans le contexte des modèles de milieux continus généralisés pourrait également contribuer à améliorer le dimensionnement des structures massives en béton armé dans le cadre d'une modélisation de milieu continu tridimensionnel. Il serait possible de revisiter des méthodes de dimensionnement de telles structures, telle que la méthode des bielles et tirants, dans le cadre rigoureux du calcul à la rupture et en tirant profit de la performance des outils d'optimisation. L'automatisation de la recherche de schémas optimaux de bielles et tirants pourrait ainsi être une aide importante à l'ingénieur lorsque le volume étudié devient complexe. La méthode des bielles et tirants permet également d'identifier les zones en traction qu'il convient de renforcer par des armatures en acier. L'optimisation de la position des renforcements à partir d'un volume de béton uniquement constituera certainement un problème relativement complexe à résoudre. Il conviendra certainement de développer des stratégies consistant à calculer, de manière itérative, le schéma de bielles et tirants optimal ainsi que la quantité d'acier nécessaire.

La programmation conique comme nouvel outil numérique

Le travail réalisé au cours de cette thèse nous a permis de prendre conscience du potentiel offert par les solveurs de programmation conique et de leur efficacité. En effet, nous avons vu que ces outils permettent de modéliser de nombreux critères de résistance et de résoudre efficacement les problèmes d'optimisation associés. La généralisation de la formulation de problèmes de mécanique comme problèmes de programmation conique, au-delà du domaine du calcul à la rupture, constitue, de ce fait, une piste de recherche intéressante.

Le début d'une collaboration avec les équipes *Rhéophysique* et *Milieux Poreux* du laboratoire Navier nous ainsi donné l'occasion de proposer d'utiliser les outils de la programmation conique comme nouvelle méthode de résolution d'écoulements stationnaires de fluides à seuil, *i.e.* présentant un comportement de type visco-plastique. En

particulier, nous avons montré dans [Bleyer *et al.*, 2015b] qu'il était possible de réécrire le principe du minimum de l'énergie potentielle pour des fluides à seuil présentant un comportement visco-plastique de Bingham ou de Herschel-Bulkley comme un problème de programmation conique du second-ordre, la résolution de ce type de problème reposant, jusqu'à présent, sur des approches par régularisation ou par Lagrangien Augmenté (voir chapitre 2). Les améliorations offertes par la programmation conique permettent d'envisager une généralisation à des écoulements plus complexes (stationnaires, effets de la tension de surface, évolution de surfaces libres, etc.).

D'autre part, nous avons également rapidement mentionné au chapitre 2, au sujet du logiciel OPTUMG2, l'utilisation de la programmation conique comme outil de résolution dans le cadre d'un comportement élastoplastique. En effet, la résolution de l'évolution élastoplastique d'une structure pour un incrément de charge donné peut s'effectuer dans un formalisme très proche de celui des problèmes d'optimisation en calcul à la rupture [Krabbenhoft *et al.*, 2007, Krabbenhøft *et al.*, 2007], à partir des principes de minimum de l'énergie potentielle ou complémentaire. On peut avancer plusieurs avantages à l'utilisation de ce type d'approche par rapport aux techniques traditionnelles (algorithme de retour radial à l'échelle locale + méthode de Newton à l'échelle de la structure par exemple), notamment l'absence de difficultés liées à la projection sur un critère non-régulier, la possibilité d'effectuer de grands incréments du chargement, etc. Il conviendrait, toutefois, d'évaluer plus en détails les avantages et inconvénients de ce type d'approche par rapport aux stratégies plus conventionnelles.

Pour conclure, le formalisme de la programmation linéaire et conique présente un intérêt certain dans de nombreuses situations où le comportement mécanique est non-linéaire et non-régulier (élasto-plasticité, visco-plasticité, contact, etc.). Nous pensons donc qu'il s'agit d'un outil prometteur dans le domaine des approches numériques en mécanique des matériaux et des structures.

Prise en compte des changements de géométrie

L'hypothèse des petites perturbations est une hypothèse essentielle de la démarche du calcul à la rupture. Néanmoins, il existe de nombreuses situations dans le domaine du génie civil dans lesquelles cette hypothèse n'est plus vérifiée : flambement de poteaux, voilement/déversement des poutres, déformations pour les structures très élancées (cf. chapitre 9), etc. Ainsi, dans les cas où la ruine de l'ouvrage se produit à la suite de changements de géométrie importants, l'interprétation des résultats du calcul à la rupture peut être remise en question. Il serait donc extrêmement intéressant d'évaluer dans quelle mesure ces changements de géométrie viennent modifier la charge de ruine de la structure et ainsi corriger les estimations faites par le calcul à la rupture.

L'analyse effectuée au chapitre 9 sur la stabilité au feu des panneaux en béton armé a tenté d'apporter un premier élément de réponse dans cette direction. Bien entendu,

Conclusions et perspectives

la détermination d'une configuration géométrique par une analyse thermo-élastique est une simplification importante, tendant certainement à sous-estimer l'influence des changements de géométrie sur la diminution du facteur de stabilité. Cet aspect pourra éventuellement être analysé en confrontant les résultats numériques aux futurs résultats expérimentaux d'un projet de campagne d'essais sur des panneaux de 9 m de hauteur et 3 m de largeur au Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, à travers l'utilisation du grand équipement Vulcain.

Enfin, certains travaux ont proposé des approches séquentielles du calcul à la rupture dans lesquelles le mécanisme de ruine est utilisé comme champ de déplacement conduisant à la détermination d'une nouvelle configuration géométrique sur laquelle est effectué un nouveau calcul [Yang, 1993]. On peut néanmoins questionner ce type de démarche : comment donner rigoureusement le sens d'un champ de déplacement à un champ de vitesse virtuelle (présentant éventuellement des discontinuités) ? Comment prendre en compte les phénomènes d'instabilité ? Ces questions mériteraient donc une analyse théorique approfondie de l'influence des changements de géométrie sur la charge ultime d'une structure.

Perspectives d'ordre général

Enfin, pour que la démarche du calcul à la rupture puisse être intégrée à plus grande échelle dans la pratique courante de l'ingénieur ainsi qu'au niveau des dispositions réglementaires, il serait certainement nécessaire d'effectuer un travail de validation conséquent, permettant de confronter les prédictions du calcul à la rupture à des résultats expérimentaux ou à des modèles de comportement mécanique sophistiqués. En particulier, on peut se poser la question du degré de confiance à accorder aux résultats du calcul à la rupture lorsque le comportement du matériau considéré s'écarte de la ductilité (fragilité du béton en traction, caractère non associé des règles d'écoulement plastique de certains matériaux, etc.).

La démarche du calcul à la rupture pourrait également s'intégrer relativement facilement à une approche probabiliste de la sécurité des constructions, comme cela l'a été souligné dans [Salençon, 1983]. Il serait alors possible de donner une réponse à la notion de *probabilité de ruine* d'une structure sous l'introduction de paramètres de résistance ou de modes de chargement aléatoires.

* *
*

Annexe A

Éléments d'analyse et d'optimisation convexe

Dans cette annexe, le produit scalaire de l'espace euclidien est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la norme euclidienne associée étant notée $\|\cdot\|_2$. Le lecteur est invité à se référer à l'ouvrage [Boyd et Vandenberghe, 2004] pour plus de détails.

A.1 Analyse convexe

A.1.1 Ensembles et fonctions convexes

Un ensemble $G \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si et seulement si il contient tout segment reliant tout couple de points :

$$\forall (x, y) \in G \times G, 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in G \quad (\text{A.1})$$

De manière similaire, une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0 \leq \lambda \leq 1, \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (\text{A.2})$$

Pour tout ensemble A , on définit son *enveloppe (ou union) convexe* $\mathbf{conv} A$ comme l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de ses points :

$$\mathbf{conv} A = \left\{ \sum \lambda_i x_i \mid \sum \lambda_i = 1 \text{ et } x_i \in A, \lambda_i \geq 0 \forall i \right\} \quad (\text{A.3})$$

Un ensemble convexe K est un *cône* si et seulement si il est fermé pour toute combinaison positive de ses éléments *i.e.* :

$$\forall (x, y) \in K \times K, \lambda, \lambda' \geq 0, \quad \lambda x + \lambda' y \in K \quad (\text{A.4})$$

On dit que $K \subset \mathbb{R}^n$ est *propre* si $K \cap (-K) = \{0\}$ et $\dim K = n$. Les cônes propres permettent de définir une relation d'ordre généralisée¹ du type $x - y \in K \Leftrightarrow x \succeq_K y$ et permettent donc de représenter des contraintes d'inégalités non-linéaires et convexes.

1. satisfaisant les propriétés de réflexivité, antisymétrie et transitivité nécessaires à la définition d'une relation d'ordre.

Pour toute fonction convexe f à valeur dans \mathbb{R} , on définit son *épigraphe* **epi** f de la façon suivante :

$$\mathbf{epi} f = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq t\} \quad (\text{A.5})$$

Si, de plus, f est positivement homogène de degré 1 *i.e.* :

$$f(\lambda y) = \lambda f(y) \quad \forall y, \forall \lambda > 0 \quad (\text{A.6})$$

alors son épigraphe est un cône (convexe).

Pour tout ensemble convexe G , on définit sa *fonction d'appui* $\pi_G(y)$ comme la distance par rapport à l'origine d'un plan tangent à G et de normale y :

$$\pi_G(y) = \sup_{x \in G} \langle x, y \rangle \quad (\text{A.7})$$

La fonction d'appui est une fonction convexe à valeurs réelles et positivement homogène de degré 1. Elle est à valeurs bornées si et seulement si G est borné. De plus, π_G est à valeurs positives si et seulement si G contient 0.

On peut décrire G via sa fonction d'appui comme l'intersection de l'ensemble de ses hyperplans tangents :

$$x \in G \iff \forall y \quad \langle x, y \rangle \leq \pi_G(y) \quad (\text{A.8})$$

Si G contient 0, on peut aussi définir G via une *jauge* j_G telle que :

$$j_G(x) = \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda G \} \quad (\text{A.9})$$

j_G est alors également une fonction convexe positivement homogène de degré 1 et on a :

$$x \in G \iff j_G(x) \leq 1 \quad (\text{A.10})$$

A.1.2 Opérations préservant la convexité

Nous donnons ici une liste d'opérations sur des fonctions préservant leur convexité :

- **somme pondérée de poids positifs** : si les f_i sont convexes et les $\lambda_i \geq 0$ alors

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p \text{ est convexe} \quad (\text{A.11})$$

- **transformation affine** : si f est convexe alors g définie par $g(x) = f(Ax + b)$ avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ est convexe

- **maximum** : si les f_i sont convexes alors :

$$g : x \mapsto \max\{f_1(x), \dots, f_p(x)\} \text{ est convexe} \quad (\text{A.12})$$

- **inf-convolution** : le minimum de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe, en revanche si f et g sont convexes alors leur inf-convolution est convexe :

$$h = (f \star g) : x \mapsto \inf_y \{f(y) + g(x - y)\} \text{ est convexe} \quad (\text{A.13})$$

A.1. Analyse convexe

Les opérations suivantes préservent la convexité des ensembles convexes :

- **intersection** : si les G_i sont convexes alors :

$$\bigcap G_i \text{ est convexe} \quad (\text{A.14})$$

- **somme de Minkowski** : si A et B sont convexes alors :

$$A \oplus B = \{c \mid \exists a \in A, b \in B, c = a + b\} \text{ est convexe} \quad (\text{A.15})$$

- **projection** sur un sous espace
- **union convexe** : l'union de deux convexes A et B n'est pas nécessairement convexe, en revanche leur union convexe $\text{conv}\{A \cup B\}$ l'est par construction.

A.1.3 Dualité

Pour toute fonction (convexe ou non) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on peut définir sa *transformée de Legendre-Fenchel* f^* (on parle aussi de fonction *duale* ou *conjuguée*) de la manière suivante :

$$f^*(y) = \sup_x \{\langle x, y \rangle - f(x)\} \quad (\text{A.16})$$

Cette fonction est convexe et on a l'*inégalité de Fenchel* :

$$f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.17})$$

De plus, $f = f^{**}$ si et seulement si f est convexe et semi-continue inférieurement.

En particulier, si $\mathbf{1}_G$ est la *fonction indicatrice* de G :

$$\mathbf{1}_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in G \\ +\infty & \text{si } x \notin G \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

alors on a :

$$\mathbf{1}_G^*(y) = \sup_x \{\langle x, y \rangle - \mathbf{1}_G(x)\} = \sup_{x \in G} \{\langle x, y \rangle\} = \pi_G(y) \quad (\text{A.19})$$

Respectivement, on a aussi $\pi_G^* = \mathbf{1}_G$. Les fonctions d'appui et les fonctions indicatrices sont donc duales l'une de l'autre.

Pour tout cône K , on définit son cône *dual* :

$$K^* = \{y \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\} \quad (\text{A.20})$$

On note aussi $K^\circ = -K^*$ le cône *polaire* de K . Un cas particulier très important est celui des cônes *auto-duaux* i.e. $K^* = K$, c'est le cas des quatre cônes fondamentaux utilisés en programmation conique :

- l'orthant positif :

$$K = \mathbb{R}^{n+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\} = K^* \quad (\text{A.21})$$

- le cône de Lorentz (ou cône du second-ordre) :

$$K = \mathcal{L}^n = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid x \geq \|y\|_2\} = K^* \quad (\text{A.22})$$

- le cône de Lorentz tourné :

$$K = \mathcal{L}_r^n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-2} \mid 2xy \geq \|z\|_2^2\} = K^* \quad (\text{A.23})$$

- le cône des matrices symétriques semi-définies positives :

$$K = \mathcal{S}_n^+ = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = M, M \succeq 0\} = K^* \quad (\text{A.24})$$

Si K définit une relation d'ordre \succeq_K alors il en est de même pour K^* de telle sorte que :

$$y \succeq_{K^*} 0 \iff \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \succeq_K 0 \quad (\text{A.25})$$

A.1.4 Propriétés et exemples de fonctions d'appui

Soient G et H deux ensembles convexes et $\lambda \geq 0$. Les fonctions d'appuis vérifient les propriétés suivantes :

$$\pi_{\lambda G}(y) = \pi_G(\lambda y) = \lambda \pi_G(y) \quad (\text{A.26})$$

$$\pi_{G \oplus H}(y) = \pi_G(y) + \pi_H(y) \quad (\text{A.27})$$

$$\pi_{\text{conv}\{G \cup H\}}(y) = \max\{\pi_G(y), \pi_H(y)\} \quad (\text{A.28})$$

$$\pi_{G \cap H}(y) = (\pi_G \star \pi_H)(y) = \inf_z \{\pi_G(z) + \pi_H(y - z)\} \quad (\text{A.29})$$

Nous donnons, à présent, l'expression des fonctions d'appuis pour différents ensembles convexes :

- pour un **point** a :

$$\pi_{\{a\}}(y) = \langle a, y \rangle \quad (\text{A.30})$$

- pour un **polyèdre** $\mathcal{P} = \text{conv}\{a_1, \dots, a_p\}$ défini par une enveloppe convexe de p points a_i :

$$\pi_{\mathcal{P}}(y) = \max_{i=1, \dots, p} \{\langle a_i, y \rangle\} \quad (\text{A.31})$$

- pour une **boule** de norme L^p :

$$\pi_{\{x \mid \|x\|_p \leq 1\}}(y) = \|y\|_q \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (\text{A.32})$$

- pour un **ellipsoïde** \mathcal{E} défini par un centre c et une matrice symétrique définie positive Q *i.e.* $\mathcal{E} = \{x \mid \sqrt{\langle x - c, Q^{-1}(x - c) \rangle} \leq 1\}$:

$$\pi_{\mathcal{E}}(y) = \sqrt{\langle y, Qy \rangle} + \langle c, y \rangle \quad (\text{A.33})$$

- pour un **cône** K :

$$\pi_K(y) = \mathbf{1}_{K^\circ}(y) \quad (\text{A.34})$$

A.2 Optimisation convexe et conique

A.2.1 Formulation générale

En toute généralité, un problème d'*optimisation convexe* consiste à minimiser une fonction convexe sur un ensemble lui-même convexe. Il peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{t.q.} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ & Ax = b \end{aligned} \tag{A.35}$$

où la fonction-objectif f et les contraintes d'inégalité g_i sont des fonctions convexes, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. L'ensemble admissible (*i.e.* l'ensemble des points satisfaisant les contraintes) est alors convexe. Une caractéristique essentielle de l'optimisation convexe est que tout minimum local est un minimum global.

On préfère souvent réécrire le problème précédent sous une forme équivalente en se servant de l'épigraphe de f :

$$\begin{aligned} \min_{(x,t)} \quad & t \\ \text{t.q.} \quad & f(x) - t \leq 0 \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ & Ax = b \end{aligned} \tag{A.36}$$

On constate donc que tout problème convexe peut se réécrire comme la minimisation d'une fonction linéaire sur un domaine convexe C :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & x \in C \end{aligned} \tag{A.37}$$

Un problème d'*optimisation conique* s'écrit comme la minimisation (ou maximisation) d'une fonction linéaire sur une section conique (c'est-à-dire l'intersection d'un cône K et d'un espace affine) :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \succeq_K 0 \quad (x \in K) \end{aligned} \tag{A.38}$$

Une propriété très intéressante est que tout problème d'optimisation convexe peut se réécrire comme un problème d'optimisation conique. En effet, en partant de la formulation (A.37) dans \mathbb{R}^n et en définissant le cône

$$K = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \frac{x}{t} \in C \right\} \tag{A.39}$$

on a alors $x \in C \Leftrightarrow (1, x) \in K$. En introduisant l'hyperplan $H = \{1\} \times \mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^{n+1} , le problème d'optimisation convexe se réécrit donc comme le problème d'optimisation

conique suivant :

$$\begin{aligned} \min_{(t,x)} \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & x \in H \cap K \end{aligned} \tag{A.40}$$

A.2.2 Dualité

À tout problème d'optimisation (convexe ou non) appelé problème *primal*, on peut lui associer un problème *dual* qui sera toujours convexe. On introduit pour cela le Lagrangien qui, pour le problème (A.35), s'écrit :

$$\mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(x) + \langle \lambda, Ax - b \rangle \tag{A.41}$$

où μ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange des contraintes d'inégalité et λ est celui des contraintes d'égalité. Le problème dual est alors défini par :

$$\max_{\lambda, \mu \geq 0} h(\lambda, \mu) \quad \text{où} \quad h(\lambda, \mu) = \inf_x \mathcal{L}(x, \mu, \lambda) \tag{A.42}$$

Si la solution de ce problème existe, on obtient une borne inférieure de l'optimum de (A.35), ce qu'on appelle *dualité faible*. Dans certains cas, les solutions du problème dual et primal coïncident et on est en présence d'une *dualité forte*. Une condition suffisante pour assurer la dualité forte est la condition de Slater :

S'il existe une solution x^ strictement admissible i.e. $g_i(x^*) < 0 \forall i = 1, \dots, p$ et $Ax^* = b$ au problème convexe (A.35), alors on a une dualité forte.*

Le problème dual du problème d'optimisation conique (A.38) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \max_{(y,s)} \quad & \langle b, y \rangle \\ \text{t.q.} \quad & A^T y + s = c \\ & s \succeq_{K^*} 0 \quad (s \in K^*) \end{aligned} \tag{A.43}$$

Cette formulation montre bien l'intérêt des cônes auto-duaux puisque, dans ce cas, le problème primal et dual possèdent une structure très similaire dont les algorithmes de résolution peuvent avantageusement tirer profit.

A.2.3 Programmation linéaire, quadratique et conique du second ordre

A.2.3.1 Programmation linéaire

Un problème de *programmation linéaire* correspond au cas où la fonction objectif et les contraintes de (A.35) sont toutes linéaires. On peut toujours exprimer les contraintes uniquement sous forme de contraintes d'égalité uniquement ou bien sous forme de contraintes d'inégalités uniquement en introduisant des variables auxiliaires

A.2. Optimisation convexe et conique

appropriées. Ainsi, un problème de programmation linéaire (LP) peut toujours s'écrire :

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.44}$$

A.2.3.2 Programmation quadratique

Une extension naturelle du problème précédent consiste en l'ajout d'un terme quadratique dans la fonction objectif. Cette classe de problèmes est appelée *programmation quadratique* (QP) :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \langle x, Qx \rangle + \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.45}$$

où $Q = Q^T$ est une matrice symétrique définie positive (sans quoi le problème n'est plus convexe). Il est également possible de rajouter des contraintes d'inégalité quadratiques :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \langle x, Q_0x \rangle + \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & \frac{1}{2} \langle x, Q_i x \rangle + \langle d_i, x \rangle + e_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, p \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.46}$$

où les Q_i sont symétriques semi-définies positives. Bien évidemment l'ensemble QP des problèmes de programmation quadratique contient l'ensemble des problèmes de programmation linéaire : $\text{LP} \subset \text{QP}$.

A.2.4 Programmation conique du second ordre

Une autre extension du problème de programmation linéaire consiste à remplacer la contrainte (linéaire) $x \geq 0$ par une contrainte conique (non-linéaire) du type $x \succeq_K 0$ où $K = K_1 \times \dots \times K_p$ est généralement un produit tensoriel de cônes. Lorsque ces derniers sont des cônes de Lorentz (A.22) ou (A.23), on parle alors de *programmation conique du second ordre* (SOCP) :

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \in K \end{aligned} \tag{A.47}$$

$K = \mathbb{R}^+$ étant un cône du second ordre particulier, on a $\text{LP} \subset \text{SOCP}$. De plus, les problèmes de programmation quadratique peuvent également se formuler comme un problème de programmation conique. En effet, considérons (A.45) pour simplifier et introduisons l'épigraphe de $\frac{1}{2} \langle x, Qx \rangle$, on a alors :

$$\begin{aligned} \min \quad & t + \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & \frac{1}{2} \langle x, Qx \rangle \leq t \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.48}$$

En introduisant la factorisation de Cholesky C de la matrice $Q = CC^T$, on a :

$$\begin{aligned} \min \quad & t + \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & \|C^T x\|_2^2 \leq 2t \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.49}$$

puis, en posant $y = C^T x$ et $z = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \min \quad & t + \langle c, x \rangle \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & C^T x - y = 0 \\ & z = 1 \\ & \|y\|_2^2 \leq 2tz \Leftrightarrow (t, z, y) \in \mathcal{L}_r^{n+2} \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.50}$$

On obtient bien un problème de minimisation d'une fonction linéaire $t + \langle c, x \rangle$ sous contraintes linéaires et coniques du second-ordre. On peut effectuer le même type de transformations dans le cas de contraintes quadratiques, de sorte que $\text{QP} \subset \text{SOCP}$.

De nombreux problèmes peuvent ainsi se reformuler en problèmes SOCP (minimisation d'une somme de normes euclidiennes par exemple).

A.2.5 Programmation semi-définie positive

Enfin, une généralisation de la programmation conique du second-ordre consiste à introduire des matrices symétriques définies positives comme variables d'optimisation supplémentaires :

$$\begin{aligned} \min_{x, \mathbf{X}_i} \quad & \langle c, x \rangle + \sum_{i=1}^p \mathbf{C}_i : \mathbf{X}_i \\ \text{t.q.} \quad & \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_{ij} : \mathbf{X}_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in K \\ & \mathbf{X}_i \in \mathcal{S}_r^+ \quad \forall i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{A.51}$$

où les \mathbf{X}_i , \mathbf{C}_i et \mathbf{B}_{ij} sont des matrices symétriques de taille $r \times r$ et où le produit doublement contracté « : » symbolise le produit de Froëbenius $U : V = \sum_{i,j} U_{ij} V_{ji}$.

Ce type de problème constitue la classe des problèmes de *programmation semi-définie positive* (SDP). On a alors $\text{SOCP} \subset \text{SDP}$.

Annexe B

Procédure de choix des directions de calcul pour la détermination des critères de résistance macroscopiques

Dans le chapitre 6, nous avons mentionné le fait qu'un critère de résistance homogénéisé est déterminé numériquement en résolvant un problème auxiliaire pour un nombre fini de différentes valeurs du chargement macroscopique (en effort imposé ou en taux de déformation imposé). On définit en général une direction de calcul (vecteur de norme 1 dans l'espace ambiant) et on cherche soit le multiplicateur maximal assurant que l'effort macroscopique appartienne à G^{hom} (trajets radiaux pour l'approche statique), soit en évaluant la fonction d'appui macroscopique pour le taux de déformation correspondant dans le cas de l'approche cinématique. Il est question ici de savoir comment optimiser le choix de ces différentes directions de calcul. Comme nous l'avons mentionné précédemment, une discrétisation uniforme sur la sphère unité de ces directions de calculs n'est pas très bien adaptée au cas de critères présentant une forte anisotropie ou n'étant pas centré sur l'origine du repère. Nous présentons ici une procédure automatique de choix des directions de calcul qui s'affranchit de ces difficultés.

B.1 Principe de la procédure

L'idée générale de la procédure consiste à prendre en compte, à chaque instant, la forme approximative du critère de résistance déterminée à partir des directions de calcul précédentes. La procédure est présentée dans le cas où $G^{hom} \subset \mathbb{R}^3$ comme dans le chapitre 6 mais elle est tout à fait générale et s'étend sans peine aux autres dimensions, mis à part le coût de calcul supplémentaire.

B.1.1 Cas de l'approche statique par l'intérieur

On cherche ici à déterminer G^{hom} par trajets de chargement radiaux. On initialise la procédure en effectuant la première série de calculs selon 6 trajets partant de l'origine selon les 3 axes de l'espace dans le sens positif et négatif.

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 = \{\pm \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x, \pm \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \pm (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)\} \quad (\text{B.1})$$

Les résultats des calculs nous fournissent les coordonnées des 6 points $\underline{\underline{\Sigma}} = \lambda^* \underline{\underline{\Sigma}}_0$ situés sur la frontière de G^{hom} (on identifiera ici par abus de langage G^{hom} au domaine

Procédure de choix des directions de calcul pour la détermination des critères de résistance macroscopiques

obtenu numériquement et approchant ce dernier par l'intérieur, noté G^{stat} au chapitre 6). Cependant, les algorithmes primaux-duaux de type « points intérieurs » tels qu'implémentés dans MOSEK ont l'intérêt de fournir également les valeurs des variables duales optimales (multiplicateurs de Lagrange) associées aux variables primales. Ainsi, pour un point $\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom}$ que l'on vient de calculer, la variable duale associée à la relation de moyenne reliant l'état de contrainte macroscopique à l'état microscopique $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ nous renseigne directement sur le taux de déformation macroscopique associé $\underline{\underline{D}}$. On dispose donc pour chaque point $\underline{\underline{\Sigma}}$ calculé de la valeur du vecteur normal à G^{hom} en ce point ainsi que de la distance à l'origine du plan tangent, donnée par $\Pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \lambda^* \underline{\underline{\Sigma}}_0 : \underline{\underline{D}}$. L'enveloppe convexe des points $\underline{\underline{\Sigma}}$ nous fournit une approche par l'intérieur de G^{hom} tandis que l'intersection des hyperplans d'équation $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \Pi^{hom}(\underline{\underline{D}})$ nous fournit une approche par l'extérieur.

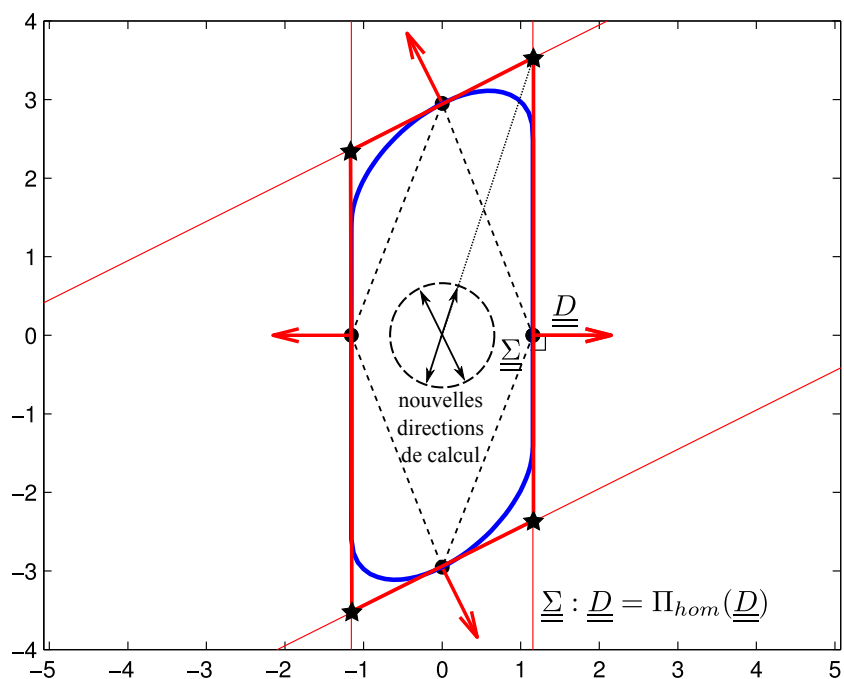
L'idée centrale de la procédure consiste alors à utiliser cette approche par l'extérieur pour déterminer les nouvelles directions de calculs. Ces nouvelles directions sont obtenues à partir des sommets du polytope de l'approche par l'extérieur. En effet, on part du constat que l'étape de calcul précédente a fourni des points se situant sur les faces de ce polytope extérieur (sur les sommets du polytope intérieur), on cherche alors à faire converger les deux polytopes en allant calculer des directions pour lesquelles l'écart entre les deux est le plus grand i.e. approximativement dans la direction des sommets des polytope extérieur. D'un point de vue pratique, nous utilisons la fonction `lcon2vert` [Jacobson, 2011] réalisant l'énumération des sommets d'un polytope à partir d'une représentation par inégalités linéaires.

Notons que nous aurions pu choisir d'utiliser les normales du polytope intérieur comme nouvelles directions de calcul. Néanmoins, dans le cas où G^{hom} présente des surfaces planes, on calculerait inutilement trop de points sur cette surface par cette approche. Tandis qu'avec le polytope extérieur, la surface plane ne représente qu'un seul hyperplan.

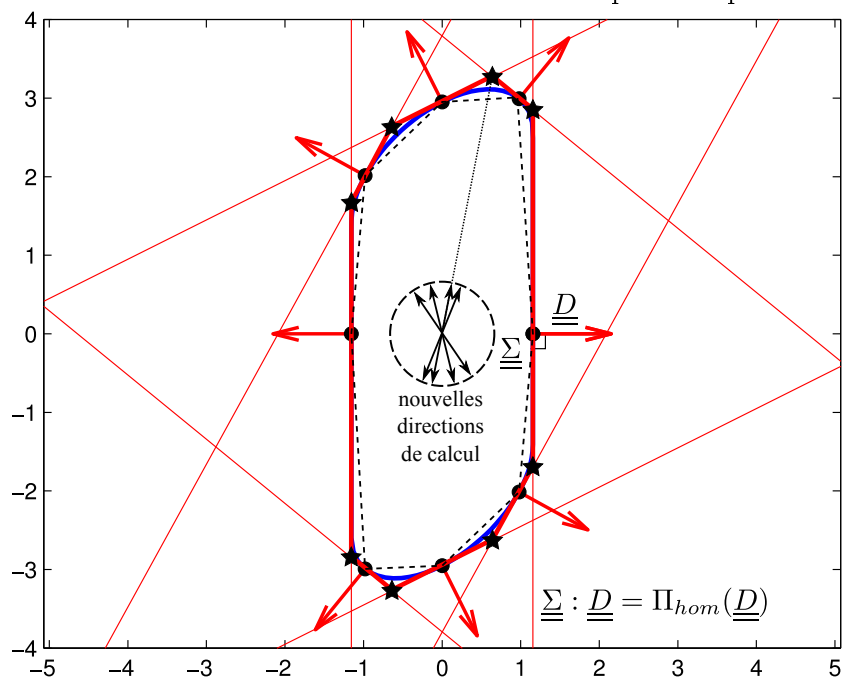
Le principe de la procédure est illustré sur la Figure B.1a pour un critère anisotrope caractéristique d'un milieu renforcé dans une direction. La première étape de calcul a fourni les 4 points de G^{hom} situés suivant les axes horizontaux et verticaux (ronds noirs). La valeur du taux de déformation macroscopique ainsi que le plan tangent sont représentés pour ces 4 points (vecteur et droite rouges). L'intersection des plans tangents définit le polytope extérieur en rouge, ses sommets sont représentés par les étoiles noires. On constate ici qu'il est intuitif de chercher les nouvelles directions dans la direction de ces sommets, dans la mesure où il s'agit des points les plus éloignés du polytope intérieur en pointillés noirs. Les nouvelles directions correspondant à ces sommets sont alors utilisées pour calculer de nouveaux points sur la frontière de G^{hom} pour l'étape suivante. La même procédure est alors répétée avec ces nouveaux points (Figure B.1b).

Il est intéressant de noter que la comparaison des polytopes intérieurs et extérieurs nous permet d'estimer le degré de précision avec lequel est déterminé le critère. On peut alors se fixer une tolérance afin d'arrêter la procédure de calcul.

B.1. Principe de la procédure



(a) Détermination des nouvelles directions de calcul après une première étape.



(b) Détermination des nouvelles directions de calcul après une deuxième étape.

FIGURE B.1 – Les points de G^{hom} (représenté en bleu) obtenus lors des étapes précédentes sont représentés par les ronds noirs, les flèches rouges représentent les vecteurs normaux associés à ces points, les lignes rouges les hyperplans correspondants. Les étoiles noires représentent les sommets du polytope extérieur. Les flèches noires désignent les nouvelles directions de calcul orientées vers ces sommets.

Procédure de choix des directions de calcul pour la détermination des critères de résistance macroscopiques

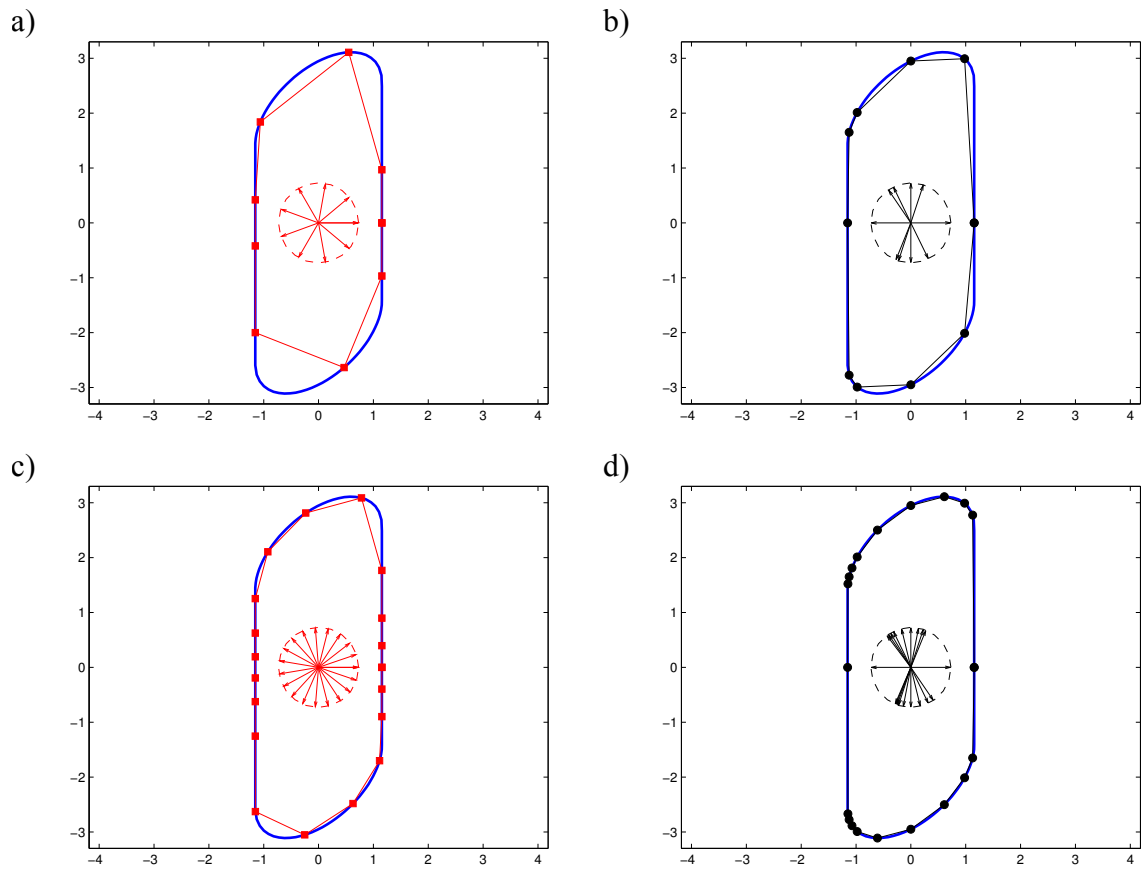


FIGURE B.2 – Construction de G^{hom} pour 10 (resp. 20) directions uniformément réparties (a) (resp. (c)) et réparties à l'aide de la détermination des plans tangents (b) (resp. (d)). Le critère exact est représenté en bleu et les directions du chargement macroscopique sont représentées par les flèches au centre.

Sur la Figure B.2, on a comparé la détermination de G^{hom} à l'aide de cette procédure par rapport au cas où on choisit des directions de calcul réparties uniformément sur le cercle unité. On constate, en particulier, que les directions de calcul obtenues avec la procédure décrite ici vont privilégier les zones du critère à forte courbure, tandis que dans les zones de courbure nulle, on ne calcule plus de nouveau point. L'aspect anisotrope du critère est ainsi directement intégré par les équations des plans tangents, de même que les zones où le critère est plat. On évite ainsi de calculer des points dans ces zones où l'on dispose déjà de suffisamment d'information.

B.1. Principe de la procédure

B.1.2 Cas de l'approche cinématique par l'extérieur

Le principe de la procédure reste le même dans le cas de l'approche cinématique. L'initialisation des premières directions de calcul pour \underline{D} est le même que pour $\underline{\Sigma}_0$ (B.1) et permet de construire un polytope extérieur par les équations des plans tangents correspondants. La variable duale associée au taux de déformation macroscopique permet d'obtenir les coordonnées d'un point $\underline{\Sigma}$ situé sur le plan tangent et sur la frontière de G^{hom} (ici aussi assimilé à G^{cin} par abus de langage). Ces points permettent de définir un polytope intérieur. Les nouvelles directions de calcul pour \underline{D} sont obtenues comme les directions des normales des faces du polytope intérieur. On utilise là la fonction `vert2lcon` [Jacobson, 2011] réalisant l'énumération des faces d'un polytope à partir d'une représentation par ses sommets.

Le principe et les avantages de la méthode sont donc similaires au cas de l'approche statique. En particulier, dans les zones où G^{hom} présente des coins, on évite ainsi d'accumuler toutes les directions de \underline{D} qui appartiennent au cône des normales extérieures.

B.1.3 Extensions

Ces approches s'étendent facilement au cas où G^{hom} n'est pas centré en 0. En effet, dans ce cas, une discrétisation uniforme des trajets radiaux partant de l'origine va produire une très forte concentration de points sur la frontière de G^{hom} située près de l'origine, tandis que pour la frontière éloignée de l'origine, la concentration de points y sera bien plus faible. Avec la méthode présentée ici, on peut à chaque étape, recalculer un centre de G^{hom} à partir duquel on pourra effectuer les trajets de chargement radiaux. L'autre extension possible concerne le cas des critères non bornés tels que fréquemment rencontré pour les milieux continus 3D. Dans ce cas, il est fort probable que toute une plage (inconnue *a priori*) de directions de calcul conduise à une absence de charge ultime. Dans ce cas aussi, on peut adapter au fur et à mesure les directions de calcul afin de ne pas calculer un grand nombre de directions dans les régions où le critère est non borné.

Bibliographie

- [Absil *et al.*, 2009] ABSIL, P., MAHONY, R. et SEPULCHRE, R. (2009). *Optimization algorithms on matrix manifolds*. Princeton University Press. 145
- [Anderheggen et Knöpfel, 1972] ANDERHEGGEN, E. et KNÖPFEL, H. (1972). Finite element limit analysis using linear programming. *International Journal of Solids and Structures*, 8(12):1413–1431. 24, 29, 47, 142
- [Andersen *et al.*, 2003] ANDERSEN, E. D., ROOS, C. et TERLAKY, T. (2003). On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization. *Mathematical Programming*, 95(2):249–277. 31
- [Andersen *et al.*, 2000] ANDERSEN, K. D., CHRISTIANSEN, E., CONN, A. R. et OVERTON, M. L. (2000). An efficient primal-dual interior-point method for minimizing a sum of euclidean norms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(1):243–262. 31
- [Andersen *et al.*, 1998] ANDERSEN, K. D., CHRISTIANSEN, E. et OVERTON, M. L. (1998). Computing limit loads by minimizing a sum of norms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19(3):1046–1062. 31, 143
- [Anthoine *et al.*, 1992] ANTHOINE, A., de BUHAN, P., DORMIEUX, L. et J., S. (1992). *STARS 2.00 (version professionnelle) : logiciel de calcul des ouvrages en sols renforcés*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. 33
- [Arnold, 1981] ARNOLD, D. N. (1981). Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem. *Numerische Mathematik*, 37(3):405–421. 81
- [Arnold *et al.*, 2007] ARNOLD, D. N., BREZZI, F., FALK, R. S. et MARINI, L. D. (2007). Locking-free Reissner–Mindlin elements without reduced integration. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(37):3660–3671. 81
- [Avitzur, 1980] AVITZUR, B. (1980). *Metal forming : the application of limit analysis*, volume 4. Marcel Dekker Inc. 17
- [Ben-Tal et Nemirovski, 2001] BEN-TAL, A. et NEMIROVSKI, A. (2001). On polyhedral approximations of the second-order cone. *Mathematics of Operations Research*, 26(2):193–205. 142
- [Bisbos, 2006] BISBOS, C. (2006). Linear matrix inequality representations of the mohr-coulomb and tresca failure criteria with applications in shakedown analysis. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 17(4):253. 31
- [Bisbos et Pardalos, 2007] BISBOS, C. et PARDALOS, P. (2007). Second-order cone and semidefinite representations of material failure criteria. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 134(2):275–301. 31, 32, 204

- [Bleyer *et al.*, 2014] BLEYER, J., CARLIER, G., DUVAL, V., MIREBEAU, J.-M. et PEYRÉ, G. (2014). A Γ -convergence result for the upper bound limit analysis of plates. *arXiv preprint arXiv :1410.0326*. 48
- [Bleyer et de Buhan, 2013a] BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2013a). A greedy algorithm for yield surface approximation. *Comptes Rendus Mécanique*, 341(8):605 – 615. 144, 151
- [Bleyer et de Buhan, 2013b] BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2013b). A majoration method to obtain true upper bounds for the limit analysis of von Mises plates. In *CM13 : Proceedings of the International Conference on Computational Mechanics*, pages 16–CM13, Durham, UK. 57
- [Bleyer et de Buhan, 2013c] BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2013c). On the performance of non-conforming finite elements for the upper bound limit analysis of plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(3):308–330. 51, 57, 167
- [Bleyer et de Buhan, 2013d] BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2013d). Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3d composite frame structures. *Computers & Structures*, 129:86–98. 2, 126, 143
- [Bleyer et de Buhan, 2014a] BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2014a). A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. Part I : Construction of the macroscopic strength criterion. *International Journal of Solids and Structures*, 51(13):2448–2459. 128, 129
- [Bleyer et de Buhan, 2014b] BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2014b). A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. Part II : Upper bound yield design calculation of the homogenized structure. *International Journal of Solids and Structures*, 51(13):2460–2469. 155
- [Bleyer et de Buhan, 2014c] BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2014c). Lower bound static approach for the yield design of thick plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100(11):814–833. 68, 72, 167
- [Bleyer *et al.*, 2015a] BLEYER, J., LE, C. V. et de BUHAN, P. (2015a). Locking-free discontinuous finite elements for the upper bound yield design of thick plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103(12):894–913. 77
- [Bleyer *et al.*, 2015b] BLEYER, J., MAILLARD, M., DE BUHAN, P. et COUSSOT, P. (2015b). Efficient numerical computations of yield stress fluid flows using second-order cone programming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283:599–614. 220
- [Bleyer *et al.*, 2015c] BLEYER, J., PHAM, D. T., de BUHAN, P. et FLORENCE, C. (2015c). Yield design of periodically heterogeneous plates. In *Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures*, pages 143–158. Springer. 127, 179
- [Borges *et al.*, 1996] BORGES, L., ZOUAIN, N. et HUESPE, A. (1996). A nonlinear optimization procedure for limit analysis. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 15:487–512. 30

Bibliographie

- [Bottero *et al.*, 1980] BOTTERO, A., NEGRE, R., PASTOR, J. et TURGEMAN, S. (1980). Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22(1):131–149. 24
- [Bouchitté, 1986] BOUCHITTÉ, G. (1986). Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. application à l’homogénéisation en plasticité. In *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, volume 8, pages 7–36. Université Paul Sabatier. 125
- [Bourgeois, 1997] BOURGEOIS, S. (1997). *Modélisation numérique des panneaux structuraux légers*. Thèse, Université d’Aix-Marseille 2, FRANCE. 127
- [Boyd et Vandenberghe, 2004] BOYD, S. et VANDENBERGHE, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press. 29, 30, 223
- [Bræstrup, 1971] BRÆSTRUP, M. (1971). *Yield-line theory and limit analysis of plates and slabs*. Danmarks Tekniske Højskole, Afdelingen for Bærende Konstruktioner. 47
- [Capsoni, 1999] CAPSONI, A. (1999). A mixed finite element model for plane strain limit analysis computations. *Communications in numerical methods in engineering*, 15(2):101–112. 25
- [Capsoni et Corradi, 1999] CAPSONI, A. et CORRADI, L. (1999). Limit analysis of plates- a finite element formulation. *Structural Engineering and Mechanics*, 8(4):325–341. 25, 48, 57, 70, 81, 82
- [Capsoni et Vicente da Silva, 2011] CAPSONI, A. et Vicente da SILVA, M. (2011). A finite element formulation of Mindlin plates for limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(1):143–156. 81, 82
- [Carlier *et al.*, 2011] CARLIER, G., COMTE, M., IONESCU, I. et PEYRÉ, G. (2011). A projection approach to the numerical analysis of limit load problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(06):1291–1316. 29
- [Casciaro et Cascini, 1982] CASCIARO, R. et CASCINI, L. (1982). A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(2):211–243. 25
- [Chan, 1972] CHAN, H. (1972). The collapse load of reinforced concrete plate. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5(1):57–64. 47
- [Chapelle, 2001] CHAPELLE, D. (2001). Some new results and current challenges in the finite element analysis of shells. *Acta Numerica 2001*, 10:215–250. 114
- [Christiansen et Larsen, 1983] CHRISTIANSEN, E. et LARSEN, S. (1983). Computations in limit analysis for plastic plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(2):169–184. 25
- [Christiansen et Pedersen, 2001] CHRISTIANSEN, E. et PEDERSEN, O. S. (2001). Automatic mesh refinement in limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6):1331–1346. 25
- [Ciarlet, 1978] CIARLET, P. (1978). *The finite element method for elliptic problems*, volume 4. North Holland. 48

- [Ciria, 2004] CIRIA, H. (2004). *Computation of upper and lower bounds in limit state analysis using second-order cone programming and mesh adaptivity*. Thèse de doctorat, PhD thesis, Dep. Aeron. and Astron, MIT, USA. 25
- [Ciria et al., 2008] CIRIA, H., PERAIRE, J. et BONET, J. (2008). Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, 75(8):899–944. 25
- [Combettes et Wajs, 2005] COMBETTES, P. L. et WAJS, V. R. (2005). Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4(4):1168–1200. 29
- [Coulomb, 1773] COULOMB, C. A. (1773). Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l’architecture. *Mémoires de mathématiques et de Physique, Académie Royale des Sciences*, 7:343–382. 14
- [Dallot et Sab, 2008] DALLOT, J. et SAB, K. (2008). Limit analysis of multi-layered plates. Part I : the homogenized Love–Kirchhoff model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(2):561–580. 98, 127
- [Dantzig et al., 1955] DANTZIG, G. B., ORDEN, A., WOLFE, P. et al. (1955). The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints. *Pacific Journal of Mathematics*, 5(2):183–195. 29
- [de Buhan, 1986] de BUHAN, P. (1986). *A fundamental approach to the yield design of reinforced soil structures*. Thèse de doctorat, Thèse d’Etat, Paris VI. 124, 125, 155
- [de Buhan, 2007] de BUHAN, P. (2007). *Plasticité et calcul à la rupture*. Presses de l’École Nationale des Ponts et Chaussées. 9, 11, 104, 105
- [de Buhan et de Felice, 1997] de BUHAN, P. et de FELICE, G. (1997). A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(7):1085–1104. 15
- [de Buhan et al., 1992] de BUHAN, P., DORMIEUX, L. et SALENÇON, J. (1992). An interactive computer software for the yield design of reinforced soil structures. In *Colloque international "Informatique et Géotechnique"*, pages 181–189. Presses de l’École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. 33
- [de Buhan et Taliercio, 1991] de BUHAN, P. et TALIERCIO, A. (1991). A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 10(2):129–154. 103, 125, 135
- [de Domenico, 2014] de DOMENICO, D. (2014). *Structural analysis at ultimate limit states of reinforced concrete elements : A numerical approach for the evaluation of peak load and collapse mechanism*. Thèse de doctorat, University Mediterranea of Reggio Calabria. 32
- [Demengel, 1983] DEMENGEL, F. (1983). Problèmes variationnels en plasticité parfaite des plaques. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 6(1):73–119. 45
- [Demengel, 1984] DEMENGEL, F. (1984). Fonctions à Hessien borné. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 34, pages 155–190. Institut Fourier. 45

Bibliographie

- [Drucker, 1956] DRUCKER, D. (1956). The effect of shear on the plastic bending of beams. *Journal of Applied Mechanics*, 23(4):509–514. 67
- [Duvaut et Metellus, 1976] DUVAUT, G. et METELLUS, A. (1976). Homogénéisation d’une plaque mince en flexion de structure périodique et symétrique. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Paris*, 283:947–950. 128
- [EN 1991-1-2, 2002] EN 1991-1-2 (2002). Eurocode 1 : Action on structures - Part 1-2 : General actions - Actions on structures exposed to fire. 177
- [EN 1992-1-1, 2004] EN 1992-1-1 (2004). Eurocode 2 : Design of concrete structures - Part 1-1 : General rules and rules for buildings - Paragraph 5.6 : Analysis with struts and tie models. 16
- [EN 1992-1-2, 2004] EN 1992-1-2 (2004). Eurocode 2 : Design of concrete structures - Part 1-2 : General rules - Structural fire design. 178
- [Faccioli et Vitiello, 1973] FACCIOLI, E. et VITIELLO, E. (1973). A finite element, linear programming methods for the limit analysis of thin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5(3):311–325. 29
- [Fortin et Glowinski, 1982] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1982). *Méthodes de la-grangien augmenté : applications à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod. 28
- [Fox, 1974] FOX, E. (1974). Limit analysis for plates : the exact solution for a clamped square plate of isotropic homogeneous material obeying the square yield criterion and loaded by uniform pressure. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 277(1265):121–155. 57
- [Francescato et Pastor, 1998] FRANCESCATO, P. et PASTOR, J. (1998). Résistance de plaques multiperforées : comparaison calcul-expérience. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 7(4):421–437. 125
- [Friaâ, 1978] FRIAÂ, A. (1978). Le matériau de Norton-Hoff généralisé et ses applications en analyse limite. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Paris Série AB*, 286(20):A953–A956. 27
- [Gilbert et al., 2014] GILBERT, M., HE, L., SMITH, C. C. et LE, C. V. (2014). Automatic yield-line analysis of slabs using discontinuity layout optimization. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 470(2168):20140071. 48, 60, 61
- [Gravesen, 2007] GRAVESEN, J. (2007). Surfaces parametrized by the normals. *Computing*, 79(2):175–183. 145
- [Gueguin, 2014] GUEGUIN, M. (2014). *Approche par une méthode d’homogénéisation du comportement des ouvrages en sols renforcés par colonnes ou tranchées*. Thèse, Université Paris-Est. 126, 158
- [Gueguin et al., 2013] GUEGUIN, M., HASSEN, G., BLEYER, J., DE BUHAN, P. et al. (2013). An optimization method for approximating the macroscopic strength criterion

- of stone column reinforced soils. *In Proceedings of the 3rd International Symposium on Computational Geomechanics*, pages 484–494. 126, 143
- [Gueguin *et al.*, 2014a] GUEGUIN, M., HASSEN, G. et BUHAN, P. (2014a). Numerical assessment of the macroscopic strength criterion of reinforced soils using semidefinite programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99(7): 522–541. 32, 125
- [Gueguin *et al.*, 2014b] GUEGUIN, M., HASSEN, G. et BUHAN, P. (2014b). Ultimate bearing capacity of a foundation reinforced by columns or cross trenches under inclined loads : a homogenization approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 39(3):277–294. 126, 143
- [Guennouni et Le Tallec, 1982] GUENNOUNI, T. et LE TALLEC, P. (1982). Calcul à la rupture, régularisation de Norton-hoff et Lagrangien augmenté. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 2(1):75–99. 27
- [Hassen *et al.*, 2013] HASSEN, G., GUEGUIN, M. et de BUHAN, P. (2013). A homogenization approach for assessing the yield strength properties of stone column reinforced soils. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 37(0):266 – 280. 125
- [Heyman, 1966] HEYMAN, J. (1966). The stone skeleton. *International Journal of solids and structures*, 2(2):249–279. 15
- [Hill, 1950] HILL, R. (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford. 10
- [Hillerborg, 1996] HILLERBORG, A. (1996). *Strip method design handbook*. CRC Press. 16
- [Hodge, 1954] HODGE, P. (1954). The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 21(336-442):82. 98, 142
- [Hodge et Belytschko, 1968] HODGE, P. et BELYTSCHKO, T. (1968). Numerical methods for the limit analysis of plates. *Journal of Applied Mechanics*, 35:796. 48
- [Hodge, 1959] HODGE, P. G. (1959). *Plastic analysis of structures*. McGraw-Hill. 96
- [Ibrahimbegović et Frey, 1993] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. et FREY, F. (1993). An efficient implementation of stress resultant plasticity in analysis of Reissner-Mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(2):303–320. 70
- [Ilyushin, 1956] ILYUSHIN, A. (1956). *Plasticité*. Eyrolles, Paris. 96
- [Ionescu et Oudet, 2010] IONESCU, I. R. et OUDET, É. (2010). Discontinuous velocity domain splitting in limit analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 47(10):1459–1468. 26
- [Jacobson, 2011] JACOBSON, M. (2011). Representing polyhedral convex hulls by vertices or (in)equalities. Available at <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30892>. 232, 235
- [Jennings, 1996] JENNINGS, A. (1996). On the identification of yield-line collapse mechanisms. *Engineering structures*, 18(4):332–337. 48

Bibliographie

- [Johansen, 1962] JOHANSEN, K. (1962). *Yield-line theory*. Cement and Concrete Association London. 15, 46, 47
- [Johnson, 1994] JOHNSON, D. (1994). Mechanism determination by automated yield-line analysis. *Structural Engineer*, 72:323–323. 48
- [Karmarkar, 1984] KARMARKAR, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311. ACM. 30
- [Koiter, 1960] KOITER, W. (1960). General theorems for elastic-plastic solids. In *Progress in Solid Mechanics*, pages 165–221. Amsterdam, North-Holland. 17
- [Krabbenhoft et Damkilde, 2002] KRABbenhOFT, K. et DAMKILDE, L. (2002). Lower bound limit analysis of slabs with nonlinear yield criteria. *Computers & structures*, 80(27):2043–2057. 43, 48, 128
- [Krabbenhoft et Damkilde, 2003] KRABbenhOFT, K. et DAMKILDE, L. (2003). A general non-linear optimization algorithm for lower bound limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(2):165–184. 31
- [Krabbenhøft et al., 2007] KRABbenhOFT, K., LYAMIN, A. et SLOAN, S. (2007). Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs. *International Journal of Solids and Structures*, 44(5):1533–1549. 31, 34, 220
- [Krabbenhoft et al., 2007] KRABbenhOFT, K., LYAMIN, A., SLOAN, S. et WRIGGERS, P. (2007). An interior-point algorithm for elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(3):592–626. 34, 220
- [Krabbenhoft et al., 2005] KRABbenhOFT, K., LYAMIN, A. V., HJIAJ, M. et SLOAN, S. W. (2005). A new discontinuous upper bound limit analysis formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(7):1069–1088. 24
- [Le et al., 2012] LE, C., ASKES, H. et GILBERT, M. (2012). A locking-free stabilized kinematic efg model for plane strain limit analysis. *Computers & Structures*, 106:1–8. 25
- [Le et al., 2009] LE, C., GILBERT, M. et ASKES, H. (2009). Limit analysis of plates using the EFG method and second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(13):1532–1552. 49
- [Le et al., 2010a] LE, C., NGUYEN-XUAN, H. et NGUYEN-DANG, H. (2010a). Upper and lower bound limit analysis of plates using FEM and second-order cone programming. *Computers & Structures*, 88(1-2):65–73. 48, 57, 75
- [Le, 2013] LE, C. V. (2013). A stabilized discrete shear gap finite element for adaptive limit analysis of Mindlin-Reissner plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96:231–246. 81, 88
- [Le et al., 2010b] LE, C. V., GILBERT, M. et ASKES, H. (2010b). Limit analysis of plates and slabs using a meshless equilibrium formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(13):1739–1758. 49, 132

- [Le *et al.*, 2015] LE, C. V., NGUYEN, P. H. et CHU, T. Q. (2015). A curvature smoothing Hsieh–Clough–Tocher element for yield design of reinforced concrete slabs. *Computers & Structures*, 152:59–65. 61
- [Lewiński et Telega, 2000] LEWIŃSKI, T. et TELEGA, J. J. (2000). *Plates, laminates, and shells : asymptotic analysis and homogenization*, volume 52. World Scientific. 125, 128
- [Liu et Zhao, 2013] LIU, F. et ZHAO, J. (2013). Upper bound limit analysis using radial point interpolation meshless method and nonlinear programming. *International Journal of Mechanical Sciences*, 70:26–38. 25
- [Lubliner, 1990] LUBLINER, J. (1990). *Plasticity Theory*. Dover Publications. 70, 98
- [Lyamin et Sloan, 2002] LYAMIN, A. V. et SLOAN, S. W. (2002). Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(2):181–216. 30
- [Lysmer, 1970] LYSMER, J. (1970). Limit analysis of plane problems in soil mechanics. *Journal of Soil Mechanics & Foundations Div*, 96:1311–1334. 24, 29, 142
- [Mackenzie *et al.*, 1994] MACKENZIE, D., SHI, J. et BOYLE, J. (1994). Finite element modelling for limit analysis by the elastic compensation method. *Computers & structures*, 51(4):403–410. 32
- [Maghous, 1991] MAGHOUS, S. (1991). *Détermination du critère de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à structure périodique. Approche numérique*. Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 125, 208
- [Maghous *et al.*, 1998] MAGHOUS, S., de BUHAN, P. et BEKAERT, A. (1998). Failure design of jointed rock structures by means of a homogenization approach. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 3(3):207–228. 125
- [Makrodimopoulos, 2010] MAKRODIMOPOULOS, A. (2010). Remarks on some properties of conic yield restrictions in limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 26(11):1449–1461. 31, 54, 62
- [Makrodimopoulos et Martin, 2007] MAKRODIMOPOULOS, A. et MARTIN, C. (2007). Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 31(6):835–865. 52, 77
- [Makrodimopoulos et Martin, 2008] MAKRODIMOPOULOS, A. et MARTIN, C. (2008). Upper bound limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11):911–927. 24
- [Malena et Casciaro, 2008] MALENA, M. et CASCIARO, R. (2008). Finite element shake-down analysis of reinforced concrete 3d frames. *Computers & Structures*, 86(11):1176–1188. 126
- [Melan, 1936] MELAN, E. (1936). *Theorie statisch unbestimmter Systeme aus idealplastischem Baustoff*. Hölder-Pichler-Tempsky in Komm. 17

Bibliographie

- [Michel et Suquet, 2003] MICHEL, J.-C. et SUQUET, P. (2003). Nonuniform transformation field analysis. *International journal of solids and structures*, 40(25):6937–6955. 126
- [Middleton, 1997] MIDDLETON, C. (1997). Concrete bridge assessment : an alternative approach. *Structural engineer*, 75(23/24):403–409. 16
- [Milani *et al.*, 2006] MILANI, G., LOURENÇO, P. et TRALLI, A. (2006). Homogenization approach for the limit analysis of out-of-plane loaded masonry walls. *Journal of Structural Engineering*, 132(10):1650–1663. 15, 125
- [Mörsch, 1912] MÖRSCH, E. (1912). *Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung*. K. Wittwer. 16
- [Mosek, 2014] MOSEK (December 2014). The Mosek optimization software. Available from : <http://www.mosek.com/>. 54
- [MSC Software Corporation, 2007] MSC SOFTWARE CORPORATION (2007). MARC Finite Element Software. Los Angeles, CA, USA. 177
- [Munro et Da Fonseca, 1978] MUNRO, J. et DA FONSECA, A. (1978). Yield line method by finite elements and linear programming. *Structural Engineer*, 56(2):37–44. 47
- [Nagtegaal *et al.*, 1974] NAGTEGAAL, J. C., PARKS, D. M. et RICE, J. (1974). On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 4(2):153–177. 25
- [Nesterov *et al.*, 1994] NESTEROV, Y., NEMIROVSKII, A. et YE, Y. (1994). *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13. SIAM. 30, 31
- [Nesterov et Todd, 1997] NESTEROV, Y. E. et TODD, M. J. (1997). Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Mathematics of Operations research*, 22(1):1–42. 31
- [Nguyen-Dang, 1984] NGUYEN-DANG, H. (1984). Cepao - an automatic program for rigid-plastic and elastic-plastic analysis and optimization of frame structures. *Engineering Structures*, 6(1):33 – 51. 126
- [Nguyen-Dang et König, 1976] NGUYEN-DANG, H. et KÖNIG, J. A. (1976). A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8(2):179–192. 48, 75
- [Nguyen-Xuan *et al.*, 2014] NGUYEN-XUAN, H., THAI, C. H., BLEYER, J. et NGUYEN, P. V. (2014). Upper bound limit analysis of plates using a rotation-free isogeometric approach. *Asia Pacific Journal on Computational Engineering*, 1(1):1–29. 49
- [Olsen, 1998] OLSEN, P. (1998). The influence of the linearisation of the yield surface on the load-bearing capacity of reinforced concrete slabs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162(1-4):351–358. 30, 132
- [Overton, 1985] OVERTON, M. L. (1985). Numerical solution of a model problem from collapse load analysis. *In Proc. of the sixth int'l. symposium on Computing methods in applied sciences and engineering, VI*, pages 421–437. North-Holland Publishing Co. 84

- [Owen et Figueiras, 1983] OWEN, D. et FIGUEIRAS, J. (1983). Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(4):521–539. 96
- [Papadopoulos et Taylor, 1991] PAPAPOPOULOS, P. et TAYLOR, R. L. (1991). An analysis of inelastic Reissner-Mindlin plates. *Finite elements in analysis and design*, 10(3):221–233. 70
- [Pastor, 2001] PASTOR, F. (2001). Résolution d'un problème d'optimisation à contraintes linéaires et quadratiques par une méthode de point intérieur : application à l'analyse limite. Mémoire de dea de mathématiques appliquées, Université de Lille 1. 31
- [Pastor et Loute, 2005] PASTOR, F. et LOUTE, E. (2005). Solving limit analysis problems : an interior-point method. *Communications in numerical methods in engineering*, 21(11):631–642. 31
- [Pastor, 1976] PASTOR, J. (1976). *Application de l'analyse limite à l'étude de la stabilité des pentes et des talus*. Thèse, Université de Grenoble. 24, 29
- [Pastor et Turgeman, 1976] PASTOR, J. et TURGEMAN, S. (1976). Mise en œuvre numérique des méthodes de l'analyse limite pour les matériaux de von mises et de coulomb standards en déformation plane. *Mechanics Research Communications*, 3(6):469–474. 24, 29, 142
- [Pastor et Turgeman, 1983] PASTOR, J. et TURGEMAN, S. (1983). Approche numérique des charges limites pour un matériau orthotrope de révolution en déformation plane. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 2:393–416. 125
- [Pham, 2014] PHAM, D. T. (2014). *Analyse par le calcul à la rupture de la stabilité au feu des panneaux en béton armé de grandes dimensions*. Thèse, Université Paris-Est. 178, 181, 182, 186
- [Pham et al., 2015a] PHAM, D. T., de BUHAN, P., FLORENCE, C., HECK, J.-V. et NGUYEN, H. H. (2015a). Interaction diagrams of reinforced concrete sections in fire : A yield design approach. *Engineering Structures*, 90:38–47. 179
- [Pham et al., 2015b] PHAM, D. T., de BUHAN, P., FLORENCE, C., HECK, J.-V. et NGUYEN, H. H. (2015b). Yield design-based analysis of high rise concrete walls subjected to fire loading conditions. *Engineering Structures*, 87:153–161. 178, 181
- [Ponter et Carter, 1997] PONTER, A. et CARTER, K. (1997). Limit state solutions, based upon linear elastic solutions with a spatially varying elastic modulus. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140(3-4):237 – 258. 32
- [Prager, 1961] PRAGER, W. (1961). *Problems in Continuum Mechanics*, chapitre On the plastic analysis of sandwich structures, pages 342–349. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA. 96
- [Prandtl, 1920] PRANDTL, L. (1920). Über die härte plastischer körper. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1920:74–85. 14

Bibliographie

- [Ramsay *et al.*, 2014] RAMSAY, A., MAUNDER, E. et GILBERT, M. (2014). Yield-line analysis of reinforced concrete structures - is the 10% rule safe? Technical note, Ramsay Maunder Associates, <http://www.ramsay-maunder.co.uk/blog/yieldline-analysis-is-the-10-rule-safe/>. 47
- [Ritter, 1899] RITTER, W. (1899). The Hennebique construction method. *Die Bauweise "Hennebique"*, *Schweizerische Bauzeitung*, 33(7):41–61. 16
- [Robinson, 1971] ROBINSON, M. (1971). A comparison of yield surfaces for thin shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(4):345–354. 97
- [Sab, 2003] SAB, K. (2003). Yield design of thin periodic plates by a homogenization technique and an application to masonry walls. *Comptes Rendus Mecanique*, 331(9): 641–646. 15, 125, 127
- [Salençon, 1983] SALENÇON, J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. 9, 13, 221
- [Salençon, 2001] SALENÇON, J. (2001). *Handbook of Continuum Mechanics : General Concepts, Thermoelasticity*. Physics and Astronomy Online Library. Springer. 44, 82
- [Salençon, 2013] SALENÇON, J. (2013). *Yield Design*. London, Hoboken : ISTE Ltd., John Wiley & Sons, Inc. 9, 40, 44
- [Save *et al.*, 1997] SAVE, M. A., MASSONNET, C. E. et de SAXCE, G. (1997). *Plastic limit analysis of plates, shells, and disks*, volume 43. North Holland. 47, 98
- [Schlaich *et al.*, 1987] SCHLAICH, J., SHAFER, K., JENNEWEIN, M. et KOTSOVOS, M. (1987). Toward a consistent design of structural concrete. *PCI Journal*, 32(3):74–150. 16
- [Sen, 2008] SEN, S. (2008). *Classification on manifolds*. Thèse de doctorat, University of North Carolina. 145
- [Sir *et al.*, 2008] SIR, Z., GRAVESEN, J. et JUTTNER, B. (2008). Curves and surfaces represented by polynomial support functions. *Theoretical Computer Science*, 392(1–3):141 – 157. 145
- [Sloan et Kleeman, 1995] SLOAN, S. W. et KLEEMAN, P. W. (1995). Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4):293 – 314. 24
- [Smith et Gilbert, 2007] SMITH, C. et GILBERT, M. (2007). Application of discontinuity layout optimization to plane plasticity problems. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 463(2086):2461–2484. 26
- [Strang, 1979] STRANG, G. (1979). A minimax problem in plasticity theory. *In Functional analysis methods in numerical analysis*, pages 319–333. Springer. 84
- [Suquet, 1985] SUQUET, P. (1985). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. *Homogenization techniques for composite media*, 272:193–278. 124
- [Temam et Strang, 1980] TEMAM, R. et STRANG, G. (1980). Functions of bounded deformation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 75(1):7–21. 67

- [Thavalingam *et al.*, 1998] THAVALINGAM, A., JENNINGS, A., MCKEOWN, J. et SLOAN, D. (1998). A computerised method for rigid-plastic yield-line analysis of slabs. *Computers & structures*, 68(6):601–612. 48
- [Turgeman et Pastor, 1987] TURGEMAN, S. et PASTOR, J. (1987). Comparaison des charges limites d’une structure hétérogène et homogénéisée. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 6(1):121–143. 125
- [Verpeaux *et al.*, 1988] VERPEAUX, P., CHARRAS, T. et MILLARD, A. (1988). Castem 2000 : une approche moderne du calcul des structures. *Calcul des structures et intelligence artificielle*, 2:261–271. 112
- [Vicente da Silva et Antao, 2007] VICENTE DA SILVA, M. et ANTAO, A. (2007). A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(10):1192–1218. 28
- [Yang, 1993] YANG, W. H. (1993). Large deformation of structures by sequential limit analysis. *International journal of solids and structures*, 30(7):1001–1013. 221
- [Yvonnet *et al.*, 2009] YVONNET, J., GONZALEZ, D. et HE, Q.-C. (2009). Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33):2723–2737. 126
- [Zhou *et al.*, 2012] ZHOU, S., LIU, Y. et CHEN, S. (2012). Upper bound limit analysis of plates utilizing the C1 natural element method. *Computational Mechanics*, 49:1–19. 49
- [Zienkiewicz *et al.*, 2005] ZIENKIEWICZ, O., TAYLOR, R. et TAYLOR, R. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*, volume 2. Butterworth-Heinemann. 48
- [Zouain *et al.*, 1993] ZOUAIN, N., HERSKOVITS, J., BORGES, L. A. et FEIJÓO, R. A. (1993). An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions. *International Journal of Solids and Structures*, 30(10):1397–1417. 30