



**HAL**  
open science

# Simulation numérique du comportement mécanique non linéaire de gridshells composés de poutres élancées en matériaux composites et de sections quelconques

Frédéric Tayeb

► **To cite this version:**

Frédéric Tayeb. Simulation numérique du comportement mécanique non linéaire de gridshells composés de poutres élancées en matériaux composites et de sections quelconques. Structures. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1067 . tel-01260287

**HAL Id: tel-01260287**

**<https://pastel.hal.science/tel-01260287>**

Submitted on 21 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THESE

présentée pour l'obtention du diplôme de :

**Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées**

Spécialité : Mécanique - Structures et Matériaux

Ecole Doctorale : Sciences, Ingénierie et Environnement

par

Frédéric TAYEB

---

# **Simulation numérique du comportement mécanique non linéaire de gridshells composés de poutres élancées en matériaux composites et de sections quelconques**

---

Soutenue le 17 juin 2015 à l'École Nationale des Ponts et Chaussées  
devant le jury composé de :

Rapporteurs

**BASILE AUDOLY**  
**SIGRID ADRIAENSSENS**

Examineurs

**PHILIPPE BOISSE**  
**BERNARD MAURIN**  
**PHILIPPE BLOCK**

Directeur de thèse

**JEAN-FRANÇOIS CARON**

Conseiller scientifique

**OLIVIER BAVEREL**

Invité

**BERNARD VAUDEVILLE**



# Remerciements

Trois belles années au cours desquelles j'aurai rencontré un grand nombre de personnes enrichissantes et passionnantes, et au cours desquelles ma petite famille aura été agrandie avec l'arrivée de mon adorable fils Antoine.

Je remercie très chaleureusement toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de travailler, collaborer ou tout simplement discuter.

En premier lieu mes encadrants : je remercie mon directeur de thèse, Jean-François Caron, de m'avoir fait confiance en me laissant beaucoup de liberté, et d'avoir su être là pour me donner les conseils qu'il fallait et pour me relancer dans les moments difficiles. Son savoir vivre et son humour ont aussi contribué à la réussite de cette thèse.

Je remercie également mon conseiller scientifique Olivier Baverel, avec qui j'ai eu des discussions passionnantes sur des sujets très variés, et qui a toujours été là pour orienter cette thèse de la meilleure des manières. J'ai également apprécié chez lui ses grandes qualités relationnelles et son dynamisme hors du commun.

Je remercie aussi le directeur du laboratoire Karam Sab qui a toujours été de très bons conseils et s'est montré paternaliste à mon égard à plusieurs reprises.

En deuxième lieu, je voudrais remercier mon camarade, stagiaire et ami Baptiste Lefèvre, très brillant étudiant de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole des Ponts et Chaussées, alors en stage de master. Je ne saurais dire combien faire équipe avec lui a été enrichissant et passionnant. Je ne me lasserai pas non plus de vanter ses incroyables qualités scientifiques, sa très grande organisation, sa grande rigueur, ainsi que ses qualités humaines. Je me souviendrai des multiples discussions passionnantes que nous avons pu avoir ensemble. Le chapitre 4 de cette thèse est le fruit de cette collaboration.

Je voudrais aussi remercier Alain Ehrlacher, président du département Génie Mécanique et Matériaux de l'Ecole des Ponts ParisTech, qui, après m'avoir formé dans son département, a continué à me donner de précieux conseils, en particulier au cours de cette thèse. Je resterai toujours impressionné par sa vivacité d'esprit hors du commun, et la clarté de ses explications.

Je remercie ensuite toutes les personnes avec qui j'ai travaillé, que j'ai côtoyées, ou avec qui j'ai eu la chance de prendre part à des projets, notamment ceux de conception et fabrication des gridshells de Solidays et de Créteil. Ainsi, je remercie très chaleureusement Lionel du Peloux avec qui j'ai pu beaucoup échanger sur tous les sujets traités dans ce mémoire de thèse, mais que j'ai également suivi sur les chantiers. Je remercie également tous les techniciens, chercheurs, personnels de l'école, élèves et doctorants qui ont contribué à la réussite de ces projets, et également Romain Mège, grand acteur du projet Solidays, en tant que responsable académique du département Génie Civil et Construction.

J'ai eu également la chance de travailler sur le thème des gridshells, thème vaste ayant déjà fait l'objet de deux thèses avant la mienne, celles de Cyril Douthe et Lina Bouhaya. Leur expertise et leurs conseils m'ont été très précieux. Je tiens à les remercier pour leur temps et leur gentillesse.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont accordé du temps dans le cadre de cette thèse, en particulier Laurent Monasse qui m'a consacré beaucoup de temps sur des problèmes d'optimisation, et Basile Audoly avec qui j'ai pu avoir des discussions sur la modélisation de poutres.

Je remercie encore tous les « permanents » du laboratoire, qui ont contribué à la réussite de cette thèse, en particulier Alain Tamaint, Ioannis Stefanou, Arthur Lebee, Gilles Foret, Amina Alaoui, Laurent Brochard, Géraldine Vue, Gilles Moreau, Christophe Bernard, Gwendal Cumunel, Daniel Cintra et Robert Leroy.

Je remercie également tous mes camarades avec qui j'ai passé de très bons moments au fil de ces trois années, en particulier Fernanda, Lina, Rana, les deux Laurent, Achille, Daniel, Haysam, Romain, Michele, Bachar, Tim, Antonin, Victor, Raphaël, Ababakar, Anne Laure et tous les autres.

Je profite de cette section pour remercier tous les partenaires qui ont contribué à la réalisation des gridshells, en particulier, l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques pour les études de topographie, les entreprises T/E/S/S et VIRY qui ont pris la responsabilité des chantiers, ainsi que nos partenaires pour les matériaux : Owens Corning, Ferrari, TopGlass, DSM, Esmery Caron.

Enfin je remercie tous ceux qui m'ont soutenu au cours de ces trois années, en premier lieu ma femme Lise qui m'a bien facilité la tâche, en particulier lors de la rédaction de ce mémoire, mon fils Antoine qui aura mis du piquant à mes nuits et qui m'aura donné l'énergie nécessaire pour achever ce mémoire, et ma famille et mes amis de tous horizons, qui ont tous contribué à cette thèse.

# Résumé

Les structures constructives de type gridshells sont réalisées à partir d'une grille régulière plane que l'on déforme élastiquement, puis que l'on rigidifie dans la position souhaitée. Les gridshells en matériaux composites ont été développés et étudiés depuis plusieurs années au laboratoire Navier. La thèse propose, à travers un historique des réalisations Navier, un retour d'expérience. Elle identifie également les aspects à mieux maîtriser, d'un point de vue simulation numérique ou d'un point de vue matériau et technologie. La thèse détaille alors des développements numériques nouveaux permettant l'analyse ultime de la structure, prise en compte des ruptures de barres (robustesse), et permettant la prise en compte de la torsion dans des poutres anisotropes, c'est-à-dire de section quelconque.

Dans le premier chapitre on traite ainsi du contexte dans lequel s'inscrivent les travaux sur les gridshells. La conception des gridshells au laboratoire Navier y est détaillée. En particulier, la méthode numérique historiquement utilisée, à savoir la méthode de relaxation dynamique, est présentée.

Le second chapitre présente les réalisations du laboratoire Navier. Plusieurs prototypes ont été réalisés durant les dix dernières années. Les deux dernières structures, le gridshell de Solidays et la Cathédrale Ephémère de Créteil, ont été conçues et fabriquées pour accueillir du public. Les choix importants de conception et de fabrication de ces gridshells sont détaillés, avec un accent sur les avancées technologiques et sur les retours d'expérience.

Le troisième chapitre traite du comportement des gridshells en matériaux composites. La démarche a été d'investiguer le comportement du gridshell pour comprendre les processus d'endommagement des gridshells. On montre que le flambement conditionne la robustesse des gridshells. En effet, les résultats de l'étude montrent que lorsque le gridshell a été bien dimensionné et que les risques de flambement de la structure sont écartés, la structure se comporte de manière robuste, du fait de sa forte redondance.

Finalement, le dernier chapitre traite d'un nouveau modèle de poutre permettant de prendre en compte la torsion dans les poutres de section quelconque. Dans les précédents chapitres, il est souligné que la non prise en compte de la torsion peut-être préjudiciable pour diverses raisons, sous-estimation des contraintes, méconnaissance des efforts de jonctions, erreur sur la géométrie. Dans ce chapitre, le modèle de poutre est un modèle à quatre degrés de liberté, à la manière des travaux de Basile Audoly et Ethan Grinspun. La simulation numérique, à nouveau réalisée à l'aide d'un algorithme de relaxation dynamique, permet d'obtenir les configurations d'équilibre de structures fortement réticulées telles que les gridshells. Une des particularités de ce travail est que le modèle de poutre est développé en continu jusqu'à l'obtention des efforts intérieurs. Le modèle est ensuite discrétisé et implémenté de manière à pouvoir être appliqué. Une sous-étape permet d'ajouter des forces et des moments extérieurs. Pour des poutres de section rectangulaire, les résultats du modèle sont comparés à un logiciel élément fini et donnent des résultats satisfaisants en termes de précision et de temps de calcul. Finalement la méthode numérique est appliquée à des structures composées de poutres connectées. La transmission des efforts au niveau des connexions est implémentée. L'excentricité des connexions est également modélisée ce qui permet d'obtenir de précieuses informations sur les efforts transitant au sein

des connexions. Par suite de ces travaux, il devient possible d'utiliser la richesse de forme que peuvent offrir les poutres élancées à deux inerties en flexion différentes.

# Abstract

Structures like gridshells are structures made of a plane regular grid which is elastically deformed and then stiffened in the wished configuration. The composite materials gridshells have been developed and studied for several years at Navier laboratory. The thesis offers a feedback, through a history of Navier realizations. It also specifies the points to improve, in numerical simulation or about materials or technological aspects. Then, the thesis explains the new numerical developments that make possible the ultimate analysis of the structure, taking account the ruptures of beams (robustness), and that makes possible the consideration of the torsion in anisotropic beams, that is to say beams with any cross-section.

In the first chapter, the context of the work is presented. This chapter explains how the Navier laboratory designs and builds gridshells. In particular, the numerical method historically used - the dynamic relaxation method - is presented.

The second chapter presents the gridshell realizations of the Navier laboratory. Several prototypes have been built during the past ten years. The two last ones, the Solidays gridshell and the Ephemeral Cathedral of Creteil, have been designed to shelter public. The important choices during design and fabrication are detailed with an accent on technological progresses and feedbacks.

The third chapter deals with the behavior of composite materials gridshells. The approach was to investigate the behavior of the gridshell to understand the processes of damage. It is shown that buckling is particularly dangerous for the gridshell. The results of the study show that when the gridshell has been well designed and in particular if buckling is avoided, the gridshell behave in a robust manner, thanks to its redundancy.

Finally the last chapter deals with a new beam model, able to take torsion into account, for beams with any section. In the previous chapters it was underlined that the consideration of torsion aspects was lacking and has various consequences – incorrect estimation of stress, ignorance of forces and moments in connections, imprecision in geometry. In this chapter, the beam model used is a four degrees of freedom model, similar to the ones presented by Basile Audoly and Ethan Grinspun. The numerical simulation, performed once again thanks to a dynamic relaxation algorithm, is able to provide equilibrium configurations of highly reticulated structures as gridshells. One of the particularities of this work is the fact that the model is a continuous model, only discretized for numerical simulations. The external forces and moments can be implemented. For beams with rectangular cross-section, the results of the model are compared to finite element modelling simulations. The results are satisfying in term of accuracy and computational time. Finally the numerical method is applied to structures made of interconnected beams. The connections are modelled and the efforts through them are provided by the model. This provides important information about how to design the connections. Thanks to these work it becomes possible to use the large possibility of shapes offered by slender beams whose flexural inertias are different.



# Table des matières

<b>Remerciements .....</b>	<b>3</b>
<b>Résumé .....</b>	<b>5</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>7</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>13</b>
<b>Chapitre 1 : Contexte historique et conception des gridshells .....</b>	<b>17</b>
1.1 Contexte de la recherche sur les gridshells au laboratoire Navier.....	18
1.2 Définition du concept de gridshell élastique et étapes clefs de conception.....	18
1.2.1 Le concept de gridshell au laboratoire Navier.....	20
1.2.2 Réalisations historiques et réalisations de référence .....	22
1.3 Les matériaux composites en adéquation avec l'utilisation gridshell .....	24
1.4 Form-finding des gridshells par relaxation dynamique.....	27
1.4.1 Première étape, considérations géométriques.....	28
1.4.2 Seconde étape, considérations mécaniques .....	29
1.5 Conception numérique itérative des gridshells.....	34
<b>Chapitre 2 : Gridshells en matériaux composites conçus et élaborés par le laboratoire Navier..</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction, présentation, choix généraux .....	42
2.1.1 Coefficients de sécurité et guides de construction.....	42
2.1.2 Problématique des poutres en flexion permanente .....	45
2.1.3 Choix du procédé de fabrication .....	47
2.1.4 Choix de la géométrie des poutres .....	51
2.1.5 Test des solutions techniques retenues .....	52
2.1.6 Etude de méthodes d'assemblage et de montage.....	55
2.1.7 Les prototypes élaborés par le laboratoire Navier .....	57
2.2 Le 'haricot' de Solidays .....	59
2.2.1 Présentation du contexte et des différents acteurs .....	59
2.2.2 Choix d'une forme .....	60
2.2.3 Calculs mécaniques et dimensionnement des ancrages et de la barre de rive .....	61
2.2.4 Réalisation sur site .....	68
2.2.5 Chiffres clés .....	73
2.2.6 Retour d'expérience .....	73
2.3 La Cathédrale éphémère de Créteil .....	79
2.3.1 Présentation du contexte et des différents acteurs .....	79
2.3.2 Choix architecturaux .....	80
2.3.3 Calculs mécaniques, matériau et structure .....	80
2.3.4 Conception et dimensionnement des ancrages et des assemblages .....	81
2.3.5 Choix de la barre de rive .....	93
2.3.6 Confort des occupants .....	94
2.3.7 Chiffres et les informations clés.....	95
2.3.8 Retour d'expérience .....	95

<b>Chapitre 3 : Comportement structurel des gridshells, un focus sur instabilités et robustesse..</b>	<b>101</b>
3.1 Gridshell, composites et robustesse.....	102
3.2 Prise en compte de l'aléa matériaux.....	102
3.3 Le flambement du gridshell : à éviter à tout prix .....	104
3.3.1 Etude numérique du flambement appliquée au gridshell de Solidays .....	104
3.3.2 Critère de flambement local .....	107
3.3.3 Conclusion .....	109
3.4 Robustesse et ductilité du gridshell .....	110
3.5 Conclusions .....	115
<b>Chapitre 4 : Modélisation de la torsion dans les poutres élancées de section quelconque. Application au form-finding des gridshells.....</b>	<b>117</b>
4.1 Contexte, bibliographie et cadre de l'étude.....	118
4.1.1 Importance de la prise en compte de la torsion .....	119
4.1.2 Bibliographie.....	123
4.1.3 Choix de modélisation.....	127
4.2 Modèle de poutre continu prenant en compte la torsion .....	130
4.2.1 Torsion d'une poutre et énergie potentielle élastique associée .....	130
4.2.2 Flexion et énergie potentielle élastique associée.....	141
4.2.3 Découplage des efforts de torsion et de flexion, et récapitulatif des énergies en jeu .....	144
4.2.4 Retour sur le champ de repère de référence pour la torsion .....	145
4.2.5 Calcul des efforts intérieurs.....	146
4.3 Discrétisation et implémentation du modèle .....	150
4.3.1 Quantités discrétisées .....	150
4.3.2 Calcul des efforts intérieurs.....	152
4.3.3 Prise en compte des efforts axiaux .....	153
4.3.4 Efforts extérieurs .....	154
4.3.5 Choix des masses et des inerties fictives .....	155
4.3.6 Conditions aux limites.....	159
4.3.7 Résumé de l'algorithme et critère de convergence.....	160
4.4 Résultats et validation du modèle.....	163
4.4.1 Cas de la flexion « contrariée » .....	164
4.4.2 Cas de la torsion « flambée » .....	166
4.5 Modélisation des connexions et implémentation dans un modèle de gridshells. ....	167
4.5.1 La liaison gridshell .....	167
4.5.2 Liaison sans excentricité .....	168
4.5.3 Liaison avec excentricité.....	171
4.6 Conclusions .....	174
<b>Conclusion.....</b>	<b>177</b>
<b>Table des figures.....</b>	<b>181</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>185</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>191</b>





# Introduction

Dans les dernières décennies, beaucoup d'applications des matériaux composites sont apparues dans le domaine de la construction [BANK06]. Le principal domaine d'applications concerne le renforcement de poutres en béton par des composites à base de fibres de carbone [FORET08] [SHAHAWY96], les câbles de post tension [GRACE08], ou même les structures faites majoritairement à partir de matériaux composites [BAVEREL12].

Cependant les applications utilisant les matériaux composites en tant qu'éléments de structure restent très limitées. Bien que les qualités des GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymer) soient indéniables (densité faible, haute résistance mécanique, bonne résistance à la corrosion et à la fatigue), leur module d'Young relativement faible peut apparaître comme un inconvénient par rapport à l'acier. En effet, généralement et contrairement à d'autres secteurs, les structures du génie civil sont prioritairement dimensionnées en raideur (confort, aspects vibratoires...) plutôt qu'en résistance. Les instabilités de type flambement dépendant linéairement du module d'Young, il est classique de préférer pour des structures élancées, sensibles à ces non-linéarités un matériau présentant une raideur élevée. Ainsi, pour promouvoir ici les matériaux composites, il faut tirer parti au mieux des propriétés et proposer de nouveaux concepts structurels devant compenser ou contourner cette faiblesse atavique.

Le laboratoire Navier travaille dans ce sens et suit particulièrement quatre fils rouges :

- Utilisation optimale des propriétés mécaniques des fibres, y compris de leur capacité à se déformer.
- Utilisation de connexions simples et « tailor made » pour les composites.
- Optimisation formelle, afin de générer de la raideur structurelle compensant la souplesse du matériau.
- Utilisation de semi-produits économiquement pertinents car disponibles dans l'industrie.

Ainsi, plusieurs structures ont été imaginées et étudiées. En particulier, une passerelle innovante [JÜLICH09] et plusieurs prototypes de gridshells [BAVEREL04], [DOUTHE07b], [DOUTHE10] au sens où ils seront définis plus loin, coques discrètes et légères. Plus récemment, un tel gridshell a été construit dans le but d'accueillir jusqu'à 500 personnes durant le festival Solidays (Paris, juin 2011, [BAVEREL12]). La conception et la fabrication de ce gridshell auxquelles j'ai pu prendre part est détaillée dans le chapitre 2.

Les responsables politiques, ingénieurs et architectes s'orientent radicalement vers des choix constructifs mécaniquement optimisés, afin de ralentir la tendance au gaspillage et dans un souci de développement durable. Dans cette optique, les structures légères peuvent jouer un rôle important. Ce mémoire est une contribution au design de telles structures, et nous allons nous efforcer de montrer que les gridshells élaborés à partir de matériaux composites à base de

fibres de verre ont un rôle à jouer et un fort potentiel structurel et architectural. Actuellement, les gridshells sont principalement utilisés pour leur intérêt architectural, en tant que structures couvrantes pour des lieux peu chauffés, mais diverses applications pour ces gridshells pourraient voir le jour. Ils pourraient en particulier recevoir d'ici peu des membranes leur offrant plus de fonctionnalités telles que l'isolation thermique. Ils pourraient également remettre à l'ordre du jour, les magnifiques (mais trop coûteux) concepts de coques béton des années 70 (de l'ingénieur Heinz Isler par exemple), en évitant de bien trop coûteux coffrages. Enfin d'autres travaux explorent l'opportunité de vastes canopées pour couvrir des bâtiments existants, et leur offrir de nouvelles fonctionnalités telles qu'un captage optimisé de l'énergie solaire.

La dynamique du laboratoire Navier sur ce sujet s'est traduite par la conception et fabrication de divers prototypes de gridshells de plus en plus aboutis, au cours des dix dernières années, et c'est dans cet élan que cette contribution s'inscrit, ayant moi-même participé au design et à la construction des deux dernières réalisations. La technologie gridshell développée au laboratoire Navier, est bien représentée par le dernier gridshell élaboré, *la Cathédrale éphémère de Créteil*. Il est largement détaillé également dans le chapitre 2. Cette technologie, on le verra, permet de générer de grands espaces aérés confortables, aux formes courbes très variées. A l'heure actuelle, et pour des raisons de réglementations, ces structures sont réservées à des utilisations à moyen terme mais des études en cours devraient permettre de rallonger peu à peu les durées de certification.

D'un point de vue mécanique, ces structures dont le poids atteint environ 5 tonnes pour environ 350 m<sup>2</sup> utilisables et des portées d'environ 15 m, peuvent supporter des chargements répartis d'environ 20 tonnes (par exemple de la neige). Il y a principalement deux explications à ces très bonnes performances structurelles. La première est l'utilisation de formes à double courbure permettant le transfert des efforts sous forme d'efforts membranaires ; la deuxième est l'utilisation de poutres en matériaux composites, présentant une faible densité et de très bonnes propriétés mécaniques le long de leur axe, reprenant donc avantageusement les efforts membranaires de la forme à double courbure.

Ce mémoire de thèse comporte quatre chapitres relatifs au design des gridshells composites. Les trois premiers décrivent des aspects très appliqués, aspects matériau, technologiques et également numériques, sur lesquels j'ai pu contribuer durant ma thèse, et liés à la réalisation de deux prototypes échelle :1. Le dernier chapitre représente une partie plus théorique qui est ma contribution à la modélisation mécanique fine des gridshells.

Dans le premier chapitre, le contexte dans lequel s'insèrent les gridshells sera présenté. Le choix des matériaux composites sera justifié. Les étapes de conception développées dans le laboratoire Navier seront également décrites, en particulier celles relatives à la recherche de forme (form-finding).

Le second chapitre présentera alors en détail les deux derniers gridshells réalisés. Il s'attardera en particulier sur mes contributions, les tests réalisés en amont des constructions, les

choix techniques importants de réalisation ainsi que les retours d'expérience en vue de l'amélioration du procédé.

Le troisième chapitre, quant à lui, présentera une étude conduite sur la robustesse des gridshells, répondant ainsi à de récurrentes interrogations sur leur fiabilité et sur le niveau de sécurité qu'ils peuvent procurer, notamment pour des bâtiments recevant du public (ERP). Il sera ainsi montré comment la redondance structurelle des gridshells leur confère une importante robustesse en cas de situation accidentelle raisonnable.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre, plus théorique, présentera un nouveau modèle de poutre capable de simuler correctement la torsion des poutres élancées en grands déplacements. Négligée jusqu'alors dans les outils mis en place par le laboratoire, la torsion peut cependant avoir des impacts non négligeables, notamment si les poutres ne sont pas isotropes, c'est-à-dire si les poutres n'ont pas les mêmes inerties dans les deux directions principales. La torsion pilote également une part importante des efforts vus par les connecteurs et jonctions des gridshells. Bien simuler ces effets permettra un design optimal de ces connexions. On présentera la modélisation continue développée et l'algorithme mis en œuvre et validé dans des situations très générales (non linéaires – grands déplacements) de structures composées de poutres interconnectées de sections quelconques. De telles poutres complexes peuvent permettre à l'ingénieur et à l'architecte d'envisager des gridshells présentant un plus fort potentiel encore, au niveau de la forme et des courbures.



# Chapitre 1 : Contexte historique et conception des gridshells

## Sommaire

---

1.1	Contexte de la recherche sur les gridshells au laboratoire Navier.....	18
1.2	Définition du concept de gridshell élastique et étapes clefs de conception.....	18
1.3	Les matériaux composites en adéquation avec l'utilisation gridshell.....	24
1.4	Form-finding des gridshells par relaxation dynamique.....	27
1.5	Conception numérique itérative des gridshells.....	34

---

## 1.1 Contexte de la recherche sur les gridshells au laboratoire Navier

La recherche sur les gridshells au laboratoire Navier s'inscrit dans un contexte de recherche sur les structures légères mécaniquement optimisées. En plus de pouvoir être mécaniquement optimisés, les gridshells présentent des intérêts architecturaux évidents du fait de leur richesse formelle et des grands espaces qu'ils offrent.

Du fait d'une forte compétence dans le domaine des matériaux composites au sein du laboratoire Navier, le choix naturel du laboratoire a été de se positionner sur le développement de gridshells réalisés à base de matériaux composites. Nous verrons comment les matériaux composites peuvent remplacer avantageusement le bois, utilisé pour la construction des premiers gridshells.

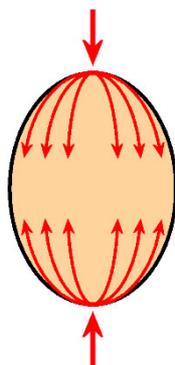
Cette recherche sur les structures s'inscrit également dans un contexte international puisque un certain nombre de gridshells ont été construits depuis les années 70. Une structure a largement inspiré les travaux du laboratoire, ainsi que le monde des gridshells. Cette structure, le gridshell de Mannheim (1975), décrite dans la partie 1.2.2 de ce mémoire, a été conçue et réalisée par l'architecte allemand Frei Otto à l'aide de poutres en bois [HAPPOLD75], [OTTO74]. Cette réalisation a été suivie d'un certain nombre de structures, en particulier du gridshell de Downland, également construit en bois en 2002, qui constitue une autre référence [HARRIS03], [KELLY01].

## 1.2 Définition du concept de gridshell élastique et étapes clefs de conception

Le mot « gridshell » désigne couramment une structure coque à double courbure réalisée non pas à partir d'une coque continue mais à partir d'une grille. C'est en effet ce que suggère le mot d'origine anglaise « gridshell » – *shell* signifie coque, coquillage tandis que le mot *grid* signifie grille ou quadrillage.

Ainsi si l'on part de cette définition, le mot « gridshell » peut être utilisé pour caractériser un grand nombre de structures dont la structure est une coque courbe faite d'un quadrillage de poutres.

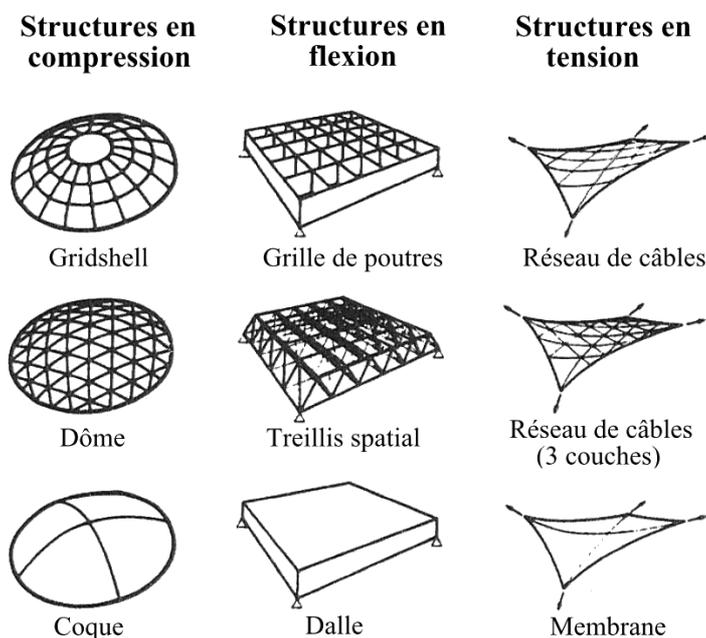
La caractéristique de structure à double courbure est importante puisqu'elle permet à ces structures de mettre à profit leurs propriétés mécaniques de coque. En effet, la transmission d'efforts sous forme d'efforts membranaires dans le cas d'une coque est très favorable, comme en atteste la très grande résistance d'une coquille d'œuf. Lorsque les efforts sont purement membranaires, cas idéal sans flexion, on parle alors d'une forme funiculaire du chargement. Ainsi, comme chacun a pu l'expérimenter, une coquille d'œuf, bien que très fine et peu résistante lorsqu'on en fléchit un petit morceau entre ses doigts, peut se révéler incroyablement résistante si les sollicitations ont la possibilité de se répartir en compression dans la coquille. C'est par exemple le cas lorsqu'un œuf est comprimé entre deux doigts, comme schématisé sur la figure 1.1.



**Figure 1.1 - Illustration de la transmission des efforts dans une coquille d'œuf**

*La forme ovoïde de l'œuf permet la transmission d'une pression sous forme d'effort membranaire (ici de la compression), ce pour quoi la coquille est optimisée.*

Ainsi, si l'on reprend la classification proposée par Schlaich [SCHLAICH03], on voit très clairement apparaître les structures à double courbure telles que les gridshells parmi les structures principalement sollicitées en compression (figure 1.2). Dans le cas d'un gridshell en matériaux composites, on observe que le poids propre (de l'ordre de 10 kg/m<sup>2</sup>) est faible comparé aux diverses sollicitations envisageables (vent, neige...). Il est donc important de remarquer que le gridshell peut également se retrouver en tension s'il est par exemple soumis à un vent fort tendant à aspirer la structure vers le haut, tel que le prévoit le théorème de Bernoulli.



**Figure 1.2 - Typologie des structures proposée par Schlaich**

*Si l'on se place à l'échelle des poutres constitutives, le gridshell se retrouve classé dans les structures soumises principalement à des efforts normaux. A l'échelle de la coque, il est soumis à des efforts membranaires.*

Ainsi, à partir de la définition la plus générale, un certain nombre de structures peuvent être appelées « gridshell ». Elles peuvent être réalisées à partir de divers matériaux comme l'acier, l'aluminium, le bois etc...

Dans cette thèse, le mot « gridshell » fera référence à la définition de « gridshell élastique » telle que l'a défini Frei Otto. Comme nous l'avons déjà souligné, cet architecte allemand a consacré beaucoup de temps aux structures légères et en particulier aux structures légères épousant des surfaces minimales. Il a en particulier conçu le gridshell de Mannheim [HAPPOLD75], [OTTO74], à partir d'une résille en bois, déformable dans son plan par cisaillement, mais également souple en flexion.

### 1.2.1 Le concept de gridshell au laboratoire Navier

Dans cette thèse, un gridshell fera donc référence à une structure réalisée à partir d'une grille régulière, plane au repos et sans résistance au cisaillement, mise en forme par flexion élastique, puis rigidifiée. La rigidification est réalisée par blocage des degrés de liberté en cisaillement de la grille dans son plan, ces degrés de libertés étant laissés libres lors du déploiement de la structure. Ces blocages sont généralement réalisés à l'aide d'une triangulation systématique des parallélogrammes constituant la grille déformée.

Ainsi, il est possible de définir trois étapes essentielles, illustrées ci-dessous. Ces trois étapes ainsi que les autres étapes moins importantes sont traitées plus en détail dans le chapitre 2.

**Réalisation d'une grille régulière, à plat** Une résille régulière, sans résistance au cisaillement est assemblée au sol, comme par exemple sur la figure 1.3. Cette étape ne présente pas de difficulté particulière mais elle nécessite une grande surface plane. Cette résille est appelée résille primaire.

**Déploiement de la grille, et fixation de son contour au niveau des ancrages** La grille est déformée et déplacée de telle sorte que ses bords puissent être fixés aux ancrages préalablement réalisés dans le sol ou dans la dalle. Cette étape peut être réalisée à l'aide de grues comme illustré sur la figure 1.4. Une fois cette étape réalisée, le gridshell a pris, à très peu de chose près, sa géométrie finale.

**Rigidification de la grille primaire** La dernière étape essentielle consiste à figer la grille dans son plan. Cette dernière étape peut être réalisée de plusieurs manières mais la solution retenue au laboratoire Navier consiste à utiliser une triangulation, c'est-à-dire, un troisième lit de poutres, qui permet de figer chaque quadrangle de la grille dans la position déployée. La figure 1.5 illustre le passage de la grille non triangulée à la grille triangulée. D'autres solutions envisageables consistent à utiliser deux directions de câbles précontraints en tension dans les directions des diagonales des quadrangles, d'utiliser des connecteurs permettant de figer les angles des quadrangles, d'utiliser des éléments rigides surfaciques, ou encore d'utiliser une membrane attachée régulièrement à la grille.



**Figure 1.3 - Assemblage de la grille primaire à plat sur le site de construction**

*La grille est assemblée à côté de la dalle destinée à recevoir le gridshell. Sur cette dalle, on distingue les ancrages de fixation du gridshell.*



**Figure 1.4 - Déploiement puis ancrage de la grille**

*La grille est déployée, ici avec l'aide de deux grues. A ce stade les quadrangles se déforment dans leur plan du fait de l'absence de résistance au cisaillement de la grille. La grille se déforme également sous son propre poids car les poutres constitutives sont souples en flexion. La grille est amenée au niveau des ancrages puis fixée.*



**Figure 1.5 - Triangulation du gridshell**

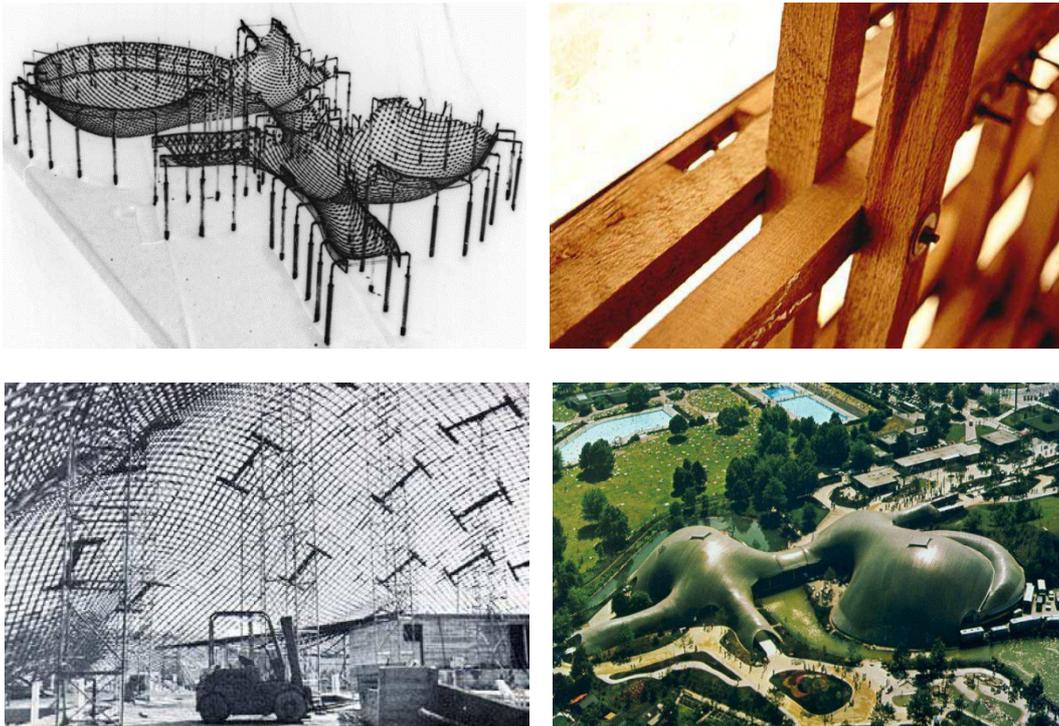
*Une troisième direction de poutres est ajoutée de manière à figer les quadrangles dans le plan de la coque. Le gain en raideur structurelle est très important. L'ordre de grandeur de ce gain est variable mais il est en général voisin de 30.*

## 1.2.2 Réalisations historiques et réalisations de référence

Il existe un certain nombre de réalisations de référence ayant été construites selon le procédé présenté dans le paragraphe 1.2.1, avec éventuellement de légères variantes. Ces variantes concernent principalement la manière de déployer le gridshell, qui peut être par exemple monté à l'aide d'un système d'échafaudage placé sous la grille et montant petit à petit la structure, mais également la manière de trianguler qui peut être réalisée à l'aide de câbles tendus dans les directions des deux diagonales des quadrangles, ou à l'aide de connecteurs pouvant être rigidifiés d'une manière ou d'une autre.

En 1974, l'institut allemand *für leichte Flächentragwerke* (IL) publie *IL10 Gitterschalen* [OTTO74], ouvrage de référence sur les gridshells. Cet ouvrage décrit des méthodes de recherche de forme. Il décrit en particulier la méthode du filet inversé qui permet d'obtenir des formes funiculaires de leur poids propre. Les filets utilisés peuvent être lestés avec des masselottes. Ainsi, les formes réalisées en inversant la géométrie des filets donnent, si la répartition des masses est proportionnelle à celles des filets, des structures pour lesquelles le poids propre est transmis dans la structure uniquement par l'intermédiaire d'effort de compression. Dans cet ouvrage, la méthode du compas, permettant de générer des maillages et décrite dans la partie 1.4.1 de cette thèse, est également détaillée.

En 1975, le gridshell de Mannheim (*Mannheim Bundesgartenschau Multihalle*) est le premier gridshell réalisé à partir d'une grille plane sans résistance en cisaillement, déployée pour former une surface à double courbure. Ce gridshell est réalisé en bois, à partir d'une double résille de poutres de section 50 x 50 mm (Figure 1.6). Il est construit à l'occasion d'une exposition par l'architecte Frei Otto et l'ingénieur Edmund Happold travaillant alors au sein du bureau d'étude Ove Arup. Ce gridshell couvre une surface de 3600 m<sup>2</sup>. Le déploiement de cette grille de très grande dimension est réalisé à l'aide d'échafaudages qui élèvent la grille petit à petit, par-dessous. Beaucoup de détails de la construction sont développés dans la publication de Happold [HAPPOLD75].



**Figure 1.6 - Gridshell de Mannheim**

*Maquette du gridshell réalisé à l'aide de la méthode du filet inversé (haut, gauche). Détail de la liaison et des poutres en bois utilisées (haut, droite). Déploiement de la grille à l'aide d'échafaudages et de machines de levage (bas, gauche). Vue aérienne du gridshell de Mannheim (bas, droite).*

A la suite de la construction de ce gridshell, d'autres réalisations ont été faites. C'est en particulier le cas du gridshell de Downland, construit également en bois en 2002, à partir d'un principe similaire [HARRIS03], [KELLY01]. C'est la construction de ce gridshell qui a remis à la mode ce type de structures légères. Pour un aperçu synthétique de l'histoire des gridshells, nous recommandons de consulter les mémoires de thèse de Cyril Douthe et Lina Bouhaya [DOUTHE07], [BOUHAYA10].

Plus récemment, le laboratoire Navier a participé au développement de la technologie gridshell, avec en particulier l'introduction des matériaux composites dont nous verrons l'intérêt.

Ces structures sont devenues des structures de référence pour les gridshells. En particulier, deux structures réalisées en matériaux composites à base de fibre de verre ont un impact important sur la communauté des structures légères et celle des gridshells. Il s'agit des gridshells développés pour le festival Solidays et la cathédrale éphémère de Créteil (figure 1.7). Ces structures ont servi de démonstrateur pour l'utilisation de composite dans la construction, en particulier ici lorsque les poutres sont fléchies de manière permanente (active bending). La cathédrale de Créteil, conçue et réalisée pour recevoir du public durant plus de deux ans, a un impact particulièrement important. Cette structure offrant 350 m<sup>2</sup> de surface utile a vu sa conception et sa construction particulièrement contrôlées. En ce moment, des contrôles sont en cours pour pouvoir prolonger la vie de cette structure d'une année, ce qui ne devrait pas être difficile puisque les éléments de structure ne montrent pas le moindre signe de faiblesse. On

montrera au chapitre 3 que l'importante redondance de la structure est également un gage de sécurité [TAYEB13].



**Figure 1.7 - Cathédrale éphémère de Créteil**

*La cathédrale éphémère de Créteil fait état de référence en matière de gridshells en matériaux composites. Ce gridshell, d'une surface de 350 m<sup>2</sup> utiles, accueille ainsi du public comme sur la photographie de gauche – célébration diffusée sur France Télévision le 19 janvier 2014. Sur la photographie de droite, on peut voir la partie structurelle en train d'être recouverte de la membrane couvrante.*

Dans le chapitre 2, nous présenterons en détail les prototypes des gridshells en matériaux composite développés par le laboratoire Navier. Ces travaux se sont articulés autour de plusieurs travaux de doctorat ; celui de Cyril Douthe [DOUTHE07], celui de Lina Bouhaya [BOUHAYA10], puis ce présent travail de thèse [BAVEREL12], [TAYEB13]. Ces travaux de recherche restent très à l'étude au laboratoire Navier, avec le commencement du doctorat de Lionel du Peloux.

### 1.3 Les matériaux composites en adéquation avec l'utilisation gridshell

La raideur de coque d'un gridshell est liée à la raideur en flexion des éléments poutres qui la constituent. Dans le cas rare où la structure est funiculaire du chargement, la raideur axiale joue aussi un rôle privilégié. Ainsi, la raideur des gridshells est toujours liée au module d'Young des poutres, qui doit s'avérer suffisant.

Cependant, comme cela a été vu précédemment, les poutres constitutives d'un gridshell doivent supporter d'être fléchies considérablement et de manière permanente sans s'endommager. Cela est possible si le module d'Young n'est pas trop important ou si la déformabilité avant rupture est grande. Ce dernier critère revient à choisir un rapport limite d'élasticité sur module d'Young  $\sigma_y/E$  important tout en conservant un module d'Young suffisant. Enfin, il est important d'utiliser le matériau dans sa zone élastique, de manière à ne pas induire des déformations irréversibles dans les zones de forte courbure.

La plupart des gridshells ont été fabriqués à l'aide de poutres en bois. Le bois présente un intérêt certain pour ce type de structures car il est peu dense, disponible en différents profils et son module d'Young relativement faible le rend flexible. Cependant, contrairement aux idées

reçues, il ne présente pas en général des déformations à la rupture importantes. Sa déformation à la rupture dépasse rarement 0,3 %, là où les composites peuvent atteindre 2 %, tout en ayant un module d'Young supérieur. Ces raisons expliquent le remplacement progressif du bois par les matériaux composites, dans des secteurs comme celui du sport où raideur et déformabilité à rupture élevées sont également recherchées.

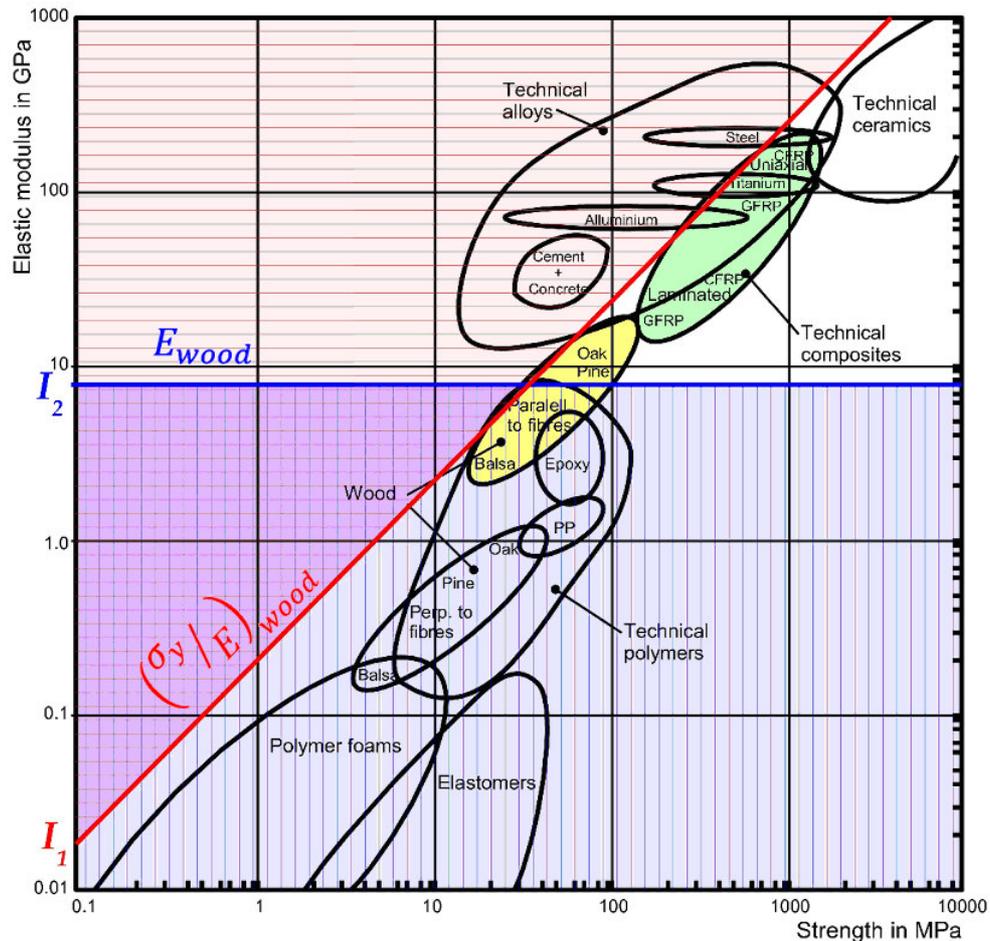
Une étude approfondie du choix du matériau optimal à utiliser pour un gridshell a été réalisée par Cyril Douthe. Cette étude [DOUTHE 2007] se base sur la méthode d'Ashby.

Ainsi, comme cela a été préalablement expliqué, les caractéristiques matériau les plus importantes dans le cas des gridshells sont :

- Une limite de déformation élastique haute, pour que les éléments poutres puissent être fléchis de manière importante, et qu'ils puissent ainsi générer des surfaces suffisamment courbes. La grandeur importante est le rapport de la limite d'élasticité sur le module d'Young  $\sigma_y/E$ . Par exemple on s'efforcera de choisir des matériaux ayant des valeurs de ce rapport qui soient plus importantes que les valeurs typiquement obtenues pour le bois qui constitue la référence actuelle en matière de gridshell. Il faut donc oublier les matériaux apparaissant dans la zone rose clair de la figure 1.8.
- Un haut module d'Young  $E$ , pour apporter à la structure sa raideur. Là encore la référence à prendre en compte est la valeur typique du module d'Young du bois. Il ne faut donc pas compter sur les matériaux apparaissant dans la zone bleu clair, sur la figure 1.8.

Il est ainsi possible de réaliser un diagramme d'Ashby. Ce diagramme log-log est représenté à la figure 1.8. Sur cette figure, l'axe des abscisses représente la limite d'élasticité en MPa tandis que l'axe des ordonnées représente le module d'Young, également en MPa. La ligne bleue permet de repérer le module d'Young du bois pris pour référence. La ligne rouge permet de repérer la valeur du rapport limite d'élasticité sur module d'Young pour le bois de référence. L'intersection de ces deux droites nous indique donc la position de notre bois de référence dans le diagramme d'Ashby. Ainsi, les matériaux meilleurs que le bois selon les deux critères étudiés se retrouvent dans la zone blanche. Les matériaux potentiellement meilleurs que le bois sont donc le titane, les matériaux composites à base de fibre de carbone, ceux à base de fibres de verre, ainsi que les céramiques techniques.

Les matériaux traditionnels tels que le béton ou les métaux présentent des taux de déformation élastique généralement bien plus faibles que le bois. Ils sont également beaucoup plus denses c'est pourquoi ces matériaux ne sont pas utilisés pour construire des gridshells.



**Figure 1.8 - Diagramme d'Ashby utilisé pour le choix des matériaux**

Ce diagramme log-log représente en abscisse la limite d'élasticité et en ordonnées le module d'Young. Le groupe des bois est repéré par la couleur jaune. Celui des matériaux composites est repéré par la couleur verte. Les matériaux apparaissant dans le triangle en haut à droite ont potentiellement des meilleures propriétés que le bois pour l'application gridshell.

Bien évidemment d'autres critères entrent en jeu. Cyril Douthe a montré l'existence de 7 indices intervenant dans le choix du matériau. Parmi ces critères, on trouve un indice de fragilité, un indice de coût, un indice de contenu énergétique, un indice impact environnemental et un indice de durabilité [DOUTHE07].

Ainsi les matériaux trop fragiles pouvant être irréversiblement endommagés sur le chantier doivent être évités. Ce critère élimine les céramiques.

De même, les matériaux trop chers ou trop rares peuvent être mis de côté dans un premier temps. Ainsi, le titane et les composites à base de fibre de carbone présentent des coûts qui les rendent peu compétitifs avec les composites à base de fibre de verre (GFRP en anglais).

Une très bonne alternative au bois se trouve être les matériaux composites à base de fibre de verre. Comparés au bois, ils ont une plus haute limite d'élasticité (1,5 % au mieux pour les GFRP contre 0,5 % pour le bois). Cette plus grande déformabilité permet d'atteindre de plus grandes courbures et ainsi autorise à la fois une plus grande variété de formes aux architectes, mais également, elle permet aux ingénieurs d'atteindre de plus grandes raideurs de coques. Le module d'Young des GFRP est également supérieur à celui du bois (25-30 GPa contre environ

10 GPa pour le bois). Par conséquent, faisant la supposition assez réaliste que pour une géométrie donnée, le chargement de flambement d'un gridshell est proportionnel au module d'Young des poutres constitutives, on peut espérer que le flambement d'un gridshell réalisé en matériaux composites à base de fibres de verre puisse se produire pour des chargements 2,5 à 3 fois plus importants que pour un gridshell identique qui serait réalisé en bois. En outre, comme les matériaux composites sont produits de manière industrielle, la dispersion de leurs propriétés mécaniques est bien moindre que dans le cas du matériau bois. Des études ont permis de montrer que les coefficients de variation relatifs au bois peuvent atteindre facilement 25% [NGUYEN10].

Regardons à présent plus en détail la question du coût. Si l'on prend en compte le gain en propriétés mécaniques, ainsi que la facilité pour les GFRP à être fabriqués avec des géométries optimisées, comme par exemple des géométries tubulaires optimisées et peu denses, les composites à base de fibre de verre deviennent très compétitifs. Ils sont en particulier très compétitifs si le procédé de fabrication utilisé est la pultrusion, puisque ce procédé industriel, mis au point dans les années 1950, est complètement maîtrisé. Ce procédé de pultrusion est expliqué dans le chapitre 2. Il faut ajouter qu'en fonction de la matrice polymère utilisée pour les GFRP, le matériau peut résister à la corrosion, aux UV et à d'autres environnements agressifs, ce qui est un net avantage sur le bois qui nécessite, lui, un entretien régulier.

Par ailleurs, plusieurs grands groupes métallurgiques travaillent actuellement sur des aciers très haute performance présentant les principales caractéristiques recherchées pour l'application gridshell. Si le coût de ces aciers devenait raisonnable, un nouveau matériau utilisable pour la construction des gridshells pourrait voir le jour.

Enfin, du point de vue de l'impact environnemental, des travaux sont en cours au laboratoire Navier, mais, compte tenu de l'utilisation réduite de matière dans le cas de poutres en matériaux composites, la solution GFRP semble tout à fait prometteuse. Il faut en effet comparer cette solution à la solution bois qui nécessite plus de matière, mais également une quantité non négligeable de colle pour la constitution de poutres de longueur voulues, ainsi qu'un entretien régulier (vernis, lasure...).

## 1.4 Form-finding des gridshells par relaxation dynamique

Au laboratoire Navier, la conception d'un gridshell est une étape itérative comportant deux principales étapes, la première purement géométrique, et la seconde faisant intervenir des considérations mécaniques.

La difficulté dans la conception des gridshells élastiques est de définir un processus aboutissant exactement à la géométrie finale souhaitée. Cela passe par un calcul mécanique : à partir d'une configuration géométrique de départ pour la grille primaire ancrée, on fait « relaxer » la grille de manière à obtenir sa véritable géométrie d'équilibre. On peut alors se rendre compte si la géométrie obtenue est satisfaisante. Bien entendu, si la configuration géométrique de départ est bien choisie, la géométrie à l'équilibre peut être très proche de celle de départ, et dans ce cas, peu d'itérations seront nécessaires avant d'obtenir une géométrie d'équilibre satisfaisante.

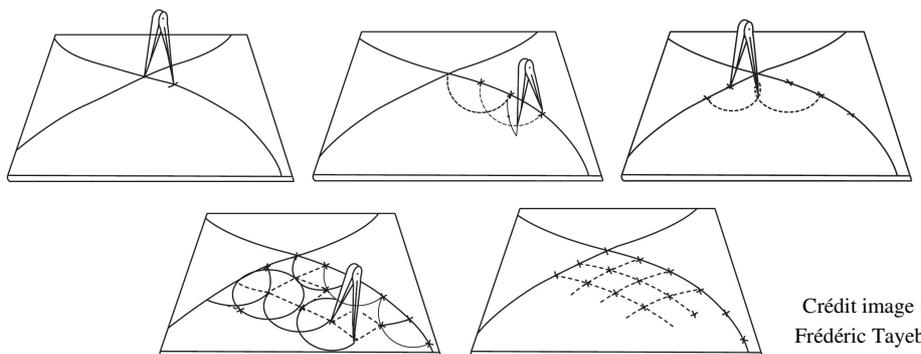
Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'aux phénomènes d'efforts axiaux et de flexion des poutres constitutives d'un gridshell. En effet, il sera vu au chapitre 4, que dans certains cas de figure, on ne peut pas négliger la torsion dans les poutres constitutives des gridshells (en particulier lorsque les poutres ne sont pas axisymétriques ou isotropes – c'est-à-dire deux inerties différentes dans les deux directions principales, lorsque leur section est rectangulaire par exemple). Lorsque les poutres sont à section circulaire, les connexions sont en général plus faciles à trouver. On notera en particulier l'existence sur le marché de noix d'échafaudage adaptées aux sections circulaires.

En première approximation, on peut en général négliger la torsion dans les poutres d'un gridshell si leur section est circulaire ou tubulaire. Si la poutre est circulaire et la section est pleine, on parlera de joncs. Si en revanche sa section est creuse, on parlera de tubes.

### 1.4.1 Première étape, considérations géométriques

Une grille primaire, de pas régulier, est générée directement sur la surface tridimensionnelle choisie par l'architecte. On utilise pour cela la méthode du compas utilisée par Frei Otto [OTTO74]. Cette méthode consiste à dessiner des parallélogrammes réguliers sur la surface. Elle est illustrée sur la figure 1.9, qui présente les diverses étapes de la méthode sur une surface plane :

La première étape consiste à dessiner sur la surface deux courbes qui s'intersectent une et une seule fois. *A priori*, ces courbes peuvent être choisies quelconques. Une fois ces deux courbes dessinées, le maillage peut commencer. Le point d'intersection des deux courbes définit le premier nœud du maillage. A partir du pas de maillage que l'on a choisi, on procède comme avec un compas pour trouver de proche en proche sur les deux courbes d'autres nœuds du maillage. On peut alors obtenir les autres points du maillage.



Crédit image :  
Frédéric Tayeb

**Figure 1.9 - Illustration de la méthode du compas**

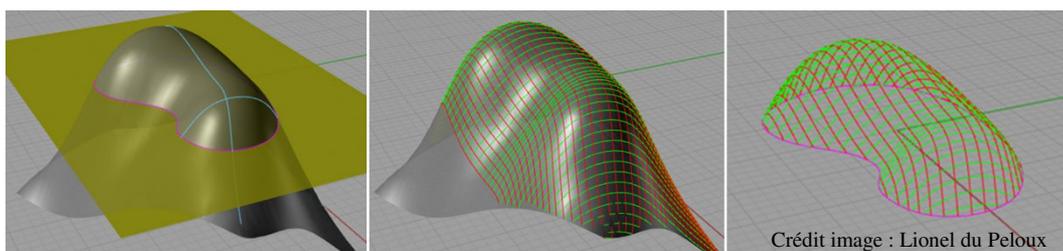
*A partir de 2 courbes sécantes, partant du point d'intersection et en se donnant un pas de maillage (le pas du compas sur la figure), il est possible de définir un maillage régulier de proche en proche, aussi bien dans un plan que sur une surface tridimensionnelle.*

Pour le cas d'une surface tridimensionnelle maillable, le principe de maillage reste le même mais il faut essayer de trouver un couple de courbes qui donne un maillage satisfaisant. Il faut faire attention car toutes les surfaces ne sont pas maillables. Par exemple, une portion de sphère plus grande qu'une demi-sphère ne l'est pas.

Cette méthode géométrique permet donc de générer un maillage qui épouse parfaitement la surface proposée par l'architecte. Cependant, à ce stade, la grille ne tient compte d'aucune considération mécanique. En particulier, si la surface à mailler présente une arête vive, il est fort probable que la relaxation des poutres gomme cette arête vive, une fois les aspects mécaniques pris en considération. Ainsi, la vraie forme du gridshell sera obtenue après considération des propriétés mécaniques de la grille.

Une implémentation de cette méthode a été réalisée par Lionel du Peloux au laboratoire Navier [BAVEREL12], à l'aide du logiciel Rhinoceros. La géométrie utilisée dans cette modélisation est basée sur des NURBS. Cet acronyme fait référence à un modèle mathématique couramment utilisé en informatique graphique pour générer et représenter des courbes et des surfaces. Ce modèle offre une grande souplesse et beaucoup de précision pour manipuler à la fois des formes analytiques et des formes définies à partir de points de contrôle. C'est précisément ce deuxième type de forme qui nous intéresse puisque le logiciel permet de modifier n'importe quelle géométrie à partir de ses points de contrôle. L'autre avantage est que le logiciel Grasshopper, interfacé avec Rhinoceros, permet de réaliser des opérations sur la géométrie de manière interactive. Pour la recherche de forme et de maillage, on peut ainsi explorer rapidement un très grand nombre de cas de figure.

Le maillage est réalisé comme présenté ci-dessous. Tout d'abord une forme est proposée par l'architecte. Cette forme est ensuite étendue et deux courbes de base sont dessinées sur la surface étendue (figure 1.10, gauche). Il est nécessaire d'étendre la surface car il est généralement difficile de mailler 100 % d'une surface avec la méthode du compas. La surface à mailler est donc étendue en une plus grande surface de manière à ce que la surface utile soit effectivement maillée. Il convient ensuite de générer le maillage à partir de la méthode du compas et des deux courbes de base (figure 1.10, centre). En fonction du choix des deux courbes, on obtient des maillages plus ou moins satisfaisants. Une fois un maillage satisfaisant obtenu, il ne reste plus qu'à le recouper pour ne garder que la partie utile (figure 1.10, droite).



**Figure 1.10 - Illustration du maillage d'une surface sous Rhinoceros**

*La surface est étendue. Deux courbes sécantes sont ensuite dessinées sur la surface et servent de base à la méthode du compas. Une fois un maillage satisfaisant obtenu seule la partie utile du maillage est conservée.*

#### 1.4.2 Seconde étape, considérations mécaniques

La forme finale de la structure est ensuite obtenue par l'intermédiaire d'une analyse structurelle non linéaire de la structure, en introduisant les propriétés mécaniques des éléments.

A ce stade, il va être possible de savoir si la forme proposée par l'architecte est adaptée aux poutres que l'on considère. En effet, la structure n'est plus asservie à rester sur la surface

tridimensionnelle de départ et de légères modifications de la géométrie de la grille sont observées en général. Une analyse de la courbure des éléments donne ainsi de précieuses informations sur l'adéquation entre forme, maillage, et poutres. Si le couple maillage/poutres est validé, une analyse structurelle classique est réalisée, sur la base des chargements de vent et de neige standard.

Concevoir un gridshell est donc relativement délicat. Nous en résumons ici les points les plus importants :

- toute la surface utile doit être maillée et le maillage ne doit pas être trop concentré localement dans certaines zones.
- la courbure dans chaque élément ne doit pas être trop élevée, de manière à réduire la probabilité qu'une poutre casse. Ce point est détaillé dans le chapitre 2 de ce mémoire, avec l'interprétation des guides de construction.

Si la grille est trop faible mécaniquement pour supporter les chargements extérieurs, le concepteur peut la renforcer en réduisant le pas du maillage et/ou en modifiant la section des poutres constitutives (diamètre intérieur, diamètre extérieur dans le cas d'une poutre tubulaire). Il faut toutefois faire très attention au fait qu'augmenter le diamètre extérieur de la poutre a deux conséquences : la première est que la raideur en flexion de la poutre, et donc celle de la structure, est augmentée. La deuxième est que, comme la contrainte maximale au sein de la poutre est proportionnelle au diamètre extérieur, à rayon de courbure fixé, il est possible que la valeur de la contrainte sorte du domaine admissible, au sens des guides de construction.

L'étape de calcul de structure peut-être réalisée à l'aide de diverses méthodes, en particulier à l'aide de méthodes éléments finis qui sont en général assez couteuses en temps de calcul mais surtout couteuses à adapter à chaque cas que l'on souhaite considérer. Ainsi, l'ingénieur peut être amené à considérer un nombre important de géométries, non seulement parce qu'il y a une infinité de maillages pour une surface mais également parce que la surface elle-même peut être amenée à être modifiée au cours des diverses étapes de conception. Ainsi, réaliser un modèle éléments finis pour chacune des configurations à tester s'avère trop fastidieux.

La méthode numérique qui est plutôt choisie est une méthode de relaxation dynamique, qui a été validée à partir de modèles éléments finis. Ce sont Chris Williams et Michael Barnes qui ont mis au point la méthode de relaxation dynamique pour l'étude des structures composées d'éléments en flexion [BARNES75], [BARNES94] [ADRIAENSSENS99], durant le projet du gridshell de Mannheim. L'algorithme est développé par la suite par Adriaenssens [ADRIAENSSENS01].

Le principe de cette méthode est de faire évoluer le système selon les lois mécaniques (réelles ou fictives) jusqu'à ce qu'un maximum d'énergie cinétique soit atteint. Alors, lorsque ce maximum est atteint, les vitesses sont remises à zéro, ce qui permet de dissiper l'énergie du système. Après un certain nombre de cycles de dissipation d'énergie, on peut espérer que la structure ait convergé vers sa configuration d'équilibre. Plusieurs variantes de cette méthode existent. Lorsque la dissipation est réalisée de cette façon assez brutale, on parle d'amortissement cinétique. Lorsque l'amortissement est réalisé à l'aide d'une force de

frottement, on parle d'amortissement visqueux. On peut résumer cette méthode de relaxation dynamique en deux points principaux :

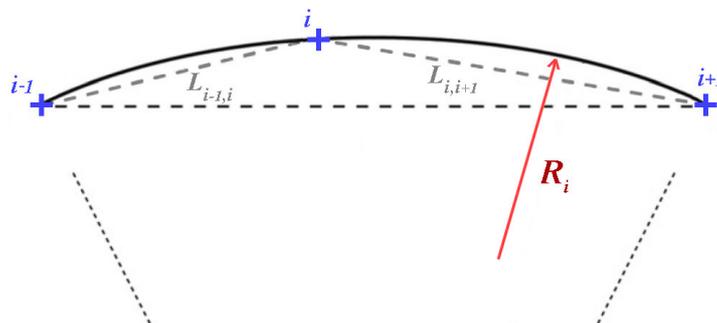
- A chaque pas de temps, la géométrie de la structure permet de calculer les efforts qui vont permettre de faire évoluer la structure entre l'instant  $t$  et l'instant  $t+\Delta t$  via l'intégration de la relation fondamentale de la dynamique.
- A la fin de chaque itération, il faut calculer l'énergie cinétique et la comparer à l'énergie cinétique du pas de temps précédent. Si cette énergie a augmenté, il faut continuer la procédure, si elle a diminué, cela veut dire qu'à l'instant précédent on pouvait dissiper plus d'énergie. Dans ce dernier cas, on se replace dans la configuration de l'instant précédent et on annule toutes les vitesses.

Connaissant les positions des nœuds servant à la discrétisation des poutres, il est possible de définir les longueurs des éléments, les courbures (à partir de trois nœuds consécutifs, [HOFFMANN08]) et ainsi de remonter aux efforts mécaniques intérieurs qui vont progressivement modifier la forme géométrique de départ jusqu'à l'obtention de la forme mécanique d'équilibre.

Les efforts sont donc, à ce stade, de deux types : des forces axiales liées à l'élongation des éléments, et des moments de flexion, orthogonaux au plan formé par 3 nœuds consécutifs non alignés. Trois degrés de liberté par nœud ( $x$ ,  $y$  et  $z$ ) sont donc suffisants pour calculer les efforts. En effet, deux points suffisent pour calculer une longueur. En revanche, il faut trois points pour calculer une courbure, via le calcul du rayon du cercle circonscrit. Les efforts à prendre en compte doivent donc être des forces, de manière à pouvoir modifier les coordonnées des nœuds. Ainsi, les moments de flexion doivent donc être décomposés en couples de forces. Il sera vu au chapitre 4 que, pour prendre en compte la torsion dans les poutres, ce modèle doit être raffiné. En particulier, il n'est pas possible de prendre en compte la torsion avec seulement 3 degrés de liberté par nœud.

Ainsi, le procédé de la relaxation dynamique, développé par Cyril Douthe [DOUTHE06], peut être schématisé en plusieurs étapes :

**Étape 1** A l'instant actuel  $t$ , la géométrie de chaque poutre permet d'obtenir les longueurs des éléments, par exemple sur la figure 1.11,  $L_{i-1,i}$  et  $L_{i,i+1}$  mais aussi les courbures (ou le rayon de courbure) grâce au cercle circonscrit aux trois nœuds consécutifs.



**Figure 1.11 - Illustration du calcul de la courbure, évaluée en chaque nœud**

*Le rayon de courbure  $R_i$  est évalué à partir du rayon du cercle circonscrit à trois nœuds consécutifs.*

Ainsi la courbure  $1/R_i$  est obtenue grâce à la relation (1.1) :

$$\frac{1}{R_i} = \frac{2 \|\mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{e}_i\|}{\|\mathbf{e}_{i-1}\| \|\mathbf{e}_i\| \|\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i\|} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{e}_i$  est le vecteur élément  $i, i + 1$ .

**Étape 2** Ainsi, il est possible d'obtenir les efforts s'exerçant sur chaque nœud :

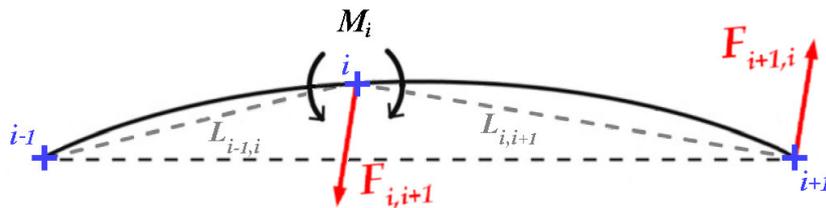
Par comparaison de la longueur actuelle avec la longueur à vide, on évalue les forces longitudinales. Par exemple la relation (1.2) définit la force  $\mathbf{T}_{i,i+1}^t$  exercée par le nœud  $i + 1$  sur le nœud  $i$ . ( $ES$ ) est la raideur axiale, avec  $E$  le module d'Young et  $S$  la section de la poutre.

$$\mathbf{T}_{i,i+1}^t = (ES)_{i,i+1} \left( \frac{L_{i,i+1}^t - L_{i,i+1}^0}{L_{i,i+1}^0} \right) \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|} \quad (1.2)$$

A l'aide de la courbure actuelle et de la courbure au repos (nulle en général dans le cas des applications gridshell), on évalue les moments de flexion associés à chaque nœud  $i$ ,  $\mathbf{M}_i^t$  (relation (1.3)). Ces moments de flexion sont ensuite décomposés en couples de force pour chaque élément directement voisin du nœud concerné [DOUTHE06], [BARNES13]. Cette décomposition est illustrée sur la figure 1.12.

$$\|\mathbf{M}_i^t\| = \frac{EI}{r_i^t} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{F}_{i+1,i}^t = \frac{\mathbf{e}_i \times \mathbf{M}_i^t}{L_{i,i+1}^t{}^2} \quad (1.4)$$



**Figure 1.12 - Décomposition d'un moment de flexion en un couple de force**

*Les efforts pris en compte dans ce modèle étant uniquement des forces, il est nécessaire de décomposer les moments de flexion en couples de forces.*

Tous les efforts intérieurs ont donc été écrits sous forme de forces, chacune appliquée en un nœud. On peut passer à l'étape suivante qui consiste à utiliser ces forces pour modifier la géométrie de la structure.

**Étape 3** L'étape suivante consiste à calculer les vitesses des différents nœuds à partir de la relation fondamentale de la dynamique : connaissant les forces à l'instant  $t$  et les vitesses de chaque nœud à l'instant  $t - \Delta t$ , on peut calculer les vitesses à l'instant  $t$  à l'aide de la

relation (1.5). Dans cette relation,  $\mathbf{R}_i^t$  représente la force sur le nœud  $i$  tandis que  $m_i$  est la masse associée au nœud  $i$ . On retiendra que le pas de temps  $\Delta t$  et la masse  $m_i$  ne peuvent pas être choisis indépendamment. En effet,  $m_i$  est une masse virtuelle, choisie, une fois l'intervalle de temps  $\Delta t$  fixé, de manière à ce que la convergence soit aussi rapide que possible (tout en veillant à ce que la dynamique reste stable). Le choix des masses virtuelles  $m_i$  et de  $\Delta t$  est détaillé dans le paragraphe 4.3.5.1 du chapitre 4.

$$\mathbf{V}_i^t = \mathbf{V}_i^{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{m_i} \mathbf{R}_i^t \quad (1.5)$$

**Etape 5** Il faut ensuite prendre en compte les conditions aux limites. Ces conditions aux limites se traduisent par exemple par l'annulation de la vitesse aux nœuds où la structure est rotulée (au niveau des ancrages).

**Etape 6** L'étape suivante revient à ré-actualiser les positions. En effet, la connaissance des vitesses à l'instant  $t$  permet de calculer la nouvelle position de chaque nœud (relation (1.6)) :

$$\mathbf{X}_i^t = \mathbf{X}_i^{t-\Delta t} + \Delta t \mathbf{V}_i^t \quad (1.6)$$

**Etape 7** Enfin, il convient de calculer l'énergie cinétique de la structure, qui s'identifie dans ce cas à la somme des énergies cinétiques de translation de tous les nœuds, pondérés par leur masse fictive (relation (1.7)). Nous verrons au chapitre 4 que dans le cas où la torsion est prise en compte, une autre énergie cinétique de rotation de la poutre autour de son axe est à prendre en compte. Si cette énergie a augmenté par rapport au pas de temps précédent, il faut continuer la procédure, si elle a diminué, c'est qu'un pic d'énergie cinétique a été atteint, à proximité de la configuration au pas de temps précédent. Dans ce dernier cas, on se replace dans la configuration de l'instant précédent et toutes les vitesses sont mises à zéro.

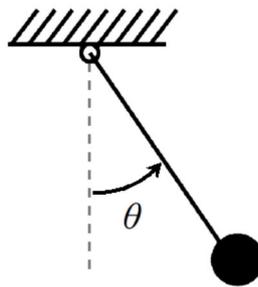
$$E_c^t = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V}_i^{t2} \quad (1.7)$$

Lorsque les énergies sont remises à zéro, une quantité d'énergie égale à l'énergie cinétique est dissipée. La structure se retrouve donc dans une nouvelle configuration plus proche d'un puits de potentiel local. Ainsi, si ce puits de potentiel correspond à la configuration d'équilibre, la structure va s'en rapprocher au fil des dissipations.

Il est important de définir un critère de convergence pour sortir de l'algorithme une fois la structure dans un état suffisamment proche de son équilibre.

Pour plus de détail sur ce procédé de relaxation dynamique, le lecteur pourra se référer à la thèse de Cyril Douthe [DOUTHE07], [BARNES75], [ADRIAENSSENS00] ou au chapitre 4 de ce mémoire.

Le procédé de la relaxation dynamique présenté ci-dessus peut être aisément illustré sur un exemple simple comme celui d'un pendule, figure 1.13. C'est un exemple à un seul degré de liberté. La masse reste dans un plan et est totalement paramétrée par l'angle  $\theta$  que fait le fil avec la verticale. Partant d'une position quelconque, fil tendu, les forces s'exerçant sur la masse sont calculées (poids, tension de la corde). La masse évolue donc vers la position d'équilibre bien connue. A chaque pas de temps l'énergie cinétique est calculée. A un moment la masse dépasse la position d'équilibre. A la première itération après ce passage, l'énergie cinétique est calculée. Elle a diminué. On obtient alors une nouvelle position de départ, beaucoup plus proche de la position d'équilibre. Après quelques itérations de cette procédure, la position d'équilibre est approchée avec précision.



**Figure 1.13 - Illustration de la relaxation dynamique sur l'exemple du pendule**

Un autre exemple à 2 degrés de liberté est également présenté au chapitre 4. Cet exemple est celui d'une bille que l'on lâcherait dans un récipient ellipsoïdal.

Ainsi, avec la méthode de relaxation dynamique, l'avantage est de disposer d'une méthode numérique assez facile à mettre en œuvre, permettant d'obtenir les configurations d'équilibre de systèmes complexes.

Il est toutefois préférable que le système ne présente qu'un seul puits de potentiel local, ce qui est généralement vérifié dans le cas des gridsells, surtout si la configuration de départ est choisie proche de la configuration d'équilibre.

Dans le cas de systèmes de poutres dans lesquels la torsion est prise en compte, cette méthode de relaxation dynamique peut être adaptée. Un nouvel algorithme de relaxation dynamique capable de traiter la torsion des poutres sera ainsi présenté dans le chapitre 4.

## 1.5 Conception numérique itérative des gridsells

La conception des gridsells étant assez complexe, il apparaît important de résumer le procédé à l'aide d'un schéma. Evidemment, ce schéma est indicatif et n'a pas la prétention de représenter tous les allers-retours à faire entre les diverses étapes de la conception. Pour résumer :

- l'architecte propose une forme que l'ingénieur modélise sous forme de courbes de base dans un logiciel de dessin interactif. A partir des courbes de base diverses surfaces sont proposées. Un tri peut être réalisé pour ne conserver que quelques surfaces fidèles à la proposition de l'architecte.

- Sur ces surfaces, une analyse de la courbure est réalisée. Cette analyse permet d’avoir très rapidement une idée de l’adéquation entre la géométrie des poutres envisagée et la surface. Si l’adéquation ne semble pas bonne, il faut modifier au moins un des paramètres de construction (géométrie des poutres, forme de la surface...).
- Lorsqu’un couple forme / géométrie de poutre intéressant semble avoir été trouvé, il faut choisir un maillage satisfaisant. A l’aide de la méthode du compas, un grand nombre de maillages peut être envisagé. Un bon maillage peut également être obtenu à l’aide d’une optimisation du maillage par un algorithme génétique [BOUHAYA10]. Dans cette thèse, Lina Bouhaya présente un algorithme génétique qui permet de faire une sélection de maillages par une fonction coût représentative du critère que l’on cherche à optimiser. Les meilleurs maillages sont ainsi croisés entre eux jusqu’à ce que la population obtenue n’évolue plus et donc que la fonction coût soit optimisée. Dans le cas des gridshells, la fonction coût à minimiser peut être par exemple la courbure maximale observée sur l’ensemble des éléments de la structure. Cependant, le point de vue architectural peut également jouer et, dans certains cas, on peut souhaiter privilégier un maillage qui fait apparaître, une zone où le maillage est symétrique ou antisymétrique.
- Enfin, il ne faut pas oublier de rajouter les considérations mécaniques. Ce sont elles qui vont permettre de valider le gridshell si le comportement de celui-ci est convenable pour chaque combinaison de sollicitations à considérer. En outre, ce sont ces considérations mécaniques qui vont permettre de déterminer la géométrie finale du gridshell. C’est à partir de cette forme obtenue numériquement que la géométrie de la membrane sera déduite.

Par chance, les gridshells ont un comportement assez prévisible : en effet, on montre que pour l’opération de form-finding, le comportement en flexion conditionne très bien ce type de structures et que la contribution de l’effort normal dans les éléments des gridshells est très faible. On peut alors raisonner de la manière suivante : les contraintes au sein des poutres sont liées à la flexion, c'est-à-dire à la courbure des poutres constitutives.

On montre également que, si le gridshell a été bien conçu, la courbure des poutres évolue très peu lorsque les chargements de vent ou de neige sont considérés. En particulier cette évolution a été chiffrée à moins de 6 % pour le cas du gridshell élaboré pour le festival Solidays [BAVEREL12]. Ainsi, la considération de la seule structure relaxée, puis triangulée, donne déjà, sans considération de chargement, une bonne indication des niveaux de contrainte au sein des poutres.

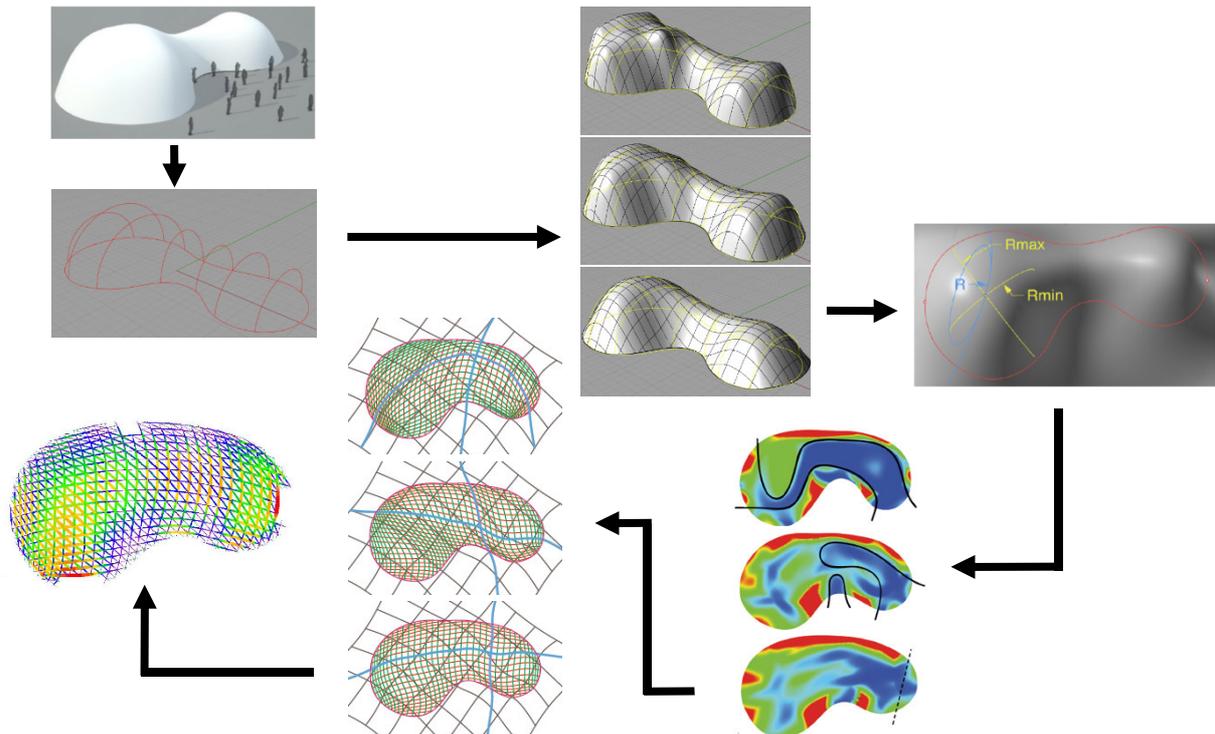
En réalité, le procédé est un peu plus compliqué que cela. En effet, la grille obtenue par la méthode du compas est relaxée mécaniquement ce qui fournit la géométrie d’équilibre. Cependant, avant de faire l’étude complète des chargements, il est fondamental de rajouter les éléments de triangulation. Ces poutres sont, en pratique sur chantier, mises une à une, et l’ordre de la mise en place et de la fixation de ces poutres sur le gridshell peut avoir de très mineures répercussions sur la forme finale. En revanche, comme cela a déjà été expliqué, le rôle rigidifiant de la triangulation est primordial. Il permet de donner sa raideur de coque de la structure en

empêchant tous les quadrangles de se déformer. En pratique, la raideur de la structure est alors multipliée par d'un facteur important (30 sans difficulté).

Une fois la triangulation ajoutée, la validation complète de la structure est réalisée en prenant en compte les chargements standards de neige et de vent. Dans le cas où la structure est validée, il ne reste qu'à convaincre les organismes de certification de la pertinence de la modélisation, avec l'appui des essais en laboratoire. Dans le cas contraire, il faut à nouveau itérer. Cette itération peut se faire en modifiant la géométrie de la surface, la géométrie des sections des poutres à utiliser et/ou le choix du maillage. Eventuellement, le pas de maillage peut aussi être ajusté.

La phase de construction est également modélisée, mais elle est beaucoup moins critique en général. En effet, si l'on s'intéresse aux coefficients de sécurité, on se rend compte que la précontrainte permanente du gridshell joue un rôle important du point de vue du coefficient de sécurité à utiliser pour le calcul de la structure. En revanche, durant les phases que l'on peut qualifier de 'court terme', comme la phase de déploiement par exemple, les poutres peuvent subir des chargements bien plus importants. L'utilisation des coefficients de sécurité est présentée en détail dans la partie 2.1.1. En particulier, le coefficient de sécurité partiel  $\gamma_{m,3}$  passe de 1,1 à 2,8 entre un chargement court terme et un chargement long terme. Le déploiement du gridshell durant environ une demi-heure, la structure n'est pas mise en danger si elle est correctement élinguée.

Le schéma de la figure 1.14 représente ainsi les grandes étapes de la conception d'un gridshell. Il faut bien garder à l'esprit que la conception d'un gridshell telle qu'elle est présentée ici, se fait de manière itérative, et qu'elle pourrait s'avérer compliquée pour quelqu'un ne disposant pas d'expérience en la matière.



**Figure 1.14 - Schéma résumé de la conception d'un gridshell**

*Après que l'architecte ait proposé une forme, l'ingénieur modélise cette forme et fait une analyse de courbure qui permet d'avoir une idée de l'adéquation géométrie/poutres. Une fois la forme choisie, plusieurs maillages sont générés à l'aide de la méthode du compas. Le maillage qui paraît le plus satisfaisant est conservé. Enfin, une validation basée sur des considérations mécanique est réalisée. Cette procédure est très itérative. Cependant, dans un souci de lisibilité du schéma, nous avons choisi de ne pas symboliser les nombreux allers-retours entre les diverses étapes.*

Dans ce chapitre, nous avons vu le contexte dans lequel s'inscrivait la recherche sur les gridshells – à savoir – une recherche sur des structures légères, optimisées mécaniquement et présentant des caractéristiques architecturales intéressantes. Le concept de gridshell a ensuite été présenté, avec pour illustration quelques importants gridshells, celui de Mannheim ayant été précurseur, et celui élaboré en matériaux composites de la cathédrale de Créteil pouvant être considéré comme le futur pour les gridshells. L'objet d'étude est donc un objet tridimensionnel formé à partir d'une résille plane sans résistance au cisaillement, mise en forme puis rigidifiée par blocage du degré de cisaillement des divers quadrangles. La partie suivante a permis de justifier l'intérêt que peut présenter l'utilisation de matériaux composites, principalement pour des raisons d'optimisation du comportement mécanique, ainsi que pour la faible dispersion des propriétés des produits industriels utilisés.

Le chapitre 2 présentera les réalisations Navier, des premiers prototypes aux deux derniers gridshells les plus aboutis, auxquels j'ai pu participer. Ces derniers gridshells, élaborés en matériaux composites, ont été réalisés en 2011 à l'occasion du festival Solidays (figure 1.15, gauche) et en 2013 pour le remplacement provisoire jusqu'en 2015 de la Cathédrale de Créteil (figure 1.15, droite). Ce chapitre 2 précisera les choix de conception et de constructions qui ont été faits pour ces gridshells. Il détaillera en particulier le choix des poutres constitutives. L'interprétation des guides de construction sera également expliquée. Les modifications allant

dans le sens du confort et de la sécurité des occupants seront aussi présentées, tout comme les enseignements tirés de la réalisation de ces projets.



**Figure 1.15 - Gridshells de Solidays (gauche) et de Créteil (droite)**

*Principaux gridshells en matériaux composites conçus et fabriqués par le laboratoire Navier. Ces deux gridshells ont reçu une certification leur permettant de recevoir du public.*





# **Chapitre 2 : Gridshells en matériaux composites conçus et élaborés par le laboratoire Navier**

## **Sommaire**

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction, présentation, choix généraux .....</b>	<b>42</b>
<b>2.2</b>	<b>Le ‘haricot’ de Solidays .....</b>	<b>59</b>
<b>2.3</b>	<b>La Cathédrale éphémère de Créteil.....</b>	<b>79</b>

---

## 2.1 Introduction, présentation, choix généraux

Si la conception d'un gridshell sur le papier et à l'aide des outils numériques se révèle captivante, la réalisation en pratique d'un gridshell est passionnante. En effet, cette réalisation concrète nécessite la prise en compte de divers nouveaux paramètres, et nécessite en particulier de s'adapter rapidement aux diverses situations qui se présentent (gestion des problèmes, des oublis de conception, du chantier, des plannings). Ce chapitre expose volontairement de nombreux aspects divers liés à cette conception, également dans le but de tracer ces informations qui pourraient être considérées à tort comme des détails.

Nous avons vu que les gridshells sont constitués de poutres fléchies de manière permanente. Les chargements de vent, de neige, et de poids propre et d'équipement étant faibles comparés aux chargements de flexion permanents liés à la mise en forme, il est possible de se concentrer sur les contraintes générées par la mise en forme, dans un premier temps.

Ce chapitre présente tout d'abord les éléments permettant de définir les coefficients de sécurité à utiliser. En l'absence d'Eurocodes, ces éléments proviennent de guides de construction composites.

Dans un deuxième temps, les enjeux à maîtriser pour l'utilisation de poutres en flexion, et la caractérisation des poutres en flexion sont présentés. Une fois cela exposé, un sous-chapitre se concentrera sur la conception et la réalisation du gridshell de Solidays (juin 2011). Finalement, un autre sous-chapitre présentera la conception et la réalisation du gridshell le plus abouti, la cathédrale éphémère de Créteil (février 2013 - début 2015). Pour chacune de ces constructions, les retours d'expérience sont particulièrement importants et c'est pourquoi on les expose ici.

Avant de pouvoir se lancer dans l'élaboration d'un gridshell, il est important de connaître les recommandations des guides de construction composite qui proposent des coefficients de sécurité pour les structures réalisées en matériaux composites.

### 2.1.1 Coefficients de sécurité et guides de construction

Etant donné la quasi-absence du composite dans le secteur de la construction (hors renforcement d'ouvrages), il n'existe pas d'Eurocode relatif à la construction composite. Il existe cependant des guides pour la construction en composite. L'Eurocomp [Eurocomp96] et le Fiberline [FIBERLINE02] en font partie et fournissent de précieuses indications en vue de la construction en composite. Fiberline étant un producteur de profilés pultrudés, leur guide est un digest de l'Eurocomp applicable à leurs produits. Nous verrons par la suite que c'est précisément ce type de poutres pultrudées qui sont utilisées dans les gridshells en matériaux composites que conçoit et fabrique le laboratoire Navier.

Il apparaît que le coefficient de sécurité global à prendre en compte,  $\gamma_m$ , doit tenir compte de tous les aspects qui peuvent apporter de la variabilité au système. Le coefficient à utiliser s'apparente donc au produit de coefficients de sécurité partiels (associés à chacun des aspects, et étant tous supérieurs ou égaux à 1). En pratique, pour les poutres que nous étudions, il y a trois coefficients de sécurité partiels à considérer,  $\gamma_{m,1}$ ,  $\gamma_{m,2}$  et  $\gamma_{m,3}$ , comme présenté dans la relation (2.1).

$$\gamma_m = \gamma_{m,1} * \gamma_{m,2} * \gamma_{m,3} \quad (2.1)$$

Dans le paragraphe qui suit, nous allons détailler les coefficients de sécurité partiels, en se plaçant dans le cas particulier des poutres pultrudées, utilisées en pratique pour construire les gridsells au laboratoire Navier. La démarche est cependant très générale puisqu'il s'agit en pratique d'étudier toutes les sources de variabilité sur l'objet considéré, une poutre en matériaux composites pultrudée dans notre cas.

Le premier coefficient partiel  $\gamma_{m,1}$  est associé au matériau lui-même. Ce coefficient caractérise le matériau et le procédé de fabrication utilisé. Dans le cas de poutres issues de la pultrusion, ce coefficient est faible et vaut 1,15. Ce coefficient est en général assez proche de 1 pour tous les procédés de fabrication industriels, c'est pourquoi il ne me paraît pas pertinent de détailler les différentes valeurs prises par ce coefficient.

Le second coefficient partiel  $\gamma_{m,2}$  caractérise le post-traitement de la poutre. Dans le cas étudié, le post-traitement des poutres est entièrement réalisé sur le site de fabrication. Tous les paramètres sont ainsi bien maîtrisés, c'est pourquoi ce coefficient est également faible. Dans le cas qui nous intéresse, il vaut 1,1. Ce coefficient partiel étant généralement proche de 1. Il n'est pas pertinent de détailler les différentes valeurs prises par ce coefficient.

Le troisième coefficient partiel,  $\gamma_{m,3}$ , est relatif à la variabilité du matériau en fonction de la température et des chargements. En effet, la température a en particulier une influence sur la raideur et la résistance des poutres, tandis que les chargements ont une influence par l'intermédiaire des phénomènes de relaxation, fluage et fatigue. Ces phénomènes sont étudiés en détail dans [KOTELNIKOVA12]. Ils sont expliqués ci-dessous :

**Phénomènes de relaxation** : ces phénomènes sont observés lorsqu'un matériau est maintenu sous contraintes dans une géométrie donnée. On observe alors en général une diminution de l'état de contrainte au sein du matériau.

**Phénomènes de fluage** : ces phénomènes sont observés lorsqu'un matériau est maintenu sous contraintes par un chargement imposé. On observe alors en général une modification de l'état de déformation du matériau.

**Phénomènes de fatigue** : ces phénomènes sont observés lorsqu'un matériau est soumis à des chargements périodiques. Ces phénomènes cycliques peuvent, en fonction de l'état de contrainte générer de l'endommagement au sein du matériau.

Ce coefficient dépend donc des temps caractéristiques relatifs aux chargements les plus importants. Dans le cas particulier des gridsells, le chargement de flexion est permanent. Les pieds des poutres du gridshell étant fixés, le phénomène principal est un phénomène de relaxation. En outre, le chargement de flexion est très important par rapport aux autres chargements (poids propre, vent, neige...) [BAVEREL12]. Il faut donc considérer que le chargement principal est un chargement à long terme.

Le coefficient  $\gamma_{m,3}$  tient compte d'une température appelée température de déformation thermique (heat deformation temperature, HDT). Cette température est définie de la manière suivante : c'est la température à partir de laquelle le polymère se déforme pour un chargement spécifié. Les températures d'exploitation sont également pertinentes.

Les valeurs prises par le coefficient  $\gamma_{m,3}$  sont résumées dans la figure 2.1 ci-dessous. Pour le cas des gridsells que le laboratoire Navier réalise, la température d'exploitation à considérer varie entre -20°C et 40°C. La température de déformation thermique de la résine polyester

utilisée est comprise entre 80 et 90°C. De plus, comme expliqué précédemment, les chargements de flexion à considérer pour le dimensionnement sont permanents et entrent donc dans la catégorie des chargements à long terme. Le coefficient  $\gamma_{m,3}$  à considérer vaut donc 2,8.

Température d'exploitation (°C)	Température de déformation thermique (°C)	$\gamma_{m,3}$	
		Chargement à court terme	Chargement à long terme
25 - 50	55 - 80	1.2	3.0
	80 - 90	1.1	2.8
	> 90	1.0	2.5
0 - 25	55 - 75	1.1	2.7
	70 - 80	1.0	2.6
	> 80	1.0	2.5

**Figure 2.1 - Tableau de valeur du coefficient de sécurité  $\gamma_{m,3}$**

*Parmi les coefficients de sécurité partiels proposés par le Fiberline [FIBERLINE02], le coefficient  $\gamma_{m,3}$  est le coefficient ayant le plus d'influence dans le cas de poutres fléchies de manière permanentes et réalisées via un procédé industriel. En particulier, ce coefficient de sécurité partiel tient compte des effets de la température sur la matrice polymère, et des temps caractéristiques des sollicitations.*

Dans le cas des gridshells réalisés à partir de poutres pultrudées et conçus pour être utilisés durant plusieurs années, le coefficient de sécurité global à utiliser,  $\gamma_m$ , vaudrait donc 3,54.

Ce coefficient de sécurité correspond, pour ce type de poutres, à une utilisation des poutres ne dépassant pas 28 % de la contrainte à rupture. Par exemple, pour des poutres ayant une contrainte à rupture de 400 MPa, cela revient à autoriser uniquement les flexions permanentes pour lesquelles les contraintes sont inférieures à 113 MPa.

Pour le déploiement d'un gridshell, qui dure généralement moins d'une heure, il est possible de dépasser cette valeur de contrainte comme le sous-entend le tableau 2.12. Il faut toutefois noter que l'expression « court terme » n'est pas vraiment définie, mais que grâce aux tests de relaxation réalisés en laboratoire et présentés dans la section suivante, la rupture en relaxation est assez bien appréhendée.

Autre exemple : pour le gridshell construit pour Solidays (et érigé durant une quinzaine de jour), il a été convenu avec le bureau de contrôle et le BVCTS (bureau de vérification des chapiteaux, tentes et structures) que le coefficient  $\gamma_{m,3}$  pouvait être pris égal à 1,85, en tant que structure soumise à des « chargements à moyen terme ». Alors, la valeur du coefficient global  $\gamma_m$  à utiliser pour la conception valait 2,35.

L'utilisation de ces coefficients de sécurité permet de réduire considérablement le risque d'endommagement macroscopique à long terme. Typiquement, les phénomènes de rupture progressive des fibres au sein du matériau peuvent conduire à des endommagements

macroscopiques si les matériaux sont trop fortement sollicités, comme présenté dans [KOTELNIKOVA12].

En particulier, ces coefficients de sécurité permettent de prendre en compte les éventuels endommagements liés aux phénomènes de relaxation, fluage et fatigue. Les phénomènes de relaxation et de fluage sont liés à la viscoélasticité du matériau. Dans le cas de matériaux composites réalisés à partir d'une matrice polymère, les effets viscoélastiques sont importants et ces phénomènes peuvent conduire à de l'endommagement.

Ainsi les coefficients de sécurité permettent de prendre en compte ces phénomènes. Nous verrons cependant dans le chapitre 3 que, dans le cas où la structure aurait mal été conçue ou mal dimensionnée, la rupture d'un certain nombre d'éléments ne conduit pas à la ruine totale du gridshell. Nous verrons que ce caractère robuste de la structure lui est conféré par l'importante redondance de ses éléments structurels.

### 2.1.2 Problématique des poutres en flexion permanente

Comme cela a été présenté à plusieurs reprises, le choix des poutres va de pair avec la forme de la structure. En particulier, une étape importante consiste à évaluer la courbure maximale de la surface de la structure. En effet, une fois le gridshell réalisé, les poutres constitutives du gridshell épousent sa surface, et doivent être suffisamment fléchies pour donner de la raideur à la structure, mais pas trop fléchies de manière à diminuer le risque d'endommagement (conception intégrant les coefficients de sécurité des guides de construction).

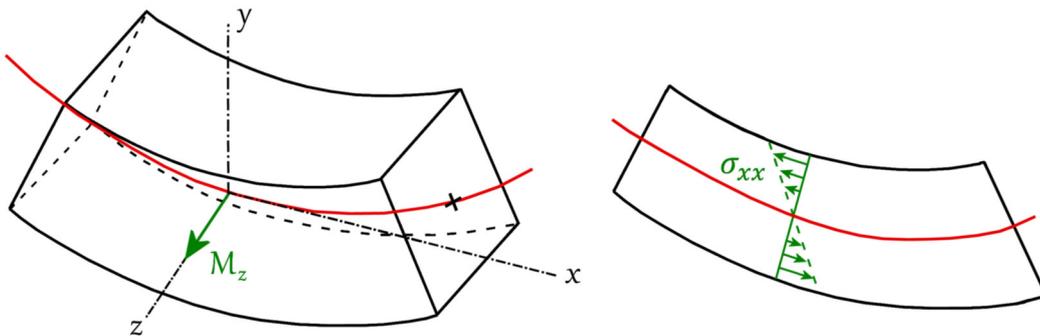
Les poutres ne sont pas nécessairement toujours le long de la plus forte courbure de la surface, mais, la plus forte courbure de la surface nous donne toutefois une bonne indication, qui de plus, est conservative. De la courbure à construire va donc dépendre le choix des poutres. Nous allons voir que le choix des poutres consiste principalement à choisir un matériau et la géométrie de la section.

Comme expliqué au chapitre précédent, les connaissances du laboratoire Navier en matière de matériaux nous ont conduits à fixer le matériau de base et à choisir les poutres en matériau composite à base de fibre de verre et à matrice polymère. C'est en effet un matériau que nous connaissons bien et qui présente des propriétés mécaniques peu dispersées. C'est en outre un matériau bon marché qui remplace de manière avantageuse le bois du point de vue des propriétés mécaniques. Une étude d'analyse de cycle de vie est en cours et semble montrer que cette solution est intéressante en matière d'impact environnemental. Il faut en effet considérer le fait que la masse d'un gridshell en bois serait bien plus importante que celle du gridshell en composite, pour prendre en compte les moins bonnes propriétés mécaniques du bois, la plus forte dispersion de ses propriétés et l'impossibilité de faire des poutres creuses en bois. D'autre part les traitements chimiques du bois pour le rendre durable pèsent également dans son analyse de cycle de vie. Enfin, la pultrusion est un procédé industriel très maîtrisé et optimisé.

Du point de vue de la poutre, à matériau fixé, plus la dimension transverse des poutres est petite, plus il sera facile de fléchir les poutres et moins la contrainte au sein du matériau sera importante (équations (2.2) et (2.3)). Cependant l'inconvénient associé est que plus la

dimension transverse de la poutre est petite, moins la poutre est raide vis-à-vis des sollicitations en flexion, et donc également vis-à-vis du flambement. On sent donc assez bien la nécessité de trouver un compromis.

Pour mieux comprendre les enjeux de la flexion au sein d'une poutre, il n'est pas inutile de rappeler quelques éléments même s'ils sont triviaux. Étudions la configuration représentée sur la figure 2.2. Dans une poutre fléchie, une partie de la poutre est en compression, tandis que l'autre partie est en traction, comme illustré sur la figure 2.2, à droite.



**Figure 2.2 - Illustration de la contrainte pour une sollicitation en flexion**

La contrainte  $\sigma$  au sein d'une poutre en flexion est définie de la manière suivante :

$$\sigma = \frac{Ey}{R} \quad (2.2)$$

où  $E$  est le module d'Young de la poutre,  $R$  son rayon, et  $y$  la distance à la fibre neutre de la poutre.

Si le matériau est choisi, la contrainte à rupture  $\sigma_m$ , qui est intrinsèque au matériau, est fixée. Par conséquent, si le rayon de courbure maximal  $R_m$  est connu, l'éloignement à la fibre neutre  $y$  doit, en première approximation, vérifier la relation (2.3) si l'on ne souhaite pas observer un endommagement du matériau :

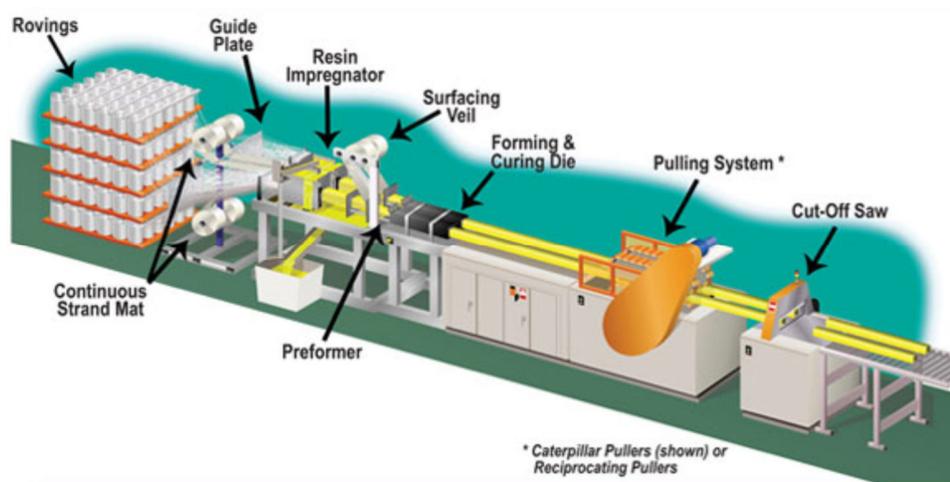
$$y \leq \frac{R_m \sigma_m}{E} \quad (2.3)$$

Il est très important de garder à l'esprit le fait que cette condition est vérifiée en moyenne mais que, du fait de la dispersion des diverses caractéristiques des poutres (matériau, géométrie), il est nécessaire de considérer un modèle probabiliste. En pratique, on préfère rajouter un coefficient de sécurité bien choisi, proposé par les guides de construction. Dans le cas des gridshells, nous allons utiliser les coefficients de sécurité développés dans la section 2.1.1.

### 2.1.3 Choix du procédé de fabrication

La construction composite étant assez peu reconnue, il était indispensable de réaliser des campagnes de tests expérimentaux pour compléter la connaissance des matériaux et pour vérifier la bonne adéquation des coefficients de sécurité. Ainsi, plusieurs campagnes de tests de poutres composites ont été réalisées dans le cadre de cette thèse, dans la lignée des travaux de Cyril Douthe [Douthe07].

Tout d'abord, une salve d'expériences a été faite quant au choix du procédé de fabrication des profilés composites. Les deux procédés à comparer étaient le procédé de pultrusion (figure 2.3) et celui de pull-winding. Un profilé pultrudé est un profilé dans lequel les fibres sont mises parallèlement à l'axe du profilé. Le procédé de pull-winding est une combinaison du procédé de pultrusion et d'enroulement filamentaire (illustré figure 2.4), qui donne au profilé de meilleures caractéristiques transverses et en torsion.



**Figure 2.3 - Illustration du procédé de pultrusion**

*Image issue du site [diversified.ehclients.com](http://diversified.ehclients.com). Les fibres sont déroulées à partir de bobines. Elles sont ensuite imprégnées de résine, puis entrent dans une filière à l'intérieur de laquelle elles sont cuites. Les poutres sont tirées hors de la filière puis coupées à la taille souhaitée. Ce procédé est largement utilisé, en vue d'applications diverses.*



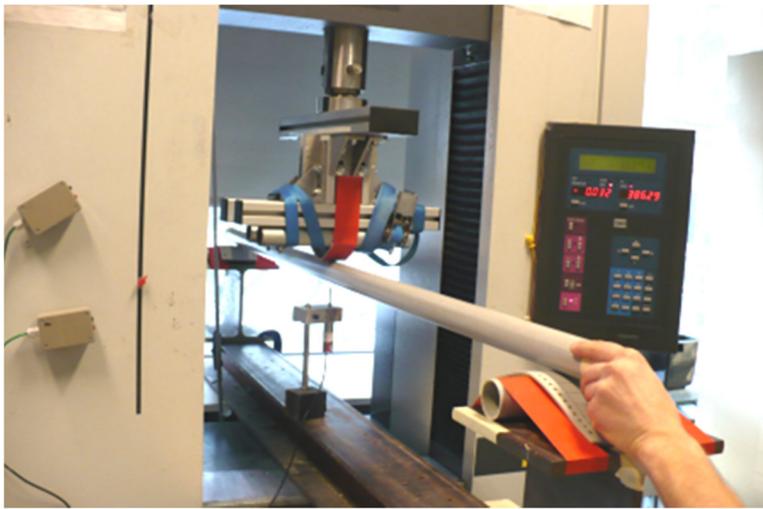
**Figure 2.4 - Enroulement filamentaire**

*Image issue du site [www.lawrietechnology.com](http://www.lawrietechnology.com). Lors du procédé de pullwinding, des fibres sont enroulées autour du profilé, en plus des étapes classiques du procédé de pultrusion. En plus de jouer un rôle de protection du profilé, ces fibres apportent de nouvelles propriétés mécaniques au profilé.*

Une première salve d'expérience a consisté à obtenir les propriétés intrinsèques des poutres, telles que le module d'Young et la contrainte à rupture, pour les diverses poutres.

La première campagne a conduit à la détermination expérimentale du module d'Young. L'essai réalisé est un essai de flexion trois points, effectué pour des petits déplacements. La force  $F$  exercée au centre de la poutre ainsi que la flèche au centre,  $\delta$ , sont mesurées, et, dans l'hypothèse des petits déplacements, ces deux grandeurs sont reliées linéairement. La relation de linéarité est explicitée par l'égalité (2.4) qui relie la flèche  $\delta$ , la force  $F$ , la longueur entre les deux supports  $L$ , le module d'Young et le moment quadratique de la poutre  $I$ . La figure 2.5 présente le montage expérimental.

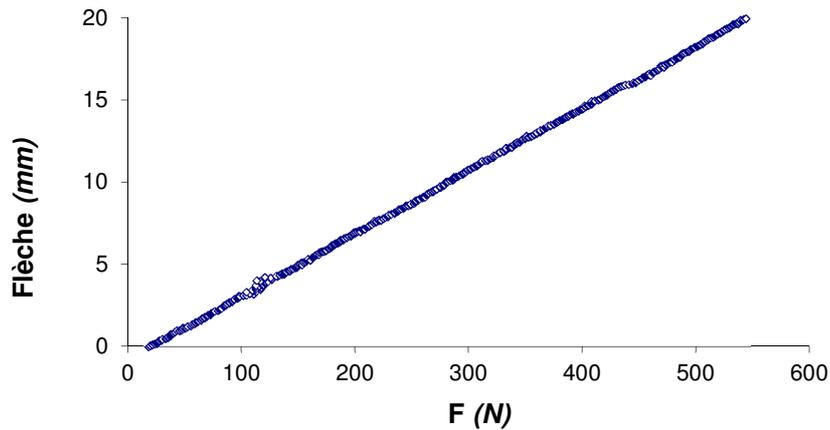
$$\delta = \frac{FL^3}{48EI} \quad (2.4)$$



**Figure 2.5 - Montage expérimental pour la détermination du module d'Young**

*Lors de cet essai de flexion trois points, la force exercée au centre de la poutre est mesurée. La flèche au centre est mesurée précisément à l'aide d'un capteur de déplacement, ce qui permet d'accéder au module d'Young. L'expérience est réalisée à vitesse constante, avec un déplacement de 6 mm/min. La distance entre les deux supports est de 160 cm. Cette valeur résulte d'un compromis : pour avoir une bonne précision sur les mesures, la force mesurée doit être suffisamment importante. De même le déplacement au centre doit être suffisamment important. En outre, il faut que l'incertitude sur la longueur entre les deux supports soit acceptable.*

On vérifie que la relation entre la flèche et la force appliquée est bien linéaire, sur la figure 2.6. La pente de la droite nous permet de remonter au module d'Young. Dans les conditions de l'essai, l'incertitude sur la valeur du module d'Young est principalement liée à l'incertitude sur la longueur  $L$  car les erreurs sur la flèche et sur la force sont principalement des erreurs de calibration qui disparaissent lorsque l'on considère la pente de la droite. Ainsi, avec une erreur relative de 0.3 % sur la valeur de  $L$ , on obtient la pente et donc le module d'Young  $E$  avec une incertitude relative de 1 %.



**Figure 2.6 - Détermination du module d'Young de la poutre pultrudée**

*La relation linéaire entre la flèche mesurée au centre et la force appliquée au même endroit nous permet de remonter à la valeur du module d'Young.*

Dix essais ont été réalisés pour chacun des deux types de poutres. La répétabilité des valeurs de module d'Young est assez bonne, comme en attestent les coefficients de variation calculés (figure 2.7). Il est à noter que tout au long de l'expérimentation, la distance entre les deux supports  $L$  est restée inchangée.

On remarque que le module d'Young des poutres obtenues par pull-winding est plus élevé ce qui pourrait être un avantage car non seulement la raideur en flexion  $EI$  est plus importante, à moment quadratique fixé, mais en plus la raideur axiale des poutres  $ES$  l'est également, à section de poutre fixée. Un taux de fibre plus important pourrait expliquer cette meilleure performance de la poutre pull-windée. Ce point n'a pas été creusé ici.

Type de tube	Moment quadratique $I$ (m <sup>4</sup> )	Section $S$ (m <sup>2</sup> )	Module d'Young mesuré $E$ (GPa)	Coefficient de variation	Module d'Young fabricant (GPa)
Pultrudé	6,87.10-8	3,65.10-4	32,7	3,1 %	26,7
Pull-windé	6,26.10-8	2,70.10-4	46,7	3,5 %	Non communiqué

**Figure 2.7 - Modules d'Young des poutres pultrudées et pullwindées**

A ce stade, il devient important d'évaluer la contrainte à rupture pour ces deux matériaux. Cette évaluation est réalisée à partir d'un test de flexion, puisque la flexion est la principale sollicitation des poutres dans un gridshell. Cette sollicitation est en particulier très importante lors de la phase de déploiement de la grille, puis de manière permanente durant toute la durée de vie de la structure.

Le test de flexion quatre points est présenté sur la figure 2.9. La poutre est rotulée à ces deux extrémités et fléchie à l'aide de deux sangles placées symétriquement par rapport au milieu de la poutre. Ainsi, la portion de poutre placée entre les deux sangles est en flexion pure, alors que le reste de la poutre est soumis, à la fois à un moment de flexion et à de l'effort tranchant. La distance entre les deux rotules est égale ici aussi à 1,60 m. Les deux cordes utilisées sont

composées de fibres d'aramide et peuvent résister à environ 7 kN. Les sangles situées près du centre sont tirées vers le haut à une vitesse constante de 30 mm/min, jusqu'à ce que la rupture de la poutre soit observée.

Cette expérience a été menée sur les poutres pultrudées et sur les poutres pull-windées. Les valeurs de la force au moment de la rupture sont relevées à partir de l'acquisition. La violence de la rupture ainsi que le facies de la rupture sont des critères particulièrement regardés. On remonte aux valeurs de contrainte à rupture  $\sigma_{r\ exp}$  à l'aide de la formule (2.5).  $F_r$  représente l'amplitude de la force au moment de la rupture,  $y_m$  est l'éloignement maximal à la fibre neutre, et s'apparente au rayon extérieur de la poutre dans ce cas où la poutre est axisymétrique.

$$\sigma_{r\ exp} = \frac{F_r L y_m}{4 I} \quad (2.5)$$

Les forces à ruptures sont différentes pour les poutres pultrudées et pull-windées mais ces valeurs ne sont pas comparables puisque les caractéristiques géométriques des deux poutres testées sont différentes. En revanche, la contrainte à rupture est une grandeur qui ne dépend *a priori* pas de la géométrie des poutres. On remarque que les contraintes à rupture sont du même ordre de grandeur pour les deux types de tubes mais la façon dont ils se cassent est très différente. Les résultats obtenus sur 25 poutres sont présentés dans le tableau de la figure 2.8.

Ainsi, les facies de rupture ainsi que la façon dont les ruptures se produisent méritent d'être commentés. On remarque que les tubes pultrudés cassent de manière relativement douce et également de manière prévisible (des craquements se font entendre avant que la rupture se produise, traduisant la perte d'intégrité de la structure de la poutre, son ovalisation et des flambements locaux). En outre, on constate après la rupture qu'une sorte de rotule fibreuse s'est formée au niveau de la rupture et que la poutre conserve quelques propriétés mécaniques en traction. En revanche, les tubes issus du pull-winding cassent de manière extrêmement brutale, sans prévenir. On observe la ruine totale de ces poutres et la rupture des fibres.

Compte tenu des propriétés mécaniques sensiblement identiques et du critère prix (les poutres issues du procédé de pull-winding étant plus chères), le choix qui a été fait a été celui d'utiliser des poutres réalisées par pultrusion, afin d'avoir un comportement le plus ductile possible.

Type de tube	Force à la rupture (moyenne, N)	Rayon extérieur $y_m$ (mm)	Contrainte à rupture expérimentale $\sigma_{r\ exp}$ (Mpa)	Coefficient de variation	Contrainte à rupture $\sigma_{r\ fab}$ (fabricant, MPa)
Pultrudé	3780	20.85	458 MPa	3,0 %	400 MPa
Pull-windé	3400	22.5	488 MPa	3,4 %	Non communiqué

**Figure 2.8 - Contraintes à rupture pour les poutres pultrudées et pull-windées**

*Les valeurs moyennes ainsi que la dispersion mesurées lors de ces tests de flexion quatre points sont présentées. 25 essais ont été réalisés sur les poutres pultrudées, ce qui permet d'avoir une assez bonne idée du comportement de ces poutres.*



**Figure 2.9 - Montage flexion quatre points**

Ainsi, les poutres pultrudées sont caractérisées en flexion. La dispersion sur les propriétés mécaniques a été évaluée à l'aide de vingt essais de flexion quatre points. La valeur obtenue de 3,0 % est donc assez révélatrice de la bonne reproductibilité des propriétés mécaniques. On notera en effet que si les poutres avaient été en bois, la valeur de la dispersion aurait été classiquement voisine des 15 %.

Pour les poutres pultrudées, la valeur de contrainte à rupture moyenne obtenue vaut 458 MPa. Cette valeur est assez largement supérieure à celle fournie par le fabricant (400 MPa) mais le choix retenu est de conserver la valeur fabricant de 400 MPa pour la conception, de manière à disposer d'un modèle conservatif.

### 2.1.4 Choix de la géométrie des poutres

A ce stade, le matériau constitutif des poutres a été choisi. Il reste à déterminer les propriétés géométriques de la poutre en fonction des rayons de courbure de la structure. Pour les derniers gridshells (Solidays et Créteil), l'analyse de la courbure des structures prévoit un rayon de courbure maximal de l'ordre de 3,5 m. Il s'agit donc de trouver des poutres suffisamment souples en flexion pour supporter de telles courbures de façon permanente, en se laissant toutefois la liberté d'itérer sur la forme du gridshell en cas de nécessité. Il faudra également garder à l'esprit le fait que l'utilisation de poutres trop souples en flexion pourrait conduire à une structure également trop souple, pouvant alors être sujette au flambement. Il resterait alors, pour jouer sur la raideur de la structure, quelques paramètres, à savoir le pas du maillage et la section des poutres.

Avec le coefficient de sécurité de 2,35 (gridshell de Solidays), une solution réalisée à partir de poutres pultrudées ayant un diamètre extérieur de 42 mm paraît satisfaisante. En effet, pour respecter le coefficient de sécurité de 2,35, la contrainte maximale au sein des poutres ne doit pas dépasser 170 MPa. On remarque que pour une poutre de diamètre extérieur 42 mm, cette valeur de contrainte correspond à un rayon de courbure de 3,3 m. Cela signifie que si on utilise des poutres ayant un diamètre extérieur de 42 mm réalisées à partir de ce matériau, on peut les

fléchir jusqu'à des rayons de courbures de 3,3 m sans risquer de les endommager, pour une utilisation à moyen terme. Cette valeur de rayon de courbure maximal est en adéquation avec la forme proposée. De plus, il existe sur le marché un profilé pultrudé dont le diamètre extérieur vaut 41,7 mm.

En conclusion de l'étude sur les poutres issues des procédés de pultrusion et de pull-winding, il faudra retenir que les propriétés mécaniques intrinsèques de ces deux types de poutres semblent similaires, tout du moins en flexion. Les préoccupations liées à la torsion n'étant arrivées que par la suite, nous n'avons pas testé ces deux types de poutres en torsion.

Quel que soit le rayon de courbure de la surface envisagée, il est possible de trouver une poutre qui se fléchisse suffisamment pour suivre les courbes sans endommagement. C'est la courbure maximale de la surface qui déterminera le diamètre extérieur maximal envisageable pour les poutres, mais l'ingénieur pourra encore jouer sur le diamètre intérieur ainsi que sur le pas du maillage.

Les poutres issues du pull-winding cassent violemment lorsqu'elles sont sollicitées en flexion et s'endommagent très fortement lors de la rupture. Au contraire, celles issues de la pultrusion subissent des endommagements moins importants et sont plus ductiles. Ce dernier point est déterminant et donne un clair avantage aux profilés pultrudés, ce qui n'était pas notre intuition, l'enroulement filamentaire étant plutôt vendu comme un renforcement des propriétés transverses.

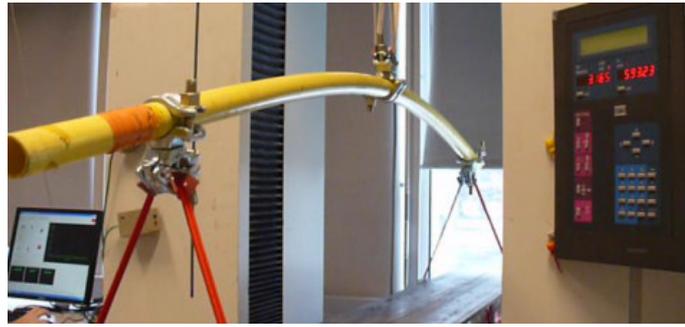
### **2.1.5 Test des solutions techniques retenues**

La dernière étape de test consiste à tester les poutres dans des situations plus proches des conditions réelles d'utilisation. Ainsi, il est important d'utiliser les connecteurs utilisés pour la structure (engendrant potentiellement des concentrations de contraintes) ainsi que d'appréhender le comportement des poutres en relaxation, puisqu'il faut garder à l'esprit le fait que les poutres vont rester fléchies tout au long de la période d'utilisation de la structure.

Le choix des connections est rapide : comme les délais de conception sont courts et que de nombreux points sont à présenter pour certification à la SOCOTEC, la recherche s'oriente vers une solution surdimensionnée et bon marché. Nous reviendrons sur le dimensionnement des connexions dans le dernier chapitre, puisque le modèle de poutres interconnectées développé nous permettra de remonter à tous les efforts transitant dans les noix de connexion.

Dans l'urgence, les noix d'échafaudages sont surdimensionnées et remplissent parfaitement le rôle de connexion. Cette solution est très lourde, mais fiable et nous la choisissons également car il existe des noix d'échafaudage adaptées aux tubes choisis, de diamètre extérieur 41,7 mm.

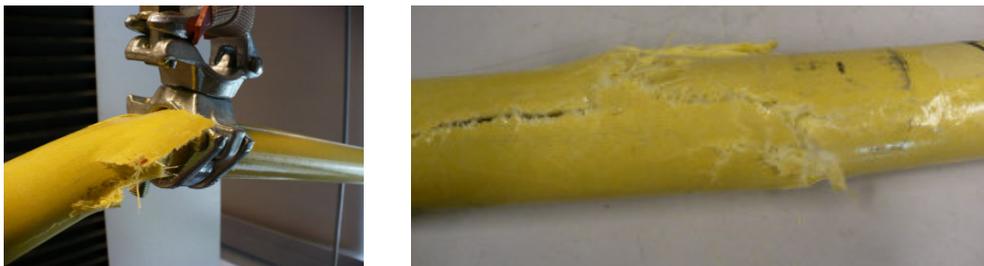
Il est donc important de tester les tubes sous chargement de flexion, et soumis à l'utilisation de noix d'échafaudage. En effet, les connecteurs peuvent engendrer du poinçonnement ou plus généralement des concentrations de contrainte. Le montage utilisé pour se rapprocher au plus des conditions réelles est présenté figure 2.10.



**Figure 2.10 - Montage expérimental simulant les conditions réelles**

*Le montage est un montage de flexion trois points, réalisé à l'aide de noix d'échafaudage en guise de connecteur. Ces noix d'échafaudage sont serrées avec un couple de 15 Nm, à l'aide d'une clé dynamométrique, et génèrent des concentrations de contrainte. Le couple de 15 Nm a été précautionneusement étudié de manière à ce que la poutre (creuse) ne soit pas endommagée mais que la noix de connexion ne glisse pas le long de la poutre.*

Il est apparu que les résultats des tests de flexion « réels » étaient identiques à ceux réalisés dans des conditions qui semblaient plus favorables. En effet, si le serrage des noix d'échafaudage engendre des concentrations de contrainte et peut blesser les tubes, ces noix ont également un effet positif puisqu'elles empêchent l'ovalisation du tube sous sollicitation de flexion. Cette ovalisation fait travailler la résine du tube et provoque en général une ruine légèrement prématurée [DOUTHE07]. En pratique, les noix d'échafaudage ne semblent pas endommager les poutres mais il existe du glissement entre les noix et les tubes. En outre, le couple de serrage des noix est assez problématique car il faut trouver un compromis entre glissement important et risque d'endommagement du tube. Malgré tout, la solution semble être satisfaisante dans un premier temps. Des images des endommagements des poutres lors des essais sont présentées sur la figure 2.11.

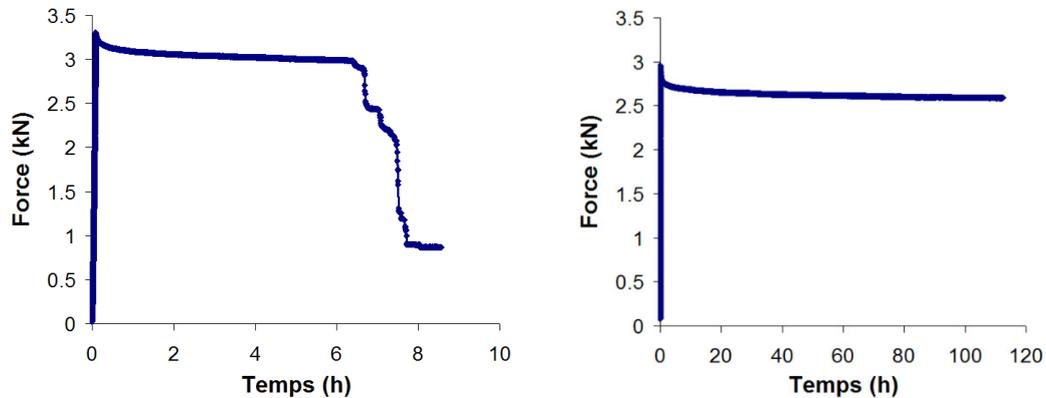


**Figure 2.11 - Endommagement du tube à l'issue du test de flexion**

*L'endommagement est localisé au voisinage des noix d'échafaudage. On remarque que le tube pultrudé est fendu sur la longueur. Cependant, un nombre important de fibres restent continues ce qui assure une certaine cohésion du tube en tension, après endommagement en flexion.*

Le dernier aspect à tester est le comportement dans le temps. En effet, fléchies de manière permanente, les poutres sont soumises à un phénomène de relaxation, et il est important de comprendre comment elles se comportent. Ces phénomènes peuvent être très difficilement prévisibles et mettent en jeu des ruptures de fibres différées, la viscosité de la résine [KOTELNIKOVA12]. Les aspects de relaxation sont testés sur la base du test de flexion trois

points. Les poutres sont fléchies puis maintenues en flexion. La force nécessaire au maintien en flexion est relevée puis tracée en fonction du temps. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 2.12.



**Figure 2.12 - Evolution de la force de maintien en flexion du tube**

*Pour ce test, la contrainte maximale est amenée à 90 % (gauche) puis sur une autre poutre à 80 % (droite) de la contrainte à rupture obtenue sur un essai de flexion rapide (environ 5 minutes pour atteindre la rupture). La poutre est maintenue dans ces positions et on observe dans les deux cas une diminution de la force nécessaire au maintien du fait de la relaxation au sein du matériau. Dans le cas où la contrainte initiale vaut 90 % de la contrainte à rupture, la ruine de la poutre se produit après environ 6 heures de test. Dans le cas où elle en vaut 80 %, l'essai a dû être interrompu au bout de 5 jours avant que la ruine de la poutre n'ait pu avoir lieu.*

Ces essais de relaxation, bien que non suffisamment poussés pour donner des enseignements réellement exploitables, apportent tout de même des indications importantes. En effet, lorsque la contrainte maximale est amenée à 90 % de la contrainte à rupture, la rupture se produit rapidement. Lorsque l'on diminue la valeur de la contrainte maximale à 80 % de la contrainte à rupture, la rupture ne se produit pas avant un temps au moins vingt fois plus important. En outre, pour ce test, on observe une stabilisation de la force de maintien.

Faute de temps, nous nous en remettons aux valeurs proposées par les codes de constructions : la contrainte maximale ne doit pas excéder 30 à 40 % de la contrainte à rupture, pour des sollicitations statiques et à long terme [FIBERLINE02]. Il faut garder à l'esprit le fait que les propriétés mécaniques des polymères sont fortement influencées par la température, et c'est une des raisons qui explique la prudence des recommandations issues des guides de construction.

De nouvelles expérimentations sont en cours au laboratoire Navier pour caractériser au mieux les propriétés des matériaux composites à base de polymères et étudier les phénomènes de fluages et de relaxation, avec en particulier une étude approfondie sur l'influence de la température.

D'autres projets concernant l'« écoute » de la poutre sous chargement de flexion sont également en cours. Cette écoute peut être réalisée avec des microphones ou des accéléromètres. Elle permettrait de relever les événements liés à la rupture des fibres au sein de la poutre. Le monitoring de ces ruptures permettra de prévoir le niveau d'endommagement de

la poutre, comme cela se fait déjà pour les bouteilles de plongées en matériaux composites par exemple.

### 2.1.6 Etude de méthodes d'assemblage et de montage

L'assemblage est réalisé à l'aide de connexions, ici des noix d'échafaudage. Un des objectifs est de pouvoir dimensionner à terme des noix de connexion légères, par exemple en plastique renforcé.



**Figure 2.13 - noix de connexions laissant libre le degré de liberté en cisaillement**

*La noix d'échafaudage (gauche) est largement surdimensionnée pour les applications gridshells. Elle est par ailleurs très lourde comparée au reste de la structure. Une solution optimale est recherchée. Pour cela, il convient de connaître parfaitement les efforts transitant dans les noix et d'y rajouter les coefficients de sécurité adéquats. Une bonne solution pourrait alors être obtenue avec des polymères renforcés (centre et droite).*

Connaitre les efforts transitant au sein des connexions durant le process de montage et les étapes de chargement n'est pas trivial. Nous verrons dans le chapitre 4 comment le modèle numérique développé permettra une meilleure connaissance de ces efforts.

En pratique, jusqu'à présent, du fait du glissement des noix sur les tubes (traité en détail dans la section 2.3.4.4) l'effort tranchant dans la connexion ne dépasse pas 1 kN. Plus précisément, une fois le gridshell relaxé, ces efforts tendent plutôt vers une valeur maximale de 50 N.

Dans l'axe de la connexion, l'effort à reprendre n'est pas très important du fait de la souplesse de la grille.

Enfin la connexion utilisée jusqu'à présent ne transmet pas les efforts de torsion. Ces efforts ne sont donc pas problématiques pour la tenue de la connexion.

Finalement, les connecteurs ne semblent pas être sujets à des efforts importants. La première des choses est de s'assurer de cela, en utilisant un modèle numérique abouti. Une fois cela réalisé, il sera possible de proposer le design et la fabrication de connecteurs afin de les tester en situation réelle. Cette fabrication pourra par exemple être réalisée en plastique renforcé par impression 3D comme celles de la Figure 2.13.

Pour l'assemblage et le déploiement du gridshell, plusieurs solutions sont envisageables. La plus simple et la plus précise à mettre en œuvre consiste à fabriquer la grille régulière au sol et à la mettre en forme en la soulevant par le dessus, ou en la poussant vers le haut par le dessous. D'autres solutions sont envisageables. Par exemple, la grille peut être déployée par morceaux avant que les morceaux ne soient connectés entre eux. Une autre méthode consisterait à mettre

en place les éléments un par un, directement en 3D. Cette solution s'avèrerait toutefois très coûteuse et complexe à mettre en œuvre. Par souci de simplicité, le levage de la grille en un seul morceau est la solution retenue. Pour ce faire, il faut prévoir suffisamment de moyens de levage pour pouvoir mettre en forme toute la grille. Une méthode relativement simple consiste à utiliser suffisamment de grues pour faire un levage de la totalité de la grille.

Lors de cette étape, il est important de répartir les élingues correctement, de manière à ce que le poids de la grille soit bien réparti et que l'effort tranchant généré par les élingues dans la grille ne provoque pas de rupture d'éléments. Il faut également veiller à ce que la courbure dans les tubes ne soit pas inférieure à la valeur qu'on s'est fixée (typiquement 3 m pour des tubes de 41,7 mm de diamètre).

Pour mettre au point ce procédé de levage avant le montage du gridshell de Solidays, une répétition a été faite sur le gridshell conçu par Cyril Douthe [DOUTHE07] (150 m<sup>2</sup>, masse de la grille primaire : 440 kg). Ce déploiement a été réalisé sur le site de l'école des Ponts ParisTech. Il marque le début d'une nouvelle vie pour ce gridshell, monté une première fois pour une utilisation de trois ans, puis stocké deux années avant ce nouveau déploiement donnant lieu à une nouvelle utilisation de deux ans. Une grue mobile de 40 tonnes était largement surdimensionnée pour réaliser le levage – voir figure 2.14.

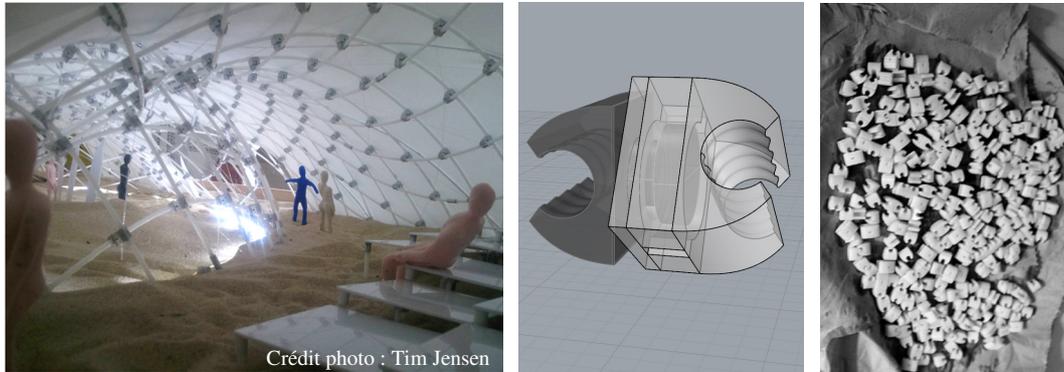


**Figure 2.14 - Deuxième déploiement du gridshell test**

*Ce test conduit sur le gridshell conçu par Cyril Douthe permet de valider la méthode de déploiement à l'aide de grues.*

Les problématiques de l'assemblage et du levage sont également anticipées grâce aux outils numériques de relaxation dynamique développés et détaillés au chapitre 1. Ces outils permettent de simuler le déploiement sous les conditions réelles de montage. On peut ainsi estimer les courbures et les contraintes obtenues durant le levage. Du maquettage a également été réalisé à l'aide d'imprimantes 3D permettant en particulier de réaliser des noix de connexion miniature (dans notre cas de 11 mm, figure 2.15) présentant exactement les mêmes degrés de liberté que la noix d'échafaudage.

Cela permet alors d’investiguer des nouveaux concepts de gridshells tels que le gridshell à double nappe présenté sur la figure 2.15, gauche. A terme, ce sont des structures aussi ambitieuses que celle-ci, voire des structures permettant de couvrir un stade entier qui sont visées.



**Figure 2.15 - Maquette de gridshell double nappe - Tim Jensen**

*Le maquettage permet d’anticiper les problèmes pratiques de montage et d’investiguer de nouveaux concepts. Par exemple, la figure présente un gridshell double nappe, réalisé dans le cadre du stage de fin d’études de Tim Jensen (élève architecte ENSAV). La maquette a nécessité l’utilisation d’un grand nombre de noix de connexion miniatures développées numériquement puis imprimées en 3D.*

A ce stade où le choix des poutres a été fait, de manière à respecter à la fois la courbure de la structure et le coefficient de sécurité indiqué par les guides de construction, la fabrication peut commencer. Dans la suite de ce chapitre, deux grandes parties décrivent respectivement le gridshell élaboré pour le festival de Solidays et la Cathédrale Ephémère de Créteil. Pour chacune de ces deux parties, le contexte du projet est présenté, ainsi que les principaux calculs et expérimentations réalisés au laboratoire. Les spécificités des gridshells sont également détaillées. Pour finir un retour d’expérience est présenté, dans le but de recenser les avancées et les points à améliorer.

### **2.1.7 Les prototypes élaborés par le laboratoire Navier**

L’élaboration de gridshells de grande taille n’a pu être possible que grâce à la conception et la fabrication préalable de prototypes plus réduits.

Les travaux de Cyril Douthe [DOUTHE06], [DOUTHE07], [DOUTHE10] ont ainsi abouti à la construction d’un premier prototype de gridshell réalisé en matériaux composites. Ce premier prototype est illustré sur la figure 2.16.



**Figure 2.16 - Premier prototype de gridshell en matériaux composites**

*Ce gridshell, conçu par Cyril Douthe, Olivier Baverel et Jean-François Caron, et assemblé en grande partie par Alain Tamaint est réalisé à partir de poutre de 13 m. Il a été construit en 2007, est resté en place 2 ans, puis a été replié, déplacé et redéployé sur un site différent, d'où il a été définitivement retiré en janvier 2014. Tout compte fait, ce gridshell est resté déployé 5 ans, ce qui a permis de répondre à un certain nombre de préoccupations concernant la durabilité de ces structures.*



**Figure 2.17 - Chargement du prototype de gridshell**

*Le chargement à l'aide de récipients partiellement remplis d'eau permet de comparer les géométries numériques et expérimentales du gridshell, et ainsi de valider le modèle numérique développé [DOUTHE07].*

Ce premier prototype en matériaux composite (figures 2.16 et 2.17) a permis de grandes avancées dans le domaine, sur plusieurs points importants [DOUTHE07] :

- Démontrer la faisabilité d'une telle structure
- Comprendre le comportement des gridshells et le comparer aux modèles numériques développés
- Valider dans le temps la tenue des poutres fléchies de manière permanente

Sous des chargements maîtrisés, des comparaisons entre modèle numérique et expérimental ont été faites et ont donné satisfaction [DOUTHE10]. Par exemple sur la figure 2.17, le gridshell est chargé avec des récipients remplis d'eau, à la manière de ce qui a été fait pour le gridshell de Mannheim, de manière à comparer la réponse numérique avec la réponse réellement observée pour le gridshell.

Cette structure a permis également de faire un point sur les aspects durabilité de poutres composites pultrudées fléchies de manière permanente dans un environnement non maîtrisé. En particulier, la courbure maximale qui avait été prise égale à 130 MPa, soit 32,5 % de la contrainte à rupture (donnée à 400 MPa par le fabricant) est relativement importante. On constate, après les cinq années, qu’aucune des poutres n’a cassé, que la structure semble toujours aussi fiable et solide. Lors du démontage il a été mesuré que certaines des poutres, initialement rectilignes, avaient après toutes ces années adopté une légère courbure résiduelle. Ce n’est pas forcément une mauvaise chose, puisqu’en relaxant, les contraintes au sein du matériau diminuent et ainsi, l’énergie élastique stockée par la structure diminue également. Des études additionnelles, conduites par Ioannis Stefanou et Cyril Douthe ont montré que la variation du module d’Young et des résistances des poutres de ce gridshell dans le temps s’est avérée très faible. Ainsi, il se pourrait qu’au fil du temps, les risques d’endommagement des poutres en flexion s’amenuisent du fait des réorganisations au niveau microscopique, sans pour autant que la raideur du gridshell diminue.

Un second prototype de gridshell a ensuite été réalisé, dans le but de protéger la soufflerie de l’ENPC. La particularité de ce gridshell illustrée sur la figure 2.18, est qu’il présente de larges ouvertures de chaque côté pour que l’air puisse circuler facilement à travers la soufflerie. Ce gridshell a permis de nouveaux apprentissages et d’accroître l’expérience du laboratoire, avant la construction des deux structures plus importantes, détaillées maintenant. J’ai été associé largement à ces deux aventures de conception et fabrication de gridshells conçus pour accueillir du public.



**Figure 2.18 - Prototype de gridshell couvrant la soufflerie de l’ENPC**

## **2.2 Le ‘haricot’ de Solidays**

### **2.2.1 Présentation du contexte et des différents acteurs**

Tout commence lorsque la production de Solidays décide de réaliser une structure innovante pour son espace forum qui est un lieu d’échange et de rencontres. Un appel d’offre est alors rédigé et parvient à l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées qui a alors l’ambition de proposer le projet à ses étudiants. Après quelques réflexions et le soutien du laboratoire Navier, le projet s’oriente vers la technologie gridshell. Il s’agit alors dans un premier temps de faire un solide

dossier pour convaincre la direction de Solidays, pour ensuite envisager la fabrication pour le festival planifié en juin 2011.

La technologie gridshell ayant été approuvée par les organisateurs du festival Solidays, il restait à choisir la forme de la structure pour pouvoir commencer les calculs de structure aussi rapidement que possible. Un défi important était de pouvoir concilier toutes les contraintes, à savoir que la forme soit esthétique pour tous les acteurs du projet et qu'elle soit également réfléchie de manière à ce que les qualités mécaniques des gridshells puissent être exploitées.

Assez rapidement une équipe d'élèves est formée à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Le projet, pris très à cœur par les élèves, avance rapidement, avec le soutien, l'expertise et les moyens d'expérimentation du laboratoire Navier.

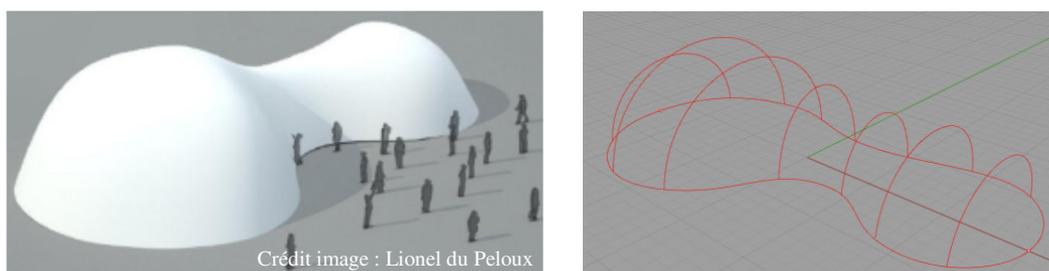
Il faut également trouver un partenaire pouvant prendre la responsabilité de la structure, ainsi qu'un partenaire se portant comme responsable du chantier et de la conduite des travaux. La société T/E/S/S prend alors la responsabilité de la structure tandis que la société Viry se charge de la conduite du chantier.

Enfin, une étape importante consiste à trouver le budget nécessaire à la construction du gridshell, démarcher des industriels pour se faire offrir du matériel. En parallèle, il faudra aussi penser à l'organisation du chantier en détail pour ne pas avoir à perdre du temps, car le calendrier est déjà très serré.

### 2.2.2 Choix d'une forme

La technologie gridshell ayant été approuvée par les organisateurs du festival Solidays, il était important de choisir la forme de la structure pour pouvoir commencer les calculs de structure aussi rapidement que possible.

Pour exploiter les qualités mécaniques du gridshell, la forme devait être une forme arrondie. En outre, les organisateurs souhaitaient que le bâtiment présente deux parties. Finalement, une forme en demi-cacahuète fut choisie (figure 2.19).



**Figure 2.19 - Choix de la forme du gridshell de Solidays**

*Proposition de forme en demi-cacahuète (gauche). Courbes de base de la demi-cacahuète (droite).*

### 2.2.3 Calculs mécaniques et dimensionnement des ancrages et de la barre de rive

La conception du gridshell est réalisée avec la méthode détaillée au chapitre 1. Ainsi, après avoir modélisé la surface, une analyse de courbure est réalisée, un maillage géométrique est ensuite réalisé. Par itération, un couple géométrie/maillage à la fois proche de la forme proposée et permettant également au maillage de présenter des courbures relativement homogènes et cohérentes avec le choix des poutres, est obtenu.

Une analyse mécanique est conduite pour valider ce choix. Cette analyse mécanique est réalisée avec le logiciel éléments finis Oasys GSA, puisque c'est un logiciel très utilisé par le bureau d'étude T/E/S/S qui prend la responsabilité des calculs mécaniques et de la structure. Une première analyse modélise uniquement la structure déployée, et permet d'avoir accès aux contraintes permanentes dans la structure (figure 2.20). Cette analyse ne tient pas compte de l'excentricité entre les lits de poutres. Cela donne tout de même une bonne estimation du comportement mécanique de la structure.

Il est démontré que le poids propre de la structure est très faible devant la charge que la structure peut reprendre, et par conséquent, la prise en compte du poids propre n'apporte pas d'indication pertinente. Les résultats de cette analyse sont représentés sur la figure 2.20. La contrainte maximale qui avait été fixée à 163 MPa en accord avec le BVCTS est respectée : on observe localement des contraintes qui atteignent 160 MPa, mais dans l'ensemble, rares sont les poutres dans lesquelles la contrainte maximale dépasse 140 MPa.

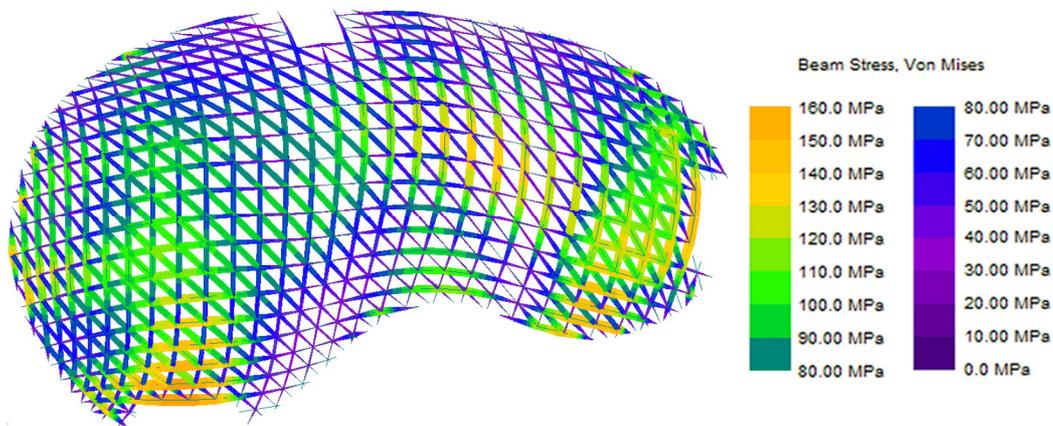


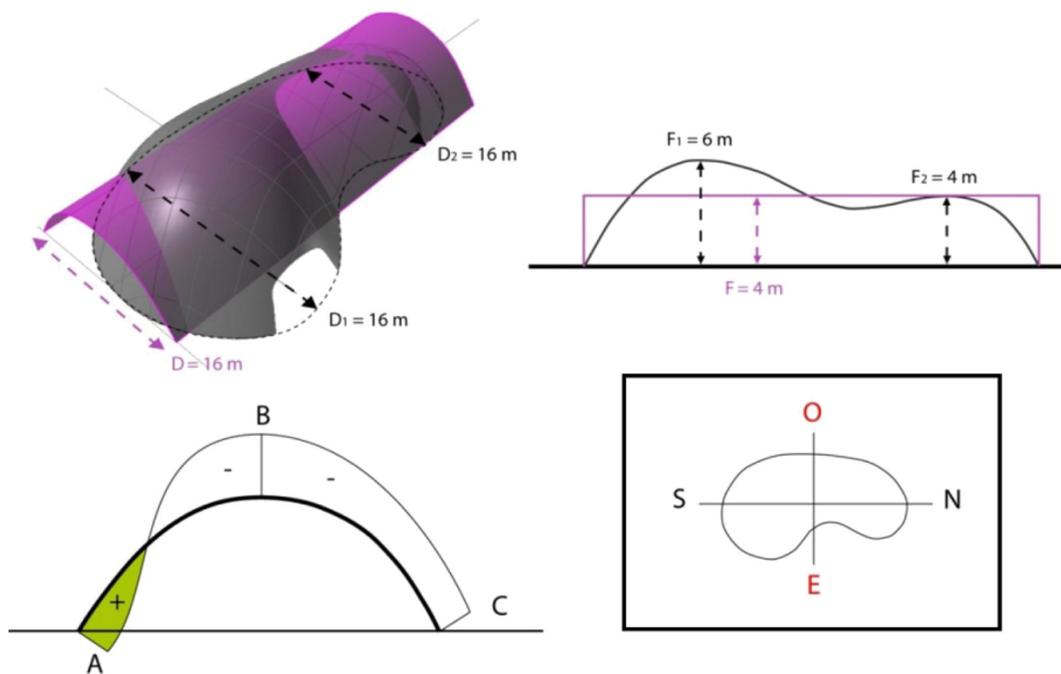
Figure 2.20 - Cartographie des contraintes à l'issue du form-finding

Il faut alors considérer les cas de chargements standards, qui dépendent en particulier de la zone géographique et de la période considérée. Comme la structure doit être réalisée, utilisée, puis démontée durant le mois de juin, les chargements de neige à considérer sont faibles, bien que non considérés nuls.

Les chargements à considérer sont donc des combinaisons linéaires du poids propre de la structure augmenté du poids des équipements accrochés à la structure, du chargement de vent indiqué par les eurocodes (à savoir un vent de 100 km/h susceptible d'engendrer une pression dynamique de pointe de 470 Pa) et du chargement de neige (10 kg/m<sup>2</sup> en surface horizontale projetée). Ainsi, il apparaît que ces trois types de chargements n'ont pas tous la même

importance. Plus particulièrement, le cas du chargement de vent est vraiment dimensionnant pour deux raisons :

- une surpression ou une dépression de 470 Pa engendre une force de 470 N par mètre carré de membrane, soit 47 kg, ce qui est bien plus important en amplitude par rapport au chargement de neige ou au poids propre.
- que le vent, au contraire des chargements liés à la neige ou au poids propre ne se traduit pas dans les poutres comme une simple contrainte additionnelle en compression. En effet, le vent aborde en général la structure par un côté provoque une surpression à l’extérieur de la membrane, du côté d’attaque, et une dépression du côté de fuite (figure 2.21). Ainsi cette dissymétrie se traduit par un effort additionnel de flexion dans certaines poutres, pouvant modifier leur courbure.



**Figure 2.21 - Distribution des surpressions dans le cas d’un vent venant de l’est**

La positionnement du gridshell par rapport aux points cardinaux est schématisé (bas, droite). Pour un vent venant de l’est ou de l’ouest, une modélisation assez simple consiste à assimiler le gridshell à son demi-cylindre moyen (haut, gauche et droite). Alors, dans le cas d’un vent de l’est ou de l’ouest, la répartition des surpressions dynamiques est calculée selon l’Eurocode 1. On observe clairement une distribution dissymétrique de la surpression (bas, gauche) qui tend à modifier les courbures de certaines poutres.

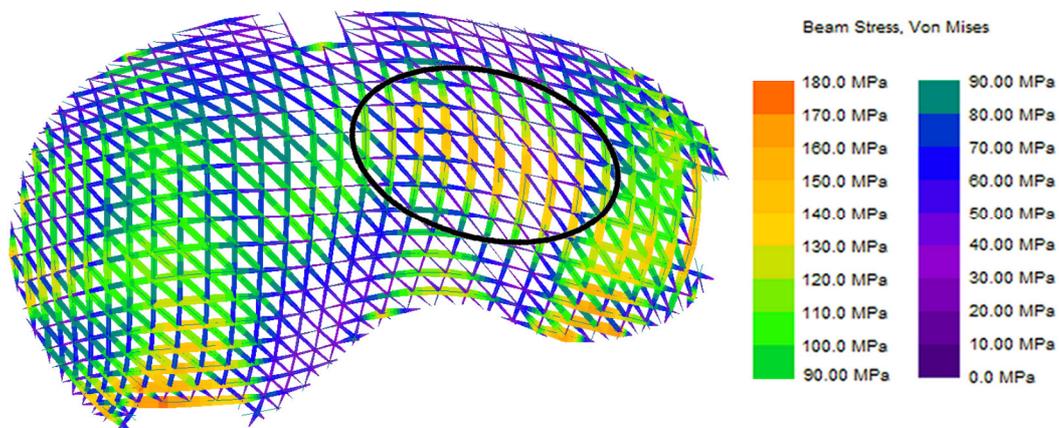
Comme le gridshell est composé de poutres élastiques, on sait *a priori* que si aucune poutre ne subit d’endommagement lorsqu’on considère les états limites ultimes (ELU), elle ne risque pas de subir d’endommagement lorsqu’on considère les états limites en service (ELS, moins sévères que les ELU). En revanche, il faut tout de même considérer avec attention les ELS de manière à respecter les flèches maximales admissibles sous chargement ELS.

En résumé, pour ce qui est de la ruine partielle ou totale de la structure, ce sont les ELU qui sont les plus restrictifs, tandis que lorsqu'on considère les flèches admissibles, c'est sur les ELS qu'il convient d'étudier.

La structure est donc examinée sous tous les chargements demandés par l'eurocode 1, ELS comme ELU. L'eurocode 1 impose en particulier que la flèche maximale observée sur la structure ne doit pas dépasser 60 mm, pour aucun des ELS. Cette condition est vérifiée mais étant donné que la structure est souple, le dimensionnement par rapport à l'ELS n'est pas tellement justifié. Le dimensionnement est donc principalement fait vis-à-vis des chargements ELU.

Prendre en compte les chargements ELU est assez complexe car il faut pouvoir modéliser les cas les plus critiques, c'est-à-dire par exemple une combinaison de neige, de vent, pouvant venir de directions aléatoires, ainsi que le chargement de poids propre. Pour ne pas oublier un cas défavorable, l'eurocode 1 préconise un certain nombre de combinaisons, au nombre de 20 dans le cas du gridshell de Solidays. Ce nombre important vient du fait que la structure peut être, par exemple, soumise à un vent venant du nord est.

Tous ces ELU ont été étudiés mais dans ce mémoire, on se concentrera sur le plus dimensionnant, à savoir un chargement de vent latéral (venant de l'est ou de l'ouest), combiné à un chargement de neige et au chargement de poids propre. Les résultats de l'étude de cet ELU sont présentés sur la figure 2.22 sur laquelle on remarque un état de contrainte peu différent de celui à l'issue du form-finding (figure 2.20).



**Figure 2.22 - Cartographie des contraintes dans les poutres, sous chargement ELU**

*L'ELU est une combinaison d'un vent est ou ouest, avec un chargement de neige ainsi qu'avec le chargement lié au poids propre. On remarque que l'état de contrainte dans les éléments a été très peu modifié. On note toutefois un accroissement de l'état de contrainte dans la zone entourée en noir. On note également une contrainte élevée au niveau de la porte située en bas à gauche sur la figure. Cependant, cette augmentation locale de contrainte sera traitée à l'aide d'un renfort.*

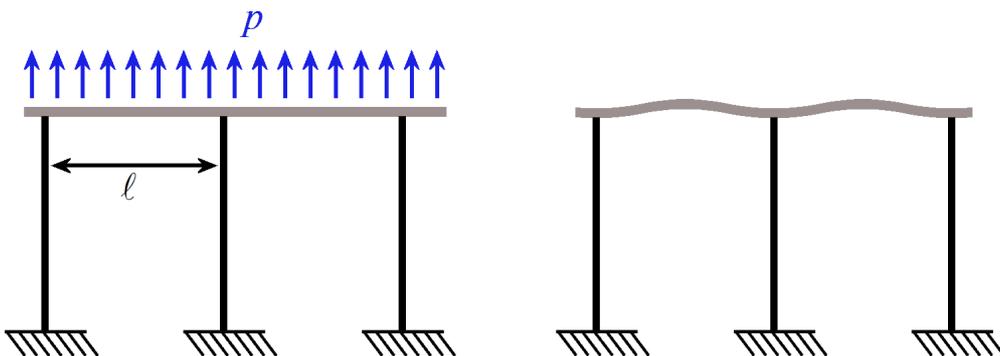
Comme cela a été écrit précédemment, l'ajout du chargement de l'ELU ne modifie l'état de contraintes que légèrement (on observe pour ce gridshell une augmentation de la contrainte de 6 %). L'état de contrainte sous chargement de l'ELU le plus dimensionnant est donc acceptable. Tous les cas de chargements ont été étudiés de la sorte ce qui permet de valider la partie

structure. Il reste toutefois à gérer les conditions aux limites, et la façon dont la structure est ancrée au sol.

Une étude a été réalisée de manière à dimensionner les ancrages de la structure. Cette étude est réalisée encore une fois sous chargement de l’ELU. En effet, au contraire de l’état de contrainte dans les poutres qui est principalement lié aux contraintes de mise en forme, les réactions aux appuis varient significativement lorsqu’un chargement est appliqué. En particulier, un chargement important de vent peut engendrer des efforts importants à reprendre au niveau des conditions aux limites. Ces chargements s’appliquent sur la membrane qui est lacée sur une rive. Cette rive est elle-même fixée à des ancrages qui transmettent *in fine* les efforts dans le sol. Le chargement de vent est d’ailleurs le cas de chargement le plus dimensionnant, et c’est la raison pour laquelle ce paragraphe se concentre à nouveau sur le cas de chargement ELU précédemment étudié. Ainsi, une première étape consiste à analyser ce qu’il se passe au niveau de la barre de rive avant de regarder comment ces efforts doivent être transmis au sol.

Le logiciel élément finis GSA permet d’obtenir les efforts à reprendre au niveau de la barre de rive. Il apparaît qu’il faut reprendre, pour cet ELU, une charge linéique allant localement jusqu’à 10 kN/m soit 1000 kg/m. La poutre jouant le rôle de barre de rive ayant déjà été choisie pour des raisons de temps de transport, il convient de calculer la distance minimale entre deux ancrages pour ne pas risquer de rupture de la barre de rive. Soit  $l$  la distance entre deux ancrages, et  $p$  la charge linéique (figure 2.23) La déformée de la barre de rive est présentée sur la figure 2.23, droite, et il faut que la barre de rive puisse supporter les efforts envisagés dans le cas de l’ELU. Ainsi, le moment dans la barre de rive est maximal au niveau des ancrages et au milieu des portions de rive. Il est donné par la relation (2.6) :

$$M_{max} = \frac{p l^2}{12} \quad (2.6)$$



**Figure 2.23 - Effort à reprendre au niveau des rives puis des ancrages**

*Sous le chargement, le vent aspire la membrane ce qui se traduit par un effort linéique sur la barre de rive (gauche). Celle-ci se déforme sous le chargement (droite). Il s’agit de trouver la longueur maximale  $l$  en dessous de laquelle le moment dans la rive reste admissible. Il s’agira dans un second temps de transmettre ces efforts au sol par l’intermédiaire des ancrages.*

La contrainte maximale au niveau du matériau doit donc être suffisamment petite devant la contrainte à rupture du tube, dont la valeur est 400 MPa. Cette contrainte est donnée par la relation (2.7) :

$$\sigma = \frac{M y_m}{I} \quad (2.7)$$

Le caractère « suffisamment petit » est traité par l'intermédiaire d'un coefficient de sécurité  $c$ . Ainsi, la condition suivante est obtenue :

$$c \frac{p l^2 y_m}{12 I} \leq \sigma_{rupt} \quad (2.8)$$

Comme expliqué précédemment, un coefficient de sécurité de 2.5 est suffisant. La relation (2.8) nous permet de conclure que la longueur  $l$  doit être prise inférieure à 72,5 cm. Pour des raisons pratiques, il n'est pas judicieux de rapprocher plus les ancrages. En particulier, il faut penser que les ancrages sont enfoncés avec une certaine précision, et que plus les ancrages sont proches les uns des autres, plus une erreur sur leur position peut engendrer des contraintes importantes au sein de la barre de rive. Pour ces raisons, la distance séparant deux ancrages consécutifs est choisie égale à 70 cm.

Pour s'assurer que la structure ne s'envole pas, un coefficient de sécurité supplémentaire est ajouté. En effet, les ancrages étant plantés directement dans la terre, il faut envisager le cas où l'un des ancrages s'arracherait. Alors dans ce cas, la charge qu'il reprenait est partiellement transmise à son voisin. Ainsi, de proche en proche, un arrachement en chaîne des ancrages conduisant à la ruine de la construction peut être observé.

La cartographie des efforts à reprendre est donc celle proposée sur la figure 2.24. Ainsi, ponctuellement, une force de 18 kN doit pouvoir être reprise par l'ancrage qu'il convient donc de définir précautionneusement.

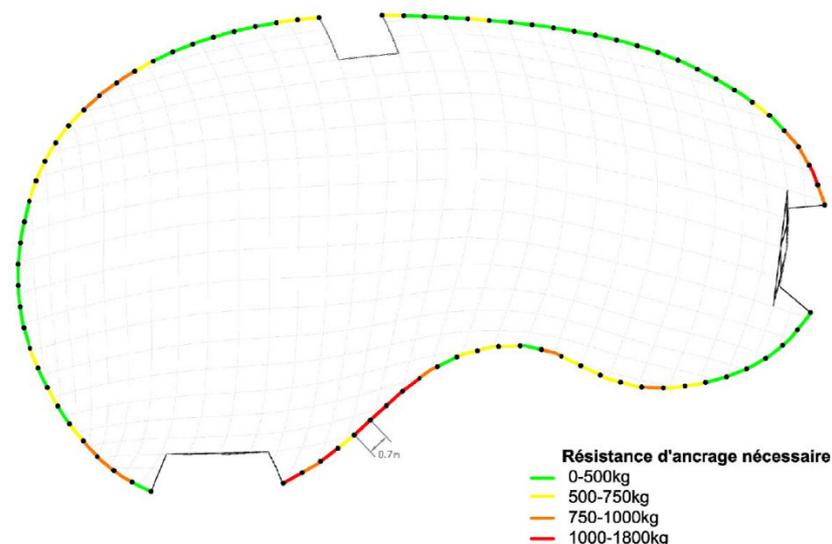
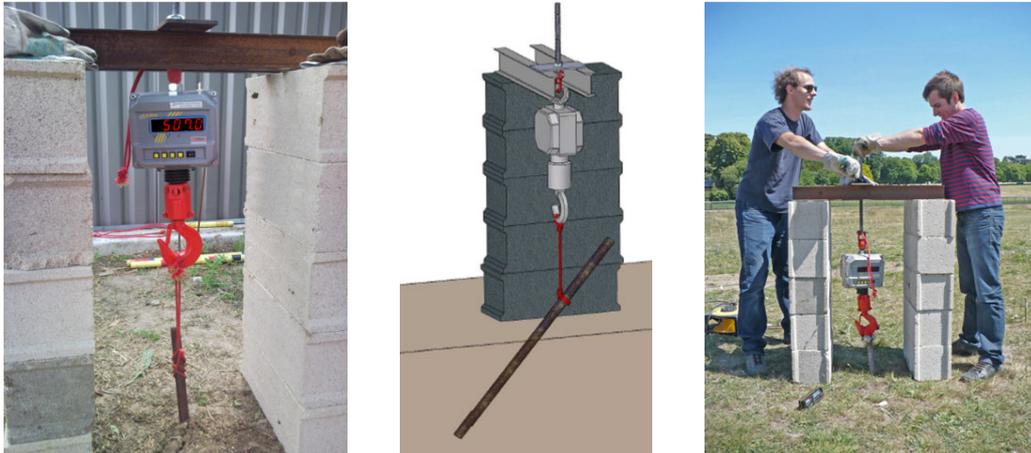


Figure 2.24 - Cartographie des forces à reprendre aux ancrages

Pour caractériser divers types d’ancrages, le montage présenté sur la figure 2.25 a été développé. Ce montage permet de tirer verticalement vers le haut sur un ancrage quelconque en mesurant la force de résistance en kilogrammes. Concernant les ancres, pour des raisons de coût nous avons choisi de nous tourner vers des solutions déjà existantes et fabriquées en grande quantité. L’utilisation de profilés métalliques standards, et celle d’armatures à béton ont donc été considérées.



**Figure 2.25 - Montage de test d'ancrages**

Ainsi, les paramètres à fixer sont : le choix de l’ancrage, son diamètre, la profondeur de l’ancrage, et éventuellement l’angle d’ancrage.

Une importante campagne de test a été conduite et a permis de tester des tubes en métal, des tiges filetées et des fers à béton. Les conclusions d’une première salve d’essai (figure 2.26) sont les suivantes :

- quel que soit l’ancrage utilisé, s’il est enfoncé dans l’axe de la sollicitation, il n’est pas possible de reprendre des efforts importants (la valeur maximale obtenue a été de 235 kg pour une armature enfoncée dans le sol sur 90 cm).
- une rugosité importante au niveau de la surface de l’ancrage permet d’améliorer sensiblement le coefficient de frottement avec la terre.
- plus l’ancrage est profond plus la force reprise par l’ancrage est importante.

Caractéristiques de l’essai				Force maximale mesurée (kg)	Observations
Type d’ancrage	Diamètre (mm)	Profondeur d’ancrage (cm)	Angle avec la direction de traction		
Tube en métal	42	50	0°	60	glissement
Tube en métal	42	50	20°	120	glissement
HA20	20	50	0°	125	glissement
HA20	20	70	0°	176	glissement
HA20	20	90	0°	235	glissement

Tige filetée	25	70	0°	200	glissement
Tige filetée	25	70	20°	250	glissement
Tige filetée	25	70	40°	600	<b>Soulèvement du sol</b>

**Figure 2.26 - Tests d'ancrages, exploration**

La solution à envisager est donc un ancrage qui ne soit pas lisse, enfoncé dans le sol avec un angle par rapport à la direction de la sollicitation, sur une profondeur à définir. Ainsi, pour éviter la plastification des ancrages sollicités partiellement en flexion, le choix est de partir sur des ancrages de type HA32 (fer à béton rainuré de 32 mm de diamètre).

La deuxième salve de test donne les résultats présentés figure 2.27 et permet de trouver une solution satisfaisante : un ancrage enfoncé sur une profondeur de 90 cm avec un angle d'au moins 40° avec la direction de la sollicitation permet de reprendre une force supérieure à 7000 N. Le peson ne pouvant dépasser les 1000 kg sans endommagement, c'est la raison pour laquelle certains tests ne sont pas poursuivis jusqu'à l'arrachement de l'ancrage.

Bien entendu, cette force peut varier de manière importante avec la nature du terrain, la teneur en eau de ce terrain, le temps caractéristique de la sollicitation. Pour valider cette campagne de tests, plusieurs essais ont été reproduits sur le site même de la construction.

Il ne faut toutefois pas oublier que la structure, bien que dimensionnée pour un vent de 100 km/h, doit être évacuée si les vents dépassent 60 km/h, comme toute structure provisoire relevant de la norme CTS. Ainsi, le risque pour les occupants de la structure est vraiment minime.

Par ailleurs, les personnes familières du milieu de la structure démontable (tentes, chapiteaux) ont été très surpris de voir les ancrages utilisés pour ce gridshell. Pour eux, les ancrages (taille, nombre) étaient largement surdimensionnés pour une structure de cette taille. De notre côté, nous avons été surpris de voir de très grands chapiteaux arrimés au sol avec des ancrages similaires aux nôtres, mais en nombre beaucoup plus réduit...

Caractéristiques de l'essai				Force maximale mesurée (kg)	Observations
Type d'ancrage	Diamètre (mm)	Profondeur d'ancrage (cm)	Angle avec la direction de traction		
HA32	32	70	45°	555 kg	<b>Soulèvement du sol</b>
HA32	32	90	40°	> 810 kg	<b>Pas d'évolution majeure du sol</b>
HA32	32	90	45°	720 kg	<b>Soulèvement du sol</b>
HA32	32	90	40°	> 810 kg	<b>Pas d'évolution majeure du sol</b>

**Figure 2.27 - Résultats des tests sur ancrages inclinés**

## 2.2.4 Réalisation sur site

Après cette longue phase de conception très itérative, une solution satisfaisante dans son ensemble a été obtenue. Pour que la structure finale tienne toutes ses promesses, la fabrication doit être réalisée avec le plus grand soin. La mise en place des ancrages par exemple a une grande influence sur la géométrie finale du gridshell.

### 2.2.4.1 Repérage des positions des ancrages par les géomètres

La membrane est confectionnée par la société Esmery-Caron, à partir de la géométrie du gridshell obtenue numériquement. En outre, cette membrane est très peu déformable ce qui oblige à ce que la forme finale soit très proche de celle espérée. Le repérage des points d’ancrages et leur mise en place conditionnent cette précision. Si les ancrages ne sont pas bien positionnés, le risque est donc de fabriquer un gridshell ayant une géométrie trop différente de celle calculée et de voir des plis se former au niveau de la membrane. Ainsi pour repérer aussi précisément que possible les points d’ancrage, nous avons fait appel aux géomètres de l’Ecole Nationale des Sciences Géographiques : à partir de quelques points de référence positionnés sur le terrain, les géomètres ont pu repérer les points d’ancrages, avec une précision centimétrique dans le plan du sol (figure 2.28).



**Figure 2.28 - Repérage des points d'ancrage par les géomètres**

### 2.2.4.2 Mise en place des ancrages

Les points d’ancrages ayant été repérés, il a fallu enfoncer les ancrages dans le sol. L’étude des ancrages ayant conclu que les ancrages devaient être positionnés en faisant un angle de  $40^\circ$  avec la verticale, le positionnement des ancrages est très difficile, d’autant que les circonstances sont défavorables. En effet, il n’a pas plu depuis plusieurs semaines d’où un sol très dur. De plus, les ancrages ont été simplement biseautés par le fournisseur, et non pieutés comme cela avait été demandé. Les ancrages dévient donc lorsqu’ils sont enfoncés avec les marteaux-piqueurs pneumatiques. Le résultat n’est donc pas très satisfaisant (figure 2.29) mais il faudra s’y adapter.



**Figure 2.29 - Ancrages une fois mis en place**

### 2.2.4.3 Assemblage de la grille

Le serrage des connexions doit être également réalisé avec grand soin, sous réserve d'endommager des tubes en cas de serrage trop important ou de voir glisser les connexions en cas de serrage trop léger. Dans le premier cas, le risque est de voir la structure s'endommager une fois déployée. Dans le second, c'est de voir les poutres glisser les unes par rapport aux autres, une fois le déploiement réalisé. Dans les deux cas, la géométrie de la structure peut subir d'importantes modifications.

Les tests en laboratoire ont permis d'obtenir un couple de serrage permettant un bon compromis. En outre, une campagne d'essai a montré que deux tours de ruban adhésif fibré Tesa® 4964 autour du tube permettent à la fois de protéger le tube en polyester du poinçonnement de la connexion et améliorent le coefficient de frottement entre les deux parties. Cette étude, approfondie dans le cadre du gridshell de Créteil sera donc présentée dans la partie 2.B.

Avant de commencer l'assemblage de la grille primaire, il faut s'assurer que le déploiement de la grille est possible. Il faut donc prendre en considération les obstacles du terrain, mais également prévoir comment les grues pourront venir déployer la grille. En particulier, comme les ancrages représentent des obstacles, il est impossible d'assembler la grille dans la zone qui accueillera le gridshell à terme.

Après étude de tous ces paramètres, la conclusion est que la grille peut être déployée à l'aide de deux grues de 35 tonnes, qui vont devoir venir chercher la grille primaire très loin de leur position. La charge pouvant être portée diminue très rapidement avec le porte-à-faux des grues – une grue 35 tonnes peut porter 35 tonnes avec un bras de levier de 1m, ou alors une tonne avec un bras de levier de 35m. Dans notre cas, nous disposons de deux grues et il faut aller chercher les 1200 kg de la grille primaire à 34m des grues (figure 2.30). Comme il y a deux grues, chacune doit être en mesure de porter 800 kg, au cas où l'une d'entre elles porterait plus que l'autre. La marge est donc réduite.

Finalement, l'assemblage de la grille primaire peut commencer (figure 2.31). L'assemblage doit être très méthodique car les divers tubes ont été coupés à la bonne longueur et numérotés. Les tubes ayant été transportés par camion, leur longueur est limitée à 13m. Pour réaliser des poutres de longueur suffisante (jusqu'à 25m dans le cas de ce gridshell), il convient de rabouter des morceaux de poutres comme présenté sur la figure 2.31, en bas à droite. Nous verrons que le choix de ce raboutage a été une erreur de conception (section 2.2.6).

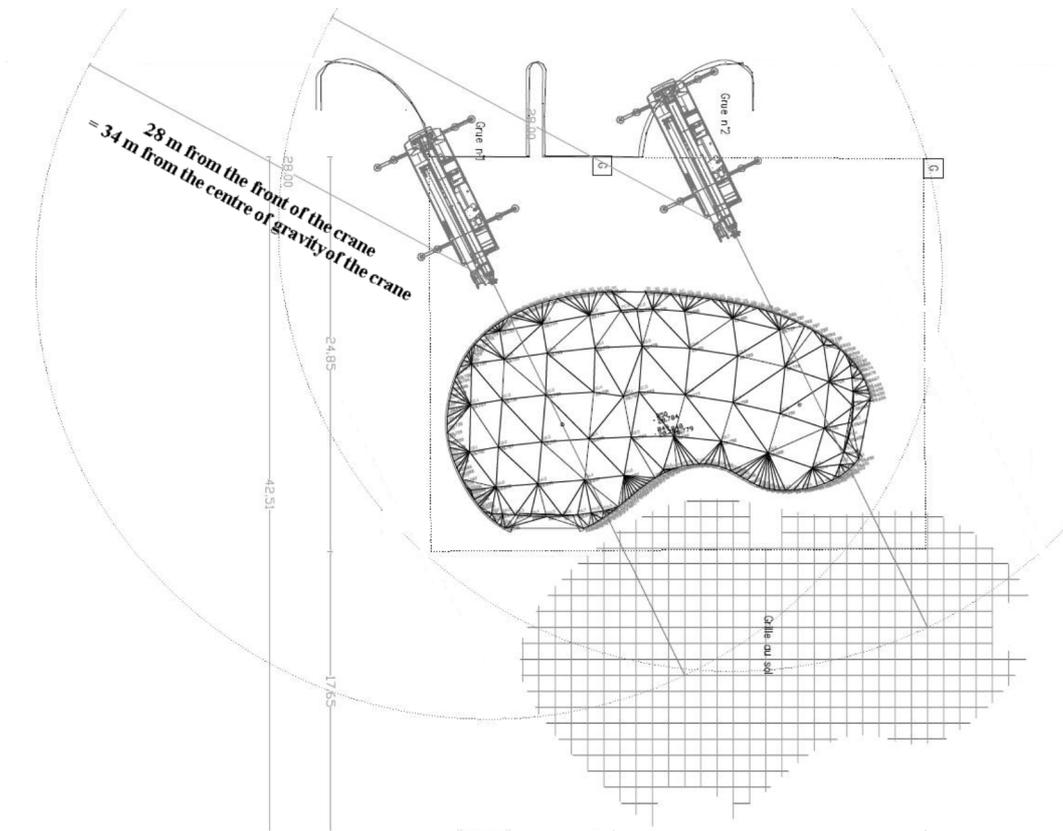


Figure 2.30 - Vue de dessus du site et stratégie de déploiement



Figure 2.31 - Elaboration de la grille primaire

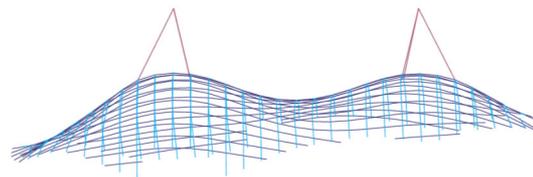
#### 2.2.4.4 Déploiement et ancrage de la grille

Le déploiement de la grille a été une étape critique en raison d'un planning est très serré. Ainsi, si le jour prévu pour le déploiement est un jour venteux, tout le projet peut être remis en question. Par ailleurs, la simulation numérique du déploiement figure 2.32, droite, ne prévoit pas de rupture de tubes mais l'élingage engendre un fort cisaillement au sein des tubes. La

résistance en cisaillement des tubes utilisés n'a pas été testée, faute de temps. Il faut donc réduire au plus les concentrations de contraintes en ramifiant les élingues, et en s'assurant que la majorité d'entre elles sont tendues. Par ailleurs, l'utilisation combinée de deux grues nécessite une bonne synchronisation. Le temps a manqué pour des simulations de ce levage réellement abouties (figure 2.32).

De plus, l'ancrage de la grille est incertain du fait des imprécisions liées à la mise en place des ancrages.

En pratique, cette étape de levage a duré une demi-journée, dont environ 3h de préparation et 30 minutes de déploiement. L'ancrage de la grille primaire a lui été réalisé progressivement, et a nécessité le déplacement de quelques ancrages. C'est une étape assez délicate et difficile.



Crédit image : Lionel du Peloux

**Figure 2.32 - Déploiement du gridshell**

*Déploiement du gridshell de Solidays', sur site (gauche), et en simulation (droite).*

#### 2.2.4.5 Triangulation du gridshell

Comme expliqué au chapitre 1, la grille primaire une fois mise en place est encore souple, les quadrangles ayant encore le degré de liberté en cisaillement. L'ajout d'une troisième direction de barre dans une des diagonales fige ce degré de liberté, ce qui rigidifie la structure. Numériquement, la raideur de la structure est multipliée par 30.

Cette étape est fastidieuse car la nouvelle direction de tubes doit être placée sur le gridshell déployé. Ces nouveaux tubes doivent être positionnés fléchis sur la grille, à des hauteurs pouvant atteindre 7m (figure 2.33). En outre, cette triangulation nécessite le positionnement de 500 nouvelles connexions. Cette seule étape de triangulation a donc représenté trois jours de travail.



**Figure 2.33 - Triangulation du gridshell à l'aide d'une nacelle**

### 2.2.4.6 Mise en place de la rive

La rive est une partie importante du gridshell puisque c’est à l’aide de cet élément que l’on va pouvoir tendre la membrane. Le dimensionnement de cette rive est présenté dans le paragraphe 2.2.3. Le choix réalisé pour le gridshell de Solidays a été d’utiliser le même tube pour la rive que ceux utilisés pour la structure pour des raisons d’approvisionnement et de connecteurs. Ce choix n’est pas forcément un choix très judicieux puisqu’il est très difficile de faire épouser le contour du gridshell à une telle poutre. Une poutre plus souple aurait été plus adaptée. Etant donnée la précision de mise en place des ancrages, et la raideur de la barre de rive, il a fallu ajouter de nouveaux ancrages pour ancrer suffisamment la rive au sol (figure 2.34).



**Figure 2.34 - Mise en place de la rive sur les ancrages**

### 2.2.4.7 Déploiement et mise en tension de la membrane

La membrane est confectionnée par Esmery Caron. Cette société vend avec la membrane le déploiement de la membrane et son arrimage. Pour éviter tout problème, ils attachent la membrane très solidement à la rive. Cela a pour effet de bien tendre la membrane ce qui donne une bonne impression visuelle (figure 2.35). En revanche, une des conséquences a été qu’une barre de rive a cassé au niveau d’une porte, durant la mise en tension de la membrane en PVC (voir paragraphe 2.2.6).



**Figure 2.35 - Déploiement de la membrane par Esmery Caron**

### 2.2.5 Chiffres clés

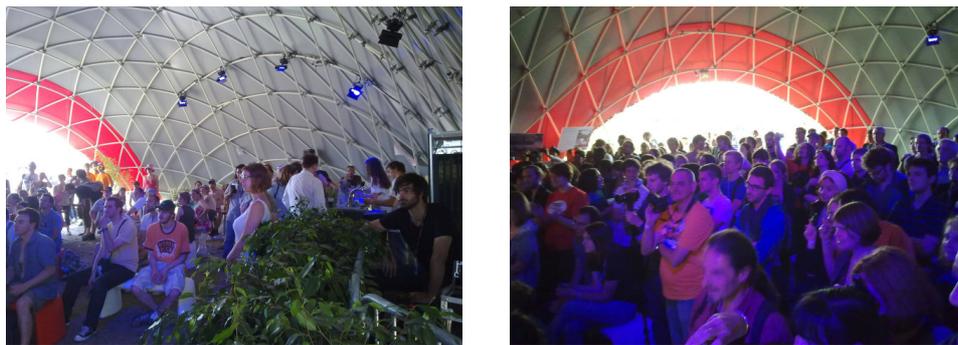
Le gridshell de Solidays peut se résumer en quelques chiffres clés. Ces chiffres sont présentés dans le tableau de la figure 2.36 :

Propriétaire	Solidarité Sida
Client	Solidarité Sida
Conception et fabrication	Laboratoire Navier / Ecole des Ponts ParisTech / Société TESS
Dates de service	24 - 26 juin 2011
Dimensions	Surface utile : 280 m <sup>2</sup> ; Longueur : 26m ; Largeur : 15m ; Hauteur : 7m.
Capacité d'accueil	500 personnes debout
Structure	1600 m de tubes pultrudés
Membrane	500 m <sup>2</sup> de membrane enduite de PVC
Poids	5 kg/m <sup>2</sup>
Cout estimé	150 €/m <sup>2</sup> environ (matériaux seulement) 45 000€ pour tout le gridshell

**Figure 2.36 - Chiffres clés du gridshell Solidays**

### 2.2.6 Retour d'expérience

La conception du gridshell, suivie de sa fabrication à l'occasion du festival Solidays s'est finalement très bien passée. La structure ainsi réalisée a accueilli 150 000 personnes sur 3 jours, une discothèque et plusieurs forums de discussion (figure 2.37). Elle a fait l'unanimité.



**Figure 2.37 - Gridshell de Solidays durant le festival**

Il est toutefois important de regarder le projet avec un œil critique de manière à pouvoir envisager des améliorations pour le futur. En particulier, nous verrons comment le gridshell de Créteil, conçu et fabriqué entre août 2012 et février 2013, a pu bénéficier de ce retour d'expérience.

Un certain nombre de points problématiques ont été abordés durant les précédents paragraphes mais certains aspects méritent d'être approfondis. Nous tentons donc de proposer

des améliorations possibles, notamment pour le raboutage, et pour la barre de rive. Nous revenons également sur les avancées significatives liées à ce projet de conception et fabrication de gridshell.

### 2.2.6.1 Endommagement de tubes et choix de la barre de rive

Durant le montage du gridshell, quelques ruptures de tube ont été observées à des endroits où nous les savions probables, c'est-à-dire dans des zones où les tubes étaient fortement courbés et la contrainte seuil dépassée.

En particulier, une barre de rive située au niveau d'une porte était très fléchie. La combinaison de cette forte courbure et de la sollicitation liée à l'arrimage de la membrane a engendré l'endommagement du tube (figure 2.38). Il est à noter que la contrainte obtenue numériquement au sein de ce tube de rive était élevée (170 MPa) par rapport aux 163 MPa qui avaient été autorisés pour les tubes de structure. On peut raisonnablement imaginer que les imprécisions du montage ont pu localement modifier l'état de contrainte de certains tubes, par rapport à la prévision numérique.

En outre, l'arrimage de la membrane sur ce tube a ajouté du cisaillement à la poutre, ce que nous n'avons pas étudié. Il serait intéressant d'étudier le critère de rupture de Tsai Hill dans ce cas pour tenter de comprendre l'endommagement du tube. Ce tube s'est endommagé à deux reprises au cours des 10 jours durant lesquels la structure était déployée. Cependant, il faut souligner que ce tube est un tube de rive. Il ne fait donc pas partie de la structure étudiée. Son seul rôle est d'assurer la tension de la membrane. Bien qu'endommagée, cette barre de rive est restée continue si bien que la membrane est restée parfaitement en place.

Il paraît cependant important d'étudier spécifiquement la barre de rive, qui n'est donc pas sollicitée de la même manière que les poutres structurelles. En particulier, la barre de rive doit pouvoir être fléchie de manière plus importante que les tubes de structure, et elle doit pouvoir reprendre des efforts tranchant importants.

Plusieurs solutions sont envisageables. L'une d'entre elles consiste à utiliser un jonc (section pleine) en composite pultrudé, de diamètre moins important que le diamètre 41,7 mm utilisé pour la structure. En effet, si le diamètre extérieur est plus faible et le matériau identique, la rive accepte de plus fortes courbures que les poutres constitutives du gridshell. Le fait que ce soit du jonc plein permettra également de reprendre plus d'effort tranchant car sa section peut aisément être plus importante.

Une autre solution consiste à utiliser une poutre métallique cintrée de manière à ce qu'elle suive le contour du gridshell. Dans ce dernier cas, on choisit un métal ayant un fort comportement ductile de manière à écarter tout risque de ruine de la barre de rive.



**Figure 2.38 - Endommagement d'une rive située au niveau d'une porte**

*Une fissure est observée le long du tube. Il y a également une discontinuité de pente au niveau de la noix de connexion que l'on ne peut visualiser sur cette photographie.*

### 2.2.6.2 Une triangulation laborieuse

La triangulation est l'étape la plus pénalisante en vue de l'industrialisation du procédé. En effet, l'étape de triangulation utilisée au laboratoire est longue et difficile. Il existe un certain nombre d'autres moyens de trianguler les gridshells mais aucun ne s'impose vraiment et tous sont assez contraignants. La triangulation par câbles (figure 2.39) est assez peu maîtrisée et nécessite que les câbles soient retendus régulièrement. Son avantage est peut-être une facilité de mise en place et une certaine élégance visuelle. D'autres méthodes peuvent être utilisées. Une méthode à tester consisterait à positionner une troisième direction de barres non serrée dans les connexions, directement dans la grille primaire élaborée à plat. Il faudrait alors être certain que ces éléments de triangulation puissent coulisser sans difficulté lors du déploiement. Il ne resterait alors qu'à serrer les connexions une fois le gridshell déployé.



**Figure 2.39 - Triangulation par câble similaire à celle utilisée pour le gridshell de Mannheim**

Enfin, rigidifier les quadrangles peut sans doute également être assuré par la couverture elle-même, si celle-ci est suffisamment rigide.

### 2.2.6.3 Des problèmes liés aux raboutages

Un certain nombre de problèmes ont été engendrés par les raboutages effectués. En effet, lors du déploiement de la grille primaire, on observe de la torsion au niveau des raboutages, engendrant localement une modification de la géométrie. En effet, du fait du faible coefficient de frottement pour le tube en rotation à l’intérieur des connexions, les raboutages évoluent facilement vers une configuration dans laquelle la somme de l’énergie de torsion et de celle de flexion est minimisée. En pratique, l’énergie de torsion étant très faible, c’est l’énergie de flexion qui est minimisée lors de ce réarrangement. Cette configuration n’est malheureusement pas du tout favorable du point de vue de la géométrie puisque les extrémités non fléchies sortent du gabarit de la forme (figure 2.40).



**Figure 2.40 - Un raboutage problématique**

*Une fois le gridshell érigé, on observe un problématique réarrangement du raboutage. On remarquera en particulier la courbure plus faible au niveau du raboutage. On remarque également que les bouts de tubes pointent vers l’extérieur et pourraient endommager la membrane.*

Compte tenu de la rigidité des barres, il est de plus impossible de remettre les raboutages dans la configuration souhaitée. Les bouts des tubes, orientés vers l’extérieur de la surface sont alors susceptibles d’endommager la membrane. Pour diminuer ce risque, la solution retenue a été de couper les tubes au plus près des connexions (figure 2.41). Finalement, au niveau des raboutages, la raideur en flexion des poutres n’est plus celle qui avait été calculée. La structure est donc moins raide que celle qui avait été prévue lors de la conception. On observe donc au niveau de ces raboutages des concentrations de contrainte. Malgré cela, aucun endommagement lié à cette erreur de conception n’a été relevé durant la vie de la structure (environ 10 jours).



**Figure 2.41 - Raboutage utilisé**

Nous verrons avec le prototype de gridshell de Créteil, plusieurs solutions permettant de régler ce problème de raboutage. La solution la plus judicieuse consistant à déplacer une machine de pultrusion sur site, pour produire les profilés en longueur souhaitée. Cette solution ne pourra être envisagée que dans le cas d'ouvrages importants. Si le budget ne le permet pas, il faut utiliser des connexions plus abouties, comme on le verra pour la cathédrale éphémère de Créteil.

#### 2.2.6.4 Une toile mal protégée des boulons

Un des aspects que nous n'avions pas pris en compte est l'importante tension de la membrane. De ce fait, la membrane risque d'être abîmée par les connexions qui ressortent, ou par les morceaux de tubes au niveau des connexions. En particulier, les vis des connexions sont orientées vers la membrane. Il a donc fallu les couper suffisamment court pour que ce soit finalement les boulons, plus arrondis et de surface plus importante, qui soient en contact avec la membrane. Malgré cela, la situation n'était pas très rassurante (figure 2.42) et des évolutions pourraient permettre de réduire les risques. Il existe en particulier des capuchons en plastique permettant d'adoucir le contact boulon / membrane, comme illustré sur la figure 2.43. Cette adaptation pourra être vitale en cas d'utilisation prolongée de gridshell, puisque sous l'effet du vent, les parties pointues des connexions pourraient endommager petit à petit la membrane. Le mieux sera bien évidemment d'intégrer cette contrainte dans le design d'un connecteur spécifique.



Figure 2.42 - Marquage de la membrane par les boulons

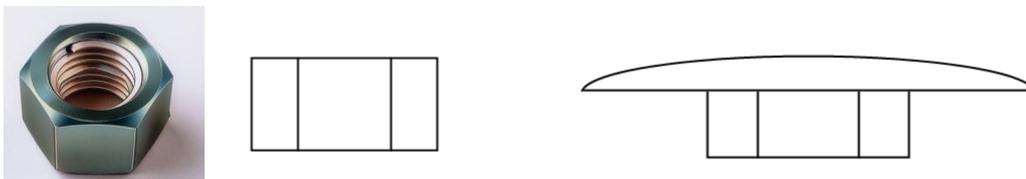


Figure 2.43 - Solution envisageable pour la protection de la membrane

#### 2.2.6.5 Des connexions et des ancrages à optimiser

Les connexions sont très lourdes. Elles représentent à elles seules 40% du poids de la structure finale ! Pour ce type de structures légères, il paraît primordial de concevoir des connexions légères et optimisées. Nous verrons dans le chapitre 4 comment calculer les efforts dans les connexions, en vue d'un nouveau design.

Par ailleurs, les ancrages utilisés dans le cas du gridshell de Solidays peuvent être améliorés. Le fait qu’ils ne soient pas enfoncés verticalement dans le sol est problématique et génère des erreurs importantes. Par ailleurs, l’ancrage dans la terre n’est pas optimal car incertain. Nous verrons quelle solution plus conventionnelle a été développée pour le gridshell de Créteil.

Cependant, malgré les erreurs cumulées au niveau des ancrages, la très grande souplesse de la grille primaire lui permet de ne pas subir d’importantes concentrations de contrainte. La grille primaire va donc très facilement trouver la configuration qui minimise son énergie. Cette configuration restera très proche de celle calculée. Ainsi, le comportement mécanique du gridshell ne sera que très peu affecté par les erreurs sur le positionnement de ses ancrages.

### **2.2.6.6 Un certain nombre de points positifs à souligner**

Le principal point consiste à remarquer l’exceptionnelle adaptabilité du gridshell à une multitude de petits défauts. Du fait de la souplesse de ses poutres constitutives, le gridshell s’est adapté à un sol bosselé et à des ancrages positionnés avec une tolérance d’environ 5 cm, sans entraîner de problèmes de plis par exemple.

Il faut aussi remarquer que le chantier a été réalisé sur un temps très court du fait de la non disponibilité du terrain, et principalement par des élèves ou des personnels non expérimentés pour monter ce type de structure, ce qui souligne à nouveau l’excellente adaptabilité du gridshell.

Un autre point très positif est la très bonne adéquation de la membrane avec la structure. On rappelle que la membrane a été fabriquée selon la géométrie obtenue numériquement pour le gridshell, et que celle-ci est très peu extensible. Malgré cela et malgré toutes les petites imperfections, en particulier celles liées aux rabouages malheureux, aucun pli n’est observé sur la membrane ce qui constitue un véritable soulagement. Cette adéquation entre géométrie obtenue numériquement et géométrie après construction valide en particulier le processus de conception. Des relevés de position ont été faits sur le gridshell mais faute de temps ils ne sont pas exploitables.

Enfin, le gridshell de Solidays a reçu la certification pour accueillir du public. Cela est une bonne chose car cela facilitera l’obtention de certification à l’avenir.

On peut également relever le plébiscite de la structure par tous les visiteurs, qu’ils soient de l’organisation de Solidays ou qu’ils soient des festivaliers. Une grande structure comme celle-ci ne présentant aucun poteau intérieur et une portée aussi grande que 15 m dans la largeur et 25 m dans la longueur ne laisse pas de marbre. La figure 2.44 permet de se faire une idée de l’espace créé.



**Figure 2.44 - Espace intérieur du gridshell de Solidays**

## **2.3 La Cathédrale éphémère de Créteil**

Plus récemment, un nouveau gridshell, la Cathédrale Ephémère de Créteil a marqué une nouvelle étape dans le développement des gridshells. Sa particularité réside dans le fait que cette fois, c'est un bâtiment qui est recherché, avec des éléments de confort, et que la durée de service du gridshell augmente significativement à deux ans.

### **2.3.1 Présentation du contexte et des différents acteurs**

L'histoire de ce gridshell commence lorsque le diocèse de Créteil décide de faire agrandir sa cathédrale. La cathédrale, construite en 1978, est une cathédrale moderne construite en béton par le célèbre architecte C.G. Stoskopf. Le diocèse décide donc de rénover cette cathédrale, en la rendant à la fois plus visible, plus accueillante, et plus unique, en coiffant en particulier la nef d'une superbe double coque en bois.

Les travaux de cette rénovation vont durer deux ans. Il faut donc trouver une solution pour accueillir les offices et les paroissiens. Un appel d'offre est lancé. La société T/E/S/S, engagée dans les travaux de rénovation de la cathédrale, pense à la technologie gridshell. Cette société a déjà participé à la construction du gridshell de Solidays et imagine que la situation se prête bien à cette technologie. De son côté, le laboratoire Navier est prêt à s'engager dans ce projet, qui a l'avantage de faire avancer à grand pas la technologie gridshell sur laquelle il travaille depuis une dizaine d'années.

Le montage d'un gridshell nécessitant une main d'œuvre assez importante, la proposition faite au diocèse est que les paroissiens puissent prendre part au montage, et par la même, créent un lien avec la structure qui accueillera leur culte. Cette solution est alors estimée à 400 k€, ce qui est 30 % plus coûteux que l'achat et la mise en place d'une tente, mais présente encore d'autres avantages, tels que l'originalité, l'esthétisme et une connivence formelle avec le projet de rénovation de la cathédrale.

Cette solution innovante convainc le diocèse. L'étude peut alors commencer.

### 2.3.2 Choix architecturaux

L'architecte associé à la société T/E/S/S, et Lionel du Peloux, ingénieur chez T/E/S/S et également effectuant des activités de recherche au laboratoire Navier, ont alors défini les choix architecturaux, en accord avec le diocèse de Créteil. Deux objectifs principaux sont dégagés. Le premier est de créer un grand espace dans lequel les paroissiens puissent se rassembler, le deuxième étant que la structure soit à la fois accueillante et surprenante de l'extérieur.

L'organisation habituelle des églises est adaptée à la construction gridshell et plusieurs espaces sont dégagés. Après une zone extérieure d'accueil ((3) sur la figure 2.45), on retrouve une zone d'entrée (narthex (2)) puis une zone principale de célébration (nef) intégrant le chœur et l'autel (1).

Un autre choix majeur consiste à ce stade à imaginer que les deux principales directions de poutres convergent vers la position de l'autel.



Figure 2.45 - Croquis de l'architecte

### 2.3.3 Calculs mécaniques, matériau et structure

Les poutres utilisées pour ce nouveau gridshell sont identiques à celles utilisées pour le gridshell de Solidays. Il y a plusieurs raisons à ce choix. La première est que les poutres utilisées pour le gridshell de Solidays ont donné satisfaction, sont bien connues puisqu'elles ont fait l'objet de plusieurs campagnes d'essai. Par ailleurs, le gridshell de Créteil étant légèrement plus imposant que celui de Solidays, et ayant également une forme moins ambitieuse, il en résulte que les courbures de sa surface sont légèrement moins importantes que celles du gridshell de Solidays. Cela a pour conséquence que les contraintes au sein des poutres sont légèrement plus faibles, ce qui permet l'utilisation des mêmes poutres (car le coefficient de sécurité sera plus sévère pour le gridshell de Créteil – 3,0 contre 2,35 – car il est conçu pour être utilisé deux années).

Une nouvelle campagne de tests est conduite au laboratoire Navier. L'objectif est de tester le nouvel arrivage de poutres, en provenance du même fournisseur que celles du gridshell de Solidays, pour s'assurer que leur comportement est celui attendu, ce qui est le cas.

Une fois ces tests réalisés, le travail de conception consiste à élaborer le modèle numérique du gridshell, en s'intéressant en particulier à l'étape de form-finding puis à l'étude des contraintes, lors du déploiement et sous chargements. Cette étape n'est pas détaillée ici puisqu'elle ressemble grandement à ce qui a été présenté dans les chapitres précédents.

### 2.3.4 Conception et dimensionnement des ancrages et des assemblages

Comparé au gridshell de Solidays, le gridshell de Créteil, conçu pour accueillir du public durant plusieurs années, devait présenter un dossier plus solide en vue de sa certification. Plusieurs aspects jouant directement sur la solidité de la structure devaient donc être regardés soigneusement. En particulier, la fixation de la structure au niveau du sol, « folklorique » pour le gridshell de Solidays devait nécessairement être améliorée. De même, la transmission des efforts normaux entre les poutres a été peu étudiée dans le cas du gridshell de Solidays. Il convient de trouver une solution plus rassurante. Enfin, au niveau des connexions entre les tubes, des glissements avaient été observés durant le festival Solidays. Il devenait donc nécessaire de faire une étude du frottement au niveau des connexions, pour s'assurer que le gridshell ne se déforme pas avec le temps.

#### 2.3.4.1 Ancrage du gridshell

La solution retenue s'est orientée vers des platines d'ancrage vissées dans une dalle béton (figure 2.46). Les platines d'ancrages ne doivent pas ajouter de contraintes aux poutres du gridshell, déjà largement fléchies. Pour ce faire, elles doivent se comporter comme des rotules. Pour réaliser une rotule une solution consistant à placer trois pivots a été choisie. En pratique, les pivots sont réalisés à l'aide de vis dans des pas de vis. Ainsi en pied de gridshell, les poutres ne sont ni soumises à un moment de torsion ni à des moments de flexion.

Les platines sont par ailleurs testées en laboratoire pour pouvoir certifier qu'elles sont dimensionnées pour tenir aux charges maximales prévues par les codes de construction. En particulier elles sont capables de reprendre 50 kN en traction (figure 2.46, droite).



Figure 2.46 - Platine d'ancrage, in situ (gauche) et en test (droite)

#### 2.3.4.2 Transmission des efforts normaux par goupillage

##### 2.3.4.2.i Test en traction de matériaux composites pultrudés goupillés

Nous observons en particulier sur les photographies (figure 2.46) que l'effort axial des poutres est réalisé à l'aide d'un goupillage. En pratique, il est assuré par une solution combinant collage et goupillage. La justification de ce choix est simple. Le goupillage est une solution que l'on peut faire agréer par l'organisme de certification car on peut le tester facilement et la

reproductibilité de cette solution est bonne. C'est plus difficile pour le collage qui n'a pas été accepté en l'occurrence. En revanche si le goupillage était seul, le composite situé au niveau des trous s'endommagerait, c'est bien connu, du fait des concentrations de contraintes et des cycles de chargement. La colle permet d'empêcher les mouvements relatifs des goupilles à l'intérieur du composite et d'uniformiser les contraintes en bords de trous. En pratique, ici, c'est donc la colle et le goupillage qui assurent conjointement la transmission des efforts axiaux.

Etudions à présent la procédure utilisée pour dimensionner le goupillage. Cette procédure est réalisée en accord avec les guides de construction composite, notamment l'Eurocomp et le Fiberline, un condensé de l'Eurocomp [Eurocomp96], [Fiberline02]. Le Fiberline détaille en particulier les cinq modes d'endommagement possibles des composites pultrudés goupillés et les précautions à prendre en vue de la réalisation d'un goupillage. Lorsque l'on considère un goupillage sur du composite pultrudé, il y a en pratique un certain nombre de paramètres géométriques qui interviennent et qui sont illustrés sur la figure 2.47. Les principaux paramètres sont :

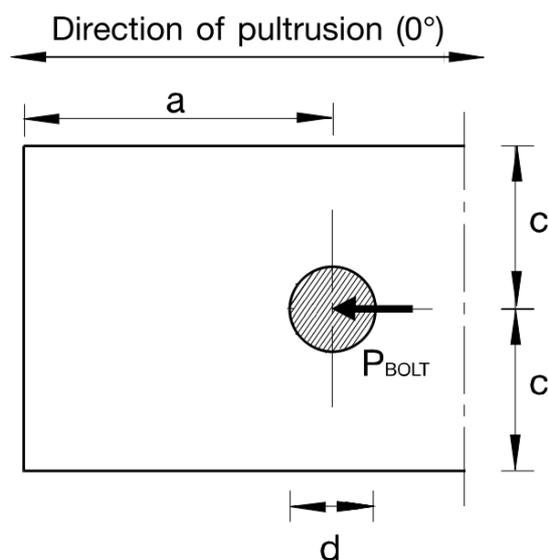
$a$  : la distance entre le centre du boulon et le bord du composite dans la direction de la force appliquée sur le boulon.

$c$  : la distance entre le centre du boulon et le bord du composite dans la direction perpendiculaire à la force appliquée sur le boulon.

$d$  : le diamètre du boulon

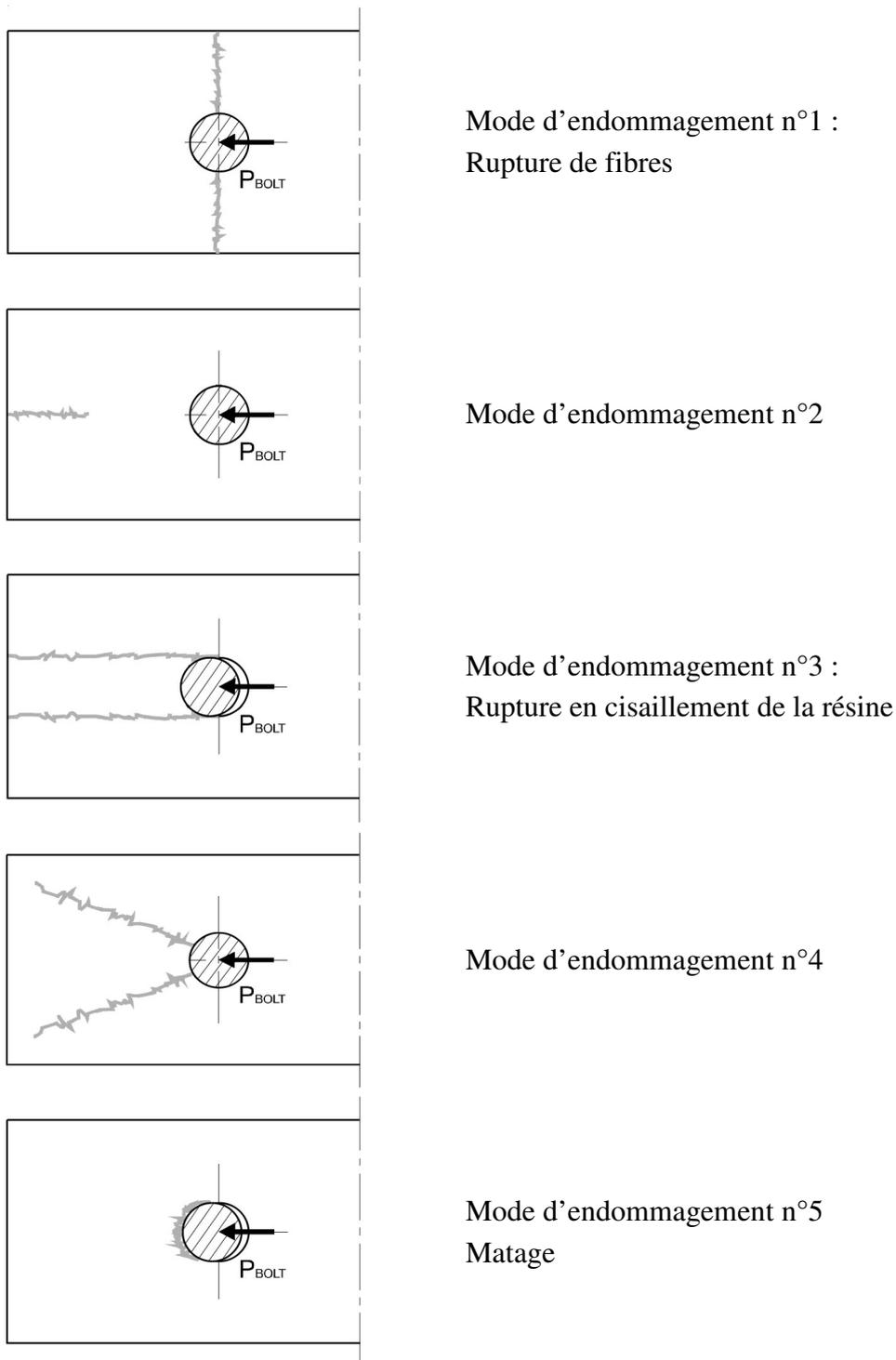
$t$  : l'épaisseur du composite

Dans notre cas d'étude, le diamètre du trou pour la goupille est bien inférieur au diamètre du tube ce qui nous permet de nous ramener au cas de la plaque plane trouée étudiée dans le Fiberline : tout se passe comme si l'on pouvait déplier le tube pour en faire deux plaques composites trouées. Le diamètre du tube est donc approximativement égal à  $4c$ .



**Figure 2.47 - paramétrage géométrique d'un goupillage**

Les cinq modes d'endommagement sont présentés ci-dessous, sur la figure 2.48 :



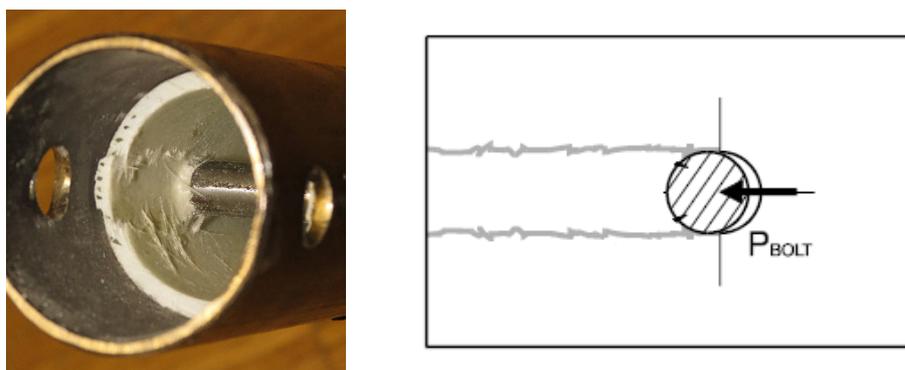
**Figure 2.48 - Modes d'endommagement des tubes composites par goupillage**

Les tubes pultrudés étudiés sont recouverts d'un mat de verre qui facilite la diffusion des efforts dans le composite. Ainsi, après avoir testé un certain nombre de configurations géométriques, il ressort le fait que les modes d'endommagement 1, 2 et 4 ne sont pas observés grâce à l'effet du mat de verre.

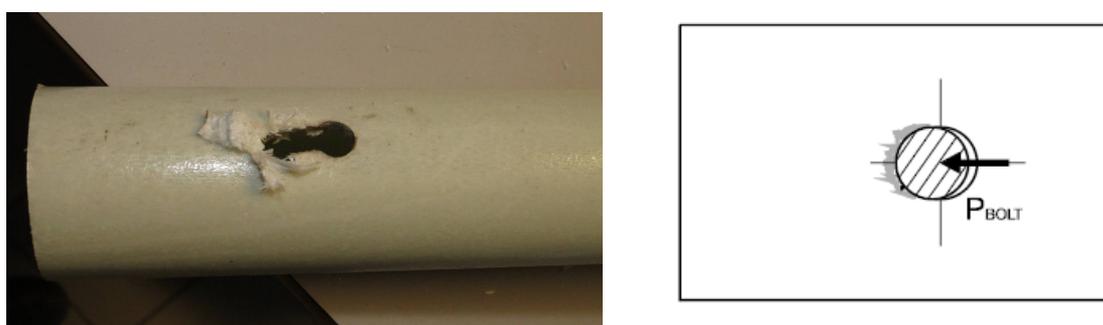
Les modes d'endommagement 3 et 5 sont observés. En fonction des paramètres géométriques du goupillage l'un des modes d'endommagement est privilégié. En effet, lorsque le trou se trouve « trop près » du bord libre, on observe un endommagement selon le mode 3

(figure 2.49). Si le trou est positionné « suffisamment loin » du bord libre (en pratique, si  $a \geq 3,5 d$ , ce qui correspond à la recommandation du Fiberline) alors c'est le mode d'endommagement n°5 qui est observé (figure 2.50). Pour une goupille de 10 mm de diamètre, il faut donc que le bord du trou de goupillage soit distant d'au moins 30 mm du bord du composite.

Logiquement, la résistance du goupillage est meilleure lorsque l'endommagement se produit selon le mode 5.

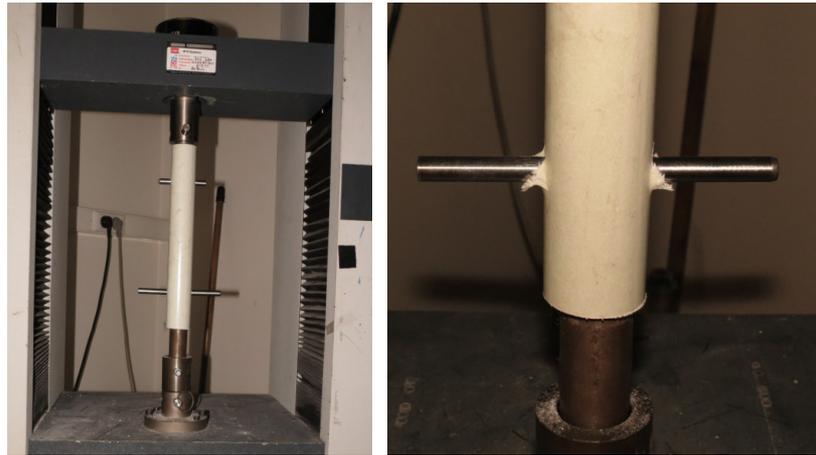


**Figure 2.49 - Endommagement selon le mode 3 : rupture en cisaillement de la matrice**



**Figure 2.50 - Endommagement selon le mode 5 : matage du composite**

A l'aide des essais, nous obtenons également la force qui peut être reprise par une goupille (endommagement selon le mode 5 – figure 2.51). Une fois la goupille choisie (plusieurs diamètres ont été testés), il s'agit de concevoir un système comprenant un nombre suffisant de goupilles pour reprendre l'effort axial maximal obtenu lors du dimensionnement. La validation se fera alors grâce à des expérimentations, en veillant bien à s'assurer que l'utilisation combinée de plusieurs goupilles ne change pas le mode d'endommagement des profilés composites.



**Figure 2.51 - Test d'un assemblage goupillé en traction (cas dimensionnant)**

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Diamètre de la goupille $D$ (en mm)	Force moyenne à rupture $F$ (en kN)
8	10.4
10	11
12	10.6

**Figure 2.52 - Résultats des forces reprises par goupillage**

Le phénomène d'endommagement observé est toujours le même : l'endommagement est très progressif et localisé, au niveau de la zone en compression (phénomène de matage). Nous avons réalisé cinq essais par type de goupilles. Nous observons que l'influence du diamètre de la goupille est peu importante mais nous décidons de choisir celles qui ont donné les meilleurs résultats, à savoir celles de 10 mm de diamètre.

L'assemblage goupillé peut alors être réalisé.

#### **2.3.4.2.ii Test en traction d'un assemblage complet constitué de trois goupilles de 10 mm de diamètre**

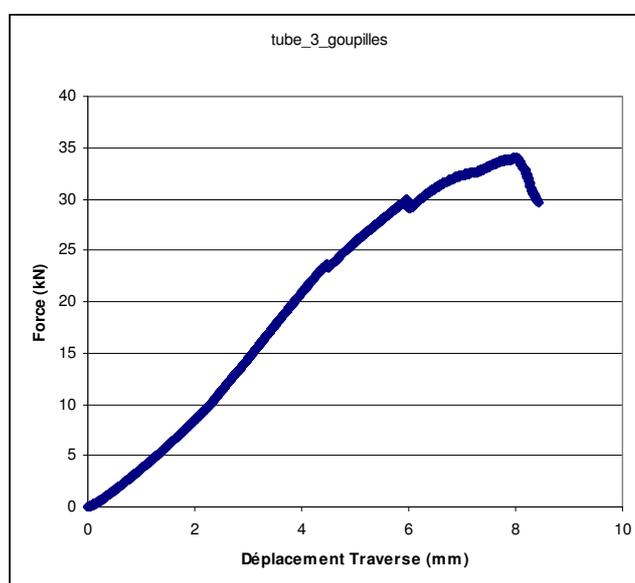
##### Montage utilisé :

Le montage utilisé est illustré sur la figure 2.53. La première goupille est positionnée à 50 mm du bord du tube. Nous sommes ici conservatifs par rapport aux recommandations du Fiberline – à savoir que la goupille ne doit pas être à moins de 3,5 rayon de la goupille du bord du composite. La deuxième goupille est placée perpendiculairement à la première, 25 mm plus loin (75 mm du bord du tube). La troisième est placée parallèlement à la première, à 25 mm de la seconde (donc 50 mm de la première). Ces deux dernières précautions permettent de faire en sorte que les différentes goupilles sollicitent le moins possible les mêmes zones. Comme en atteste la figure 2.49, la zone la plus sollicitée par une goupille se situe juste derrière celle-ci.



**Figure 2.53 - Montage à trois goupilles en phase de tests**

Courbe de charge :



**Figure 2.54 - Courbe de charge de l'assemblage goupillé**

Commentaires :

A chaque fois, on observe la rupture d'un seul côté du montage. On remarque que les 6 trous ont travaillé (matage au niveau des 6 trous du côté de l'endommagement).

La force augmente progressivement au cours de l'essai, jusqu'à atteindre la valeur maximale de 34 kN (figure 2.54). On note au cours de la montée en charge quelques réarrangements du montage qui est complexe (certains éléments travaillent en traction et peuvent s'aligner avec la direction de la traction au cours de l'essai).

On note que l'endommagement observé au niveau de tous les trous se fait selon le mode 5. On peut donc conclure que si les trous sont suffisamment éloignés du bord libre, ainsi que des zones d'influence des autres trous, ils travaillent tous à l'identique jusqu'à ce que l'endommagement commence au niveau d'un premier trou. Ainsi, on peut postuler que la force reprise est proportionnelle au nombre de goupilles (jusqu'à ce qu'un autre phénomène

d'endommagement soit mis en évidence. Mais pour un montage à trois goupilles, c'est ce qui a été constaté lors des cinq tests effectués).

#### Reproductibilité du test :

Le test présenté dans cette partie 2 a été reproduit 5 fois. La valeur maximale de la force atteinte varie entre 31 kN et 36 kN. A chaque fois, on observe les mêmes modes d'endommagement (matage).

La rupture observée est reproductible et est de type ductile. L'effort maximum transmissible du tube composite à la pièce d'acier dépend du nombre de goupilles :

- 10kN pour 1 goupille
- 20kN pour 2 goupilles
- 30kN pour 3 goupilles
- 50kN pour 5 goupilles

Les pieds d'appuis acier sont prévus avec 3 ou 5 trous et le nombre de goupilles effectivement mises en œuvre par pied est ajusté en fonction de l'effort local maximal à potentiellement reprendre. Ce nombre de goupilles est déterminé de manière à présenter un coefficient de sécurité minimum de 2.0 par rapport à l'enveloppe des cas de charges ultimes (coefficient minimum de 3.0 par rapport à l'enveloppe de service).

L'assemblage présenté permet donc de faire descendre les charges au sol avec les coefficients de sécurité demandés.

### **2.3.4.3 Raboutage des poutres**

Revenons à présent à la problématique du raboutage de poutres. En effet, rappelons-nous que la solution utilisée pour le gridshell de Solidays n'est absolument pas satisfaisante. Cette solution fait intervenir une excentricité dans le plan de la grille primaire, dont le comportement est préjudiciable une fois la poutre fléchi. Il est donc nécessaire de supprimer cette excentricité dans le plan de la grille. Les deux poutres à rabouter doivent donc être parfaitement alignées. Diverses solutions peuvent être envisagées. Pour ne pas affecter le comportement du gridshell, il faut que :

- les raboutages transmettent les efforts axiaux, aussi bien en compression qu'en traction
- la raideur en flexion des raboutages soit voisine de la raideur en flexion des poutres constitutives pour ne pas influencer la forme obtenue.

Un certain nombre de solutions ont été imaginées et testées. Les deux solutions les plus intéressantes sont présentées dans cette section.

#### **2.3.4.3.i Solution acier**

Une des solutions envisagée consiste à rabouter deux poutres à l'aide d'une tige filetée présentant une raideur en flexion voisine de celle des poutres en matériaux composites pultrudés. Cette solution est illustrée sur la figure 2.55.

Pour la transmission des efforts normaux, il faut ajouter une pièce permettant de faire le lien entre la tige filetée et les tubes composites. La solution a déjà été présentée : elle consiste à goupiller des manchons sur les tubes. A l'intérieur de ces manchons métalliques, un écrou est soudé ce qui permet la transmission des efforts normaux à la tige filetée.

Comme les manchons rigidifient les tubes composites, la solution retenue consiste à utiliser une tige filetée présentant une raideur en flexion moindre.

On remarque en outre que l'acier de la tige filetée plastifie avant que les tubes ne s'endommagent, ce qui ajoute un caractère ductile confortable, à la structure.



**Figure 2.55 - Raboutage acier**

*Le raboutage acier, testé en laboratoire (gauche) et en utilisation (gridshell de Créteil, droite) est constitué de manchons en acier manchonnés sur les tubes composites. Les manchons sont reliés entre eux grâce à une tige filetée de raideur légèrement plus faible que celle des tubes composites.*

L'avantage de cette solution est sa ductilité. En cas de problème, c'est la tige filetée qui plastifiera sans mettre en danger la structure. Par ailleurs, la courbure au niveau du raboutage est relativement homogène. Finalement, cette solution est facilement certifiable, l'acier étant très utilisé et traité dans les guides de construction. La solution du goupillage étant, par ailleurs, déjà utilisée.

#### **2.3.4.3.ii Solution composite**

Une autre solution pour le raboutage des tubes a été étudiée. Cette solution consistait à manchonner deux poutres composites, avec une autre poutre composite de diamètre plus important.

Il est vite apparu qu'en flexion, la transmission de l'effort tranchant à l'intérieur du manchon était problématique et conduisait systématiquement à la ruine du manchon : celui-ci s'éventrait.

Pour s'affranchir de ce problème, l'idée a été de rajouter un enroulement filamentaire en fibres de carbone, aux endroits où l'effort tranchant était très important. Cet enroulement, bien visible (en noir) sur la figure 2.65, empêche l'éventrement du manchon.

Il en résulte une solution très optimisée car très légère, offrant une certaine continuité du point de vue des raideurs en flexion, et à la fois bien plus esthétique que la solution acier présentée précédemment.



**Figure 2.56 - Manchon composite**

*Le manchon composite est constitué d'un tube en composite de diamètre supérieur au tube utilisé pour la grille, de manière à ce qu'ils s'emboîtent parfaitement. Dans les zones où le cisaillement est important, un enroulement filamentaire, ici en fibres de carbone, permet d'empêcher la ruine du tube.*

Les ruptures observées lors du test qualitatif présenté sur la figure 2.57 ont été observées hors de la zone du raboutage, c'est-à-dire dans des zones où les moments n'étaient pas les plus importants. Cela s'explique car au niveau du raboutage, il y a une raideur équivalente à environ deux fois la raideur du tube de base, car il y a deux épaisseurs de tube composite. Ainsi, du fait de cette raideur importante, on observe dans la zone du raboutage une courbure moins importante qu'aux abords du raboutage. C'est donc dans ces zones que l'endommagement de la poutre composite est observé (figure 2.58).



**Figure 2.57 - Test en flexion d'une poutre raboutée**

*La poutre raboutée est mise en flexion à l'aide d'un tire-fort. Le moment dans la poutre est proportionnel à l'éloignement à l'axe du tire-fort.*



**Figure 2.58 - Endommagement de la poutre raboutée**

*L'endommagement est observé hors de la zone de raboutage. A cet endroit, bien que la poutre soit soumise au moment de flexion le plus fort, ce n'est pas l'endroit où sa courbure est la plus importante car sa raideur est augmentée de la raideur du raboutage.*

Pour ce qui est de la transmission des efforts axiaux, la solution goupillée n'est pas à remettre en question car le problème est le même lorsqu'on veut goupiller deux parties en composites l'une avec l'autre, ou lorsqu'on veut goupiller une partie en composite avec une partie en acier.

Cette solution, bien que très intéressante sur bien des aspects présente toutefois une limitation importante. Il est très difficile de faire certifier une solution telle que celle-là. En pratique, il faudrait faire fabriquer les manchons par un professionnel du composite, et faire certifier le goupillage. Dans le temps imparti, cette solution n'a pas été réalisable.

#### 2.3.4.4 Etude du glissement au niveau des connexions

Le glissement au niveau des connexions est un phénomène important à maîtriser. En effet, si les connexions peuvent glisser sur les tubes, il est fort probable que la grille primaire se modifie considérablement, en particulier lors de la phase de déploiement. Il en résulte alors un gridshell ayant une géométrie différente de celle calculée, présentant potentiellement des zones sur-contraintes, et une toile de couverture inadaptée pouvant former des plis.

En outre, si le glissement des connexions était possible, on pourrait se demander à quoi ressemblerait le gridshell au bout de quelques années d'utilisation.

Le coefficient de frottement acier de la connexion / plastique du tube étant très mauvais, il en résulte que l'on doit ajouter un matériau intermédiaire favorisant le frottement. Ceci est d'autant plus vrai que les tubes composites sont creux ce qui rend impossible un serrage important des connexions sur le tube, sous peine de l'endommager de manière importante.

Pour trouver une solution intéressante, une série de tests a été menée, la tribologie étant une science principalement expérimentale.

Pour ce faire, un montage reproduisant au mieux la situation réelle a été conçu et fabriqué (figure 2.59) : un tube acier a été soudé à une platine. Sur cette platine, une noix de connexion a été solidement serrée. Dans l'autre partie de la noix de connexion, un tube composite est enserré, avec, selon les cas, un matériau intermédiaire. Le couple de serrage du tube composite est contrôlé précisément à l'aide d'une clé dynamométrique. Finalement, un effort axial est appliqué sur le tube composite à l'aide d'une machine d'essai. Pour rendre le test aussi continu que possible, un bloc de silicone est placé entre la machine et le tube.

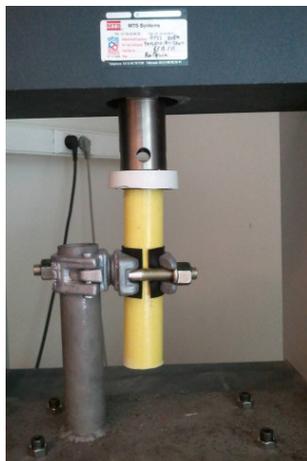


Figure 2.59 - Montage réalisé pour les tests de glissement

Les tests présentés ci-dessous sont réalisés pour un couple de serrage de 5 N.m :

### 2.3.4.4.i Influence du matériau intermédiaire sur le frottement

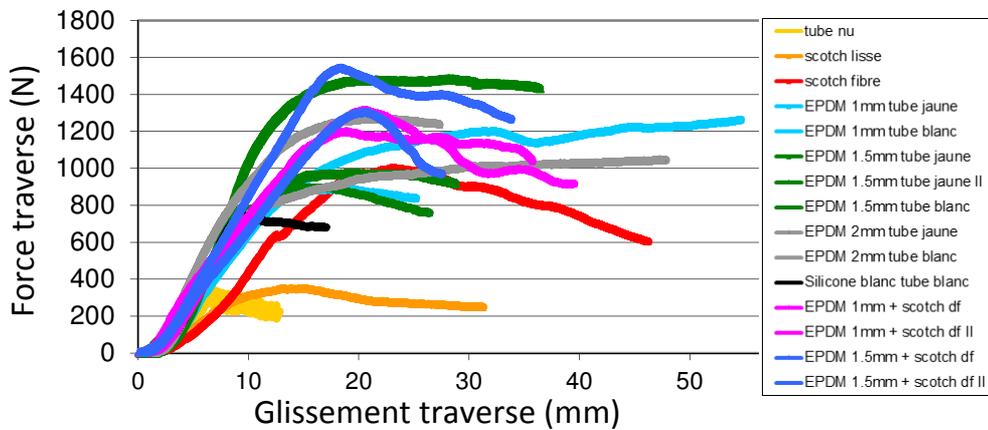


Figure 2.60 – Résultats des tests en glissement pour diverses solutions

Sur la figure 2.60, le déplacement reporté ne représente pas le glissement de la noix sur le tube. Il est plutôt lié à l'écrasement du bloc de silicone. C'est la raison pour laquelle on observe toujours à peu près la même pente au début de l'essai. En pratique, le glissement de la noix sur le tube commence lorsque la force de frottement a atteint son maximum.

On retiendra que le frottement est très mauvais si la noix est directement serrée sur le tube composite (en jaune sur la figure 2.60), ou si on enroule autour du tube composite un ruban adhésif lisse (Tesa® 4843). Dans ce cas, le glissement intervient pour des forces inférieures à 400 N.

Diverses solutions ont été testées pour améliorer le frottement. Divers matériaux ont été placés entre la noix et le tube composite. En particulier, une couche d'EPDM, une couche de silicone et du ruban adhésif fibré (Tesa®) ont été testés. Les résultats reportés sur la figure 2.60 montrent que le contact est bien amélioré. Le glissement se produit pour des valeurs de force bien supérieures à 400 N.

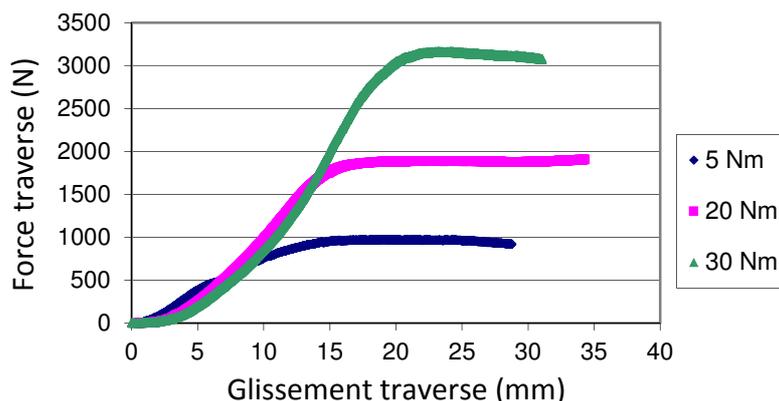
Pour l'EPDM, on montre que l'épaisseur du matériau est peu influente sur la valeur de force pour laquelle se produit le glissement. On peut ainsi espérer atteindre une force de 700 N avant que le glissement se produise. On montre que, après que le glissement ait commencé, la force à exercer pour poursuivre le glissement reste à peu près constante, ce qui est un résultat intéressant, car ce seront *a priori* des forces accidentelles qui provoqueront le glissement.

Pour le ruban adhésif fibré, deux tours sont nécessaires pour que le frottement soit optimal. Ces tests montrent qu'avec du ruban adhésif fibré entre le tube composite et la noix de connexion, on peut espérer atteindre une force de 1000 N.

Pour envisager une solution technique simple, nous avons collé un adhésif double face sur les morceaux d'EPDM d'épaisseur 1 mm et 1,5 mm. Nous avons ensuite testé ces assemblages qui semblent être meilleurs que si on n'utilise pas l'adhésif double face.

#### 2.3.4.4.ii Influence du couple de serrage sur le frottement

Pour les essais suivants, une couche de 1.5 mm d'EPDM est placée entre le tube composite et la noix de connexion. Le glissement est testé après serrage (trois serrages différents 5 N.m, 20 N.m et 30 N.m – figure 2.61).



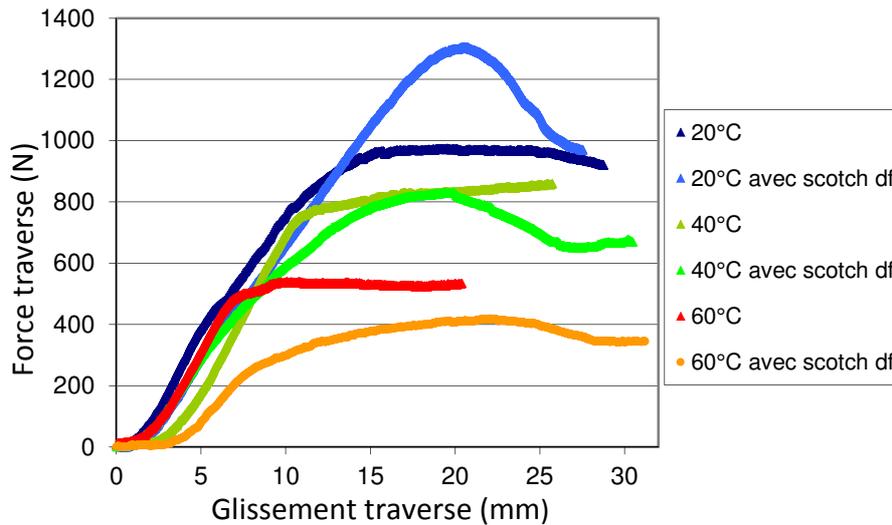
**Figure 2.61 - Influence du couple de serrage sur le glissement**

*La force (en N) est reportée en fonction du déplacement de la presse (en mm). Comme attendu, la force est d'autant plus importante que le couple de serrage est important, ce qui est conforme aux lois de Coulomb.*

N.B. Le serrage à 20 N.m semble bien se passer. En revanche, lors du serrage à 30 N.m, de nombreux craquements sont audibles, malgré la présence de la couche d'EPDM qui permet une meilleure répartition des efforts. Finalement, après un certain nombre d'observations additionnelles, nous concluons qu'il n'y a pas d'endommagement pour un serrage inférieur à 15 N.m. Nous recommandons donc de serrer les noix avec un couple de 15 N.m, si le but est d'obtenir le meilleur frottement possible, sans endommagement.

#### 2.3.4.4.iii Influence de la température sur le frottement

Dans tous les essais suivants, une couche de 1.5 mm d'EPDM est placée entre le tube composite et la noix de connexion. Le glissement est testé après conditionnement (trois températures différentes 20°C, 40°C et 60°C). Pour chacune de ces températures, le glissement est testé une première fois sans adhésif double face entre l'EPDM et le tube, puis une seconde avec de l'adhésif double face Tesa® 4964 (figure 2.62).



**Figure 2.62 - Influence de la température sur la force de frottement**

*La force (en Newton) est reportée en fonction du déplacement de la presse (en millimètres).  
On remarque que le frottement diminue lorsque la température augmente.*

Spécification de l'adhésif double face Tesa® 4964 : résistance en température long terme 40 °C.

Cette valeur de température est cohérente avec les observations : au-delà de 40°C, l'adhésif double face se met à fluer sous sollicitation permanente.

En conclusion, l'étude réalisée au laboratoire nous a conduits à faire les recommandations suivantes : l'idéal est de placer une couche de 1,5 mm d'EPDM entre le tube et la noix de connexion. Utiliser du scotch double face n'est pas particulièrement recommandé. Cependant, si les spécifications du scotch double face précisent qu'il est utilisable à des températures élevées, l'utilisation du scotch double face peut faciliter la pose des noix de connexion. Des scotchs double face utilisables à haute température existent (Tesa® 4975 (utilisable jusqu'à 100°C), Tesa® 51977 (utilisable jusqu'à 60°C), Tesa® 4965).

Pour ce qui est du serrage des noix de connexion, des tests ont été réalisés pour des serrages de 5 N.m, 20 N.m et 30 N.m. Le serrage à 30 N.m est à exclure (endommagement des tubes). Le serrage à 20 N.m est limite (il arrive que des craquements du tube soient audibles lors du serrage). Cependant, le frottement augmentant avec le serrage, l'opérateur pourra serrer les noix de connexion avec un couple de serrage allant de 5 N.m à 15 N.m suivant ce qu'il recherche.

Si un jour on s'oriente vers l'utilisation de joncs composites, le serrage pourra être largement revu à la hausse ce qui permettra d'atteindre des frottements potentiellement importants.

### 2.3.5 Choix de la barre de rive

Comme cela a été vu précédemment, la barre de rive utilisée pour le gridshell de Solidays n'a pas donné pleine satisfaction. On rappellera que le tube utilisé pour la structure est très raide en flexion et n'épouse pas facilement le contour du gridshell. Par ailleurs, ce même tube n'est

pas très performant si l'on considère sa réponse à l'effort tranchant car sa section présente assez peu de matière.

Pour le gridshell de Créteil, la solution a consisté à remplacer ce tube de rive par un jonc (plein) de diamètre extérieur moins important, donc plus souple en flexion, et de section plus importante, donc plus résistant vis-à-vis du cisaillement. Cette solution nous a donné satisfaction, et présente l'avantage de pouvoir être de la couleur souhaitée, la matrice plastique pouvant être teinte dans la masse.

Une autre solution performante mais non utilisée consiste à cintrer une poutre métallique de manière à ce qu'elle épouse le contour du gridshell. Cette solution présente alors l'intérêt d'être ductile et donc parfaitement rassurante.

### 2.3.6 Confort des occupants

Pour assurer un minimum de confort en toute saison, le gridshell une fois fermé est étanche à l'air. La membrane protège parfaitement l'espace intérieur. Une amélioration technique importante a également été l'intégration de portes à la structure (figure 2.63). La solution métallique choisie garantit étanchéité et sécurité au gridshell. Des barres de rives spécifiques ont également été intégrées.



**Figure 2.63 - Porte métallique garantissant étanchéité et sécurité**

Les matériaux utilisés sont résistants au feu (classe II), ce qui rend possible l'accueil de public. En outre, pour le confort des occupants ainsi que pour l'esthétisme général du gridshell, des 'fenêtres' ont été réalisées dans la membrane PVC. Ces fenêtres sont en réalité des morceaux de membrane PVC transparents thermocollés avec le reste de la membrane. De l'intérieur, en plein jour, le rendu est intéressant d'autant plus que ces fenêtres sont allongées et qu'elles présentent une direction privilégiée par rapport à l'autel (figure 2.64).

Par ailleurs, pour permettre un relatif confort thermique, un système de ventilation permet de brasser l'air en été, tandis qu'un système de chauffage permet de chauffer l'air pour les offices en hiver.



**Figure 2.64 - Vue intérieure du gridshell**

*La vue intérieure du gridshell permet d'entrevoir certains choix architecturaux. Elle permet également de se rendre compte de l'étanchéité du gridshell à l'air et de l'apport des fenêtres transparentes.*

### 2.3.7 Chiffres et les informations clés

Propriétaire	Diocèse de Créteil
Client	Diocèse de Créteil
Conception et fabrication	Société TESS / Laboratoire Navier (Ecole des Ponts ParisTech)
Dates de service	Février 2013 - Février 2015
Dimensions	Surface utile : 350 m <sup>2</sup> ; Volume : 1600 m <sup>3</sup> Longueur : 29m ; Largeur : 17m ; Hauteur : 7m.
Capacité d'accueil	360 places assises / 500 personnes debout
Structure	2000 m de tubes pultrudés / 1295 connexions / 130 raboutages
Membrane	600 m <sup>2</sup> de membrane enduite de PVC / 600 kg
Poids	5 kg/m <sup>2</sup>
Coût estimé	1100 €/m <sup>2</sup> environ

**Figure 2.65 - Chiffres et informations clés pour le gridshell de Créteil**

### 2.3.8 Retour d'expérience

#### 2.3.8.1 Ruptures de tubes

Depuis que le gridshell est érigé, deux ruptures de tube ont été observées. Ces ruptures ne se sont pas produites juste après le déploiement de la structure mais se sont produites au cours du premier été durant lequel la température à l'intérieur de la structure a été très élevée.

En effet au début de l'été 2013 aucun système de ventilation n'avait été mis en place car on ne s'attendait pas à une telle élévation de température, à l'intérieur de la structure. Par ailleurs,

cette période a été très chaude (plus de 35°C à l'ombre). La membrane PVC absorbant fortement le rayonnement solaire, un fort effet de serre s'est fait sentir à l'intérieur de la structure.

Aucune mesure de température n'a été faite sous la voute du gridshell, mais compte tenu des effets combinés de la stratification thermique et de l'absorption du rayonnement de la membrane PVC, on peut supposer, sans trop prendre de risque, que la température une dizaine de centimètres au-dessous de la voute devait atteindre facilement les 50°C.

A de telles températures, la matrice polymère des tubes n'a plus les mêmes propriétés mécaniques et l'endommagement des fibres devient plus probable. En particulier, dans la zone en compression d'une poutre en flexion, les fibres peuvent localement flamber et s'endommager, ce qui peut engendrer à plus ou moins long terme la rupture de la poutre (figure 2.66).



**Figure 2.66 - Rupture de tube dans la nappe inférieure**

Pour ne pas risquer d'autres ruptures pouvant mettre en danger la certification de la structure, un système de ventilation a alors été mis en place rapidement. A partir de ce moment, plus aucune rupture ne fut observée, ni durant la fin de cet été, ni durant l'été suivant, ni à aucun autre moment. La ventilation était alors activée automatiquement pour empêcher de trop fortes montées en température, même lorsque le gridshell était inoccupé. Il est également possible que les tubes cassés présentaient des faiblesses.

Du fait du fort état de contrainte des poutres endommagées, toute réparation a été impossible. Les poutres endommagées sont donc parfaitement visibles de l'intérieur (figure 2.66).

A l'avenir, pour s'affranchir de ce genre de ruptures, on pourrait envisager prendre une marge plus importante lors de la conception, ce qui reviendrait à augmenter un peu plus les coefficients de sécurité utilisés. Une solution consisterait à utiliser des joncs composites (plein), de diamètre extérieur plus faible que celui des tubes, mais de raideur en flexion équivalente. On aurait alors une solution aussi bonne mécaniquement, plus sûre du point de vue des endommagements possibles, mais en contrepartie plus lourde. En effet, les joncs seraient alors plus lourds que les tubes de raideur en flexion équivalente.

### 2.3.8.2 Un procédé de fabrication bien amélioré par rapport au gridshell de Solidays

En dépit des deux ruptures de tubes, le gridshell de Créteil a été dans l'ensemble bien maîtrisé comparé à celui de Solidays qui aurait probablement eu bien du mal à rester érigé durant deux années complètes. Plusieurs points ont été nettement améliorés sur le projet de la cathédrale éphémère de Créteil.

Si l'on considère les ancrages de la structure et de la membrane, la dalle en béton s'impose comme une évidence. Les platines d'acier vissées dans la dalle remplissent parfaitement leur rôle et permettent d'ancrer la structure de manière fiable.

Quant à la barre de rive, deux solutions ont été proposées : la barre de rive en jonc pultrudé, ou celle en acier cintré utilisée pour les portes et ouvertures. Ces deux solutions sont pertinentes et remplissent parfaitement le cahier des charges de la rive. Pour une utilisation à long terme, on privilégierait une solution en métal, plus à même de résister aux diverses sollicitations, en particulier au vandalisme.

Au niveau des rabouages, une solution technique pertinente a été développée. Cette solution lourde et peu esthétique n'est pourtant pas satisfaisante dans une perspective de développement commercial des gridshells.

Finalement le niveau de confort proposé par le gridshell de Créteil est vraiment très bon comparé à celui de Solidays, puisqu'il offre un certain nombre de nouveautés en laissant en particulier entrer la lumière du jour, en étant fermé hermétiquement et en étant doté d'un système de chauffage, d'éclairage et de sonorisation.

### 2.3.8.3 Quelques pistes pour le futur

Nous l'avons vu, un projet d'aussi grande envergure est toujours très intéressant à analyser et permet de faire avancer la technologie de manière importante.

Si l'on revient sur les rabouages, on conclut que la solution utilisée n'est pas satisfaisante du point de vue de la praticité et de l'esthétisme. Il est à noter en particulier que la mise en place des manchons, leur collage et leur goupillage a été très fastidieux. Finalement, le résultat esthétique est très moyen, et le poids des rabouages dénote avec la structure légère. Comme cela a été expliqué, la meilleure solution consisterait à produire les poutres sur place, en longueur suffisante pour ne pas avoir à faire de rabouages. Cette solution peut être envisagée pour les gridshells à gros budgets. Si cette solution n'est pas intéressante économiquement, il faut revoir les rabouages, au même titre que les connexions. La piste des rabouages en matériaux composites est intéressante mais nécessiterait de faire des campagnes de certification, ce qui nécessite un fort investissement, aussi bien en temps, qu'en moyens numériques et d'essai.

Si l'on considère à présent l'élément de base des gridshells, c'est-à-dire les poutres constitutives, on se rend compte que si la courbure est 'trop élevée', les risques de rupture sont importants. Si la courbure est plus modérée, les risques d'endommagement sont bien moindres sauf si par exemple la température d'utilisation devient trop importante (comme ce fut le cas pour la cathédrale éphémère de Créteil). Les gridshells de Solidays et de Créteil nous ont permis d'appréhender les coefficients de sécurité à utiliser pour ce type de structure. Notre expérience

est maintenant importante et peut être utilisée précieusement en complément des recommandations données par les guides de construction comme l'Eurocomp.

Du fait de la relaxation observée au sein des poutres des gridshells, le risque d'endommagement au sein des poutres ne s'accroît pas nécessairement au fil du temps. En particulier, nous arrivons à la conclusion que pour le type de poutres utilisées (poutres pultrudées de section tubulaire), les coefficients de sécurité fournis par les guides de construction sont un peu trop faibles. Les phénomènes de relaxation (et de fluage) sont par ailleurs étudiés sur ce genre de matériaux composites, au laboratoire Navier. Les résultats sont tout à fait encourageants et on pourrait bientôt envisager de concevoir des gridshells composites pour des durées d'utilisation de l'ordre de la dizaine d'années.

Revenons à présent à l'étape la plus critique pour le développement des gridshells : la triangulation. A ce jour aucune solution ne remplit parfaitement l'objectif de rigidification des quadrangles de la grille primaire, tout en bénéficiant d'une mise en place facile et rapide. Cet aspect est à travailler en priorité si l'on veut pouvoir positionner les gridshells en composites sur le marché des structures éphémères. La solution de placer une triangulation coulissante lors du déploiement est toujours envisageable mais nécessite d'être testée à l'échelle 1, car les frottements et les excentricités jouent un rôle important et sont très difficiles à simuler numériquement.





# **Chapitre 3 : Comportement structurel des gridshells, un focus sur instabilités et robustesse**

## **Sommaire**

---

<b>3.1</b>	<b>Gridshell, composites et robustesse.....</b>	<b>102</b>
<b>3.2</b>	<b>Prise en compte de l'aléa matériaux .....</b>	<b>102</b>
<b>3.3</b>	<b>Le flambement du gridshell : à éviter à tout prix.....</b>	<b>104</b>
<b>3.4</b>	<b>Robustesse et ductilité du gridshell.....</b>	<b>110</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>115</b>

---

De manière évidente, une structure réalisée dans le but d'accueillir du public ne doit pas mettre en danger ses occupants. Même en cas de situation accidentelle, elle ne doit pas risquer de s'effondrer sur le public sans avoir montré des signes de faiblesse permettant l'évacuation de la structure. Ainsi, le but de ce chapitre est de présenter le raisonnement et les résultats obtenus dans [TAYEB13]. Il sera montré, à travers une étude numérique du gridshell de Solidays, que celui-ci présente un comportement robuste, c'est-à-dire qu'il ne risque pas de s'effondrer avant d'avoir montré des signes évidents de faiblesse.

### 3.1 Gridshell, composites et robustesse

Plusieurs concepts ont été développés pour améliorer la robustesse et la ductilité des structures fabriquées en matériaux composites [KELLER07], [CASTRO05]. En effet, de telles structures peuvent présenter un comportement ductile si elles présentent une forme de redondance ou si elles présentent la faculté de se déformer de manière importante, à travers des déformations plastiques [VANERP01]. Une classification des différents types de ductilités pour les structures en FRP est proposée dans [KELLER07]. Une structure peut ainsi être caractérisée de :

- ductile si elle inclut une combinaison d'éléments fragiles et ductiles.
- pseudo-ductile si elle n'inclut que des éléments ayant un comportement fragile.

Ainsi, pour les structures en matériaux composites (fragiles), la ductilité peut être liée à :

- la redondance des éléments
- l'ajout d'éléments ductiles
- l'ajout d'éléments fragiles fusibles dimensionnés pour s'endommager pour des sollicitations plus faibles que les sollicitations qui provoqueraient l'endommagement ou la ruine de la structure principale.

Dans ce chapitre reprenant les résultats de [TAYEB13], une étude de la robustesse des gridshells qui s'appuie sur le gridshell conçu et construit pour le festival Solidays est réalisée. Après quelques considérations matériau, une étude numérique du flambement de la structure est réalisée. Cette étude permet en particulier de situer les états limites ultimes de chargement (ELU, donnés par les guides de construction) de la structure par rapport aux chargements qui provoquent le flambement de la structure. Une étude numérique du comportement de la structure sous chargement est ensuite réalisée : sous chargement ELU, les éléments les plus chargés de la structure sont cassés pour simuler une situation accidentelle défavorable. Le comportement du gridshell est alors étudié, de manière à pouvoir caractériser sa robustesse.

### 3.2 Prise en compte de l'aléa matériaux

Les données concernant les tubes composites ont été obtenues grâce à un test de flexion trois points représentatif de l'utilisation de ces tubes élancés (voir chapitre 2). Ces tubes sont des tubes pultrudés réalisés à base d'une matrice polyester et de fibres de verre. On rappelle les résultats des essais dans le tableau de la figure 3.1 :

Profilé	Résistance exp $\bar{R}$ (valeur moyenne)	Coefficient de variation exp. Cv	Résistance (donnée commerciale)	Coefficient de variation (donnée commerciale)
Pultrudé GFRP	458 MPa	3%	400 MPa	Non communiquée

**Figure 3.1 - Propriétés mécaniques des profilés pultrudés GFRP**

Cette étape de collecte des données expérimentales achevée, il convient, pour dimensionner correctement la structure, d'intégrer les coefficients de sécurité obtenus à partir des guides de construction, ici l'Eurocomp [Eurocomp96]. Cela permet de prendre en compte les aléas liés à la fabrication des pièces, ceux liés au matériau lui-même, ainsi que ceux relatifs aux chargements et aux conditions environnementales. La prise en compte de ces trois facteurs, détaillée dans la section 2.1.1, aboutit à un coefficient de sécurité de 2,35, en accord avec l'organisme de contrôle, le BVCTS. Ce facteur peut sembler assez faible mais il faut rappeler qu'il prend en compte le fait que la structure est une structure éphémère prévue pour être montée deux semaines, et que par conséquent, la structure n'est pas soumise à des chargements à long terme.

Il nous est apparu, à la suite de l'étude présentée dans ce chapitre, qu'étant donné la géométrie de la structure et le type de poutres utilisées, la contrainte ne devait pas dépasser 170 MPa dans le gridshell Solidays.

Cette valeur de contrainte limite est évidemment fonction de la dispersion des propriétés mécaniques comme cela a été vu dans la section 2.1.1. Pour ne prendre aucun risque vis-à-vis de cette valeur, tout en prenant en considération la dispersion de 3%, il faudrait que la probabilité qu'une poutre ait une résistance admissible inférieure à 170 MPa soit infime.

Il est en effet nécessaire de prendre en compte la dispersion des résistances car les contraintes dans les gridshells sont relativement uniformes par zone. Ainsi, si une poutre a une résistance moins élevée que ses voisines, elle cassera en premier, pour un seuil de chargement inférieur à celui des autres.

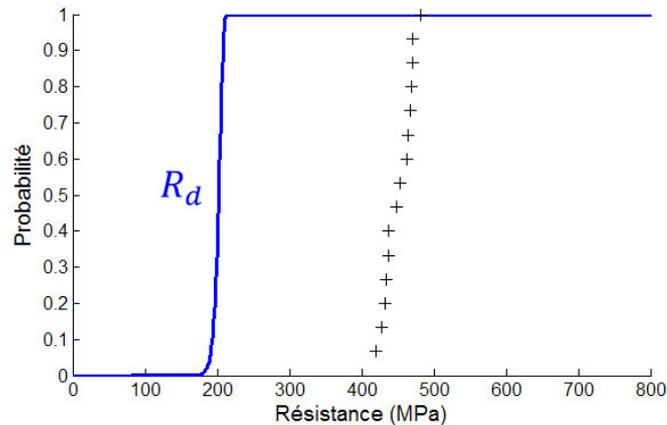
Pour pouvoir intégrer ce phénomène de dispersion, nous utilisons une loi de Weibull pour les résistances admissibles ( $R_d$ ). Il apparaît que si l'on choisit une valeur moyenne pour cette loi de 205 MPa et un coefficient de variation 3% alors les résistances tirées ont pour la plupart des valeurs comprises entre 177 MPa et 211 MPa (figure 3.2).

Les valeurs des résistances admissibles sont alors tirées pour chaque élément de poutre, à partir de cette fonction de répartition, tracée en bleu sur la figure 1. On attribue alors une résistance admissible aux 1357 éléments du gridshell.

On remarque qu'à partir de cette valeur moyenne de 205 MPa et du coefficient de sécurité de 2,35, on peut remonter à la valeur moyenne réelle des résistances des poutres. Celle-ci devrait valoir 482 MPa. Nous rappelons qu'expérimentalement nous avons trouvé 458 MPa tandis que le fabricant indique une valeur de résistance de 400 MPa.

Pour cette étude, nous ferons comme si la valeur moyenne des résistances des poutres valait 482 MPa, de manière à pouvoir mettre au mieux en évidence le comportement robuste des

structures de type gridshell. Le gridshell est alors conçu avec ce matériau aléatoire, et on s'interdit de dépasser dans les barres la valeur de 170 MPa quel que soit le chargement du cahier des charges considéré.



**Figure 3.2 - Fonction de répartition pour la loi de résistance  $R_d$**

La fonction de répartition pour la loi de résistances admissibles  $R_d$  (en bleu) est choisie de manière à ce que la contrainte limite de 170 MPa, obtenue via les guides de construction, ne soit pas atteinte, sauf éventuellement en queue de distribution, avec une probabilité infime. La valeur moyenne des résistances admissibles vaut ici 205 MPa, et la dispersion vaut 3%. Les valeurs de résistances obtenues expérimentalement sont également reportées sur la figure (+) pour comparaison.

Un tel gridshell ayant été validé numériquement, il devient alors intéressant d'appréhender sa robustesse. Un phénomène particulièrement important est le flambement de la structure qui peut s'avérer redoutable. Nous allons voir qu'il est important de s'assurer que le gridshell ne risque pas de flamber, et cela quel que soit le chargement.

Une démarche complémentaire consiste à considérer le gridshell sous un chargement dimensionnant, dans une situation accidentelle raisonnable, et à suivre l'évolution de la structure (en particulier pour savoir s'il se produit ou non des ruptures en chaîne).

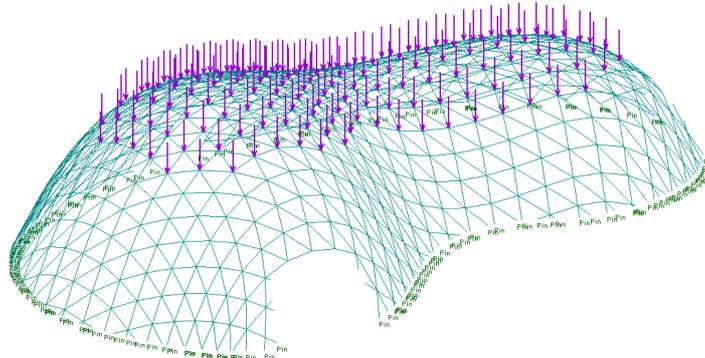
### 3.3 Le flambement du gridshell : à éviter à tout prix

Le flambement peut être un phénomène très problématique pour le gridshell. En effet, si la structure flambe, la courbure peut localement augmenter de manière très importante par endroit et diminuer ailleurs. Par conséquent, les contraintes dans les éléments très fléchis peuvent alors dépasser les contraintes admissibles (la structure risque alors de subir des ruptures en chaîne), et dans les zones où la courbure a diminué on obtient une baisse sensible de la rigidité structurelle qui amplifie le risque de flambement.

#### 3.3.1 Etude numérique du flambement appliquée au gridshell de Solidays

En premier lieu, une étude numérique du flambement est réalisée sur l'exemple du gridshell de Solidays, sous un chargement de neige. Cette étude est réalisée à l'aide d'un algorithme de relaxation dynamique, qui, comme on l'a déjà souligné est une méthode numérique adaptée

pour étudier les structures présentant des déplacements importants et des non-linéarités géométriques [DOUTHE10], [BARNES75], [ADRIAENSSENS99], [DOUTHE06]. Cette étude est réalisée de la manière suivante : le gridshell est soumis à un chargement que l'on augmente progressivement jusqu'à atteindre le flambement de la structure. Le cas de chargement choisi ici est le chargement de neige représenté sur la figure 3.3.



**Figure 3.3 - Modèle de chargement pour le cas de neige**

Dans cette étude on relève la contrainte maximale dans le gridshell ( $\sigma_{max}$ ) ainsi que le déplacement maximal des nœuds de la structure par rapport à la configuration non chargée ( $U_{max}$ ). Pour cette modélisation, tous les éléments répondent élastiquement au chargement et n'ont pas de limite élastique. Connaissant la contrainte admissible dans le matériau, nous sommes capables de déterminer le moment où le premier élément de la structure casse (c'est-à-dire que la contrainte au sein de l'élément atteint la valeur de la résistance admissible tirée pour le même élément). Le déplacement maximal est calculé à l'aide de la relation (3.1) :

$$U_{max} = \text{Max} \left( \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \right) \quad (3.1)$$

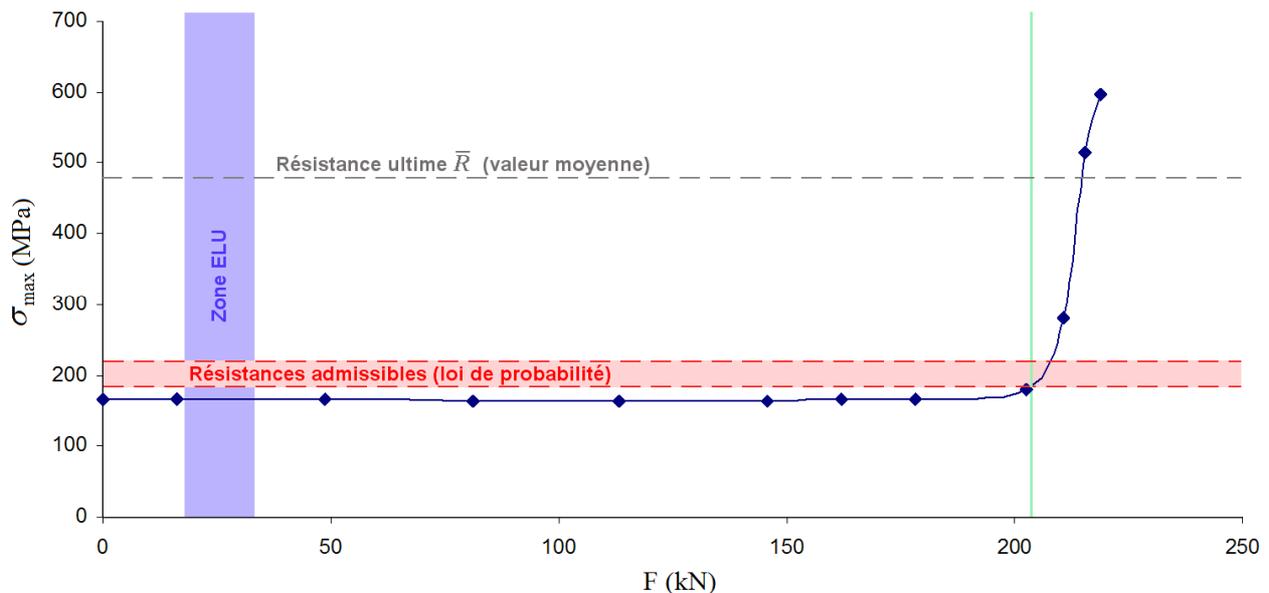
Où  $i$  est l'indice du nœud considéré.

Les résultats sont les suivants : le gridshell commence par réagir de manière élastique linéaire vis-à-vis du chargement (figure 3.5) puis il se met à flamber assez brutalement, ici, pour un chargement vertical global d'environ 200 kN, ce qui correspond à 1.7 kN/m<sup>2</sup>. Ce chargement est très important devant le chargement ELU étudié : la figure 3.4 situe le flambement par rapport à la zone ELU. Dès l'apparition du flambement, la contrainte se met à augmenter très rapidement avec le chargement et le premier élément casse rapidement.

La figure 3.4 confirme le fait que pour un chargement classique, la contrainte dans le gridshell est quasiment égale à la contrainte de mise en forme. Cette propriété est assez peu commune et confère un grand avantage à ce type de structures. En effet, si la structure a été bien calculée, et si les chargements ont été bien évalués, alors on peut être certain que la contrainte ne dépassera que de très peu la contrainte de mise en forme et est donc toujours bien connue. Autrement dit, la fiabilité d'un gridshell bien dimensionné est très bonne.

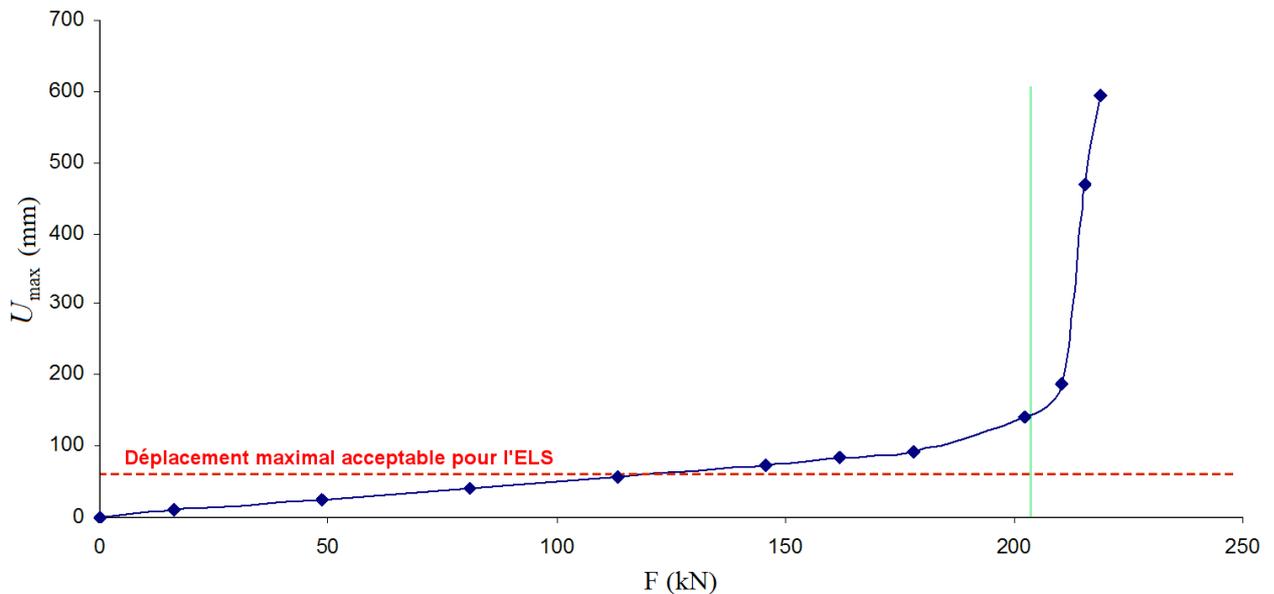
Lorsque le phénomène de flambement débute, la contrainte maximale augmente très vite et pour un chargement global de 206 kN, un premier élément atteint sa résistance admissible (cette situation est repérée par la ligne verticale verte, figure 3.4). S'il casse réellement, il se produit

une redistribution des contraintes sur les éléments voisins. Les éléments voisins, puisqu'ils se situent dans la même zone, présentent des courbures (et donc également des contraintes) voisines de celle du premier élément cassé. Ces éléments deviennent donc surchargés et deviennent susceptibles de casser tour à tour, rapidement. Pour cette raison, le flambement du gridshell doit être évité à tout prix sous peine de risquer un effondrement rapide de la structure. Ce risque est d'autant plus important que la dispersion des propriétés mécaniques des éléments est faible. En effet, si la dispersion des propriétés mécaniques est importante, il existe des éléments faibles qui vont se comporter comme des éléments fusibles et vont permettre d'alerter le public d'une trop grande quantité de neige sur la structure.



**Figure 3.4 – Evolution de la contrainte maximale en fonction du chargement**

*L'évolution de la contrainte maximale  $\sigma_{max}$  (MPa) dans les poutres du gridshell est reportée en fonction du chargement vertical total  $F$  (kN). Un modèle de gridshell élastique sans endommagement est considéré. On observe que la contrainte n'est quasiment pas modifiée par le chargement tant que la structure ne flambe pas. On remarque également que dès que le flambement se produit, la valeur de la contrainte augmente très rapidement, ce qui met en danger le gridshell.*



**Figure 3.5 - Evolution du déplacement maximal en fonction du chargement**

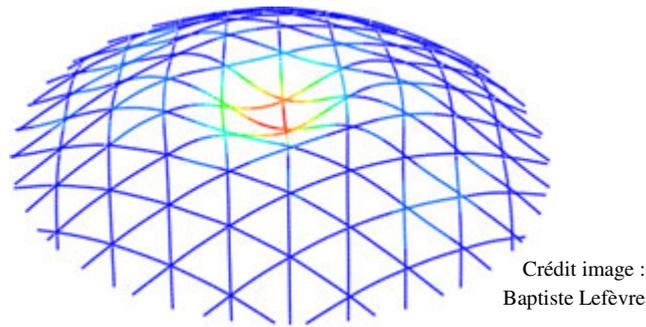
L'évolution du déplacement maximal  $U_{max}$  (mm) des nœuds du gridshell est reportée en fonction du chargement vertical total  $F$  (kN). A nouveau, un modèle de gridshell élastique sans endommagement est considéré. On observe que le déplacement maximal observé sur les nombreux points de contrôle varie linéairement avec le chargement jusque peu avant l'apparition du phénomène de flambement.

### 3.3.2 Critère de flambement local

Une étude plus approfondie sur le flambement des gridshells sphériques a été également conduite avec Baptiste Lefèvre et Cyril Douthe [LEFEVRE15]. Cette étude a été voulue aussi large que possible dans le but de n'écarter aucune forme de flambement. Il en ressort l'existence de deux modes principaux de flambement. Le premier est un mode de flambement par snap-through, illustré sur la figure 3.6. Le second est un mode de flambement en pied, observé principalement lorsque certaines dernières longueurs de poutres sont plus longues que le pas du maillage. Dans tous les cas de figure, le flambement observé est localisé et aucun mode de flambement ne semble impliquer la structure dans sa totalité.

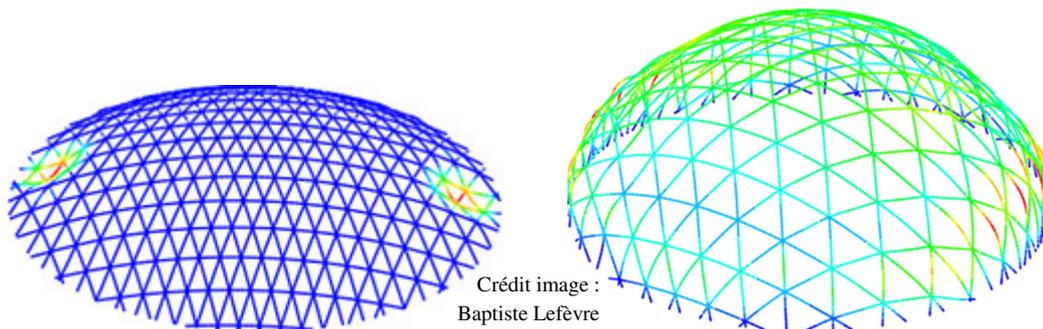
Le flambement par snap-through localisé, forme une cloque qui s'étend typiquement sur une longueur de  $2\omega$  ( $\omega$  étant le pas du maillage). Les déformées post-flambement correspondant à ce mécanisme sont présentées sur la figure 3.6.

Le flambement par effet de bord se produit au niveau de la liaison au sol. Deux types de flambement au bord apparaissent : pour les coques basses, un flambement par snap-through, comme précédemment, qui semble activé par la discontinuité de comportement au bord. Pour les coques hautes, un flambement en pied de type flambement de poutre d'Euler, explicable par le fait que les éléments les plus long sont en pied du fait du maillage, et du fait du comportement de la structure discontinu en pied. Ces mécanismes de flambement sont présentés sur la figure 3.7.



**Figure 3.6 - Flambement localisé, par snap-through**

*Flambement localisé par snap-through. Les couleurs représentent les déplacements amplifiés d'un facteur 3.*



**Figure 3.7 - Flambement en pied de structure**

*A gauche, le gridshell est assez plat et subit un phénomène de cloque, similaire au snap-through. A droite, le gridshell bombé voit certaines de ses poutres en pied flamber individuellement.*

Dans la suite du chapitre, nous nous intéressons au flambement par snap-through. Un gridshell sphérique peut être paramétré au niveau local à l'aide de paramètres adimensionnels indépendants. Ces paramètres sont des paramètres géométriques du gridshell et des paramètres liés aux poutres constitutives. Les paramètres pertinents pour l'étude d'un gridshell sphérique, au niveau local, sont les suivants :

- $R$  le rayon du gridshell sphérique,
- $\omega$  le pas du maillage,
- $\alpha$  l'angle entre les directrices (pouvant être considéré comme uniforme localement),
- $r$  le rayon extérieur des poutres,
- $h$ , l'épaisseur des poutres si ce sont des tubes,
- $e$  l'excentricité au niveau des connexions,
- $E$  le module d'Young des poutres.

Le but de l'étude est d'arriver à anticiper la charge nécessaire pour faire flamber localement la structure, en l'exprimant en fonction de ces paramètres. Une pression critique de flambement empirique  $\tilde{p}_c$  est alors obtenue, à la manière de ce qui est proposé dans [KATO05] et [ZHU12].

Pour un calcul sur un gridshell sans excentricité, les résultats obtenus sont les suivants. On remarquera que pour simplifier le problème, les poutres considérées sont des tubes, dont l'épaisseur  $h$  vaut un dixième du rayon ( $r/10$ ).

La pression critique de flambement empirique obtenue  $\tilde{p}_c$  vaut alors :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_c &= 0.95 E \frac{r^3}{\omega R^2} & \text{si } r/R < 0.002 \\ \tilde{p}_c &= 38 E \frac{r^4}{\omega^2 R^2} & \text{si } r/R \geq 0.002 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sur les 256 simulations réalisées avec le logiciel Abaqus, les résultats ci-dessus donnent une prévision à 20 % près, ce qui est satisfaisant si l'on considère un coefficient de sécurité spécifique à cet aspect. On fait remarquer que la formule (3.2) n'est pas continue en  $r/R = 0.002$  car les deux formules de pression critique de flambement sont obtenues distinctement sur chacun des intervalles, en appliquant la méthode des moindres carrés. Ainsi, dans le voisinage de  $r/R = 0.002$ , le comportement du gridshell est plutôt hybride entre les coques plutôt bombées et les coques plutôt plates.

Des études additionnelles ont permis de qualifier l'influence de l'excentricité générée par les connexions, ainsi que l'influence de la précontrainte au sein des poutres.

### 3.3.3 Conclusion

On retiendra que l'utilisation de ces outils a permis l'étude de la problématique du flambement pour les gridshells. Les principaux mécanismes de ruines des gridshells (local et en pied) ont été identifiés. Un critère de flambement local est proposé et est utilisable sur une grande variété de formes. L'étude de l'excentricité et de la précontrainte a fait apparaître ces deux phénomènes comme des imperfections auxquelles le gridshell est sensible. L'excentricité semble pénaliser la structure en réduisant sa charge ultime de flambement. La précontrainte peut quant à elle être bénéfique ou pénalisante, selon qu'elle est en traction ou compression.

Finalement les résultats obtenus dans le cas général d'un gridshell sphérique peuvent être étendus à un gridshell quelconque. Pour réaliser au mieux cette étude, il faut faire séparément deux études, pour pouvoir considérer les flambements par snap-through et les flambements en pied de structure. En effet, les flambements par snap-through se produiront dans les zones où la courbure du gridshell est peu importante. Pour étudier ce mode de flambement, il faut se placer dans les zones où la courbure moyenne de la surface est la plus faible car c'est dans ces zones que le flambement par snap-through surviendra en premier. Une fois placé dans ces zones, on peut conduire l'étude présentée ci-dessus, en remplaçant le rayon sphérique du gridshell par la courbure principale locale la plus importante.

Dans le cas du gridshell de Solidays il est possible de tenter cette comparaison, avec un certain nombre de limitations. Une des limitations est que les tubes utilisés présentent un rapport  $h/r$  égal à 1/17 et non 1/10 comme dans l'étude réalisée.

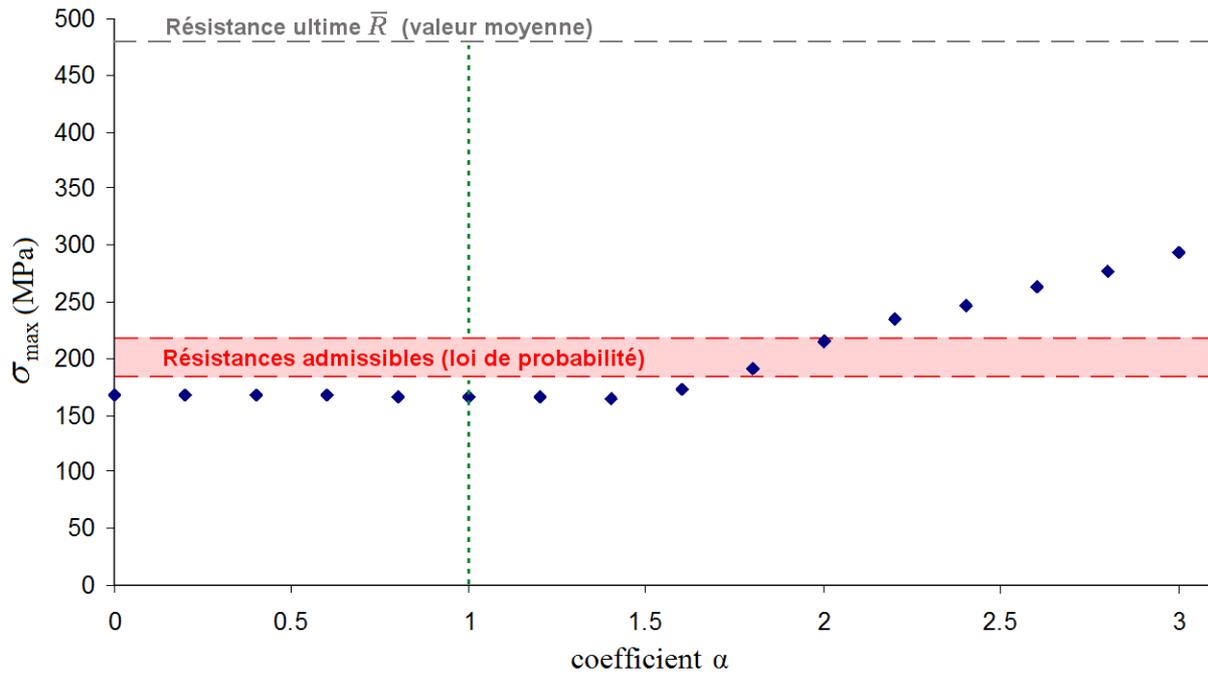
Les zones de faible courbure moyenne ont des rayons de courbure moyens valant typiquement 10 m. Alors dans ces zones, le rapport  $r/R$  vaut environ 0,002. Le gridshell est donc typiquement un gridshell hybride. La pression maximale acceptable vaut alors 2,3 kN/m<sup>2</sup> en utilisant la première expression pour la pression critique de flambement, et 1,9 kN/m<sup>2</sup> en utilisant la deuxième expression. Ces valeurs sont à comparer avec la valeur de 1,7 kN/m<sup>2</sup> obtenue lors de l'étude numérique conduite sur le gridshell de Solidays (section 3.3.1). Le gridshell de Solidays n'étant pas un gridshell sphérique et n'étant pas non plus un gridshell pour lequel le rapport  $h/r$  est égal à 1/10, on conclut que les valeurs de pression critique de flambement obtenues par les deux approches sont cohérentes.

Cette étude permet donc, à partir des cas de chargements issus des Eurocodes d'estimer si le gridshell étudié a une probabilité non nulle de flamber localement. S'il y a risque de flambement, il est préférable de ne pas fabriquer le gridshell tel quel, car en cas de flambement on observerait localement une augmentation non maîtrisée de la courbure, et donc potentiellement un risque de rupture de poutres, en chaîne. En pratique, comme nous le verrons dans la section 3.4, le gridshell de Solidays se situe à un coefficient de sécurité de 1,5 du flambement.

### 3.4 Robustesse et ductilité du gridshell

Il a été montré dans la partie précédente que le flambement du gridshell doit être évité à tout prix sous peine de risquer un effondrement rapide de la structure, ce qui a été fait pour les réalisations Solidays et Créteil. Dans cette partie, le gridshell est placé sous un cas de chargement ultime (un ELU de vent, le chargement le plus dimensionnant pour cette structure). Sous ce chargement, qui ne provoque pas de flambement de coque, une situation accidentelle défavorable est simulée de manière à connaître la réponse du gridshell à une telle situation. Nous insistons sur le fait que le gridshell ne se trouve pas dans une configuration flambée. Une étude numérique a été réalisée pour prouver cela. La figure 3.8 présente les résultats de cette étude : sur cette figure, le chargement ELU considéré est repéré par la ligne pointillée verticale. Nous avons multiplié ce chargement par un coefficient  $\alpha$  de manière à pouvoir situer l'apparition du flambement par rapport à l'ELU. On observe que le chargement nécessaire pour faire flamber le gridshell vaut environ 1,5 fois le chargement de l'ELU.

Ainsi, sous le chargement ELU, *a priori*, la probabilité qu'un élément casse tout seul est quasiment nulle. Il faut donc se placer dans le cas d'une situation accidentelle pour amorcer des ruptures d'éléments, afin d'observer le comportement de la structure endommagée. Enfin, pour que la situation simulée soit la plus défavorable possible, ce sont les éléments les plus chargés qui sont cassés, tour à tour.



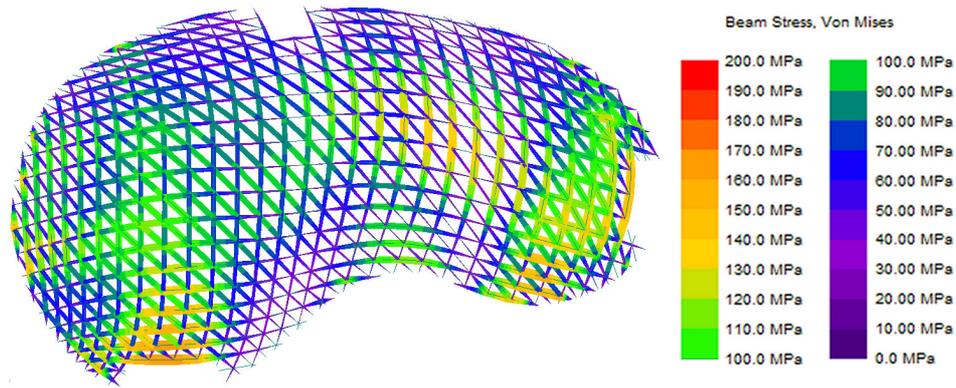
**Figure 3.8 - Positionnement du flambement par rapport à l'ELU de vent considéré**

*On remarque que le flambement se produit lorsque le chargement vaut environ 1,5 fois l'ELU le plus dimensionnant. Le gridshell ne sera donc a priori jamais soumis à un chargement suffisamment important pour qu'il y ait un flambement local.*

Dans cette étude, il est important de prendre en compte la dispersion des résistances des éléments car, dans la position déformée, des éléments voisins appartenant à un même lit de barres ont des courbures très proches et donc des contraintes très voisines. Cependant, si par exemple, les résistances de deux éléments voisins diffèrent de 5 %, alors que leurs courbures diffèrent de 1 %, ce sera l'élément dont la résistance est la moins élevée qui sera cassé en premier, tandis que l'autre élément conservera encore une petite marge avant rupture. Il est donc important de comparer les rapports  $\beta_j$  définis à l'aide de la relation (3.3) comme le rapport de la contrainte maximale  $\sigma_{max}^j$  sur la valeur de résistance tirée selon la loi de probabilité définie dans la partie 3.1,  $R_d^j$ ,  $j$  étant l'élément considéré.

$$\beta_j = \frac{\sigma_{max}^j}{R_d^j} \quad (3.3)$$

La répartition des contraintes dans les éléments du gridshell, sous ELU, est cartographiée sur la figure 3.9. Comme expliqué précédemment, ces contraintes sont quasiment identiques aux contraintes évaluées après mise en forme, mais sans chargement. La contrainte maximale relevée vaut alors 167 MPa, ce qui est assez loin des valeurs de résistances admissibles [177 MPa – 211 MPa]. Cela montre à nouveau que les éléments ne peuvent *a priori* pas casser de manière spontanée. Il faut donc faire intervenir un opérateur pour casser les éléments les plus chargés de manière à simuler la situation accidentelle envisagée.

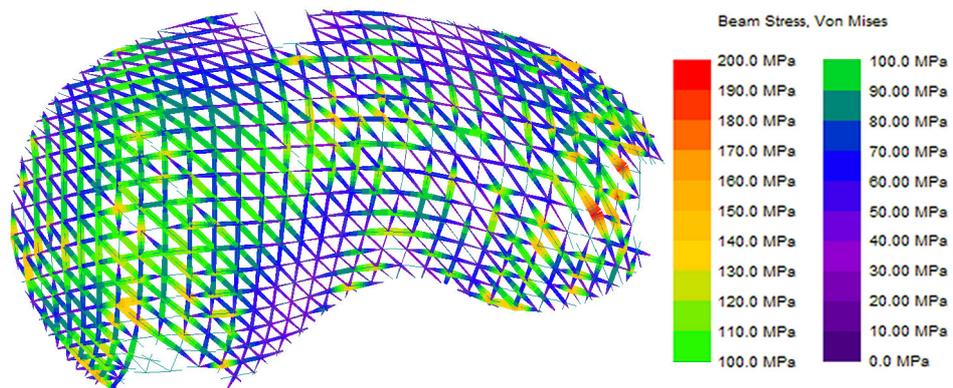


**Figure 3.9 - Contraintes dans le gridshell, sous l'ELU de vent considéré**

Les éléments en GFRP sont fragiles, et leur rupture a été étudiée au laboratoire. Les conclusions sont que lorsqu'un élément casse, il se forme une sorte de rotule capable de reprendre seulement des efforts en traction, mais de manière limitée.

Pour simplifier la simulation tout en restant conservatif, les éléments endommagés sont cassés en deux parties égales et ne participent plus au comportement mécanique du gridshell.

Un premier élément est ainsi cassé par l'opérateur. S'ensuit une nouvelle étape de relaxation dynamique pour obtenir la nouvelle forme du gridshell ainsi que les nouvelles contraintes. On ne remarque, après cette première étape, rien de critique. Puis un nouvel élément, devenu le plus chargé est cassé à son tour. Comme les changements sur la cartographie des contraintes sont très minimales, nous décidons de doubler le nombre d'éléments à casser, à chaque étape. Durant les étapes qui suivent, on observe à certains moments des concentrations de contraintes minimales. Cependant, il suffit alors de quelques étapes supplémentaires pour que les éléments les plus fortement contraints soient cassés et que les concentrations de contrainte disparaissent. Par exemple, à la fin de la 7<sup>ème</sup> étape, 64 éléments sont cassés et on observe que trois éléments sont soumis à des contraintes plus élevées que les autres (figure 3.10).

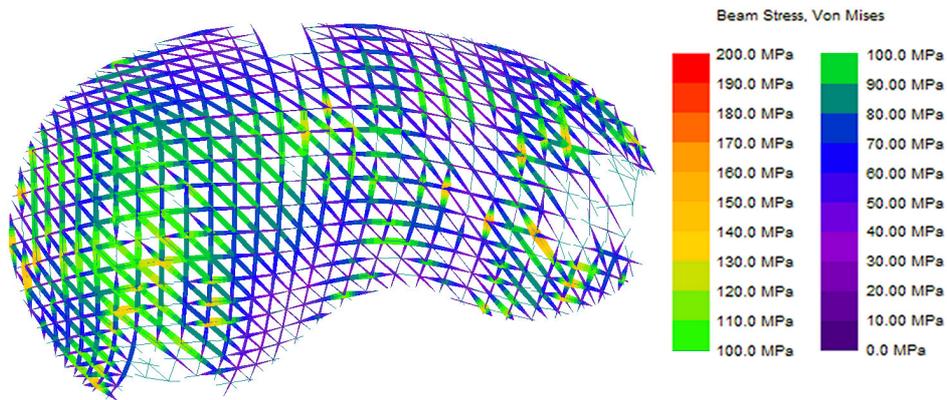


**Figure 3.10 - Contraintes dans le gridshell après 64 ruptures d'élément**

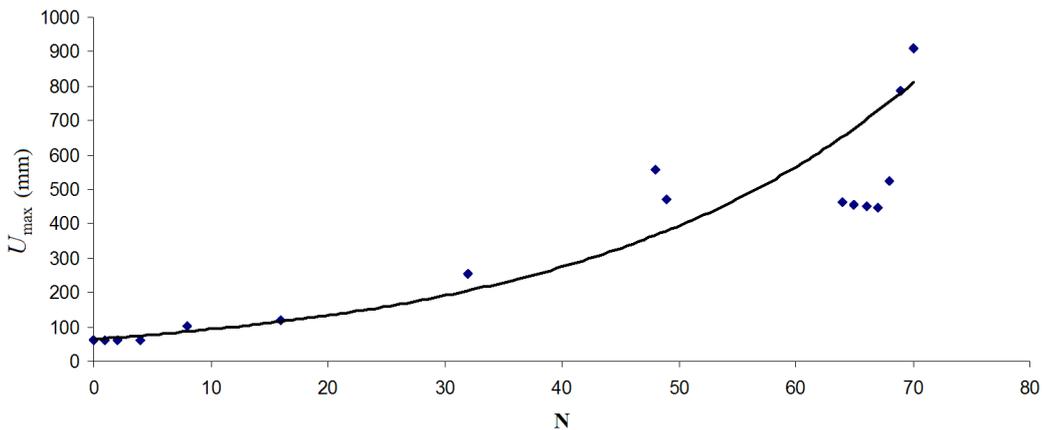
Pour comprendre ce qu'il se passe, nous avons décidé de nous remettre à casser un faible nombre d'éléments à chaque nouvelle étape, à partir de la situation présentée sur la figure 3.10.

Après quelques nouvelles itérations du processus, les éléments très chargés ont tous été cassés, et les contraintes du gridshell ont repris des valeurs acceptables.

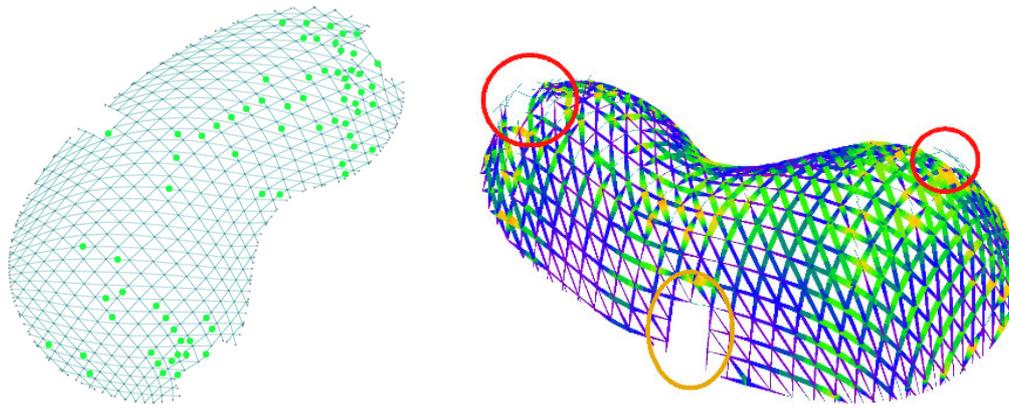
Une étude du gridshell sous poids propre montre que le gridshell conserve une certaine intégrité (figure 3.11). En revanche, des déplacements importants sont déjà observables sur la structure. En effet, sur la figure 3.12 où le déplacement maximal  $U_{max}$  a été reporté en fonction du nombre d'éléments cassés  $N$ , on constate que certains nœuds se sont déplacés d'environ 80 cm à la fin de l'expérience. Sachant que la membrane couvrant le gridshell est une membrane très peu extensible, il est très probable que des plis se forment assez rapidement, et rendent encore plus facile la détection d'un tel problème, avant évacuation de la structure.



**Figure 3.11 - Contraintes dans le gridshell après ruptures, sous poids propre**  
Après 71 ruptures, le gridshell est étudié sous chargement de poids propre. Les contraintes au sein de la structure endommagée ne sont pas critiques.



**Figure 3.12 - Déplacement maximal en fonction du nombre d'éléments cassés**  
Le déplacement maximal  $U_{max}$  (mm) est reporté en fonction du nombre d'éléments cassés,  $N$ , sous le chargement ELU considéré. On remarque que pour un faible nombre d'éléments cassés (moins de 5), le déplacement maximal est très faible et reste voisin du déplacement maximal lié au chargement ELU. Un déplacement nul correspond au gridshell non chargé. On note que le chargement de l'ELU considéré induit un déplacement maximal de 7 cm.



**Figure 3.13 - Cartographie des éléments cassés et zones de ruines**

*Les 71 éléments cassés sont reportés sur l'illustration de gauche. Sur celle de droite, on observe les zones de ruine, localisées près des portes.*

Durant la procédure où on a cassé 71 éléments (figure 3.13, gauche), on observe que la structure a fortement été endommagée au niveau de deux zones de faiblesse situées au niveau des portes (figure 3.13, droite). En effet, à ces endroits, le contour du gridshell ne repose sur aucun appui et de fait, tout se passe comme si on avait une zone trouée du gridshell, dans lesquelles il se produit des concentrations de contraintes.

Des déplacements importants sont relevés et un grand nombre d'éléments sont cassés, ce qui rend détectable l'endommagement de la structure, et permet de lancer son évacuation. Pourtant, à ce stade, la structure ne risque pas de s'effondrer et garde une raideur convenable [TAYEB13]. Une certaine robustesse de la structure est donc mise en évidence. On parle ici de pseudo-ductilité de la structure car le GFRP constituant la structure présente un comportement élastique fragile.

Ce comportement très favorable du gridshell est lié au fait que la contrainte au sein des éléments est faible, et liée principalement à l'étape de mise en forme. En effet, l'ajout du chargement (ici l'ELU de vent) ne rajoute que très peu de contraintes par rapport aux contraintes de mise en forme. Par conséquent, lorsqu'un élément casse, la surcharge à reprendre par les éléments voisins n'augmente pas significativement leur niveau de contrainte (qui était relativement faible). C'est donc grâce à la forte redondance de la structure que les redistributions de contraintes ne sont pas problématiques.

En outre, c'est également la redondance de la structure qui lui permet de subir un bon nombre d'accidents tout en conservant une bonne raideur et une bonne résistance.

Enfin, on rappelle que, durant la procédure, certains éléments ont été cassés par l'opérateur alors qu'ils étaient soumis à des contraintes inférieures à leur résistance admissible. D'autres éléments, peu nombreux, ont été cassés alors qu'ils étaient soumis à des contraintes un peu supérieures à leur contrainte admissible. La résistance moyenne réelle des éléments de poutre valant 480 MPa, on peut supposer que les ruptures « naturelles » ne se sont pas produites instantanément, ce qui laisse encore davantage de temps pour l'évacuation.

Il est utile de remarquer qu'étant donné la souplesse des éléments du gridshell, les imperfections géométriques liées au montage n'ont pas d'influence sur le comportement du gridshell. En particulier, elles n'ont pas d'influence sur sa robustesse.

Une étude similaire sur le gridshell de Créteil devrait être réalisée. Pour l'instant, nous avons simplement vérifié que le chargement ELU était suffisamment éloigné du flambement. Une des différences avec le gridshell de Solidays est qu'il a été construit avec des portes métalliques rigides sur lesquelles les éléments de la structure viennent s'articuler. Il serait intéressant de refaire cette étude de ductilité sur ce gridshell, de manière à comprendre l'influence de la disparition des zones de faiblesse du gridshell de Solidays, situées au niveau des portes (figure 3.14).



**Figure 3.14 - Vues Intérieures de la cathédrale éphémère de Créteil.**

### 3.5 Conclusions

Dans ce chapitre reprenant les travaux présentés dans [TAYEB13], il est montré que le flambement du gridshell doit être absolument évité. En effet, en situation de flambement, les courbures des poutres peuvent localement varier de manière importante. De ce fait, les contraintes au sein du matériau peuvent également être localement importantes. Il est à noter qu'une courbure qui diminue n'est pas non plus souhaitable car elle diminue également localement la rigidité, ce qui amplifie le phénomène. En plus de cela, la rupture d'un élément chargerait ses voisins, déjà fortement chargés puisque situés au niveau, ou à proximité, de la zone de flambement. Alors, au sens du guide de construction [Eurocomp96], la structure pourrait être sujette à un effondrement rapide. Il est montré ensuite que, grâce à la redondance de la structure, le gridshell présente une très bonne robustesse. Cette robustesse est établie si le gridshell est dimensionné de manière à ce qu'il soit loin de flamber, comme cela est le cas pour les gridshells construits par le laboratoire Navier, en particulier le gridshell de Solidays sur lequel porte l'étude. Il est montré par ailleurs que les zones situées au voisinage des portes se comportent comme des zones de faiblesse, et se détériorent en premier, sans toutefois remettre en question la résistance de la globalité de la structure. Finalement, du fait du comportement élastique fragile des constituants de la structure, on classe la robustesse mise en évidence dans la catégorie des structures pseudo-ductiles, au sein de la classification proposée dans [KELLER07].



# **Chapitre 4 : Modélisation de la torsion dans les poutres élancées de section quelconque. Application au form-finding des gridshells.**

## **Sommaire**

---

<b>4.1</b>	<b>Contexte, bibliographie et cadre de l'étude. ....</b>	<b>118</b>
<b>4.2</b>	<b>Modèle de poutre continu prenant en compte la torsion .....</b>	<b>130</b>
<b>4.3</b>	<b>Discrétisation et implémentation du modèle .....</b>	<b>150</b>
<b>4.4</b>	<b>Résultats et validation du modèle .....</b>	<b>163</b>
<b>4.5</b>	<b>Modélisation des connexions et implémentation dans un modèle de gridshells.....</b>	<b>167</b>
<b>4.6</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>174</b>

---

Jusqu'à présent, comme cela a été vu, les gridshells en matériaux composites réalisés par le laboratoire Navier l'ont été à partir de poutres ayant une symétrie de révolution (principalement des tubes, dans un souci d'optimisation du matériau). Il a été montré dans ce cas que le déploiement de nos gridshells n'induit que peu de torsion dans les poutres [DOUTHE07]. Plus exactement, comme nous allons le voir un peu plus tard, les poutres d'un gridshell sphérique ne sont pas soumises à un moment de torsion (annexe A.3). En outre, l'utilisation de poutres axisymétriques permet un réarrangement des poutres par rotation à l'intérieur des connecteurs, ce qui lisse les moments de torsion potentiellement importants.

Par conséquent, les moments de torsion sont non pris en compte dans les modèles numériques utilisés jusqu'alors, ce qui simplifie beaucoup la formulation.

Par ailleurs, nous avons abordé le fait que l'utilisation de poutres ne présentant pas de symétrie de révolution permet de générer de la forme via un couplage flexion / torsion. Par exemple, il est assez facile de se rendre compte en jouant avec une poutre à section rectangulaire que selon la direction avec laquelle l'on fléchit la poutre, on peut observer des déplacements hors du plan de flexion (figure 4.1), ce que l'on n'observe pas avec des poutres à section circulaire, tubulaire ou carrée. Dans ce chapitre, un nouveau modèle de poutre permettant de prendre en compte la torsion des poutres est présenté puis confronté à un logiciel éléments finis. Les multiples perspectives d'un tel modèle seront alors exposées. Du fait du grand élancement des poutres étudiées et étant donné les applications cibles, nous nous concentrerons sur l'étude de poutres élastiques.



**Figure 4.1 - Exemple de déformation de poutre à section rectangulaire**

## **4.1 Contexte, bibliographie et cadre de l'étude.**

Comme exposé précédemment, nous savons depuis longtemps que la torsion peut avoir une importance particulière pour certains gridshells. Typiquement, l'utilisation de poutres de section anisotrope (c'est-à-dire dont la section n'est ni carrée, ni axisymétrique) favorise les phénomènes de torsion au sein des poutres, avec pour effet une modification significative de la géométrie et des contraintes au sein des poutres, par rapport à la même sollicitation sur une poutre isotrope.

Dans cette étude, notre but est d'améliorer les outils numériques existants pour pouvoir prendre en compte la torsion de poutres, mieux prédire les contraintes engendrées et même utiliser la richesse offerte par les poutres anisotropes en terme de géométrie, ce qui est très peu utilisé. Les modèles de relaxation dynamique existant ne prenant pas en compte la torsion, il nous a donc paru important de créer un nouveau modèle capable de traiter ce phénomène.

Le modèle présenté et développé dans ce chapitre est un modèle de poutre de section quelconque, prenant en compte la flexion mais également les phénomènes de torsion.

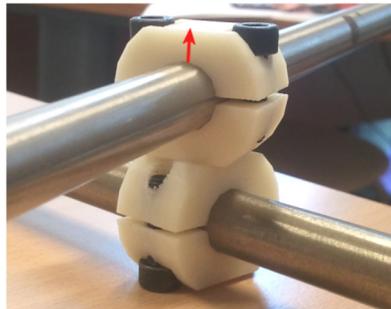
#### 4.1.1 Importance de la prise en compte de la torsion

Une étude rapide permet de justifier le fait qu'il existe de la torsion dans les poutres rectilignes au repos d'un gridshell quelconque. Dessinons une courbe quelconque, sur une surface quelconque de forme arrondie, et imaginons qu'une poutre de gridshell suit cette courbe. Nous allons voir qu'il est possible de mettre en évidence de la torsion au sein de cette poutre, en étudiant des directions qui restent attachées à la matière de la poutre – appelées directions matérielles.

Étudions une poutre dans le but d'illustrer le concept de directions matérielles. On peut choisir une direction matérielle dans l'axe de la poutre. Pour se simplifier la compréhension du problème, nous allons prendre trois directions matérielles orthogonales. Nous choisissons donc deux autres directions matérielles perpendiculaires à l'axe de la poutre et perpendiculaires entre elles. Parmi ces deux directions, on peut prendre une direction qui soit et qui reste perpendiculaire à la surface du gridshell (qui restera liée à la matière de la poutre si celle-ci ne tourne pas à l'intérieur des noix de connexion. Cette direction est représentée par les flèches rouges sur les figures 4.2 et 4.3).

Si la poutre peut tourner librement autour de son axe dans les connexions, cette direction matérielle suit le champ de vecteurs repérés en vert sur la figure 4.3.

En effet, on peut penser à juste titre qu'il n'y a aucune raison que la direction matérielle reste naturellement colinéaire à la direction imposée par la connexion. La poutre est donc contrainte à tourner autour de son axe contre son gré. Elle est donc sujette à de la torsion. Nous verrons cela plus en détail dans la suite de ce chapitre.

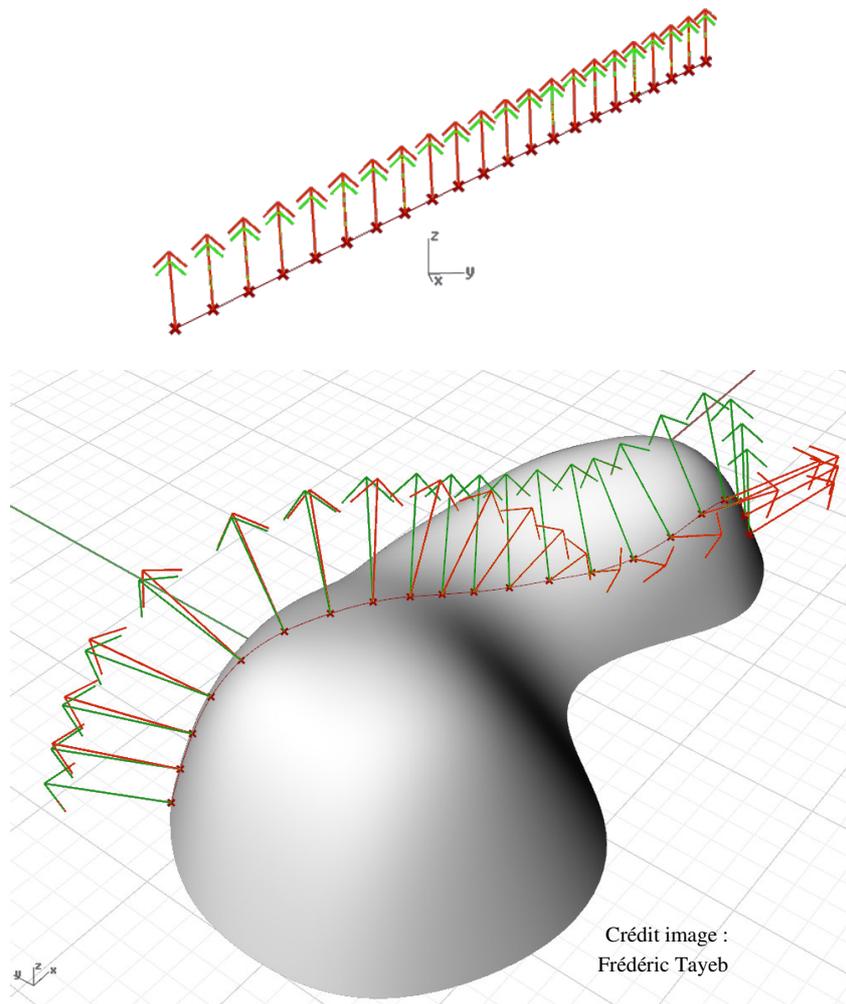


**Figure 4.2 - Connexion de gridshell bloquant la rotation de la poutre sur elle-même**

*Une direction matérielle de la poutre est contrainte à rester perpendiculaire à la surface du fait de la noix de connexion dont l'axe est perpendiculaire à la surface du gridshell. Cette direction matérielle est représentée à l'aide de la flèche rouge.*

L'existence de torsion au sein des poutres d'un gridshell a donc été mise en évidence « avec les mains ». Plus précisément, il y a de la torsion dans la poutre lorsque l'angle entre les champs de vecteurs rouges et verts varie spatialement le long de la poutre. Plus la variation de cet angle est importante, plus la torsion (évaluée localement) est importante. Ainsi, sur l'exemple de la

figure 4.3 on observe en suivant la poutre à partir d'en bas à gauche, que la torsion est tout d'abord minimale dans la poutre. Puis à partir du milieu de la poutre l'angle entre les deux champs de vecteurs se met à varier de manière importante ce qui traduit une torsion plus significative.



### Figure 4.3 - Mise en évidence de la torsion sur un gridshell quelconque

*Le champ de vecteurs dessinés en rouge représente la direction de la connexion. Si l'on considère que les poutres ne peuvent pas tourner à l'intérieur de la connexion, une direction matérielle de la section de la poutre reste toujours alignée avec l'axe de la connexion. Cette direction reste donc orthogonale à la surface (champ de vecteurs en rouge). Le champ de vecteurs dessinés en vert représente l'orientation qu'aurait la matière de la poutre si elle n'était pas sujette à de la torsion. Nous verrons plus tard comment ce champ de vecteurs est calculé. En haut, la poutre est rectiligne au repos. Elle n'est pas en torsion c'est pourquoi les deux champs de vecteurs sont confondus. En bas, on considère une poutre quelconque de gridshell et on observe que l'angle entre les deux champs de vecteurs n'est pas uniforme. Il y a donc de la torsion au sein d'une poutre quelconque de gridshell.*

Ainsi, toute poutre de gridshell est *a priori* sujette à de la torsion. Il existe cependant un cas particulier remarquable : on montre que les poutres d'un gridshell sphérique ne sont pas soumises à de la torsion. La démonstration de cette assertion est faite dans l'annexe A.3.

Comme cela a été développé au chapitre 1, seuls les efforts de flexion et les efforts axiaux sont pris en compte dans la conception des gridshells en matériaux composites présentés dans les chapitres 1 et 2 [DOUTHE06], [DOUTHE07], [BAVEREL12]. Le dernier type d'efforts, liés à la torsion, est négligé.

Ces phénomènes de torsion peuvent cependant jouer un rôle important d'un point de vue mécanique et d'un point de vue géométrique, dans certains cas, en particulier dans le cas de poutres de section anisotropes.

Ainsi, Natalia Kotelnikova et Jean-François Caron [KOTELNIKOVA12] ont comparé le comportement d'une poutre axisymétrique fléchie, avec celui d'une poutre identique, fléchie à l'identique, mais soumise également à un moment de torsion. Ils ont montré que les comportements de ces deux poutres sont sensiblement différents sous certaines conditions. En effet, le fait d'ajouter une sollicitation en torsion, bien que suffisamment faible pour ne pas modifier la géométrie de la poutre, modifie l'état de contrainte du matériau, à l'échelle microscopique. Les observations réalisées sont, d'une part, que la poutre sollicitée en torsion et flexion s'endommage bien plus rapidement que celle uniquement sollicitée en flexion, et d'autre part, que les faciès de rupture correspondants sont très différents. En effet, la poutre sollicitée uniquement en flexion présente une rupture fibreuse au niveau où la traction est la plus importante (figure 4.4), tandis que celle ayant la sollicitation supplémentaire en torsion présente une rupture assez nette se produisant plus brutalement (figure 4.5).



Crédit photo : Natalia Kotelnikova

**Figure 4.4 - Mode de rupture différée en flexion permanente**

*La rupture observée sur une poutre chargée seulement en flexion est une rupture fibreuse progressive peu localisée.*



Crédit photo : Natalia Kotelnikova

**Figure 4.5 - Faciès de rupture différée sous flexion/torsion permanente**

*Généralement, la rupture observée sur les poutres sollicitées en flexion et torsion est assez nette et se produit de manière brutale.*

L'effet de la température a également été mis en évidence. Plus la température est élevée plus l'endommagement est rapide. Ce paramètre a très probablement joué un rôle important dans les ruptures de poutre observées sur la cathédrale éphémère de Créteil, la structure ayant été soumise à des températures très importantes. En effet, durant le premier été, aucun système de ventilation ou de refroidissement n'avait été prévu. La température pouvait dépasser les 40°C à hauteur d'homme et donc probablement les 55°C sous la membrane, du fait de la stratification thermique.

Ces idées nous ont conduits à reconsidérer les ruptures de tube observées sur les poutres des gridshells de Créteil. En effet, ces ruptures semblent s'être produites sur des poutres sujettes à un certain effort de torsion. Une de ces ruptures est illustrée sur la figure 4.6. Les faciès de rupture, quant à eux, sont assez nets et rappellent les ruptures observées par Kotelnikova lorsqu'une sollicitation en torsion s'ajoute à une sollicitation en flexion (figure 4.5). Cependant, les poutres de Kotelnikova et celles des gridshells étant assez différentes (des joncs dans le cas des travaux de Kotelnikova, des tubes dans le cas des gridshells), il est impossible de conclure à la seule considération du faciès de rupture.



**Figure 4.6 - Rupture observée sur une poutre du gridshell de Créteil**

*Une rupture assez nette est apparue sur une poutre parmi les plus fléchies. Cette poutre était probablement soumise à un moment de torsion permanent. Les deux ruptures ont été observées au sein du lit de poutre inférieur (le plus fléchi).*

Nous avons donc mis en évidence l'importance de la torsion au sein des gridshells. Nous allons décrire à présent les modèles de poutres existant traitant la torsion puis nous détaillerons le modèle de poutre développé au laboratoire Navier dans le cadre de cette thèse. Nous verrons ensuite comment l'utiliser et ce qu'il nous apportera.

## 4.1.2 Bibliographie

### 4.1.2.1 Aperçu historique des modèles de poutre

Les modèles de poutre sont nombreux et il est important de bien en maîtriser les hypothèses. Une vision historique permet de comprendre la construction de ces modèles. Nous reprenons ici la chronologie proposée par Antman [ANTMAN95].

**1694-1774 : poutre plane** Entre 1694 et 1728, Jacques Bernoulli, puis Leonhard Euler et Daniel Bernoulli construisent une théorie de poutre plane, inextensible, dont les sections restent planes et orthogonales à la ligne neutre. C'est l'origine de ce que nous appelons aujourd'hui le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Entre 1728 et 1774, Euler approfondit ce travail et propose une théorie de poutre plane, extensible, tenant compte de l'effort tranchant.

**1775-1893 : poutre élancée** Entre 1843 et 1845, Saint-Venant introduit la notion de gauchissement des sections, permettant la prise en compte exacte de la torsion dans les modèles de poutre. Cela permet à Kirchhoff (1859), Clebsch (1862), Thomson et Tait (1867), et Love (1893) de construire les équations de Kirchhoff, qui décrivent l'équilibre d'une poutre inextensible aux sections orthogonales à la ligne neutre (mais éventuellement gauchies lors de la torsion).

**1894-1921 : poutre épaisse** Entre 1907 et 1909, les frères Cosserat généralisent les équations de Kirchhoff, en construisant un modèle de poutre où les sections ont une orientation quelconque. Le modèle de poutre de Timoshenko (1921) peut être vu comme un cas particulier de la théorie des frères Cosserat, et il permet de traiter les poutres épaisses avec précision, en prenant en compte l'effort tranchant.

Les poutres utilisées dans les structures légères, en particulier les gridshells, sont souvent élancées, c'est pourquoi nous retenons plus particulièrement les hypothèses suivantes liées aux poutres élancées :

- les sections restent orthogonales à la ligne neutre et peuvent se gauchir lorsqu'elles sont soumises à de la torsion.
- la poutre a une extension négligeable.

En effet, on peut observer le gauchissement de la section de certaines poutres soumises à de la torsion. Les sections se déforment alors hors de leur plan. Ce phénomène peut être à prendre en compte car le gauchissement joue sur l'inertie de la poutre en torsion.

Si l'hypothèse d'orthogonalité des sections à la ligne neutre est classique, celle d'extensibilité négligeable l'est moins, et nous l'expliquons donc maintenant, en s'appuyant sur le raisonnement d'Audoly et Pommeau [AUDOLY08]. En effet, si une poutre élancée est en extension, alors sa géométrie adopte une configuration rectiligne, et il devient inutile de

considérer les sollicitations en flexion. C'est par exemple ce qu'on observe lorsqu'on étudie un élastique tendu (figure 4.7, gauche).

Dans les autres cas, lorsque la poutre n'est pas en extension, les sollicitations en flexion et en torsion sont à prendre en compte puisque ce sont elles qui donnent à la poutre sa géométrie d'équilibre (figure 4.7, droite). Alors dans ce cas, l'élongation de la poutre est très faible et c'est pourquoi l'hypothèse d'inextensibilité peut être faite. Ainsi, l'étude présentée dans ce chapitre se concentre sur les poutres inextensibles.



**Figure 4.7 - Illustration des comportements d'une poutre élancée**

*Le comportement représenté à droite est celui auquel nous nous intéressons. Dans ce cas, la poutre est soumise à des contraintes axiales liées à l'effort normal, et d'autres contraintes axiales liées aux phénomènes de flexion. [Audoly08] montre par un raisonnement basé sur des ordres de grandeurs que si la longueur de la poutre est très grande devant la dimension caractéristique de sa section ( $L \gg d$ ), la contrainte axiale est largement dominée par la flexion (si la poutre n'est pas en extension, ce qui est le cas sur la figure de droite). Un modèle inextensible est donc suffisant ici.*

#### 4.1.2.2 Modèles numériques modernes de poutres en torsion

Nous donnons ici un aperçu des différentes approches de simulation de poutres incluant la torsion existant dans la littérature. Cette synthèse ne peut être exhaustive, mais elle rend compte des grandes tendances dans les choix de modélisation. La simulation numérique d'une poutre s'appuie sur trois choix fondamentaux :

- A. Le modèle de poutre
- B. La description cinématique
- C. La méthode de résolution

**A. Les modèles de poutre** On peut résumer pour notre étude le paragraphe précédent et citer :

**Poutre d'Euler Bernoulli** Ce modèle de poutre stipulant que les sections restent orthogonales à la ligne neutre est invoqué dans [ONG92], [Abaqus13] et [THEETEN06]. On notera alors que l'extensibilité n'est pas supposée négligeable, même si cela n'a pas vraiment de sens pour les poutres élancées.

**Poutre de Kirchhoff** Dans [BERGOU08], [BERTAILS05], [BERTAILS06], [GREGOIRE07] et [PAI02] l'hypothèse d'inextensibilité est ajoutée. Cela pousse les auteurs à recourir au modèle de poutre de Kirchhoff.

**Autres modèles** [BARNES13], à l'aide d'un modèle à 3 ddl par nœud, modélise la torsion (et la flexion) d'une poutre courbe de section quelconque, au voisinage de la configuration au repos. [CHOE99] (modèle de corps rigides reliés par des ressorts axiaux et angulaires) ne précise pas les raideurs des ressorts employés, mais un choix adéquat de ces valeurs rapproche son modèle du modèle d'Euler-Bernoulli.

**B. La description cinématique** Les choix de représentation de la poutre peuvent être classés selon le nombre de degrés de liberté (ddl) par nœud ou par élément. Ce choix est en général fortement dépendant du choix du modèle de poutre.

**3 ddl par nœud** Dans [BARNES13], le choix a été fait de représenter la poutre uniquement par la position des nœuds de sa représentation discrète. Cette représentation est trop pauvre dans le cas général puisqu'elle ne fait aucune différence entre une poutre rectiligne au repos et une poutre rectiligne en torsion. C'est celle que nous utilisons dans les études de gridshells présentées auparavant.

**3 ddl par élément + 1 condition aux limites** [BERTAILS05] et [BERTAIL06] représentent la poutre comme un assemblage d'hélices (une hélice étant une poutre ayant une courbure (2 ddl) et une torsion (1 ddl) constantes), avec une condition aux limites donnée. Partant de la condition aux limites et connaissant la courbure et la torsion de chaque élément, on peut reconstruire la poutre de proche en proche. Pai représente quant à lui la poutre comme un assemblage de segments rigides articulés [PAI02]. Cet assemblage est entièrement déterminé par la position d'un segment et la rotation (3 ddl) de chacun des autres segments. Cependant, ces modélisations semblent n'être adaptées qu'à des poutres sans interaction et ayant au moins une extrémité libre.

**4 ddl par nœud** Bergou [BERGOU08], [BERGOU07], Gregoire [GREGOIRE07] et Theeten [THEETEN06, THEETEN07] proposent un modèle à 4 ddl par nœud : 3 ddl pour représenter la position des nœuds et 1 ddl pour représenter l'angle d'orientation des sections aux nœuds. Notons que Bergou et Theeten mesurent cet angle de torsion par rapport au repère de Bishop que nous détaillerons plus tard. L'élément de poutre d'Euler-Bernoulli B33 dans le logiciel d'éléments finis Abaqus (voir [Abaqus13]) possède également 4 ddl, 3 en position et 1 en torsion. Très récemment, la cinématique de Bergou a été reprise dans le but de proposer un outil de conception de poutres tissées [NABAEI14]. Notons que ces modèles laissent possible l'extension de la poutre.

**6 ddl par nœud** Wakefield est le premier à utiliser un modèle à 6 ddl. Son modèle est un modèle discret à 6 ddl par nœud (3 ddl pour la position, 3 ddl pour l'orientation du repère matériel associé) [WAKEFIELD80]. La ligne neutre est représentée par une spline d'interpolation cubique entre ces nœuds. Ces travaux sont repris par la suite par Ong [ONG92], puis par Adriaenssens [ADRIAENSSENS00]. Ce modèle laisse libre l'extension de la poutre et inclut l'hypothèse d'orthogonalité des sections à la ligne neutre. Plus récemment, D'Amico a repris cette modélisation pour modéliser des poutres, en particulier des gridshells. Avec l'augmentation très significative de la puissance de calcul durant les dernières décennies, ce modèle devient exploitable [D'AMICO14]. Il souffrirait toutefois de problèmes de stabilité.

**6 ddl par élément** Dans [CHOE99], la poutre est représentée comme un assemblage de corps rigides reliés par des ressorts axiaux et angulaires. Chaque élément possède alors 6 ddl (3 ddl en translation et 3 ddl en rotation). Adriaenssens propose un modèle dans lequel les nœuds possèdent 3 ddl en rotation et 3 ddl en translation [ADRIAENSSENS00]. Dans [GREGOIRE07] un autre modèle à 6 ddl est également proposé : 3 ddl pour la position de chaque nœud et 3 ddl

pour l'orientation dans l'espace de la section entre deux nœuds. Notons que ce dernier modèle s'apparente à la théorie des frères Cosserat, et pour se ramener à un modèle de poutre de Kirchhoff, les auteurs choisissent d'imposer une pénalisation de l'écart de la section au plan orthogonal à la ligne neutre.

**C. La méthode de résolution** Connaissant les efforts, ou l'énergie élastique associée à une configuration de la poutre, différentes méthodes numériques peuvent être mises en œuvre pour obtenir son équilibre ou son évolution dynamique.

Les méthodes numériques employées dans les publications précédemment citées constituent un bon panel représentatif des méthodes utilisables :

- Connaissant les efforts intérieurs, [BARNES13] et [ONG92] calculent l'équilibre par relaxation dynamique.
- [BERGOU08] calcule les forces appliquées aux nœuds en dérivant l'énergie élastique et résout la dynamique par un schéma explicite en temps. L'inextensibilité est imposée après chaque pas de temps par projection selon l'algorithme de fast-projection proposé dans [GOLDENTHAL07].
- [BERTAILS05] choisit de minimiser l'énergie élastique par une méthode de descente de gradient.
- [BERTAILS06] et [THEETEN06] résolvent les équations de Lagrange par un schéma implicite en temps.
- [GREGOIRE07] calcule les forces appliquées par dérivation de l'énergie élastique et les annule en recourant à la méthode de Newton. Les hypothèses d'inextensibilité et d'orthogonalité des sections à la ligne neutre sont introduites par l'intermédiaire d'énergies de pénalisation ajoutées à l'énergie élastique.
- Connaissant les forces appliquées à chaque nœud, [CHOE99] calcule la dynamique à l'aide d'un schéma implicite en temps.
- Pai [PAI02] utilise les algorithmes explicites classiques de la robotique (voir [FEATHERSTONE08]) pour résoudre la dynamique d'un ensemble de corps rigides articulés, soumis à des forces connues.

**Explicite vs implicite** Le choix entre méthode explicite et implicite est particulièrement important. Le pas de temps pour une méthode explicite est limité pour des raisons de convergence. Ainsi les méthodes explicites nécessitent des pas de temps petits. En contrepartie, ils ne nécessitent pas d'inversion de matrice. A l'inverse, une méthode implicite nécessite l'inversion d'une matrice à chaque itération, mais le pas de temps n'est pas limité par la stabilité.

Ayant pour objectif de modéliser des assemblages complexes de poutres, liées entre elles par des connections nombreuses, il a paru judicieux de se tourner vers des méthodes explicites. En effet, ces méthodes numériques offrent un temps de calcul linéaire par rapport au nombre de nœuds, et ce quelles que soient la complexité et la redondance des structures à calculer. A *contrario*, dans ces cas de structures fortement interconnectées, l'inversion de la matrice de raideur peut devenir très coûteuse en temps de calcul. Enfin, la simplicité apparente d'un schéma numérique explicite tel que celui de la relaxation dynamique joue en sa faveur. Ces

considérations expliquent pourquoi la méthode de relaxation dynamique (explicite) nous est apparue préférable aux méthodes numériques implicites.

**Inextensibilité** Pour imposer l'inextensibilité, on distingue trois démarches :

1. Travailler avec des éléments rigides : cette méthode est intéressante pour des chaînes ouvertes de corps rigides (une poutre seule par exemple), car il existe des algorithmes en temps linéaire pour traiter la dynamique d'une chaîne ouverte (voir [FEATHERSTONE08]). Par contre, pour les chaînes fermées, comme dans le cas des gridsells, cette méthode devient coûteuse et demande l'inversion d'un système à chaque itération.
2. Utiliser une méthode de projection comme la fast-projection [GOLDENTHAL07] : cette méthode requiert l'inversion d'une matrice, et est donc exclue dans le cadre d'une dynamique traitée avec un schéma explicite comme c'est le cas pour les gridsells. En outre, l'utilisation d'une contrainte d'inextensibilité ne permet pas de remonter à l'état de contrainte axial dans les poutres, qui pourtant, peut être important lors de l'étude de chargements de vent ou de neige, par exemple.
3. Utiliser une énergie de pénalisation : cette méthode peut, selon les cas avoir pour conséquence de rigidifier le système et donc de réduire le pas de temps autorisé par le schéma explicite. C'est malgré tout la meilleure méthode pour un système complexe si les raideurs associées aux pénalisations n'ont pas besoin d'être plus importantes que les raideurs caractéristiques du système. Cette méthode ne permet pas d'imposer l'inextensibilité au sens strict mais une inextensibilité partielle. Le principal avantage est qu'en imposant une raideur de pénalisation conforme à la raideur des éléments, le modèle devient très précis, et permet en particulier de remonter aux contraintes axiales qu'il peut être important de calculer, par exemple sous chargement de vent ou de neige, de manière à pouvoir certifier que la structure et ses connexions sont bien dimensionnées et qu'il n'y a pas de risque d'endommagement.

### 4.1.3 Choix de modélisation

#### Choix d'un modèle de poutre

Le modèle de poutre retenu pour la modélisation de gridsells est un modèle de poutre de Kirchhoff. Le choix du modèle de Kirchhoff est justifié par le caractère élancé des poutres considérées.

Nous nous placerons dans le cadre des petites déformations et des grands déplacements.

#### Choix d'une description cinématique

Parmi les descriptions cinématiques proposées dans la littérature, nous portons notre préférence sur celle utilisée par Bergou [BERGOU08]. La poutre y est décrite par 4 variables : 3 variables de position pour situer la ligne neutre de la poutre dans l'espace et une variable d'angle permettant de repérer l'orientation des sections dans le plan orthogonal à la ligne neutre. Dans

le cas général, il faut 3 paramètres pour définir la section d'une poutre en un point, avec cette description cinématique nous n'en avons besoin que d'un. Les atouts d'une telle description cinématique sont :

- le nombre réduit de degrés de liberté
- la clarté des équations qui en découlent

Pour déterminer les efforts intérieurs, nous suivrons la démarche et les hypothèses proposées dans [BERGOU08]. Par contre, contrairement à [BERGOU08], nous choisissons de mener les calculs à partir d'un modèle continu et non discrétisé. Il en résulte des expressions plus synthétiques et plus exactes et une implémentation simplifiée.

Pour imposer l'inextensibilité, nous retenons la méthode de l'énergie de pénalisation, qui est la plus adaptée au choix de la relaxation dynamique et qui permet de considérer un modèle quasi-inextensible. Ainsi, le comportement de poutres réelles pourra être simulé avec une grande précision.

### **Choix d'un algorithme de résolution**

Dans le cas de structures fortement interconnectées telles que les gridshells, les méthodes explicites présentent l'intérêt d'être faciles à mettre en œuvre. Depuis le début des travaux sur les gridshells au laboratoire Navier, les méthodes explicites ont toujours été utilisées et n'ont jamais été détrônées par les autres méthodes numériques. En particulier, la méthode explicite de la relaxation dynamique est très largement utilisée dans le monde des structures légères. Son avantage principal est de pouvoir, à partir d'une configuration donnée, permettre le calcul des efforts s'exerçant sur le système, lui permettant d'évoluer jusqu'à une éventuelle configuration d'équilibre. Le pas de temps doit bien entendu être choisi suffisamment petit pour que la convergence soit assurée mais si cette condition est remplie alors le processus numérique peut se dérouler sans encombre.

### **Focus sur la relaxation dynamique**

La méthode de relaxation dynamique trouve ses origines au Royaume-Uni dans les années 60, avec les publications de Day [DAY65] et Otter [OTTER64] qui en posent les fondements. La méthode est alors appliquée à des problèmes d'élasticité linéaire. Le développement d'un élément de poutre adapté à cette méthode pour traiter les phénomènes de flexion en grands déplacements a débuté en 1992 [ONG92], puis a été repris dans les années 2000 [ADRIAENSSENS99], [DOUTHE09]. Pour l'étude présentée dans ce chapitre, les travaux de Cyril Douthe constituent le point de départ.

La méthode de relaxation dynamique se base sur le principe physique simple suivant : pour un système conservatif, l'équilibre est obtenu au minimum de l'énergie élastique, qui est un maximum de l'énergie cinétique par conservation de l'énergie totale.

L'idée est alors la suivante : partant d'une configuration quelconque, on laisse le système évoluer librement jusqu'à ce que l'énergie cinétique atteigne un maximum. En ce maximum, par conservation de l'énergie totale, le système a une configuration d'énergie élastique

minimale le long de sa trajectoire courante. Notons que ce minimum de l'énergie élastique est seulement un minimum local sur la trajectoire parcourue. Pour trouver la position d'équilibre, on itère le processus en partant de nouveau avec une vitesse nulle de la dernière position d'énergie cinétique maximale (et d'énergie élastique minimale) connue. De proche en proche, on converge alors vers la position d'énergie élastique minimale. Le minimum local ainsi obtenu est en général le minimum global pour l'énergie élastique.

Nous illustrons cette méthode sur un exemple à deux degrés de liberté en figure 4.8 : l'équilibre d'une bille dans une coupelle ellipsoïdale. Dans cet exemple, on observe que le mouvement est fictif, mais basé sur une dynamique réelle. La bille suit une trajectoire qui n'a *a priori* aucune raison de passer par le puits de potentiel. Le long de cette trajectoire, son énergie cinétique augmente jusqu'à un certain endroit puis se met à diminuer. La procédure de relaxation dynamique revient à stopper la bille dès qu'elle atteint une vitesse maximale. La bille reprend alors une nouvelle trajectoire mais part avec une énergie mécanique bien plus faible que celle initiale. Elle atteint donc au bout de quelques itérations un puits d'énergie potentiel local.



Crédit image : Baptiste Lefèvre

#### Figure 4.8 - Mouvement fictif d'une bille dans un bol ellipsoïdal

*Cette illustration permet de comprendre simplement le principe de la relaxation dynamique. Lâchons une bille en un endroit quelconque d'un bol ellipsoïdal, ici, sans vitesse initiale. La bille prend d'abord de la vitesse ; sa vitesse est remise à zéro lorsqu'elle atteint un maximum, avant d'être relâchée à l'arrêt. Cette procédure permet à la bille de se rapprocher petit à petit de la position où son énergie potentielle élastique serait minimale. En rouge, la position de départ, en vert, celle d'arrivée.*

Notons que comme il s'agit d'une dynamique fictive, le choix de la masse  $M$  et du pas de temps  $\Delta t$  est sans conséquence sur l'équilibre obtenu. En revanche, il influe sur la stabilité et la convergence de l'algorithme. En effet, plus le rapport  $\Delta t/M$  est grand, plus la dynamique est rapide, et donc la convergence aussi. Cependant, le choix d'un rapport  $\Delta t/M$  trop grand peut rendre le calcul instable. Nous verrons dans le paragraphe 4.4.2 comment choisir ce rapport de manière optimale.

## 4.2 Modèle de poutre continu prenant en compte la torsion

Dans de nombreux documents, les modèles de poutre incluant à la fois les mécanismes de flexion et de torsion, traitent le cas de la flexion en premier. Dans ce mémoire, le choix a été fait de commencer par décrire la torsion, car elle permet, à mon sens, une meilleure compréhension des phénomènes.

L'objectif de cette partie est d'explicitier les énergies potentielles élastiques mises en jeu au sein d'une poutre soumise principalement à de la flexion et à de la torsion. Nous verrons que ces énergies peuvent s'écrire, de manière minimale à l'aide de quatre paramètres qui seront explicités. Une fois les énergies obtenues, les efforts intérieurs seront déduits de ces énergies, par dérivation. Nous verrons également que dans le cas général il existe des couplages entre les phénomènes de flexion et ceux de torsion, ce qui rend le problème complexe.

Dans cette section nous verrons les phénomènes associés à la torsion d'une poutre, puis ceux associés à la flexion d'une poutre. Nous verrons en particulier les expressions des énergies potentielles élastiques associées et le découplage des efforts de flexion et de torsion. A partir des énergies élastiques nous obtiendrons les efforts intérieurs, qui régissent l'évolution de la poutre.

### 4.2.1 Torsion d'une poutre et énergie potentielle élastique associée

Le choix de poutres de Kirchhoff ayant été fait, les sections de la poutre sont orthogonales au vecteur tangent. Ainsi, il suffit d'un angle pour repérer l'orientation de la section dans ce plan orthogonal à la tangente. Il est donc nécessaire de définir une référence pour cet angle. Nous allons voir que le repère de Frenet, bien que souvent utilisé, n'est pas un très bon choix de référence, mais qu'en revanche, le repère de Bishop qui sera présenté en détail dans la section 4.2.4 paraît bien plus adapté.

#### 4.2.1.1 Choix d'une référence pour la torsion : champ de repères de Bishop

Comme expliqué ci-dessus, il suffit *a priori* d'un angle dans le plan de la section de la poutre pour repérer celle-ci. Nous allons voir qu'il existe des repères de référence plus pertinents que d'autres. Des informations précieuses à ce sujet peuvent être trouvées dans [BISHOP75] et [HANSON95].

##### 4.2.1.1.i Le repère de Frenet, un repère peu avantageux

Dans de nombreux articles, la description de la torsion passe par l'utilisation du repère de Frenet. Pourtant l'utilisation de ce repère est piègeuse et n'est pas vraiment avantageuse lorsqu'il s'agit de caractériser la torsion au sein d'une poutre. En effet, le repère de Frenet ( $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$ ) est un repère défini localement, en tout point d'une courbe régulière. Ce repère est défini de la manière suivante (relations (4.1), (4.2) et (4.3)) à partir du vecteur tangent unitaire à la courbe  $\mathbf{T}$ . On note  $\mathbf{N}$  le vecteur normal unitaire et  $\mathbf{B}$  le vecteur binormal.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N} \quad (4.1)$$

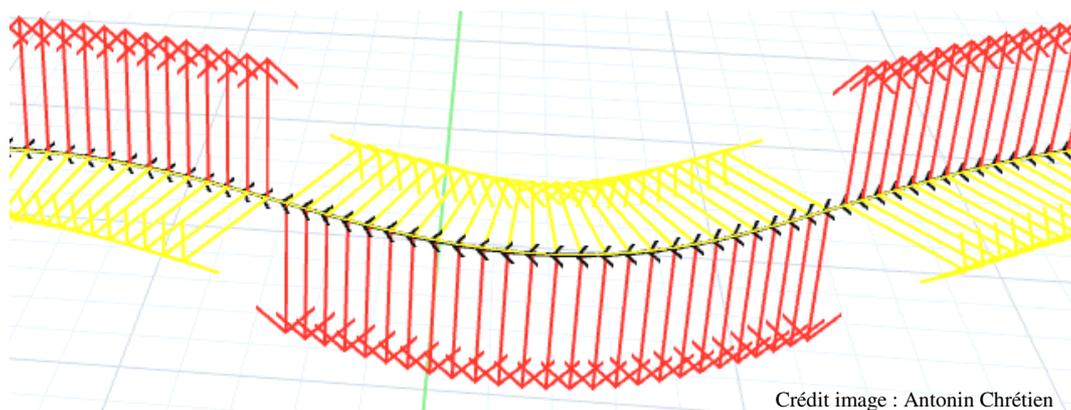
$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad (4.2)$$

On a alors :

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau_f\mathbf{B} \quad (4.3)$$

Où  $\kappa$  est la courbure et  $\tau_f$  une grandeur qu'on interprètera comme un taux de rotation géométrique. Cette grandeur est généralement appelée torsion géométrique de la courbe. Bien évidemment, elle ne prend en considération que la géométrie de la courbe étudiée. Ainsi, dans le cas de l'étude d'une poutre, la grandeur  $\tau_f$  ne prend évidemment pas en considération les contraintes (mécaniques) au sein de la matière.

En outre, le repère de Frenet n'est pas toujours bien défini. En particulier, le repère de Frenet n'est pas bien défini sur une portion rectiligne de courbe. Par ailleurs, le repère de Frenet peut présenter également des discontinuités. On remarquera en effet qu'au niveau d'un point d'inflexion (pour une courbe plane), les vecteurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{B}$  changent de sens au niveau du point d'inflexion (figure 4.9). Ces raisons font qu'il n'est pas judicieux de prendre pour référence le repère de Frenet lorsqu'on cherche à caractériser la torsion d'une poutre. Ce sont ces mêmes raisons qui ont poussé Grégoire à abandonner le champ de repères de Frenet au profit des quaternions [GREGOIRE07].



Crédit image : Antonin Chrétien

**Figure 4.9 - Discontinuité du repère de Frenet en un point d'inflexion**

*Les champs de vecteurs normaux  $\mathbf{N}$  (jaune) et binormaux  $\mathbf{B}$  (rouge) subissent une inversion au passage d'un point d'inflexion.*

A *contrario*, il existe un autre champ de repères qui peut avantageusement servir de référence pour la torsion. Ce champ de repères est appelé champ de repères de Bishop. Il est défini dans le paragraphe suivant.

#### 4.2.1.1.ii Le repère de Bishop, un repère de référence pour la rotation des sections autour de la ligne moyenne

Comme cela a été vu, le repère de Frenet n'est pas adéquat en tant que référence pour la rotation des sections. Nous allons montrer, en accord avec [AUDOLY08] que le repère de Bishop présente des caractéristiques intéressantes en vue de cette utilisation.

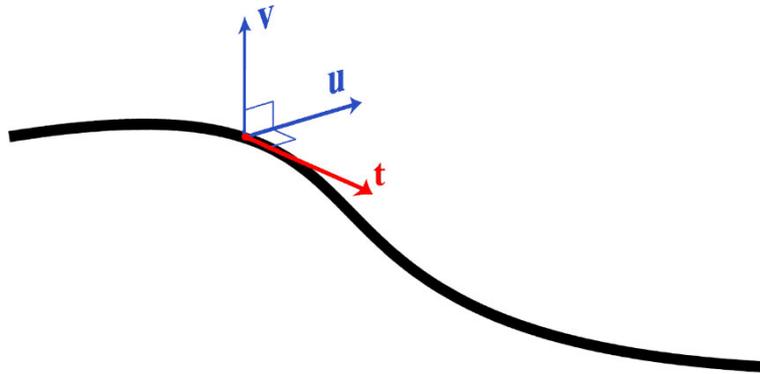
Soit un champ de repères orthonormés directs  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  attachés à une courbe tel que  $\mathbf{t}$  soit tangent à la courbe. On donnera aux champs de repères respectant cette condition le nom de champ de repères tangents (illustration figure 4.10). On a alors du fait du caractère normé :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

On a de plus du fait du caractère orthogonal :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} &= -\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \\ \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t} &= -\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}' \\ \mathbf{t}' \cdot \mathbf{u} &= -\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (4.5)$$

La notation ' fait ici référence à la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ . Cette notation sera conservée tout au long du chapitre.



**Figure 4.10 - Repère tangent orthonormé  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$**

*Pour un tel repère, il faut que le repère soit orthonormé et que le vecteur  $\mathbf{t}$  soit tangent à la courbe.*

La rotation rigide de ce repère orthonormé le long de la courbe peut donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \mathbf{t}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_3 & -k_2 \\ -k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

avec  $k_1$  et  $k_2$  reliés par la relation qui impose que le vecteur tangent reste tangent à la ligne moyenne :  $\mathbf{t}' = k_2 \mathbf{u} - k_1 \mathbf{v}$  ; et  $k_3$  se déduisant du champ de repères considéré.

Soit  $\Omega$  le vecteur de Darboux :

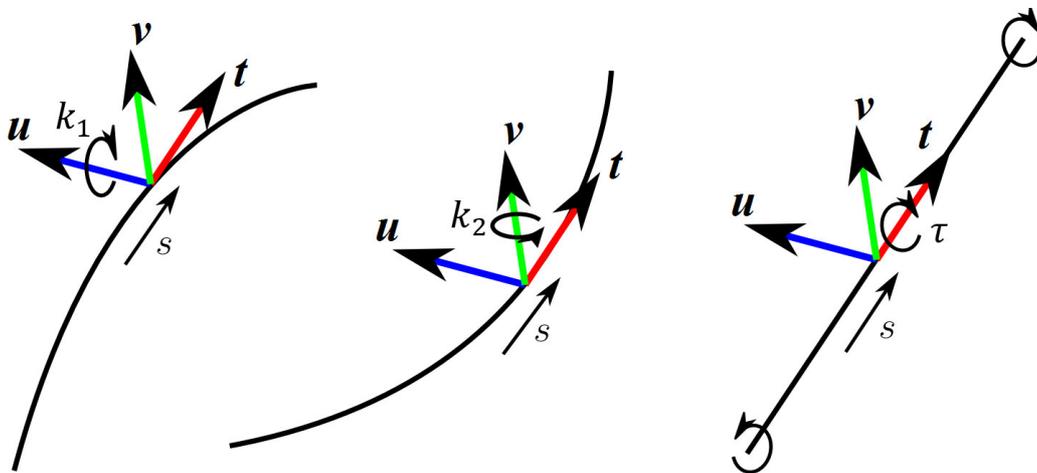
$$\Omega = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} + k_3 \mathbf{t} = \Omega^\perp + k_3 \mathbf{t} \quad (4.7)$$

On peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \mathbf{t}' \end{bmatrix} = [\Omega] \times \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Cette relation (4.8) peut s'expliquer de la manière suivante : le repère  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  subit une rotation de vecteur  $\Omega$  lorsque la courbe est parcourue à une vitesse unitaire.  $\Omega^\perp$  est le vecteur courbure binormale, ayant pour amplitude la valeur de la courbure, et pour direction celle du vecteur binormal.  $k_3$ , quant à lui, correspond à la partie tangentielle du vecteur de Darboux. Il exprime le taux de rotation du champ de repères autour de la tangente à la courbe. Dans la suite, on notera  $\tau$  ce taux de rotation autour de la tangente. On remarquera également que  $\tau = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}$ . Bien entendu, la valeur de  $\tau$ , comme les autres grandeurs, dépend de l'endroit où l'on regarde sur la courbe. On considèrera donc  $\tau(s)$ , où  $s$  est l'abscisse curviligne.

On peut alors remarquer que  $k_1$  et  $k_2$  jouent des rôles similaires à  $\tau$ . Ils rendent compte de la rotation du champ de repères autour de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  respectivement, comme illustré sur la figure 4.11. Nous verrons que ces grandeurs s'identifient aux courbures de la courbe.



**Figure 4.11 - Rotations possibles pour le champ de repères tangent**

*De gauche à droite, les rotations du champ de repères  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  respectivement autour des vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{t}$ .*

Ainsi, pour une courbe donnée, il existe une infinité de champs de repères tangents  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$ . La valeur de  $\tau(s)$  associée à l'un de ces champs de repères est univoquement associée au champ de repères. Il existe en particulier au moins un champ de repère  $(\mathbf{u}_B, \mathbf{v}_B, \mathbf{t})$  tel que  $\Omega_t = 0$ . Nous verrons qu'il en existe en fait une infinité, définis à une rotation près autour de la courbe.

On note, parmi l'ensemble des champs de vecteurs de Darboux,  $\boldsymbol{\Omega}_B = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}^\perp$ , le vecteur de Bishop associé au champ de repères tangents  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$ . Alors, en prenant par exemple le repère  $(\mathbf{u}_{B,0}, \mathbf{v}_{B,0}, \mathbf{t}_0) \equiv (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{t}_0)$  défini à la première extrémité de la courbe ( $s = 0$ ), on peut définir un champ de repères tangent ayant un taux de rotation nul autour de la ligne neutre, par l'intermédiaire de la relation (4.9) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B' \\ \mathbf{v}_B' \\ \mathbf{t}' \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Omega}_B] \times \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{v}_B \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Ainsi, un champ de repères tangents ayant un taux de rotation nul autour de la courbe a été obtenu. En outre, ce champ de repères présente l'avantage d'être continu et défini en tout point d'une courbe continue.

Comme nous venons de le voir, on peut définir les champs de vecteurs de proche en proche le long d'une courbe. Le choix du repère tangent à l'abscisse  $s = 0$  pouvant être quelconque, on peut associer une infinité de champs de repères de Bishop à une courbe.

On remarque de plus que pour toute abscisse  $s$ , on a :

$$\mathbf{u}_B' // \mathbf{t} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_B' // \mathbf{t}$$

C'est la raison pour laquelle on dit que les vecteurs  $\mathbf{u}_B$  et  $\mathbf{v}_B$  sont transportés parallèlement le long de la courbe : leurs champs de vecteurs ne présentent pas de rotation autour de la tangente à la courbe.

Considérons à présent la poutre rectiligne au repos présentée sur la figure 4.12. Considérons un champ de repères attaché à la matière tel que  $\tau$  soit nul dans la configuration au repos. Ajoutons maintenant de la torsion uniforme dans cette poutre et considérons le même champ de repères attaché à la matière. Ce champ de repère a alors tourné avec la matière, comme illustré sur la figure 4.12, droite, et on observe alors que  $\tau$  est devenu constant et non nul. La notion de torsion d'une poutre devient alors palpable ; l'intérêt du champ de repères de Bishop commence à apparaître.



Crédit image : Frédéric Tayeb

Figure 4.12 - Rotation d'un champ de repères attaché à la matière

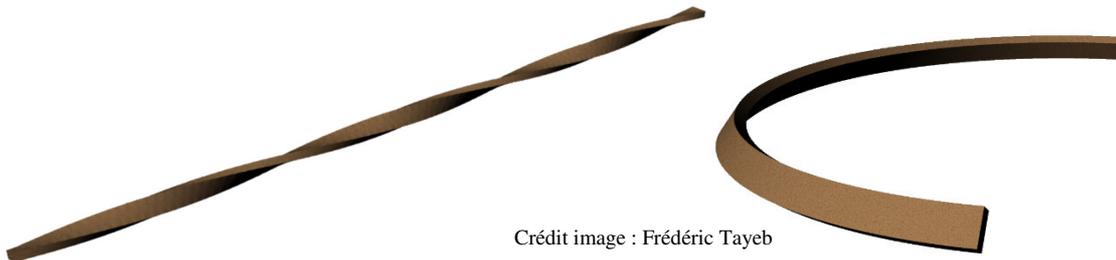
### 4.2.1.2 Torsion au sein d'une poutre.

Le taux de rotation  $\tau$  d'un repère autour d'une courbe géométrique ayant été défini grâce à l'introduction du champ de repère de Bishop, on peut commencer à comprendre avec les mains le phénomène de torsion.

Lorsque l'on parle de torsion d'une poutre, il faut comprendre que l'on ne parle plus seulement de la ligne géométrique que suit la poutre, mais que la matière est au centre du problème. Lorsqu'une poutre est en torsion, il y a nécessairement des contraintes associées, au niveau de la matière.

Une des manières de mesurer la torsion au sein d'une poutre est de comparer le taux de rotation d'un champ de vecteurs attaché à la matière, évalué dans la configuration actuelle,  $\tau$ , avec celui évalué dans la configuration au repos,  $\bar{\tau}$ . En effet, dans la configuration au repos, l'état de contrainte de la matière est nul. La torsion est en fait liée au différentiel d'état de contrainte entre la poutre au repos et la poutre dans sa configuration actuelle.

Nous verrons que nous utiliserons également cette façon de procéder pour la flexion. En effet, il sera assez pratique de comparer la courbure d'une poutre avec la courbure de la même poutre lorsqu'elle est au repos. On notera que cette façon de raisonner très générale permet de considérer des poutres ayant des configurations au repos assez exotiques par exemple celles représentées sur la figure 4.13.



Crédit image : Frédéric Tayeb

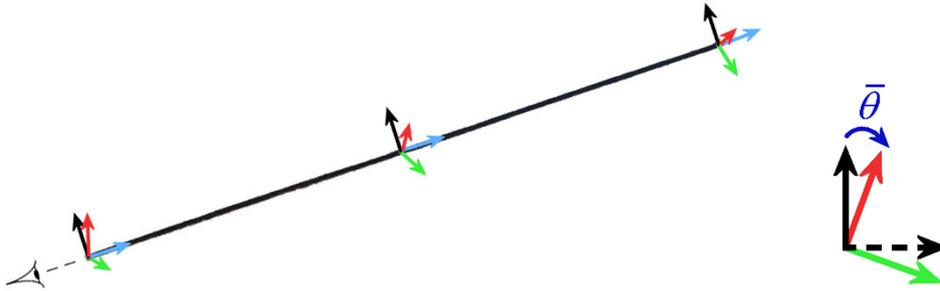
**Figure 4.13 - Configuration au repos de poutres "exotiques"**

Il est important pour le lecteur de comprendre que dans ce mémoire, la notion de « configuration au repos » fait référence à une configuration pour laquelle, il n'y a pas de contrainte macroscopique au sein de la poutre.

Nous insistons sur le fait que champ de repères attaché à la matière peut être quelconque. L'important est que ce soit le même champ de repères qui soit considéré dans la configuration au repos et dans la configuration actuelle. En particulier, dans le cas d'une poutre anisotrope, on peut choisir le champ de repères principaux de la poutre puisqu'il est bien attaché à la matière. Nous verrons que ce choix simplifie l'écriture du problème.

Ainsi, dans la configuration au repos, nous avons défini le taux de rotation  $\bar{\tau}(s)$  du champ de repères attaché à la matière. On remarque que, comme le champ de repères de Bishop présente un taux de rotation nul, la valeur de  $\bar{\tau}(s)$  s'identifie à la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne de l'angle  $\bar{\theta}(s)$  formé entre le vecteur de Bishop et le vecteur attaché à la matière.

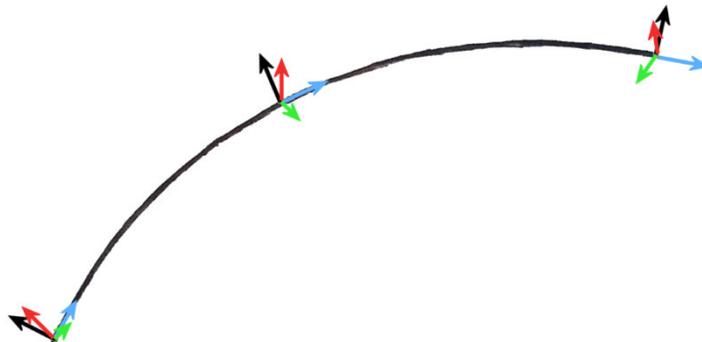
Cet angle et ce vecteur de référence nous seront très utiles lorsqu'il s'agira de discrétiser le modèle. Ils sont illustrés sur la figure 4.14.



**Figure 4.14 - Mesure du taux de rotation dans la configuration au repos**

Le champ de repères de Bishop (repéré par le champ de vecteurs en noir) a un taux de rotation nul autour de la tangente. Un champ de repères quelconque attaché à la matière de la poutre (repéré par les vecteurs rouges et verts) fait un angle  $\bar{\theta}$  avec le champ de repère de Bishop. Le taux de rotation du champ de repères attaché à la matière est égal à la dérivée de l'angle  $\bar{\theta}$  par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ .

De même, dans la configuration actuelle (figure 4.15), on peut définir un taux de rotation  $\tau(s)$ , à partir du même champ de repère attaché à la matière. La torsion au sein de la poutre est liée à la différence entre le taux de rotation autour de la ligne neutre, évalué dans la configuration actuelle et celui évalué dans la configuration au repos.



**Figure 4.15 - Mesure du taux de rotation dans la configuration actuelle**

Un nouveau taux de rotation du même champ de repère attaché à la matière est calculé par l'intermédiaire du nouvel angle  $\theta$ , dans la configuration actuelle.

On a défini le taux de rotation de la matière, ou angle unitaire de torsion au sein de la poutre. Il se peut se calculer à partir de la relation (4.10) :

$$\tau - \bar{\tau} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\bar{\theta}}{ds} \quad (4.10)$$

On remarquera l'utilisation de la même variation  $ds$  de l'abscisse curviligne dans la configuration au repos et dans la configuration actuelle, ce qui est conforme à l'hypothèse d'inextensibilité précédemment développée.

La notion de torsion au sein de la poutre étant définie, il faut maintenant obtenir l'énergie élastique correspondante, en vue de l'obtention des efforts intérieurs.

#### 4.2.1.3 Calcul de l'énergie potentielle élastique de torsion

On remarque en regardant l'expression du vecteur de Darboux qu'il n'y a qu'une seule composante qui fait tourner le champ de vecteurs  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  autour de la tangente. C'est la rotation selon le vecteur tangent, notée  $\Omega_t \mathbf{t}$ .

Conduisons à présent l'étude de la torsion de la poutre dans le champ de repères le plus naturel, c'est-à-dire le champ de repères principal des sections. Dans ce champ de repères, on note respectivement  $\kappa_1, \kappa_2$  et  $\tau$  les valeurs particulières des grandeurs  $k_1, k_2$  et  $k_3$ .

Etudions le cas d'une poutre rectiligne au repos sur laquelle est attaché un repère dont le taux de rotation  $\bar{\tau}$  est nul. Ajoutons à cette poutre une torsion uniforme (figure 4.16). Si l'on considère le repère précédemment attaché à la matière, on a maintenant :

$$\kappa_1(s) = 0, \quad \kappa_2(s) = 0, \quad \tau(s) = \tau$$

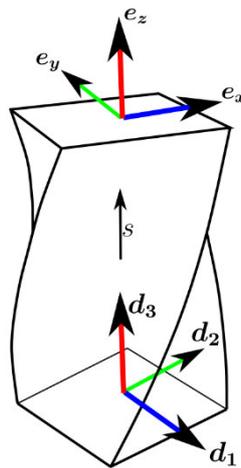


Figure 4.16 - Poutre en torsion pure uniforme

Cherchons à présent, comme proposé dans [AUDOLY08] les champs de déformation et de contrainte au sein de cette poutre, de manière à pouvoir finalement écrire l'énergie élastique associée à la torsion.

Par des arguments d'invariance, on peut réduire l'étude à une seule section de la poutre. Nous choisirons donc une section pour laquelle on définira le repère  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  confondu au repère  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$  dans la configuration au repos.

Comme cela a été vu précédemment, les sections, en se déformant sous torsion uniforme peuvent se gauchir (les sections ne sont plus des plans de symétrie). La déformée de la section choisie s'écrit donc de la forme :

$$\mathbf{r}(x, y, 0) = \mathbf{r}(0,0,0) + (x + X(x, y))\mathbf{e}_x + (y + Y(x, y))\mathbf{e}_y + Z(x, y)\mathbf{e}_z$$

où  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les composantes du déplacement que l'on cherche à déterminer.

Introduisons alors la variable  $\theta$  telle que  $\theta = \tau z$ . Comme la section en  $z$  a tourné d'un angle  $\theta$ , en faisant intervenir le repère polaire  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ , on a :

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}(0,0, z) + (x + X)\mathbf{e}_r + (y + Y)\mathbf{e}_\theta + Z\mathbf{e}_z$$

Or on a :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{d}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{33}^0} \mathbf{e}_z$$

En intégrant cette équation on peut écrire la déformée de la façon suivante :

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}(0,0,0) + z * \sqrt{1 + 2\varepsilon_{33}^0} \mathbf{e}_z + (x + X)\mathbf{e}_r + (y + Y)\mathbf{e}_\theta + Z\mathbf{e}_z$$

En remarquant que les configurations de deux poutres pour lesquelles les valeurs de  $\tau$  sont opposées sont symétriques, on en déduit que les composantes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xy}$  et  $\varepsilon_{yy}$  du tenseur des déformations sont des fonctions paires de la variable  $\tau$ . Sous l'hypothèse des petites déformations et sachant que les poutres que l'on considère sont des poutres élancées, on peut écrire ces composantes au premier ordre en  $\tau d$ , où  $d$  est la dimension caractéristique de la section. Au premier ordre, ces composantes sont alors nulles, du fait de leur parité :

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = 0, \quad \varepsilon_{xy}(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{yy}(x, y) = 0.$$

cela donne également:

$$X_x(x, y) = 0, \quad X_y(x, y) = 0, \quad \text{et} \quad Y_y(x, y) = 0.$$

Or, par choix de la référence des  $x$  et des  $y$ , on a  $X(0,0) = 0$  et  $Y(0,0) = 0$ , ce qui permet de déduire la nullité des fonctions  $X$  et  $Y$  sur toute la section :

$$X(x, y) = Y(x, y) = 0$$

On a de plus  $\varepsilon_{33}^0 = 0$ . La déformée s'écrit donc finalement :

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}(0,0,0) + x\mathbf{e}_r + y\mathbf{e}_\theta + (z + Z)\mathbf{e}_z$$

Nous pouvons à présent exprimer les autres composantes de la déformation de la section, en remarquant que :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y = \cos(\tau z) \mathbf{e}_x + \sin(\tau z) \mathbf{e}_y \simeq \mathbf{e}_x + \tau z \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y = -\sin(\tau z) \mathbf{e}_x + \cos(\tau z) \mathbf{e}_y \simeq -\tau z \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, y, z) &= \mathbf{r}(0,0,0) + x \mathbf{e}_r + y \mathbf{e}_\theta + (z + Z) \mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{r}(0,0,0) + x \cos(\tau z) \mathbf{e}_x + x \sin(\tau z) \mathbf{e}_y - y \sin(\tau z) \mathbf{e}_x + y \cos(\tau z) \mathbf{e}_y + (z + Z) \mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{r}(0,0,0) + [x \cos(\tau z) - y \sin(\tau z)] \mathbf{e}_x + [x \sin(\tau z) + y \cos(\tau z)] \mathbf{e}_y + (z + Z) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

On évalue donc les composantes de déformation dans le plan  $z = 0$  et on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(Z_{,x} - y\tau) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(Z_{,y} + x\tau)\end{aligned}$$

Les autres composantes du tenseur de déformation étant nulles.

Il n'y a donc que du cisaillement dans la poutre en torsion pure uniforme. Les équations de comportement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= 2 G \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} &= 2 G \varepsilon_{yz}\end{aligned}$$

où  $G$  est le module de cisaillement du matériau :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.11)$$

L'équilibre impose que  $\text{div}(\sigma) = 0$  ce qui équivaut à écrire  $\text{div}(\varepsilon) = 0$

Le comportement permet alors d'écrire :

$$\varepsilon_{xz,x} + \varepsilon_{yz,y} = 0 \quad (4.12)$$

D'après le lemme de Poincaré, cette équation permet de justifier l'existence d'un potentiel  $\chi(x, y)$  tel que :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xz}(x, y) &= \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} \\ \varepsilon_{yz}(x, y) &= -\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x}\end{aligned}$$

En faisant apparaître  $\tilde{\chi}$  tel que :

$$\tilde{\chi} = \frac{\chi}{\tau}$$

on se ramène à l'équation de Poisson suivante :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\chi} = -1 & \text{sur le domaine} \\ \tilde{\chi} = 0 & \text{sur les bords} \end{cases}$$

La solution de cette équation de Poisson ne dépend donc que de la géométrie de la section. Dans le cas d'une section circulaire, il existe une expression analytique pour  $\tilde{\chi}$  :

$$\tilde{\chi} = \frac{h^2 - (x^2 + y^2)}{4}$$

Ce qui permet de calculer immédiatement  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{yz}$ .

Dans le cas d'une section elliptique ou rectangulaire, la résolution de l'équation de Poisson est présentée dans l'annexe A.1.

Dans le cas général, l'énergie de torsion s'écrit :

$$E_t = \frac{L}{2} \iint (2 \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + 2 \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dx dy \quad (4.13)$$

$$E_t = \frac{L}{2} \iint 4G (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) dx dy = 2 LG \iint (\tilde{\chi}_{,x}^2 + \tilde{\chi}_{,y}^2) dx dy \quad (4.14)$$

Avec  $J = \iint (\tilde{\chi}_{,x}^2 + \tilde{\chi}_{,y}^2) dx dy$  la constante de torsion. Cette constante ne dépend que de la géométrie de la section, [FREY05].

On obtient alors l'expression de l'énergie élastique élémentaire de torsion, donnée par la relation (4.15) :

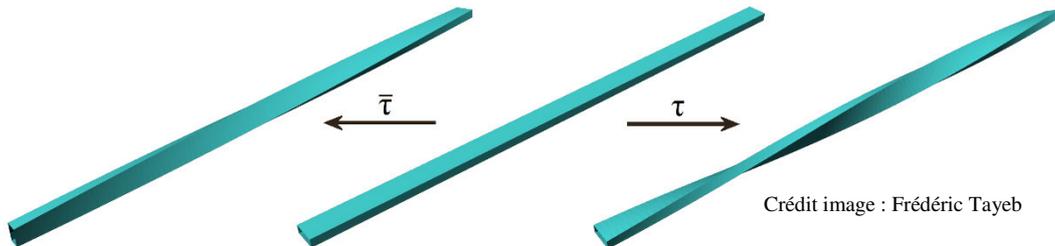
$$d E_t = \frac{1}{2} GJ \tau^2 ds \quad (4.15)$$

#### 4.2.1.4 Généralisation et cas particulier du champ de repères principaux

Cette démarche est généralisable à tout type de poutre élancée. En effet, si la configuration de la poutre au repos est quelconque, il est possible de considérer une configuration de référence pour la poutre qui soit rectiligne et ayant un champ de repère attaché dont le taux de rotation autour de la ligne moyenne soit nul. Cette manière de procéder est illustrée sur la figure 4.17.

A nouveau, on peut, pour se faciliter la représentation du taux de rotation  $\tau$ , choisir le champ des repères principaux des sections comme champ de repères attaché à la matière. Cela ne pose pas de problème car, sous les hypothèses que l'on a faites, les sections restent orthogonales à la tangente et ne se déforment pas. Il devient alors relativement facile de se représenter les taux de rotation de ce champ de repères dans la configuration au repos et dans la configuration actuelle.

On définit alors le taux de rotation  $\tau(s)$  de ce champ des repères principaux, dans la configuration actuelle. On définit également le taux de rotation  $\bar{\tau}(s)$  du même champ de repères principaux, évalué dans la configuration au repos. Le taux de torsion de la poutre vaut alors  $\tau(s) - \bar{\tau}(s)$ . Cela revient à considérer comme configuration de référence la configuration illustrée sur la figure 4.17, au centre. La configuration au repos est représentée à gauche, elle est *a priori* quelconque. Quant à la configuration actuelle, elle est représentée à droite.



**Figure 4.17 - Généralisation du calcul du taux de torsion**

*A partir de la configuration de référence (au centre), on évalue le taux de rotation  $\tau$  du champ de repères principaux, dans la configuration actuelle (droite) ainsi que celui dans la configuration au repos ( $\bar{\tau}$ , gauche). Le taux de torsion vaut alors  $\tau(s) - \bar{\tau}(s)$ . Il permet de remonter à l'énergie de torsion, par intégration le long de la poutre.*

Cette démarche permet de calculer l'énergie de torsion pour une poutre quelconque dont on connaît la configuration au repos et la configuration actuelle. Elle permet également, comme cela sera vu au paragraphe 4.2.4, de calculer les efforts intérieurs associés.

Nous avons donc finalement :

$$d E_t = \frac{1}{2} GJ (\tau - \bar{\tau})^2 ds \quad (4.16)$$

## 4.2.2 Flexion et énergie potentielle élastique associée

Le cas de la flexion est assez similaire à celui de la torsion. On remarque en observant l'écriture du vecteur de Darboux qu'il y a deux composantes qui modifient la direction du vecteur tangent. Ces deux composantes sont portées par  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . Dans le cas général, il est possible d'associer deux courbures non nulles à ces deux composantes.

### 4.2.2.1 Calcul de l'énergie potentielle élastique de flexion

Etudions le cas d'une poutre rectiligne au repos sur laquelle est attaché un champ de repères  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ . Cette poutre est fléchie de manière uniforme (figure 4.18) de manière à ce que le champ de repères principal de la poutre vérifie :

$$\kappa_1(s) = 0, \quad \kappa_2(s) = \frac{1}{R}, \quad \tau(s) = 0$$

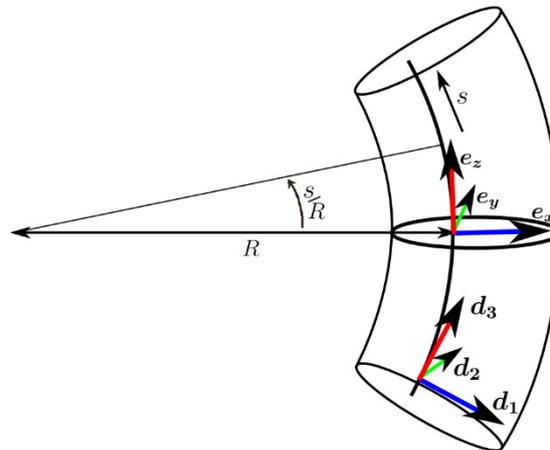


Figure 4.18 - Cas d'une poutre en flexion uniforme

Nous allons à nouveau, comme proposé dans [AUDOLY08], évaluer les champs de déformation et de contrainte de manière à pouvoir finalement calculer l'énergie élastique associée aux phénomènes de flexion.

Par des arguments d'invariance, on peut se concentrer sur l'étude d'une seule section, de la poutre, repérée par les vecteurs  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  (illustré sur la figure 4.18). La ligne neutre, choisie arbitrairement pour l'instant, est la ligne ayant une élongation nulle. L'hypothèse d'inextensibilité justifie l'existence de cette ligne, au niveau de laquelle on s'attend à une déformation axiale  $\varepsilon_{33}^0$  nulle. Cette ligne sera repérée par les coordonnées  $x_0, y_0$ . Dans un

premier temps, nous conserverons cette déformation dans les expressions littérales afin de définir cette ligne neutre.

Par raison de symétrie, la section d'équation  $z = 0$  reste dans son plan. La configuration déformée s'écrit alors :

$$\mathbf{r}(x, y, 0) = \mathbf{r}(x_0, y_0, 0) + (x - x_0 + X)\mathbf{e}_x + (y - y_0 + Y)\mathbf{e}_y$$

où  $X$  et  $Y$  sont des fonctions à déterminer.

Comme chaque section se déforme de manière identique dans son plan par raison d'invariance, on a :

$$\mathbf{r}(x, y, s) = \mathbf{r}(x_0, y_0, s) + (x - x_0 + X) \left( \cos \frac{s}{R} \mathbf{e}_x + \sin \frac{s}{R} \mathbf{e}_y \right) + (y - y_0 + Y)\mathbf{e}_y$$

Or on a :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(x_0, y_0, s) = \mathbf{d}_3 = \sqrt{1 + 2 \varepsilon_{33}^0} \left( -\sin \frac{s}{R} \mathbf{e}_x + \cos \frac{s}{R} \mathbf{e}_z \right)$$

En substituant cette équation dans l'expression de  $\mathbf{r}(x, y, s)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, y, s) = \mathbf{r}(x_0, y_0, 0) + R \sqrt{1 + 2 \varepsilon_{33}^0} \left[ \left( \cos \frac{s}{R} - 1 \right) \mathbf{e}_x + \sin \frac{s}{R} \mathbf{e}_z \right] \\ + (x - x_0 + X) \left( \cos \frac{s}{R} \mathbf{e}_x + \sin \frac{s}{R} \mathbf{e}_z \right) + (y - y_0 + Y) \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Le champ de déplacement s'écrit donc, au premier ordre en  $\frac{s}{R}$  et en  $\varepsilon_{33}^0$ , sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = X(x, y) \\ v(x, y, z) = Y(x, y) \\ w(x, y, z) = z \left( \frac{x - x_0}{R} + \varepsilon_{33}^0 \right) \end{array} \right.$$

D'où le champ de déformation :

$$\varepsilon = \frac{\partial X}{\partial x} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{\partial Y}{\partial y} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) + \left( \frac{x}{R} + \varepsilon_{33}^0 \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$$

Ecrivons à présent le champ de contrainte. Les surfaces libres des bords de la poutre impliquent que  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  tendent vers zéro. En revanche, si l'on se place dans la zone élastique du matériau, et que son module d'Young est noté  $E$ , on peut définir le champ de contrainte au sein du matériau :

$$\sigma = E \left( \frac{x}{R} + \varepsilon_{33}^0 \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$$

L'énergie potentielle élastique de flexion s'écrit donc :

$$E_f = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} (\sigma : \varepsilon) dV = \frac{EL}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{x}{R} + \varepsilon_{33}^0 \right)^2 dS$$

Notons que la valeur de  $\varepsilon_{33}^0$  doit minimiser l'énergie élastique de flexion. La condition au premier ordre donne :

$$\frac{\partial E_f}{\partial \varepsilon_{33}^0} = 0 \Leftrightarrow \langle x \rangle = -R\varepsilon_{33}^0$$

Or par hypothèse d'inextensibilité,  $\varepsilon_{33}^0$  est nulle ce qui conduit à :

$$\langle x \rangle = 0$$

Un raisonnement symétrique conduit à  $\langle y \rangle = 0$ . La ligne neutre passe donc par le centre de gravité de la section de la poutre.

On a donc :

$$E_f = \frac{EL}{2R^2} \iint_{\mathcal{D}} x^2 dS$$

Vu autrement, cette énergie doit être minimale ce qui implique que la valeur moyenne de  $x^2$  doit être minimale sur la section. Cette condition revient à minimiser le moment quadratique  $I_2$ .

$$I_2 = \iint_{\mathcal{D}} x^2 dS$$

La ligne neutre passe donc par l'axe autour duquel l'inertie est la plus faible. Dit autrement, la rotation de la section se fait autour de la ligne pour laquelle le moment quadratique d'inertie est le plus faible.

Finalement, en remarquant que la courbure s'identifie à l'inverse du rayon  $\kappa_2(s) = 1/R$  l'énergie potentielle élastique de flexion s'écrit :

$$E_f = \frac{EL}{2} \iint_{\mathcal{D}} (\kappa_2 x)^2 dx dy \quad (4.17)$$

#### 4.2.2.2 Généralisation de l'énergie de flexion

Supposons maintenant le cas quelconque où aucune des deux courbures n'est nulle. L'énergie élastique potentielle de flexion s'écrit alors :

$$E_f = \frac{EL}{2} \iint_{\mathcal{D}} (\kappa_2 x - \kappa_1 y)^2 dx dy \quad (4.18)$$

En choisissant judicieusement les directions  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$ , c'est-à-dire en se plaçant dans le repère principal de la section (il en existe toujours au moins un), le terme croisé s'annule. On a ainsi :

$$\iint_{\mathcal{D}} xy dx dy = 0$$

Ainsi, il apparaît qu’il existe au moins un champ de repère privilégié qui est le champ des repères principaux des sections. On peut alors écrire dans ce champ de repères, l’énergie de flexion comme la somme de deux termes indépendants, faisant intervenir les courbures dans les deux directions principales de la section. L’énergie élastique élémentaire s’écrit alors de la façon suivante :

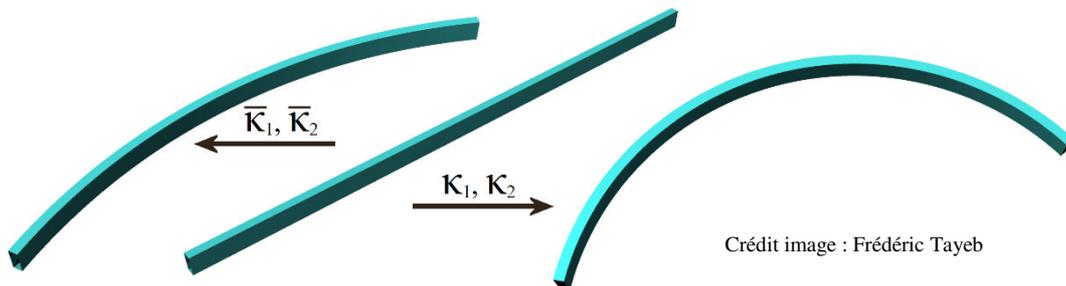
$$d E_f = \frac{1}{2} (EI_1 \kappa_1^2 + EI_2 \kappa_2^2) ds \quad (4.19)$$

avec  $I_1$  et  $I_2$  les moments quadratiques évalués dans le repère principal de la section.

Ce résultat pourrait se généraliser aux cas où la section serait lentement variable, mais également au cas où le matériau serait hétérogène.

Le raisonnement développé précédemment peut être généralisé à des poutres déjà courbes au repos. En effet, il suffit de considérer pour cela une configuration de référence intermédiaire présentant une courbure nulle. Alors, dans l’hypothèse des petites déformations, on généralise l’énergie de flexion en faisant apparaître, en plus de la courbure de la configuration actuelle, la courbure dans la configuration au repos, comme illustré sur la figure 4.19. L’énergie de flexion élémentaire est alors donnée par la relation (4.20).

$$d E_f = \frac{1}{2} [ EI_1 (\kappa_1 - \bar{\kappa}_1)^2 + EI_2 (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 ] ds \quad (4.20)$$



Crédit image : Frédéric Tayeb

**Figure 4.19 - Généralisation du traitement de la flexion**

*La configuration sans courbure (au centre) permet d’évaluer simplement les courbures dans la configuration au repos (à gauche) et dans la configuration actuelle (à droite). La différence entre ces courbures permet d’évaluer l’énergie de flexion, dans l’hypothèse des petites déformations.*

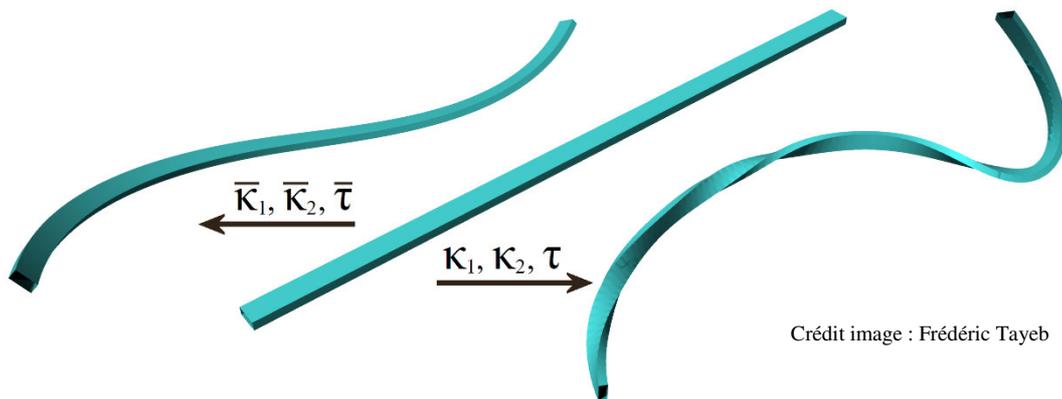
### 4.2.3 Découplage des efforts de torsion et de flexion, et récapitulatif des énergies en jeu

Il est important de se poser la question de savoir si les efforts de flexion et ceux de torsion sont découplés. Pour montrer qu’ils ne sont pas couplés, il suffit de considérer les contraintes et les déformations associées, et de montrer qu’elles sont orthogonales.

On remarque que les phénomènes de flexion engendrent des déformations et des contraintes axiales  $\epsilon_{33}$  et  $\sigma_{33}$  dans la poutre. Par ailleurs, les phénomènes de torsion engendrent du cisaillement traduit par les déformations  $\epsilon_{13}$  et  $\epsilon_{23}$  et les contraintes  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$ . Ainsi, dans l’hypothèse de petites déformations, la combinaison de flexion et de torsion n’engendre pas de

termes croisés. Ainsi, sous l'hypothèse de petites déformations, les phénomènes de flexion et ceux de torsion sont indépendants. Nous pouvons donc généraliser l'étude des poutres en considérant à la fois la torsion et la flexion, comme illustré sur la figure 4.20.

En outre, la description ci-dessus a montré qu'il existe un champ de repère privilégié. Ce champ de repère privilégié est celui des repères principaux des sections des poutres. Dans la suite de ce chapitre, on se placera donc systématiquement dans ce champ de repères privilégié qui permettra d'écrire le problème et les équations de la manière la plus simple possible.



**Figure 4.20 - Généralisation du calcul des énergies d'une poutre**

*Le calcul des énergies de flexion et de torsion se généralise à des poutres ayant une configuration au repos quelconque : à partir de la configuration de référence (au centre), on évalue les courbures et le taux de rotation pour la configuration au repos (gauche) et pour la configuration actuelle (droite). Ces grandeurs permettent alors de calculer les énergies, puis comme ce sera montré dans la section 4.2.5, les efforts intérieurs associés.*

Les phénomènes de torsion et de flexion ayant été pris en compte, cela suffit à décrire de manière efficace les poutres élancées inextensibles peu soumises à des efforts de traction. Il faudra toutefois s'assurer qu'un moyen est mis en œuvre pour assurer l'inextensibilité des poutres.

L'énergie potentielle élastique élémentaire totale de la poutre peut donc finalement être écrite à l'aide de la relation (4.21) :

$$d E_p = \left[ \frac{1}{2} GJ (\tau - \bar{\tau})^2 + \frac{1}{2} [ EI_1 (\kappa_1 - \bar{\kappa}_1)^2 + EI_2 (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)^2 ] \right] ds \quad (4.21)$$

#### 4.2.4 Retour sur le champ de repère de référence pour la torsion

Nous avons donc exprimé l'énergie élastique de la poutre élancée inextensible. Notre prochain objectif est d'obtenir les efforts intérieurs par dérivation de l'énergie.

Au préalable, nous avons besoin de calculer les courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et  $\bar{\kappa}_1$ ,  $\bar{\kappa}_2$ , mais aussi les taux de rotation de la matière autour de la ligne neutre  $\tau$  et  $\bar{\tau}$ .

Nous rappelons que l'un des objectifs est d'arriver à pouvoir décrire la poutre avec le moins de paramètres possibles, c'est-à-dire avec quatre paramètres, dont trois de position, et un angulaire permettant de repérer la rotation de la section de la poutre autour de la tangente. Il faut donc déterminer cet angle.

Nous définissons donc le champ d'angles  $\theta$ , champ d'angle entre le champ de repères de Bishop (champ de repère sans taux de rotation autour de la ligne neutre) et le champ de repères principaux de la poutre, comme déjà présenté dans la section 4.2.1.2 et illustré sur la figure 4.15.

On exprime alors les taux de rotation du champ de repères principaux autour de la tangente à la poutre :

$$\tau = \frac{d\theta}{ds} = \theta' \quad \text{et} \quad \bar{\tau} = \frac{d\bar{\theta}}{ds} = \bar{\theta}'$$

Par ailleurs, on remarque que les courbures s'écrivent comme les produits scalaires entre la dérivée seconde de la position par rapport à l'abscisse curviligne et les vecteurs principaux unitaires de la section, et on note  $\boldsymbol{\omega}$  le vecteur courbure dont les deux composantes sont les courbures principales de la poutre.

$$\begin{cases} \kappa_1 = -\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_2 \\ \kappa_2 = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_1 \end{cases} \quad (4.22)$$

et

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

L'énergie se réécrit alors, si les grandeurs  $GJ$  et  $B$  sont lentement variables le long de la poutre, sous la forme de l'intégrale suivante, relation (4.24) :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ GJ (\theta' - \bar{\theta}')^2 + (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}}) \right] ds \quad (4.24)$$

Où  $B$  est la matrice de raideur en flexion de la section, écrite dans le repère principal de la section.

$$B = \begin{bmatrix} EI_1 & 0 \\ 0 & EI_2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

L'énergie élastique de la poutre ayant été obtenue, on peut alors se concentrer sur l'obtention des efforts intérieurs associés, obtenus par dérivation de l'énergie élastique.

#### 4.2.5 Calcul des efforts intérieurs

Nous disposons à présent de l'expression de l'énergie potentielle élastique exprimée avec les quatre paramètres scalaires  $x, y, z, \theta$  qui suffisent à décrire la poutre. Il est alors possible d'obtenir les efforts intérieurs en dérivant cette expression par rapport à ces variables. La dérivée de l'énergie par rapport à la variable  $\mathbf{x}$  permet d'obtenir une force linéique  $\mathbf{f}(s)$  tandis

que celle par rapport à la variable  $\theta$  permet d'obtenir un moment linéique scalaire  $m(s)$ . La force linéique permet le déplacement de la ligne neutre, tandis que le moment linéique permet la rotation des sections autour de cette ligne neutre.

Cette démarche a été proposée par Bergou en 2008 [BERGOU08]. L'originalité du travail présenté dans ce chapitre est de poursuivre avec le modèle continu jusqu'à l'obtention des efforts intérieurs. L'intérêt de rester en continu est de traiter des équations plus compactes et plus physiques, par rapport à des équations discrétisées. Pour mettre en application le modèle, il faudra, une fois les efforts obtenus en continu, discrétiser le modèle pour l'implémenter et le tester.

#### 4.2.5.1 Hypothèse quasi-statique

Pour des poutres élancées, on montre que les ondes de flexion se propagent bien moins vite que les ondes de torsion [LAROZE05]. On montre en outre que les poutres élancées dispersent les ondes de flexion, tandis qu'elles ne dispersent pas les ondes de torsion. On montre en particulier que la vitesse de propagation des ondes de torsion  $c_t$  vaut :

$$c_t = \sqrt{G/\rho}$$

Et que la vitesse des ondes de flexion vaut :  $c_f \sim \sqrt{E/\rho} \frac{h}{\lambda}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde considérée.

Notre objectif étant de faire un modèle discrétisé de poutre, il apparaît qu'une discrétisation raisonnable ne peut considérer que des ondes dont la longueur d'onde est importante devant la dimension caractéristique de la section de la poutre. On est donc ainsi dans le cadre où  $\lambda \gg h$ .

Alors, sous cette condition, les ondes de flexion se propagent beaucoup moins vite que les ondes de torsion. On peut donc considérer que l'équilibre en rotation des sections se fait instantanément par rapport à celui régissant la translation de la ligne neutre.

#### 4.2.5.2 Outil de calcul : la dérivée fonctionnelle

Les efforts, respectivement les moments et les forces, sont obtenus par dérivation de l'énergie élastique, respectivement par rapport à  $\theta$  et  $x$ . Or  $\theta$  et  $x$  sont des fonctions de l'abscisse curviligne  $s$ . Il faut donc dériver la fonction énergie potentielle élastique par rapport à ces fonctions  $\theta$  et  $x$ . L'outil mathématique associé à cette dérivation est la dérivée fonctionnelle.

La dérivée d'une fonctionnelle  $F(f)$  par rapport à la fonction  $x \mapsto f(x)$ , notée  $x \mapsto \frac{\delta F}{\delta f}(x)$  se définit de la manière suivante :

$$\frac{\delta F}{\delta f}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(f + \varepsilon \delta_x) - F(f)}{\varepsilon} \quad (4.26)$$

où  $\delta_x$  désigne la distribution de Dirac centrée en  $x$ .

Dans le cas de fonctionnelles de plusieurs variables, comme l'énergie élastique qui nous intéresse :  $(\theta, \mathbf{x}) \mapsto E_p(\theta, \mathbf{x})$ , on peut définir la dérivée fonctionnelle partielle  $s \mapsto \frac{\delta E_p}{\delta \theta}(s)$  et la dérivée fonctionnelle totale  $s \mapsto \frac{\Delta E_p}{\Delta \theta}(s)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_p}{\delta \theta}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E_p(\theta + \varepsilon \delta_s, \mathbf{x}) - E_p(\theta, \mathbf{x})}{\varepsilon} \\ \frac{\Delta E_p}{\Delta \theta}(s) &= \frac{\delta E_p}{\delta \theta}(s) + \int_0^L \frac{\delta E_p}{\delta \mathbf{x}}(t) \frac{\delta \mathbf{x}(t)}{\delta \theta}(s) dt \end{aligned}$$

### 4.2.5.3 Calcul des moments linéiques intérieurs

Comme expliqué précédemment, il est possible de calculer le moment linéique intérieur  $m^{int}(s)$  permettant de faire tourner les sections de la poutre autour de la ligne moyenne, via la dérivation de l'énergie potentielle élastique par rapport à la variable  $\theta$ . Il faudrait en théorie considérer la dérivée totale de l'énergie élastique par rapport à  $\theta$ , mais, du fait de l'hypothèse quasi-statique, cette dérivée totale s'identifie à la dérivée partielle par rapport à  $\theta$ .

On a donc :

$$m^{int}(s) = -\frac{\delta E_p}{\delta \theta}(s) = -\frac{\delta E_t}{\delta \theta}(s) - \frac{\delta E_f}{\delta \theta}(s)$$

Où  $E_t$  et  $E_f$  représentent respectivement l'énergie élastique de torsion et l'énergie élastique de flexion :

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L GJ(s) (\theta'(s) - \bar{\theta}'(s))^2 ds \quad E_f = \frac{1}{2} \int_0^L (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s))^T B(s) (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s)) ds$$

Les calculs étant développés dans l'annexe A.2, on obtient la relation (4.27) pour le moment linéique intérieur :

$$m^{int}(s) = [GJ (\theta' - \bar{\theta}')]'(s) + (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s))^T B(s) R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega}(s) \quad (4.27)$$

Où  $R_{\pi/2}$  désigne la matrice de rotation  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

On remarquera que dans le cas général où la matrice  $B$  n'est pas proportionnelle à l'identité, il existe un terme de rotation des sections qui est lié à la dérivation de l'énergie élastique de flexion. Ce terme, le second terme du terme de droite de l'équation (4.27), traduit un couplage flexion/torsion.

Le cas où la matrice  $B$  n'est pas proportionnelle à l'identité correspond à des poutres anisotropes telles qu'elles ont été définies dans la section 4.1. On rappelle que ce cas correspond au cas d'une poutre dont la section présente deux inerties principales en flexion différentes.

L'exemple le plus simple de poutre anisotrope est la poutre constituée d'un matériau isotrope et dont la section serait rectangulaire (carrée exclue).

Ce second terme du terme de droite de l'équation (4.27) est en accord avec l'expérience faite dans le cas particulier où on souhaiterait fléchir une poutre selon son inertie principale la plus forte. Dans ce cas, on observe que la flexion de la poutre dans le plan de son inertie la plus forte est instable et que la minimisation de l'énergie élastique du système conduit à un transfert d'énergie à la fois vers la torsion et vers la flexion dans la direction où l'inertie de flexion est la plus faible (figure 4.21).



Crédit image : Baptiste Lefèvre

#### Figure 4.21 - Flexion d'une poutre selon son inertie principale la plus forte

La poutre, fléchie selon son inertie principale la plus forte se retrouve dans un équilibre instable (représenté à plat). La minimisation de son énergie élastique passe par un transfert d'énergie élastique de ce mode de flexion vers de la flexion par rapport à l'inertie principale la plus faible, ainsi que vers le mode de torsion. L'évolution de la configuration instable vers la configuration stable est représentée par la flèche rouge.

#### 4.2.5.4 Calcul des forces linéiques intérieures

Les moments linéiques étant calculés, il reste à calculer les efforts permettant le déplacement de la ligne neutre. Ces efforts sont des forces que l'on obtient par dérivation de l'énergie potentielle par rapport à la variable  $\mathbf{x}$ . Cette force  $\mathbf{f}^{int}(s)$  s'écrit :

$$\mathbf{f}^{int}(s) = -\frac{\Delta E_p}{\Delta \mathbf{x}}(s) = -\frac{\delta E_p}{\delta \mathbf{x}}(s) - \int_0^L \frac{\delta E_p}{\delta \theta}(t) \frac{\delta \theta(t)}{\delta \mathbf{x}}(s) dt$$

On obtient finalement après calcul (les calculs sont à nouveau développés dans l'annexe A.2) la force linéique intérieure :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{int}(s) = & - \left[ (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \end{pmatrix} \right]'' (s) \\ & + \left[ \left( \int_s^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B(s) R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega} dt \right) (\kappa \mathbf{b})^T \right]' (s) \\ & + (GJ)(L) (\theta' - \bar{\theta}')(L) (\kappa \mathbf{b})'(s) \end{aligned} \quad (4.28)$$

On remarquera que pour une poutre pour laquelle la rotation en  $s = L$  est laissée libre, le dernier terme du terme de droite de l'équation (4.28) est nul.

Ainsi, à partir de l'énergie élastique de la poutre, nous avons pu obtenir les efforts intérieurs par dérivation. Ces efforts ont été obtenus en continu, ils tendent à remettre la poutre dans sa configuration au repos.

Pour le modèle de poutre étudié, les efforts intérieurs sont constitués d'un moment de torsion intérieur linéique autour de la ligne neutre,  $m^{int}(s)$ , modifiant l'orientation des sections autour de la tangente, et d'une force intérieure linéique  $f^{int}(s)$  contribuant au déplacement de la ligne neutre.

Pour aller plus loin, il faut implémenter ces forces dans un modèle numérique. Pour ce faire, il faut nécessairement discrétiser la poutre. C'est ainsi que la section suivante présente la discrétisation du modèle.

### 4.3 Discrétisation et implémentation du modèle

Connaissant la configuration au repos d'une poutre, et sa configuration actuelle, nous avons vu qu'il était possible d'évaluer les efforts intérieurs. Nous allons à présent discrétiser le modèle continu présenté dans la section 4.2 de manière à l'implémenter sur des situations que l'on souhaite calculer numériquement.

#### 4.3.1 Quantités discrétisées

La poutre est discrétisée à l'aide de  $N$  points et  $N - 1$  éléments. Les  $N$  points, représentés par  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}$  sont répartis le long de la poutre, pas nécessairement de façon régulière. Les éléments  $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$  sont numérotés de 0 à  $N - 2$ . Leur longueur sera notée  $l_i$ .

On fait correspondre à chaque nœud une orientation de la section  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}$ . La discrétisation est représentée sur la figure 4.22. Il peut sembler plus logique d'attribuer une orientation à chaque élément, comme cela est fait dans [BERGOU08], mais nous avons montré que pour avoir un algorithme à la fois simple à comprendre et performant numériquement, il valait mieux faire apparaître toutes les quantités discrétisées aux nœuds.

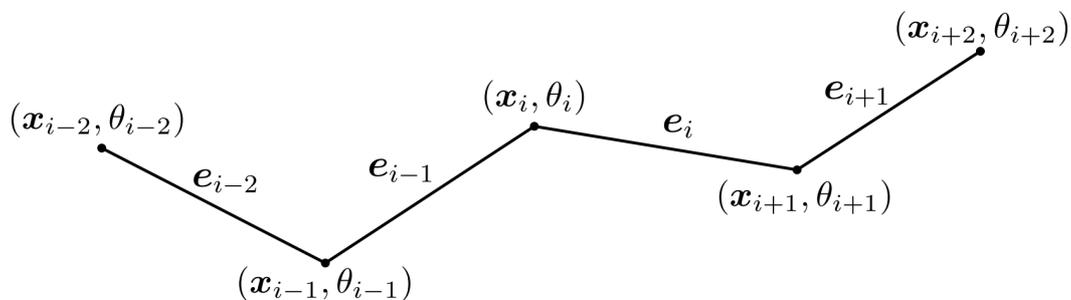


Figure 4.22 - Discrétisation de la poutre

Le repère de Bishop est propagé à partir d'un repère noté  $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0\}$  choisi en  $\mathbf{x}_0$ . On notera que le repère de Bishop est invariant le long de chaque segment  $\mathbf{e}_i$  mais mal défini aux nœuds  $\mathbf{x}_i$ , qui ne sont pas des points réguliers. Commençons par définir  $\{\mathbf{u}_{i/i+1}, \mathbf{v}_{i/i+1}\}$ , le repère de Bishop le long des segments. A partir des travaux proposés dans [BLOOMENTHAL90], une version discrète du transport parallèle est proposée. Elle permet de définir le repère de Bishop à la fois aux nœuds  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, (\mathbf{t}_i + \mathbf{t}_{i-1})/2)$  et sur les segments  $(\mathbf{u}_{i/i+1}, \mathbf{v}_{i/i+1}, \mathbf{t}_i)$  :

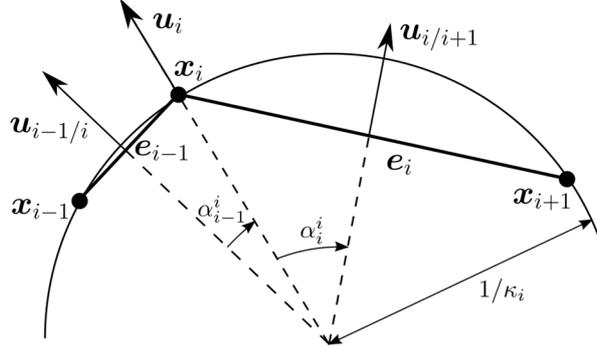
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0/1} &= \mathbf{u}_0 & \mathbf{v}_{0/1} &= \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{u}_i &= R_{\alpha_{i-1}^i \mathbf{b}_i} \mathbf{u}_{i-1/i} & \mathbf{v}_i &= R_{\alpha_{i-1}^i \mathbf{b}_i} \mathbf{v}_{i-1/i} \\ \mathbf{u}_{i/i+1} &= R_{\alpha_i^i \mathbf{b}_i} \mathbf{u}_i & \mathbf{v}_{i/i+1} &= R_{\alpha_i^i \mathbf{b}_i} \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

Avec  $R_{\mathbf{a}}$  la matrice de rotation d'axe  $\mathbf{a}$  et d'angle  $\|\mathbf{a}\|$

Et

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &= \kappa \mathbf{b}_i / \kappa_i \text{ avec } \kappa_i = \|\kappa \mathbf{b}_i\| \\ \alpha_{i-1}^i &= \sin^{-1}(\ell_{i-1} \kappa_i / 2) \\ \alpha_i^i &= \sin^{-1}(\ell_i \kappa_i / 2) \end{aligned}$$

Une illustration de ce transport parallèle est proposée sur la figure 4.23 :



**Figure 4.23 - Transport parallèle discret**

Alors, le repère matériel est donné par :

$$\begin{cases} (\mathbf{d}_1)_i = \cos \theta_i \mathbf{u}_i + \sin \theta_i \mathbf{v}_i \\ (\mathbf{d}_2)_i = -\sin \theta_i \mathbf{u}_i + \cos \theta_i \mathbf{v}_i \end{cases}$$

On peut alors définir la courbure binormale. Pour cela on calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par 3 points consécutifs [HOFFMANN08]. On associe alors au point central l'inverse de ce rayon (relation (4.29)).

$$(\kappa \mathbf{b})_i = \frac{2}{l_{i-1} l_i} \frac{\mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i\|} \quad (4.29)$$

Et

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{pmatrix} (\kappa \mathbf{b})_i \cdot (\mathbf{d}_2)_i \\ -(\kappa \mathbf{b})_i \cdot (\mathbf{d}_1)_i \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

On notera  $(GJ)_i$  et  $B_i$  les propriétés mécaniques discrétisées. Pour l'implémentation, on remarquera que  $B_i$  est diagonale, et on évitera donc de calculer les contributions nulles associées aux termes non diagonaux. A ce stade, toutes les quantités nécessaires à l'évaluation des efforts intérieurs sont définies aux nœuds.

### 4.3.2 Calcul des efforts intérieurs

Notons  $s_i$  et  $s_{i+\frac{1}{2}}$  les abscisses curvilignes telles que :

$$\mathbf{x}(s_i) = \mathbf{x}_i \quad s_{i+\frac{1}{2}} = \frac{s_i + s_{i+1}}{2}$$

On peut alors écrire le moment appliqué aux deux demi-segments dont  $\mathbf{x}_i$  fait partie :

$$m^{int}_i = \int_{s_{i-\frac{1}{2}}}^{s_{i+\frac{1}{2}}} m^{int}(s) ds$$

De même, la force appliquée au nœud  $\mathbf{x}_i$  est donnée par :

$$\mathbf{f}^{int}_i = \int_{s_{i-\frac{1}{2}}}^{s_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{f}^{int}(s) ds$$

Pour écrire aussi simplement que possible les forces et les moments, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \theta'_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{l_i} \\ M_i &= (\boldsymbol{\omega}_i - \bar{\boldsymbol{\omega}}_i) B_i \begin{pmatrix} (\mathbf{d}_1)_i^T \\ (\mathbf{d}_2)_i^T \end{pmatrix} \\ r_i &= (\boldsymbol{\omega}_i - \bar{\boldsymbol{\omega}}_i)^T B_i R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega}_i \end{aligned}$$

#### 4.3.2.1 Calcul du moment $m^{int}_i$ appliqué à l'élément $e_i$

Par intégration on obtient le moment intérieur  $m^{int}_i$  appliqué à l'élément  $i$  :

$$m^{int}_i = (GJ)_{i+1} \left( \theta'_{i+\frac{1}{2}} - \bar{\theta}'_{i+\frac{1}{2}} \right) - (GJ)_i \left( \theta'_{i-\frac{1}{2}} - \bar{\theta}'_{i-\frac{1}{2}} \right) + \frac{l_{i-1} + l_i}{2} r_i \quad (4.31)$$

#### 4.3.2.2 Calcul de la force $\mathbf{f}^{int}_i$ appliqué au sommet $\mathbf{x}_i$

Pour une poutre encastree en son extrémite  $s = L$ , on calcule la force intérieure  $\mathbf{f}^{int}_i$  appliquée au nœud  $i$  :

$$\begin{aligned}
 f^{int}_i = & -\frac{1}{l_{i-1}} \mathbf{M}_{i-1} + \left( \frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i} \right) \mathbf{M}_i - \frac{1}{l_i} \mathbf{M}_{i+1} \\
 & + \frac{(\kappa \mathbf{b})_i + (\kappa \mathbf{b})_{i+1}}{2} \sum_{k=i+1}^{N-2} \left[ r_k - \frac{(\kappa \mathbf{b})_{i-1} + (\kappa \mathbf{b})_i}{2} \sum_{k=i}^{N-2} r_k \right] \\
 & + (GJ)_{N-1} \left( \theta'_{N-\frac{3}{2}} - \bar{\theta}'_{N-\frac{3}{2}} \right) \frac{(\kappa \mathbf{b})_{i+1} - (\kappa \mathbf{b})_{i-1}}{2}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

On rappelle que le dernier terme est lié à l'encastrement et tend vers zéro lorsque l'on raffine la discrétisation, dans le cas d'une poutre pour laquelle la rotation en  $s = L$  est laissée libre.

### 4.3.3 Prise en compte des efforts axiaux

Le modèle présenté dans le paragraphe précédent est rigoureux dans le cas d'une poutre inextensible puisque l'abscisse curviligne est au centre du modèle. Pourtant, pour l'instant aucune contrainte n'a été introduite pour assurer l'inextensibilité. Il faut donc rajouter au modèle une propriété permettant d'assurer l'inextensibilité.

Pour à la fois avoir un modèle riche, précis et pour conserver la simplicité du modèle, nous avons choisi d'utiliser une méthode de pénalisation, qui présente l'intérêt d'être une méthode explicite.

Cette méthode ne permet pas de respecter parfaitement l'inextensibilité mais elle présente un autre intérêt, celui de pouvoir choisir la valeur de la raideur axiale. On peut en particulier choisir cette raideur conforme à la raideur axiale réelle des poutres, ce qui permet d'avoir un modèle précis non seulement vis-à-vis de la flexion et de la torsion, mais aussi vis-à-vis des efforts axiaux.

Le second intérêt de cette méthode est lié à l'utilisation qu'on désire faire de l'algorithme. En effet, nous souhaitons non seulement pouvoir obtenir la configuration d'équilibre des structures de type gridshell, mais nous souhaitons également pouvoir évaluer les contraintes au sein de ces structures lorsqu'elles sont soumises à des chargements extérieurs (neige, vent). Ces chargements engendrent en général des efforts normaux dans les poutres. Il est donc important que les phénomènes de traction – compression soient pris en compte.

La méthode de pénalisation choisie consiste à ajouter au modèle précédent une énergie de pénalisation de type ressort élastique entre chaque couple de nœuds consécutifs d'une même poutre. On fait alors apparaître des forces qui tendent à ramener les longueurs des éléments vers leur longueur à vide. Cette énergie s'écrit à l'aide de la relation (4.33) :

$$E_{pen} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} A_i (\|\mathbf{x}'_i\| - 1)^2 \tag{4.33}$$

Où  $A_i$  est la raideur axiale de la poutre  $i$ . Sa valeur sera prise égale à  $ES$  pour le modèle correspondant à la réalité physique des poutres ( $E$  étant le module d'Young de la poutre, et  $S$  l'aire de la section de la poutre).

On fera remarquer au lecteur que le schéma de résolution explicite utilisé ici (la relaxation dynamique) est conditionné par les raideurs caractéristiques du système. Ainsi, on montre que plus les différentes raideurs caractéristiques du système sont éloignées les unes des autres, plus il faut un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence. Ainsi, il n'est pas du tout intéressant de choisir une raideur axiale démesurément grande. Plus d'informations sur les raideurs du système, les masses associées aux nœuds et le pas de temps de l'itération pourront être trouvées dans la section 4.3.5.

A cette énergie élastique axiale on fait correspondre une force sur un nœud  $i$  donné par la relation (4.34) :

$$\mathbf{f}_i^{pen} = A_i (\|\mathbf{x}'_i\| - 1) \mathbf{x}'_i - A_{i-1} (\|\mathbf{x}'_{i-1}\| - 1) \mathbf{x}'_{i-1} \quad (4.34)$$

### 4.3.4 Efforts extérieurs

Le modèle décrit ci-dessus permet de simuler de manière très précise une poutre qui ne serait pas soumise à des efforts extérieurs. Il est intéressant d'enrichir ce modèle en ajoutant des efforts extérieurs quelconques, c'est-à-dire des forces et des moments.

Les forces extérieures sont très faciles à gérer puisqu'il suffit de les ajouter aux forces intérieures  $\mathbf{f}_i^{int}$ , obtenues dans la partie 4.3.2.2.

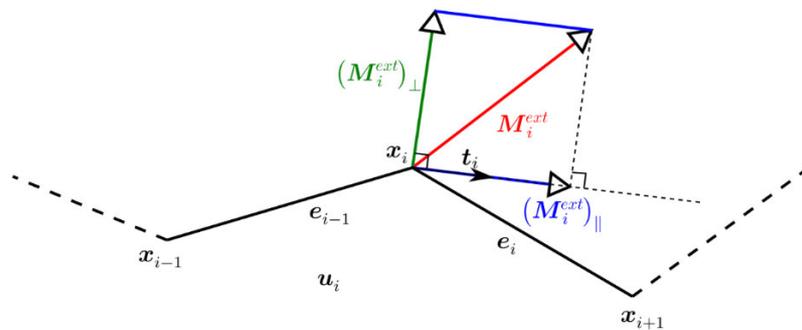
En revanche, l'ajout de moments quelconques au niveau d'un nœud est plus complexe à gérer. En effet, du fait de la description cinématique retenue, l'espace des efforts acceptés par le modèle se limite à des forces aux nœuds et des moments tangents à la ligne neutre. Un moment quelconque devra donc être projeté sur cet espace des efforts acceptés. Il sera alors décomposé en deux composantes, à l'aide de  $\mathbf{t}_i$ , le vecteur tangent. Cette décomposition est illustrée sur la figure 4.24:

- Une composante tangente

$$(\mathbf{M}_i^{ext})_{\parallel} = (\mathbf{M}_i^{ext} \cdot \mathbf{t}_i) \mathbf{t}_i \quad (4.35)$$

- Une composante orthogonale

$$(\mathbf{M}_i^{ext})_{\perp} = \mathbf{M}_i^{ext} - (\mathbf{M}_i^{ext})_{\parallel} \quad (4.36)$$



**Figure 4.24 - Projection d'un moment extérieur sur l'espace des efforts acceptés**

Le moment extérieur  $\mathbf{M}_i^{ext}$  est séparé en deux contributions, la première portée par la tangente à la poutre contribue à faire tourner les sections, la deuxième orthogonale à la tangente à la poutre est traitée comme un moment de flexion.

La composante tangente pourra être intégrée facilement au modèle, puisqu'elle s'ajoutera au moment linéique intérieur tangent  $m^{int}_i$  obtenu dans la partie 4.3.2.1. Quant à  $(\mathbf{M}_i^{ext})_{\perp}$ , c'est la composante du moment extérieur qui est orthogonale au vecteur tangent. Cette composante du moment se comporte donc comme un moment de flexion. Comme les seuls efforts autorisés par le modèle sont des moments tangents et des forces, nous concluons que cette composante doit être décomposée en un ensemble de forces. Cela n'est finalement pas si surprenant puisque c'est ce qui était déjà fait dans les précédents algorithmes de relaxation dynamique (cf section 1.4.2). Ces forces, explicitées à l'aide de la relation (4.37), seront alors ajoutées aux forces intérieures et aux forces extérieures.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_{i-1}^{ext} = -\left(\frac{l_i}{l_{i-1} + l_i}\right) \frac{1}{l_{i-1}^2} (\mathbf{M}_i^{ext})_{\perp} \times \mathbf{e}_{i-1} \\ \mathbf{f}_i^{ext} = \left(\frac{l_i}{l_{i-1} + l_i}\right) \frac{1}{l_{i-1}^2} (\mathbf{M}_i^{ext})_{\perp} \times \mathbf{e}_{i-1} - \left(\frac{l_{i-1}}{l_{i-1} + l_i}\right) \frac{1}{l_i^2} (\mathbf{M}_i^{ext})_{\perp} \times \mathbf{e}_i \\ \mathbf{f}_{i+1}^{ext} = \left(\frac{l_{i-1}}{l_{i-1} + l_i}\right) \frac{1}{l_i^2} (\mathbf{M}_i^{ext})_{\perp} \times \mathbf{e}_i \end{array} \right. \quad (4.37)$$

On remarquera que ces trois forces sont en fait exactement deux couples de forces dont l'amplitude est pondérée par la longueur de l'élément précédent et de l'élément suivant le point d'application.

On remarque également que la connexion d'une poutre  $b$  sur une poutre  $a$  peut être vue du point de vue de cette poutre  $a$  comme l'ajout d'une force extérieure et d'un moment extérieur au niveau de la connexion. Il ne manque donc plus grand-chose avant d'obtenir un modèle permettant de gérer des structures composées de poutres élancées interconnectées, sous chargement éventuel.

### 4.3.5 Choix des masses et des inerties fictives

Intéressons-nous maintenant à la convergence de la simulation. Pour cela, on rappelle le principe de la méthode de la relaxation dynamique : le système, conservatif, est lâché dans une configuration donnée. Le calcul des efforts (intérieurs et extérieurs) permet de mettre en mouvement le système en le rapprochant de sa configuration d'équilibre. Le système suit donc une évolution dynamique, et le système est immobilisé à chaque fois qu'il passe par un minimum d'énergie potentielle (maximum d'énergie cinétique), ce qui permet de dissiper l'énergie cinétique. Dans notre cas d'étude, le système étudié est une poutre, et l'énergie cinétique se retrouve sous deux formes : de l'énergie cinétique de translation (associée aux nœuds et engendrée par les forces) et de l'énergie de rotation des sections (associée aux éléments et engendrée par les moments tangents). Comme cela a été vu, le but de la relaxation dynamique est de dissiper cette énergie cinétique. Ainsi, à la fin de la procédure, toute l'énergie cinétique est dissipée et il ne reste que l'énergie potentielle correspondant à un minimum local d'énergie potentielle.

Il nous faut donc calculer l'énergie totale de translation, qui s'écrit comme la somme des énergies de translation de chaque nœud, ainsi que l'énergie totale de rotation, qui s'écrit comme

la somme des énergies de rotation de chaque élément. Pour prendre en compte l'hypothèse quasi-statique, nous choisissons de traiter ces deux énergies séparément. Elles seront chacune associées à un moteur de relaxation dynamique, et on vérifiera *a posteriori* que les échelles de temps liées aux deux phénomènes sont effectivement différentes – à savoir que l'équilibre en rotation est établi bien avant celui de la translation des nœuds.

Ainsi, l'énergie de translation s'écrit, en notant  $M_i$  la masse associée au nœud  $i$  :

$$E_c^{translation} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N M_i \dot{x}_i^2$$

De même, l'énergie de rotation s'écrit, en notant  $I_i$  le moment d'inertie du morceau de poutre associé au nœud  $i$  :

$$E_c^{rotation} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N I_i \dot{\theta}_i^2$$

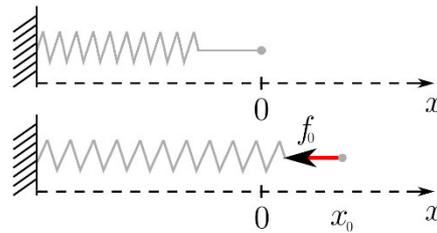
Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les masses  $M_i$  et les moments d'inertie  $I_i$  utilisés pour la relaxation dynamique peuvent être choisis de manière complètement arbitraire. En effet, ces grandeurs n'interviennent que dans la dynamique de la poutre, et, une fois l'équilibre atteint, c'est-à-dire une fois que les efforts intérieurs compensent exactement les efforts extérieurs, les masses n'ont plus aucune influence sur l'état d'équilibre du système (bien entendu, pour les forces telles que la gravité ou les forces d'inertie, il faut considérer les masses réelles et non les masses fictives). Nous pouvons donc choisir indépendamment ces grandeurs, du moment que l'hypothèse quasi-statique reste vérifiée.

Il existe cependant des choix de valeur pour ces paramètres plus judicieux que d'autres puisque ces paramètres conditionnent la convergence du système. Nous choisissons de fixer le pas de temps  $\Delta t$  à une seconde, et de choisir ensuite les meilleurs paramètres  $M_i$  et  $I_i$ , c'est-à-dire ceux qui permettent d'atteindre l'équilibre avec le plus petit nombre d'itérations.

Une fois les paramètres  $M_i$  et  $I_i$  choisis, il s'agira de bien vérifier que la dynamique obtenue est conforme à l'hypothèse quasi-statique que nous avons faite.

#### 4.3.5.1 Masses fictives

Pour comprendre comment se fait le choix des masses fictives, il est utile de considérer le cas simple d'une masse  $M$  accrochée à l'extrémité d'un ressort dont l'autre extrémité est encastree. Le ressort considéré a une longueur à vide  $L_0$  et une raideur  $k$ . La position de la masse est repérée à tout moment par la distance algébrique  $x$  illustrée sur le schéma de la figure 4.25. Elle vaut  $x_0$  à l'instant initial. Dans cet exemple on ne considère que la force du ressort sur la masse, l'objectif étant d'évaluer la valeur de la masse permettant d'obtenir la convergence de manière optimale (c'est-à-dire avec le moins d'itérations possible).



**Figure 4.25 - Choix de la masse fictive sur l'exemple du ressort**

On écrit donc l'équation de la dynamique pour la masse, en supposant que la masse n'a pas de vitesse initiale :

$$M\ddot{x} + kx = 0$$

La solution d'équilibre est bien évidemment obtenue pour  $x = x_0$ .  
Nous obtenons au premier pas de temps :  $x(\Delta t) = x_0 - k/M \Delta t^2 x_0$   
Pour que la dynamique de la masse soit stable, il faut que  $|x(\Delta t)| < x_0$   
Cette condition revient à  $k/M \Delta t^2 < 2$ , soit :

$$M > \frac{k \Delta t^2}{2}$$

Pour que la dynamique du système soit optimale, il faut que  $|x(\Delta t)| = 0$ , c'est-à-dire que la position d'équilibre soit atteinte en une seule itération.  
Cette condition revient à  $k/M \Delta t^2 = 1$ , soit :

$$M_{opt} = k \Delta t^2$$

En pratique, les systèmes étant assez complexes, on s'assure de la convergence en multipliant cette masse optimale par un facteur  $g$  légèrement supérieur à 1. Finalement on choisira donc la masse  $M$  de la manière suivante :

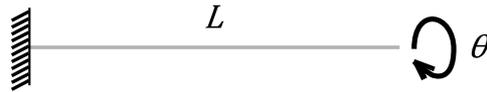
$$M = g K \Delta t^2$$

Où  $\Delta t = 1$ .

La dynamique en translation des nœuds étant optimisée, on réalise un raisonnement similaire pour déterminer les moments d'inertie optimum pour la convergence du système vis-à-vis des phénomènes de rotation.

#### 4.3.5.2 Moments d'inertie fictifs

Reproduisons à présent le raisonnement afin de faire le choix des inerties fictives. Pour ce faire, nous considérons un élément de poutre encastré que nous mettons en torsion (ressort de torsion, figure 4.26).



**Figure 4.26 - Moment d'inertie fictif optimal dans le cas d'un ressort de torsion**

La dynamique du système s'écrit alors :

$$I\ddot{\theta} + \frac{GJ}{L}\theta = 0$$

Ce qui mène à la condition de stabilité :

$$I > \frac{GJ \Delta t^2}{2L}$$

Et une condition de convergence optimale :

$$I_{opt} = \frac{GJ \Delta t^2}{L}$$

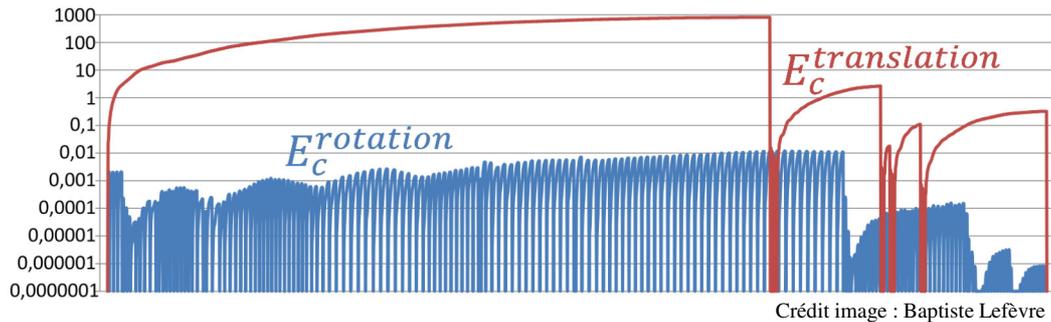
Là encore, on préférera prendre un peu de marge en multipliant légèrement le moment d'inertie fictif par un facteur  $g$  supérieur à 1 :

$$I = g \frac{GJ \Delta t^2}{L}$$

### 4.3.5.3 Application aux poutres

L'application aux poutres se fait, pour la translation des nœuds, en calculant la somme des raideurs des éléments convergeant à chaque nœud, notée  $K$ . On voit alors apparaître deux quantités, l'une liée aux efforts de flexion et l'autre liée aux efforts axiaux. Chacun de ces types de force admet une raideur caractéristique. On notera que généralement le terme prépondérant est lié aux raideurs axiales. Les ordres de grandeur des raideurs associées aux efforts axiaux et aux efforts de flexion sont respectivement  $ES/l$  et  $2EI/l^3$  où  $l$  est la longueur de l'élément considéré [DOUTHE07]. Pour la raideur associée aux efforts de flexion, on prend, dans le cas des poutres anisotropes la raideur principale la plus importante.

On remarquera qu'avec le choix de ces masses et de ces moments d'inertie, les phénomènes liés aux efforts axiaux et ceux liés aux rotations des sections convergent de manière très satisfaisante, avec des échelles de temps voisines. En revanche, les phénomènes liés à la flexion, associés à des raideurs plus faibles que les raideurs axiales, convergent avec un temps caractéristique plus long ce qui assure, fortuitement, la vérification de l'hypothèse quasi-statique (figure 4.27).



Crédit image : Baptiste Lefèvre

**Figure 4.27 - Échelles de temps associées aux énergies de translation et de rotation**

Sur cette figure, les énergies de rotation et de translation sont reportées en fonction du nombre d'itérations (échelle logarithmique arbitraire). On constate que l'hypothèse quasi-statique est effectivement vérifiée, ce qui permet de justifier les simplifications utilisées lors du calcul des efforts intérieurs.

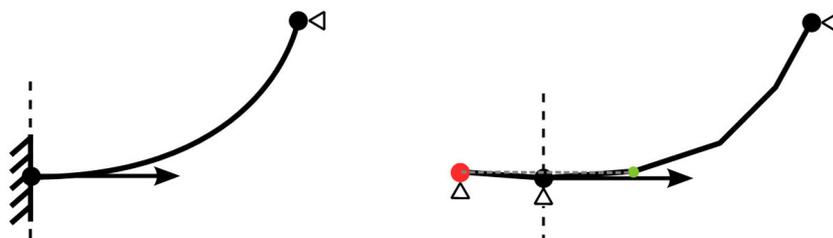
### 4.3.6 Conditions aux limites

Les rotules sont assurées en annulant à chaque itération la vitesse du nœud considéré, ou en n'actualisant pas la position de ce même nœud.

Pour assurer une liaison encastrement, il faut fixer le nœud au niveau de l'encastrement ainsi que la tangente à la poutre en ce nœud. On peut par exemple fixer le repère principal de la poutre au nœud d'encastrement, dans le repère global. La position du nœud situé à l'encastrement est ainsi fixée, ainsi que la tangente à la poutre au niveau de l'encastrement. Il est alors possible de calculer, à chaque pas de temps, la valeur de l'angle  $\theta$  en ce nœud.

Il existe d'autres façons d'assurer une liaison encastrement. On peut par exemple fixer deux nœuds consécutifs et la rotation de la section au point de l'encastrement.

En pratique, une des manières permettant de créer un encastrement consiste à rajouter un nœud fictif (illustré en rouge sur la figure 4.28) avant le nœud situé à l'encastrement (en noir), et imposé que la position de ce nœud fictif s'actualise à chaque itération comme le symétrique du premier nœud libre de la poutre (en vert), par rapport au plan orthogonal au vecteur tangent à l'encastrement (illustré en pointillés noirs). Il faut alors également bloquer la rotation de la poutre autour de sa tangente, au niveau du nœud d'encastrement.



**Figure 4.28 - Modélisation de l'encastrement**

L'encastrement réel (gauche) est modélisé via l'ajout d'un nœud (en rouge, droite) dont la position est actualisée de telle sorte à ce qu'il soit toujours le symétrique du premier nœud libre de la poutre (en vert) par rapport au plan d'encastrement. Ainsi, la tangente au niveau de l'encastrement est respectée. Il faut également empêcher la rotation de la poutre autour de sa tangente, au niveau de l'encastrement.

D'autres conditions aux limites plus exotiques peuvent être modélisées par analogie à la modélisation de l'encastrement.

A ce stade, le modèle est complet et permet de traiter l'équilibre de n'importe quelle poutre, rotulée ou encastree au niveau de ses extrémités, et soumise éventuellement à des forces et à des moments extérieurs quelconques.

### 4.3.7 Résumé de l'algorithme et critère de convergence

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord résumer l'algorithme de relaxation dynamique développé dans cette section. Nous soulignerons en particulier les différences avec l'algorithme proposé par Cyril Douthe [DOUTHE06], [DOUTHE07].

La principale nouveauté de l'algorithme est la prise en compte des phénomènes de torsion, qui, comme on l'a vu peuvent jouer un rôle important d'un point de vue mécanique, en particulier pour la durabilité des structures et pour le dimensionnement des connecteurs. La torsion permet également, dans certains cas, de générer de la forme. Pour pouvoir prendre en compte la torsion, nous avons raffiné le modèle utilisé par Cyril Douthe en ajoutant un degré de liberté permettant de repérer l'orientation des sections de la poutre. Ce degré de liberté est paramétré par l'angle  $\theta$ .

A partir d'un modèle de poutre continu nous avons obtenu les efforts intérieurs à la poutre. Ces efforts ont ensuite été discrétisés pour pouvoir être implémentés. Nous avons ensuite transcrit les efforts extérieurs (forces et moments) dans l'espace des efforts traités par notre algorithme, de manière à pouvoir traiter ces efforts extérieurs. Des efforts de pénalisations sont alors ajoutés pour pouvoir respecter l'inextensibilité du modèle. Des conditions aux limites peuvent être ajoutées. Finalement, à l'aide d'un algorithme de relaxation dynamique, le système évolue vers sa configuration d'équilibre.

L'algorithme nécessite qu'un nouveau champ de repères de Bishop soit calculé à chaque itération. Pour pouvoir traiter le déplacement des nœuds et la rotation des éléments autour de la tangente, le nouvel algorithme fait tourner deux moteurs de relaxation dynamique.

Pour résumer, l'algorithme permet de calculer les configurations d'équilibre de poutres de section quelconque, soumises à d'éventuels chargements extérieurs.

#### 4.3.7.1 Critère de convergence

Avant de présenter le détail des étapes de l'algorithme, il est nécessaire de définir un critère de convergence. Ce critère de convergence peut être relatif à l'énergie des pics d'énergie cinétique : par exemple, si les valeurs des énergies des derniers pics d'énergie cinétique sont « suffisamment faibles » devant l'énergie des premiers pics d'énergie cinétique, l'équilibre peut être considéré comme atteint. Il faut donc définir un critère pour caractériser le qualificatif « suffisamment faibles ».

Par exemple, le critère de convergence utilisé dans cette version de l'algorithme est le suivant :

$$(E_c^{translation})_{lim} < 10^{-10} (E_c^{translation})_1$$

Où  $(E_c^{translation})_1$  est la valeur de l'énergie cinétique dissipée lorsque le premier pic a été atteint.

Ainsi, dans ce cas, le processus de relaxation dynamique doit se poursuivre jusqu'à ce qu'un pic d'énergie cinétique ayant une valeur inférieure à  $10^{-10} (E_c^{translation})_1$  soit atteint.

De manière naturelle, le critère de convergence ne porte que sur la partie translation des nœuds puisque la rotation des sections atteint son équilibre en beaucoup moins d'itérations, conformément à l'hypothèse quasi-statique. En effet, en pratique, pour nos poutres présentant un fort élancement (présentées dans la section 4.4), il faut environ 100 fois moins d'itérations pour atteindre un équilibre en rotation (torsion) que pour atteindre un équilibre en translation (flexion).

Ce critère portant sur la valeur relative des pics d'énergie cinétique dépend beaucoup de l'initialisation du problème. En particulier, la valeur utilisée pour le critère doit être ajustée en fonction de la configuration de départ (si elle est proche de l'équilibre ou non).

Il existe un critère plus objectif portant sur le maximum des résidus des efforts. En effet, lorsque la poutre se rapproche de sa configuration d'équilibre, les résultantes des forces ainsi que les résultantes des moments tendent vers zéro. Nous pensons donc modifier le critère de convergence à l'avenir. Le nouveau critère nécessitera un étalonnage pour chaque type de poutre, de manière à obtenir la valeur de  $\varepsilon_{poutre}$  à utiliser, où  $\varepsilon_{poutre}$  est la valeur maximale autorisée pour les résultantes des forces résiduelles. Ce critère s'écrira alors :

$$\max_i \|f_i\| < \varepsilon_{poutre}$$

où  $f_i$  est la somme des forces intérieures, extérieures et de pénalisation qui s'exercent sur le nœud  $i$ .

Toutes les briques de l'algorithme ayant été précisées, celui-ci peut alors être explicité.

### 4.3.7.2 Algorithme retenu

1. Définition de la configuration au repos donnée par  $\bar{x}_i$  et  $\bar{\theta}_i$ . Calcul de  $\bar{\omega}_i$ .
2. Définition des propriétés mécaniques de la poutre  $A_i, B_i, (GJ)_i$ , et calcul des masses et inerties fictives  $M_i$  et  $I_i$
3. Définition de la configuration initiale donnée par  $x_i^{t=0}$  et  $\theta_i^{t=0}$
4. Définition des conditions aux limites (encastrement ou rotule).
5. Choix du critère de convergence et de la valeur du paramètre associé.
6. Initialisation du temps :  $t = 0$
7. Annulation des vitesses des nœuds :  $v_i^{t-\Delta t} = 0$
8. Annulation des vitesses angulaires des sections :  $\dot{\theta}_i^{t-\Delta t} = 0$
- 9a. Calcul des forces :  $f_i^t = f_i^{int,t} + f_i^{ext,t} + f_i^{pen,t}$ ,
- 9b. Calcul des moments :  $m_i^t = m_i^{int,t} + m_i^{ext,t}$
- 10a. Calcul de l'accélération des nœuds :  $a_i^t = f_i^t / M_i$
- 10b. Calcul de l'accélération angulaire des sections :  $\alpha_i^t = m_i^t / I_i$
- 11a. Actualisation des vitesses des nœuds :  $v_i^t = v_i^{t-\Delta t} + \Delta t a_i^t$
- 11b. Actualisation des vitesses angulaires des sections :  $\dot{\theta}_i^t = \dot{\theta}_i^{t-\Delta t} + \Delta t \alpha_i^t$
- 12a. Calcul de l'énergie cinétique de translation des nœuds :

$$(E_c^{translation})^t = \frac{1}{2} \sum_i M_i (v_i^t)^2$$

- 12b. Calcul de l'énergie cinétique de rotation des sections :

$$(E_c^{rotation})^t = \frac{1}{2} \sum_i I_i (\dot{\theta}_i^t)^2$$

13. Test de pic d'énergie cinétique en translation :
  - (a) Si  $(E_c^{translation})^t > (E_c^{translation})^{t-\Delta t}$  : pas de pic atteint.  
Actualisation des positions :  $x_i^t = x_i^{t-\Delta t} + \Delta t v_i^t$  et poursuite à l'étape 14.
  - (b) Sinon détection d'un pic
    - (i) Si critère de convergence vérifié : fin de la procédure.
    - (ii) Sinon retour à l'étape 7.
14. Test de pic d'énergie cinétique en rotation :
  - (a) Si  $(E_c^{rotation})^t > (E_c^{rotation})^{t-\Delta t}$  : pas de pic atteint. Actualisation des  $\theta_i$  :  
 $\theta_i^t = \theta_i^{t-\Delta t} + \Delta t \dot{\theta}_i^t$  puis retour à l'étape 9.
  - (b) Sinon : détection d'un pic et retour à l'étape 8.

## 4.4 Résultats et validation du modèle

Le modèle détaillé dans les parties 4.3 et 4.4 a été implémenté dans l'environnement Rhinoceros / Grasshopper. Cet environnement permet en particulier de travailler de manière très interactive entre une géométrie (gérée par Rhinoceros) et des opérations (gérées par Grasshopper). Ces opérations peuvent être de divers types, en particulier cela peut être des opérations sur la géométrie, du calcul mathématique, etc... Il est possible (même souhaitable) de coder des composants pour réaliser des opérations spécifiques. Un intérêt majeur de cet environnement est de pouvoir jongler très facilement entre la géométrie et la partie qui permet de réaliser les opérations. L'algorithme décrit dans ce chapitre a été implémenté dans une feuille Grasshopper, en python.

La validation du modèle s'est faite en deux étapes : la première a été de valider le modèle dans des cas où seule une énergie potentielle élastique est en jeu, par exemple le cas d'une elastica, ou le cas d'une poutre rectiligne au repos mise en torsion pure. Ces exemples ont bien entendu conduit à des résultats très satisfaisants qui ne sont pas détaillés ici.

La deuxième étape de la validation du modèle a été réalisée sur deux principaux exemples faisant intervenir un couplage flexion/torsion. Pour ce faire, comme nous l'avons montré, nous avons considéré des poutres anisotropes. Nous aurions pu également considérer des poutres de section isotrope mais non rectilignes dans leur configuration au repos.

En outre, pour les deux exemples considérés, la configuration de départ choisie est très différente de la configuration d'équilibre, ce qui permet d'appréhender la qualité de la convergence du modèle. C'est aussi pourquoi nous avons dû choisir un critère de convergence élevé (valeur  $10^{-10}$ ).

Ces deux exemples sont comparés à la solution obtenue à l'aide du logiciel de calcul éléments finis Abaqus, logiciel reconnu à la fois dans le milieu académique et dans le milieu industriel.

La poutre considérée pour ces deux situations a les propriétés suivantes :

- longueur  $L = 10$  m
- section rectangulaire : 4x6 cm
- module d'Young :  $E = 25$  GPa
- module de cisaillement :  $G = 10$  GPa

Ces caractéristiques géométriques et mécaniques ont été choisies pour être voisines de celles des poutres (axisymétriques) utilisées pour élaborer les gridsHELLS récemment construits par le laboratoire Navier.

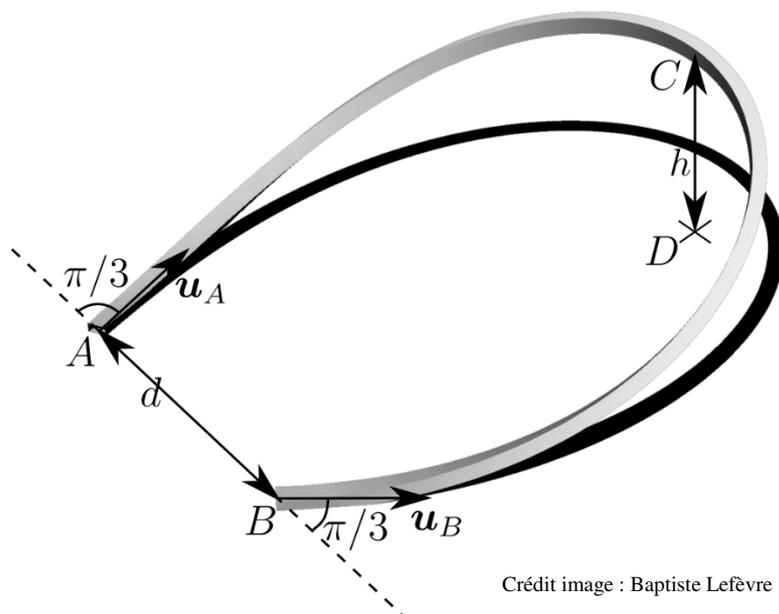
Les calculs réalisés sous Abaqus ont été faits avec des éléments B31, éléments de poutre de Timoshenko. Le modèle utilisé est un modèle statique autorisant bien entendu les non linéarités

liées aux grands déplacements. La résolution est faite en explicite car en implicite les grands déplacements posent problème.

L'intérêt de notre modèle est de pouvoir l'implémenter de manière à simuler des poutres en temps réel, en pouvant par exemple simuler des configurations exotiques comme celles présentées sur la figure 4.13. D'un point de vue opérationnel, Abaqus n'est pas un outil de conception ce qui le rend difficilement compétitif pour ce genre d'utilisations.

#### 4.4.1 Cas de la flexion « contrariée »

Cette flexion que nous qualifions de « contrariée » se produit lorsque l'on fléchit une poutre anisotrope, de section rectangulaire, selon sa direction de plus forte inertie. Au début de la flexion, la poutre se fléchit classiquement, dans le plan de flexion. Puis, lorsque l'on augmente la courbure de cette poutre, l'équilibre devient instable. On observe ainsi une bifurcation du comportement de la poutre. Cette bifurcation se produit lorsque le stockage d'énergie élastique sous forme de torsion et flexion selon la raideur la plus faible devient moins important que le stockage sous forme de flexion selon la raideur la plus importante. Dit autrement, c'est la minimisation de l'énergie élastique de la poutre qui engendre ce transfert d'énergie élastique. Ainsi, cette situation, illustrée en noir sur la figure 4.29, correspond à un maximum local d'énergie élastique. C'est une position physiquement instable mais numériquement stable. Il faut donc favoriser le déplacement hors plan de la poutre en dissymétrisant la configuration initiale. Pour cela, nous avons le choix entre déplacer un nœud hors du plan de flexion, ou provoquer une légère rotation d'une section de la poutre. Alors, on remarque que la poutre sort de son plan de flexion initial.



Crédit image : Baptiste Lefèvre

Figure 4.29 - Exemple type de couplage flexion/torsion

L'exemple étudié est illustré sur la figure 4.29. La poutre est encastree à ses deux extremités, celles-ci sont separees d'une distance  $d = 2 \text{ m}$  et les tangentes au niveau de l'encastrement font un angle  $\pi/3$  avec la droite passant par les deux encastremets.

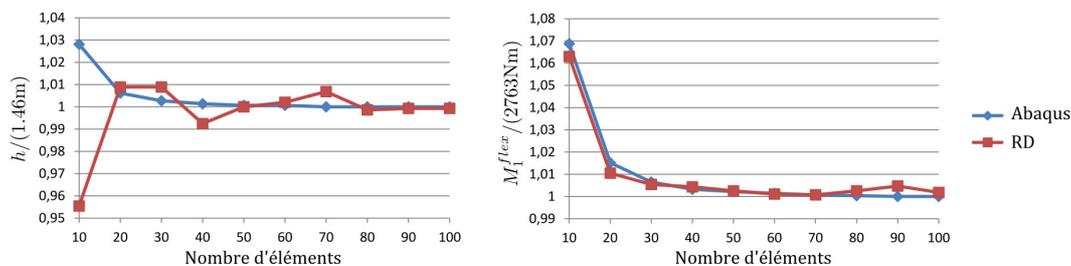
La comparaison des resultats avec Abaqus se fait selon deux criteres, l'un geometrique, l'autre mecanique. Ces criteres sont :

- la valeur de la fleche hors plan  $h$
- la composante selon  $d_1$  du moment de flexion au point C, notee  $M_1^{flexion}$ .

Ces deux grandeurs sont tracees en fonction du nombre d'elements sur la figure 4.30. Nous les normalisons avec les valeurs convergees obtenues avec Abaqus pour 100 elements, soit :

$$h_{Abaqus} = 1,46 \text{ m}$$

$$M_1^{flexion} = 2763 \text{ Nm}$$



**Figure 4.30 - Evolution de la fleche au centre et de la composante de flexion.**

L'evolution de la fleche au centre  $h$  et celle de la composante de flexion  $M_1^{flexion}$  sont reportees sur les graphes, en fonction de la discretisation. Ces grandeurs sont egalement comparees avec Abaqus. Il est alors possible de caracteriser la convergence et la precision de notre algorithme. Celui-ci converge vers la solution obtenue avec Abaqus (reference) de maniere tres satisfaisante.

On constate que notre modele converge de maniere tres satisfaisante vers la solution obtenue avec Abaqus. En ce qui concerne le temps de calcul, notre algorithme s'execute en 1 minute pour 100 elements, c'est-a-dire aussi rapidement qu'Abaqus (les calculs numeriques ont ete faits sur la meme machine). Les temps de calculs obtenus sont donc tres raisonnables, surtout si on considere le fait que la creation d'un modele sous Abaqus est tres couteuse en temps (definition de la poutre, des conditions aux limites, etc...) alors que sous l'environnement Rhinoceros/Grasshopper, cette etape peut etre facilement optimisee. En effet, notre environnement permet de creer tres rapidement une poutre, c'est-a-dire dans son etat de repos. Il est egalement tres rapide de placer cette poutre dans une configuration initiale, en indiquant en particulier les conditions aux limites. L'environnement que l'on a choisi permet egalement de deplacer tres facilement des noeuds, de rajouter des noeuds, et de relancer le calcul numerique tres facilement. Dans le cas de poutres peu raffinees, le calcul se fait en temps reel et la configuration d'equilibre est automatiquement reactualisee ce qui est tres utile pour de la conception. Cette etape est tres fastidieuse sous Abaqus et devient quasiment impossible à

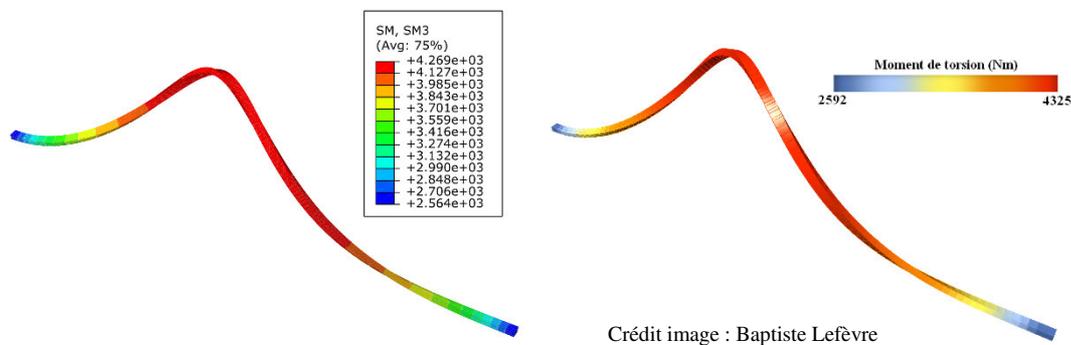
réaliser dans le cas d'un ensemble de poutres interconnectées. Dans le cas de poutres interconnectées, la gestion des connections doit se faire dans un repère local adapté, repère que nous ne pouvons pas définir sous Abaqus.

En outre, nous pouvons par exemple très simplement considérer une poutre à la fois fléchie et ayant un taux de rotation autour de sa ligne neutre non nulle, au repos, ce qui est inenvisageable avec Abaqus.

Les résultats sont donc très satisfaisants, d'autant que notre but n'était pas de calculer rapidement l'équilibre d'une seule poutre, mais plutôt de calculer l'équilibre d'un ensemble de poutres interconnectées dans un temps raisonnable. L'algorithme étant linéaire par rapport au nombre de nœuds, le calcul de structures complexes peut donc tout à fait être envisagé.

#### 4.4.2 Cas de la torsion « flambée »

Pour compléter les résultats prometteurs obtenus dans le cas de la flexion « contrariée », nous avons choisi de simuler un autre exemple faisant intervenir un couplage flexion torsion. Cette situation, que nous appelons torsion « flambée » consiste à appliquer une rotation de  $2\pi$  à une extrémité de la poutre rectiligne, ce qui crée un état de torsion pure, puis à encastrent les deux extrémités de la poutre avant de les rapprocher l'une de l'autre. Si de plus on applique une légère perturbation de la ligne neutre (déplacement hors axe), la poutre flambe. Nous avons simulé cette situation avec Abaqus et avec notre méthode numérique. Les deux déformées sont représentées sur la figure 4.31.



**Figure 4.31 - Torsion "flambée"**

Résultats obtenus avec les éléments finis (gauche) et avec notre algorithme de relaxation dynamique (droite). Le post traitement permet par exemple d'afficher le moment de torsion le long de la poutre.

On peut alors comparer, par exemple, le déplacement radial maximal  $u_r^{max}$  et la contrainte de torsion maximale  $(GJ\tau)^{max}$  obtenus avec les deux méthodes pour 100 éléments :

	Abaqus	Relaxation dynamique
$u_r^{max}$	2,34 m	2,33 m
$(GJ\tau)^{max}$	4269 Nm	4266 Nm

On observe à nouveau une très bonne correspondance avec les résultats obtenus avec la méthode éléments finis.

Pour résumer, les deux exemples présentés ci-dessus permettent de valider le modèle de poutre, également pour des situations faisant intervenir un fort couplage flexion/torsion et des grands déplacements. La convergence du modèle est bonne puisque quelle que soit la configuration initiale, le modèle converge vers la solution d'équilibre physiquement observée. Ainsi le modèle est fonctionnel pour le cas de la simulation d'une poutre seule. Il convient de raffiner le modèle avec des connexions entre les poutres, de manière à pouvoir simuler une structure formée de poutres élancées, par exemple un gridshell.

## 4.5 Modélisation des connexions et implémentation dans un modèle de gridshells.

Disposant d'un robuste modèle de poutre élancée, nous allons ajouter des fonctionnalités permettant la modélisation de structures constituées de poutres élancées. Pour cela, il faut définir des liaisons inter-poutres. Dans cette sous-partie, nous développons donc une modélisation de la liaison typique entre deux poutres d'un gridshell. On appellera excentricité la distance qui sépare les lignes neutres des deux poutres au niveau de la liaison. Dans un premier temps, il est commode de négliger cette excentricité et de supposer que les poutres se confondent au niveau de la liaison. Cependant, négliger l'excentricité peut conduire à des erreurs de prévision du comportement de la structure. C'est pourquoi nous distinguons deux variantes de la liaison, une avec excentricité, l'autre sans.

### 4.5.1 La liaison gridshell

Les connexions utilisées dans les applications gridshell sont généralement des liaisons pivot. Il est assez facile de se représenter cette liaison dans le cas de poutres de section rectangulaire, comme représenté sur la figure 4.32. Ainsi, le seul degré de liberté laissé libre pour les poutres est celui de tourner autour de l'axe de la connexion ; il n'est donc pas possible de transmettre entre les deux poutres un moment colinéaire à l'axe de la connexion. Les autres degrés de liberté n'étant pas autorisés, se traduisent par des efforts au sein de la connexion. La connexion peut donc être sujette à de l'effort normal, de l'effort tranchant ainsi que des moments de flexion.

Si on reprend les notations précédentes, on peut appeler  $\mathbf{d}_1$  le vecteur de la section qui est parallèle à l'axe de la connexion car les vecteurs  $\mathbf{d}_1$  des deux poutres sont alors confondus. Le fait que les vecteurs  $\mathbf{d}_1$  des deux poutres soient confondus constitue une première contrainte. Dans la suite, on distinguera les deux poutres de la liaison à l'aide des exposants  $a$  et  $b$ . L'autre contrainte liée à la liaison sera une excentricité, c'est-à-dire une distance entre les lignes moyennes des deux poutres.

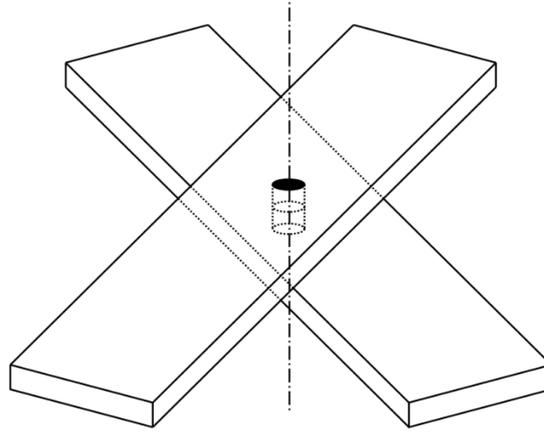


Figure 4.32 - Connexion classiquement utilisée dans les structures gridsHELLS

### 4.5.2 Liaison sans excentricité

La liaison sans excentricité est généralement suffisante pour modéliser les structures de type gridsHELL. En effet, elle permet de modéliser tous les efforts se transmettant d'une poutre à l'autre. La perte d'information est une perte géométrique qui peut toutefois avoir des répercussions sur les contraintes et sur les efforts dans les poutres. Les répercussions peuvent être importantes si les excentricités favorisent des phénomènes de flambement.

Pour cette liaison sans excentricité, les lignes neutres des deux poutres sont confondues au niveau de la liaison. La liaison se caractérise alors à l'aide des deux égalités suivantes :

$$\mathbf{x}^a(s^a) = \mathbf{x}^b(s^b), \quad \mathbf{d}_1^a(s^a) \equiv \mathbf{d}_1^b(s^b)$$

Où  $\mathbf{x}^i(s^i)$  représente la position de la ligne neutre de la poutre  $i$  au niveau de la liaison, et  $\mathbf{d}_1^i(s^i)$  représente la direction matérielle  $\mathbf{d}_1$  pour la poutre  $i$ , au niveau de la liaison.

#### 4.5.2.1 Efforts transmis par la liaison

Pour satisfaire la première propriété, il faut garantir que les deux points restent confondus au cours de l'évolution dynamique du système. Nous allons voir comment nous réalisons cela en pratique, dans le modèle discrétisé.

Pour satisfaire la propriété  $\mathbf{d}_1^a(s^a) \equiv \mathbf{d}_1^b(s^b)$ , nous choisissons de tolérer de petits écarts entre les vecteurs  $\mathbf{d}_1^a$  et  $\mathbf{d}_1^b$  mais de pénaliser cet écart angulaire par un moment de rappel. Cela permettra en outre de simuler une connexion non infiniment rigide, ce qui est le cas en pratique. Nous définissons donc un moment de pénalisation associé à l'écart angulaire entre  $\mathbf{d}_1^a$  et  $\mathbf{d}_1^b$  s'exerçant sur le point  $a$ ,  $\mathbf{M}^{ab}$ , donné par la relation (4.38) :

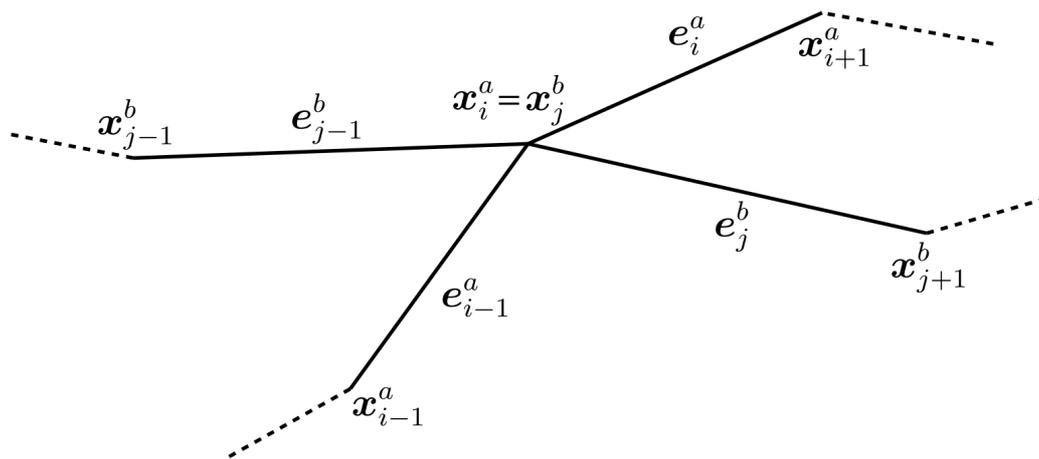
$$\mathbf{M}^{ab} = C^{ab} \mathbf{d}_1^a(s^a) \times \mathbf{d}_1^b(s^b) \quad (4.38)$$

Où  $C^{ab}$  caractérise la raideur de la liaison. Le moment exercé sur le point  $b$ ,  $\mathbf{M}^{ba}$ , est égal à l'opposé de  $\mathbf{M}^{ab}$ .

Ce moment croît avec l'écart angulaire pour tout écart angulaire inférieur à  $\pi/2$ . Il faut donc que la raideur  $C^{ab}$  soit suffisamment importante pour que l'écart angulaire ne dépasse jamais cet angle critique, mais, en pratique, c'est ce qui se passe puisque les liaisons sont très raides et n'autorisent que de faibles écarts angulaires.

#### 4.5.2.2 Implémentation dans le modèle discret.

Etudions le cas d'une liaison entre les nœuds  $x_i^a$  de la poutre  $a$  et  $x_j^b$  de la poutre  $b$ . La connexion entre deux poutres est schématisée sur la figure 4.33.



**Figure 4.33 - Liaison entre deux poutres**

*La liaison entre deux poutres permet le transfert d'une force et d'un moment quelconque d'une poutre à l'autre. Par action et réaction, les deux poutres sont soumises à des forces et des moments opposés.*

En pratique, pour que les nœuds de la liaison restent confondus, nous choisissons de leur affecter la même masse (la somme des deux masses fictives des nœuds) et de les soumettre à la même force (la somme des forces exercées sur les deux nœuds). Une autre solution consisterait à ajouter une force de rappel entre les deux nœuds.

On notera  $f_i^a$  et  $f_j^b$  et  $m_i^a$  et  $m_j^b$  les forces et les moments tangents à implémenter dans le modèle, du fait de la liaison. Comme cela a été vu dans le cas d'un moment extérieur quelconque, il faut projeter les moments  $M^{ab}$  et  $M^{ba}$  sur l'espace des efforts acceptés car notre modèle ne peut traiter les moments orthogonaux à la poutre que de manière indirecte.

On décomposera donc les moments obtenus en deux composantes, de la même manière que pour un moment extérieur (le détail du calcul est expliqué au paragraphe 4.3.4) :

- une composante scalaire représentant le moment parallèle à la tangente :

$$(M_{ij}^{ab})_{\parallel} = (M_{ij}^{ab} \cdot t_i^a) t_i^a$$

- une composante dans le plan orthogonal à la tangente :

$$(M_{ij}^{ab})_{\perp} = M_{ij}^{ab} - (M_{ij}^{ab})_{\parallel}$$

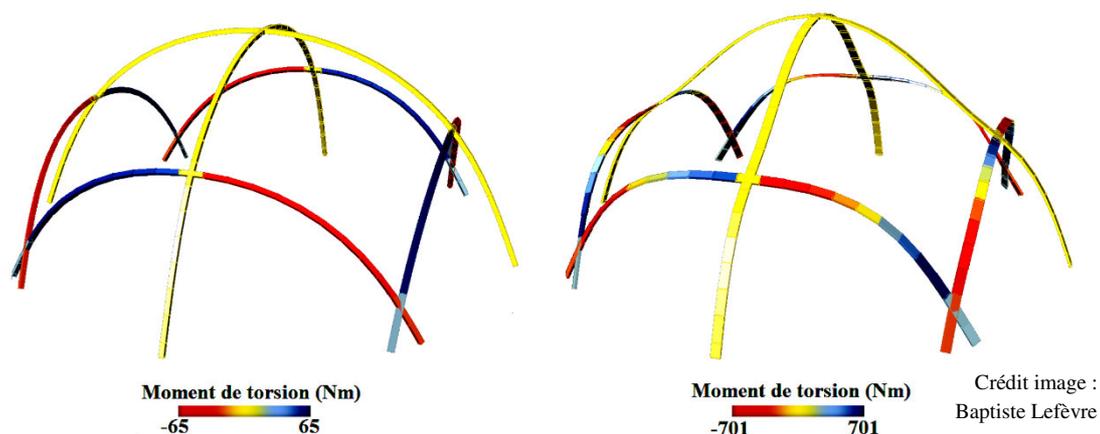
La composante orthogonale étant alors transformée en forces aux nœuds.

### 4.5.2.3 Exemples de gridsHELLS

L'implémentation de cette liaison a été réalisée dans le cas de deux gridsHELLS ayant la même géométrie à plat et les mêmes conditions aux limites. Les poutres de ces deux gridsHELLS sont constituées du même matériau ( $E = 25 \text{ GPa}$  ;  $G = 10 \text{ GPa}$ ) et ne diffèrent que par la géométrie de la section de leurs poutres. Sur la figure 4.34, celui de gauche présente des poutres de section carré 4x4 cm, tandis que celui de droite des poutres de section rectangulaires 2x8 cm. Ces gridsHELLS, dont le pas de maillage est de 4 m, sont « lâchés » dans une configuration initiale épousant une portion de coupole sphérique de 5 m de rayon.

Il est facile de constater que les géométries à l'équilibre sont assez distinctes, mais on remarque également que les moments de torsion au sein des poutres sont très différents. En particulier, pour des poutres de section carrée, les moments de torsion sont uniformes entre deux connexions. Cela confirme ce que nous avons déjà écrit – à savoir que la poutre n'étant pas anisotrope, le dernier terme de droite de l'égalité (4.27) s'annule. Autrement dit, dans le cas de poutres isotropes (par opposition aux poutres anisotropes), il n'y a pas de couplage flexion/torsion. Ce résultat assez général est également démontré dans [AUDOLY08]. Cette absence de couplage torsion/flexion est liée au fait que pour ce type de poutres, la raideur en flexion est uniforme quelle que soit la direction de flexion. Il n'y a donc pas de blocage à la rotation de la poutre autour de son propre axe, comme ce serait le cas avec une poutre anisotrope. A l'opposé on remarque que le moment de torsion dans une poutre à section anisotrope n'est généralement pas uniforme entre deux conditions aux limites. Finalement, les valeurs des moments de torsion sont bien plus élevées dans le cas où les poutres sont anisotropes, du fait du couplage flexion/torsion.

On retiendra donc que la forme d'un gridsHELL et les contraintes mécaniques au sein de ses poutres et ses connecteurs pourront changer significativement avec la section des poutres constitutives. On met aussi en évidence un nouveau paramètre pour jouer sur la forme de ce type de structures.



**Figure 4.34 - Géométrie en vrais déplacements de gridsHELLS constitués de poutres isotropes et anisotropes**

*Les deux gridsHELLS présentés ont des géométries identiques avant déploiement, et sont soumis à des conditions aux limites identiques. Ils sont constitués de poutres de section carrée (poutres isotropes, de section 4x4 cm, gauche) ou de section rectangulaire (poutre anisotrope, de section 2x8 cm, droite). Pour le gridsHELL constitué de poutres isotropes, il*

*n'y a pas de couplage flexion/torsion. En outre, ce gridshell a une raideur importante en flexion dans toutes les directions. Par comparaison, le gridshell constitué de poutres à section rectangulaire présente une des raideurs en flexion plus faible, ce qui conduit naturellement à une courbure potentiellement importante selon cette direction. C'est la raison pour laquelle ce type de gridshells pourrait offrir plus de liberté formelle.*

### 4.5.3 Liaison avec excentricité

La liaison avec excentricité présente l'intérêt de permettre une modélisation exacte d'un gridshell, tant du point de vue géométrique que du point de vue des efforts. On notera toutefois que si l'excentricité est très petite devant la dimension de la structure, le rôle de l'excentricité sur les efforts au sein des poutres restera limité. On notera en revanche que la prise en compte de l'excentricité permet d'obtenir les efforts au sein de la connexion ce qui est intéressant pour l'ingénieur qui cherche à dimensionner la connexion.

Notons  $e$  l'excentricité entre les deux poutres. La liaison est alors caractérisée par la double égalité (4.39), conservée au cours du temps :

$$\mathbf{d}_1^a(s^a) \equiv \mathbf{d}_1^b(s^b) \equiv \frac{1}{e} (\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a)) \quad (4.39)$$

Cette situation est illustrée sur la figure 4.35, et l'on peut reformuler cette double contrainte en 3 propriétés :

- $\mathbf{d}_1^a(s^a)$  et  $(\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a))$  sont colinéaires
- $\mathbf{d}_1^b(s^b)$  et  $(\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a))$  sont colinéaires
- $\|\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a)\| = e$

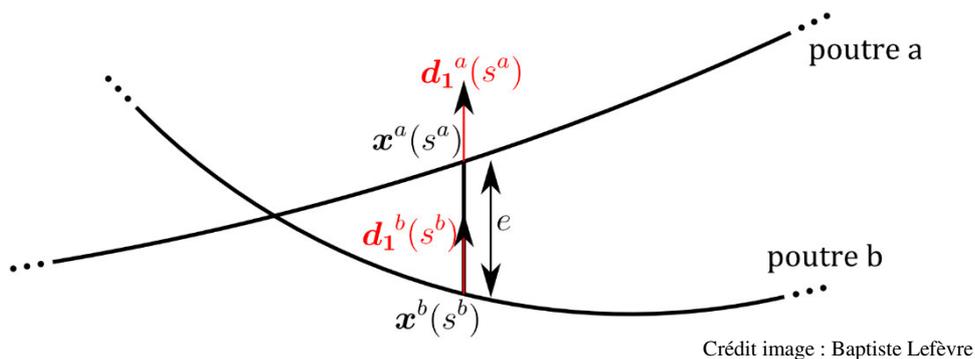


Figure 4.35 - Liaison avec excentricité

#### 4.5.3.1 Efforts de la liaison avec excentricité

Pour imposer les deux premières propriétés, nous procédons comme précédemment, avec un moment de rappel pénalisant tout écart à la colinéarité. Ainsi, la poutre  $a$  est soumise au moment de rappel suivant :

$$\mathbf{M}^{ab} = \frac{C^{ab}}{e} \mathbf{d}_1^a(s^a) \times (\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a))$$

Et, symétriquement, pour la poutre <sup>b</sup> :

$$\mathbf{M}^{ba} = \frac{C^{ab}}{e} \mathbf{d}_1^b(s^b) \times (\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a))$$

Par principe d'action/réaction, le segment reliant  $\mathbf{x}^a(s^a)$  à  $\mathbf{x}^b(s^b)$ , matérialisant la liaison, est quant à lui soumis à un moment :

$$-\mathbf{M}^{ab} - \mathbf{M}^{ba} = -\frac{C^{ab}}{e} (\mathbf{d}_1^a(s^a) + \mathbf{d}_1^b(s^b)) \times (\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a))$$

Pour imposer la dernière propriété, nous choisissons de considérer le segment  $\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a)$  comme un ressort de raideur  $k^{ab}$  et de longueur  $e$  au repos. Les forces induites par ce ressort aux nœuds  $\mathbf{x}^a(s^a)$  et  $\mathbf{x}^b(s^b)$  sont alors  $\mathbf{R}^{ab}$  et  $\mathbf{R}^{ba}$  telles que :

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{ab} = k^{ab} (\|\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a)\| - e) \frac{\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a)}{\|\mathbf{x}^b(s^b) - \mathbf{x}^a(s^a)\|} \\ \mathbf{R}^{ba} = -\mathbf{R}^{ab} \end{cases}$$

La force  $\mathbf{R}^{ab}$  étant la force exercée sur la poutre <sup>a</sup>.

#### 4.5.3.2 Implémentation dans le modèle discret

La liaison avec excentricité ayant été traitée dans le cas continu, il convient de discrétiser les efforts obtenus de manière à pouvoir les intégrer dans un algorithme de simulation.

**A. Calcul des résultantes et des efforts intérieurs** Cette étape est menée à bon terme grâce aux résultats de la section 4.5.3.1.

**B. Calcul des moments de rappel** Les moments de rappel tendant à imposer la colinéarité entre les vecteurs  $\mathbf{d}_1$  et l'axe de la liaison sont définis comme suit dans le modèle discret.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij}^{ab} &= \frac{C^{ab}}{e} \mathbf{d}_{1i}^a \times (\mathbf{x}_j^b - \mathbf{x}_i^a) \\ \mathbf{M}_{ji}^{ba} &= \frac{C^{ab}}{e} \mathbf{d}_{1j}^b \times (\mathbf{x}_j^b - \mathbf{x}_i^a) \end{aligned}$$

Le moment  $\mathbf{M}_{ij}^{ab}$  est destiné à être appliqué au nœud  $\mathbf{x}_i^a$  et le moment  $\mathbf{M}_{ji}^{ba}$  au nœud  $\mathbf{x}_j^b$ . Il ne faut alors pas oublier que le segment reliant le nœud  $\mathbf{x}_i^a$  au nœud  $\mathbf{x}_j^b$  doit être, lui, soumis au moment  $-\mathbf{M}_{ij}^{ab} - \mathbf{M}_{ji}^{ba}$ .

**C. Projection des moments de rappel** Comme précédemment, il faut projeter les moments obtenus sur l'espace des efforts acceptés, c'est-à-dire, des forces aux nœuds et des moments tangents.

A nouveau, on réalise pour  $\mathbf{M}_{ij}^{ab}$  et  $\mathbf{M}_{ji}^{ba}$  la projection des moments et la décomposition en efforts présentée dans la section 4.3.4.

Le moment  $-\mathbf{M}_{ij}^{ab} - \mathbf{M}_{ji}^{ba}$  appliqué au segment reliant le nœud  $\mathbf{x}_i^a$  à  $\mathbf{x}_j^b$  peut quant à lui être modélisé par un couple de forces appliquées respectivement en  $\mathbf{x}_i^a$  et  $\mathbf{x}_j^b$  :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ij}^{ab} = -\frac{1}{2e}(\mathbf{x}_j^b - \mathbf{x}_i^a) \times (\mathbf{M}_{ij}^{ab} + \mathbf{M}_{ji}^{ba}) \\ \mathbf{F}_{ji}^{ba} = -\mathbf{F}_{ij}^{ab} \end{cases}$$

**D. Calcul des forces liées à l'excentricité** Les forces de rappel du ressort de longueur  $e$  au repos, qui tendent à imposer la longueur de la liaison, sont simplement données par :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{ij}^{ab} = k^{ab}(\|\mathbf{x}_j^b - \mathbf{x}_i^a\| - e) \frac{\mathbf{x}_j^b - \mathbf{x}_i^a}{\|\mathbf{x}_j^b - \mathbf{x}_i^a\|} \\ \mathbf{R}_{ji}^{ba} = -\mathbf{R}_{ij}^{ab} \end{cases}$$

**E. Calcul des efforts résultants** En sommant les différentes contributions des efforts intérieurs et extérieurs, on obtient les forces et les moments. On écrit ainsi les forces aux nœuds – on notera  $\mathbf{F}_k^a$  et  $\mathbf{F}_k^b$  les forces appliquées respectivement aux nœuds  $\mathbf{x}_k^a$  et  $\mathbf{x}_k^b$  – et les moments tangents  $M_k^a$  et  $M_k^b$  respectivement appliqués aux éléments  $\mathbf{e}_k^a$  et  $\mathbf{e}_k^b$ .

$$\mathbf{F}_k^a = \begin{cases} \mathbf{f}_{i-1}^a - \left(\frac{l_i^a}{l_{i-1}^a + l_i^a}\right) \frac{1}{l_{i-1}^a} (\mathbf{M}_{ij}^{ab})_{\perp} \times \mathbf{e}_{i-1}^a & \text{si } k = i - 1 \\ \mathbf{f}_i^a + \left(\frac{l_i^a}{l_{i-1}^a + l_i^a}\right) \frac{1}{l_{i-1}^a} (\mathbf{M}_{ij}^{ab})_{\perp} \times \mathbf{e}_{i-1}^a - \left(\frac{l_{i-1}^a}{l_{i-1}^a + l_i^a}\right) \frac{1}{l_i^a} (\mathbf{M}_{ij}^{ab})_{\perp} \times \mathbf{e}_i^a + \mathbf{F}_{ij}^{ab} + \mathbf{R}_{ij}^{ab} & \text{si } k = i \\ \mathbf{f}_{i+1}^a + \left(\frac{l_{i-1}^a}{l_{i-1}^a + l_i^a}\right) \frac{1}{l_i^a} (\mathbf{M}_{ij}^{ab})_{\perp} \times \mathbf{e}_i^a & \text{si } k = i + 1 \\ \mathbf{f}_k^a & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_k^b = \begin{cases} \mathbf{f}_{j-1}^b - \left(\frac{l_j^b}{l_{j-1}^b + l_j^b}\right) \frac{1}{l_{j-1}^b} (\mathbf{M}_{ji}^{ba})_{\perp} \times \mathbf{e}_{j-1}^b & \text{si } k = j - 1 \\ \mathbf{f}_j^b + \left(\frac{l_j^b}{l_{j-1}^b + l_j^b}\right) \frac{1}{l_{j-1}^b} (\mathbf{M}_{ji}^{ba})_{\perp} \times \mathbf{e}_{j-1}^b - \left(\frac{l_{j-1}^b}{l_{j-1}^b + l_j^b}\right) \frac{1}{l_j^b} (\mathbf{M}_{ji}^{ba})_{\perp} \times \mathbf{e}_j^b + \mathbf{F}_{ji}^{ba} + \mathbf{R}_{ji}^{ba} & \text{si } k = j \\ \mathbf{f}_{j+1}^b + \left(\frac{l_{j-1}^b}{l_{j-1}^b + l_j^b}\right) \frac{1}{l_j^b} (\mathbf{M}_{ji}^{ba})_{\perp} \times \mathbf{e}_j^b & \text{si } k = j + 1 \\ \mathbf{f}_k^b & \text{sinon} \end{cases}$$

Le moment  $M_k^{a,b}$  appliqué au segment  $\mathbf{e}_k^{a,b}$  est quant à lui donné par :

$$M_k^a = \begin{cases} m_i^a + \mathbf{M}_{ij}^{ab} \cdot \mathbf{t}_i^a & \text{si } k = i \\ m_k^a & \text{sinon} \end{cases}$$

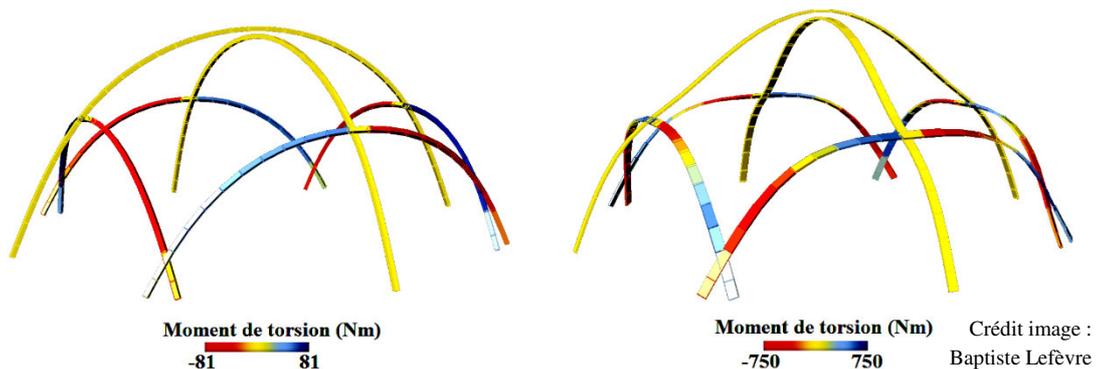
$$M_k^b = \begin{cases} m_j^b + \mathbf{M}_{ji}^{ba} \cdot \mathbf{t}_j^b & \text{si } k = j \\ m_k^b & \text{sinon} \end{cases}$$

**F. Passage à l'itération suivante** Connaissant l'ensemble des forces et des moments, et ayant déterminé les masses et les inerties fictives, nous disposons de toutes les informations pour évaluer la géométrie de la structure au pas de temps suivant.

#### 4.5.3.3 Exemples de gridshells avec excentricité

Nous reprenons les mêmes configurations que précédemment, en ajoutant une excentricité de 15 cm au niveau des liaisons. Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure 4.36. On remarque que les moments de torsion au sein des poutres ont un peu évolué par rapport à la simulation sans excentricités. Il faut en outre garder à l'esprit que l'excentricité pourrait jouer un rôle important, par exemple en favorisant des phénomènes de flambement.

D'autre part, être capable de prendre en compte l'excentricité permet d'avoir accès directement aux efforts dans les connexions et permet un juste dimensionnement de ces connexions. Prendre en compte l'excentricité dans notre modèle est donc essentiel, et peut être réalisé sans augmentation significative du coût de calcul (le coût de calcul dépend des raideurs que l'on considère au niveau des connexions ; si elles ne sont pas plus élevées que les autres raideurs du système, l'ajout des excentricités ne rallonge *a priori* pas le temps de calcul).



**Figure 4.36 - Géométrie de gridshells avec excentricité**

*A nouveau, les deux gridshells présentés figure 4.34 sont repris et une excentricité identique est ajoutée. A nouveau, ils ont constitués de poutres ayant la même forme au repos et sont soumis à des conditions aux limites identiques. Pour le gridshell constitué de poutres de section carrée (4x4 cm, gauche), il n'y a pas de couplage flexion/torsion contrairement au gridshell de droite (poutres de 2x8 cm de section). Du point de vue de la géométrie, on ne remarque pas de différence notable avec les déformées de la figure 4.34, si ce n'est l'ajout de l'excentricité.*

## 4.6 Conclusions

Ce travail de modélisation nous a donc permis de développer un modèle de structures composées de poutres élancées de section quelconque, en petites déformations mais grands déplacements. Ce modèle, basé sur le modèle de poutres de Kirchhoff – à savoir inextensibilité de la ligne neutre et orthogonalité des sections à la ligne neutre – est intéressant sous divers aspects.

Ce modèle à 4 degrés de libertés est un modèle précis, discrétisé à partir d'un modèle continu, ce qui est la particularité de l'approche. Les 4 degrés de liberté sont associés aux paramètres  $\alpha$  et  $\theta$ ,  $\alpha$  ayant trois composantes permettant de repérer la géométrie de la ligne neutre, et  $\theta$  permettant de repérer la rotation des sections de la poutre par rapport à un champ de repères de Bishop. Ce paramétrage permet ainsi de modéliser à la fois les phénomènes de flexions et ceux de torsion. Cela est un point important car hormis l'algorithme de Ong, [ONG92], aucun algorithme de relaxation dynamique ne traite les phénomènes de torsion de poutre, dans le cas général.

En outre, le modèle proposé permet de prendre en considération des conditions aux limites diverses, les liaisons entre les diverses poutres par l'intermédiaire de connexions, mais également de considérer des éventuels forces et moments extérieurs appliqués sur la structure.

Finalement, l'algorithme proposé permet de simuler, de manière complète, le form-finding de structures faites de poutres interconnectées. Il permet également de simuler ces mêmes structures sous des chargements quelconques.

Le choix de l'algorithme de relaxation dynamique résulte de notre objectif principal qui est d'obtenir la géométrie d'équilibre d'une structure constituée de poutres élancées, ainsi que les contraintes au sein de celle-ci, une fois l'équilibre atteint. En effet, nous ne nous préoccupons pas particulièrement des configurations intermédiaires de la structure, puisque, comme nous l'avons vu dans la section 2.1.1, les endommagements pour les structures en *active bending* sont des endommagements liés aux chargements permanents. En particulier, si l'état de contrainte est important pendant les 30 minutes de déploiement de la structure, cela n'est pas problématique, comme l'indique le tableau des valeurs du coefficient  $\gamma_{m,3}$  (figure 2.1). L'algorithme de relaxation dynamique permet donc l'obtention de la configuration d'équilibre en passant par un chemin fictif, avec un nombre d'itérations optimisé. Ce chemin fictif optimisé est lié à l'amortissement choisi pour la structure (amortissement cinétique).

L'algorithme proposé est comparable à Abaqus du point de vue des performances de calcul, une fois l'opération de pré-processing réalisée. Il converge avec précision vers la solution d'équilibre obtenue avec Abaqus (référence). En outre, le développement de cet algorithme dans l'environnement de travail Rhinoceros/Grasshopper permet une très grande interactivité entre la géométrie des poutres ou des structures, et la paramétrisation utilisée pour le calcul de l'équilibre (raideurs, géométries, etc...). Il permet également de prendre en compte des poutres exotiques et des connexions définies par l'utilisateur, facilement, ce qui n'est pas le cas avec Abaqus. Pour des structures composées de poutres interconnectées, Abaqus devient presque impossible à utiliser, du fait de la gestion du pré-processing, des conditions aux limites et des connexions qui devient très complexe.

Enfin, le post-traitement de l'algorithme permet de remonter à la contrainte axiale  $\sigma_{33}$  au sein des poutres, mais aussi au moment de torsion et donc aux contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  et aux efforts dans les connexions, notamment grâce à l'introduction des excentricités.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont multiples. Nous aborderons les plus intéressantes dans la conclusion générale de ce travail.



# Conclusion

Ce travail réalisé sur la problématique des gridshells en matériaux composites s'inscrit dans la dynamique du laboratoire Navier ces dernières années. Cette dynamique s'est traduite par de nombreux articles et résultats scientifiques, abordant des aspects matériaux ou structure, mais également par la conception et fabrication de divers prototypes de plus en plus aboutis. Ma contribution s'inscrit dans cette histoire et j'ai eu la chance de pouvoir participer au design et à la construction des deux dernières réalisations, qui représentent les deux réalisations majeures de Navier. Le premier gridshell a été construit dans le but d'accueillir jusqu'à 500 personnes durant le festival Solidays (Paris, juin 2011) et sa construction fut une aventure structurante pour l'école puisqu'accompagnée également par des élèves, et en relation étroite avec plusieurs entreprises de construction. Les délais très courts pour la conception et le montage/démontage, dus aux enjeux financiers très importants (intégration dans un programme de courses hippiques de l'hippodrome de Longchamp). Durant les trois jours de festival, 150 000 personnes ont eu l'opportunité de visiter le gridshell qui a hébergé des forums, une discothèque et un stand FNAC. Cela a transformé le projet en un challenge très stimulant et a permis de confronter les concepts recherche à la réalité du terrain, et même à la météo ! La seconde aventure plus apaisée, a bénéficié largement de cette effervescence, et représente un cap très important pour la promotion de la technologie. Des outils numériques rêvés durant le projet Solidays ont pu être mis en œuvre pour la conception de *la Cathédrale éphémère de Créteil*. Ces outils, leur rationalisation et des interfaces plus efficaces sont toujours en développement au laboratoire. Les tests sur les matériaux et sur les ancrages que nous avons pu mettre en place, les technologies proposées, ont permis la mise en place de cette grande structure fonctionnelle, fermée, chauffée, élégante, plébiscitée par tous et surtout certifiée par un bureau de contrôle pour 2 ans, et finalement prolongée une année de plus. Là aussi la richesse des échanges avec les bénévoles, le diocèse, les bureaux d'étude, de contrôle, les équipementiers et les entreprises de chantier fut extrêmement profitable et stimulante. La question de la robustesse de la solution, étudiée dans le chapitre 3 s'est par exemple imposée naturellement dans un tel contexte.

Après une bibliographie sur ces structures, ce sont tous ces aspects que nous avons détaillés dans les 3 premiers chapitres de la thèse. Nous avons rappelé dans le premier, le contexte dans lequel s'insèrent les gridshells, avons justifié la pertinence des matériaux composites dans cette application. Les étapes de conception ont été développées largement afin de rendre accessible cette technologie, en particulier celles relatives à recherche de forme (form-finding).

Le second chapitre a détaillé les deux gridshells réalisés durant ma thèse. Il s'est attardé en particulier sur mes contributions. Les tests réalisés sur les matériaux ont permis de mieux appréhender la réalité de ces semi-produits composites, en termes de propriétés mécaniques et de capacité à se connecter avec d'autres éléments. Les composites sont connus pour cette difficulté, et nous avons proposé des solutions éprouvées à base de collages et clavetages qui ont pu être certifiées. Un travail important de caractérisation des noix de connections, une estimation des efforts de connexion admissibles, des forces de glissement, ainsi que des recommandations ont été produites. Il reste sur ce sujet un vrai travail de design original à faire.

Le dernier chapitre représente l'outil qui permettra de le faire. D'autres aspects technologiques ont également été étudiés et finalement le retour d'expérience a permis et permettra encore d'autres améliorations du concept.

Le troisième chapitre, a donc présenté en détail une étude conduite sur la robustesse des gridshells, répondant ainsi à de récurrentes interrogations sur leur fiabilité et sur le niveau de sécurité qu'ils peuvent procurer, notamment pour des bâtiments recevant du public (ERP). Il a ainsi été montré que paradoxalement (les tubes composites sont fragiles), la structure présente un comportement ductile important, caractérisé par le fait que des déplacements exagérés précèdent très largement la ruine de la structure, c'est-à-dire la rupture de nombreuses barres. Il a été montré qu'il faut éviter tout risque de flambement élastique, car celui-ci, en modifiant la géométrie la structure redistribue énormément les contraintes dans les barres et surcharge rapidement une grande quantité de barres. Il a été montré également qu'il est très facile de positionner l'ELU (État Limite de Service) très en deçà des charges de flambement et que donc les risques sont très faibles. Nous avons également soumis le gridshell à des événements accidentels, et imposé une cinétique de rupture de barre en chaîne. Une très grande stabilité a été observée, même dans les cas de ruptures très localisées. Nous avons conclu que c'est la redondance structurelle des gridshells, le grand nombre de barres identiques jouant des rôles assez proches, qui lui confère une importante robustesse en cas de situation accidentelle raisonnable.

Enfin, dans le dernier chapitre, plus théorique, nous avons présenté un nouveau modèle de poutre capable de simuler correctement la torsion des poutres élancées en grands déplacements. Négligée jusqu'alors dans les outils mis en place dans le laboratoire, la torsion peut cependant avoir des impacts non négligeables, notamment si les poutres ne sont pas isotropes, c'est-à-dire si les poutres n'ont pas les mêmes inerties dans les deux directions principales. La torsion pilote également une part importante des efforts vus par les connecteurs et jonctions des gridshells. Bien simuler ces effets permettra un design optimal de ces connexions. Le modèle proposé est basé sur le modèle de poutres de Kirchhoff, à savoir inextensibilité de la ligne neutre et orthogonalité des sections à la ligne neutre, discrétisé à partir d'un modèle continu, ce qui est une particularité de l'approche. Les 4 degrés de liberté permettent de repérer la géométrie de la ligne neutre, ainsi que la rotation des sections de la poutre par rapport à un champ de repères de Bishop. Ce paramétrage permet ainsi de modéliser à la fois les phénomènes de flexions et ceux de torsion. Une méthode de relaxation dynamique est utilisée ici pour la résolution numérique. Le modèle proposé permet de prendre en considération des conditions aux limites diverses, les liaisons entre les diverses poutres par l'intermédiaire de connexions, mais également de considérer des éventuels forces et moments extérieurs appliqués sur la structure. Finalement, l'algorithme proposé permet de simuler, de manière complète, le form-finding de structures faites de poutres interconnectées. Il permet également de simuler ces mêmes structures sous des chargements quelconques. Validé par comparaison avec une approche poutre d'Abaqus, il est comparable en termes de performances de calcul. Il est cependant beaucoup plus efficace comme outil de conception tant les opérations de pré-processing sont faciles à mettre en œuvre. Développé dans l'environnement de travail Rhinoceros/Grasshopper il permet une très grande interactivité entre la géométrie des poutres ou des structures et la paramétrisation utilisée pour le calcul de l'équilibre (raideurs, géométries, etc...). Il permet

également de prendre en compte des poutres exotiques et des connexions définies par l'utilisateur, facilement, ce qui n'est pas le cas avec Abaqus notamment pour des poutres interconnectées. Enfin, le post-traitement de l'algorithme permet de remonter à la contrainte axiale au sein des poutres, mais aussi au moment de torsion et donc aux contraintes de cisaillement et aux efforts dans les connexions, notamment grâce à l'introduction des excentricités. Les perspectives ouvertes par ce travail sont multiples, et pas uniquement réservées aux gridshells tels que définis dans le document.

Il est désormais possible de mieux estimer les efforts de torsion dans les gridshells existants et d'évaluer l'éventuel rôle de la torsion dans les ruptures de tubes observées. Ce modèle va permettre de recalculer précisément les efforts et les contraintes de la « Cathédrale éphémère de Créteil ». Il permettra en particulier d'obtenir la répartition du moment de torsion dans les poutres du gridshell, ce qui permettra alors de savoir s'il y a une corrélation entre la torsion au sein des poutres et les ruptures observées. Il se pourrait que l'on trouve une corrélation entre la localisation des maximums de torsion et ceux des ruptures. Cette étude permettra de compléter les travaux réalisés par Kotelnikova.

Ce nouveau modèle permet également de concevoir d'autres types de structures légères formées par exemple de poutres plates. Ces poutres anisotropes génèrent de la forme, comme cela a été illustré sur les figures 4.34 et 4.36. Ainsi, l'utilisation couplée de ce type de poutre et de l'algorithme présenté dans ce chapitre va offrir à l'architecte un plus grand espace de formes. On citera Sina Nabaei qui s'est très récemment penché sur ce sujet au cours de ses travaux de recherche à l'EPFL [Nabaei14], illustration figure C.1. Dans cette perspective, l'outil numérique développé dans ce chapitre a été conçu de manière à être facilement accessible aux ingénieurs mais aussi aux architectes.



**Figure C.1 - Tressage de poutres anisotropes**

Le modèle permet également de développer de nouveaux modèles de liaisons, rotules, glissières, ressorts, pour élargir le champ d'application de notre algorithme, et imaginer de nouveaux concepts structuraux.

Enfin designer des connexions parfaitement adaptées à une conception donnée, gridshell ou autres structures légères très déformables, devient envisageable. Nous rappelons que les connexions utilisées dans nos prototypes sont des noix d'échafaudage qui pèsent environ 1 kg, soit à peu près autant qu'un mètre de poutre, ou encore autant de masse totale de connecteurs que de tubes composites ! En plus de ne pas être très esthétiques, ces connexions sont largement surdimensionnées.

L'ensemble de ce travail représente finalement une contribution à la promotion des structures légères et des matériaux composites dans la construction.



# Table des figures

FIGURE 1.1 - ILLUSTRATION DE LA TRANSMISSION DES EFFORTS DANS UNE COQUILLE D'ŒUF.....	19
FIGURE 1.2 - TYPOLOGIE DES STRUCTURES PROPOSEE PAR SCHLAICH.....	19
FIGURE 1.3 - ASSEMBLAGE DE LA GRILLE PRIMAIRE A PLAT SUR LE SITE DE CONSTRUCTION .....	21
FIGURE 1.4 - DEPLOIEMENT PUIS ANCRAGE DE LA GRILLE .....	21
FIGURE 1.5 - TRIANGULATION DU GRIDSHHELL .....	21
FIGURE 1.6 - GRIDSHHELL DE MANNHEIM .....	23
FIGURE 1.7 - CATHEDRALE EPHEMERE DE CRETEIL .....	24
FIGURE 1.8 - DIAGRAMME D'ASHBY UTILISE POUR LE CHOIX DES MATERIAUX.....	26
FIGURE 1.9 - ILLUSTRATION DE LA METHODE DU COMPAS .....	28
FIGURE 1.10 - ILLUSTRATION DU MAILLAGE D'UNE SURFACE SOUS RHINOCEROS.....	29
FIGURE 1.11 - ILLUSTRATION DU CALCUL DE LA COURBURE, EVALUEE EN CHAQUE NŒUD .....	31
FIGURE 1.12 - DECOMPOSITION D'UN MOMENT DE FLEXION EN UN COUPLE DE FORCE .....	32
FIGURE 1.13 - ILLUSTRATION DE LA RELAXATION DYNAMIQUE SUR L'EXEMPLE DU PENDULE .....	34
FIGURE 1.14 - SCHEMA RESUME DE LA CONCEPTION D'UN GRIDSHHELL .....	37
FIGURE 1.15 - GRIDSHHELLS DE SOLIDAYS (GAUCHE) ET DE CRETEIL (DROITE).....	38
FIGURE 2.1 - TABLEAU DE VALEUR DU COEFFICIENT DE SECURITE $\gamma_m, 3$ .....	44
FIGURE 2.2 - ILLUSTRATION DE LA CONTRAINTE POUR UNE SOLLICITATION EN FLEXION .....	46
FIGURE 2.3 - ILLUSTRATION DU PROCEDE DE PULTRUSION .....	47
FIGURE 2.4 - ENROULEMENT FILAMENTAIRE.....	47
FIGURE 2.5 - MONTAGE EXPERIMENTAL POUR LA DETERMINATION DU MODULE D'YOUNG .....	48
FIGURE 2.6 - DETERMINATION DU MODULE D'YOUNG DE LA POUTRE PULTRUDEE .....	49
FIGURE 2.7 - MODULES D'YOUNG DES POUTRES PULTRUDEES ET PULLWINDEES .....	49
FIGURE 2.8 - CONTRAINTES A RUPTURE POUR LES POUTRES PULTRUDEES ET PULL-WINDEES.....	50
FIGURE 2.9 - MONTAGE FLEXION QUATRE POINTS .....	51
FIGURE 2.10 - MONTAGE EXPERIMENTAL SIMULANT LES CONDITIONS REELLES.....	53
FIGURE 2.11 - ENDOMMAGEMENT DU TUBE A L'ISSUE DU TEST DE FLEXION.....	53
FIGURE 2.12 - EVOLUTION DE LA FORCE DE MAINTIEN EN FLEXION DU TUBE .....	54
FIGURE 2.13 - NOIX DE CONNEXIONS LAISSANT LIBRE LE DEGRE DE LIBERTE EN CISAILEMENT .....	55
FIGURE 2.14 - DEUXIEME DEPLOIEMENT DU GRIDSHHELL TEST .....	56
FIGURE 2.15 - MAQUETTE DE GRIDSHHELL DOUBLE NAPPE - TIM JENSEN.....	57
FIGURE 2.16 - PREMIER PROTOTYPE DE GRIDSHHELL EN MATERIAUX COMPOSITES .....	58
FIGURE 2.17 - CHARGEMENT DU PROTOTYPE DE GRIDSHHELL .....	58
FIGURE 2.18 - PROTOTYPE DE GRIDSHHELL COUVRANT LA SOUFFLERIE DE L'ENPC .....	59
FIGURE 2.19 - CHOIX DE LA FORME DU GRIDSHHELL DE SOLIDAYS.....	60
FIGURE 2.20 - CARTOGRAPHIE DES CONTRAINTES A L'ISSUE DU FORM-FINDING .....	61
FIGURE 2.21 - DISTRIBUTION DES SURPRESSIONS DANS LE CAS D'UN VENT VENANT DE L'EST .....	62
FIGURE 2.22 - CARTOGRAPHIE DES CONTRAINTES DANS LES POUTRES, SOUS CHARGEMENT ELU .....	63
FIGURE 2.23 - EFFORT A REPRENDRE AU NIVEAU DES RIVES PUIS DES ANCRAGES.....	64
FIGURE 2.24 - CARTOGRAPHIE DES FORCES A REPRENDRE AUX ANCRAGES .....	65
FIGURE 2.25 - MONTAGE DE TEST D'ANCRAGES.....	66
FIGURE 2.26 - TESTS D'ANCRAGES, EXPLORATION .....	67
FIGURE 2.27 - RESULTATS DES TESTS SUR ANCRAGES INCLINES .....	67
FIGURE 2.28 - REPERAGE DES POINTS D'ANCRAGE PAR LES GEOMETRES .....	68
FIGURE 2.29 - ANCRAGES UNE FOIS MIS EN PLACE.....	69
FIGURE 2.30 - VUE DE DESSUS DU SITE ET STRATEGIE DE DEPLOIEMENT .....	70

FIGURE 2.31 - ELABORATION DE LA GRILLE PRIMAIRE .....	70
FIGURE 2.32 - DEPLOIEMENT DU GRIDSHHELL .....	71
FIGURE 2.33 - TRIANGULATION DU GRIDSHHELL A L'AIDE D'UNE NACELLE .....	71
FIGURE 2.34 - MISE EN PLACE DE LA RIVE SUR LES ANCRAGES .....	72
FIGURE 2.35 - DEPLOIEMENT DE LA MEMBRANE PAR ESMERY CARON .....	72
FIGURE 2.36 - CHIFFRES CLES DU GRIDSHHELL SOLIDAYS.....	73
FIGURE 2.37 - GRIDSHHELL DE SOLIDAYS DURANT LE FESTIVAL.....	73
FIGURE 2.38 - ENDOMMAGEMENT D'UNE RIVE SITUEE AU NIVEAU D'UNE PORTE .....	75
FIGURE 2.39 - TRIANGULATION PAR CABLE SIMILAIRE A CELLE UTILISEE POUR LE GRIDSHHELL DE MANNHEIM .....	75
FIGURE 2.40 - UN RABOUTAGE PROBLEMATIQUE .....	76
FIGURE 2.41 - RABOUTAGE UTILISE .....	76
FIGURE 2.42 - MARQUAGE DE LA MEMBRANE PAR LES BOULONS .....	77
FIGURE 2.43 - SOLUTION ENVISAGEABLE POUR LA PROTECTION DE LA MEMBRANE .....	77
FIGURE 2.44 - ESPACE INTERIEUR DU GRIDSHHELL DE SOLIDAYS .....	79
FIGURE 2.45 - CROQUIS DE L'ARCHITECTE.....	80
FIGURE 2.46 - PLATINE D'ANCRAGE, IN SITU (GAUCHE) ET EN TEST (DROITE).....	81
FIGURE 2.47 - PARAMETRAGE GEOMETRIQUE D'UN GOUPILLAGE.....	82
FIGURE 2.48 - MODES D'ENDOMMAGEMENT DES TUBES COMPOSITES PAR GOUPILLAGE .....	83
FIGURE 2.49 - ENDOMMAGEMENT SELON LE MODE 3 : RUPTURE EN CISAILLEMENT DE LA MATRICE .....	84
FIGURE 2.50 - ENDOMMAGEMENT SELON LE MODE 5 : MATAGE DU COMPOSITE .....	84
FIGURE 2.51 - TEST D'UN ASSEMBLAGE GOUPILLE EN TRACTION (CAS DIMENSIONNANT) .....	85
FIGURE 2.52 - RESULTATS DES FORCES REPRISES PAR GOUPILLAGE .....	85
FIGURE 2.53 - MONTAGE A TROIS GOUPILLES EN PHASE DE TESTS.....	86
FIGURE 2.54 - COURBE DE CHARGE DE L'ASSEMBLAGE GOUPILLE.....	86
FIGURE 2.55 - RABOUTAGE ACIER .....	88
FIGURE 2.56 - MANCHON COMPOSITE.....	89
FIGURE 2.57 - TEST EN FLEXION D'UNE POUTRE RABOUTEE .....	89
FIGURE 2.58 - ENDOMMAGEMENT DE LA POUTRE RABOUTEE .....	89
FIGURE 2.59 - MONTAGE REALISE POUR LES TESTS DE GLISSEMENT.....	90
FIGURE 2.60 - RESULTATS DES TESTS EN GLISSEMENT POUR DIVERSES SOLUTIONS .....	91
FIGURE 2.61 - INFLUENCE DU COUPLE DE SERRAGE SUR LE GLISSEMENT .....	92
FIGURE 2.62 - INFLUENCE DE LA TEMPERATURE SUR LA FORCE DE FROTTEMENT .....	93
FIGURE 2.63 - PORTE METALLIQUE GARANTISSANT ETANCHEITE ET SECURITE .....	94
FIGURE 2.64 - VUE INTERIEURE DU GRIDSHHELL.....	95
FIGURE 2.65 - CHIFFRES ET INFORMATIONS CLES POUR LE GRIDSHHELL DE CRETEIL .....	95
FIGURE 2.66 - RUPTURE DE TUBE DANS LA NAPPE INFERIEURE .....	96
FIGURE 3.1 - PROPRIETES MECANQUES DES PROFILS PULTRUDES GFRP .....	103
FIGURE 3.2 - FONCTION DE REPARTITION POUR LA LOI DE RESISTANCE $Rd$ .....	104
FIGURE 3.3 - MODELE DE CHARGEMENT POUR LE CAS DE NEIGE .....	105
FIGURE 3.4 - ÉVOLUTION DE LA CONTRAINTE MAXIMALE EN FONCTION DU CHARGEMENT .....	106
FIGURE 3.5 - ÉVOLUTION DU DEPLACEMENT MAXIMAL EN FONCTION DU CHARGEMENT .....	107
FIGURE 3.6 - FLAMBEMENT LOCALISE, PAR SNAP-THROUGH .....	108
FIGURE 3.7 - FLAMBEMENT EN PIED DE STRUCTURE .....	108
FIGURE 3.8 - POSITIONNEMENT DU FLAMBEMENT PAR RAPPORT A L'ELU DE VENT CONSIDERE .....	111
FIGURE 3.9 - CONTRAINTES DANS LE GRIDSHHELL, SOUS L'ELU DE VENT CONSIDERE .....	112
FIGURE 3.10 - CONTRAINTES DANS LE GRIDSHHELL APRES 64 RUPTURES D'ÉLEMENT.....	112
FIGURE 3.11 - CONTRAINTES DANS LE GRIDSHHELL APRES RUPTURES, SOUS POIDS PROPRE .....	113
FIGURE 3.12 - DEPLACEMENT MAXIMAL EN FONCTION DU NOMBRE D'ÉLEMENTS CASSES.....	113
FIGURE 3.13 - CARTOGRAPHIE DES ÉLEMENTS CASSES ET ZONES DE RUINES .....	114

## TABLE DES FIGURES

FIGURE 3.14 - VUES INTERIEURES DE LA CATHEDRALE EPHEMERE DE CRETEIL.....	115
FIGURE 4.1 - EXEMPLE DE DEFORMATION DE POUTRE A SECTION RECTANGULAIRE .....	118
FIGURE 4.2 - CONNEXION DE GRIDSELL BLOQUANT LA ROTATION DE LA POUTRE SUR ELLE-MEME .....	119
FIGURE 4.3 - MISE EN EVIDENCE DE LA TORSION SUR UN GRIDSELL QUELCONQUE .....	120
FIGURE 4.4 - MODE DE RUPTURE DIFFEREE EN FLEXION PERMANENTE .....	121
FIGURE 4.5 - FACIES DE RUPTURE DIFFEREE SOUS FLEXION/TORSION PERMANENTE .....	122
FIGURE 4.6 - RUPTURE OBSERVEE SUR UNE POUTRE DU GRIDSELL DE CRETEIL .....	122
FIGURE 4.7 - ILLUSTRATION DES COMPORTEMENTS D'UNE POUTRE ELANCEE.....	124
FIGURE 4.8 - MOUVEMENT FICTIF D'UNE BILLE DANS UN BOL ELLIPSOÏDAL.....	129
FIGURE 4.9 - DISCONTINUTE DU REPERE DE FRENET EN UN POINT D'INFLEXION.....	131
FIGURE 4.10 - REPERE TANGENT ORTHONORME $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$ .....	132
FIGURE 4.11 - ROTATIONS POSSIBLES POUR LE CHAMP DE REPERES TANGENT .....	133
FIGURE 4.12 - ROTATION D'UN CHAMP DE REPERES ATTACHE A LA MATIERE .....	134
FIGURE 4.13 - CONFIGURATION AU REPOS DE POUTRES "EXOTIQUES" .....	135
FIGURE 4.14 - MESURE DU TAUX DE ROTATION DANS LA CONFIGURATION AU REPOS.....	136
FIGURE 4.15 - MESURE DU TAUX DE ROTATION DANS LA CONFIGURATION ACTUELLE.....	136
FIGURE 4.16 - POUTRE EN TORSION PURE UNIFORME .....	137
FIGURE 4.17 - GENERALISATION DU CALCUL DU TAUX DE TORSION .....	140
FIGURE 4.18 - CAS D'UNE POUTRE EN FLEXION UNIFORME .....	141
FIGURE 4.19 - GENERALISATION DU TRAITEMENT DE LA FLEXION .....	144
FIGURE 4.20 - GENERALISATION DU CALCUL DES ENERGIES D'UNE POUTRE.....	145
FIGURE 4.21 - FLEXION D'UNE POUTRE SELON SON INERTIE PRINCIPALE LA PLUS FORTE .....	149
FIGURE 4.22 - DISCRETISATION DE LA POUTRE.....	150
FIGURE 4.23 - TRANSPORT PARALLELE DISCRET.....	151
FIGURE 4.24 - PROJECTION D'UN MOMENT EXTERIEUR SUR L'ESPACE DES EFFORTS ACCEPTES.....	154
FIGURE 4.25 - CHOIX DE LA MASSE FICTIVE SUR L'EXEMPLE DU RESSORT .....	157
FIGURE 4.26 - MOMENT D'INERTIE FICTIF OPTIMAL DANS LE CAS D'UN RESSORT DE TORSION .....	158
FIGURE 4.27 - ÉCHELLES DE TEMPS ASSOCIEES AUX ENERGIES DE TRANSLATION ET DE ROTATION .....	159
FIGURE 4.28 - MODELISATION DE L'ENCASTREMENT.....	159
FIGURE 4.29 - EXEMPLE TYPE DE COUPLAGE FLEXION/TORSION.....	164
FIGURE 4.30 - EVOLUTION DE LA FLECHE AU CENTRE ET DE LA COMPOSANTE DE FLEXION. ....	165
FIGURE 4.31 - TORSION "FLAMBEE".....	166
FIGURE 4.32 - CONNEXION CLASSIQUEMENT UTILISEE DANS LES STRUCTURES GRIDSELLS .....	168
FIGURE 4.33 - LIAISON ENTRE DEUX POUTRES.....	169
FIGURE 4.34 - GEOMETRIE EN VRAIS DEPLACEMENTS DE GRIDSELLS CONSTITUES DE POUTRES ISOTROPES ET ANISOTROPES .....	170
FIGURE 4.35 - LIAISON AVEC EXCENTRICITE .....	171
FIGURE 4.36 - GEOMETRIE DE GRIDSELLS AVEC EXCENTRICITE .....	174
FIGURE C.1 - TRESSAGE DE POUTRES ANISOTROPES .....	179
FIGURE A.1 - COUTURE D'UNE BALLE DE TENNIS, NON SUJETTE A DE LA TORSION .....	201



# Bibliographie

- Abaqus theory manual, *Simulia*, 2013.
- ADRIAENSSENS, S., *Stressed spline structures*. Thèse de doctorat, University of Bath, 2000.
- ADRIAENSSENS, S., BARNES, M.R., Tensegrity spline beam and grid shell structures. *Engineering Structures*, 23 (1), 2001, pp. 29-31.
- ADRIAENSSENS, S., BARNES, M.R., WILLIAMS, C.J.K., A new analytic and numerical basis for the form-finding and analysis of spline and grid-shell structures. *Computing Developments in Civil and Structural Engineering*, 1999.
- ANTMAN, S.S., *Nonlinear problems of elasticity*. Springer, 1995.
- AUDOLY, B., POMMEAU Y., *Elasticity and geometry*. Oxford University Press, 2008.
- BANK, L.C., *Composites for Construction: Structural Design with FRP Materials*. Publisher: Wiley, 560 p., 2006, ISBN-10 / ASIN: 0471681261.
- BARNES, M.R., Applications of dynamic relaxation to the topological design and analysis of cable, membrane and pneumatic structures. *Second international conference on space structures*, 1975.
- BARNES, M.R., Form and stress engineering of tension structures. *Structural engineering review*, 1994.
- BARNES, M.R., ADRIAENSSENS, S., KRUPKA, M., A novel torsion/bending element for dynamic relaxation modeling. *Computers and Structures*, 2013.
- BAVEREL, O., CARON, J.F., TAYEB, F., DU PELOUX, L., Gridshells in Composite Materials: Construction of a 300 m<sup>2</sup> Forum for the Solidays' Festival in Paris. *Structural Engineering International (IABSE)*, Volume 22, Number 3, August 2012, pp. 408-414.
- BAVEREL, O., NOOSHIN, H., KUROIWA, Y., Configuration processing of nexorades using genetic algorithms. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 45, Issue 2, 2004, pp. 99-108.
- BERGOU, M., AUDOLY, B., VOUGA, E., WARDETZKY, M., GRINSPUN, E., Discrete viscous threads. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 2010
- BERGOU, M., WARDETZKY, M., ROBINSON, S., AUDOLY, B., GRINSPUN, E., Discrete elastic rods. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 2008.
- BERTAILS, F., AUDOLY, B., CANI, M.P., QUERLEUX, B., Leroy, F., Leveque, J.F., Super-helices for predicting the dynamics of natural hair. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 2006.
- BERTAILS, F., AUDOLY, B., QUERLEUX, B., Leroy, F., Leveque, J.F., CANI, M.P., Predicting natural hair shapes by solving the statics of flexible rods. *Eurographics*, 2005.

- BISHOP, R.L., There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, 1975.
- BLOOMENTHAL, J., Calculation of reference frames along a space curve. *Graphics Gems*, Volume I, 1990.
- BOUHAYA, L. : *Optimisation structurelle des gridshells*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2010.
- CASTRO, J., *System ductility and redundancy of FRP structures with ductile adhesively bonded joints*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.
- CHOE, B., CHOI, M.G., KO, H.S., Simulating complex hair with robust collision handling. *Symposium on Computer Animation*, 1999.
- D'AMICO, B., KERMANI, A., ZHANG, H., Form finding and structural analysis of actively bent timber grid shells, *Engineering Structures*. 81, 2014, pp. 195-207.
- DAY, A.S., An introduction to dynamic relaxation. *The engineer*, 1965.
- DOUTHE, C. : *Étude de structures élancées précontraintes en matériaux composites : application à la conception des gridshells*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- DOUTHE, C., BAVEREL, O., Design of nexorades or reciprocal frame systems with the dynamic relaxation method. *Computers and Structures*, 2009.
- DOUTHE, C., BAVEREL, O., CARON, J.F., Form-finding of a grid shell in composite materials. *Journal of the International Association for Shell and Spatial structures*, 2006.
- DOUTHE, C., BAVEREL, O., CARON, J.F., Gridshell in composite materials: towards wide span shelters. *Journal of the I.A.S.S*, Vol. 48 Issue 155, 2007, pp. 175-180.
- DOUTHE, C., CARON, J.F., BAVEREL, O., Gridshell in composite materials. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2009.
- DOUTHE, C., CARON, J.F., BAVEREL, O., Gridshells structures in glass fibre reinforced polymers. *Construction and building materials*. 2010.
- Eurocomp, *Structural Design of Polymer Composites – EUROCOMP Design code and Handbook*, Edited by J. L. Clarke. Taylor&Francis, 1996.
- FEATHERSTONE, R., *Rigid body dynamics algorithms*. Springer, 2008.
- Fiberline Design Manual*, 2002.
- FORET, G., LIMAM, O., Numerical and experimental analysis of RC two-way slabs strengthened with NSM CFRP rods. *Construction and Building Materials*. 2008.
- FREY, F., *Analyse des structures et des milieux continus*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- GOLDENTHAL, R., HARMON, D., FATTAL, R., BERCOVIER, M., GRINSPUN, E., Efficient simulation of inextensible cloth. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 2007.

GRACE, N., ENOMOTO, T., ABDELA-MOHTI, A., TOKAL, Y., PURAVANKARA, S., Flexural behaviour of precast concrete box beams post-tensioned with unbonded, carbon-fiber-composite cables. *PCI Journal*, 2008.

GRÉGOIRE, M., SCHÖMER, E., Interactive simulation of one-dimensional flexible parts. *Computer-aided design*, 2007.

HANSON, A.J., MA, H., Parallel transport approach to curve framing. Tech. Math. Rep. 1995.

HAPPOLD, E., LIDDELL, W.I., Timber lattice roof for the Mannheim Bundesgartenschau. *The Structural Engineer*, 53(3) : 99-135, 1975.

HARRIS, R., ROMER, J., KELLY, O., JOHNSON, S., Design and construction of the Downland Gridshell. *Building research and information*, 2003.

HOFFMANN, T., *Discrete differential Geometry of curves and surfaces*, 2008.

*IL10 Gitterschalen*. Institut für leichte Flächentragwerke, 1974.

JÜLICH, A.S., CARON, J.F., BAVEREL, O., Selfstressed Bowstring Footbridge in FRP. *Composite Structures*, Vol. 89, Issue 3, July 2009, pp. 489-496.

KALDOR, J.M., JAMES, D.L., MARSCHNER, S., Efficient yarn-based cloth with adaptive contact linearization. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 2010.

KATO, S., FUJIMOTO, M., ET TOSHIYUKI, O., Buckling load of steel single-layer reticulated domes of circular plan. *Journal of the International Association for Shell and Spatial structures*, 46(147), 2005.

KELLER, T., Material-Taylorized use of FRP in bridge and building construction. *CIAS International Seminar*, 2007.

KELLY, O., HARRIS, R., DICKSON, M., ROWE, J., Construction of the Downland Gridshell. *The Structural Engineer*, 2001.

KIENHARD, J., KLPERMANN, H., KENGNAGEL, C., et KNIPPERS, J., Active bending, a review on structures where bending is used as a self-formation process. *International Journal of Space Structures*, 2013.

KOTELNIKOVA, N., *Optimisation mécanique et énergétique d'enveloppes en matériaux composites pour les bâtiments*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2012.

LANGER, J., SINGER, D., Lagrangian aspects of the kirchhoff elastic rod. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 1996.

LAROZE, S., *Mécanique des structures Tome 3. Dynamique des structures*. Editions Cépaduès. 2005.

LEFEVRE, B., DOUTHE, C., BAVEREL, O. Buckling of Elastic gridshells. *Journal of the international association for shell and spatial structures*. 56(185). pp. 153-171. 2015.

NABAEI, S., *Mechanical Form-Finding of Timber Fabric Structures*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2014.

ONG, C.F., *Computer-aided design of tension structures*. Thèse de doctorat, City University London, 1992.

OTTER, J., Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation. *Nuclear structural engineer*, 1964.

OTTO, F., HENNICKE, J., MATSUSHITA, K., Gitterschalen Gridshells. Institut für Leichte Flächentragwerke, IL 10, 1974, pp. 340.

PAI, D.K., Strands : interactive simulation of thin solids using cosserat models. *Eurographics*, Volume 21, 2002.

SCHLAICH, J., BERGERMANN, R. *Leicht weit : Light structures*. 2003.

SHAHAWY, M.A., BEITELMAN, T., AROCKIASAMY, M., SOWRIRAJAN, R., Experimental investigation on structural repair and strengthening of damaged prestressed concrete slabs utilizing externally bonded carbon laminates. *Composites Part B Engineering*. 1996.

TAYEB, F., CARON, J.F., BAVEREL, O., DU PELOUX, L., Stability and robustness of a 300 m<sup>2</sup> composite gridshell structure. *Construction and building materials*, 2013.

THEETEN, A. *Splines dynamiques géométriquement exactes : simulation haute performance et interaction*. Thèse de doctorat, Université de Lille, 2007.

THEETEN, A., GRISONI, L., ANDRIOT, C., BARSKY, B., Geometrically exact dynamic splines. *Technical report INRIA*, 2006.

VAN ERP, G.M., Robustness of fibre composite structures loaded in flexure. *FRP Composites in Civil Engineering*, Vol. 2, pp 1421-1426. 2001.

DE VRIES, R., Evaluating changes of writhe in computer simulations of supercoiled DNA. *The Journal of Chemical Physics*, 2005.

WAKEFIELD, D., *Dynamic relaxation analysis of pretensioned networks supported by compression arches*. Thèse de doctorat, City University of London, 1980.

ZHU, E., NYONGESA KHAKINA, P., ZHOU, H., Buckling load of thin spherical shells and single-layer reticulated spherical shells. *Information Engineering Letters*, 2(3), 2012.





# Annexes

## A.1 Résolution de l'équation de Poisson et calcul de $J$

Nous nous intéressons ici à la résolution de l'équation de Poisson suivante, permettant le calcul de  $J$  :

$$\begin{cases} \Delta \bar{\chi}(x, y) = -1 & \text{sur } \mathcal{D} \\ \bar{\chi} = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Notons que ce problème est bien posé : il existe une unique solution. Connaissant la solution de cette équation,  $J$  est donné par la formule :

$$J = 4 \iint_{\mathcal{D}} (\bar{\chi}_{,x}^2 + \bar{\chi}_{,y}^2) dx dy$$

Nous proposons les solutions de cette équation et les valeurs de  $J$  pour des sections respectivement elliptique et rectangulaire.

### A.1.1 Section elliptique

Soit une section elliptique  $\mathcal{D}$  définie par l'équation suivante dans le plan  $(xOy)$  :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Alors la solution du problème (A.1) est simplement donnée par :

$$\bar{\chi}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$J$  est alors donné par :

$$J = 4 \iint_{\mathcal{D}} (\bar{\chi}_{,x}^2 + \bar{\chi}_{,y}^2) dx dy = 4 \iint_{\mathcal{D}} \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{(a^2 + b^2)^2} dx dy$$

En effectuant le changement de variable  $x = au \cos(t)$  et  $y = bu \sin(t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} J &= 4 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{b^4 a^2 u^2 \cos^2(t) + a^4 b^2 u^2 \sin^2(t)}{(a^2 + b^2)^2} ab u dt du \\ &= 4 \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^2} \int_0^1 u^3 du \int_0^{2\pi} (b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)) dt \\ &= 4 \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (\pi b^2 + \pi a^2) \end{aligned}$$

Finalement :

---

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

---

### A.1.2 Section rectangulaire

Considérons maintenant une section rectangulaire définie par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H\}$$

Pour résoudre le problème (A.1), nous nous appuyons sur le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -\lambda u & \text{sur } \mathcal{D} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \end{cases}$$

Les solutions de ce problème sont, pour  $(n, m) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2$  :

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$$

Or, la décomposition en série de Fourier de  $(x, y) \mapsto -1$  est :

$$-1 = \frac{-16}{\pi^2} \sum_{n \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} \frac{1}{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)$$

où  $\mathcal{I}$  désigne l'ensemble des nombres impairs.

On déduit alors de ces deux derniers résultats la solution du problème (A.1) :

$$\bar{\chi}(x, y) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} \frac{1}{nm} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)$$

Reste à évaluer  $J$ . Pour cela, exprimons d'abord  $\bar{\chi}_{,x}$  :

$$\bar{\chi}_{,x}(x, y) = \frac{16}{\pi L} \sum_{n \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)$$

Notons :

$$B_{mn} = \frac{16}{\pi L} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \bar{\chi}_{,x}^2 dx dy &= \iint_{\mathcal{D}} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{I}^4} B_{ij} B_{kl} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{H}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{H}\right) dx dy \\ &= \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{I}^4} B_{ij} B_{kl} \int_0^L \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \int_0^H \sin\left(\frac{j\pi y}{H}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{H}\right) dy \end{aligned}$$

Or, le calcul des intégrales nous donne simplement, en notant  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker :

$$\int_0^L \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{ik} \quad \int_0^H \sin\left(\frac{j\pi y}{H}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{H}\right) dy = \frac{H}{2} \delta_{jl}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \bar{\chi}_{,x}^2 dx dy &= \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{I}^4} B_{ij} B_{kl} \frac{LH}{4} \delta_{ik} \delta_{jl} = \sum_{(m,n) \in \mathcal{I}^2} B_{mn}^2 \frac{LH}{4} \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathcal{I}^2} \frac{64}{\pi^2} \frac{H}{L} \frac{1}{m^2} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \end{aligned}$$

Un calcul similaire nous donne  $\iint_{\mathcal{D}} \bar{\chi}_{,y}^2 dx dy$  :

$$\iint_{\mathcal{D}} \bar{\chi}_{,y}^2 dx dy = \sum_{(m,n) \in \mathcal{I}^2} \frac{64}{\pi^2} \frac{L}{H} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right)^2}$$

Finalement,  $J = 4 \iint_{\mathcal{D}} (\bar{\chi}_{,x}^2 + \bar{\chi}_{,y}^2) dx dy$  est donné par :

---

$$J = \frac{256}{\pi^2} \sum_{(m,n) \in \mathcal{I}^2} \frac{\frac{L}{H} \frac{1}{n^2} + \frac{H}{L} \frac{1}{m^2}}{\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right)^2}$$

---

où  $\mathcal{I}$  désigne l'ensemble des nombres impairs.

On remarque que le terme général de cette série double décroît extrêmement rapidement donc le calcul des premiers termes suffit à obtenir une estimation précise de  $J$ .

## A.2 Détails des calculs des forces intérieures

Dans cette section, nous détaillons les calculs de dérivées fonctionnelles permettant de calculer les forces et les moments intérieurs.

### A.2.1 Calcul des moments $m$ appliqués aux sections

Le calcul à effectuer est le suivant :

$$m(s) = -\frac{\delta \mathcal{E}_p}{\delta \theta}(s) = -\frac{\delta \mathcal{E}_t}{\delta \theta}(s) - \frac{\delta \mathcal{E}_f}{\delta \theta}(s) \quad (\text{A.2})$$

où l'on a noté  $\mathcal{E}_t$  et  $\mathcal{E}_f$  les termes respectivement associés à l'énergie élastique de torsion et à l'énergie élastique de flexion :

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2} \int \beta(s) (\theta'(s) - \bar{\theta}'(s))^2 ds \quad \mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s))^T B(s) (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s)) ds$$

Explicitons chacun des termes intervenant dans l'expression précédente :

$$-\frac{\delta \mathcal{E}_t}{\delta \theta}(s) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_t(\theta + \varepsilon \delta_s, \mathbf{x}) - \mathcal{E}_t(\theta, \mathbf{x})}{\varepsilon}$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(\theta + \varepsilon \delta_s, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int_0^L \beta(t) (\theta'(t) - \bar{\theta}'(t) + \varepsilon \delta'_s(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \beta(t) (\theta'(t) - \bar{\theta}'(t))^2 dt + \varepsilon \int_0^L \beta(t) (\theta'(t) - \bar{\theta}'(t)) \delta'_s(t) dt + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

En notant que pour toute fonction  $\phi$ , on a  $\int \phi(t) \delta_s^{(n)}(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(s)$ , on obtient :

$$\mathcal{E}_t(\theta + \varepsilon \delta_s, \mathbf{x}) = \mathcal{E}_t(\theta, \mathbf{x}) - \varepsilon (\beta(\theta' - \bar{\theta}'))'(s) + O(\varepsilon^2)$$

Et finalement :

$$-\frac{\delta \mathcal{E}_t}{\delta \theta}(s) = (\beta(\theta' - \bar{\theta}'))'(s) \quad (\text{A.3})$$

Intéressons nous maintenant au terme lié à l'énergie de flexion :

$$-\frac{\delta \mathcal{E}_f}{\delta \theta}(s) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_f(\theta + \varepsilon \delta_s, \mathbf{x}) - \mathcal{E}_f(\theta, \mathbf{x})}{\varepsilon}$$

Notons que dans l'expression de  $\mathcal{E}_f$ , seul  $\boldsymbol{\omega}$  dépend de  $\theta$  :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{u} + \sin(\theta) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{v} \\ -\sin(\theta) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{u} + \cos(\theta) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

En développant cos et sin, évaluons  $\boldsymbol{\omega}(\theta + \varepsilon \delta_s)$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\theta + \varepsilon \delta_s) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varepsilon \delta_s) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{u} + \sin(\theta + \varepsilon \delta_s) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{v} \\ -\sin(\theta + \varepsilon \delta_s) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{u} + \cos(\theta + \varepsilon \delta_s) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos(\theta) - \sin(\theta) \varepsilon \delta_s) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{u} + (\sin(\theta) + \cos(\theta) \varepsilon \delta_s) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{v} + O(\varepsilon^2) \\ -(\sin(\theta) + \cos(\theta) \varepsilon \delta_s) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{u} + (\cos(\theta) - \sin(\theta) \varepsilon \delta_s) \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{v} + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant  $R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice de rotation d'un angle  $\pi/2$ , on peut réécrire le résultat précédent sous la forme compacte suivante :

$$\boldsymbol{\omega}(\theta + \varepsilon\delta_s) = \boldsymbol{\omega}(\theta) - R_{\pi/2}\boldsymbol{\omega}(\theta)\varepsilon\delta_s + O(\varepsilon^2)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_f(\theta + \varepsilon\delta_s, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int_0^L (\boldsymbol{\omega} - R_{\pi/2}\boldsymbol{\omega}\varepsilon\delta_s - \bar{\boldsymbol{\omega}} + O(\varepsilon^2))^T B (\boldsymbol{\omega} - R_{\pi/2}\boldsymbol{\omega}\varepsilon\delta_s - \bar{\boldsymbol{\omega}} + O(\varepsilon^2)) dt \\ &= \mathcal{E}_f(\theta, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \int_0^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega} \varepsilon \delta_s dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L (R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega} \varepsilon \delta_s)^T B (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}}) dt + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de  $B$ , on en déduit que :

$$\mathcal{E}_f(\theta + \varepsilon\delta_s, \mathbf{x}) - \mathcal{E}_f(\theta, \mathbf{x}) = -\varepsilon \int_0^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega} \delta_s dt + O(\varepsilon^2)$$

D'où :

$$-\frac{\delta \mathcal{E}_f}{\delta \theta}(s) = (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s))^T B(s) R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega}(s) \quad (\text{A.4})$$

Finalement, en injectant les équations (A.3) et (A.4) dans (A.2), le moment linéique  $m(s)$  auquel la section est soumise à l'abscisse  $s$  s'écrit :

---


$$m(s) = (\beta(\theta' - \bar{\theta}'))'(s) + (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s))^T B(s) R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega}(s) \quad (\text{A.5})$$


---

## A.2.2 Calcul des forces $f$ appliquées à la ligne neutre

Le calcul à effectuer est le suivant :

$$\mathbf{f}(s) = -\frac{\Delta \mathcal{E}_p}{\Delta \mathbf{x}}(s) = -\frac{\delta \mathcal{E}_p}{\delta \mathbf{x}}(s) - \int_0^L \frac{\delta \mathcal{E}_p}{\delta \theta}(t) \cdot \frac{\delta \theta(t)}{\delta \mathbf{x}}(s) dt$$

Nous décomposons ce calcul en deux étapes :

1. Calcul de  $-\int_0^L \frac{\delta \mathcal{E}_p}{\delta \theta}(t) \cdot \frac{\delta \theta(t)}{\delta \mathbf{x}}(s) dt$
2. Calcul de  $-\frac{\delta \mathcal{E}_p}{\delta \mathbf{x}}(s)$

**Calcul de**  $-\int_0^L \frac{\delta \mathcal{E}_p}{\delta \theta}(t) \cdot \frac{\delta \theta(t)}{\delta \mathbf{x}}(s) dt$

Du fait de la propagation instantanée de l'équilibre en torsion à l'échelle de temps de la mise en place de l'équilibre en flexion, on a dans ce calcul :

$$\forall t \in ]0, L[, m(t) = -\frac{\delta \mathcal{E}_p}{\delta \theta}(t) = 0$$

De plus, le transport parallèle étant propagé depuis l'origine  $t = 0$  de la poutre, on a également :

$$\frac{\delta\theta(0)}{\delta\mathbf{x}}(s) = 0$$

Des deux remarques précédentes, on conclut que l'intégrande dans  $\int_0^L \frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\theta}(t) \cdot \frac{\delta\theta(t)}{\delta\mathbf{x}}(s) dt$  est nulle partout sauf en  $t = L$ . Nous allons donc maintenant nous attacher à évaluer  $\frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\theta}(L) \cdot \frac{\delta\theta(L)}{\delta\mathbf{x}}(s)$  pour pouvoir évaluer cette intégrale. Nous allons décomposer cette opération en deux étapes :

- Calcul de  $\frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\theta}(L)$
- Calcul de  $\frac{\delta\theta(L)}{\delta\mathbf{x}}(s)$

**Calcul de  $\frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\theta}(L)$**  Le calcul des moments précédemment effectué (voir équation (A.5)) donne :

$$\frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\theta}(L) = -(\beta(\theta' - \bar{\theta}'))'(L) - (\omega - \bar{\omega})^T BR_{\pi/2}\omega(L)$$

Notons que le terme  $(\omega - \bar{\omega})^T BR_{\pi/2}\omega(L)$  est fini (pas de distribution de Dirac dans son expression).

Si la liaison considérée est une liaison laissant  $\theta$  libre en  $s = L$  (rotule par exemple), il n'y a pas de contrainte en torsion à l'extrémité de la poutre et  $(\beta(\theta' - \bar{\theta}'))'(L) = 0$ .

Par contre, s'il s'agit d'une liaison encastrement, on a  $(\theta' - \bar{\theta}')(L^+) = 0$  alors que  $(\theta' - \bar{\theta}')(L^-)$  est a priori non nul. Donc, pour un encastrement :

$$-(\beta(\theta' - \bar{\theta}'))'(L) = (\beta(\theta' - \bar{\theta}'))(L^-)\delta_L$$

On peut alors conclure ce calcul intermédiaire :

$$\frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\theta}(L) = \begin{cases} (\beta(\theta' - \bar{\theta}'))(L^-)\delta_L - (\omega - \bar{\omega})^T BR_{\pi/2}\omega(L) & \text{(encastrement)} \\ -(\omega - \bar{\omega})^T BR_{\pi/2}\omega(L) & \text{(rotule)} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

**Calcul de  $\frac{\delta\theta(L)}{\delta\mathbf{x}}$**  Considérons deux courbes de longueurs  $L$  identiques repérées par les positions  $\mathbf{x}_1(s)$  et  $\mathbf{x}_2(s)$ , avec  $\mathbf{x}_1'(0) = \mathbf{x}_2'(0)$  et  $\mathbf{x}_1'(L) = \mathbf{x}_2'(L)$ . Définissons deux repères de Bishop sur ces deux courbes, par transport parallèle à partir d'un même repère en  $s = 0$ . D'après [DE VRIES05], à l'extrémité en  $s = L$ , le repère de Bishop de la courbe 2 fait un angle  $\Psi_2 - \Psi_1$  par rapport au repère de Bishop de la courbe 1, où :

$$\Psi_2 - \Psi_1 = \int_0^L \frac{\mathbf{x}_1' \times \mathbf{x}_2'}{1 + \mathbf{x}_1' \cdot \mathbf{x}_2'} \cdot (\mathbf{x}_1'' + \mathbf{x}_2'') dt \quad (\text{A.7})$$

Fort de ce résultat, donnons nous une référence d'angle arbitraire et notons  $\Psi$  l'angle fait par rapport à cette référence par le repère de Bishop à l'extrémité en  $s = L$  de notre poutre. Alors, il apparaît que :

$$\frac{\delta\theta(L)}{\delta\mathbf{x}} = -\frac{\delta\Psi}{\delta\mathbf{x}}$$

Or, d'après (A.7) :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) - \Psi(\mathbf{x}) &= \int_0^L \frac{\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'}{1 + \mathbf{x}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'} \cdot (\mathbf{x}'' + (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'') dt \\ &= \int_0^L \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{h}\delta_s'}{1 + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'} \cdot (\mathbf{x}'' + \mathbf{x}'') dt + O(|\mathbf{h}|^2) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 1$ , on a :

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) - \Psi(\mathbf{x}) &= \int_0^L \mathbf{x}' \times \mathbf{h}\delta'_s \cdot \mathbf{x}'' dt + O(|\mathbf{h}|^2) \\ &= - \int_0^L \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{h}\delta'_s dt + O(|\mathbf{h}|^2) \\ &= (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')' \cdot \mathbf{h} + O(|\mathbf{h}|^2)\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\frac{\delta\theta(L)}{\delta\mathbf{x}} = -\frac{\delta\Psi}{\delta\mathbf{x}} = -(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')' = -(\kappa\mathbf{b})' \quad (\text{A.9})$$

Finalement, en utilisant les équations (A.6) et (A.9), et en notant que l'intégrande dans l'intégrale  $\int_0^L \frac{\delta E_p}{\delta\theta}(t) \cdot \frac{\delta\theta(t)}{\delta\mathbf{x}}(s) dt$  est nulle partout sauf en  $t = L$  on obtient :

$$\int_0^L \frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\theta}(t) \cdot \frac{\delta\theta(t)}{\delta\mathbf{x}}(s) dt = \begin{cases} -\beta(\theta' - \bar{\theta}')(L)(\kappa\mathbf{b})'(s) & \text{(encastrement)} \\ 0 & \text{(rotule)} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Dernière étape dans le calcul de la force linéique appliquée sur la ligne neutre, évaluons la quantité  $\frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\mathbf{x}}$ .

### Calcul de $\frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\mathbf{x}}$

Pour mener à bien ce calcul, constatons d'abord que  $\frac{\delta\mathcal{E}_t}{\delta\mathbf{x}}$  est nul, puisque l'énergie de torsion ne dépend pas explicitement de la position de la ligne neutre. Reste donc à calculer :

$$\frac{\delta\mathcal{E}_p}{\delta\mathbf{x}} = \frac{\delta\mathcal{E}_f}{\delta\mathbf{x}} = \frac{\delta}{\delta\mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} \int_0^L (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s))^T B(s) (\boldsymbol{\omega}(s) - \bar{\boldsymbol{\omega}}(s)) ds \right)$$

Dans cette dernière intégrale mesurant l'énergie de flexion, on notera que seul  $\boldsymbol{\omega}$  dépend de  $\mathbf{x}$ . Le gros du travail consiste donc à calculer  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)$ , quantité qui nous permettra ensuite de déduire facilement la dérivée  $\frac{\delta\mathcal{E}_f}{\delta\mathbf{x}}$ .

Rappelons la définition de  $\boldsymbol{\omega}$  :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}$$

Calculer  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)$  nécessite donc de calculer  $(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)''$ ,  $\mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)$  et  $\mathbf{d}_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)$ .

Commençons par  $(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)''$  :

$$(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'' = \mathbf{x}'' + \mathbf{h}\delta_s'' \quad (\text{A.11})$$

En ce qui concerne le terme  $\mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)$ , remarquons tout d'abord qu'il va pouvoir s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) = \mathbf{d}_1(\mathbf{x}) + \Delta\Psi\mathbf{d}_2(\mathbf{x}) + \Delta\Phi\mathbf{x}' \quad (\text{A.12})$$

où  $\Delta\Psi$  et  $\Delta\Phi$  seront des petits angles de rotation respectivement autour de  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{d}_2$ .

Pour calculer  $\Delta\Psi$ , qui a été bien nommé, nous allons une nouvelle fois faire appel à [16]. En effet, lorsque la ligne neutre est modifiée, le transport parallèle l'est aussi, et donc le repère de Bishop à l'abscisse curviligne  $\tilde{s}$  est pivoté d'un angle  $\Delta\Psi$  autour de  $\mathbf{x}'$  donné par :

$$\Delta\Psi = \int_0^{\tilde{s}} \frac{\mathbf{x}_1' \times \mathbf{x}_2'}{1 + \mathbf{x}_1' \cdot \mathbf{x}_2'} \cdot (\mathbf{x}_1'' + \mathbf{x}_2'') dt \quad (\text{A.13})$$

où  $\mathbf{x}_1$  désigne la ligne neutre avant modification et  $\mathbf{x}_2$  la ligne neutre après modification.

En reproduisant le calcul fait à l'équation (A.8), on obtient alors, pour une perturbation caractérisée par  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s$ , la valeur suivante pour  $\Delta\Psi$  :

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(\tilde{s}) &= \int_0^{\tilde{s}} \frac{\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'}{1 + \mathbf{x}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'} \cdot (\mathbf{x}'' + (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'') dt \\ &= \int_0^{\tilde{s}} \frac{\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'}{1 + \mathbf{x}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'} \cdot (\mathbf{x}'' + (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'') dt \\ &= - \int_0^{\tilde{s}} \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{h}\delta_s' dt + O(|\mathbf{h}|^2) \\ &= - [\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{h}\delta_s]_0^{\tilde{s}} + \int_0^{\tilde{s}} (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')' \cdot \mathbf{h}\delta_s dt + O(|\mathbf{h}|^2) \\ &= -(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')(\tilde{s}) \cdot \mathbf{h}\delta_s(\tilde{s}) + (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')'(s) \cdot \mathbf{h}\chi_{[s,L]}(\tilde{s}) + O(|\mathbf{h}|^2) \\ &= -(\kappa\mathbf{b})(\tilde{s}) \cdot \mathbf{h}\delta_s(\tilde{s}) + (\kappa\mathbf{b})'(s) \cdot \mathbf{h}\chi_{[s,L]}(\tilde{s}) + O(|\mathbf{h}|^2) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

où  $\chi$  désigne la fonction caractéristique et en utilisant une intégration par partie.

Si pour une perturbation  $\mathbf{h}\delta_s$ , le repère de Bishop tourne d'un angle  $\Delta\Psi(\tilde{s})$  autour de  $\mathbf{x}'$  à l'abscisse  $\tilde{s}$ , alors le repère matériel  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$  tourne du même angle puisque  $\theta$  reste inchangé dans cette dérivée partielle par rapport à  $\mathbf{x}$ . On peut donc bien identifier le  $\Delta\Psi$  que l'on vient de calculer avec le  $\Delta\Psi$  de l'équation A.12.

Reste à calculer  $\Delta\Phi$ . Pour cela, notons que  $\Delta\Phi = \mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) \cdot \mathbf{x}'$  et remarquons que  $\mathbf{d}_1$  est orthogonal à  $\mathbf{x}'$ . Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)' = 0 &\iff \mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) \cdot \mathbf{x}' = -\mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) \cdot \mathbf{h}\delta_s' \\ &\iff \Delta\Phi = -(\mathbf{d}_1(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{h}|)) \cdot \mathbf{h}\delta_s' \\ &\iff \Delta\Phi = -\mathbf{d}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}\delta_s' + O(|\mathbf{h}|^2) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

En regroupant les équations A.12, A.14 et A.15 on peut conclure le calcul de  $\mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)$  (et généraliser à  $\mathbf{d}_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)$ ) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) \\ \mathbf{d}_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{d}_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + ((\kappa\mathbf{b})'(s) \cdot \mathbf{h}\chi_{[s,L]} - \kappa\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}\delta_s) \begin{pmatrix} \mathbf{d}_2(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{d}_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}\delta_s' \mathbf{x}' \\ \mathbf{d}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}\delta_s' \mathbf{x}' \end{pmatrix} + O(|\mathbf{h}|^2) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer  $\omega(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)$ . En effet, en utilisant les équations (A.11) et (A.16) :

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) &= \begin{pmatrix} (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'' \cdot \mathbf{d}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) \\ (\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s)'' \cdot \mathbf{d}_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{d}_2(\mathbf{x})^T \end{pmatrix} \cdot \delta_s'' \mathbf{h} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_2(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} (\chi_{[s,L]}(\kappa \mathbf{b})'(s) - \kappa \mathbf{b}\delta_s) \cdot \mathbf{h} + O(|\mathbf{h}|^2)\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

Notons que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_2(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{d}_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = -R_{\pi/2} \cdot \omega(\mathbf{x})$$

En posant :

$$D_\omega = \delta_s'' \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{d}_2(\mathbf{x})^T \end{pmatrix} - R_{\pi/2} \cdot \omega(\mathbf{x}) \cdot (\chi_{[s,L]}(\kappa \mathbf{b})'(s) - \kappa \mathbf{b}\delta_s)^T$$

On a :

$$\omega(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) = \omega(\mathbf{x}) + D_\omega \cdot \mathbf{h} + O(|\mathbf{h}|^2)$$

Alors, en utilisant la symétrie de  $B$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_f(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) &= \frac{1}{2} \int_0^L (\omega(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) - \bar{\omega})^T B (\omega(\mathbf{x} + \mathbf{h}\delta_s) - \bar{\omega}) dt \\ &= \mathcal{E}_f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int_0^L (D_\omega \cdot \mathbf{h})^T B (\omega(\mathbf{x}) - \bar{\omega}) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (\omega(\mathbf{x}) - \bar{\omega})^T B \cdot D_\omega \cdot \mathbf{h} dt + O(|\mathbf{h}|^2) \\ &= \mathcal{E}_f(\mathbf{x}) + \int_0^L (\omega(\mathbf{x}) - \bar{\omega})^T B \cdot D_\omega \cdot \mathbf{h} dt + O(|\mathbf{h}|^2)\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\delta \mathcal{E}_f}{\delta \mathbf{x}} = \int_0^L (\omega - \bar{\omega})^T B \cdot D_\omega dt \quad (\text{A.18})$$

Reste à expliciter le calcul, en se rappelant que pour toute fonction  $\phi$ , on a  $\int \phi(t) \delta_s^{(n)}(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(s)$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{E}_f}{\delta \mathbf{x}}(s) &= \int_0^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot D \boldsymbol{\omega} dt \\
&= \int_0^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \end{pmatrix} \delta_s'' dt \\
&\quad - \int_0^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot R_{\pi/2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \cdot (\chi_{[s,L]}(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{b})'(s) - \boldsymbol{\kappa} \mathbf{b} \delta_s)^T dt \\
&= \left( (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \end{pmatrix} \right)''(s) - \left( \int_s^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot R_{\pi/2} \cdot \boldsymbol{\omega} dt \right) (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{b})'(s)^T \\
&\quad + (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot R_{\pi/2} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{b})(s)^T \\
&= \left( (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \end{pmatrix} \right)''(s) - \left( \left( \int_s^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot R_{\pi/2} \cdot \boldsymbol{\omega} dt \right) (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{b})^T \right)'(s) \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour conclure, d'après les équations (A.10) et (A.19), la force linéique s'appliquant sur la ligne neutre vaut, pour une poutre encastée en  $s = L$  :

---


$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(s) &= - \left( (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \end{pmatrix} \right)''(s) + \left( \left( \int_s^L (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T B \cdot R_{\pi/2} \cdot \boldsymbol{\omega} dt \right) (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{b})^T \right)'(s) \\
&\quad + \beta(L) (\theta' - \bar{\theta}') (L) (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{b})'(s) \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

---

Pour une poutre où  $\theta$  est libre en  $s = L$ , le dernier terme  $\beta(L) (\theta' - \bar{\theta}') (L) (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{b})'(s)$  ne doit pas être pris en compte. C'est le cas pour une liaison rotule par exemple. Notons que le caractère encasté ou rotulé de la poutre en  $s = 0$  n'a pas d'influence sur la valeur de  $\mathbf{f}(s)$ .

### A.3 Torsion nulle dans une poutre appuyée sur une boule

Achevons ce rapport par une curiosité mécanique et mathématique : une poutre dont la ligne neutre est incluse dans une sphère et dont le vecteur matériel  $\mathbf{d}_1$  conserve une direction radiale ne subit aucune torsion. Un tel état peut facilement être obtenu en collant une des faces latérales d'une poutre à section rectangulaire sur une boule. Elle travaille alors uniquement en flexion. La figure A.1 illustre ce phénomène que nous allons maintenant justifier mathématiquement.

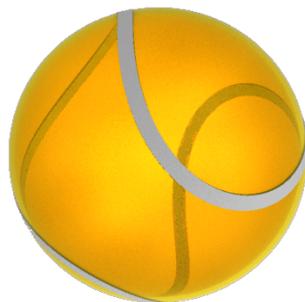


FIGURE A.1 – Couture d'une balle de tennis, non sujette à de la torsion

*La couture d'une balle de tennis, considérée comme une tige élastique de section rectangulaire, rectiligne au repos, et dont le taux de rotation de la section autour de la ligne neutre est nul au repos, ne subit aucune torsion.*

Une telle poutre peut-être repérée par sa position  $s \mapsto \mathbf{x}(s)$ , où  $s$  désigne l'abscisse curviligne. Alors, les hypothèses imposent :

- $\|\mathbf{x}(s)\| = R$
- $\mathbf{d}_1(s) = \frac{1}{R}\mathbf{x}(s)$

où  $R$  désigne le rayon de la boule.

Pour montrer que la torsion est nulle dans cette poutre, il suffit de montrer que si l'on choisit  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{d}_1(0)$ , alors le repère de Bishop et le repère matériel coïncident. En effet, dans ce cas,  $\theta = 0$  et la torsion est donc nulle. Le transport parallèle de  $\mathbf{u}$  est défini par :

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \times \mathbf{u}$$

Montrons que  $\mathbf{u} = \mathbf{d}_1$  vérifie cette équation.

Pour cela dérivons l'égalité  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = R^2$  :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = R^2 \implies \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = 0$$

Dérivons ensuite la nouvelle égalité obtenue :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = 0 \implies \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'' = 0 \implies \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'' = -1$$

Évaluons maintenant  $(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \times \mathbf{d}_1$ . En utilisant le développement du double produit vectoriel on obtient :

$$(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \times \mathbf{d}_1 = \frac{1}{R}(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \times \mathbf{x} = \frac{1}{R}((\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}'' - (\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}') = \frac{1}{R}\mathbf{x}' = \mathbf{d}_1'$$

Donc  $\mathbf{u} = \mathbf{d}_1$  est solution de l'équation  $\mathbf{u}' = (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \times \mathbf{u}$  définissant le transport parallèle. Nous avons ainsi démontré que si  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{d}_1(0)$ , alors le repère de Bishop coïncide avec le repère matériel de la poutre que nous considérons. Elle ne subit ainsi aucune torsion.