



HAL
open science

Risque et optimisation pour le management d'énergies : application à l'hydraulique

Jean-Christophe Alais

► **To cite this version:**

Jean-Christophe Alais. Risque et optimisation pour le management d'énergies: application à l'hydraulique. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT: 2013PEST1071 . tel-01274340

HAL Id: tel-01274340

<https://pastel.hal.science/tel-01274340>

Submitted on 15 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS - EST
ÉCOLE DOCTORALE MSTIC
MATHEMATIQUES, SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DE LA COMMUNICATION

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université Paris - Est

Mention : Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue par

Jean-Christophe Alais

**Risque et optimisation pour le management
d'énergies : application à l'hydraulique**

Thèse co-dirigée par Pierre Carpentier et Michel De Lara
préparée au sein de l'équipe OPTIMISATION ET SYSTÈMES du
laboratoire CERMICS de l'ÉCOLE DES PONTS PARISTECH

soutenue le 16 décembre 2013

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Marianne Akian	-	INRIA Saclay
	René Henrion	-	WIAS, Berlin
<i>Directeurs :</i>	Pierre Carpentier	-	ENSTA ParisTech
	Michel De Lara	-	École des Ponts ParisTech
<i>Président :</i>	Nadia Oudjane	-	EDF R&D
<i>Examineurs :</i>	Laetitia Andrieu	-	EDF R&D
	Jitka Dupačová	-	Charles University, Prague

Remerciements.

J'adresse mes premiers remerciements à mes directeurs de thèse, Pierre Carpentier et Michel De Lara. Rigueur et précision mais aussi disponibilité et patience caractérisent la qualité de leur encadrement. Il n'aura rien fallu de moins pour que je mène à bien cette dure mais belle aventure qu'est le doctorat.

Je remercie Laetitia Andrieu de m'avoir accueilli au sein du groupe "méthodes, modèles et outils d'optimisation" de EDF R&D et de m'avoir confié le projet de thèse qu'elle a initié et dont elle a posé les bases en collaboration avec mes directeurs. Je suis reconnaissant à Nadia Oudjane d'avoir pris la suite de l'encadrement industriel de ma thèse. Je la remercie chaleureusement pour soutien, pour ses encouragements ainsi que pour la qualité des échanges que nous avons pu avoir.

Merci à Marianne Akian et à René Henrion de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de mon manuscrit de thèse. Leurs relectures attentives m'ont été précieuses.

Merci à Jitka Dupačová de m'avoir accordé de son temps à Prague, le temps d'un workshop, et d'avoir eu la gentillesse d'accepter de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier Jean-Philippe Chancelier et Vincent Leclère avec lesquels j'ai eu la chance et le plaisir de collaborer durant ces trois années.

Il y a de cela un moment maintenant, j'ai découvert l'optimisation mathématique en assistant à un cours de Michel Minoux. Sur ses conseils, j'ai poursuivi mes études en algorithmique et en optimisation à l'Université Pierre et Marie Curie puis à l'Université Paris Dauphine où, grâce à Cristina Bazgan, j'ai pu me faire une idée de ce qu'est la recherche académique. La rencontre avec Jean-Christophe Culioli, à l'occasion du cours qu'il enseignait, fut déterminante en ce sens que me vint alors l'envie de travailler dans le domaine de l'optimisation stochastique. Ce sentiment fut conforté par le stage que Jean-Christophe me donna l'opportunité de réaliser à Air France. Enfin, je pus compléter ma formation en assistant aux cours du master OJME de Sylvain Sorin. Je tiens à remercier ces quatre enseignants chercheurs pour la qualité de leurs enseignements et pour leur bienveillance. Je leur dois la découverte d'un domaine qui me passionne et qui me passionnera pour un moment encore, je le pense.

Il est grand temps que je remercie les collègues et amis que j'ai eu la chance et le plaisir de côtoyer, que ce soit à EDF, au CERMICS ou à l'UMA. Je pense notamment à Agnès B, Agnès D, Ala, Anès, Arnaud, Asna, Audrey, Catherine, Cédric, Christophe, David, Emmanuel G, Emmanuel R, Elsa, Frédéric, Georgios, Gilles, Grâce, Jean-Claude, Jean-Marie, Kengy, Kutluhan, Lijun, Marie-Christine, Meryem, Olivier J, Riadh, Sandrine, Simon, Thomas T, Tomas, Vincent D et Wei Dong.

Merci à vous, Adriana, Alice, Alicia, Axel, Daniel, Dia, Esther, Geneviève, Jalil, Laurent, Loïc, Nicolas D, Nicolas G, Olivier B, Pauline, Pierre G, Sinda, Thomas P, Valentine, Vincent L, Yacine et Youcef, d'avoir peuplé et embelli mon quotidien de doctorant.

Par ce qu'ils comptent tout particulièrement pour moi et qu'ils ont su être là et m'apporter leur soutien lorsque j'en avais besoin, je tiens à remercier chaleureusement mes amis Denis D, Denis E, Eric, Gladys, Kiné, Mariane (et sa fidèle N'amour), Renaud et Roman.

Enfin, je remercie tendrement ceux qui comptent le plus pour moi. À vous Maman, Papa, et Laure-Marie, à ma famille mais aussi à Floyd, Guerlain et Roxy je réaffirme tout mon amour et je dédie mes travaux.

Résumé : L'hydraulique est la principale énergie renouvelable produite en France. Elle apporte une réserve d'énergie et une flexibilité intéressantes dans un contexte d'augmentation de la part des énergies intermittentes dans la production. Sa gestion soulève des problèmes difficiles dus au nombre des barrages, aux incertitudes sur les apports d'eau et sur les prix, ainsi qu'aux usages multiples de l'eau. Cette thèse CIFRE, effectuée en partenariat avec Électricité de France, aborde deux questions de gestion hydraulique formulées comme des problèmes d'optimisation dynamique stochastique. Elles sont traitées dans deux grandes parties.

Dans la première partie, nous considérons la gestion de la production hydroélectrique d'un barrage soumise à une contrainte dite de cote touristique. Cette contrainte vise à assurer une hauteur de remplissage du réservoir suffisamment élevée durant l'été avec un niveau de probabilité donné. Nous proposons différentes modélisations originales de ce problème et nous développons les algorithmes de résolution correspondants. Nous présentons des résultats numériques qui éclairent différentes facettes du problème utiles pour les gestionnaires du barrage.

Dans la seconde partie, nous nous penchons sur la gestion d'une cascade de barrages. Nous présentons une méthode de résolution approchée par décomposition-coordination, l'algorithme Dual Approximate Dynamic Programming (DADP). Nous montrons comment décomposer, barrage par barrage, le problème de la cascade en sous-problèmes obtenus en dualisant la contrainte de couplage spatial "déversé supérieur = apport inférieur". Sur un cas à trois barrages, nous sommes en mesure de comparer les résultats de DADP à la solution exacte (obtenue par programmation dynamique), obtenant des gains à quelques pourcents de l'optimum avec des temps de calcul intéressants. Les conclusions auxquelles nous sommes parvenu offrent des perspectives encourageantes pour l'optimisation stochastique de systèmes de grande taille.

Mots clés : gestion de l'hydraulique, optimisation dynamique, contrôle optimal stochastique, contraintes en probabilité, programmation dynamique, viabilité stochastique, problèmes d'optimisation de grande taille

Risk and Optimization for the Management of Energy : application to the hydroelectric production

Abstract : Hydropower is the main renewable energy produced in France. It brings both an energy reserve and a flexibility, of great interest in a context of penetration of intermittent sources in the production of electricity. Its management raises difficulties stemming from the number of dams, from uncertainties in water inflows and prices and from multiple uses of water. This Phd thesis has been realized in partnership with Electricité de France and addresses two hydropower management issues, modeled as stochastic dynamic optimization problems. The manuscript is divided in two parts.

In the first part, we consider the management of a hydroelectric dam subject to a so-called tourist constraint. This constraint assures the respect of a given minimum dam stock level in Summer months with a prescribed probability level. We propose different original modelings and we provide corresponding numerical algorithms. We present numerical results that highlight the problem under various angles useful for dam managers.

In the second part, we focus on the management of a cascade of dams. We present the approximate decomposition-coordination algorithm called Dual Approximate Dynamic Programming (DADP). We show how to decompose an original (large scale) problem into smaller subproblems by dualizing the spatial coupling constraints. On a three dams instance, we are able to compare the results of DADP with the exact solution (obtained by dynamic programming); we obtain approximate gains that are only at a few percents of the optimum, with interesting running times. The conclusions we arrived at offer encouraging perspectives for the stochastic optimization of large scale problems.

Keywords : dam hydroelectric management, dynamic optimization, stochastic optimal control, chance constraints, dynamic programming, stochastic viability, large scale optimization problems

Table des matières

Liste des symboles	vii
Introduction	1
I Gestion d'un barrage sous contrainte de cote touristique	5
1 Problème d'optimisation sous contrainte en probabilité	7
1.1 Production hydroélectrique et cote touristique	8
1.2 Formulation du problème d'optimisation	9
1.3 Algorithme de résolution	12
1.4 Application numérique	17
1.5 Discussion	21
2 Reformulation du critère d'optimisation	23
2.1 Discussion sur les critères d'optimisation	23
2.2 Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques . . .	25
2.3 Optimisation du critère valorisant partiellement les trajectoires non touristiques	30
2.4 Application numérique	31
2.5 Discussion	36
3 Prise en compte de plusieurs contraintes de cote	39
3.1 Discussion sur les critères d'optimisation	39
3.2 Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques . . .	41
3.3 Optimisation du critère valorisant partiellement les trajectoires non touristiques	44
3.4 Comparaison des approches des §3.2 et §3.3	45
3.5 Application numérique	47
3.6 Discussion	49
4 Approche par viabilité stochastique	51
4.1 Retour sur la dispersion du gain optimal obtenu au chapitre 1	51
4.2 Viabilité stochastique et gestion d'un barrage à une contrainte de cote	53
4.3 Application numérique	56
4.4 Discussion	57

II	Gestion d'une cascade de barrages par décomposition-coordination	59
5	Présentation et modélisation du problème d'optimisation	61
5.1	Gestion optimale d'une cascade de barrages	61
5.2	Décomposition du problème barrage par barrage	64
5.3	Discussion	66
5.4	Appendice : calcul des multiplicateurs	67
6	Résolution par programmation dynamique	69
6.1	Complexité numérique de la programmation dynamique	69
6.2	Étude des multiplicateurs liés aux contraintes couplantes	71
6.3	Application à une cascade de trois barrages	73
6.4	Discussion	78
7	Résolution par méthode de décomposition-coordination	81
7.1	La méthode Dual Approximate Dynamic Programming (DADP)	82
7.2	L'algorithme Dual Approximate Dynamic Programming	85
7.3	Application à une cascade de trois barrages	88
7.4	Discussion	95
7.5	Appendice A : construction d'un processus explicatif	97
7.6	Appendice B : convergence numérique de l'algorithme	99
	Conclusion et perspectives	103
A	Description des programmes informatiques (partie 1)	105
B	Description des programmes informatiques (partie 2)	107
C	HAL paper <i>Multi-usage hydropower dam management : chance-constrained optimization and stochastic viability</i>	111
	Bibliographie	131

Liste des symboles

\mathbb{N}, \mathbb{R}	ensemble des entiers naturels, ensemble des réels
Ω, ω	espace probabilisable, état de la Nature
\mathbf{X}	(en lettre grasse) variable aléatoire
$\mathbf{X}(\omega)$	valeur de réalisation de la variable aléatoire \mathbf{X} pour ω
$\mathbf{1}_A$	variable aléatoire indicatrice de la réalisation de l'événement A $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$; $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon
\mathbb{E}	opérateur d'espérance
$\mathbb{P}[A]$	probabilité de l'événement A
$\mathbb{E}[\mathbf{X} \mathbf{Y}]$	espérance conditionnelle de \mathbf{X} sachant \mathbf{Y}
$\sigma(\mathbf{W})$	tribu engendrée par la variable aléatoire \mathbf{W}
$\mathbf{X} \preceq \sigma(\mathbf{W})$	\mathbf{X} est mesurable par rapport à $\sigma(\mathbf{W})$
s.c. ...	(optimiser) sous les contraintes ...
$x^{1:N}, (x^k)_{k=1}^N$	liste des variables (x^1, \dots, x^N)

Introduction

Nous sommes en 1878. Pour la première fois, une maison s'éclaire au moyen de l'énergie hydroélectrique. À peine plus de dix années plus tard, deux cent centrales hydroélectriques alimentent déjà le parc américain : l'histoire de l'hydraulique est lancée. Aujourd'hui première et plus rentable des énergies renouvelables, la *houille blanche* est propre (elle permet d'économiser entre 1,5 et 2,1 milliards de tonnes de CO₂ selon *l'International Hydropower Association*) et, parce qu'elle peut être sollicitée rapidement, apporte une flexibilité bienvenue face à l'augmentation de la part des énergies intermittentes dans les parcs de production.

Cette énergie-clé garde, de plus, un fort potentiel : bien qu'elle en représente déjà 16%, le *Journal international de l'hydroélectricité et des barrages* chiffre sa capacité de production techniquement envisageable à 75% de la production mondiale d'électricité. Parmi les facteurs à même de réaliser ce potentiel figure l'optimisation des outils de production. Cette thèse CIFRE, effectuée en partenariat avec Électricité de France, aborde deux questions de gestion hydraulique formulées comme des problèmes d'optimisation dynamique stochastique. Elles sont traitées dans deux grandes parties.

L'eau d'un barrage est une ressource dont l'usage est motivé par différents enjeux, notamment économiques, touristiques et écologiques (protection environnementale, préservation de la faune et de la flore). Les opérationnels affectés à la gestion d'un barrage hydroélectrique peuvent ainsi se retrouver confrontés à la prise en compte de contraintes liées aux usages autres que la production d'électricité. Dans la première partie, nous considérons la gestion de la production hydroélectrique d'un barrage soumise à une contrainte dite de cote touristique. Cette contrainte vise à assurer une hauteur de remplissage du réservoir suffisamment élevée durant l'été avec un niveau de probabilité donné.

Dans le chapitre 1, nous nous penchons sur la gestion de la production hydroélectrique d'un barrage soumis à la contrainte, dite de *cote touristique*, suivante : “ *respecter un niveau de remplissage du réservoir minimum durant une période et avec un niveau de probabilité donnés* ”. Après discussion avec les opérationnels d'Électricité de France, nous formulons ce problème comme un problème d'optimisation dynamique sous contrainte en probabilité. Nous développons une méthode de résolution originale dont la première étape consiste à dualiser la contrainte en probabilité au moyen d'un multiplicateur. Dans une deuxième étape, nous introduisons un nouvel état dynamique binaire permettant de réécrire la contrainte sous une forme adaptée à la programmation dynamique. Nous résolvons le problème en mettant en œuvre l'algorithme d'Uzawa où la maximisation dans le primal est faite par programmation dynamique. Nous appliquons cette méthode à une instance de barrage et nous examinons les résultats numériques obtenus. Sur la base de cette étude, s'ensuit une discussion avec les opérationnels qui met en évidence la nécessité de reformuler le critère d'optimisation. C'est

l'objet du chapitre suivant.

Dans le chapitre 2, nous proposons donc une nouvelle formulation du problème de gestion d'un barrage hydroélectrique sous contrainte de cote touristique. Pour cela, nous analysons le critère d'optimisation du chapitre 1 afin de l'adapter aux nouvelles problématiques du respect de l'enjeu touristique. Nous formulons deux critères à même d'y répondre, tout en conservant la contrainte de cote touristique en probabilité. Nous développons ensuite des algorithmes de résolution adaptés. Pour terminer, nous présentons les résultats numériques portant sur l'instance du chapitre 1 et les comparons avec ceux de ce chapitre.

Le modèle de barrage étudié comportait jusqu'à présent une unique contrainte de cote. Dans le chapitre 3, nous nous penchons sur le cas de plusieurs contraintes de cote. Comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, nous adaptons le critère d'optimisation en conséquence. Cette adaptation est plus délicate que dans le cas à une seule cote et conduit à deux formulations dérivées des critères développés dans le chapitre 2. Après avoir proposé les algorithmes de résolution adaptés, nous étudions les aspects pratiques de leur mise en œuvre. Sur la base de cette étude, nous retenons un des deux critères et nous l'appliquons numériquement à la gestion d'un barrage à trois cotes.

Dans le chapitre 1, le problème d'optimisation est formulé comme la maximisation du gain en espérance sous la contrainte de respecter la cote touristique avec une certaine probabilité. Ainsi, le traitement de l'enjeu économique (gain) et de l'enjeu touristique (respect de la cote) n'est pas symétrique : le premier est maximisé alors que le second est une contrainte. Nous proposons dans le chapitre 4 un critère qui met sur le même plan ces deux enjeux. Ce critère met également l'accent sur les faibles valeurs de gain et les faibles valeurs de stock d'eau en été. En effet, les résultats numériques obtenus au chapitre 1 révèlent que les gains optimaux sont très dispersés et prennent des valeurs faibles avec une probabilité relativement élevée. Dans le chapitre 4, nous faisons appel à la théorie de la viabilité stochastique : nous proposons de gérer le barrage en maximisant la probabilité de garantir un gain final minimal et une hauteur d'eau minimale en été.

Dans la seconde partie du manuscrit, nous considérons le cas de plusieurs barrages et nous étudions un algorithme de résolution adapté aux problèmes d'optimisation stochastique de grande taille. Plus précisément, nous cherchons à résoudre numériquement un problème d'optimisation de production hydroélectrique d'une cascade de barrages.

Dans le chapitre 5, nous présentons le problème et le modélisons comme un problème d'optimisation dynamique stochastique qui peut être théoriquement résolu de manière exacte par programmation dynamique. En pratique, dès que le nombre de barrages dépasse quatre, cette méthode est inapplicable. C'est pourquoi nous présentons une méthode de résolution approchée par décomposition-coordination, l'algorithme Dual Approximate Dynamic Programming (DADP). Nous montrons comment décomposer, barrage par barrage, le problème de la cascade

en sous-problèmes obtenus en dualisant la contrainte de couplage spatial “déversé supérieur = apport inférieur”.

Dans le chapitre 6, nous écrivons la résolution par programmation dynamique du problème de gestion d’une cascade de barrages. Nous présentons l’algorithme puis nous l’appliquons à une instance à trois barrages. Nous calculons la stratégie optimale et nous évaluons numériquement les multiplicateurs des contraintes couplantes. Nous disposons ainsi des solutions optimales primales et duales.

Dans le chapitre 7, nous détaillons la mise en œuvre de la méthode Dual Approximate Dynamic Programming qui remplace les contraintes couplantes par des contraintes plus faibles en espérance conditionnelle. Selon le conditionnement, nous obtenons différents résultats numériques que nous comparons entre eux et à l’optimum. Nous concluons par une discussion sur des extensions possibles à une cascade de plus de trois barrages et à des cas de réseaux de structure plus complexe.

Première partie

Gestion d'un barrage sous
contrainte de cote touristique

Problème d'optimisation sous contrainte en probabilité

L'eau d'un barrage peut servir à différents usages, économiques, touristiques et écologiques. En plus du problème d'optimisation de la production hydroélectrique, les opérationnels gestionnaires d'un barrage peuvent ainsi se retrouver confrontés à des contraintes liées à ces usages. Dans ce chapitre, nous nous penchons sur la gestion de la production hydroélectrique d'un barrage soumis à la contrainte, dite de *cote touristique*, suivante : “ *respecter un niveau de remplissage du réservoir minimum durant une période et avec un niveau de probabilité donnés* ”. En accord avec Électricité de France, nous formulons ce problème comme un problème d'optimisation dynamique sous contrainte en probabilité. Nous développons une méthode de résolution originale dont la première étape consiste à dualiser la contrainte en probabilité au moyen d'un multiplicateur. Dans une deuxième étape, nous introduisons un nouvel état dynamique binaire permettant de réécrire la contrainte sous une forme adaptée à la programmation dynamique. Nous mettons en œuvre l'algorithme d'Uzawa où la maximisation dans le primal est faite par programmation dynamique. Nous appliquons cette méthode à une instance de barrage et examinons les résultats numériques obtenus. Sur la base de cette étude, une discussion avec les opérationnels met en évidence la nécessité de reformuler le critère d'optimisation, ce qui fait l'objet du chapitre 2.

Sommaire

1.1	Production hydroélectrique et cote touristique	8
1.2	Formulation du problème d'optimisation	9
1.3	Algorithme de résolution	12
1.3.1	Réécriture dynamique de la contrainte en probabilité	13
1.3.2	Dualisation de la contrainte en probabilité	14
1.3.3	Algorithme de résolution	14
1.4	Application numérique	17
1.5	Discussion	21

1.1 Production hydroélectrique et cote touristique

L'énergie hydroélectrique est produite par l'usine d'un barrage lorsque les vannes de celui-ci s'ouvrent et que l'énergie potentielle de l'eau stockée dans le réservoir se transforme en énergie cinétique. Cette énergie fait tourner la turbine de l'usine par le biais de l'eau écoulée et le volume d'eau alors turbiné entraîne un alternateur qui produit de l'électricité. Cette électricité est mise aux normes par un transformateur et est ensuite acheminée vers le réseau.

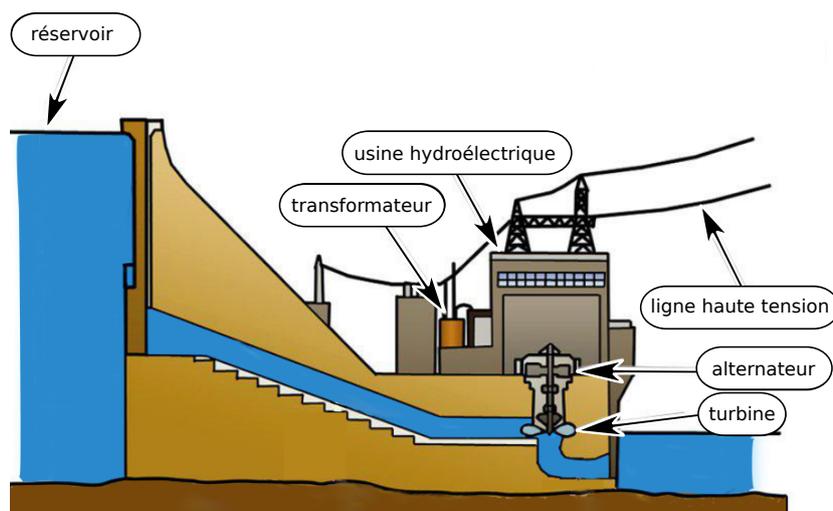


FIGURE 1.1 – Barrage hydroélectrique.

L'énergie produite est fonction des caractéristiques de la turbine (de son rendement et des ses points de fonctionnements) ainsi que de la hauteur depuis laquelle l'eau s'écoule du réservoir. Ce phénomène est appelé effet de hauteur de chute. Bien que pouvant être important, cet effet peut être mis de côté en pratique dans la modélisation des problèmes de gestion de barrage. D'autre part, il arrive que l'eau stockée forme un lac en amont du barrage. Il est alors fréquent que des activités autres que la production hydroélectrique se développent autour. En conséquence, la gestion des volumes à turbiner se révèle plus délicate du fait de la présence d'enjeux multiples et tous impactés par l'état de remplissage du lac. L'activité touristique fait partie de ces enjeux. Active durant la période du même nom, elle nécessite qu'un remplissage minimum du lac, appelé *cote*, soit observé. La gestion de la production hydroélectrique du barrage se faisant dans l'incertain, cette cote ne peut être respectée face à toutes les réalisations des aléas affectant le barrage, et ce, pour des considérations économiques ou physiques. De ce fait, il est d'usage pour les gestionnaires de contraindre le contrôle des volumes turbinés au respect de la cote avec un niveau de probabilité donné. Cette contrainte est appelée *contrainte de cote touristique*.

Nous nous intéressons à ce type de barrage (à lac amont et soumis à une contrainte de cote touristique) dans ce chapitre, le but étant d'optimiser sa production hydroélectrique.

1.2 Formulation du problème d'optimisation

Modèle dynamique du barrage. On se place dans le cadre d'un *processus de décision stochastique en temps discret* $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ où $T \in \mathbb{N}$ est l'horizon. On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les *variables aléatoires* de l'étude, à valeurs scalaires, sont :

- \mathbf{X}_t , le *volume de remplissage* du barrage à l'instant t ,
- \mathbf{U}_t et \mathbf{D}_t , les volumes d'eau *turbiné* et *déversé* durant le pas de temps $[t, t + 1[$,
- \mathbf{W}_t , les *apports exogènes en eau* collectés durant le pas de temps $[t, t + 1[$.
- \mathbf{C}_t , les *coûts marginaux de production* au pas de temps $[t, t + 1[$.

Nous supposons les aléas \mathbf{W}_t et \mathbf{C}_t indépendants pas de temps par pas de temps. Cette hypothèse, qui sera faite tout le long du manuscrit, est particulièrement importante du fait que nous recourons à la programmation dynamique avec pour état \mathbf{X}_t . La *dynamique d'évolution* donnant le volume de remplissage du barrage à $t + 1$ est fonction du volume au pas de temps précédent et du volume déstocké et des apports perçus le long du pas de temps $[t, t + 1[$: $\forall t \in \{0, \dots, T - 1\}$,

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t - (\mathbf{U}_t + \mathbf{D}_t) \text{ et } \mathbf{X}_0 = x_0 .$$

Les volumes déversés \mathbf{D}_t résultent d'un calcul visant à assurer le respect du niveau maximum de remplissage du barrage \bar{x}_t au cas où le volume turbiné, de volume maximum \bar{u}_t , ne suffirait pas : $\forall t \in \{0, \dots, T - 1\}$,

$$\mathbf{D}_t = \max\{\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t - \mathbf{U}_t - \bar{x}_t, 0\} .$$

La dynamique d'évolution se réécrit : $\forall t \in \{0, \dots, T - 1\}$,

$$\mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t) = \min\{\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t - \mathbf{U}_t, \bar{x}_t\} . \quad (1.1)$$

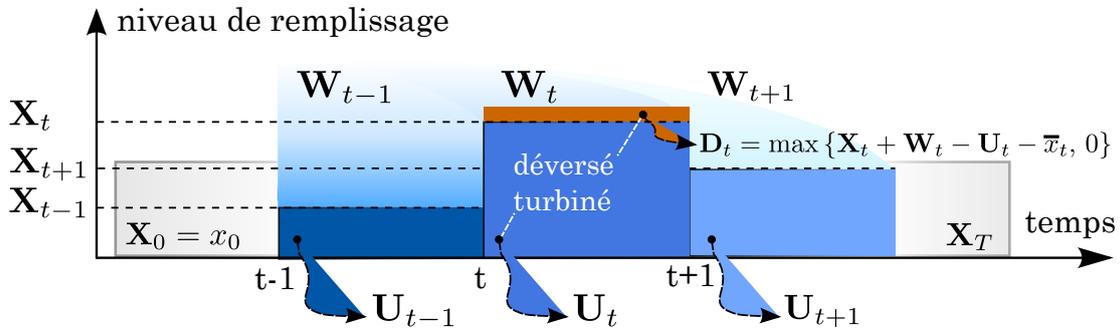


FIGURE 1.2 – Dynamique du barrage.

Stratégie de turbiné. Nous définissons une *stratégie* $\mathbf{U}_{0:T-1} = (\mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_{T-1})$ comme une suite de variables aléatoires ayant la propriété que, à tout instant $t \in \{0, \dots, T-1\}$, \mathbf{U}_t est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{W}_{0:t}, \mathbf{C}_{0:t})$ des aléas passés. Nous notons ceci : $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$\mathbf{U}_t \preceq \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{W}_{0:t}, \mathbf{C}_{0:t}) \iff \sigma(\mathbf{U}_t) \subset \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{W}_{0:t}, \mathbf{C}_{0:t}) . \quad (1.2)$$

La stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}$, *en boucle fermée* (en feedback sur un état), est dite *en hasard-décision* car $\mathbf{U}_{0:t}$ dépend des bruits jusqu'à l'instant t *inclus*. On attend de cette stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}$ qu'elle satisfasse le respect presque-sûr des contraintes physiques suivantes :

- volumes de remplissage minimum et maximum du réservoir : $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$\underline{x}_{t+1} \leq \mathbf{X}_{t+1} \leq \bar{x}_{t+1} , \quad (1.3a)$$

- volumes turbinés minimum et maximum : $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$0 \leq \mathbf{U}_t \leq \bar{u}_t . \quad (1.3b)$$

Valorisation de la production. La valorisation de la production hydroélectrique d'un barrage suit le mécanisme suivant :

- la production hydroélectrique à t , $\eta_h : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$, générée par le barrage est valorisée linéairement en les coûts marginaux de production $\mathbf{C}_t \geq 0$ ¹ et entraîne un coût d'usure proportionnel au carré du volume turbiné, soit au total $\mathbf{C}_t \times \eta_h(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t) \times \mathbf{U}_t - \varepsilon \mathbf{U}_t^2$ avec η_h le coefficient d'efficacité lié aux caractéristiques de la turbine et, éventuellement, à la hauteur de chute si nous la prenons en compte,
- une fonction K_T valorise le remplissage du réservoir à la fin de la période d'étude.

Comme évoqué dans la section 1.1, il est fréquent que le phénomène de hauteur de chute soit mis de côté. De plus, bien qu'en principe non constante, η_h est généralement considérée comme telle. Si cette approximation peut être améliorée (une régression d'ordre deux paraissant tout indiquée dans [Diniz et al., 2007]), elle n'apparaît pas déraisonnable pour autant. Ainsi, la fonction de valorisation de la production hydroélectrique s'écrit :

$$L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) = \mathbf{C}_t \times \mathbf{U}_t - \varepsilon \mathbf{U}_t^2 .$$

1. L'intérêt économique est ici de maximiser les coûts de production d'électricité épargnés en recourant à l'énergie hydraulique.

Il est alors classique de poser le problème comme la maximisation en espérance de la fonction de valorisation que nous venons de décrire et donc de recourir au critère :

$$J(\mathbf{U}) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right]. \quad (1.4)$$

Modélisation de la contrainte de cote touristique comme une contrainte en probabilité. Associée à l'enjeu touristique, la contrainte de cote touristique est de respecter un niveau de remplissage minimum $x_{\text{réf}}$ durant la période touristique avec un niveau de probabilité $p_{\text{réf}}$ donné. Notant \mathcal{T} l'ensemble des pas de temps de la période touristique, cette contrainte s'écrit :

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \geq p_{\text{réf}}. \quad (1.5)$$

Formulation du problème d'optimisation Nous faisons porter les contraintes de bornes (5.4) et de non anticipativité (1.2) dans l'ensemble admissible \mathfrak{U} suivant :

$$\mathfrak{U} = \left\{ \mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^T \left| \begin{array}{l} 0 \leq \mathbf{U}_t \leq \min\{\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t - \underline{x}_t, \bar{u}_t\}, \\ \text{et } \mathbf{U}_t \preceq \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{W}_{0:t}, \mathbf{C}_{0:t}), \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \end{array} \right. \right\}. \quad (1.6)$$

Le problème d'optimisation stochastique que nous allons considérer dans ce chapitre s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \quad & \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right] \\ \text{s.c.} \quad & \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ & \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ & \mathbf{X}_0 = x_0, \\ & \mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \geq p_{\text{réf}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Il s'agit donc de résoudre en hasard-décision un problème de contrôle optimal stochastique soumis à une *contrainte en probabilité jointe*.

Bien qu'apparaissant naturel depuis de nombreuses années² dans bon nombre de problèmes issus de l'industrie ([Dupačová et al., 1991], [Andrieu et al., 2010], [Ackooij et al., 2013] et [Arnold et al., 2013] par exemple), le recours à une telle contrainte au sein d'un problème d'optimisation représente en général une difficulté à la fois théorique et numérique, d'autant plus lorsque le problème est de nature dynamique et en boucle fermée³. En effet, alors qu'il

2. L'emploi d'une contrainte en probabilité fut introduit pour la première fois en 1959 sous une forme individuelle par [Charnes et Cooper, 1959], puis étendu sous une forme jointe en 1965 par [Miller et Wagner, 1965], et ce dans le contexte de la résolution de problèmes industriels.

3. Il n'existe pas, à notre connaissance, de résultats généraux sur l'optimisation dynamique en boucle fermée sous contrainte en probabilité.

s'agit de propriétés cruciales en optimisation, la connexité, la convexité ou encore la fermeture de l'ensemble admissible induit ne peuvent que très rarement être garanties, sous des hypothèses sur la structure de la contrainte et sur la distribution des bruits ([Prékopa, 1995], [Prékopa, 2003], [Henrion, 2004], [Dentcheva, 2009], [Henrion, 2002] et [Andrieu, 2004]).

Remarque : Pour illustrer les difficultés théoriques que nous venons de mentionner, considérons l'exemple suivant. Notons \mathcal{G} l'ensemble des événements de la tribu \mathcal{F} tels que :

$$\mathbb{P}[H] \geq p, \forall H \in \mathcal{G}$$

et notons G l'événement $\{\omega | g(x, \omega) \leq 0\}$. Considérons l'ensemble admissible $\mathfrak{B}(p)$:

$$\mathfrak{B}(p) = \{x | \mathbb{P}[G] \geq p\}.$$

Cet ensemble peut se réécrire comme l'union d'ensembles suivante :

$$\mathfrak{B}(p) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \bigcap_{\omega \in G} \{x | g(x, \omega) \leq 0\},$$

Nous remarquons alors que, quant bien même les ensembles $\{x | g(x, \omega) \leq 0\}$ seraient convexes, connexes ou fermés, $\mathfrak{B}(p)$ pourrait ne pas l'être (union de convexes ou de connexes et union *a priori* non finie de fermés). ■

L'évaluation de la contrainte, de son gradient ou de son Hessien au cours du déroulement d'un algorithme de résolution⁴ est compliquée (l'estimation d'une probabilité est un sujet de recherche à part entière tout comme l'explicitation de son gradient ou de son Hessien, [Kibzun et Uryasev, 1998], [Genz et Bretz, 2009], [Ackooij et al., 2011], [Henrion et Möller, 2012]). À ce propos, la question de la stabilité de la solution optimale ([Dupačová, 1990], [Henrion et Römisich, 2004], [Luedtke et Ahmed, 2008], [Henrion, 2013]) est à prendre en compte lorsque la distribution de l'aléa est approchée par des échantillons ou des scénarios (ce que nous ne ferons pas). Nous sommes donc confrontés à un problème difficile, d'autant plus que la solution à déterminer est une stratégie sur les propriétés de laquelle il est délicat de se prononcer (afin de garantir les bonnes propriétés de la contrainte en probabilité) avant même de résoudre le problème.

1.3 Algorithme de résolution

Dans un premier temps, nous allons réécrire la contrainte en probabilité (1.5) avec une nouvelle variable d'état binaire et une équation dynamique et la transformer en contrainte finale sur cet état que nous dualiserons.

4. Notamment d'un algorithme issu de la théorie de l'optimisation différentiable.

Nous présenterons ensuite une adaptation de l'algorithme d'Uzawa qui alterne mise à jour du multiplicateur et résolution du primal par programmation dynamique.

1.3.1 Réécriture dynamique de la contrainte en probabilité

Soit $E \in \mathcal{F}$ un événement de $\{\Omega, \mathcal{F}\}$. Nous notons $\mathbf{1}_E$, l'indicatrice prenant la valeur 1 si E se réalise et la valeur 0 sinon.

La probabilité qu'une trajectoire de stock respecte la cote touristique peut s'écrire sous la forme d'une espérance :

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\}}] = \mathbb{E}\left[\prod_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}\}}\right]. \quad (1.8)$$

Nous définissons le processus stochastique binaire $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \dots, \boldsymbol{\pi}_T)$ tel que : $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$\boldsymbol{\pi}_{t+1} = f_t^\pi(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t, \boldsymbol{\pi}_t) = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t) \geq x_{\text{réf}}\}} \times \boldsymbol{\pi}_t & \text{si } t \in \mathcal{T} \\ 1 & \text{si } t = 0 \\ \boldsymbol{\pi}_t & \text{sinon} \end{cases} .$$

Le processus $\boldsymbol{\pi}$ caractérise l'évolution de l'état de respect de la cote touristique tout au long de la période d'étude. Nous avons en effet :

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\pi}_T] .$$

Le problème (1.7) se réécrit :

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right] \\ & \text{s.c. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ & \quad \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ & \quad \boldsymbol{\pi}_{t+1} = f_t^\pi(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t, \boldsymbol{\pi}_t), \\ & \quad \mathbf{X}_0 = x_0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\pi}_0 = 1, \\ & \quad \mathbb{E}[\boldsymbol{\pi}_T] \geq p_{\text{réf}} . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Remarquons que nous sommes passés de la variable d'état scalaire $X_t \in \mathbb{R}$ au couple $(X_t, \boldsymbol{\pi}_t) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$.

1.3.2 Dualisation de la contrainte en probabilité

Nous dualisons la contrainte en probabilité $\mathbb{E}[\boldsymbol{\pi}_T] \geq p_{\text{réf}}$ du problème (1.9) et obtenons le problème équivalent suivant :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \min_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) + \lambda (\boldsymbol{\pi}_T - p_{\text{réf}}) \right] \\ \text{s.c. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ \boldsymbol{\pi}_{t+1} = f_t^{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t, \boldsymbol{\pi}_t), \\ \mathbf{X}_0 = x_0 \text{ et } \boldsymbol{\pi}_0 = 1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) = \max_{\mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) + \lambda (\boldsymbol{\pi}_T - p_{\text{réf}}) \right] \\ \text{s.c. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ \boldsymbol{\pi}_{t+1} = f_t^{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t, \boldsymbol{\pi}_t), \\ \mathbf{X}_0 = x_0 \text{ et } \boldsymbol{\pi}_0 = 1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Supposant l'existence d'un point-selle, le problème (1.9) se ramène à la minimisation en λ de la fonction ψ ci-dessus. Le problème (1.11) peut être résolu par programmation dynamique avec $(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\pi}_t)$ comme état, du fait de l'indépendance des variables de bruit pas de temps par pas de temps et de la séparabilité en temps du critère.

1.3.3 Algorithme de résolution

Nous recourrons à un algorithme de type Uzawa tel que :

- la *maximisation dans le primal* est obtenue par programmation dynamique stochastique,
- la *minimisation dans le dual* est obtenue par une méthode de gradient sur le multiplicateur.

Rappelons le résultat de convergence de l'algorithme d'Uzawa.

Théorème 1 (convergence de la méthode d'Uzawa, [Ekeland et Temam, 1999]).

Considérons deux espaces de Hilbert \mathcal{U} et \mathcal{V} , ainsi que le problème :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}^{ad}} J(u) \quad \text{s.c. } \Theta(u) \in -\mathcal{C} \quad \text{avec } \mathcal{U}^{ad} \subset \mathcal{U} \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{V}. \quad (1.12)$$

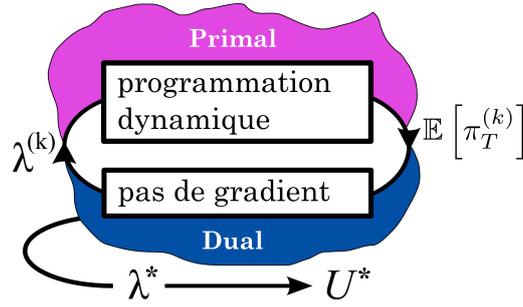


FIGURE 1.3 – Algorithme d’Uzawa.

Si

1. \mathcal{U}^{ad} est convexe, fermé et non vide,
2. \mathcal{C} est un cône convexe, fermé et non vide,
3. $J : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est fortement convexe de module a et Gâteaux-différentiable,
4. $\Theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ est \mathcal{C} -convexe et Lipschitz de constante τ ,
5. (1.12) admet un point selle (u^*, λ^*) ,

alors l’algorithme d’Uzawa :

$$\begin{aligned} u^{(k+1)} &= \underset{u \in \mathcal{U}^{ad}}{\operatorname{argmin}} J(u) + \langle \lambda^{(k)}, \Theta(u) \rangle, \\ \lambda^{(k+1)} &= \operatorname{proj}_{\mathcal{C}^*} \left[\lambda^{(k)} + \rho \times \Theta(u^{(k+1)}) \right], \end{aligned}$$

fait converger la suite $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ en norme vers la solution u^* du problème (1.12), pour tout $\rho < 2a/\tau^2$.

D’après la discussion sur les contraintes en probabilité vue au § 1.2, garantir les hypothèses 4 et 5 nécessite des conditions difficiles à vérifier en pratique. L’algorithme que nous appliquons est donc de nature heuristique. L’adaptation du théorème d’Everett ([Everett, 1963]) à notre problème nous garantit néanmoins l’optimalité de la solution obtenue si l’algorithme converge numériquement, pourvu que celle-ci fasse saturer la contrainte en probabilité. En effet, notons \mathbf{U}^* une solution du problème (1.9) et \mathbf{U}^\sharp une solution du problème (1.11) dans lequel la valeur λ^\sharp du multiplicateur est telle que :

$$\mathbb{E} \left[\boldsymbol{\pi}_T^\sharp \right] = p_{\text{réf}}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{U}^*) &= \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \min_{\lambda \in \mathbb{R}_+} J(\mathbf{U}) + \lambda \left(\mathbb{E} \left[\boldsymbol{\pi}_T^\# \right] - p_{\text{réf}} \right), \\
&\leq \min_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \max_{\mathbf{U} \in \mathfrak{U}} J(\mathbf{U}) + \lambda \left(\mathbb{E} \left[\boldsymbol{\pi}_T^\# \right] - p_{\text{réf}} \right), \\
&\leq \max_{\mathbf{U} \in \mathfrak{U}} J(\mathbf{U}) + \lambda^\# \left(\mathbb{E} \left[\boldsymbol{\pi}_T^\# \right] - p_{\text{réf}} \right), \\
&\leq J(\mathbf{U}^\#).
\end{aligned}$$

Comme par ailleurs, $\mathbf{U}^\#$ est admissible pour le problème (1.9), on a

$$J(\mathbf{U}^*) \geq J(\mathbf{U}^\#),$$

et donc

$$J(\mathbf{U}^*) = J(\mathbf{U}^\#),$$

et $\mathbf{U}^\#$ est solution du problème (1.9). Si l'algorithme converge numériquement et que la solution obtenue est telle que la contrainte de cote touristique est saturée, alors la solution est optimale.

Nous détaillons à présent l'algorithme de résolution du problème (1.7) de gestion de la production hydroélectrique d'un barrage dans le primal et dans le dual.

1.3.3.1 Maximisation dans le primal par programmation dynamique

Au début de l'itération k , on connaît la valeur du multiplicateur $\lambda^{(k)}$ et on va maximiser le Lagrangien et obtenir le contrôle $\mathbf{U}_{0:T-1}^{(k)}$.

Le critère (1.4) du problème (1.9) est séparable en temps et les bruits $(\mathbf{W}_{0:T-1}, \mathbf{C}_{0:T-1})$ sont indépendants pas de temps par pas de temps. Le principe d'optimalité de Bellman s'applique donc et nous pouvons résoudre l'optimisation du Lagrangien (1.11) (à $\lambda^{(k)}$ fixé) par programmation dynamique stochastique avec pour état (X_t, π_t) . On pose :

$$\mathfrak{U}_t(x, w) = \{u \in \mathbb{R}_+ | 0 \leq u \leq \min\{x + w - \underline{x}_t, \bar{u}_t\}\},$$

et on résout, de façon rétrograde dans le temps, les équations de programmation dynamique :

$$\begin{aligned}
V_T^{(k)}(x, \pi) &= K_T(x) + \lambda^{(k)} (\pi - p_{\text{réf}}), \\
\forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\
V_t^{(k)}(x, \pi) &= \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} L_t(u, \mathbf{C}_t) + V_{t+1}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^{\pi}(x, u, \mathbf{W}_t, \pi) \right) \right].
\end{aligned}$$

1.3.3.2 Minimisation dans le dual par méthode de gradient

À la suite du calcul précédent, on connaît la stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}^{(k)}$ et on calcule le multiplicateur $\lambda^{(k+1)}$. Pour cela, nous avons besoin de calculer probabilité $p^{(k)}$ de respect de la cote touristique obtenue en appliquant $\mathbf{U}_{0:T-1}^{(k)}$:

$$p^{(k)} = \mathbb{E} \left[\pi_T^{(k)} \right], \quad (1.13)$$

où $\pi_T^{(k)}$ est l'état final de la variable d'état $\pi^{(k)}$ engendrée par le contrôle $\mathbf{U}_{0:T-1}^{(k)}$. Ainsi, nous pouvons évaluer de façon exacte la probabilité $p^{(k)}$ en parcourant de façon rétrograde dans le temps les équations suivantes :

$$p^{(k)} = V_0^{(k)}(x_0, \pi_0),$$

$$\text{avec } \begin{cases} V_T^{(k)}(x, \pi) = \pi, \\ \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ V_t^{(k)}(x, \pi) = \mathbb{E} \left[V_{t+1}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, \mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{W}_t), f_t^{\pi}(x, \mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{W}_t, \pi) \right) \right]. \end{cases}$$

Nous mettons alors à jour le multiplicateur en appliquant une méthode de pas de gradient :

$$\lambda^{(k+1)} = \max \left\{ \lambda^{(k)} + \rho \left(p_{\text{réf}} - p^{(k)} \right), 0 \right\} \quad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}_+.$$

Notons que cette méthode peut être améliorée par des méthodes plus sophistiquées que le gradient (par dichotomie, par gradient conjugué ou par quasi-Newton par exemple).

1.4 Application numérique

On teste l'algorithme de résolution que nous avons développé afin de résoudre le problème de la gestion de la production hydroélectrique d'une instance simple de barrage.

Cadre d'étude. On résout le problème de la gestion de la production hydroélectrique d'une instance simple de barrage qui comprend un lac et une usine. L'usine a une contrainte de débit maximum constante sur l'ensemble des pas de temps et son rendement ne dépend pas du niveau de stock du lac (pas d'effet de hauteur de chute). Les caractéristiques sont :

- remplissage {minimum, maximum} = {0, 80} hm^3 ;
- nombre d'instantes = 12 (11 pas de temps) ;
- cote touristique = 50 hm^3 aux instantes 7 et 8 ;
- débits {minimum, maximum} = {0, 40} hm^3 .

Les variables aléatoires $\mathbf{W}_{0:T-1}$ sont indépendantes et suivent chacune une loi uniforme sur un ensemble discret à dix valeurs. Les variables aléatoires $\mathbf{C}_{0:T-1}$ sont indépendantes et suivent chacune une loi uniforme sur un ensemble discret à vingt valeurs.

Le niveau de probabilité de respect de la contrainte de cote touristique est de 0.9.

Mise en œuvre de l'algorithme du § 1.3.3 Dans l'état $(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\pi}_t)$, $\boldsymbol{\pi}_t$ est à valeurs binaires et \mathbf{X}_t prend ses valeurs dans $\mathbb{X} = [0, 80]$. Les variables de décision \mathbf{U}_t sont à valeurs dans $\mathbb{U} = [0, 40]$. Nous allons discrétiser \mathbb{X} et \mathbb{U} en un nombre fini de valeurs⁵ de manière à représenter l'instance du problème par une chaîne de Markov contrôlée de pas élémentaire $2hm^3$. Pour cela, nous discrétisons le niveau de remplissage en 40 points, le contrôle en 20 points et les apports prennent des valeurs qui sont des multiples de $2hm^3$. Ainsi nous n'avons pas à recourir à des interpolations lorsque nous mettons en œuvre la programmation dynamique.

Pour ce qui est de la mise à jour de la valeur du multiplicateur par méthode de gradient, nous affectons une valeur $\rho = 3000$ au pas.

Enfin, le critère d'arrêt est un nombre maximal de 800 itérations.

Résultats numériques Nous constatons, sur les figures 1.4, 1.5 et 1.6, que l'algorithme converge numériquement vers une solution telle que la contrainte en probabilité de respect de la cote touristique est saturée. La stratégie déterminée est donc optimale d'après le théorème d'Everett énoncé p. 15, ce qui valide notre approche.

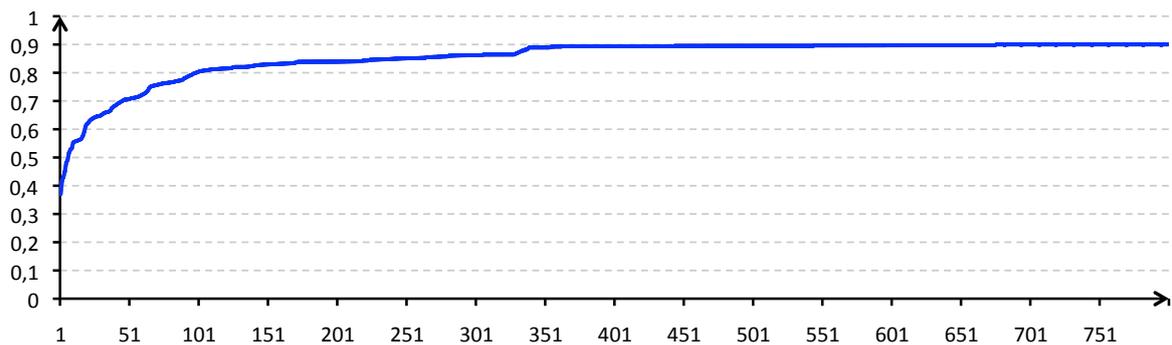


FIGURE 1.4 – Évolution du niveau de probabilité le long des itérations de l'algorithme.

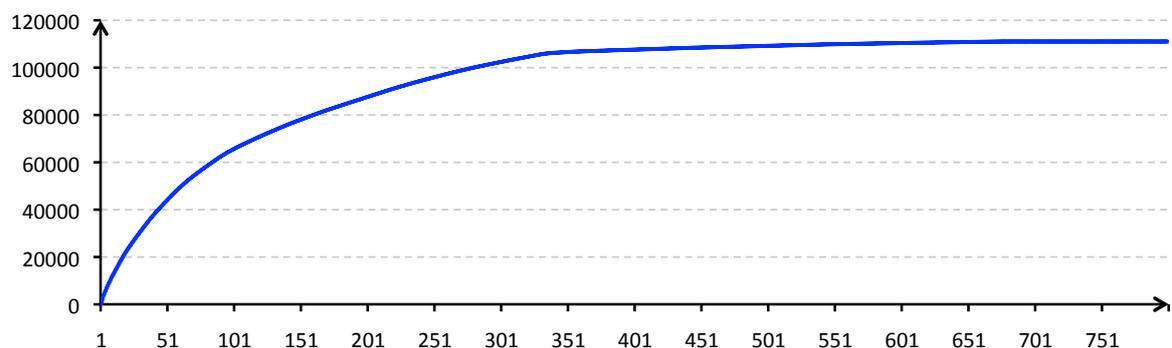


FIGURE 1.5 – Évolution de la valeur du multiplicateur le long des itérations de l'algorithme.

5. Ce qui a d'ailleurs du sens dans l'absolu du fait de la limitation de la précision des mesures et quantités pouvant être manipulées.

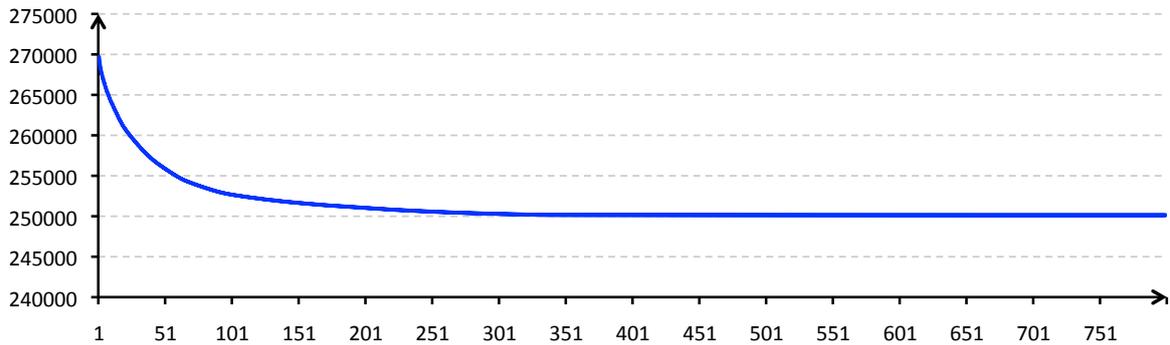


FIGURE 1.6 – Évolution du gain espéré le long des itérations de l'algorithme.

Les résultats obtenus sont :

- gain moyen optimal = 250 136 €,
- multiplicateur optimal = 111 028.

Les décisions appliquées sont représentées sur la figure 1.7. Sans surprise, elles s'expliquent par l'évolution des apports (la courbe fine en trait pointillé représente la moyenne des apports) et par l'évolution des prix (courbe fine en trait continu).

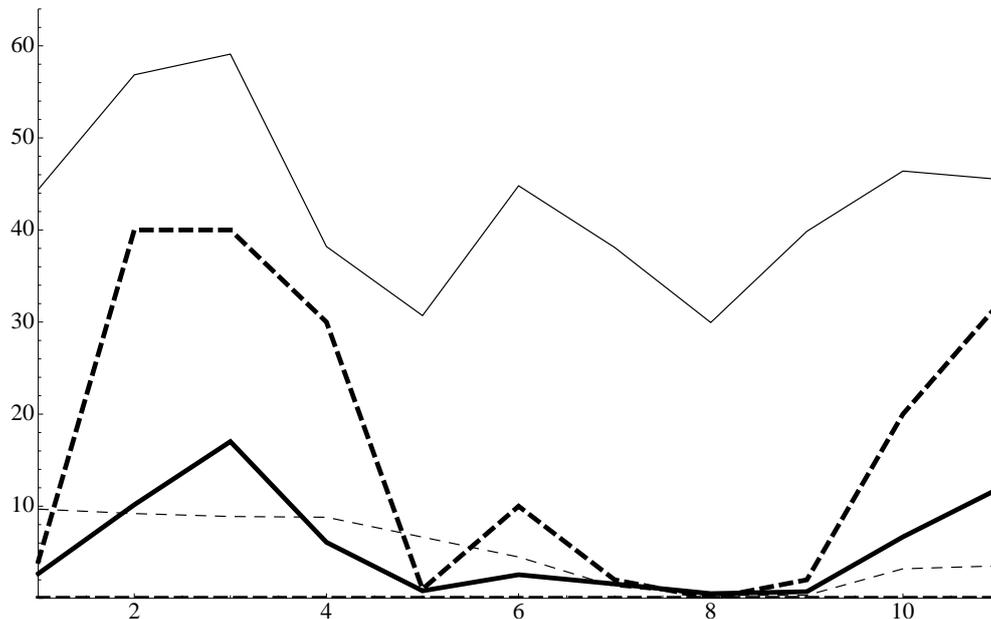


FIGURE 1.7 – Moyenne, 1-décile et 9-décile des turbinés appliqués (courbes grasses et continue/pointillées, en hm³), moyenne des apports (courbe fine pointillée, en hm³) et des coûts marginaux (courbe fine continue, en milliers d'euros par hm³).

La résolution numérique du problème (1.7) conduit à des trajectoires optimales d'états et de contrôles qui ne satisfont pas les gestionnaires du barrage. Ils estiment que les trajectoires de remplissage qui ne respectent pas la cote touristique (courbes en gras dans la figure (1.8))

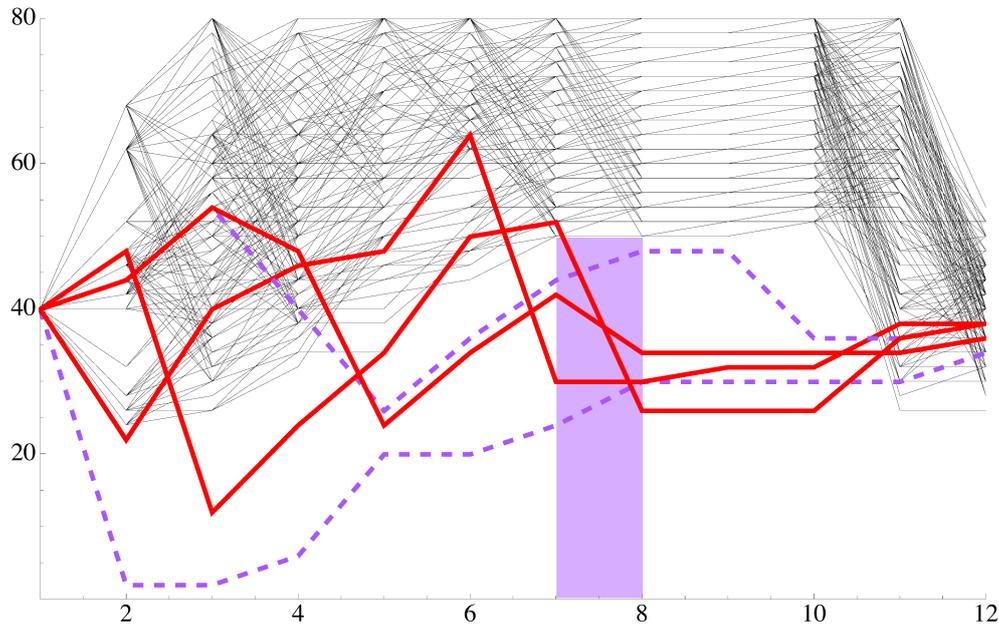


FIGURE 1.8 – Trajectoires de stock ne respectant pas la cote touristique (traits gras) et trajectoires la respectant (traits fins). La cote touristique est représentée par un rectangle

ne devraient pas “piquer du nez” avant et pendant la saison touristique. En effet, ceci peut donner l'impression que tout n'a pas été fait pour respecter le niveau de cote touristique. C'est au cours de discussions avec les gestionnaires que nous avons réalisé que ce qu'ils entendaient par contrainte de cote touristique ne se réduisait pas à une contrainte en probabilité mais qu'elle ne devait pas présenter les caractéristiques suivantes :

- anticipation du non-respect de la cote touristique et volumes turbinés trop importants à l'approche de la période touristique, tout ne paraissant alors pas avoir été fait pour limiter le non respect et le degré de non respect de la cote,
- violation délibérée de la cote alors que cela aurait pu être évité,
- accentuation du déficit de remplissage du barrage en période touristique.

Précisons que les comportements contestés des trajectoires observées relèvent toutefois d'une stratégie optimale au vu de la modélisation du problème adoptée. En effet, ayant modélisé la contrainte associée comme une contrainte en probabilité jointe, si le niveau de stock minimum $x_{\text{réf}}$ n'est pas respecté à un pas de temps t de la période touristique ou que ce non-respect apparaît inéluctable dans les instants à venir, la contrainte perd son effectivité aux instants ultérieurs à t . Le degré de non-respect de la cote touristique n'étant pas contraint, le problème revient alors à la maximisation non contrainte d'un gain proportionnel aux volumes turbinés et nous continuons à vider le lac alors que $x_{\text{réf}}$ n'est pas respecté ou ne le sera pas de façon certaine.

1.5 Discussion

L'approche actuellement mise en œuvre par les gestionnaires de barrages est de gérer la contrainte de cote touristique par le biais d'heuristiques dites à jalons. Ces heuristiques n'assurent pas forcément une probabilité satisfaisante de respect de la cote touristique et ne sont pas optimales. Elles sont caractérisées par les deux phases suivantes.

1. Phase de préconditionnement :

- (a) Pour chaque scénario d'apports $W^{(l)}$ ($l \in \{1, \dots, L\}$) et à chaque instant t , on part de l'instant $t - 1$ précédent et on détermine le stock minimum $\underline{x}_{t-1}^{(l)}$ qu'il faudra y observer si l'on veut que les contraintes de niveaux soient respectées à l'instant t , en nous basant sur la donnée du débit minimum à cet instant et suivant le scénario d'apports considéré :

$$\underline{x}_{t-1}^{(l)} = \min \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid f_t^{\mathbf{X}} \left(x, \underline{u}_t, W_{t-1}^{(l)} \right) \geq x_t \right\}.$$

On obtient de façon rétrograde l'ensemble des valeurs $\underline{x}_t^{(l)}$.

- (b) De ces valeurs on prend le $p_{\text{réf}}$ -ième L -quantile supérieur x_t^{cr} et on l'intègre en tant que borne inférieure à respecter, si la borne initiale lui est inférieure.

2. Phase d'optimisation : les opérationnels résolvent le problème

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \quad & \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right] \\ \text{s.c.} \quad & \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ & \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \quad (1.14) \\ & \mathbf{X}_0 = x_0, \quad (1.15) \\ & \max \left\{ x_t^{\text{cr}}, x_t^{\text{min}} \right\} \leq \mathbf{X}_t, \quad 0 \leq \mathbf{U}_t \leq \bar{\mathbf{u}}_t, \\ & \mathbf{U}_t \preceq \sigma(x_0, \mathbf{W}_{0:t}, \mathbf{C}_{0:t}). \end{aligned}$$

La contrainte de cote touristique est donc gérée au moyen d'un *précalcul de jalons* qui réévalue, en amont de l'optimisation et via une heuristique, les bornes inférieures des niveaux de stock \mathbf{X}_t de façon à ce que ces niveaux soient toujours supérieurs à un niveau "suffisamment important" en espérant que la cote touristique soit respectée avec une probabilité $p_{\text{réf}}$.

En pratique, cette approche produit des stratégies qui ne respectent pas le niveau $p_{\text{réf}}$ de probabilité de respect de la cote. En revanche, l'aspect des trajectoires non touristiques satisfait les opérationnels.

L'approche que nous avons développée dans ce chapitre permet de respecter la contrainte en probabilité et de maximiser l'espérance des gains. Toutefois, à la demande des opérationnels,

nous allons, dans le chapitre suivant, la modifier pour produire des trajectoires correspondant à leurs attentes en cas de non respect de la cote touristique. Comme nous avons vu que l'exigence touristique ne se réduit pas uniquement au respect d'une contrainte en probabilité, nous adapterons le critère d'optimisation.

Reformulation du critère d'optimisation

Suite à la discussion de la fin du chapitre précédent, nous proposons ici une nouvelle formulation du problème de gestion d'un barrage hydroélectrique sous contrainte de cote touristique.

Dans cette perspective, nous commençons par analyser le critère d'optimisation afin de l'adapter aux demandes des opérationnels. Nous proposons deux critères à même d'y répondre, tout en conservant la contrainte de cote touristique en probabilité. Nous développons des algorithmes de résolution adaptés.

Pour terminer, nous procédons à une application numérique portant sur la même instance que celle du chapitre 1 et nous comparons les résultats numériques obtenus.

Sommaire

2.1	Discussion sur les critères d'optimisation	23
2.2	Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques	25
2.2.1	Lien entre les critères (2.3) et (2.4)	25
2.2.2	Nouvel algorithme de résolution	28
2.2.3	Définition d'une heuristique adaptée aux trajectoires non touristiques	29
2.3	Optimisation du critère valorisant partiellement les trajectoires non touristiques	30
2.4	Application numérique	31
2.5	Discussion	36

2.1 Discussion sur les critères d'optimisation

On reprend la modélisation (1.7) du chapitre 1 de la gestion de la production hydroélectrique d'un barrage sous la forme de la maximisation d'une espérance de gain sous contrainte en probabilité. On introduit les notations suivantes :

– variable aléatoire de gain :

$$\mathbf{G} = \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T), \quad (2.1)$$

– événement $\Omega_{\mathcal{T}}$ de respect et son complémentaire $\bar{\Omega}_{\mathcal{T}}$, durant la saison \mathcal{T} :

$$\Omega_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\} \quad \text{et} \quad \bar{\Omega}_{\mathcal{T}} = \Omega \setminus \Omega_{\mathcal{T}}.$$

Nous qualifions les trajectoires de remplissage de *touristiques* lorsqu'elles appartiennent à $\Omega_{\mathcal{T}}$ et de *non touristiques* au contraire.

Considérons le critère donné par l'espérance du gain \mathbf{G} :

$$\mathbb{E}[\mathbf{G}] = \mathbb{P}[\Omega_{\mathcal{T}}] \times \mathbb{E}[\mathbf{G}|\Omega_{\mathcal{T}}] + (1 - \mathbb{P}[\Omega_{\mathcal{T}}]) \times \mathbb{E}[\mathbf{G}|\bar{\Omega}_{\mathcal{T}}]. \quad (2.2)$$

Dans ce critère, apparaissent les gains provenant tant des trajectoires touristiques (terme $\mathbb{E}[\mathbf{G}|\Omega_{\mathcal{T}}]$) que ceux des trajectoires non touristiques (terme $\mathbb{E}[\mathbf{G}|\bar{\Omega}_{\mathcal{T}}]$). C'est bien ce dernier terme qui pose problème aux gestionnaires (discussion à la fin du chapitre 1).

Nous allons à présent proposer des critères qui vont tenter de corriger ce que les gestionnaires perçoivent comme des inconvénients :

- anticipation du non-respect de la cote touristique et volumes turbinés trop importants à l'approche de la période touristique, tout ne paraissant alors pas avoir été fait pour limiter le non respect et le degré de non respect de la cote,
- violation délibérée de la cote alors que cela aurait pu être évité,
- accentuation du déficit de remplissage du barrage en période touristique.

Nous proposons les nouveaux critères :

1.

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right) \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\}} \right]. \quad (2.3)$$

Seuls les turbinés associés aux trajectoires de stock qui respectent la cote sont valorisables.

2.

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \middle| \mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T} \right]. \quad (2.4)$$

Le gain à maximiser ne porte que sur les trajectoires touristiques.

3.

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=0}^{t_+} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) \right) \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\}} + \sum_{t=t_++1}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right], \quad (2.5)$$

avec t_+ le dernier pas de temps de \mathcal{T} . Tout turbiné à même d'influer sur le respect de la cote n'est valorisable que conditionnellement à ce respect.

La maximisation du critère en espérance conditionnelle (2.4) étant ramenée à celle du critère (2.3) dans la partie qui suit, on s'intéressera, dans les sections qui suivent, à la maximisation du critère (2.5) ou du critère (2.3) sur l'ensemble admissible (1.6) et sous la contrainte de cote touristique (1.5).

2.2 Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques

Nous allons formuler un problème d'optimisation avec le critère (2.3). Nous montrerons que, sous des hypothèses techniques, ce problème est équivalent au problème d'optimisation avec le critère (2.4).

Nous considérons les problèmes avec critères (2.3) et (2.4). On remarque que ce dernier critère n'entre pas dans le cadre traditionnel de l'optimisation mathématique en raison du conditionnement. Nous montrons qu'il partage sa solution optimale avec le problème avec critère (2.3) lorsque cette solution fait saturer la contrainte en probabilité (1.5). Nous nous intéressons alors uniquement à la résolution du problème avec critère (2.3), ce que nous faisons en introduisant un nouvel état dynamique qui représente l'évolution de l'état des gains cumulés. Comme dans le chapitre 1, nous dualisons la contrainte en probabilité (1.5) et appliquons un algorithme d'Uzawa dans lequel on résout la maximisation du problème primal par programmation dynamique.

2.2.1 Lien entre les critères (2.3) et (2.4)

Considérons le critère en espérance conditionnelle suivant,

$$\mathbb{E}[\mathbf{G}|\Omega_{\mathcal{T}}] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \mid \mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\right]. \quad (2.6)$$

Il s'écrit :

$$\mathbb{E}[\mathbf{G}|\Omega_{\mathcal{T}}] = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{G} \mathbf{1}_{\Omega_{\mathcal{T}}}]}{\mathbb{P}[\Omega_{\mathcal{T}}]}, \quad (2.7)$$

S'agissant d'un ratio d'espérances, la résolution du problème associé au critère (2.6) n'entre pas dans le cadre traditionnel de l'optimisation mathématique. Le résultat que nous proposons rapproche la maximisation d'un ratio de type (2.7) soumis à une contrainte sur son dénominateur à celle portant uniquement sur son numérateur et sous la même contrainte. Il montre une certaine équivalence entre les formulations (2.3) et (2.4).

Proposition 1.

Soit \mathcal{Q} un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert. Considérons N et D , des fonctions différentiables de \mathcal{Q} dans \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_+^* , un réel $p > 0$ et intéressons-nous aux problèmes suivants :

$$\max_{q \in \mathcal{Q}} \frac{N(q)}{D(q)} \quad \text{s.c.} \quad D(q) \geq p, \quad (2.8)$$

$$\max_{q \in \mathcal{Q}} N(q) \quad \text{s.c.} \quad D(q) \geq p. \quad (2.9)$$

1. Soit q^* une solution de (2.9) telle que la contrainte $D(q) \geq p$ est saturée (i.e. : $D(q^*) = p$). Alors q^* est aussi solution du problème (2.8) et si μ^* et ν^* sont les multiplicateurs de Kuhn-Tucker optimaux associés aux contraintes dans (2.9) et (2.8), nous avons,

$$\mu^* = \nu^* D(q^*) - \frac{N(q^*)}{D(q^*)}.$$

2. Soit $q^\#$ une solution de (2.8). Si le multiplicateur de Kuhn et Tucker $\nu^\#$ associé à la contrainte existe et est tel que :

$$\nu^\# \geq \frac{N(q^\#)}{D(q^\#)^2},$$

alors $q^\#$ est aussi solution du problème (2.9).

Démonstration.

1. Considérons une solution q^* du problème (2.9) et supposons que $D(q^*) = p$. Nous avons $N(q^*) \geq N(q) \quad \forall q \in \{u \in \mathcal{Q} | D(u) \geq p\}$

$$\text{et donc} \quad \frac{N(q^*)}{D(q^*)} = \frac{N(q^*)}{p} \geq \frac{N(q)}{D(q)} \quad \forall q \in \{u \in \mathcal{Q} | D(u) \geq p\}$$

si bien que q^* est une solution du problème (2.8).

2. Considérons une solution $q^\#$ du problème (2.8). Les conditions nécessaires de Kuhn-Tucker impliquent, si le multiplicateur $\nu^\#$ associé à la contrainte existe, que

$$\nabla \frac{N(q^\#)}{D(q^\#)} + \nu^\# \nabla D(q^\#) \in K_{\mathcal{Q}}(q^\#)$$

$$\text{avec} \quad \nu^\# \geq 0, \quad D(q^\#) - p \geq 0 \quad \text{et} \quad \nu^\# (D(q^\#) - p) = 0.$$

Posons $\mu^\# = \nu^\# D(q^\#) - \frac{N(q^\#)}{D(q^\#)}$ et calculons

$$\nabla \frac{N(q^\#)}{D(q^\#)} + \nu^\# \nabla D(q^\#) = \frac{\nabla N(q^\#)}{D(q^\#)} + \left(\nu^\# - \frac{N(q^\#)}{D(q^\#)^2} \right) \nabla D(q^\#) \in K_{\mathcal{Q}}(q^\#).$$

Comme $D(q^\#)$ est strictement positive, alors $\nabla N(q^\#) + \mu^\# \nabla D(q^\#) \in K_{\mathcal{Q}}(q^\#)$ avec

2.2. Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques 27

$D(q^\#) \geq p$. Si $\nu^\# \geq \frac{N(q^\#)}{D(q^\#)^2}$, alors $\mu^\# \geq 0$ et $\nu^\#$ étant optimal, $\nu^\# (D(q^\#) - p) = 0$ (condition de complémentarité). Remplaçons $\nu^\#$ par $\frac{\mu^\#}{D(q^\#)} + \frac{N(q^\#)}{D(q^\#)^2}$, nous avons :

$$\left(\frac{\mu^\#}{D(q^\#)} + \frac{N(q^\#)}{D(q^\#)^2} \right) (D(q^\#) - p) = 0 .$$

Les deux termes de cette somme étant de même signe, ils s'annulent tous les deux et $\mu^\# (D(q^\#) - p) = 0$. Ainsi, $\mu^\#$ est un multiplicateur qui respecte les conditions de Kuhn et Tucker et $q^\#$ est bien solution du problème (2.9).

□

La Proposition 1 indique que la solution maximisant le critère (2.3) maximise aussi le critère en espérance conditionnelle (2.6) et à contrainte en probabilité (1.5) pourvu que cette solution fasse saturer la contrainte sous laquelle sont posées ces maximisations. Nous pouvons donc, dans un premier temps, résoudre le modèle à critère en espérance sur indicatrice (2.3) et, si la contrainte est saturée (ce qui est généralement observé en pratique), disposer d'une stratégie de turbiné optimale pour le modèle à critère en espérance conditionnelle (2.4). Ainsi, le problème sur la résolution duquel nous nous penchons s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \quad & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right) \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\}} \right] \\ \text{s.c.} \quad & \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ & \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t) , \\ & \mathbf{X}_0 = x_0 , \\ & \mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \geq p_{\text{réf}} . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Remarque : Si nous réécrivons l'espérance sur indicatrice sur l'événement $\Omega_{\mathcal{T}}$ en terme d'espérance conditionnelle, nous obtenons l'expression :

$$\mathbb{E}[\mathbf{G} \times \mathbf{1}_{\Omega_{\mathcal{T}}}] = \mathbb{P}[\Omega_{\mathcal{T}}] \times \mathbb{E}[\mathbf{G} | \Omega_{\mathcal{T}}] .$$

Il s'agit donc d'atteindre une forme de compromis optimal entre l'importance des rémunérations espérées sur $\Omega_{\mathcal{T}}$ et la probabilité de la réalisation de cet événement. De fait, le niveau de probabilité atteint à l'optimum \mathbf{U}^* a un impact sur la valeur du critère à maximiser. Ainsi il se pourrait que la contrainte en probabilité soit respectée du seul fait du critère (et pas de la contrainte en probabilité) si $p_{\text{réf}}$ est moins élevé que le niveau de probabilité issu de la maximisation du critère (2.4) sur l'ensemble \mathfrak{U} des stratégies admissibles. Nous ne pourrions alors pas appliquer la Proposition 1 et optimiser le problème à critère en espérance conditionnelle. ■

2.2.2 Nouvel algorithme de résolution

La part du gain accumulée entre les instants 0 et t_+ (on rappelle que t_+ représente le dernier pas de temps de la cote touristique) est pris ou non en compte, suivant que la cote aura été respectée ou pas. Afin de représenter le processus de valorisation, nous introduisons les variables aléatoires σ_t des gains cumulés à t dont la dynamique est : $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$\sigma_{t+1} = f_t^\sigma(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t, \sigma_t) = \begin{cases} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + \sigma_t & \text{si } t \in \{1, \dots, T-1\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

De cette façon, le problème (2.10) se réécrit comme le problème de Bolza suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{E}[(\sigma_T + K_T(\mathbf{X}_T)) \pi_T] \\ & \text{s.c. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ & \quad \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ & \quad \pi_{t+1} = f_t^\pi(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t, \pi_t), \\ & \quad \sigma_{t+1} = f_t^\sigma(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t, \sigma_t), \\ & \quad \mathbf{X}_0 = x_0, \quad \pi_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 0, \\ & \quad \mathbb{E}[\pi_T] \geq p_{\text{réf}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

On observe que l'état est maintenant de dimension trois, (X_t, σ_t, π_t) , où toutefois π_t est une variable binaire.

Nous dualisons la contrainte $\mathbb{E}[\pi_T] \geq p_{\text{réf}}$ de cote touristique et intervertissons la minimisation en le multiplicateur et la maximisation en la stratégie. Ainsi, nous obtenons le problème d'optimisation (équivalent au problème (2.12) si existence d'un point-selle) :

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{E}[(\sigma_T + K_T(\mathbf{X}_T)) \pi_T + \lambda (\pi_T - p_{\text{réf}})] \\ & \text{s.c. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ & \quad \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ & \quad \pi_{t+1} = f_t^\pi(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t, \pi_t), \\ & \quad \sigma_{t+1} = f_t^\sigma(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t, \sigma_t), \\ & \quad \mathbf{X}_0 = x_0, \quad \pi_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Comme pour le problème du chapitre 1, nous allons résoudre le problème (2.13) par un algorithme d'Uzawa tel que la maximisation du primal, à multiplicateur $\lambda^{(k)}$ fixé, sera faite par programmation dynamique.

Les équations de programmation dynamique pour le problème (2.13) s'écrivent : $\forall(x, \sigma, \pi)$,

$$V_T^{(k)}(x, \sigma, \pi) = \pi \times (\sigma + K_T(x)) + \lambda^{(k)} (\pi - p_{\text{réf}}) ,$$

$$\forall t \in \{0, \dots, T-1\} :$$

$$V_t^{(k)}(x, \sigma, \pi) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} V_{t+1}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^{\sigma}(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t, \sigma), f_t^{\pi}(x, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t, \pi) \right) \right] . \quad (2.14)$$

Nous la résolvons (2.14) de façon rétrograde en temps afin d'obtenir la stratégie $\mathbf{U}^{(k)}$ optimale à $\lambda^{(k)}$ fixé. On remarquera que l'état étant de dimension trois, nous approchons des limites pratiques du recours à la programmation dynamique. Comme dans le § 1.3.3.2, nous mettons le multiplicateur à jour :

- en calculant la probabilité de respect de la cote touristique obtenue en appliquant $\mathbf{U}^{(k)}$.
Pour ce faire, nous posons, pour tout (x, σ, π)

$$V_T^{\pi^{(k)}}(x, \sigma, \pi) = \pi .$$

Pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$ et pour tout (x, σ, π) , nous calculons, de façon rétrograde dans le temps,

$$V_t^{\pi^{(k)}}(x, \sigma, \pi) = \mathbb{E} \left[V_{t+1}^{\pi^{(k)}} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, \mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{W}_t), f_t^{\sigma}(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t, \sigma), f_t^{\pi}(x, \mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{W}_t, \pi) \right) \right] .$$

Ainsi, nous avons

$$p^{(k)} = V_0^{\pi}(x_0, \sigma_0, \pi_0) .$$

- en effectuant le pas de gradient

$$\lambda^{(k+1)} = \max \left\{ \lambda^{(k)} + \rho (p_{\text{réf}} - p^{(k)}), 0 \right\} .$$

Nous itérons ensuite jusqu'à ce que l'algorithme converge.

La résolution du problème (2.10) ne fournit une stratégie que pour les trajectoires touristiques. Il est alors nécessaire de définir les contrôles à appliquer aux trajectoires non touristiques.

2.2.3 Définition d'une heuristique adaptée aux trajectoires non touristiques

À titre d'exemple, nous proposons de compléter la stratégie obtenue en résolvant le problème (2.10) en appliquant l'heuristique suivante aux trajectoires non touristiques :

- $t \in \mathcal{T}$: nous fixons le turbiné \mathbf{U}_t à sa valeur minimum 0. L'enjeu n'est alors plus, lorsque la cote touristique n'est pas respectée, de valoriser la production hydroélectrique mais bien de tout mettre en œuvre pour recoller à la cote.
- $t \notin \mathcal{T}$: nous appliquons les feedbacks destinés aux trajectoires qui respectent la cote touristique.

Nous appliquerons cette heuristique dans la section 2.4 lorsque nous effectuerons une simulation des trajectoires de remplissage afin d'étudier le comportement de celles qui ne respectent pas la cote touristique.

Nous venons de proposer une méthode de résolution du problème avec critère (2.3) et avec critère (2.4) si la contrainte en probabilité est saturée à l'optimum. Nous adaptons cette méthode à la résolution du problème avec critère (2.5) dans la section suivante.

2.3 Optimisation du critère valorisant partiellement les trajectoires non touristiques

On s'intéresse maintenant au problème d'optimisation lié au critère (2.5) :

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=0}^{t_+} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) \right) \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\}} + \sum_{t=t_++1}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right] \\
& \text{s.c. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\
& \quad \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t) , \\
& \quad \mathbf{X}_0 = x_0 , \\
& \quad \mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \geq p_{\text{réf}} .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

La résolution par programmation dynamique du problème lié à ce critère nécessite, comme dans la section précédente pour le problème (2.10), le recours à une variable d'état supplémentaire σ afin de représenter la dynamique du processus de valorisation. Cette dynamique diffère cependant de la dynamique (2.11) du fait que les valorisations le long des trajectoires ne sont conditionnées au respect de la cote par ces trajectoires que de l'instant 0 à l'instant t_+ (dernier pas de temps de \mathcal{T}) : $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$\sigma_{t+1} = f_t^\sigma(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t, \sigma_t) = \begin{cases} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + \sigma_t & \text{si } t \leq t_+ , \\ 0 & \text{si } t = 0 , \\ \sigma_t & \text{sinon .} \end{cases}$$

Le critère (2.5) se réécrit alors :

$$\max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[\sum_{t=t_++1}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + \sigma_T \pi_T + K_T(\mathbf{X}_T) \right] .$$

Tout comme dans la section précédente, nous dualisons la contrainte en probabilité et intervertissons les opérateurs de minimum et de maximum du problème équivalent. Les équations

de programmation dynamique correspondant au problème de maximisation à multiplicateur $\lambda^{(k)}$ sont : $\forall(x, \sigma, \pi)$,

$$V_T^{(k)}(x, \sigma, \pi) = \pi \times \sigma + K_T(x) + \lambda^{(k)} (\pi - p_{\text{réf}}) ,$$

pour t allant de $T - 1$, à $t_+ + 1$:

$$V_t^{(k)}(x, \sigma, \pi) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} L_t(u, \mathbf{C}_t) + V_{t+1}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^{\sigma}(u, \mathbf{C}_t, \sigma), f_t^{\pi}(x, u, \mathbf{W}_t, \pi) \right) \right] ,$$

pour t allant de t_+ , à 0 :

$$V_t^{(k)}(x, \sigma, \pi) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} V_{t+1}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^{\sigma}(u, \mathbf{C}_t, \sigma), f_t^{\pi}(x, u, \mathbf{W}_t, \pi) \right) \right] .$$

Après avoir décrit les algorithmes de résolution des problèmes d'optimisation (2.10) et (2.16), nous pouvons maintenant entreprendre leur résolution numérique. Pour cela, nous reprenons l'instance de barrage décrite au § 1.4.

2.4 Application numérique

On reprend le problème de gestion de barrage à cote touristique du chapitre 1 et on lui applique les deux reformulations proposées : (2.3) et (2.5). Le niveau de probabilité de respect de la cote touristique a été porté à 0.99. Ceci est dû au fait que les résolutions numériques des problèmes (2.10) et (2.16) pour $p_{\text{réf}} = 0.9$ mènent à une solution telle que la contrainte n'est pas saturée¹. La contrainte en probabilité n'est donc pas effective, le multiplicateur est égal à 0 (par condition de complémentarité) et l'interprétation marginaliste de cette valeur nous indique qu'il ne serait pas plus "coûteux" d'augmenter le niveau de probabilité $p_{\text{réf}}$.

Afin d'être en mesure d'évaluer le coût engendré par la prise en compte de la nouvelle caractérisation de l'enjeu touristique par les critères (2.3) et (2.5), nous simulons les valeurs prises par le coût économique (2.1) du chapitre 1 sur 10 000 scénarios de réalisation des bruits en appliquant les stratégies optimales des problèmes (2.10) et (2.16). Nous faisons la moyenne des ces valeurs et les comparons à la moyenne des gains simulés obtenus en appliquant la solution optimale du problème (1.7) lorsque $p_{\text{réf}} = 0.99$.

1. Une explication possible de l'apparition de ce phénomène a été proposée dans la remarque de la page 27.

Pour ce qui est de la mise en œuvre des algorithmes, nous reprenons le schéma de discrétisation du § 1.4. On note que la complexité des algorithmes a été considérablement augmentée : le nombre d'opérations élémentaires à effectuer est multiplié par le nombre de points de discrétisation de la variable σ , de l'ordre de 4000 :

$$\begin{aligned} \text{complexité de l'algorithme du chapitre 1 :} & \quad T \times d_X \times d_\pi \times d_U \times d_W, \\ \text{complexité des algorithmes du chapitre 2 :} & \quad T \times d_X \times d_\pi \times d_U \times d_W \times d_\sigma. \end{aligned}$$

C'est pourquoi nous sélectionnons un pas de gradient $\rho = 300\,000$ plus grossier que dans le chapitre 1. Nous fixons le nombre d'itérations à effectuer (critère d'arrêt des algorithmes) à 500.

La moyenne des gains simulés obtenu en appliquant la stratégie optimale pour le problème (1.7) et le multiplicateur optimal obtenu en résolvant ce problème sont :

- gain moyen optimal = 232 529 €,
- multiplicateur optimal = 262 479.

Penchons-nous maintenant sur la résolution du problème lié au critère (2.3).

Critère (2.3) : résultats numériques. Nous constatons, sur les figures 2.1, 2.2 et 2.3 que l'algorithme converge numériquement. La contrainte en probabilité est, de plus, saturée. Ainsi, nous savons que la stratégie obtenue est optimale pour le critère considéré, du fait du théorème d'Everett de la page 15.

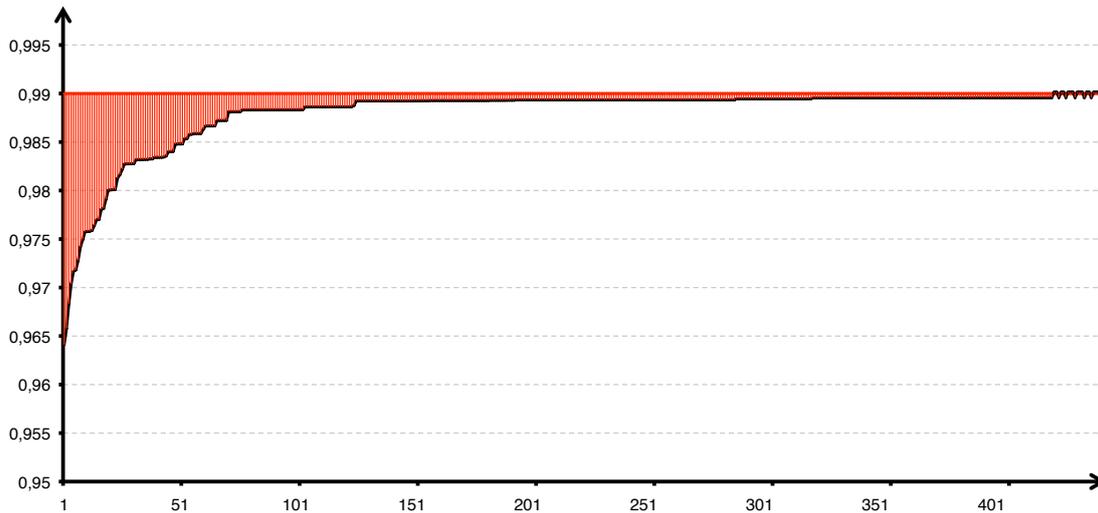


FIGURE 2.1 – Évolution du niveau de probabilité le long des itérations de l'algorithme.

Les résultats que nous obtenons sont :

- gain moyen optimal = 209 590 €,
- multiplicateur optimal = 261 262.

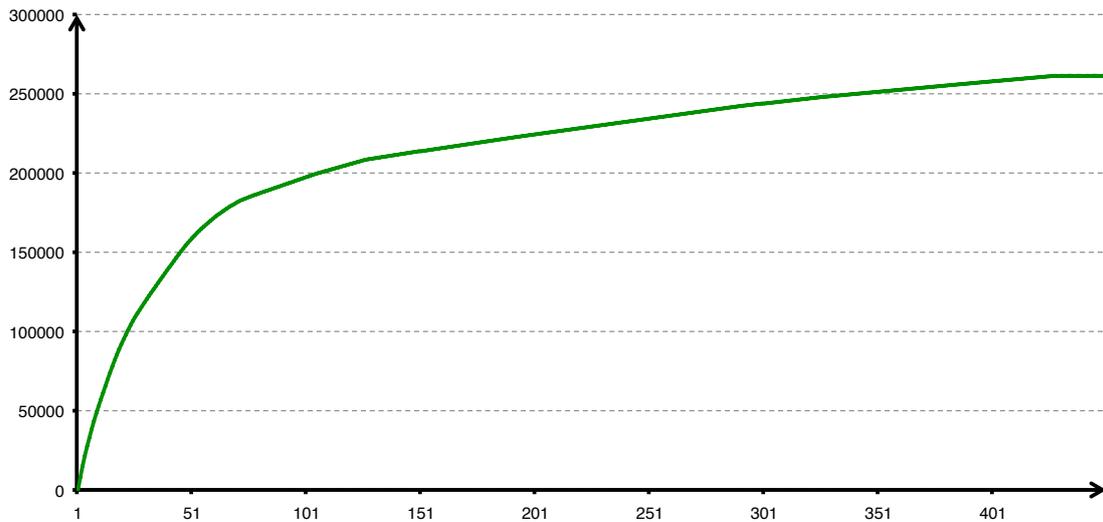


FIGURE 2.2 – Évolution de la valeur du multiplicateur le long des itérations de l’algorithme.

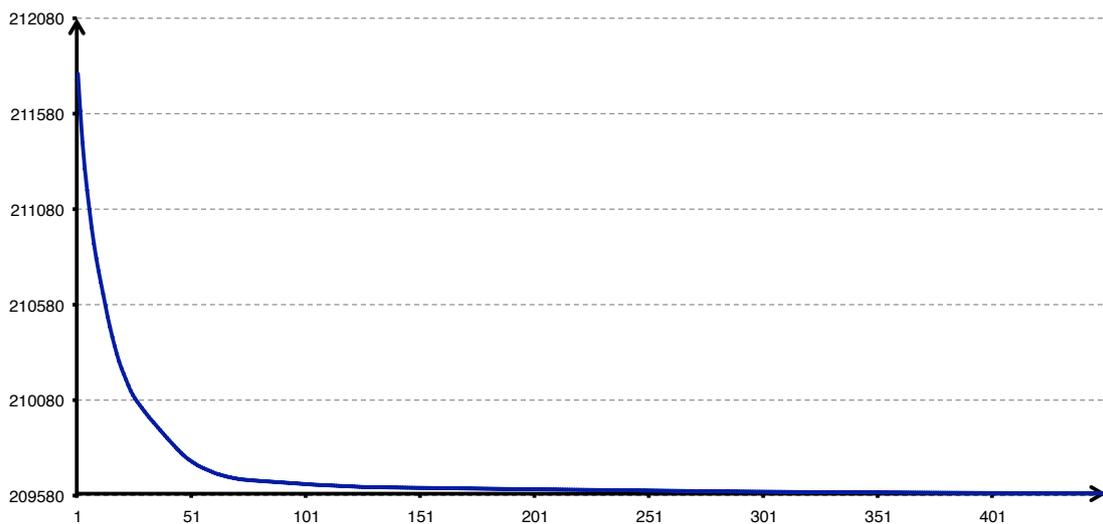


FIGURE 2.3 – Évolution du gain espéré le long des itérations de l’algorithme.

Examinons la figure 2.4 et vérifions si les comportements des trajectoires non touristiques sont conformes aux attentes formulées par les opérationnels. Nous observons une forme d’ascension progressive des stocks à l’approche de la période de cote touristique, très voisine de celle produite par l’heuristique à jalons décrite dans le chapitre 1 (voir page 21). Nous voyons que la proportion de trajectoires touristiques correspond bien à la probabilité de respect de la cote touristique requise. En évaluant la stratégie sur le critère économique du chapitre 1, nous mesurons le coût induit par les nouvelles exigences des gestionnaires à environ 10% du gain optimal espéré (dans le cas où la probabilité de cote touristique est $p_{\text{réf}} = 0.99$).

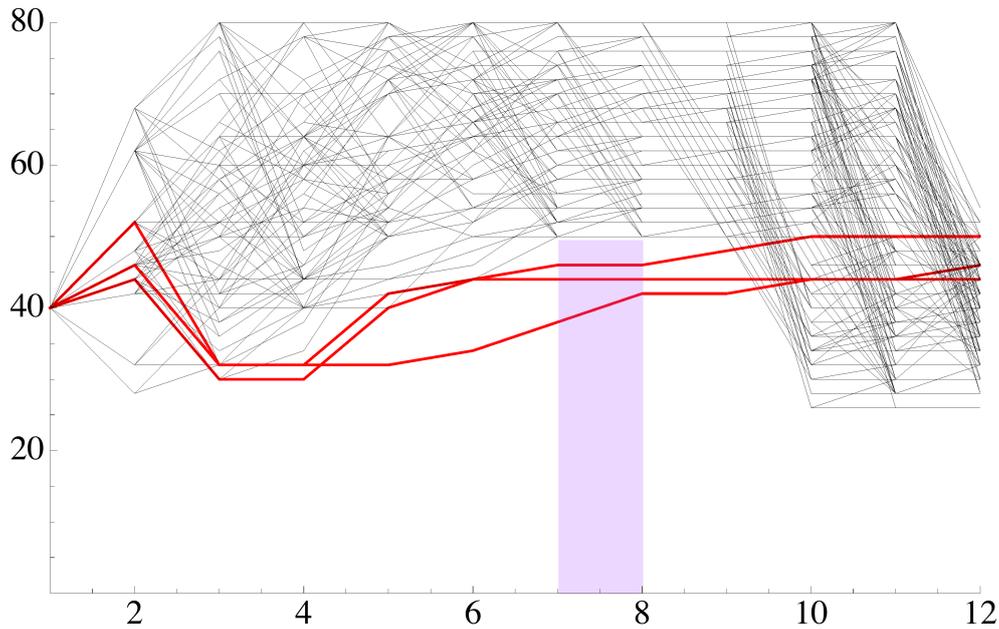


FIGURE 2.4 – Trajectoires de stock ne respectant pas/respectant la cote touristique (grasses/fines) et cote touristique (rectangle).

Nous nous penchons maintenant sur résultats numériques de la résolution du problème lié au critère (2.5) et les comparons aux résultats numériques de la résolution du problème lié au critère (2.3).

Critère (2.5) : résultats numériques. De même que pour le critère (2.3), nous constatons, sur les figures 2.5, 2.6 et 2.7 que l'algorithme converge numériquement. La contrainte en

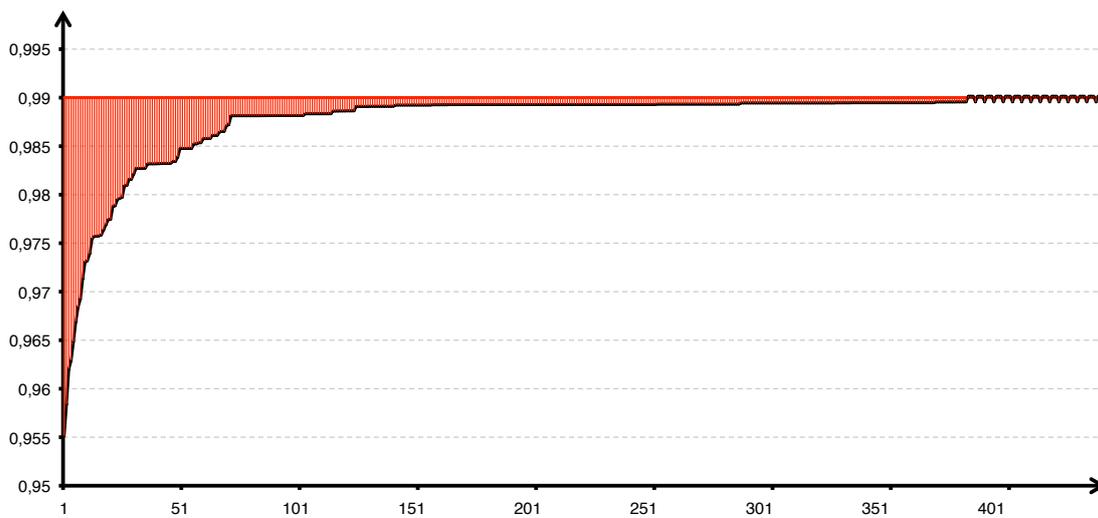


FIGURE 2.5 – Évolution du niveau de probabilité le long des itérations de l'algorithme.

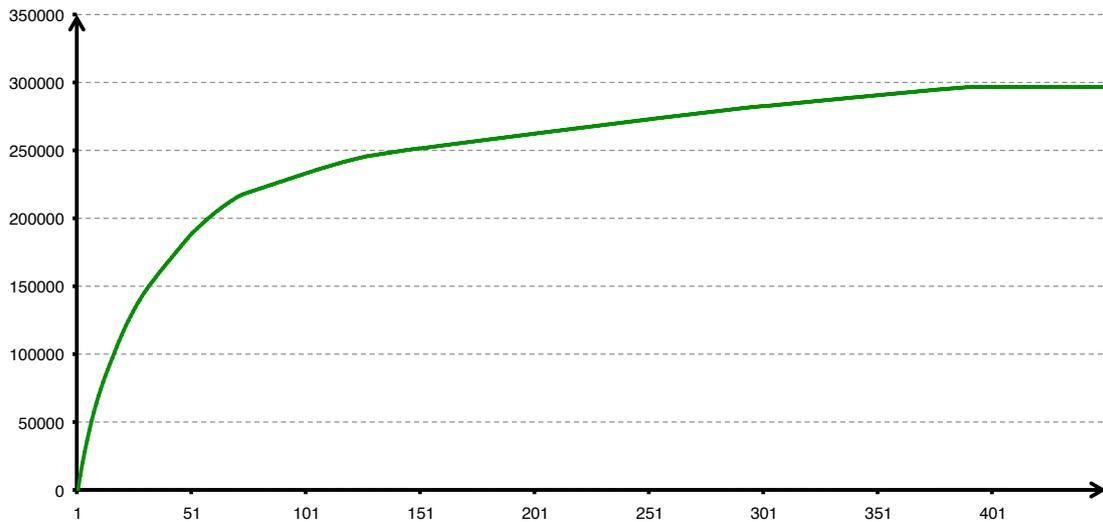


FIGURE 2.6 – Évolution de la valeur du multiplicateur le long des itérations de l'algorithme.

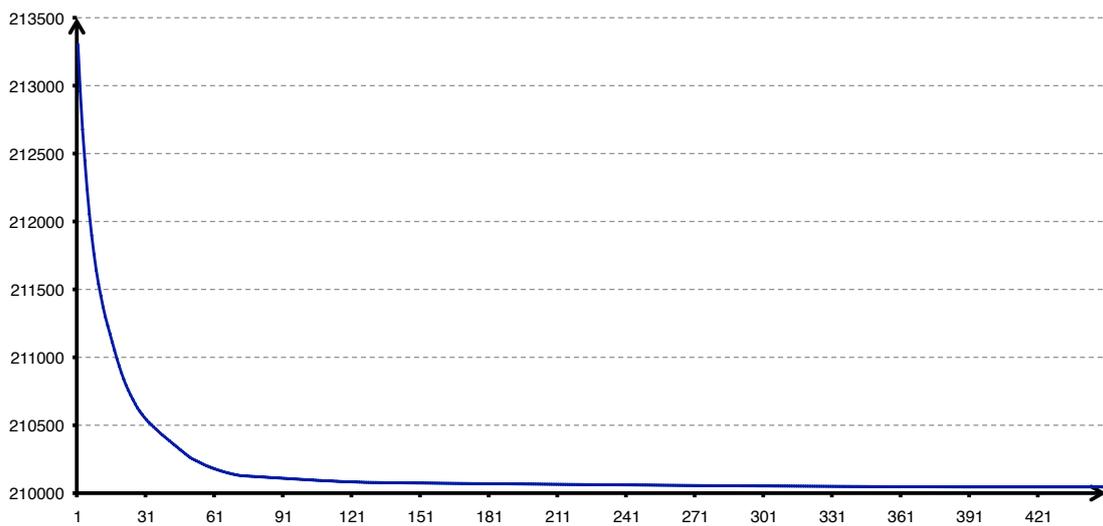


FIGURE 2.7 – Évolution du gain espéré le long des itérations de l'algorithme.

probabilité est également saturée, ce qui nous garanti l'optimalité de la stratégie obtenue (théorème d'Everett de la page 15).

Les résultats que nous obtenons sont :

- gain moyen optimal = 210 045 €,
- multiplicateur optimal = 296 538.

Les valeurs et les trajectoires de stock (figure 2.8) obtenues apparaissent presque identiques à celles de la méthode à heuristique du § 2.2.3. Les trajectoires non touristiques n'étant pas valorisées durant la période touristique, le contrôle alors optimal a été de quitter la zone de

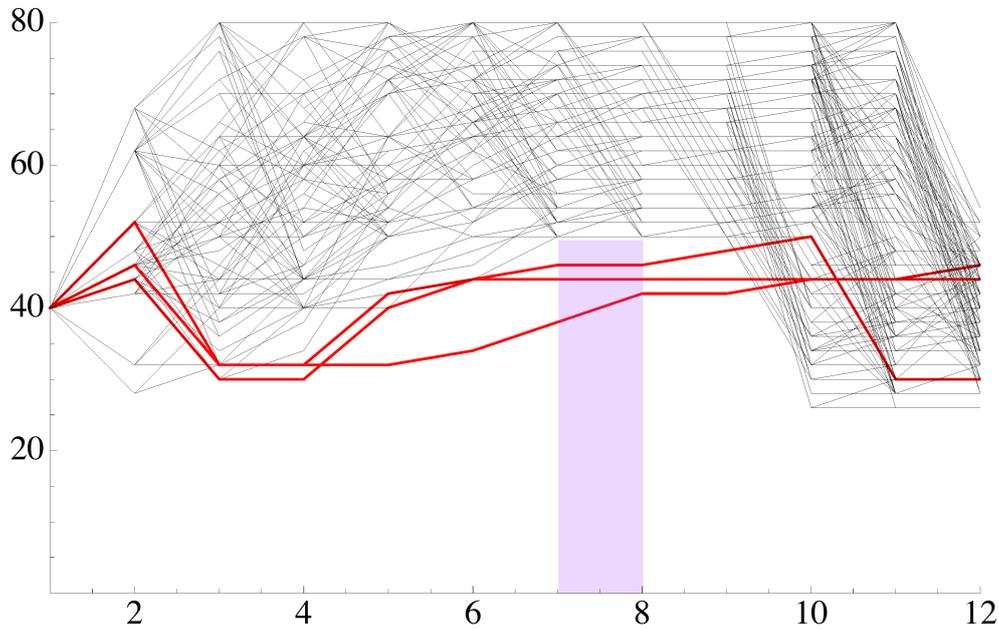


FIGURE 2.8 – Trajectoires de stock ne respectant pas/respectant la cote touristique (grasses/fines) et cote touristique (rectangle).

cote touristique avec le stock maximal possible et ce en appliquant une stratégie de turbiné minimum sur la zone.

2.5 Discussion

Le travail de reformulation du problème de gestion de la production hydroélectrique d'un barrage soumise au respect d'une exigence touristique accompli dans ce chapitre nous a conduit à proposer deux nouveaux critères d'optimisation. Chacun de ces critères mène à un nouveau problème d'optimisation, toujours avec une contrainte en probabilité pour le respect de la cote touristique. Notons que, autant le critère du chapitre 1 a un sens économique clair, autant les critères développés dans ce chapitre sont plus discutables de ce point de vue. Ils sont introduits pour leur capacité à produire des stratégies satisfaisantes aux yeux des opérationnels. L'évaluation de ces stratégies sur le critère économique du chapitre 1 mesure la perte financière à vouloir des trajectoires qui, si elles violent la contrainte de cote touristique, la violent "modérément", conformément aux attentes des gestionnaires du barrage. Nous avons adapté l'algorithme de résolution du chapitre 1, ce qui a permis de traiter l'application de la nouvelle modélisation à la même instance numérique de barrage. Les résultats obtenus se sont révélés satisfaisants en ce qui concerne les deux points suivants : le niveau de probabilité spécifié est respecté ; l'aspect des trajectoires non touristiques répond aux attentes des opérationnels.

Nous étudions dans le chapitre 3 l'extension de ces problèmes à la gestion de la production

hydroélectrique d'un barrage soumis à plusieurs exigences de cote.

Dans le chapitre 4, nous proposons une approche complémentaire de la gestion de la production hydroélectrique d'un barrage soumis à une contrainte de cote touristique. Cette approche par viabilité stochastique met l'accent, non pas sur la moyenne des gains, mais sur leur probabilité de garantir un gain minimum, conjointement au respect de la cote touristique.

Prise en compte de plusieurs contraintes de cote

Le problème de gestion de barrage que nous avons étudié jusqu'à présent comporte une unique contrainte de cote. Nous pouvons cependant faire face, en pratique, à des problèmes présentant plusieurs contraintes de ce type, de nature écologique ou de nature économique. Dans ce chapitre, nous nous penchons sur le cas de plusieurs contraintes de cote. Comme nous l'avons fait dans le chapitre 2, nous adaptons le critère d'optimisation en conséquence. Cette adaptation est plus délicate que dans le cas à une seule cote et conduit à deux formulations dérivées des critères développés dans le chapitre 2. Après avoir proposé des algorithmes de résolution adaptés, nous étudions les aspects pratiques de leur mise en œuvre. Sur la base de cette étude, nous retenons l'un des deux critères et nous traitons une instance numérique de barrage à trois cotes.

Sommaire

3.1	Discussion sur les critères d'optimisation	39
3.2	Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques	41
3.3	Optimisation du critère valorisant partiellement les trajectoires non touristiques	44
3.4	Comparaison des approches des §3.2 et §3.3	45
3.5	Application numérique	47
3.6	Discussion	49

3.1 Discussion sur les critères d'optimisation

Nous considérons un problème à m contraintes de type *cote touristique*. Nous définissons

$$\Omega_{\max}^i = \left\{ \mathbf{X}_{\tau} \leq x_{\max}^i, \forall \tau \in \mathcal{T}_{\max}^i \right\}$$

l'événement correspondant aux trajectoires respectant une cote maximale et, de la même façon,

$$\Omega_{\min}^j = \left\{ \mathbf{X}_\tau \geq x_{\min}^j, \forall \tau \in \mathcal{T}_{\min}^j \right\}$$

pour une cote minimale. Considérons le couple d'entiers $(\overline{m}, \underline{m})$ tel que $\overline{m} + \underline{m} = m$. Nous qualifions une contrainte de *cote max* si elle se met sous la forme

$$\mathbb{P} \left[\Omega_{\max}^i \right] \geq p_{\max}^i, \quad i \in \{1, \dots, \overline{m}\} \quad (3.1a)$$

et de *cote min* si elle se met sous la forme

$$\mathbb{P} \left[\Omega_{\min}^j \right] \geq p_{\min}^j, \quad j \in \{1, \dots, \underline{m}\}. \quad (3.1b)$$

On suppose les indices des cotes classés suivant l'ordre croissant des derniers pas de temps de cote. Pour reformuler les critères vus au chapitre 2, nous introduisons les notations suivantes :

- t_+ , le dernier pas de temps auquel une cote est à respecter,
- $\mathcal{J}_{\max}(t)$ et $\mathcal{J}_{\min}(t)$, les ensembles des indices associés aux contraintes de cote max et de cote min à observer à l'instant t et à des instants ultérieurs à t ,
- $\mathfrak{T}[k]$ ($k \in \{1, \dots, m\}$), le k -ième dernier pas de temps de cote.

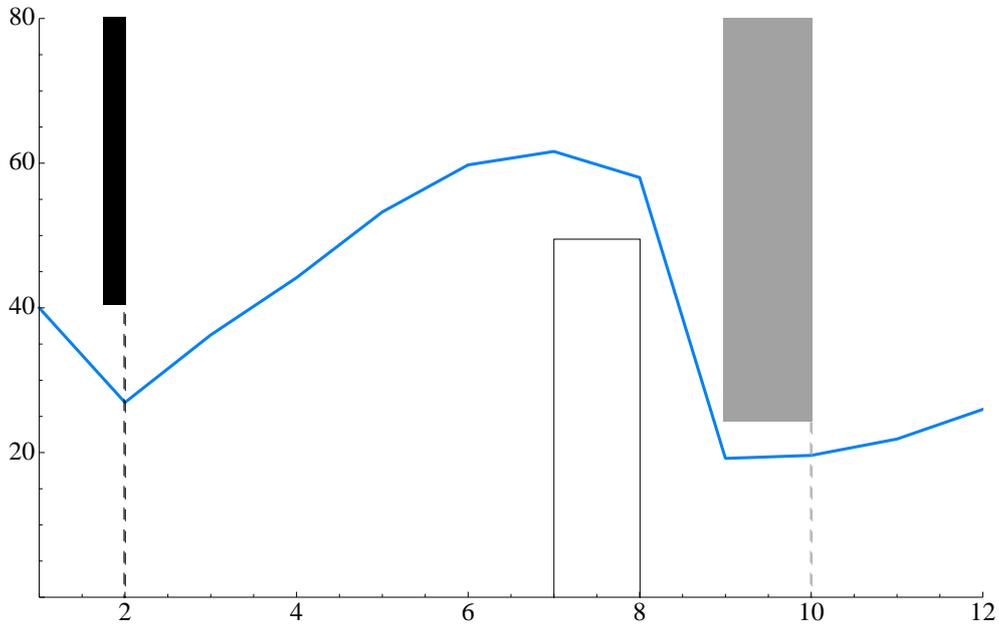


FIGURE 3.1 – Problème à trois contraintes de cote : $t_+ = 10$; $\mathcal{J}_{\max}(1) = \{1, 3\}$ et $\mathcal{J}_{\min}(1) = \{2\}$; $\mathfrak{T}[1] = 2$, $\mathfrak{T}[2] = 8$ et $\mathfrak{T}[3] = 10$.

3.2. Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques 41

De façon analogue à ce que nous avons fait jusqu'à présent pour les problèmes à une cote, nous introduisons \underline{m} et \overline{m} vecteurs aléatoires binaires $(\underline{\pi}_0^j, \dots, \underline{\pi}_T^j)$ et $(\overline{\pi}_0^i, \dots, \overline{\pi}_T^i)$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (t, i) \in \{1, \dots, T-1\} \times \mathcal{J}_{\max}(0) : \\ \quad \overline{\pi}_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{t+1} \leq x_{\max}^i\}} \times \overline{\pi}_t^i \quad \text{si } t \in \mathcal{T}_{\max}^i, \\ \quad \overline{\pi}_{t+1}^i = \overline{\pi}_t^i \quad \text{sinon,} \\ \forall (t, j) \in \{1, \dots, T-1\} \times \mathcal{J}_{\min}(0) : \\ \quad \underline{\pi}_{t+1}^j = \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{t+1} \geq x_{\min}^j\}} \times \underline{\pi}_t^j \quad \text{si } t \in \mathcal{T}_{\min}^j, \\ \quad \underline{\pi}_{t+1}^j = \underline{\pi}_t^j \quad \text{sinon,} \\ \forall (i, j) \in \mathcal{J}_{\max}(0) \times \mathcal{J}_{\min}(0) : \quad \overline{\pi}_0^i = \underline{\pi}_0^j = 1. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Ces vecteurs permettent d'écrire les contraintes de cote (3.1) sous la forme d'expressions dépendant de leurs valeurs terminales :

$$\text{cotes max : } \mathbb{E} \left[\overline{\pi}_T^i \right] \geq p_{\max}^i \quad \forall i \in \mathcal{J}_{\max}(0), \quad (3.3a)$$

$$\text{cotes min : } \mathbb{E} \left[\underline{\pi}_T^j \right] \geq p_{\min}^j \quad \forall j \in \mathcal{J}_{\min}(0). \quad (3.3b)$$

Pour un problème à une contrainte de cote, nous avons vu en §1.3.1 que l'état dynamique est augmenté et devient le couple (x, π) . À présent, pour plusieurs contraintes de cote, l'état devient le $(m+1)$ -uplet $(X, \overline{\pi}^1, \dots, \overline{\pi}^{\overline{m}}, \underline{\pi}^1, \dots, \underline{\pi}^{\underline{m}})$. Le nombre de variables d'état a donc cru (les variables π sont toutefois binaires), ce qui se traduira par un accroissement des temps d'exécution de l'algorithme de résolution.

Nous allons maintenant étendre les critères (2.5) et (2.3) du problème à une cote min (la cote touristique) au problème à m cotes. Nous le faisons en supposant que les périodes durant lesquelles des cotes sont à respecter sont toutes deux à deux disjointes :

$$\mathcal{T}_{\max}^i \cap \mathcal{T}_{\max}^k = \mathcal{T}_{\min}^j \cap \mathcal{T}_{\min}^l = \mathcal{T}_{\max}^i \cap \mathcal{T}_{\min}^j = \emptyset, \quad \forall (i, k, j, l) \in \mathcal{J}_{\max}(0)^2 \times \mathcal{J}_{\min}(0)^2 / i \neq k \text{ et } j \neq l.$$

3.2 Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques

Nous ne valorisons que les turbinés associés aux trajectoires de stock qui respectent l'ensemble des cotes. Le critère est alors :

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right) \times \prod_{i \in \mathcal{J}_{\max}(0)} \mathbf{1}_{\Omega_{\max}^i} \times \prod_{j \in \mathcal{J}_{\min}(0)} \mathbf{1}_{\Omega_{\min}^j} \right]. \quad (3.4)$$

Le processus stochastique des gains cumulés instant après instant, σ , reste le même que pour le problème à une cote (2.10) du chapitre 2 :

$$\begin{cases} \sigma_0 = 0, \\ \sigma_{t+1} = f_t^\sigma(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t, \sigma_t) = L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + \sigma_t, \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Ainsi, le problème à m cotes s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \quad & \mathbb{E} \left[\prod_{i \in \mathcal{J}_{\min}(0)} \underline{\pi}_T^i \times \prod_{j \in \mathcal{J}_{\max}(0)} \overline{\pi}_T^j \times (\sigma_T + K_T(\mathbf{X}_T)) \right] \\ \text{s.c.} \quad & \forall (i, j, t) \in \mathcal{J}_{\max}(0) \times \mathcal{J}_{\min}(0) \times \{0, \dots, T-1\} : \\ & \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ & \mathbf{X}_0 = x_0, \\ & (3.2) \text{ et } (3.5), \mathbb{E}[\overline{\pi}_T^i] \geq p_{\max}^i, \text{ et } \mathbb{E}[\underline{\pi}_T^j] \geq p_{\min}^j. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ce problème (3.6) met en œuvre un état dynamique à une variable de remplissage, m variables binaires liées aux contraintes en probabilité et une variable de gains accumulés de façon à écrire le critère (3.4) sous forme additive. Il s'agit donc d'un état dynamique de dimension importante mais qui limite le nombre de contraintes de cote pouvant être traitées numériquement, néanmoins modérément du fait que leurs états associés sont des variables binaires. Rappelons que la stratégie obtenue à l'issue de la maximisation de ce critère n'est pas pertinente le long d'une trajectoire non touristique, toutes les stratégies se valant alors du fait que le critère ne permet pas de les départager.

Algorithme général de résolution. Pour plus de clarté, on note $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^{1:m}$ l'ensemble des vecteurs aléatoires $(\overline{\boldsymbol{\pi}}^{1:\overline{m}}, \underline{\boldsymbol{\pi}}^{1:m})$ et on note $\boldsymbol{\sigma}$ l'ensemble des variables aléatoires $\boldsymbol{\sigma}_{0:T-1}$. Posons $J(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma})$ le critère du problème d'optimisation. À chaque itération k , la dualisation des m contraintes en probabilité (3.3) par m multiplicateurs $\lambda^{(k)} = (\overline{\lambda}_{1:\overline{m}}^{(k)}, \underline{\lambda}_{1:m}^{(k)})$ fixés conduit à maximiser :

$$\begin{aligned} & J(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}) + \mathbb{E} \left[\mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}, \lambda^{(k)}) \right] \\ \text{avec } \mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}, \lambda^{(k)}) = & \sum_{i \in \mathcal{J}_{\max}(0)} \overline{\lambda}_i^{(k)} \times (\overline{\pi}_T^i - p_{\max}^i) + \sum_{j \in \mathcal{J}_{\min}(0)} \underline{\lambda}_j^{(k)} \times (\underline{\pi}_T^j - p_{\min}^j) \end{aligned} \quad (3.7)$$

De la même façon qu'au §2.2.2, on procède ensuite à une mise à jour des multiplicateurs par pas de gradient et on itère jusqu'à convergence de l'algorithme.

Nous détaillons maintenant la résolution par programmation dynamique du problème (3.7), à multiplicateurs fixés $\lambda^{(k)}$, et la mise à jour par méthode de pas de gradient de ces multiplicateurs, lorsque le critère est le critère (2.3).

3.2. Optimisation de deux critères valorisant les seules trajectoires touristiques 43

Maximisation dans le primal : programmation dynamique À multiplicateurs $\lambda^{(k)}$ fixés, le problème de maximisation :

$$\begin{aligned}
 & \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}) + \mathbb{E} \left[\mathfrak{L}(\boldsymbol{\pi}, \lambda^{(k)}) \right] \\
 & \text{s.c. } \forall (i, j, t) \in \mathfrak{J}_{\max}(0) \times \mathfrak{J}_{\min}(0) \times \{0, \dots, T-1\} : \\
 & \quad \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\
 & \quad \mathbf{X}_0 = x_0, \\
 & \quad (3.2) \text{ et } (3.5), \mathbb{E} \left[\bar{\boldsymbol{\pi}}_T^i \right] \geq p_{\max}^i, \text{ et } \mathbb{E} \left[\underline{\boldsymbol{\pi}}_T^j \right] \geq p_{\min}^j.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

peut être résolu par programmation dynamique, avec pour état $(X_t, \sigma_t, \pi_t^{1:m})$, du fait de la séparabilité de son critère en temps et de l'indépendance pas de temps par pas de temps des variables de bruit. Les équations de programmation dynamique sont :

$$\begin{aligned}
 V_T^{(k)}(x, \sigma, \boldsymbol{\pi}) &= \prod_{i \in \mathfrak{J}_{\max}(0)} \pi^i \times \prod_{j \in \mathfrak{J}_{\min}(0)} \pi^j \times (\sigma + K_T(x)) + \mathfrak{L}(\boldsymbol{\pi}, \lambda^{(k)}), \\
 \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\
 V_t^{(k)}(x, \sigma, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} V_{t+1}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^{\sigma}(u, \mathbf{C}_t, \sigma), \left(f_{t,i}^{\boldsymbol{\pi}}(x, u, \mathbf{W}_t, \pi^i) \right)_{i=1}^m \right) \right].
 \end{aligned}$$

Minimisation dans le dual : pas de gradient Comme précédemment au § 1.3.3.2 pour le problème à une cote, la résolution du problème à multiplicateurs $\lambda^{(k)}$ fixés (3.8) nous permet de disposer d'une stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}^{(k)}$ que nous mettons à profit afin de déterminer les probabilités de respect des cotes, $p_{1:m}^{(k)}$, par récursion rétrograde dans le temps,

$$\begin{aligned}
 P_{T,i}^{(k)}(x, \pi, \sigma) &= \pi^i, \\
 \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\
 P_{t,i}^{(k)}(x, \pi, \sigma) &= \mathbb{E} \left[P_{t+1,i}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, \mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{W}_t), \left(f_{t,i}^{\boldsymbol{\pi}}(x, \mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{W}_t, \pi^i) \right)_{i=1}^m, f_t^{\sigma}(\mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{C}_t, \sigma) \right) \right], \\
 p_i^{(k)} &= P_{0,i}^{(k)}(x_0, (1)_{i=1}^m, 0).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous mettons alors les multiplicateurs à jour de la façon suivante,

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_i^{(k+1)} &= \max \left\{ \bar{\lambda}_i^{(k)} + \rho_i \left(p_{\max}^i - p_i^{(k)} \right), 0 \right\} \text{ si } i \in \mathfrak{J}_{\max}(0), \\
 \underline{\lambda}_i^{(k+1)} &= \max \left\{ \underline{\lambda}_i^{(k)} + \rho_i \left(p_{\min}^i - p_i^{(k)} \right), 0 \right\} \text{ si } i \in \mathfrak{J}_{\min}(0), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3 Optimisation du critère valorisant partiellement les trajectoires non touristiques

Plaçons-nous à l'instant t . Le volume turbiné est alors susceptible d'influer sur le respect des cotes effectives à t ou aux instants ultérieurs $\{t + 1, \dots, t_+\}$. Nous considérons que les turbinés \mathbf{U}_t ne sont valorisés que conditionnellement au respect des cotes à venir. Le critère est alors :

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=0}^{t_+} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) \times \prod_{\substack{i \in \mathcal{J}_{\max}(t) \\ j \in \mathcal{J}_{\min}(t)}} \mathbf{1}_{\Omega_{\max}^i} \times \mathbf{1}_{\Omega_{\min}^j} \right) + \sum_{t=t_++1}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right]. \quad (3.11)$$

Considérons chacun des m derniers pas de temps auxquels sont effectives les m cotes respectives. On rappelle que les indices des cotes sont classés suivant l'ordre croissant de ces derniers pas de temps de cote. Nous introduisons m processus aléatoires $(\sigma_0^k, \dots, \sigma_T^k)_{k=1}^m$ tels que : $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$\sigma_0^k = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{t+1}^k = f_t^\sigma(\mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{C}_t, \sigma_t^k) = \begin{cases} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + \sigma_t^k & \text{si } \mathfrak{T}[k-1] < t \leq \mathfrak{T}[k], \\ \sigma_t^k & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Ces processus décrivent les gains cumulés le long de chaque groupement distinct de cote. On observe que leur recours augmente de façon importante la dimension de l'état dynamique du problème. Le problème à m cotes s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \quad & \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\substack{i \in \mathcal{J}_{\max}(\mathfrak{T}[k]) \\ j \in \mathcal{J}_{\min}(\mathfrak{T}[k])}} \bar{\pi}_T^i \times \underline{\pi}_T^j \times \sigma_T^{m-k} + \sum_{t=t_++1}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right] \\ \text{s.c.} \quad & \forall (i, j, t) \in \mathcal{J}_{\max}(0) \times \mathcal{J}_{\min}(0) \times \{0, \dots, T-1\} : \\ & \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ & \mathbf{X}_0 = x_0, \\ & (3.2) \text{ et } (3.12), \quad \mathbb{E}[\bar{\pi}_T^i] \geq p_{\max}^i \text{ et } \mathbb{E}[\underline{\pi}_T^j] \geq p_{\min}^j. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ce problème (3.13) met en œuvre un état dynamique à une variable de remplissage, m variables binaires liées aux contraintes en probabilité et m variables de gains accumulés liées à l'écriture du critère (3.11) sous forme additive. Il s'agit donc d'un état important qui limite grandement le nombre de contraintes de cote pouvant être considéré.

On remarque que, concernant la résolution du problème (3.13), seules les équations de programmation dynamique de l'algorithme de résolution du problème (3.6) sont à réécrire.

Maximisation dans le primal : programmation dynamique. À multiplicateurs $\lambda^{(k)}$ fixés, le problème de maximisation (3.8) peut être résolu par programmation dynamique du fait de la séparabilité de son critère en temps et de l'indépendance pas de temps par pas de temps des variables de bruit. Les équations de programmation dynamique sont :

$$V_T^{(k)}(x, \pi, \sigma) = \sum_{l=0}^{m-1} \prod_{i \in \mathcal{I}_{\max}(\mathfrak{T}[l])} \pi^i \times \prod_{j \in \mathcal{I}_{\min}(\mathfrak{T}[l])} \pi^j \times \sigma^{m-l} + \mathfrak{L}(\pi, \lambda^{(k)}) + K_T(x),$$

pour t allant de $T-1$, à $t_+ + 1$:

$$V_t^{(k)}(x, \pi, \sigma) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} \left\{ L_t(u, \mathbf{C}_t) + V_{t+1}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), \left(f_{t,i}^{\pi}(x, u, \mathbf{W}_t, \pi^i) \right)_{i=1}^m, \left(f_{t,i}^{\sigma}(u, \mathbf{C}_t, \sigma^i) \right)_{i=1}^m \right) \right\} \right],$$

pour t allant de t_+ , à 0 :

$$V_t^{(k)}(x, \pi, \sigma) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} V_{t+1}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), \left(f_{t,i}^{\pi}(x, u, \mathbf{W}_t, \pi^i) \right)_{i=1}^m, \left(f_{t,i}^{\sigma}(u, \mathbf{C}_t, \sigma^i) \right)_{i=1}^m \right) \right].$$

Minimisation dans le primal : évaluation des probabilités de respect des cotes

Nous adaptons les équations (3.9) au critère (3.11).

$$P_{T,i}^{(k)}(x, \pi, \sigma) = \pi^i,$$

$\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$:

$$P_{t,i}^{(k)}(x, \pi, \sigma) = \mathbb{E} \left[P_{t+1,i}^{(k)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, \mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{W}_t), \left(f_{t,i}^{\pi}(x, \mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{W}_t, \pi^i) \right)_{i=1}^m, \left(f_{t,i}^{\sigma}(\mathbf{U}_t^{(k)}, \mathbf{C}_t, \sigma^i) \right)_{i=1}^m \right) \right],$$

$$p_i^{(k)} = P_{0,i}^{(k)}(x_0, (1)_{i=1}^m, (0)_{i=1}^m).$$

Effectuons maintenant quelques observations sur les critères (3.11) et (3.4) afin de sélectionner l'un des deux en vue de la réalisation d'une application numérique.

3.4 Comparaison des approches des §3.2 et §3.3

Complexité algorithmique. La présence de m contraintes en probabilité nous a conduit au recours à m processus $\pi_{i \in \{1, m\}}$ et à un ou m (pour le critère (3.11)) processus $\sigma_{i \in \{1, m\}}$. Ces vecteurs aléatoires caractérisant une partie de l'état du système à tout instant t , nous

devons recourir à m variables binaires et à une ou m (pour le critère (3.11)) variables scalaires en plus dans l'état de programmation dynamique. Ces variables peuvent être directement intégrées, comme nous l'avons écrit, mais ce au risque que nous soyons rapidement confrontés à la *malédiction de la dimension* à mesure que la dimension de cet état s'accroît. Les variables $\pi_{t,i}$ sont binaires et, du fait de leur présence dans le critère, les valeurs transmises par chacun des vecteurs σ_i deviennent inutiles lorsqu'une des variables $\pi_{t,i}$ qui leur est associée s'annule. Notons $\Pi[k]$ l'ensemble des vecteurs π_i associés au vecteur σ_k ($k \in \{1, m\}$) et observons que $\Pi[k]$ et $\Pi[k+1]$ ne diffèrent que d'un élément que nous notons $\pi_{k/k+1}$. Clairement, $\pi_{k/k+1} = \pi_{k+1}$. Les variables aléatoires σ_i prenant leurs valeurs dans \mathbb{R}_+ en pratique, nous pouvons agréger l'information portée par chaque π_k dans,

- pour le critère (3.11) : chaque σ_k en conservant la valeur de σ_k lorsque π_k est à 1 et en la passant à une valeurs négative arbitraire et ensuite constante lorsque π_k passe à 0 ;
- pour le critère (3.4) : l'unique σ en conservant sa valeur tant que l'ensemble des π_i sont à 1 et en représentant par une valeur négative arbitraire variant suivant les valeurs prises par les π_i , sinon.

Ainsi, nous diminuons la dimension de l'état de m variables.

Une différence de complexité notable subsiste cependant entre les deux critères. En effet, si le critère (3.4) n'induit le recours qu'à deux variables d'état, le critère (3.11) nécessite le recours à $1 + m$ variables. Nous pouvons donc gérer bien plus de contraintes de cote via (3.4). Le critère (3.11) limite en effet le nombre de ces contraintes de cote à moins de 4 du fait de la *malédiction de la dimension*.

Précisons enfin que la vitesse de convergence de l'algorithme diminuera probablement lorsque le nombre de contraintes de cote augmentera du fait du ralentissement de l'algorithme de gradient de la minimisation dans le dual (de mise à jour des m multiplicateurs).

Discussion du critère (3.11). L'examen du critère (3.11) nous fait penser que, à la différence du critère (2.5) au sujet des cotes min, il produira des trajectoires qui auront beaucoup de mal à respecter les cotes max. Le turbiné n'étant pas valorisé lorsqu'une trajectoire de stock ne respecte pas une cote max, il se peut tout à fait que le contrôle optimal soit alors d'appliquer un déstocké de valeur minimum 0. La violation de la cote max en question se trouve ainsi accentuée. Si ce mécanisme apparaît pertinent pour une cote min, cela ne sera probablement pas le cas pour une cote max.

Discussion du critère (3.4). Comme les trajectoires de remplissage non touristiques ne sont pas valorisées par le critère d'optimisation, n'importe laquelle des stratégies portant sur ces trajectoires sera optimale pour le problème lié au critère (3.4). Ainsi, la politique de turbinage à adopter lorsque le respect des cotes n'est pas assuré peut être adaptée par les opérationnels comme il convient, la solution obtenue restant toujours optimale par rapport au

problème d'optimisation (3.6) formulé. Pour cette raison, et parce que les impératifs à l'origine des contraintes peuvent être divers et ne pas répondre aux mêmes exigences, le fait de confier cette gestion à l'expertise des opérationnels (en appliquant par exemple des heuristiques issues de leur expérience ou même imposées par des autorités locales) apporte de la flexibilité à la gestion locale de l'hydraulique.

Du fait des observations que nous venons de faire, nous retenons le critère (3.4) et l'appliquons, dans la section suivante, à une instance à trois contraintes de cote.

3.5 Application numérique

Nous reprenons l'instance de barrage considérée jusqu'à présent aux § 1.4 et § 2.4. Le modèle comprend un lac et une usine, l'usine a une contrainte de débit maximum constante sur l'étude et son rendement ne dépend pas du niveau de stock du lac (pas d'effet de hauteur de chute). Nous ajoutons alors à la contrainte de cote touristique, les contraintes de cote :

- *écologique* : assurer un niveau suffisamment réduit en période de ponte (mois de février) d'une espèce protégée de poisson afin que le niveau de remplissage minimum à assurer lorsque les œufs éclosent (mois de mai) ne soit pas trop contraignante
→ cote : max et min – niveau : 40 hm³ – instants : 2 et 5 – $p_{\text{écolo}} = 0.9$
- *de maintenance* : la réalisation de travaux de maintenance des berges du lac nécessite de ne pas dépasser un niveau de remplissage donné durant le mois d'octobre.
cote : max – niveau : 25 hm³ – instant : 9 – $p_{\text{maint}} = 0.85$

Remarquons que la cote *écologique* est plus complexe que les contraintes de cotes dont nous avons discuté jusqu'à présent. En effet, cette cote est à la fois une cote max et une cote min et elle porte sur deux instants qui ne sont pas consécutifs. Nous nous sommes néanmoins penché sur ce cas issu d'un problème réel afin de montrer que, bien que nous ayons préféré décrire la modélisation sur des cas simples pour conserver la clarté de l'exposé, elle est à même de prendre en considération des contraintes de cote complexes. Pour cela, nous avons recouru à une dynamique plus complexe de la variable $\pi_{\text{écolo}}$ liée à la contrainte de cote et de la variable σ des gains accumulés.

Reprenant les observations faites au § 3.4 au sujet du schéma de discrétisation de la programmation dynamique, nous agrégeons les variables d'état σ et π en une unique variable d'état σ . Nous discrétisons l'état associé au volume de remplissage du barrage en 40 points et σ en $4000 + 2^m - 1$ points.

Résultats numérique (critère (2.3)) : convergence de l'algorithme.

Comme nous pouvons le constater sur la figure 3.2, l'algorithme converge numériquement et les niveaux de probabilité de respect des cotes atteints sont de 0.9 pour la cote écologique,

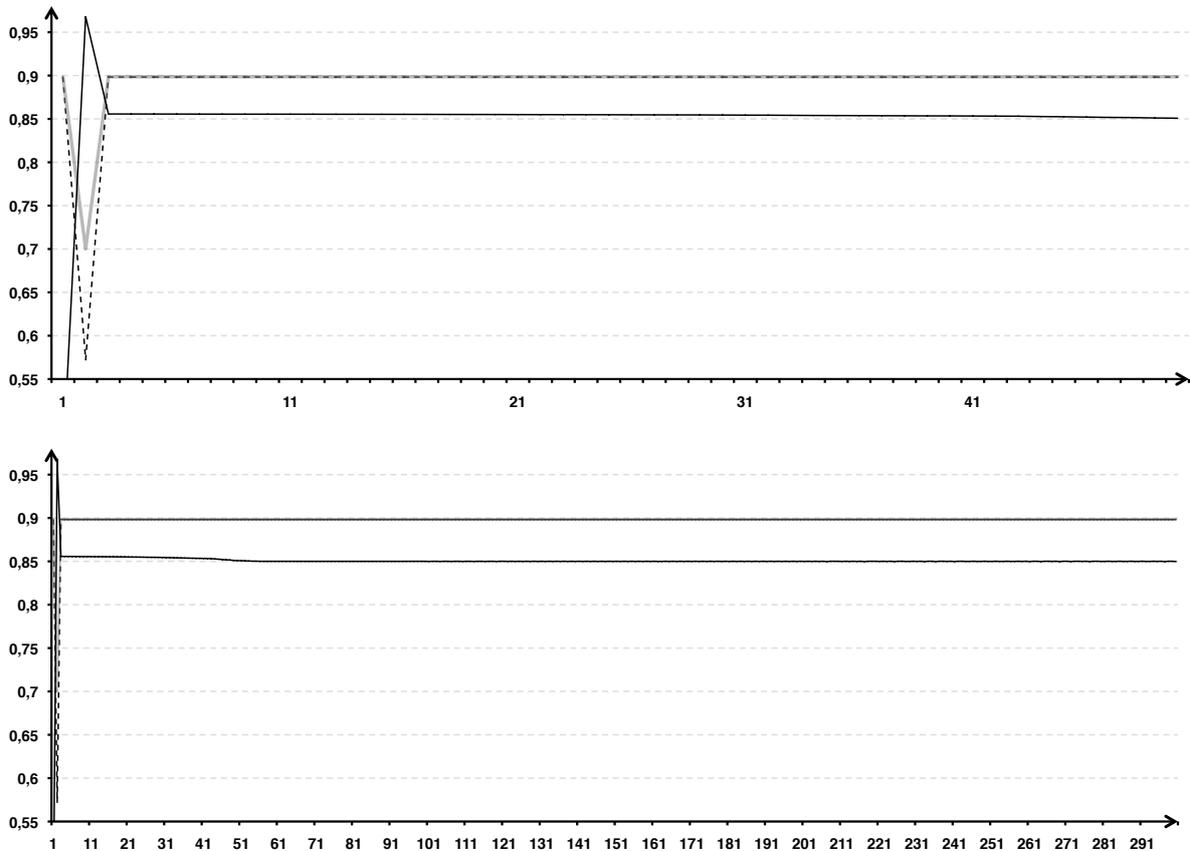


FIGURE 3.2 – Convergence du niveau de probabilité de respect des contraintes de cote, sur les 50 premières itérations et sur 300 itérations.

de 0.9 pour la cote touristique et de 0.85 pour la cote de maintenance. Ainsi, les contraintes en probabilité sont saturées et l'optimalité de la stratégie obtenue numériquement est garantie. Nous observons de plus sur la figure 3.2 que le nombre d'itérations observées avant convergence n'a pas augmenté du fait d'être passé de une à trois contraintes de cote. Cette étude numérique indique que l'extension du modèle à plusieurs contraintes de cote paraît ne poser ni de problème de convergence ni de problème de temps d'exécution de l'algorithme.

Résultats numérique (critère (2.3)) : gain et trajectoires simulés. Nous effectuons une simulation sur un échantillon de 10 000 réalisations du bruit (tiré aléatoirement sur le support des bruits) afin d'évaluer l'aspect des trajectoires de niveau de remplissage du barrage et le gain économique décrit au § 1.2 en espérance. Précisons qu'il a alors fallu étendre l'heuristique de gestion des trajectoires non touristiques du § 2.2.3. À ce titre, nous avons appliqué un turbiné maximum pour les cotes max et un turbiné minimum pour les cotes min, dès lors qu'une trajectoire était identifiée comme n'assurant pas le respect de ces cotes. Les comportements

des trajectoires sont représentés sur la figure 3.3. Nous pouvons constater qu'ils correspondent à ce qui est attendu.

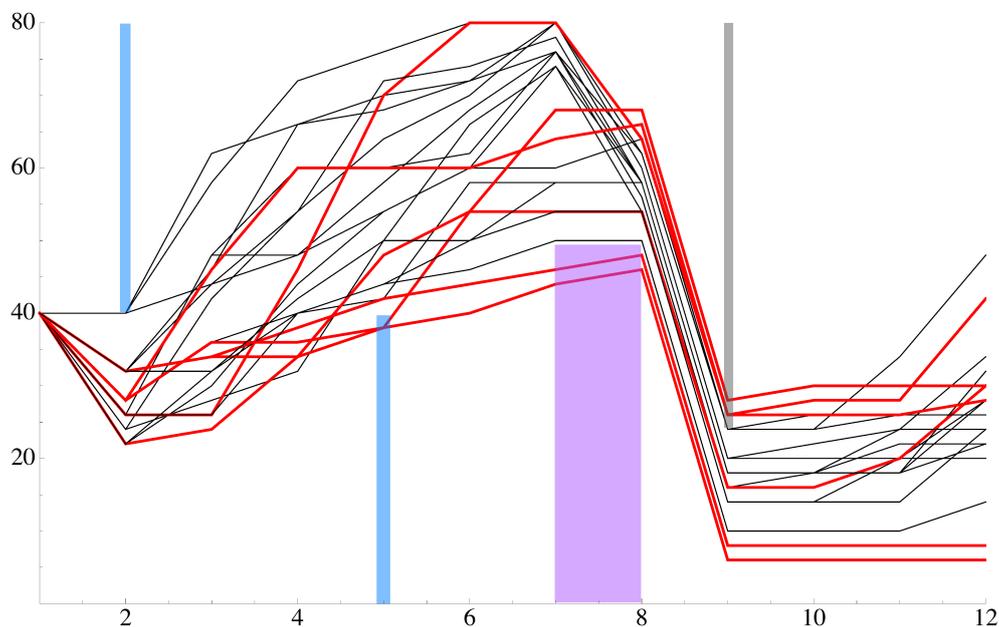


FIGURE 3.3 – Barrage à trois cotes, 19 trajectoires. Les trajectoires ne respectant pas les cotes sont en gras.

La moyenne des gains simulés est de 35 727 euros. Afin de pouvoir apprécier ce résultat, nous avons résolu le problème à critère en espérance et à contraintes en probabilité. La moyenne des gains simulés sur les mêmes scénarios est de 51 672 euros. Ainsi, le recours à un critère nous permettant de déterminer des trajectoires satisfaisantes d'un point de vue opérationnel aura coûté 30% du gain moyen.

3.6 Discussion

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une modélisation du problème de gestion de la production du barrage satisfaisante d'un point de vue opérationnel : maximisation d'un gain, respect de la contrainte de cote touristique et observation d'un comportement adéquat des trajectoires de remplissage lorsque la cote touristique n'est pas respectée. Dans ce chapitre, nous avons étendu avec succès cette modélisation à plusieurs contraintes de cote (minimum et maximum). En effet, les résultats numériques obtenus respectent les niveaux des contraintes et présentent des formes de trajectoires acceptables. En outre, le passage d'une à trois cotes affecte peu les temps d'exécution avec un bon choix de critère. Ainsi, nous avons développé un modèle et un algorithme de résolution qui répondent aux attentes opérationnelles en terme de résultats et d'efficacité.

Dans le chapitre suivant, nous proposons une approche assez différente de celle vue jusqu'à présent. Cette approche par viabilité stochastique met l'accent, non pas sur la moyenne des gains, mais sur leur probabilité de garantir un gain minimum, conjointement au respect de la cote touristique.

Approche par viabilité stochastique

Dans le chapitre 1, le problème d'optimisation est formulé comme la maximisation du gain en espérance sous la contrainte de respecter la cote touristique avec une certaine probabilité. Ainsi, le traitement de l'enjeu économique (gain) et de l'enjeu touristique (respect de la cote) n'est pas symétrique : le premier est maximisé alors que le second est une contrainte. Nous proposons dans ce chapitre un critère qui met sur le même plan ces deux enjeux. Ce critère met également l'accent sur les faibles valeurs de gain et les faibles valeurs de stock d'eau en été. En effet, les résultats numériques obtenus au chapitre 1 révèlent que les gains optimaux sont très dispersés et prennent des valeurs faibles avec une probabilité relativement élevée. Dans ce chapitre, nous faisons appel à la théorie de la viabilité stochastique : nous proposons de gérer le barrage en maximisant la probabilité de garantir un gain final minimal et une hauteur d'eau minimale en été.

Sommaire

4.1	Retour sur la dispersion du gain optimal obtenu au chapitre 1	51
4.2	Viabilité stochastique et gestion d'un barrage à une contrainte de cote	53
4.3	Application numérique	56
4.4	Discussion	57

4.1 Retour sur la dispersion du gain optimal obtenu au chapitre 1

Considérons de nouveau le problème de gestion de la production d'un barrage soumis à une contrainte de cote touristique tel qu'initialement formulé dans le chapitre 1 :

$$\begin{aligned}
 & \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T) \right] \\
 & \text{s.c. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\
 & \quad \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\
 & \quad \mathbf{X}_0 = x_0, \\
 & \quad \mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \geq p_{\text{réf}}.
 \end{aligned} \tag{4.1a}$$

$$\text{avec } \mathcal{U} = \left\{ \mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^T \left| \begin{array}{l} 0 \leq \mathbf{U}_t \leq \min\{\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t - \underline{x}_t, \bar{u}_t\}, \\ \text{et } \mathbf{U}_t \preceq \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{W}_{0:t}, \mathbf{C}_{0:t}), \forall t \end{array} \right. \right\}. \quad (4.1b)$$

Comme attendu, la stratégie \mathbf{U}^* obtenue à l'issue de la résolution du problème (4.1) :

- maximise en espérance (en Hasard-Décision et en boucle fermée) le *gain trajectorien*

$$\mathbf{G}^* = \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{U}_t^*, \mathbf{C}_t) + K_T(\mathbf{X}_T^*)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \forall t \in \{0, \dots, T\} : \\ \mathbf{X}_{t+1}^* = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t^*, \mathbf{U}_t^*, \mathbf{W}_t), \\ \mathbf{X}_0^* = x_0 \end{cases}$$

- appartient à l'ensemble admissible (4.1b) et assure le respect de la contrainte de cote touristique (4.1a)

L'histogramme des gains obtenu en simulation avec un échantillon de 10 000 réalisations du bruit (voir la figure 4.1) nous indique que la valeur de \mathbf{G}^* peut différer de son espérance $\mathbb{E}[\mathbf{G}^*]$ de façon significative (jusqu'à -90%, l'écart type représentant de son côté plus de 40% de l'espérance).

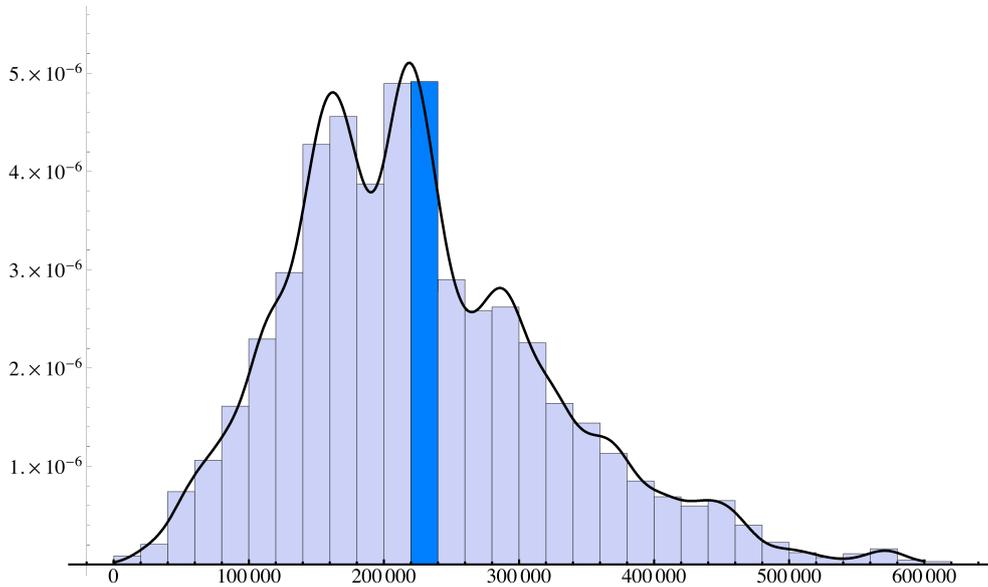


FIGURE 4.1 – Histogramme de distribution du gain optimal obtenu par 10 000 simulations. L'espérance se situe au pied de la bande la plus foncée de l'histogramme.

Apprécier la stratégie de gestion du barrage par le biais d'un critère en espérance peut donc ne pas être pleinement satisfaisant lorsque la dispersion des gains est importante. D'une part, cela pourrait induire en erreur le gestionnaire du barrage qui se baserait sur cette espérance pour se faire une idée de l'importance des gains de coûts de production que la production

hydroélectrique du barrage lui permet de réaliser. D'autre part, le fait que les gains cumulés sur l'année puissent être faibles avec une probabilité relativement élevée peut poser problème et l'inciter à préférer se prémunir de tels gains en se garantissant un gain minimum acceptable avec une probabilité élevée plutôt qu'à maximiser l'espérance de ces gains.

Ayant à réaliser un compromis entre la valorisation économique des volumes turbinés et le respect de l'enjeu touristique, une façon de gérer la production du barrage peut être alors de respecter la cote touristique tout en se garantissant une valeur de gain raisonnable. Faire en sorte, dans un cadre stochastique, que le gain dépasse une valeur minimum donnée $g_{\text{réf}}$ et que la cote touristique $x_{\text{réf}}$ soit respectée répond à cette formulation du problème. Il s'agit d'une approche par viabilité stochastique (De Lara et Doyen [2008] et Doyen et De Lara [2010]). C'est à cette approche que nous nous intéressons dans la suite de ce chapitre.

4.2 Viabilité stochastique et gestion d'un barrage à une contrainte de cote

Respecter le niveau de cote touristique (assurer un niveau de remplissage du barrage $x_{\text{réf}}$ tout le long d'une période \mathcal{T}) tout en s'assurant un gain satisfaisant (un gain supérieur ou égal à $g_{\text{réf}}$) revient idéalement à garantir la réalisation presque sûre de cet événement :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\omega) \geq g_{\text{réf}} \text{ et } \mathbf{X}_{\mathcal{T}}(\omega) \geq x_{\text{réf}}, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}, \quad \forall \omega \in \Omega' \text{ et } \mathbb{P}[\Omega'] = 1 \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}[\mathbf{G} \geq g_{\text{réf}} \text{ et } \mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] = 1. \end{aligned}$$

Cependant, ce respect avec probabilité 1 peut ne pas être atteignable en pratique. Partant de ce constat, l'approche par viabilité stochastique propose de maximiser la probabilité de l'événement $\{\mathbf{G} \geq g_{\text{réf}} \text{ et } \mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\}$. Le problème que nous souhaitons alors résoudre s'écrit :

$$\max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[\mathbf{G} \geq g_{\text{réf}} \text{ et } \mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} \text{s.c. } \quad \forall t \in \{0, \dots, T\} : \\ \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ \mathbf{X}_0 = x_0, \end{aligned} \quad (4.2b)$$

On observe, qu'à la différence de ce que nous avons fait jusqu'à présent en faisant porter l'enjeu touristique dans le critère et l'enjeu touristique dans les contraintes, nous symétrisons ces deux enjeux.

Entreprenons maintenant la résolution du problème d'optimisation (4.2). Dans la perspective de réécrire le critère (4.2a) de façon à ce que le problème (4.2) puisse être résolu par programmation dynamique, nous représentons la dynamique du processus de

valorisation en introduisant la variable aléatoire σ suivante (déjà introduite au § 2.2.2), $\forall t \in \{0, \dots, T\}$

$$\sigma_t = f_{t-1}^\sigma(\sigma_{t-1}, \mathbf{U}_{t-1}, \mathbf{C}_{t-1}) = \begin{cases} L_{t-1}(\mathbf{U}_{t-1}, \mathbf{C}_{t-1}) + \sigma_{t-1}, & \text{si } t \in \{1, \dots, T\}, \\ \sigma_0 = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{G} = \sigma_T + K_T(\mathbf{X}_T),$$

et le problème (4.2) se réécrit :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \quad & \mathbb{P}[\sigma_T + K_T(\mathbf{X}_T) \geq g_{\text{réf}} \text{ et } \mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \\ \text{s.c.} \quad & \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ & \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \\ & \sigma_{t+1} = f_t^\sigma(\sigma_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{C}_t), \\ & \mathbf{X}_0 = x_0 \text{ et } \sigma_0 = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Le critère du problème (4.3) se réécrit comme l'espérance d'un produit de fonctions indicatrices :

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\sigma_T + K_T(\mathbf{X}_T) \geq g_{\text{réf}}\}} \times \prod_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}\}} \right].$$

Sous l'hypothèse d'indépendance des bruits pas de temps par pas de temps, la proposition qui suit nous permet de déterminer la solution de ce problème par programmation dynamique multiplicative avec pour état (X_t, σ_t) .

Proposition 2 (résolution en Hasard-Décision).

Considérons les équations de programmation dynamique suivantes,

$$\begin{aligned} V_T(x, \sigma) &= \mathbf{1}_{\{\sigma + K_T(x) \geq g_{\text{réf}}\}}, \\ \forall t \in \mathcal{T} : \quad V_t(x, \sigma) &= \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} \mathbf{1}_{\{x \geq x_{\text{réf}}\}} \times V_{t+1} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^\sigma(\sigma, u, \mathbf{C}_t) \right) \right], \\ \forall t \notin \mathcal{T} \cup \{T\} : \quad V_t(x, \sigma) &= \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{W}_t)} V_{t+1} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^\sigma(\sigma, u, \mathbf{C}_t) \right) \right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Alors,

$$V_0(x_0, 0) = \max_{U \in \mathfrak{U}} \mathbb{P}[\sigma_T + K_T(\mathbf{X}_T) \geq g_{\text{réf}} \text{ et } \mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}].$$

Démonstration. Adaptation immédiate de la démonstration de l'appendice A de [Doyen et De Lara \[2010\]](#). \square

Le *noyau viable*, à l'instant t et pour un niveau de probabilité de viabilité $p_{\text{réf}}$ donné, d'un

Le système dynamique est l'ensemble des états de ce système à l'instant t à l'origine desquels il existe une stratégie telle que l'événement sur lequel porte la viabilité (ici le respect des seuils de gain $g_{\text{réf}}$ et de cote $x_{\text{réf}}$ durant la période touristique) a une probabilité $p_{\text{réf}}$ au moins de se réaliser. Cet ensemble $\text{Viab}_t^{p_{\text{réf}}}(g_{\text{réf}}, x_{\text{réf}})$ s'écrit :

$$\text{Viab}_t^{p_{\text{réf}}}(g_{\text{réf}}, x_{\text{réf}}) = \left\{ (x, \sigma) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists \mathbf{U} \in \mathfrak{U}, \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\sigma_T + K_T(\mathbf{X}_T) \geq g_{\text{réf}} \text{ et } \mathbf{X}_T \geq x_{\text{réf}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\}} \mid \mathbf{X}_t = x, \sigma_t = \sigma \right] \geq p_{\text{réf}} \right\}.$$

La fonction valeur associée à (4.3) et l'ensemble viable $\text{Viab}_t^{p_{\text{réf}}}(g_{\text{réf}}, x_{\text{réf}})$ sont liés par la relation :

$$V_t(x, \sigma) \geq p_{\text{réf}} \Leftrightarrow (x, \sigma) \in \text{Viab}_t^{p_{\text{réf}}}(g_{\text{réf}}, x_{\text{réf}}).$$

Déterminer à $p_{\text{réf}}$ fixé l'ensemble des couples $(x_{\text{réf}}, g_{\text{réf}})$ tels que

$$(x_0, 0) \in \text{Viab}_0^{p_{\text{réf}}}(g_{\text{réf}}, x_{\text{réf}}) \tag{4.5}$$

permet de disposer des seuils $(x_{\text{réf}}, g_{\text{réf}})$ pouvant être garantis conjointement avec la probabilité $p_{\text{réf}}$ en partant de l'état $(x_0, 0)$. L'algorithme suivant identifie ces seuils à $p_{\text{réf}}$ fixé. Il consiste à résoudre le problème (4.3) pour toute valeur du couple $(g_{\text{réf}}, x_{\text{réf}})$.

pour toute valeur $g_{\text{réf}}$ **faire**
pour toute valeur $x_{\text{réf}}$ **faire**
résoudre :

$$\begin{cases} V_T(x, \sigma) = \mathbf{1}_{\{\sigma \geq g_{\text{réf}}\}} \\ \forall t \in \mathcal{T} : V_t(x, \sigma) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t} \mathbf{1}_{\{x \geq x_{\text{réf}}\}} \times V_{t+1} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^{\sigma}(\sigma, u, \mathbf{C}_t) \right) \right] \\ \forall t \notin \mathcal{T} \cup T : V_t(x, \sigma) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t} V_{t+1} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{W}_t), f_t^{\sigma}(\sigma, u, \mathbf{C}_t) \right) \right] \end{cases}$$

si $V_0(x_0, 0) \geq p_{\text{réf}}$ **alors**
stocker : $(x_{\text{réf}}, g_{\text{réf}})$

La complexité de cet algorithme est importante car il consiste à résoudre un grand nombre de fois (pour tous les couples $(g_{\text{réf}}, x_{\text{réf}})$) un algorithme de programmation dynamique en dimension deux.

Dans la partie suivante, on applique l'approche par viabilité stochastique à l'instance de barrage du § 1.4.

4.3 Application numérique

On reprend l'instance de barrage à une contrainte de cote du chapitre 1. Ses caractéristiques sont, pour rappel :

- remplissage minimum et maximum du barrage = 0 et 80 hm^3 ,
- nombre de pas de temps du problème = 11 (12 instants),
- cote touristique = cote de $x_{\text{réf}} \text{ hm}^3$ à respecter aux instants 7 et 8,
- volumes turbinés minimum et maximum = 0 et $40 \text{ hm}^3 \text{ s}^{-1}$,
- gain à garantir = $g_{\text{réf}}$ euros.

Les variables aléatoires $\mathbf{W}_{0:T-1}$ sont indépendantes et suivent chacune une loi uniforme sur un ensemble discret à dix valeurs. Les variables aléatoires $\mathbf{C}_{0:T-1}$ sont indépendantes et suivent chacune une loi uniforme sur un ensemble discret à vingt valeurs.

Les figures 4.2 et 4.3 illustrent quelques scénarios représentatifs des bruits.

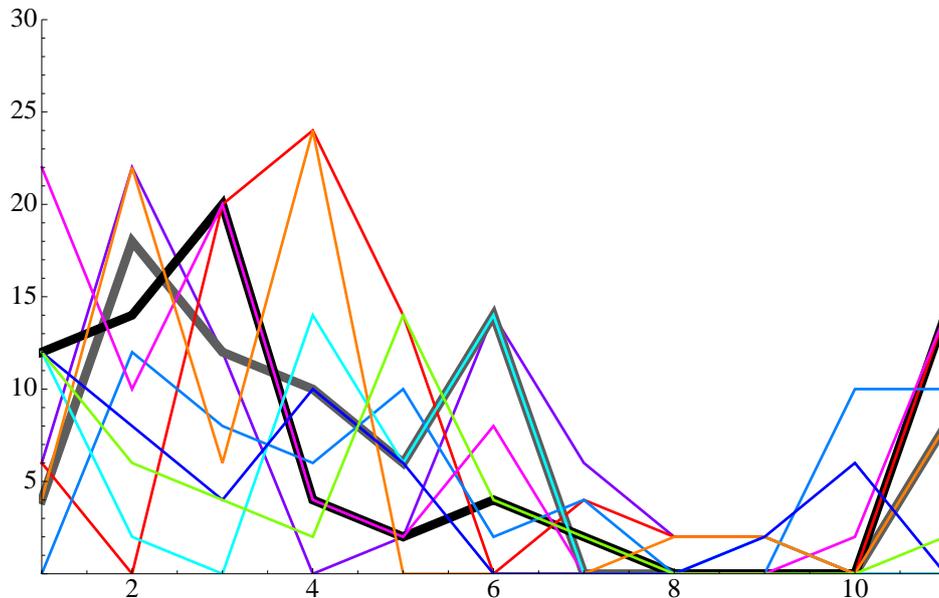


FIGURE 4.2 – Echantillon de 10 scénarios d'apports.

Le niveau de probabilité jointe de respect de la cote $x_{\text{réf}}$ et de garantie du gain $g_{\text{réf}}$ est le résultat principal de la résolution du problème (4.3) (dans le chapitre 1, l'objectif était de maximiser l'espérance de gain). Nous faisons varier $x_{\text{réf}}$ de 5 à 75 hm^3 et $g_{\text{réf}}$ de 20 000 à 500 000 euros et nous appliquons l'algorithme précédent pour différentes valeurs de $p_{\text{réf}}$. La figure 4.4 représente les résultats obtenus sous la forme de lignes de niveaux d'iso-probabilité.

Alors que dans le chapitre 1 nous avons obtenu une espérance des gains optimaux de l'ordre de 250 000 euros sous une contrainte de cote touristique de 50 hm^3 à respecter avec un niveau de probabilité de $p_{\text{réf}} = 0,9$, nous illustrons sur la figure 4.4 que garantir conjointement un gain de 250 000 euros et une cote touristique de 50 hm^3 ne peut se faire qu'avec une probabilité

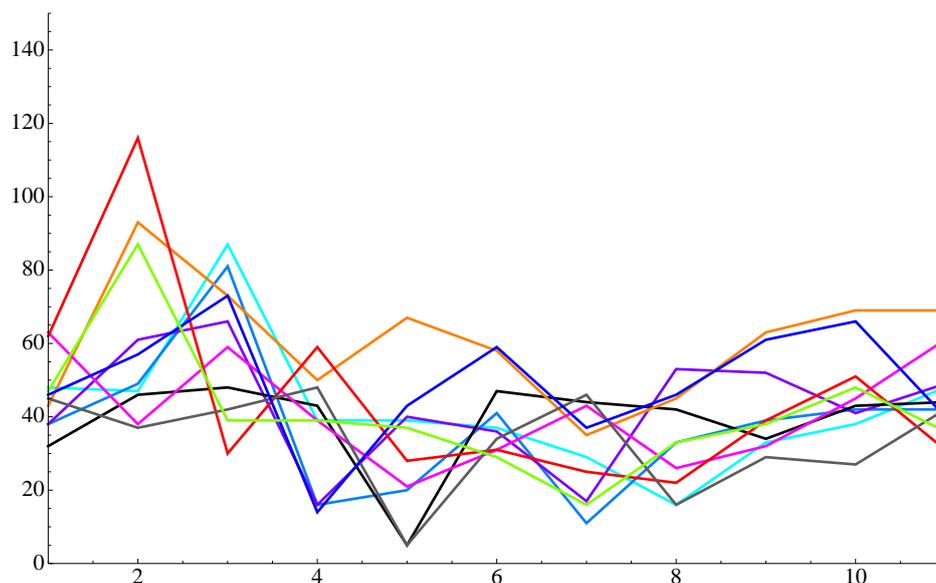


FIGURE 4.3 – Echantillon de 10 scénarios de coûts marginaux de production.

de l'ordre de 0.45.

4.4 Discussion

Pour passer d'un problème de contrôle déterministe à un problème de contrôle stochastique, il est classique de considérer l'espérance de la fonction objectif initiale comme critère (approche dite *risque neutre* en Économie). C'est ce que nous faisons dans le chapitre 1 où, de plus, nous traitons la contrainte de cote touristique comme une contrainte en probabilité. En outre, nous observons que le gain optimal présente une dispersion importante.

Dans ce chapitre, nous avons développé une approche par viabilité stochastique qui a permis à la fois une symétrisation des enjeux économique et touristique et le contrôle des faibles valeurs des variables aléatoires en jeu. Les résultats obtenus relativisent ceux obtenus au chapitre 1. En effet, garantir de gagner au moins l'espérance du gain optimal et de respecter la cote n'est possible qu'avec une probabilité de l'ordre de 0.45.

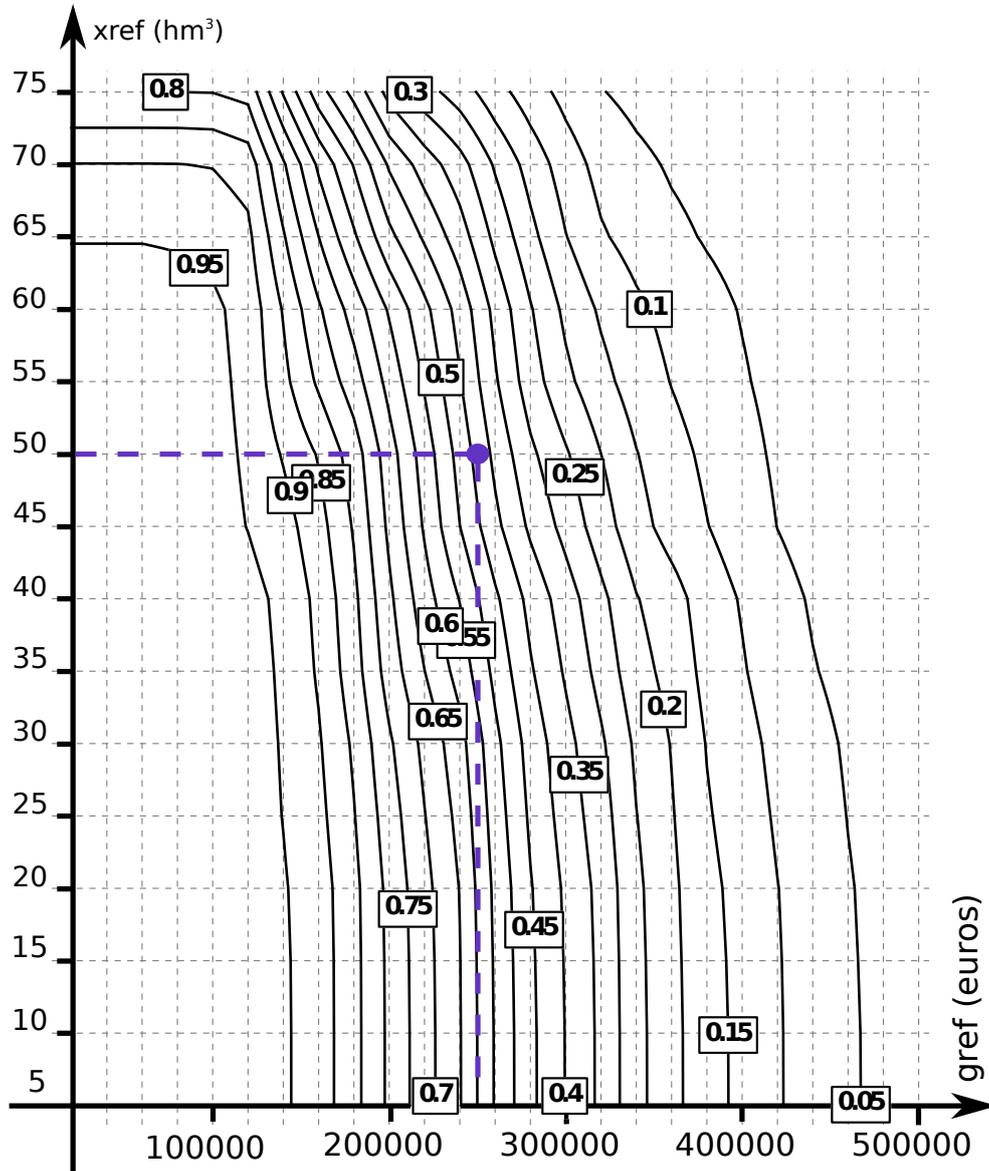


FIGURE 4.4 – Lignes de niveaux d'iso-probabilité jointe de respect d'une cote de $x_{\text{réf}}$ hm^3 (ordonnées) durant la période touristique et de garantie d'un gain $g_{\text{réf}}$ euros (abscisses).

Deuxième partie

Gestion d'une cascade de barrages par décomposition-coordination

Présentation et modélisation du problème d'optimisation

Dans cette seconde partie du manuscrit, nous considérons le cas de plusieurs barrages et nous étudions un algorithme de résolution adapté aux problèmes d'optimisation stochastique de grande taille. Plus précisément nous cherchons à résoudre numériquement un problème d'optimisation de production hydroélectrique d'une cascade de barrages.

Pour commencer, nous présentons le problème et le modélisons comme un problème d'optimisation dynamique stochastique qui peut être théoriquement résolu de manière exacte par programmation dynamique. En pratique, dès que le nombre de barrages dépasse quatre, cette méthode est inapplicable.

Ensuite, nous présentons une méthode de résolution approchée par décomposition-coordination, l'algorithme Dual Approximate Dynamic Programming (DADP). Nous montrons comment décomposer, barrage par barrage, le problème de la cascade en dualisant la contrainte de couplage spatial "déversé supérieur = apport inférieur" (qui provient de ce que tout volume d'eau destocké d'un barrage se déverse dans le barrage aval).

Ce chapitre 5 prépare le chapitre 6, qui mettra en œuvre la programmation dynamique sur un cas à trois barrages, et le chapitre 7 qui mettra en œuvre l'algorithme DADP.

Sommaire

5.1	Gestion optimale d'une cascade de barrages	61
5.2	Décomposition du problème barrage par barrage	64
5.3	Discussion	66
5.4	Appendice : calcul des multiplicateurs	67

5.1 Gestion optimale d'une cascade de barrages

On considère le problème de la gestion de la production hydroélectrique de N barrages interconnectés en cascade (le volume d'eau déstocké du barrage amont se déverse dans le barrage aval, voir figure 5.1). On se place dans le cadre d'un *processus de décision stochastique en temps discret* $t \in \{0, \dots, T\}$ où T est l'horizon. On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les *variables aléatoires* de l'étude, à valeurs scalaires, sont : pour tout barrage $i \in \{1, \dots, N\}$,

- \mathbf{X}_t^i , le volume de remplissage du barrage à l'instant t ($t \in \{0, \dots, T\}$),
- \mathbf{U}_t^i , le volume d'eau du barrage *turbiné* entre t et $t + 1$ ($t \in \{0, \dots, T - 1\}$),
- \mathbf{W}_t^i , les *apports exogènes* collectés dans le barrage entre t et $t + 1$ ($t \in \{0, \dots, T - 1\}$).

On suppose les variables aléatoires de bruit \mathbf{W}_t^i indépendantes pas de temps par pas de temps. Nous affectons les volumes de remplissage initiaux \mathbf{X}_0^i à $x_0^i \in \mathbb{R}_+$.

Afin de garantir le respect des niveaux de stocks maximaux \bar{x}_t^i , tout surplus d'eau au barrage i est déversé, si nécessaire (lorsque le turbiné est saturé et que le niveau de remplissage du lac dépasse \bar{x}_t^i). Notons \mathbf{D}_t^i ce volume déversé et \mathbf{Z}_t^i la somme des volumes turbinés et déversés du barrage $i - 1$ au barrage i .

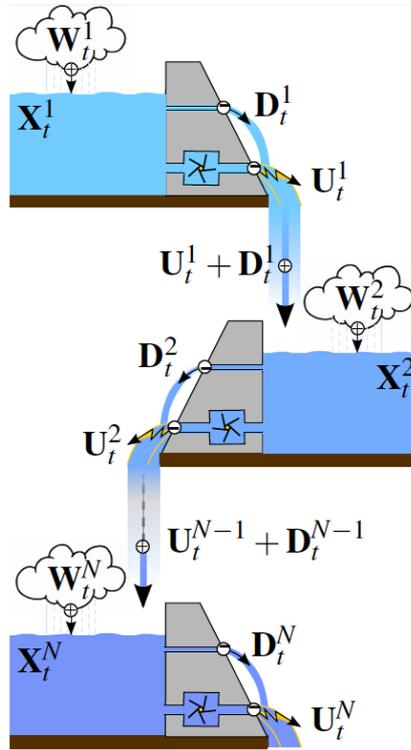


FIGURE 5.1 – “Dynamique spatiale” d’une cascade de N barrages.

Nous avons, pour tout $(i, t) \in \{2, \dots, N\} \times \{0, \dots, T - 1\}$

$$\mathbf{D}_t^i = \max \left\{ \mathbf{X}_t^i - \mathbf{U}_t^i + \mathbf{W}_t^i + \mathbf{U}_t^{i-1} + \mathbf{D}_t^{i-1} - \bar{x}_{t+1}^i, 0 \right\},$$

$$\mathbf{D}_t^1 = \max \left\{ \mathbf{X}_t^1 - \mathbf{U}_t^1 + \mathbf{W}_t^1 - \bar{x}_{t+1}^1, 0 \right\},$$

et

$$\mathbf{Z}_t^i = \mathbf{U}_t^{i-1} + \mathbf{D}_t^{i-1},$$

$$\mathbf{Z}_t^1 \equiv 0.$$

Nous introduisons la fonction g_t^i qui décrit la l'interaction associée au phénomène de couplage des barrages : pour tout $(i, t) \in \{2, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_t^i &= g_t^{i-1} \left(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1} \right) \\ &= \max \left\{ \mathbf{X}_t^{i-1} + \mathbf{W}_t^{i-1} + \mathbf{Z}_t^{i-1} - \bar{x}_{t+1}^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1} \right\} . \end{aligned} \quad (5.1)$$

La dynamique d'évolution f_t^i qui suit donne le volume de remplissage du barrage i à $t+1$ en fonction du volume au pas de temps précédent, du volume déstocké et des apports exogènes et amonts perçus le long du pas de temps $[t, t+1[$: pour tout $(i, t) \in \{2, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\}$,

$$\mathbf{X}_{t+1}^i = f_t^i \left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i \right) , \quad (5.2a)$$

$$= \mathbf{X}_t^i - g_t^i \left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i \right) + \mathbf{W}_t^i + \mathbf{Z}_t^i ,$$

$$\text{et } \mathbf{X}_{t+1}^1 = f_t^1 \left(\mathbf{X}_t^1, \mathbf{U}_t^1, \mathbf{W}_t^1 \right) \stackrel{(\text{convention})}{=} f_t^1 \left(\mathbf{X}_t^1, \mathbf{U}_t^1, \mathbf{W}_t^1, \mathbf{Z}_t^1 \right) , \quad (5.2b)$$

$$= \mathbf{X}_t^1 - g_t^1 \left(\mathbf{X}_t^1, \mathbf{U}_t^1, \mathbf{W}_t^1 \right) + \mathbf{W}_t^1 .$$

De même que pour le problème à un barrage du chapitre 1, le processus d'optimisation porte sur la commande en hasard-décision des volumes turbinés \mathbf{U}_t^i . À tout instant $t \in \{0, \dots, T-1\}$, une contrainte de non-anticipativité :

$$\mathbf{U}_t^i \preceq \sigma \left(\mathbf{X}_0^{1:N}, \mathbf{W}_{0:t}^{1:N} \right) , \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} , \quad (5.3)$$

restreint donc la mesurabilité des contrôles $\mathbf{U}_t^{1:N}$ à la filtration engendrée par l'ensemble des bruits $\mathbf{W}_{0:t}^{1:N}$ révélés jusqu'alors.

La stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}^{1:N}$ à déterminer doit assurer le respect des contraintes de bornes suivantes : pour tout $(i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\}$,

$$0 \leq \mathbf{U}_t^i \leq \min \left\{ \mathbf{X}_t^i + \mathbf{W}_t^i + \mathbf{Z}_t^i, \bar{u}_t^i \right\} , \quad (5.4)$$

tout en maximisant le critère :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i \left(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i \right) + K_T^i \left(\mathbf{X}_T^i \right) \right] , \quad (5.5)$$

avec : pour $(\varepsilon, \rho) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$- L_t^1 \left(\mathbf{U}_t^1, \mathbf{Z}_t^1 \right) \stackrel{(\text{convention})}{=} L_t^1 \left(\mathbf{U}_t^1 \right) = C_t \mathbf{U}_t^1 - \varepsilon \mathbf{U}_t^{i2}, \text{ pour tout } t \in \{0, \dots, T-1\}$$

$$- L_t^i \left(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i \right) = C_t \mathbf{U}_t^i - \varepsilon \mathbf{U}_t^{i2} - \rho \mathbf{Z}_t^{i2}, \text{ la valorisation du turbiné et les coûts induits par l'écoulement des volumes destockés, pour tout } (i, t) \in \{2, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\}$$

$$- K_T^i \left(\mathbf{X}_T^i \right) \text{ la valorisation des volumes de remplissage des barrages à la fin de l'horizon}$$

d'optimisation, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

Ainsi, le problème d'optimisation que nous proposons de résoudre dans cette partie s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{x}, \mathbf{Z}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{X}_T^i) \right] \\
& \text{s.c. } \forall (i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\} : \\
& \quad \mathbf{X}_{t+1}^i = f_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i), \\
& \quad \mathbf{Z}_t^i = g_t^{i-1}(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1}), \forall i \neq 1, \\
& \quad \text{et } \mathbf{X}_0^i = x_0^i \text{ et } \mathbf{Z}_t^1 \equiv 0,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

avec

$$\mathfrak{U} = \left\{ \mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^{N \times T} \left| \begin{array}{l} 0 \leq \mathbf{U}_t^i \leq \min \{ \mathbf{X}_t^i + \mathbf{W}_t^i + \mathbf{Z}_t^i, \bar{u}_t^i \}, \\ \text{et } \mathbf{U}_t^i \preceq \sigma(\mathbf{X}_0^{1:N}, \mathbf{W}_{0:t}^{1:N}), \forall (i, t) \in \{2, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\} \end{array} \right. \right\}.$$

Dans la section suivante, nous discutons de la résolution du problème d'optimisation (5.6).

5.2 Décomposition du problème barrage par barrage

Comme nous le verrons en détail dans le chapitre 6, la résolution du problème de la gestion de la production d'une cascade de barrages peut s'effectuer à l'aide de la programmation dynamique. La dimension de l'état égale alors le nombre de barrages de la cascade. La complexité de l'algorithme augmentant exponentiellement en cette dimension, nous sommes donc rapidement confrontés à la malédiction de la dimension à mesure que le nombre de barrages augmente. Plus précisément, nous ne saurons pas résoudre numériquement un problème à plus de quatre barrages.

Une idée est alors de décomposer le problème global en sous-problème locaux plus simples à résoudre individuellement, et de coordonner leurs résolutions afin que la concaténation de leurs solutions fournisse la solution optimale du problème global. C'est ce que font les algorithmes de décomposition-coordination, dans le cadre de l'optimisation déterministe ([Cohen, 2004]). Dans la perspective d'adapter l'un de ces algorithmes au cadre stochastique, nous allons nous intéresser aux équations (5.1) de couplage spatial des barrages.

Nous dualisons ensuite ces contraintes au moyen de multiplicateurs λ_t^i ($(i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\}$) qui, du fait que les contraintes couplantes (5.1) sont à respecter pour tout état de la Nature, sont des variables aléatoires. Sans perte d'optimalité, nous restreignons leur mesurabilité à celle des contrôles \mathbf{Z}_t^i , qui est la même que celle des variables \mathbf{U}_t^i .

Vu des sous-problèmes, les multiplicateurs peuvent être considérés comme des bruits qui seront calculés lors de de la minimisation dans le dual. De ce fait, nous ne pouvons pas faire l'hypothèse de leur indépendance pas de temps par pas de temps et donc nous ne pouvons pas résoudre les sous-problèmes par programmation dynamique.

Une réponse peut être, comme [Strugarek, 2006] l'a fait sur un cas très particulier, d'appliquer les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker afin de caractériser ces variables et d'en expliciter des dynamiques si elles existent. Cette approche, que nous menons en appendice p.67, n'a pas abouti. Elle nous a néanmoins appris qu'à tout pas de temps t , chaque multiplicateur est susceptible de dépendre de l'ensemble des autres multiplicateurs liés à t .

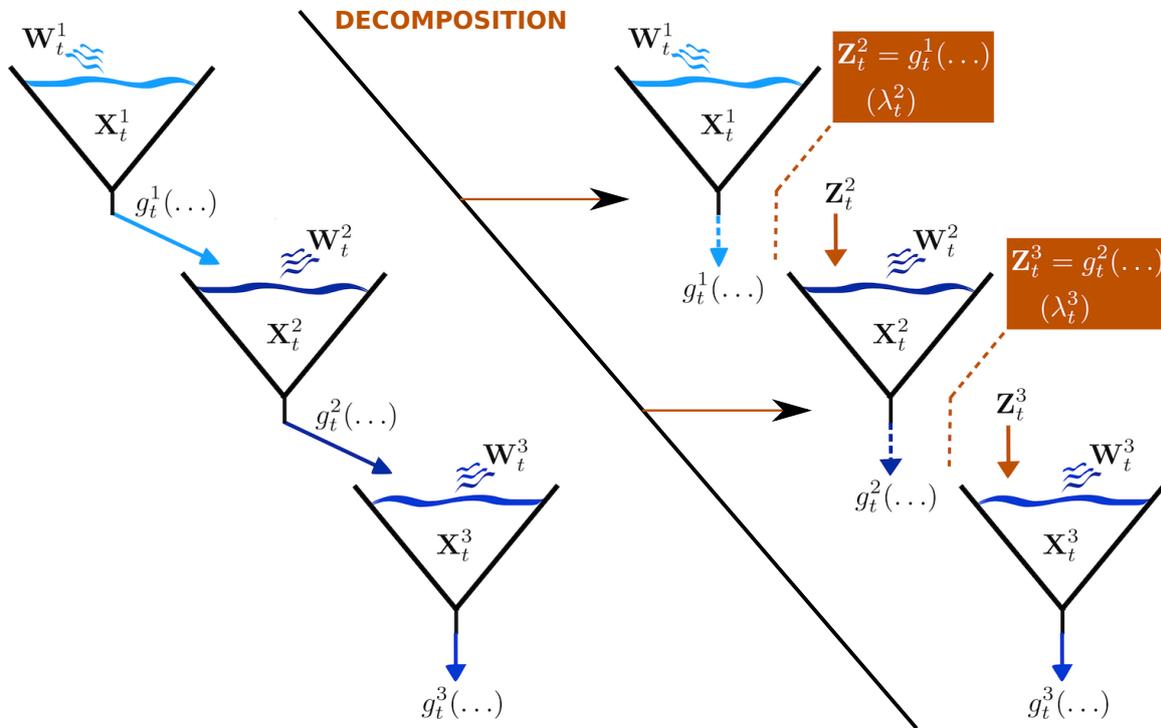


FIGURE 5.2 – Décomposition d'une cascade de 3 barrages par dualisation des contraintes couplantes (5.1).

La méthode Dual Approximate Dynamic Programming (DADP), que nous appliquons dans le chapitre 7, propose une autre approche pour faire face au problème que nous ne savons rien *a priori* des processus aléatoires des multiplicateurs. Elle propose d'approximer les multiplicateurs par leurs espérances conditionnelles sachant des variables explicatives Y_t^i dont nous fixons la dynamique. Comme le montrent [Barty et al., 2010a], [Barty et al., 2010b]

et [Girardeau, 2010], cela revient à approximer le problème (5.6) par le problème approché :

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{X}_T^i) \right] \\
& \text{s.c. } \forall (i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\} : \\
& \quad \mathbf{X}_{t+1}^i = f_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{z}_t^i), \\
& \quad \mathbb{E} \left[\mathbf{z}_t^i - g_t^{i-1}(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{z}_t^{i-1}) \middle| \mathbf{Y}_t^i \right] = 0, \forall i \neq 1, \\
& \quad \mathbf{X}_0^i = x_0^i \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_t^1 \equiv 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.3 Discussion

Nous avons présenté le problème d'optimisation d'une cascade de barrages et un principe d'approximation et de décomposition susceptible de contourner la malédiction de la dimension.

Avant d'envisager une mise en œuvre sur des problèmes de grande taille, nous allons nous limiter à un problème test de dimension trois pour lequel nous savons calculer la solution optimale. C'est l'objet du chapitre 6 où nous présenterons la résolution exacte par programmation dynamique et examinerons les multiplicateurs des contraintes couplant les barrages en espace.

Dans le chapitre 7, nous appliquerons l'algorithme DADP avec différentes variables de conditionnement \mathbf{Y} , comparerons les résultats obtenus et étudierons la distance à l'optimum.

5.4 Appendice : calcul des multiplicateurs

On détaille l'application des conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker au problème suivant :

$$\max_{\mathbf{U}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{x}_T^i) \right]$$

$$\text{s.c. } \forall (i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\} :$$

$$\mathbf{X}_{t+1}^i = f_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{z}_t^i), \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{z}_t^i = g_t^{i-1}(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{z}_t^{i-1}), \quad \forall i \neq 1, \quad (5.8b)$$

$$\text{avec } \mathbf{X}_0^i = x_0^i \text{ et } \mathbf{z}_t^1 \equiv 0,$$

$$0 \leq \mathbf{U}_t^i \leq \min \{ \mathbf{X}_t^i + \mathbf{W}_t^i + \mathbf{z}_t^i, \bar{u}_t^i \}, \quad (5.8c)$$

$$\mathbf{U}_t^i \preceq \sigma(\mathbf{X}_{0:T}^{1:N}, \mathbf{W}_{0:T}^{1:N}).$$

Nous introduisons les multiplicateurs adaptés (à la mesurabilité des contrôles) suivants :

$\boldsymbol{\delta}_{t+1}^i$, les multiplicateurs associés aux équations de dynamique (5.8a),

$\boldsymbol{\lambda}_t^i$, les multiplicateurs associés aux équations de couplage spatial (5.8b),

$(\underline{\boldsymbol{\theta}}_t^i, \bar{\boldsymbol{\theta}}_t^i)$, les multiplicateurs associés aux contraintes de bornes sur les turbines (5.8c),

Le Lagrangien du problème (5.8) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{X}_{0:T}^{1:N}, \mathbf{U}_{0:T-1}^{1:N}, \mathbf{z}_{0:T-1}^{2:N}, \boldsymbol{\lambda}_{0:T-1}^{2:N}, \boldsymbol{\delta}_{0:T}^{1:N}, \underline{\boldsymbol{\theta}}_{0:T-1}^{1:N}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{0:T-1}^{1:N}) = \\ \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{x}_T^i) \right] \\ + \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} -(\mathbf{x}_{t+1}^i - f_t^i(\mathbf{x}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{z}_t^i)) \times \boldsymbol{\delta}_{t+1}^i \right] \\ + \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{t=0}^{T-1} -(\mathbf{z}_t^{i+1} - g_t^i(\mathbf{x}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{z}_t^i)) \times \boldsymbol{\lambda}_t^{i+1} \right] \\ + \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} -(\mathbf{U}_t^i - \min \{ \mathbf{x}_t^i + \mathbf{W}_t^i + \mathbf{z}_t^i, \bar{u}_t^i \}) \times \bar{\boldsymbol{\theta}}_t^i + \mathbf{U}_t^i \times \underline{\boldsymbol{\theta}}_t^i \right]. \end{aligned}$$

Nous disons qu'il y a *déversement* du barrage i dans le barrage $i+1$ lorsque

$$\mathbf{x}_t^i + \mathbf{W}_t^i - \mathbf{U}_t^i + \mathbf{z}_t^i > \bar{x}_i.$$

L'application des conditions de Kuhn et Tucker en $u = \mathbf{U}_t^i$, $x = \mathbf{X}_t^i$ et $z = \mathbf{Z}_t^i$ donne (les termes entre parenthèses sont à considérer lorsque $\mathbf{X}_t^i + \mathbf{W}_t^i + \mathbf{Z}_t^i < \bar{u}_i$) :

si déversement à (i, t) avec $t < T$:

$$\begin{aligned} -\delta_t^i + \lambda_t^{i+1} & \underset{(\text{en } x)}{=} 0, \\ c_t - 2\varepsilon u - \bar{\theta}_t^i + \underline{\theta}_t^i & \underset{(\text{en } u)}{=} 0, \\ -\lambda_t^i + \lambda_t^{i+1} - 2\rho z & \underset{(\text{en } z)}{=} 0, \end{aligned}$$

sinon, à (i, t) avec $t < T$:

$$\begin{aligned} -\delta_t^i + \delta_{t+1}^i (+\bar{\theta}_t^i) & \underset{(\text{en } x)}{=} 0, \\ c_t - 2\varepsilon u - \delta_{t+1}^i + \lambda_t^{i+1} - \bar{\theta}_t^i + \underline{\theta}_t^i & \underset{(\text{en } u)}{=} 0, \\ \delta_{t+1}^i - \lambda_t^i (+\bar{\theta}_t^i) - 2\rho z & \underset{(\text{en } z)}{=} 0. \end{aligned}$$

Observons qu'à l'optimum la contrainte de borne supérieure sur \mathbf{U} est active s'il y a déversement. Les conditions de complémentarité nous permettent d'écrire :

$$\lambda_t^i = \lambda_t^{i+1} + \begin{cases} -2\rho \mathbf{Z}_t^i & \text{si déversement à } (i, t), \\ c_t - 2\varepsilon \mathbf{U}_t^i - 2\rho \mathbf{Z}_t^i - \bar{\theta}_t^i \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{U}_t^i = \bar{u}_i\}} + \underline{\theta}_t^i \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{U}_t^i = 0\}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.9)$$

Cette expression nous indique que le multiplicateur de la contrainte la plus en aval est potentiellement dépendant des décisions appliquées à tous les barrages. Ainsi, nous ne pourrions pas nous soustraire à la malédiction de la dimension de cette façon. En effet, l'équation (5.9) indique que les multiplicateurs dépendent tous les uns des autres, par cascade, et que chaque multiplicateur λ_t^i dépend de l'ensemble des contrôles $(\mathbf{U}_t^{1:N}, \mathbf{Z}_t^{2:N})$ et donc de l'ensemble des états.

Résolution par programmation dynamique

Dans ce chapitre, nous écrivons la résolution par programmation dynamique du problème de gestion d'une cascade de barrages. Nous présentons l'algorithme puis nous l'appliquons à une instance à trois barrages. Nous calculons la stratégie optimale et nous évaluons numériquement les multiplicateurs des contraintes couplantes. Nous disposons ainsi des solutions optimales primales et duales qui nous permettront d'apprécier les résultats obtenus par la méthode de décomposition-coordination qui sera vue au chapitre 7.

Sommaire

6.1	Complexité numérique de la programmation dynamique	69
6.2	Étude des multiplicateurs liés aux contraintes couplantes	71
6.2.1	Calcul des multiplicateurs optimaux	71
6.2.2	Régressions des multiplicateurs optimaux	73
6.3	Application à une cascade de trois barrages	73
6.3.1	Description de l'instance	74
6.3.2	Résultats numériques	75
6.4	Discussion	78

6.1 Complexité numérique de la programmation dynamique

Nous considérons le problème d'optimisation de la gestion de la production hydroélectrique d'une cascade de N barrages, tel que modélisé dans le chapitre 5, et, nous écrivons la résolution du problème d'optimisation (5.6) par programmation dynamique. Nous commençons par observer que :

- le critère est additif en temps,
- les variables de bruits sont indépendantes pas de temps par pas de temps,

Le problème d'optimisation (5.6) est donc séparable en temps et peut être résolu par *programmation dynamique stochastique* avec les niveaux de stocks comme état ([Bellman et Dreyfus, 1962]). La stratégie de commande optimale s'obtient en résolvant les équations de programmation dynamique suivantes : pour tout vecteur $x = (x^1, \dots, x^N)$ de volumes de remplissage

des barrages,

$$\begin{aligned}
 V_T(x) &= \sum_{i=1}^N K_T^i(x^i), \\
 V_t(x) &= \mathbb{E} \left[\begin{array}{l} \max_{u^1, \dots, u^N} \sum_{i=1}^N L_t^i(u^i, \mathbf{Z}_t^i) + V_{t+1} \left(\left(f_t^i(x_i, u^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) \right)_{i=1}^N \right) \\ \text{s.c. } \mathbf{Z}_t^i = g_t^{i-1}(x^{i-1}, u^{i-1}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1}), \forall i \neq 1, \end{array} \right]. \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Temps d'exécution de l'algorithme et malédiction de la dimension. Supposons que nous procédions, classiquement, à une discrétisation en d_X points de chacune des variables d'état x_i et en d_U points de chacune des variables de commande u_i . Supposons de plus que les espérances soient évaluées comme une moyenne arithmétique portant sur un N -uplet pouvant prendre d_W valeurs (ce qui arrivera si nous considérons les bruits corrélés spatialement). La complexité \mathcal{C} de l'algorithme est :

$$\mathcal{C} = T \times (d_X d_U)^N d_W. \quad (6.2)$$

Pour nous faire une idée des temps d'exécution de la résolution par programmation dynamique d'une cascade de N barrages, nous procédons de la façon suivante :

1. nous relevons le temps d'exécution t_{DP} de la programmation dynamique sur l'instance à 3 barrages de la section 6.3,
2. nous calons les courbes des nombres d'opérations élémentaires pouvant être exécutées en une heure, une journée, un mois et une année de façon à ce que le nombre des opérations effectuées durant un temps t_{DP} coïncide avec la complexité (6.2),
3. nous traçons sur la figure 6.1 les logarithmes de la complexité de l'algorithme de programmation dynamique et des nombres d'opérations élémentaires pouvant être exécutées en une heure, une journée, un mois et une année.

La figure 6.1 illustre bien à quel point la résolution numérique frontale du problème par programmation dynamique devient rapidement impraticable lorsque le nombre de barrages augmente. Ce nombre pouvant être largement supérieur à cinq en pratique, il apparaît nécessaire de résoudre le problème d'optimisation (5.6) différemment, quitte à se satisfaire d'une solution approchée.

Dans la section qui suit, nous allons montrer comment calculer les multiplicateurs optimaux liés aux contraintes couplant les barrages à partir des résultats de la programmation dynamique.

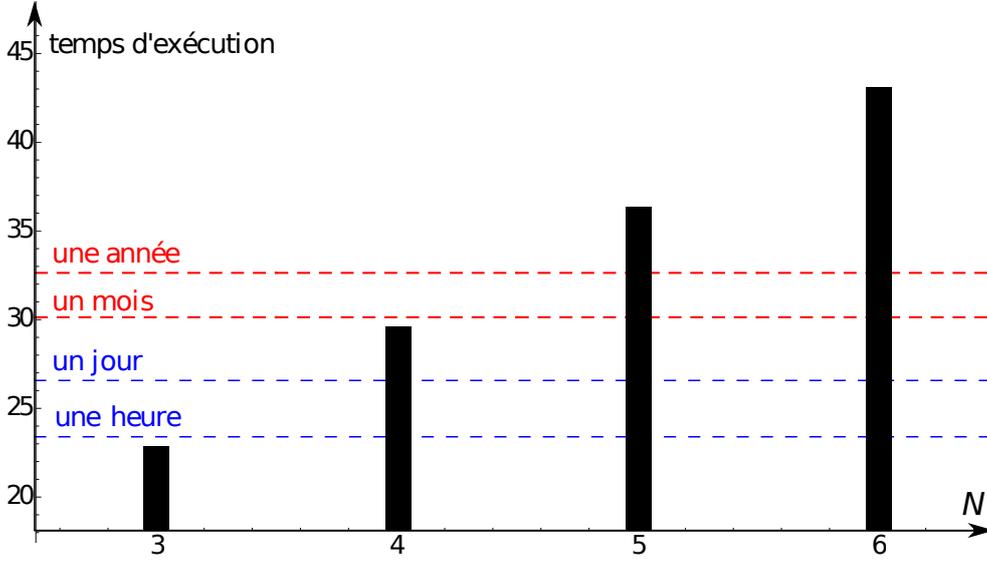


FIGURE 6.1 – Temps d'exécution de l'algorithme de programmation dynamique en fonction du nombre N de barrages, dans le cas $d_X = 41$, $d_U = 21$ et $d_W = 10$.

6.2 Étude des multiplicateurs liés aux contraintes couplantes

Nous venons d'établir l'équation de programmation dynamique (6.1) associée au problème d'optimisation (5.6). Dans ce problème apparaissent des contraintes (5.1) de couplage spatial entre les barrages. Or, la méthode DADP introduite au § 5.2 fait appel aux multiplicateurs de ces contraintes. Nous allons montrer comment calculer les multiplicateurs optimaux à partir de l'équation de programmation dynamique (6.1). Ensuite, nous en ferons une étude statistique afin de déterminer quelles variables aléatoires sont les plus explicatives, et ceci dans la perspective de la mise en œuvre de la méthode DADP au chapitre 7.

6.2.1 Calcul des multiplicateurs optimaux

Dans un premier temps, nous dualisons les contraintes couplantes (5.1) et les contraintes de dynamique (5.2) avec les multiplicateurs λ_t^i et δ_t^i respectivement dans le problème d'optimisation 5.6. Ceci conduit au problème suivant

$$\max_{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \min_{\delta, \lambda} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} \begin{pmatrix} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{X}_T^i) \\ -\delta_t^i (\mathbf{X}_{t+1}^i - f_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i)) \\ -\lambda_t^i (\mathbf{Z}_t^i - g_t^{i-1}(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1})) \end{pmatrix} \right],$$

avec, par convention,

$$\lambda_t^1 (\mathbf{Z}_t^1 - g_t^0(\mathbf{X}_t^0, \mathbf{U}_t^0, \mathbf{W}_t^0, \mathbf{Z}_t^0)) \equiv 0.$$

Nous écrivons alors les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker en $z = \mathbf{Z}_t^{i+1}$ pour tout état de la Nature $\omega \in \Omega$: pour tout $(i, t) \in \{1, \dots, N-1\} \times \{0, \dots, T-1\}$,

$$\frac{\partial L_t^{i+1}}{\partial z}(\dots)(\omega) + \delta_t^{i+1}(\omega) \frac{\partial f_t^{i+1}}{\partial z}(\dots)(\omega) + \lambda_t^{i+2}(\omega) \frac{\partial g_t^{i+1}}{\partial z}(\dots)(\omega) - \lambda_t^{i+1}(\omega) = 0. \quad (6.3)$$

De cette équation, nous déduisons une équation récurrente pour la suite des multiplicateurs λ_t^i :

$$\begin{aligned} \lambda_t^N(\omega) &= \frac{\partial L_t^N}{\partial z}(\dots)(\omega) + \delta_t^N(\omega) \frac{\partial f_t^N}{\partial z}(\dots)(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega, \\ \forall i \in \{1, \dots, N-1\} : \\ \lambda_t^i(\omega) &= \frac{\partial L_t^i}{\partial z}(\dots)(\omega) + \delta_t^i(\omega) \frac{\partial f_t^i}{\partial z}(\dots)(\omega) + \lambda_t^{i+1}(\omega) \frac{\partial g_t^i}{\partial z}(\dots)(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dans cette équation (6.4) apparaissent les multiplicateurs δ_t^i des contraintes dynamiques (5.2). Or, ils peuvent être calculés à partir de l'équation de programmation dynamique (6.1). Pour cela, nous reprenons le problème d'optimisation (5.6) dans lequel nous dualisons seulement les contraintes couplantes (5.1) avec les multiplicateurs λ_t^i . On peut vérifier que les fonctions valeurs solutions de l'équation de programmation dynamique (6.1) sont aussi solutions de :

$$\begin{aligned} V_T(x) &= \sum_{i=1}^N K_T^i(x^i), \\ V_t(x) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^1, \dots, u^N} \sum_{i=1}^N L_t^i(u^i, \mathbf{Z}_t^i) + V_{t+1} \left(\left(f_t^i(x_i, u^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) \right)_{i=1}^N \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_t^i \left(\mathbf{Z}_t^i - g_t^{i-1}(x^{i-1}, u^{i-1}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Nous écrivons les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker pour le problème de maximisation sous l'espérance : pour tout $(i, t, \omega) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\} \times \Omega$,

$$\frac{\partial L_t^{i+1}}{\partial z}(\dots)(\omega) + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x^{i+1}}(\dots)(\omega) \frac{\partial f_t^{i+1}}{\partial z}(\dots)(\omega) + \lambda_t^{i+2}(\omega) \frac{\partial g_t^{i+1}}{\partial z}(\dots) - \lambda_t^{i+1}(\omega) = 0. \quad (6.6)$$

Les équations (6.3) et (6.6) nous permettent alors de procéder à l'identification suivante :

$$\delta_t^{i+1}(\omega) = \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x^{i+1}}(\dots)(\omega), \quad \forall (i, t, \omega). \quad (6.7)$$

Ainsi, nous pouvons, en intégrant (6.7) dans la récurrence (6.4) et en remplaçant les fonctions L_t^i , K_T^i , f_t^i et h_t^i par leurs expressions, déterminer les trajectoires des multiplicateurs :

$$\lambda_t^N = \begin{cases} -2\rho z^N + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x^N}(\dots) & \text{si le barrage } N \text{ ne déborde pas} \\ -2\rho z^N & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\lambda_t^i = \begin{cases} -2\rho z^i + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x^i}(\dots) & \text{si le barrage } i \text{ ne déborde pas} \\ -2\rho z^i + \lambda_t^{i+1} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.9)$$

6.2.2 Régressions des multiplicateurs optimaux

Nous effectuons une régression des multiplicateurs λ_t^i par rapport à certaines variables aléatoires et évaluons lesquelles les expliquent le mieux. Par la suite, nous allons considérer des variables explicatives comme une constante, un des bruits \mathbf{W}_t^i ou des processus plus compliqués, que nous dénoterons génériquement par \mathbf{A}_t^i .

Lorsque nous régressons linéairement la variable λ_t^i sur une variable explicative \mathbf{A}_t^i , sur la base de l'observation de L réalisations conjointes du couple $(\lambda_t^{i(l)}, A_t^{i(l)})_{l=1}^L$, le coefficient de détermination ordinaire R^2 s'écrit

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{l=1}^L (\lambda_t^{i(l)} - \mathfrak{A}^{(l)})^2}{\sum_{l=1}^L (\lambda_t^{i(l)} - \bar{\lambda}_t^i)^2}, \quad (6.10)$$

avec $\bar{\lambda}_t^i$ la moyenne des observations de λ_t^i

$$\text{et } \mathfrak{A}^{(l)} = \beta_0 + A_t^{i(l)}, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}.$$

Le numérateur du rapport qui apparaît dans (6.10) est la somme des carrés des résidus. Le dénominateur est proportionnel à l'estimateur de la variance de λ_t^i . Ce rapport peut donc s'interpréter comme la part inexpliquée de la variance. Le coefficient de détermination ordinaire R^2 s'interprète alors comme la part de la variance expliquée grâce à la régression linéaire : plus R^2 est proche de 1, meilleure est l'explication.

6.3 Application à une cascade de trois barrages

Nous appliquons à présent la méthode du § 6.1 à la gestion de la production hydroélectrique d'une cascade de trois barrages. De taille réduite, cette instance peut être résolue numériquement par programmation dynamique. Le problème à trois barrages nous servira de référence et d'aide à la sélection des variables explicatives dans la suite. Le fait de disposer de sa solution optimale nous permettra de mettre en perspective les résultats approchés obtenus dans le chapitre 7.

6.3.1 Description de l'instance

Inspirée d'un problème réel, l'instance représente une cascade de trois barrages identiques à gérer sur une année.

Coefficients de valorisation mis en œuvre. On adapte l'instance numérique de la première partie de la thèse (gestion de la production d'un barrage) à une cascade, en mettant de côté les contraintes de cote. Les coefficients de coûts mis en œuvre sont,

pour le coût courant ($L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) = C_t \mathbf{U}_t^i - \varepsilon \mathbf{U}_t^{i2} - \rho \mathbf{Z}_t^{i2}$) :

$$(\varepsilon, \rho) = (1, 7), \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

coût final ($K_T(\mathbf{X}_T^i) = \alpha_i (\mathbf{X}_T^i - x_T^i)^2$) :

$$(\alpha_i, x_T^i) = (500, 40), \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Structure temporelle. L'année est découpée en $T = 12$ instants (un instant par mois) et les décisions sont à appliquer le long de 11 pas de temps.

Structure aléatoire. Les variables de bruit $(W_t^1, W_t^2, W_t^3)_t$ sont indépendantes pas de temps par pas de temps et suivent des lois uniformes sur les ensembles discrets à 10 valeurs définis par les trois matrices $(W_t^1)_t$, $(W_t^2)_t$ et $(W_t^3)_t$ suivantes (une colonne pour chaque pas de temps et une ligne pour chaque valeur de réalisation possible à chaque pas de temps),

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	0	2	0	0	0	0	0	0
2	2	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0	2	2	4	4	2	0	0	0	0	0	2	2	4	4	2	0	0	0	0	0	0
4	4	4	4	2	2	0	0	0	0	0	0	4	6	4	4	2	2	0	0	0	0	4	6	6	4	2	2	0	0	0	0	0
4	6	6	6	2	2	0	0	0	0	0	0	6	8	6	6	4	4	0	0	0	0	6	8	8	6	4	4	0	0	0	0	2
6	8	8	8	4	4	0	0	0	0	2	2	6	8	8	8	4	4	2	0	0	0	6	10	8	10	4	4	2	0	0	0	2
6	10	8	10	6	4	2	0	0	0	2	2	8	10	8	10	6	4	2	0	0	2	8	12	8	10	8	4	2	0	0	2	4
8	12	10	10	10	6	2	0	0	2	4	2	8	12	10	10	10	6	2	0	0	2	10	14	10	12	12	6	2	0	0	2	8
12	14	12	14	12	8	4	0	0	4	8	2	14	14	12	14	14	8	4	0	0	4	20	16	12	16	14	8	4	0	2	4	8
22	18	14	18	14	8	4	2	2	6	10	2	24	18	14	20	14	8	4	2	2	6	26	18	14	24	16	10	4	2	2	8	12
28	22	20	24	16	14	6	2	2	10	14	2	30	24	22	24	18	16	8	2	6	12	32	26	22	26	18	20	10	4	6	14	26

Ainsi, les espérances au sein des équations de programmation dynamique peuvent être évaluées exactement, $\forall t \in \{0, \dots, T\}$, en effectuant une moyenne arithmétique sur les dix valeurs de réalisation possible des triplets d'apports.

Structure spatiale. Le niveau de remplissage x_t^i de tout barrage i à tout pas de temps t peut varier de 0 à 80 hm^3 et le turbiné appliqué U_t^i peut varier de 0 à 40 hm^3 . Une discrétisation des espaces \mathbb{X} et \mathbb{U} des états et des contrôles étant requise pour la mise en œuvre de la programmation dynamique, nous fixons le pas de discrétisation élémentaire à 2 hm^3 . Les discrétisations de \mathbb{X} et de \mathbb{U} sont alors : $d_X = 40$ et $d_U = 20$.

6.3.2 Résultats numériques

On utilise la stratégie de commande optimale obtenue par programmation dynamique pour évaluer le gain espéré sur un échantillon de 100 000 scénarios d'apports. Les figures 6.2, 6.3 et 6.4 représentent les moyennes, les 1-décile et les 9-décile de ces apports. La figure 6.5 représente les prix, déterministes. Les contrôles optimaux appliqués sont représentés par les figures 6.6, 6.7 et 6.8.

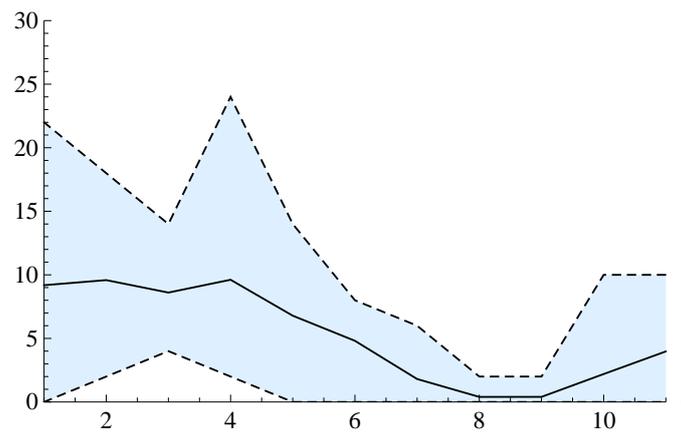


FIGURE 6.2 – Apports au barrage 1.

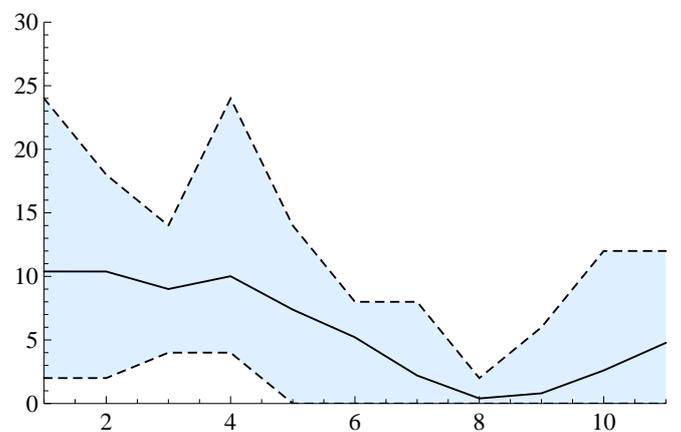


FIGURE 6.3 – Apports au barrage 2.

Nous pouvons constater que les turbines suivent assez fidèlement la courbe des prix représentée figure 6.5. Cela était prévisible du fait que les prix sont déterministes. Les déviations par rapport aux moyennes des turbines sont bien sûr imputables aux apports, stochastiques. De ce fait, deux comportements nets se dégagent : turbiner au maximum au pas de temps 3 et turbiner au minimum aux pas de temps 7 et 8. Enfin, les turbines sont plus importantes à mesure que les barrages sont plus en aval. Ceci est dû au fait que nous y disposons de plus

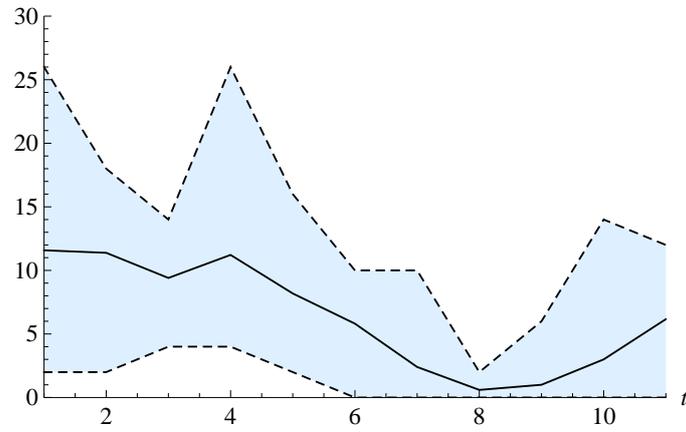


FIGURE 6.4 – Apports au barrage 3.

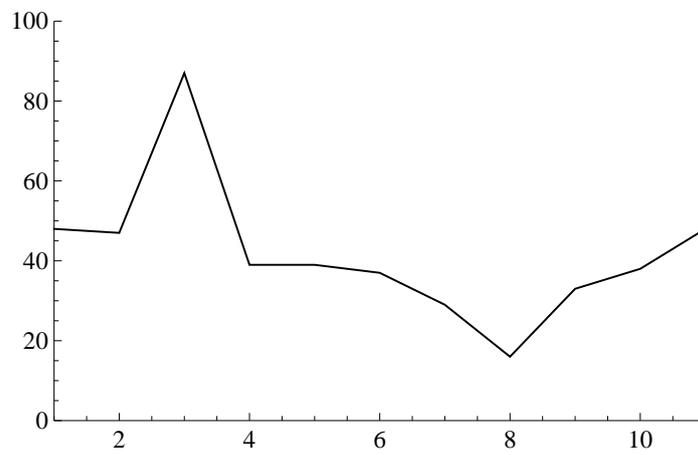


FIGURE 6.5 – Coûts marginaux de production à chaque pas de temps.

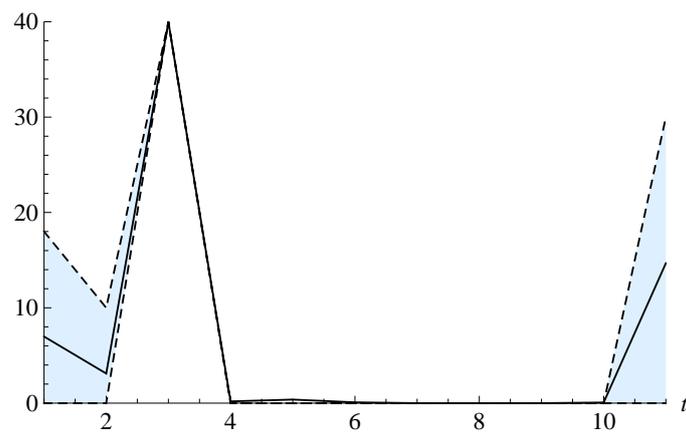


FIGURE 6.6 – Turbiné appliqué au barrage 1.

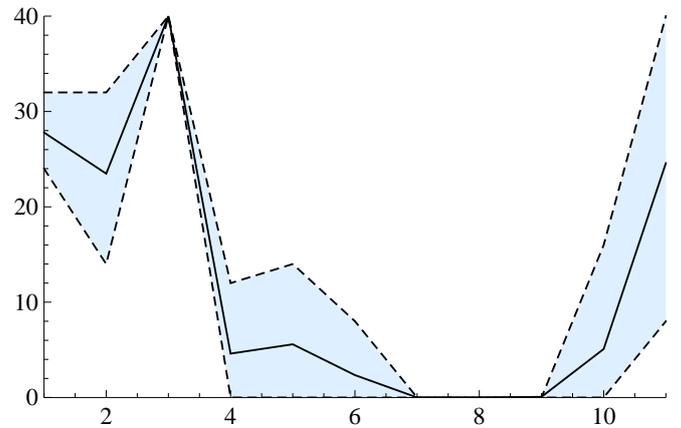


FIGURE 6.7 – Turbiné appliqué au barrage 2.

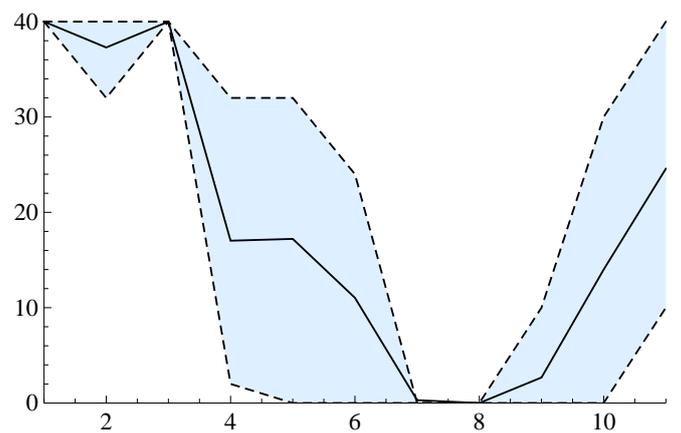


FIGURE 6.8 – Turbiné appliqué au barrage 3.

d'eau étant donné que l'eau déstockée en amont est disponible en aval.

L'espérance de gain est de $1,3658 \times 10^6$ euros. La distribution de probabilité empirique des gains sur les 100 000 scénarios est représentée sur la figure 6.9. Nous pouvons constater que la moitié des gains réalisés le sont entre 1.1946×10^6 et 1.5433×10^6 euros et que la dispersion est élevée, ce que nous avons déjà observé dans la partie 1 du document pour le problème de la gestion hydroélectrique d'un barrage.

Nous procédons maintenant à l'étude numérique des multiplicateurs optimaux du § 6.2.1.

Etude des régressions des multiplicateurs optimaux. Nous faisons le choix d'évaluer les corrélations entre les multiplicateurs liés aux contraintes couplantes et les variables d'état de remplissage des barrages. Le tableau suivant représente les R^2 des régressions linéaires des

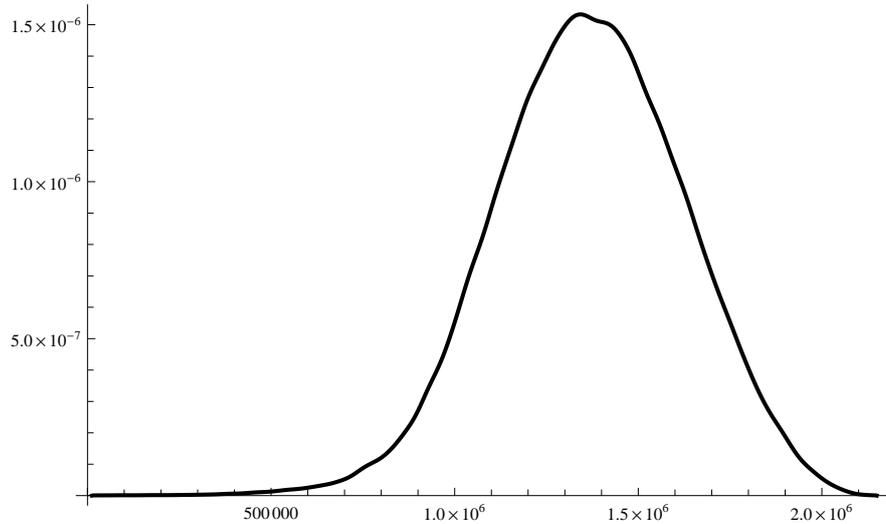


FIGURE 6.9 – Distribution du gain simulé, son espérance est, pour rappel, de $1,3658 \times 10^6$ euros.

multiplicateurs λ_t^2 des contraintes couplant les barrages 1 et 2 sur X_t^1 , X_t^2 et X_t^3 .

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$
X_t^1	0.82	0.80	0.61	0.53	0.42	0.43	0.81	0.81	0.82	0.83	0.78
X_t^2	0.81	0.63	0.49	0.40	0.45	0.39	0.51	0.55	0.54	0.53	0.31
X_t^3	0.00	0.40	0.39	0.26	0.30	0.30	0.51	0.51	0.51	0.40	0.17

Le tableau suivant représente les R^2 des régressions linéaires des multiplicateurs λ_t^3 des contraintes couplant les barrages 2 et 3 sur X_t^1 , X_t^2 et X_t^3 .

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$
X_t^1	0.58	0.75	0.66	0.45	0.41	0.30	0.33	0.58	0.59	0.57	0.59
X_t^2	0.53	0.58	0.51	0.32	0.44	0.37	0.24	0.36	0.37	0.36	0.25
X_t^3	0.12	0.70	0.54	0.33	0.35	0.28	0.53	0.74	0.72	0.43	0.39

On observe que la variable la plus à même d'expliquer les multiplicateurs est la variable X^1 et qu'elle l'est bien plus pour les multiplicateurs des contraintes couplant les barrages 1 et 2 que pour ceux des contraintes couplant les barrages 2 et 3.

6.4 Discussion

Ce chapitre nous a permis d'obtenir numériquement la stratégie optimale et les multiplicateurs optimaux des contraintes couplantes du problème de gestion d'une cascade de trois barrages. Nous avons aussi identifié que les multiplicateurs avaient une forte corrélation avec la variable d'état du premier barrage. Les solutions optimales primales et duales nous permet-

tront une comparaison avec les résultats donnés par la méthode de décomposition-coordination du chapitre 7 suivant.

Résolution par méthode de décomposition-coordination

Dans ce chapitre, nous allons décomposer le problème de la cascade en sous-problèmes couplés pour lesquels nous dualiserons la contrainte “déversé supérieur = apport inférieur”. Nous détaillons ensuite la méthode Dual Approximate Dynamic Programming qui remplace ces contraintes par des contraintes plus faibles en espérance conditionnelle.

Selon le conditionnement, nous obtenons différents résultats numériques que nous comparons entre eux et à l’optimum atteint au chapitre 6.

Nous concluons par une discussion sur des extensions possibles à une cascade de plus de trois barrages et à des cas de réseaux de structure plus complexe.

Sommaire

7.1	La méthode Dual Approximate Dynamic Programming (DADP)	82
7.1.1	Décomposition du problème	82
7.1.2	Résolution des sous-problèmes par programmation dynamique	84
7.2	L’algorithme Dual Approximate Dynamic Programming	85
7.2.1	Calcul d’une stratégie dans le primal	85
7.2.2	Mise à jour des multiplicateurs dans le dual	86
7.2.3	Conception d’une stratégie admissible	87
7.3	Application à une cascade de trois barrages	88
7.3.1	Variables explicatives sélectionnées	88
7.3.2	Mise en œuvre de l’algorithme DADP	88
7.3.3	Résultats numériques	91
7.4	Discussion	95
7.5	Appendice A : construction d’un processus explicatif	97
7.6	Appendice B : convergence numérique de l’algorithme	99

7.1 La méthode Dual Approximate Dynamic Programming (DADP)

Nous décrivons l'application de la méthode DADP sur le problème du contrôle optimal d'une cascade de N barages. On considère le problème suivant :

$$\max_{\mathbf{x}, \mathbf{U}, \mathbf{Z}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{X}_T^i) \right] \quad (7.1a)$$

$$\text{s.c. } \forall (i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\} :$$

$$\mathbf{X}_{t+1}^i = f_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i), \quad (7.1b)$$

$$\mathbf{Z}_t^i = g_t^{i-1}(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1}), \quad \forall i \neq 1, \quad (7.1c)$$

$$\mathbf{X}_0^i = x_0^i \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_t^1 \equiv 0,$$

$$0 \leq \mathbf{X}_{t+1}^i \leq \bar{x}_{t+1}^i \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathbf{U}_t^i \leq \bar{u}_t^i, \quad (7.1d)$$

$$\mathbf{U}_t^i \preceq \sigma(\mathbf{X}_0^{1:N}, \mathbf{W}_{0:t}^{1:N}), \quad (7.1e)$$

7.1.1 Décomposition du problème

On dualise les équations de couplage spatial (7.1c) en recourant aux multiplicateurs λ_t^i . Les contraintes (7.1c) étant à respecter de façon presque sûre, ces multiplicateurs sont donc des variables aléatoires de même mesurabilité que les variables de contrôle \mathbf{U}_t^i et \mathbf{Z}_t^i , à savoir par rapport à la filtration $\sigma((\mathbf{X}_0^i, \mathbf{W}_0^i, \dots, \mathbf{W}_t^i)_{i \in \{1, \dots, N\}})$. On place les contraintes de bornes (7.1d) et de mesurabilité (7.1e) dans l'ensemble admissible \mathfrak{U} . Ainsi, le problème se réécrit : on pose, par convention, $\mathbf{Z}_t^{N+1} \equiv 0$ et $g_t^N(\dots) \equiv 0, \forall t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$\max_{\mathbf{x}, \mathbf{Z}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}} \min_{\lambda} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{X}_T^i) - \lambda_t^{i+1} (\mathbf{Z}_t^{i+1} - g_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i)) \right] \quad (7.2)$$

$$\text{s.c. } \forall (i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\} :$$

$$\mathbf{X}_{t+1}^i = f_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{X}_0^i = x_0^i \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_t^1 \equiv 0. \quad (7.4)$$

On suppose, et cette hypothèse est cruciale, que (7.2) admet un point-selle¹. On peut alors intervertir les opérateurs min et max et résoudre par une méthode de décomposition par les prix. À multiplicateurs fixés λ_t^i , le problème (7.2), séparable en i (critère, dynamique et ensemble admissible séparable en i) se décompose en les N sous-problèmes suivants : pour

1. Ceci est vérifié dans un espace de Hilbert sous hypothèses de convexité, de régularité et de qualification de contraintes ([Ekeland et Temam, 1999]).

tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\max_{\mathbf{X}^i, \mathbf{Z}^i, \mathbf{U}^i \in \mathcal{U}^i} \mathbb{E} \left[\begin{array}{l} \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{X}_T^i) \\ - \lambda_t^i \mathbf{Z}_t^i + \lambda_t^{i+1} g_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) \end{array} \right] \quad (7.5a)$$

s.c. $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$:

$$\mathbf{X}_{t+1}^i = f_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i), \quad (7.5b)$$

$$\mathbf{X}_0^i = x_0^i, \quad (7.5c)$$

avec,

$$\mathcal{U}^i = \left\{ \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{U} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \mathbf{U}_t \leq \min \{ \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t^i + \mathbf{Z}_t, \bar{u}_t^i \}, \\ \mathbf{U}_t \preceq \sigma(\mathbf{X}_0^{1:N}, \mathbf{W}_{0:t}^{1:N}) \text{ et } \mathbf{Z}_t \preceq \sigma(\mathbf{X}_0^{1:N}, \mathbf{W}_{0:t}^{1:N}), \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \end{array} \right\}.$$

Dans ces sous-problèmes d'optimisation, les multiplicateurs λ_t^i représentent de nouveaux bruits. Or, ces bruits sont le résultat d'une minimisation et n'ont pas de raison particulière d'être blancs, ce qui rend *a priori* la résolution par programmation dynamique impossible avec le seul état X_t^i . Partant de ce constat, la méthode DADP propose d'approximer les multiplicateurs par leurs espérances conditionnelles sachant des variables explicatives \mathbf{Y}_t^i :

$$\phi_t^i = \mathbb{E} \left[\lambda_t^i \mid \mathbf{Y}_t^i \right], \quad \forall (i, t). \quad (7.6)$$

Ainsi, les problèmes (7.5) sont remplacés par les problèmes suivants :

$$\max_{\mathbf{X}^i, \mathbf{Z}^i, \mathbf{U}^i \in \mathcal{U}^i} \mathbb{E} \left[\begin{array}{l} \sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(\mathbf{U}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) + K_T^i(\mathbf{X}_T^i) \\ - \phi_t^i \mathbf{Z}_t^i + \phi_t^{i+1} g_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i) \end{array} \right] \\ \text{s.c. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\} : \\ \mathbf{X}_{t+1}^i = f_t^i(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_t^i, \mathbf{Z}_t^i), \quad (7.7) \\ \mathbf{X}_0^i = x_0^i.$$

Ces problèmes peuvent être résolus par programmation dynamique avec état (X_t^i, Y_t^i) dans le cas où ce dernier suit une dynamique alimentée par les bruits $\mathbf{W}_t^{1:N}$. Les variables explicatives que nous allons considérer sont

- des variables statiques : des constantes $\mathbf{Y}_t^i \equiv cste$ (ce qui revient à considérer $\mathbb{E} \left[\lambda_t^i \right]$) ou encore $\mathbf{Y}_t^i = \mathbf{A}_t^i$ où $\mathbf{A}_{0:T-1}^i$ est un bruit blanc construit à partir du processus $\mathbf{W}_{0:T-1}^{1:N}$,

– des variables dynamiques : des variables \mathbf{Y}^i telles que

$$\mathbf{Y}_{t+1}^i = \tilde{f}_t^i(\mathbf{Y}_t^i, \mathbf{A}_t^i). \quad (7.8)$$

7.1.2 Résolution des sous-problèmes par programmation dynamique

Nous détaillons les résolutions des sous-problèmes d'optimisation (7.7) par programmation dynamique en distinguant le cas où la variable explicative \mathbf{Y}_t^i est statique du cas où elle est dynamique.

7.1.2.1 Variable explicative statique

À (ϕ_t^i) fixés, nous pouvons déterminer les stratégies locales optimales par programmation dynamique.

Si \mathbf{Y}_t^i est constante presque sûrement, alors les espérances portent sur \mathbf{W}_t^i .

Si $\mathbf{Y}_t^i = \mathbf{W}_t^j$, alors les espérances portent sur \mathbf{W}_t^i et sur \mathbf{W}_t^j .

L'équation de programmation dynamique associée au problème d'optimisation (7.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} V_T^i(x^i) &= K_T^i(x^i), \\ V_t^1(x^1) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^1} \left\{ L_t^1(u^1) + \phi_t^2 g_t^1(x^1, u^1, \mathbf{W}_t^1) + V_{t+1}^1(f_t^1(x^1, u^1, \mathbf{W}_t^1)) \right\} \right], \\ \forall i \in \{2, \dots, N-1\} : \\ V_t^i(x^i) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^i, z^i} \left\{ \begin{aligned} &L_t^i(u^i, z^i) - \phi_t^i z^i + \phi_t^{i+1} g_t^i(x^i, u^i, \mathbf{W}_t^i, z^i) \\ &+ V_{t+1}^i(f_t^i(x^i, u^i, \mathbf{W}_t^i, z^i)) \end{aligned} \right\} \right], \\ V_t^N(x^N) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^N, z^N} \left\{ L_t^N(u^N, z^N) - \phi_t^N z^N + V_{t+1}^N(f_t^N(x^N, u^N, \mathbf{W}_t^N, z^N)) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Notons que si, dans ce cas, les espérances peuvent être plus complexes à calculer, l'état de programmation dynamique reste lui de dimension une. De ce fait, nous sommes capables de résoudre numériquement les sous-problèmes d'optimisation (7.7).

7.1.2.2 Variable explicative dynamique

La variable explicative étant dynamique, la dimension de l'état de programmation dynamique augmente puisque nous passons de l'état X_t^i à l'état (X_t^i, Y_t^i) .

Considérons le cas d'une variable de type (7.8) et plaçons nous à un sous-problème j ni tout amont ni tout aval ($j \in \{2, \dots, N-1\}$). Nous observons, dans le problème (7.7), que nous faisons appel à deux variables explicatives \mathbf{Y}_t^j et \mathbf{Y}_t^{j+1} . De ce fait, la résolution de (7.7) met en jeu deux nouvelles variables d'état. La dimension de l'état de programmation dynamique

est alors de dimension trois ! Pour diminuer cette dimension, mettons en œuvre une unique variable explicative :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t^2 &\equiv \mathbf{Y}_t^3 \equiv \dots \equiv \mathbf{Y}_t^N \equiv \mathbf{Y}_t \\ \text{et } \mathbf{Y}_{t+1} &= \tilde{f}_t(\mathbf{Y}_t, \mathbf{A}_t) \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

La dimension de l'état est alors égale à deux et les équations de programmation dynamique sont :

$$\begin{aligned} V_T^i(x^i, y) &\stackrel{\text{convention}}{=} V_T^i(x^i) = K_T^i(x^i), \\ V_t^1(x^1, y) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^1} \left\{ \begin{aligned} &L_t^1(u^1) + \phi_t^2 g_t^1(x^1, u^1, \mathbf{W}_t^1) \\ &+ V_{t+1}^1(f_t^1(x^1, u^1, \mathbf{W}_t^1), \tilde{f}_t(y, \mathbf{A}_t)) \end{aligned} \right\} \right], \\ \forall i \in \{2, \dots, N-1\} : \\ V_t^i(x^i, y) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^i, z^i} \left\{ \begin{aligned} &L_t^i(u^i, z^i) - \phi_t^i z^i + \phi_t^{i+1} g_t^i(x^i, u^i, \mathbf{W}_t^i, z^i) \\ &+ V_{t+1}^i(f_t^i(x^i, u^i, \mathbf{W}_t^i, z^i), \tilde{f}_t(y, \mathbf{A}_t)) \end{aligned} \right\} \right], \\ V_t^N(x^N, y) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^N, z^N} \left\{ \begin{aligned} &L_t^N(u^N, z^N) - \phi_t^N z^N \\ &+ V_{t+1}^N(f_t^N(x^N, u^N, \mathbf{W}_t^N, z^N), \tilde{f}_t(y, \mathbf{A}_t)) \end{aligned} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Décrivons à présent la mise à jour des multiplicateurs des contraintes couplantes (7.1c) introduits dans § 7.1.1.

De la méthode DADP que nous venons de présenter, nous déduisons un algorithme itératif de résolution approximée du problème (7.1). Nous décrivons cet algorithme dans la section suivante.

7.2 L'algorithme Dual Approximate Dynamic Programming

Nous allons résoudre le problème min-max (7.2) par l'algorithme d'Uzawa. Ce qui suit décrit l'algorithme de calcul d'une suite de multiplicateurs $(\phi_t^i)^{(k)}$ et de stratégies $\mathbf{U}_{0:T-1}^{i(k)}$ indicés par les itérations $k = 0, 1, \dots$

7.2.1 Calcul d'une stratégie dans le primal

À l'étape k de l'itération dans le primal, on dispose des valeurs $(\phi_t^i)^{(k)}$ des multiplicateurs et on calcule une stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}^{i(k)}$.

7.2.1.1 Variable explicative statique

À l'étape k de l'itération dans le primal, on dispose des valeurs $(\phi_t^i)^{(k)}$ des multiplicateurs et on résout les équations suivantes, qui correspondent à (7.9) et qui fournissent une stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}^{i(k)}$:

$$\begin{aligned}
V_T^i(x^i) &= K_T^i(x^i), \\
V_t^1(x^1) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^1} \left\{ L_t^1(u^1) + (\phi_t^2)^{(k)} g_t^1(x^1, u^1, \mathbf{W}_t^1) + V_{t+1}^1(f_t^1(x^1, u^1, \mathbf{W}_t^1)) \right\} \right], \\
\forall i \in \{2, \dots, N-1\} : \\
V_t^i(x^i) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^i, z^i} \left\{ L_t^i(u^i, z^i) - (\phi_t^i)^{(k)} z^i + (\phi_t^{i+1})^{(k)} g_t^i(x^i, u^i, \mathbf{W}_t^i, z^i) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + V_{t+1}^i(f_t^i(x^i, u^i, \mathbf{W}_t^i, z^i)) \right\} \right], \\
V_t^N(x^N) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^N, z^N} \left\{ L_t^N(u^N, z^N) - (\phi_t^N)^{(k)} z^N + V_{t+1}^N(f_t^N(x^N, u^N, \mathbf{W}_t^N, z^N)) \right\} \right].
\end{aligned} \tag{7.12}$$

7.2.1.2 Variable explicative dynamique

À l'étape k de l'itération dans le primal, on dispose des valeurs $(\phi_t^i)^{(k)}$ des multiplicateurs et on résout les équations suivantes, qui correspondent à (7.11) et qui fournissent une stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}^{i(k)}$:

$$\begin{aligned}
V_T^i(x^i, y) &\underset{\text{convention}}{=} V_T^i(x^i) = K_T^i(x^i), \\
V_t^1(x^1, y) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^1} \left\{ L_t^1(u^1) + (\phi_t^2)^{(k)} g_t^1(x^1, u^1, \mathbf{W}_t^1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + V_{t+1}^1(f_t^1(x^1, u^1, \mathbf{W}_t^1), \tilde{f}_t(y, \mathbf{A}_t)) \right\} \right], \\
\forall i \in \{2, \dots, N-1\} : \\
V_t^i(x^i, y) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^i, z^i} \left\{ L_t^i(u^i, z^i) - (\phi_t^i)^{(k)} z^i + (\phi_t^{i+1})^{(k)} g_t^i(x^i, u^i, \mathbf{W}_t^i, z^i) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + V_{t+1}^i(f_t^i(x^i, u^i, \mathbf{W}_t^i, z^i), \tilde{f}_t(y, \mathbf{A}_t)) \right\} \right], \\
V_t^N(x^N, y) &= \mathbb{E} \left[\max_{u^N, z^N} \left\{ L_t^N(u^N, z^N) - (\phi_t^N)^{(k)} z^N \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + V_{t+1}^N(f_t^N(x^N, u^N, \mathbf{W}_t^N, z^N), \tilde{f}_t(y, \mathbf{A}_t)) \right\} \right].
\end{aligned} \tag{7.13}$$

7.2.2 Mise à jour des multiplicateurs dans le dual

À l'étape k de l'itération dans le dual, on dispose d'une stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}^{i(k)}$ et des valeurs $(\phi_t^i)^{(k)}$ des multiplicateurs et on met à jour les multiplicateurs $(\phi_t^i)^{(k+1)}$ par méthode de pas

de gradient : $\forall(i, t) \in \{2, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\}$,

$$(\phi_t^i)^{(k+1)} = (\phi_t^i)^{(k)} + \rho_t^i \times \mathbb{E} \left[\mathbf{Z}_t^{i(k)} - g_t^{i-1} \left(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1(k)}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1(k)} \right) \mid \mathbf{Y}_t^i \right]. \quad (7.14)$$

La méthode de gradient convergeant en un nombre important d'itérations nous pouvons essayer de lui substituer une méthode de gradient conjugué ou de quasi-Newton, plus rapide.

7.2.3 Conception d'une stratégie admissible

Si l'algorithme ci-dessus converge² vers des multiplicateurs $(\phi_t^i)^{(\star)}$ et une stratégie $\mathbf{U}_{0:T-1}^{i(\star)}$ optimaux, ils vérifient la contrainte : $\forall(i, t) \in \{2, \dots, N\} \times \{0, \dots, T-1\}$,

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{Z}_t^{i(\star)} - g_t^{i-1} \left(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1(\star)}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1(\star)} \right) \mid \mathbf{Y}_t^i \right] = 0. \quad (7.15)$$

En conséquence, rien n'assure que les apports amonts optimaux $\mathbf{Z}_t^{i\star}$ satisfont la contrainte plus forte d'être presque-sûrement égaux à $g_t^{i-1} \left(\mathbf{X}_t^{i-1}, \mathbf{U}_t^{i-1\star}, \mathbf{W}_t^{i-1}, \mathbf{Z}_t^{i-1\star} \right)$ à (i, t) . De ce fait, la stratégie $(\mathbf{U}^\star, \mathbf{Z}^\star)$ n'est pas admissible pour le problème initial (7.1). C'est pourquoi, nous proposons maintenant une heuristique qui, à partir des résultats de l'algorithme d'Uzawa, produit une stratégie admissible au sens où elle respecte les contraintes (7.1c).

Il est classique, lorsque l'on recourt à la programmation dynamique stochastique, de ne récupérer que les fonctions de Bellman $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ (et pas les feedbacks optimaux, pour des raisons de gains de complexité en espace de l'algorithme de programmation dynamique stochastique) et de ne déterminer les contrôles que pas de temps après pas de temps.

La stratégie optimale $\mathbf{U}_{0:T-1}^{i(\star)}$ est obtenue à partir de

$$\max_{x, z, u} \sum_{i=1}^N L_t^i(x^i, z^i) + V_{t+1} \left(\left(f_t^i(x^i, u^i, w^i, z^i) \right)_{i=1}^N \right) \quad (7.16a)$$

$$\text{s.c. } \forall i \in \{1, \dots, N\} :$$

$$0 \leq u^i \leq \min\{x^i + w^i + z^i, \bar{u}_t^i\},$$

$$z^i = g_t^{i-1} \left(x^{i-1}, u^{i-1}, w^{i-1}, z^{i-1} \right),$$

$$z^1 = 0.$$

Toutefois, la fonction valeur V_{t+1} n'est pas connue. Nous proposons de remplacer le terme $V_{t+1}(x^1, \dots, x^N)$ par

– si la variable explicative n'est pas dynamique :

$$\sum_{i=1}^N V_{t+1}^i(x^i),$$

2. L'algorithme d'Uzawa converge lorsque le problème est fortement convexe, posé dans un espace de Hilbert et que les contraintes sont qualifiées ([Ekeland et Temam, 1999]).

- si la variable explicative est dynamique : on pose y_{t-1}^i sa réalisation à $(i, t-1)$

$$\sum_{i=1}^N V_{t+1}^i(x^i, y^i),$$

avec $y^i = \tilde{f}_t^i(y_{t-1}^i, w^i),$

On notera que, plus la variable d'information \mathbf{Y}_t^i sera riche, plus la solution donnée par l'algorithme d'Uzawa sera proche de l'optimum. Cependant, l'heuristique ci-dessus peut détruire cette propriété de monotonie. C'est ce que nous observerons dans l'application numérique qui suit.

7.3 Application à une cascade de trois barrages

Nous reprenons l'instance à trois barrages décrite au § 6.3.1 et lui appliquons l'algorithme DADP.

7.3.1 Variables explicatives sélectionnées

Les variables explicatives sur lesquelles nous nous penchons sont des variables statiques :

- une constante ($\mathbb{E}[\boldsymbol{\lambda}_t^i]$),
- les variables d'apports au barrage amont \mathbf{W}_t^{i-1} ($\mathbb{E}[\boldsymbol{\lambda}_t^i | \mathbf{W}_t^{i-1}]$),

une variable dynamique :

- l'étude statistique du § 6.3.2 mettant cette variable en avant, nous considérons l'état au barrage de tête \mathbf{X}_t^1 ($\mathbb{E}[\boldsymbol{\lambda}_t^i | \mathbf{X}_t^1]$). Cette variable étant commandée, nous l'approchons en approximant (par régression) sa dynamique optimale (issue de la stratégie obtenue par programmation dynamique à trois variables d'état) par des fonctions \tilde{f} non commandées (voir l'appendice A p. 97).

7.3.2 Mise en œuvre de l'algorithme DADP

L'idée générale de l'algorithme que nous allons mettre en œuvre est de considérer, à problème décomposé, le problème de la coordination des multiplicateurs comme un problème de minimisation tel qu'à tout jeu de prix étudié, *l'oracle*, composé de la résolution des trois sous-problèmes par programmation dynamique et de l'évaluation des écarts aux contraintes, retourne la valeur du critère et le gradient aux contraintes couplantes (voir la figure 7.1). L'algorithme de résolution adopté est un algorithme de quasi-Newton à mémoire limitée et à redémarrages issu de la bibliothèque `modulopt` ([Gilbert, 2009]) et inspiré de [Beale, 1972] et de [Powell, 1977].

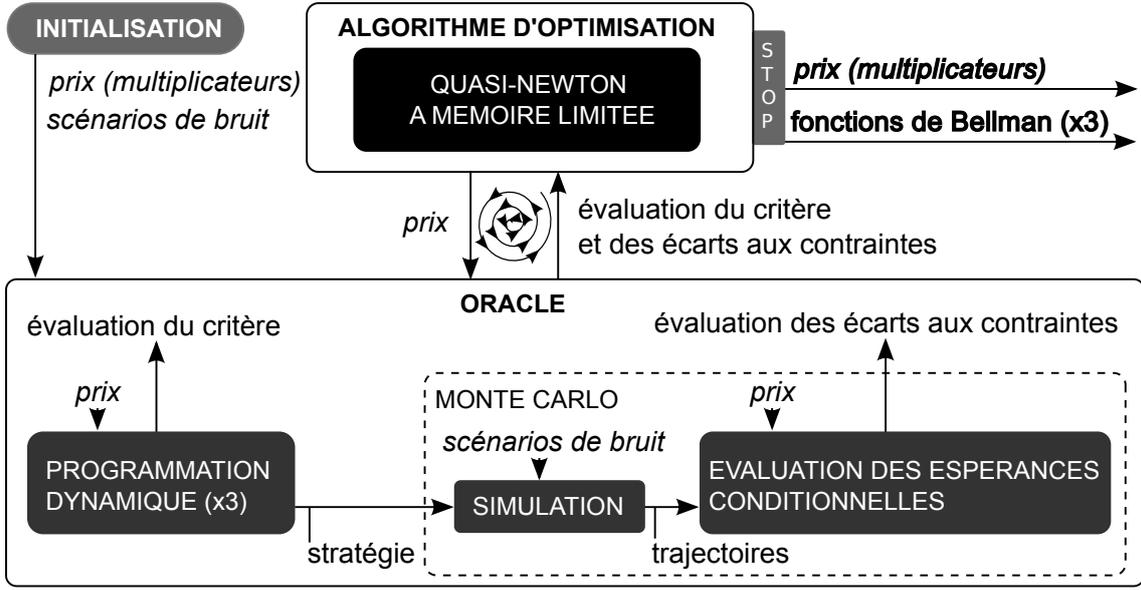


FIGURE 7.1 – Mise en oeuvre de l'algorithme DADP appliqué à la gestion d'une cascade de trois barrages.

Algorithme :

1. **initialisation** ($k = 0$). Nous initialisons les dynamiques \tilde{f} des variables explicatives vues au § 7.3.1. On se fixe un ensemble \mathcal{W} de $L = 100\,000$ trajectoires de bruits (de trajectoires d'apports aux barrages). Dans cet algorithme, nous approchons les réalisations des variables aléatoires que sont les espérances conditionnelles des multiplicateurs $(\lambda_t^i)^{(k)}$ sachant \mathbf{Y}_t^i (à valeurs dans un espace discret \mathbb{Y}) :

$$\varphi_t^{i(k)}(y) \approx \mathbb{E} \left[(\lambda_t^i)^{(k)} \mid \mathbf{Y}_t^i = y \right], \quad \forall (i, t, y) \in \{2, 3\} \times \{0, \dots, T-1\} \times \mathbb{Y}.$$

Nous initialisons ces fonctions par des fonctions $\varphi_t^{i(0)}$.

2. **on résoud** les trois sous-problèmes d'optimisation stochastique (7.7) par programmation dynamique stochastique.

variable explicative statique : $\mathbf{Y}_t^i = cste$ ou $\mathbf{Y}_t^i = \mathbf{W}_t^i$. On rappelle que la réalisation des bruits est donnée sous la forme d'un triplet pouvant prendre d_W valeurs à tout pas de temps. Ces valeurs pouvant être prise équiprobablement, les espérances sont déterminées de façon exacte comme des moyennes sur d_W valeurs.

Les équations de programmation dynamique sont :

$$V_t^1(x) = \frac{1}{d_W} \sum_{l=1}^{d_W} \left(\max_u \left\{ L_t^1(u) + \varphi_t^{2(k)}(W_t^{1,l}) \times g_t^1(x, u, W_t^{1,l}) \right\} \right),$$

$$V_t^2(x) = \frac{1}{d_W} \sum_{l=1}^{d_W} \left(\max_{u,z} \left\{ \begin{array}{l} L_t^2(u, z) + \varphi_t^{3(k)}(W_t^{2,l}) \times g_t^2(x, u, W_t^{2,l}, z) \\ -\varphi_t^{2(k)}(W_t^{1,l}) \times z + V_{t+1}^2(f_t^2(x, u, W_t^{2,l}, z)) \end{array} \right\} \right),$$

$$V_t^3(x) = \frac{1}{d_W} \sum_{l=1}^{d_W} \left(\max_{u,z} \left\{ \begin{array}{l} L_t^3(u, z) - \varphi_t^{3(k)}(W_t^{2,l}) \times z \\ +V_{t+1}^3(f_t^3(x, u, W_t^{3,l}, z)) \end{array} \right\} \right).$$

variable explicative dynamique : $\mathbf{Y}_t^i = \mathbf{X}_t^1$. On remarque que le fait que la variable explicative soit la même pour tout sous-problème fait que nous n'aurons qu'une variable d'état y à adjoindre à l'état de programmation dynamique. Cela nous permet de diviser les temps de calculs par $d_{\mathbf{X}}$ par rapport à ce que cela aurait pu être si nous avions recouru à des variables explicatives différentes pour tout barrage.

Les équations de programmation dynamique sont :

$$V_t^1(x, y) = \frac{1}{d_W} \sum_{l=1}^{d_W} \left(\max_u \left\{ \begin{array}{l} L_t^1(u) + \varphi_t^{2(k)}(y) \times g_t^1(x, u, W_t^{1,l}) \\ +V_{t+1}^1(f_t^1(x, u, W_t^{1,l}), \tilde{f}_t^{1(k)}(y, W_t^{1,l})) \end{array} \right\} \right),$$

$$V_t^2(x, y) =$$

$$\frac{1}{d_W} \sum_{l=1}^{d_W} \left(\max_{u,z} \left\{ \begin{array}{l} L_t^2(u, z) + \varphi_t^{3(k)}(y) \times g_t^2(x, u, W_t^{2,l}, z) \\ -\varphi_t^{2(k)}(y) \times z + V_{t+1}^2(f_t^2(x, u, W_t^{2,l}, z), \tilde{f}_t^{1(k)}(y, W_t^{1,l})) \end{array} \right\} \right),$$

$$V_t^3(x, y) = \frac{1}{d_W} \sum_{l=1}^{d_W} \left(\max_{u,z} \left\{ \begin{array}{l} L_t^3(u, z) - \varphi_t^{3(k)}(y) \times z \\ +V_{t+1}^3(f_t^3(x, u, W_t^{3,l}, z), \tilde{f}_t^{1(k)}(y, W_t^{1,l})) \end{array} \right\} \right).$$

3. **on effectue une simulation** sur \mathcal{W} via les contrôles obtenus, le long des L trajectoires et en partant des remplissages initiaux (x_0^1, x_0^2, x_0^3) des barrages. On mémorise les trajectoires des écarts aux contraintes obtenus en les indexant par les valeurs prises par les variables explicatives. On estime par méthode de Monte Carlo les espérances conditionnelles des écarts sachant ces valeurs. Sachant que le nombre de trajectoires passant par telles ou telles valeurs de réalisation des variables explicatives peut différer de façon importante, on considère que les estimations faites (par méthode de Monte Carlo) seront consistantes si elles se basent sur des échantillons d'au moins 1000 valeurs. Si tel n'est pas le cas, alors on fait appel à une interpolation linéaire entre les valeurs consistantes des espérances liées aux valeurs de réalisation inférieures et supérieures des variables explicatives.
4. **on met à jour** : les espérances conditionnelles des multiplicateurs sachant les variables explicatives (représentées par les fonctions $\varphi_t^{i(k)}$) par méthode de quasi-Newton à mé-

moire limitée, le gradient aux contraintes couplantes étant donné par les espérances conditionnelles des écarts aux contraintes.

on pose $k = k + 1$ et **on boucle en** (3) tant que l'algorithme n'a pas convergé.

Nous étudions les résultats numériques obtenus dans la sous-section suivante.

7.3.3 Résultats numériques

7.3.3.1 Comportement des algorithmes DADP

Les figures 7.2, 7.3 et 7.4 représentent l'évolution des logarithmes base 10 des normes euclidiennes des gradients aux contraintes.

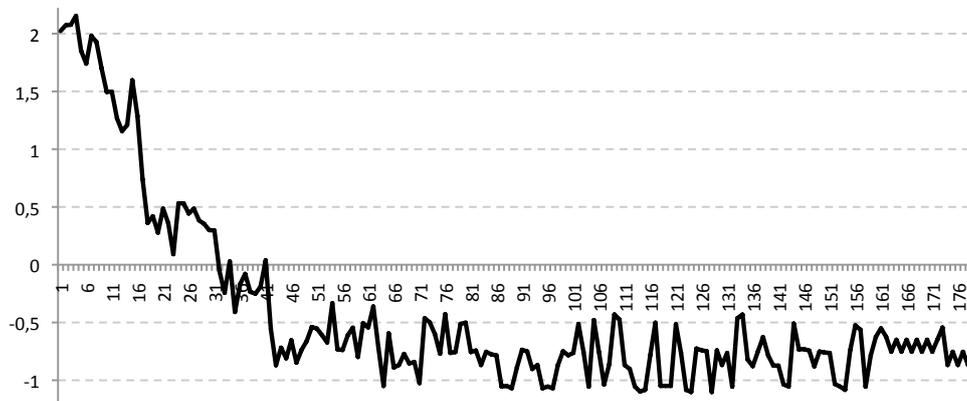


FIGURE 7.2 – Évolution du logarithme de la norme des écarts aux contraintes issues de l'exécution de l'algorithme méthode DADP avec variable d'information constante au cours des itérations.

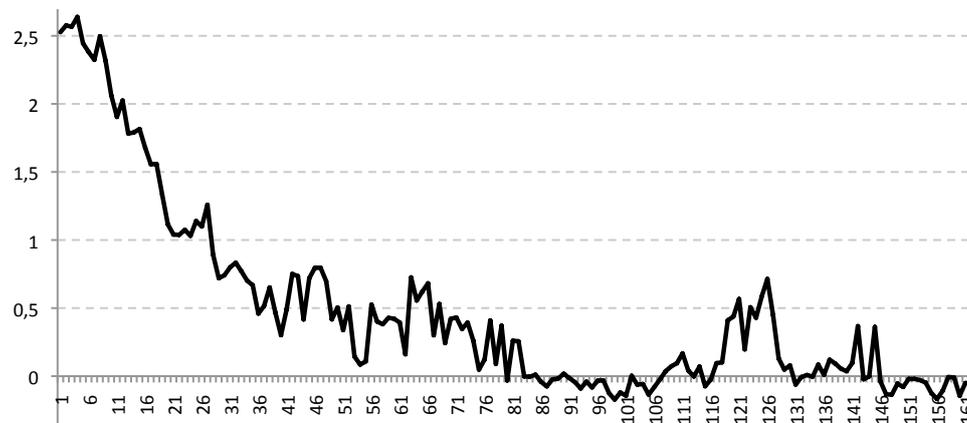


FIGURE 7.3 – Évolution du logarithme de la norme des écarts aux contraintes issues de l'exécution de l'algorithme méthode DADP avec variable d'information bruits au cours des itérations.

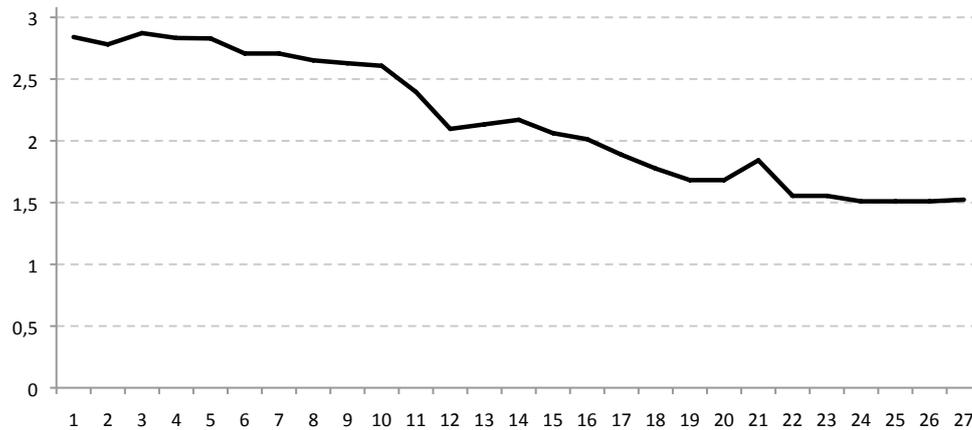


FIGURE 7.4 – Évolution du logarithme de la norme des écarts aux contraintes issues de l'exécution de l'algorithme méthode DADP avec variable d'information dynamique au cours des itérations.

Les deux premières indiquent que les algorithmes méthode DADP avec variable d'information non-dynamiques ont convergé numériquement³, ce que les figures 7.8 et 7.10 confirment. La figure 7.4 montre qu'en revanche l'algorithme à espérance conditionnelle sachant une dynamique s'est arrêté avant d'avoir convergé : alors que la norme du gradient avait été déjà bien réduite, la recherche linéaire de la méthode de quasi-Newton n'a plus abouti. Ce phénomène s'explique par le fait que la méthode de mise à jour des multiplicateurs est de type descente de gradient et requiert, à ce titre, des estimations fines des gradients et donc des écarts aux contraintes. Ces estimations étant bien plus grossières lorsque nous mettons en œuvre l'algorithme à variables dynamiques, les évaluations des gradients ne sont alors plus suffisamment précises lorsque les calculs s'affinent. Les figures représentant l'évolution des multiplicateurs indiquent toutefois qu'ils ont atteint des valeurs qui ont l'air d'être sur le point de se stabiliser.

7.3.3.2 Comparaison des temps d'exécution

La réduction des temps d'exécution, et donc de la complexité, de la résolution des problèmes de grande taille motive le recours à la méthode DADP. Il apparaît donc important de se faire une idée des gains en temps d'exécution apportés par cette méthode pour des cascade de N barrages. Pour ce faire, nous comparons, sur la figure 7.5, les temps d'exécution estimés des algorithmes que nous avons étudiés à celui de la résolution frontale par programmation dynamique. Ces estimations sont réalisées comme suit :

1. nous déterminons les complexités des algorithmes (nous utilisons les nombres d'itérations des méthodes DADP relevées pour $N = 3$ et nous supposons que ces nombres augmentent

3. Les oscillations que nous pouvons observer sont dues à la discrétisation des états et des contrôles.

- proportionnellement à N)
2. nous relevons le temps d'exécution t_{DP} de la programmation dynamique
 3. nous calons les courbes des nombres d'opérations élémentaires pouvant être exécutées sur une heure, une journée, un mois et une année de façon à ce que le nombre des opérations effectuée durant un temps t_{DP} coïncide avec la complexité de la programmation dynamique
 4. nous traçons les logarithmes des complexités des algorithmes et des nombres d'opérations élémentaires pouvant être exécutées sur une heure, une journée, un mois et une année.

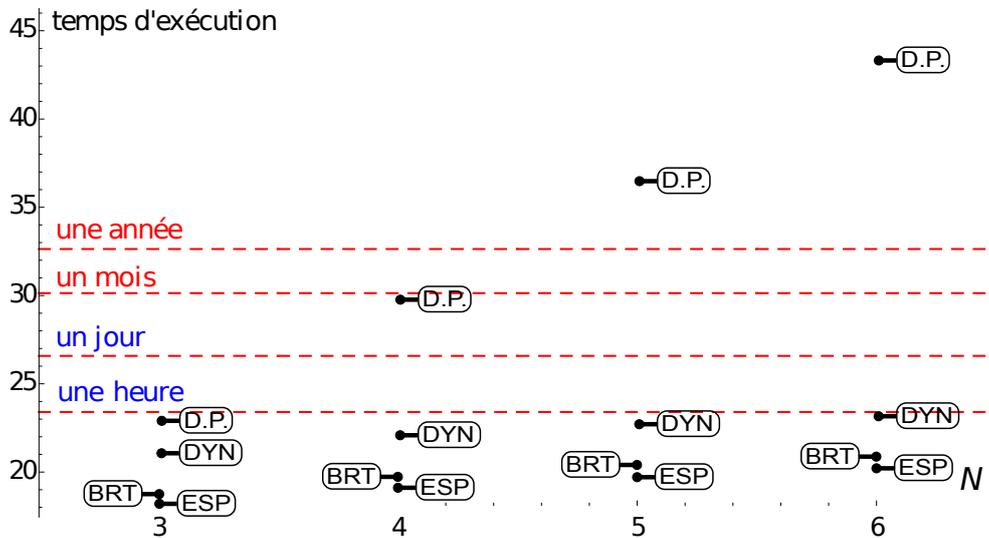


FIGURE 7.5 – Positionnement des temps d'exécution estimés des algorithmes de programmation dynamique (D.P.), de méthode DADP avec variable d'information constante (ESP), bruit amont (BRT) et dynamique du niveau de stock du barrage tout amont (DYN) pour une instance à N barrages.

La figure 7.5 montre que, si le nombre d'itérations nécessaires pour qu'elle converge n'augmente pas de façon exponentielle en le nombre de barrages, la méthode DADP répondra à son objectif premier : celui de proposer une résolution du problème en un temps acceptable. Reste maintenant à évaluer la qualité des solutions qu'elle propose, ce que nous faisons dans les sous-sections suivantes.

7.3.3.3 Comparaison des coûts

La figure 7.6 donne les distributions des gains (des coûts de production épargnés) obtenus en appliquant la stratégie optimale déterminée par programmation dynamique et les stratégies déterminées par les algorithmes DADP et *l'heuristique de retour à l'admissibilité* sur les 100 000 scénarios de mise à jour des multiplicateurs. Les moyennes obtenues sont :

- moyenne pour DP : $\mathbb{E}[\mathbf{G}^{\text{D.P.}}] = 1,366 \cdot 10^6$ euros,

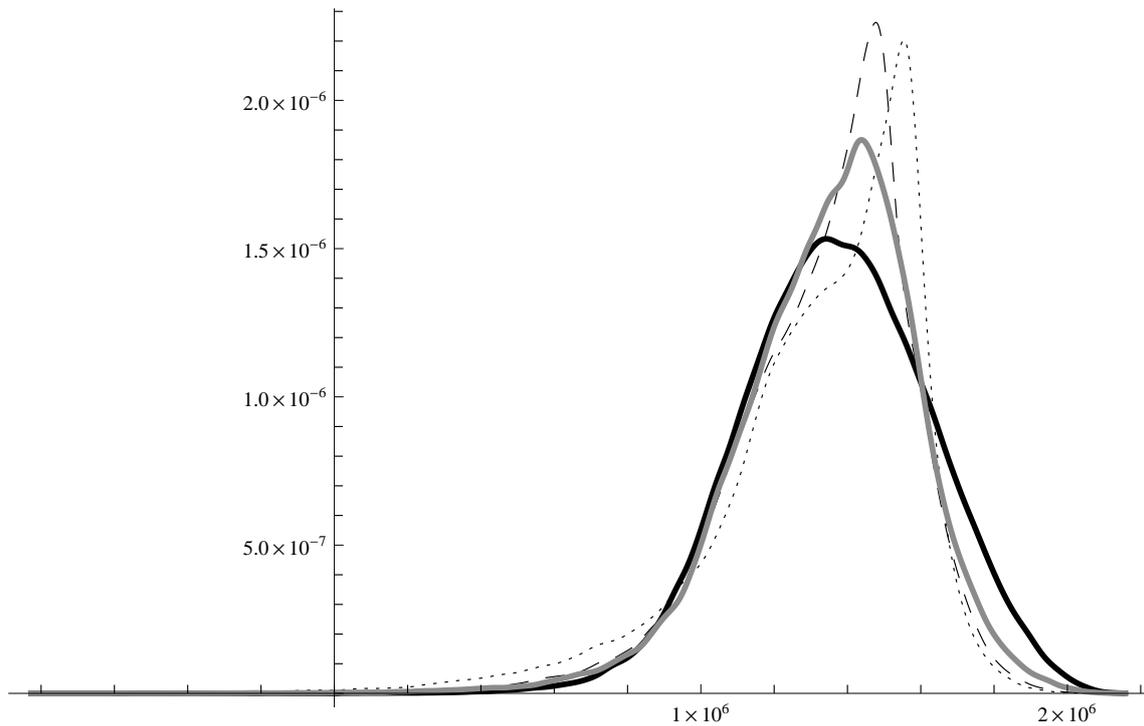


FIGURE 7.6 – Distributions des gains obtenus en appliquant les stratégies déterminées par les algorithmes de programmation dynamique (noir gras), méthode DADP avec variable d'information constante (pointillés), bruit amont (pointillés fins) et dynamique du niveau de stock du barrage tout amont (gras gris).

- moyenne pour méthode DADP avec variable d'information constante : $\mathbb{E}[\mathbf{G}^{\text{esp}}] = 1,335 \cdot 10^6$ euros (-2,3%),
- moyenne pour méthode DADP avec variable d'information bruits : $\mathbb{E}[\mathbf{G}^{\text{bruits}}] = 1,321 \cdot 10^6$ euros (-3,3%),
- moyenne pour méthode DADP avec variable d'information dynamique du niveau de stock du barrage tout amont : $\mathbb{E}[\mathbf{G}^{\text{dyn}}] = 1,344 \cdot 10^6$ euros (-1,6%).

Les gains obtenus en appliquant les stratégies déterminées par les mises en œuvre de l'algorithme DADP apparaissent proches du gain optimal, le plus proche y étant inférieur d'un peu plus de 1.5%.

La figure 7.7 représente la distribution des écarts de gains obtenus par la soustraction des gains liés à la méthode DADP avec variable d'information constante aux gains liés à la méthode méthode DADP avec variable d'information bruits (trait en pointillés) ou dynamique (trait continu). Nous observons alors, grâce à la courbe en pointillés, que 60% de l'échantillon des 100 000 gains obtenus par DADP en espérance sont supérieurs à ceux obtenus par méthode DADP avec variable d'information bruits et que, de plus, les écarts négatifs sont plus importants en valeur absolue que les écarts positifs. Cela indique que la solution obtenue par

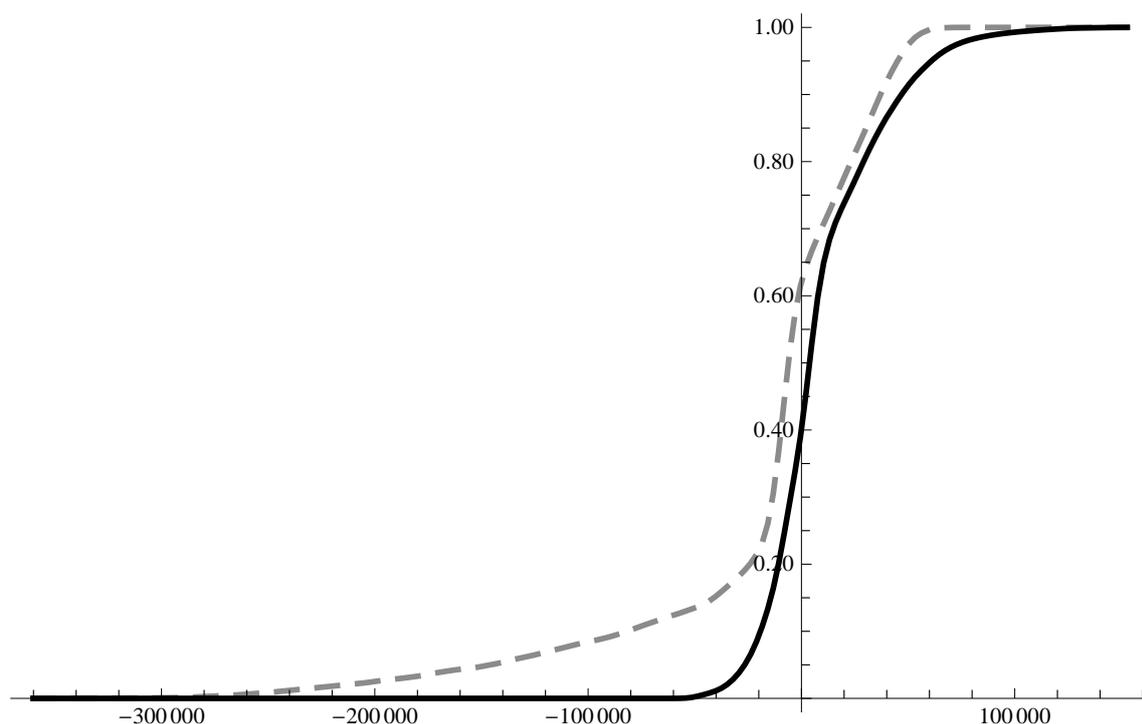


FIGURE 7.7 – Distribution des écarts de gains obtenus par la soustraction des gains liés à la méthode DADP avec variable d'information constante aux gains liés à la méthode DADP avec variable d'information bruits (trait en pointillés) ou dynamique (trait continu).

DADP ne s'améliore pas de façon monotone à mesure que l'on enrichit la variable explicative. La mise en œuvre d'une variable dynamique semble elle apporter de meilleurs résultats : les écarts positifs se produisent dans 60% des cas et atteignent des valeurs généralement plus importantes en valeur absolue que celles des écarts négatifs. Il peut donc se révéler intéressant (nous passons de -2,3% à -1,6% de l'optimum) de recourir à des variables dynamiques, bien que cela reste à rapporter à l'augmentation des temps d'exécution, raisonnable toutefois ici, et à la complexification de la mise en œuvre de la méthode DADP induite par le recours à ces variables.

7.4 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons décrit l'adaptation d'une méthode de type décomposition coordination par les prix au cadre stochastique : la méthode Dual Approximate Dynamic Programming (DADP). Nous avons ensuite appliqué cet algorithme au problème de gestion d'une cascade de trois barrages vu au chapitre précédent. Grâce au résultat exact obtenu numériquement par programmation dynamique dans le chapitre 6, nous avons pu effectuer une comparaison. Nous avons considéré plusieurs variations de l'algorithme selon la variable

de conditionnement choisie. Dans tous les cas, les gains espérés obtenus sont entre 1% et 3% en dessous de l'optimum avec des temps de calcul intéressants. De plus, le recours à une variable dynamique apparaît pertinent bien qu'il complexifie l'algorithme.

Bien qu'ayant bénéficié du fait de disposer des résultats optimaux lors de la sélection des variables explicatives (ce qui n'est pas envisageable lorsque le nombre de barrages dépasse quatre), ces résultats nous donnent une idée de ce que peut faire "au mieux" la méthode DADP et nous permettent d'envisager d'appliquer cette méthode à des problèmes de plus grande taille, en cascade ou autre, tels que suscités par les perspectives de développement des smart-grids.

7.5 Appendice A : construction d'un processus explicatif

Dans la perspective de mettre en œuvre la méthode DADP avec une variable explicative dynamique, nous allons construire un processus explicatif dynamique et non commandé \mathbf{Y} dont la dynamique approche celle du processus \mathbf{X}^1 lorsque celui-ci est commandé par la stratégie optimale du problème à trois barrage décrit à la section 6.3.1.

Commençons par nous fixer un ensemble \mathcal{W} de L trajectoires de bruits (de trajectoires d'apports aux barrages) et nous récupérons la stratégie optimale obtenue par programmation dynamique dans le chapitre 6. Le but est d'approcher par régression linéaire la dynamique optimale du niveau de remplissage du barrage tout amont afin de déterminer la dynamique non commandée \mathbf{Y}_t^1 par une fonction linéaire (φ_t^1) :

$$\varphi_t^1(y) = \alpha_t \left(y - \mathbb{E} [\mathbf{X}_t^1] \right) + \beta_t \left(\mathbf{W}_t^1 - \mathbb{E} [\mathbf{W}_t^1] \right) + \mathbb{E} [\mathbf{X}_{t+1}^1], \forall (t, y).$$

On récupère la stratégie optimale obtenue par programmation dynamique dans le chapitre 6. On effectue une simulation sur \mathcal{W} via les contrôles obtenus et en partant du remplissage initial (x_0) des barrages. On détermine alors à jour les coefficients par la résolution d'un problème de minimisation des résidus : on pose $(\tilde{X}_t^1)_l = (X_t^1)_l - \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L (X_t^1)_m$ et $(\tilde{W}_t^1)_l = (W_t^1)_l - \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L (W_t^1)_m$,

$$\min_{\alpha_t, \beta_t \in \mathbb{R}^2} \sum_{t,l} \left((\tilde{X}_{t+1}^1)_l - \alpha_t (\tilde{X}_t^1)_l - \beta_t (\tilde{W}_t^1)_l \right)^2,$$

ce qui revient à résoudre le problème des moindres carrés linéaire :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^2} \|b - A c\|_2^2 \quad \text{avec } b = \left((\tilde{X}_1^1)_1, \dots, (\tilde{X}_1^1)_L, (\tilde{X}_2^1)_1, \dots, (\tilde{X}_T^1)_L \right)^t, \quad c = \left(\alpha^i, \beta^i \right)^t$$

$$\text{et } A = \begin{pmatrix} (\tilde{X}_0^1)_1, \dots, (\tilde{X}_0^1)_L, (\tilde{X}_1^1)_1, \dots, (\tilde{X}_{T-1}^1)_L \\ (\tilde{W}_0^1)_1, \dots, (\tilde{W}_0^1)_L, (\tilde{W}_1^1)_1, \dots, (\tilde{W}_{T-1}^1)_L \end{pmatrix}^t$$

et donc à résoudre

$$A^t A c = A^t b,$$

ce qui donne, posant

$$x = \left((\tilde{X}_0^1)_1, \dots, (\tilde{X}_0^1)_L, (\tilde{X}_1^1)_1, \dots, (\tilde{X}_{T-1}^1)_L \right)^t$$

$$\text{et } w = \left((\tilde{W}_0^1)_1, \dots, (\tilde{W}_0^1)_L, (\tilde{W}_1^1)_1, \dots, (\tilde{W}_{T-1}^1)_L \right)^t;$$

$$\alpha = \frac{\langle x, b \rangle \langle w, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle b, w \rangle}{\langle x, x \rangle \langle w, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle x, w \rangle} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\langle b, w \rangle - \langle x, w \rangle \alpha}{\langle w, w \rangle}.$$

Ainsi, nous obtenons les dynamiques \tilde{f}_t^1 :

$$\mathbf{Y}_{t+1}^1 = \tilde{f}_t^1 \left(\mathbf{Y}_t^1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (X_t^1)_l, \mathbf{W}_t^1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (W_t^1)_l \right) + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (X_{t+1}^1)_l.$$

7.6 Appendice B : convergence numérique de l'algorithme

DADP - $\mathbb{E} [\lambda_t^i]$.

Convergence (vers un voisinage de 0) de l'espérance des écarts aux contraintes couplantes :

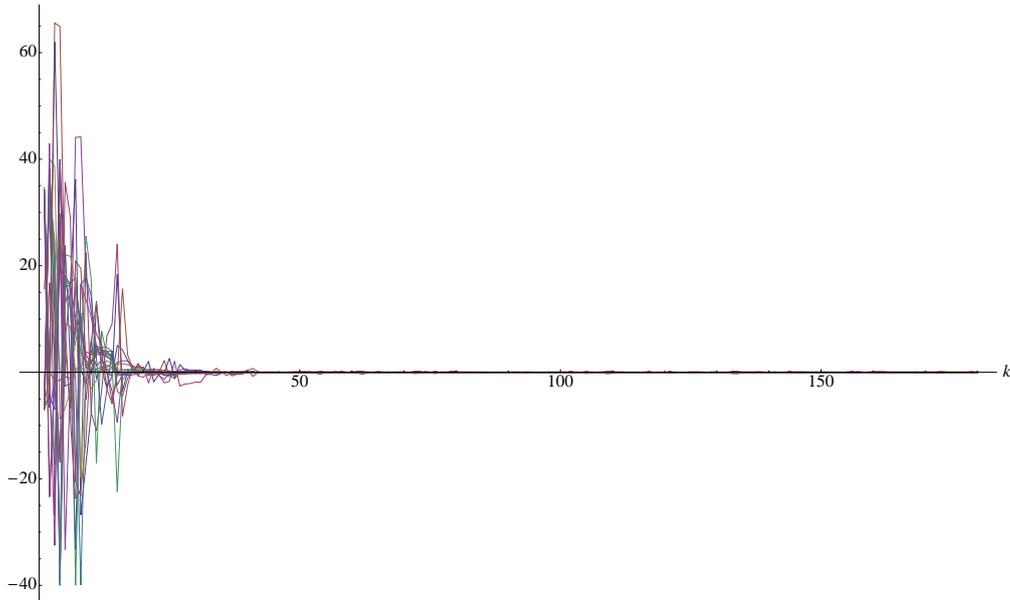


FIGURE 7.8 – Ecart aux contraintes couplant les barrages.

Convergence des multiplicateurs des contraintes couplant les barrages :

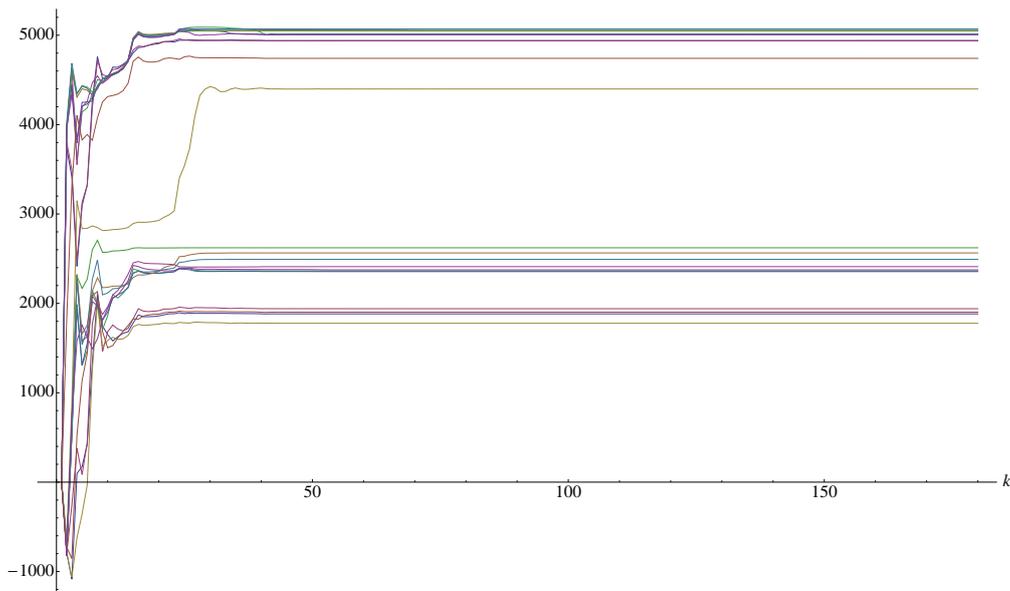


FIGURE 7.9 – Multiplicateurs des contraintes couplant les barrages.

DADP - $\mathbb{E} [\lambda_t^i | \mathbf{W}_t^{i-1}] :$

Convergence (vers un voisinage de 0) de l'espérance conditionnelle des écarts aux contraintes couplantes :

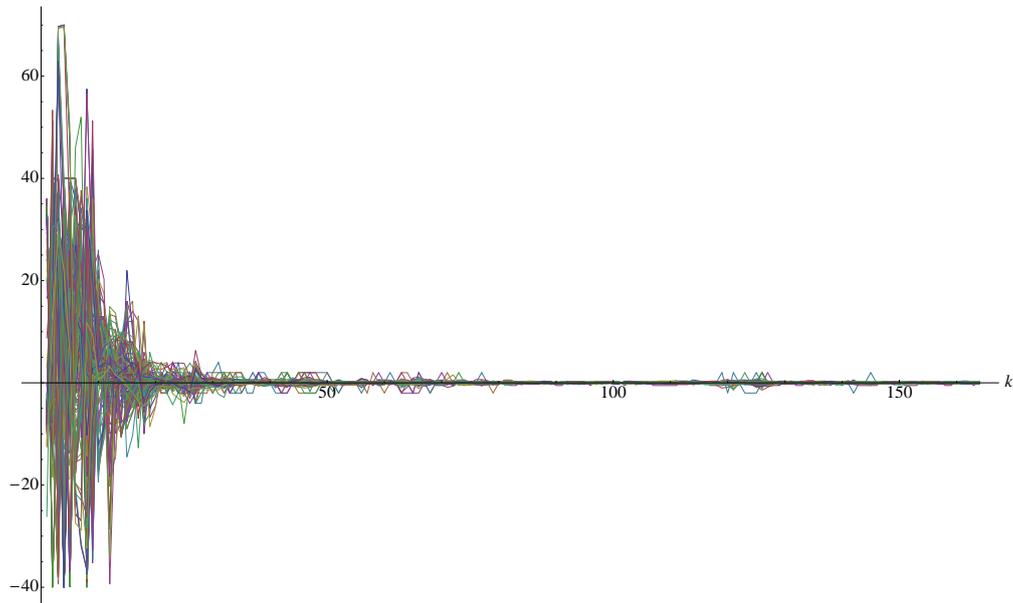


FIGURE 7.10 – Ecart aux contraintes couplant les barrages.

Convergence des multiplicateurs des contraintes couplant les barrages :

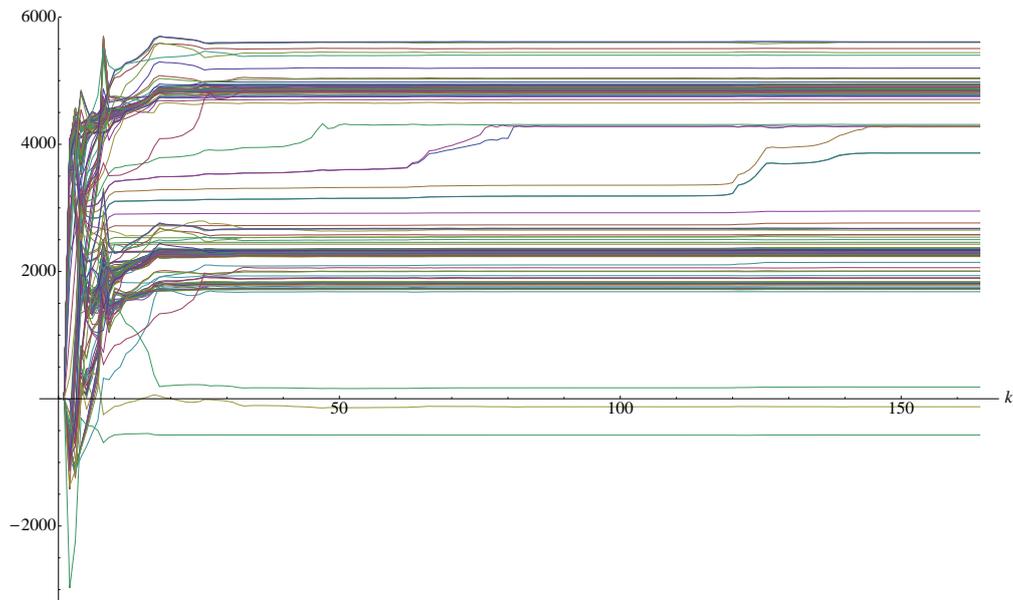


FIGURE 7.11 – Multiplicateurs des contraintes couplant les barrages.

DADP - $\mathbb{E}[\lambda_t^i | \mathbf{X}_t^1]$:

Convergence (vers un voisinage de 0) de l'espérance conditionnelle des écarts aux contraintes couplantes :

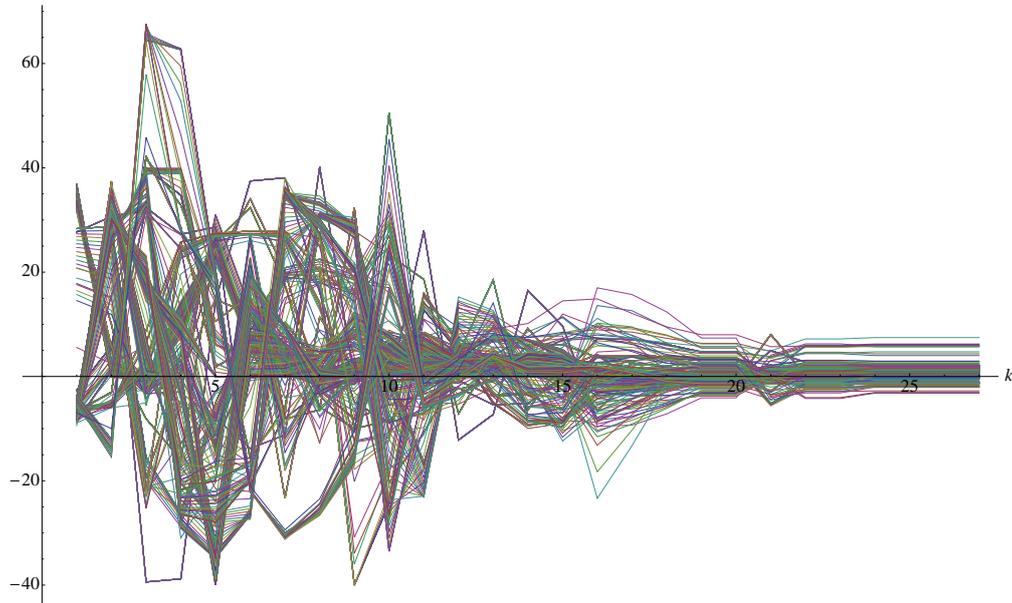


FIGURE 7.12 – Ecart aux contraintes couplant les barrages.

Convergence des multiplicateurs des contraintes couplant les barrages :

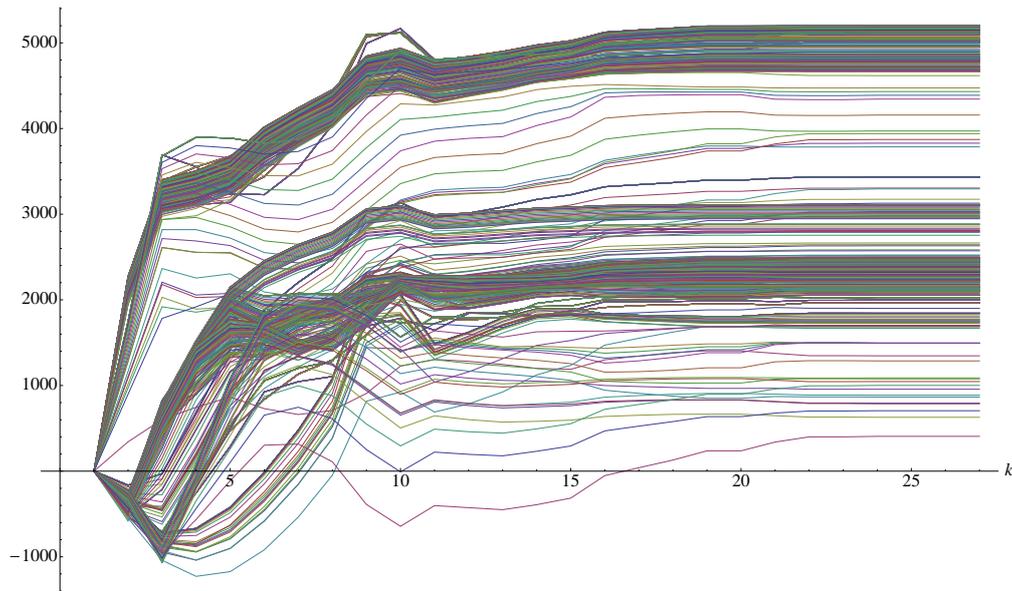


FIGURE 7.13 – Multiplicateurs des contraintes couplant les barrages.

Conclusion et perspectives

conclusion

Dans la première partie de la thèse, nous nous sommes penchés sur le problème de la gestion de la production hydroélectrique d'un barrage soumise au respect d'une contrainte de cote touristique. Cette contrainte, dans un premier temps énoncée uniquement sous la forme d'une contrainte en probabilité, a conduit à la formulation d'un problème de contrôle optimal en temps discret. Nous avons résolu ce problème et proposé une étude numérique. Sur la base des résultats obtenus, s'en est suivi une discussion avec les opérationnels. La caractérisation de l'enjeu touristique par une unique contrainte en probabilité s'est alors révélée insuffisante vis à vis du respect de l'enjeu touristique : l'aspect de trajectoires non touristiques ne répondait pas aux attentes opérationnelles. A suivi un travail de reformulation du problème et qui a abouti à la formulation de deux nouveaux problèmes d'optimisation. Les résultats obtenus, lorsque nous avons appliqué les algorithmes de résolution de ces problèmes à la même instance de barrage, se sont révélés satisfaisants en ce qui concerne les deux points suivants : le niveau de probabilité spécifié est respecté ; l'aspect des trajectoires non touristiques répond aux attentes des opérationnels. Nous avons ensuite étendu avec succès cette modélisation à plusieurs contraintes de cote (minimum et maximum). Ainsi, nous avons développé un modèle et un algorithme de résolution qui répondent aux attentes opérationnelles en terme de résultats et d'efficacité. Revenant sur la dispersion des gains optimaux observée pour le problème initialement formulé, nous avons proposé une approche complémentaire mettant l'accent, non pas sur la moyenne des gains mais sur leur probabilité de garantir un gain minimum, conjointement au respect de la cote touristique. Cette approche par viabilité stochastique a alors permis de symétriser les enjeux économiques et touristiques et de contrôler des faibles valeurs des variables aléatoires en jeu. Les résultats obtenus relativisent ceux que nous avons obtenus. En effet, garantir de gagner au moins l'espérance du gain optimal et de respecter la cote n'est possible conjointement qu'avec un niveau de probabilité bien moindre que celui du seul niveau de la contrainte de cote touristique.

Dans la deuxième partie, nous avons considéré le problème de la gestion de la production hydroélectrique d'une cascade de barrages. Ce problème, de grande taille, ne peut être résolu de façon directe dès lors que plus de quatre barrages sont mis en jeu. Nous avons alors présenté un principe d'approximation et de décomposition susceptible de contourner la malédiction de la dimension. Avant d'envisager une mise en œuvre sur des problèmes de grande taille, nous avons limité notre étude à un problème test de dimension trois pour lequel nous savons calculer la solution optimale par programmation dynamique. Pour terminer, nous avons appliqué différentes variantes de la mise en œuvre de la méthode appelée DADP au problème à trois barrages. Nous avons comparé les résultats obtenus et étudié la distance à l'optimum. Dans

tous les cas, les gains espérés obtenus sont entre 1% et 3% en dessous de l'optimum avec des temps de calcul intéressants. Ces résultats nous permettent d'envisager d'appliquer la méthode DADP à des problèmes de plus grande taille, en cascade ou autre, tels que suscités par les perspectives de développement des smart-grids.

De possibles développements des travaux présentés dans ce manuscrit sont les suivants :

- la résolution par DADP d'une cascade de barrages de taille réelle et la comparaison des résultats obtenus à ceux de la méthode SDDP (Stochastic Dual Dynamic Programming),
- la résolution d'une cascade à barrages soumis à des contraintes de cote, ce qui complexifiera entre autre la résolution des sous-problèmes et la coordination du respect des contraintes en probabilité de ces sous-problèmes
- l'application de l'algorithme Dual Approximate Dynamic Programming à des topologies plus complexes tels que les problèmes de smart-grids peuvent en présenter.

Description des programmes informatiques (partie 1)

Nous décrivons les programmes informatiques de mise en œuvre des algorithmes de la partie 1.

Listes des fichiers : `soc_dp.c`, `main.c`, `preprocessing.c/.h`, `problem.c/.h`,
`utils.c/.h`, `Makefile`

Description des fichiers.

`problem.h` : description des caractéristiques structurelles du problème,
`problem.c` : description des caractéristiques fonctionnelles du problème (critère, dynamique),
`utils.c/.h` : bibliothèque de programmes utilitaires,
`preprocessing.c/.h` : génération des bruits,
`soc_dp.c` : algorithmes de la Partie 1 de la thèse,
`main.c` : paramétrage du problème et appel des programmes `preprocessing` et `soc_dp`.

Génération des bruits : `preprocessing.c`.

Paramètres :

`SCALE_COEFF_Water_intakes ...` (réel) : ajustement des volumes des apports,
`CONVERSION_Water ...` (réel) : coefficient de conversion des volumes turbinés en électricité,
`SCALE_COEFF_Price ...` (réel) : ajustement des coûts marginaux,
`Inflows_universe ...` (entier) : nombre de scénarios d'apport à disposition,
`Inflows_timesteps ...` (entier) : nombre de pas de temps le long desquels sont décrits les scénarios d'apport,
`Prices_universe ...` (entier) : nombre de scénarios de coûts marginaux à disposition,
`Prices_timesteps ...` (entier) : nombre de pas de temps le long desquels sont décrits les scénarios de coûts marginaux,
`time_scale ...` (entier) : échelle de temps (en jours) des pas de temps,
`granularity ...` (entier) : ajustement de la granularité des apports,

Fonctions principales :

`make_noise` : construit une matrice de bruits.
- entrées : `Pb` (caractéristiques du problème),

- sorties : `noise` (matrice de bruits).
- `init` : programme d'appel de `make_noise` et archivage des bruits sous la forme de fichiers `.txt`.
- entrées : `Pb`,
- sorties : `generated_intakes_1.txt`, `generated_intakes_2.txt`,
`generated_intakes_3.txt`, `generated_prices.txt`.

Mise en œuvre des algorithmes de la Partie 1 de la thèse : `soc_dp.c`.

Paramètres :

- `SREF`, `SREF2`, `SREF3`, ... (réels) : niveaux des cotes,
- `UZAWA` (entier) : nombre d'itérations (critère d'arrêt de l'algorithme d'Uzawa),
- `LAMBDA`, `LAMBDA2`, `LAMBDA3`, ... (réels) : valeurs initiales des multiplicateurs,
- `RHO`, `RHO2`, `RHO3`, ... (réels) : valeurs des pas de gradient,
- `PREF`, `PREF2`, `PREF3`, ... (réels) : niveaux de probabilité de respect des cotes,
- `GAIN` (réel) : gain minimum (pour la viabilité),
- `VIAB` : étude de viabilité stochastique? (0 : non, 1 : oui),
- `CRIT` : étude prenant en compte le critère avec indicatrice? (0 : non, 1 : oui),
- `TCRIT` : étude à plusieurs cotes (critère avec indicatrice)? (0 : non, 1 : oui).

Fonctions principales :

`minimization` : étape de minimisation, à état `index_etat` et à pas de temps `t` donnés, de la programmation dynamique (détermine la valeur de la fonction de Bellman, les probabilités de respect et la stratégie).

- entrées : `V` (fonction de Bellman), `V_probabilite` (probabilités de respect des cotes),
`index_etat`, `t`, `Pb` (caractéristiques du problème), `ntotu` (dimension du contrôle, en nombre de points de discretisation), et `x`, `x_prime`, `u`, `w` (vecteurs alloués pour les calculs)
- sorties : `V`, `U` (stratégie), `V_probabilite`.

`Dp_algorithm` : résolution du problème `Pb` par la méthode d'Uzawa.

- entrées : `Pb`,
- sorties : `V`, `U`, `V_probabilite`.

`simul` : simulation de gains et de trajectoires en appliquant la stratégie optimale le long de scénarios de bruits donnés.

- entrées : `V`, `Pb`, `ntotx` (dimension de l'état), `ntotu`, scénarios (sous forme `.txt`)
- sorties : gains et trajectoires simulés (fichiers `.txt`).

Description des programmes informatiques (partie 2)

Nous décrivons les programmes informatiques de mise en œuvre des algorithmes de la partie 2. La structure des programmes dérive de celle des programmes de la partie 1. Nous retrouvons les mêmes fichiers et les mêmes dossiers, auxquels sont ajoutés le fichier `soc_dadp.c` et le dossier `liboptim`. Le fichier `soc_dadp.c` est la mise en œuvre de la méthode DADP. Cette mise en œuvre fait appel à la librairie `libopt` de Gilbert [2009] contenue dans le dossier `liboptim`.

Listes des fichiers : `soc_dp.c`, `soc_dadp.c`, `main.c`, `preprocessing.c/.h`, `problem.c/.h`, `utils.c/.h`, `Makefile`

Description des fichiers.

`problem.h` : description des caractéristiques structurelles du problème,
`problem.c` : description des caractéristiques fonctionnelles du problème (critère, dynamique),
`utils.c/.h` : bibliothèque de programmes utilitaires,
`preprocessing.c/.h` : génération des bruits,
`soc_dp.c` : algorithme de résolution par programmation dynamique de la cascade de trois barrages de la partie 2,
`soc_dadp.c` : algorithmes de résolution par la méthode DADP de la cascade de trois barrages de la partie 2,
`main.c` : paramétrage du problème et appel des programmes `preprocessing`, `soc_dp` et `soc_dadp`.

Mise en œuvre de l'algorithme de programmation dynamique de la Partie 2 de la thèse : `soc_dp.c`.

Paramètres : tous communiqués à `soc_dp.c` par `problem.c`, `problem.h` et `main.c`.

Fonctions principales :

`minimization` : étape de minimisation, à état `index_etat` et à pas de temps `t` donnés, de la programmation dynamique (détermine la valeur de la fonction de Bellman).

- entrées : V (fonction de Bellman), `index_etat`, t , Pb (caractéristiques du problème, `ntotu` (dimension du contrôle, en nombre de points de discretisation), et x , x_prime , u , w (vecteurs alloués pour les calculs)

- sorties : V , U (stratégie),

`Dp_algorithm` : résolution du problème Pb par la programmation dynamique de dimension trois.

- entrées : Pb ,

- sorties : V , U .

`simul` : simulation de gains et de trajectoires en appliquant la stratégie optimale le long de scénarios de bruits donnés.

- entrées : V , Pb , `ntotx` (dimension de l'état), `ntotu`, scénarios (sous forme `.txt`)

- sorties : gains et trajectoires simulés (fichiers `.txt`).

Mise en œuvre des algorithmes DADP de la Partie 2 de la thèse : `soc_dadp.c`.

Paramètres :

`ITERATIONS_number` (entier) : nombre d'itérations (critère d'arrêt de l'algorithme),

`INITIAL_DUAL` (réels) : valeurs initiales des multiplicateurs (peuvent être remplacées par les valeurs lues dans un fichier `.txt`),

`CONSISTANCY_LEVEL` (entier) : nombre de trajectoires devant passer par un point de réalisation donné pour que l'espérance conditionnelle sachant cette réalisation soit considérée comme consistante,

`MULTPLRS_Y` (entier) : spécification de la nature du processus explicatif (0 : constante, 1 : bruits, 2 : dynamique du barrage tout amont)

Fonctions principales :

`minimization` : étape de minimisation de la production d'un barrage i , à état `index_etat` et à pas de temps t donnés, de la programmation dynamique (détermine la valeur de la fonction de Bellman locale).

- entrées : V_i (fonction de Bellman locale), `index_etat`, t , Pb (caractéristiques du problème), `Algo` (caractéristiques de l'algorithme), `nu` (nombre de variables de contrôle), `ntotu` (nombres de points de discretisation des variables de contrôle), et x , x_prime , u , w , `results` (vecteurs alloués pour les calculs)

- sorties : V_i (complétion de la fonction de Bellman locale), U_i (stratégie),

`int_optim` : mise à jour des multiplicateurs des contraintes couplantes approximées par l'algorithme de quasi-Newton à mémoire limitée de la librairie `liboptim`.

- entrées : `dual` (fonction retournant la valeur du Lagrangien et les valeurs des écarts aux contraintes couplantes approximées), `nopt` (nombre de contraintes), `lambda` (multiplica-

teurs des contraintes couplantes approximées), **Data** (données d'appel des fonctions de la librairie **liboptim**),

- sorties : **lambda** (mise à jour des multiplicateurs des contraintes couplantes approximées),

dual : fonction retournant la valeur du Lagrangien et les valeurs des écarts aux contraintes couplantes approximées.

- entrées : **lambda** (multiplicateurs des contraintes couplantes approximées), **Data** (données d'appel des fonctions de la librairie **liboptim**),

- sorties : **f** (valeur du Lagrangien), **g** (valeurs des écarts aux contraintes couplantes approximées),

Dadp_algorithm_optim : algorithme DADP.

- entrées : **V** (fonction de Bellman), **Pb** (caractéristiques du problème), **Algo** (caractéristiques de l'algorithme),

- sorties : **V** (fonction de Bellman globale), **U** (stratégie),

simulation : simulation de gains et de trajectoires en appliquant la stratégie optimale le long de scénarios de bruits donnés.

- entrées : **Pb**, **ntotx** (dimension de l'état), **ntotu**, scénarios (sous forme **.txt**)

- sorties : gains et trajectoires simulés (fichiers **.txt**).

HAL paper *Multi-usage
hydropower dam management :
chance-constrained optimization
and stochastic viability*

Multi-usage hydropower dam management: chance-constrained optimization and stochastic viability

Jean-Christophe Alais

Électricité de France R&D, 1, avenue du Général de Gaulle, Clamart, 92141 FRANCE, jcalais@gmail.fr

Pierre Carpentier

UMA, ENSTA ParisTech, 828, Boulevard des Maréchaux, Palaiseau, 91762 FRANCE, pierre.carpentier@ensta-paristech.fr

Michel De Lara

Université Paris-Est, CERMICS (ENPC), 6-8 Avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, F-77455 Marne-la-Vallée, FRANCE, delara@cermics.enpc.fr

We consider the management of an hydroelectric dam subject to uncertain inflows and electricity prices and to a so-called “tourism constraint”: the water storage level must be high enough during the tourist season with high enough probability. We lay out two approaches. First, we formulate a chance-constrained stochastic optimal control problem: we maximize the expected gain while guaranteeing a minimum storage level with a minimal prescribed probability level. Dualizing the chance constraint by a multiplier, we propose an iterative algorithm alternating additive dynamic programming and update of the multiplier value “à la Uzawa”. Our numerical results reveal that the random gain is very dispersed around its expected value; in particular, low gain values have a relatively high probability to materialize. This is why, to put emphasis on these low values, we outline a second approach. We propose a so-called stochastic viability approach that focuses on jointly guaranteeing a minimum gain and a minimum storage level during the tourist season. We solve the corresponding problem by multiplicative dynamic programming. To conclude, we discuss and compare the two approaches.

Key words: stochastic optimal control, chance constraints, stochastic viability, dynamic programming, hydroelectric dam management, energy management.

Hydroelectricity is the main renewable energy in many countries. It emits no greenhouse gases and provides fast-usable energy, cheap and substitutable for the thermal one. On the other hand, dam management has to deal with uncertain water inflows and uncertain electricity prices, and multiple uses (agriculture, tourism, flood prevention). We consider the situation where the following tourist chance constraint is prescribed by the local authorities: *a given reference water storage level must be guaranteed during the tourist season with a minimum probability level*. Thus, we explore ways to mix the economic objective (maximizing a gain) and the tourist objective (ensuring the tourist satisfaction) under uncertainty. Introduced more than fifty years ago by A. Charnes and W.W. Cooper (Charnes and Cooper 1959), chance-constrained programming is one of these ways. Its application to dam management problems can be found in Prékopa (1995), Andrieu et al. (2010),

Ackooij et al. (2013) and the references therein. In this paper, we analyze two ways to handle such a chance constrained problem and to take risk into account in a dynamic setting, offering complementary views on the same issue. In Section 1, we present the dam hydroelectric dynamics and the economic objective. In Section 2, we aim to maximize the expectation of the economic gain while satisfying the tourist constraint. Thus, we model the problem as a so-called chance-constrained stochastic optimal control one (references for chance-constrained programming are (Prékopa 1995), (Prékopa 2003) and (Dentcheva 2009)). To solve it, we add a binary random variable to the storage level of the dam to form an extended dynamic state. After dualizing the expectation constraint, we can apply additive dynamic programming for every fixed value of the multiplier, and the multiplier is iteratively updated until convergence. Then, we provide real case based numerical results. We observe that the random gain is noticeably dispersed around its expected value; in particular, low gain values have a relatively high probability to materialize. We focus on these low gains in Section 3. We propose a so-called stochastic viability approach (see Doyen and De Lara (2010), De Lara and Doyen (2008)) that symmetrizes the economic and the tourist stakes. More precisely, we aim to maximizing the probability to jointly guarantee storage levels and gains. We propose another extended dynamic state making it possible to solve the problem by multiplicative dynamic programming. We provide numerical results on the same instance plus a graphical description of the trade-offs between economic and tourist objectives. To conclude, we discuss and compare the two approaches in Section 4.

1. Dam modeling

We present the dynamics of the dam, and the production model.

1.1. Dynamics of the dam

Let time t be an integer in $\{0, \dots, T\}$ with $T \in \mathbb{N}^*$ and let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space. We consider the following real valued random variables:

- \mathbf{X}_t , the water *storage level* in the dam reservoir at the beginning of period $[t, t + 1[$,
- \mathbf{U}_t , the dam *turbined outflow* during $[t, t + 1[$,
- \mathbf{A}_t and \mathbf{C}_t , the dam *inflow* and the *electricity price* during $[t, t + 1[$.

We set $\mathbf{W}_t = (\mathbf{A}_t, \mathbf{C}_t)$, call $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_t)_{t \in \{0, \dots, T-1\}}$ the noise process and assume that $\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_{T-1}$ are independent random variables. Note that the independence assumption is of paramount importance.

Let \bar{x} denotes the maximum water volume of the dam and x_0 its initial value. The dynamics of the storage level process $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ reads:

$$\mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) = \min\{\mathbf{X}_t + \mathbf{A}_t - \mathbf{U}_t, \bar{x}\} \text{ and } \mathbf{X}_0 \equiv x_0, \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}. \quad (1)$$

Equation (1) describes a typical dam reservoir storage dynamics which takes into account the possible overflow of the dam: if the forthcoming water volume $\mathbf{X}_t + \mathbf{A}_t - \mathbf{U}_t$ is greater than \bar{x} , then the dam water surplus $\mathbf{X}_t + \mathbf{A}_t - \mathbf{U}_t - \bar{x}$ spills out.

1.2. Constraints on the control

The control strategy $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_t)_{t \in \{0, \dots, T-1\}}$ is required to be non-anticipative,¹

$$\mathbf{U}_t \text{ is measurable w.r.t. } \sigma(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t), \forall t \in \{0, \dots, T-1\}, \quad (2)$$

where $\sigma(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t)$ stands for the sigma-algebra generated by $(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t)$. The measurability constraint (2) corresponds to the so-called Hazard-Decision framework: indeed, the control \mathbf{U}_t depends upon the past and the current realizations of the noise at time t .²

In addition, the control \mathbf{U}_t cannot be greater than both the available water volume $\mathbf{X}_t + \mathbf{A}_t$ and a maximum turbined capacity \bar{u} , that is

$$0 \leq \mathbf{U}_t \leq \min\{\mathbf{X}_t + \mathbf{A}_t, \bar{u}\}, \forall t \in \{0, \dots, T-1\}. \quad (3)$$

1.3. Dam production and valuation

The hydroelectric production gain \mathbf{G} is given by

$$\mathbf{G} = \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}_t \times \eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) - \epsilon \mathbf{U}_t^2 + v_f(\mathbf{X}_T), \quad (4)$$

where

- the electricity production $\eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t)$ at time t is sold at price \mathbf{C}_t ,
- $\epsilon \mathbf{U}_t^2$ represents the operating cost,
- a non zero final value of water $v_f(\mathbf{X}_T)$ prevents the dam reservoir from being empty at the end of the horizon.

2. Chance-constrained stochastic optimal management of a dam

The gain \mathbf{G} defined in Equation (4) represents the economic stakes of the dam hydropower management. However, a dam is a facility which may be used for several usages. More precisely, we consider here that the dam reservoir allows for water sports during the tourist season, provided that a minimal reference storage level x_{ref} is ensured.

¹The abbreviation w.r.t. stands for “with respect to”.

²Whereas it would correspond to the Decision-Hazard framework if \mathbf{U}_t were measurable w.r.t. $\sigma(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_{t-1})$.

2.1. Problem statement

Let the subset $\mathcal{T} \subset \{1, \dots, T-1\}$ denote the tourist season period. We address the problem of maximizing the expected gain $\mathbb{E}[\mathbf{G}]$ under a tourist chance constraint which consists in ensuring a minimal reference storage level x_{ref} during the tourist season \mathcal{T} at a probability level p_{ref} :

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \geq p_{\text{ref}}. \quad (5)$$

Then, we formulate the problem as one where we maximize the expected value $\mathbb{E}[\mathbf{G}]$ of the gain \mathbf{G} under three types of constraints:

- non-anticipativity of the strategy: measurability constraints (2),
- bounds on the control: almost sure constraints (3),
- tourist requirements: chance constraint (5).

Note that, because of the dynamics (1), the process \mathbf{X} is fully determined from the moment that the control and the noise processes \mathbf{U} and \mathbf{W} are known. Thanks to this, we are able to handle the measurability and the bounds constraints (2) and (3) by means of the feasible set

$$\mathfrak{U}(\mathbf{W}) = \left\{ \mathbf{U} \left| \begin{array}{l} \mathbf{U}_t \text{ is measurable w.r.t. } \sigma(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t) \text{ and such that} \\ 0 \leq \mathbf{U}_t \leq \min\{\mathbf{X}_t + \mathbf{A}_t, \bar{u}\}, \forall t \in \{0, \dots, T-1\}, \text{ where } \mathbf{X} \text{ is given by (1)} \end{array} \right. \right\}. \quad (6)$$

Summing up, we address the dam hydroelectric production management by the formulation ³

$$\max_{\mathbf{x}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}(\mathbf{W})} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}_t \times \eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) - \epsilon \mathbf{U}_t^2 + v_f(\mathbf{X}_T) \right] \quad (7a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t), \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \text{ and } \mathbf{X}_0 = x_0, \quad (7b)$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \geq p_{\text{ref}}. \quad (7c)$$

The optimization problem (7) is a so-called chance constrained stochastic optimal control problem. Chance constrained optimization problems were introduced by Charnes and Cooper (1959) with an individual chance constraint and by Miller and Wagner (1965) with a joint chance constraint. They arise naturally when modeling industrial issues that face uncertainties (see Prékopa (1995), Dupačová et al. (1991), Andrieu et al. (2010) and Ackooij et al. (2013) for example). However, such problems raise theoretical and numerical difficulties: indeed, it is mathematically difficult to guarantee the connectedness, the convexity or the closedness of the feasible set induced by the chance constraint,⁴ although these properties play key roles in optimization. Thus, besides being of a practical interest, the resolution of the optimization problem (7) also represents a theoretical challenge.

³ The abbreviation s.t. stands for “such that”.

⁴ Connectedness, convexity or closedness properties may be proven to hold under assumptions on the constraint structure and on the distribution laws of the random variables (see Prékopa (1995), Prékopa (2003), Dentcheva (2009), Henrion (2002) and the references therein).

2.2. Reformulation of the optimization problem

To prepare a resolution of the optimization problem (7) by stochastic dynamic programming, we introduce the binary valued random process $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$, driven by the dynamics:

$$\boldsymbol{\pi}_0 = 1 \text{ and } \boldsymbol{\pi}_{t+1} = f_t^\pi(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\pi}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{t+1} \geq x_{\text{ref}}\}} \times \boldsymbol{\pi}_t & \text{if } t \in \mathcal{T} \\ \boldsymbol{\pi}_t & \text{else} \end{cases}, \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}. \quad (8)$$

Then, we notice that the chance constraint (5) can be written as

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}\}}] = \mathbb{E}\left[\prod_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}\}}\right] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\pi}_T]. \quad (9)$$

Now, the optimization problem (7) reads

$$\max_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(\mathbf{W})} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}_t \times \eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) - \epsilon \mathbf{U}_t^2 + v_f(\mathbf{X}_T)\right] \quad (10a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t), \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \text{ and } \mathbf{X}_0 = x_0, \quad (10b)$$

$$\boldsymbol{\pi}_{t+1} = f_t^\pi(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\pi}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t), \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \text{ and } \boldsymbol{\pi}_0 = 1, \quad (10c)$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\pi}_T] \geq p_{\text{ref}}. \quad (10d)$$

2.3. Solving the chance constrained problem by an Uzawa algorithm

We dualize the chance constraint (10d) by a multiplier λ which is a non negative scalar. The optimization problem (10) is equivalent to

$$\max_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(\mathbf{W})} \min_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}_t \times \eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) - \epsilon \mathbf{U}_t^2 + v_f(\mathbf{X}_T) + \lambda \times (\boldsymbol{\pi}_T - p_{\text{ref}})\right] \quad (11)$$

s.t. (10b) and (10c).

An upper bound of the optimal value of the optimization problem (11) is obtained by solving

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \max_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(\mathbf{W})} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}_t \times \eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) - \epsilon \mathbf{U}_t^2 + v_f(\mathbf{X}_T) + \lambda \times (\boldsymbol{\pi}_T - p_{\text{ref}})\right]$$

s.t. (10b) and (10c).

For a fixed value λ^\sharp of the multiplier λ , we focus on the inner maximization problem

$$\max_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(\mathbf{W})} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}_t \times \eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) - \epsilon \mathbf{U}_t^2 + v_f(\mathbf{X}_T) + \lambda^\sharp \times (\boldsymbol{\pi}_T - p_{\text{ref}})\right] \quad (12)$$

s.t. (10b) and (10c).

If the strategy \mathbf{U}^\sharp that solves the inner optimization problem (12) is such that the chance constraint (10d) is binding, that is, if

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\pi}_T^\sharp] = p_{\text{ref}}, \quad (13)$$

then, the following Everett's theorem (see Everett (1963)) guarantees that the strategy \mathbf{U}^\sharp is a solution to the optimization problem (10).

THEOREM 1 (Everett 1963). Let \mathcal{U} be a non empty set, and let $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ and $\Theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ be two functions, where $m \in \mathbb{N}^*$. We consider the following optimization problem:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u) \text{ s.t. } \Theta(u) \leq \theta. \quad (14)$$

Let $\delta^\sharp \in \mathbb{R}_+^m$ be such that an optimal solution u^\sharp of the optimization problem

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u) + \langle \delta^\sharp, \Theta(u) \rangle$$

fulfills the equality

$$\Theta(u^\sharp) = \theta.$$

Then, u^\sharp is a solution of the optimization problem (14).

To find a multiplier value λ^* such that a solution \mathbf{U}^* to the inner optimization problem (12) satisfies the chance constraint (10d), we appeal to an iterative algorithm “à la Uzawa”. As illustrated in Figure 1, the algorithm alternates two steps for each iteration k :

- the inner maximization (12) that leads, for the given multiplier value $\lambda^{(k)}$, to the computation of the strategy $\mathbf{U}^{(k+1)}$,
- the update of the multiplier value $\lambda^{(k)}$ to $\lambda^{(k+1)}$ by a gradient step method,⁵ until $(\lambda^{(k)}, \mathbf{U}^{(k)})$ possibly converges to $(\lambda^*, \mathbf{U}^*)$.

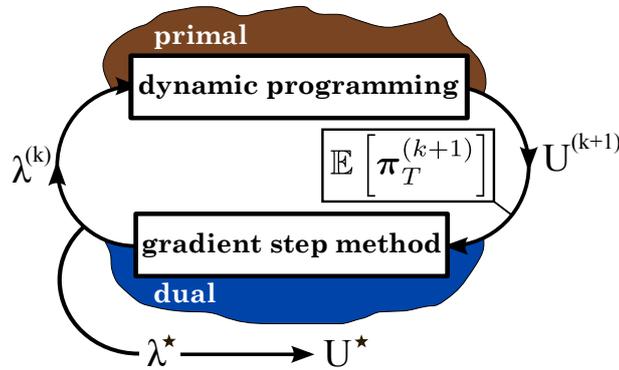


Figure 1 Algorithm “à la Uzawa”

To prove the convergence of the algorithm in Figure 1 — for instance, by applying general results on the convergence of the Uzawa method (see e.g. Ekeland and Temam (1999)) — raises delicate issues. Indeed, as mentioned in §2.1, there is hardly any functional property (connectedness, convexity, etc.) that can be proved to hold for the chance constraint (5).

In §2.3.1, we detail the inner maximization (12) by additive dynamic programming and, in §2.3.2, we detail the multiplier update by a gradient step method.

⁵The gradient step method for the dual minimization problem may be replaced by a more efficient method such as dichotomy, conjugate gradient or quasi-Newton.

2.3.1. Inner maximization by additive dynamic programming. The criterion of the optimization problem (12) is additive with respect to time and the random variables $(\mathbf{W}_t)_{t \in \{0, \dots, T-1\}}$ are independent. Therefore, we can solve (12), where $\lambda^\# = \lambda^{(k)}$ is a deterministic scalar, by additive dynamic programming with state $(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\pi}_t)$: for all $(x, \pi) \in \mathbb{R}_+ \times \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} V_T^{(k+1)}(x, \pi) &= \lambda^{(k)} \times (\pi - p_{\text{ref}}) + v_f(x), \\ \forall t \in \{0, \dots, T-1\}: \\ V_t^{(k+1)}(x, \pi) &= \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{A}_t)} \mathbf{C}_t \times \eta_t(x, u, \mathbf{A}_t) - \epsilon u^2 + V_{t+1}^{(k+1)}(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{A}_t), f_t^{\boldsymbol{\pi}}(x, \pi, u, \mathbf{A}_t)) \right], \\ \text{where } \mathfrak{U}_t(x, a) &= \{u \in \mathbb{R} \mid 0 \leq u \leq \min\{x + a, \bar{u}\}\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Observe that, although the dynamic state is two-dimensional, solving the equations (15) is only twice as complicated as solving one-dimensional dynamic programming equations thanks to the fact that $\boldsymbol{\pi}$ is a binary valued process.

2.3.2. Multiplier update by a gradient step method. Let $p^{(k+1)}$ stand for the probability to respect the tourist constraint (10d) when the optimal control obtained at §2.3.1 is used:

$$p^{(k+1)} = \mathbb{E} \left[\boldsymbol{\pi}_T^{(k+1)} \right].$$

In the algorithm “à la Uzawa” described in Figure 1, we need to compute $p^{(k+1)}$ to update the multiplier $\lambda^{(k)}$ to $\lambda^{(k+1)}$ by the gradient step

$$\lambda^{(k+1)} = \max \{ \lambda^{(k)} + \rho \times (p_{\text{ref}} - p^{(k+1)}), 0 \} \quad \text{where } \rho > 0. \tag{16}$$

Knowing the strategy $\mathbf{U}^{(k+1)}$ obtained by solving the inner maximization problem (15), we can compute $p^{(k+1)}$ by solving the following (non controlled) dynamic programming equation:

$$\begin{cases} P_T^{(k+1)}(x, \pi) = \pi, \\ P_t^{(k+1)}(x, \pi) = \mathbb{E} \left[P_{t+1}^{(k+1)} \left(f_t^{\mathbf{X}}(x, \mathbf{U}_t^{(k+1)}, \mathbf{A}_t), f_t^{\boldsymbol{\pi}}(x, \pi, \mathbf{U}_t^{(k+1)}, \mathbf{A}_t) \right) \right], \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}, \end{cases}$$

because the value $P_0^{(k+1)}(x_0, \pi_0)$ is equal to $\mathbb{E} \left[\boldsymbol{\pi}_T^{(k+1)} \right]$ by construction. Note that the computation of $p^{(k+1)}$ is exact and does not require approximations. Thus doing, we avoid the stability difficulties we could have encountered with approximations (Dupačová (1990), Henrion and Römisch (2004), Luedtke and Ahmed (2008), Henrion (2013)).

2.4. Numerical experiment

We now solve the optimization problem (7) for a specific numerical instance and we graphically display the optimal solution.

2.4.1. Numerical instance. We consider a dam management problem with the following features:

- maximum capacity of the dam reservoir: $\bar{x} = 80 \text{ hm}^3$,
- time horizon: $T = 11$ (11 time steps),
- tourist reference storage level: $x_{\text{ref}} = 50 \text{ hm}^3$,
- tourist season: $\mathcal{T} = \{7, 8\}$, i.e. July and August months,
- tourist reference probability level: $p_{\text{ref}} = 0.9$,
- maximum water volume which can be turbined: $\bar{u} = 40 \text{ hm}^3$,
- electricity production function (in (4)): $\eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) = 66 \times \mathbf{U}_t$,
- operating cost (in (4)): \mathbf{U}_t^2 , that is, $\epsilon = 1$,
- final value of water (in (4)): $v_f(\mathbf{X}_T) = 500 \times \max\{\mathbf{X}_T - x_0, 0\}^2$.

The units are given in hm^3 for the inflows and in € per hm^3 for the electricity prices. For each time t , the noise random variables \mathbf{C}_t and \mathbf{A}_t are independent and take equiprobable values in discrete sets \mathbb{C}_t and \mathbb{A}_t respectively. The sets \mathbb{C}_t and \mathbb{A}_t , given in Appendix, explicitly depend on time t to account for seasonality effects. For fixed t , the set \mathbb{C}_t is composed of 20 electricity prices values, and \mathbb{A}_t of 10 inflows values. Representative scenarios of the noise are displayed in Figure 2 for the inflows and in Figure 3 for the electricity prices.

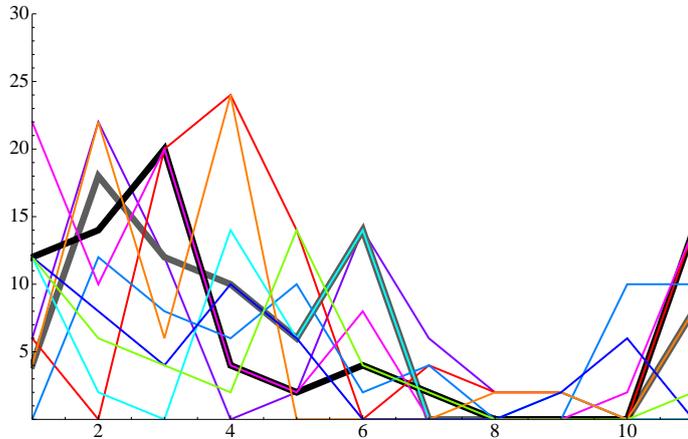


Figure 2 Ten inflows scenarios sample (in hm^3 , along the 11 time steps)

2.4.2. Implementation of the algorithm described in §2.3. According to §2.4.1, the dynamic state $(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\pi}_t)$ is such that $\boldsymbol{\pi}_t$ is a binary variable and that \mathbf{X}_t takes its values in $\mathbb{X} = [0, 80]$. Moreover, the control variable \mathbf{U}_t takes its values in $\mathbb{U} = [0, 40]$. To solve the dynamic programming equations (15), the continuous spaces \mathbb{X} and \mathbb{U} are discretized by regular grids with 2 hm^3 steps. Thus, \mathbb{X} is reduced to a set of 40 points and \mathbb{U} is reduced to a set of 20 points. Regarding the implementation of the gradient step method, we set $\rho = 3,000$ in (16). The stopping criterion of the Uzawa algorithm is a maximal number of iterations of 800.

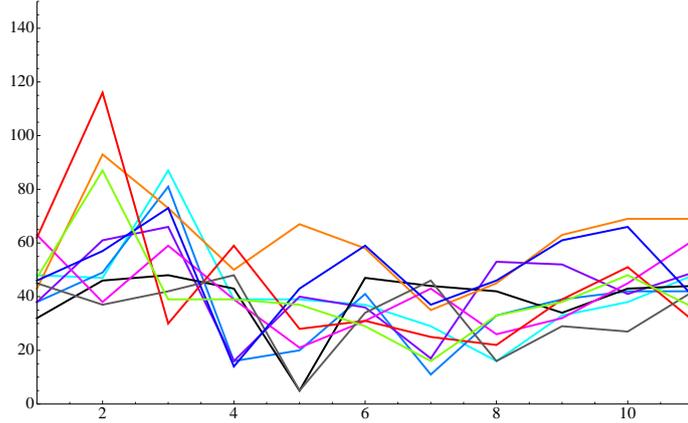


Figure 3 Ten prices scenarios sample (in € per hm^3 , along the 11 time steps)

2.4.3. Numerical results and dispersion of the gain. We see in Figure 4 that the Uzawa algorithm described in §2.3 converges to a solution $(\mathbf{U}^*, \lambda^*)$ which saturates the chance constraint. Thus, $(\mathbf{U}^*, \lambda^*)$ solves the optimization problem (10) by virtue of Theorem 1.

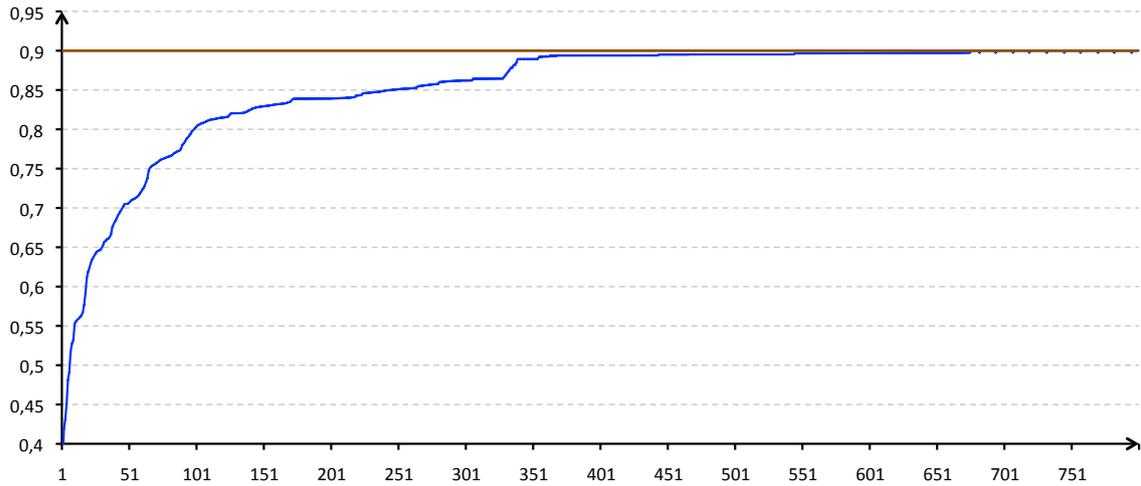


Figure 4 Evolution of the probability level $p^{(k)}$ at iteration k , for k from 1 to 800

We now focus on the optimal gain \mathbf{G}^* and on the optimal storage level process \mathbf{X}^* . Numerically, we obtain that $\mathbb{E}[\mathbf{G}^*] = 250,136 \text{ €}$. To draw realizations of \mathbf{X}^* (Figure 5) and to depict the empirical probability distribution of \mathbf{G}^* (Figure 6), we apply the optimal strategy \mathbf{U}^* to the dynamics (1) with a sample of 10,000 realizations of the noise process $(\mathbf{A}_t, \mathbf{C}_t)_{t \in \{0, \dots, T-1\}}$.

On Figure 5, we see that the tourist storage level x_{ref} is respected during the tourist season \mathcal{T} for 90% of the trajectories. On Figure 6, we observe that the deviation of the random variable \mathbf{G}^* from its expected value is substantial: the standard deviation is about 40% of $\mathbb{E}[\mathbf{G}^*]$, which might disappoint a dam manager who would expect a gain of the magnitude of its mean.

Up to now, we have focused our attention on a specific characteristic of the random gain, namely its expectation. In the next section, we highlight the left tail of its distribution.

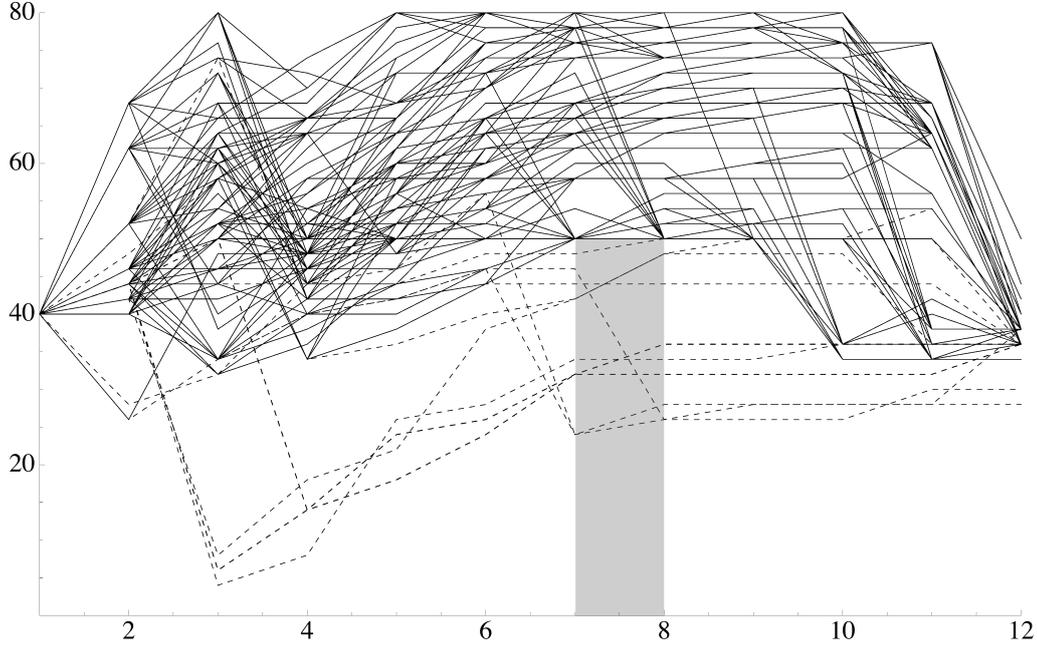


Figure 5 Realizations of the storage level process \mathbf{X}^* (100 realizations); the dotted lines stand for the realizations that do not respect the tourist level x_{ref} during the tourist season \mathcal{T}

3. Stochastic viability approach to the dam management

In this section, we put emphasis on the low gain realizations that we detected in §2.4.3. We propose a so-called stochastic viability approach (Doyen and De Lara (2010), De Lara and Doyen (2008)) that symmetrizes the economic and the tourist stakes by maximizing the probability to jointly guarantee storage levels and gains.

3.1. Description of the approach

In addition to the storage threshold x_{ref} , we introduce a threshold g_{ref} for guaranteed gain, and we now aim to maximize the following so-called viability probability:

$$\mathbb{P}[\mathbf{G} \geq g_{\text{ref}} \text{ and } \mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}]. \quad (17)$$

This way, we address the management of the dam by symmetrizing the economic and the tourist stakes whereas, in Section 2, the former laid in the criterion $\mathbb{E}[\mathbf{G}]$ to maximize and the latter as a chance constraint $\mathbb{P}[\mathbf{X}_{\tau} \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \geq p_{\text{ref}}$.

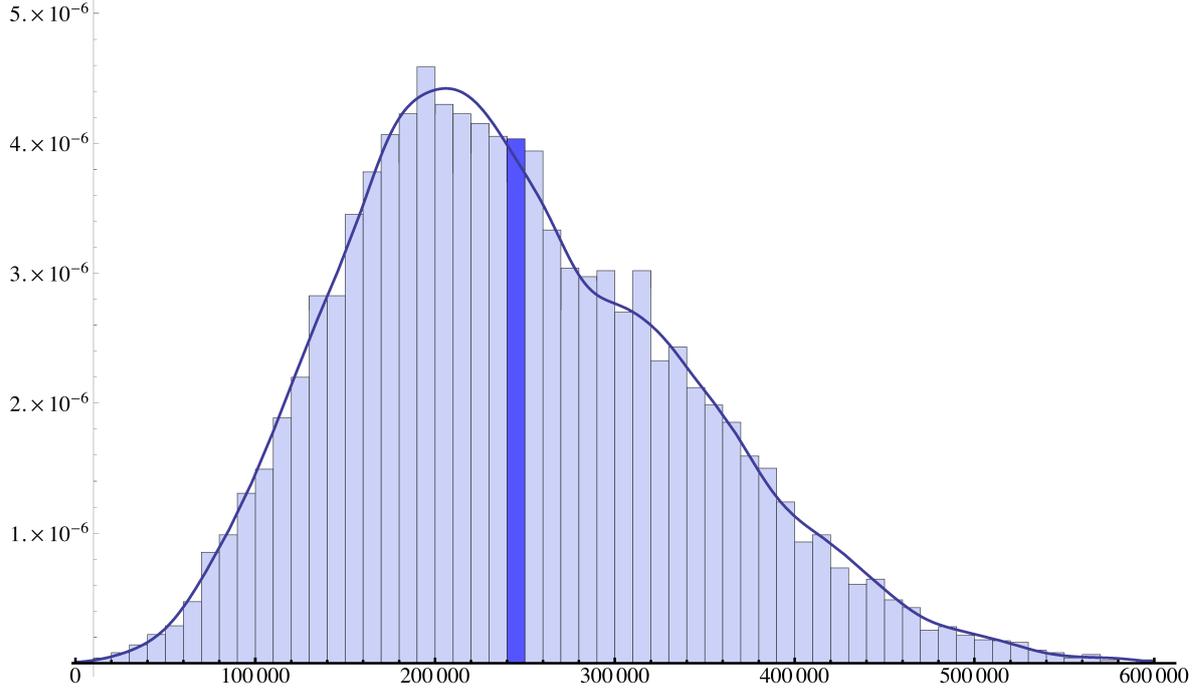


Figure 6 Empirical probability distribution of the gain (10,000 realizations), the mean gain value is in the darkest box

We now consider the optimization problem

$$\max_{\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(\mathbf{W})} \mathbb{P}[\mathbf{G} \geq g_{\text{ref}} \text{ and } \mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \quad (18a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t), \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \text{ and } \mathbf{X}_0 = x_0, \quad (18b)$$

where \mathcal{U} is the feasible set defined by (6).

In §3.2, we show how we can solve the optimization problem (18) by multiplicative stochastic dynamic programming.

3.2. Solving the stochastic viability problem by dynamic programming

To prepare a resolution of the optimization problem (18) by stochastic dynamic programming, we represent the dynamics of gain accumulation by introducing a new real valued process \mathbf{S} driven by

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_0 = 0, \\ \mathbf{S}_{t+1} = f_t^{\mathbf{S}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{S}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t) \\ \quad = \mathbf{C}_t \times \eta_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t) - \epsilon \mathbf{U}_t^2 + \mathbf{S}_t, \forall t \in \{0, \dots, T-2\}, \\ \mathbf{S}_T = f_{T-1}^{\mathbf{S}}(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{S}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}, \mathbf{W}_{T-1}) \\ \quad = \mathbf{C}_{T-1} \times \eta_{T-1}(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}, \mathbf{A}_{T-1}) - \epsilon \mathbf{U}_{T-1}^2 + v_f(\mathbf{X}_T) + \mathbf{S}_{T-1}. \end{array} \right. \quad (19)$$

We have that $\mathbf{S}_T = \mathbf{G}$, the total gain in (4).

Then, we write the viability probability (17) as an expectation over a product of indicator functions:

$$\mathbb{P}[\mathbf{G} \geq g_{\text{ref}} \text{ and } \mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] = \mathbb{E} \left[\prod_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}\}} \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{S}_T \geq g_{\text{ref}}\}} \right].$$

Finally, the optimization problem (18) reads:

$$\max_{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}(\mathbf{W})} \mathbb{E} \left[\prod_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}\}} \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{S}_T \geq g_{\text{ref}}\}} \right] \quad (20a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X}_{t+1} = f_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{A}_t), \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \text{ and } \mathbf{X}_0 = x_0, \quad (20b)$$

$$\mathbf{S}_{t+1} = f_t^{\mathbf{S}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{S}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_t), \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \text{ and } \mathbf{S}_0 = 0. \quad (20c)$$

Note that the criterion (20a) is multiplicative. Using the following Theorem 2, we can solve (20) by multiplicative dynamic programming with state $(\mathbf{X}_t, \mathbf{S}_t)$ (the proof is a variant of the one given in Doyen and De Lara (2010)).

THEOREM 2. *Consider the following backward induction equation:*

$$\begin{cases} V_T(x, s) = \mathbf{1}_{\{s \geq g_{\text{ref}}\}}, \\ \forall t \in \mathcal{T}: V_t(x, s) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{A}_t)} \mathbf{1}_{\{x \geq x_{\text{ref}}\}} \times V_{t+1}(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{A}_t), f_t^{\mathbf{S}}(x, s, u, \mathbf{W}_t)) \right], \\ \forall t \notin \mathcal{T} \cup \{T\}: V_t(x, s) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathfrak{U}_t(x, \mathbf{A}_t)} V_{t+1}(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{A}_t), f_t^{\mathbf{S}}(x, s, u, \mathbf{W}_t)) \right]. \end{cases} \quad (21)$$

Then, for all $(x_0, s_0) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$V_0(x_0, s_0) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{U} \in \mathfrak{U}(\mathbf{W})} \mathbb{P}[\mathbf{S}_T \geq g_{\text{ref}} \text{ and } \mathbf{X}_\tau \geq x_{\text{ref}}, \forall \tau \in \mathcal{T}] \text{ s.t. (20b) and (20c)}.$$

Thus, solving the dynamic programming equations (21) gives the solution of the stochastic viability problem (20), hence of (18) since $\mathbf{S}_T = \mathbf{G}$ by (19).

We now imbed the multiplicative dynamic programming algorithm (21) in a loop where the thresholds $(x_{\text{ref}}, g_{\text{ref}})$ vary.

Whereas the dynamic programming state belonged to $[0, \bar{x}] \times \{0, 1\}$ in §2.3.1, it belongs to $[0, \bar{x}] \times [0, +\infty[$ here. This is why the dynamic programming equation (21) may be much slower to compute than (15), and the loop over the thresholds $(x_{\text{ref}}, g_{\text{ref}})$ makes it even harder.

Now, we apply the stochastic viability approach to the numerical instance of §2.4.1. Then, we plot and interpret the function $\phi^*(x_{\text{ref}}, g_{\text{ref}})$ computed right above.

3.3. Numerical experiment

We consider the numerical instance described in §2.4.1. To implement the resolution of the dynamic programming equation (21), we use the discretization scheme given in §2.4.2 for the continuous sets $[0, 80]$ and $[0, 40]$ in which the storage state variable \mathbf{X}_t and the outflow control variable \mathbf{U}_t

for every gain value g_{ref} **do**
 for every storage level x_{ref} **do**
 solve:

$$\begin{cases} V_T(x, s) = \mathbf{1}_{\{s \geq g_{\text{ref}}\}}, \\ \forall t \in \mathcal{T}: V_t(x, s) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{U}_t(x, \mathbf{A}_t)} \mathbf{1}_{\{x \geq x_{\text{ref}}\}} \times V_{t+1}(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{A}_t), f_t^{\mathbf{S}}(x, s, u, \mathbf{W}_t)) \right], \\ \forall t \notin \mathcal{T} \cup T: V_t(x, s) = \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{U}_t(x, \mathbf{A}_t)} V_{t+1}(f_t^{\mathbf{X}}(x, u, \mathbf{A}_t), f_t^{\mathbf{S}}(x, s, u, \mathbf{W}_t)) \right]. \end{cases}$$

 save: $\phi^*(x_{\text{ref}}, g_{\text{ref}}) = V_0(x_0, s_0)$
 end for
 end for

take their values. For the second state variable \mathbf{S}_t , that lives in a continuous set \mathbb{S} by (19), we fix $\mathbb{S} = [0, 7.5 \times 10^5]$ and we discretize \mathbb{S} as a set of 2,000 points. As mentioned in §3.2, the use of such a state variable substantially increases the algorithm running time.⁶

We let the tourism guaranteed storage x_{ref} vary from 5 to 75 hm^3 , and the guaranteed gain g_{ref} from 0 to 500,000 €. Figure 7 displays the isovalues of the maximal viability probability (18a), as function of the guaranteed gain g_{ref} in € and guaranteed storage x_{ref} in hm^3 .

In Section 2, we maximized the expected gain subject to the tourist 0.9-level chance constraint (of having at least 50 hm^3 in the tourist season), and obtained an optimal expected gain of 250,136 €. In Figure 7, we see that jointly guaranteeing such a gain value and the same tourist constraint leads to no more than a 45% probability level. If we keep the guaranteed storage x_{ref} to 50 hm^3 and want a viability probability (17) of at least 0.9 (as was prescribed in §2), we cannot guarantee a gain higher than 170,000 €.

By symmetrizing the economic and the tourist stakes with the stochastic viability approach, we offer a complementary view on the management of the dam hydroelectric production by focusing on joint tails of economic and touristic indicators. As a practical application to tackle multiple uses, we suggest that the decision-making process could start by drawing the viability probability isovalues, and then let stakeholders discuss the thresholds values to set.

Now, we focus our attention on the solutions \mathbf{X}^{**} , \mathbf{S}^{**} and \mathbf{G}^{**} of the maximal viability problem (18) for the thresholds $x_{\text{ref}} = 50$ and $g_{\text{ref}} = 250,136$. These two values respectively correspond to the tourist threshold prescribed in §2.4.1 and to the optimal value of the expected total gain $\mathbb{E}[\mathbf{G}^*]$ as computed in §2.4.3. As we mentioned previously, the maximum probability to jointly respect these thresholds only equals 0.45 (see the coordinates of the dot in Figure 7).

⁶ We could consider that the set in which \mathbf{S}_t takes its values might vary with respect to t . This would certainly reduce the algorithm running time, but it would not reduce it by orders of magnitude.

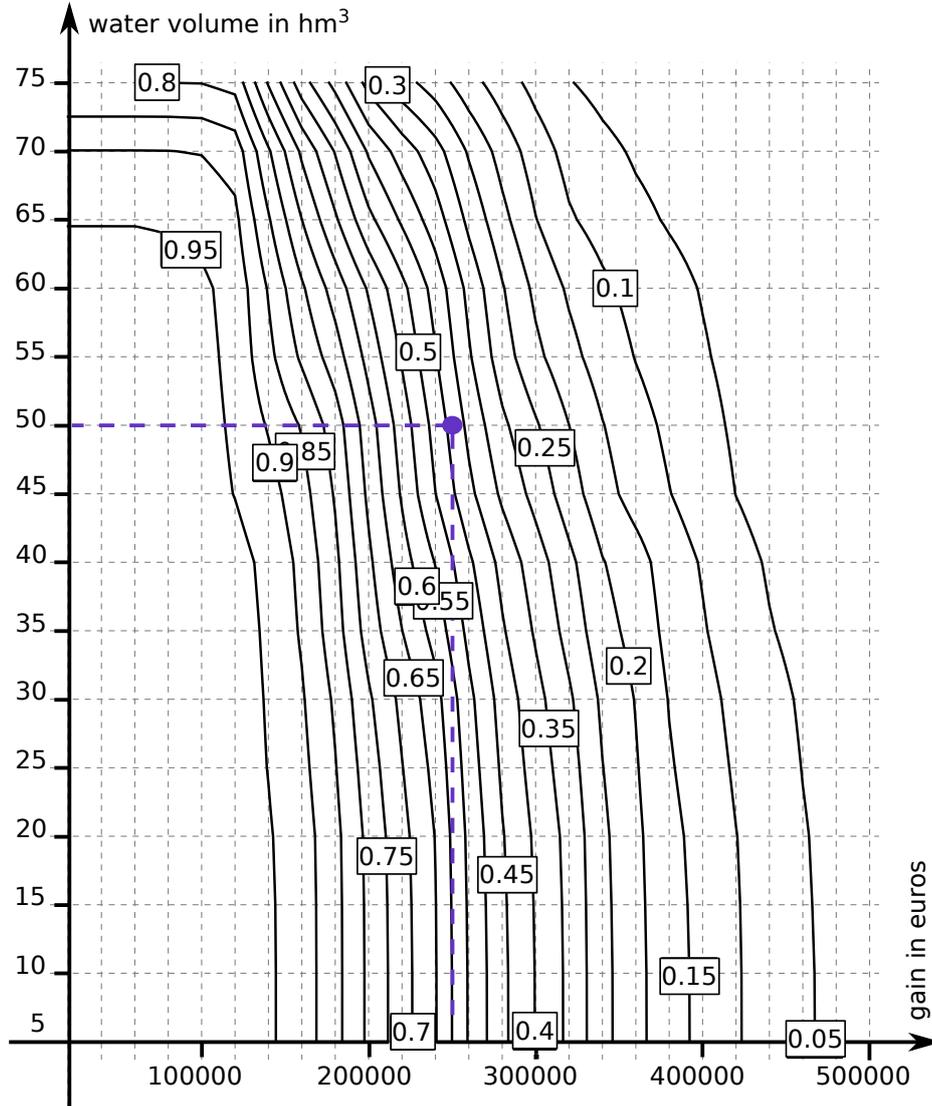


Figure 7 Isovalues of the maximal viability probability (18a), as function of the guaranteed gain g_{ref} and guaranteed storage x_{ref}

As we did in §2.4.3, to draw realizations of the water storage \mathbf{X}^{**} (Figure 9) and of the cumulated gain \mathbf{S}^{**} (Figure 8), and to depict the empirical probability distribution of the total gain \mathbf{G}^{**} (Figure 10), we apply the control strategy \mathbf{U}^{**} to the dynamics (1) using the same sample of 10,000 realizations of the noise process $(\mathbf{A}_t, \mathbf{C}_t)_{t \in \{0, \dots, T-1\}}$ as the one used in §2.4.3.

The grey rectangle to the far right side of Figure 8 is hit by the trajectories that do not achieve the guaranteed gain threshold. The grey rectangle in the middle of Figure 9 is hit by the trajectories that do not achieve the guaranteed tourist storage threshold. We see that more trajectories hit the rectangle in Figure 9 than the one in Figure 8. This means that, for the 100 representative realizations drawn, the gain threshold is more critical than the tourist threshold to maximize the viability probability. This observation is confirmed by the shape of the isovalues of the maximal

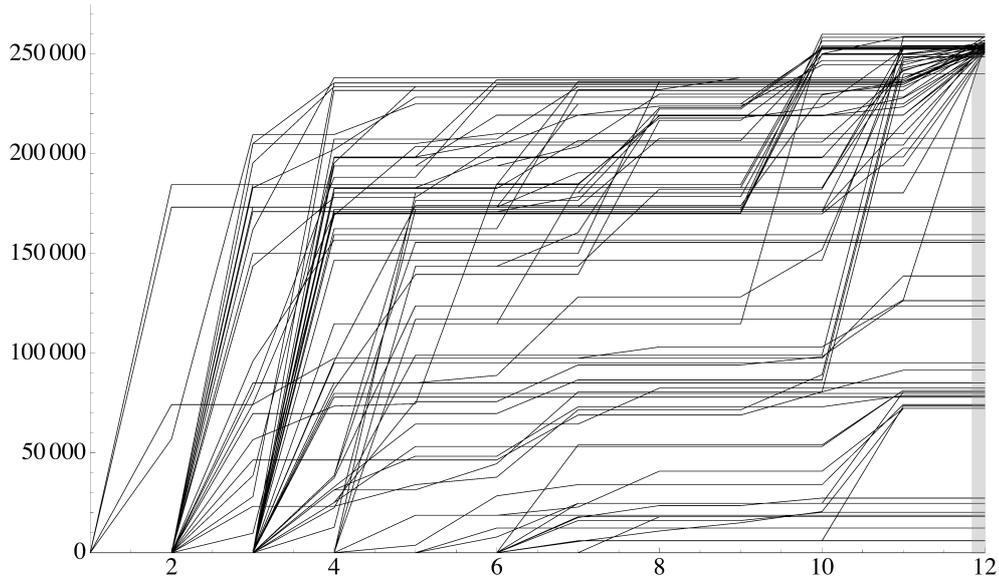


Figure 8 Cumulated gain up to time t , S_t , in M€, for t from 1 to 12 (100 representative realizations)

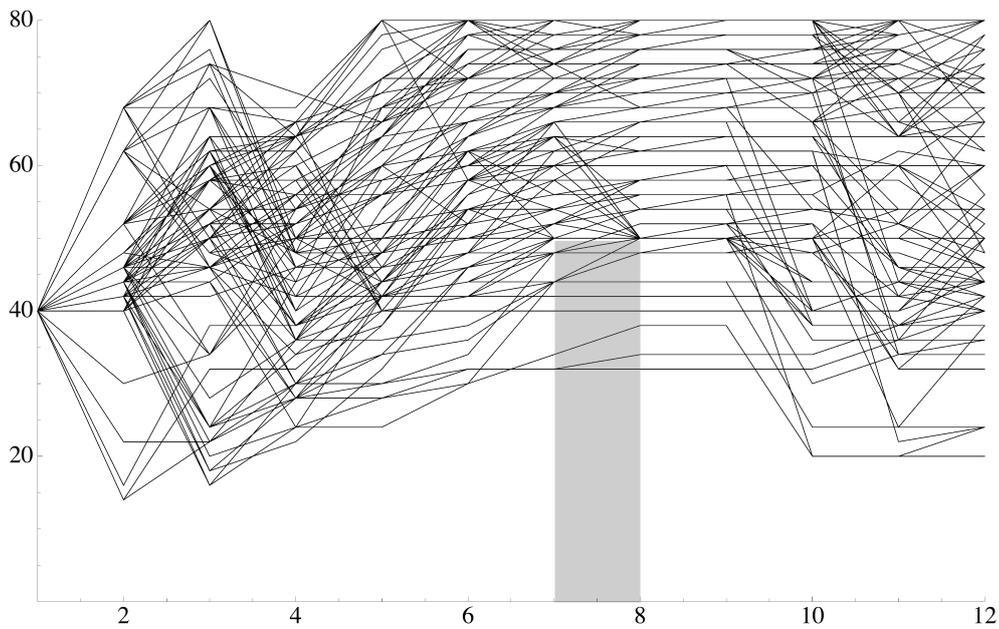


Figure 9 Storage level process X^{**} in hm^3 (100 representative realizations)

viability probability in Figure 7. Indeed, isovalues curves change much more when the guaranteed gain g_{ref} changes than when the guaranteed storage x_{ref} does.

To end with the numerical experiments, we depict in Figure 10 the empirical probability distribution of the gain $\mathbf{S}_T^{**} = \mathbf{G}^{**}$ and compare it to that of \mathbf{G}^* obtained in §2.4.3. Surprisingly not, they differ substantially. Indeed, whereas the distribution of \mathbf{G}^* is balanced around its mean, that of \mathbf{G}^{**} displays a peak of probability at the g_{ref} value and almost no probability mass beyond.

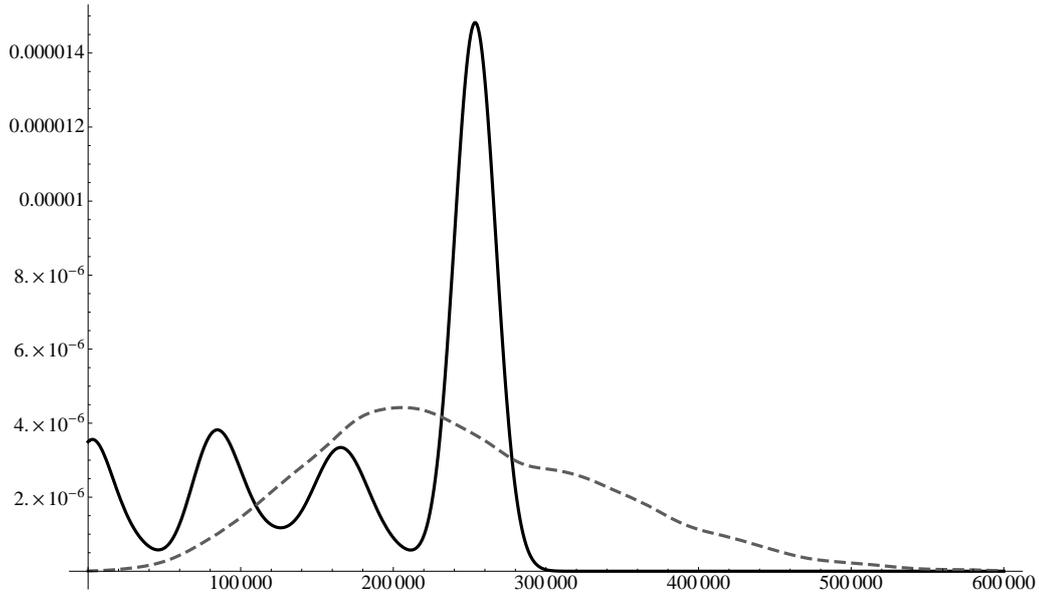


Figure 10 Empirical probability distribution of the gain (10,000 realizations), the one we obtained in §2.4.3 is grey and dotted

4. Conclusion

When moving from deterministic to stochastic control, modelers traditionally take the expected value of the original criterion (economists call this approach “risk-neutral”). They tackle constraints in various senses, such as robust, in probability one, or with a given probability level. In a first part, we chose to handle the dam management issue with the latter way. We considered a chance constrained stochastic optimal control problem, and we obtained satisfactory results with an algorithm that converged to an optimal solution. However, our numerical simulations revealed that the optimal random gain displayed a substantial dispersion. This is why, in a second part, we proposed a stochastic viability approach that symmetrizes the economic and the tourist stakes, and jointly guarantees minimal thresholds. We computed the isovalues of the maximal probability to jointly guarantee these thresholds. With this second approach, we obtained a more complete picture of how to deal with the management of multi-purpose facilities under risk, as dam reservoirs often are. Thus, we illustrated, on a case-based dam management problem, that risk in a dynamic setting can be formalized in various ways. More precisely, we shed light on a multi-purpose dam management issue from two angles, stochastic optimal control under chance constraint and stochastic viability, that offered complementary insights.

Appendix. Description of the noise sets

Electricity prices values sets $\mathbb{C}_0, \dots, \mathbb{C}_{T-1}$:	Inflows values sets $\mathbb{A}_0, \dots, \mathbb{A}_{T-1}$:
48 47 87 39 39 37 29 16 33 38 48 36	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
31 38 49 81 16 20 41 11 33 39 42 42	2 2 4 2 2 0 0 0 0 0 0 0
34 88 42 36 11 31 131 19 28 35 22 32	4 4 4 4 2 2 0 0 0 0 0 2
41 38 61 66 16 40 36 17 53 52 41 49	4 6 6 6 2 2 0 0 0 0 0 4
32 46 48 43 5 47 44 42 34 43 44 66	6 8 8 8 4 4 0 0 0 0 2 6
36 43 93 73 50 67 58 35 45 63 69 69	6 10 8 10 6 4 2 0 0 0 2 8
63 38 59 39 21 31 43 26 32 45 61 38	8 12 10 10 10 6 2 0 0 2 4 10
39 62 116 30 59 28 31 25 22 39 51 31	12 14 12 14 12 8 4 0 0 4 8 12
45 37 42 48 5 34 46 16 29 27 42 21	22 18 14 18 14 8 4 2 2 6 10 12
36 46 57 73 14 43 59 37 46 61 66 40	28 22 20 24 16 14 6 2 2 10 14 18
47 87 39 39 37 29 16 33 38 48 36 32	
38 49 81 16 20 41 11 33 39 42 42 76	
88 42 36 11 31 131 19 28 35 22 32 26	
38 61 66 16 40 36 17 53 52 41 49 21	
46 48 43 5 47 44 42 34 43 44 66 88	
43 93 73 50 67 58 35 45 63 69 69 39	
38 59 39 21 31 43 26 32 45 61 38 54	
62 116 30 59 28 31 25 22 39 51 31 35	
37 42 48 5 34 46 16 29 27 42 21 5	
46 57 73 14 43 59 37 46 61 66 40 77	

The i -th column of the above matrix of electricity prices (resp. inflows values) corresponds to the possible values of prices (resp. inflows) at time $t = i - 1$. As mentioned in §2.4.1, there are 20 equally probable values of prices and 10 equally probable values of inflows at each time t .

References

- Ackooij, W. van, R. Zorgati, R. Henrion, A. Möller. 2013. Joint chance-constrained programming for hydro reservoir management. *to appear in Optimization and Engineering* .
- Andrieu, L., R. Henrion, W. Römis. 2010. A model for dynamic chance constraints in hydro power reservoir management. *European Journal of Operations Research* **207** 579–589.
- Charnes, A., W.W. Cooper. 1959. Chance-constrained programming. *Management Science* **6** 73–79.
- De Lara, M., L. Doyen. 2008. *Sustainable Management of Natural Resources: Mathematical Models and Methods*. Springer-Verlag, Environmental Science and Engineering.
- Dentcheva, D. 2009. Optimization models with probabilistic constraints. *in Lecture Notes on Stochastic Programming Modeling and Theory* 87–153.
- Doyen, L., M. De Lara. 2010. Stochastic viability and dynamic programming. *Systems & Control Letters* **59**(10) 629–634.
- Dupačová, J. 1990. Stability and sensitivity analysis for stochastic programming. *Annals of Operations Research* **27**(1) 115–142.
- Dupačová, J., A. Gaivoronski, Z. Kos, T. Szantai. 1991. Stochastic programming in water management: a case study and a comparison of solution techniques. *European Journal of Operations Research* **52** 28–44.

- Ekeland, I., R. Temam. 1999. *Convex analysis and variational problems*. Studies in mathematics and its applications, North-Holland Pub. Co. New York.
- Everett, H. 1963. Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research* **11** 399–417.
- Henrion, R. 2002. On the connectedness of probabilistic constraint sets. *Journal of Optimization Theory and Applications* **112**(3) 657–663.
- Henrion, R. 2013. A critical note on empirical (sample average, Monte Carlo) approximation of solutions to chance constrained programs. Dietmar Hömberg, Fredi Tröltzsch, eds., *System Modeling and Optimization, IFIP Advances in Information and Communication Technology*, vol. 391. Springer, 25–37.
- Henrion, R., W. Römisch. 2004. Hölder and Lipschitz stability of solution sets in programs with probabilistic constraints. *Mathematical Programming* **100**(3) 589–611.
- Luedtke, J., S. Ahmed. 2008. A sample approximation approach for optimization with probabilistic constraints. *SIAM Journal on Optimization* **19**(2) 674–699.
- Miller, L. B., H. Wagner. 1965. Chance-constrained programming with joint constraints. *Operations Research* **13** 930–945.
- Prékopa, A. 1995. *Stochastic Programming*. Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publisher.
- Prékopa, A. 2003. Probabilistic programming. A. Ruszczyński, A. Shapiro, eds., *Stochastic Programming, Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 10. Elsevier, 267–351.

Bibliographie

- W. van Ackooij, R. Henrion, A. Möller, et R. Zorgati. On joint probabilistic constraints with gaussian coefficient matrix. *Operations Research Letters*, 39(2) :99–102, 2011. (Cité en page 12.)
- W. van Ackooij, R. Zorgati, R. Henrion, et A. Möller. Joint chance-constrained programming for hydro reservoir management. *to appear in Optimization and Engineering*, 2013. (Cité en page 11.)
- L. Andrieu. *Optimisation sous contrainte en probabilité*. PhD thesis, 2004. (Cité en page 12.)
- L. Andrieu, R. Henrion, et W. Römisch. A model for dynamic chance constraints in hydro power reservoir management. *European Journal of Operations Research*, 207 :579–589, 2010. (Cité en page 11.)
- T. Arnold, R. Henrion, A. Möller, et S. Vigerske. A mixed-integer stochastic nonlinear optimization problem with joint probabilistic constraints. *WIAS preprint 1785*, 2013. (Cité en page 11.)
- K. Barty, P. Carpentier, G. Cohen, et P. Girardeau. Price decomposition in large-scale stochastic optimal control. *arXiv, math.OC 1012.2092*, 2010a. (Cité en page 65.)
- K. Barty, P. Carpentier, et P. Girardeau. Decomposition of large-scale stochastic optimal control problems. *RAIRO Operations Research*, 44 :167–183, 7 2010b. (Cité en page 65.)
- E.M.L. Beale. A derivative of conjugate gradients. *Numerical Methods for Nonlinear Optimization, London Academic Press*, pages 39–43, 1972. (Cité en page 88.)
- R.E. Bellman et S.E. Dreyfus. *Applied Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1962. (Cité en page 69.)
- A. Charnes et W.W. Cooper. Chance-constrained programming. *Management Science*, 6 : 73–79, 1959. (Cité en page 11.)
- G. Cohen. *Optimisation des grands systèmes*. <https://www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/documents/ParisIcours-A4-NB.pdf>, 2004. (Cité en page 64.)
- M. De Lara et L. Doyen. *Sustainable Management of Natural Resources : Mathematical Models and Methods*. Springer-Verlag, Environmental Science and Engineering, 2008. (Cité en page 53.)

- D. Dentcheva. Optimization models with probabilistic constraints. *in Lecture Notes on Stochastic Programming Modeling and Theory*, pages 87–153, 2009. (Cité en page 12.)
- A.L. Diniz, P.P.I. Esteves, et C.A. Sagastizabal. A mathematical model for the efficiency curves of hydroelectric units. *Power Engineering Society General Meeting, IEEE*, 2007. (Cité en page 10.)
- L. Doyen et M. De Lara. Stochastic viability and dynamic programming. *Systems & Control Letters*, 59(10) :629–634, 2010. (Cité en pages 53 et 54.)
- J. Dupačová. Stability and sensitivity analysis for stochastic programming. *Annals of Operations Research*, 27(1) :115–142, 1990. (Cité en page 12.)
- J. Dupačová, A. Gaivoronski, Z. Kos, et T. Szantai. Stochastic programming in water management : a case study and a comparison of solution techniques. *European Journal of Operations Research*, 52 :28–44, 1991. (Cité en page 11.)
- I. Ekeland et R. Temam. *Convex analysis and variational problems*. Studies in mathematics and its applications. North-Holland Pub. Co. New York, 1999. Translation of *Analyse convexe et problèmes variationnels*. (Cité en pages 14, 82 et 87.)
- H. Everett. Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research*, 11 :399–417, 1963. (Cité en page 15.)
- A. Genz et F. Bretz. *Computation of Multivariate Normal and t Probabilities*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2009. (Cité en page 12.)
- J.-C. Gilbert. Organization of the modulopt collection of optimization problems in the libopt environment. Technical report, INRIA, 2009. (Cité en pages 88 et 107.)
- P. Girardeau. *Résolution de grands problèmes en optimisation stochastique dynamique et synthèse de lois de commande*. PhD thesis, 2010. (Cité en page 66.)
- R. Henrion. On the connectedness of probabilistic constraint sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 112(3) :657–663, 2002. (Cité en page 12.)
- R. Henrion. Introduction to chance-constrained programming. *Tutorial for the Stochastic Programming Community Home Page*, 2004. (Cité en page 12.)
- R. Henrion. A critical note on empirical (sample average, Monte Carlo) approximation of solutions to chance constrained programs. In Dietmar Hömberg et Fredi Tröltzsch, editors, *System Modeling and Optimization*, volume 391 of *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, pages 25–37. 2013. (Cité en page 12.)

- R. Henrion et A. Möller. A gradient formula for linear chance constraints under gaussian distribution. *Mathematics of Operations Research*, 37(3) :475–488, 2012. (Cité en page 12.)
- R. Henrion et W. Römisch. Hölder and Lipschitz stability of solution sets in programs with probabilistic constraints. *Mathematical Programming*, 100(3) :589–611, 2004. (Cité en page 12.)
- A. Kibzun et S. Uryasev. Differentiability of probability function. *Stochastic Analysis and Applications*, 16(6) :1101–1128, 1998. (Cité en page 12.)
- J. Luedtke et S. Ahmed. A sample approximation approach for optimization with probabilistic constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 19(2) :674–699, 2008. (Cité en page 12.)
- L. B. Miller et H. Wagner. Chance-constrained programming with joint constraints. *Operations Research*, 13 :930–945, 1965. (Cité en page 11.)
- M.J.D. Powell. Restart procedures of the conjugate gradient method. *Mathematical Programming*, 2 :241–254, 1977. (Cité en page 88.)
- A. Prékopa. *Stochastic Programming*. Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publisher, 1995. (Cité en page 12.)
- A. Prékopa. Probabilistic programming. In A. Ruszczyński et A. Shapiro, editors, *Stochastic Programming*, volume 10 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 267–351. Elsevier, 2003. (Cité en page 12.)
- C. Strugarek. *Approches variationnelles et autres contributions en optimisation stochastique*. PhD thesis, 2006. (Cité en page 65.)