HAL
open science

Combinatoire algébrique liée aux ordres sur les arbres

Grégory Chatel

To cite this version:

Grégory Chatel. Combinatoire algébrique liée aux ordres sur les arbres. Informatique et langage [cs.CL]. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1136 . tel-01286087

HAL Id: tel-01286087

https://pastel.hal.science/tel-01286087

Submitted on 10 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat

Combinatoire algébrique liée aux ordres sur les arbres

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université Paris-Est

Spécialité Informatique

École Doctorale de Mathématiques et des Sciences et Techniques de l'Information et de la Communication

Présentée et soutenue publiquement par

Grégory Châtel

le 8 décembre 2015

Devant le jury composé de

Adrien Boussicault	Examinateur
Sylvie Corteel	Examinatrice
Florent Hivert	Examinateur
Christophe Hohlweg	Rapporteur
Cyril Nicaud	Examinateur
Jean-Christophe Novelli	Directeur de thèse
Nathan Reading	Rapporteur
Jean-Yves Thibon	Examinateur

Laboratoire d'informatique Gaspard-Monge
UMR 8049 LIGM
5, bd Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

Remerciements

Durant mes trois années de thèse, j'ai eu la chance d'interagir avec de nombreuses personnes toutes plus intéressantes les unes que les autres. Je ne saurais trouver de mots assez forts pour décrire à quel point les échanges que j'ai pus avoir durant ce laps de temps ont été enrichissants. Je considère cette période comme étant celle durant laquelle j'ai été le plus épanoui, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. J'ai commencé ce doctorat il y a trois ans avec une grande soif de savoir qui a été étanchée au contact des personnes que j'ai côtoyées sans pourtant diminuer.

À ce titre, je remercie Jean-Christophe Novelli, mon directeur de thèse, pour m'avoir donné la chance de m'engager dans cette aventure, pour les nombreuses informations qu'il m'a transmises ainsi que pour la patience dont il a pu faire preuve durant les explications souvent vaporeuses des concepts qui me traversaient l'esprit lors de nos discussions. Je remercie aussi les membres de l'équipe de combinatoire dont le contact a été plus qu'enrichissant : Jean-Yves Thibon pour avoir partagé son savoir colossal ; Philippe Biane pour les questions profondes et éclairées qu'il a posées lors de mes exposés ; Matthieu Josuat-Vergès pour sa grande culture combinatoire ; Samuele Giraudo pour avoir partagé ses vastes connaissances des structures arborescentes ; Nicolas Borie pour sa bonne humeur légendaire et les perspectives algébriques qu'il a su me donner sur de multiples problèmes classiques ; Rémi Maurice pour m'avoir forcé à formuler mes idées clairement lorsque je faisais mes premiers pas dans le monde de la combinatoire algébrique ; Vincent Vong pour ses grandes connaissances algébriques ainsi que pour les nombreux voyages que nous avons pu vivre ensemble ; Viviane Pons pour m'avoir pris sous son aile durant les nombreuses heures que nous avons passées à travailler ensemble lorsque je débutais ma thèse ; Olivier Bouillot pour ses connaissances en analyse et les merveilleux airs de violon ; Zakaria Chemli pour sa connaissance de la combinatoire des tableaux ; Arthur Nunge pour sa connaissance des armes de jet à roulettes mobiles ; Vincent Pilaud pour tout ce que j'ai pu apprendre à son contact, la combinatoire, la géométrie ou encore la rigueur de rédaction scientifique.

Je remercie aussi Christophe Hohlweg et Nathan Reading d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit ainsi qu'Adrien Boussicault, Sylvie Corteel, Florent Hivert, Cyril Nicaud et Jean-Yves Thibon d'être les examinateurs de ma thèse.

En dehors de l'équipe de combinatoire, je tiens à remercier des personnes qui ont eu, à un moment ou à un autre, une influence certaine sur ma décision de faire de la recherche : Marc Zipstein pour ce qu'il a pu m'enseigner en algorithmique ainsi que dans d'autres thématiques ; Yvan Le Borgne pour son excellent cours de combinatoire qui m'a donné envie d'approfondir cette thématique ; Nicolas Bedon qui, lors de ma troisième année de licence et ma première année de master, m'a encadré à l'occasion de deux stages qui ont fait germer en moi le goût de la recherche et l'idée de faire un doctorat ; Matthieu Fradelizi qui a dirigé un groupe d'étudiants dont je faisais partie durant ma première année de licence dans le cadre d'un projet de mathématiques, ces premières bribes de découvertes m'ont encouragées à me confronter à de nouveaux problèmes souvent insolubles de prime abord ; Claire David pour le temps qu'elle a consacré à m'apprendre à enseigner.

Je tiens aussi à remercier Severine Giboz-Crosson, Corinne Palescandolo, Mina Constant,

Sylvie Cach et Fatima De Freitas pour l'infinie patience dont elles ont su faire preuve à mon égard pour les tâches administratives qui nécessitaient une action de ma part.

Je remercie aussi particulièrement Capucine Romei pour avoir supporté mes diverses explications de concepts mathématiques et informatiques que j'ai pu découvrir et qui m'ont fascinés tout au long de ces trois années. Et pour finir, je remercie aussi Marie-Hélène, Hervé, Rébecca et Roméo Châtel pour m'avoir soutenu durant ces trois années.

Résumé - Abstract

Combinatoire algébrique liée aux ordres sur les arbres

Cette thèse se situe dans le domaine de la combinatoire algébrique et porte sur l'étude et les applications de structures d'ordre sur plusieurs familles d'arbres.

Dans un premier temps, nous étudions le *treillis de Tamari* sur les arbres binaires. Celui-ci s'obtient comme un quotient de l'ordre faible sur les permutations : à chaque arbre est associé un intervalle de l'ordre faible sur les permutations formé par ses extensions linéaires. Nous observons qu'il est possible de mettre en bijection les intervalles de l'ordre de Tamari avec une famille de posets particulière : les *intervalles-posets*. L'ensemble des extensions linéaires de ces posets est l'union des ensembles des extensions linéaires des arbres qui composent l'intervalle. Nous donnons une caractérisation des posets qui vérifient cette condition puis nous utilisons ce nouvel objet de plusieurs façons différentes. Nous fournissons tout d'abord une preuve alternative du fait que la fonction génératrice des intervalles de l'ordre de Tamari vérifie une équation fonctionnelle décrite par F. Chapoton. Nous donnons ensuite une formule qui permet de compter le nombre d'arbres inférieurs ou égaux à un arbre donné dans l'ordre de Tamari et dans l'ordre de m-Tamari. Nous construisons également une bijection entre les intervalles-posets et les flots, un objet que F. Chapoton a introduit lors de l'étude de l'opérade Pre-Lie. Pour finir, nous démontrons de façon combinatoire la répartition de deux statistiques dans la fonction génératrice des intervalles de l'ordre de Tamari.

Dans la partie suivante, nous donnons une généralisation Cambrienne d'algèbres de Hopf classique et expliquons leurs liens avec les treillis Cambriens.

Dans un premier temps, nous présentons une généralisation de l'algèbre de Hopf des arbres binaires planaires au monde Cambrien que nous appelons *algèbre Cambrienne*. Nous introduisons cette algèbre comme une sous-algèbre de Hopf d'une l'algèbre de permutations. Nous étudions diverses propriétés de cette structure comme par exemple son dual, ses bases multiplicatives et sa liberté. Nous étudions ensuite une généralisation de l'algèbre de Baxter définie par S. Giraudo que nous appelons *algèbre Baxter-Cambrienne*. Les nombres de Baxter ayant de nombreuses propriétés combinatoires, nous nous sommes intéressés par la suite à leur équivalent Cambrien, les *nombres Baxter-Cambriens*. Pour finir, nous donnons une généralisation de l'algèbre Cambrienne en utilisant une algèbre de mots tassés plutôt qu'une algèbre de permutations comme base de notre construction. Nous appelons cette nouvelle structure l'*algèbre Schröder-Cambrienne*.

Algebraic combinatorics on order of trees

This thesis comes within the scope of algebraic combinatorics and studies of order structures on multiple tree families.

We first look at the *Tamari lattice* on binary trees. This structure is obtained as a quotient of the weak order on permutations : we associate with each tree the interval of the weak order composed of its linear extensions. Note that there exists a bijection between intervals of the Tamari lattice and a family of poset that we call *interval-posets*. The set of linear extensions of these posets is the union of the sets of linear extensions of the trees of the corresponding interval. We give a characterization of the posets satisfying this property and then we use this new family of objet on a large variety of applications. We first build another proof of the fact that the generating function of the intervals of the Tamari lattice satisfies a functional equation described by F. Chapoton. We then give a formula to count the number of trees smaller than or equal to a given tree in the Tamari order and in the m-Tamari order. We then build a bijection between interval-posets and flows that are combinatorial objects that F. Chapoton introduced to study the Pre-Lie operad. To conclude, we prove combinatorially a symmetry in the two parameters generating function of the intervals of the Tamari lattice.

In the next part, we give a Cambrian generalization of the classical Hopf algebra of Loday-Ronco on trees and we explain their connection with Cambrian lattices.

We first introduce our generalization of the planar binary tree Hopf algebra in the Cambrian world. We call this new structure the *Cambrian algebra*. We build this algebra as a Hopf subalgebra of a permutation algebra. We then study multiple properties of this objet such as its dual, its multiplicative basis and its freeness. We then generalize the Baxter algebra of S. Giraudo to the Cambrian world. We call this structure the *Baxter-Cambrian Hopf algebra*. The Baxter numbers being well-studied, we then explored their Cambrian counterparts, the *Baxter-Cambrian numbers*. To conclude this part, we give a generalization of the Cambrian algebra using a packed word algebra instead of a permutation algebra as a base for our construction. We call this new structure the *Schröder-Cambrian algebra*.

Table des matières

Introduction **11**

I Préliminaires **17**

1 Structures combinatoires **19**
1.1 Objets élémentaires 19
1.1.1 Mots et permutations 19
1.1.2 Posets 21
1.1.3 Chemins de Dyck 24
1.1.4 Arbres 26
1.1.5 Arbres Cambriens 31
1.2 Treillis 39
1.2.1 Définition et exemples 39
1.2.2 Treillis enveloppant 40
1.2.3 Ordre faible sur les permutations 41
1.2.4 Treillis de Tamari 44
1.2.5 Treillis Cambriens 47

2 Structures algébriques **55**
2.1 Algèbres de Hopf sur les objets combinatoires 55
2.1.1 Espaces vectoriels d'objets combinatoires 55
2.1.2 Produits et algèbres 56
2.1.3 Coproduits et cogèbres 57
2.1.4 Bigèbres et algèbres de Hopf combinatoires 58
2.1.5 Algèbre des fonctions quasi-symétriques libres 59
2.1.6 Algèbre des arbres binaires de recherche 63

II Combinatoire des intervalles du treillis de Tamari **67**

3 Intervalles-posets de Tamari **71**
3.1 Forêts initiales et finales 73

3.2 Définition des intervalles-posets 75
3.3 Composition des intervalles-posets 79
3.4 Énumération des intervalles 83

4 Applications **87**
4.1 Comptage des éléments inférieurs à un arbre 87
4.2 Étude de l'ordre de m-Tamari 89
4.3 Bijection entre flots et intervalles-posets 96
4.4 Preuve de la répartition symétrique de deux statistiques 99

III Algèbres Cambriennes **105**

5 Algèbre Cambrienne **107**
5.1 Algèbre de Hopf Cambrienne 107
5.1.1 Produits de mélange et de convolution signés 108
5.1.2 Sous-algèbre de Hopf de $\mathsf{FQSym}_{\pm}$ 109
5.1.3 Algèbre quotient de $\mathsf{FQSym}^*_{\pm}$ 114
5.1.4 Dualité 116
5.2 Bases multiplicatives 117
5.2.1 Bases multiplicatives et leurs éléments indécomposables 117
5.2.2 Propriétés structurelles 119
5.2.3 Propriétés énumératives 121

6 L'algèbre de Hopf Baxter-Cambrienne **125**
6.1 Arbres Cambriens jumeaux 125
6.1.1 Arbres Cambriens jumeaux 125
6.1.2 Correspondance Baxter-Cambrienne 127
6.1.3 Congruence Baxter-Cambrienne 127
6.1.4 Rotations et treillis Baxter-Cambriens 128
6.1.5 Nombres Baxter-Cambriens 131
6.2 Algèbre de Hopf Baxter-Cambrienne 142
6.2.1 Sous-algèbre de $\mathsf{FQSym}_{\pm}$ 142
6.2.2 Algèbre quotient de $\mathsf{FQSym}^*_{\pm}$ 145
6.3 ℓ-uplets Cambriens 147
6.3.1 Combinatoire des ℓ-uplets Cambriens 147
6.3.2 Algèbre de Hopf des ℓ-uplets Cambriens 150
6.3.3 Dual de l'algèbre des ℓ-uplets Cambriens 153

7 L'algèbre de Hopf Schröder-Cambrienne **155**
7.1 Arbres Schröder-Cambriens 155
7.1.1 Arbres Schröder-Cambriens 155
7.1.2 Correspondance Schröder-Cambrienne 157

7.1.3 Congruence Schröder-Cambrienne 159
7.1.4 Ordre faible sur les partitions ordonnées et treillis Schröder-Cambrien 160
7.1.5 Canopée 165
7.2 Algèbre de Hopf Schröder-Cambrienne 166
7.2.1 Produits de mélange et de convolution sur les partitions ordonnées signées 166
7.2.2 Sous-algèbre de $\mathsf{OrdPart}_{\pm}$ 168
7.2.3 Algèbre quotient de $\mathsf{OrdPart}^{*}_{\pm}$ 170
7.3 ℓ-uplets Schröder-Cambriens 172

Conclusion **173**

Introduction

Avant-propos

La combinatoire peut être définie comme l'étude des ensembles finis et dénombrables d'objets. Le vaste nombre de problèmes couverts par cette définition explique le fait que l'on en retrouve des traces dans de nombreuses branches des mathématiques tout au long de l'histoire. Parmi les problèmes classiques de combinatoire, on retrouve l'étude du dénombrement d'ensemble, dans lequel on cherche à compter le nombre d'éléments qui le composent. On peut citer par exemple le nombre de façon d'ordonner un ensemble d'objets distincts ou bien d'en choisir un sous-ensemble d'une taille donnée comme étant des problèmes de dénombrement classiques. Une autre branche de la combinatoire s'intéresse aux problèmes de génération aléatoire. Dans cette thématique, on cherche à tirer au hasard un élément d'un ensemble selon certaines contraintes. Ce problème illustre un premier lien entre le monde de l'informatique et celui de la combinatoire : l'étude d'objet tirés aléatoirement permet de décrire avec précision à quoi ressemble l'objet moyen de l'ensemble qui nous intérèsse, ce qui nous sert par la suite à calculer le comportement moyen d'un algorithme utilisant cet objet. Au fur et à mesure de l'histoire, les liens qui unissent l'informatique et la combinatoire n'ont jamais cessés de se renforcer. La combinatoire fournit en effet une famille d'outils pour étudier les objets qui apparaissent dans le monde de l'informatique et l'informatique permet d'explorer des propriétés d'objets qui sont bien trop nombreux pour être traités sans l'aide d'une machine. On appelle cette procédure l'*exploration par ordinateur* d'un problème.

La *combinatoire algébrique*, discipline à mi-chemin entre les mathématiques et l'informatique, consiste à munir les objets combinatoires de structures supplémentaires. Chaque structure *rigidifie* l'ensemble d'objets en y ajoutant un ensemble de contraintes. Comprendre ces restrictions permet de guider l'étude que l'on fait de l'objet et amène de façon naturelle à des nouveaux résultats. Les structures algébriques peuvent lier les objets d'une famille combinatoire de façon interne ou bien lier différentes familles entre elles. On s'intéresse par exemple aux façons d'*assembler* et de *désassembler* des objets, aux *ordres* qui apparaissent lors de l'étude de ces objets dans différents cadres ainsi qu'aux diverses *fonctions* qui envoient un objet d'une première famille vers un objet d'une seconde.

Objets Catalans

On appelle *objet Catalan* des objets combinatoires dont le nombre d'éléments de taille n est le n-ième nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Cette suite fondamentale a été introduite par Leonhard Euler en 1751 comme étant le nombre de triangulations d'un $n+2$-gone. Ces nombres sont depuis réapparus sous d'innombrables formes dans une multitude de contextes différents. Richard Stanley tient à jour une liste de plusieurs centaines d'interprétations combinatoires possibles des nombres de Catalan [Sta08]. Ils émergent dans des thématiques aussi variées que la chimie [oCHL+06], la physique [GNR07] ou encore la cosmologie [Mek07]. Le fait que cette suite de nombres apparaisse lors de l'étude de problèmes si variés ouvre naturellement de nombreuses questions et fournit simultanément certains outils pour y répondre. En effet, posséder de nombreuses façons différentes de voir un objet aide à sa compréhension dans le sens où chacune met en valeur un ensemble de données différentes sur le problème. Une des familles d'objets catalans les plus étudiées est l'ensemble des arbres binaires, des objets combinatoires au cœur de ce mémoire.

Les arbres

Ces objets, introduits il y a plus d'un siècle par Cayley [Cay57], apparaissent dans de nombreux champs des sciences car intrinsèquement liés à la notion de récursion. En informatique, ils sont par exemple utilisés en tant que structure de donnée pour stocker de l'information de façon organisée [AVL62], représenter des expressions [ASU86], construire des scènes 3D [Fol96] ou encore pour représenter l'arbre des appels récursifs d'un algorithme, un arbre permettant d'étudier son comportement et sa complexité [Cor09]. Les usages de la structure d'arbre en mathématiques sont eux aussi nombreux. Ils apparaissent par exemple en tant qu'arbres de génération d'autres objets combinatoires [Wes90], en théorie des espèces de structures [Joy81, BLL98] ou encore en théorie des graphes [Ost12].

La plupart des familles d'arbres avec lesquelles nous allons travailler sont comptées par les nombres de Catalan. Il existe sur ces dernières plusieurs structures qui seront étudiées dans ce mémoire : l'*algèbre de Hopf des arbres binaires* PBT qui formalise les notions d'assemblage et de désassemblage d'arbres binaires, et le *treillis de Tamari* qui est un ordre dont les éléments sont les arbres d'une taille donnée.

Algèbre de Hopf des arbres binaires

Les *algèbres de Hopf*, introduites dans le contexte de la topologie algébrique pour l'étude des groupes de Lie, sont un outil central en combinatoire algébrique et ce depuis plus de 30 ans [JR79, Rot78]. Dans le cadre des algèbres de Hopf *combinatoires*, l'objectif de cette structure est de formaliser les notions d'assemblage et de désassemblage d'objets combinatoires dans le but d'en faciliter l'étude. En effet, comprendre la façon dont s'agencent les briques de bases qui forment les objets permet d'en avoir une meilleure compréhension. P. Cartier rassemble dans [Car07] une série de résultats traitant des liens entre algèbres de Hopf, théorie des groupes et combinatoire.

L'*algèbre de Hopf* des arbres binaires (notée dans ce mémoire PBT) a été introduite en 1998 par J.-L. Loday et M. Ronco [LR98]. Cette algèbre était alors construite comme une sous-algèbre de l'algèbre de permutations de C. Malvenuto et C. Reutenauer [MR95] (notée dans ce mémoire FQSym). En 2005, F. Hivert, J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon ont défini le *monoïde sylvestre* [HNT05] qui est l'équivalent en termes d'arbres du monoïde plaxique sur les tableaux de Young standards qu'ils utilisent pour donner une reformulation plus combinatoire de l'algèbre des arbres binaires. Cette structure se place au sein d'une importante hiérarchie d'algèbres de Hopf combinatoire sur différents objets.

On peut observer que l'algèbre des reculs Rec se plonge dans l'algèbre des arbres PBT qui elle-même se plonge dans l'algèbre des permutations FQSym. Une des propriétés principale de l'algèbre PBT est que le produit sur une de ses bases s'interprète de façon combinatoire comme une somme sur un intervalle du *treillis de Tamari*.

Treillis de Tamari

La théorie des treillis a démarré autour des années 1890 lors de l'étude d'un problème de théorie des groupes par R. Dedekind [Szá71]. C'est par la suite, dans les années 1930, que ces travaux sont découverts par G. Bikhoff et O. Ore. C'est à partir de ce moment que la théorie des treillis s'est développée et, par là même, ses applications en algèbre.

Le *treillis de Tamari* apparaît pour la première fois en 1962 dans les travaux de Dov Tamari [Tam62] comme une structure d'ordre sur les parenthésages formels d'une expression. Dans un article ultérieur, il montre que cet ordre est en fait un treillis [HT72]. Son diagramme de Hasse correspond au squelette d'un polytope connu sous le nom d'associaèdre ou polytope de Stasheff [Sta63]. Bien qu'apparu il y a plus de 50 ans, de nouvelles propriétés de ce treillis continuent d'être découvertes ([Cha07], [BMFPR11], etc.). Une littérature abondante existe aussi sur les généralisations du treillis de Tamari ([MHPS12], [Rea06], [BPR12], [PRV14], [Pon15], etc.). Une de ces généralisation liée à la géométrie et aux groupes de Coxeter est particulièrement étudiée au sein de plusieurs communautés depuis 2006, *les treillis Cambriens*.

Treillis Cambriens

Les *treillis Cambriens* sont des structures qui ont été construites par N. Reading en 2006 [Rea06]. Ces ordres sont définis dans le cadre des groupes de Coxeter comme la restriction de l'ordre faible à un ensemble d'éléments, appellés éléments c-triés. Ces treillis sont une généralisation des treillis de Tamari dans le sens où les treillis Cambriens de type A sur la signature $(-)^n$ sont isomorphes aux treillis de Tamari. Du point de vue géométrique, des réalisations polytopales des treillis Cambriens ont été construites par C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas [HL07, HLT11]. Du point de vue combinatoire, N. Reading donne dans [Rea06] un algorithme qui envoie des permutations signées sur les triangulations de polygones convexes, ce qu'on peut traduire à travers une bijection simple comme un algorithme envoyant des permutations avec deux types de valeurs sur des généralisations des arbres binaires avec deux types de nœuds.

Contributions et plan du mémoire

Notre travail est divisé en deux parties distinctes qui reposent sur le même type d'objet : les structures d'ordre sur différents objets arborescents.

La partie I contient une introduction aux différents objets mathématiques avec lesquels nous allons travailler. Nous donnons dans le chapitre 1 les définitions de bases des *mots*, des ordres partiels (*posets*), des *chemins de Dyck*, des *arbres*, et des *arbres Cambriens*. Nous finissons par la définition des *treillis*, structure omniprésente dans notre travail, avec comme exemples les différentes structures d'ordres classiques que nous utiliserons par la suite dans notre étude.

Le chapitre 2 contient les rappels essentiels de la théorie des algèbres de Hopf. On donne en particulier l'exemple de l'algèbre des fonctions quasi-symétriques libres et celle des arbres binaires de recherche. Les parties suivantes décrivent nos différentes contributions à ces théories.

La partie II de ce mémoire traite de la combinatoire des intervalles du treillis de Tamari. Dans le chapitre 3, nous définissons un nouvel objet combinatoire, les *intervalles-posets* que nous mettons en bijection avec les intervalles du treillis de Tamari. Dans la suite de ce chapitre, nous définissons les *polynômes de Tamari* qui nous sont utiles pour énumérer les intervalles de ce treillis. Après avoir expliqué l'origine et la construction de ces objets, nous en donnons plusieurs exemples d'utilisation.

Le chapitre 4 contient plusieurs applications des intervalles-posets. Nous montrons dans un premier temps une formule permettant de calculer *le nombre d'arbres inférieurs ou égaux dans l'ordre de Tamari* à un arbre donné. Nous construisons ensuite une bijection entre les intervalles-posets et les *flots* qui explique le lien entre ces deux objets. Nous donnons enfin une autre bijection envoyant les intervalles-posets sur eux-même pour donner une preuve bijective de la *répartition symétrique* de deux statistiques qui avait été remarquée puis montrée algébriquement par M. Bousquet-Mélou, E. Fusy et L.-F. Préville-Ratelle.

Dans la partie III de ce mémoire, nous nous intéressons aux différents objets qui vivent dans le monde *Cambrien*, un contexte généralisant celui des arbres binaires classiques.

En utilisant des constructions similaires à celles utilisées par F. Hivert, J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon pour créer l'algèbre de Hopf des arbres binaires de recherche à partir d'une algèbre de permutations [HNT05], nous utilisons dans le chapitre 5 une algèbre de Hopf de permutations signées pour créer l'*algèbre de Hopf Cambrienne*. Après avoir défini et montré que cette structure est bien une algèbre de Hopf, nous donnons une description combinatoire de son produit et de son coproduit puis nous explorons les propriétés de son algèbre duale. Nous étudions ensuite diverses propriétés combinatoires de ses bases multiplicatives. Par la suite, nous généralisons cette algèbre de plusieurs façons différentes : nous nous intéressons aux couples d'*arbres Cambriens jumeaux* et aux *arbres Schröder-Cambrien*.

Les paires d'*arbres Cambriens jumeaux* sont une généralisation des objets de type "*Baxter*" [CGHK78]. Dans le chapitre 6, nous donnons les définitions concernant ces paires d'arbres ainsi que celle du *treillis Baxter-Cambrien*. Pour finir ce paragraphe, nous explorons une partie de la combinatoire énumérative des *nombres Baxter-Cambriens* en la mettant en relation avec certains résultats de la combinatoire des objets Baxter classiques.

Nous définissons ensuite l'*algèbre de Hopf Baxter-Cambrienne* et, comme dans le cas Cambrien, nous donnons une description combinatoire de son produit et de son coproduit. Nous décrivons ensuite son algèbre duale. Pour finir ce chapitre, nous nous intéressons aux *ℓ-uplets Cambriens* qui sont une généralisation des arbres Cambriens jumeaux et nous montrons qu'il est possible d'utiliser des outils identiques à ceux que l'on a utilisé dans les paragraphes précédents pour définir l'*algèbre des ℓ-uplets Cambriens*.

Le chapitre 7 est consacré à l'étude des *arbres Schröder-Cambriens*, équivalent Cambrien des arbres de Schröder classiques. Après avoir défini ces arbres, nous donnons une correspondance entre les *mots tassés signés* et les arbres Schröder-Cambriens. Nous construisons ensuite le *treillis Schröder-Cambrien* qui généralise le treillis défini par P. Palacios et M. Ronco sur l'ensemble des faces de l'associaèdre [PR06]. Dans la suite de ce chapitre, nous définissons l'*algèbre des arbres Schröder-Cambriens* ainsi que son algèbre duale. Pour conclure, nous mentionnons qu'il est aussi possible de construire l'algèbre des ℓ-uplets Schröder-Cambriens.

Première partie

Préliminaires

Chapitre 1

Structures combinatoires

1.1 Objets élémentaires

Nous commençons ce mémoire par un court chapitre d'introduction à quelques notions de combinatoire. Le paragraphe 1.1.1 présente les briques de base de la théorie combinatoire qui sera developpée tout au long de ce mémoire, les *mots* et les *permutations*. Nous définissons ensuite dans le paragraphe 1.1.2 les ordres partiels ainsi que le vocabulaire qui s'y rapporte. Nous introduisons ensuite les chemins de Dyck dans le paragraphe 1.1.3. Dans le paragraphe 1.1.4, nous donnons les définitions des arbres que nous allons utiliser tout au long du mémoire. Pour finir cette partie introductive, nous donnons les définitions des arbres Cambriens dans le paragraphe 1.1.5.

1.1.1 Mots et permutations

Les mots et les permutations sont des objets de base en combinatoire. De nombreuses opérations sur des objets plus complexes peuvent en fait s'exprimer à l'aide des mots et de la concaténation. Nous aurons besoin de certaines notions et opérations classiques que nous définissons dès maintenant.

Soit $u = u_1 \dots u_n$ un mot de taille n. Un *facteur* de u est un mot $v = u_i u_{i+1} \dots u_{i+m}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $i + m \leq n$. Le mot u s'écrit alors $u = u'vu''$ où u' et u'' sont deux autres facteurs de u. Si v est placé au début de u, c'est-à-dire si $v = u_1 \dots u_m$, on dit que v est un *facteur gauche* ou *préfixe* de u. De même si v est placé à la fin de u, c'est-à-dire si $v = u_{n-m} \dots u_n$, on dit que v est un *facteur droit* ou *suffixe* de u. Un *sous-mot* de u est un mot $v = u_{j_1} \dots u_{j_m}$ où $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$. C'est-à-dire que le sous-mot v est composé d'un sous-ensemble des lettres de u dont on a conservé l'ordre. Par exemple si $u = aabcba$ alors aab est un préfixe, ba un suffixe, bc un facteur et abb un sous-mot de u. Les préfixes et suffixes sont en particulier des facteurs, et les facteurs, des sous-mots. Le mot vide ϵ est à la fois préfixe, suffixe, facteur et sous-mot de n'importe quel mot u. On parle de facteur (resp. préfixe, suffixe ou sous-mot) propre d'un mot u quand on n'inclut pas le mot vide ni u lui-même.

Toutes ces notions s'appliquent aussi aux permutations qui sont des mots particuliers. Par exemple, la permutation 52431 admet entre autres le préfixe 52, le suffixe 431, le facteur 24 et le sous-mot 231. On remarque qu'en général ces mots ne sont pas eux-mêmes des permutations. Une solution pour rester dans la même classe combinatoire est de *standardiser* les mots.

Définition 1. *Soit $u = u_1 \dots u_n$ un mot de taille n sur un alphabet ordonné $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ (par exemple, les entiers positifs). On dit que u admet une* inversion *(i, j) avec $i < j$ si $u_i > u_j$. Le* standardisé *de u, noté $\mathrm{std}(u)$, est l'unique permutation σ de taille n telle que les inversions de σ soient exactement les inversions de u.*

Par exemple, si $u = baa$ sur l'alphabet ordonné $A = \{a < b\}$, alors u admet deux inversions $(1, 2)$ et $(1, 3)$. La seule permutation de taille 3 admettant uniquement ces deux inversions est $\mathrm{std}(u) = 312$. Algorithmiquement parlant, en cas d'occurence multiple d'une même lettre, la standardisation revient à numéroter les lettres de u des plus petites lettres vers les plus grandes lettres et de la gauche vers la droite, cf. figure 1.1.

$$\begin{array}{ccccccccc} d & d & a & b & c & b & b & a & a \\ & & 1 & & & & & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} d & d & a & b & c & b & b & a & a \\ & & 1 & 4 & & 5 & 6 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} d & d & a & b & c & b & b & a & a \\ & & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} d & d & a & b & c & b & b & a & a \\ 8 & 9 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\mathrm{std}(ddabcbbaa) = 891475623$$

FIGURE 1.1 – Standardisé du mot *ddabcbbaa*, on numérote d'abord les a, puis les b, et ainsi de suite.

Par définition, le standardisé d'une permutation est la permutation elle-même. On peut utiliser la standardisation sur les facteurs et sous-mots d'une permutation pour obtenir à nouveau des permutations. Par exemple, les préfixes standardisés de 52431 sont $\{\epsilon, 1, 21, 312, 4132, 52431\}$.

Définition 2. *On dit qu'une permutation σ* admet comme motif *la permutation μ s'il existe un sous-mot de σ dont le standardisé est la permutation μ. Si σ n'admet pas le motif μ, on dit qu'elle* évite le motif.

Par exemple, la permutation $\sigma = 4213$ admet le motif 312 car 413 est sous-mot de σ et $\mathrm{std}(413) = 312$.

1.1.2 Posets

Il est possible de définir des relations d'ordre sur les objets combinatoires. Les ensembles partiellement ordonnés sont couramment appelés *posets*, de l'anglais *Partially Ordered Set*. Cet objet est fondamental dans notre travail. Les posets peuvent s'étudier à la fois comme des objets combinatoires en tant que tels ou comme des structures appliquées à d'autres objets combinatoires. C'est surtout dans ce second contexte que nous les rencontrerons. Nous présentons ici les notions fondamentales dont nous aurons besoin.

Définitions

Définition 3. *Un* poset *est un ensemble P muni d'une relation d'ordre $\leq$ vérifiant les conditions*

1. *de réflexivité : $\forall x \in P, x \leq x$;*
2. *d'antisymétrie : $\forall x, y \in P$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$;*
3. *de transitivité : $\forall x, y, z \in P$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.*

Si la relation d'ordre est telle que pour tout $x, y \in P$, alors soit $x \leq y$, soit $y \leq x$, on dit que l'ordre est total *ou* linéaire.

Nous ne traiterons dans ce mémoire que des cas où l'ensemble P est fini.

Définition 4. *On dit que y* couvre *x et on écrit $x \lessdot y$ si on a $x < y$ et qu'il n'existe pas de $z \in P$ tel que $x < z < y$. On appelle l'ensemble de ces relations les* relations de couverture.

Définition 5. *On dit qu'un élément $x \in P$ est* minimal *(resp.* maximal*) s'il n'existe pas d'élément $y \in P$, $y \neq x$, tel que $y \leq x$ (resp. $y \geq x$).*

Les relations de couverture suffisent à définir le poset (les autres relations étant obtenues par transitivité). Pour représenter un poset, il suffit donc d'indiquer les éléments et leurs relations de couverture, c'est ce qu'on appelle un *diagramme de Hasse*. De façon générale, les posets sont représentés par leur diagramme de Hasse de la façon suivante : si x est relié à y par une arête et que x est *en dessous* de y alors $x \lessdot y$, les plus petits éléments se trouvent donc en bas du diagramme, cf. figure 1.2.

Lorsque les éléments du poset sont les entiers ou un alphabet quelconque, on peut considérer le poset comme un objet combinatoire en tant que tel. La taille est alors donnée par le nombre d'éléments et l'on peut par exemple chercher à dénombrer les posets d'une taille donnée sur l'alphabet $\{1, \ldots, n\}$ [OEIa]. Dans le chapitre 3, nous définirons ainsi une classe spécifique de posets, les *intervalles-posets* de Tamari liés à l'ordre de Tamari que nous dénombrerons. Cependant, la plupart du temps, nous considérons les posets non pas comme des objets combinatoires mais comme des structures sur les objets combinatoires. Ce sera le cas par exemple quand nous étudierons les ordres sur les permutations dans le chapitre 1.2.3. Des exemples de posets dont les éléments sont des permutations sont présents dans les figures 1.23, 1.24 et 1.25.

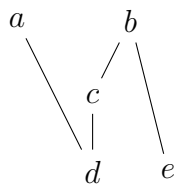


FIGURE 1.2 – Exemple de diagramme de Hasse. Les relations de couverture sont $d \lessdot c \lessdot b$, $d \lessdot a$ et $e \lessdot b$. Les éléments d et e sont minimaux. L'ordre est partiel : par exemple, a et b ne sont pas comparables.

Vocabulaire de base

Définition 6. *Une chaîne d'un poset P est un ensemble d'éléments $\{x_1, \ldots, x_m\}$ tel que*

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m. \tag{1.1}$$

Si quelque soit $i \in [\![1, m-1]\!]$, on a $x_i \lessdot x_{i+1}$, alors la chaîne est dite saturée.

Par exemple, $d \lessdot c \lessdot b$ est une chaîne saturée du poset donné figure 1.2.

Définition 7. *On dit qu'un poset est gradué s'il existe une application Φ bien définie telle que*

1. $\Phi(x) = 0$ *si x est minimal,*
2. $\Phi(y) = \Phi(x) + 1$ *si $x \lessdot y$.*

De façon équivalente, un poset est gradué si la longueur d'une chaîne saturée entre un élément $y \in P$ et un élément minimal x du poset ne dépend ni de x, ni de la chaîne choisie. Ainsi, le poset donné figure 1.2 n'est pas gradué car $d \lessdot c \lessdot b$ et $e \lessdot b$ sont deux chaînes saturées de longueurs différentes d'éléments minimaux vers b.

Les définitions qui suivent donnent des constructions de posets à partir d'un poset donné. Des exemples de toutes les constructions (sous-poset, intervalle, poset quotient, etc.) sont illustrés figure 1.3.

Définition 8. *Un poset P' est un sous-poset de P si en tant qu'ensemble, $P' \subset P$ et si la relation d'ordre de P' est la même que celle de P restreinte aux éléments de P'.*

Si pour tout $x, y \in P'$, on a que $x \leq y$ implique que $\forall z \in P$ avec $x \leq z \leq y$ alors $z \in P'$, on dit que P' est clos par intervalle. Si de plus, P' a un unique élément minimal et un unique élément maximal, on dit que P' est un intervalle de P.

Définition 9. *Soit $\varphi : P_1 \to P_2$ une application d'un poset P_1 vers un poset P_2. On dit que φ est un morphisme de posets si φ préserve l'ordre des éléments. C'est-à-dire, que pour tout $x, y \in P_1$ on a*

$$x \leq_{P_1} y \Rightarrow \varphi(x) \leq_{P_2} \varphi(y). \tag{1.2}$$

Si φ est bijective et si φ^{-1} est aussi un morphisme de posets, on dit que φ est un isomorphisme de posets.

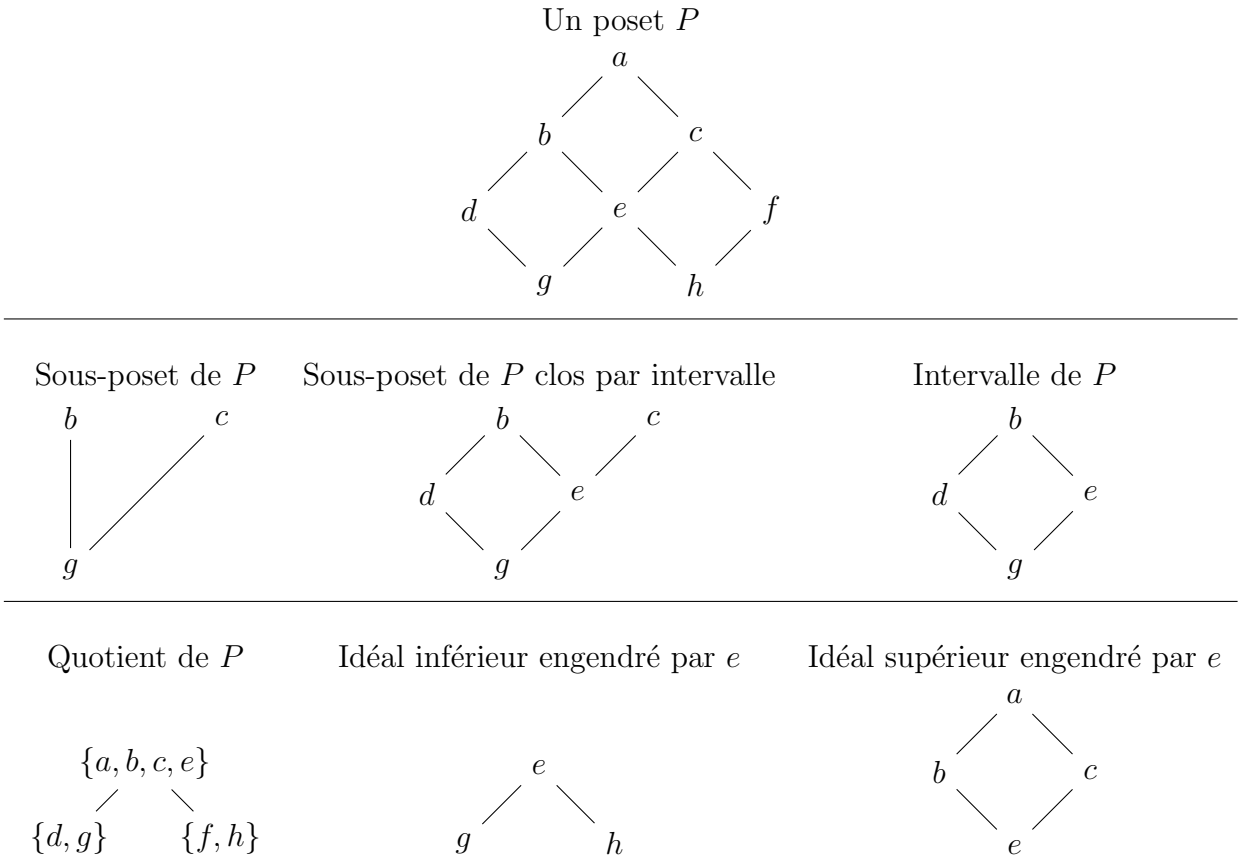


FIGURE 1.3 – Exemples de sous-posets et posets quotients.

Définition 10. *Soit $\mathcal{P}$ une partition du poset P, on dit que $\mathcal{P}$ est un* poset quotient *de P si la relation définie sur $\mathcal{P}$ par*

$$\dot{x} \leq \dot{y} \Leftrightarrow \exists x \in \dot{x}, y \in \dot{y} \text{ tels que } x \leq y. \tag{1.3}$$

pour tout $\dot{x}, \dot{y} \in \mathcal{P}$ est une relation d'ordre.

On trouve dans [CS98] les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier une telle partition pour que le quotient forme bien un poset.

Définition 11. *Soit P un poset et $x \in P$, l'*idéal inférieur *(resp.* supérieur*) de P engendré par x est l'ensemble des éléments $y \leq x$ (resp. $y \geq x$).*

Extensions et extensions linéaires de poset

Soient $(P, \leq_P)$ et $(Q, \leq_Q)$ deux posets sur un même ensemble d'éléments E. Si on a

$$x \leq_P y \Rightarrow x \leq_Q y \tag{1.4}$$

pour tout $x, y \in E$, alors Q est une *extension* de P. Construire une extension de P revient donc à rajouter des relations au poset P. Si l'ordre du poset Q est total, on dit que Q est une extension linéaire de P.

Une extension linéaire de P peut se représenter comme un mot u dont les lettres sont les éléments de P selon la règle : si $a \leq_P b$ alors a doit être placé avant b dans u. Par exemple, les mots *dceab* et *edcba* sont des extensions linéaires du poset représenté figure 1.2. Si les éléments du poset sont des entiers de 1 à n, alors les extensions linéaires du poset peuvent être vues comme des permutations, cf. figure 1.4. Pour un poset P, on note l'ensemble de ses extensions linéaires $\mathcal{L}(P)$.

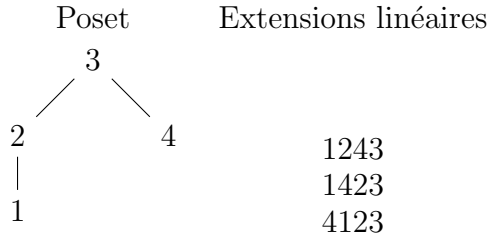


FIGURE 1.4 – Exemple d'extensions linéaires d'un poset.

Base d'un poset

Définition 12. *La base d'un poset P est le plus petit ensemble $B \subset P$ tel que pour tout $x, y \in P$, on ait*

$$x <_P y \Leftrightarrow \{z \in B, z \leq x\} \subsetneq \{z \in B, z \leq y\}. \tag{1.5}$$

C'est-à-dire qu'à chaque élément correspond une projection sur la base et que la comparaison des éléments peut se faire par comparaison ensembliste des projections. Dans [LS96], Lascoux et Schützenberger donnent une caractérisation des éléments de la base.

Lemme 13. *Un élément x d'un poset P appartient à la base de P si et seulement s'il existe $y \in P$ tel que x soit un élément minimal de $P \backslash \{z \leq y\}$.*

Un exemple de calcul de la base d'un poset est donné figure 1.5. De façon équivalente, il est possible de définir la *cobase* d'un poset en utilisant les éléments maximaux et des projections d'idéaux supérieurs au lieu d'inférieurs.

1.1.3 Chemins de Dyck

La définition originelle de certaines structures d'ordre que nous allons étudier par la suite ont été données en termes de chemin de Dyck.

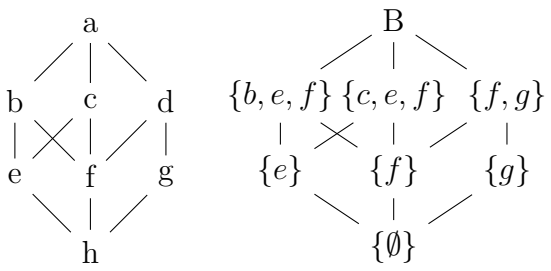
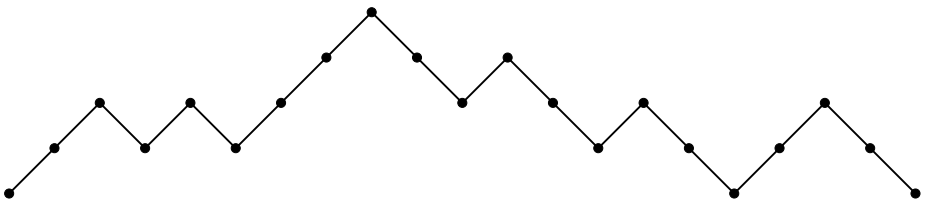


FIGURE 1.5 – Exemple d'un poset et de sa base. La base du poset est formée par les éléments b, c, e, f, g. En effet, e, f et g sont minimaux pour $P\backslash\{z \leq h\}$ et b et c sont minimaux pour respectivement $P\backslash\{z \leq c\}$ et $P\backslash\{z \leq b\}$. À droite, on a représenté le même poset où les éléments ont été remplacés par leur projection sur la base.

Définition 14. *Un* chemin de Dyck *de taille n est un chemin dans le plan depuis l'origine jusqu'au point $(2n, 0)$ formé de pas dits "montants" $(1, 1)$ et de pas "descendants" $(1, -1)$ tels que le chemin ne descende jamais en dessous de la ligne $y = 0$.*

La figure 1.6 illustre un exemple de chemin de Dyck. On identifie les chemins à des mots sur un alphabet binaire $\{1, 0\}$ où les pas montants sont représentés par des 1 et les pas descendants par des 0. On les appelle alors *mots de Dyck*. Ils contiennent autant de 1 que de 0 et dans chacun de leurs préfixes, le nombre de 1 est supérieur ou égal au nombre de 0. La figure 1.6 donne un exemple de la correspondance entre chemin de Dyck et mot de Dyck.



11010111001001001100

FIGURE 1.6 – Un chemin de Dyck et le mot de Dyck associé.

Un résultat classique de combinatoire est que le nombre de chemins de Dyck de taille n est le n-ième nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Définition 15. *Un chemin est dit* primitif *s'il n'a pas d'autres contacts avec la droite $y = 0$ que son origine et son point final.*

Les figures 1.6 et 1.7 illustrent respectivement un chemin non primitif et primitif.

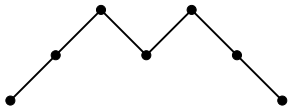


FIGURE 1.7 – Un chemin de Dyck primitif.

1.1.4 Arbres

Dans ce paragraphe, nous allons donner la définition de plusieurs familles d'arbres. Nous décrivons les arbres binaires, les arbres binaires de recherche et les arbres décroissants.

Arbres binaires

Un *arbre binaire* se définit récursivement comme étant soit l'arbre vide $\emptyset$, soit un couple d'arbres binaires appelés *sous-arbre droit* et *sous-arbre gauche* greffés sur un nœud racine. On appelle *feuille* un nœud dont les deux sous-arbres sont vides. Si T est un arbre formé de la racine x et respectivement des sous-arbres, gauche et droit, A et B, on écrit $T = x(A, B)$. Cette notation est illustrée figure 1.8. Dans ce mémoire, la racine des arbres est représentée en haut et ses sous-arbres sont dessinés en dessous d'elle.

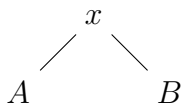


FIGURE 1.8 – Illustration de la structure récursive de l'arbre binaire $T = x(A, B)$. x est la racine de l'arbre, A est le sous-arbre gauche de x et B son sous-arbre droit.

Nous manipulerons les *étiquetages* des arbres binaires, *i.e.,* les façons d'associer une valeur à chaque sommet de l'arbre. Les arbres binaires des figures 1.9 et 1.10 sont respectivement non-étiqueté et étiqueté.

Les chemins de Dyck et les arbres binaires étant comptés par les nombres de Catalan, il est possible de définir des bijections entre ces deux familles d'objets. Nous définissons maintenant une de ces bijections, que nous allons utiliser dans ce mémoire.

La correspondance entre les chemins de Dyck et les arbres binaires utilise la structure récursive des deux objets. Un chemin de Dyck D est soit le chemin vide, soit s'écrit $D = D_1 1 D_2 0$ où D_1 et D_2 sont deux chemins de Dyck. On définit alors T, l'arbre correspondant à D par $T = x(T_1, T_2)$ où T_1 et T_2 sont les arbres binaires correspondant respectivement à D_1 et D_2. La bijection est illustrée figure 1.9. On remarque que D_1 est le préfixe de D jusqu'au dernier retour à 0. En particulier, si D est un chemin primitif alors D_1 est vide. Le chemin D_2 est vide si D se termine par le mot 10.

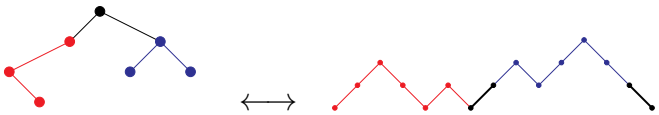


FIGURE 1.9 – Correspondance entre arbres binaires et chemins de Dyck.

Arbres binaires de recherche

Nous aurons besoin plus tard d'une famille spécifique d'arbre binaire, les *arbres binaires de recherche*.

Définition 16. *Un* arbre binaire de recherche *est un arbre binaire étiqueté vérifiant pour chaque nœud x la condition suivante : si x est étiqueté par k alors les nœuds du sous-arbre gauche (resp. droit) de x sont étiquetés par des entiers inférieurs ou égaux (resp. strictement supérieurs) à k.*

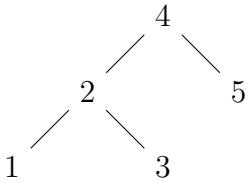


FIGURE 1.10 – Exemple d'arbre binaire de recherche.

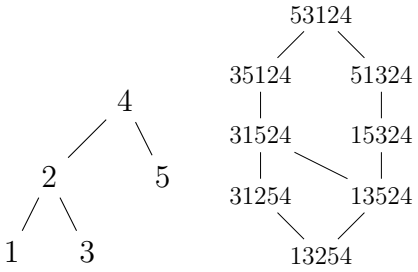


FIGURE 1.11 – Extensions linéaires d'un arbre binaire.

Un exemple d'arbre binaire de recherche est donné figure 1.10. Pour un arbre binaire donné de taille n, il n'existe qu'un seul étiquetage, dit *standard*, utilisant les entiers de 1 à n une fois chacun, tel que le résultat soit un arbre binaire de recherche. On identifie donc les arbres binaires non étiquetés et les arbres binaires de recherche standard. La

structure d'arbre binaire de recherche est utilisée couramment en algorithmique pour le stockage d'ensembles ordonnés. En particulier, l'algorithme récursif d'insertion dans un arbre binaire de recherche est bien connu. L'insertion de l'entier k dans l'arbre T se fait de la façon suivante : si T est vide alors k devient la racine de T, sinon, si $k \leq racine(T)$ (resp. $k > racine(T)$) on insère k dans le sous-arbre gauche (resp. droit) de T.

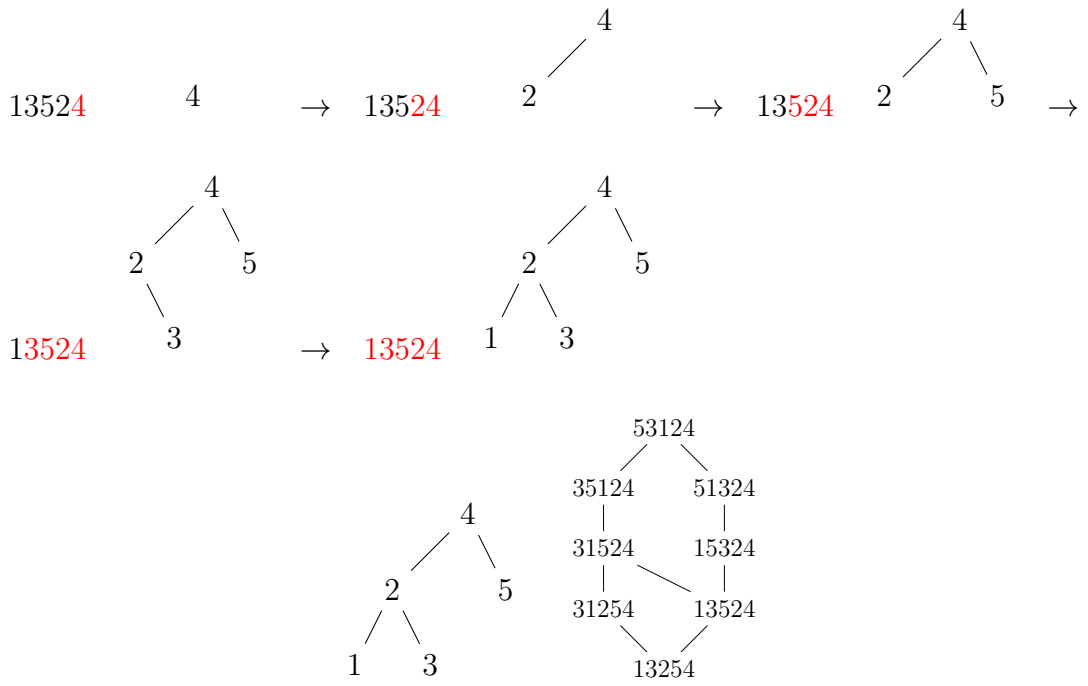


FIGURE 1.12 – Insertion dans un arbre binaire de recherche et extensions linéaires

On utilise cet algorithme pour associer un arbre binaire $\mathbf{P}(\sigma)$ à chaque permutation σ : on insère successivement les entiers de la permutation *de la droite vers la gauche* dans un arbre T vide au départ. Ce processus est illustré figure 1.12. La propriété suivante est déjà dans [BW91] et reprise dans [HNT05] dans le cadre qui nous intéresse. Le nom de l'algorithme $\mathbf{P}$ a été choisi par analogie au P-symbole de la correspondance de Robinson-Schensted [Sch61] qui envoie une permutation sur un tableau standard. L'ordre faible droit sur les permutations dont nous parlons dans la prochaine proposition est défini dans le paragraphe 1.2.3.

Proposition 17. *Les permutations qui donnent le même arbre binaire par insertion dans un arbre binaire de recherche sont les* extensions linéaires *de cet arbre vu comme un poset. Elles forment un intervalle pour l'ordre faible droit sur les permutations. On appelle cet ensemble la* classe sylvestre *de l'arbre.*

En effet, un arbre binaire étiqueté peut être interprété comme un poset (où les éléments minimaux se trouvent en bas). Si a se trouve dans le sous-arbre issu de b, on écrit $a \lhd b$.

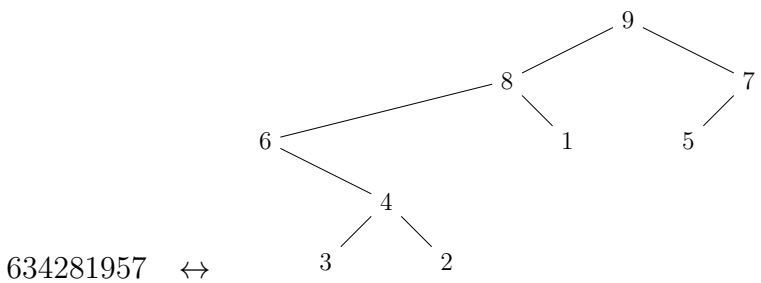
Une extension linéaire de l'arbre se définit alors comme au paragraphe 1.1.2 : si $a \lhd b$ alors a se trouve avant b dans l'extension linéaire. Dans la figure 1.12, on donne l'ensemble des extensions linéaires d'un arbre donné et on pourra vérifier qu'elles forment bien un intervalle pour l'ordre faible droit.

Arbres binaires décroissants

Les *arbres binaires décroissants* sont une autre famille d'arbres binaires dont nous aurons besoin par la suite.

Définition 18. *Un* arbre binaire décroissant *est un arbre binaire étiqueté tel que pour chaque nœud x étiqueté par k, les nœuds de l'arbre issu de x sont étiquetés par des entiers inférieurs ou égaux à k.*

Les permutations sont en bijection avec les arbres binaires décroissants. À partir d'un arbre binaire décroissant, on obtient une permutation en lisant ses sommets selon le parcours infixe (fils gauche, racine, fils droit). Réciproquement, à une permutation qui s'écrit $\sigma = unv$ où n est la valeur maximale de σ, on fait correspondre récursivement l'arbre $T = n(T_u, T_v)$ où T_u et T_v sont les arbres des facteurs u et v. On note cet arbre $\mathrm{ABD}(\sigma)$. La bijection est illustrée figure 1.13.



634281957 $\leftrightarrow$

FIGURE 1.13 – Un arbre binaire décroissant et la permutation associée.

Le nombre d'étiquetages décroissants d'un arbre binaire donné est égal au nombre de ses extensions linéaires. Il est donné par la formule des équerres :

$$\frac{n!}{\prod_v h_v} \tag{1.6}$$

où le produit est évalué sur les sommets v de l'arbre et où h_v est la taille du sous-arbre issu de v. Les permutations associées aux étiquetages décroissants d'un arbre binaire sont les inverses des extensions linéaires de son arbre binaire de recherche. Elles forment donc un intervalle de l'ordre faible gauche. Un exemple est donné figure 1.14.

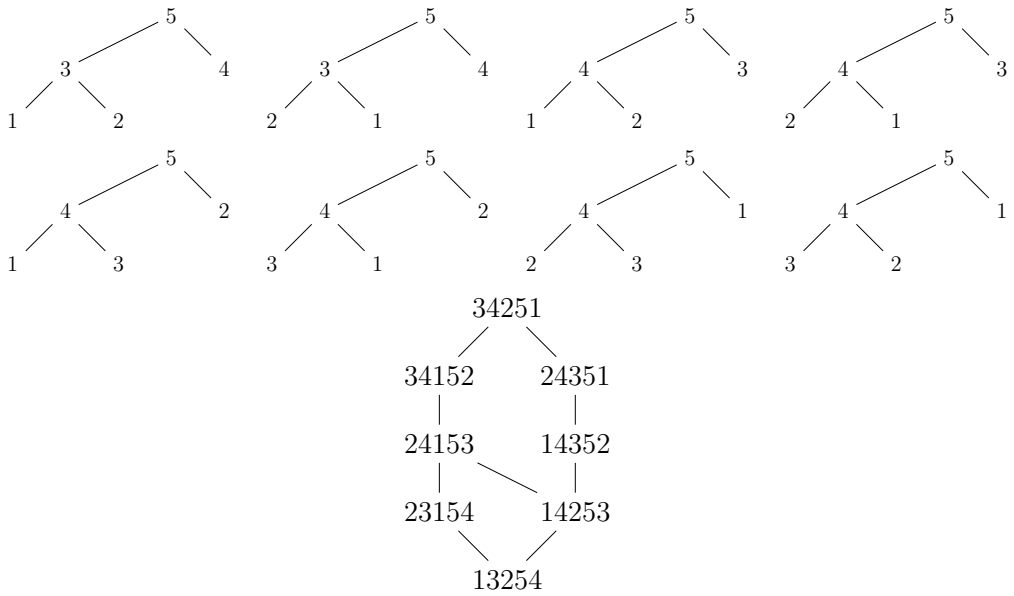


FIGURE 1.14 – Les arbres décroissants d'un arbre binaire donné et l'intervalle correspondant dans l'ordre gauche.

Arbres planaires

Nous aurons besoin par la suite d'une autre famille d'arbres, les arbres planaires enracinés.

Un arbre planaire se décrit récursivement comme étant un nœud racine auquel est greffée une liste d'arbres planaires : les *fils* du nœud. La liste peut être vide et l'ordre des arbres dans la liste est important. La taille d'un arbre est donnée par son nombre de nœuds. Les arbres binaires de taille n sont en bijection avec les arbres planaires de taille $n+1$ par l'opération suivante : soit F l'arbre planaire associé à T, alors

1. Si x est le fils gauche de y dans T, alors x est le *frère gauche* de y dans F,
2. Si x est le fils droit de y dans T, alors x est le fils de y dans F.

Récursivement, on part d'un nœud racine p_0 dans F et on insère les nœuds de T. Si T contient un unique nœud x, il devient le fils de p_0. Sinon, on a $T = x(T_1, T_2)$ et on insère d'abord T_1 puis le nœud x et enfin on insère T_2 dans l'arbre de racine x. Cette bijection met en lumière une structure récursive différente de la structure usuelle sur les arbres binaires : un arbre binaire est une liste d'autres arbres greffés sur sa branche gauche. La bijection est illustrée figure 1.15.

La bijection peut aussi se faire directement avec les chemins de Dyck. Un chemin de Dyck s'écrit comme une suite de chemins primitifs, chaque chemin primitif correspondant à un fils de la racine. On lit sur les trois objets une statistique que nous utiliserons à plusieurs reprises : le nombre de *nœuds sur la branche gauche* de l'arbre binaire correspond au nombre de fils de la racine de l'arbre planaire et au nombre de chemins primitifs qui

composent le chemin de Dyck qu'on appelle aussi nombre de *retours à 0* [Fin13a, Fin13b].

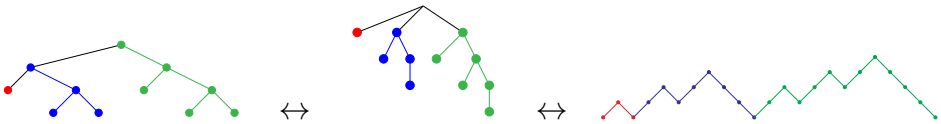


FIGURE 1.15 – Bijection arbre binaire / arbre planaire / chemin de Dyck.

1.1.5 Arbres Cambriens

Les arbres Cambriens généralisent les arbres binaires de recherche définis dans le paragraphe précédent. Ces objets ont été introduits par N. Reading en 2006 [Rea06], sous une formulation différente mais équivalente à celle présentée ici, dans le cadre de l'étude des treillis Cambriens. Ces treillis sont définis de façon générale pour tout groupe de Coxeter mais nous ne donnons ici que la définition pour le type A, *i.e.,* le groupe symétrique.

Arbres Cambriens et arbres croissants

Considérons un arbre dirigé T sur un ensemble de sommets V et un sommet $v \in \mathrm{V}$. On appelle *enfants* (resp. *parents*) de v les sources des arêtes entrantes (resp. les destinations des arêtes sortantes) de v et *sous-arbre des descendants* (resp. *ancêtres*) de v les sous-arbres qui lui sont attachés. Notre définition est adaptée de [IO13, LP13].

Définition 19. *Un* arbre Cambrien *est un arbre dirigé* T *avec un ensemble de sommets* V*, muni d'un étiquetage bijectif des sommets* $p : \mathrm{V} \to [n]$ *tel que pour chaque sommet* $v \in \mathrm{V}$*,*

(i) v *a soit un parent et deux fils (ses descendants sont appelés* sous-arbres gauche et droit*) ou un fils et deux parents (ces sous-arbres des ancêtres sont appelés* sous-arbres gauche et droit*) ;*

(ii) toutes les étiquettes sont plus petites (resp. grandes) que $p(v)$ *dans le sous-arbre gauche (resp. droit) de* v*.*

La signature *de* T *est le* n*-uplet* $\varepsilon(\mathrm{T}) \in \pm^n$ *définie par* $\varepsilon(\mathrm{T})_{p(v)} = -$ *si* v *a deux fils et* $\varepsilon(\mathrm{T})_{p(v)} = +$ *si* v *a deux parents. On note* $\mathrm{Camb}(\varepsilon)$ *l'ensemble des arbres Cambriens ayant* ε *comme signature,* $\mathrm{Camb}(n) = \bigsqcup_{\varepsilon \in \pm^n} \mathrm{Camb}(\varepsilon)$ *l'ensemble des arbres Cambriens ayant* n *sommets, et* $\mathrm{Camb} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Camb}(n)$ *l'ensemble de tous les arbres Cambriens.*

Définition 20. *Un* arbre croissant *est un arbre dirigé* T *avec un ensemble de sommets* V*, muni d'un étiquetage bijectif des sommets* $q : \mathrm{V} \to [n]$ *tel que* $v \to w$ *dans* T *implique que* $q(v) < q(w)$*.*

Définition 21. *Un* arbre Cambrien à niveaux *est un arbre dirigé* T *avec un ensemble de sommets* V*, muni de deux étiquetages bijectifs des sommets* $p, q : V \to [n]$ *qui définissent respectivement un arbre Cambrien et un arbre croissant.*

En d'autres termes, un arbre Cambrien à niveaux est un arbre Cambrien muni d'une extension linéaire de sa clôture transitive.

La figure 1.16 fournit un exemple d'arbre Cambrien (gauche), d'arbre croissant (milieu) et d'arbre Cambrien à niveaux (droite). Toutes les arêtes sont orientées du bas vers le haut. Tout au long de ce mémoire, nous représenterons les arbres Cambriens à niveaux sur une grille $(n \times n)$ de la façon suivante (voir figure 1.16) :

1. chaque sommet v apparaît à la position $(p(v), q(v))$;
2. les sommets négatifs (avec un parent et deux fils) sont représentés par $\ominus$ et les sommets positifs (avec un fils et deux parents) sont représentés par $\oplus$;
3. on dessine parfois (lorsque cela aide à la compréhension) un mur vertical rouge sous les sommets négatifs et au-dessus des sommets positifs pour marquer la séparation entre les sous-arbres gauche et droit de chaque sommet.

Remarque 22 (Épines de triangulations)**.** Les arbres Cambriens peuvent être vus comme des épines (*i.e.,* arbres duaux orientés et étiquetés) de triangulations de polygones étiquetées. Plus précisément, considérons un $(n+2)$-gone P^ε avec des sommets étiquetés par $0, \ldots, n+1$ de gauche à droite, et où le sommet i est situé au-dessus de la diagonale $[0, n+1]$ si $\varepsilon_i = +$ et en dessous si $\varepsilon_i = -$. On associe à une triangulation σ d'un polygone P^ε son arbre dual, avec un sommet étiqueté par j pour chaque triangle ijk de σ dans lequel $i < j < k$, et une arête entre deux triangles adjacents orientée du triangle situé au-dessous vers le triangle situé au-dessus de la diagonale commune (voir la figure 1.17 et se réferer à [LP13] pour les détails de cette construction). Tout au long de cette partie, on note T^* la triangulation de P^ε duale de l'arbre Cambrien T, et on utilise cette interprétation pour fournir au lecteur une intuition géométrique des définitions et des résultats.

Proposition 23 ([LP13, IO13])**.** *Pour toute signature $\varepsilon \in \pm^n$, le nombre d'arbres ε-Cambriens est le nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Donc, $|\mathrm{Camb}(n)| = 2^n C_n$. Voir [OEI10, A151374].*

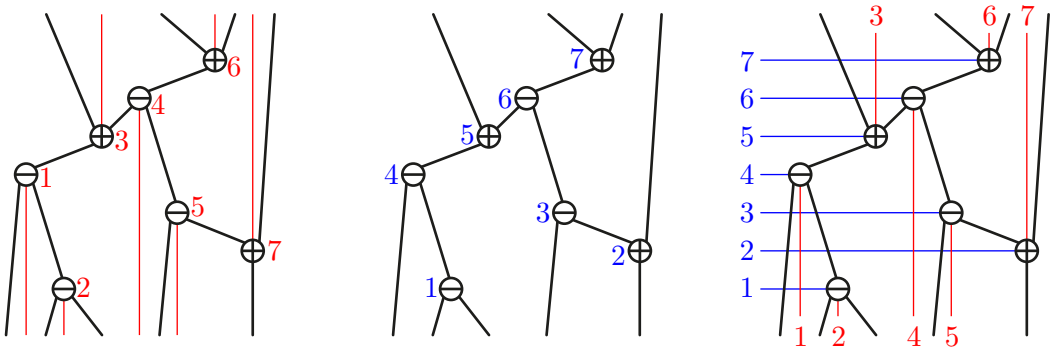


FIGURE 1.16 – Un arbre Cambrien (gauche), un arbre croissant (milieu), un arbre Cambrien à niveau (droite).

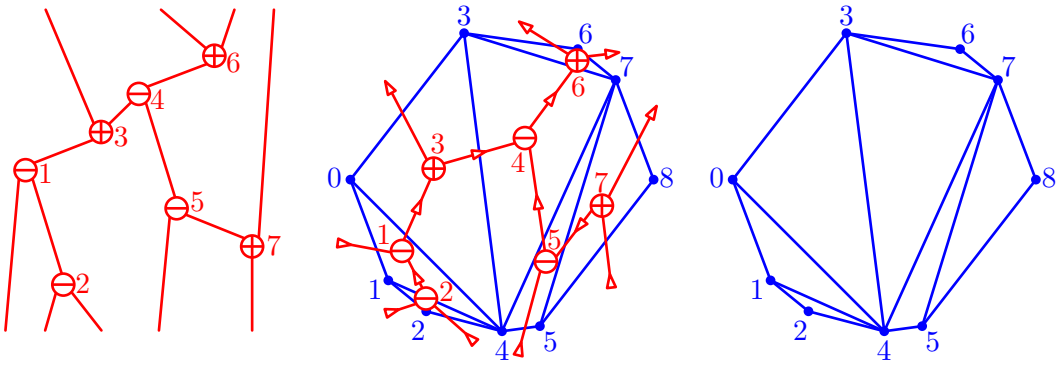


FIGURE 1.17 – Un arbre Cambrien (à gauche) et une triangulation (à droite) sont duaux l'un de l'autre (au milieu).

Il y a plusieurs façons de prouver ce résultat (à notre connaissance, les deux dernières sont originales) :

(i) En utilisant la description de [LP13] donnée dans la remarque précédente, on déduit directement que le nombre d'arbres ε-Cambriens est le nombre de triangulations d'un $(n+2)$-gone convexe, ce qui est compté par les nombres de Catalan.

(ii) Les arbres Cambriens sont en bijection avec des permutations évitant certains motifs, voir paragraphe 1.1.5. Dans la proposition 33, on montre que la forme de l'arbre de génération de cette famille de permutations est indépendante de ε.

(iii) Dans le lemme 102, nous donnons une bijection explicite entre des arbres ε et ε'-Cambriens, où ε et ε' diffèrent seulement par un échange de deux signes consécutifs ou un remplacement du signe de 1 (ou celui de n) par le signe opposé. Comme les arbres Cambriens sont exactement les arbres binaires pour la signature $(-)^n$, on en conclut la proposition voulue.

Correspondance Cambrienne

Nous représentons graphiquement une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ par une table $(n \times n)$, dont les lignes sont indixées par les positions de bas en haut et les colonnes par les valeurs de gauche à droite. Autrement dit, nous plaçons un point en ligne i et en colonne $\tau(i)$ pour tout $i \in [n]$. Ce choix d'orientation non classique est nécessaire pour correspondre davantage aux constructions déjà existantes de [LR98, HNT05].

Une *permutation signée* est une permutation dans laquelle les valeurs reçoivent un signe. On représente graphiquement une permutation signée par une table de permutation dans laquelle chaque point est doté d'un signe $+$ ou $-$ comme on peut le voir dans la partie supérieure gauche de la figure 1.18. La *p-signature* (resp. *v-signature*) d'une permutation signée τ est la suite $\varepsilon_p(\tau)$ (resp. $\varepsilon_v(\tau)$) de signes de τ ordonnée par positions de bas en haut (resp. par valeurs de gauche à droite).

Dans les exemples concrets, nous soulignons les positions/valeurs négatives et nous surlignons les positives : par exemple, nous écrivons $\underline{2}\overline{7}\underline{5}\underline{1}\overline{3}\underline{4}\overline{6}$ pour la permutation signée représentée dans la partie supérieure gauche de la figure 1.18, où $\tau = [2, 7, 5, 1, 3, 4, 6]$, $\varepsilon_p = -+--+-+$ et $\varepsilon_v = --+--++$.

Pour une signature $\varepsilon \in \pm^n$, on note $\mathfrak{S}_\varepsilon$ (resp. $\mathfrak{S}^\varepsilon$) l'ensemble des permutations signées τ de p-signature $\varepsilon_p(\tau) = \varepsilon$ (resp. de v-signature $\varepsilon_v(\tau) = \varepsilon$). Pour finir, on note

$$\mathfrak{S}_\pm := \bigsqcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \varepsilon\in\pm^n}} \mathfrak{S}_\varepsilon = \bigsqcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \varepsilon\in\pm^n}} \mathfrak{S}^\varepsilon$$

l'ensemble de toutes les permutations signées.

Nous présentons maintenant une généralisation d'un algorithme présenté dans [LP13] permettant de construire un arbre ε-Cambrien à niveaux $\Theta(\tau)$ en partant d'une permutation signée $\tau \in \mathfrak{S}^\varepsilon$. La figure 1.18 illustre cet algorithme sur la permutation $\underline{2}\overline{7}\underline{5}\underline{1}\overline{3}\underline{4}\overline{6}$. Pour commencer, nous pré-calculons la table de la permutation τ (avec des points signés aux positions $(\tau(i), i)$ pour $i \in [n]$) et traçons un mur vertical sous les sommets négatifs et au-dessus des sommets positifs. On connecte ensuite les points de bas en haut (en lisant donc la permutation τ de la gauche vers la droite) de la façon suivante : l'algorithme commence avec une branche entrante entre chaque couple de valeurs négatives consécutives, représentées dans la figure 1.18 en haut à gauche par des points entre chaque valeur sur la ligne en bas du tableau. Un sommet négatif $\ominus$ connecte les deux branches qui sont respectivement immédiatement à sa gauche et immédiatement à sa droite pour former une unique branche sortante. Un point positif $\oplus$ sépare la seule branche visible (n'étant pas cachée derrière un mur) en deux branches sortantes. L'algorithme se termine avec une branche sortante entre chaque couple de valeurs positives consécutives, représentées dans la figure 1.18 en haut à gauche par des points entre chaque valeur sur la ligne en haut du tableau. La figure 1.18 illustre un exemple d'application de cet algorithme.

Proposition 24 ([LP13])**.** *L'application Θ est une bijection entre les permutations signées et les arbres Cambriens à niveaux.*

Remarque 25. La *correspondance de Robinson-Schensted* est une bijection entre les permutations et les paires de tableaux de Young standard de même forme. L'algorithme de Schensted [Sch61] donne une façon algorithmique efficace de créer la paire de tableaux $(\mathbf{P}(\tau), \mathbf{Q}(\tau))$ correspondant à une permutation τ par insertions successives : le premier tableau $\mathbf{P}(\tau)$ (*tableau d'insertion*) se souvient des éléments insérés de τ et le deuxième tableau (*tableau d'enregistrement*) se souvient de l'ordre dans lequel les éléments ont été insérés. Comme abordé précédemment dans 1.1.4, F. Hivert, J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon définissent dans [HNT05] une correspondance similaire, appelée *correspondance sylvestre*, entre les permutations et les paires d'arbres étiquetés de même forme. Dans la correspondance sylvestre, le premier arbre (arbre d'insertion) est un arbre binaire de recherche standard et le deuxième arbre (arbre d'enregistrement) est un arbre binaire croissant. La *correspondance Cambrienne* est exactement une correspondance entre les permutations signées et les paires d'arbres de même forme, dans laquelle le premier arbre, appelé *arbre*

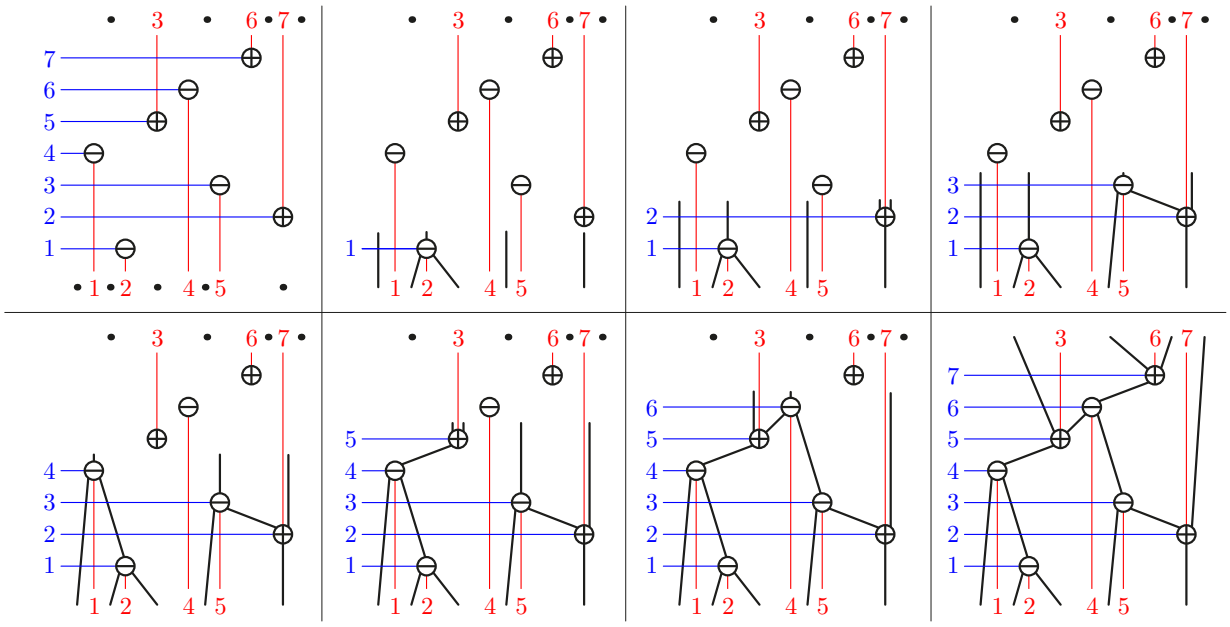


FIGURE 1.18 – L'algorithme d'insertion sur la permutation signée $\underline{2}\overline{7}\underline{5}\underline{1}\overline{3}\underline{4}\overline{6}$.

d'insertion, est étiqueté de façon Cambrienne et le second arbre, appelé *arbre d'enregistrement*, est croissant, ces deux arbres étant encodés ensembles dans un arbre Cambrien à niveaux. Cette analogie motive la définition suivante.

Définition 26. *Soit une permutation $\tau \in \mathfrak{S}^{\varepsilon}$. Son* **P**-symbole *est l'arbre d'insertion Cambrien $\mathbf{P}(\tau)$ defini par $\Theta(\tau)$ et son* **Q**-symbole *est l'arbre d'enregistrement croissant $\mathbf{Q}(\tau)$ défini par $\Theta(\tau)$.*

La caractérisation suivante des fibres de **P** est immédiate par la description de l'algorithme. Comme expliqué dans le paragraphe 1.1.2, on note $\mathcal{L}(\mathrm{G})$ l'ensemble des extensions linéaires d'un graphe dirigé G.

Proposition 27. *Les permutations signées $\tau \in \mathfrak{S}^{\varepsilon}$ telles que $\mathbf{P}(\tau) = \mathrm{T}$ sont précisément les extensions linéaires de (la clôture transitive de) T.*

Exemple 28. Quand $\varepsilon = (+)^n$, la procédure construit l'arbre binaire de recherche $\mathbf{P}(\tau)$ pointant vers le haut par insertions successives en partant de la gauche. De la même façon, $\mathbf{P}(\tau)$ est l'arbre croissant $\mathrm{IT}(\tau)$ de τ^{-1} est défini pour $\tau = \tau' 1 \tau''$ en greffant l'arbre croissant $\mathrm{IT}(\tau')$ à gauche et l'arbre croissant $\mathrm{IT}(\tau'')$ à droite du noeud racine étiqueté par 1. Quand $\varepsilon = (-)^n$, cette procédure construit un arbre binaire de recherche $\mathbf{P}(\tau)$ pointant vers le bas. Cet arbre s'obtient par insertions successives dans un arbre binaire de recherche de droite à gauche. De façon équivalente, $\mathbf{P}(\tau)$ est l'arbre décroissant de τ^{-1} défini pour $\tau = \tau' n \tau''$ en greffant l'arbre décroissant $\mathrm{DT}(\tau')$ à gauche et l'arbre décroissant $\mathrm{DT}(\tau'')$ à droite du noeud racine étiqueté par n. Ces observations sont illustrées figure 1.19.

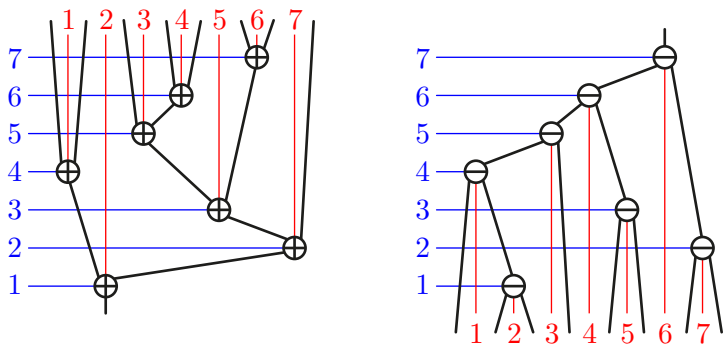


FIGURE 1.19 – La procédure d'insertion sur une permutation $\sigma = 2751346$ produit un arbre binaire de recherche quand la signature est constante positive (gauche) ou constante négative (droite).

Remarque 29 (Correspondance Cambrienne sur les triangulations)**.** N. Reading [Rea06] a décrit en premier l'application $\mathbf{P}$ sur les triangulations d'un polygone P^ε (remarque 22). La triangulation $\mathbf{P}(\tau)^*$ est l'union des chemins $\pi_0, \ldots, \pi_n$ où π_i est le chemin entre le sommet 0 et $n+1$ de P^ε passant par les sommets dans la différence symétrique $\varepsilon^{-1}(-) \triangle \tau([i])$.

Congruence Cambrienne

Suivant la définition de la congruence sylvestre [HNT05], caractérisons maintenant par une relation de congruence les permutations signées $\tau \in \mathfrak{S}^\varepsilon$ qui ont le même $\mathbf{P}$-symbol $\mathbf{P}(\tau)$. La définition originelle de la congruence Cambrienne a été donné par N. Reading dans [Rea06].

Définition 30 ([Rea06])**.** *Pour une signature $\varepsilon \in \pm^n$, la congruence ε-Cambrienne est la relation d'équivalence sur $\mathfrak{S}^\varepsilon$ définie comme étant la clôture transitive des règles de réécriture suivantes :*

$$\begin{aligned} UacVbW &\equiv_\varepsilon UcaVbW \quad \text{si } a < b < c \text{ et } \varepsilon_b = -, \\ UbVacW &\equiv_\varepsilon UbVcaW \quad \text{si } a < b < c \text{ et } \varepsilon_b = +, \end{aligned}$$

où a, b, c sont des éléments de $[n]$ et U, V, W sont des mots sur l'alphabet $[n]$. La congruence Cambrienne est la relation d'équivalence sur toutes les permutations signées $\mathfrak{S}_\pm$ obtenue comme union de toutes les congruences ε-Cambriennes :

$$\equiv \; := \bigsqcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \varepsilon \in \pm^n}} \equiv_\varepsilon .$$

Proposition 31. *Deux permutations signées $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}^\varepsilon$ sont ε-Cambriennes congruentes si et seulement si elles ont le même $\mathbf{P}$-symbole :*

$$\tau \equiv_\varepsilon \tau' \iff \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{P}(\tau').$$

Démonstration. Prouver cette proposition revient à observer que deux sommets consécutifs a et c dans une extension linéaire τ d'un arbre ε-Cambrien T peuvent être échangés en restant une extension linéaire τ' de T précisement lorsqu'elles appartiennent à deux sous-arbres différents d'un sommet b de T. Il suit que les sommets a et c se trouvent de part et d'autre de b et que donc $a < b < c$. Si $\varepsilon_b = -$, alors a, c apparaissent avant b et $\tau = UacVbW$ peut être transformé en $\tau' = UcaVbW$, tandis que si $\varepsilon_b = +$, alors a, c apparaissent après b et $\tau = UbVacW$ peut être transformé en $\tau' = UbVcaW$.

Inversement, si deux permutations σ et τ appartiennent aux extensions linéaires d'un même arbre Cambrien T, il est possible de réécrire l'une en l'autre par une suite de transpositions. Les seules transpositions qu'il est possible d'appliquer à une extension linéaire $\sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{T})$ pour obtenir une autre extension linéaire de T sont celles qui échangent deux éléments a et c incomparables dans l'arbre T. On observe que ces deux éléments sont incomparables dans un arbre Cambrien T si et seulement si ils apparaissent dans deux sous-arbres différents d'un même nœud, ce qui est équivalent à avoir une valeur intermédiaire positive (resp. négative) située avant (resp. après) dans l'extension linéaire. □

Classes Cambriennes et arbres de génération

Étudions maintenant les classes d'équivalence de la congruence Cambrienne. Rappelons que l'*ordre faible (droit)* sur $\mathfrak{S}^\varepsilon$ est défini comme l'ordre d'inclusion sur les ensembles de coinversions, où une *coinversions* de $\tau \in \mathfrak{S}^\varepsilon$ est une paire de valeurs $i < j$ telle que $\tau^{-1}(i) > \tau^{-1}(j)$ (quelle que soit la signature de τ). Dans cette partie, nous travaillerons toujours avec l'ordre faible droit, que nous appellerons simplement ordre faible par souci de concision. La proposition suivante est due à N. Reading [Rea06].

Proposition 32 ([Rea06])**.** *Toutes les classes ε-Cambriennes sont des intervalles de l'ordre faible sur $\mathfrak{S}^\varepsilon$.*

Par conséquent, les arbres ε-Cambriens sont en bijection avec les permutations maximales pour l'ordre faible des classes ε-Cambriennes. En utilisant la definition 30 et la proposition 31, on voit facilement que ces permutations sont précisement celles qui évitent les motifs signés b-ac avec $\varepsilon_b = +$ et ac-b avec $\varepsilon_b = -$ (que l'on écrira à partir de maintenant $\bar{b}$-ac and ac-$\underline{b}$). Cette observation nous permet de construire un arbre de génération $\mathcal{T}_\varepsilon$ pour ces permutations. Cet arbre a n niveaux et les noeuds au niveau m sont étiquetés par des permutations de $[m]$ évitant les deux motifs $\bar{b}$-ac et ac-$\underline{b}$. Le père d'une permutation dans $\mathcal{T}_\varepsilon$ est obtenu en supprimant la valeur maximale. Deux exemples d'arbres de génération sont présentés dans la figure 1.20. La proposition suivante fournit une autre preuve du fait que le nombre d'arbres ε-Cambriens sur n sommets est toujours le nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, ainsi qu'une bijection explicite entre des arbres ε-Cambriens et ε'-Cambriens pour des signatures distinctes $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \pm^n$.

Proposition 33. *Pour toutes signatures $\varepsilon, \varepsilon' \in \pm^n$, les arbres de générations $\mathcal{T}_\varepsilon$ et $\mathcal{T}_{\varepsilon'}$ sont isomorphes.*

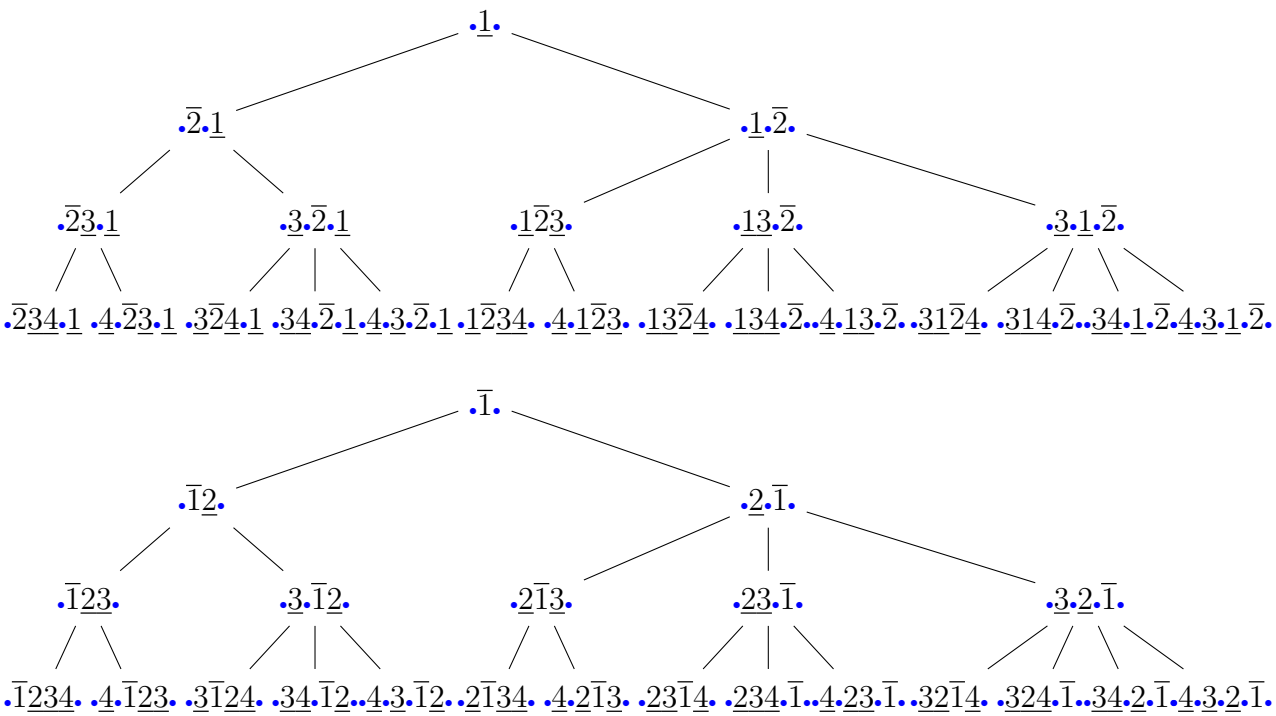


FIGURE 1.20 – Les arbres de génération $\mathcal{T}_\varepsilon$ pour les signatures $\varepsilon = -+--$ (haut) et $\varepsilon = +---$ (bas). Les espaces libres sont marqués avec un point bleu.

Considérons les positions possibles de $m+1$ dans les enfants d'une permutation τ au niveau m dans $\mathcal{T}_\varepsilon$. On indice par $\{0,\dots,m\}$ de gauche à droite les espaces avant la première lettre, entre deux lettres consécutives, et après la dernière lettre de τ. On appelle *espace libre* les éléments de $\{0,\dots,m\}$ où placer $m+1$ ne créé par le motif $ac\text{-}\underline{b}$ ou $\bar{b}\text{-}ac$. Ce sont les points marqués en bleu dans la figure 1.20.

Lemme 34. *Une permutation avec k espaces libres a k enfants dans $\mathcal{T}_\varepsilon$, et chacun des k enfants a un nombre d'espaces libres différent, variant de 2 à $k+1$.*

Démonstration. Soit τ une permutation au niveau m dans $\mathcal{T}_\varepsilon$ avec k espaces libres. Soit σ le fils de τ dans $\mathcal{T}_\varepsilon$ obtenu en insérant $m+1$ dans un espace libre $j \in \{0,\dots,m\}$. Si ε_{m+1} est négatif (resp. positif), alors les espaces libres de σ sont 0, $j+1$ et les espaces libres de τ situés après j (resp. avant $j+1$). Le résultat est impliqué par cette observation. □

Preuve de la proposition 33. Ordonnons les enfants d'une permutation dans $\mathcal{T}_\varepsilon$ de la gauche vers la droite par nombre croissant d'espaces libres comme dans figure 1.20. Le lemme 34 montre que la forme de cet arbre est indépendante de ε. Il assure que les arbres $\mathcal{T}_\varepsilon$ et $\mathcal{T}_{\varepsilon'}$ sont isomorphes et donne une bijection explicite entre les arbres ε-Cambriens et ε'-Cambriens. □

Canopée

La canopée d'un arbre binaire a déjà été utilisée par J.-L. Loday dans [LR98, Lod04] mais le nom a été trouvé par X. Viennot [Vie07]. Cette notion a ensuite été étendue aux arbres Cambriens (ou épines) dans [LP13] pour définir une surjection de l'associaèdre $\mathsf{Asso}(\varepsilon)$ au parallélépipède $\mathsf{Para}(n)$ généré par les racines simples. La principale observation est que les sommets i et $i+1$ sont toujours comparables, *i.e.,* reliés par un chemin, dans un arbre Cambrien (dans le cas contraire, ils appartiendraient à deux sous-arbres distincts d'un sommet j tel que $i < j < i+1$).

Définition 35. *La canopée d'un arbre Cambrien* T *est la séquence* $\mathbf{can}(\mathrm{T}) \in \pm^{n-1}$ *définie par* $\mathbf{can}(\mathrm{T})_i = -$ *si* i *est au-dessus de* $i+1$ *dans* T *et* $\mathbf{can}(\mathrm{T})_i = +$ *si* i *est en dessous de* $i+1$ *dans* T.

Par exemple, la canopée de l'arbre Cambrien de la figure 1.16 (gauche) est $-++-+-$. La canopée de T se comporte bien avec les extensions linaires de T et le treillis Cambrien. Pour interpréter ce fait, définissons pour une permutation $\tau \in \mathfrak{S}^\varepsilon$ la suite $\mathbf{rec}(\tau) \in \pm^{n-1}$, dans laquelle $\mathbf{rec}(\mathrm{T})_i = -$ si $\tau^{-1}(i) > \tau^{-1}(i+1)$ et $\mathbf{rec}(\mathrm{T})_i = +$ sinon. En d'autres termes, $\mathbf{rec}(\tau)$ enregistre les *reculs* de la permutation τ, *i.e.,* les *descentes* de la permutation inverse de τ.

Proposition 36. *Les applications* $\mathbf{P}, \mathbf{can}$, *et* $\mathbf{rec}$ *définissent le diagramme commutatif d'homomorphismes de treillis suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}^\varepsilon \arrow[rr, two heads, "\mathbf{rec}"] \arrow[dr, two heads, "\mathbf{P}"'] & & \pm^{n-1} \\
& \mathrm{Camb}(\varepsilon) \arrow[ur, two heads, "\mathbf{can}"'] &
\end{tikzcd}$$

Les fibres de ces applications sur l'ordre faible de $\mathfrak{S}_\varepsilon$ pour $\varepsilon = -+--$ et $\varepsilon = +---$ sont représentées figure 1.34.

1.2 Treillis

Dans cette partie, nous introduisons la structure de treillis. Ces objets sont à la base de notre travail et nous donnons un aperçu de leurs propriétés fondamentales. Pour une approche plus complète, nous invitons le lecteur à se reporter aux ouvrages suivants [Sta99], [Bir79], [DP02] et [LS96].

1.2.1 Définition et exemples

Soit Z une partie d'un poset P. La borne inférieure de Z, notée $\wedge Z$, est l'unique élément z tel que

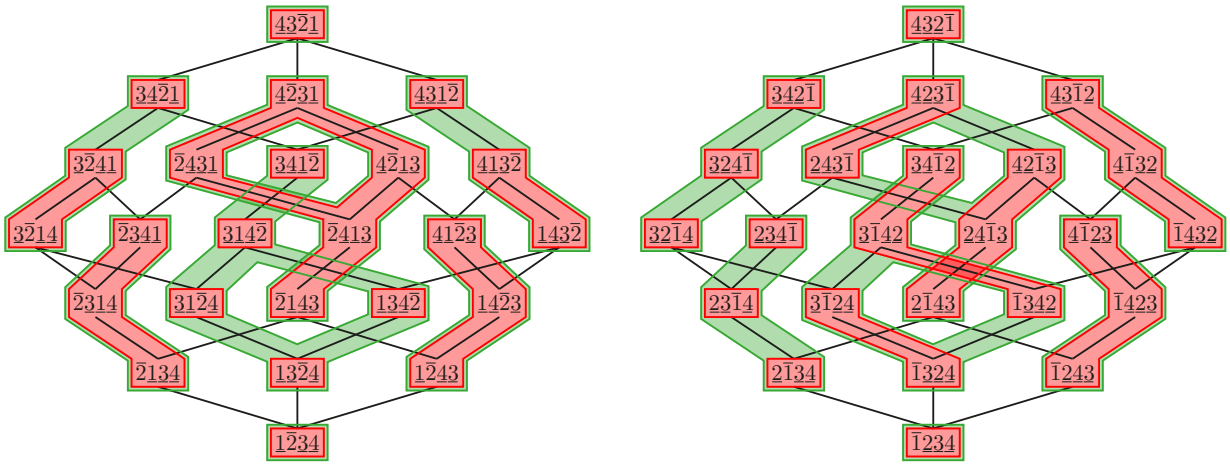


FIGURE 1.21 – Les fibres des applications **P** (rouge) et **rec** (vert) sur les ordres faibles $\mathfrak{S}_\varepsilon$ pour $\varepsilon = -+--$ (gauche) et $\varepsilon = +---$ (droite).

$$y \leq z \Leftrightarrow \forall x \in Z, y \leq x \tag{1.7}$$

s'il existe ou $\emptyset$ sinon. De façon symétrique, la borne supérieure de Z, notée $\vee Z$ est l'unique élément z tel que

$$y \geq z \Leftrightarrow \forall x \in Z, y \geq x \tag{1.8}$$

s'il existe ou $\emptyset$ sinon. Quand une partie Z ne comporte que deux éléments x et y on écrit aussi $x \wedge y = \wedge Z$ et $x \vee y = \vee Z$.

Définition 37. *Un treillis est un poset P tel que, pour toute partie X de P, $\wedge X$ et $\vee X$ sont différents de $\emptyset$.*

La figure 1.22 présente un exemple de poset qui n'est pas un treillis. En effet, on a que $b \wedge c = \emptyset$ et symétriquement $e \vee f = \emptyset$.

Dans le cas d'un treillis, le calcul de la base est trivial. On a que x appartient à la base du treillis si et seulement si x couvre un unique élément. Pour le treillis donné en exemple dans la figure 1.22, la base est donc formée de quatre éléments : b, c, e et f.

1.2.2 Treillis enveloppant

Un résultat de MacNeille [Mac37] est que tout poset P possède un *treillis enveloppant*, c'est-à-dire qu'il existe un treillis minimal T tel que P soit un sous-poset de T à isomorphisme d'ordre près. La construction de ce treillis est donnée en particulier dans [DP02] et [LS96].

Le treillis enveloppant T d'un poset P est le plus petit ensemble de parties de P clos par intersection, contenant P ainsi que tous les idéaux supérieurs de P. La relation d'ordre est l'inclusion ensembliste et le morphisme plongeant P dans T est celui qui envoie chaque

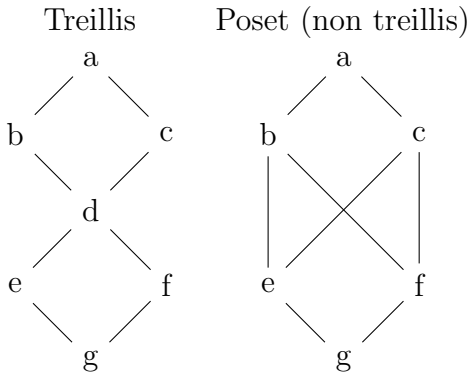


FIGURE 1.22 – Exemple et contre-exemple de treillis

élément sur son idéal. On pourra vérifier dans la figure 1.22 que le treillis de gauche est le treillis enveloppant du poset de droite. En effet, l'élément supplémentaire d est en fait l'intersection des idéaux de b, $\{b, e, f, g\}$ et de c, $\{c, e, f, g\}$.

La propriété suivante du treillis enveloppant est donnée dans [LS96].

Proposition 38. *La base d'un poset P est la même que celle de son treillis enveloppant.*

Pour l'exemple de la figure 1.22, le poset et son treillis enveloppant ont tous les deux comme base $\{b, c, e, f\}$. Nous donnons maintenant plusieurs exemples de treillis connus qui nous serons utiles par la suite.

1.2.3 Ordre faible sur les permutations

L'ordre faible sur les permutations provient du monde des groupes de Coxeter. Le groupe symétrique est en effet un groupe de Coxeter de type A. L'ordre faible droit (resp. gauche) sur les groupes de Coxeter est défini sur les mots réduits comme la clôture transitive de la relation "avoir pour préfixe" (resp "avoir pour suffixe"). Nous utiliserons dans ce mémoire une vision plus combinatoire de cet ordre.

Il existe en effet plusieurs définitions équivalentes de cette ordre dans le cadre des permutations. On peut le voir comme la clôture transitive de la relation qui associe à une première permutation l'ensemble des permutations qui diffèrent de la première par un échange de deux valeurs croissantes dont les positions sont adjacentes pour l'ordre faible droit et un échange de deux valeurs consécutives telles que la plus petite soit à gauche de la plus grande dans le mot. Par exemple, les successeurs de la permutation 6254137 sont les permutations 6**52**4137, 6254**31**7 et 6254**173** dans l'ordre faible droit et les permutations 6**3**5412**7** et **7**2541**36** dans l'ordre faible gauche. Les ordres faibles droit et gauche en taille 3 et 4 sont respectivement illustrés figure 1.23 et figure 1.24.

L'ordre faible droit (resp. gauche) peut être vu de façon équivalente comme l'inclusion des ensembles de coinversions (resp. inversions) des permutations. Cette façon d'interpréter la relation de couverture est illustrée figure 1.25.

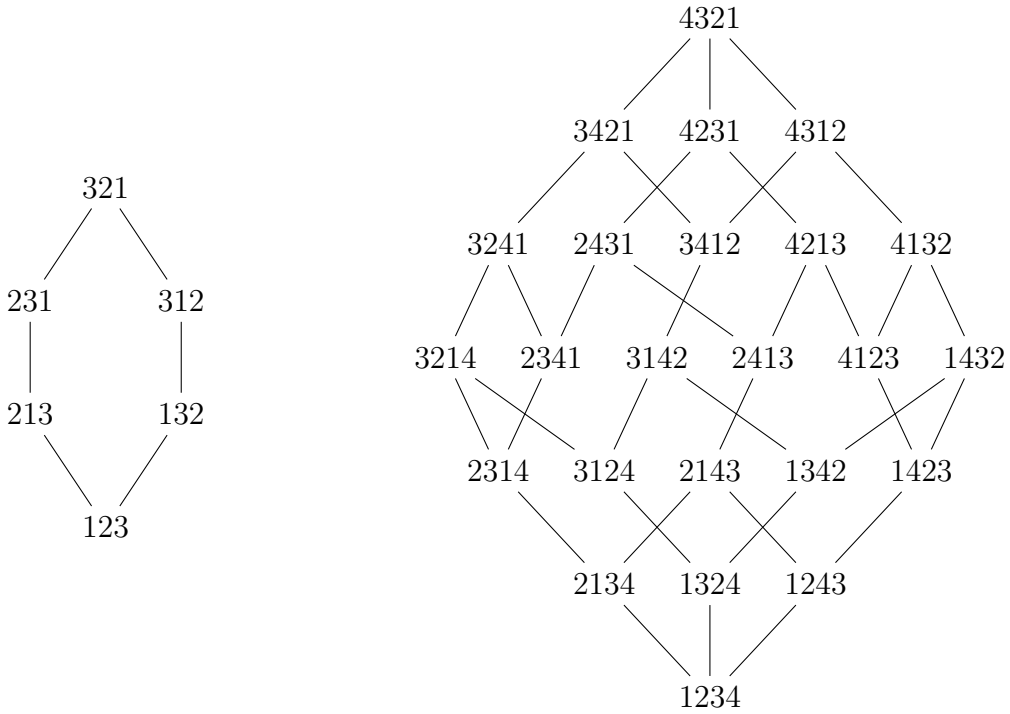


FIGURE 1.23 – Ordre faible droit pour les tailles 3 et 4.

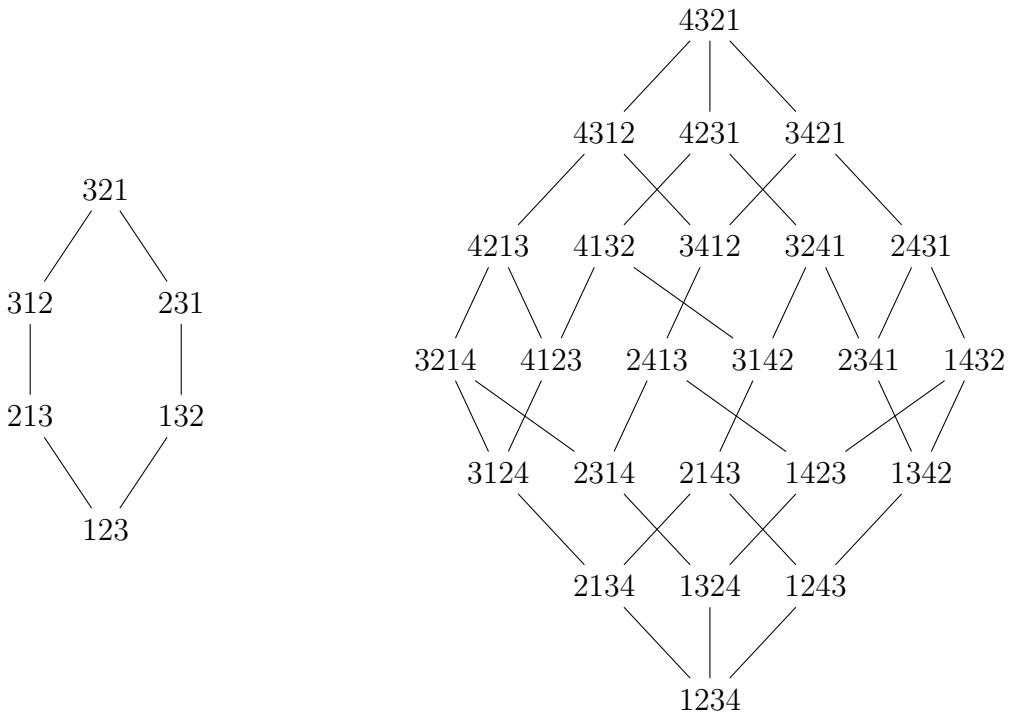


FIGURE 1.24 – Ordre faible gauche pour les tailles 3 et 4.

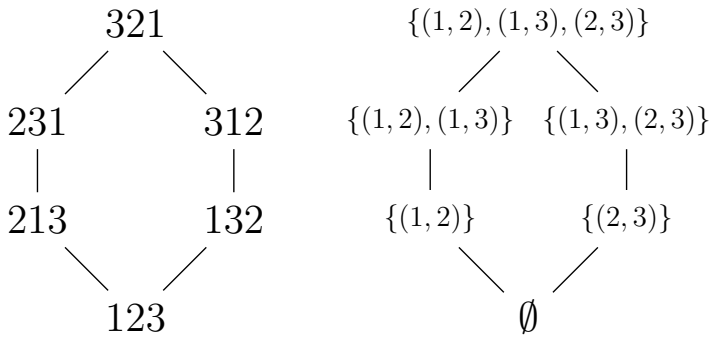


FIGURE 1.25 – L'ordre faible droit en taille 3 (à gauche) et l'ordre d'inclusion sur les ensembles de coinversions des permutations en taille 3 (à droite).

1.2.4 Treillis de Tamari

La définition historique de l'ordre de Tamari est donnée en termes de parenthésages. Nous donnons ici celle en termes de *chemins de Dyck*.

Définition 39. *Soit u un chemin de Dyck tel que u contienne un pas descendant a suivi d'un pas montant b et soit c le chemin primitif ayant b comme premier pas. La rotation sur u en a consiste à échanger le pas descendant a avec le chemin c.*

L'opération de rotation, illustrée dans la figure 1.26, est la relation de couverture de l'ordre de Tamari. C'est-à-dire qu'un chemin v est plus plus grand qu'un chemin u si on peut atteindre v par une série de rotations sur u. Cela définit bien un ordre et même un treillis [HT72]. La figure 1.27 illustre l'ordre de Tamari sur les chemins de Dyck de taille 3 et 4.

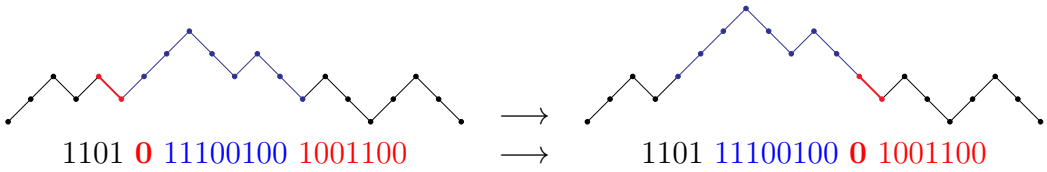


FIGURE 1.26 – Rotation sur les chemins de Dyck.

Par la suite, nous utiliserons plutôt la définition de l'ordre de Tamari sur les arbres binaires. Pour donner la définition du treillis de Tamari sur les arbres binaires, il est nécessaire de traduire l'opération de rotation sur ces objets.

Définition 40. *Soit y un nœud d'un arbre binaire T dont le sous-arbre gauche n'est pas vide et soit x la racine de ce sous-arbre gauche. La rotation droite de T en y est la réécriture locale décrite par la figure 1.29, c'est-à-dire que l'on remplace $y(x(A,B),C)$ par $x(A,y(B,C))$ où A, B et C sont des arbres binaires potentiellement vides.*

Cette opération sur les arbres binaires n'est pas spécifique à l'ordre de Tamari. En effet, elle est utilisée (en complément de son opération symétrique, la rotation gauche) pour *équilibrer* les arbres binaires quand ils sont utilisés dans des algorithmes de stockage de données sous forme organisée [AVL62]. Si on la considère comme une relation de couverture, le poset obtenu est isomorphe à l'ordre obtenu sur les chemins de Dyck. C'est l'ordre de Tamari sur les arbres binaires illustré figure 1.28.

L'opération de rotation n'est pas la seule façon d'obtenir le treillis de Tamari sur les arbres binaires de recherche. En effet, l'algorithme $\mathbf{P}$ que nous avons défini dans le paragraphe 1.1.4, qui à une permutation associe l'arbre binaire de recherche correspondant, fournit un lien entre l'ordre faible et le treillis de Tamari.

Théorème 41. *L'ordre de Tamari est à la fois un sous-treillis de l'ordre faible et un treillis quotient par la relation*

$$\sigma \equiv \mu \Leftrightarrow \mathbf{P}(\sigma) = \mathbf{P}(\mu). \tag{1.9}$$

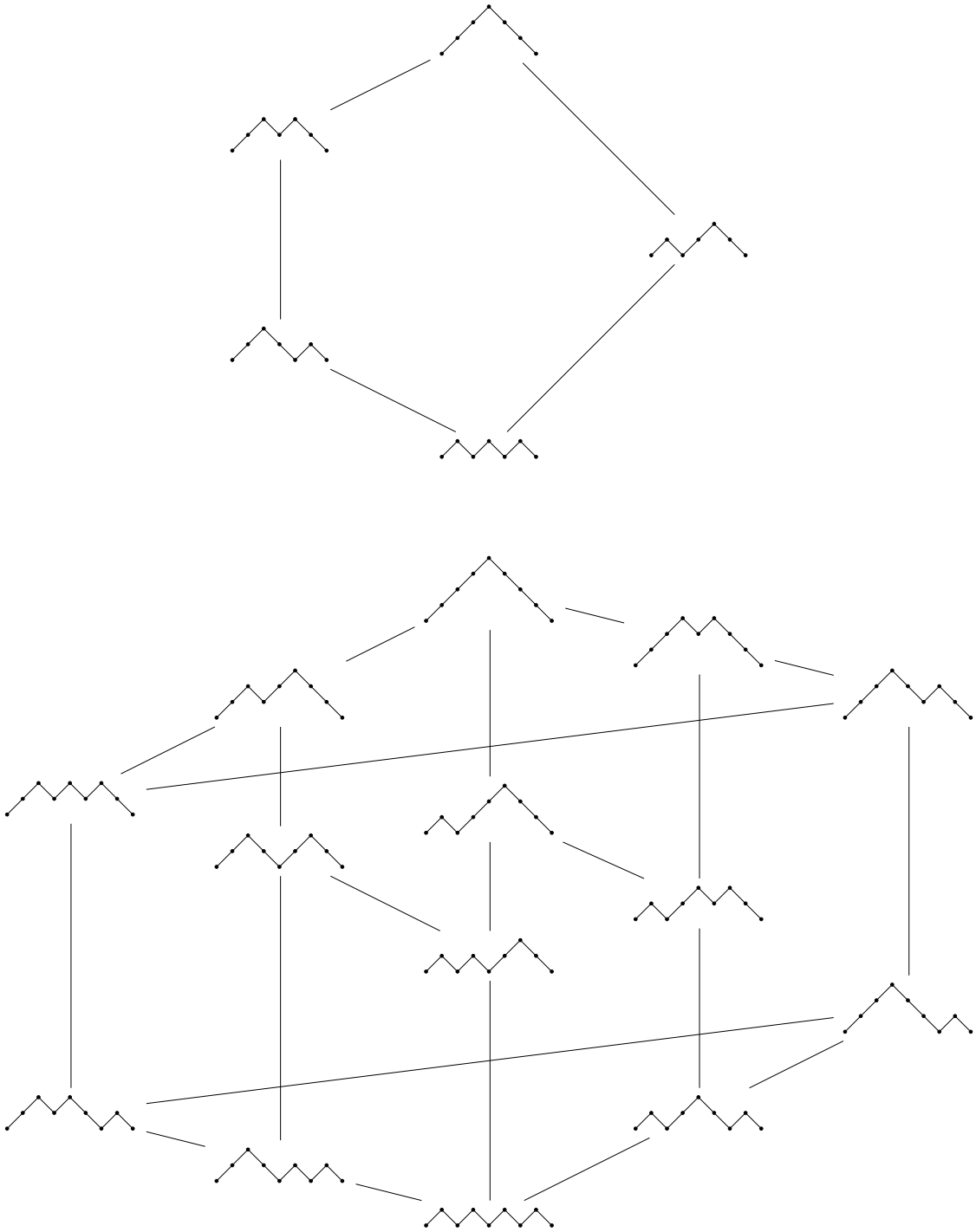


FIGURE 1.27 – Ordre de Tamari sur les chemins de Dyck de tailles 3 et 4, le plus petit élément est le chemin alterné en bas du diagramme.

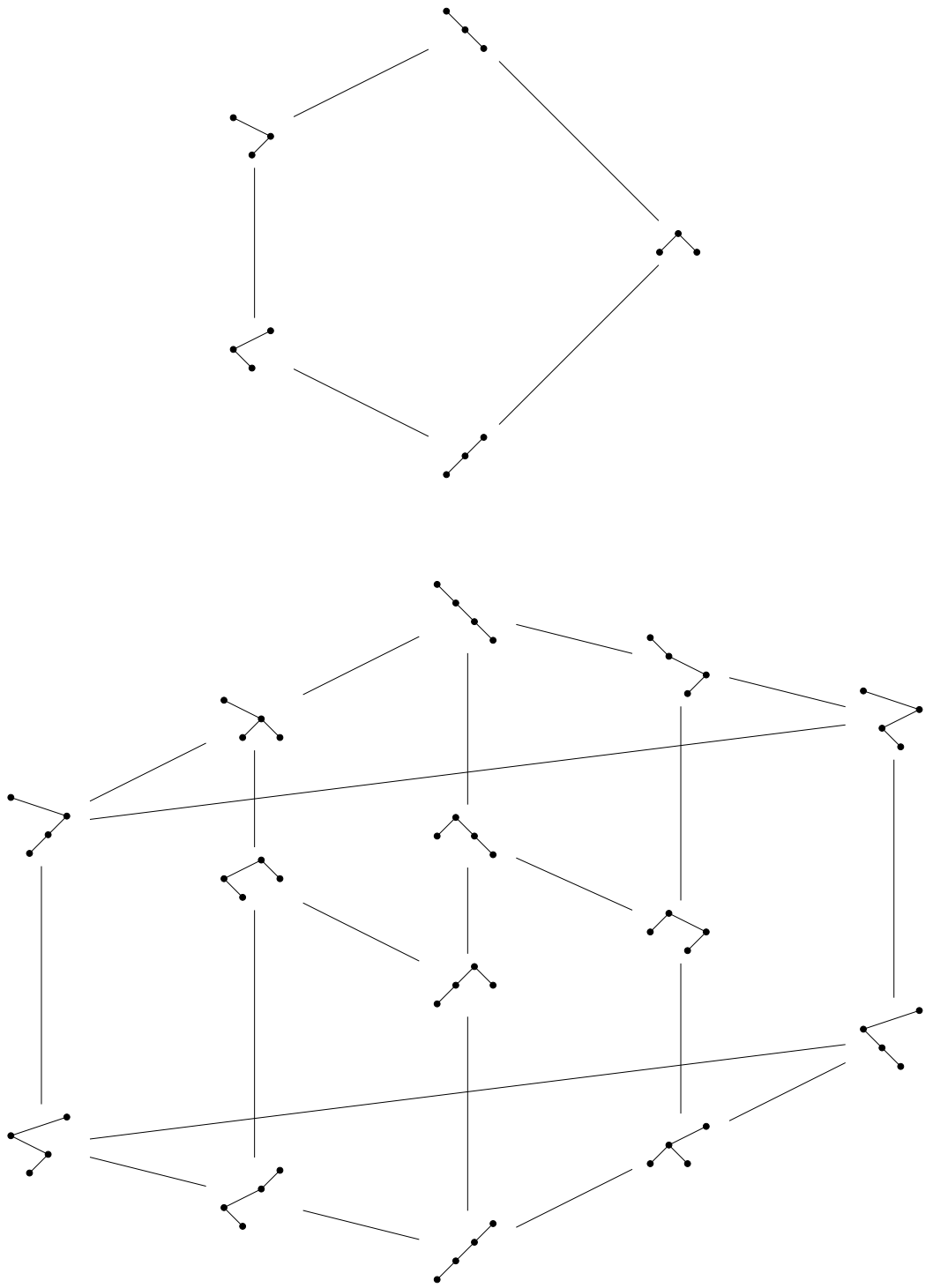


FIGURE 1.28 – Ordre de Tamari sur les arbres binaires de tailles 3 et 4, le plus petit élément est le peigne gauche en bas du diagramme.

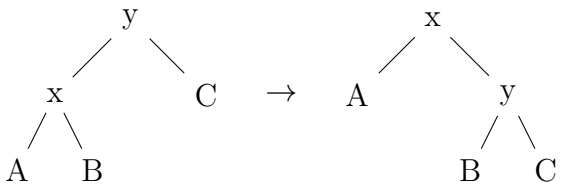


FIGURE 1.29 – Rotation sur les arbres binaires.

L'opération $\mathbf{P}(\sigma)$ découpe l'ordre faible en classes d'équivalences qui sont des intervalles pour l'ordre faible droit. Les éléments maximaux de ces intervalles sont les permutations qui évitent le motif 132. Si on restreint l'ordre faible à ces permutations, on obtient un ordre isomorphe à l'ordre de Tamari. Cette propriété est aussi vraie sur les éléments minimaux des classes. Enfin, l'ordre de Tamari est un quotient de l'ordre faible droit, ce qui s'exprime par

$$\sigma \leq \mu \Rightarrow \mathbf{P}(\sigma) \leq \mathbf{P}(\mu) \tag{1.10}$$

où la relation à gauche est celle de l'ordre faible droit et à droite, celle de Tamari sur les arbres binaires. On pourra vérifier ces propriétés pour les tailles 3 et 4 dans la figure 1.30.

L'ordre de Tamari est aussi un quotient de l'ordre faible gauche par la relation $\sigma \equiv \mu$ si et seulement si les arbres décroissants associés à σ et μ ont le même arbre binaire sous-jacent. Un exemple est donné dans la figure 1.14 d'un arbre binaire et de ses étiquetages décroissants.

L'ordre de Tamari peut aussi être exprimé en termes d'arbres planaires enracinés. La relation de couverture donnée par la rotation se décrit simplement sur les arbres planaires comme le glissement d'un nœud sur son frère gauche (cf. figure 1.31). À partir de la bijection, on vérifie facilement que cette opération correspond bien aux rotations définies sur les chemins de Dyck et les arbres binaires.

Il est aussi possible d'effectuer la bijection symétrique entre les arbres binaires et les arbres planaires en transformant les *fils droits* de l'arbre binaire en *frères droits* de l'arbre planaire. Dans ce cas, le nombre de nœuds sur la branche droite correspond au nombre de fils de la racine de l'arbre planaire. Ces deux bijections jouent un rôle important dans la suite de notre travail. Nous revenons dessus de façon détaillée dans le chapitre 3.

1.2.5 Treillis Cambriens

Nous présentons maintenant la rotation dans les arbres Cambriens qui nous permettra, comme dans le cas du treillis de Tamari, de définir les treillis Cambriens. Cette opération transforme un arbre ε-Cambrien en un autre arbre ε-Cambrien dont seule une coupe orientée diffère par rapport à l'arbre de départ (voir proposition 43).

Définition 42. *Soit $i \to j$ une arête dans un arbre Cambrien* T*, avec $i < j$. Soit L le sous-arbre gauche de i et B le sous-arbre entrant restant de i, et similairement, soit R le*

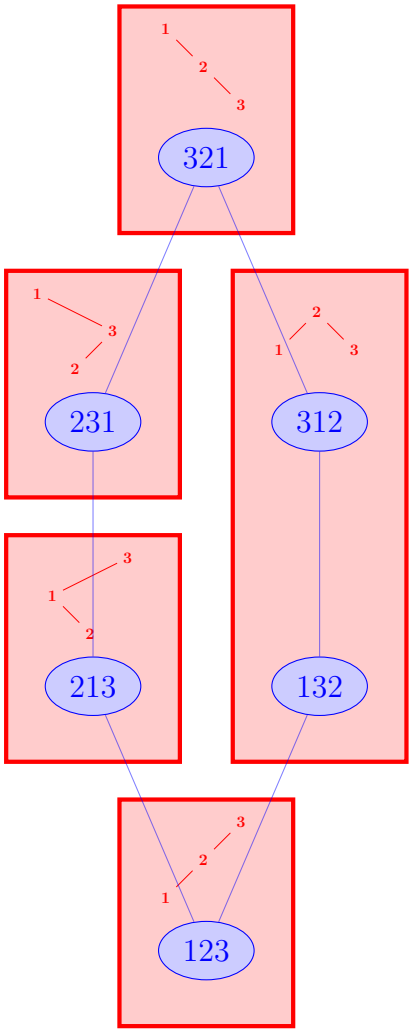
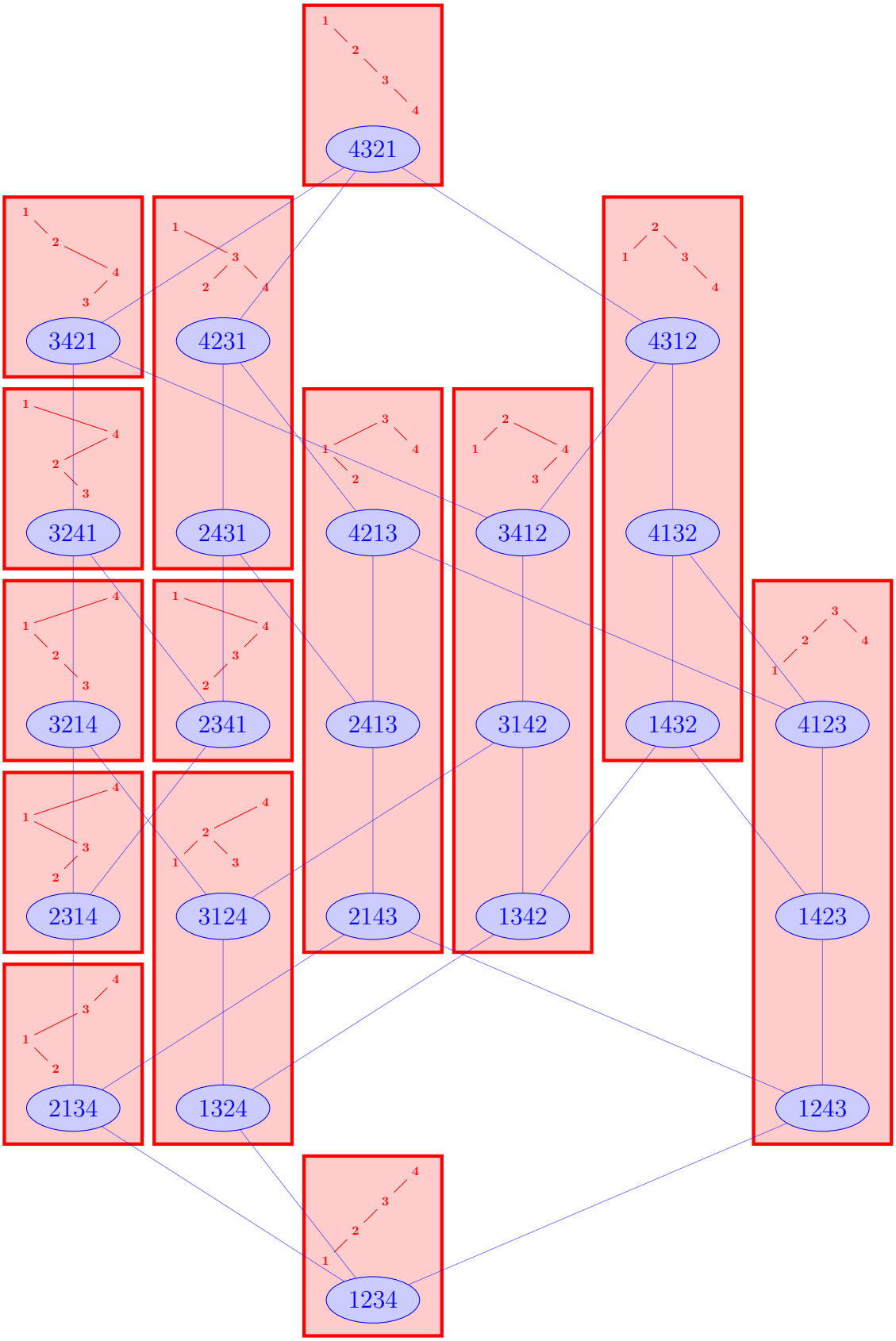


FIGURE 1.30 – L'ordre de Tamari comme quotient de l'ordre faible droit : taille 3 sur la page de gauche et 4 sur la page de droite. Les permutations sont regroupées par classes d'équivalence. On pourra vérifier que si une relation existe entre deux permutations de classes différentes, alors les arbres binaires associés sont comparables dans l'ordre de Tamari.


4321
3421
4231
4312
3241
2431
4213
3412
4132
3214
2341
2413
3142
1432
4123
2314
3124
2143
1342
1423
2134
1324
1243
1234

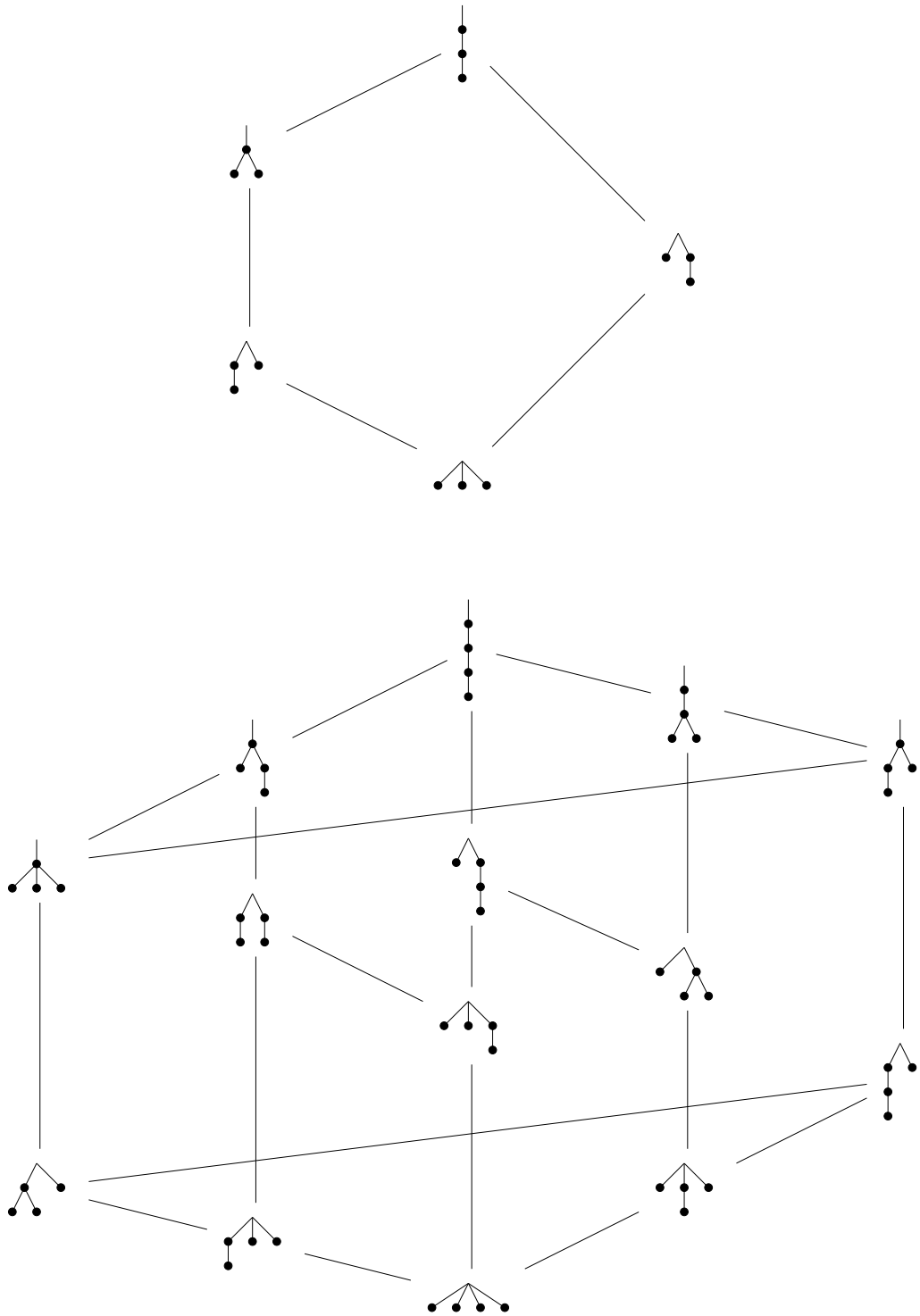


FIGURE 1.31 – Ordre de Tamari sur les arbres planaires, tailles 3 et 4.

sous-arbre droit de j et A le sous-arbre sortant restant de j. Soit T' l'arbre orienté obtenu à partir de T en changeant juste l'orientation de $i \to j$ et en attachant les sous-arbres L et A à i et les sous-arbres B et R à j. La transformation de T à T' est appelée rotation *de l'arête $i \to j$. La figure 1.32 présente différentes illustrations de la rotation selon les signatures de i et j.*

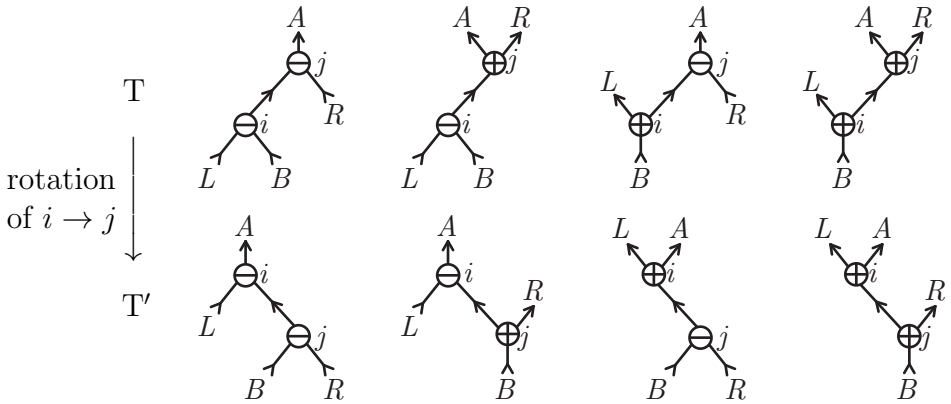


FIGURE 1.32 – Rotation dans les arbres Cambriens : l'arbre T (haut) est transformé en T′ (bas) par la rotation de l'arête $i \to j$. Les quatre cas correspondent aux différents signes possibles de i et j.

La proposition suivante explique le fait que les rotations soient compatibles avec les arbres Cambriens et leurs coupures selon une arête. Une *coupure selon une arête* dans un arbre Cambrien T est une partition ordonnée $(X \parallel Y)$ des sommets de T en l'ensemble X de sommets dans l'ensemble source et l'ensemble Y de sommets dans l'ensemble cible d'une arête orientée de T.

Proposition 43 ([LP13])**.** *Le résultat T' d'une rotation d'une arête $i \to j$ dans un arbre ε-Cambrien est un arbre ε-Cambrien. De plus, T' est l'unique arbre ε-Cambrien avec les mêmes coupures selon les arêtes que T, hormis la coupe définie par l'arête $i \to j$.*

Remarque 44 (Rotations et flips)**.** Faire une rotation selon l'arête e dans un arbre ε-Cambrien T équivaut à faire un flip de la diagonale duale e^* dans la triangulation duale T^* du polygone P^ε. Voir [LP13, Lemma 13].

Définissons le *graphe des rotations croissantes* sur $\mathrm{Camb}(\varepsilon)$ comme le graphe dont les sommets sont les arbres ε-Cambrien et dont les arêtes sont les rotations croissantes $\mathrm{T} \to \mathrm{T}'$, *i.e.*, où l'arête $i \to j$ dans T est retournée en l'arête $i \leftarrow j$ dans T' pour $i < j$. La figure 1.33 illustre ce graphe. La prochaine proposition, adaptée du travail de N. Reading [Rea06], montre que ce graphe est acyclique, que sa fermeture transitive est un treillis, et que ce treillis est lié de façon proche à l'ordre faible sur les permutations. On verra figure 1.34 une illustration du lien en l'ordre faible et ce graphe.

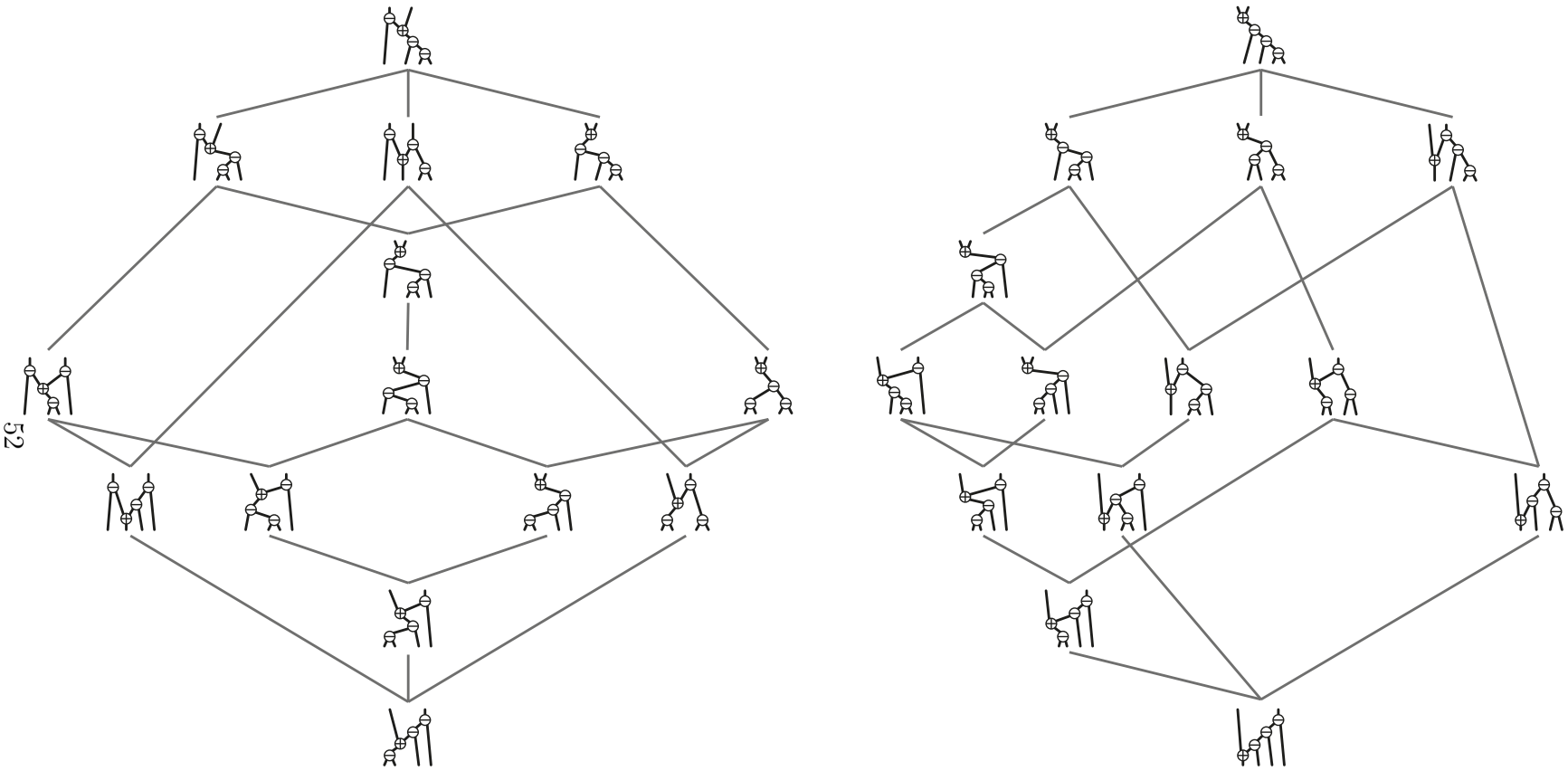


FIGURE 1.33 – Les treillis ε-Cambrien sur les arbres ε-Cambriens, pour les signatures $\varepsilon = -+--$ (gauche) et $\varepsilon = +---$ (droite).

Proposition 45 ([Rea06])**.** *La clôture transitive du graphe des rotations croissantes sur* $\mathrm{Camb}(\varepsilon)$ *est un treillis, appelé* treillis ε-Cambrien*. L'application* $\mathbf{P} : \mathfrak{S}^\varepsilon \to \mathrm{Camb}(\varepsilon)$ *définit un homomorphisme de treillis de l'ordre faible sur* $\mathfrak{S}^\varepsilon$ *au treillis* ε*-Cambrien sur* $\mathrm{Camb}(\varepsilon)$*.*

On peut noter que l'arbre ε-Cambrien minimal (resp. maximal) est un chemin orienté de 1 à n (resp. de n à 1) avec une feuille entrante sur chaque nœud négatif et une feuille sortante sur chaque nœud positif. On trouvera figure 1.33 une illustration de deux treillis ε-Cambriens pour $\varepsilon = -+--$ et $\varepsilon = +---$.

Exemple 46. Quand $\varepsilon = (-)^n$, le treillis Cambrien est le treillis de Tamari classique. Ce résultat est montré dans [MHPS12]. Il peut être défini de façon équivalente en termes de rotation gauche-droite sur les arbres binaires planaires, de flips augmentant la pente des diagonales dans les triangulations de $\mathrm{P}^{(-)^n}$, ou comme un quotient de l'ordre faible par la congruence sylvestre.

On peut aussi remarquer l'utilisation de la *canopée* des arbres Cambriens permet de construire un nouveau treillis.

Proposition 47. *Les applications* $\mathbf{P}, \mathbf{can}$*, et* $\mathbf{rec}$ *définissent le diagramme commutatif d'homomorphismes de treillis suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}^\varepsilon \arrow[rr, two heads, "\mathbf{rec}"] \arrow[dr, two heads, "\mathbf{P}"'] & & \pm^{n-1} \\
& \mathrm{Camb}(\varepsilon) \arrow[ur, two heads, "\mathbf{can}"'] &
\end{tikzcd}$$

Les fibres de ces applications sur l'ordre faible de $\mathfrak{S}_\varepsilon$ pour $\varepsilon = -+--$ et $\varepsilon = +---$ sont représentées figure 1.34.

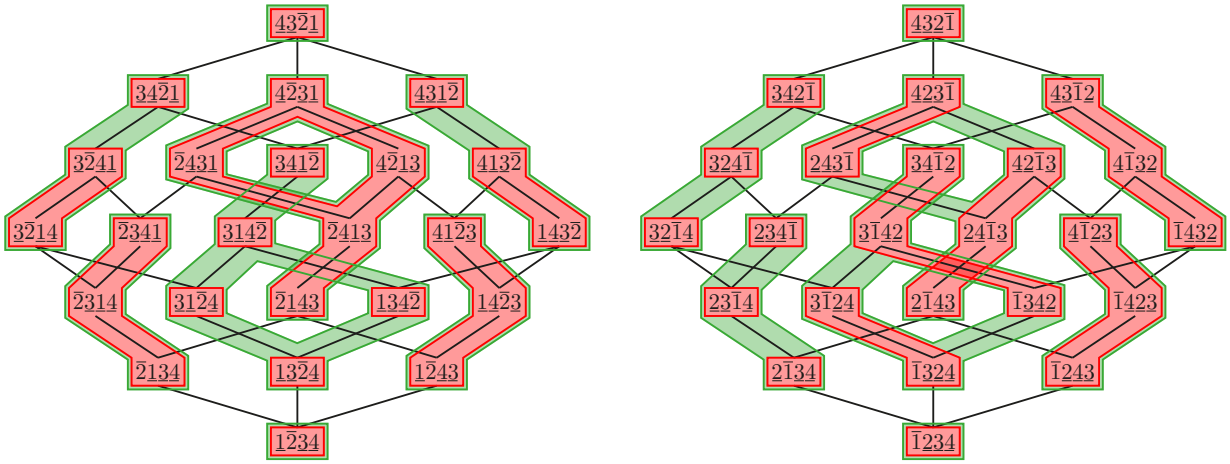


FIGURE 1.34 – Les fibres des applications **P** (rouge) et **rec** (vert) sur les ordres faibles $\mathfrak{S}_\varepsilon$ pour $\varepsilon = -+--$ (gauche) et $\varepsilon = +---$ (droite).

Chapitre 2

Structures algébriques

2.1 Algèbres de Hopf sur les objets combinatoires

Dans ce paragraphe, nous allons définir la notion d'*algèbre de Hopf combinatoire* qui nous sera utile dans la troisième partie de ce document lorsque nous définirons, entre autres, l'algèbre de Hopf Cambrienne.

Formellement, les algèbres de Hopf sont des objets algébriques assez complexes vérifiant de nombreux axiomes. Cependant, en combinatoire, les opérations de base que sont le *produit* et le *coproduit* se définissent très simplement sur les mots et les axiomes découlent alors naturellement. Plutôt que d'introduire un cadre formel pour en donner plus tard des exemples concrets, il nous a semblé plus naturel de partir des exemples de base pour introduire les notions algébriques qui y sont liées.

2.1.1 Espaces vectoriels d'objets combinatoires

Une *classe combinatoire* est un ensemble d'objets munis d'une notion de taille. L'ensemble des objets ayant une taille donnée est toujours fini. Par exemple, si A est l'alphabet $\{a, b\}$, on note $A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$ l'ensemble des mots sur A où ϵ est le mot vide. La taille d'un mot u, notée $|u|$, est donnée par son nombre de lettres. L'ensemble des mots de taille n est fini et de taille 2^n.

Les *permutations* sont les objets de base dans notre travail. Elles forment une des classes combinatoires les plus étudiée en combinatoire. Par exemple, les permutations de taille 3 sont 123, 213, 132, 231, 312, 321. L'ensemble des permutations de taille n est fini et en nombre $n!$.

On sera rapidement amené à former des sommes formelles d'objets combinatoires. Cela revient à se placer dans un espace vectoriel dont la base est l'ensemble des objets. On considérera que le corps de base de l'espace vectoriel est un corps quelconque $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. L'espace vectoriel E dont la base est une classe combinatoire C est *gradué*, c'est-à-dire

$$E = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \tag{2.1}$$

où E_n est de base C_n, les objets combinatoires de taille n.

2.1.2 Produits et algèbres

On enrichit souvent les espaces vectoriels d'objets combinatoires d'une notion de produit. On obtient alors une algèbre.

Exemple 48. On peut par exemple définir un produit basé sur la concaténation des mots : $A^* \times A^* \to A^*$,

$$u.v \to uv. \tag{2.2}$$

Par exemple, $aab.abab = aababab$. De façon similaire, on définit la *concaténation décalée* sur les permutations

$$\sigma \vec{.} \mu = \sigma \vec{\mu} \tag{2.3}$$

où $\vec{\mu}$ est le mot μ où les lettres ont été décalées de $|\sigma|$. Par exemple $132 \vec{.} 3421 = 1326754$.

Exemple 49. Le *produit de mélange* sur les mots se définit récursivement par

$$u \sqcup\!\sqcup v := \begin{cases} u & \text{si } v = \epsilon, \\ v & \text{si } u = \epsilon, \\ u_1(u' \sqcup\!\sqcup v) \ + \ v_1(u \sqcup\!\sqcup v') & \text{sinon, où } u_1, v_1 \in A \text{ et } u = u_1 u' \text{ et } v = v_1 v'. \end{cases} \tag{2.4}$$

C'est la somme de tous les "mélanges" des lettres de u et v tels que l'ordre des lettres dans u et v respectivement ne soit pas modifié. Par exemple,

$$ab \sqcup\!\sqcup ba = abba + abba + abab + baba + baab + baab \tag{2.5}$$

$$= 2\ abba + 2\ baab + abab + baba \tag{2.6}$$

Comme pour la concaténation, on peut définir le *produit de mélange décalé* sur les permutations

$$\sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} \mu = \sigma \sqcup\!\sqcup \vec{\mu}. \tag{2.7}$$

Par exemple,

$$12 \overline{\sqcup\!\sqcup} 21 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312. \tag{2.8}$$

Définition 50. *L'algèbre A d'une classe combinatoire est dite graduée si son produit vérifie la relation suivante :*

$$|x \times y| = |x| + |y| \tag{2.9}$$

pour tout $x, y \in A$. Dit autrement, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a que le produit $\times$ est une application de $A_n \times A_m$ vers A_{n+m}.

Pour définir une algèbre de Hopf, nous avons aussi besoin d'un coproduit.

2.1.3 Coproduits et cogèbres

Soit A un alphabet. On se place sur l'algèbre libre engendrée par A que l'on note $\mathcal{A} = \mathbb{K}\langle A\rangle$ où le produit est la concaténation des mots. Cette algèbre est tout simplement l'ensemble des combinaisons linéaires des mots sur A aussi appelées *polynômes non commutatifs*. Elle est clairement associative car

$$(u.v).w = u.(v.w) = uvw \tag{2.10}$$

pour $u, v, w \in A^*$. Le produit $\mu := .$ est une application linéaire $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et l'associativité se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "I\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes I"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "\mu"] \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

où $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est l'identité.

Le mot vide ϵ est donc l'élément neutre pour la multiplication, c'est-à-dire

$$\forall u \in A^*, u.\epsilon = \epsilon.u = u. \tag{2.12}$$

Le mot ϵ est l'unité de l'algèbre $\mathcal{A}$. Un élément $k \in \mathbb{K}$ est assimilé à l'élément $k\epsilon \in \mathcal{A}$. On peut donc interpréter ϵ non pas comme un mot mais comme une application $\epsilon : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$. La propriété de l'unité s'exprime alors aussi par un diagramme.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "I\otimes\epsilon"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "p"] & \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "\epsilon\otimes I"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

À présent, si $A = \{a, b, \ldots\}$, introduisons un nouvel alphabet $A' = \{a', b', \ldots\}$ copie de l'alphabet A et dont les lettres commutent avec celles de A. On définit l'opération Δ sur les lettres de A par $\Delta(a) = a + a'$. Puis on étend l'opération de telle sorte que Δ soit un morphisme d'algèbre, c'est-à-dire

$$\Delta(u.v) = \Delta(u).\Delta(v) \tag{2.14}$$

pour $u, v \in A^*$. Par exemple, si $A = \{a, b\}$ on a

$$\begin{aligned} \Delta(aab) &= (a + a')(a + a')(b + b') && (2.15)\\ &= aab + aab' + aa'b + aa'b' + a'ab + a'ab' + a'a'b + a'a'b' && (2.16)\\ &= aab + aab' + 2aba' + 2aa'b' + ba'a' + a'a'b'. && (2.17) \end{aligned}$$

Un mot sur les alphabets A et A' se décompose en deux parties indépendantes : un mot sur A et un mot sur A'. On peut le considérer comme un élément de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

L'opération $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est alors un morphisme d'algèbre tel que $\Delta(a) = a \otimes \epsilon + \epsilon \otimes a$. Le calcul précédent s'écrit

$$\Delta(aab) = aab \otimes \epsilon + aa \otimes b + 2(ab \otimes a) + 2(a \otimes ab) + b \otimes aa + \epsilon \otimes aab. \tag{2.18}$$

L'opération Δ est *co-associative*. Pour un mot u, on a $\Delta(u) = \sum u_1 \otimes u_2$ sur les couples (u_1, u_2) de sous-mots complémentaires de u. Alors $\sum \Delta(u_1) \otimes u_2 = \sum u_1 \otimes \Delta(u_2) = \sum u_1 \otimes u_2 \otimes u_3$, la somme sur les triplets complémentaires de sous-mots de u. Sur un exemple, cela donne

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)\Delta(ab) &= (\Delta \otimes I)\left((a \otimes \epsilon) + (\epsilon \otimes a)\right)\left((b \otimes \epsilon) + (\epsilon \otimes b)\right) && (2.19)\\
&= (a \otimes \epsilon \otimes \epsilon + \epsilon \otimes a \otimes \epsilon + \epsilon \otimes \epsilon \otimes a)(b \otimes \epsilon \otimes \epsilon + \epsilon \otimes b \otimes \epsilon + \epsilon \otimes \epsilon \otimes b) && (2.20)\\
&= (I \otimes \Delta)\left((a \otimes \epsilon) + (\epsilon \otimes a)\right)\left((b \otimes \epsilon) + (\epsilon \otimes b)\right) && (2.21)\\
&= (I \otimes \Delta)\Delta(ab). && (2.22)
\end{aligned}$$

On écrit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "I \otimes \Delta"] \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\Delta \otimes I"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}
\end{tikzcd} . \tag{2.23}$$

Ce diagramme est la version "renversée" du diagramme de l'associativité de l'algèbre (2.11). De la même façon, la *co-unité* de $\mathcal{A}$ est l'application linéaire $c : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ telle que $c(u) = 0$ si $u \neq \epsilon$ et $c(\epsilon) = 1$, on a

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathbb{K} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "I \otimes c"'] \arrow[r, "c \otimes I"] & \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} \\
& \mathcal{A} \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.24}$$

version renversée du diagramme (2.13) de l'unité de l'algèbre. Munie de l'opération Δ, l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ possède une structure de *cogèbre*. La compatibilité entre Δ et μ en fait une *bigèbre*.

2.1.4 Bigèbres et algèbres de Hopf combinatoires

Dans ce paragraphe, nous allons combiner la notion d'algèbre et de cogèbre pour construire des *bigèbres*.

Définition 51. *Soit $\mathcal{A}$ un espace vectoriel. Si $\mathcal{A}$ est muni d'un produit associatif μ : $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et d'une unité $\epsilon : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{A}$ est une* algèbre. *Si par ailleurs, $\mathcal{A}$ est*

munie d'un coproduit $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ *co-associatif et d'une co-unité* $c : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ *alors* $\mathcal{A}$ *est une* cogèbre.

Enfin, si $\mathcal{A}$ *est à la fois une algèbre et une cogèbre et que* Δ *et* c *sont des* morphismes d'algèbres*, alors* $\mathcal{A}$ *est une* bigèbre.

En tant qu'espace vectoriel, $\mathcal{A}$ est *gradué*, c'est-à-dire que

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n \tag{2.25}$$

où $\mathcal{A}^n$ est l'espace vectoriel sur les mots de taille n. En tant que bigèbre, $\mathcal{A}$ est aussi graduée ce qui signifie que son produit μ et son coproduit Δ vérifient

$$\mu(\mathcal{A}^n \otimes \mathcal{A}^m) \subset \mathcal{A}^{n+m}, \tag{2.26}$$

$$\Delta(\mathcal{A}^k) \subset \bigoplus_{n+m=k} \mathcal{A}^n \otimes \mathcal{A}^m. \tag{2.27}$$

Par ailleurs, la dimension de $\mathcal{A}^0$ est 1 (le mot vide ϵ) ce qui signifie que $\mathcal{A}$ est *connexe*. On peut alors prouver que *l'antipode* de $\mathcal{A}$ est bien définie [Swe69, Car07]. Nous ne détaillerons pas cette propriété car nous n'en aurons pas besoin. C'est elle qui justifie l'appellation *algèbre de Hopf*. Par la suite, nous n'étudierons que des bigèbres graduées et connexes et parlerons donc toujours *d'algèbres de Hopf combinatoires*.

Si l'alphabet A n'est pas commutatif, le produit μ non plus. On a $u.v \neq v.u$. Cependant, le coproduit Δ que nous avons défini est *co-commutatif* : soit $\omega : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ l'application définie par $\omega(u \otimes v) = v \otimes u$, alors $\omega \circ \Delta = \Delta$. Par la suite, on définira d'autres coproduits qui n'auront pas cette propriété.

L'exemple des polynômes non commutatifs, s'il parait trivial, n'en est pas moins fondamental. En effet, il est souvent fastidieux de prouver tous les axiomes relatifs au produit et au coproduit sur une bigèbre. Dans le cas de $\mathcal{A}$, ce sont des propriétés élémentaires. Une technique est alors d'exprimer une algèbre combinatoire en fonction de $\mathcal{A}$. Cela revient à associer à chaque objet un développement sous forme de polynômes (commutatifs ou non). Pour prouver que l'espace en question possède une structure d'algèbre de Hopf, on prouve que la famille de polynômes obtenue est stable par les opérations de produit et de coproduit. Cette technique est appelée la *réalisation polynomiale* et nous en donnons un exemple au paragraphe suivant avec l'algèbre FQSym.

2.1.5 Algèbre des fonctions quasi-symétriques libres

Pour illustrer le principe de la réalisation polynomiale, expliquons la construction de l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques libres FQSym comme cela a été fait dans [DHT02, DHNT11]. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre définie par Malvenuto et Reutenauer sur les permutations [MR95].

Définition 52. *Soit* $u = u_1 \dots u_n$ *un mot sur l'alphabet ordonné* A*. L'action d'une permutation* σ *sur* u *est donnée par*

$$u \bullet \sigma = u_{\sigma_1} \dots u_{\sigma_n}. \tag{2.28}$$

L'exécution *de* u, $\mathrm{exec}(u)$, *est la permutation* σ *de longueur minimale telle que* $u \bullet \sigma$ *soit ordonné c'est-à-dire* $u_{\sigma_1} \leq u_{\sigma_2} \leq \cdots \leq u_{\sigma_n}$.

Par exemple, si $u = baa$ alors $\mathrm{exec}(u) = 231$, et on a $u \bullet \sigma = aab$. L'exécution d'un mot u dépend uniquement de ses inversions, c'est-à-dire du standardisé de u tel que nous l'avons défini paragraphe 1.1.1. On a $\mathrm{exec}(u) = \mathrm{exec}(\mathrm{std}(u))$. Par ailleurs, pour une permutation ν alors $\nu \bullet \sigma = \nu \circ \sigma$ et donc $\mathrm{exec}(\nu) = \nu^{-1}$. On a donc

$$\mathrm{exec}(u) = \mathrm{std}(u)^{-1}. \tag{2.29}$$

On se place à présent sur un alphabet infini et on définit la série

$$\mathbb{F}_\sigma := \sum_{\mathrm{exec}(u)=\sigma} u. \tag{2.30}$$

On a alors le résultat suivant [DHT02].

Proposition 53. *Le produit* $\mathbb{F}_\sigma \mathbb{F}_\mu$ *pour* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *et* $\mu \in \mathfrak{S}_m$ *s'exprime comme une somme d'éléments* $\mathbb{F}_\nu$ *avec* $\nu \in \mathfrak{S}_{n+m}$. *Plus précisément*

$$\mathbb{F}_\sigma \mathbb{F}_\mu = \sum_{\nu \in \sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} \mu} \mathbb{F}_\nu. \tag{2.31}$$

On rappelle que $\overline{\sqcup\!\sqcup}$ est le produit de mélange décalé sur les permutations que nous avons défini paragraphe 2.1.2. Voyons le résultat sur un exemple. Soit $\sigma = 21$ et $\mu = 1$. Comme le résultat sera une combinaison linéaire de permutations de taille 3, on peut se contenter du développement de $\mathbb{F}_\sigma$ et $\mathbb{F}_\mu$ sur $A = \{a, b, c\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{21} &= ba + ca + cb, && (2.32)\\
\mathbb{F}_{1} &= a + b + c, && (2.33)\\
\mathbb{F}_{21}\mathbb{F}_{1} &= baa + bab + bac + caa + cab + cac + cba + cbb + cbc && (2.34)\\
&= (baa + caa + cab + cbb) + (bab + bac + cac + cbc) + cba && (2.35)\\
&= \mathbb{F}_{231} + \mathbb{F}_{213} + \mathbb{F}_{321}. && (2.36)
\end{aligned}$$

On a donc une structure d'algèbre sur les éléments $\mathbb{F}_\sigma$. La définition du coproduit n'est pas celle du paragraphe 2.1.3 mais utilise toujours un doublement d'alphabet. Soit B un second alphabet ordonné infini tel que les lettres de A soient considérées plus petites que les lettres de B et qu'elles commutent avec les lettres de B. L'alphabet formé de cette façon est noté $A \hat{+} B$. Le coproduit sur $\mathbb{F}_\sigma$ consiste à développer la somme sur $A \hat{+} B$ plutôt que sur A. Par exemple, si $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{a', b', c'\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{231}(A \hat{+} B) = {} & baa + caa + cab + cbb + \\
& + a'aa + a'ab + a'bb + b'aa + \dots \\
& + b'aa' + c'aa' + c'ab' + \dots \\
& + b'a'a' + c'a'a' + c'a'b' + c'b'b'.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Comme les lettres de A et B commutent, on peut les réordonner pour séparer les deux alphabets et exprimer la somme dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ comme nous l'avons fait paragraphe 2.1.3.

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbb{F}_{231}) = &(baa \otimes \epsilon) + (caa \otimes \epsilon) + (cab \otimes \epsilon) + (cbb \otimes \epsilon) \\ &+ (aa \otimes a) + (ab \otimes a) + (bb \otimes a) + (aa \otimes b) + \dots \\ &+ (a \otimes ba) + (a \otimes ca) + (a \otimes cb) + \dots \\ &+ (\epsilon \otimes baa) + (\epsilon \otimes caa) + (\epsilon \otimes cab) + (\epsilon \otimes cbb).\end{aligned} \tag{2.38}$$

Les séries qui apparaissent à gauche et à droite du signe $\otimes$ correspondent à des éléments $\mathbb{F}$ et on a

$$\Delta(\mathbb{F}_{231}) = \mathbb{F}_{231} \otimes 1 + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{21} + 1 \otimes \mathbb{F}_{231}. \tag{2.39}$$

Ici, 1 désigne l'unité de l'algèbre, c'est-à-dire $1 = \mathbb{F}_\epsilon = \epsilon$. De façon générale, on a

Proposition 54.

$$\Delta(\mathbb{F}_\sigma) := \mathbb{F}_\sigma(A \hat{+} B) = \sum_{\sigma = u.v} \mathbb{F}_{\mathrm{std}(u)} \otimes \mathbb{F}_{\mathrm{std}(v)}. \tag{2.40}$$

Ce résultat est prouvé dans [DHT02] et permet d'obtenir la proposition suivante.

Proposition 55. *L'algèbre des éléments* $(\mathbb{F}_\sigma)$ *munie du produit de mélange décalé* (2.31) *et du coproduit* (2.40) *est une algèbre de Hopf.*

On note cette algèbre FQSym. Ce résultat était déjà donné dans [MR95] et prouvé directement sur les permutations. Dans [DHT02], les auteurs utilisent comme nous l'avons vu le développement des éléments $\mathbb{F}_\sigma$ comme sommes de mots. Dans ce cas, la preuve devient beaucoup plus simple car il ne reste à prouver que la stabilité des éléments $\mathbb{F}_\sigma$ par le produit et le coproduit. En effet, la co-associativité du coproduit est triviale car $(A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C)$. De même, la compatibilité du produit et du coproduit s'obtient facilement car, sur des alphabets infinis, le développement de $\mathbb{F}_\sigma(A \hat{+} B)\mathbb{F}_\mu(A \hat{+} B)$ est équivalent au développement de $\mathbb{F}_\sigma(A)\mathbb{F}_\mu(A)$. Notons que dans le cas de FQSym, le coproduit n'est plus le même qu'au paragraphe 2.1.3 et n'est plus cocommutatif.

Une des propriétés notables de FQSym est que l'on peut interpréter le produit des éléments de la base $\mathbb{F}$ comme des intervalles de l'ordre faible droit sur les permutations. Le résultat du produit de mélange de deux permutations σ et μ contient toutes les permutations de l'intervalle $[\sigma\overline{\mu}, \overline{\mu}\sigma]$.

Proposition 56. *Le produit de* FQSym *vérifie l'identité suivante :*

$$\mathbb{F}_\sigma \mathbb{F}_\mu = \sum_{\nu \in [\sigma\overline{\mu}\overline{\mu}\sigma]} \mathbb{F}_\nu. \tag{2.41}$$

Une illustration de cette propriété est présentée figure 2.1. Cette observation relie les algèbres de Hopf aux treillis sur les objets combinatoires.

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{12}.\mathbb{F}_{21} &= \mathbb{F}_{1243} + \mathbb{F}_{1423} + \mathbb{F}_{1432} + \mathbb{F}_{4123} + \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{4312} \\ &= \sum_{\gamma \in [1243, 4312]} \mathbb{F}_{\gamma}\end{aligned}$$

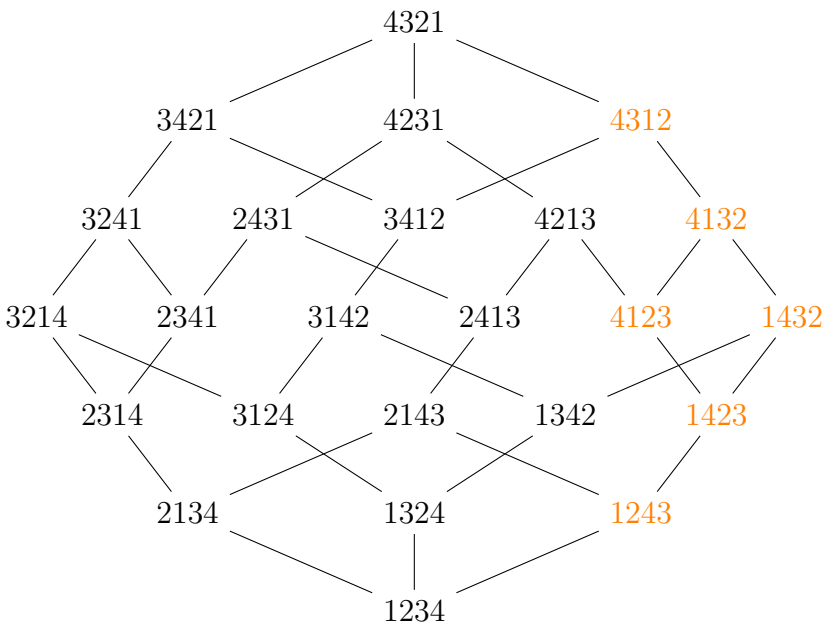


FIGURE 2.1 – L'interprétation du produit $\mathbb{F}_{12}.\mathbb{F}_{21}$ comme une somme sur un intervalle de l'ordre faible droit.

Cette interprétation du produit permet, entre autres, de définir des bases multiplicatives. On définit deux autres bases de FQSym, les fonctions élémentaires $\mathbb{E}$ et homogènes $\mathbb{H}$ par

$$\mathbb{E}^\sigma := \sum_{\sigma' \geq \sigma} \mathbb{F}_{\sigma'} \tag{2.42}$$

$$\mathbb{H}^\sigma := \sum_{\sigma' \leq \sigma} \mathbb{F}_{\sigma'}. \tag{2.43}$$

Ces bases sont respectivement des sommes sur des intervalles initiaux et finaux de l'ordre faible droit. On a

$$\mathbb{E}^\sigma \mathbb{E}^\mu = \mathbb{E}^{\sigma.\overline{\mu}} \tag{2.44}$$

$$\mathbb{H}^\sigma \mathbb{H}^\mu = \mathbb{H}^{\overline{\mu}.\sigma} \tag{2.45}$$

où $\overline{\mu}$ est la permutation μ décalée de $|\sigma|$. Ces bases sont dites *multiplicatives* car le résultat du produit est donné par un unique élément.

2.1.6 Algèbre des arbres binaires de recherche

Il est possible de construire une algèbre de Hopf dont les bases sont indixées par des arbres binaires. J.-L. Loday et M. O. Ronco ont donné la construction originelle de cette algèbre en 1998 [LR98]. En 2005, F. Hivert, J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon ont donné une nouvelle façon d'obtenir cette algèbre comme une sous-algèbre de FQSym [HNT05]. C'est cette dernière vision que nous allons aborder dans ce paragraphe.

La base $\mathbb{P}$ de l'algèbre PBT est définie de la façon suivante :

$$\mathbb{P}_T = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathbf{P}(\sigma) = T}} \mathbb{F}_\sigma = \sum_{\mathcal{L}(T) = \sigma} \mathbb{F}_\sigma. \tag{2.46}$$

Théorème 57. *L'algèbre* PBT *est une sous-algèbre de Hopf de* FQSym.

La preuve de ce théorème consiste à montrer que l'application $\mathbf{P}$ est compatible au produit et au coproduit de FQSym [HNT05].

Comme dans le cas de FQSym, il est possible d'interpréter le produit d'éléments de la base $\mathbb{P}$ de PBT comme une somme sur un intervalle du treillis de Tamari. Une illustration de cette propriété est présentée figure 2.2.

De la même façon que pour FQSym, nous pouvons définir des bases multiplicatives de l'algèbre PBT. On définit deux autres bases sur PBT, analogues des bases élémentaires et

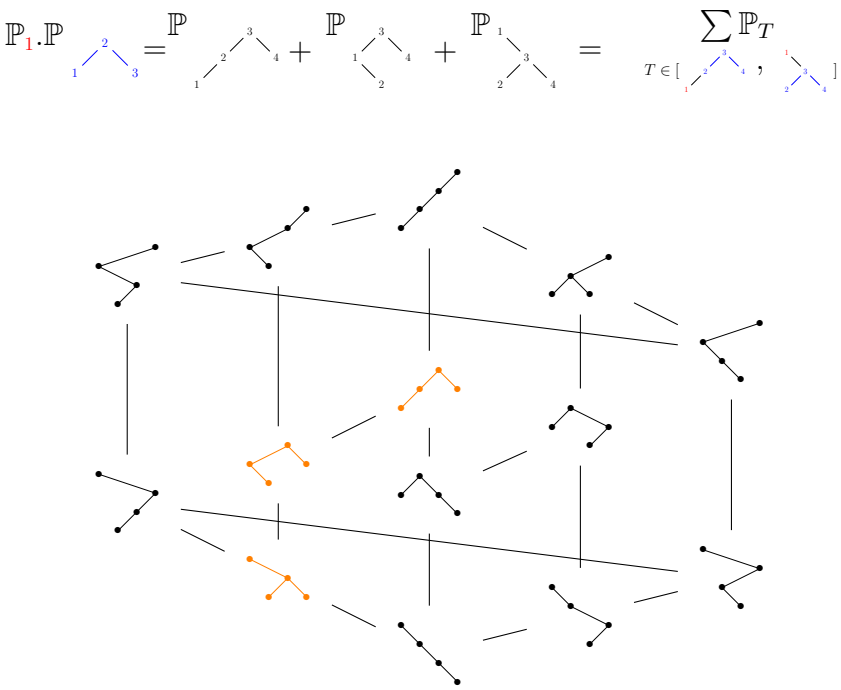


FIGURE 2.2 – L'interprétation du produit de deux éléments de la base $\mathbb{P}$ comme une somme sur un intervalle de l'ordre de Tamari.

complètes de FQSym par

$$\mathbb{H}_T = \sum_{T' \leq T} \mathbb{P}_{T'}, \tag{2.47}$$

$$\mathbb{E}_T = \sum_{T' \geq T} \mathbb{P}_{T'} \tag{2.48}$$

Ces bases sont respectivement des sommes sur des intervalles initiaux et finaux de l'ordre de Tamari. On trouve dans [HNT05, Théorèmes 29 et 30] la preuve que ces bases sont multiplicatives. On a

$$\mathbb{H}_{T_1}\mathbb{H}_{T_2} = \mathbb{H}_T \tag{2.49}$$

où T est l'arbre obtenu en greffant T_2 à droite du fils le plus à droite de T_1. En particulier, T est l'élément maximal de l'intervalle donné par $P_{T_1}P_{T_2}$. Et

$$\mathbb{E}_{T_1}\mathbb{E}_{T_2} = \mathbb{E}_T \tag{2.50}$$

où T est l'arbre obtenu en greffant T_1 à gauche du fils le plus à gauche de T_2. C'est l'élément minimal de l'intervalle donné par $\mathbb{P}_{T_1}\mathbb{P}_{T_2}$.

Deuxième partie

Combinatoire des intervalles du treillis de Tamari

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à l'étude d'un ordre sur les arbres binaires appelé *treillis de Tamari* qui peut se décrire comme un quotient de l'ordre faible sur les permutations. Il apparaît en 1962 dans le travail de Tamari [Tam62] sous forme de structure d'ordre sur les parenthésages formels d'une expression. Tamari prouve plus tard que cet ordre est en fait un treillis [HT72]. Il se trouve que le nombre de parenthésages formels d'une expression est compté par les nombres de Catalan et il existe donc de multiples objets combinatoires sur lesquels on peut décrire ce treillis [Sta99]. Dans ce chapitre, nous allons principalement en utiliser deux : les *chemins de Dyck* et les *arbres binaires planaires*. Dans les deux cas, la relation de couverture se décrit par une opération très simple (cf. figures 1.26 et 1.29).

Le diagramme de Hasse du treillis de Tamari correspond à un polytope connu sous le nom d'associaèdre ou polytope de Stasheff [Sta63]. Par conséquent, les relations entre l'associaèdre et l'ordre faible, dont le diagramme de Hasse correspond au permutoèdre, sont souvent étudiées d'un point de vue géométrique. L'approche algébrique permet de démontrer un résultat très fort : l'ordre de Tamari est un quotient de l'ordre faible sur les permutations. Ce résultat apparaît déjà en filigrane dans les travaux de Björner et Wachs [BW91]. On en trouve une généralisation dans la théorie des treillis cambriens de Reading [Rea06], que nous étudierons dans la troisième partie de ce mémoire.

Une littérature abondante existe sur les généralisations du treillis de Tamari. On peut citer par exemple le treillis de m-Tamari [BPR12], le treillis $Tam(v)$ [PRV14], le treillis méta-sylvestre [Pon15] et les treillis Cambriens [Rea06]. Le fait que ces objets apparaissent sous différentes formes dans des versions généralisées donne très naturellement des perspectives de généralisation pour nos résultats.

Dans le chapitre 3, nous donnons la définition des *intervalles-posets* de Tamari, qui sont une famille de posets dont les extensions linéaires correspondent exactement aux unions de classes sylvestres qui forment des intervalles du treillis de Tamari. Nous introduisons ensuite la *composition des intervalles-posets*, ce qui nous permet de prouver d'une nouvelle façon que la série génératrice des intervalles de l'ordre de Tamari vérifie bien l'équation fonctionnelle définie par F. Chapoton dans [Cha07].

Dans le chapitre 4, nous présentons plusieurs applications des intervalles-posets. Nous donnons dans le paragraphe 4.1 une formule permettant de calculer le nombre d'arbres inférieurs ou égaux à un arbre donné dans l'ordre de Tamari. Dans le paragraphe 4.2, nous évoquons le fait que les résultats de cette partie se généralisent bien aux treillis de m-Tamari. Nous présentons ensuite dans le paragraphe 4.3 une bijection entre les intervalles-posets et les flots qui sont un objet que F. Chapoton a défini lors de son étude de l'opérade Pré-Lie [Cha13]. Pour conclure, nous donnons dans le paragraphe 4.4 une bijection qui permet de prouver de façon combinatoire la répartition symétrique de deux statistiques au sein des intervalles-posets. Ce résultat est apparu dans [BMFPR11] dans lequel les auteurs donnent une formule qui compte le nombre d'intervalles du treillis de m-Tamari. La répartition symétrique des statistiques est alors un corollaire inattendu de la résolution de l'équation fonctionnelle. Dans cet article, les auteurs laissaient alors ouverte la question d'une interprétation combinatoire de ce résultat qui est apparue naturellement lors de nos manipulations des intervalles-posets.

Chapitre 3

Intervalles-posets de Tamari

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les permutations qui sont envoyées sur le même arbre T par l'application $\mathbf{P}$ sont les extensions linéaires $\mathcal{L}(T)$ de l'arbre T et forment la *classe sylvestre* de T. Ces permutations forment des intervalles de l'ordre faible. On peut aussi considérer l'ensemble des extensions linéaires de tous les arbres inférieurs ou égaux à un arbre donné dans l'ordre de Tamari. Cet ensemble de permutation est une union de classes sylvestres. On peut exprimer ces intervalles initiaux et finaux comme les extensions linéaires des deux arbres planaires obtenus par la bijection décrite au paragraphe 1.1.4. Plus généralement, un intervalle de Tamari $[T_1, T_2]$ est encodé par un poset particulier dont les extensions linéaires correspondent aux classes sylvestres des arbres inclus dans $[T_1, T_2]$. Nous appelons ces posets les *intervalles-posets* de Tamari et utilisons leurs propriétés combinatoires pour obtenir de nouveaux résultats sur le treillis de Tamari.

Dans [Cha07], Chapoton a démontré que le nombre d'intervalles dans le treillis de Tamari est donné par

$$I_n = \frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}. \tag{3.1}$$

Cette formule est obtenue par la résolution d'une équation fonctionnelle sur la série génératrice des intervalles de Tamari. Pour prouver que la série génératrice vérifie bien l'équation fonctionnelle, Chapoton utilise des arguments combinatoires. Nous proposons dans ce chapitre une nouvelle preuve de ce résultat utilisant les intervalles-posets. L'équation fonctionnelle donnée par Chapoton peut s'exprimer en fonction d'un opérateur bilinéaire qui s'interprète simplement en termes d'intervalles-posets. On note $\Phi(x, y)$ la série génératrice des intervalles de Tamari où y compte la taille des arbres et x le nombre de nœuds sur la branche gauche du plus petit arbre de l'intervalle. On prouve que

$$\Phi(x, y) = \mathrm{B}(\Phi, \Phi) + 1 \tag{3.2}$$

où

$$\mathrm{B}(f, g) = xyf(x, y)\frac{xg(x, y) - g(1, y)}{x - 1}. \tag{3.3}$$

Cela nous amène à définir le *polynôme de Tamari* d'un arbre donné.

Définition 58. *Soit T un arbre binaire, son polynôme de Tamari $\mathcal{B}_T(x)$ est défini récursivement par*

$$\mathcal{B}_\emptyset := 1 \tag{3.4}$$

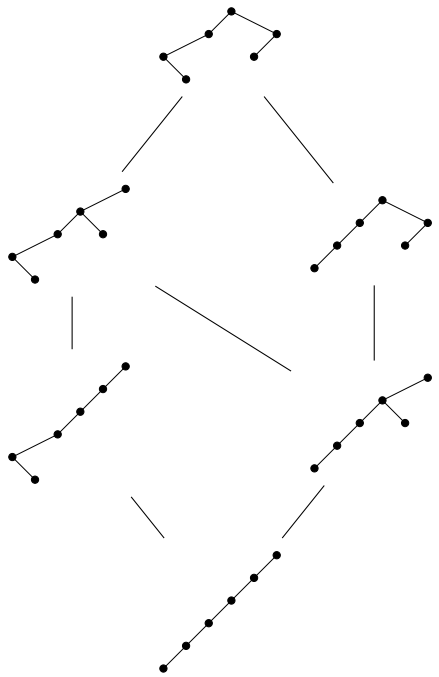
$$\mathcal{B}_T(x) := \mathrm{B}_{y=1}(\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_R) \tag{3.5}$$

où L et R sont respectivement les sous-arbres gauche et droit de T.

On prouve alors un résultat plus fin que la simple énumération des intervalles :

Théorème 59. *Soit T un arbre binaire. Son polynôme de Tamari $\mathcal{B}_T(x)$ compte le nombre d'arbres inférieurs ou égaux à T pour l'ordre de Tamari en fonction du nombre de nœuds sur leur branche gauche. En particulier $\mathcal{B}_T(1)$ est le nombre d'arbres inférieurs ou égaux à T.*

De façon symétrique, si $\tilde{\mathcal{B}}_T$ est défini en inversant les rôle des sous-arbres droit et gauche dans $\mathcal{B}_T$, alors $\tilde{\mathcal{B}}_T$ compte le nombre d'arbres supérieurs ou égaux à T en fonction du nombre de nœuds sur leur branche droite.



$\mathcal{B}$ $= x^3 + x^2$

$\mathcal{B}$ $= x^2$

$\mathcal{B}$ $= x(x^3 + x^2)\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$

$= x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^3$

FIGURE 3.1 – Calcul du polynôme de Tamari d'un arbre et l'intervalle correspondant.

Un exemple de calcul du polynôme de Tamari et du résultat du théorème est donné dans la figure 3.1. La preuve du théorème 59 est donné paragraphe 4.1. Nous commençons au paragraphe 3 par définir les intervalles-posets et nous en donnons les principales propriétés. Dans le paragraphe 3.3, nous décrivons une opération de composition sur les

intervalles-posets. Nous utilisons cette opération, tout d'abord pour donner une nouvelle preuve du résultat de Chapoton sur la fonction génératrice des intervalles (paragraphe 3.4) puis pour prouver le théorème 59 (paragraphe 4.1). Au paragraphe 4.3, nous faisons le lien avec un autre résultat de Chapoton sur les flots d'arbres enracinés [Cha13]. Dans le paragraphe 4.4 nous donnons une preuve bijective de la répartition symétrique de deux statistiques au sein des intervalles de l'ordre de Tamari. Les résultats de ce chapitre découlent d'un travail fait en commun avec V. Pons et sont publiés dans [CP15]. Les applications des paragraphes [Cha13] et 4.4 sont issues d'un travail en commun avec V. Pons et F.Chapoton [CCP13].

3.1 Forêts initiales et finales

La bijection entre les arbres binaires et les arbres planaires décrite au paragraphe 1.1.4 peut aussi s'exprimer en terme de posets.

Définition 60. *Soit T un arbre binaire. On identifie T à son arbre binaire de recherche que l'on considère comme un poset. On note $a \lhd_T b$ si a précède b dans le poset c'est-à-dire si a est dans le sous-arbre issu de b. Si $a \lhd_T b$ et $a < b$ alors a est dans le sous-arbre gauche de b et on dit que $a \lhd_T b$ est une relation croissante de b. Si $b \lhd_T a$ alors b est dans le sous-arbre droit de a et on dit que $b \lhd_T a$ est une relation décroissante de T.*

La forêt initiale de T, notée $F_{\leq}(T)$, est le poset obtenu par la relation $\lhd_{F_{\leq}}$ définie telle que

$$a \lhd_{F_{\leq}} b \Leftrightarrow a < b \text{ et } a \lhd_T b. \tag{3.6}$$

En d'autre termes, $a \lhd_{F_{\leq}} b$ si $a \lhd_T b$ est une relation croissante de T. Le poset T est donc une extension de $F_{\leq}(T)$.

La forêt finale de T, notée $F_{\geq}(T)$, est le poset obtenu par la relation $\lhd_{F_{\geq}}$ définie telle que

$$b \lhd_{F_{\geq}} a \Leftrightarrow a < b \text{ et } b \lhd_T a. \tag{3.7}$$

On a donc que $b \lhd_{F_{\geq}} a$ si $b \lhd_T a$ est une relation décroissante de T.

Un exemple de la construction est donné figure 3.2.

Les deux opérations sont en fait chacune des bijections : on peut retrouver l'arbre binaire à partir de sa forêt initiale ou de sa forêt finale. Ainsi, la bijection entre la forêt finale et l'arbre binaire est celle donnée entre les arbres planaires et les arbres binaires au paragraphe 1.1.4. À partir d'une forêt étiquetée, on obtient en effet un arbre planaire en supprimant les étiquettes et en rajoutant une racine commune aux arbres. La construction récursive de l'arbre binaire en fonction de sa forêt initiale ou finale est illustrée figure 3.2. On donne à présent la condition nécessaire et suffisante sur l'étiquetage d'une forêt pour qu'il corresponde à l'étiquetage de l'arbre binaire de recherche correspondant.

Lemme 61. *Soit un poset étiqueté F. Alors F est la forêt finale d'un arbre binaire T si et seulement si $c \lhd_F a$ implique que $c > a$ et que $b \lhd_F a$ pour tout b tel que $a < b < c$.*

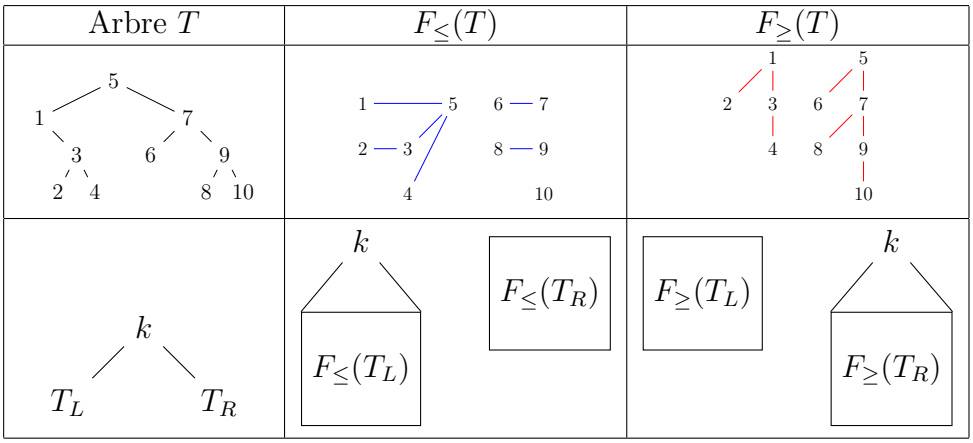


FIGURE 3.2 – Un arbre binaire et les forêts initiales et finales correspondantes.

De même, F est la forêt initiale d'un arbre binaire T si et seulement si $a \lhd_F c$ implique que $a < c$ et que $b \lhd_F c$ pour tout b tel que $a < b < c$.

Démonstration. On effectuera la preuve uniquement pour le cas de la forêt finale $F_{\geq}$. La preuve pour la forêt initiale est symétrique.

Tout d'abord, prouvons que si F est la forêt finale d'un arbre binaire T, alors la condition est vérifiée. Soit $c > a$ tel que $c \lhd_F a$. Par construction, on a $c \lhd_T a$ ce qui signifie que c est dans le sous-arbre droit de a dans T. Soit b tel que $a < b < c$. Trois configurations sont possibles : soit $a \lhd_T b$ et a est dans le sous-arbre gauche de b, soit a et b ne sont pas comparables, soit $b \lhd_T a$ et b est dans le sous-arbre droit de a.

Supposons que a et b ne soient pas comparables dans T. Alors, il existe b' tel que $a < b' < b$ avec a dans le sous-arbre gauche de b' et b dans le sous-arbre droit de b'. Comme c est dans le sous-arbre droit de a, il est aussi dans le sous-arbre gauche de b'. Or $b' < c$ ce qui contredit la règle de l'arbre binaire de recherche. Pour la même raison, a ne peut pas être dans le sous-arbre gauche de b. Donc b est dans le sous-arbre droit de a, c'est-à-dire $b \lhd_T a$. La forêt F est formée par les relations décroissantes de T et on a bien $b \lhd_F a$.

À présent, soit F un poset étiqueté vérifiant la condition du lemme. Le poset F se décompose en r composantes connexes $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Pour chaque F_i, il existe un unique élément x_i qu'on appelle la racine de F_i tel que $y \lhd_F x_i$ pour tout $y \in F_i$. En effet, si x, x' et y sont des éléments de F_i avec $y \lhd_F x$ et $y \lhd_F x'$, on a soit $x < x' < y$ et donc $x' \lhd_F x$ ou bien $x' < x < y$ et $x \lhd_F x'$. Comme toutes les relations de F sont décroissantes, l'étiquette de x_i est aussi minimale dans F_i : $y > x_i$ pour tout $y \in F_i$. De plus, si x_i et x_j sont les racines de deux composantes connexes différentes, respectivement F_i et F_j, alors $x_i < x_j$ implique que $y < z$ pour tout $y \in F_i$ et $z \in F_j$. En suivant le schéma de la figure 3.2, on définit k comme la racine de valeur maximale parmi $x_1, \ldots, x_r$. En supprimant le sommet k de sa composante connexe, on obtient un nouveau poset F_L formé des fils de k qui vérifie toujours la condition et dont toutes les étiquettes sont supérieures

à k. Par ailleurs, le poset F_R formé par les autres composantes connexes de F vérifie lui aussi la condition et toutes ses étiquettes sont inférieures à k. On peut donc construire récursivement l'arbre binaire $T = k(T_L, T_R)$ où T_L et T_R sont obtenus respectivement par F_L et F_R. Par construction, T est un arbre binaire de recherche et $F = F_{\geq}(T)$. □

Proposition 62. *Les extensions linéaires de la forêt finale $F_{\geq}(T)$ d'un arbre binaire T sont exactement les classes sylvestres des arbres $T' \geq T$ pour l'ordre de Tamari. De même, les extensions linéaires de la forêt initiale $F_{\leq}(T)$ sont les classes sylvestres des arbres $T' \leq T$.*

Démonstration. On effectue la preuve uniquement pour $F_{\geq}(T)$. Par symétrie de l'ordre faible et de l'ordre de Tamari, le résultat est aussi vrai pour $F_{\leq}(T)$. Soit α_T l'élément minimal de la classe sylvestre de T. On veut prouver que les extensions linéaires de $F_{\geq}(T)$ correspondent à l'intervalle $[\alpha_T, \omega]$ où ω est la permutation maximale. Comme l'ordre de Tamari est un quotient de l'ordre faible, cela prouve entièrement le résultat.

Le poset $F_{\geq}(T)$ ne contient que des relations décroissantes $b \lhd_{F_{\geq}} a$ avec $b > a$. Les extensions linéaires de $F_{\geq}(T)$ sont exactement les permutations contenant toutes les coinversions (a, b) telles que $b \lhd_{F_{\geq}} a$. En effet, par définition les extensions linéaires de $F_{\geq}(F)$ contiennent toutes ces coinversions. C'est aussi une condition suffisante. Soit σ une permutation non extension linéaire de $F_{\geq}(T)$. Alors il existe une relation $b \lhd_{F_{\geq}} a$ avec $b > a$ et a avant b dans σ. La permutation σ ne contient pas la covinversion (a, b).

Enfin, α_T ne contient pas d'autres coinversions que les relations de $F_{\geq}(T)$. En effet, on lit α_T sur l'arbre binaire de recherche T par un parcours suffixe : fils gauche, fils droit, racine. Soit $b > a$ telle que $F_{\geq}(T)$ ne contient pas la relation $b \lhd_{F_{\geq}} a$. Alors b n'est pas dans le sous-arbre droit de a. On a soit que a est dans le sous-arbre gauche de b, soit que a est dans le sous-arbre gauche d'un élément b' dont b est dans le sous-arbre droit. Dans tous les cas, a est lu avant b dans α_T.

Pour conclure, rappelons la règle de comparaison des éléments dans l'ordre faible droit donnée au paragraphe 1.2.3 : une permutation σ est inférieure à une permutation μ si les coinversions de σ sont incluses dans les coinversions de μ. Les extensions linéaires de $F_{\geq}(T)$ sont exactement les permutations dont les coinversions contiennent celles de α_T. □

3.2 Définition des intervalles-posets

Soit $[T_1, T_2]$ un intervalle de Tamari. Si σ est une extension linéaire de $F_{\geq}(T_1)$ alors σ appartient à la classe sylvestre d'un arbre $T' \geq T_1$. Maintenant, si σ est aussi une extension linéaire de $F_{\leq}(T_2)$, alors on a $T' \leq T_2$. On peut donc encoder l'intervalle $[T_1, T_2]$ par les relations des deux posets $F_{\geq}(T_1)$ et $F_{\leq}(T_2)$.

Définition 63. *Un intervalle-poset $(P, \lhd)$ est un poset sur les entiers de 1 à n tel que les conditions suivantes soient respectées :*

1. *si $a < c$ et $a \lhd c$ alors pour tout b tel que $a < b < c$, on a $b \lhd c$,*
2. *si $a < c$ et $c \lhd a$ alors pour tout b tel que $a < b < c$, on a $b \lhd a$.*

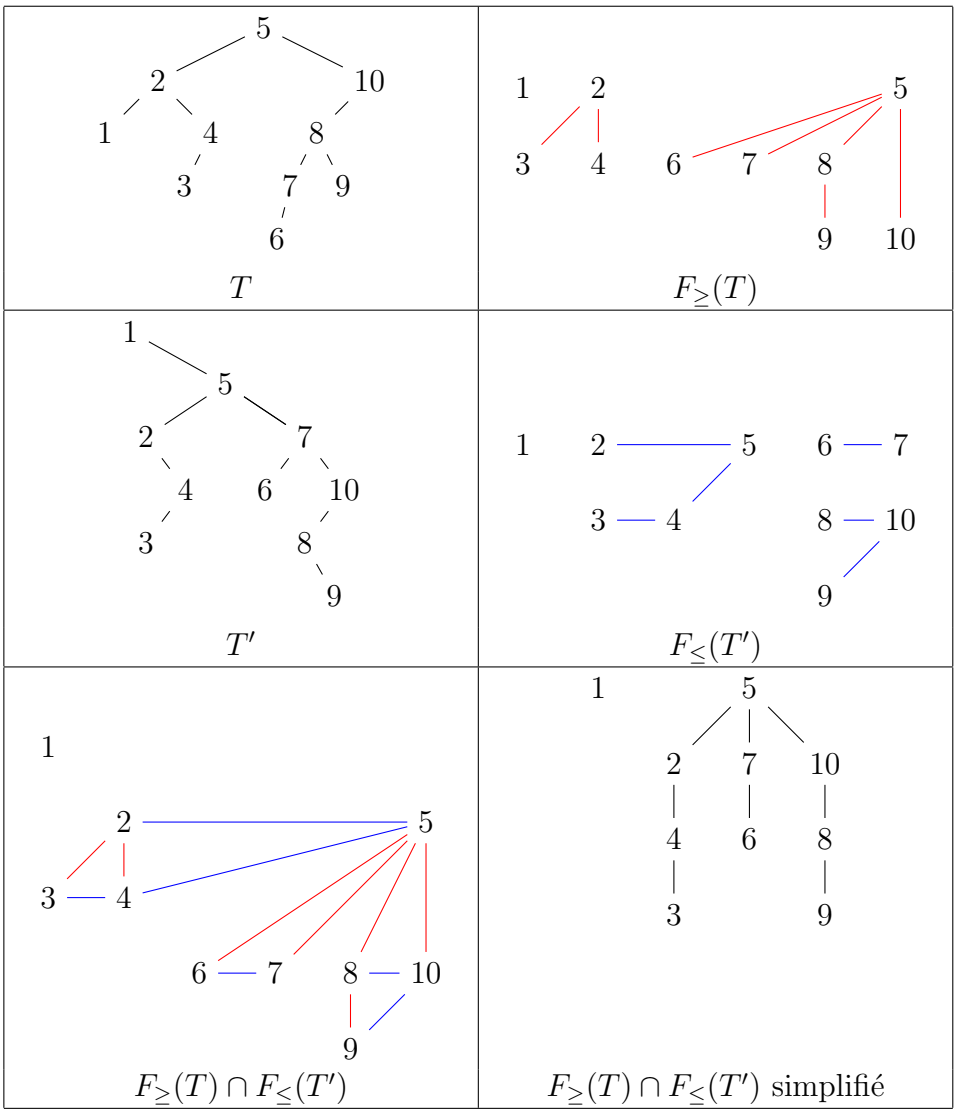
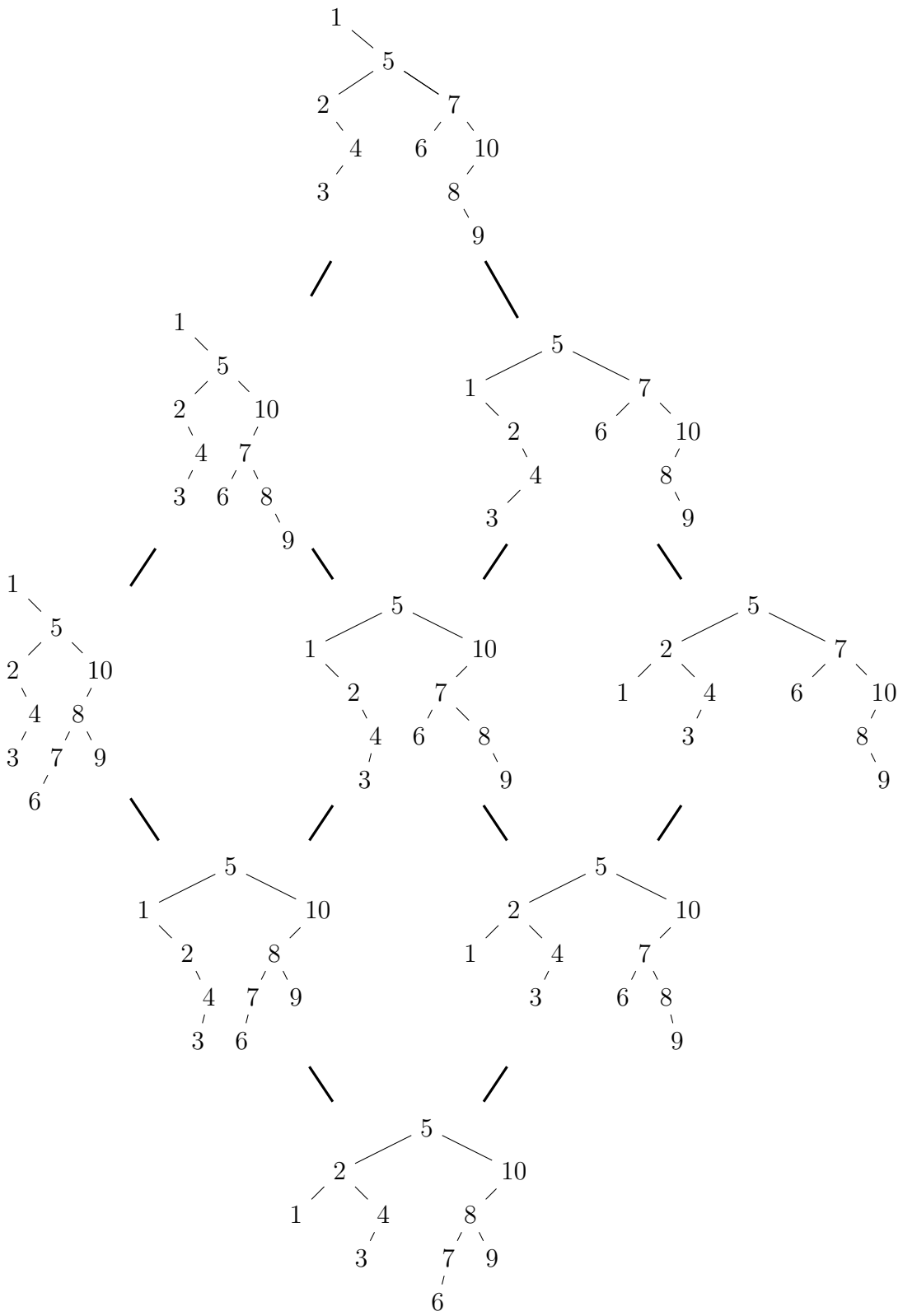


FIGURE 3.3 – Sur la page de gauche : la construction d'un intervalle poset à partir des forêts initiales et finales. Dans la dernière image, on a supprimé les relations redondantes. Sur la page de droite : l'intervalle de Tamari correspondant. On pourra vérifier qu'une extension linéaire d'un arbre de l'intervalle correspond toujours à une extention linéaire du poset et vice versa.


1 5 2 7 4 6 10 3 8 9
1 5 2 10 4 7 3 6 8 9
5 1 7 2 6 10 4 8 3 9
1 5 2 10 4 8 3 7 9 6
5 1 10 2 7 4 6 8 3 9
5 2 7 1 4 6 10 3 8 9
5 1 10 2 8 4 7 9 3 6
5 2 10 1 4 7 3 6 8 9
5 2 10 1 4 8 3 7 9 6

Proposition 64. *Les intervalles-posets sont en bijection avec les intervalles de Tamari.*

Plus précisément, à chaque intervalle-poset P correspond un couple d'arbres $T_1 \leq T_2$ tel que les extensions linaires de P soient exactement les extensions linéaires des arbres $T' \in [T_1, T_2]$.

En particulier, les intervalles-posets sont les seuls posets étiquetés dont les extensions linéaires forment des intervalles de l'ordre faible droit $[\alpha_{T_1}, \omega_{T_2}]$ où α_{T_1} est l'élément minimal d'une classe sylvestre T_1 et ω_{T_2}, l'élément maximal d'une classe T_2.

Démonstration. Soit un intervalle de Tamari $[T_1, T_2]$. Comme $T_1 \leq T_2$, par la proposition 62, les extensions linéaires de T_1 en particulier vérifient à la fois les relations des posets $F_{\geq}(T_1)$ et $F_{\leq}(T_2)$. Ces deux posets sont donc compatibles dans le sens où il n'existe pas de relations contradictoires : $a \lhd_{F_{\geq}} b$ et $a \rhd_{F_{\leq}} b$. On forme alors le poset P contenant à la fois les relations de $F_{\geq}(T_1)$ et $F_{\leq}(T_2)$. Par le lemme 61, P possède les deux conditions qui en font un intervalle-poset.

À présent, soit P un intervalle-poset. Soit F_1 le poset formé par les relations décroissantes de P : $b \lhd_{F_1} a$ si $b > a$ et $b \lhd_P a$. Et soit F_2 le poset formé par les relations croissantes de P. Par le lemme 61, les posets F_1 et F_2 sont respectivement les forêts finales et initiales de deux arbres binaires de recherche T_1 et T_2. Soit σ une extension linéaire de P et $T' = \mathbf{P}(\sigma)$. On a que σ est aussi une extension linéaire de F_1 et donc $T_1 \leq T'$ par la proposition 62. Et σ est une extension linéaire de F_2 d'où $T' \leq T_2$. On a donc $T_1 \leq T_2$, et le poset P correspond aux extensions linéaires des arbres de l'intervalle $[T_1, T_2]$. □

Un exemple de la construction avec l'intervalle correspondant est donné figure 3.3. La bijection permet d'identifier les intervalles de Tamari aux intervalles-posets. Un arbre binaire de recherche T est un intervalle-poset particulier qui correspond à $[T, T]$. De même, les forêts initiales et finales sont des cas particuliers d'intervalles-posets. Ces objets combinatoires sont facilement maniables et programmables et on y lit de nombreuses propriétés.

Proposition 65.

1. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles-posets. L'intersection de I_1 et I_2 est non vide si et seulement si les relations de I_1 ne contredisent pas celles de I_2. Dans ce cas, l'intersection est aussi un intervalle, elle est donnée par I_3 l'intervalle-poset contenant les relations à la fois de I_1 et I_2.*
2. *Un intervalle $I_1 := [T_1, T_1']$ contient l'intervalle $I_2 := [T_2, T_2']$, c'est-à-dire $T_1 \leq T_2$ et $T_1' \geq T_2'$, si et seulement si I_2 est une extension de I_1 (I_2 contient les relations de I_1 et éventuellement d'autres).*
3. *Soit $I_1 := [T_1, T_1']$. On a $I_2 = [T_2, T_1']$ avec $T_2 \geq T_1$ si et seulement si I_2 est une extension de I_1 et que les relations supplémentaires de I_2 sont décroissantes. De façon symétrique, $I_3 = [T_1, T_3]$ tel que $T_3 \leq T_1'$ si et seulement si I_3 est une extension de I_1 et que les relations supplémentaires de I_3 sont croissantes.*

Toutes ces propriétés découlent directement de la construction des intervalles-posets.

3.3 Composition des intervalles-posets

Soit $\phi(y)$, la série génératrice des intervalles de Tamari,

$$\phi(y) = \sum_{n\geq 0} I_n y^n \tag{3.8}$$

où I_n est le nombre d'intervalles sur des arbres de taille n. Les premières valeurs sont données par [OEIb]

$$\phi(y) = 1 + y + 3y^2 + 13y^3 + 68y^4 + \dots \ . \tag{3.9}$$

Dans [Cha07], Chapoton donne une version raffinée de ϕ,

$$\Phi(x, y) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ m\geq 0}} I_{n,m} x^m y^n, \tag{3.10}$$

où $I_{n,m}$ est le nombre d'intervalles $[T_1, T_2]$ sur des arbres de taille n tel que T_1 possède m nœuds sur sa branche gauche. On a

$$\Phi(x, y) = 1 + xy + (x + 2x^2)y^2 + (3x + 5x^2 + 5x^3)y^3 + \dots \tag{3.11}$$

Comme nous l'avons vu dans au paragraphe 1.1.4, la statistique du nombre de nœuds sur la branche gauche de T se lit aussi sur l'arbre planaire correspondant à T. C'est le nombre de fils de la racine de l'arbre planaire ou le nombre de retours à 0 sur le chemin de Dyck [Fin13b, Fin13a]. Sur la forêt finale $F_{\geq}(T)$, c'est le nombre d'arbres, c'est-à-dire son nombre de composantes connexes.

Définition 66. *Soit un intervalle $[T_1, T_2]$ et I son intervalle-poset. On note*

1. $\mathrm{size}(I)$ *le nombre de nœuds dans I, c'est-à-dire la taille des arbres T_1 et T_2.*
2. $\mathrm{trees}(I)$ *le nombre d'arbres de $F_{\geq}(I)$ la forêt formée en conservant uniquement les relations décroissantes de I.*

Enfin, on définit $\mathcal{P}(I) = x^{\mathrm{trees}(I)} y^{\mathrm{size}(I)}$ et on étend $\mathcal{P}$ par linéarité aux combinaisons linéaires d'intervalles-posets.

La série génératrice raffinée Φ sur les intervalles de Tamari s'exprime alors par

$$\Phi(x, y) = \sum_{I} \mathcal{P}(I) \tag{3.12}$$

où la somme porte sur l'ensemble des intervalles-posets. On a alors le résultat suivant.

Théorème 67. *La série génératrice $\Phi(x, y)$ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\Phi(x, y) = \mathrm{B}(\Phi, \Phi) + 1 \tag{3.13}$$

où

$$\mathrm{B}(f, g) = xyf(x, y)\frac{xg(x, y) - g(1, y)}{x - 1}. \tag{3.14}$$

Ce théorème est prouvé par Chapoton dans [Cha07]. La formulation est légèrement différente, dans la série génératrice donnée dans [Cha07, formule (6)] : le degré de x diffère de 1 et la série ne compte pas l'intervalle de taille 0. Dans le paragraphe 3.4, nous donnons une nouvelle preuve de ce théorème. Nous utilisons pour cela une opération de composition sur les intervalles-posets.

Définition 68. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles-posets de tailles respectives k_1 et k_2. Alors $\mathbb{B}(I_1, I_2)$ est la somme formelle de tous les intervalles-posets de taille $k_1 + k_2 + 1$ tels que*

1. *les relations entre les sommets $1, \ldots, k_1$ sont celles de I_1,*
2. *les relations entre les sommets $k_1+2, \ldots, k_1+k_2+1$ sont celles de I_2 décalées de k_1+1,*
3. *on a $i \lhd k_1 + 1$ pour tout $i \leq k_1$,*
4. *il n'existe aucune relation $k_1 + 1 \lhd j$ pour $j > k_1 + 1$.*

On appelle cette opération la composition des intervalles et on l'étend par bilinéarité à toutes les sommes formelles d'intervalles-posets.

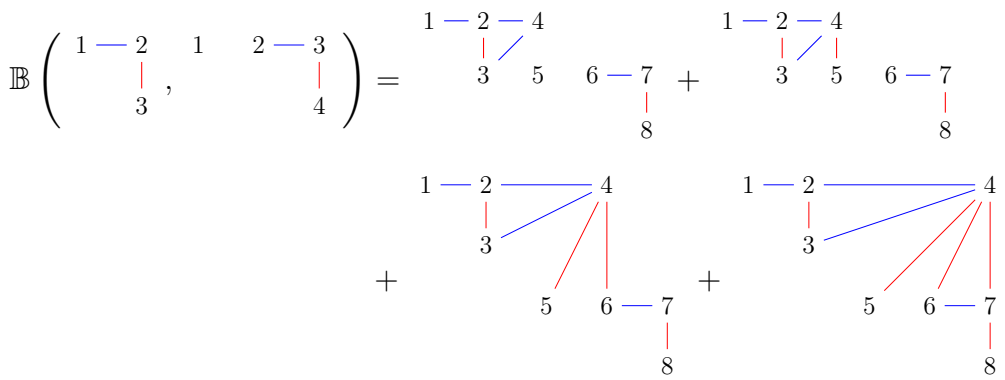


FIGURE 3.4 – Composition des intervalles-posets. Les quatre termes correspondent à l'ajout de respectivement 0, 1, 2 et 3 relations décroissantes entre le second poset et le sommet 4. Dans le dernier terme, on a ajouté 3 relations : la relation $6 \lhd 4$ a été mise en pointillés car elle peut être obtenue par transitivité.

La somme que l'on obtient correspond à toutes les façons d'ajouter des relations décroissantes entre le second poset et le nouveau sommet $k_1 + 1$, comme on peut le voir dans la figure 3.4. En particulier, il n'y a aucune relation entre les sommets $1, \ldots, k_1$ du premier poset et les sommets $k_1+2, \ldots, k_1+k_2+1$ du second poset. En effet, la condition 3 interdit toute relation $j \lhd i$ avec $i < k_1 + 1 < j$ car cela impliquerait par la définition 63 que $k_1 + 1 \lhd i$. Par ailleurs, la condition 4 interdit toute relation $i \lhd j$ car cela impliquerait $k_1 + 1 \lhd j$.

Le nombre d'éléments dans la somme est donné par $\mathrm{trees}(I_2)+1$. En effet, si $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ sont les racines des arbres de $F_{\geq}(I_2)$, on ne peut rajouter une relation $x_i \lhd k_1+1$ que si on a $x_j \lhd k_1+1$ pour tout $j < i$. On a donc

$$\mathbb{B}(I_1, I_2) = \sum_{0 \leq i \leq m} P_i \tag{3.15}$$

où P_i est l'intervalle-poset où on a rajouté exactement i relations décroissantes : $x_j \lhd k_1+1$ pour $j \leq i$.

Proposition 69. *Soit I_1 l'intervalle-poset de taille k_1 correspondant à un intervalle $[T_1, T_1']$ et I_2 l'intervalle-poset de taille k_2 correspondant à $[T_2, T_2']$. Soient $k = k_1 + 1$ et*

- *Q_α, l'arbre T_2 auquel on a greffé $k(T_1, \emptyset)$ à gauche de son nœud le plus à gauche,*
- *Q_ω, l'arbre $k(T_1, T_2)$,*
- *et Q', l'arbre $k(T_1', T_2')$.*

On a

$$\mathbb{B}(I_1, I_2) = \sum_{Q \in [Q_\alpha, Q_\omega]} P_{[Q,Q']} \tag{3.16}$$

où $P_{[Q,Q']}$ est l'intervalle-poset correspondant à $[Q, Q']$.

Démonstration. La composition de I_1 et I_2 est une somme d'intervalles-posets $P_0, \ldots P_m$ où $m = \mathrm{trees}(I_2)$ et où P_i est l'intervalle-poset où on a ajouté exactement i relations décroissantes. L'arbre maximum de tous les intervalles est le même car ils ont les mêmes relations croissantes, c'est $Q' = k(T_1', T_2')$. La forêt finale de P_0, $F_{\geq}(P_0)$ contient $\mathrm{trees}(I_1) + \mathrm{trees}(I_2)+1$ arbres : les nœuds sur la branche gauche de son arbre minimal sont exactement ceux de T_1, puis k, puis ceux de T_2, ce qui correspond à Q_α. Soit Q_i l'arbre minimal de P_i. Pour passer de P_i à P_{i+1}, on rajoute une relation décroissante vers k ce qui revient à effectuer une rotation entre le nœud k de Q_i et sa racine. Le procédé termine quand l'arbre T_2 est entièrement passé à droite du nœud k. On obtient alors l'arbre $Q_m = Q_\omega$.

Notons que l'intervalle entre Q_α et Q_ω est en fait une chaîne saturée : $Q_\alpha = Q_0 \lessdot Q_1 \lessdot \cdots \lessdot Q_m = Q_\omega$. □

En exemple, on a repris le calcul de la figure 3.4 et on donne son interprétation en termes d'intervalles dans la figure 3.5.

La composition est en fait formée de deux opérations distinctes : le produit gauche $\vec{\bullet}$ et le produit droit $\overleftarrow{\delta}$.

Définition 70. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles-posets tels que $\mathrm{trees}(I_2) = m$, et α est l'étiquette de valeur minimale de I_2 et ω l'étiquette de valeur maximale de I_1, alors*

1. *$I_1 \vec{\bullet} I_2$ est l'intervalle obtenu par la concaténation décalée de I_1 et I_2 et l'ajout des relations croissantes $x \lhd \alpha$ pour tout $x \in I_1$.*
2. *$I_1 \overleftarrow{\delta} I_2$ est la somme des $m+1$ intervalles-posets $P_0, P_1, \ldots, P_m$ où P_i est la concaténation décalée de I_1 et I_2 où l'on a ajouté i relations décroissantes $x_j \lhd \omega$ pour $j \leq i$ où $x_1 < \cdots < x_m$ sont les les racines des arbres de $F_{\geq}(I_2)$.*

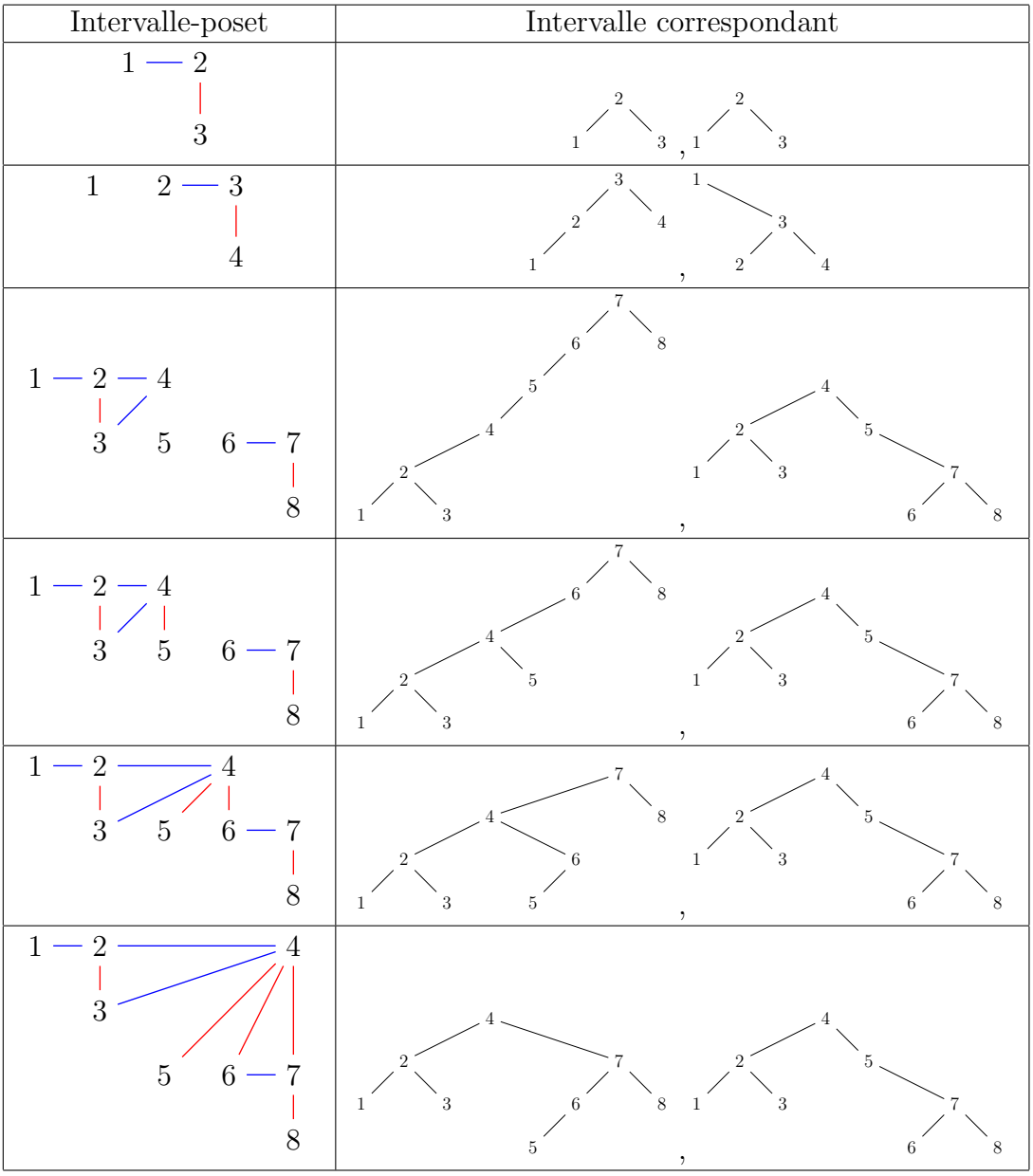
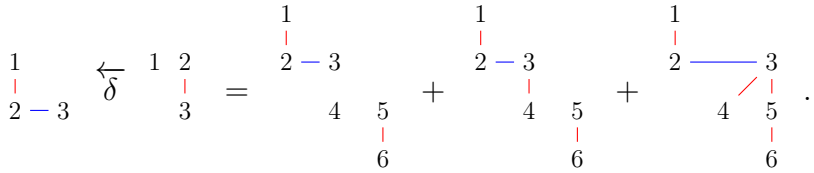


FIGURE 3.5 – Interprétation en termes d'intervalles de la composition des intervalles-posets.

Par exemple,

(3.17)



(3.18)

À partir de la description de la composition donnée par (3.15), on a clairement que

$$\mathbb{B}(I_1, I_2) = I_1 \vec{\bullet}\, u \overleftarrow{\delta}\, I_2 \tag{3.19}$$

où u est l'intervalle-poset possédant un unique sommet. Notons que l'ordre des opérations ne modifie pas le résultat : $(I_1 \vec{\bullet} u) \overleftarrow{\delta}\, I_2 = I_1 \vec{\bullet} (u \overleftarrow{\delta}\, I_2)$.

3.4 Énumération des intervalles

L'opérateur B peut aussi se décomposer en deux opérations, gauche et droite,

$$f \succ g := fg \tag{3.20}$$

$$f \prec_\delta g := f\Delta(g), \tag{3.21}$$

où

$$\Delta(g) := \frac{xg(x,y) - g(1,y)}{x-1}. \tag{3.22}$$

On a dans ce cas

$$\mathrm{B}(f,g) = f \succ xy \prec_\delta g. \tag{3.23}$$

La composition des intervalles-posets est une interprétation combinatoire de l'opérateur B défini dans le théorème 67, ce qui s'exprime par la proposition suivante.

Proposition 71. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles-posets et $\mathcal{P}$ l'application linéaire de la définition 66. Alors*

$$\mathcal{P}(I_1 \vec{\bullet} I_2) = \mathcal{P}(I_1) \succ \mathcal{P}(I_2), \tag{3.24}$$

$$\mathcal{P}(I_1 \overleftarrow{\delta}\, I_2) = \mathcal{P}(I_1) \prec_\delta \mathcal{P}(I_2), \tag{3.25}$$

et donc

$$\mathcal{P}(\mathbb{B}(I_1, I_2)) = \mathrm{B}(\mathcal{P}(I_1), \mathcal{P}(I_2)). \tag{3.26}$$

Par exemple, dans la figure 4.1, on a $\mathcal{P}(I_1) = x^2y^3$ et $\mathcal{P}(I_2) = x^3y^4$ et on vérifie que $\mathcal{P}(\mathbb{B}(I_1, I_2)) = y^8(x^6 + x^5 + x^4 + x^3) = \mathrm{B}(x^2y^3, x^3y^4)$.

Démonstration. Soient I_1 et I_2 deux intervalles-posets. Le produit gauche $I_1 \vec{\bullet} I_2$ est la concaténation décalée de I_1 et I_2 à laquelle on a rajouté des relations décroissantes. On a clairement

$$\mathcal{P}(I_1 \vec{\bullet} I_2) = y^{\text{size}(I_1)+\text{size}(I_2)} x^{\text{trees}(I_1)+\text{trees}(I_2)} = \mathcal{P}(I_1)\,\mathcal{P}(I_2) \tag{3.27}$$

ce qui prouve (3.24).

À présent, si $\text{trees}(I_2) = m$, et que les racines de $F_{\geq}(I_2)$ sont $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, on a par définition

$$I_1 \overleftarrow{\delta}\, I_2 = \sum_{0 \leq i \leq m} P_i \tag{3.28}$$

où on a ajouté exactement i relations décroissantes entre les racines $x_1, \ldots, x_i$ de $F_{\geq}(I_2)$ et l'étiquette de valeur maximale de I_1. On a $\text{trees}(P_i) = \text{trees}(I_1) + \text{trees}(I_2) - i$ car chaque relation décroissante relie un arbre de I_2 à un arbre de I_1. Alors

$$\mathcal{P}(I_1 \overleftarrow{\delta}\, I_2) = y^{\text{size}(I_1)+\text{size}(I_2)} x^{\text{trees}(I_1)} (1 + x + x^2 + \ldots x^m) \tag{3.29}$$

$$= y^{\text{size}(I_1)+\text{size}(I_2)} x^{\text{trees}(I_1)} \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1} \tag{3.30}$$

$$= \mathcal{P}(I_1) \prec_\delta \mathcal{P}(I_2). \tag{3.31}$$

□

Pour prouver le théorème 67, nous avons encore besoin d'un résultat.

Proposition 72. *Soit I un intervalle-poset, alors il n'existe qu'un seul couple d'intervalles-posets (I_1, I_2) tel que I apparaisse dans la somme $\mathbb{B}(I_1, I_2)$.*

Démonstration. Soit I un intervalle-poset de taille n et soit k le sommet de I dont l'étiquette est maximale vérifiant que pour tout $i < k$, on a $i \lhd k$. Notons que le sommet 1 vérifie cette propriété et donc que k existe toujours. On prouve alors que I apparaît uniquement dans la composition des intervalles I_1 et I_2 où I_1 est le sous-poset de I restreint à $1, \ldots, k-1$ et I_2 le sous-poset de I réétiqueté restreint à $k+1, \ldots, n$. Si $k = 1$ (resp. $k = n$) alors I_1 (resp. I_2) est le poset vide.

Pouvons d'abord que $I \in \mathbb{B}(I_1, I_2)$. Les conditions 1, 2 et 3 de la définition 68 sont vérifiées par construction. Si la condition 4 n'est pas vérifiée, cela signifie qu'il existe une relation $k \lhd j$ avec $j > k$. Alors, par définition des intervalles-posets, on a aussi $\ell \lhd j$ pour tout $k < \ell < j$. Par ailleurs, $i \lhd k \lhd j$ pour tout $i < k$, et donc quel que soit $i < j$, $i \lhd j$. C'est impossible car k est l'étiquette maximale vérifiant cette condition.

On a donc $I \in \mathbb{B}(I_1, I_2)$. C'est le seul couple d'intervalles possible. En effet, supposons que $I \in \mathbb{B}(I_1', I_2')$. Le sommet $k' = |I_1'| + 1$ vérifie par définition que pour tout $i < k'$, on a $i \lhd k'$ et pour tout $j > k'$, $k' \ntriangleleft j$. C'est exactement la définition de k. On a donc $k' = k$ ce qui implique $I_1' = I_1$ et $I_2' = I_2$. □

Démonstration du théorème 67. Soit $\mathbb{S} = \sum_{T_1 \leq T_2} P_{[T_1, T_2]}$ la série formelle des intervalles-posets. D'après la proposition 72, on a

$$\mathbb{S} = \mathbb{B}(\mathbb{S}, \mathbb{S}) + \emptyset. \tag{3.32}$$

Et par la proposition 71,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \mathcal{P}(\mathbb{S}) && (3.33)\\
&= \mathcal{P}(\mathbb{B}(\mathbb{S},\mathbb{S})) + 1 && (3.34)\\
&= \mathrm{B}(\Phi,\Phi) + 1. && (3.35)
\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, nous présentons diverses utilisations des intervalles-posets. Dans la première partie, nous donnons une formule permettant de dénombrer selon une statistique le nombre d'éléments inférieurs ou égaux à un arbre donné dans l'ordre de Tamari. Dans la seconde partie, nous décrivons une bijection entre les intervalles de l'ordre de Tamari (vu comme des intervalles-posets) et les flots sur des forêts d'arbres ordonnés et enracinés. Dans la dernière partie, nous décrivons une bijection qui permet de donner une preuve combinatoire d'un résultat de répartition symétrique de statistiques de [BMFPR11].

4.1 Comptage des éléments inférieurs à un arbre

Dans cette section, nous donnons une formule permettant de calculer le nombre d'arbres binaires inférieurs ou égaux à un arbre donné dans l'ordre de Tamari selon leurs nombres de nœuds sur la branche gauche.

En développant (3.13), on obtient

$$\Phi = 1 + \mathrm{B}(1,1) + \mathrm{B}(\mathrm{B}(1,1),1) + \mathrm{B}(1,\mathrm{B}(1,1)) + \dots \tag{4.1}$$

$$= \sum_T y^{|T|}\, \mathcal{B}_T, \tag{4.2}$$

où $\mathcal{B}_T$ est le polynôme de Tamari de la définition 58. On prouve le théorème 59 par la proposition suivante.

Proposition 73. *Soit $T := k(T_L, T_R)$ un arbre binaire et $S_T := \sum_{T' \leq T} P_{[T',T]}$ la somme des intervalles-posets dont T est l'arbre maximal. Alors on a $S_T = \mathbb{B}(S_{T_L}, S_{T_R})$.*

Démonstration. Soit T un arbre binaire de taille n tel que $T = k(T_L, T_R)$. L'intervalle initial $[T_0, T]$ correspond à la forêt initiale de T, $F_{\leq}(T)$ qui est un intervalle-poset particulier. D'après la proposition 65, paragraphe 3. la somme S_T est la somme sur tous les intervalles-posets I qui sont des extensions de $F_{\leq}(T)$ où les relations ajoutées sont décroissantes.

Soit I un intervalle de la somme S_T. Soient I_L et I_R les sous-posets formés par la restriction de I à respectivement $1, \dots, k-1$ et $k+1, \dots, n$. D'après la définition récursive des

forêts initiales décrites en figure 3.2, I_L et I_R sont des extensions de respectivement $F_{\leq}(T_L)$ et $F_{\leq}(T_R)$ où seules des relations décroissantes ont été ajoutées. On a alors $I_L \in S_{T_L}$ et $I_R \in S_{T_R}$. Enfin, on a clairement que $I \in \mathbb{B}(I_L, I_R)$ car comme I est une extension de $F_{\leq}(T)$ on a en particulier $i \lhd k$ pour $i < k$ et $k \not\lhd j$ pour $j > k$.

Inversement, si I_L et I_R sont deux éléments de respectivement S_{T_L} et S_{T_R} alors tout intervalle I de $\mathbb{B}(I_L, I_R)$ appartient à S_T par construction car il est bien une extension de $F_{\leq}(T)$ où seules des relations décroissantes ont été ajoutées. □

Dans la figure 4.1, on reprend l'exemple du calcul de la figure 3.1 en détaillant la liste des intervalles-posets de $S_T = \sum_{T' \leq T} P_{[T',T]}$.

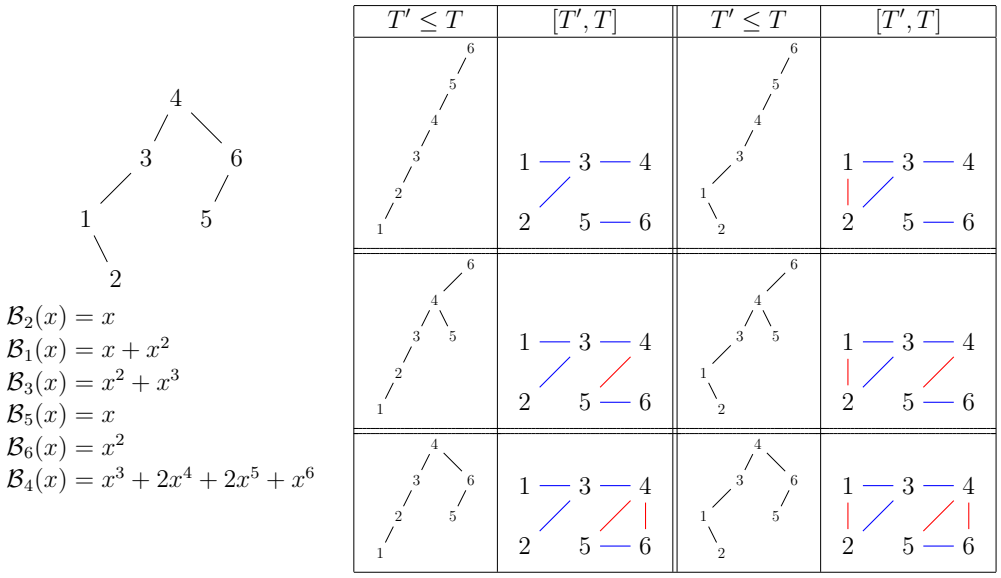


FIGURE 4.1 – Exemple de calcul de $\mathcal{B}_T$ avec la liste des arbres inférieurs ou égaux et des intervalles-posets associés.

Démonstration du théorème 59. Compter le nombre d'arbres $T' \leq T$ en fonction du nombre de nœuds sur la branche gauche de T' revient à compter le nombre d'intervalles $I = [T', T]$ en fonction de trees(I). On souhaite donc prouver que $\mathcal{B}_T = \mathcal{P}(S_T)$ où $S_T = \sum_{T' \leq T} P_{[T',T]}$. Cela se fait par récurrence sur la taille de T. Le cas initial est trivial. Soit $T = k(T_L, T_R)$. Par hypothèse de récurrence, on a que $\mathcal{B}_{T_L} = \mathcal{P}(S_{T_L})$ et $\mathcal{B}_{T_R} = \mathcal{P}(S_{T_R})$. Alors les propositions 71 et 73 nous donnent

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_T &= \mathrm{B}(\mathcal{P}(S_{T_L}), \mathcal{P}(S_{T_R})) && (4.3) \\ &= \mathcal{P}(\mathbb{B}(S_{T_L}, S_{T_R})) && (4.4) \\ &= \mathcal{P}(S_T). && (4.5) \end{aligned}$$

□

4.2 Étude de l'ordre de m-Tamari

Dans ce paragraphe, nous donnons une généralisation du dénombrement des éléments inférieurs ou égaux à un élement dans l'ordre de Tamari aux treillis de m-Tamari. Les mécanismes de ces constructions étant très similaires à celles du paragraphe précédent, nous n'évoquerons ces résultats que brièvement. Le lecteur pourra se reporter à [CP15] pour une description plus formelle ainsi que les preuves des résultats que nous énonçons ici.

Après une rapide explication du contexte, nous définissons les différentes notions dont nous allons avoir besoin puis nous énonçons le résultat principal.

Dans un article récent [BPR12], F. Bergeron et L.-F. Préville-Ratelle introduisent une famille de treillis généralisant le treillis de Tamari sur les chemins de Dyck. Pour un paramètre m donné, on étudie l'ensemble des chemins dans le plan de $(0,0)$ à (mn,n) formés de pas horizontaux $(1,0)$ et de pas verticaux $(0,1)$ et restant au dessus de la droite $y = \frac{x}{m}$. Dans le cas où $m = 1$, ces chemins correspondent simplement à des chemins de Dyck où les pas montants ont été remplacés par des pas verticaux et les pas descendants par des pas horizontaux. Par la suite, on utilisera la dénomination anglo-saxonne *m-ballot paths* pour l'ensemble de ces chemins. La figure 4.2 illustre un exemple de 2-ballot path.

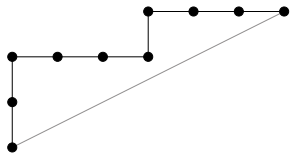


FIGURE 4.2 – Un exemple de 2-ballot path.

Ce sont des objets combinatoires bien connus qui apparaissent en particulier dans le problème du scrutin et qui sont comptés par les nombres de m-Catalan,

$$\frac{1}{mn+1}\binom{(m+1)n}{n}. \tag{4.6}$$

L'opération de rotation sur les chemins de Dyck (cf. figure 1.26) s'étend naturellement aux *m-ballot paths*. Elle induit aussi une structure de treillis [BPR12] qu'on appelle *treillis de m-Tamari*. Un exemple est donné figure 4.3. Quand $m = 1$, on retrouve le cas classique du treillis de Tamari sur les chemins de Dyck. Les intervalles des treillis de m-Tamari ont été dénombrés dans [BMFPR11]. La formule généralise celle de Chapoton (3.1). On a

$$I_{n,m} = \frac{m+1}{n(mn+1)}\binom{(m+1)^2n+m}{n-1} \tag{4.7}$$

où $I_{n,m}$ est le nombre d'intervalles dans $\mathcal{T}_n^{(m)}$, le treillis de m-Tamari pour les chemins de taille n. Comme dans le cas $m = 1$, la formule est prouvée par la résolution d'une équation

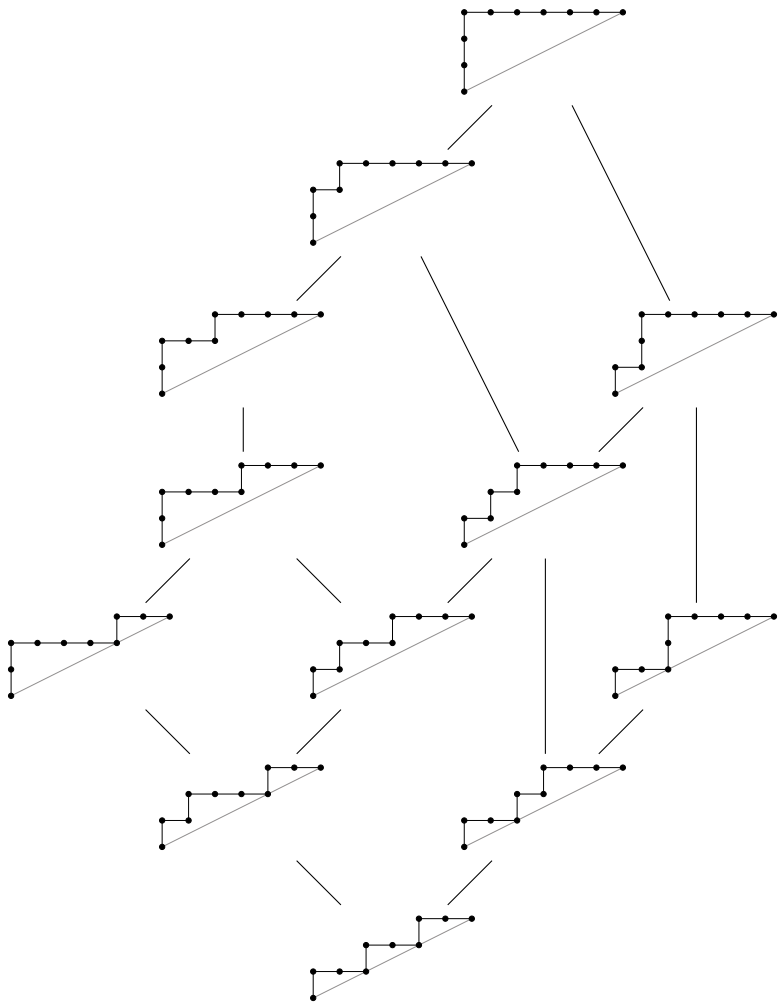


FIGURE 4.3 – Treillis de m-Tamari $\mathcal{T}_3^{(2)}$ sur les chemins.

fonctionnelle sur la série génératrice des intervalles. On peut exprimer cette équation à l'aide d'un opérateur $m+1$-linéaire, généralisation de l'opérateur bilinéaire B défini dans le chapitre 3 (3.3). Soit $\mathrm{B}^{(\mathrm{m})}$ l'opérateur défini par

$$\mathrm{B}^{(\mathrm{m})}(f, g_1, \dots, g_m) = fxy\Delta(g_1\Delta(g2\Delta(\dots\Delta(g_m))\dots) \tag{4.8}$$

où Δ est la différence divisée déjà définie en (3.22)

$$\Delta(g) = \frac{xg(x,y) - g(1,y)}{x-1}. \tag{4.9}$$

Si $\Phi^{(m)}(x,y)$ est la série génératrice des intervalles de $\mathcal{T}_n^{(m)}$ où y compte la taille des chemins et x la statistique des retours à 0 sur le chemin inférieur, on a [BMFPR11]

$$\Phi^{(m)}(x,y) = 1 + \mathrm{B}^{(\mathrm{m})}(\Phi^{(m)}, \Phi^{(m)}, \dots, \Phi^{(m)}). \tag{4.10}$$

La structure de l'équation fonctionnelle généralise donc directement celle du cas $m = 1$. En développant l'expression, on obtient une somme sur les arbres $m+1$-aires. Cela laisse penser que les résultats du chapitre précédent peuvent se généraliser aux treillis m-Tamari. C'est en effet le cas et on obtient ainsi une nouvelle preuve que la série génératrice des intervalles de $\mathcal{T}_n^{(m)}$ vérifie bien l'équation fonctionnelle. Par ailleurs, en généralisant le théorème 59, on obtient une formule comptant le nombre d'éléments inférieurs ou égaux à un élément donné.

De plus, dans les récents articles traitant des treillis de m-Tamari, le problème était laissé ouvert de l'interprétation en termes d'arbres de ces treillis. La question était pour nous fondamentale car nos démonstrations dans le cas du treillis de Tamari classique utilisent comme base les arbres binaires et le lien avec l'ordre faible. Pour y répondre, nous utilisons le plongement naturel du treillis $\mathcal{T}_n^{(m)}$ dans le treillis de Tamari $\mathcal{T}_{n\times m}^{(1)}$ qu'avaient déjà décrit [BMFPR11]. Ainsi, les intervalles-posets définis au chapitre précédent se généralisent simplement, les intervalles de m-Tamari étant des cas particulier d'intervalles de Tamari.

Les treillis m-Tamari sur les arbres

Nous donnons dans un premier temps la définition originelle du treillis de m-Tamari sur les *m-ballot paths* pour ensuite donner notre description en termes d'arbres.

Définition 74. *Un* m-ballot path *de taille n est un chemin dans le plan depuis l'origine $(0,0)$ jusqu'au point (nm, n) formé de pas "montants" verticaux $(0,1)$ et de pas "descendants" horizontaux $(1,0)$ tel que le chemin reste toujours au dessus de la droite $y = \frac{x}{m}$.*

Tout comme les chemins de Dyck, les *m-ballot paths* peuvent s'interpréter comme des mots sur un alphabet binaire $\{1,0\}$ où les pas montants sont codés par la lettre 1 et les pas descendants par 0. De même, un chemin est dit *primitif* s'il n'a pas d'autres contacts avec la droite $y = \frac{x}{m}$ que ses extrémités. La *rotation* est alors définie comme dans la définition 39 et illustrée figure 4.4.

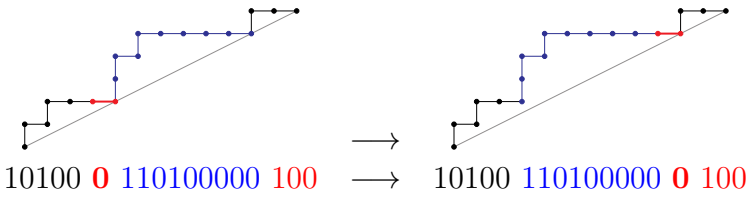


FIGURE 4.4 – Rotations sur les *m-ballot paths*.

Si on considère la rotation sur les chemins comme une relation de couverture, l'ordre induit est un treillis qui généralise l'ordre de Tamari usuel [BPR12]. En exemple, on donne l'ordre sur les *2-ballot paths* de taille 3, $\mathcal{T}_3^{(2)}$ figure 4.3.

En remplaçant chaque pas montant par une suite de m pas montants, on peut faire correspondre injectivement un chemin de Dyck de taille $m.n$ à chaque *m-ballot path*. L'ensemble obtenu est composé de chemins de Dyck dont les cardinaux des suites de pas montants sont divisibles par m. On appelle ces objets les chemins de m-Dyck. Un exemple de la correspondance est donnée figure 4.5.

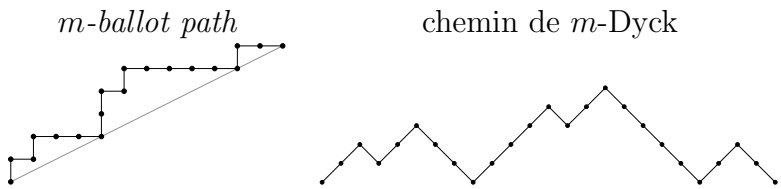


FIGURE 4.5 – Un *m-ballot path* et son chemin de m-Dyck correspondant.

Le passage d'un *m-ballot path* à son chemin de m-Dyck est compatible avec la rotation. On en déduit la propriété suivante que l'on trouve déjà dans [BMFPR11] :

Proposition 75. *Le treillis de m-Tamari $\mathcal{T}_n^{(m)}$ est isomorphe à l'idéal supérieur de $\mathcal{T}_{n\times m}^{(1)}$ engendré par le chemin de Dyck $(1^m0^m)^n$ (cf. figure 4.6).*

De cette observation triviale, on déduit la plupart des propriétés des treillis de m-Tamari. Nous décrivons ensuite cette structure récursive sur une famille d'arbres binaires que nous avons appelé *arbres m-binaires*, que l'on peut voir dans la figure 4.7.

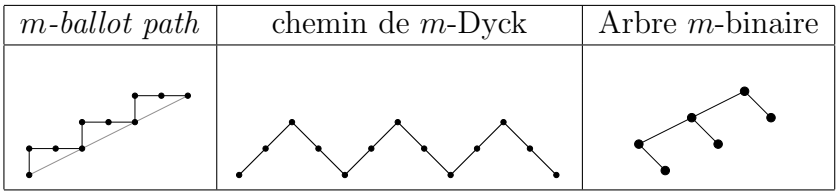


FIGURE 4.6 – Élément minimal de $\mathcal{T}_3^{(2)}$ en tant que *m-ballot path*, chemin de Dyck et arbre binaire (peigne-$(3,2)$).

Nous utilisons ensuite les arbres m-binaires pour définir l'ordre de m-Tamari sur des arbres $m+1$-aire. Ce treillis est illustré figure 4.8.

m-intervalles-posets

En utilisant les diverses façons d'exprimer le treillis de m-Tamari présentées dans le paragraphe précédent, nous arrivons au résultat suivant.

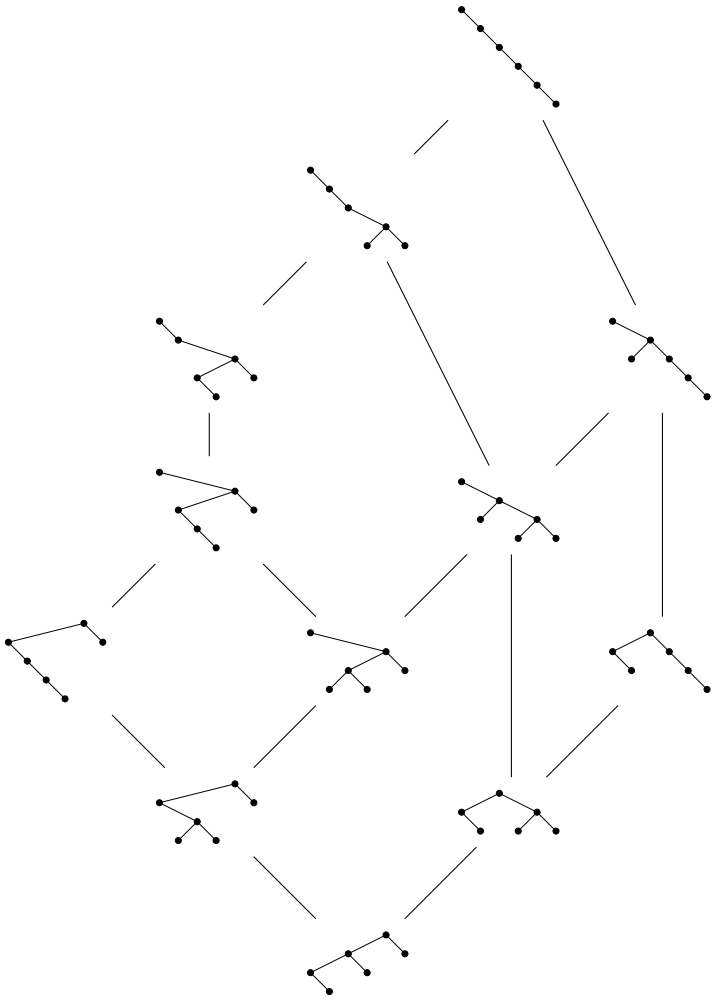


FIGURE 4.7 – Treillis de m-Tamari $\mathcal{T}_3^{(2)}$ sur les arbres m-binaires.

Définition 76. *Un m-intervalle-poset est un intervalle-poset de taille $n \times m$ vérifiant*

$$\begin{aligned} m &\lhd m-1 \lhd \cdots \lhd 1, \\ 2m &\lhd 2m-1 \lhd \cdots \lhd m+1, \\ &\dots \\ n.m &\lhd n.m-1 \lhd \cdots \lhd (n-1).m+1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Proposition 77. *Les m-intervalles-posets de taille n sont en bijection avec les intervalles de $\mathcal{T}_n^{(m)}$.*

La composition $\mathbb{B}$ de deux m-intervalles-posets ne donne pas une somme sur des m-intervalles-posets : les tailles ne sont plus des multiples de m. Il faut définir par conséquent

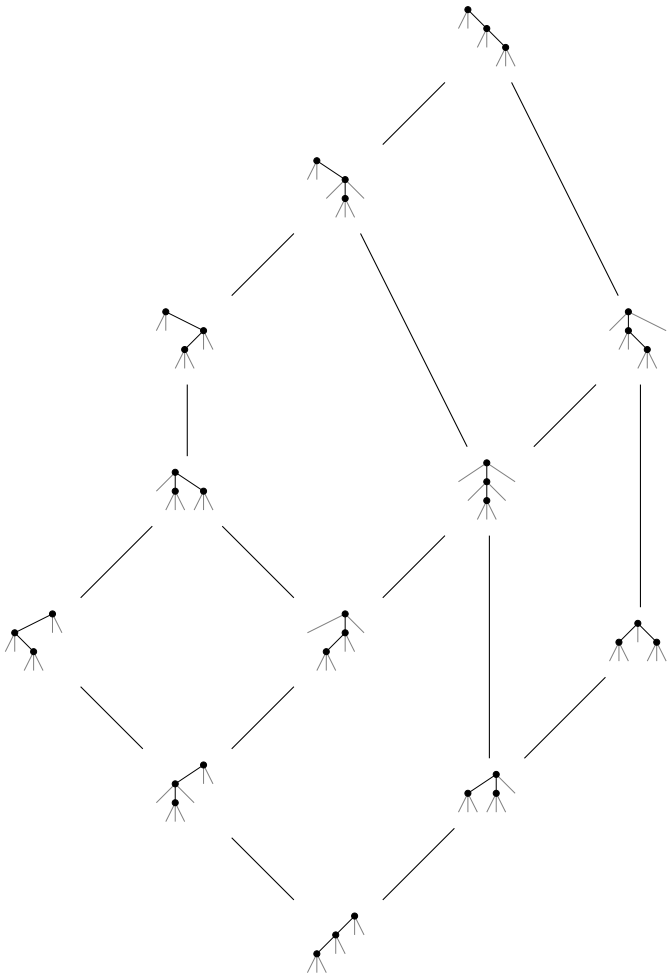


FIGURE 4.8 – Treillis de m-Tamari $\mathcal{T}_3^{(2)}$ sur les arbres ternaires

définir une m-composition qui soit $m+1$-linéaire et généralise la composition $\mathbb{B}$ pour pouvoir montrer la généralisation des résultats que nous avions sur les intervalles-posets classiques. Après avoir introduit cette m-composition $\mathbb{B}^{(m)}$, nous arrivons à la proposition suivante.

Proposition 78. *Soit T un arbre m-binaire et $S_T := \sum_{T' \leq T} P_{[T',T]}$ la somme sur les arbres m-binaires $T' \leq T$. C'est la somme des m-intervalles-posets dont T est l'arbre supérieur. Alors, si T est composé des arbres m-binaires $T_L, T_{R_1}, \ldots, T_{R_m}$ on a $S_T = \mathbb{B}^{(m)}(S_{T_L}, S_{T_{R_1}}, \ldots, S_{T_{R_m}})$.*

Cette proposition nous permet ensuite de prouver le théorème suivant.

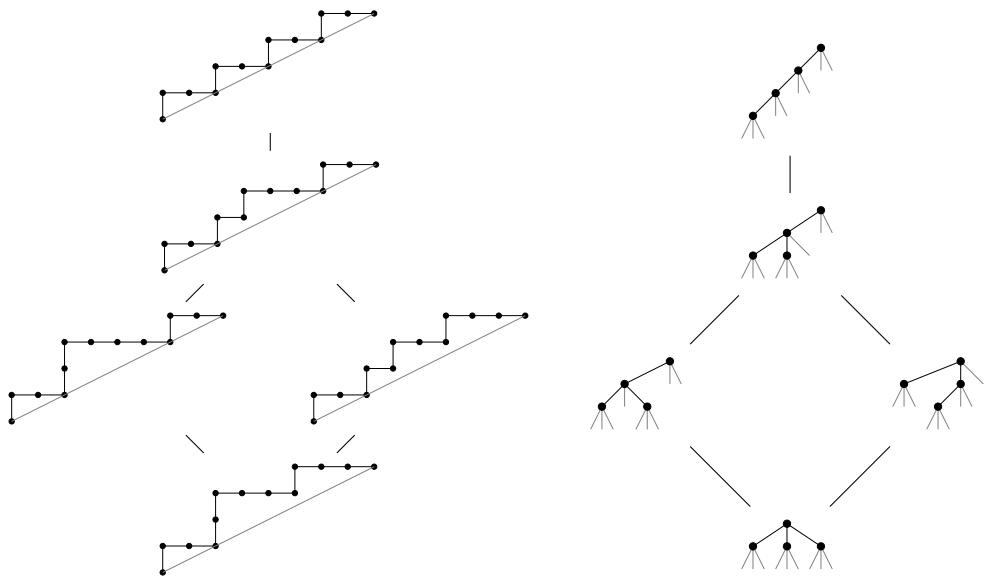
Théorème 79. *Soit T un arbre $m+1$-aire. On définit récursivement le polynôme $\mathcal{B}_T^{(m)}$ par*

$$\mathcal{B}_\emptyset^{(m)} = 1 \tag{4.12}$$

$$\mathcal{B}_T^{(m)} = \mathrm{B^{(m)}}_{y=1}(\mathcal{B}_{T_L}^{(m)}, \mathcal{B}_{T_{R_1}}^{(m)}, \ldots, \mathcal{B}_{T_{R_m}}^{(m)}) \tag{4.13}$$

où $T_L, T_{R_1}, \ldots, T_{R_m}$ sont les sous-arbres de T. Alors $\mathcal{B}_T^{(m)}$ compte le nombre d'éléments inférieurs ou égaux à T dans le treillis $\mathcal{T}_n^{(m)}$ en fonction du nombre de nœuds sur la branche gauche de T, ou de façon équivalente en fonction du nombre de retours à 0 dans le chemin correspondant à l'arbre T. En particulier, $\mathcal{B}_T^{(m)}(1)$ est le nombre d'éléments inférieurs ou égaux à T.

La figure 4.9 illustre un exemple d'application de ce théorème.



$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_T^{(2)} = \mathrm{B^{(2)}}(x,x,x) &= x \succ x \prec_\delta (x \prec_\delta x) \\
&= x^2 \prec_\delta (x(1+x)) \\
&= x^2(2+2x+x^2) \\
&= 2x^2 + 2x^3 + x^4
\end{aligned}$$

FIGURE 4.9 – Exemple du calcul de $\mathcal{B}_T^{(m)}$. On obtient $\mathcal{B}_T^{(m)}(1) = 5$ pour l'arbre T en bas du graphe. On peut vérifier sur la figure que la puissance de x correspond aux nombres de nœuds sur la branche gauche des arbres ou au nombre de retours à 0 sur les chemins.

4.3 Bijection entre flots et intervalles-posets

Dans ce paragraphe, nous donnons une bijection entre les flots sur une forêt d'arbres ordonnés et enracinés et les intervalles de l'ordre de Tamari. Nous commençons par définir les flots puis nous décrivons la bijection.

DÉFINITIONS Soit F une forêt d'arbres ordonnés enracinés. On définit un *flot* sur F en attachant une *entrée* $i \geq -1$ sur chaque nœud de F telle que le *flux sortant* de chaque nœud soit supérieur ou égal à 0. Le flux sortant d'un nœud est la somme des flux sortant de ses descendants (lui-même inclus). En particulier, si un nœud n'a pas de enfants, son flux sortant est égal à son entrée et doit donc être positif ou nul. Les entrées peuvent être vues comme des *sources* ou des *fuites* d'un liquide circulant des nœuds vers la racine. Autrement dit, la condition sur le flux sortant exprime le fait que la quantité de liquide n'est jamais négative. Une fuite (*i.e.,* une entrée de valeur -1) ne peut jamais être placée sur une feuille. Un exemple d'un flot est donné dans la figure 4.10. La somme des flux sortant des racines est appellée *flux sortant* du flot. Si le flux sortant du flot est 0, le flot est dit *fermé*.

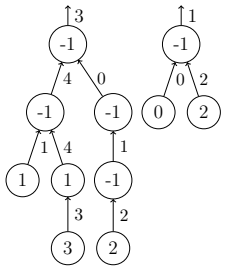


FIGURE 4.10 – Un flot sur une forêt d'arbre ordonnés et enracinés. Le flux sortant est 4.

La combinatoire des flots apparaît dans le contexte de l'opérade Pre-Lie dans [Cha13]. Un série formelle $\varepsilon_F(t)$ peut être associée à chaque forêt F par

$$\varepsilon_F(t) = \sum_f t^{r(f)} \tag{4.14}$$

où la somme parcourt tous les flots f sur F, et $r(f)$ est le flux sortant de f. Une formule récurrente pour calculer cette série a été donnée dans [Cha13]. Un résultat très surprenant est que la même récurrence apparaît dans le contexte très différent des intervalles de l'ordre de Tamari. En effet, la description récursive du polynome comptant le nombre d'éléments inférieurs ou égaux à un arbre donné dans le treillis de Tamari donnée dans le paragraphe 3.3 correspond en fait à la série génératrice de certains flots par un simple changement de variable $x = \frac{1}{1-t}$. En prenant la série en $t = 0$, on obtient le résultat suivant.

Théorème 80. *Le nombre de flots fermés d'une forêt F donnée est le nombre d'éléments inférieurs ou égal à un certain arbre $T(F)$ dans le treillis de Tamari.*

L'arbre binaire $T(F)$ est obtenu par une bijection très classique entre les forêts d'arbres ordonnés et les arbres binaires. La forêt F est en fait la forêt finale de l'arbre binaire $T(F)$ (voir la figure 4.11 pour un exemple). Ce théorème peut être prouvé en comparant les formules récurrentes de le paragraphe 3.3 et de [Cha13] mais notre but est de donner ici une bijection explicite. Plus précisément, la bijection est définie entre les flots fermés sur des forêts et les intervalles-posets. Les relation croissantes sont calculées en utilisant la forêt et les relations décroissantes sont obtenues à partir des entrées du flot.

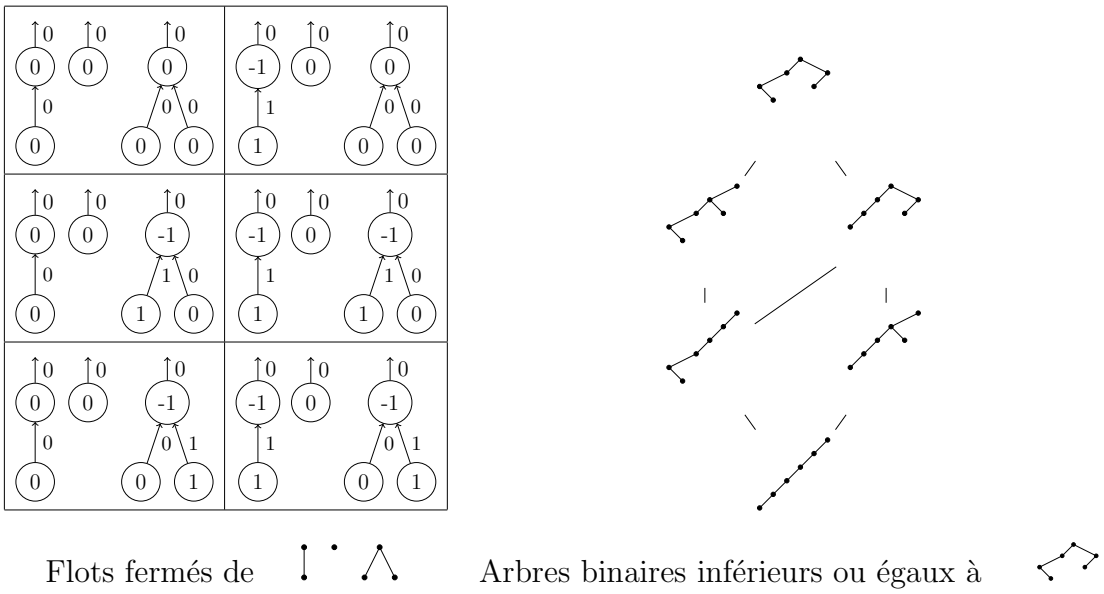


FIGURE 4.11 – Flots sur une forêt et idéal du treillis de Tamari.

BIJECTION Donnons maintenant la description de la bijection. La première étape consiste à étiqueter les nœuds de la forêt. L'étiquetage est construit en utilisant l'ordre préfixe sur les nœuds de l'arbre : on étiquette d'abord la racine, puis récursivement chacun des sous-arbres de gauche à droite. Les nœuds étiquetés deviennent les sommets de l'intervalle-poset. La figure 4.12 illustre un exemple de la correspondance entre sommets et étiquettes.

On ajoute ensuite les relations croissantes de l'intervalle-poset. Ces relations dépendent uniquement de la forêt elle-même et non du flot. Pour chaque sommet i, on ajoute une relation $i \lhd j$ où $j > i$ est le premier sommet qui n'est pas un descendant de i. De façon équivalente, si i a un frère droit j, on ajoute toutes les relations $i' \lhd j$ où i' parcourt tous les nœuds de la branche la plus à droite de i. Cette étape est illustrée dans la première image de la figure 4.12.

Pour finir, on ajoute progressivement les relations décroissantes. Ce processus est illustré dans la figure 4.12. À chaque étape, on traite une entrée négative. On prend les entrées dans l'ordre décroissant de leurs étiquettes correspondantes dans l'interval-poset (contruit à la première étape de la bijection). La *source* d'une entrée négative est la première entrée stric-

tement positive de ses descendants (en suivant toujours l'ordre des étiquettes). Par exemple, dans la cinquième image de la figure 4.12, la source de l'entrée négative sélectionnée est son fils gauche (étiqueté 3) et non son fils droit (étiqueté 4). Pour une entrée négative étiquetée i avec comme source j, on ajoute toutes les relations décroissantes $j' \lhd i$ pour tout $i < j' \leq j$. Quand toutes les relations sont ajoutées, on incrémente l'entrée négative et on décrémente la source pour ne plus la considérer par la suite.

Proposition 81. *Le processus décrit précédemment est bien défini et donne une bijection entre les flots sur les forêts ordonnées et les intervalles-posets. La forêt ordonnée et l'intervalle-poset ont la même taille et l'arbre maximal de l'intervalle ne dépend pas des entrées du flot.*

Démonstration. La première propriété à vérifier est que l'objet contruit est bien un intervalle-poset. Une relation décroissante $j \lhd i$ ne peut jamais être ajoutée si on a déjà $i \lhd j$. En effet, $j \lhd i$ implique que j est un descendant de i dans la forêt et $i \lhd j$ implique que j n'en est pas un. De plus, il est facile de vérifier que quand une relation croissante $i \lhd j$ est ajoutée, alors toutes les relations $i' \lhd j$ où $i \leq i' < j$ sont aussi ajoutées et donc l'objet final vérifie bien les conditions requises pour être un intervalle-poset.

Pour prouver que ce processus est une bijection, nous avons besoin de décrire la construction inverse pour obtenir un flot à partir d'un intervalle-poset. Pour commencer, nous construisons la forêt à partir des relations croissantes. Cela revient simplement à inverser le processus que nous avons présenté plus tôt : le parent d'un nœud j est le plus grand nombre $i < j$ tel que $i \ntriangleleft j$. On doit ensuite ajouter les entrées du flot. Chaque sommet i tel qu'il existe $j > i$ avec $j \lhd i$ reçoit une entrée -1 et augmente la valeur d'une source. Sa source est le plus grand sommet $j > i$ avec $j \lhd i$. Notons qu'un sommet ne peut pas être une entrée -1 et une source car si $j' \lhd j \lhd i$ avec $i < j < j'$, alors j ne peut pas être la source de i. En appliquant cette étape itérativement, il est clair que ce processus inverse l'algorithme décrit plus tôt. □

Remarque 82. (Statistiques) Certaines statistiques peuvent être lues aussi bien sur les flots que sur les intervalles-posets. Un exemple simple est le nombre d'entrées -1 du flot. Ce nombre de nœuds corresponds trivialement au nombre de sommets a de l'intervalle-poset tels qu'il y a une relation $a + 1 \lhd a$. On peut aussi considérer la somme de tous les flux sortant de nœuds n'étant pas des racines. Cette statistique est égale à 7 sur l'exemple de la figure 4.12. Elle peut aussi être lue sur l'intervalle-poset. Pour chaque nœud a, on prend l'ensemble de sommets $\{b > a; b \lhd a; \forall c \lhd a, b \ntriangleleft c\}$. Exprimé autrement, ce sont les éléments maximaux en termes de relations croissantes qui précèdent a avec une relation relation décroissante. Comme exemple, sur la figure 4.12, on obtient $\{2, 4\}$ pour le sommet 1, $\{3\}$ pour 2, $\{7, 8\}$ pour 6, $\{8\}$ pour 7, et $\{11\}$ pour 9. En ajoutant toutes les tailles, on obtient 7 qui était la somme des flux sortants.

Remarque 83. (Flots ouverts) Il est possible de prouver récursivement que la série des flots ouverts d'une forêt donnée (4.14) est en fait un polynôme en $\frac{1}{1-t}$. Il correspond au polynôme de Tamari défini dans le paragraphe 3.3, le nombre de termes de ce polynôme

correspond au nombre de flots fermés de la forêt. Ce fait peut aussi être expliqué d'un point de vue combinatoire. Chaque flot ouvert peut être envoyé sur un unique flot fermé. La série des flots ouverts correspondants à un flot fermé f est alors un monôme $\left(\frac{1}{1-t}\right)^r$ où r est égal à trees(I) et I est l'image de l'intervalle-poset de f.

4.4 Preuve de la répartition symétrique de deux statistiques

Dans [BMFPR11], les auteurs donnent une équation fonctionnelle de la série génératrice des intervalles de l'ordre de Tamari dépendant de deux statistiques. Les statistiques sont données en termes de chemins de Dyck. La première est le nombre de contacts non initiaux

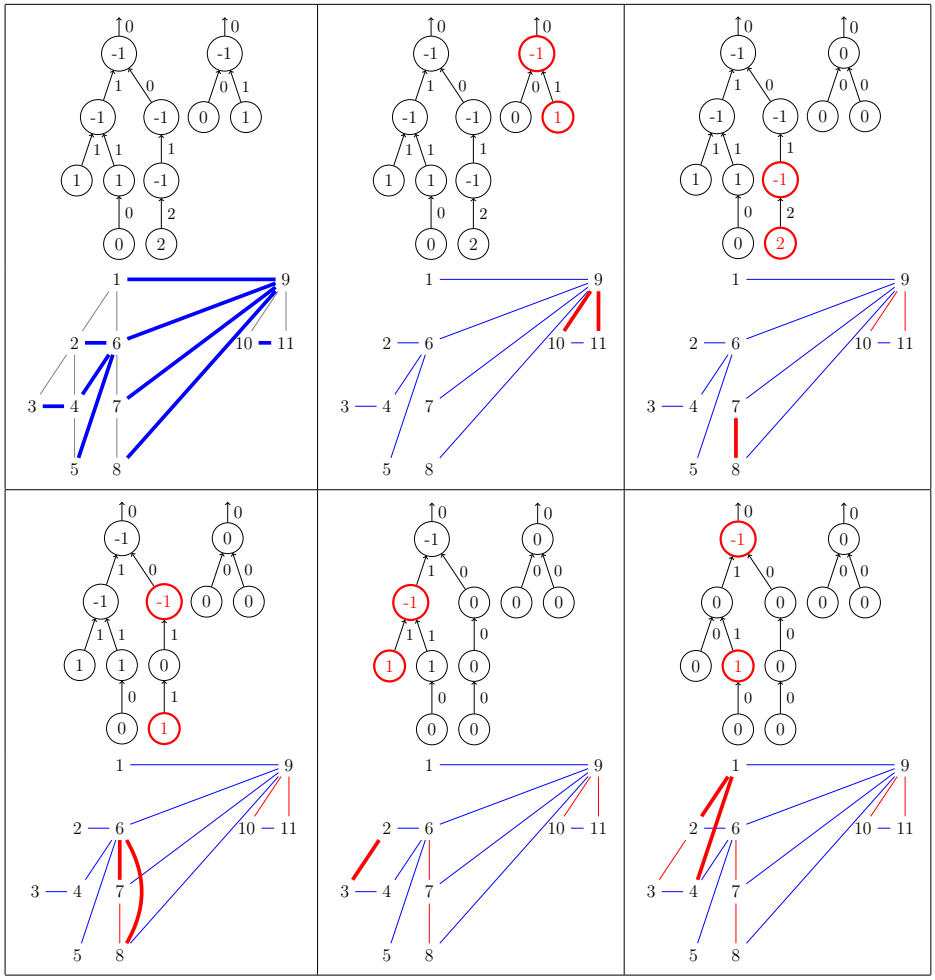


FIGURE 4.12 – Exemple d'application de la bijection entre les flots et les intervalles-posets.

entre le plus petit chemin de Dyck de l'intervalle et l'axe x. Sur un intervalle-poset I, cette statistique correspond à trees(I), *i.e.,* le nombre de composantes de la forêt finale de I (voir le paragraphe 3.3 pour plus de détails). Dans les trois méthodes différentes utilisées dans [Cha07, BMFPR11] et le paragraphe 3.4 pour engendrer les intervalles, cette statistique est cruciale pour obtenir l'équation fonctionnelle. En suivant la notation de [BMFPR11], on l'appelle paramètre *catalytique*. Les auteurs de [BMFPR11] introduisent aussi une deuxième statistique non essentielle : la *montée initiale* d'un intervalle est la montée initiale du plus grand chemin de l'intervalle, *i.e.,* le nombre de pas montants au départ du chemin. En regardant son comportement au travers de la bijection entre les chemins de Dyck et les arbres binaires et en suivant le processus de construction d'un intervalle-poset, on peut lire directement cette statistique sur les intervalles-posets. Elle correspond au plus grand k tel qu'il n'y pas de relation $(i-1) \lhd i$ pour $i = 1, ..., k$. On appelle cette statistique la montée initiale de l'intervalle-poset et on la note ir(I).

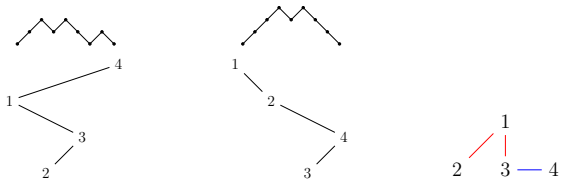


FIGURE 4.13 – Montée initiale et contacts d'intervalles de Tamari. Dans cet exemple, le chemin inférieur a deux contacts non-initiaux avec l'axe x. Ils correspondent aux 2 sommets (1 et 4) sur le bord gauche du plus petit arbre binaire et aux deux composantes de la forêt finale de l'intervalle-poset. La montée initiale du chemin supérieur est 3 parce qu'il commence par 3 pas montants consécutifs. Dans l'intervalle-poset 4 est le premier nœud ayant un sous-arbre gauche non-vide et donc $3 \lhd 4$ est la première relation de la forme $i - 1 \lhd i$.

Soit $\Phi(y; x, z)$ la série génératrice des intervalles de l'ordre de Tamari où y, x, et z comptent respectivement size(I), trees(I), et ir(I) :

$$\Phi(y; x, z) = \sum_I y^{\mathrm{size}(I)} x^{\mathrm{trees}(I)} z^{\mathrm{ir}(I)}, \tag{4.15}$$

$$= 1 + y\,xz + y^2\,(x^2z^2 + x^2z + xz^2) \tag{4.16}$$

$$+ y^3\,(x^3z^3 + 2x^3z^2 + 2x^3z + 2x^2z^3 + 2x^2z^2 + x^2z + 2xz^3 + xz^2) + \cdots \tag{4.17}$$

Dans [BMFPR11], il a été prouvé que Φ vérifie l'équation fonctionnelle suivante,

$$\Phi(y; x, z) = 1 + xyz\Phi(y; x, 1)\frac{x\Phi(y; x, z) - \Phi(y; 1, z)}{x - 1}. \tag{4.18}$$

En resolvant cette équation, les auteurs se sont rendus compte que les distributions jointes de trees(I) et ir(I) sont symétriques, *i.e.,* , que $\Phi(y; x, z) = \Phi(y; z, x)$. Trouver une preuve

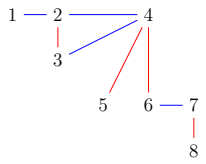
combinatoire de ce fait était laissé ouvert. Le but de cette section est de donner une preuve en décrivant une bijection récursive qui échange les deux statistiques sur les intervalles-posets.

L'idée principale de la bijection est qu'un intervalle-poset peut être décomposé de deux façons différentes en deux intervalles-posets plus petits. Une de ces décompositions est donnée par l'opération de composition des intervalles décrite dans le paragraphe 3.3 (qui est différente des décompositions de [Cha07] et [BMFPR11]).

Proposition 84. *Un intervalle-poset I de taille n est entièrement déterminé par un unique triplet (I_1, I_2, r) où I_1 et I_2 sont deux intervalles-posets tels que* $\mathrm{size}(I_1) + \mathrm{size}(I_2) + 1 = \mathrm{size}(I)$ *et r est un entier tel que $0 \leq r \leq \mathrm{trees}(I_2)$. On appelle cette décomposition la* décomposition des contacts *de l'intervalle et on écrit $I = LC(I_1, I_2, r)$.*

Le nombre de contacts de I vérifie $\mathrm{trees}(I) = \mathrm{trees}(I_1) + 1 + \mathrm{trees}(I_2) - r$. *Et sa montée initiale est donnée par* $\mathrm{ir}(I) = \mathrm{ir}(I_1)$ *si I_1 n'est pas vide et* $\mathrm{ir}(I) = \mathrm{ir}(I_2) + 1$ *sinon.*

Cette proposition est une conséquence directe de la proposition 72. Soit (I_1, I_2, r) un triplet conforme à la définition donnée ci-dessus et I_2 tel que $\mathrm{trees}(I_2) = s$ avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_s$ étant les racines de $F_{\geq}(I_2)$. Alors I est la concaténation décalée de I_1, un nouveau sommet $k = size(I_1) + 1$, et I_2 avec $y \lhd k$ pour tout $y \in I_1$ et $x_i \lhd k$ pour $1 \leq i \leq r$. Réciproquement, si I est un intervalle-poset, sa racine k est le sommet avec l'étiquette la plus grande pour laquelle $i \lhd k$ pour tout $i < k$. Alors I_1 est le sous-poset formé par les sommets $i < k$ et I_2 est le sous-poset formé par les sommets $j > k$. Finalement, r est le nombre d'enfants de k dans $F_{\geq}(I)$. La figure ci-dessous illustre un exemple de décomposition.



$$= \quad LC\left(\begin{array}{c} 1 - 2 \\ | \\ 3 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \end{array}, \begin{array}{c} 2 - 3 \\ | \\ 4 \end{array}, 2\right) \tag{4.19}$$

On peut vérifier que $\mathrm{trees}(I) = 4 = \mathrm{trees}(I_1) + 1 + \mathrm{trees}(I_2) - r = 2 + 1 + 3 - 2$. Et $\mathrm{ir}(I) = \mathrm{ir}(I_1) = 1$.

On donne maintenant une nouvelle façon de décomposer les intervalles.

Proposition 85. *Un intervalle-poset I de taille n est entièrement déterminé par un unique triplet (I_1, I_2, r) où I_1 et I_2 sont deux intervalles-posets tels que* $\mathrm{size}(I_1) + \mathrm{size}(I_2) + 1 = \mathrm{size}(I)$ *et r est un entier tel que $0 \leq r \leq \mathrm{ir}(I_2)$. On appelle cette décomposition la* décomposition de montée initiale *et on écrit $I = IR(I_1, I_2, r)$.*

La montée initiale de I vérifie $\mathrm{ir}(I) = \mathrm{ir}(I_1) + 1 + \mathrm{ir}(I_2) - r$. *Et son nombre de contacts est donné par* $\mathrm{trees}(I) = \mathrm{trees}(I_1)$ *si I_1 est non vide et* $\mathrm{trees}(I) = \mathrm{trees}(I_2) + 1$ *sinon.*

Cette décomposition n'a pas été décrite précédement. Elle provient d'une nouvelle opération de composition sur les intervalles-posets que l'on appelle *composition de montée initiale*. Elle est décrite en deux étapes. Premièrement, soient I_2 un intervalle-poset et r

tel que $0 \leq r \leq \mathrm{ir}(I_2)$, et insérons un nouveau sommet dans I_2 pour obtenir un intervalle-poset I_2'. L'étiquette du nouveau sommet est $k = \mathrm{ir}(I_2) - r + 1$ et les étiquettes des sommets de I_2 sont décalées en fonction de ce sommet (les plus petites sont inchangées et les plus grandes sont décalées de 1). Les relations croissantes de I_2 sont laissées inchangées et une nouvelle relation $k \lhd k+1$ est ajoutée si $k+1 \leq \mathrm{size}(I_2)$. Les relations décroissantes sont remplacées de telle façon que le nombre d'enfants de chaque ancient sommet de I_2 est le même dans $F_{\geq}(I_2')$ comme c'était le cas dans $F_{\geq}(I_2)$ (la condition sur les relations décroissantes des intervalles-posets implique qu'il n'y a qu'une seule façon de vérifier cette condition). Ce processus d'insertion est illustré figure 4.14. Notons qu'il peut être facilement inversé : le sommet inséré est toujours la nouvelle montée initiale.

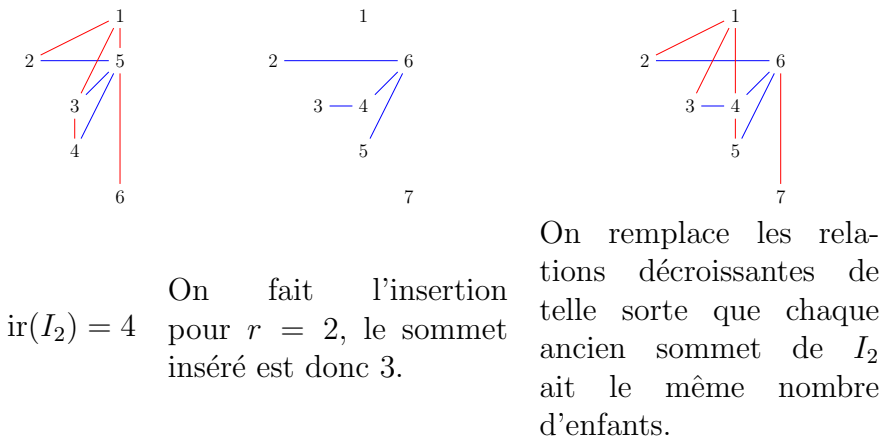


FIGURE 4.14 – Insertion dans un intervalle-poset pour une composition de montée initiale avec $r = 2$.

La seconde étape de la composition consiste à fusionner I_1 et I_2'. Un exemple de cette opération est donné dans la figure 4.15. Soit $a = \mathrm{ir}(I_1)$. On insère I_2' juste après a, ce qui signifie que l'on décale les sommets de I_2' de a et les sommets de I_1 plus grand que a par $\mathrm{size}(I_2')$. On ajoute ensuite des relations décroissantes $j \lhd a$ pour tout j de I_2'. Notons que, si $a \neq \mathrm{size}(I_1)$ alors il y avait une relation $a \lhd a+1$ dans I_1 qui est maintenant $a \lhd a+1+\mathrm{size}(I_2') = b$. Alors, par transitivité, toutes les relations croissantes $j \lhd b$ pour tout j dans I_2' ont aussi été ajoutées.

Notons que ce processus peut être inversé : un intervalle I est uniquement décomposé en I_1 et I_2. Le sommet a de I_1 que avons utilisé pour fusionner I_1 et I_2' est le sommet de I avec l'étiquette maximale telle que

— $a \leq \mathrm{ir}(I)$ et $\mathrm{ir}(I) \lhd a$,
— s'il y a $b > a$ tel que $a \lhd b$ alors on a $j \lhd a$ pour tout $a < j < b$, sinon, on a $j \lhd a$ pour tout $j > a$.

L'intervalle-poset I_2' est alors le sous-poset formé par les sommets $a < j < \mathrm{ir}(I) + 1$.

On peut maintenant construire une bijection récursive.

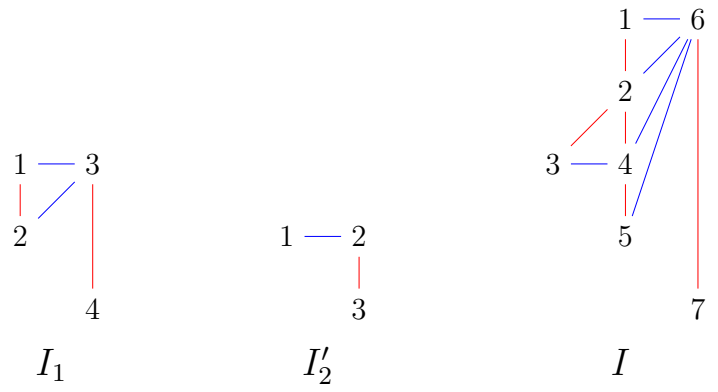


FIGURE 4.15 – Contruction de I à partir de I_1 et I'_2.

Définition 86. *Soit I un intervalle-poset et $I = LC(I_1, I_2, r)$ sa décomposition selon les contacts. Alors $\beta(I)$ est récursivement défini par*

- $\beta(\emptyset) = \emptyset$
- $\beta(I) = IR(\beta(I_1), \beta(I_2), r)$.

Proposition 87. *Soit I un intervalle-poset tel que* $\mathrm{trees}(I) = a$ *et* $\mathrm{ir}(I) = b$*, alors* $\mathrm{trees}(\beta(I)) = b$ *et* $\mathrm{ir}(\beta(I)) = a$.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence directe des propositions 84 et 85. □

EXEMPLE On détaille maintenant le calcul de l'image d'un intervalle-poset par β.

Soit $I = LC(I_1, I_2, r)$ l'intervalle-poset suivant :

$$I = \begin{array}{c} 1 - 2 - 4 \\ 3 \\ 5 - 6 \end{array} = LC\left(\begin{array}{c} 1 - 2 \\ 3 \end{array}, \begin{array}{c} 1 - 2 \\ \\ \end{array}, 1 \right). \tag{4.20}$$

Pour calculer $\beta(I)$, on doit d'abord calculer $\beta(I_1)$ et $\beta(I_2)$. Soit $I_1 = LC(I_{1,1}, I_{1,2}, r_1)$ la décomposition des contacts de I_1. On a que $I_{1,1} = I_{1,2}$ est le poset ne contenant qu'un point, et donc $\beta(I_{1,1}) = I_{1,1}$ et $\beta(I_{1,2}) = I_{1,2}$. On calcule ensuite leurs compositions de montée initiale.

Premièrement, on calcule $k = ir(I_{1,2}) - r_1 + 1 = 1$, on l'ajoute à $I_{1,2}$ et on décale donc les sommets qui sont supérieur ou égaux à k. Comme $k + 1 \leq \mathrm{size}(I'_{1,2})$, on ajoute une relation $k \lhd k + 1$.

On peut maintenant fusionner $I_{1,1}$ et $I'_{1,2}$. Pour ce faire, on calcule $a = ir(I_{1,1}) = 1$ et on insère $I'_{1,2}$ juste après a et on ajoute ensuite $j \lhd a$ pour tout j dans $I'_{1,2}$. Ce qui nous donne :

$$I_1 = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \\ & 3 \arrow[u, dash] \end{tikzcd} = LC\,(1,1,1) \qquad \Rightarrow \quad \beta(I_1) = IR\,(1,1,1) = \begin{tikzcd} & 1 \\ 2 \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & 3 \arrow[u, dash] \end{tikzcd} \tag{4.21}$$

La prochaine étape est de calculer $\beta(I_2)$. Comme $\text{size}(I_2) = 2$, on ne donne pas le détail du calcul.

$$I_2 = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \end{tikzcd} = LC\,(1,\emptyset,0) \qquad \Rightarrow \quad \beta(I_2) = IR\,(1,\emptyset,0) = \begin{tikzcd} 1 \\ 2 \arrow[u, dash] \end{tikzcd} \tag{4.22}$$

Maintenant que nous avons calculé $\beta(I_1)$ et $\beta(I_2)$, nous pouvons calculer $\beta(I)$. La première étape est de calculer $k = ir(I_2) - r + 1 = 2$. Nous insérons maintenant k dans I_2 et on décale les sommets. Les relations croissantes de I_2 sont laissées inchangées et on ajoute une relation supplémentaire $k \lhd k+1$ car $k \leq \text{size}(I_2)$. Les relations décroissantes sont remplacées de façon à ce que chaque ancien sommet de I_2 ait le même nombre d'enfants dans sa forêt finale. Dans notre cas, 1 avait un seul enfant et il y a seulement une façon d'ajouter cette relation dans I'_2 qui est $2 \lhd 1$, et donc

$$I'_2 = \begin{tikzcd} & 1 \\ 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[u, dash] \end{tikzcd} \tag{4.23}$$

La dernière étape consiste à fusionner I_1 et I'_2. On calcule $a = ir(I_1) = 2$. On insère I'_2 juste après a en décalant les étiquettes. Ensuite, pour tout j dans I'_2, on ajoute une relation décroissante $j \lhd a$ et une relation croissante $j \lhd a + \text{size}(I'_2) + 1$.

$$I = LC\left(\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \\ & 3 \arrow[u, dash] \end{tikzcd}, \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \end{tikzcd}, 1 \right) \qquad \Rightarrow \quad \beta(I) = IR\left(\begin{tikzcd} & 1 \\ 2 \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & 3 \arrow[u, dash] \end{tikzcd}, \begin{tikzcd} 1 \\ 2 \arrow[u, dash] \end{tikzcd}, 1 \right) = \begin{tikzcd} & & & 1 \\ & & 2 \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & 6 \arrow[u, dash] \arrow[ddl, dash] \\ & 3 \arrow[urr, dash] \arrow[d, dash] & & \\ & 4 \arrow[r, dash] & 5 & \end{tikzcd} \tag{4.24}$$

On vérifie facilement que $\text{trees}(I) = \text{ir}(\beta(I)) = 4$ et que $\text{ir}(I) = \text{trees}(\beta(I)) = 1$.

Troisième partie

Algèbres Cambriennes

Chapitre 5

Algèbre Cambrienne

Dans ce chapitre, nous allons définir et donner les principales propriétés des “arbres Cambriens”, une structure généralisant la notion d’arbre binaire de recherche standard. Ils ont été introduits indépendamment par K. Igusa et J. Ostroff dans [IO13] en tant que “mixed cobinary trees” dans le contexte des algèbres amassées et de la théorie des représentations des carquois et par C. Lange et V. Pilaud dans [LP13] comme “épines” (*i.e.,* arbres duaux orientés et étiquetés) de triangulations de polygones pour revisiter les multiples réalisations de l’associaèdre de C. Hohlweg and C. Lange [HL07]. Ici, nous utilisons le terme “arbre Cambrien” pour illustrer leur lien avec les treillis Cambrien en type A de N. Reading [Rea06]. Bien que motivantes et sous-jacentes au présent travail, ces interprétations ne sont pas nécessaires aux constructions combinatoires et algébriques présentées ici. Tous les résultat de cette partie sont issus d’un travail en commun avec V. Pilaud [CP14].

5.1 Algèbre de Hopf Cambrienne

Dans ce paragraphe, nous introduisons l’algèbre de Hopf Cambrienne Camb comme une sous-algèbre de l’algèbre de Hopf $\mathsf{FQSym}_{\pm}$ sur les permutations signées, et algèbre de Hopf duale Camb^* comme quotient de l’algèbre de Hopf duale $\mathsf{FQSym}^*_{\pm}$. Nous donnons ensuite des descriptions combinatoires du produit et du coproduit dans ces algèbres. Ces résultats étendent l’approche de F. Hivert, J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon [HNT05] pour construire l’algèbre de J.-L. Loday et M. Ronco sur les arbres binaires [LR98] comme une sous-algèbre de l’algèbre de C. Malvenuto et C. Reutenauer sur les permutations [MR95].

Mentionnons tout de suite qu’une généralisation différente a été étudiée par N. Reading dans [Rea05]. Son idée était de construire une sous-algèbre de l’algèbre de C. Malvenuto et C. Reutenauer en utilisant les classes d’équivalence d’une relation de congruence définie comme l’union $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \equiv_{\varepsilon_n}$ de relation ε_n-Cambrienne pour une signature fixée $\varepsilon_n \in \pm^n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Pour pouvoir obtenir une algèbre de Hopf, le choix de $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit satisfaire certaines relations de compatibilité : N. Reading caractérise les familles $\equiv_n$ “transitionnelles” (resp. “insertionnelles”) de congruence de treillis sur $\mathfrak{S}_n$ pour lesquelles la

somme sur les éléments des classes de congruence de $(\equiv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de la sous-algèbre (resp. sous-cogèbre) de FQSym. Ces conditions font que le choix de $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est très contraint. À titre de comparaison, nous considérons simultanément toutes les relations Cambriennes pour toutes les signatures. En particulier, notre algèbre Cambrienne contient toutes les algèbres de Hopf de [Rea05] comme sous-algèbres de Hopf.

5.1.1 Produits de mélange et de convolution signés

Pour $n, n' \in \mathbb{N}$, notons

$$\mathfrak{S}^{(n,n')} := \{\tau \in \mathfrak{S}_{n+n'} \mid \tau(1) < \cdots < \tau(n) \text{ et } \tau(n+1) < \cdots < \tau(n+n')\}$$

l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_{n+n'}$ avec au plus une descente, en position n. La *concaténation décalée* $\tau\bar{\tau}'$, le *produit de mélange décalé* $\tau \sqcup\!\sqcup \tau'$, et le *produit de convolution* $\tau \star \tau'$ de deux permutations (non signées) $\tau \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau' \in \mathfrak{S}_{n'}$ sont habituellement définis par

$$\tau\bar{\tau}' := [\tau(1), \ldots, \tau(n), \tau'(1)+n, \ldots, \tau'(n')+n] \in \mathfrak{S}_{n+n'},$$
$$\tau \sqcup\!\sqcup \tau' := \left\{(\tau\bar{\tau}') \circ \pi^{-1} \mid \pi \in \mathfrak{S}^{(n,n')}\right\} \qquad \text{et} \qquad \tau \star \tau' := \left\{\pi \circ (\tau\bar{\tau}') \mid \pi \in \mathfrak{S}^{(n,n')}\right\}.$$

Par exemple,

$$12 \sqcup\!\sqcup 231 = \{12453, 14253, 14523, 14532, 41253, 41523, 41532, 45123, 45132, 45312\},$$
$$12 \star 231 = \{12453, 13452, 14352, 15342, 23451, 24351, 25341, 34251, 35241, 45231\}.$$

Ces opérations peuvent être visualisées graphiquement sur les tables des permutations τ, τ'. On rappelle que la table de la permutation τ contient un point aux coordonnées $(\tau(i), i)$ pour chaque $i \in [n]$. La table de la concaténation décalée $\tau\bar{\tau}'$ contient la table de τ comme bloc inférieur gauche et la table de la permutation τ' comme bloc supérieur droit. Les tables des permutations apparaissant dans le produit de mélange décalé $\tau \sqcup\!\sqcup \tau'$ (resp. dans le produit de convolution $\tau\star\tau'$) sont ensuite obtenues en mélangeant les lignes (resp. les colonnes) de la table de $\tau\bar{\tau}'$. En particulier, on obtient la table de τ si on efface tous les points dans les n' colonnes les plus à droites (resp. lignes les plus hautes) d'une table dans le produit de mélange décalé $\tau \sqcup\!\sqcup \tau'$ (resp. dans le produit de convolution $\tau \star \tau'$). La figure 5.1 illustre des exemples de ces tables.

Ces définitions s'étendent aux permutations signées. Le *produit de mélange décalé signé* $\tau \sqcup\!\sqcup \tau'$ est défini comme le produit de mélange des permutations dans lequel les signes voyagent avec leurs valeurs, tandis que le *produit de convolution signé* $\tau \star \tau'$ est défini comme le produit de convolution des permutations dans lequel les signes restent à leur positions. Par exemple,

$$\bar{1}\underline{2} \sqcup\!\sqcup \underline{23}\bar{1} = \{\bar{1}\underline{2}4\underline{5}\bar{3}, \bar{1}\underline{4}2\underline{5}\bar{3}, \bar{1}\underline{45}\bar{3}\underline{2}, \underline{4}\bar{1}\underline{2}5\bar{3}, \underline{4}\bar{1}5\underline{2}\bar{3}, \underline{4}\bar{1}5\bar{3}\underline{2}, \underline{45}\bar{1}\underline{2}\bar{3}, \underline{45}\bar{1}\bar{3}\underline{2}, \underline{45}\bar{3}\bar{1}\underline{2}\},$$
$$\bar{1}\underline{2} \star \underline{23}\bar{1} = \{\bar{1}\underline{2}4\underline{5}\bar{3}, \bar{1}\underline{3}4\underline{5}\bar{2}, \bar{1}\underline{4}3\underline{5}\bar{2}, \bar{1}\underline{5}3\underline{4}\bar{2}, \bar{2}\underline{3}4\underline{5}\bar{1}, \bar{2}\underline{4}3\underline{5}\bar{1}, \bar{2}\underline{5}3\underline{4}\bar{1}, \bar{3}\underline{4}2\underline{5}\bar{1}, \bar{3}\underline{5}2\underline{4}\bar{1}, \bar{4}\underline{5}2\underline{3}\bar{1}\}.$$

Notons que le produit de mélange décalé est compatible avec les valeurs signées, tandis que le produit de convolution est compatible avec les positions signées au sens où

$$\mathfrak{S}^{\varepsilon} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \mathfrak{S}^{\varepsilon'} = \mathfrak{S}^{\varepsilon\varepsilon'} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_{\varepsilon} \star \mathfrak{S}_{\varepsilon'} = \mathfrak{S}_{\varepsilon\varepsilon'}.$$

Dans les deux cas, $\overline{\sqcup\!\sqcup}$ et $\star$ sont compatibles avec les distributions des signes positifs et négatifs, *i.e.*,

$$|\tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau'|_+ = |\tau|_+ + |\tau'|_+ = |\tau \star \tau'|_+ \qquad \text{et} \qquad |\tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau'|_- = |\tau|_- + |\tau'|_- = |\tau \star \tau'|_-.$$

5.1.2 Sous-algèbre de Hopf de $\mathsf{FQSym}_{\pm}$

Notons $\mathsf{FQSym}_{\pm}$ l'algèbre de Hopf ayant pour base $(\mathbb{F}_\tau)_{\tau \in \mathfrak{S}_{\pm}}$ et dont le produit et le coproduit sont définis par :

$$\mathbb{F}_\tau \cdot \mathbb{F}_{\tau'} = \sum_{\sigma \in \tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau'} \mathbb{F}_\sigma \qquad \text{et} \qquad \triangle \mathbb{F}_\sigma = \sum_{\sigma \in \tau \star \tau'} \mathbb{F}_\tau \otimes \mathbb{F}_{\tau'}.$$

Cette algèbre de Hopf est bigraduée par le nombre de signes positifs et négatifs des permutations signées. Cette algèbre, introduite dans [NT10], étend naturellement aux permutations signées la structure d'algèbre de Hopf de FQSym définie par C. Malvenuto et C. Reutenauer [MR95].

Nous notons Camb le sous-espace vectoriel de $\mathsf{FQSym}_{\pm}$ engendré par les éléments

$$\mathbb{P}_{\mathrm{T}} := \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_{\pm} \\ \mathbf{P}(\tau) = \mathrm{T}}} \mathbb{F}_\tau = \sum_{\tau \in \mathcal{L}(\mathrm{T})} \mathbb{F}_\tau,$$

pour tout arbre Cambrien T.

Par exemple, pour l'arbre Cambrien de la figure 5.2 (gauche), nous avons

$\mathbb{P}$ $=$

$$\begin{aligned} &\mathbb{F}_{\underline{21}\overline{37}\underline{54}\overline{6}} + \mathbb{F}_{\underline{21}\overline{73}\underline{54}\overline{6}} + \mathbb{F}_{\underline{21}\overline{75}\overline{3}\overline{4}\overline{6}} + \mathbb{F}_{\underline{2}\overline{7}\underline{1}\overline{3}\underline{54}\overline{6}} + \mathbb{F}_{\underline{2}\overline{7}\underline{15}\overline{3}\overline{4}\overline{6}} \\ &+ \mathbb{F}_{\underline{2}\overline{7}\underline{51}\overline{3}\underline{4}\overline{6}} + \mathbb{F}_{\overline{7}\underline{21}\overline{3}\underline{54}\overline{6}} + \mathbb{F}_{\overline{7}\underline{215}\overline{3}\underline{4}\overline{6}} + \mathbb{F}_{\overline{7}\underline{251}\overline{3}\underline{4}\overline{6}} + \mathbb{F}_{\overline{7}\underline{521}\overline{3}\underline{4}\overline{6}}. \end{aligned}$$

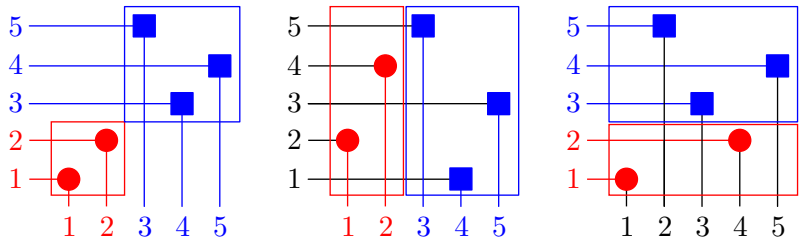


FIGURE 5.1 – La table de la concaténation décalée $\tau\bar{\tau}'$ (gauche) a deux blocs qui contiennent les tables des permutations $\tau = 12$ et $\tau' = 231$. Les éléments du produit de mélange décalé $\tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau'$ (milieu) et du produit de convolution $\tau \star \tau'$ (droit) sont obtenus en mélangeant respectivement les lignes et les colonnes de la table de $\tau\bar{\tau}'$.

Théorème 88. Camb *est une sous-algèbre de Hopf de* $\mathsf{FQSym}_{\pm}$.

Démonstration. Montrons dans un premier temps que Camb est une sous-algèbre de $\mathsf{FQSym}_{\pm}$. Pour ce faire, il suffit de montrer que la congruence Cambrienne est compatible avec le produit de mélange décalé, *i.e.,* que le produit de deux classes Cambriennes peut être décomposé en une somme de classes Cambriennes. Considérons deux signatures $\varepsilon \in \pm^n$ et $\varepsilon' \in \pm^{n'}$, deux arbres Cambriens $\mathrm{T} \in \mathrm{Camb}(\varepsilon)$ et $\mathrm{T}' \in \mathrm{Camb}(\varepsilon')$, et deux permutations congruentes $\sigma \equiv_{\varepsilon\varepsilon'} \tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}^{\varepsilon\varepsilon'}$. Nous voulons montrer que $\mathbb{F}_\sigma$ apparaît dans le produit $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$ si et seulement si $\mathbb{F}_{\tilde{\sigma}}$ apparaît aussi. On peut supposer que $\sigma = UacVbW$ et $\tilde{\sigma} = UcaVbW$ pour des lettres $a < b < c$ et des mots U, V, W avec $(\varepsilon\varepsilon')_b = -$. De plus, supposons que $\mathbb{F}_\sigma$ apparaisse dans le produit $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$, et soit $\tau \in \mathcal{L}(\mathrm{T})$ et $\tau' \in \mathcal{L}(\mathrm{T}')$ tel que $\sigma \in \tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau'$. Nous distinguons trois cas :

(i) Si $a \leq n$ et $n < c$, alors $\tilde{\sigma}$ appartient aussi à $\tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau'$, et donc $\mathbb{F}_{\tilde{\sigma}}$ apparaît dans le produit $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$.

(ii) Si $a < b < c \leq n$, alors $\tau = \hat{U}ac\hat{V}b\hat{W}$ est ε-congruent à $\tilde{\tau} = \hat{U}ca\hat{V}b\hat{W}$, et donc $\tilde{\tau} \in \mathcal{L}(\mathrm{T})$. Comme $\tilde{\sigma} \in \tilde{\tau} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau'$, on obtient que $\mathbb{F}_{\tilde{\sigma}}$ apparaît dans le produit $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$.

(iii) Si $n < a < b < c$, l'argument est similaire, changeant ac en ca dans τ'.

La preuve pour l'autre règle de réécriture de la définition 30 est symétrique, et le cas général pour $\sigma \equiv_{\varepsilon\varepsilon'} \tilde{\sigma}$ suit par transitivité.

Montrons maintenant que Camb est une sous-cogèbre de $\mathsf{FQSym}^{\pm}$. Il suffit de montrer que la congruence Cambrienne est compatible avec le produit de déconcaténation, *i.e.,* que le coproduit d'une classe Cambrienne est une somme de produits tensoriels de classes Cambriennes. Considérons un arbre Cambrien $\mathrm{T} \in \mathrm{Camb}(\eta)$, et deux permutations congruentes selon la congruence Cambrienne $\tau \equiv_\varepsilon \tilde{\tau} \in \mathfrak{S}^\varepsilon$ et $\tau' \equiv_{\varepsilon'} \tilde{\tau}' \in \mathfrak{S}^{\varepsilon'}$. Nous voulons montrer que $\mathbb{F}_\tau \otimes \mathbb{F}_{\tau'}$ apparaît dans le coproduit $\triangle(\mathbb{P}_{\mathrm{T}})$ si et seulement si $\mathbb{F}_{\tilde{\tau}} \otimes \mathbb{F}_{\tilde{\tau}'}$ apparaît aussi. On peut supposer que $\tau = UacVbW$ et $\tilde{\tau} = UcaVbW$ pour des lettres $a < b < c$ et des mots U, V, W avec $\varepsilon_b = -$, et $\tau' = \tilde{\tau}'$. De plus, supposons que $\mathbb{F}_\tau \otimes \mathbb{F}_{\tau'}$ apparaisse dans le coproduit $\triangle(\mathbb{P}_{\mathrm{T}})$, *i.e.,* qu'il existe $\sigma \in (\tau \star \tau') \cap \mathcal{L}(\mathrm{T})$. Comme $\sigma \in \tau \star \tau'$, il peut être écrit

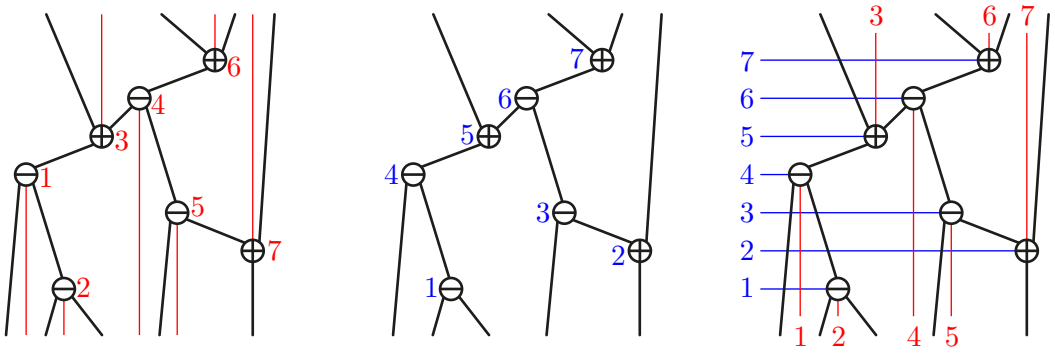


FIGURE 5.2 – Un arbre Cambrien (gauche), un arbre croissant (milieu), un arbre Cambrien à niveau (droite).

comme $\sigma = \hat{U}\hat{a}\hat{c}\hat{V}\hat{b}\hat{W}\hat{\tau}'$ pour des lettres $\hat{a} < \hat{b} < \hat{c}$ et des mots $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\tau}'$ avec $\eta_{\hat{b}} = -$. Donc $\tilde{\sigma} = \hat{U}\hat{c}\hat{a}\hat{V}\hat{b}\hat{W}\hat{\tau}'$ est η-congruent à σ et est dans le produit de convolution $\tilde{\tau} \star \tilde{\tau}'$. Il suit que $\mathbb{F}_{\tilde{\tau}} \otimes \mathbb{F}_{\tilde{\tau}'}$ apparaît aussi dans le coproduit $\triangle(\mathbb{P}_{\mathrm{T}})$. Les preuves pour les autres règles de réécriture sur τ, de même que les règles de réécriture sur τ', sont symétriques, et le cas général pour $\tau \equiv_{\varepsilon} \tilde{\tau}$ et $\tau' \equiv_{\varepsilon'} \tilde{\tau}'$ suit par transitivité. □

Une autre façon de prouver ce résultat serait de montrer que la congruence Cambrienne engendre un bon φ-monoïde [Pri13].

Dans le reste de ce paragraphe, nous donnons une description directe du produit et du coproduit d'éléments de la base $\mathbb{P}$ de Camb en termes d'opérations combinatoires sur les arbres Cambriens.

PRODUIT Le produit dans l'algèbre Cambrienne peut être décrit en termes d'intervalles dans les treillis Cambriens. Étant donnés deux arbres Cambriens T, T', on note ${}_{\mathrm{T}}\nearrow^{\bar{\mathrm{T}}'}$ l'arbre obtenu en greffant la feuille sortante la plus à droite de T sur la feuille entrante la plus à gauche de T′. Notons que l'arbre résultant de cette opération est $\varepsilon\varepsilon'$-Cambrien, où $\varepsilon\varepsilon'$ est la concaténation des signatures $\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{T})$ et $\varepsilon' = \varepsilon(\mathrm{T}')$. On définit de façon similaire ${}^{\mathrm{T}}\nwarrow_{\bar{\mathrm{T}}'}$. Des exemples sont donnés figure 5.3.

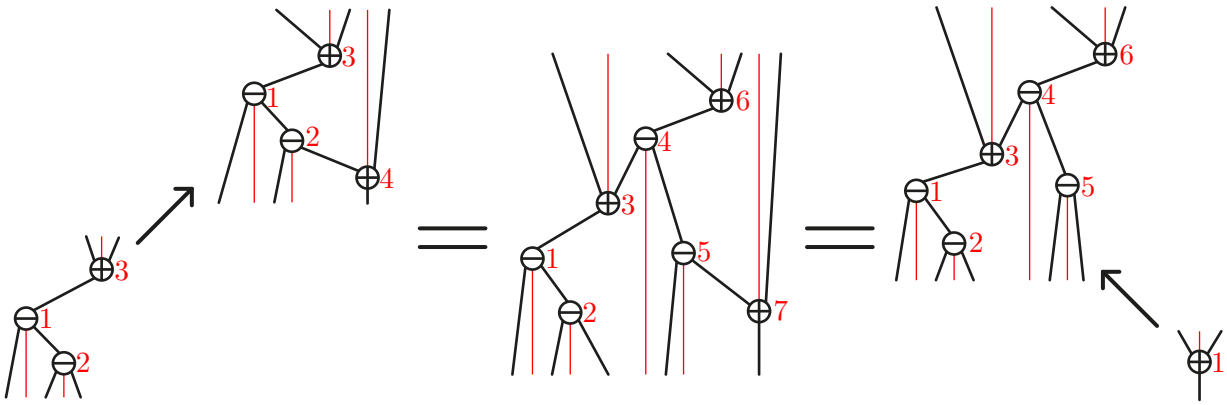


FIGURE 5.3 – Greffe d'arbres Cambriens.

Proposition 89. *Pour tous arbres Cambriens* T, T'*, le produit* $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$ *est donné par*

$$\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'} = \sum_{\mathrm{S}} \mathbb{P}_{\mathrm{S}},$$

où S *parcours l'intervalle entre* ${}_{\mathrm{T}}\nearrow^{\bar{\mathrm{T}}'}$ *et* ${}^{\mathrm{T}}\nwarrow_{\bar{\mathrm{T}}'}$ *dans le treillis* $\varepsilon(\mathrm{T})\varepsilon(\mathrm{T}')$*-Cambrien.*

Démonstration. Pour tout arbre Cambrien T, les extensions linéaires $\mathcal{L}(\mathrm{T})$ forment un intervalle de l'ordre faible [Rea06]. De plus, le produit de mélange décalé de deux intervalles de l'ordre faible est un intervalle de l'ordre faible. Donc, le produit $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$ est une somme

de $\mathbb{P}_{\mathrm{S}}$ où S parcourt un intervalle du treillis Cambrien. Il reste à caractériser le minimum et le maximum de cet intervalle.

Notons μ_{T} et ω_{T} respectivement l'extension linéaire minimale et maximale de T dans l'ordre faible. Le produit $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$ est une somme de $\mathbb{P}_{\mathrm{S}}$ sur un intervalle

$$[\mu_{\mathrm{T}}, \omega_{\mathrm{T}}] \bar{\sqcup} [\mu_{\mathrm{T}'}, \omega_{\mathrm{T}'}] = [\mu_{\mathrm{T}}\bar{\mu}_{\mathrm{T}'}, \bar{\omega}_{\mathrm{T}'}\omega_{\mathrm{T}}],$$

où $^{-}$ est l'opérateur de décalage classique sur les permutations. Le résultat vient alors du fait que

$$\mathbf{P}(\mu_{\mathrm{T}}\bar{\mu}_{\mathrm{T}'}) = {}_{\mathrm{T}}\nearrow^{\bar{\mathrm{T}}'} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(\bar{\omega}_{\mathrm{T}'}\omega_{\mathrm{T}}) = {}^{\mathrm{T}}\nwarrow_{\bar{\mathrm{T}}'}. \qquad \square$$

Par exemple, on peut calculer le produit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\underline{1}\bar{2}} \cdot \mathbb{P}_{\bar{2}\underline{1}\bar{3}} &= \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{2}} \cdot \left(\mathbb{F}_{\bar{2}\underline{1}\bar{3}} + \mathbb{F}_{\bar{2}\bar{3}\underline{1}}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{2}\underline{4}\underline{3}\bar{5}} + \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{2}\underline{4}\bar{5}\underline{3}} + \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{4}\bar{2}\underline{3}\bar{5}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{4}\bar{2}\bar{5}\underline{3}} + \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{4}\bar{5}\bar{2}\underline{3}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{1}\bar{2}\underline{3}\bar{5}} \\ + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{1}\bar{2}\bar{5}\underline{3}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{1}\bar{5}\bar{2}\underline{3}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\bar{5}\underline{1}\bar{2}\underline{3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{4}\underline{3}\bar{2}\bar{5}} + \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{4}\underline{3}\bar{5}\bar{2}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{1}\bar{4}\bar{5}\underline{3}\bar{2}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{1}\underline{3}\bar{2}\bar{5}} \\ + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{1}\underline{3}\bar{5}\bar{2}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{1}\bar{5}\underline{3}\bar{2}} \\ + \mathbb{F}_{\bar{4}\bar{5}\underline{1}\underline{3}\bar{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{3}\underline{1}\bar{2}\bar{5}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{3}\underline{1}\bar{5}\bar{2}} \\ + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{3}\bar{5}\underline{1}\bar{2}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\bar{5}\underline{3}\underline{1}\bar{2}} \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{P}_{\cdots} + \mathbb{P}_{\cdots} + \mathbb{P}_{\cdots} .
\end{aligned}$$

La première égalité est obtenue en calculant les extensions linéaires des deux facteurs, la seconde en calculant le produit de mélange puis en regroupant les termes selon leur **P**-symbole, présent sur la dernière ligne. La proposition 89 nous permet de calculer directement la dernière ligne sans nécessiter l'utilisation de la base $\mathbb{F}$.

$\boxed{\text{Coproduit}}$ Le coproduit dans l'algèbre Cambrienne peut aussi être décrit de façon combinatoire. Nous définissons une *coupe* d'un arbre Cambrien S comme un ensemble γ d'arêtes tel que chaque chemin géodésique vertical dans S d'une feuille d'en bas vers une feuille d'en haut contienne précisement une arête de γ. Une telle coupe sépare l'arbre T en deux forêts, une au-dessus de γ et une en dessous de γ, notées respectivement $A(\mathrm{S}, \gamma)$ et $B(\mathrm{S}, \gamma)$. Un exemple est donné figure 5.4.

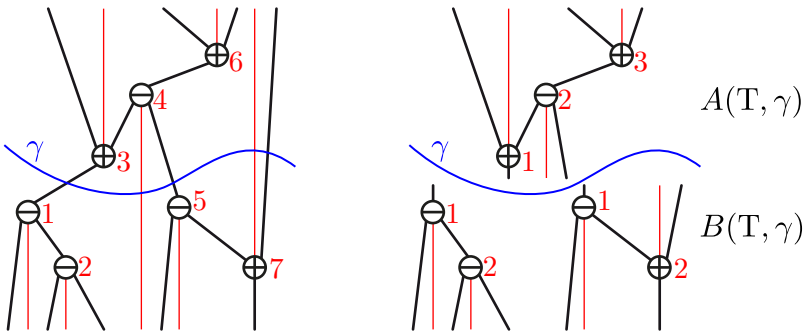


Figure 5.4 – Une coupe γ d'un arbre Cambrien T définit deux forêts $A(\mathrm{T}, \gamma)$ et $B(\mathrm{T}, \gamma)$.

Proposition 90. *Pour tout arbre Cambrien* S*, le coproduit* $\triangle\mathbb{P}_{\mathrm{S}}$ *est donné par*

$$\triangle\mathbb{P}_{\mathrm{S}} = \sum_{\gamma} \Big(\prod_{\mathrm{T}\in B(\mathrm{S},\gamma)} \mathbb{P}_{\mathrm{T}} \Big) \otimes \Big(\prod_{\mathrm{T}'\in A(\mathrm{S},\gamma)} \mathbb{P}_{\mathrm{T}'} \Big),$$

où γ *parcourt toutes les coupes de* S*.*

Démonstration. Soit σ une extension linéaire de S et $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}_{\pm}$ tels que $\sigma \in \tau \star \tau'$. Comme discuté dans le paragraphe 5.1.1, les tables de τ et τ' apparaissent respectivement dans les lignes du bas et du haut de la table de σ. On peut donc associer une coupe de S à chaque élément qui apparaît dans le coproduit $\triangle\mathbb{P}_{\mathrm{S}}$.

Réciproquement, étant donnée une coupe γ de S, nous sommes intéressés par les extensions linéaires de S dans lesquelles tous les indices sous γ apparaissent avant tous les indices au-dessus de γ. Ces extensions linéaires sont précisement les permutations formées par une extension linéaire de $B(\mathrm{T},\gamma)$ suivi d'une extension linéaire de $A(\mathrm{T},\gamma)$. Les extensions linéaires d'une forêt sont obtenues en mélangeant les extensions linéaires de ses composantes connexes. Le résultat suit immédiatement car le produit $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$ fait précisement intervenir les mélanges des extensions linéaires de T avec les extensions linéaires de T′. □

Par exemple, on peut calculer le coproduit

$$\begin{aligned}
\triangle\mathbb{P}_{\underline{\bar{2}}\,\underline{\bar{3}}\,\bar{1}} &= \triangle\big(\mathbb{F}_{\overline{2}\underline{1}\overline{3}} + \mathbb{F}_{\overline{23}\underline{1}}\big) \\
&= 1 \otimes \big(\mathbb{F}_{\overline{2}\underline{1}\overline{3}} + \mathbb{F}_{\overline{23}\underline{1}}\big) + \mathbb{F}_{\bar{1}} \otimes \mathbb{F}_{\underline{1}\overline{2}} + \mathbb{F}_{\bar{1}} \otimes \mathbb{F}_{\overline{2}\underline{1}} + \mathbb{F}_{\overline{2}\underline{1}} \otimes \mathbb{F}_{\bar{1}} + \mathbb{F}_{\overline{12}} \otimes \mathbb{F}_{\underline{1}} + \big(\mathbb{F}_{\overline{2}\underline{1}\overline{3}} + \mathbb{F}_{\overline{23}\underline{1}}\big) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \mathbb{P}_{\underline{\bar{2}}\,\underline{\bar{3}}\,\bar{1}} + \mathbb{P}_{\bar{1}} \otimes \mathbb{P}_{\underline{1}\,\bar{2}} + \mathbb{P}_{\bar{1}} \otimes \mathbb{P}_{\bar{2}\,\underline{1}} + \mathbb{P}_{\bar{2}\,\underline{1}} \otimes \mathbb{P}_{\bar{1}} + \mathbb{P}_{\overline{12}} \otimes \mathbb{P}_{\underline{1}} + \mathbb{P}_{\underline{\bar{2}}\,\underline{\bar{3}}\,\bar{1}} \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \mathbb{P}_{\underline{\bar{2}}\,\underline{\bar{3}}\,\bar{1}} + \mathbb{P}_{\bar{1}} \otimes \big(\mathbb{P}_{\underline{1}} \cdot \mathbb{P}_{\bar{1}}\big) + \mathbb{P}_{\bar{2}\,\underline{1}} \otimes \mathbb{P}_{\bar{1}} + \mathbb{P}_{\overline{12}} \otimes \mathbb{P}_{\underline{1}} + \mathbb{P}_{\underline{\bar{2}}\,\underline{\bar{3}}\,\bar{1}} \otimes 1.
\end{aligned}$$

La proposition 90 nous permet de calculer directement la dernière ligne sans nécessiter l'utilisation de la base $\mathbb{F}$. Cette ligne correspond aux cinq coupes possibles de l'arbre Cambrien $\underline{\bar{2}}\,\underline{\bar{3}}\,\bar{1}$.

$\boxed{\text{Algèbres Matriochka}}$ Pour conclure, nous connectons l'algèbre Cambrienne à l'algèbre des reculs Rec, définie comme sous-algèbre de Hopf de $\mathsf{FQSym}_{\pm}$ générée par les éléments

$$\mathbb{X}_{\chi} := \sum_{\substack{\tau\in\mathfrak{S}_{\pm} \\ \mathbf{rec}(\tau)=\chi}} \mathbb{F}_{\tau}$$

pour tout vecteur de signe $\chi \in \pm^{n-1}$. Le diagramme commutatif de la proposition 47 assure que

$$\mathbb{X}_{\chi} = \sum_{\substack{\mathrm{T}\in\mathrm{Camb} \\ \mathbf{can}(\mathrm{T})=\chi}} \mathbb{P}_{\mathrm{T}},$$

et par conséquent que Rec est une sous-algèbre de Hopf de Camb. En d'autres termes, l'algèbre Cambrienne est prise en sandwich entre l'algèbre des permutations signées et l'algèbre des reculs $\mathsf{Rec} \subset \mathsf{Camb} \subset \mathsf{FQSym}_{\pm}$.

5.1.3 Algèbre quotient de $\mathsf{FQSym}^*_\pm$

Nous passons à l'algèbre de Hopf duale $\mathsf{FQSym}^*_\pm$ ayant pour base $(\mathbb{G}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_\pm}$ et dont le produit et le coproduit sont définis par

$$\mathbb{G}_\tau \cdot \mathbb{G}_{\tau'} = \sum_{\sigma\in\tau\star\tau'} \mathbb{G}_\sigma \qquad \text{et} \qquad \triangle\mathbb{G}_\sigma = \sum_{\sigma\in\tau\,\underline{\sqcup}\,\tau'} \mathbb{G}_\tau \otimes \mathbb{G}_{\tau'}.$$

Le théorème suivant est automatique à partir du théorème 88.

Théorème 91. *Le dual gradué* Camb^* *de l'algèbre Cambrienne est isomorphe à l'image de* $\mathsf{FQSym}^*_\pm$ *par la projection canonique*

$$\pi : \mathbb{C}\langle A\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle A\rangle/\equiv,$$

où $\equiv$ *est la congruence Cambrienne. La base duale* $\mathbb{Q}_\mathrm{T}$ *de* $\mathbb{P}_\mathrm{T}$ *est exprimée de la façon suivante* $\mathbb{Q}_\mathrm{T} = \pi(\mathbb{G}_\tau)$*, où* τ *est une des extensions linéaires de* T*.*

De façon similaire au paragraphe précédent, nous pouvons décrire de façon combinatoire le produit et le coproduit d'éléments de la base $\mathbb{Q}$ de Camb^* en termes d'opérations sur les arbres Cambriens.

PRODUIT Appelons *gaps* les $n+1$ positions entre deux entiers consécutifs de $[n]$, incluant la position avant 1 et la position après n. Un gap γ définit un *chemin géodésique vertical* $\lambda(\mathrm{T},\gamma)$ dans un arbre Cambrien T d'une feuille entrante située dans le même intervalle de valeurs négatives consécutives γ à la feuille sortante qui se situe dans le même intervalle de valeurs positives consécutives que γ. La figure 5.6 illustre un de ces chemins. Un multi-ensemble γ de gaps définit donc un *laminage* $\lambda(\mathrm{T},\Gamma)$ de T, *i.e.,* un multi-ensemble de chemins géodésiques verticaux d'une feuille entrante à une feuille sortante qui ne se croisent pas deux à deux. Lorsque l'on coupe le long des chemins d'un laminage, l'arbre Cambrien T se sépare en une forêt.

Considérons deux arbres Cambriens T et T' respectivement sur $[n]$ et $[n']$. Pour chaque mélange s de leurs signatures ε et ε', considérons le multi-ensemble Γ de gaps de $[n]$ donné par les positions des signes négatifs de ε' dans s et des signes positifs de ε dans s. On note $\mathrm{T}\,{}_s\!\backslash\mathrm{T}'$ l'arbre Cambrien obtenu en connectant les feuilles sortantes de la forêt définie par le laminage $\lambda(\mathrm{T},\Gamma)$ aux feuilles entrantes de la forêt définie par le laminage $\lambda(\mathrm{T}',\Gamma')$.

Exemple 92. Considérons les arbres Cambriens $\mathrm{T}^\bigcirc$ et $\mathrm{T}^\square$ de la figure 5.5. Pour distinguer les signes de $\mathrm{T}^\bigcirc$ et $\mathrm{T}^\square$, on représente dans des cercles les signes de $\varepsilon(\mathrm{T}^\bigcirc) = \ominus\ominus\oplus$ et dans des carrés les signes de $\varepsilon(\mathrm{T}^\square) = \boxminus\boxminus\boxplus\boxminus$. Considérons maintenant un mélange arbitraire $s = \boxminus\ominus\ominus\boxminus\boxplus\oplus\boxminus$ de ces deux signatures. Le laminage de $\mathrm{T}^\bigcirc$ et de $\mathrm{T}^\square$ obtenu ainsi que l'arbre Cambrien $\mathrm{T}^\bigcirc\,{}_s\!\backslash\mathrm{T}^\square$ sont représentés figure 5.5.

Proposition 93. *Pour tout arbre Cambrien* T,T'*, le produit* $\mathbb{Q}_\mathrm{T}\cdot\mathbb{Q}_{\mathrm{T}'}$ *est donné par*

$$\mathbb{Q}_\mathrm{T}\cdot\mathbb{Q}_{\mathrm{T}'} = \sum_s \mathbb{Q}_{\mathrm{T}\,{}_s\!\backslash\mathrm{T}'},$$

où s *parcourt tous les mélanges des signatures de* T *et* T'*.*

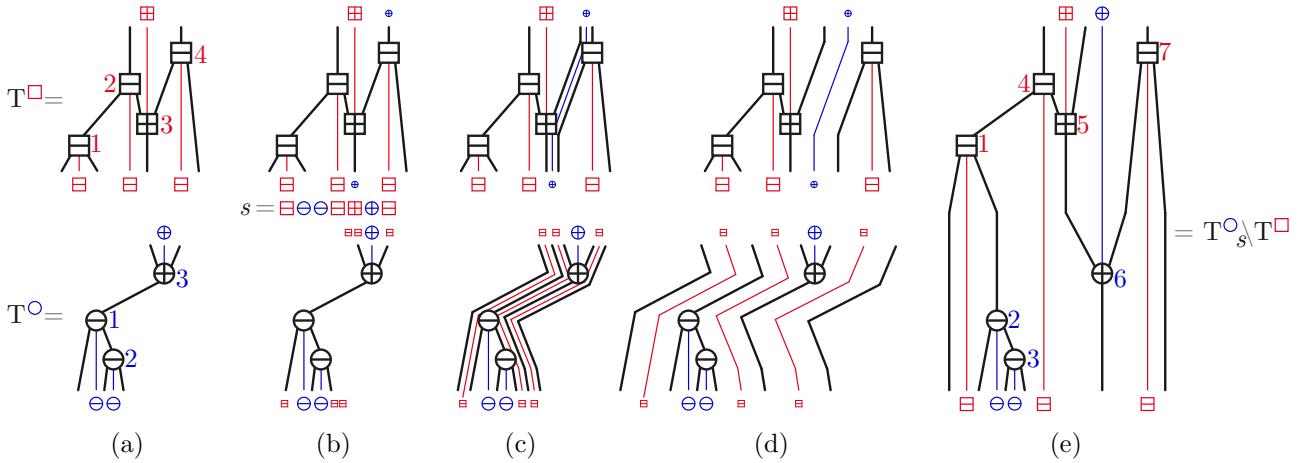
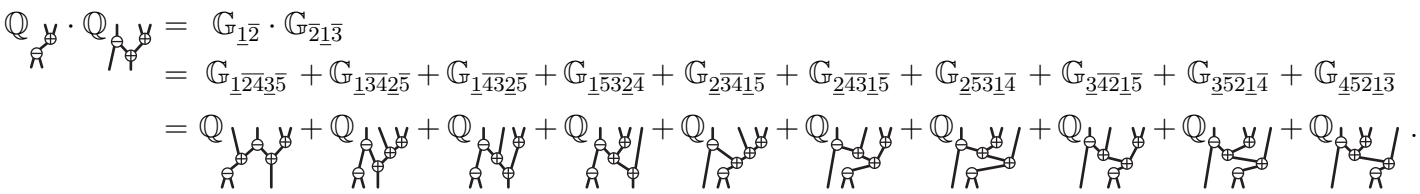


FIGURE 5.5 – (a) Les deux arbres Cambriens $\mathrm{T}^{\bigcirc}$ et $\mathrm{T}^{\square}$. (b) Étant donné le shuffle $s = \boxminus\ominus\ominus\boxminus\boxplus\oplus\boxminus$, les positions des $\boxminus$ sont reportées dans $\mathrm{T}^{\bigcirc}$ et les positions des $\oplus$ sont reportées dans $\mathrm{T}^{\square}$. (c) Le laminage correspondant. (d) Les arbres sont fendus selon le laminage. (e) L'arbre Cambrien obtenu ${\mathrm{T}^{\bigcirc}}_s\backslash\mathrm{T}^{\square}$.

Démonstration. Soit τ et τ' des extensions linaires respectives de T et T′, soit $\sigma \in \tau \star \tau'$ et soit $\mathrm{S} = \mathbf{P}(\sigma)$. Comme discuté dans le paragraphe 5.1.1, le produit de convolution $\tau \star \tau'$ mélange les colonnes des tables de τ et τ' en préservant l'ordre de leurs lignes. Dans la description de l'algorithme d'insertion Θ, l'arbre S est formé de l'arbre T en dessous et de l'arbre T′ au-dessus, à ceci près que les murs verticaux partant des nœuds négatifs de T′ séparent T et les murs verticaux partant des nœuds positifs de T séparent T′. Ces séparations correspondent exactement à la description de ${\mathrm{T}}_s\backslash\mathrm{T}'$, où s est le mélange des signatures de T et T′ donné par σ. □

Par exemple, on peut calculer le produit



Notons que les 10 arbres Cambriens apparaissant dans le résultat correspondent aux 10 mélanges possibles de $-+$ et $-++$.

$\boxed{\text{COPRODUIT}}$ Pour décrire le coproduit d'éléments de la base $\mathbb{Q}$ de Camb^*, nous utilisons aussi les gaps et les chemins verticaux dans les arbres Cambriens. Plus précisement, pour un gap γ, on note $L(\mathrm{S}, \gamma)$ et $R(\mathrm{S}, \gamma)$ les sous-arbres Cambriens gauche et droit de S que l'on sépare le long du chemin vertical $\lambda(\mathrm{S}, \gamma)$. Un exemple est donné figure 5.6.

Proposition 94. *Pour tout arbre Cambrien* S*, le coproduit* $\triangle\mathbb{Q}_{\mathrm{S}}$ *est donné par*

$$\triangle\mathbb{Q}_{\mathrm{S}} = \sum_{\gamma} \mathbb{Q}_{L(\mathrm{S},\gamma)} \otimes \mathbb{Q}_{R(\mathrm{S},\gamma)},$$

où γ *parcourt tous les gaps entre des sommets de* S*.*

Démonstration. Soit σ une extension linéaire de S et $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}_{\pm}$ tels que $\sigma \in \tau \,\bar{\sqcup\!\sqcup}\, \tau'$. Comme discuté dans le paragraphe 5.1.1, τ et τ' apparaissent respectivement dans les colonnes gauches et droites de σ. Notons γ le gap vertical qui sépare τ de τ'. En appliquant l'algorithme d'insertion séparement sur τ et τ' on obtient les arbres $L(\mathrm{S},\gamma)$ et $R(\mathrm{S},\gamma)$. La description suit directement. □

Par exemple, on peut calculer le coproduit

$$\begin{aligned}\triangle\mathbb{Q}_{\bigwedge\!\!\!\bigwedge} &= \triangle\mathbb{G}_{\overline{2}\underline{1}\overline{3}} \\ &= 1 \otimes \mathbb{G}_{\overline{2}\underline{1}\overline{3}} + \mathbb{G}_{\underline{1}} \otimes \mathbb{G}_{\overline{1}\overline{2}} + \mathbb{G}_{\overline{2}\underline{1}} \otimes \mathbb{G}_{\overline{1}} + \mathbb{G}_{\overline{2}\underline{1}\overline{3}} \otimes 1 \\ &= 1 \otimes \mathbb{Q}_{\bigwedge\!\!\!\bigwedge} + \mathbb{Q}_{\bigwedge} \otimes \mathbb{Q}_{\bigwedge\!\!\!\bigwedge} + \mathbb{Q}_{\bigwedge\!\!\!\bigwedge} \otimes \mathbb{Q}_{\bigwedge} + \mathbb{Q}_{\bigwedge\!\!\!\bigwedge} \otimes 1.\end{aligned}$$

La proposition 94 nous permet de calculer directement la dernière ligne sans nécessiter l'utilisation de la base $\mathbb{G}$. Cette ligne correspond aux quatre gaps de l'arbre Cambrien $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$.

5.1.4 Dualité

Comme prouvé dans [HNT05], la dualité $\tau \mapsto \tau^{-1}$ entre les algèbres de Hopf FQSym et FQSym^* induit une dualité entre les algèbres de Hopf PBT et PBT^*. Cela revient à dire que la composition Ψ des applications

$$\mathsf{PBT} \xhookrightarrow[\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \mapsto \sum_{\tau \in \mathcal{L}(\mathrm{T})} \mathbb{F}_\tau]{} \mathsf{FQSym} \xleftrightarrow[\tau \mapsto \tau^{-1}]{} \mathsf{FQSym}^* \xrightarrow[\mathbb{G}_\tau \mapsto \mathbb{Q}_{\mathbf{P}(\tau)}]{} \mathsf{PBT}^*$$

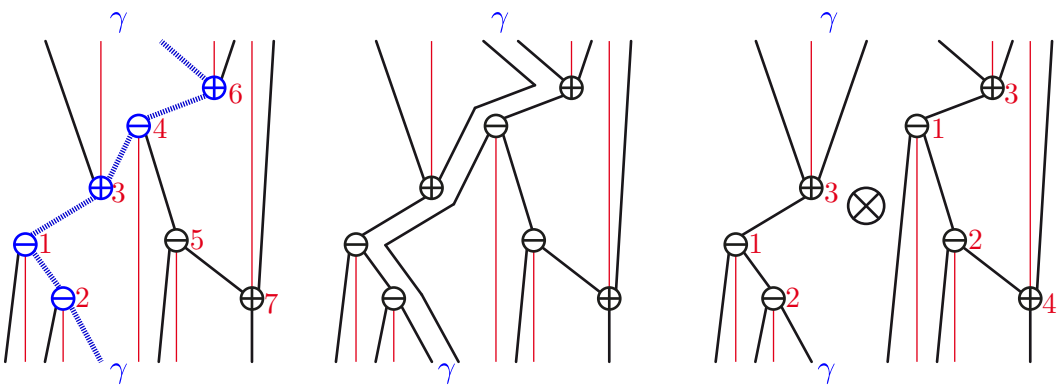


FIGURE 5.6 – Un gap γ entre 3 et 4 (gauche) définit une coupe verticale (milieu) qui sépare l'arbre Cambrien (droite).

est un isomorphisme entre PBT et PBT^*. Cette propriété n'est plus vraie dans le cas de l'algèbre Cambrienne Camb et de son dual Camb^*. Ce qui revient à dire que la composition Ψ des applications

$$\mathsf{Camb} \xhookrightarrow[\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \mapsto \sum_{\tau \in \mathcal{L}(\mathrm{T})} \mathbb{F}_\tau]{} \mathsf{FQSym}_\pm \xleftrightarrow[\mathbb{F}_\tau \mapsto \mathbb{G}_\tau^{-1}]{} \mathsf{FQSym}_\pm^* \xrightarrow[\mathbb{G}_\tau \mapsto \mathbb{Q}_{\mathbf{P}(\tau)}]{} \mathsf{Camb}^*$$

n'est pas un isomorphisme. En effet, cette application n'est pas injective car

$$\Psi\big(\mathbb{P}_{\cdots}\big) = \mathbb{Q}_{\cdots} = \Psi\big(\mathbb{P}_{\cdots}\big).$$

En effet, les images par les trois applications sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{P}_{\cdots} & \longmapsto & \mathbb{F}_{\underline{2}\overline{13}} & \longmapsto & \mathbb{G}_{\overline{2}\underline{1}\overline{3}} & \longmapsto & \mathbb{Q}_{\cdots}, \text{ et} \\ \mathbb{P}_{\cdots} & \longmapsto & \mathbb{F}_{\underline{3}\overline{12}} & \longmapsto & \mathbb{G}_{\overline{23}\underline{1}} & \longmapsto & \mathbb{Q}_{\cdots}. \end{array}$$

5.2 Bases multiplicatives

Dans ce paragraphe, nous définissons des bases multiplicatives de Camb et nous étudions les éléments indécomposables de Camb pour ces bases. Dans les paragraphes 5.2.2 et 5.2.3, nous prouvons des propriétés structurelles et énumeratives de l'ensemble des éléments indécomposables.

5.2.1 Bases multiplicatives et leurs éléments indécomposables

Pour un arbre Cambrien T, nous définissons

$$\mathbb{E}^{\mathrm{T}} := \sum_{\mathrm{T} \leq \mathrm{T}'} \mathbb{P}_{\mathrm{T}'} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{H}^{\mathrm{T}} := \sum_{\mathrm{T}' \leq \mathrm{T}} \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}.$$

Pour décrire le produit de deux éléments des bases $\mathbb{E}$ ou $\mathbb{H}$, on rappelle que les arbres Cambriens

$$\mathrm{T} \nearrow \bar{\mathrm{T}}' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T} \nwarrow \bar{\mathrm{T}}'$$

sont définis comme les arbres obtenus en décalant toutes les étiquettes de T' et en greffant la feuille sortante la plus à droite de T sur la feuille entrante la plus à gauche de T' pour le premier et la feuille sortante la plus à gauche de T' sur la feuille entrante la plus à droite de T pour le deuxième. Des exemples sont donnés figure 5.3.

Proposition 95. $(\mathbb{E}^{\mathrm{T}})_{\mathrm{T} \in \mathrm{Camb}}$ *et* $(\mathbb{H}^{\mathrm{T}})_{\mathrm{T} \in \mathrm{Camb}}$ *sont des bases multiplicatives de* Camb *:*

$$\mathbb{E}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{E}^{\mathrm{T}'} = \mathbb{E}^{\mathrm{T} \nearrow \bar{\mathrm{T}}'} \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{H}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{H}^{\mathrm{T}'} = \mathbb{H}^{\mathrm{T} \nwarrow \bar{\mathrm{T}}'}.$$

Démonstration. Soit ω_{T} l'extension linéaire maximale de T dans l'ordre faible. Comme $\{\mathcal{L}(\tilde{\mathrm{T}}) \mid \tilde{\mathrm{T}} \leq \mathrm{T}\}$ partitionne l'intervalle de l'ordre faible $[12\cdots n, \omega_{\mathrm{T}}]$, on a

$$\mathbb{H}^{\mathrm{T}} = \sum_{\tilde{\mathrm{T}} \leq \mathrm{T}} \mathbb{P}_{\tilde{\mathrm{T}}} = \sum_{\tilde{\mathrm{T}} \leq \mathrm{T}} \sum_{\tau \in \mathcal{L}(\tilde{\mathrm{T}})} \mathbb{F}_{\tau} = \sum_{\tau \leq \omega_{\mathrm{T}}} \mathbb{F}_{\tau}.$$

Comme le produit de mélange d'intervalles de l'ordre faible est un intervalle de l'ordre faible, le produit $\mathbb{H}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{H}^{\mathrm{T}'}$ est la somme de $\mathbb{F}_{\tau}$ sur l'intervalle

$$[12\cdots n, \omega_{\mathrm{T}}] \sqcup\!\sqcup [12\cdots n', \omega_{\mathrm{T}'}] = [12\cdots(n+n'), \bar{\omega}_{\mathrm{T}'}\omega_{\mathrm{T}}].$$

Le résultat vient du fait que

$$\mathbf{P}(\bar{\omega}_{\mathrm{T}'}\omega_{\mathrm{T}}) = {}^{\mathrm{T}}\nwarrow_{\bar{\mathrm{T}}'}.$$

La preuve pour $\mathbb{E}^{\mathrm{T}}$ est symétrique, en remplacant l'intervalle initial $[12\cdots n, \omega_{\mathrm{T}}]$ par l'intervalle final $[\mu_{\mathrm{T}}, n\cdots 21]$. □

Comme les bases multiplicatives $(\mathbb{E}^{\mathrm{T}})_{\mathrm{T}\in\mathrm{Camb}}$ et $(\mathbb{H}^{\mathrm{T}})_{\mathrm{T}\in\mathrm{Camb}}$ ont des propriétés symétriques, nous concentrons notre analyse sur la base $\mathbb{E}$. Le lecteur est invité à traduire les résultats ci-dessous à la base $\mathbb{H}$. Nous considérons la décomposabilité selon la base multiplicative $\mathbb{E}$. On rappelle qu'une *coupure selon une arête* dans un arbre Cambrien S est une partition ordonnée $(X \parallel Y)$ de nœuds de S en un ensemble X de nœuds dans l'ensemble de départ et un ensemble Y de nœuds dans l'ensemble d'arrivée de l'arête orientée e de S.

Proposition 96. *Pour un arbre Cambrien* S*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbb{E}^{\mathrm{S}}$ *peut être décomposé en un produit* $\mathbb{E}^{\mathrm{S}} = \mathbb{E}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{E}^{\mathrm{T}'}$ *pour des arbres Cambriens non vides* T, T' *;*

(ii) $([k] \parallel [n] \smallsetminus [k])$ *est une coupure selon un arc de* S *pour un certain* $k \in [n-1]$ *;*

(iii) au moins une extension linéaire τ *de* S *est décomposable, i.e.,* $\tau([k]) = [k]$ *pour un certain* $k \in [n]$*.*

L'arbre S *est alors appelé* $\mathbb{E}$-décomposable *et la coupure* $([k] \parallel [n] \smallsetminus [k])$ *est appelée* séparation.

Démonstration. L'équivalence (i) $\iff$ (ii) est une conséquence directe de la description du produit $\mathbb{E}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{E}^{\mathrm{T}'}$ dans la proposition 95. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) provient du fait que pour toute coupe $(X \parallel Y)$ d'un graphe orienté acyclique G, il existe une extension linéaire de G qui commence par X et finit par Y. Réciproquement, si τ est une extension linéaire décomposable de S, alors l'algorithme d'insertion crée deux blocs et connecte nécessairement le bloc inférieur gauche au bloc supérieur droit par une arête de séparation. □

Par exemple, la figure 5.3 montre que $\mathbf{P}(\underline{2}\overline{7}\underline{5}\underline{1}\overline{3}\underline{4}\overline{6})$ est décomposable selon la base $\mathbb{E}$ et selon la base $\mathbb{H}$. Dans le reste de ce paragraphe, nous étudions des propriétés structurelles et énumératives des éléments $\mathbb{E}$-indécomposables de Camb. On note $\mathrm{Ind}_{\varepsilon}$ l'ensemble des éléments $\mathbb{E}$-indécomposable de $\mathrm{Camb}(\varepsilon)$.

Exemple 97. Pour $\varepsilon = (-)^n$, les arbres ε-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables sont les arbres binaires *penchant à droite*, *i.e.,* les arbres dont la racine n'a pas de fils gauche. De la même façon, pour $\varepsilon = (+)^n$, les arbres ε-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables sont les arbres binaires *penchant à gauche* orientés vers le haut. Voir la figure 5.7 pour des illustrations.

5.2.2 Propriétés structurelles

L'objectif de ce paragraphe est de prouver la propriété suivante sur les éléments $\mathbb{E}$-indécomposables de $\mathrm{Camb}(\varepsilon)$.

Proposition 98. *Pour toute signature $\varepsilon \in \pm^n$, l'ensemble Ind_ε d'arbres ε-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables forme un idéal principal supérieur du treillis ε-Cambrien.*

Pour prouver cette Proposition, nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 99. *Soit T un arbre ε-Cambrien, soit $i \to j$ une arête de T avec $i < j$, et soit T' l'arbre ε-Cambrien obtenu en appliquant la rotation $i \to j$ dans T. Alors*

(i) si T est $\mathbb{E}$-indécomposable, alors T' l'est aussi ;

(ii) si T est $\mathbb{E}$-décomposable tandis que T' ne l'est pas, alors $\varepsilon_i = +$ ou $i = 1$, et $\varepsilon_j = -$ ou $j = n$.

Démonstration. Comme observé dans la proposition 43, les arbres Cambriens T et T' ont les mêmes coupures selon une arête, à l'exception de celle définie par l'arête $i \to j$. Utilisant les notations de la figure 1.32, la coupure selon l'arête $C := (i \cup L \cup B \parallel j \cup R \cup A)$ est remplacée par la coupure $C' := (j \cup R \cup B \parallel i \cup L \cup A)$ de T'. Comme $i < j$, la coupure selon l'arête C' n'est pas séparante. Donc, T' est toujours $\mathbb{E}$-indécomposable quand T est $\mathbb{E}$-indécomposable.

Supposons maintenant que T soit $\mathbb{E}$-décomposable et que T' ne le soit pas. Cette configuration implique que C est séparant tandis que C' ne l'est pas. Comme C est séparant, on a $i \cup L \cup B < j \cup R \cup A$ (où on écrit $X < Y$ si $x < y$ pour tout $x \in X$ et $y \in Y$). Si $\varepsilon_i = -$, alors $L < i < B$, et donc $L < \{i, j\} \cup R \cup A \cup B$. Si de plus $1 < i$, alors $1 < \{i, j\} \cup R \cup A \cup B$ et donc $1 \in L \neq \varnothing$. Cela impliquerait que la coupe de T' définie par l'arc $L \to i$ serait séparante, ce qui contredit nos hypothèses. On prouve de façon similaire que $\varepsilon_j = -$ ou $j = n$. □

Preuve de la proposition 98. Nous savons déjà par le lemme 99 (i) que Ind_ε forme un ensemble supérieur (clos pour $<$) du treillis ε-Cambrien. Pour montrer que cet ensemble est un idéal principal supérieur, nous caractérisons l'unique arbre ε-Cambrien $\mathbb{E}$-indécomposable dont tous les arbres que l'on obtient après une rotation sont $\mathbb{E}$-décomposables (la rotation crée une coupe séparante). Nous procédons en trois étapes.

FAIT A Tous les nœuds négatifs $i > 1$ de $\mathrm{T}_\bullet$ n'ont pas de fils droits, et tous les nœuds positifs $j < n$ de $\mathrm{T}_\bullet$ n'ont pas de fils gauches.

Preuve. Dans le but de montrer une contradiction, supposons qu'un nœud négatif $i > 1$

ait un fils droit j. Soit T l'arbre Cambrien obtenu en faisant une rotation de l'arête $i \leftarrow j$ dans $\mathrm{T}_\bullet$. Comme cette rotation est décroissante (car $i < j$), T est décomposable tandis que $\mathrm{T}_\bullet$ ne l'est pas. Ce qui contredit le lemme 99 (ii).

Le fait A assure que l'arbre Cambrien $\mathrm{T}_\bullet$ est un chemin avec des feuilles entrantes dans les nœuds négatifs et sortantes des nœuds positifs. Par conséquent, $\mathrm{T}_\bullet$ admet une unique extension linéaire $\tau_\bullet$. Les deux faits suivants déterminent $\tau_\bullet$ et donc $\mathrm{T}_\bullet = \mathbf{P}(\tau_\bullet)$.

Comme le nœud 1 n'a pas de fils gauches et que le nœud n n'a pas de fils droits, nous considérons que 1 se comporte comme un nœud positif et n se comporte comme un nœud négatif. Nous définissons donc $N := \{n_1 < \cdots < n_{N-1} < n_N = n\}$ et $P := \{1 = p_1 < p_2 < \cdots < p_P\}$, où $n_1 < \cdots < n_{N-1}$ sont les nœuds négatifs et $p_2 < \cdots < p_P$ sont les nœuds positifs parmi $\{2, \ldots, n-1\}$.

$\boxed{\text{Fait B}}$ Les ensembles N et P apparaissent tous les deux en ordre croissant dans $\tau_\bullet$.

Preuve. Si i apparaît dans $\tau_\bullet$ avant $j \in N$, alors i se trouve dans le fils gauche de j (car j n'a pas de fils droit), et donc $i < j$. En particulier, N est trié dans $\tau_\bullet$. La preuve est symétrique pour les nœuds positifs.

$\boxed{\text{Fait C}}$ Dans $\tau_\bullet$, le noeud p_k apparaît immédiatement après le premier sommet de N plus grand que p_{k+1}.

Preuve. Soit n_ℓ le premier nœud de N plus grand que p_{k+1}. Si p_k apparaît avant n_ℓ dans $\tau_\bullet$, alors $\tau_\bullet$ est une permutation décomposable (car $\tau([p_{k+1} - 1]) = [p_{k+1} - 1]$). Si p_k apparaît après $n_{\ell+1}$ dans $\tau_\bullet$, alors l'arbre Cambrien obtenu par rotation de l'arête entrante à p_k dans $\mathrm{T}_\bullet$ reste indécomposable. Par conséquent, p_k apparaît précisement entre n_ℓ et $n_{\ell+1}$. □

Par exemple, la figure 5.7 illustre les générateurs des arbres ε-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables pour $\varepsilon = --+--++$, $\varepsilon = (-)^7$, et $\varepsilon = (+)^7$. Les deux derniers penchent respectivement à droite et à gauche.

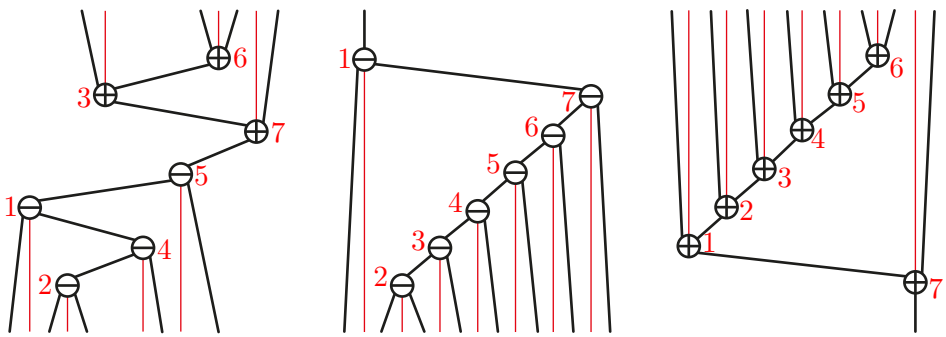


Figure 5.7 – Les générateurs des idéaux supérieurs principaux des arbres ε-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables pour $\varepsilon = --+--++$ (gauche), $\varepsilon = (-)^7$ (milieu), $\varepsilon = (+)^7$ (droite).

5.2.3 Propriétés énumératives

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés énumératives des éléments $\mathbb{E}$-indécomposables. Nous voulons montrer que le nombre d'arbres ε-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables est indépendant de la signature ε.

Proposition 100. *Pour toute signature $\varepsilon \in \pm^n$, il y a C_{n-1} ε-Cambrien $\mathbb{E}$-indécomposables. Par conséquent, il y a $2^n C_{n-1}$ arbres Cambriens $\mathbb{E}$-indecomposables sur n nœuds.*

Ce résultat est immédiat pour la signature $\varepsilon = (-)^n$ car les éléments $\mathbb{E}$-indécomposables sont les arbres binaires qui penchent à droite (voir exemple 97), qui sont clairement comptés par le nombre de Catalan C_{n-1}. Pour montrer la proposition 100, nous étudions le comportement des arbres Cambriens et de leurs décompositions lorsque l'on applique des modifications locales à la signature de $[n]$. Nous pensons que ces transformations sont intéressantes *per se*. Par exemple, elles fournissent une preuve alternative du fait qu'il y a C_n arbres ε-Cambriens pour chaque signature $\varepsilon \in \pm^n$.

Soit $\chi_0 : \pm^n \to \pm^n$ et $\chi_n : \pm^n \to \pm^n$ les transformations qui inversent respectivement le signe de 1 et n. On note $\Psi_0(\mathrm{T})$ et $\Psi_n(\mathrm{T})$ les arbres obtenus à partir d'un arbre Cambrien T en changeant respectivement la direction de la feuille la plus à gauche et la plus à droite de T. Pour $i \in [n-1]$, soit $\chi_i : \pm^n \to \pm^n$ la transformation qui échange les signes en position i et $i+1$. La transformation $\varepsilon \to \chi_i(\varepsilon)$ est seulement intéressante quand $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$. Dans cette situation, on note $\Psi_i(\mathrm{T})$ l'arbre obtenu à partir d'un arbre ε-Cambrien T par

— retournement de l'arête du nœud positif au nœud négatif de $\{i, i+1\}$ s'il existe,

— échange des étiquettes i et $i+1$ sinon.

Cette transformation est illustrée dans la figure 5.8 avec $\varepsilon_i = +$ et $\varepsilon_{i+1} = -$.

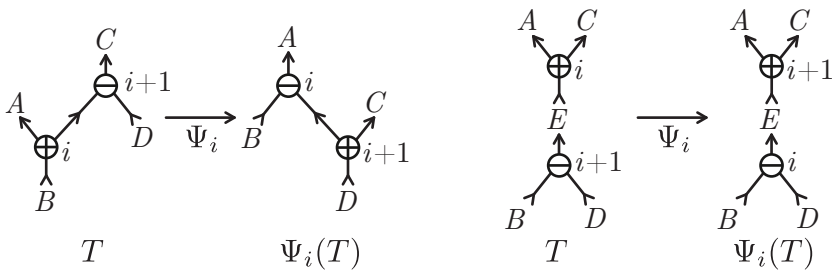


FIGURE 5.8 – La transformation Ψ_i quand $\varepsilon_i = +$ et $\varepsilon_{i+1} = -$. L'arbre $\Psi_i(\mathrm{T})$ est obtenu en retournant l'arête de i à $i+1$ si elle existe (gauche), et en échangeant les étiquettes de i et $i+1$ sinon (droite).

Pour montrer que Ψ_i transforme un arbre ε-Cambrien un arbre $\chi_i(\varepsilon)$-Cambrien et préserve le nombre d'éléments $\mathbb{E}$-indécomposables, nous avons besoin du lemme suivant. Notons que ce lemme explique aussi pourquoi la figure 5.8 couvre toutes les possibilités quand $\varepsilon_i = +$ et $\varepsilon_{i+1} = -$.

Lemme 101. *Si $\varepsilon_i = +$ et $\varepsilon_{i+1} = -$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes pour un arbre ε-Cambrien* T *:*

(i) $([i] \parallel [n] \smallsetminus [i])$ *est une coupure selon une arête de* T *;*

(ii) i *est plus petit que* $i+1$ *dans* T *;*

(iii) i *est dans le sous-arbre gauche de* $i+1$ *et* $i+1$ *est dans le sous-arbre droit de* i *;*

(iv) i *est le fils gauche de* $i+1$ *et* $i+1$ *est le parent droit de* i*.*

Des propriétés similaires sont vérifiées dans le cas où $\varepsilon_i = -$ *et* $\varepsilon_{i+1} = +$*.*

Démonstration. Comme i et $i+1$ sont comparables dans T (voir paragraphe 1.1.5), le fait que $([i] \parallel [n] \smallsetminus [i])$ soit une coupure selon une arête de T implique que i soit plus petit que $i+1$ dans T. Ce qui montre que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Si i est plus petit que $i+1$ dans T, alors i est dans un sous-arbre de $i+1$, qui ne peut être que le sous-arbre gauche, et de la même façon, $i+1$ est dans le sous-arbre droit de i. Ce qui montre que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Supposons maintenant que i soit dans le sous-arbre gauche de $i+1$ et $i+1$ soit dans le sous-arbre droit de i, et considérons le chemin de i à $i+1$ dans T. Comme les nœuds de ce chemin se trouvent dans le sous-arbre droit de i et dans le sous-arbre gauche de $i+1$, leurs étiquettes doivent être plus grandes que i et plus petites que $i+1$. Ce chemin est donc constitué d'un unique arc. Ce qui montre que (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Finalement, supposons que i soit dans le sous-arbre gauche de $i+1$ et $i+1$ soit dans le parent droit de i dans T. Alors la coupe correspondant à l'arc e de T de i à $i+1$ est $([i] \parallel [n] \smallsetminus [i])$. En effet, tous les éléments dans la source de e sont dans le sous-arbre gauche de $i+1$ et donc plus petits que $i+1$, et tous les éléments dans la destination de e sont dans le sous-arbre droit de i et donc plus grand que i. Ce qui montre que (iv) $\Rightarrow$ (i). □

Lemme 102. *Pour* $0 \leq i \leq n$*, l'application* Ψ_i *définit une bijection entre les arbres* ε*-Cambriens et les arbres* $\chi_i(\varepsilon)$*-Cambriens et préserve le nombre d'éléments* $\mathbb{E}$*-indécomposables.*

Démonstration. Le résultat est immédiat pour $i = 0$ and $i = n$. Supposons donc que $i \in [n-1]$ et que $\varepsilon_i = +$ et $\varepsilon_{i+1} = -$. Nous prouvons d'abord que Ψ_i envoie des arbres ε-Cambriens sur des arbres $\chi_i(\varepsilon)$-Cambriens. Cette procédure transforme clairement des arbres en arbres. Pour voir que $\Psi_i(\mathrm{T})$ est $\chi_i(\varepsilon)$-Cambrien, nous distinguons deux cas :

— La figure 5.8 (gauche) illustre le cas où T a un arc entrant de i à $i+1$. Toutes les étiquettes de B sont plus petites que i car elles sont distinctes de i et dans le sous-arbre gauche de $i+1$, et toutes les étiquettes dans le sous-arbre droit de i dans $\Psi_i(\mathrm{T})$ sont plus grandes que i comme elles étaient dans le sous-arbre droit de i dans T. Par conséquent, les étiquettes autour du sommet i de $\Psi_i(\mathrm{T})$ respectent l'étiquetage Cambrien. Par une argumentation similaire, on arrive à la même conclusion pour $i+1$. Tous les autres nœuds ont les mêmes signes et sous-arbres.

— La figure 5.8 (droite) illustre le cas où T n'a pas d'arête de i à $i+1$. Toutes les étiquettes dans B (resp. D) sont plus petites (resp. grandes) que i car elles sont distinctes de i et dans le sous-arbre gauche (resp. droit) de $i+1$, donc les étiquettes autour du sommet i de $\Psi_i(\mathrm{T})$ respectent l'étiquetage Cambrien. Par une argumentation similaire, on arrive à la même conclusion pour $i+1$. Tous les autres nœuds ont les mêmes signes et sous-arbres.

Dans l'autre sens, il est aussi facile de voir que Ψ_i transforme les arbres ε-Cambriens en arbres $\chi_i(\varepsilon)$-Cambriens en utilisant l'interprétation des arbres Cambriens en terme arbres duals de triangulations (voir remarque 22).

Bien que Ψ_i ne préserve pas les éléments $\mathbb{E}$-indécomposables, nous vérifions maintenant que Ψ_i préserve le nombre d'élements $\mathbb{E}$-indécomposables. Écrivons $\varepsilon = \underline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}$ avec $\underline{\varepsilon} : [i] \to \{\pm\}$ et $\overline{\varepsilon} : [n] \smallsetminus [i] \to \{\pm\}$, et soit $\underline{I} = |\mathrm{Ind}_{\underline{\varepsilon}}|$ et $\overline{I} = |\mathrm{Ind}_{\overline{\varepsilon}}|$. On affirme que

— l'application Ψ_i transforme précisement $\underline{I}\cdot\overline{I}$ les arbres ε-Cambriens $\mathbb{E}$-décomposables en arbres $\chi_i(\varepsilon)$-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables. En effet, T est $\mathbb{E}$-décomposable et $\Psi_i(\mathrm{T})$ est $\mathbb{E}$-indécomposable si et seulement si T a un arc de i à $i+1$ dont les sous-arbres source et destination sont respectivement des arbres $\underline{\varepsilon}$- et $\overline{\varepsilon}$-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables.

— l'application Ψ_i transforme précisément $\underline{I}\cdot\overline{I}$ les arbres ε-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables en arbres $\chi_i(\varepsilon)$-Cambriens $\mathbb{E}$-décomposables. En effet, supposons que T soit $\mathbb{E}$-indécomposable et que $\Psi_i(\mathrm{T})$ soit $\mathbb{E}$-décomposable. Nous prétendons que $([i] \parallel [n] \smallsetminus [i])$ est la seule coupure séparante de $\Psi_i(\mathrm{T})$. En effet, pour $j \neq i$, i et $i+1$ appartiennent tous les deux soit à $[j]$ soit à $[n] \smallsetminus [j]$, et $([j] \parallel [n] \smallsetminus [j])$ est une coupure selon une arête de $\Psi_i(\mathrm{T})$ si et seulement si c'est une coupe de T. De plus, les arbres $\underline{\varepsilon}$- et $\overline{\varepsilon}$-Cambriens $\underline{\mathrm{S}}$ et $\overline{\mathrm{S}}$ induits par $\Psi_i(\mathrm{T})$ sur $[i]$ et $[n] \smallsetminus [i]$ sont tous les deux $\mathbb{E}$-indécomposables. Autrement, une arête séparante $([j] \parallel [i] \smallsetminus [j])$ de $\underline{\mathrm{S}}$ définirait une séparation selon une arête $([j] \parallel [n] \smallsetminus [j])$ de $\Psi_i(\mathrm{T})$. De la même façon, si $\underline{\mathrm{S}}$ et $\overline{\mathrm{S}}$ sont tous les deux $\mathbb{E}$-indécomposables, alors T l'est aussi.

On conclut donc que Ψ_i préserve globalement le nombre d'arbres $\mathbb{E}$-indécomposables. □

Preuve de la proposition 100. En partant d'une signature entièrement négative $(-)^n$, on peut atteindre n'importe quelle signature ε par des transformations $\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}$: on peut faire apparaître un signe positif sur le nœud 1 (en utilisant l'application χ_0) et en déplaçant ces signes positifs jusqu'à leur position finale dans ε (en utilisant les applications χ_i). Plus précisement, si on note $p_1 < \cdots < p_P$ les positions des signes positifs de ε, alors $\varepsilon = \big(\prod_{j\in[P]} \chi_{p_j} \circ \chi_{p_{j-1}} \circ \cdots \circ \chi_{p_1} \circ \chi_0\big)\big((-)^n\big)$. Le résultat découle donc du lemme 102. □

Proposition 103. *L'algèbre Cambrienne* Camb *est libre.*

Démonstration. Comme la fonction génératrice $B(u)$ des nombres de Catalan vérifie l'équation fonctionnelle $B(u) = 1 + uB(u)^2$, on obtient par substitution $u = 2t$ que

$$\frac{1}{1 - \sum_{n\geq 1} 2^n C_{n-1} t^n} = \sum_{n\geq 0} 2^n C_n t^n.$$

Le résultat découle immédiatement de la proposition 100. □

Chapitre 6

L'algèbre de Hopf Baxter-Cambrienne

On considère maintenant les arbres Cambriens jumeaux et l'algèbre Baxter-Cambrienne qui leur est associée. Ces objets fournissent une généralisation naturelle au travail de S. Law et N. Reading sur les quadrangulations [LR12] et de S. Giraudo sur les arbres binaires jumeaux [Gir12]. Les nombres d'éléments des bases de ces algèbres sont les nombres de Baxter. Dans le paragraphe 6.1.5, nous fournissons des références pour les différentes familles d'objets liées aux nombres de Baxter et leurs correspondances bijectives, et nous discutons de l'équivalent Cambrien de ces nombres. Les définitions et les propriétés combinatoires des arbres Cambriens jumeaux sont données dans ce paragraphe et les aspects algébriques sont traités dans le paragraphe suivant.

6.1 Arbres Cambriens jumeaux

6.1.1 Arbres Cambriens jumeaux

Ce paragraphe traite des paires d'arbres Cambriens suivantes :

Définition 104. *Deux arbres ε-Cambriens $\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet$ sont jumeaux si l'union $\mathrm{T}_\circ \uparrow\!\downarrow \mathrm{T}_\bullet$ de $\mathrm{T}_\circ$ avec le retourné de $\mathrm{T}_\bullet$ (obtenu en retournant l'orientation de toutes les arêtes) est acyclique.*

Définition 105. *Soit $\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet$ deux arbres ε-Cambriens à niveaux étiquetés respectivement par $p_\circ, q_\circ$ et $p_\bullet, q_\bullet$. On dit qu'ils sont jumeaux si $q_\circ(p_\circ^{-1}(i)) = n - q_\bullet(p_\bullet^{-1}(i))$ pour tout $i \in [n]$. En d'autres termes, quand ils sont étiquetés comme des arbres Cambriens, les lectures bas-haut des sommets de $\mathrm{T}_\circ$ et $\mathrm{T}_\bullet$ sont opposées.*

Des exemples d'arbres Cambriens jumeaux et d'arbres Cambriens à niveaux jumeaux sont représentés figure 6.1. On peut noter que des arbres Cambriens à niveaux jumeaux sont des arbres Cambriens jumeaux que l'on munis d'une extension linéaire de la clôture transitive de $\mathrm{T}_\circ \uparrow\!\downarrow \mathrm{T}_\bullet$.

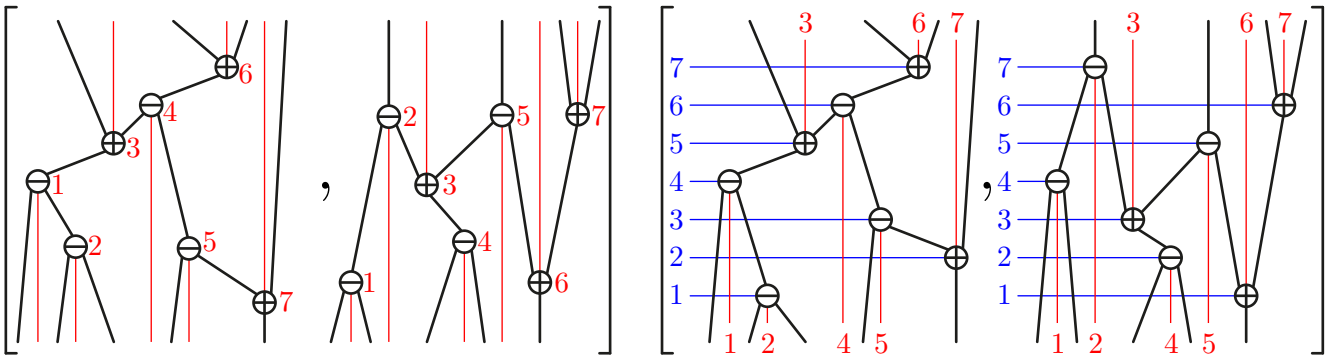


FIGURE 6.1 – Une paire d'arbres Cambriens jumeaux (gauche), et une paire d'arbres Cambriens à niveaux jumeaux (droite).

Si $\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet$ sont deux arbres ε-Cambriens, leur canopées sont nécessairement opposées l'une de l'autre (voir paragraphe 1.1.5), signifiant que $\mathbf{can}(\mathrm{T}_\circ)_i = -\mathbf{can}(\mathrm{T}_\bullet)_i$ pour tout $i \in [n-1]$. La proposition réciproque a été prouvée par S. Giraudo dans [Gir12] pour la signature constante $(-)^n$.

Proposition 106 ([Gir12])**.** *Deux arbres binaires sont jumeaux si et seulement si leurs canopées sont opposées.*

Nous conjecturons que cette Proposition est vrai pour toute signature.

Conjecture 107 (Conjecture des arbres Cambriens jumeaux)**.** *Deux arbres ε-Cambriens sont jumeaux si et seulement si leurs canopées sont opposées*

Considérons deux arbres ε-Cambriens $\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet$ de canopées opposées. Il est facile de montrer que $\mathrm{T}_\circ \Updownarrow \mathrm{T}_\bullet$ ne peut pas contenir de cycles triviaux, c'est-à-dire que $\mathrm{T}_\circ$ et $\mathrm{T}_\bullet$ ne peuvent pas avoir tous les deux un chemin de i à j pour $i \neq j$. Pour prouver que $\mathrm{T}_\circ \Updownarrow \mathrm{T}_\bullet$ n'a pas de cycle du tout, une bonne méthode est de créer un algorithme qui extrait une extension linéaire de $\mathrm{T}_\circ \Updownarrow \mathrm{T}_\bullet$. Cette approche a été utilisée dans [Gir12] pour la signature $(-)^n$. Dans cette situation, il est clair que la racine de $\mathrm{T}_\bullet$ est minimale dans $\mathrm{T}_\circ$ (en utilisant l'hypothèse des canopées opposées), nous la prenons donc comme première valeur d'une extension linéaire de $\mathrm{T}_\circ \Updownarrow \mathrm{T}_\bullet$. Le reste de l'extension linéaire est construit de façon récursive. Dans le cas général, il s'avère que les maximums de $\mathrm{T}_\bullet$ ne sont pas tous des minimums de $\mathrm{T}_\circ$ (et réciproquement). La procédure que l'on doit utiliser pour choisir la première valeur de l'extension linéaire n'est pas aussi claire.

Remarque 108 (Retourner $\mathrm{T}_\bullet$)**.** Il est parfois utile de retourner le deuxième arbre $\mathrm{T}_\bullet$ d'une paire $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ d'arbres Cambriens jumeaux. L'arbre Cambrien que l'on obtient a une signature opposée et leur union est acyclique. Dans ce paragraphe, nous avons choisi l'orientation de la définition 104 dans le but de correspondre avec les notations et résultats de [Gir12]. Nous aurons besoin de changer de convention dans le paragraphe 6.3 quand nous étendrons nos résultats sur les couples d'arbres Cambriens jumeaux aux ℓ-uplets arbitraires d'arbres Cambriens.

6.1.2 Correspondance Baxter-Cambrienne

Nous obtenons la *Correspondance Baxter-Cambrienne* entre les permutations de $\mathfrak{S}^\varepsilon$ et les paires d'arbres ε-Cambriens à niveaux jumeaux en insérant par l'application Θ du paragraphe 1.1.5 une permutation $\tau = \tau_1 \cdots \tau_n \in \mathfrak{S}^\varepsilon$ et son *miroir* $\overleftarrow{\tau} = \tau_n \cdots \tau_1 \in \mathfrak{S}^\varepsilon$.

Proposition 109. *L'application $\Theta^{\wr}$ définie par $\Theta^{\wr}(\tau) = \big[\Theta(\tau), \Theta(\overleftarrow{\tau})\big]$ est une bijection entre les permutations signées et les paires d'arbres Cambriens à niveaux jumeaux.*

Démonstration. Si $p, q : V \to [n]$ sont les étiquetages Cambrien et croissant de l'arbre Cambrien $\Theta(\tau)$, alors $\tau = q \circ p$. Ce qui nous donne que les arbres ε-Cambriens à niveaux $\Theta(\tau)$ et $\Theta(\overleftarrow{\tau})$ sont jumeaux et que l'application $\Theta^{\wr}$ est bijective. □

Comme pour les arbres Cambriens, nous nous concentrons sur le $\mathbf{P}^{\wr}$-symbole de cette correspondance.

Proposition 110. *L'application $\mathbf{P}^{\wr}$ définie par $\mathbf{P}^{\wr}(\tau) = \big[\mathbf{P}(\tau), \mathbf{P}(\overleftarrow{\tau})\big]$ est une surjection des permutations signées vers les paires d'arbres Cambriens jumeaux.*

Démonstration. La fibre $(\mathbf{P}^{\wr})^{-1}([\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet])$ d'une paire d'arbres ε-Cambriens jumeaux $\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet$ est l'ensemble $\mathcal{L}(\mathrm{T}_\circ \wr\!\!\!\wr \mathrm{T}_\bullet)$ des extensions linaires du graphe $\mathrm{T}_\circ \wr\!\!\!\wr \mathrm{T}_\bullet$. Cet ensemble n'est pas vide car $\mathrm{T}_\circ \wr\!\!\!\wr \mathrm{T}_\bullet$ est acyclique par définition des arbres Cambriens jumeaux. □

6.1.3 Congruence Baxter-Cambrienne

Nous caractérisons maintenant la relation de congruence qui lie les permutations signées $\tau \in \mathfrak{S}^\varepsilon$ ayant le même $\mathbf{P}^{\wr}$-symbole.

Définition 111. *Pour une signature $\varepsilon \in \pm^n$, la congruence ε-Baxter-Cambrienne est la relation d'équivalence sur $\mathfrak{S}^\varepsilon$ définie comme la clôture transitive des règles de réécriture*

$$\begin{aligned}
UbVadWcX &\equiv^{\wr}_\varepsilon UbVdaWcX \quad \text{si } a < b, c < d \text{ et } \varepsilon_b = \varepsilon_c,\\
UbVcWadX &\equiv^{\wr}_\varepsilon UbVcWdaX \quad \text{si } a < b, c < d \text{ et } \varepsilon_b \neq \varepsilon_c,\\
UadVbWcX &\equiv^{\wr}_\varepsilon UdaVbWcX \quad \text{si } a < b, c < d \text{ et } \varepsilon_b \neq \varepsilon_c,
\end{aligned}$$

où a, b, c, d sont des éléments de $[n]$ et U, V, W, X sont des mots sur $[n]$. La congruence Baxter-Cambrienne est la relation d'équivalence sur toutes les permutations signées $\mathfrak{S}_\pm$ obtenue comme l'union de toutes les congruences ε-Baxter-Cambriennes :

$$\equiv^{\wr} \;:=\; \bigsqcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \varepsilon\in\pm^n}} \equiv^{\wr}_\varepsilon .$$

Proposition 112. *Deux permutations signées $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}^\varepsilon$ sont ε-Baxter-Cambrienne congruentes si et seulement si elles ont le même $\mathbf{P}^{\wr}$-symbole :*

$$\tau \equiv^{\wr}_\varepsilon \tau' \iff \mathbf{P}^{\wr}(\tau) = \mathbf{P}^{\wr}(\tau').$$

Démonstration. La preuve de cette proposition consiste essentiellement à voir que $\mathbf{P}^{\wr}(\tau) = \mathbf{P}^{\wr}(\tau')$ si et seulement si $\tau \equiv \tau'$ et $\overleftarrow{\tau} \equiv \overleftarrow{\tau'}$ (par définition de $\mathbf{P}^{\wr}$). La définition de l'équivalence ε-Baxter-Cambrienne $\equiv^{\wr}_{\varepsilon}$ est l'exacte traduction de cette observation en termes de règles de réécriture. □

Proposition 113. *La classe ε-Baxter-Cambrienne indicée par la paire $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ d'arbres ε-Cambriens jumeaux est l'intersection de la classe ε-Cambrienne indicée par $\mathrm{T}_\circ$ avec la classe $(-\varepsilon)$-Cambrienne indicée par le retourné de $\mathrm{T}_\bullet$.*

Démonstration. La classe ε-Baxter-Cambrienne indicée par $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ est l'ensemble des extensions linéaires de $\mathrm{T}_\circ \wr \mathrm{T}_\bullet$, *i.e.*, de permutations qui sont simultanément extensions linéaires de $\mathrm{T}_\circ$ et du retourné de $\mathrm{T}_\bullet$. Le premier ensemble forme la classe ε-Cambrienne indicée par $\mathrm{T}_\circ$ et le deuxième ensemble forme la classe $(-\varepsilon)$-Cambrienne indicée par le retourné de $\mathrm{T}_\bullet$. Ce fait est illustré dans la figure 6.2. □

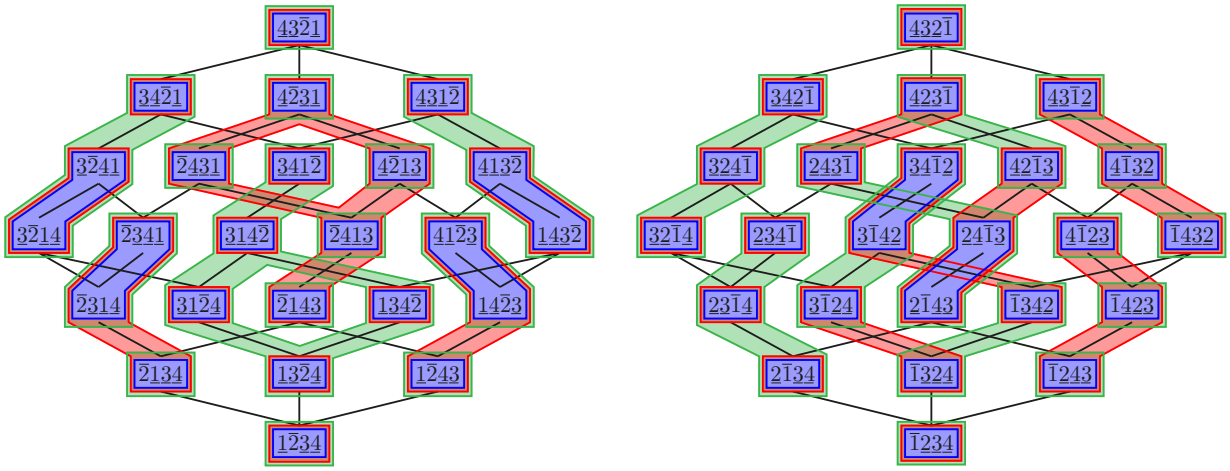


FIGURE 6.2 – Les classes Baxter-Cambriennes de $\equiv^{\wr}_{\varepsilon}$ (bleu) sont les intersections des classes Cambriennes de $\equiv_{\varepsilon}$ (rouge) et $\equiv_{-\varepsilon}$ (vert). Illustré pour les signatures $\varepsilon = -+--$ (gauche) et $\varepsilon = +---$ (droite).

6.1.4 Rotations et treillis Baxter-Cambriens

Nous présentons maintenant l'opération de rotation sur les paires d'arbres ε-Cambriens.

Définition 114. *Soit $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ une paire d'arbres ε-Cambriens et $i \to j$ une arête de $\mathrm{T}_\circ \wr \mathrm{T}_\bullet$. Nous disons que l'arête $i \to j$ est* retournable *si*

- *$i \to j$ est une arête de $\mathrm{T}_\circ$ et $j \to i$ est une arête de $\mathrm{T}_\bullet$,*
- *ou bien $i \to j$ est une arête de $\mathrm{T}_\circ$ et i et j sont incomparables dans $\mathrm{T}_\bullet$,*
- *ou bien i et j sont incomparables dans $\mathrm{T}_\circ$ et $j \to i$ est une arête de $\mathrm{T}_\bullet$.*

Si $i \to j$ est retournable dans $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$, sa rotation *transforme $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ en la paire d'arbre $[\mathrm{T}'_\circ, \mathrm{T}'_\bullet]$, où*

— $\mathrm{T}'_\circ$ *est obtenu en appliquant la rotation de* $i \to j$ *dans* $\mathrm{T}_\circ$ *si possible et* $\mathrm{T}'_\circ = \mathrm{T}_\circ$ *sinon, et*
— $\mathrm{T}'_\bullet$ *est obtenu en appliquant la rotation de* $j \to i$ *dans* $\mathrm{T}_\bullet$ *si possible et* $\mathrm{T}'_\bullet = \mathrm{T}_\bullet$ *sinon.*

Proposition 115. *Faire une rotation d'une arête retournable* $i \to j$ *dans une paire* $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ *d'arbres* ε*-Cambriens jumeaux produit une paire* $[\mathrm{T}'_\circ, \mathrm{T}'_\bullet]$ *d'arbres* ε*-Cambriens jumeaux.*

Démonstration. Par la proposition 43, les arbres $\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet$ sont des arbres ε-Cambriens. Pour voir qu'ils sont jumeaux, on observe qu'échanger i et j dans une extension linéaire de $\mathrm{T}_\circ \Updownarrow \mathrm{T}_\bullet$ produit une extension linéaire de $\mathrm{T}'_\circ \Updownarrow \mathrm{T}'_\bullet$. □

Considérons le *graphe de rotation croissante* dont les sommets sont des paires d'arbres ε-Cambriens jumeaux et les arcs sont les rotations croissantes $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet] \to [\mathrm{T}'_\circ, \mathrm{T}'_\bullet]$, *i.e.,* pour lesquelles $i < j$ dans la définition 114. Ce graphe est illustré dans la figure 6.3 pour les signatures $\varepsilon = -+--$ et $\varepsilon = +---$.

Proposition 116. *Pour toute relation de couverture* $\tau < \tau'$ *dans l'ordre faible sur* $\mathfrak{S}^\varepsilon$*, soit* $\mathbf{P}^{\mathrm{l}}(\tau) = \mathbf{P}^{\mathrm{l}}(\tau')$ *ou bien* $\mathbf{P}^{\mathrm{l}}(\tau) \to \mathbf{P}^{\mathrm{l}}(\tau')$ *dans le graphe de rotation croissante.*

Démonstration. Soient $i, j \in [n]$ tels que τ' est obtenu à partir de τ en échangeant deux valeurs consécutives ij en ji. Si i et j sont incomparables dans $\mathbf{P}(\tau)$, alors $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{P}(\tau')$. Dans le cas contraire, il y a une arête $i \to j$ dans $\mathbf{P}(\tau)$, et $\mathbf{P}(\tau')$ est obtenu en retournant $i \to j$ dans $\mathbf{P}(\tau)$. Le même argument est valide pour les arbres $\mathbf{P}(\overleftarrow{\tau})$ et $\mathbf{P}(\overleftarrow{\tau'})$ et l'arête $j \to i$. Le résultat suit immédiatement. □

Cette proposition implique en particulier que le graphe de rotation croissante sur les paires d'arbres ε-Cambriens est acyclique et nous appelons *poset* ε*-Baxter-Cambrien* sa clôture transitive. En d'autres termes, la proposition précédente dit que l'application $\mathbf{P}^{\mathrm{l}}$ définit un homomorphisme de poset de l'ordre faible sur $\mathfrak{S}^\varepsilon$ vers le ε-Baxter-Cambrien. La proposition suivante étend les résultats de N. Reading [Rea06] sur les treillis Cambriens et ceux de S. Law et N. Reading [LR12] sur les treillis des rectangulations diagonales.

Proposition 117. *Le poset* ε*-Baxter-Cambrien est un treillis quotient de l'ordre faible sur* $\mathfrak{S}^\varepsilon$*.*

Démonstration. Par la proposition 113, la congruence ε-Baxter-Cambrienne est l'intersection de deux congruences Cambriennes. La proposition suit car les congruences Cambriennes sont des congruences de treillis de l'ordre faible [Rea06] et une intersection de congruences de treillis est une congruence de treillis. □

Remarque 118 (Treilis Cambriens *vs.* Baxter-Cambriens)**.** En utilisant la définition de Θ^{l}, on remarque aussi que les classes ε-Cambriennes sont des unions de classes ε-Baxter-Cambriennes. Le treillis Cambrien est donc un treillis quotient du treillis Baxter-Cambrien. La figure 6.4 illustre les classes de congruence Baxter-Cambriennes, Cambriennes, et booléennes sur les ordres faibles de $\mathfrak{S}_\varepsilon$ pour les signatures $\varepsilon = -+--$ et $\varepsilon = +---$.

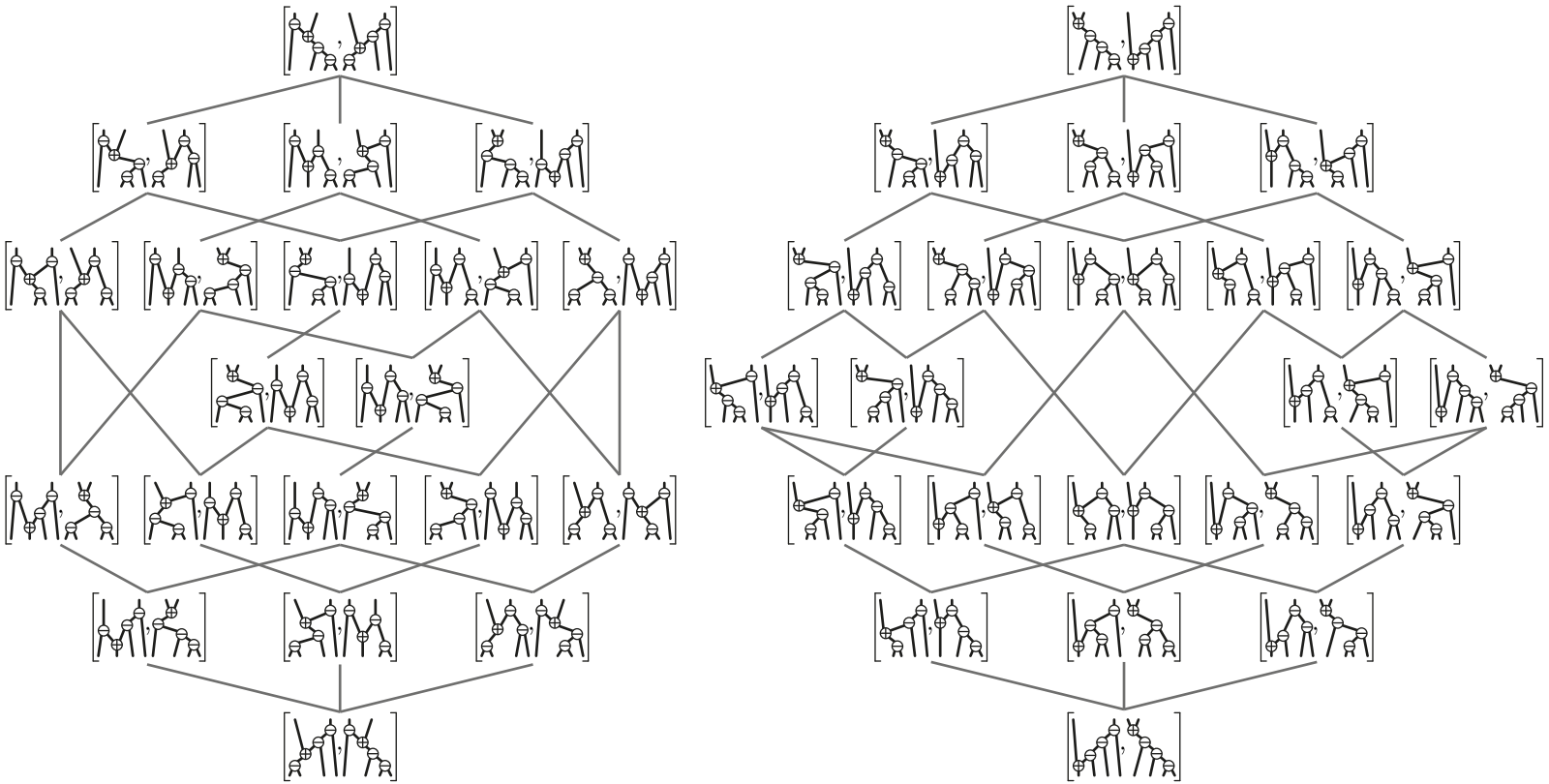


FIGURE 6.3 – Les treillis ε-Baxter-Cambriens sur les paires d'arbres ε-Cambriens, pour les signatures $\varepsilon = -+--$ (gauche) et $\varepsilon = +---$ (droite).

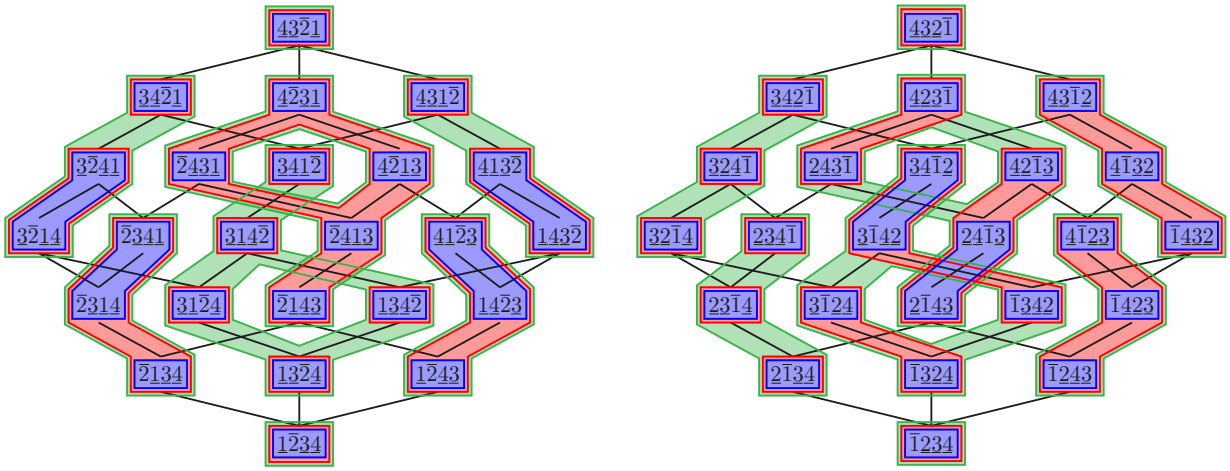


FIGURE 6.4 – Classes de congruence Baxter-Cambriennes (bleu), Cambriennes (rouge), et booléennes (vert) sur l'ordre faible de $\mathfrak{S}_\varepsilon$ pour les signatures $\varepsilon = -+--$ (gauche) et $\varepsilon = +---$ (droite). Le nombre de classes Baxter-Cambriennes diffère selon la signature ε.

Remarque 119 (Éléments extrémaux et évitement de motif)**.** Comme les classes Baxter-Cambriennes sont engendrées par des règles de réécriture, les éléments minimaux des classes Baxter-Cambriennes sont précisement les permutations signées qui évitent les motifs :

$\underline{b}$-da-$\underline{c}$, $\bar{b}$-da-$\bar{c}$, $\underline{c}$-da-$\underline{b}$, $\bar{c}$-da-$\bar{b}$, $\underline{b}$-$\bar{c}$-da, $\bar{b}$-$\underline{c}$-da, $\underline{c}$-$\bar{b}$-da, $\bar{c}$-$\underline{b}$-da, da-$\underline{b}$-$\bar{c}$, da-$\bar{b}$-$\underline{c}$, da-$\underline{c}$-$\bar{b}$, da-$\bar{c}$-$\underline{b}$.

De la même façon, les éléments maximaux des classes Baxter-Cambriennes sont précisement les permutations qui évitent les motifs :

$\underline{b}$-ad-$\underline{c}$, $\bar{b}$-ad-$\bar{c}$, $\underline{c}$-ad-$\underline{b}$, $\bar{c}$-ad-$\bar{b}$, $\underline{b}$-$\bar{c}$-ad, $\bar{b}$-$\underline{c}$-ad, $\underline{c}$-$\bar{b}$-ad, $\bar{c}$-$\underline{b}$-ad, ad-$\underline{b}$-$\bar{c}$, ad-$\bar{b}$-$\underline{c}$, ad-$\underline{c}$-$\bar{b}$, ad-$\bar{c}$-$\underline{b}$. $(\star)$

6.1.5 Nombres Baxter-Cambriens

Contrairement au nombre d'arbres ε-Cambriens, le nombre de paires d'arbres ε-Cambriens jumeaux dépend de la signature ε. Par exemple, il y a 22 paires d'arbres $(----)$-Cambriens jumeaux et seulement 20 paires d'arbres $(-+--)$-Cambriens jumeaux. Les figures 6.3, 6.4 et 6.5 illustrent cette différence.

Pour une signature ε, on définit le *nombre ε-Baxter-Cambrien* B_ε comme le nombre de paires d'arbres ε-Cambriens jumeaux. On peut immédiatement observer que B_ε est préservé quand on change le premier ou le dernier signe de ε, quand on inverse simultanément tous les signes de ε, ou quand on prend le miroir de la signature ε :

$$B_\varepsilon = B_{\chi_0(\varepsilon)} = B_{\chi_n(\varepsilon)} = B_{-\varepsilon} = B_{\overleftarrow{\varepsilon}},$$

où χ_0 et χ_n change respectivement le premier et le dernier signe, $(-\varepsilon)_i = -\varepsilon_i$ and $(\overleftarrow{\varepsilon})_i = \varepsilon_{n+1-i}$. La table 6.1 montre le nombre ε-Baxter-Cambrien B_ε pour toutes les petites signatures ε à ces transformations près. La table 6.2 contient tous les nombres ε-Baxter-Cambriens B_ε possibles pour des signatures ε de tailles $n \leq 10$.

$n = 4$	$B_{++++} = 22$	$B_{++-+} = 20$	
$n = 5$	$B_{+++++} = 92$	$B_{+++-+} = 78$	$B_{++-++} = 70$
$n = 6$	$B_{++++++} = 422$ $B_{++--++} = 284$	$B_{+++++-+} = 342$ $B_{+++-++} = 282$	$B_{+++--+} = 316$ $B_{++-+-+} = 252$
$n = 7$	$B_{+++++++} = 2074$ $B_{++---++} = 1298$ $B_{+++-+++} = 1162$	$B_{++++++-+} = 1628$ $B_{+++++-++} = 1270$ $B_{++-++-+} = 1044$ $B_{++-+-++} = 924$	$B_{+++++--+} = 1428$ $B_{+++--++} = 1172$ $B_{+++-+-+} = 1036$

TABLE 6.1 – Les nombres B_ε d'arbres ε-Cambriens jumeaux pour toutes les petites signatures ε (aux changements suivants près : changement du premier et dernier signe, inversion simultanée de tous les signes et miroir).

Dans la proposition suivante, nous donnons une formule récurrente pour calculer tous les nombres ε-Baxter-Cambriens, en utilisant deux paramètres additionnels. Cette preuve est basée sur des idées similaires à celle de la proposition 33. Les paires d'arbres ε-Cambriens jumeaux sont en bijection avec les permutations qui sont les maximaux dans l'ordre faible des classes ε-Baxter-Cambriennes. Ces permutations sont précisement celles qui évitent les motifs $(\star)$ dans la remarque 119. Nous considérons l'arbre de génération $\mathcal{T}_\varepsilon^{\downharpoonleft}$ pour ces permutations. Cet arbre a n niveaux, et les nœuds au niveau m sont étiquetés par les permutations de $[m]$ dont les valeurs sont signées par la restricture de ε à $[m]$ et qui évitent les motifs $(\star)$. Le parent d'une permutation dans $\mathcal{T}_\varepsilon^{\downharpoonleft}$ est obtenu en supprimant sa valeur maximale. La figure 6.5 illustre deux exemples d'arbres de génération $\mathcal{T}_\varepsilon^{\downharpoonleft}$ avec $\varepsilon = -+--$ et $\varepsilon = +---$.

Comme dans la preuve de la proposition 33, nous considérons maintenant les positions possibles de $m+1$ dans les enfants d'une permutation τ au niveau m dans cet arbre de génération $\mathcal{T}_\varepsilon^{\downharpoonleft}$. On indice par $\{0, \ldots, m\}$ de gauche à droite les espaces avant la première lettre, entre deux lettres consécutives, et après la dernière lettre de τ. Les *espaces libres* sont ceux dans lesquels l'insertion de $m+1$ ne créé par le motif de $(\star)$. Les espaces libres sont marqués par un point bleu dans la figure 6.5. Il est important d'observer que l'espace 0 ainsi que l'espace situé juste après $m-1$ et m sont toujours libres, peu importe τ ou la signature ε.

Nous définissons le *type d'espace libre* de τ comme étant la paire (ℓ, r) dans laquelle ℓ (resp. r) correspond au nombre d'espaces libres à gauche (resp. droite) de m dans τ. Pour une signature ε, on note $B_\varepsilon(\ell, r)$ le nombre de permutations maximales pour l'ordre faible

$n = 4$	22 (1), 20 (1)
$n = 5$	92 (1), 78 (2), 70 (1)
$n = 6$	422 (1), 342 (2), 316 (1), 284 (1), 282 (2), 252 (1)
$n = 7$	2074 (1), 1628 (2), 1428 (2), 1298 (1), 1270 (2), 1172 (2), 1162 (1), 1044 (2), 1036 (2), 924 (1)
$n = 8$	10754 (1), 8244 (2), 6966 (2), 6612 (1), 6388 (1), 6182 (2), 5498 (2), 5380 (2), 5334 (2), 4902 (1), 4884 (2), 4748 (2), 4392 (1), 4362 (2), 4356 (2), 4324 (1), 3882 (1), 3880 (2), 3852 (2), 3432 (1)
$n = 9$	58202 (1), 43812 (2), 35998 (2), 33240 (1), 32908 (2), 31902 (2), 27660 (2), 26602 (2), 26392 (2), 25768 (2), 24888 (1), 24528 (2), 23530 (1), 23466 (2), 22768 (2), 20888 (2), 20886 (2), 20718 (2), 20244 (2), 20218 (2), 20082 (2), 18544 (1), 18518 (2), 18430 (2), 18376 (2), 17874 (2), 16470 (2), 16454 (1), 16358 (2), 16344 (2), 16342 (2), 16234 (1), 14550 (4), 14454 (2), 12870 (1)
$n = 10$	326240 (1), 242058 (2), 194608 (2), 180678 (1), 172950 (2), 172304 (2), 166568 (1), 146622 (2), 139100 (2), 138130 (2), 131994 (2), 129870 (2), 129600 (2), 124896 (2), 122716 (2), 120800 (1), 113754 (2), 111274 (2), 107072 (2), 106854 (1), 106382 (2), 105606 (2), 101084 (3), 101028 (2), 100426 (2), 98730 (2), 97524 (2), 94908 (1), 94372 (1), 93854 (2), 89952 (2), 89324 (2), 89276 (2), 88966 (2), 86638 (2), 86034 (2), 86026 (2), 79826 (2), 79384 (2), 79226 (2), 79076 (2), 79018 (2), 78580 (1), 78528 (2), 76542 (2), 76526 (2), 76484 (2), 76072 (2), 70450 (2), 70316 (1), 69866 (4), 69838 (2), 69810 (2), 69400 (2), 69314 (1), 67694 (2), 62124 (3), 62120 (1), 62096 (2), 61766 (2), 61746 (2), 61706 (2), 61682 (2), 61376 (1), 54956 (2), 54920 (2), 54892 (1), 54626 (2), 48620 (1)

TABLE 6.2 – Tous les nombres ε-Baxter-Cambriens B_ε possibles pour des signatures ε de taille $n \leq 10$. Les nombres entre parenthèses indiquent la multiplicité de chaque nombre Baxter-Cambrien : par exemple, la deuxième ligne indique qu'il y a 8 (resp. 16, resp. 8) signatures ε de $\pm^5$ telles que $B_\varepsilon = 92$ (resp. 78, resp. 70).

de classes ε-Baxter-Cambriennes de type d'espace libre (ℓ, r). Ce raffinement des nombres Baxter-Cambriens nous permet d'écrire les équations récurrentes suivantes.

Proposition 120. *Considérons deux signatures $\varepsilon \in \pm^n$ et $\varepsilon' \in \pm^{n-1}$, où ε' est obtenu en supprimant le dernier signe de ε. Alors*

$$B_\varepsilon(\ell, r) = \begin{cases} \sum_{\ell' \geq \ell} B_{\varepsilon'}(\ell', r-1) \;+\; \sum_{r' \geq r} B_{\varepsilon'}(\ell-1, r') & \text{if } \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n, \quad (=) \\ \delta_{\ell=1} \cdot \delta_{r\geq 2} \cdot \sum_{\substack{\ell' \geq r-1 \\ r' \geq 1}} B_{\varepsilon'}(\ell', r') \;+\; \delta_{\ell \geq 2} \cdot \delta_{r=1} \cdot \sum_{\substack{\ell' \geq 1 \\ r' \geq \ell-1}} B_{\varepsilon'}(\ell', r') & \text{if } \varepsilon_{n-1} \neq \varepsilon_n, \quad (\neq) \end{cases}$$

où δ est le symbole de Kronecker δ (défini par $\delta_X = 1$ si X est satifait et 0 sinon).

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n$. Considérons deux permutations τ et τ' aux niveaux n et $n-1$ dans $\mathcal{T}_\varepsilon^1$ telles que τ' soit obtenu en supprimant n

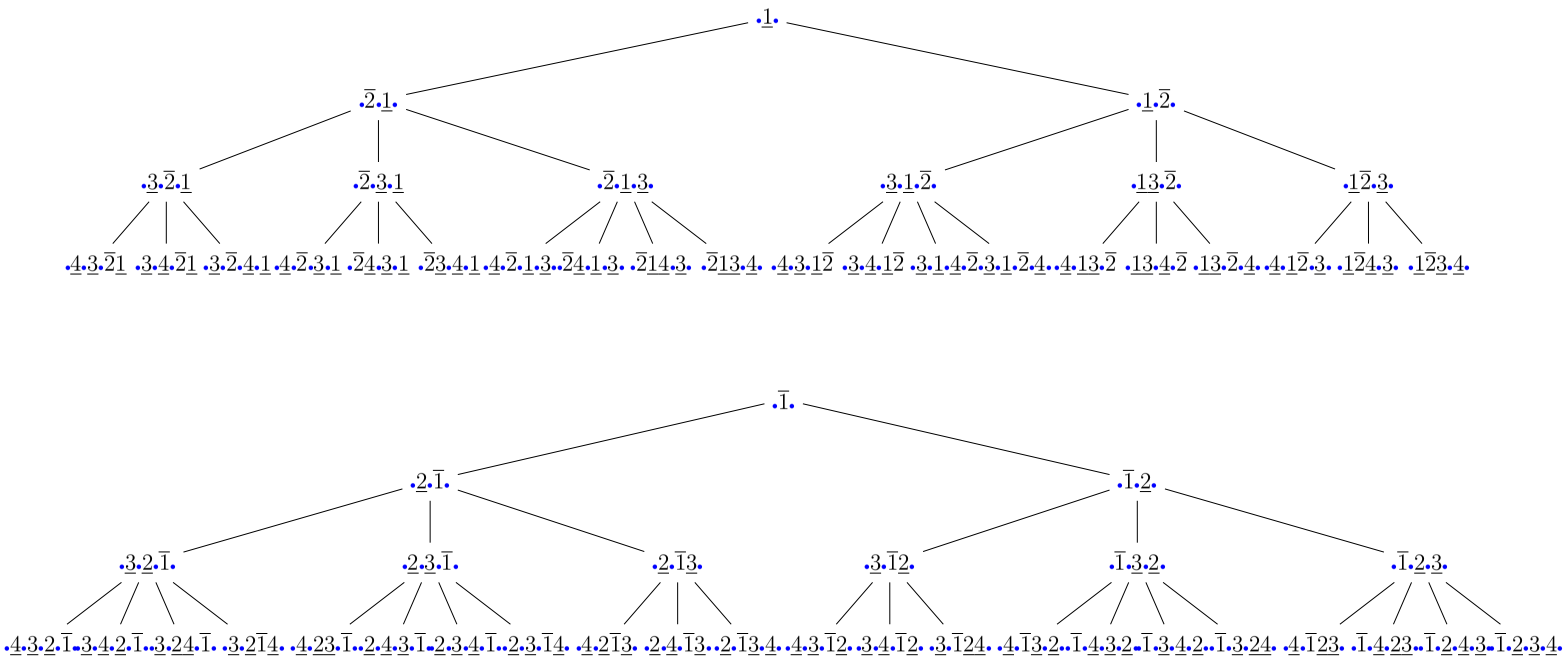


FIGURE 6.5 – Les arbres de génération $\mathcal{T}_\varepsilon^{\mathsf{l}}$ pour les signatures $\varepsilon = -+--$ (haut) et $\varepsilon = +---$ (bas). Les espaces libres sont marqués avec un point bleu.

dans τ. Soient α et β les espaces immédiatement après $n-1$ et n dans τ, α' l'espace immédiatement après $n-1$ dans τ', et β' l'espace de τ' dans lequel on doit insérer n pour retrouver τ. Alors, aux espaces 0, α et β près, les espaces libres de τ sont précisement les espaces libres de τ' qui ne sont pas situés entre les espaces α' et β'. En effet,

— insérer $d := n+1$ juste après une valeur a située entre $b := n-1$ et $c := n$ dans τ créerait un motif *b-ad-c* ou *c-ad-b* avec $\varepsilon_b = \varepsilon_c$;

— Au contraire, considérons un espace γ de τ n'étant pas situé entre α et β. Si insérer $n+1$ à la position γ dans τ crée un motif interdit de ($\star$) avec $c = n$, alors insérer n à la position γ dans τ' créerait aussi le même motif interdit de ($\star$) avec $c = n-1$. Par conséquent, tous les espaces libres n'étaient pas situés entre les espaces α' et β' restent libres.

Soit (ℓ, r) le type d'espace libre de τ et (ℓ', r') le type d'espace libre de τ'. On obtient que

— $\ell' \geq \ell$ et $r' = r-1$ si n est inséré à la gauche de $n-1$;

— $\ell' = \ell - 1$ et $r' \geq r$ si n est inséré à la droite de $n-1$.

La formule suit immédiatement quand $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n$.

Supposons maintenant que $\varepsilon_{n-1} = -\varepsilon_n$, et gardons les même notations que précedement. En utilisant des arguments similaires, on observe que, aux espaces 0, α et β près, les espaces libres de τ sont précisement les espaces libres de τ' situés entre les espaces α' et β'. Par conséquent, nous obtenons que

— $\ell = 1$, $r \geq 2$, et $\ell' \geq r-1$ si n est inséré à la gauche de $n-1$;

— $\ell \geq 2$, $r = 1$, et $r' \geq \ell - 1$ si n est inséré à la droite de $n-1$.

La formule suit pour $\varepsilon_{n-1} = -\varepsilon_n$. □

Avant d'appliquer ces formules pour obtenir des bornes sur B_ε pour des signatures arbitraires ε, considérons deux signatures spéciales : les signatures constantes et alternantes.

SIGNATURE ALTERNANTE Comme l'étude de ce cas particulier est plus simple, nous traitons en premier le cas de la *signature alternante* $(+-)^{\frac{n}{2}}$ (où on définit $(+-)^{\frac{n}{2}}$ comme $(+-)^m+$ quand $n = 2m+1$ est impair).

Proposition 121. *Les nombres Baxter-Cambriens pour les signatures alternantes sont les coefficients binomiaux centraux (voir [OEI10, A000984]) :*

$$B_{(+-)^{\frac{n}{2}}} = \binom{2n-2}{n-1}.$$

Démonstration. On prouve par récursion sur n que les nombres Baxter-Cambriens raffinés sont

$$B_{(+-)^{\frac{n}{2}}}(\ell, r) = \delta_{\ell=1} \cdot \delta_{r\geq 2} \cdot \binom{2n-2-r}{n-r} + \delta_{\ell\geq 2} \cdot \delta_{r=1} \cdot \binom{2n-2-\ell}{n-\ell}.$$

Cette équation est vérifiée pour $n = 2$ comme $B_{+-}(1,2) = 1$ (comptant la permutation 21) et $B_{+-}(2,1) = 1$ (comptant la permutation 12). Supposons maintenant que cette équation

soit vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors l'Équation ($\neq$) de la proposition 120 montre que

$$\begin{aligned} B_{(+-)^{\frac{n+1}{2}}}(\ell, r) &= \delta_{\ell=1} \cdot \delta_{r\geq 2} \cdot \sum_{\ell' \geq r-1} \binom{2n-2-\ell'}{n-\ell'} + \delta_{\ell\geq 2} \cdot \delta_{r=1} \cdot \sum_{r' \geq \ell-1} \binom{2n-2-r'}{n-r'} \\ &= \delta_{\ell=1} \cdot \delta_{r\geq 2} \cdot \binom{2n-r}{n+1-r} + \delta_{\ell\geq 2} \cdot \delta_{r=1} \cdot \binom{2n-\ell}{n+1-\ell}, \end{aligned}$$

car une somme de coefficients binomiaux le long d'une diagonale $\sum_{i=0}^{p} \binom{q+i}{i}$ se simplifie en le coefficient binomial $\binom{q+p+1}{p}$ par applications multiples de la règle de Pascal. Finalement, on conclut en observant que

$$B_{(+-)^{\frac{n}{2}}} = \sum_{\ell, r \in [n]} B_{(+-)^{\frac{n}{2}}}(\ell, r) = 2 \sum_{u \geq 2} \binom{2n-2-u}{n-u} = 2\binom{2n-3}{n-2} = \binom{2n-2}{n-1}.$$

La remarque 123 fournit une preuve analytique de ce résultat. □

Remarque 122 (Propriétés de l'arbre de génération $\mathcal{T}^{1}_{(+-)^{\frac{n}{2}}}$)**.** Observons que :

(i) Une permutation au niveau m avec k espaces libres a k enfants, dont les nombres d'espaces libres sont $3, 3, 4, 5, \ldots, k+1$ respectivement (ce résultat est à mettre en parallèle du lemme 34). Cette propriété peut déjà être observée sur l'arbre de génération $\mathcal{T}^{1}_{+-+-}$ de la figure 6.5.

(ii) Pour une permutation τ au niveau m avec k espaces libres, il y a précisément $\binom{k+2p-2}{p}$ permutations au niveau $m+p$ qui ont τ comme sous-mot, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(iii) Le nombre de permutations au niveau m avec k espaces libres est $2\binom{2m-1-k}{m+1-k}$. Compter les permutations aux niveaux m et $m+1$ selon leur nombre d'espaces libres donne

$$\binom{2m-2}{m-1} = \sum_{k\geq 3} 2\binom{2m-1-k}{m+1-k} \qquad \text{et} \qquad \binom{2m}{m} = \sum_{k\geq 3} 2k\binom{2m-1-k}{m+1-k}.$$

(iv) De légères pertubations dans la signature alternante donnent des signatures intéressantes pour lesquelles on peut donner des formules closes pour leurs nombres Baxter-Cambriens. Par exemple, considérons la signature $++(+-)^{\frac{n}{2}-1}$ obtenue à partir de la signature alternante en changeant le deuxième signe. Son nombre Baxter-Cambrien est donné par la somme de trois coefficients binomiaux qui sont presque centraux :

$$B_{++(+-)^{\frac{n}{2}-1}} = 2\binom{2n-6}{n-4} + \binom{2n-2}{n-1}.$$

Signature constante Nous considérons maintenant la *signature constante* $(+)^n$. Le nombre $B_{(+)^n}$ est le *nombre de Baxter* classique (voir [OEI10, A001181]) défini par

$$B_{(+)^n} = B_n = \binom{n+1}{1}^{-1} \binom{n+1}{2}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k-1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1}.$$

Ces nombres ont été étudiés très en profondeur, voir en particulier [CGHK78, Mal79, DG96, DG98, YCCG03, FFNO11, BBMF11, LR12, Gir12]. Le nombre de Baxter B_n compte plusieurs familles d'objets combinatoires dont, entre autres :

— les permutations de Baxter de $[n]$, *i.e.,* les permutations qui évitent les motifs *b-da-c* et *c-ad-b*,
— Les permutations maximales (resp. minimales) pour l'ordre faible des classes de congruence de Baxter dans $\mathfrak{S}_n$, *i.e.,* les permutations qui évitent les motifs *b-ad-c* et *c-ad-b* (resp. *b-da-c* et *c-da-b*),
— les paires d'arbres binaires jumeaux sur n nœuds,
— les rectangulations diagonales d'une grille $n \times n$,
— les orientations planaires bipolaires avec n arêtes,
— les triplets de chemins qui ne se croisent pas avec $k-1$ pas nord et $n-k$ pas est, pour tout $k \in [n]$,

Des bijections entre toutes ces *familles Baxter* sont discutées dans [DG96, DG98, FFNO11, BBMF11].

Remarque 123 (Deux preuves de la formule sommatoire)**.** Il y a essentiellement deux façons d'obtenir la formule sommatoire pour les nombres de Baxter ci-dessus : elle a été prouvée analytiquement dans un premier temps dans [CGHK78], puis bijectivement dans [Vie81, DG98, FFNO11]. Nous allons rapidement commenter ces deux techniques et discuter les limites de leur généralisation au contexte Baxter-Cambrien.

(i) Les *preuves bijectives* de [DG98, FFNO11] transforment une paire d'arbres binaires en un triplet de chemin qui ne se croisent pas, et utilisent ensuite le lemme du déterminant de Gessel-Viennot [GV85] pour obtenir la formule sommatoire. Le chemin du milieu de ce triplet est donné par la canopée des arbres binaires jumeaux, et les deux autres chemins sont calculés à partir de la structure des arbres. Nous ne sommes pas encore capables d'adapter cette technique pour fournir une formule sommatoire pour tous les nombres Baxter-Cambriens.

(ii) La *preuve analytique* de [CGHK78] est basée sur l'Équation (=) de la proposition 120 et peut être partiellement adaptée aux signatures arbitraires de la façon suivante. On définit l'*extension* d'une signature $\varepsilon \in \pm^n$ par une signature $\delta \in \pm^m$ comme étant la signature $\varepsilon \lhd \delta \in \pm^{n+m}$ telle que $(\varepsilon \lhd \delta)_i = \varepsilon_i$ pour $i \in [n]$ et $(\varepsilon \lhd \delta)_{n+j} = \delta_j \cdot (\varepsilon \lhd \delta)_{n+j-1}$ pour $j \in m$. Par exemple, $++- \lhd +--+ = ++--+--$. Alors pour toute $\varepsilon \in \pm^n$ et $\delta \in \pm^m$, on a

$$B_{\varepsilon \lhd \delta} = \sum_{\ell, r \geq 1} X_\delta(\ell, r)\, B_\varepsilon(\ell, r),$$

où les coéfficients $X_\delta(\ell, r)$ sont obtenus récursivement à partir des formules de la

proposition 120. Précisément, pour tout $\ell, r \geq 1$, on a $X_\varnothing(\ell, r) = 1$ et

$$X_{(+\delta)}(\ell, r) = \sum_{1 \leq \ell' \leq \ell} X_\delta(\ell', r+1) \; + \sum_{1 \leq r' \leq r} X_\delta(\ell+1, r'),$$
$$X_{(-\delta)}(\ell, r) = \sum_{2 \leq \ell' \leq r+1} X_\delta(\ell', 1) \; + \sum_{2 \leq r' \leq \ell+1} X_\delta(1, r').$$

Ces équations se traduisent sur les fonctions génératrices $\mathfrak{X}_\delta(u, v) := \sum_{\ell, r \geq 1} X_\delta(\ell, r) u^{\ell-1} v^{r-1}$ aux formules $\mathfrak{X}_\varnothing(u, v) = \frac{1}{(1-u)(1-v)}$ et

$$\mathfrak{X}_{(+\delta)}(u, v) = \frac{\mathfrak{X}_\delta(u, v) - \mathfrak{X}_\delta(u, 0)}{(1-u)v} + \frac{\mathfrak{X}_\delta(u, v) - \mathfrak{X}_\delta(0, v)}{u(1-v)},$$
$$\mathfrak{X}_{(-\delta)}(u, v) = \frac{\mathfrak{X}_\delta(v, 0) - \mathfrak{X}_\delta(0, 0)}{(1-u)(1-v)v} + \frac{\mathfrak{X}_\delta(0, u) - \mathfrak{X}_\delta(0, 0)}{u(1-u)(1-v)}.$$

On peut noter que la symétrie u/v de $\mathfrak{X}_\delta(u, v)$ se reflète en une symétrie sur les équations récurrentes. On peut donc écrire cette fonction génératrice $\mathfrak{X}_\delta(u, v)$ comme

$$\mathfrak{X}_\delta(u, v) = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ k \in [|\delta|+1]}} Y_\delta^{i,j,k} \frac{(-u)^i \, (-v)^j}{(1-u)^{|\delta|+2-k} (1-v)^k},$$

où les coefficients qui ne disparaissent pas $Y_\delta^{i,j,k}$ sont calculés récursivement par $Y_\varnothing^{0,0,1} = 1$ et

$$Y_{(+\delta)}^{i,j,k} = \binom{k}{j+1} Y_\delta^{i,0,k} - Y_\delta^{i,j+1,k} + \binom{|\delta|+3-k}{i+1} Y_\delta^{0,j,k-1} - Y_\delta^{i+1,j,k-1},$$
$$Y_{(-\delta)}^{i,j,k} = \binom{k-1}{j} \left[\binom{|\delta|+2-k}{i+1} Y_\delta^{0,0,k} - Y_\delta^{i+1,0,k} \right] + \binom{|\delta|+2-k}{i} \left[\binom{k-1}{j+1} Y_\delta^{0,0,k-1} - Y_\delta^{0,j+1,k-1} \right].$$

Nous avons utilisé le fait que $Y_\delta^{i,j,k} = Y_\delta^{j,i,|\delta|+2-k}$ pour simplifier la deuxième équation. Notons que cette décomposition de $\mathfrak{X}_\delta$ n'est pas unique et que l'équation récurrente sur $Y_\delta^{i,j,k}$ suit un choix particulier d'une de ces décompositions.

À cette étape, F. Chung, R. Graham, V. Hoggatt, et M. Kleiman [CGHK78], devinent et vérifient que la première équation est toujours vérifiée par

$$Y_{(+)^{n-1}}^{i,j,k} = \frac{\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+i+1}\binom{n+1}{k-j-1}\left[\binom{k+i-2}{i}\binom{n+j-k-1}{j} - \binom{k+i-2}{i-1}\binom{n+j-k-1}{j-1}\right]}{\binom{n+1}{1}\binom{n+1}{2}}$$

à partir de quoi ils obtiennent immédiatement que

$$B_{(+)^n} = B_{+\lhd(+)^{n-1}} = \sum_{\ell, r \geq 1} X_{(+)^{n-1}}(\ell, r) \, B_+(\ell, r) = X_{(+)^{n-1}}(1, 1) = \mathfrak{X}_{(+)^{n-1}}(0, 0)$$
$$= \sum_{k \in [n]} Y_{(+)^{n-1}}^{0,0,k} = \binom{n+1}{1}^{-1} \binom{n+1}{2}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k-1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}.$$

Malheuresement, nous n'avons pas été capables de deviner une formule close pour les coefficients $Y^{i,j,k}_{(-)^n}$. Notons qu'il suffirait de comprendre les coefficients $Y^{i,0,k}_{(-)^n}$ pour lesquels on a observé empiriquement que

$$Y^{0,0,k}_{(-)^n} = C_n, \quad Y^{i,0,0}_{(-)^n} = Y^{i,0,1}_{(-)^n} = \binom{2n}{n-1-i}\binom{n-1+i}{i}\Big/ n \quad \text{et} \quad Y^{i,0,n+1-i}_{(-)^n} = \sum_{p=i}^{n-1} C_{n-1-p}C_p.$$

Voir [OEI10, A000108], [OEI10, A234950], et [OEI10, A028364]. Cette formule fournirait une preuve alternative de la proposition 121 comme nous obtiendrions que

$$B_{(+-)^{\frac{n}{2}}} = B_{+\lhd(-)^{n-1}} = \mathfrak{X}_{(-)^{n-1}}(0,0) = \sum_{k\in[n]} Y^{0,0,k}_{(-)^{n-1}} = nC_{n-1} = \binom{2n-2}{n-1}.$$

Malgré tout, même si nous ne sommes pas capables de trouver les coefficients $Y^{i,0,k}_{(-)^n}$, nous parvenons tout de même à obtenir une autre preuve de la proposition 121 en vérifiant directement sur l'équation récursive sur $\mathfrak{X}_\delta(u,v)$ que

$$\mathfrak{X}_{(-)^n}(u,v) = \sum_{k\in[n]} \binom{2n-1-k}{n-1}\left[\frac{1}{(1-u)(1-v)^{k+1}} + \frac{1}{(1-u)^{k+1}(1-v)}\right],$$

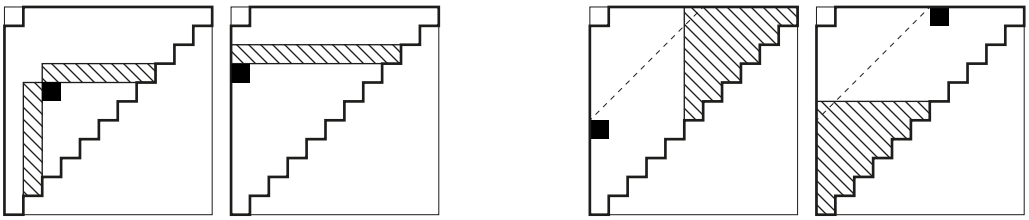
ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} B_{(+-)^{\frac{n}{2}}} = B_{+\lhd(-)^{n-1}} = \mathfrak{X}_{(-)^{n-1}}(0,0) &= \sum_{k\in[n-1]} 2\binom{2n-3-k}{n-2} \\ &= 2\sum_{k=2}^{n}\binom{2n-2-k}{n-2} = 2\binom{2n-2}{n-1} - 2\binom{2n-3}{n-2} = \binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Pour l'avant-dernière égalité, on choisit $n-1$ positions parmi $2n-2$ et on les regroupe selon la première position de k.

Signatures arbitraires Revenons maintenant au cas d'une signature arbitraire ε. Nous n'avons pas été en mesure d'obtenir une formule sommatoire pour une signature arbitraire en utilisant les techniques présentées dans la remarque 123 ci-dessus. Malgré tout, il est possible d'utiliser les formules récurrentes de la proposition 120 pour borner le nombre Baxter-Cambrien B_ε pour une signature arbitraire ε.

Pour ce faire, nous considérons la matrice $\mathbf{B}_\varepsilon := \big(B_\varepsilon(\ell,r)\big)_{\ell,r\in[n]}$. Les formules récursives de la proposition 120 fournissent un algorithme efficace pour calculer cette matrice $\mathbf{B}_\varepsilon$ et donc le nombre ε-Baxter-Cambrien $B_\varepsilon = \sum_{\ell,r\in[n]} B_\varepsilon(\ell,r)$. Plus précisément, si ε est obtenue ajoutant un signe à la fin de ε', alors chaque entrée de $\mathbf{B}_\varepsilon$ est la somme des entrées de $\mathbf{B}_{\varepsilon'}$ dans une région qui dépend de l'égalité $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$. Ces régions sont présentées graphiquement dans la figure 6.6 et des exemples de ces calculs apparaissent dans la figure 6.7.



$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ $\qquad$ $\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1}$

FIGURE 6.6 – Calcul récurrent de $\mathbf{B}_\varepsilon$: les entrées noires de $\mathbf{B}_\varepsilon$ sont la somme des entrées de $\mathbf{B}_{\varepsilon'}$ sur la région marquée en pointillés. Les entrées en dehors du triangle supérieur droit sont toujours nulles. Quand $\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1}$, les seules entrées non nulles de $\mathbf{B}_\varepsilon$ sont la première ligne et la première colonne.

On observe que les transformations de la figure 6.6 sont symétriques par rapport à la diagonale de la matrice. Comme $\mathbf{B}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est symétrique, et $\mathbf{B}_\varepsilon$ est obtenue à partir de $\mathbf{B}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ par application successive de ces transformations symétriques, on obtient que $\mathbf{B}_\varepsilon$ est toujours symétrique. Bien que ce fait puisse paraître naturel au lecteur, il n'est pas immédiat car les trois espaces libres forcés sont assymétriques : par exemple l'espace 0 est toujours libre.

Étant donné une matrice $M := (m_{i,j})$, nous considérons la matrice $M^{\text{SE}} := \left(m^{\text{SE}}_{i,j}\right)$ où

$$m^{\text{SE}}_{i,j} := \sum_{p \geq i,\, q \geq j} m_{p,q}$$

est la somme de toutes les entrées situées au sud-est de (i, j) (en utilisant la notation des matrices). Alors $(\mathbf{B}_\varepsilon)^{\text{SE}}_{1,1}$ est la somme de toutes les entrées de $\mathbf{B}_\varepsilon$, et est donc égale au nombre ε-Baxter-Cambrien B_ε. En utilisant la figure 6.6, on obtient une règle similaire pour calculer les entrées de $B^{\text{SE}}_\varepsilon$ comme des sommes d'entrées de $B^{\text{SE}}_{\varepsilon'}$ quand ε est obtenu en ajoutant un signe à la fin de ε'. Cette règle est présentée figure 6.8.

L'interprétation matricielle des formules de la proposition 120 nous fournit un outil pour borner les nombres Baxter-Cambriens. Pour une signature ε, on note $\mathsf{switch}(\varepsilon)$ l'ensemble des espaces où ε change de signe.

Proposition 124. *Pour toute paire de signatures $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in \pm^n$, si $\mathsf{switch}(\varepsilon) \subset \mathsf{switch}(\tilde{\varepsilon})$ alors $B_\varepsilon > B_{\tilde{\varepsilon}}$.*

Démonstration. Pour deux matrices $M := (m_{i,j})$ et $\tilde{M} := (\tilde{m}_{i,j})$, on écrit $M \succcurlyeq \tilde{M}$ quand $m_{i,j} \geq \tilde{m}_{i,j}$ pour tout indice i, j (comparaison entrée à entrée), et on écrit $M \succ \tilde{M}$ quand $M \succcurlyeq \tilde{M}$ et $M \neq \tilde{M}$. Considérons quatre signatures $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in \pm^n$ et $\varepsilon', \tilde{\varepsilon}' \in \pm^{n-1}$ telles que ε' (resp. $\tilde{\varepsilon}'$) soit obtenu en supprimant le dernier signe de ε (resp. $\tilde{\varepsilon}$). À partir de la figure 6.8, et en utilisant le fait que $\mathbf{B}_\varepsilon$ soit symétrique, on obtient que :

— si $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ et $\tilde{\varepsilon}_n = -\tilde{\varepsilon}_{n-1}$, alors $\mathbf{B}^{\text{SE}}_{\varepsilon'} \succcurlyeq \mathbf{B}^{\text{SE}}_{\tilde{\varepsilon}'}$ implique $\mathbf{B}^{\text{SE}}_\varepsilon \succ \mathbf{B}^{\text{SE}}_{\tilde{\varepsilon}}$.

— si $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ et $\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{\varepsilon}_{n-1}$, ou bien $\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1}$ et $\tilde{\varepsilon}_n = -\tilde{\varepsilon}_{n-1}$, alors $\mathbf{B}^{\text{SE}}_{\varepsilon'} \succ \mathbf{B}^{\text{SE}}_{\tilde{\varepsilon}'}$ implique $\mathbf{B}^{\text{SE}}_\varepsilon \succ \mathbf{B}^{\text{SE}}_{\tilde{\varepsilon}}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
++ & \longrightarrow & +++ & \longrightarrow & ++++ & \longrightarrow & +++++ & \longrightarrow & ++++++ \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 9 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 11 & 4 & 0 \\ 9 & 11 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 22 & 33 & 26 & 10 & 1 \\ 22 & 44 & 43 & 24 & 5 & 0 \\ 33 & 43 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 26 & 24 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
++ & \longrightarrow & +++ & \longrightarrow & +++- & \longrightarrow & +++-- & \longrightarrow & +++--- \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 11 & 6 & 4 & 1 \\ 11 & 22 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 22 & 39 & 11 & 5 & 1 \\ 22 & 44 & 39 & 10 & 2 & 0 \\ 39 & 39 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
+- & \longrightarrow & +-+ & \longrightarrow & +-+- & \longrightarrow & +-+-+ & \longrightarrow & +-+-+- \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 20 & 10 & 4 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 70 & 35 & 15 & 5 & 1 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

FIGURE 6.7 – Calcul récursif de $\mathbf{B}_\varepsilon$, pour $\varepsilon = (+)^6$, $(+)^3(-)^3$ et $(+-)^3$.

Par applications répétées de ces observations, on obtient que $\mathsf{switch}(\varepsilon) \subset \mathsf{switch}(\tilde{\varepsilon})$ implique $\mathbf{B}^{\mathrm{SE}}_\varepsilon \succ \mathbf{B}^{\mathrm{SE}}_{\tilde{\varepsilon}}$, et donc $B_\varepsilon > B_{\tilde{\varepsilon}}$. □

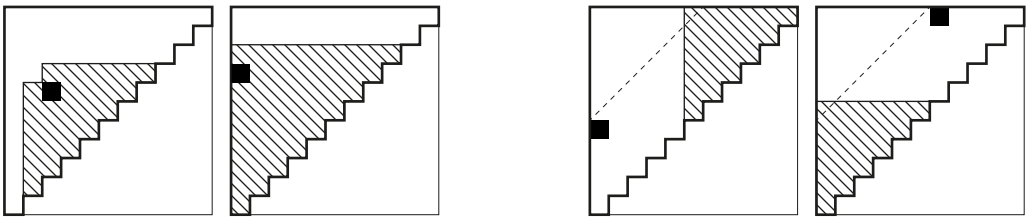
Corollaire 125. *Parmi toutes les signatures de $\pm^n$, la signature constante maximise le nombre Baxter-Cambrien, et la signature alternante le minimise : pour toute $\varepsilon \in \pm^n$,*

$$\binom{2n-2}{n-1} = B_{(+-)^{\frac{n}{2}}} \leq B_\varepsilon \leq B_{(+)^n} = \binom{n+1}{1}^{-1}\binom{n+1}{2}^{-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k-1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k-1}.$$

Remarque 126. La preuve de la proposition 124 peut sembler être excessivement compliquée au vu du résultat. Observons malgré tout que la situation est assez subtile :

— Si $\mathsf{switch}(\varepsilon) \not\subseteq \mathsf{switch}(\tilde{\varepsilon})$, on peut avoir $B_\varepsilon < B_{\tilde{\varepsilon}}$ même si $|\mathsf{switch}(\varepsilon)| < |\mathsf{switch}(\tilde{\varepsilon})|$. Le plus petit exemple est donné par $B_{+++-++---} = 18376 < 18544 = B_{++-+++-++}$.

— On peut avoir $\mathbf{B}^{\mathrm{SE}}_\varepsilon \succcurlyeq \mathbf{B}^{\mathrm{SE}}_{\tilde{\varepsilon}}$ mais $\mathbf{B}_\varepsilon \not\succcurlyeq \mathbf{B}_{\tilde{\varepsilon}}$. Voir la troisième colonne de la figure 6.7.



$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ $\qquad$ $\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1}$

FIGURE 6.8 – Calcul récurrent de $\mathbf{B}_\varepsilon^{\mathrm{SE}}$: les entrées noires de $\mathbf{B}_\varepsilon^{\mathrm{SE}}$ sont la somme des entrées de $\mathbf{B}_{\varepsilon'}^{\mathrm{SE}}$ sur la région marquée en pointillés. Les entrées situées en dehors de cette forme triangulaire sont nulles. Quand $\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1}$, les seules entrées non nulles de $\mathbf{B}_\varepsilon^{\mathrm{SE}}$ sont dans la première ligne ou dans la première colonne.

6.2 Algèbre de Hopf Baxter-Cambrienne

Dans ce paragraphe, nous définissons l'algèbre de Hopf Baxter-Cambrienne $\mathsf{BaxCamb}$, étendant simultanément l'algèbre de Hopf Cambriennne et l'algèbre de Hopf de Baxter étudiée par S. Law et N. Reading [LR12] et S. Giraudo [Gir12]. Nous présentons la construction de $\mathsf{BaxCamb}$ comme une sous-algèbre de $\mathsf{FQSym}_\pm$ et celle de son dual $\mathsf{BaxCamb}^*$ comme un quotient de $\mathsf{FQSym}_\pm^*$.

6.2.1 Sous-algèbre de $\mathsf{FQSym}_\pm$

On note $\mathsf{BaxCamb}$ l'espace vectoriel de $\mathsf{FQSym}_\pm$ engendré par les éléments

$$\mathbb{P}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} := \sum_{\substack{\tau\in\mathfrak{S}_\pm \\ \mathbf{P}^{\downarrow}(\tau)=[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]}} \mathbb{F}_\tau = \sum_{\tau\in\mathcal{L}(\mathrm{T}_\circ\rotatebox{-90}{$\leftarrow$}\mathrm{T}_\bullet)} \mathbb{F}_\tau,$$

pour toutes paires d'arbres Cambriens jumeaux $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$. Par exemple, pour la paire d'arbres Cambriens de la figure 6.1 (gauche), on a

$\mathbb{P}$ $= \mathbb{F}_{\underline{21}\bar{7}\underline{5}\bar{3}\underline{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\underline{2}\bar{7}1\underline{5}\bar{3}\underline{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\underline{2}\bar{7}\underline{51}\bar{3}\underline{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\bar{7}\underline{215}\bar{3}\underline{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\bar{7}\underline{251}\bar{3}\underline{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\bar{7}\underline{521}\bar{3}\underline{4}\bar{6}}.$

Théorème 127. $\mathsf{BaxCamb}$ *est une sous-algèbre de Hopf de* $\mathsf{FQSym}_\pm$.

Démonstration. La preuve de ce théorème est laissée au lecteur car très similaire à celle du théorème 88. Les échanges d'une permutation τ du produit $\mathbb{P}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \cdot \mathbb{P}_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]}$ sont dus aux échanges dans les extensions linéaires de $\mathrm{T}_\circ\rotatebox{-90}{$\leftarrow$}\mathrm{T}_\bullet$ et $\mathrm{T}'_\circ\rotatebox{-90}{$\leftarrow$}\mathrm{T}'_\bullet$ ou bien du produit de mélange de ces extensions linéaires. Le coproduit est traité de la même façon. □

Comme pour l'algèbre Cambrienne, nous pouvons décrire le produit et le coproduit de la base $\mathbb{P}$ de $\mathsf{BaxCamb}$ combinatoirement en termes d'opérations sur les paires d'arbres Cambriens jumeaux.

$\boxed{\text{Produit}}$ Le produit de l'algèbre de Hopf Baxter-Cambrienne $\mathsf{BaxCamb}$ peut être décrit en termes d'intervalles du treillis Baxter-Cambrien :

Proposition 128. *Pour toutes paires* $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ *et* $[\mathrm{T}'_\circ, \mathrm{T}'_\bullet]$ *d'arbres Cambriens jumeaux, le produit* $\mathbb{P}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \cdot \mathbb{P}_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]}$ *est donné par*

$$\mathbb{P}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \cdot \mathbb{P}_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]} = \sum_{[\mathrm{S}_\circ,\mathrm{S}_\bullet]} \mathbb{P}_{[\mathrm{S}_\circ,\mathrm{S}_\bullet]},$$

où $[\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet]$ *parcourent l'intervalle entre* $\left[\mathrm{T}_\circ \nearrow \bar{\mathrm{T}}'_\circ, \mathrm{T}_\bullet \nwarrow \bar{\mathrm{T}}'_\bullet\right]$ *et* $\left[\mathrm{T}_\circ \nwarrow \bar{\mathrm{T}}'_\circ, \mathrm{T}_\bullet \nearrow \bar{\mathrm{T}}'_\bullet\right]$ *dans le treillis* $\varepsilon(\mathrm{T}_\circ)\varepsilon(\mathrm{T}'_\circ)$*-Baxter-Cambrien.*

Démonstration. Ce résultat repose sur le fait que les classes ε-Baxter-Cambriennes sont des intervalles de l'ordre faible sur $\mathfrak{S}^\varepsilon$, et que le produit de mélange de deux intervalles de l'ordre faible est encore un intervalle de l'ordre faible. Voir la preuve similaire de la proposition 89. $\square$

Par exemple, on peut calculer le produit

$$\mathbb{P}_{[\,,\,]} \cdot \mathbb{P}_{[\,,\,]} = \mathbb{F}_{\bar{2}\underline{1}} \cdot \left(\mathbb{F}_{\bar{2}\underline{34}\bar{1}} + \mathbb{F}_{\bar{2}\underline{3}\bar{1}\underline{4}}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\bar{2}\underline{1}\bar{4}\underline{5}\bar{3}\underline{6}} + \mathbb{F}_{\bar{2}\bar{4}\underline{1}\underline{5}\bar{3}\underline{6}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{2}\bar{4}\underline{5}\underline{1}\bar{3}\underline{6}} + \mathbb{F}_{\bar{2}\underline{1}\bar{4}\underline{5}\underline{6}\bar{3}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{2}\bar{4}\underline{1}\underline{5}\underline{6}\bar{3}} + \mathbb{F}_{\bar{2}\bar{4}\underline{5}\underline{1}\bar{6}\bar{3}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{2}\bar{4}\underline{5}\underline{6}\underline{1}\bar{3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\bar{2}\bar{4}\underline{5}\bar{3}\underline{1}\underline{6}} + \mathbb{F}_{\bar{2}\bar{4}\underline{5}\bar{3}\underline{6}\underline{1}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{2}\bar{4}\underline{5}\underline{6}\bar{3}\underline{1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\bar{4}\bar{2}\underline{1}\underline{5}\bar{3}\underline{6}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\bar{2}\underline{5}\underline{1}\bar{3}\underline{6}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{4}\bar{2}\underline{1}\underline{5}\underline{6}\bar{3}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\bar{2}\underline{5}\underline{1}\underline{6}\bar{3}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{4}\bar{2}\underline{5}\underline{6}\underline{1}\bar{3}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{2}\underline{1}\bar{3}\underline{6}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{2}\underline{1}\underline{6}\bar{3}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{2}\underline{6}\underline{1}\bar{3}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{2}\underline{6}\bar{3}\underline{1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\bar{4}\bar{2}\underline{5}\bar{3}\underline{1}\underline{6}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\bar{2}\underline{5}\bar{3}\underline{6}\underline{1}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{4}\bar{2}\underline{5}\underline{6}\bar{3}\underline{1}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{2}\bar{3}\underline{1}\underline{6}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{2}\bar{3}\underline{6}\underline{1}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{2}\underline{6}\bar{3}\underline{1}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\underline{6}\bar{2}\bar{3}\underline{1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{3}\bar{2}\underline{1}\underline{6}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{3}\bar{2}\underline{6}\underline{1}} \\ +\mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\bar{3}\underline{6}\bar{2}\underline{1}} + \mathbb{F}_{\bar{4}\underline{5}\underline{6}\bar{3}\bar{2}\underline{1}} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{P}_{[\,,\,]} + \mathbb{P}_{[\,,\,]} + \mathbb{P}_{[\,,\,]} + \mathbb{P}_{[\,,\,]} + \mathbb{P}_{[\,,\,]}.$$

Remarque 129 (Bases multiplicatives)**.** Similairement aux bases multiplicatives définies dans le paragraphe 5.2, les bases $\mathbb{E}^{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]}$ et $\mathbb{H}^{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]}$ définies par

$$\mathbb{E}^{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} := \sum_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet] \leq [\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]} \mathbb{P}_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{H}^{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} := \sum_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet] \leq [\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \mathbb{P}_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]}$$

sont multiplicatives car

$$\mathbb{E}^{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \cdot \mathbb{E}^{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]} = \mathbb{E}^{\left[\mathrm{T}_\circ \nearrow \bar{\mathrm{T}}'_\circ, \mathrm{T}_\bullet \nwarrow \bar{\mathrm{T}}'_\bullet\right]} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{H}^{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \cdot \mathbb{H}^{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]} = \mathbb{H}^{\left[\mathrm{T}_\circ \nwarrow \bar{\mathrm{T}}'_\circ, \mathrm{T}_\bullet \nearrow \bar{\mathrm{T}}'_\bullet\right]}.$$

Les éléments $\mathbb{E}$-indécomposable sont précisément les paires $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ pour lesquelles toutes les extensions linéaires de $\mathrm{T}_\circ \rotatebox{90}{$\leftarrow$} \mathrm{T}_\bullet$ sont indécomposables. En particulier, $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ est $\mathbb{E}$-indécomposable dès que $\mathrm{T}_\circ$ est $\mathbb{E}$-indécomposable ou $\mathrm{T}_\bullet$ est $\mathbb{H}$-indécomposable. Cette condition n'est cependant pas nécessaire. Par exemple $\mathbf{P}^{\rotatebox{90}{$\leftarrow$}}(\underline{3142})$ est $\mathbb{E}$-indécomposable alors que $\mathbf{P}(\underline{3142}) = \mathbf{P}(\underline{1342})$ est $\mathbb{E}$-décomposable et $\mathbf{P}(\underline{2413}) = \mathbf{P}(\underline{4213})$ est $\mathbb{H}$-décomposable.

Les propriétés énumératives et structurelles étudiées dans le paragraphe 5.2 ne sont plus vérifiées pour l'ensemble des paires d'arbres Cambriens jumeaux $\mathbb{E}$-indécomposables : elles forment un idéal du treillis Baxter-Cambrien, mais cet idéal n'est pas principal comme dans la proposition 98, et elles ne sont pas comptées par des formules simples comme dans la proposition 100. On peut tout de même mentionner que

— les nombres d'éléments $\mathbb{E}$-indécomposables avec signature constante $(-)^n$ sont donnés par 1, 1, 3, 11, 47, 221, ... Voir [OEI10, A217216].

— les nombres d'éléments $\mathbb{E}$-indécomposables avec signature constante $(+-)^{n/2}$ sont donnés par 1, 1, 3, 9, 29, 97, 333, 1165, 4135, ... Ces nombres sont les coefficient de la série de Taylor de $\frac{1}{x+\sqrt{1-4x}}$. Voir [OEI10, A081696] pour des références et des détails.

COPRODUCT Une *coupe* d'une paire d'arbres Cambriens jumeaux $[\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet]$ est une paire $\gamma = [\gamma_\circ, \gamma_\bullet]$ où $\gamma_\circ$ est une coupe de $\mathrm{S}_\circ$ et $\gamma_\bullet$ est une coupe de $\mathrm{S}_\bullet$ telles que les étiquettes de $\mathrm{S}_\circ$ en dessous de $\gamma_\circ$ coïcident avec les étiquettes de $\mathrm{S}_\bullet$ au-dessus de $\gamma_\bullet$. De façon équivalente, une coupe peut être vue comme un ensemble inférieur de $\mathrm{T}_\circ \rotatebox{90}{$\leq$} \mathrm{T}_\bullet$. Un exemple est illustré dans la figure 6.9.

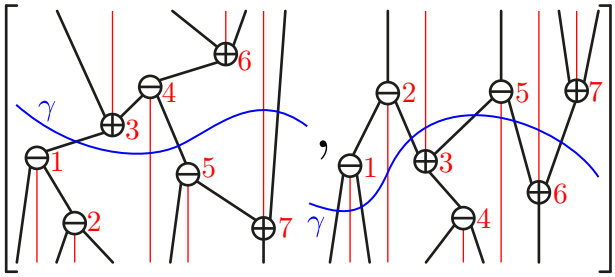


FIGURE 6.9 – Une coupe γ d'une paire d'arbres Cambriens Jumeaux.

On note $AB([\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet], [\gamma_\circ, \gamma_\bullet])$ l'ensemble des paires $[A_\circ, B_\bullet]$, pour lesquelles $A_\circ$ apparaît dans le produit $\prod_{\mathrm{T} \in A(\mathrm{S}_\circ)} \mathbb{P}_\mathrm{T}$ et $B_\bullet$ apparaît dans le produit $\prod_{\mathrm{T} \in B(\mathrm{S}_\circ)} \mathbb{P}_\mathrm{T}$, et $A_\circ$ et $B_\bullet$ sont des arbres Cambriens jumeaux. On définit $BA([\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet], [\gamma_\circ, \gamma_\bullet])$ similairement en échangeant le rôle de A et B. On obtient la description suivante du coproduit dans l'algèbre Baxter-Cambrienne $\mathsf{BaxCamb}$.

Proposition 130. *Pour toute paire d'arbres Cambriens jumeaux* $[\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet]$, *le coproduit* $\triangle \mathbb{P}_{[\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet]}$ *est donné par*

$$\triangle \mathbb{P}_{[\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet]} = \sum_\gamma \left(\sum_{[B_\circ, A_\bullet]} \mathbb{P}_{[B_\circ, A_\bullet]} \right) \otimes \left(\sum_{[A_\circ, B_\bullet]} \mathbb{P}_{[A_\circ, B_\bullet]} \right),$$

où γ *parcourt toutes les coupes de* $[\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet]$, $[B_\circ, A_\bullet]$ *parcours* $BA([\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet], [\gamma_\circ, \gamma_\bullet])$ *et* $[A_\circ, B_\bullet]$ *parcourt* $AB([\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet], [\gamma_\circ, \gamma_\bullet])$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 90. La difficulté ici est de décrire les extensions linéaires de l'union des forêts $A(\mathrm{S}_\circ, \gamma_\circ)$ avec l'opposé des forêts $B(\mathrm{S}_\bullet, \gamma_\bullet)$. Cette difficulté est dissimulée dans la définition de $AB([\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet], [\gamma_\circ, \gamma_\bullet])$. □

Par exemple, on peut calculer le coproduit

$$\begin{aligned}
\triangle \mathbb{P}_{[\,,\,]} &= \triangle\big(\mathbb{F}_{\overline{2}\underline{3}\overline{1}\underline{4}} + \mathbb{F}_{\overline{2}\underline{3}\underline{4}\overline{1}}\big) \\
&= 1 \otimes \big(\mathbb{F}_{\overline{2}\underline{3}\overline{1}\underline{4}} + \mathbb{F}_{\overline{2}\underline{3}\underline{4}\overline{1}}\big) + \mathbb{F}_{\overline{1}} \otimes \big(\mathbb{F}_{\underline{2}\overline{1}\underline{3}} + \mathbb{F}_{\underline{2}\underline{3}\overline{1}}\big) + \mathbb{F}_{\overline{1}\underline{2}} \otimes \big(\mathbb{F}_{\overline{1}\underline{2}} + \mathbb{F}_{\underline{2}\overline{1}}\big) + \mathbb{F}_{\overline{2}\underline{3}\overline{1}} \otimes \mathbb{F}_{\underline{1}} + \mathbb{F}_{\overline{1}\underline{2}\underline{3}} \otimes \mathbb{F}_{\overline{1}} + \big(\mathbb{F}_{\overline{2}\underline{3}\overline{1}\underline{4}} + \mathbb{F}_{\overline{2}\underline{3}\underline{4}\overline{1}}\big) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \mathbb{P}_{[\,,\,]} \;+\; \mathbb{P}_{[\,,\,]} \otimes \big(\mathbb{P}_{[\,,\,]} + \mathbb{P}_{[\,,\,]}\big) \;+\; \mathbb{P}_{[\,,\,]} \otimes \big(\mathbb{P}_{[\,,\,]} + \mathbb{P}_{[\,,\,]}\big) \\
&\qquad + \mathbb{P}_{[\,,\,]} \otimes \mathbb{P}_{[\,,\,]} \;+\; \mathbb{P}_{[\,,\,]} \otimes \mathbb{P}_{[\,,\,]} \;+\; \mathbb{P}_{[\,,\,]} \otimes 1.
\end{aligned}$$

Dans la ligne du résultat, nous avons regroupé les éléments selon les six coupes possibles de la paire d'arbres Cambriens $[\,,\,]$.

ALGÈBRES MATRIOCHKA Comme les classes Baxter-Cambrienne raffinent les classes Cambriennes, l'algèbre de Hopf Baxter-Cambrienne est prise en sandwich entre l'algèbre de Hopf des permutations signées et l'algèbre de Hopf Cambrienne. Elle complète la suite de sous-algèbres :

$$\mathsf{Rec} \subset \mathsf{Camb} \subset \mathsf{BaxCamb} \subset \mathsf{FQSym}_{\pm}.$$

6.2.2 Algèbre quotient de $\mathsf{FQSym}^*_{\pm}$

Comme pour l'algèbre Cambrienne, le résultat suivant est automatique à partir du théorème 127.

Théorème 131. *Le dual gradué* $\mathsf{BaxCamb}^*$ *de l'algèbre Baxter-Cambrienne est isomorphe à l'image de* $\mathsf{FQSym}^*_{\pm}$ *sous la projection canonique*

$$\pi : \mathbb{C}\langle A\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle A\rangle / \equiv^1,$$

où $\equiv^1$ *est la congruence Baxter-Cambrienne. La base duale* $\mathbb{Q}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]}$ *de* $\mathbb{P}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]}$ *est exprimée comme* $\mathbb{Q}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} = \pi(\mathbb{G}_\tau)$*, où* τ *est une des extensions linéaires de* $\mathrm{T}_\circ \rotatebox{90}{$\leftarrow$} \mathrm{T}_\bullet$.

Nous décrivons maintenant le produit et le coproduit dans $\mathsf{BaxCamb}^*$ par des opérations combinatoires sur les paires d'arbres Cambriens jumeaux. Nous utilisons les définitions et les notations introduites dans le paragraphe 5.1.3.

PRODUCT Le produit dans $\mathsf{BaxCamb}^*$ peut être décrit en utilisant des gaps et des laminages comme dans la proposition 93. Un exemple est illustré dans la figure 6.10. Pour deux arbres Cambriens T et T' et un mélange s de leurs signatures $\varepsilon(\mathrm{T})$ et $\varepsilon(\mathrm{T}')$, nous notons encore $\mathrm{T} \,{}_s\!\backslash \mathrm{T}'$ l'arbre décrit dans le paragraphe 5.1.3.

Proposition 132. *Pour toute paire d'arbres Cambriens jumeaux* $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ *et* $[\mathrm{T}'_\circ, \mathrm{T}'_\bullet]$*, le produit* $\mathbb{Q}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \cdot \mathbb{Q}_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]}$ *est donné par*

$$\mathbb{Q}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \cdot \mathbb{Q}_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]} = \sum_s \mathbb{Q}_{[\mathrm{T}_\circ\, s\backslash \mathrm{T}'_\circ, \mathrm{T}'_\bullet\, s\backslash \mathrm{T}_\bullet]},$$

où s *parcourt tous les mélanges des signatures* $\varepsilon(\mathrm{T}_\circ) = \varepsilon(\mathrm{T}_\bullet)$ *et* $\varepsilon(\mathrm{T}'_\circ) = \varepsilon(\mathrm{T}'_\bullet)$.

Démonstration. La preuve utilise le même raisonnement que celle de la proposition 93. La seule différence est que si $\tau \in \mathcal{L}(\mathrm{T}_\circ \Updownarrow \mathrm{T}_\bullet)$, $\tau' \in \mathcal{L}(\mathrm{T}'_\circ \Updownarrow \mathrm{T}'_\bullet)$, et $\sigma \in \tau \star \tau'$, alors $\mathrm{T}_\circ = \mathbf{P}(\tau)$ apparaît en dessous de $\mathrm{T}'_\circ = \mathbf{P}(\tau')$ dans $\mathbf{P}(\sigma)$ comme σ est inséré de la gauche vers la droite dans $\mathbf{P}(\sigma)$, et $\mathrm{T}_\bullet = \mathbf{P}(\overleftarrow{\tau})$ apparaît au-dessus de $\mathrm{T}'_\bullet = \mathbf{P}(\overleftarrow{\tau'})$ dans $\mathbf{P}(\overleftarrow{\sigma})$ comme σ est inséré de la droite vers la gauche dans $\mathbf{P}(\overleftarrow{\sigma})$. □

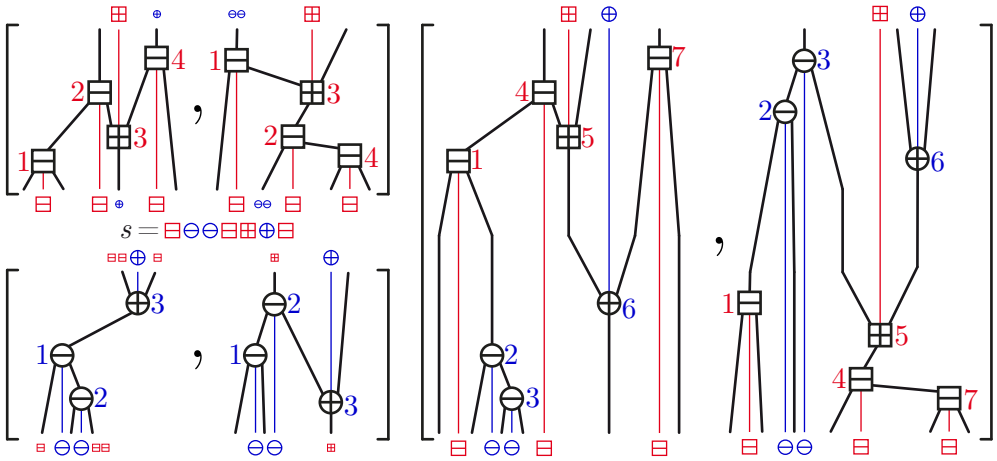


FIGURE 6.10 – Deux paires d'arbres Cambriens jumeaux $[\mathrm{T}_\circ, \mathrm{T}_\bullet]$ et $[\mathrm{T}'_\circ, \mathrm{T}'_\bullet]$ (gauche), et une paire d'arbres Cambriens jumeaux qui apparaît dans le produit $\mathbb{Q}_{[\mathrm{T}_\circ,\mathrm{T}_\bullet]} \cdot \mathbb{Q}_{[\mathrm{T}'_\circ,\mathrm{T}'_\bullet]}$ (droite).

Par exemple, on peut calculer le produit

$$\mathbb{Q}_{[\,,\,]} \cdot \mathbb{Q}_{[\,,\,]} = \mathbb{G}_{\bar{2}\underline{1}} \cdot \mathbb{G}_{\bar{1}\underline{2}}$$
$$= \mathbb{G}_{\bar{2}\underline{1}\bar{3}\underline{4}} + \mathbb{G}_{\bar{3}\underline{1}\bar{2}\underline{4}} + \mathbb{G}_{\bar{4}\underline{1}\bar{2}\underline{3}} + \mathbb{G}_{\bar{3}\underline{2}\bar{1}\underline{4}} + \mathbb{G}_{\bar{4}\underline{2}\bar{1}\underline{3}} + \mathbb{G}_{\bar{4}\underline{3}\bar{1}\underline{2}}$$
$$= \mathbb{Q}_{[\,,\,]} + \mathbb{Q}_{[\,,\,]} + \mathbb{Q}_{[\,,\,]} + \mathbb{Q}_{[\,,\,]} + \mathbb{Q}_{[\,,\,]} + \mathbb{Q}_{[\,,\,]}.$$

COPRODUIT Le coproduit dans BaxCamb* peut être décrit combinatoirement comme dans la proposition 94. Pour un arbre Cambrien S et un gap γ entre deux sommets consécutifs de S, on note encore $L(\mathrm{S}, \gamma)$ et $R(\mathrm{S}, \gamma)$ les sous-arbres Cambriens gauche et droit de S que l'on obtient en coupant le long du chemin $\lambda(\mathrm{S}, \gamma)$.

Proposition 133. *Pour toute paire d'arbres Cambriens* $[\mathrm{S}_\circ, \mathrm{S}_\bullet]$*, le coproduit* $\triangle\mathbb{Q}_{[\mathrm{S}_\circ,\mathrm{S}_\bullet]}$ *est donné par*

$$\triangle\mathbb{Q}_{[\mathrm{S}_\circ,\mathrm{S}_\bullet]} = \sum_{\gamma} \mathbb{Q}_{[L(\mathrm{S}_\circ,\gamma),L(\mathrm{S}_\bullet,\gamma)]} \otimes \mathbb{Q}_{[R(\mathrm{S}_\circ,\gamma),R(\mathrm{S}_\bullet,\gamma)]},$$

où γ *parcourt tous les gaps entre des positions consécutives de* $[n]$*.*

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 94. □

Par exemple, on peut calculer le coproduit

$$\begin{aligned}
\triangle\mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} &= \triangle\mathbb{G}_{\overline{2}\underline{34}\overline{1}} \\
&= 1 \otimes \mathbb{G}_{\overline{2}\underline{34}\overline{1}} + \mathbb{G}_{\overline{1}} \otimes \mathbb{G}_{\overline{1}\underline{23}} + \mathbb{G}_{\overline{21}} \otimes \mathbb{G}_{\underline{12}} + \mathbb{G}_{\overline{2}\underline{3}\overline{1}} \otimes \mathbb{G}_{\underline{1}} + \mathbb{G}_{\overline{2}\underline{34}\overline{1}} \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} + \mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} \otimes \mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} + \mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} \otimes \mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} \\
&\quad + \mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} \otimes \mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} + \mathbb{Q}_{[\ldots,\ldots]} \otimes 1.
\end{aligned}$$

6.3 ℓ-uplets Cambriens

Ce paragraphe est dédié à une extension naturelle de nos résultats sur les arbres Cambriens jumeaux et l'algèbre Baxter-Cambrienne aux intersections arbitraires de congruences Cambriennes. Comme les résultats présentés ici sont des généralisations directes de ceux des paragraphes 6.1 et 6.2, les preuves de ce paragraphe sont laissées au lecteur.

6.3.1 Combinatoire des ℓ-uplets Cambriens

Comme observé dans la remarque 108, les paires d'arbres Cambriens jumeaux peuvent être vues comme des paires d'arbres de signatures opposées dont l'union est acyclique. Nous étendons cette idée à des signatures arbitraires. Pour un ℓ-uplet $\mathcal{T}$ et $k \in [\ell]$, on note $\mathcal{T}_{[k]}$ le k-ième élément de $\mathcal{T}$.

Définition 134. *Un* ℓ-uplet Cambrien *est un* ℓ*-uplet* $\mathcal{T}$ *d'arbres Cambriens* $\mathcal{T}_{[k]}$ *sur le même ensemble de sommet, et dont l'union forme un graphe acyclique. La* signature *de* $\mathcal{T}$ *est un* ℓ*-uplet de signatures* $\mathcal{E}(\mathcal{T}) := \big[\varepsilon\big(\mathcal{T}_{[1]}\big), \ldots, \varepsilon\big(\mathcal{T}_{[\ell]}\big)\big]$*. On note* $\mathrm{Camb}(\mathcal{E})$ *l'ensemble des* ℓ*-uplets Cambriens de signature* $\mathcal{E}$*.*

Définition 135. *Un* ℓ-uplet Cambrien à niveaux *est un* ℓ*-uplet* $\mathcal{T}$ *d'arbres Cambriens à niveaux* $\mathcal{T}_{[k]}$ *avec comme étiquetages* $p_{[k]}, q_{[k]}$*, et tels que* $q_{[k]} \circ {p_{[k]}}^{-1}$ *soit indépendant de* k*. En d'autres termes, c'est un* ℓ*-uplet Cambrien muni d'une extension linéaire de l'union de ses arbres.*

Par exemple, les paires d'arbres Cambriens jumeaux à niveaux sont des 2-uplets Cambriens à niveaux particuliers. Un 2-uplet Cambrien et un 2-uplet Cambrien à niveaux avec les signatures $[--+--++, ++-+--+]$ sont représentés figure 6.11.

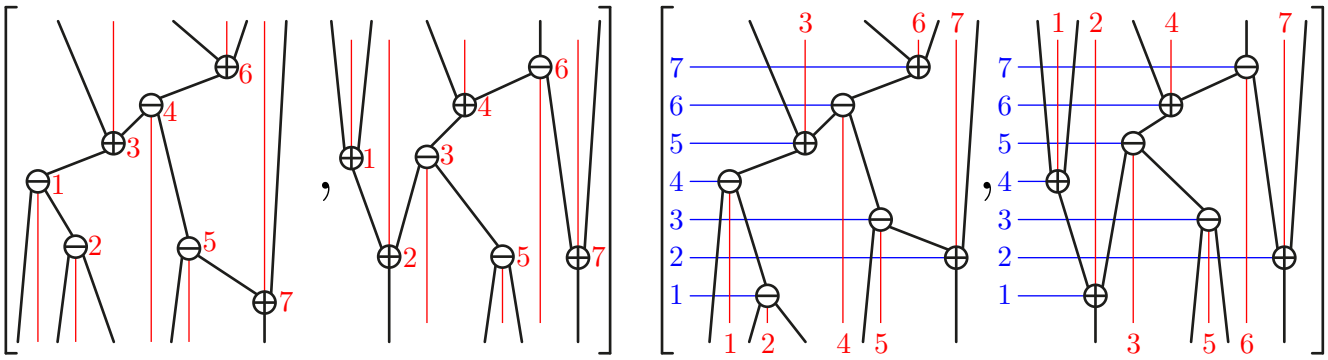


FIGURE 6.11 – Un 2-uplet Cambrien (gauche), et un 2-uplet Cambrien à niveaux (droite).

Définissions un analogue de la correspondance Cambrienne. Pour cela, nous avons besoin de permutations qui ont ℓ signatures différentes. Nous appelons *permutation ℓ-signée* une table de permutation dans laquelle chaque point reçoit un ℓ-uplet de signes. En d'autres termes, c'est un élément du produit en couronne de $\mathfrak{S}$ par $(\mathbb{Z}_2)^\ell$. Par exemple,

$$\underline{\tilde{2}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{\bar{7}}\tilde{5}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{1}\bar{3}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{4}\bar{6}}}$$

est une permutation 2-signée dont les signatures sont respectivement marquées par $\bar{\ }/_$ et $\tilde{\ }/\underset{\sim}{\ }$. Pour une permutation ℓ-signée τ et $k \in [\ell]$, on note $\tau_{[k]}$ la permutation signée où on garde seulement la k-ième signature. Par exemple

$$\underline{\tilde{2}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{\bar{7}}\tilde{5}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{1}\bar{3}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{4}\bar{6}}}_{[1]} = \underline{2}\,\bar{7}\,\underline{5}\,\underline{1}\,\bar{3}\,\underline{4}\,\bar{6} \qquad \text{et} \qquad \underline{\tilde{2}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{\bar{7}}\tilde{5}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{1}\bar{3}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{4}\bar{6}}}_{[2]} = \tilde{2}\,\tilde{7}\,\underset{\sim}{5}\,\tilde{1}\,\underset{\sim}{3}\,\underset{\sim}{4}\,\underset{\sim}{6}.$$

On note $\mathfrak{S}_{\pm\ell}$ l'ensemble de toutes les permutations ℓ-signées et $\mathfrak{S}_{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathfrak{S}^{\mathcal{E}}$) l'ensemble de permutations ℓ-signées avec p-signatures (resp. v-signatures) $\mathcal{E}$. Appliquer la correspondance Cambrienne en parallèle fournit une application des permutations ℓ-signées aux ℓ-uplets Cambriens.

Proposition 136. *L'application Θ_ℓ définie par $\Theta_\ell(\tau) := \big[\Theta\big(\tau_{[1]}\big), \ldots, \Theta\big(\tau_{[\ell]}\big)\big]$ est une bijection entre les permutations ℓ-signées et les ℓ-uplets Cambriens à niveaux.*

L'application $\mathbf{P}_\ell$ définie par $\mathbf{P}_\ell(\tau) := \big[\mathbf{P}\big(\tau_{[1]}\big), \ldots, \mathbf{P}\big(\tau_{[\ell]}\big)\big]$ est une surjection des permutations ℓ-signées aux ℓ-uplets Cambriens.

Par exemple, le 2-uplet Cambrien et le 2-uplet Cambrien à niveaux de la figure 6.11 sont

$$\mathbf{P}_2\left(\underline{\tilde{2}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{\bar{7}}\tilde{5}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{1}\bar{3}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{4}\bar{6}}}\right) \qquad \text{et} \qquad \Theta_2\left(\underline{\tilde{2}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{\bar{7}}\tilde{5}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{1}\bar{3}}}\,\underset{\sim}{\underline{\tilde{4}\bar{6}}}\right).$$

Comme dans les cas Cambrien et Baxter-Cambrien les permutations ayant le même $\mathbf{P}^1$-symbole definissent les classes de congruence Cambrienne sur les permutations ℓ-signées.

Définition 137. *Pour un ℓ-uplet de signatures $\mathcal{E}$, la congruence $\mathcal{E}$-Cambrienne sur $\mathfrak{S}^{\mathcal{E}}$ est l'intersection $\equiv_{\mathcal{E}} := \bigcap_{k\in[\ell]} \equiv_{\mathcal{E}_{[k]}}$ de toutes les congruences $\mathcal{E}_{[k]}$-Cambriennes. En d'autres*

termes, c'est la clôture transitive des règles de réécriture $UacV \equiv_{\mathcal{E}} UcaV$ si pour tout $k \in [\ell]$, il existe $a < b_{[k]} < c$ tel que $(\mathcal{E}_{[k]})_{b_{[k]}} = +$ et $b_{[k]}$ apparaît dans U, ou $(\mathcal{E}_{[k]})_{b_{[k]}} = -$ et $b_{[k]}$ apparaît dans V. La congruence Cambrienne sur $\mathfrak{S}_{\pm^\ell}$ est la relation d'équivalence $\equiv_\ell$ sur toutes les permutations ℓ-signées obtenue comme l'union de toutes les congruences $\mathcal{E}$-Cambriennes.

Par exemple, les classes $[-+--, +---]$-Cambriennes sont représentées dans la figure 6.12.

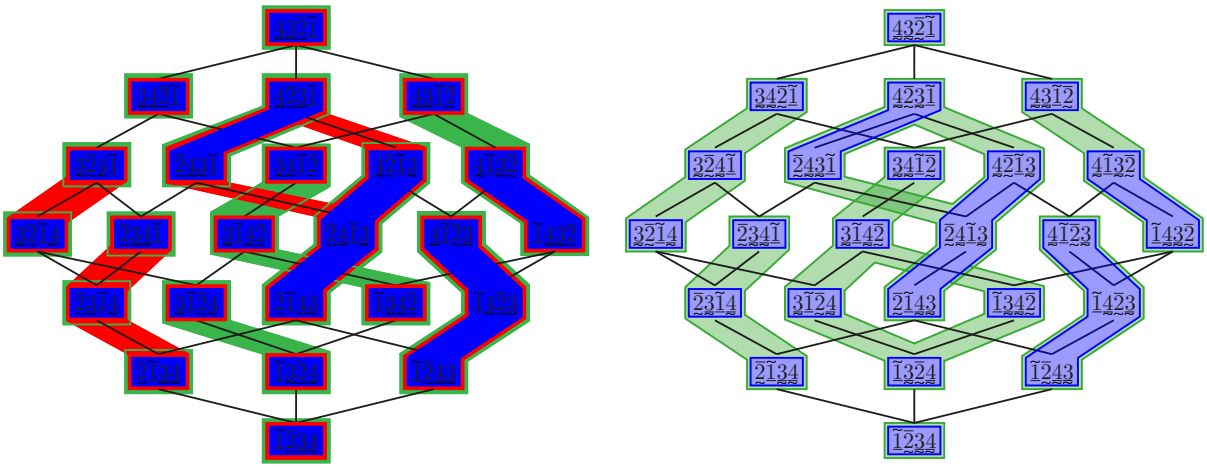


FIGURE 6.12 – (Gauche) Les classes $[-+--, +---]$-Cambriennes (bleu) sont les intersections des classes $(-+--)$-Cambriennes (rouge) et des classes $(+---)$-Cambriennes (vert). (Droite) Les classes de congruence $[-+--, +---]$-Cambriennes (bleu) et booléennes (verte) sur l'ordre faible.

Proposition 138. *Deux permutations ℓ-signées $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}_{\pm^\ell}$ sont congruentes pour la congruence Cambrienne si et seulement si elles ont le même $\mathbf{P}_\ell$-symbole :*

$$\tau \equiv_\ell \tau' \iff \mathbf{P}_\ell(\tau) = \mathbf{P}_\ell(\tau').$$

Proposition 139. *La classe ε-Cambrienne indexée par le ℓ-uplet Cambrien $\mathcal{T}$ est l'intersection des classes $\mathcal{E}_{[k]}$-Cambriennes indexées par $\mathcal{T}_{[k]}$ pour $k \in [\ell]$.*

Présentons maintenant l'opération de rotation sur les ℓ-uplets Cambriens.

Définition 140. *Soit $\mathcal{T}$ un ℓ-uplet Cambrien et considérons une arête $i \to j$ de l'union $\bigcup_{k\in[\ell]} \mathcal{T}_{[k]}$. L'arête $i \to j$ est dite retournable si $i \to j$ est une arête ou bien si i et j sont incomparables dans chaque arbre $\mathcal{T}_{[k]}$ (Notons que $i \to j$ est une arête dans au moins un des arbres puisque elle appartient à leur union). Si $i \to j$ est retournable dans $\mathcal{T}$, sa rotation transforme $\mathcal{T}$ en le ℓ-uplet d'arbres $\mathcal{T}' := \left[\mathcal{T}'_{[1]}, \ldots, \mathcal{T}'_{[\ell]}\right]$, où $\mathcal{T}'_{[k]}$ est obtenu par rotation de $i \to j$ dans $\mathcal{T}_{[k]}$ si possible et $\mathcal{T}'_{[k]} = \mathcal{T}_{[k]}$ sinon.*

Proposition 141. *Retourner une arête retournable $i \to j$ dans un ℓ-uplet Cambrien $\mathcal{T}$ produit un ℓ-uplet Cambrien $\mathcal{T}'$ avec la même signature.*

Considérons le *graphe des rotations croissantes* dont les sommets sont les tuples $\mathcal{E}$-Cambriens et dont les arcs sont les rotations croissantes $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, *i.e.*, pour lesquelles $i < j$ dans la définition 140. Ce graphe est illustré figure 6.13 pour le 2-uplet de signature $\mathcal{E} = [-+--, +---]$.

Proposition 142. *Pour toute relation de couverture $\tau < \tau'$ dans l'ordre faible sur $\mathfrak{S}^{\mathcal{E}}$, on a $\mathbf{P}_\ell(\tau) = \mathbf{P}_\ell(\tau')$ ou bien $\mathbf{P}_\ell(\tau) \to \mathbf{P}_\ell(\tau')$ dans le graphe des rotations croissantes.*

Il suit que le graphe des rotations croissantes sur les uplets $\mathcal{E}$-Cambriens est acyclique. Appelons *poset $\mathcal{E}$-Cambrien* sa clôture transitive. En d'autres termes, la proposition précédente dit que l'application $\mathbf{P}_\ell$ définit un homomorphisme de poset de l'ordre faible sur $\mathfrak{S}^{\mathcal{E}}$ au poset $\mathcal{E}$-Cambrien. Cet homomorphisme est en fait un homomorphisme de treillis.

Proposition 143. *Le poset $\mathcal{E}$-Cambrien est un treillis quotient de l'ordre faible sur $\mathfrak{S}^{\mathcal{E}}$.*

6.3.2 Algèbre de Hopf des ℓ-uplets Cambriens

Dans ce paragraphe, nous construisons une algèbre de Hopf indexée par les ℓ-uplets Cambriens, de la même façon que l'algèbre Baxter-Cambrienne. Pour les mêmes raisons qui ont amené à considérer l'algèbre de Hopf $\mathsf{FQSym}_\pm$ sur les permutations signées lorsque l'on a construit l'algèbre de Hopf Cambrienne pour garder une trace de la signature, nous avons maintenant besoin de considérer une extension naturelle de FQSym sur les permutations ℓ-signées pour garder une trace des ℓ signatures de $\mathcal{E}$.

Le *produit de mélange décalé* $\tau \,⧢\, \tau'$ (resp. *produit de convolution* $\tau \star \tau'$) de deux permutations ℓ-signées τ, τ' est encore défini comme le produit de mélange décalé (resp. produit de convolution) où les signes voyagent avec leurs valeurs (resp. restent à leurs positions). Quand $\ell = 2$ et les deux signatures sont respectivement notées $^{-}/_{-}$ et $^{\sim}/_{\sim}$, nous avons par exemple

$$\tilde{\bar{1}}\underline{\tilde{2}} \,⧢\, \underset{\sim}{2}\tilde{3}\underset{\sim}{1} = \{\tilde{\bar{1}}\underset{\sim}{2}\underset{\sim}{4}\tilde{5}\underset{\sim}{3}, \tilde{\bar{1}}\underset{\sim}{4}\tilde{2}\tilde{5}\underset{\sim}{3}, \tilde{\bar{1}}\underset{\sim}{4}\tilde{5}\underset{\sim}{3}\tilde{2}, \underset{\sim}{4}\tilde{\bar{1}}\tilde{2}\tilde{5}\underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{4}\tilde{\bar{1}}\tilde{5}\tilde{2}\underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{4}\tilde{\bar{1}}\tilde{5}\underset{\sim}{3}\tilde{2}, \underset{\sim}{4}\tilde{5}\tilde{\bar{1}}\tilde{2}\underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{4}\tilde{5}\tilde{\bar{1}}\underset{\sim}{3}\tilde{2}, \underset{\sim}{4}\tilde{5}\underset{\sim}{3}\tilde{\bar{1}}\tilde{2}\}$$

$$\tilde{\bar{1}}\underline{\tilde{2}} \star \underset{\sim}{2}\tilde{3}\underset{\sim}{1} = \{\tilde{\bar{1}}\underset{\sim}{2}\underset{\sim}{4}\tilde{5}\underset{\sim}{3}, \tilde{\bar{1}}\tilde{3}\underset{\sim}{4}\tilde{5}\tilde{2}, \tilde{\bar{1}}\tilde{4}\underset{\sim}{3}\tilde{5}\tilde{2}, \tilde{\bar{1}}\tilde{5}\underset{\sim}{3}\tilde{4}\tilde{2}, \tilde{2}\tilde{3}\underset{\sim}{4}\tilde{5}\tilde{1}, \tilde{2}\tilde{4}\underset{\sim}{3}\tilde{5}\tilde{1}, \tilde{2}\tilde{5}\underset{\sim}{3}\tilde{4}\tilde{1}, \tilde{3}\tilde{4}\underset{\sim}{2}\tilde{5}\tilde{1}, \tilde{3}\tilde{5}\underset{\sim}{2}\tilde{4}\tilde{1}, \tilde{4}\tilde{5}\underset{\sim}{2}\tilde{3}\tilde{1}\}.$$

On note $\mathsf{FQSym}_{\pm^\ell}$ l'algèbre de Hopf dont la base $(F_\tau)_{\tau \in \mathfrak{S}_{\pm^\ell}}$ est indexée par les permutations ℓ-signées et dont le produit et le coproduit sont définis par

$$\mathbb{F}_\tau \cdot \mathbb{F}_{\tau'} = \sum_{\sigma \in \tau \,⧢\, \tau'} \mathbb{F}_\sigma \qquad \text{et} \qquad \triangle \mathbb{F}_\sigma = \sum_{\sigma \in \tau \star \tau'} \mathbb{F}_\tau \otimes \mathbb{F}_{\tau'}.$$

Remarque 144 (Algèbre Cambrienne *vs.* algèbre des arbre binaires G-colorés)**.** Vérifier que ce produit et ce coproduit produisent bien une algèbre de Hopf est fait de la même façon

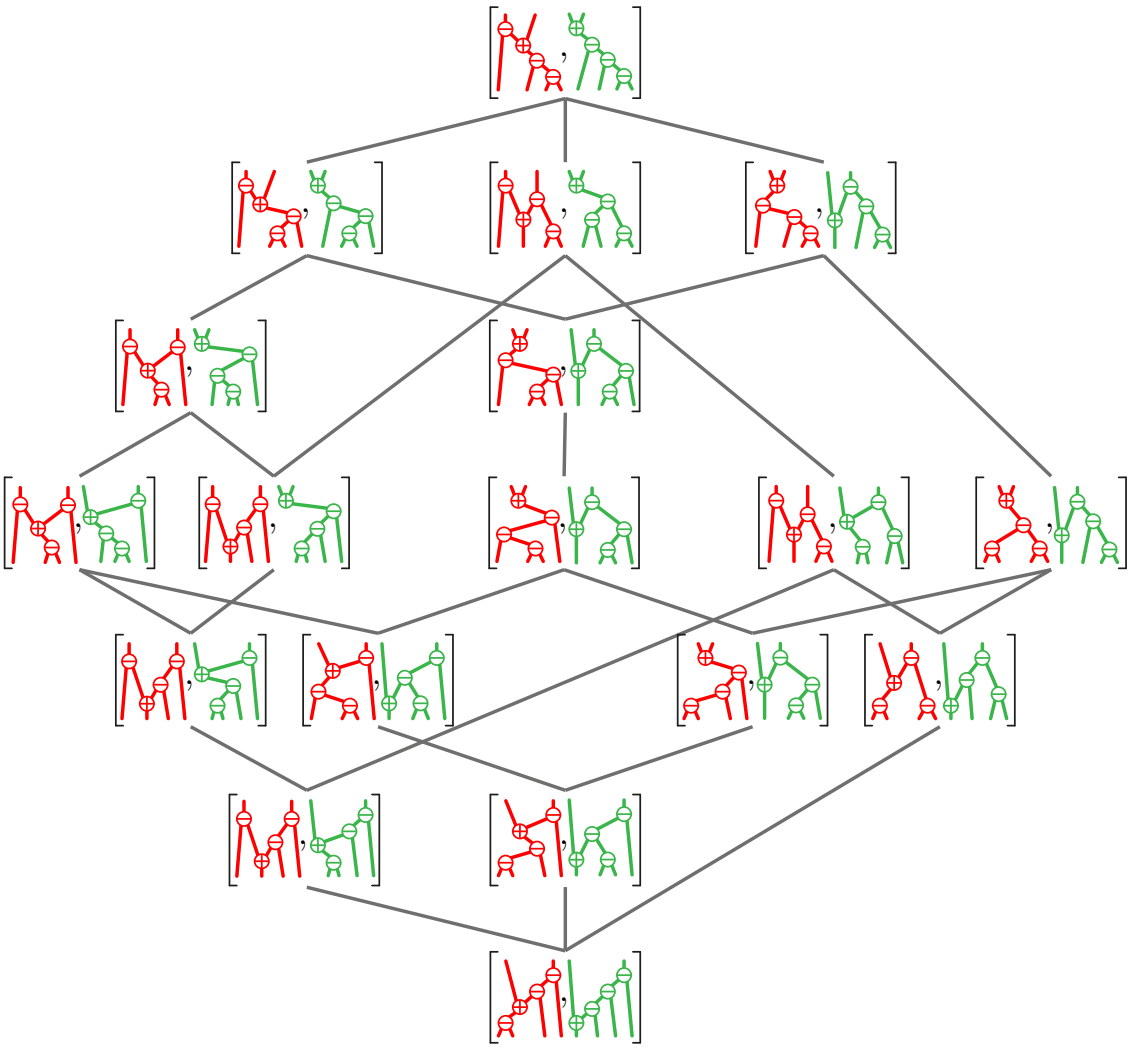


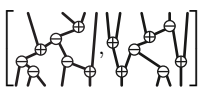
FIGURE 6.13 – Le treillis $[-+--, +---]$-Cambrien sur les uplets Cambriens. Voir aussi la figure 6.12.

que dans les autres paragraphes. On peut même étendre ce raisonnement à une algèbre de Hopf FQSym_G sur des permutations G-colorées par un semigroupe arbitraire G, voir *e.g.* [NT10, BH08, BH06]. Dans ces articles, les auteurs utilisent cette algèbre FQSym_G pour définir des sous-algèbres G-colorées à partir de relations de congruence sur les permutations, voir en particulier [BH06]. On peut noter que notre construction de l'algèbre Cambrienne et de l'algèbre des uplets Cambriens diffèrent vraiment des constructions de [BH06] car nos relations de congruence dépendent des signes, tandis que la leur n'en dépend pas.

On note Camb_ℓ le sous-espace vectoriel de $\mathsf{FQSym}_{\pm\ell}$ généré par les éléments

$$\mathbb{P}_{\mathcal{T}} := \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_{\pm\ell} \\ \mathbf{P}_\ell(\tau) = \mathcal{T}}} \mathbb{F}_\tau = \sum_{\tau \in \mathcal{L}\left(\bigcup_{k \in [\ell]} \mathcal{T}_{[k]}\right)} \mathbb{F}_\tau,$$

pour tous les ℓ-uplets Cambriens $\mathcal{T}$. Par exemple, pour le ℓ-uplet Cambrien de la figure 6.11 (gauche), nous avons

$\mathbb{P}$  $= \mathbb{F}_{\underline{21}\bar{7}\underline{5}\bar{3}\underline{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\bar{2}\bar{7}\underline{15}\bar{3}\underline{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\bar{2}\bar{7}\underline{5}\bar{1}\underline{3}\bar{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\bar{7}\underline{21}\bar{5}\bar{3}\underline{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\bar{7}\underline{2}\bar{5}\bar{1}\underline{3}\bar{4}\bar{6}} + \mathbb{F}_{\bar{7}\bar{5}\underline{21}\bar{3}\underline{4}\bar{6}}.$

Théorème 145. Camb_ℓ *est une sous-algèbre de Hopf de* $\mathsf{FQSym}_{\pm\ell}$.

Comme pour l'algèbre Cambrienne, le produit et le coproduit des éléments de la base $\mathbb{P}$ de l'algèbre ℓ-Cambrienne Camb_ℓ peut être décrit en terme d'opérations combinatoire sur les ℓ-uplets Cambriens.

PRODUIT Le produit dans l'algèbre ℓ-Cambrienne Camb_ℓ peut être décrit en termes d'intervalles des treillis ℓ-Cambriens. On note $\mathcal{E}\mathcal{E}' := [\mathcal{E}_{[1]}\mathcal{E}'_{[1]}, \ldots, \mathcal{E}_{[\ell]}\mathcal{E}'_{[\ell]}]$ la concaténation composantes à composantes de deux ℓ-uplets de signatures $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$. De la même façon, pour deux ℓ-uplets Cambriens $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$, on définit

$$\mathcal{T} \nearrow \bar{\mathcal{T}}' := \left[\mathcal{T}_{[1]} \nearrow \bar{\mathcal{T}}'_{[1]}, \ldots, \mathcal{T}_{[\ell]} \nearrow \bar{\mathcal{T}}'_{[\ell]}\right] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T} \nwarrow \bar{\mathcal{T}}' := \left[\mathcal{T}_{[1]} \nwarrow \bar{\mathcal{T}}'_{[1]}, \ldots, \mathcal{T}_{[\ell]} \nwarrow \bar{\mathcal{T}}'_{[\ell]}\right].$$

Proposition 146. *Pour toute paire de ℓ-uplets Cambriens $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, le produit $\mathbb{P}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathcal{T}'}$ est donné par*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathcal{T}'} = \sum_{\mathcal{S}} \mathbb{P}_{\mathcal{S}},$$

où $\mathcal{S}$ parcourt l'intervalle entre $\mathcal{T} \nearrow \bar{\mathcal{T}}'$ et $\mathcal{T} \nwarrow \bar{\mathcal{T}}'$ dans le treillis $\mathcal{E}(\mathcal{T})\mathcal{E}(\mathcal{T}')$-Cambrien.

Remarque 147 (Bases multiplicatives)**.** De la même façon que sont définies les bases multiplicatives dans le paragraphe 5.2 et la remarque 129, les bases $\mathbb{E}^{\mathcal{T}}$ et $\mathbb{H}^{\mathcal{T}}$ définies par

$$\mathbb{E}^{\mathcal{T}} := \sum_{\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'} \mathbb{P}_{\mathcal{T}'} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{H}^{\mathcal{T}} := \sum_{\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}} \mathbb{P}_{\mathcal{T}'}$$

sont multiplicatives car

$$\mathbb{E}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{T}'} = \mathbb{E}^{\mathcal{T} \nearrow \bar{\mathcal{T}}'} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{H}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbb{H}^{\mathcal{T}'} = \mathbb{H}^{\mathcal{T} \nwarrow \bar{\mathcal{T}}'}.$$

Les éléments $\mathbb{E}$-indécomposables sont précisément les ℓ-uplets Cambriens $\mathcal{T}$ tels que toutes les extensions linéaires de l'union $\bigcup_{k\in[\ell]} \mathcal{T}_{[k]}$ sont indécomposables. En particulier, $\mathcal{T}$ est $\mathbb{E}$-indécomposable dès qu'un des $\mathcal{T}_{[k]}$ est $\mathbb{E}$-indécomposable, mais cette condition n'est pas nécessaire. Les uplets $\mathcal{E}$-Cambriens $\mathbb{E}$-indécomposables forment un idéal du treillis $\mathcal{E}$-Cambrien, mais cet idéal n'est pas principal.

$\boxed{\text{Coproduit}}$ Une *coupe* γ d'un ℓ-uplet Cambrien $\mathcal{S}$ est une coupe de l'union $\bigcup_{k\in[\ell]} \mathcal{S}_{[k]}$. Elle définit une coupe $\gamma_{[k]}$ sur chaque arbre Cambrien $\mathcal{S}_{[k]}$. On note

$$A(\mathcal{S},\gamma) := A(\mathcal{S}_{[1]},\gamma_{[1]}) \times \cdots \times A(\mathcal{S}_{[\ell]},\gamma_{[\ell]}) \qquad \text{et} \qquad B(\mathcal{S},\gamma) := B(\mathcal{S}_{[1]},\gamma_{[1]}) \times \cdots \times B(\mathcal{S}_{[\ell]},\gamma_{[\ell]}).$$

Proposition 148. *Pour tout ℓ-uplet Cambrien $\mathcal{S}$, le coproduit $\triangle\mathbb{P}_{\mathcal{S}}$ est donné par*

$$\triangle\mathbb{P}_{\mathcal{S}} = \sum_{\gamma} \Big(\sum_{\mathcal{B}\in B(\mathcal{S},\gamma)} \mathbb{P}_{\mathcal{B}} \Big) \otimes \Big(\sum_{\mathcal{A}\in A(\mathcal{S},\gamma)} \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \Big),$$

où γ parcour- toutes les coupes de $\mathcal{S}$.

6.3.3 Dual de l'algèbre des ℓ-uplets Cambriens

Nous considérons maintenant l'algèbre de Hopf duale de Camb_ℓ. Comme précédemment, le résultat suivant est automatique à partir du théorème 145.

Théorème 149. *Le dual gradué Camb_ℓ^* de l'algèbre ℓ-Cambrienne est isomorphe à l'image de $\mathsf{FQSym}_{\pm\ell}^*$ sous la projection canonique*

$$\pi : \mathbb{C}\langle A\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle A\rangle / \equiv_\ell,$$

où $\equiv_\ell$ est la congruence ℓ-Cambrienne. La base duale $\mathbb{Q}_{\mathcal{T}}$ de $\mathbb{P}_{\mathcal{T}}$ est exprimée comme $\mathbb{Q}_{\mathcal{T}} = \pi(\mathbb{G}_\tau)$, où τ est une des extensions linéaires de $\bigcup_{k\in[\ell]} \mathcal{T}_{[k]}$.

Décrivons maintenant le produit et le coproduit dans Camb_ℓ^* en termes d'opérations combinatoires sur les ℓ-uplets Cambriens. Nous utilisons les définitions et les notations qui ont été introduites dans l paragraphe 5.1.3.

$\boxed{\text{Produit}}$ Le produit dans Camb_ℓ^* peut être décrit en utilisant les gaps et les laminages de la même façon que dans la proposition 93. Pour deux arbres Cambriens T et T′ et un mélange s de leurs signatures $\varepsilon(\mathrm{T})$ et $\varepsilon(\mathrm{T}')$, nous notons encore $\mathrm{T}\,{}_s\backslash\mathrm{T}'$ l'arbre décrit dans le paragraphe 5.1.3. Pour deux ℓ-uplets Cambriens $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, avec des arbres de tailles respectives n et n', et pour un mélange s de $[n]$ et $[n']$, on écrit

$$\mathcal{T}\,{}_s\backslash\mathcal{T}' := \big[\mathcal{T}_{[1]}\,{}_s\backslash\mathcal{T}'_{[1]}, \ldots, \mathcal{T}_{[\ell]}\,{}_s\backslash\mathcal{T}'_{[\ell]}\big],$$

où on voit s comme un mélange des signatures $\varepsilon(\mathcal{T}_{[k]})$ et $\varepsilon(\mathcal{T}'_{[k]})$.

Proposition 150. *Pour toute paire de ℓ-uplets Cambriens $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$, le produit $\mathbb{Q}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbb{Q}_{\mathcal{T}'}$ est donné par*

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbb{Q}_{\mathcal{T}'} = \sum_{s} \mathbb{Q}_{\mathcal{T}\, s \backslash \mathcal{T}'},$$

où s parcourt tous les mélanges de $[n]$ et $[n']$ (où n et n' sont les tailles respectives des arbres de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$).

$\boxed{\text{Coproduit}}$ Le coproduit dans Camb_ℓ^* peut être décrit combinatoirement comme dans la proposition 94. Pour un ℓ-uplet Cambrien $\mathcal{S}$, avec des arbres de taille n, et un gap $\gamma \in \{0, \ldots, n\}$, on définit

$$L(\mathcal{S}, \gamma) = \big[L(\mathcal{T}_{[1]}, \gamma), \ldots, L(\mathcal{T}_{[\ell]}, \gamma)\big] \qquad \text{et} \qquad R(\mathcal{S}, \gamma) = \big[R(\mathcal{T}_{[1]}, \gamma), \ldots, R(\mathcal{T}_{[\ell]}, \gamma)\big].$$

Proposition 151. *Pour tout ℓ-uplet Cambrien $\mathcal{S}$, le coproduit $\triangle \mathbb{Q}_{\mathcal{S}}$ est donné par*

$$\triangle \mathbb{Q}_{\mathcal{S}} = \sum_{\gamma} \mathbb{Q}_{L(\mathcal{S},\gamma)} \otimes \mathbb{Q}_{R(\mathcal{S},\gamma)},$$

où γ parcourt tous les gaps entre des positions consécutives dans $[n]$ (où n est la taille des arbres de $\mathcal{T}$).

Chapitre 7

L'algèbre de Hopf Schröder-Cambrienne

7.1 Arbres Schröder-Cambriens

Nous avons déjà insisté sur le fait que les bases des algèbres de C. Malvenuto et C. Reutenauer sur les permutations, de J.-L. Loday et M. Ronco sur les arbres binaires, et de l'algèbre des descentes de L. Solomon correspondent respectivement aux sommets des permutoèdres, des associaèdres, et des cubes. Dans [Cha00], F. Chapoton a généralisé ces algèbres à trois algèbres de Hopf avec des bases indexées par les faces des permutoèdres, des associaèdres, et des cubes. Pour conclure cette partie, nous montrons que les constructions de F. Chapoton s'étendent au cadre Cambrien. Nous obtenons l'algèbre de Hopf Schröder-Cambrienne avec une base indexée par toutes les faces de tous les associaèdre de C. Hohlweg et C. Lange. Nous observons au passage des propriétés combinatoires intéressantes des arbres Schröder-Cambriens, qui correspondent aux faces de ces associaèdres.

7.1.1 Arbres Schröder-Cambriens

Les faces de l'associaèdre de dimension n de J.-L. Loday correspondent aux *arbres de Schröder* avec $n+1$ feuilles, *i.e.,* des arbres dont les nœuds internes ont au moins 2 enfants. Ces arbres sont définis dans [LP13] comme "épines" de dissections de polygones, voir remarque 154.

Définition 152. *Considérons une signature $\varepsilon \in \pm^n$ de $[n]$. Pour $X \subseteq [n]$, on note $X^+ := \{x \in X \mid \varepsilon_x = +\}$ et $X^- := \{x \in X \mid \varepsilon_x = -\}$. Un* arbre Schröder ε-Cambrien *est un arbre dirigé T avec un ensemble de nœud V, muni d'un étiquetage des nœuds $p : \mathrm{V} \to 2^{[n]} \smallsetminus \varnothing$ tel que*

(i) les étiquettes de T partitionnent $[n]$, i.e., $v \neq w \in \mathrm{V} \Rightarrow p(v) \cap p(w) = \varnothing$ et $\bigcup_{v \in \mathrm{V}} p(v) = [n]$;

(ii) chaque noeud $v \in \mathrm{V}$ a un sous-arbre entrant (resp. sortant) $\mathrm{T}_{v,I}$ pour chaque intervalle I de $[n] \smallsetminus p(v)^-$ (resp. de $[n] \smallsetminus p(v)^+$) et toutes les étiquettes de $\mathrm{T}_{v,I}$ sont des

sous-ensembles de I.

Pour $p \geq 0$ et $\varepsilon \in \pm^n$, on note $\mathrm{SchrCamb}^{\geq p}(\varepsilon)$ *l'ensemble des arbres Schröder ε-Cambriens avec au plus $n-p$ nœuds internes, et on définit* $\mathrm{SchrCamb}^{\geq p}(n) := \bigsqcup_{\varepsilon \in \pm^n} \mathrm{SchrCamb}^{\geq p}(\varepsilon)$ *et* $\mathrm{SchrCamb}^{\geq p} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{SchrCamb}^{\geq p}(n)$. *Ces arbres correspondent aux faces de l'associaèdre de dimension au moins p. Finalement, on omet simplement l'exposant $^{\geq p}$ de la notation précédente pour noter les arbres Schröder-Cambriens avec un nombre arbitraire de nœuds internes. Cette définition définit une filtration*

$$\mathrm{SchrCamb} = \bigcup_{p \geq 1} \mathrm{SchrCamb}^{\geq p} \qquad \textit{avec} \qquad \mathrm{SchrCamb}^{\geq 0} \supset \mathrm{SchrCamb}^{\geq 1} \supset \dots$$

Définition 153. *Un arbre Schröder ε-Cambrian de niveau k est un arbre orienté avec un ensemble de nœuds* V*, muni de deux étiquetages $p : \mathrm{V} \to 2^{[n]} \setminus \varnothing$ et $q : \mathrm{V} \to [k]$ qui définissent respectivement un arbre Schröder ε-Cambrien et un arbre croissant (ce qui veut dire que q est surjectif et $v \to w$ dans* T *implique $q(v) < q(w)$).*

Un arbre Schröder-Cambrien et un arbre Schröder-Cambrien à 3-niveau sont représentés dans la figure 7.1. Notons que chaque niveau d'un arbre Schröder ε-Cambrien à k-niveau peut contenir plus d'un nœud.

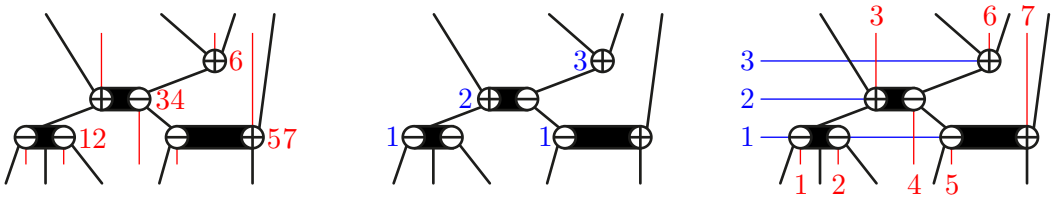


FIGURE 7.1 – Un arbre Schröder-Cambrien (gauche), un arbre croissant (milieu), et un arbre Schröder-Cambrien à 3-niveau (droite).

Remarque 154 (Épines de dissections)**.** Exactement de la même façon que les arbres ε-Cambriens correspondent aux triangulations du $(n+2)$-gone P^ε (voir remarque 22), les arbres Schröder ε-Cambriens correspondent aux dissections de P^ε. Voir la figure 7.2 et se reporter à [LP13] pour plus de détails.

La remarque 154 implique immédiatement que le nombre d'arbres Schröder ε-Cambriens avec k nœuds est le nombre de faces de dimension $n-k$ de l'associaèdre, et est donc indépendant de la signature ε. Une preuve alternative basée sur les arbres de génération est mentionnée remarque 172.

Proposition 155. *Pour toute signature $\varepsilon \in \pm^n$, le nombre d'arbres Schröder ε-Cambriens avec k nœuds internes est*

$$\frac{1}{k+1}\binom{n+2+k}{k+1}\binom{n-1}{k+1},$$

voir [OEI10, A033282].

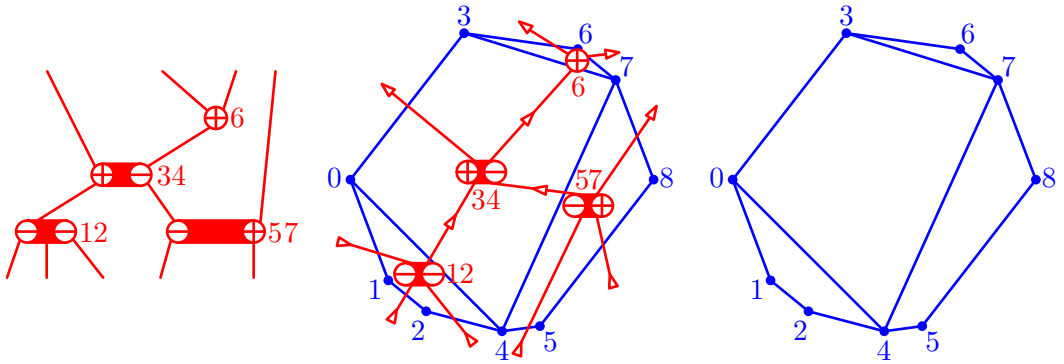


FIGURE 7.2 – Arbres Schröder-Cambriens (gauche) et dissections (droite) sont duals l'un de l'autre (milieu).

7.1.2 Correspondance Schröder-Cambrienne

Définissons maintenant un analogue de la correspondance Cambrienne et du **P**-symbole Cambrien, qui enverra les faces des permutoèdres sur les faces des associaèdres de C. Hohlweg et C. Lange. On rappelle que les faces de dimension $(n-k)$ du permutoèdre de dimension n correspondent aux *surjections* de $[n]$ vers $[k]$, ou de façon équivalente aux *partitions ordonnées* de $[n]$ en k parts. Cette relation est illustrée figure 7.3. On note (abusivement) π^{-1} la partition ordonnée correspondant à une surjection $\pi : [n] \to [k]$, *i.e.,* donnée par $\pi^{-1} := \pi^{-1}(\{1\}) \,|\, \pi^{-1}(\{2\}) \,|\, \cdots \,|\, \pi^{-1}(\{k\})$. À l'inverse, on note (abusivement) λ^{-1} la surjection correspondant a une partition ordonnée $\lambda = \lambda_1|\lambda_2|\cdots|\lambda_k$, *i.e.,* telle que chaque i appartient à la part $\lambda_{\lambda^{-1}(i)}$. On représente graphiquement une surjection $\pi : [n] \to [k]$ par une table $(k \times n)$ avec un point à la ligne $\pi(j)$ pour chaque colonne j. Par conséquent, on représente une partition ordonnée $\lambda := \lambda_1|\cdots|\lambda_k$ de $[n]$ par une table $(k \times n)$ avec un point dans la ligne i et dans la colonne j pour chaque $j \in \lambda_i$. Voir la figure 7.4 (gauche). Dans cette partie, nous travaillons avec des partitions ordonnées plutôt qu'avec des surjections pour mieux coller à la présentation des paragraphes précédents : les permutations de $[n]$ utilisées dans les paragraphes précédents doivent être vues comme des partitions ordonnées de $[n]$ en n parts. On note $\mathfrak{P}_n^{\geq p}$ l'ensemble des partitions ordonnées de $[n]$ en au plus $n-p$ parts, et on fixe $\mathfrak{P}^{\geq p} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{P}_n^{\geq p}$. Cet ensemble correspond aux faces du permutoèdre de dimension au moins p. Comme précédemment, on omet l'exposant $^{\geq p}$ dans ces notations pour oublier la restriction de dimension.

Une *partition ordonnée signée* est une table de partition ordonnée dans laquelle chaque point reçoit un signe $+$ ou $-$. Pour une signature $\varepsilon \in \pm^n$, on note $\mathfrak{P}_\varepsilon^{\geq p}$ l'ensemble des partitions ordonnées de $[n]$ en au plus $n-p$ parts signées par ε, et on définit

$$\mathfrak{P}_\pm^{\geq p} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N},\varepsilon\in\pm^n} \mathfrak{P}_\varepsilon^{\geq p}.$$

On omet encore l'exposant $^{\geq p}$ dans la notation précédente pour désigner les partitions or-

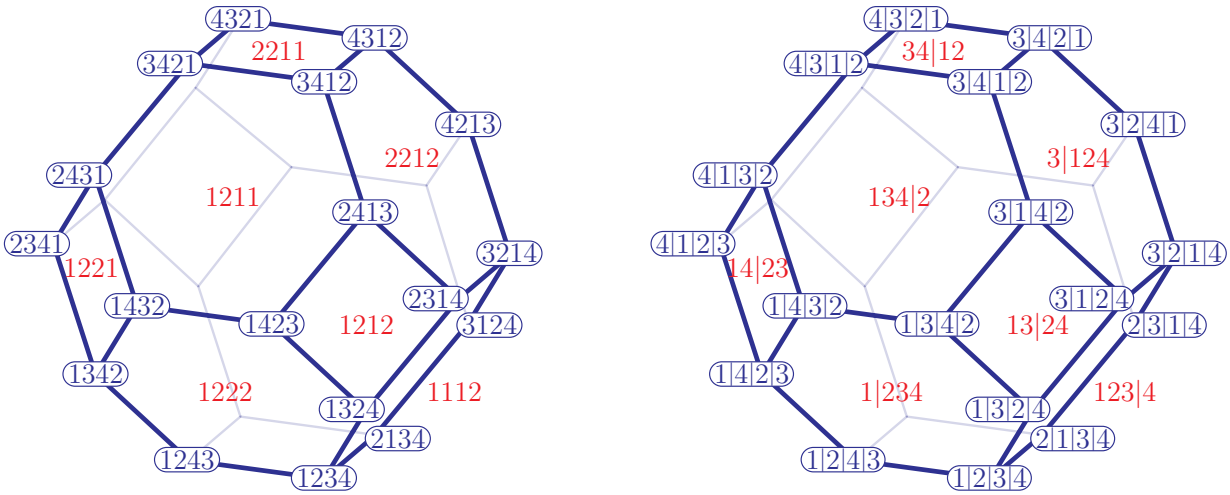


FIGURE 7.3 – Le permutoèdre de dimension 3 $\mathsf{Perm}([4])$. Ses faces de dimension $(4-k)$ correspondent de façon équivalente aux surjections de $[4]$ vers $[k]$ (gauche), ou aux partitions ordonnées de $[4]$ en k parts (droite). Les sommets sont en bleu et les facettes en rouge. Le lecteur est invité à étiqueter les arêtes en accord avec cette convention.

données signées avec un nombre arbitraire de parts. Ce qui nous donne encore une filtration

$$\mathfrak{P}_{\pm} = \bigcup_{p\geq 1} \mathfrak{P}_{\pm}^{\geq p} \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{P}_{\pm}^{\geq 0} \supset \mathfrak{P}_{\pm}^{\geq 1} \supset \dots$$

Étant donnée une telle partition ordonnée signée λ, on construit un arbre Schröder-Cambrien à niveaux $\Theta^{\star}(\lambda)$ de la façon suivante. Comme précalcul, on calcule la table de λ, on dessine un mur vertical sous les points négatifs et au-dessus des points positifs, et on connecte en nœuds les points situés au même niveau n'étant pas séparés par un mur. Notons qu'il est possible d'obtenir plusieurs nœuds par niveau. On connecte ensuite les nœuds de bas en haut de la façon suivante. La procédure commence avec une branche entrante entre chaque couple de valeurs négatives consécutives. À chaque niveau, chaque nœud v (ensemble connecté de points) rassemble toutes les branches dans la région située en dessous et visibles depuis v (*i.e.,* n'étant pas cachées par un mur vertical) et produit une branche dans chaque région située au-dessus et visible depuis v. Cette procédure finit avec une branche sortante entre chaque couple de valeurs positives consécutives. La figure 7.4 illustre cette procédure sur la partition ordonnée signée $\underline{125}\overline{7}|\overline{3}\underline{4}|\overline{6}$.

Proposition 156 ([LP13]). *L'application $\Theta^{\star}$ est une bijection entre les partitions ordonnées signées et les arbres Schröder-Cambriens à niveaux.*

On définit le $\mathbf{P}^{\star}$-symbole d'une partition ordonnée signée λ comme l'arbre Schröder-Cambrien $\mathbf{P}^{\star}(\lambda)$ défini par $\Theta^{\star}(\lambda)$. Notons qu'une partition ordonnée de $[n]$ en k parts est envoyée sur un arbre Schröder-Cambrien ayant au moins k nœuds internes, car certains

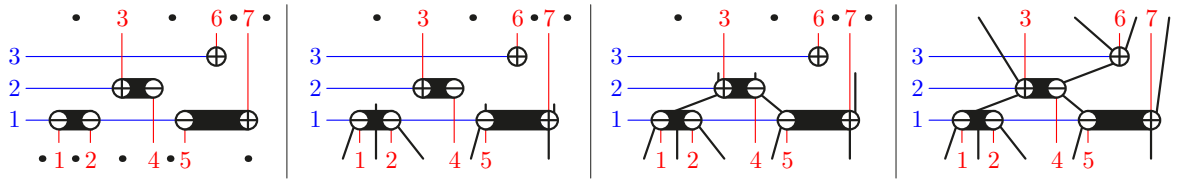


FIGURE 7.4 – L'algorithme d'insertion sur la partition ordonnée signée $\underline{125}\overline{7}|\overline{3}\underline{4}|\overline{6}$.

niveaux peuvent être séparés en plusieurs nœuds. En d'autre termes, les fibres du $\mathbf{P}^\star$-symbole Schröder-Cambrien respectent les filtrations $(\mathfrak{P}_\pm^{\geq p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{SchrCamb}^{\geq p})_{p\in\mathbb{N}}$, dans le sens où

$$(\mathbf{P}^\star)^{-1}\big(\mathrm{SchrCamb}^{\geq p}\big) \subseteq \mathfrak{P}_\pm^{\geq p}.$$

La caractérisation suivante des fibres de l'application $\mathbf{P}^\star$ est immédiate à partir de la description de la correspondance Schröder-Cambrienne. Soit un arbre Schröder-Cambrien T, on écrit que $i \to j$ est dans T si le nœud de T contenant i est en dessous du nœud de T contenant j, et $i \sim j$ dans T si i et j appartiennent au même nœud de T. On dit que i et j sont *incomparables* dans T quand $i \not\to j$, $j \not\to i$, et $i \not\sim j$.

Proposition 157. *Pour tout arbre Schröder ε-Cambrien* T *et toute partition ordonnée signée $\lambda \in \mathfrak{P}_\varepsilon$, on a $\mathbf{P}^\star(\lambda) = \mathrm{T}$ si et seulement si $i \sim j$ dans* T *implique $\lambda^{-1}(i) = \lambda^{-1}(j)$ et $i \to j$ dans* T *implique $\lambda^{-1}(i) < \lambda^{-1}(j)$. En d'autre termes, λ est obtenue à partir d'une extension linéaire de* T *en fusionnant des parts qui étiquettent des sommets incomparables de* T.

Exemple 158. Quand $\varepsilon = (+)^n$, l'arbre Schröder-Cambrien $\mathbf{P}^\star(\lambda)$ est l'arbre croissant de λ^{-1}. Ici, l'*arbre croissant* $\mathrm{IT}(\pi)$ d'une surjection $\pi = \pi^{(1)}1\pi^{(2)}1\ldots1\pi^{(p)}$ est défini récursivement en greffant les arbres croissants $\mathrm{IT}(\pi^{(1)}),\ldots,\mathrm{IT}(\pi^{(p)})$ de gauche à droite sur une racine située en bas et étiquetée par 1. Similairement, quand $\varepsilon = (-)^n$, l'arbre Schröder-Cambrien $\mathbf{P}^\star(\lambda)$ est l'arbre décroissant de λ^{-1}. Ici, l'*arbre décroissant* $\mathrm{DT}(\pi)$ d'une surjection $\pi = \pi^{(1)}k\pi^{(2)}k\ldots k\pi^{(p)}$ de $[n]$ vers $[k]$ est défini récursivement en greffant les arbres décroissants $\mathrm{DT}(\pi^{(1)}),\ldots,\mathrm{DT}(\pi^{(p)})$ de gauche à droite sur une racine située en haut étiquetée par k. La figure 7.5 illustre ce fait sur la partition ordonnée $1257|34|6$.

Remarque 159 (Correspondance Schröder-Cambrienne sur les dissections)**.** De la même façon que pour la remarque 29, nous pouvons décrire l'application $\mathbf{P}^\star$ sur les dissections du polygone P^ε. Précisément, la dissection duale de l'arbre Schröder-Cambrien $\mathbf{P}^\star(\lambda)$ est l'union des chemins $\pi_0,\ldots,\pi_n$ où π_i est le chemin entre les sommets 0 et $n+1$ de P^ε passant par les sommets dans la différence symétrique $\varepsilon^{-1}(-) \triangle \big(\bigcup_{j\in[i]} \lambda_j\big)$.

7.1.3 Congruence Schröder-Cambrienne

Comme la congruence Cambrienne, les fibres du $\mathbf{P}^\star$-symbole Schröder-Cambrien définissent une relation de congruence sur les partitions ordonnées signées, qui peut être exprimée par des règles de réécriture.

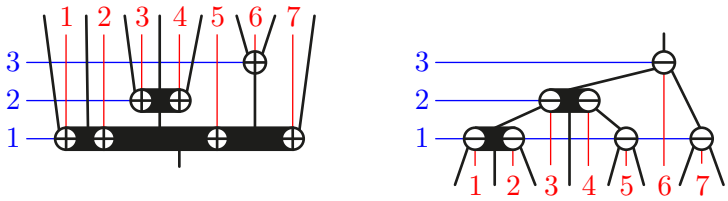


FIGURE 7.5 – La procédure d'insertion sur la partition ordonnée 1257|34|6 produit un arbre de Schröder croissant quand les signatures sont constantes positives (à gauche) et un arbre de Schröder décroissant quand la signature est constante négative (à droite).

Définition 160. *Pour une signature $\varepsilon \in \pm^n$, la congruence Schröder ε-Cambrienne est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{P}_\varepsilon$ définie comme la cloture transitive des règles de réécriture*

$$U|\mathbf{a}|\mathbf{c}|V \equiv^\star_\varepsilon U|\mathbf{ac}|V \equiv^\star_\varepsilon U|\mathbf{c}|\mathbf{a}|V,$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ sont des parts et U, V sont des suites de parts de $[n]$, et il existe $\mathbf{a} < b < \mathbf{c}$ tel que $\varepsilon_b = +$ et $b \in \bigcup U$, ou $\varepsilon_b = -$ et $b \in \bigcup V$. La congruence Schröder-Cambrienne est la relation d'équivalence $\equiv^\star$ sur $\mathfrak{P}_\pm$ obtenue comme union de toutes les congruences Schröder ε-Cambriennes.

Par exemple, $\underline{125}\overline{7}|\overline{3}\underline{4}|\overline{6} \equiv^\star \underline{12}|\underline{5}\overline{7}|\overline{3}\underline{4}|\overline{6} \equiv^\star \underline{5}\overline{7}|\underline{12}|\overline{3}\underline{4}|\overline{6} \not\equiv^\star \underline{5}\overline{7}|\overline{3}\underline{4}|\underline{12}|\overline{6}$.

Proposition 161. *Deux partitions ordonnées signées $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{P}_\pm$ sont congruentes pour la congruence Schröder-Cambrienne si et seulement si elles ont le même $\mathbf{P}^\star$-symbole :*

$$\lambda \equiv^\star \lambda' \iff \mathbf{P}^\star(\lambda) = \mathbf{P}^\star(\lambda').$$

Démonstration. La preuve de cette proposition revient à observer que deux parts consécutives $\mathbf{a}$ et $\mathbf{c}$ d'une partition ordonnée $U|\mathbf{a}|\mathbf{c}|V$ dans une fibre $(\mathbf{P}^\star)^{-1}(\mathrm{T})$ peuvent être fusionnées en $U|\mathbf{ac}|V$ et même échangées en $U|\mathbf{c}|\mathbf{a}|V$ en restant dans $(\mathbf{P}^\star)^{-1}(\mathrm{T})$ précisément quand elles appartiennent à des sous-arbres distincts d'un nœud de T. Elles sont donc séparées par un mur vertical situé en dessous (resp. au-dessus) d'une valeur b avec $\mathbf{a} < b < \mathbf{c}$ et telle que $\varepsilon_b = -$ et $b \in V$ (resp. $\varepsilon_b = +$ et $b \in U$). □

7.1.4 Ordre faible sur les partitions ordonnées et treillis Schröder-Cambrien

Pour définir l'équivalent Schröder du treillis Cambrien, nous avons d'abord besoin d'étendre l'ordre faible sur les permutations à toutes les partitions ordonnées. Ce travail a été fait par D. Krob, M. Latapy, J.-C. Novelli, H. D. Phan et S. Schwer dans [KLN+01]. Voir aussi [BHKN01] pour des propriétés relatives à la théorie des représentations de cet ordre et [PR06] pour une extension à tous les systèmes de Coxeter.

Définition 162. *L'application des coinversions* $\mathrm{coinv}(\lambda) : \binom{[n]}{2} \to \{-1, 0, 1\}$ *d'une partition ordonnée* $\lambda \in \mathfrak{P}_n$ *est l'application définie pour* $i < j$ *par*

$$\mathrm{coinv}(\lambda)(i,j) = \begin{cases} -1 & \text{if } \lambda^{-1}(i) < \lambda^{-1}(j), \\ 0 & \text{if } \lambda^{-1}(i) = \lambda^{-1}(j), \\ 1 & \text{if } \lambda^{-1}(i) > \lambda^{-1}(j). \end{cases}$$

Elle est aussi appellée l'application des inversions de la surjection λ^{-1}.

Définition 163. *Il y a deux structures de poset naturelles sur* $\mathfrak{P}_n$ *:*

- *Le poset de raffinement* $\subseteq$ *défini par* $\lambda \subseteq \lambda'$ *si* $|\mathrm{coinv}(\lambda)(i,j)| \geq |\mathrm{coinv}(\lambda')(i,j)|$ *pour tout* $i < j$*. Il est isomorphe au treillis des faces du permutoèdre* $\mathsf{Perm}(n)$*, et respecte la filtration* $(\mathfrak{P}_n^{\geq p})_{p \in [n]}$.
- *L'ordre faible* $\leq$ *défini par* $\lambda \leq \lambda'$ *si* $\mathrm{coinv}(\lambda)(i,j) \leq \mathrm{coinv}(\lambda')(i,j)$ *pour tout* $i < j$.

Ces deux posets sont représentés figure 7.6 pour $n = 3$.

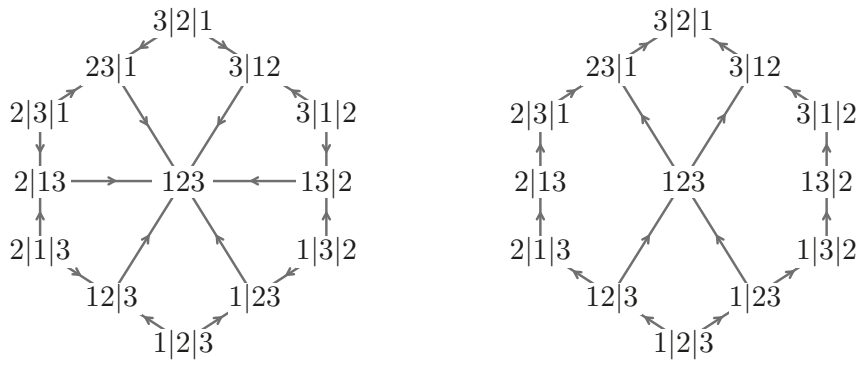


FIGURE 7.6 – Le poset de raffinement (gauche) et l'ordre faible (droite) sur $\mathfrak{P}_3$.

Notons que la restriction de l'ordre faible à $\mathfrak{S}_n$ est l'ordre faible classique sur les permutations, qui est un treillis. Cette propriété a été étendue à l'ordre faible sur $\mathfrak{P}_n$ dans [KLN+01].

Proposition 164 ([KLN+01])**.** *L'ordre faible* $<$ *sur l'ensemble des partitions ordonnées* $\mathfrak{P}_n$ *est un treillis.*

Dans la proposition suivante ainsi que dans le reste de cette partie, on définit pour $X, Y \subset \mathbb{N}$

$$X \ll Y \iff \max(X) < \min(Y) \iff x < y \text{ pour tout } x \in X \text{ et } y \in Y.$$

Proposition 165 ([KLN+01])**.** *Les relations de couverture de l'ordre faible* $<$ *sur* $\mathfrak{P}_n$ *sont données par*

$$\begin{aligned} \lambda_1|\cdots|\lambda_i|\lambda_{i+1}|\cdots|\lambda_k &< \lambda_1|\cdots|\lambda_i\lambda_{i+1}|\cdots|\lambda_k && \text{si } \lambda_i \ll \lambda_{i+1}, \\ \lambda_1|\cdots|\lambda_i\lambda_{i+1}|\cdots|\lambda_k &< \lambda_1|\cdots|\lambda_i|\lambda_{i+1}|\cdots|\lambda_k && \text{si } \lambda_{i+1} \ll \lambda_i. \end{aligned}$$

On étend maintenant la notion de treillis Cambrien sur les arbres Cambriens à un treillis sur tous les arbres Schröder-Cambriens. Pour la signature constante $\varepsilon = (-)^n$, l'ordre considéré ci-dessous a déjà été défini par P. Palacios et M. Ronco dans [PR06], mais sa structure de treillis (proposition 169) n'y était pas discutée.

Définition 166. *Considérons un arbre Schröder ε-Cambrien* T*, et une arête* $e = \{v, w\}$ *de* T*. On note* T/e *l'arbre obtenu en contractant* e *dans* T*. L'arbre obtenu est encore Schröder ε-Cambrien. On dit que cette contraction est* croissante *si* $p(u) \ll p(v)$ *et* décroissante *si* $p(v) \ll p(u)$*. Sinon, on dit que la contraction est* non monotone*.*

Définition 167. *Il y a deux structures de poset naturelles sur* $\mathrm{SchrCamb}_\varepsilon$ *:*

- *Le* poset de contraction $\subseteq$ *défini comme la clôture transitive de la relation* $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{T}/e$ *pour chaque arbre Schröder ε-Cambrien* T *et arête* $e \in \mathrm{T}$*. Il est isomorphe au treillis des faces de l'associaèdre* $\mathsf{Asso}(\varepsilon)$*, et respecte la filtration* $(\mathrm{SchrCamb}_\varepsilon^{\geq p})_{p\in[n]}$*.*
- *Le* poset Schröder ε-Cambrien $<$ *défini comme étant la clôture transitive de la relation* $\mathrm{T} < \mathrm{T}/e$ *(resp.* $\mathrm{T}/e < \mathrm{T}$*) pour chaque arbre Schröder ε-Cambrien* T *et arête* $e \in \mathrm{T}$ *définissant une contraction croissante (resp. décroissante).*

Ces deux posets sont représentés dans la figure 7.7 pour la signature $+--$. Observons qu'il y a deux contractions non monotones. Notons aussi que la restriction du poset Schröder ε-Cambrien $<$ aux arbres ε-Cambriens est le treillis ε-Cambrien.

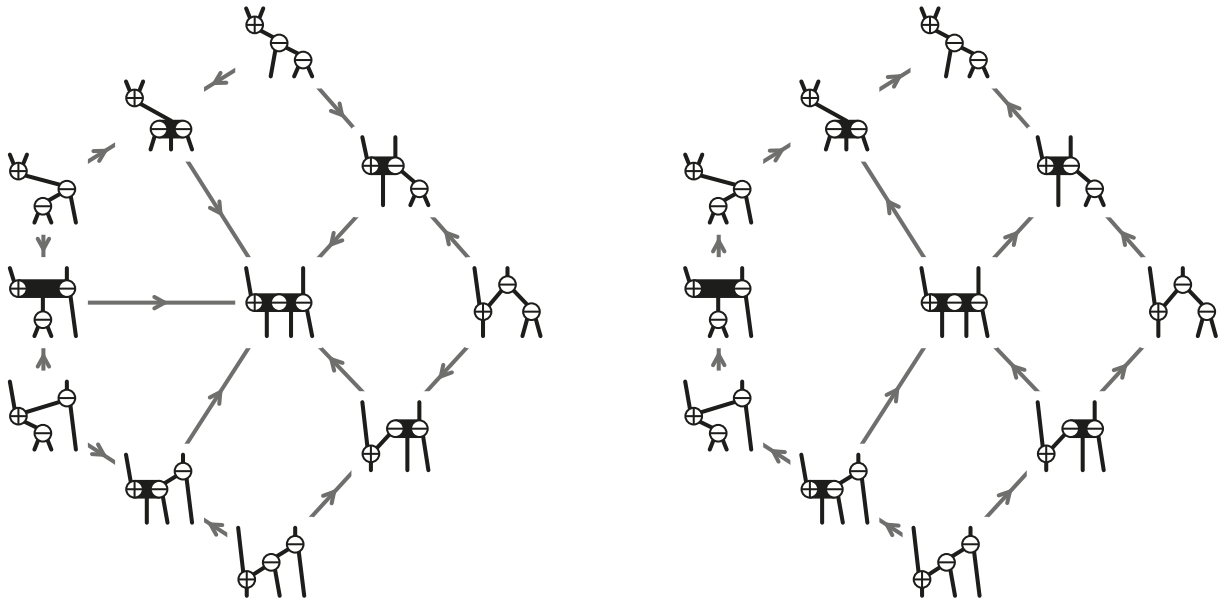


FIGURE 7.7 – Le poset de contraction (gauche) et le poset Schröder $(+--)$-Cambrien (droite) sur les arbres Schröder $(+--)$-Cambrien.

Proposition 168. *L'application* $\mathbf{P}^\star$ *définit un homomorphisme de l'ordre faible sur* $\mathfrak{P}_\varepsilon$ *au poset Schröder ε-Cambrien sur* $\mathrm{SchrCamb}(\varepsilon)$*.*

Démonstration. Soit $\lambda < \lambda'$ une relation de couverture dans l'ordre faible sur $\mathfrak{P}_\varepsilon$. Supposons que λ' soit obtenu en fusionnant les parts $\lambda_i \ll \lambda_{i+1}$ de λ (les autres cas étant symétriques). Soit u le nœud le plus à droite de $\mathbf{P}^\star(\lambda)$ au niveau i, et v le nœud le plus à gauche de $\mathbf{P}^\star(\lambda)$ au niveau $i+1$. Si u et v ne sont pas comparables, alors $\mathbf{P}^\star(\lambda) = \mathbf{P}^\star(\lambda')$. Sinon, il y a une arête $u \to v$ dans $\mathbf{P}^\star(\lambda)$ et $\mathbf{P}^\star(\lambda')$ est obtenu par la contraction croissante de $u \to v$ dans $\mathbf{P}^\star(\lambda)$. □

Proposition 169. *Pour toute signature $\varepsilon \in \pm^n$, le poset Schröder ε-Cambrien sur les arbres Schröder ε-Cambriens est un treillis quotient de l'ordre faible sur les partitions ordonnées de $[n]$.*

Cette proposition est prouvée par les deux lemmes suivants, en suivant une approche similaire à celle de N. Reading [Rea06].

Lemme 170. *Les classes Schröder ε-Cambriennes sont des intervalles de l'ordre faible.*

Démonstration. Soit T un arbre Schröder ε-Cambrien, avec un étiquetage de ses sommets $p : \mathrm{V} \to 2^{[n]} \smallsetminus \varnothing$. Considérons une extension linéaire de T, *i.e.,* une partition ordonnée λ dont les parts sont les étiquettes de T et telle que $p(v)$ apparaisse avant $p(w)$ pour $v \to w$ dans T. Si v et w sont des nœuds incomparables de T, alors soit $p(v) \ll p(w)$, soit $p(w) \ll p(v)$ comme ils sont séparés par un mur. Par échanges consécutifs, il existe une extension linéaire $\lambda_{\min}$ (resp. $\lambda_{\max}$) de T telle que $p(v)$ apparaisse avant (resp. après) $p(w)$ pour tout couple de nœuds incomparables v et w tels que $p(v) \ll p(w)$. Par construction, les entrées (i,j) des tables de coinversion de $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont données pour $i < j$ par

$$\mathrm{coinv}(\lambda_{\min})(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \to i \text{ est dans T,} \\ 0 & \text{si } i \sim j \text{ est dans T,} \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } \mathrm{coinv}(\lambda_{\max})(i,j) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \to j \text{ est dans T,} \\ 0 & \text{si } i \sim j \text{ est dans T,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il en découle que la fibre de T par $\mathbf{P}^\star$ est l'intervalle de l'ordre faible $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. □

Lemme 171. *Soient λ et λ' deux partitions ordonnées signées provenant de classes Schröder ε-Cambriennes distinctes C et C'. Si $\lambda < \lambda'$ alors $\min(C) < \min(C')$ et $\max(C) < \max(C')$ (dans l'ordre faible).*

Démonstration. On prouve le résultat pour les maximaux, la preuve pour les minimaux étant similaire. On observe dans un premier temps que l'on peut supposer que λ' couvre λ dans l'ordre faible, il existe donc une position i telle que soit $\lambda'_i = \lambda_i \cup \lambda_{i+1}$ et $\lambda_i \ll \lambda_{i+1}$, ou bien $\lambda_i = \lambda'_i \cup \lambda'_{i+1}$ et $\lambda'_{i+1} \ll \lambda'_i$. La preuve fonctionne alors par récursion sur la distance dans l'ordre faible entre λ et $\max(C)$. Si $\lambda = \max(C)$, le résultat est immédiat car $\max(C) = \lambda < \lambda' \leq \max(C')$. Sinon, on considère une partition ordonnée μ dans C qui couvre λ dans l'ordre faible. Il existe une position $j \neq i$ telle que $\mu_j = \lambda_j \cup \lambda_{j+1}$ et $\lambda_j \ll \lambda_{j+1}$, ou $\lambda_j = \mu_j \cup \mu_{j+1}$ et $\mu_{j+1} \ll \mu_j$. Nous distinguons maintenant quatre cas, qui couvrent les positions relatives de i et j :

(1) Si $|i-j|>1$, alors les changements locaux de λ à λ' à la position i et de λ à μ à la position j sont indépendants. On définit μ' comme étant la partition ordonnée obtenue à partir de λ en effectant les changements locaux en i et en j. On vérifie ensuite que $\lambda' \equiv^\star \mu'$ comme chaque témoin pour la relation d'équivalence $\lambda \equiv^\star \mu$ est aussi un témoin pour la relation d'équivalence $\lambda' \equiv^\star \mu'$. De plus, $\mu < \mu'$.

(2) Sinon, les changements locaux en i et j ne sont plus indépendants. On a donc besoin de traiter plusieurs cas séparement, suivant que les changement locaux de λ à λ' et de λ à μ soient fusionnants ou séparants, et selon les positions respectives de ces changements locaux. Dans tous les cas ci-dessous, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sont des parts de $[n]$ telles que $\mathbf{a} \ll \mathbf{b} \ll \mathbf{c}$, et U, V sont des suites de parts de $[n]$.
   - Si $\lambda = U|\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}|V$, $\lambda' = U|\mathbf{ab}|\mathbf{c}|V$, et $\mu = U|\mathbf{a}|\mathbf{bc}|V$, alors on définit $\mu' := U|\mathbf{abc}|V$. Tout témoin pour la congruence Schröder-Cambrienne $\lambda \equiv^\star \mu$ est aussi un témoin pour la congruence Schröder-Cambrienne $\lambda' \equiv^\star \mu'$. De plus, on a $\mu < \mu'$ car $\mathbf{a} \ll \mathbf{bc}$. Les mêmes arguments produisent les mêmes conclusions dans les cas suivant :
   - si $\lambda = U|\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}|V$, $\lambda' = U|\mathbf{a}|\mathbf{bc}|V$, et $\mu = U|\mathbf{ab}|\mathbf{c}|V$, alors on définit $\mu' := U|\mathbf{abc}|V$.
   - si $\lambda = U|\mathbf{abc}|V$, $\lambda' = U|\mathbf{c}|\mathbf{ab}|V$, et $\mu = U|\mathbf{bc}|\mathbf{a}|V$, alors on définit $\mu' := U|\mathbf{c}|\mathbf{b}|\mathbf{a}|V$.
   - si $\lambda = U|\mathbf{abc}|V$, $\lambda' = U|\mathbf{bc}|\mathbf{a}|V$, et $\mu = U|\mathbf{c}|\mathbf{ab}|V$, alors on définit $\mu' := U|\mathbf{c}|\mathbf{b}|\mathbf{a}|V$.
   - Si $\lambda = U|\mathbf{a}|\mathbf{bc}|V$, $\lambda' = U|\mathbf{abc}|V$, et $\mu = U|\mathbf{a}|\mathbf{c}|\mathbf{b}|V$, alors on définit $\mu' := U|\mathbf{c}|\mathbf{ab}|V$. Tout témoin pour la congruence Schröder-Cambrienne $\lambda \equiv^\star \mu$ est aussi un témoin pour la congruence Schröder-Cambrienne $\lambda' \equiv^\star \mu'$. De plus, $\mu < \mu'$ par comparaison des tables de coinversion. Les mêmes arguments produisent les mêmes conclusions dans le cas :
   - si $\lambda = U|\mathbf{ab}|\mathbf{c}|V$, $\lambda' = U|\mathbf{abc}|V$, et $\mu = U|\mathbf{b}|\mathbf{a}|\mathbf{c}|V$, alors on définit $\mu' := U|\mathbf{bc}|\mathbf{a}|V$.
   - Si $\lambda = U|\mathbf{a}|\mathbf{bc}|V$, $\lambda' = U|\mathbf{a}|\mathbf{c}|\mathbf{b}|V$, et $\mu = U|\mathbf{abc}|V$, alors on définit $\mu' := U|\mathbf{c}|\mathbf{ab}|V$. Soit d un témoin de la congruence Schröder-Cambrienne $\lambda \equiv^\star \mu$, ce qui signifie, $\mathbf{a} < d < \mathbf{bc}$ et soit $\varepsilon_d = -$ et $d \in V$, ou bien $\varepsilon_d = +$ et $d \in U$. Alors d est aussi un témoin pour les congruences Schröder-Cambriennes $\lambda' = U|\mathbf{a}|\mathbf{c}|\mathbf{b}|V \equiv^\star U|\mathbf{ac}|\mathbf{b}|V \equiv^\star U|\mathbf{c}|\mathbf{a}|\mathbf{b}|V \equiv^\star U|\mathbf{c}|\mathbf{ab}|V = \mu'$. De plus, on a $\mu < \mu'$ car $\mathbf{ab} \ll \mathbf{c}$. Les mêmes arguments produisent les mêmes conclusions dans le cas :
   - si $\lambda = U|\mathbf{ab}|\mathbf{c}|V$, $\lambda' = U|\mathbf{b}|\mathbf{a}|\mathbf{c}|V$, et $\mu = U|\mathbf{abc}|V$, alors on définit $\mu' := U|\mathbf{bc}|\mathbf{a}|V$.

Dans tous les cas, nous avons $\lambda \equiv^\star \mu < \mu' \equiv^\star \lambda'$. Comme μ est plus proche de $\max(C)$ que λ, on obtient que $\max(C) < \max(C')$ par hypothèse de récurrence. La preuve pour les minimaux est identique. □

Remarque 172 (Éléments extrémaux et motifs évités)**.** Comme les classes Schröder-Cambriennes sont engendrées par des règles de réécriture et sont des intervalles de l'ordre faible, leurs éléments minimaux sont précisément les partitions ordonnées qui évitent les motifs $\mathbf{c}|\mathbf{a} - \underline{b}$ et $\overline{b} - \mathbf{c}|\mathbf{a}$, et leurs éléments maximaux sont précisément les paritions ordonnées qui évitent les motifs $\mathbf{a}|\mathbf{c} - \underline{b}$ et $\overline{b} - \mathbf{a}|\mathbf{c}$. Cette remarque nous permet de contruire un arbre de génération de ces permutations. Des arguments similaires à ceux du paragraphe 1.1.5 pourraient donc nous fournir une preuve alternative de la proposition 155.

7.1.5 Canopée

Nous définissons la canopée d'un arbre Schröder-Cambrien en utilisant la même observation que pour les arbres Cambriens : dans les arbres Schröder-Cambriens, les nombres i et $i+1$ apparaissent soit dans la même étiquette, soit dans deux étiquettes comparables.

Définition 173. *La canopée d'un arbre Schröder-Cambrien* T *est la suite* $\mathbf{can}^\star(\mathrm{T}) \in \{-,0,+\}$ *définie par*

$$\mathbf{can}^\star(\mathrm{T})_i = \begin{cases} - & \textit{si } i \textit{ apparaît au-dessus de } i+1 \textit{ dans } \mathrm{T}, \\ 0 & \textit{si } i \textit{ et } i+1 \textit{ apparaissent dans la même étiquette de } \mathrm{T}, \\ + & \textit{si } i \textit{ apparaît en dessous de } i+1 \textit{ dans } \mathrm{T}. \end{cases}$$

Par exemple, la canopée de l'arbre Schröder-Cambrien de la figure 7.1 (gauche) est $0{+}0{-}{+}{-}$. La proposition suivante fournit un analogue immédiat de la proposition 47 dans le contexte Schröder-Cambrien. Nous définissons la suite des *reculs* d'une partition ordonnée $\lambda \in \mathfrak{P}_n$ comme $\mathbf{rec}^\star(\lambda) \in \{-,0,+\}^{n-1}$, où $\mathbf{rec}^\star(\lambda)_i = \mathrm{coinv}(\lambda)(i,i+1)$.

Proposition 174. *Les applications* $\mathbf{P}^\star$, $\mathbf{can}^\star$, *et* $\mathbf{rec}^\star$ *définissent le diagramme commutatif d'homomorphismes de treillis suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{P}_\varepsilon \arrow[rr, two heads, "\mathbf{rec}^\star"] \arrow[dr, two heads, "\mathbf{P}^\star"'] & & \{-,0,+\}^{n-1} \\ & \mathrm{SchrCamb}(\varepsilon) \arrow[ur, two heads, "\mathbf{can}^\star"'] & \end{tikzcd}$$

La figure 7.8 (gauche) illustre cette proposition pour la signature $+{-}{-}$.

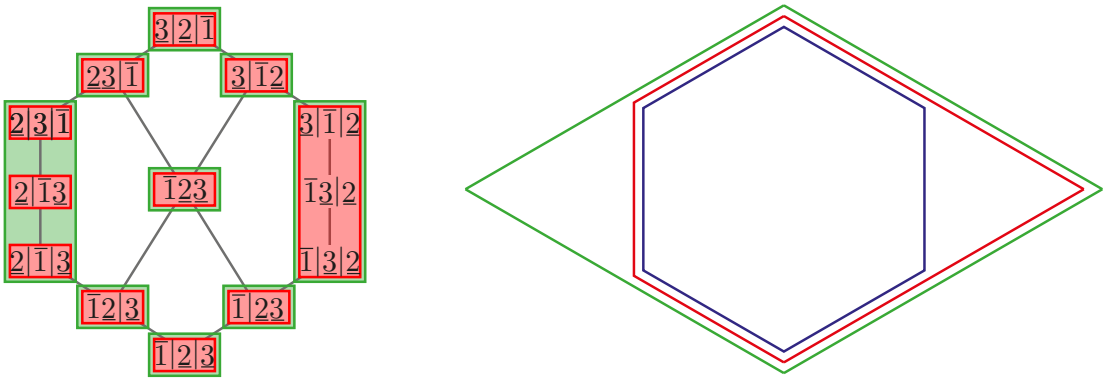


FIGURE 7.8 – Les fibres des applications $\mathbf{P}^\star$ (rouge) et $\mathbf{rec}^\star$ (vert) sur les ordres faibles de $\mathfrak{S}_{+--}$ (gauche), et la réalisation géométrique de ces applications (droite).

7.2 Algèbre de Hopf Schröder-Cambrienne

Dans ce paragraphe, nous définissons l'algèbre de Hopf Schröder-Cambrienne $\mathsf{SchrCamb}$, étendant simultanément l'algèbre de Hopf Cambrienne et l'algèbre de Hopf sur les arbres de Schröder de F. Chapoton [Cha00]. Nous construisons l'algèbre $\mathsf{SchrCamb}$ comme sous-algèbre de la version signée de l'algèbre de Hopf des partitions ordonnées de F. Chapoton [Cha00]. On considère ensuite l'algèbre duale $\mathsf{SchrCamb}^*$ comme un quotient de l'algèbre de Hopf duale de l'algèbre des partitions ordonnées signées.

7.2.1 Produits de mélange et de convolution sur les partitions ordonnées signées

Nous définissons un analogue naturel aux produits de mélange décalé et de convolution du paragraphe 5.1.1 sur les partitions ordonnées. Des définitions équivalentes dans le monde des surjections preuvent être trouvées dans [Cha00]. Ici, nous utilisons toujours les partitions ordonnées pour coller à notre présentation de l'algèbre Cambrienne du paragraphe 5.1.

Définissons d'abord deux restrictions sur les partitions ordonnées. Considérons une partition ordonnée μ de $[n]$ en k parts. Comme mentionné plus tôt, nous représentons graphiquement μ par une table $(k \times n)$ avec un point à la ligne i et à la colonne j pour chaque $j \in \mu_i$. Pour $I \subseteq [k]$, on définit $n_I := |\{j \in [n] \mid \exists\, i \in I,\ j \in \mu_i\}|$ et on note $\mu_{|I}$ la partition ordonnée de $[n_I]$ en $|I|$ parts dont la table est obtenue à partir de la table de μ en supprimant toutes les lignes n'étant pas dans I et en standardisant pour obtenir une table $(|I| \times n_I)$. De la même façon, pour $J \subseteq [n]$, on définit $k_J := |\{i \in [k] \mid \exists\, j \in J,\ j \in \mu_i\}|$ et on note $\mu^{|J}$ la partition ordonnée de $[|J|]$ en k_J parts dont la table est obtenue à partir de la table de μ en supprimant toutes les colonnes n'étant pas dans J et en standardisant pour obtenir une table $(k_J \times |J|)$. Ces restrictions sont illustrées figure 7.9.

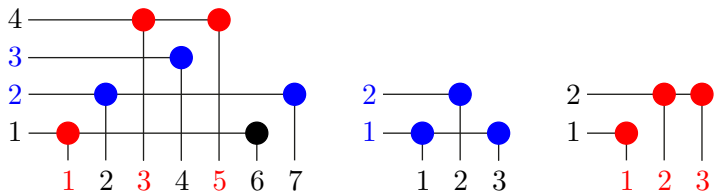


FIGURE 7.9 – Les tables des partitions ordonnées $\mu = 16|27|4|35$ (gauche) et de leurs restrictions $\mu_{|\{2,3\}}$ (milieu) et $\mu^{|\{1,3,5\}}$ (droite).

On définit la *concaténation décalée* $\lambda\bar{\lambda}'$, le *produit de mélange décalé* $\lambda \uplus \lambda'$, et le *produit de convolution* $\lambda \star \lambda'$ de deux partitions ordonnées (non signées) λ de $[n]$ avec k parts et λ'

de $[n']$ avec k' comme

$$\lambda\bar{\lambda}' := \lambda_1 \,|\, \cdots \,|\, \lambda_k \,|\, n+\lambda'_1 \,|\, \cdots \,|\, n+\lambda'_{k'}, \qquad \text{où } n+\lambda'_i := \{n+j \mid j \in \lambda'_i\}$$

$$\lambda \,\bar{\sqcup\!\sqcup}\, \lambda' := \left\{\mu \in \mathfrak{P}_{n+n'} \;\middle|\; \mu^{|\{1,\dots,n\}} = \lambda \text{ et } \mu^{|\{n+1,\dots,n+n'\}} = \lambda'\right\},$$

et $$\lambda \star \lambda' := \left\{\mu \in \mathfrak{P}_{n+n'} \;\middle|\; \mu_{|\{1,\dots,k\}} = \lambda \text{ et } \mu_{|\{k+1,\dots,k+k'\}} = \lambda'\right\}.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} 1|2 \,\bar{\sqcup\!\sqcup}\, 2|13 = \{&1|2|4|35,\ 1|24|35,\ 1|4|2|35,\ 1|4|235,\ 1|4|35|2,\ 14|2|35,\ 14|235,\\ &14|35|2,\ 4|1|2|35,\ 4|1|235,\ 4|1|35|2,\ 4|135|2,\ 4|35|1|2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1|2 \star 2|13 = \{&1|2|4|35,\ 1|3|4|25,\ 1|4|3|25,\ 1|5|3|24,\ 2|3|4|15,\\ &2|4|3|15,\ 2|5|3|14,\ 3|4|2|15,\ 3|5|2|14,\ 4|5|2|13\}.\end{aligned}$$

Graphiquement, la table de la concaténation décalée $\lambda\bar{\lambda}'$ contient la table de λ comme bloc inférieur gauche et la table de λ' comme bloc supérieur droit. Les tables du produit de mélange décalé $\lambda \,\bar{\sqcup\!\sqcup}\, \lambda'$ (resp. du produit de convolution $\lambda \star \lambda'$) sont obtenues en mélangeant les lignes (resp. colonnes) de la table de $\lambda\bar{\lambda}'$. La figure 7.10 illustre des exemples de ces opérations.

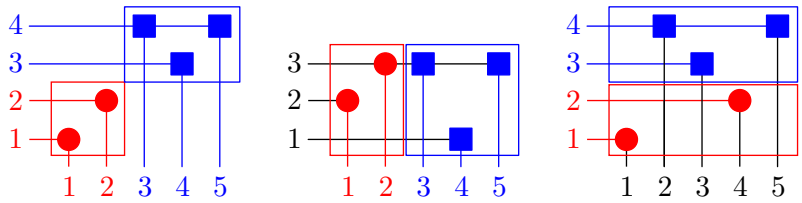


FIGURE 7.10 – La table de la concaténation décalée $\lambda\bar{\lambda}'$ (gauche) a deux blocs contenant les tables des partitions ordonnées $\lambda = 1|2$ et $\lambda' = 2|31$. Les éléments du produit de mélange décalé $\lambda \,\bar{\sqcup\!\sqcup}\, \lambda'$ (milieu) et du produit de convolution $\lambda \star \lambda'$ (droite) sont respectivement obtenus en mélangeant les lignes et les colonnes de la table de $\lambda\bar{\lambda}'$.

Remarque 175. (i) Notons que le produit de mélange décalé et le produit de convolution sont compatibles avec la filtration $(\mathfrak{P}_n^{\geq p})_{p\in[n]}$:

$$\mathfrak{P}_n^{\geq p} \,\bar{\sqcup\!\sqcup}\, \mathfrak{P}_{n'}^{\geq p'} \subseteq \mathfrak{P}_{n+n'}^{\geq p+p'} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{P}_n^{\geq p} \star \mathfrak{P}_{n'}^{\geq p'} \subseteq \mathfrak{P}_{n+n'}^{\geq p+p'}.$$

(ii) En projetant sur le quotient $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^{\geq 1} \simeq \mathfrak{S}$, les produits de mélange et de convolution (signés) coincident avec la description du paragraphe 5.1.1.

(iii) Le produit de mélange décalé des partitions ordonnées préserve les intervalles de l'ordre faible. Précisément,

$$[\lambda, \mu] \,\bar{\sqcup\!\sqcup}\, [\lambda', \mu'] = [\lambda\bar{\lambda}', \bar{\mu}'\mu].$$

Ces définitions s'étendent aux partitions ordonnées signées : les signes voyagent avec leurs valeurs dans le produit de mélange décalé signé, et restent à leurs positions dans le produit de convolution signé.

7.2.2 Sous-algèbre de $\mathsf{OrdPart}_\pm$

On note $\mathsf{OrdPart}_\pm$ l'algèbre de Hopf comme base $(\mathbb{F}_\lambda)_{\lambda\in\mathfrak{P}_\pm}$ et dont le produit et le coproduit sont définis par

$$\mathbb{F}_\lambda \cdot \mathbb{F}_{\lambda'} = \sum_{\mu\in\lambda \,\underline{\sqcup}\, \lambda'} \mathbb{F}_\mu \qquad \text{et} \qquad \triangle\mathbb{F}_\mu = \sum_{\mu\in\lambda\star\lambda'} \mathbb{F}_\lambda \otimes \mathbb{F}_{\lambda'}.$$

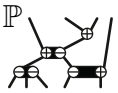
Notons que l'algèbre de Hopf $\mathsf{FQSym}_\pm$ est isomorphe au quotient $\mathsf{OrdPart}_\pm/\mathsf{OrdPart}_\pm^{\geq 1}$. Notons aussi que la version non signée de $\mathsf{OrdPart}_\pm$ est le dual de l'algèbre WQSym des fonctions quasi-symétriques mots (aussi notée NCQSym pour fonction quasi-symétriques non-commutatives), voir [BZ09, NT06].

Remarque 176. La preuve du fait que $\mathsf{OrdPart}_\pm$ est en effet une algèbre de Hopf est laissée au lecteur : elle consiste à traduire la preuve de F. Chapoton [Cha00] des surjections aux partitions ordonnées signées. On peut noter que les algèbres de Hopf de F. Chapoton sur les faces des permutoèdres, des associaèdres, et des cubes pourraient être décorées par un groupe arbitraire, similairement aux constructions de [NT10, BH08, BH06]. Une fois de plus, le résultat principal est ici que les relations de congruence de Schröder dépendent de la décoration.

On note $\mathsf{SchrCamb}$ le sous-espace vectoriel de $\mathsf{OrdPart}_\pm$ engendré par les éléments

$$\mathbb{P}_{\mathrm{T}} := \sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{P}_\pm \\ \mathbf{P}^\star(\lambda)=\mathrm{T}}} \mathbb{F}_\lambda$$

pour tous les arbres Schröder-Cambriens T. Par exemple, pour l'arbre Schröder-Cambrien de la figure 7.1 (gauche), on a

$\mathbb{P}$  $= \mathbb{F}_{\underline{12}|\underline{5}\overline{7}|\overline{3}\underline{4}|\overline{6}} + \mathbb{F}_{\underline{125}\overline{7}|\overline{3}\underline{4}|\overline{6}} + \mathbb{F}_{\underline{5}\overline{7}|\underline{12}|\overline{3}\underline{4}|\overline{6}}.$

Notons que l'algèbre de Hopf Camb est isomorphe au quotient $\mathsf{SchrCamb}_\pm/\mathsf{SchrCamb}_\pm^{\geq 1}$.

Théorème 177. $\mathsf{SchrCamb}$ *est une sous-algèbre de Hopf de* $\mathsf{OrdPart}_\pm$.

Démonstration. Similaire à la preuve du théorème 88. □

Comme pour l'algèbre Cambrienne, le produit et le coproduit des éléments de la base $\mathbb{P}$ de l'algèbre Schröder-Cambrienne $\mathsf{SchrCamb}$ peuvent être décrit directement en termes d'opérations combinatoires sur les arbres Schröder-Cambriens.

$\boxed{\text{Produit}}$ Le produit de l'algèbre Schröder-Cambrienne $\mathsf{SchrCamb}$ peut encore être écrit en termes d'intervalles dans le treillis Schöder-Cambrien. Étant donnés deux arbres Schröder-Cambriens T, T', on note ${}_{\mathrm{T}}\nearrow^{\mathrm{T}'}$ l'arbre Schröder $\varepsilon(\mathrm{T})\varepsilon(\mathrm{T}')$-Cambrien obtenu en greffant la feuille sortante la plus à droite de T sur la feuille entrante la plus à gauche de T et en décalant toutes les étiquettes de T′. Nous définissons de la même façon ${}^{\mathrm{T}}\nwarrow_{\bar{\mathrm{T}}'}$.

Proposition 178. *Pour tous arbres Schröder-Cambriens* T, T'*, le produit* $\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'}$ *est donné par*

$$\mathbb{P}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{T}'} = \sum_{\mathrm{S}} \mathbb{P}_{\mathrm{S}},$$

où S *parcourt l'intervalle entre* $\mathrm{T} \nearrow \bar{\mathrm{T}}'$ *et* $\mathrm{T} \nwarrow \bar{\mathrm{T}}'$ *dans le treillis Schröder* $\varepsilon(\mathrm{T})\varepsilon(\mathrm{T}')$*-Cambrien.*

Démonstration. Similaire à celle de la proposition 89. □

Par exemple, on peut calculer le produit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\bullet\!\!\!

$\boxed{\text{Algèbres Matriochka}}$ Pour conclure, on relie l'algèbre Schröder-Cambrienne à l'algèbre de F. Chapoton sur les faces du cube définie dans [Cha00]. On appelle algèbre triléenne la sous-algèbre de Hopf Tril de $\mathsf{OrdPart}_\pm$ générée par les éléments

$$\mathbb{X}_\chi := \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{P}_\pm \\ \mathbf{rec}^\star(\lambda)=\chi}} \mathbb{F}_\lambda$$

pour tout $\chi \in \{-, 0, +\}^{n-1}$. Le diagramme commutatif de la proposition 174 assure que

$$\mathbb{X}_\chi = \sum_{\substack{\mathrm{T} \in \mathrm{SchrCamb} \\ \mathbf{can}^\star(\mathrm{T})=\chi}} \mathbb{P}_\mathrm{T},$$

et donc que Tril est une sous-algèbre de $\mathsf{SchrCamb}$. En d'autres termes, l'algèbre Schröder-Cambrienne est prise en sandwich entre l'algèbre des partitions ordonnées signées et l'algèbre triléenne $\mathsf{Tril} \subset \mathsf{SchrCamb} \subset \mathsf{OrdPart}_\pm$.

7.2.3 Algèbre quotient de $\mathsf{OrdPart}_\pm^*$

On passe maintenant à l'algèbre de Hopf duale $\mathsf{OrdPart}_\pm^*$ avec la base $(\mathbb{G}_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_\pm}$ et dont le produit et le coproduit sont définis par

$$\mathbb{G}_\lambda \cdot \mathbb{G}_{\lambda'} = \sum_{\mu \in \lambda \star \lambda'} \mathbb{G}_\mu \qquad \text{et} \qquad \triangle \mathbb{G}_\mu = \sum_{\mu \in \lambda \,\underline{\sqcup}\, \lambda'} \mathbb{G}_\lambda \otimes \mathbb{G}_{\lambda'}.$$

Notons que la version non signée de $\mathsf{OrdPart}_\pm^*$ est l'algèbre WQSym des fonctions quasi-symétriques mot (aussi notée NCQSym pour fonctions quasi-symétriques non-commutatives), voir [BZ09, NT06]. Le théorème suivant est automatique à partir du théorème 177.

Théorème 180. *Le dual gradué* $\mathsf{SchrCamb}^*$ *de l'algèbre Schröder-Cambrienne est isomorphe à l'image de* $\mathsf{OrdPart}_\pm^*$ *sous la projection canonique*

$$\pi : \mathbb{C}\langle A \rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle A \rangle / \equiv,$$

où $\equiv$ *est la congruence Schröder-Cambrienne. La base duale* $\mathbb{Q}_\mathrm{T}$ *de* $\mathbb{P}_\mathrm{T}$ *est exprimée comme* $\mathbb{Q}_\mathrm{T} = \pi(\mathbb{G}_\lambda)$*, où* λ *est une partition ordonnée telle que* $\mathbf{P}^\star(\lambda) = \mathrm{T}$.

Similairement au paragraphe précédent, on peut décrire combinatoirement le produit et le coproduit des éléments de la base $\mathbb{Q}$ de $\mathsf{SchrCamb}^*$ en termes d'opérations sur les arbres Schröder-Cambriens.

$\boxed{\text{Produit}}$ On définit les *gaps* et les *laminages* des arbres Schröder-Cambrian exactement comme nous l'avons fait pour les arbres Cambriens dans le paragraphe 5.1.3. Notons que les laminages peuvent séparer ou laisser intact les nœuds des arbres Schröder-Cambriens, voir la figure 7.11 (c) pour des exemples. Étant donnés deux arbres Schröder-Cambriens T et T′ respectivement sur $[n]$ et $[n']$, et un mélange s de leurs signatures définissant un

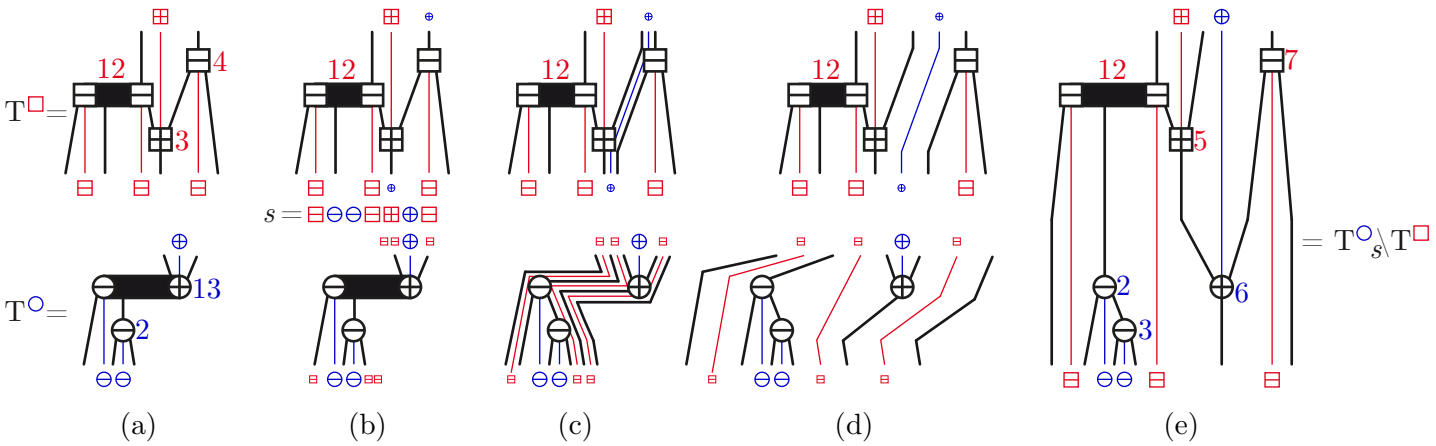


FIGURE 7.11 – (a) Deux arbres Schröder-Cambriens $\mathrm{T}^{\bigcirc}$ et $\mathrm{T}^{\square}$. (b) Étant donné le mélange $s = \boxminus\ominus\ominus\boxminus\boxplus\oplus\boxminus$, les positions des $\boxminus$ sont reportées dans $\mathrm{T}^{\bigcirc}$ et les positions des $\oplus$ sont reportées dans $\mathrm{T}^{\square}$. (c) Les laminages correspondant. (d) Les arbres sont séparés selon les laminages. (e) Les arbres Schröder-Cambriens correspondant ${\mathrm{T}^{\bigcirc}}_s\backslash\mathrm{T}^{\square}$.

multi-ensemble Γ de gaps de $[n]$ et Γ' de gaps de $[n']$, on note encore $\mathrm{T}\,_s\backslash\mathrm{T}'$ l'arbre Schröder-Cambrien obtenu en connectant les feuilles sortantes de $\lambda(\mathrm{T},\Gamma)$ aux feuilles entrantes de la forêt définies par le laminage $\lambda(\mathrm{T}',\Gamma')$. La figure 7.11 illustre la construction d'un des éléments du produit.

Proposition 181. *Pour tout arbre Schröder-Cambrien* T,T'*, le produit* $\mathbb{Q}_{\mathrm{T}}\cdot\mathbb{Q}_{\mathrm{T}'}$ *est donné par*

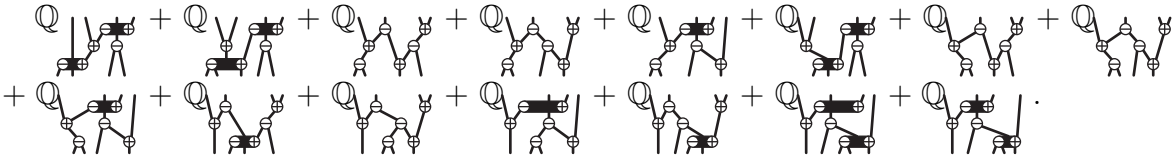
$$\mathbb{Q}_{\mathrm{T}}\cdot\mathbb{Q}_{\mathrm{T}'} = \sum_s \mathbb{Q}_{\mathrm{T}\,_s\backslash\mathrm{T}'},$$

où s *parcourt tous les mélanges des signatures de* T *et* T'.

Démonstration. Similaire à celle de la proposition 93. □

Par exemple, on peut calculer le produit

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{\ominus\boxminus\oplus}\cdot\mathbb{Q}_{\ominus\ominus\boxminus\oplus\oplus\oplus} &= \mathbb{G}_{\underline{1}\overline{2}}\cdot\mathbb{G}_{\overline{1}\underline{3}|\underline{2}\overline{4}}\\
&= \mathbb{G}_{\underline{1}\overline{2}|\overline{3}\underline{5}|\underline{4}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{1}\overline{3}|\overline{2}\underline{5}|\underline{4}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{1}\overline{4}|\overline{2}\underline{5}|\underline{3}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{1}\overline{5}|\overline{2}\underline{4}|\underline{3}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{1}\overline{6}|\overline{2}\underline{4}|\underline{3}\overline{5}} + \mathbb{G}_{\underline{2}\overline{3}|\overline{1}\underline{5}|\underline{4}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{2}\overline{4}|\overline{1}\underline{5}|\underline{3}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{2}\overline{5}|\overline{1}\underline{4}|\underline{3}\overline{6}}\\
&\quad + \mathbb{G}_{\underline{2}\overline{6}|\overline{1}\underline{4}|\underline{3}\overline{5}} + \mathbb{G}_{\underline{3}\overline{4}|\overline{1}\underline{5}|\underline{2}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{3}\overline{5}|\overline{1}\underline{4}|\underline{2}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{3}\overline{6}|\overline{1}\underline{4}|\underline{2}\overline{5}} + \mathbb{G}_{\underline{4}\overline{5}|\overline{1}\underline{3}|\underline{2}\overline{6}} + \mathbb{G}_{\underline{4}\overline{6}|\overline{1}\underline{3}|\underline{2}\overline{5}} + \mathbb{G}_{\underline{5}\overline{6}|\overline{1}\underline{3}|\underline{2}\overline{4}}
\end{aligned}$$



$\boxed{\text{COPRODUIT}}$ Pour un gap γ d'un arbre Schröder-Cambrien S, on note toujours $L(\mathrm{S},\gamma)$ et $R(\mathrm{S},\gamma)$ les sous-arbres Schröder-Cambriens gauche et droit de S quand on le coupe le long du chemin $\lambda(\mathrm{S},\gamma)$.

Proposition 182. *Pour tout arbre Schröder-Cambrien* S*, le coproduit* $\triangle\mathbb{Q}_{\mathrm{S}}$ *est donné par*

$$\triangle\mathbb{Q}_{\mathrm{S}} = \sum_{\gamma} \mathbb{Q}_{L(\mathrm{S},\gamma)} \otimes \mathbb{Q}_{R(\mathrm{S},\gamma)},$$

où γ *parcourt tous les gaps entre les nœuds de* S*.*

Démonstration. Similaire à celle de la proposition 94. □

Par exemple, on peut calculer le coproduit

$$\begin{aligned}
\triangle\mathbb{Q}_{\mathrm{S}} &= \triangle\mathbb{G}_{\overline{1}\underline{3}|\underline{2}\overline{4}} \\
&= 1 \otimes \mathbb{G}_{\overline{1}\underline{3}|\underline{2}\overline{4}} + \mathbb{G}_{\overline{1}} \otimes \mathbb{G}_{\underline{2}|\underline{1}\overline{3}} + \mathbb{G}_{\overline{1}|\underline{2}} \otimes \mathbb{G}_{\underline{1}|\overline{2}} + \mathbb{G}_{\overline{1}\underline{3}|\underline{2}} \otimes \mathbb{G}_{\overline{1}} + \mathbb{G}_{\overline{1}\underline{3}|\underline{2}\overline{4}} \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \mathbb{Q}_{\mathrm{S}} + \mathbb{Q}_{\mathrm{S}} \otimes \mathbb{Q}_{\mathrm{S}} + \mathbb{Q}_{\mathrm{S}} \otimes \mathbb{Q}_{\mathrm{S}} + \mathbb{Q}_{\mathrm{S}} \otimes \mathbb{Q}_{\mathrm{S}} + \mathbb{Q}_{\mathrm{S}} \otimes 1.
\end{aligned}$$

7.3 ℓ-uplets Schröder-Cambriens

Pour conclure, mentionnons qu'il est aussi possible d'étendre simultanément l'algèbre des ℓ-uplets Cambriens et l'algèbre Schröder-Cambrienne. Les objets sont les *ℓ-uplets Schröder-Cambriens*, *i.e.*, ℓ-uplets d'arbres Schröder-Cambriens dont l'union est acyclique.

La première étape est de décrire la combinatoire de ces ℓ-uplets :

— appliquer des congruences Schröder-Cambriennes en parallèle produit une correspondance $\Theta_\ell^\star$ entre les partitions ordonnées signées et les ℓ-uplets Schröder-Cambrian à niveaux, et définit donc une surjection $\mathbf{P}_\ell^\star$ des partitions ordonnées ℓ-signées aux ℓ-uplets Schröder-Cambriens ;

— les fibres de $\mathbf{P}_\ell^\star$ sont des intersections de congruences Schröder-Cambriennes, et définissent donc une congruence de treillis de l'ordre faible sur les partitions ordonnées ;

— les ℓ-uplets d'arbres Schröder-Cambriens correspondent à toutes les faces d'une somme de Minkowski de ℓ associaèdres de [HL07].

Un problème combinatoire intéressant est de compter le nombre de ℓ-uplets d'arbres Schröder-Cambriens, en particulier le nombre d'arbres Baxter-Schröder-Cambriens.

La deuxième étape est de définir comme précédement l'algèbre de Hopf des ℓ-uplets Schröder-Cambriens $\mathsf{SchrCamb}_\ell$ comme une sous-algèbre de l'algèbre de Hopf $\mathsf{OrdPart}_{\pm\ell}$ des partitions ordonnées ℓ-signées, et de son dual $\mathsf{SchrCamb}_\ell^*$ comme un quotient de $\mathsf{OrdPart}_{\pm\ell}^*$. Le produit et le coproduit de $\mathsf{SchrCamb}_\ell$ et $\mathsf{SchrCamb}_\ell^*$ peuvent être directement décrit par des opérations combinatoires sur les ℓ-uplets Schröder-Cambrian, similaires aux opérations décrites dans les paragraphes 6.3.2, 6.3.3, 7.2.2 et 7.2.3.

Conclusion

De nombreuses perspectives de recherche sont naturellement apparues tout au long de notre étude.

Intervalles-posets

Intervalles-posets sur d'autres ordres

Comme expliqué dans la partie II, la définition des intervalles-posets de l'ordre de Tamari dépend fortement du lien entre le treillis de Tamari et l'ordre faible sur les permutations. Les intervalles-posets s'étant avérés être une représentation particulièrement appropriée à l'étude des intervalles de l'ordre de Tamari, on pourrait ainsi vouloir définir l'équivalent des intervalles-posets sur d'autres objets. Un pré-requis à ce type de généralisation est que l'ordre que l'on souhaite étudier soit un sous-treillis de l'ordre faible sur les permutations. L. F. Préville-Ratelle et X. Viennot souhaitent par exemple utiliser notre approche pour étudier les propriétés d'une structure de treillis $\mathrm{Tam}(v)$ qu'ils définissent dans [PRV14].

Intervalles-posets Cambriens

Un problème qui découle naturellement des parties II et III de ce mémoire est d'étudier des intervalles-posets dans le cadre des treillis Cambriens. Il est en effet possible d'utiliser des outils très similaires à ceux de la deuxième partie pour définir l'équivalent Cambrien des intervalles-posets du treillis de Tamari. Les définitions des forêts initiales et finales peuvent être adaptées aux arbres Cambriens. L'union de ces deux forêts calculées sur des arbres comparables produit toujours un poset dont les extensions linéaires correspondent précisément aux extensions linaires des arbres Cambriens de cet intervalle. Il est aussi possible d'obtenir une caractérisation des posets dont les extensions linéaires correspondent à un intervalle dans un treillis Cambrien. Cette généralisation fera l'objet d'une publication dans le futur.

Algèbre de Hopf d'intervalle-poset

Il existe déjà plusieurs algèbres de Hopf dont les bases sont indicées par des posets [Ehr96, FM15]. Avec V. Pilaud et V. Pons, nous avons construit des sous-algèbres

de Hopf d'une algèbre de posets dont les bases sont indixées par les intervalles-posets de différents ordres. On construit en effet une hiérarchie d'algèbres de Hopf dont les bases sont indixées par : les posets, les intervalles de l'ordre faible sur les permutations, les intervalles de l'ordre de Tamari et les intervalles du treillis booléen. Dans cette liste, chaque algèbre est une sous-algèbre de Hopf de l'algèbre précédente.

Algèbre Cambrienne

Conjecture des arbres Cambriens jumeaux

Dans la partie III, la conjecture 107 sur les arbres Cambriens jumeaux est encore ouverte. Après avoir testé informatiquement ce fait, nous avons envisagé plusieurs approches pour prouver ce résultat. Nous avons tout d'abord essayer de prouver le fait que l'union de deux arbres dont les canopées sont opposées est acyclique en considérant les arbres Cambriens comme des graphes particuliers au sein desquels nous étudions les chemins. N'ayant pas réussi à conclure avec cette méthode nous avons essayé de prouver algorithmiquement ce résultat en élaborant un algorithme qui, étant donné une paire d'arbres Cambriens dont les canopées sont opposées, construit une des extensions linéaires qu'ils ont en commun. Cette approche n'ayant pas été concluante, un travail futur serait d'utiliser d'autres approches pour trouver une solution à ce problème.

Nombres Baxter-Cambriens

Dans le paragraphe 6.1.5, plusieurs questions d'énumérations restent ouvertes. La proposition 121 et la remarque 122 laissent supposer qu'une combinatoire riche vive dans le monde Baxter-Cambrien entre la signature alternante et la signature constante.

Problèmes d'énumération

Dans la deuxième partie de ce mémoire, plusieurs propriétés d'ordre algébrique restent à étudier. Comme dans le cas de l'algèbre Cambrienne, il serait possible de faire une étude plus poussée des nombres d'éléments indécomposables des algèbres Baxter-Cambriennes, des ℓ-uplets Cambriens, des arbres Schröder-cambriens et des ℓ-uplets Schröder-Cambriens.

Bibliographie

[ASU86] Alfred V Aho, Ravi Sethi, and Jeffrey D Ullman. *Compilers, Principles, Techniques*. Addison wesley, 1986.

[AVL62] Georgii Adelson-Velsky and Evguenii Landis. An algorithm for the organization of information. *Soviet Mathematics Doklady*, 3 :1259–1263, 1962.

[BBMF11] Nicolas Bonichon, Mireille Bousquet-Mélou, and Éric Fusy. Baxter permutations and plane bipolar orientations. *Sém. Lothar. Combin.*, 61A :Art. B61Ah, 29, 2009/11.

[BH08] Pierre Baumann and Christophe Hohlweg. A Solomon descent theory for the wreath products $G \wr \mathfrak{S}_n$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(3) :1475–1538 (electronic), 2008.

[BH06] Nantel Bergeron and Christophe Hohlweg. Coloured peak algebras and Hopf algebras. *J. Algebraic Combin.*, 24(3) :299–330, 2006.

[BHKN01] François Boulier, Florent Hivert, Daniel Krob, and Jean-Christophe Novelli. Pseudo-permutations. II. Geometry and representation theory. In *Discrete models : combinatorics, computation, and geometry (Paris, 2001)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AA, pages 123–132 (electronic). Maison Inform. Math. Discrèt. (MIMD), Paris, 2001.

[Bir79] Garrett Birkhoff. *Lattice theory*, volume 25 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, R.I., third edition, 1979.

[BLL98] François Bergeron, Gilbert Labelle, and Pierre Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67. Cambridge University Press, 1998.

[BMFPR11] Mireille Bousquet-Mélou, Éric Fusy, and Louis-François Préville-Ratelle. The number of intervals in the m-Tamari lattices. *Electron. J. Combin.*, 18(2) :Paper 31, 26, 2011.

[BPR12] François Bergeron and Louis-François Préville-Ratelle. Higher trivariate diagonal harmonics via generalized Tamari posets. *J. Comb.*, 3(3) :317–341, 2012.

[BW91] Anders Björner and Michelle L. Wachs. Permutation statistics and linear extensions of posets. *J. Combin. Theory Ser. A*, 58(1) :85–114, 1991.

[BZ09] Nantel Bergeron and Mike Zabrocki. The Hopf algebras of symmetric functions and quasi-symmetric functions in non-commutative variables are free and co-free. *J. Algebra Appl.*, 8(4) :581–600, 2009.

[Car07] Pierre Cartier. A primer of Hopf algebras. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. II*, pages 537–615. Springer, Berlin, 2007.

[Cay57] Arthur Cayley. Xxviii. on the theory of the analytical forms called trees. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 13(85) :172–176, 1857.

[CCP13] Frédéric Chapoton, Grégory Châtel, and Viviane Pons. Two bijections on tamari intervals. *arXiv preprint arXiv :1311.4382*, 2013.

[CGHK78] Fan R. K. Chung, Ronald L. Graham, Verner E. Hoggatt, Jr., and Mark Kleiman. The number of Baxter permutations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 24(3) :382–394, 1978.

[Cha07] Frédéric Chapoton. Sur le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari. *Sém. Lothar. Combin.*, 55 :Art. B55f, 18 pp., 2005/07.

[Cha00] Frédéric Chapoton. Algèbres de Hopf des permutahèdres, associahèdres et hypercubes. *Adv. Math.*, 150(2) :264–275, 2000.

[Cha13] Frédéric Chapoton. Flows on rooted trees and the Menous-Novelli-Thibon idempotents . *À paraître dans Mathematica Scandinavica*, 2013. arXiv :1203.1780.

[Cor09] Thomas H Cormen. *Introduction to algorithms*. MIT press, 2009.

[CP14] Grégory Chatel and Vincent Pilaud. The Cambrian and Baxter-Cambrian Hopf Algebras. *arXiv preprint arXiv :1411.3704*, 2014.

[CP15] Grégory Châtel and Viviane Pons. Counting smaller elements in the Tamari and m-Tamari lattices. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 134 :58–97, 2015.

[CS98] Ivan Chajda and Vacláv Snášel. Congruences in ordered sets. *Math. Bohem.*, 123(1) :95–100, 1998.

[DG96] Serge Dulucq and Olivier Guibert. Stack words, standard tableaux and Baxter permutations. In *Proceedings of the 6th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (New Brunswick, NJ, 1994)*, volume 157, pages 91–106, 1996.

[DG98] Serge Dulucq and Olivier Guibert. Baxter permutations. In *Proceedings of the 7th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Noisy-le-Grand, 1995)*, volume 180, pages 143–156, 1998.

[DHNT11] Gérard Duchamp, Florent Hivert, Jean-Christophe Novelli, and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions VII : free quasi-symmetric functions revisited. *Ann. Comb.*, 15(4) :655–673, 2011.

[DHT02] Gérard Duchamp, Florent Hivert, and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions. VI. Free quasi-symmetric functions and related algebras. *Internat. J. Algebra Comput.*, 12(5) :671–717, 2002.

[DP02] Brian A. Davey and Hillary A. Priestley. *Introduction to lattices and order.* Cambridge University Press, New York, second edition, 2002.

[Ehr96] Richard Ehrenborg. On posets and hopf algebras. *advances in mathematics*, 119(1) :1–25, 1996.

[FFNO11] Stefan Felsner, Éric Fusy, Marc Noy, and David Orden. Bijections for Baxter families and related objects. *J. Combin. Theory Ser. A*, 118(3) :993–1020, 2011.

[Fin13a] Findstat : The combinatorial statistic finder, www.findstat.org, 2013. Statistic St000011 - http ://www.findstat.org/StatisticsDatabase/St000011/.

[Fin13b] Findstat : The combinatorial statistic finder, www.findstat.org, 2013. Statistic St000061 - http ://www.findstat.org/StatisticsDatabase/St000061/.

[FM15] Loïc Foissy and Claudia Malvenuto. The hopf algebra of finite topologies and t-partitions. *Journal of Algebra*, 438 :130–169, 2015.

[Fol96] James D. Foley. *Computer Graphics : Principles and Practice.* Addison-Wesley Professional, 1996.

[Gir12] Samuele Giraudo. Algebraic and combinatorial structures on pairs of twin binary trees. *J. Algebra*, 360 :115–157, 2012.

[GNR07] Jean-Pierre Gazeau, Jaroslav Nešetřil, and Branislav Rovan. *Physics and Theoretical Computer Science : From Numbers and Languages to (quantum) Cryptography Security.* NATO Security Through Science Series. IOS Press, 2007.

[GV85] Ira Gessel and Gérard Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Adv. in Math.*, 58(3) :300–321, 1985.

[HL07] Christophe Hohlweg and Carsten Lange. Realizations of the associahedron and cyclohedron. *Discrete Comput. Geom.*, 37(4) :517–543, 2007.

[HLT11] Christophe Hohlweg, Carsten Lange, and Hugh Thomas. Permutahedra and generalized associahedra. *Adv. Math.*, 226(1) :608–640, 2011.

[HNT05] Florent Hivert, Jean-Christophe Novelli, and Jean-Yves Thibon. The algebra of binary search trees. *Theoret. Comput. Sci.*, 339(1) :129–165, 2005.

[HT72] Samuel Huang and Dov Tamari. Problems of associativity : A simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13 :7–13, 1972.

[IO13] Kiyoshi Igusa and Jonah Ostroff. Mixed cobinary trees. Preprint, arXiv:1307.3587, 2013.

[Joy81] André Joyal. Une théorie combinatoire des séries formelles. *Advances in mathematics*, 42(1) :1–82, 1981.

[JR79] Saj-Nicole Joni and Gian-Carlo Rota. Coalgebras and bialgebras in combinatorics. *Stud. Appl. Math.*, 61(2) :93–139, 1979.

[KLN+01] Daniel Krob, Matthieu Latapy, Jean-Christophe Novelli, Ha-Duong Phan, and Sylviane Schwer. Pseudo-Permutations I : First Combinatorial and Lattice Properties. 13th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2001), 2001.

[Lod04] Jean-Louis Loday. Realization of the Stasheff polytope. *Arch. Math. (Basel)*, 83(3) :267–278, 2004.

[LP13] Carsten Lange and Vincent Pilaud. Using spines to revisit a construction of the associahedron. Preprint, arXiv:1307.4391, 2013.

[LR98] Jean-Louis Loday and María O. Ronco. Hopf algebra of the planar binary trees. *Adv. Math.*, 139(2) :293–309, 1998.

[LR12] Shirley Law and Nathan Reading. The Hopf algebra of diagonal rectangulations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 119(3) :788–824, 2012.

[LS96] Alain Lascoux and Marcel-Paul Schützenberger. Treillis et bases des groupes de coxeter. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 3(2), 1996.

[Mac37] Holbrook Mann MacNeille. Partially ordered sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 42(3) :416–460, 1937.

[Mal79] Colin L. Mallows. Baxter permutations rise again. *J. Combin. Theory Ser. A*, 27(3) :394–396, 1979.

[Mek07] Aram Z Mekjian. Generalized statistical models of voids and hierarchical structure in cosmology. *The Astrophysical Journal*, 655(1) :1, 2007.

[MHPS12] Folkert Müller-Hoissen, Jean Marcel Pallo, and Jim Stasheff, editors. *Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures. Tamari Memorial Festschrift*, volume 299 of *Progress in Mathematics*. Springer, New York, 2012.

[MR95] Claudia Malvenuto and Christophe Reutenauer. Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra. *J. Algebra*, 177(3) :967–982, 1995.

[NT06] Jean-Christophe Novelli and Jean-Yves Thibon. Construction de trigèbres dendriformes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(6) :365–369, 2006.

[NT10] Jean-Christophe Novelli and Jean-Yves Thibon. Free quasi-symmetric functions and descent algebras for wreath products, and noncommutative multi-symmetric functions. *Discrete Mathematics*, 310(24) :3584–3606, 2010.

[oCHL+06] Royal Society of Chemistry, Alan Hinchliffe, Richard Lewis, Michael Springborg, and Adrian Mulholland. *Chemical Modelling : Applications and Theory.* Number vol. 4 in Chemical Modelling : Applications and Theory. Royal Society of Chemistry, 2006.

[OEIa] On-line encyclopedia of integer sequences. Sequence A001035 http ://oeis.org/A001035.

[OEIb] On-line encyclopedia of integer sequences. Sequence A000260 http ://oeis.org/A000260.

[OEI10] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at http://oeis.org, 2010.

[Ost12] Massimo Ostilli. Cayley trees and bethe lattices : A concise analysis for mathematicians and physicists. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 391(12) :3417–3423, 2012.

[Pon15] Viviane Pons. A lattice on decreasing trees : the metasylvester lattice. *arXiv preprint arXiv :1501.04868*, 2015.

[PR06] Patricia Palacios and María O. Ronco. Weak Bruhat order on the set of faces of the permutohedron and the associahedron. *J. Algebra*, 299(2) :648–678, 2006.

[Pri13] Jean-Baptiste Priez. A lattice of combinatorial Hopf algebras, Application to binary trees with multiplicities. Preprint arXiv:1303.5538, 2013.

[PRV14] Louis-François Préville-Ratelle and Xavier Viennot. An extension of Tamari lattices. *arXiv preprint arXiv :1406.3787*, 2014.

[Rea05] Nathan Reading. Lattice congruences, fans and Hopf algebras. *J. Combin. Theory Ser. A*, 110(2) :237–273, 2005.

[Rea06] Nathan Reading. Cambrian lattices. *Adv. Math.*, 205(2) :313–353, 2006.

[Rot78] Gian-Carlo Rota. Hopf algebra methods in combinatorics. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*, volume 260 of *Colloq. Internat. CNRS*, pages 363–365. CNRS, Paris, 1978.

[Sch61] Craige Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math.*, 13 :179–191, 1961.

[Sta63] Jim Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108(2) :293–312, 1963.

[Sta99] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Sta08] Richard P Stanley. Catalan addendum, 2008.

[Swe69] Moss. E. Sweedler. *Hopf algebras*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[Szá71] Gábor Szász. *Théorie des Treillis. Traduit de l'angl. par L. Chambadal*. Akad. kiadó, 1971.

[Tam62] Dov Tamari. The algebra of bracketings and their enumeration. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 10 :131–146, 1962.

[Vie81] Xavier Viennot. A bijective proof for the number of baxter permutations. 3rd Seminaire Lotharingien de Combinatoire, Le Klebach, 1981.

[Vie07] Xavier Viennot. Catalan tableaux and the asymmetric exclusion process. In *19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2007)*. 2007.

[Wes90] Julian West. *Permutations with restricted subsequences and stack-sortable permutations*. PhD thesis, Ph. D. thesis, MIT, 1990.

[YCCG03] Bo Yao, Hongyu Chen, Chung-Kuan Cheng, and Ronald Graham. Floorplan Representations : Complexity and connections. *ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems*, 8(1) :55–80, 2003.