Contributions à l'étude des déformations différées des matériaux composites viscoélastiques

Francis Lavergne

▶ **To cite this version:**

Francis Lavergne. Contributions à l'étude des déformations différées des matériaux composites viscoélastiques. Matériaux. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1171 . tel-01300510

HAL Id: tel-01300510
https://pastel.hal.science/tel-01300510

Submitted on 11 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

Thèse présentée pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Paris-Est

Spécialité : Matériaux et Structures

par

Francis Lavergne

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES DÉFORMATIONS DIFFÉRÉES DES MATÉRIAUX COMPOSITES VISCOÉLASTIQUES

Composition du jury de thèse :

M.	Martin LÉVESQUE	Professeur, Polytechnique Montréal	*Rapporteur*
M.	Renaud MASSON	Ingénieur de Recherche, CEA Cadarache	*Rapporteur*
M.	Michel BORNERT	Chercheur ENPC, Laboratoire Navier	*Examinateur*
M.	Pierre GILORMINI	Directeur de Recherche CNRS, PIMM	*Examinateur*
M.	Pierre SUQUET	Directeur de Recherche CNRS, LMA	*Examinateur*
M.	Julien SANAHUJA	Chercheur, EdF R&D	*Examinateur*
M.	Charles TOULEMONDE	Chercheur, EdF R&D	*Examinateur*
M.	Karam SAB	Directeur de Recherche IFSTTAR, Laboratoire Navier	*Directeur de thèse*

Remerciements

J'ai la certitude que thèse n'aurait pas eu lieu sans l'engagement de mes encadrants, Karam Sab, Michel Bornert du coté du Laboratoire Navier et Julien Sanahuja et Charles Toulemonde du coté d'EdF R&D. Je crois aussi qu'elle est marquée de bout en bout par leurs apports scientifiques et je leur en suis reconnaissant. J'ai débuté en homogénéisation au Master Mécanique des Matériaux et des Structures et au département Génie Mécanique et Matériaux de l'École des Ponts ParisTech, grâce aux cours de Karam Sab et de Michel Bornert. Julien Sanahuja et Charles Toulemonde m'ont accompagné de près dans ma découverte du matériau béton et de l'informatique scientifique, depuis le stage long que j'ai pu faire sous leur direction avant la thèse. Je les remercie tous pour leurs enseignements, leurs remarques, leur écoute et leur patience.

Je tiens à remercier M. Martin Lévesque et M. Renaud Masson pour avoir accepter de rapporter ce mémoire de thèse. Je dois à Martin Lévesque mes premières utilisations de la méthode FFT (Moulinec and Suquet, 1998a) et de l'algorithme de Lubachevsky et Stillinger Lubachevsky and Stillinger (1990) lors d'un stage à Polytechnique Montréal. Je souhaite vivement remercier M. Pierre Gilormini de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury et M. Pierre Suquet pour avoir consacré un temps précieux à l'examen ce travail.

J'ai la chance d'avoir passé ces trois ans au sein d'équipes constituées de gens très sympathiques et bienveillants. Je remercie donc mes collègues du Laboratoire Navier pour les discussions scientifiques que nous avons pu partager. Je remercie aussi les chercheurs et ingénieurs du bâtiment C24 du site des Renadières d'EdF R&D et du groupe T25. Je suis très reconnaissant à Nicolas Prompt et Hing Ip Wong, chefs du groupe T25, pour avoir suivi la thèse avec attention. Je remercie aussi Jan Van Der Lee et Abderrahim Al Mazouzi pour l'appui du Material Ageing Institute.

Je remercie aussi les personnes qui m'ont aidé à découper et à tomographier le béton : Christophe Bernard, Camille Chateau, Hocine Delmi, Myriam Hervé-Szinetar, Alexis Legrix et François Martineau. Je dois à Nicolas Lenoir et à Patrick Aimedieu une aide indispensable : il m'ont appris à utiliser le microtomographe du Laboratoire Navier, obtenu en partie grâce à la Fédération Francilienne de Mécanique. Je remercie enfin Rachida Atmani, Chaveli Bitsindou et Geraldine Vue qui se sont occupées des aspects administratifs et pratiques de la thèse.

Je remercie vivement les thésards du couloir du premier étage de l'aile Vicat de l'École des Ponts. Je salue aussi ceux avec qui j'ai partagé trois bureaux au cours de ces trois ans : Ababbarcar, Abdessamad, Daïna, Jean Luc, Michele, Nam Nghia, Navid, Vinh Phuc et Yassine.

Je remercie enfin Jean-François Barthélémy et mes nouveaux collègues du Centre des Techniques d'Ouvrages d'Art (CEREMA/DTecITM) pour être venu en nombre à ma soutenance de thèse du 17 décembre. J'ai la chance de pouvoir continuer à avoir une activité scientifique et technique et j'espère bien être en mesure de saisir cette opportunité !

De nombreux logiciels libres ont été utilisés au cours de ce travail comme Debian, gcc, CMake, PETSc... Merci à leurs développeurs qui rendent un service public planétaire !

Merci à ma Maman, mon Papa et à mes frères Vincent et Thomas !

Résumé

L'estimation des pertes de précontrainte liées aux déformations différées des bétons est un sujet d'intérêt pour la maintenance à long terme d'ouvrages de génie civil tels que les enceintes de confinement des centrales nucléaires.

L'objectif de ce travail de doctorat est d'améliorer la prise en compte des particularités morphologiques de la microstructure des bétons pour estimer le comportement à long terme des bétons précontraints. Cette étude est limitée au cadre de la mécanique des matériaux et à la théorie de l'homogénéisation : le béton y est décrit comme un matériau composite constitué de granulats élastiques enchâssés dans une matrice cimentaire viscoélastique linéaire vieillissante. Les outils novateurs mis en œuvre sont la tomographie par rayons X et la simulation numérique 3D.

On distingue sur les images de tomographie les granulats, la matrice cimentaire et l'air occlus. Mais l'extraction de données morphologiques de ces images est une tâche difficile à systématiser. En revanche, la construction numérique de microstructures matrice-inclusions et la simulation numérique 3D en viscoélasticité linéaire se sont montrées assez robustes pour permettre l'étude de l'influence de paramètres morphologiques (fraction volumique, granulométrie et forme des inclusions) sur le comportement macroscopique estimé. Le schéma d'homogénéisation semi-analytique de Sanahuja (Sanahuja, 2013b) dédié aux matériaux composites viscoélastiques linéaires vieillissants a été étendu aux cas d'inclusions ellipsoïdales pour étudier l'influence du rapport d'aspect des inclusions sur le comportement viscoélastique vieillissant d'un béton. Il a été ainsi montré que la forme des granulats et leur rapport d'aspect n'ont pas d'effet sensible sur les complaisances estimées. Les estimations du comportement macroscopique par les simulations numériques 3D restent proches de celles obtenues par les schémas d'homogénéisation semi-analytiques. Ainsi, il reste difficile d'expliquer la dispersion des résultats expérimentaux de Granger (Granger, 1995) par l'homogénéisation, dans la mesure où les bétons de Granger ont des formulations similaires. Enfin, les simulations numériques 3D permettent l'estimation des contraintes dans la matrice cimentaire lorsque l'on impose à un échantillon de béton une histoire de chargement similaire à celle rencontrée sur les ouvrages. Il a été mis en évidence une évolution des contraintes et des déformations locales au cours du temps. Pour le chargement étudié, les valeurs de contraintes locales rencontrées dans la matrice cimentaire ne semblent pas imposer l'introduction de phénomènes d'endommagement.

Les outils développés ont aussi pu être appliqués avec succès à d'autre matériaux. L'estimation des contraintes locales a été valorisée lors de l'étude de la rupture différée d'un plastique renforcé par des fibres de verre, un problème qui peut être rencontré sur les conduites d'eau. Enfin, la possibilité d'étudier une matrice à coefficient de Poisson variable renforcée par des inclusions ellipsoïdales a été ajoutée par approximation pour compléter les méthodes d'homogénéisation des matériaux viscoélastiques vieillissants. Cette dernière méthode a été validée sur des enrobés bitumineux puis utilisée pour prévoir les déformations différées d'un béton fibré.

Abstract

Prestress losses due to creep of concrete is a matter of interest for long term operations of containment buildings. In the present study, the time-dependent strains of concretes are estimated starting from morphological details of the microstructure. X-ray tomography provides a new way to spot such details and 3D numerical simulations are performed to estimate the time-dependent strains. Concrete is described as a composite material made of aggregates embedded in a cementitious matrix.

On X-ray tomography images, aggregates can be separated from the cementitious matrix and entrained air. But extracting morphological parameters remains a difficult task. Nevertheless, building numerical matrix-inclusion microstructures and performing 3D numerical simulations proved a reliable way to estimate the influence of morphological features such as a the volume fraction of aggregates or the sieve curve on the time-dependent strains of concretes. Moreover, the semi-analytic homogenization scheme of Sanahuja(Sanahuja, 2013b) dedicated to linear aging viscoelastic composite materials has been extended to the case of ellipsoidal inclusions to study the influence of the aspect ratio of the aggregates on the time-dependent strains of concretes. It is shown that neither the shape of the aggregates nor their aspect ratio affect the estimated overall time-dependent strains of concrete. Indeed, 3D numerical estimates of the overall time-dependent behavior of concrete are similar to the ones produced by semi-analytical homogenization schemes. Hence, explaining the differences between the experimental measurements of the time-dependent strains of concretes performed by Granger(Granger, 1995) remains challenging given the similarities between their mix designs. Lastly, 3D numerical simulations are performed on a sample of concrete to estimate the local stress in the cementitious matrix, the history of loading being representative of the one experienced in a containment building. It is shown that local stresses evolve as time goes by. Nevertheless, the values of the local stress in the cementitious paste do not require to account for damage of concrete considering the loading conditions that were studied.

Other composite materials have also been studied by 3D numerical simulations and the mean field homogenization schemes. The estimates of the local stress produced by the 3D numerical simulations proved valuable to model the creep failure of a glass fiber-reinforced plastic, a material used to build water pipes. Lastly, the mean-field homogenization scheme is extended through an approximation to investigate the time-dependent strains of a composite material made of ellipsoidal inclusions embedded in a matrix featuring a time-dependent Poisson's ratio. This extension is validated on asphalt concrete and then applied to estimate the time-dependent strains of a fiber-reinforced concrete.

Table des matières

Remerciements 1
Résumé 2
Abstract 3

Introduction **8**
0.1 Les enceintes de confinement à double parois 8
0.1.1 Fonction 8
0.1.2 L'intérêt de la précontrainte 9
0.1.3 Une précontrainte qui diminue 10
0.2 Le comportement différé du béton 10
0.2.1 Modèles réglementaires ou académiques 10
0.2.2 Quelques résultats expérimentaux sur le fluage propre . . 14
0.2.3 Le cadre théorique de la viscoélasticité linéaire vieillissante 18
0.3 Le béton comme un matériau composite 20
0.4 Les méthodes d'homogénéisation des matériaux viscoélastiques . 25
0.5 Démarche adoptée pour ce travail 26
0.5.1 Problématique 26
0.5.2 Utilisation de l'imagerie et de la simulation numérique . . 27

I Etude du comportement à long terme des bétons précontraints par l'imagerie et la simulation numérique **29**
Introduction 30

1 Observation de la microstructure par tomographie X **31**
1.1 La tomographie par rayons X 31
1.1.1 Principe de la tomographie 31
1.1.2 Interaction entre les rayons X et le béton 32
1.1.3 Reconstruction d'images et sources d'erreurs 33
1.2 Une démarche d'homogénéisation sur des mortiers modèles . . . 37
1.2.1 Données d'entrée et cheminement 38
1.2.2 Résultats de la borne de Hashin-Shtrikman 40
1.2.3 Utilisation de la tomographie 45
1.3 Le béton observé à plusieurs échelles 51
1.3.1 Préparations des éprouvettes et conditions d'acquisition . 53
1.3.2 Observation de deux bétons 56

2 Investigation of the effect of aggregates'morphology on concrete creep properties by numerical simulations 62
2.1 Simulation of viscoelastic matrix-inclusion microstructures 64
2.1.1 Generation of matrix-inclusion microstructures 64
2.1.2 Numerical determination of the effective viscoelastic properties of heterogeneous materials 68
2.2 Comparison of numerical and micromechanics methods 80
2.2.1 Semi-analytic methods 80
2.2.2 $n+1-$phase spherical model to account for the Interfacial Transition Zone 82
2.2.3 Comparison with numerical estimates 83
2.2.4 Discussions 84

3 Homogenization schemes for aging linear viscoelastic matrix-inclusion composite materials with elongated inclusions 87
3.1 Extension of the model of Sanahuja to ellipsoidal inclusions . . . 89
3.1.1 Estimating the overall time-dependent strains 89
3.1.2 The hypothesis of a time-independent Poisson's ratio . . . 91
3.1.3 Eshelby's solution for ellipsoidal inclusions 93
3.1.4 Extension of homogenization schemes 94
3.2 Applications of the extended Mori-Tanaka scheme 97
3.2.1 Numerical computation of Volterra's operators 97
3.2.2 Validation against reference solutions 98
3.2.3 Validation against full 3D numerical simulations 100
3.2.4 New possibilities : studying influence of aggregates'aspect ratio 106
3.2.5 Discussions 108

4 Les leçons retirées des modèles d'homogénéisation 113
4.1 Quelques mots sur le modèle B3 de viscoélasticité linéaire vieillissante 113
4.1.1 La tendance logarithmique des déformations différées à long terme 113
4.1.2 Viscoélasticité linéaire vieillissante 116
4.2 Estimations des complaisances des bétons des enceintes 119
4.2.1 Estimation des paramètres d'entrée 119
4.2.2 Résultats obtenus 121
4.3 Analyse et Perspectives 125
4.4 Simulation numérique 3D d'un volume de béton sous précontrainte biaxiale 125
4.5 Cadre de la simulation 127
4.5.1 Histoire du chargement 127
4.5.2 Chargement imposé à la microstructure 129
4.5.3 Une surveillance des contraintes locales 131
4.6 Les résultats de la simulation numérique 3D 133
4.6.1 Contraintes et déformations macroscopiques 133
4.6.2 Indicateurs des contraintes locales dans la microstructure 135
4.6.3 Une vision centrée sur la modélisation du matériau 141
Conclusion 146

II Upscaling the aging viscoelastic behavior of composite materials 148
Introduction 149

5 Estimation of creep strain and creep failure of a glass reinforced plastic by semi-analytical methods and 3D numerical simulations. 150
5.1 Microstructure : geometry and mechanical properties 152
5.1.1 A short-fiber reinforced plastic 152
5.1.2 Failure mode 153
5.1.3 Polymers : Temperature shift and Time shift approach . . 154
5.1.4 Identification of the viscoelastic parameters 155
5.2 Homogenization of aging viscoelastic materials 157
5.2.1 Micromechanical models 157
5.2.2 3D numerical computations 159
5.2.3 Convergence study 161
5.3 Results and discussions 166
5.3.1 Overall properties 166
5.3.2 Stress concentrations 167
5.3.3 Prediction of lifetime of the material under tensile stress . 168
5.3.4 Discussion 171

6 An approximate multiscale model for aging viscoelastic materials exhibiting time-dependent Poisson's ratio 174
6.1 Semi-analytical homogenization of aging viscoelastic materials . . 176
6.1.1 Aging viscoelasticity and time-independent Poisson's ratio 176
6.1.2 Existing framework for homogenization 177
6.1.3 The approximated viscoelastic Eshelby's tensor 178
6.1.4 Applying the approximated scheme to non-aging asphalt concrete 181
6.2 Applying the proposed scheme to fiber-reinforced concrete 185
6.2.1 Fiber reinforced concrete as a multi-scale material 185
6.2.2 Results on fiber-reinforced concrete 189
6.2.3 Discussions 192
Conclusion 196

Conclusion 197

A Cadre thermodynamique de la viscoélasticité linéaire vieillissante 201

B Integration on the time step for the exponential algorithm 205

C FFT solvers 207

D Hashin-Shtrikman bound and Laplace-Carson transform 209
D.1 The correspondence principle 209
D.2 Inverting the Laplace-Carson transform 210

E The Mori-Tanaka homogenization scheme **211**
E.1 Eshelby's tensor 211
E.2 Mori-Tanaka estimate 212

F Definition of Volterra's operators and properties **213**

Introduction

0.1 Les enceintes de confinement à double parois

0.1.1 Fonction

Pour les Réacteurs à Eau Pressurisée (REP) du parc nucléaire d'Électricité de France (EDF), l'enceinte du bâtiment réacteur fait partie de la troisième barrière assurant le confinement des matières radioactives après la gaine du combustible et le circuit primaire. C'est à ce titre qu'elle constitue un élément important pour la sûreté, au sens du Code de l'Environnement, Article L591-1 (Cod) : elle doit limiter les effets d'un éventuel accident.

La conception des enceintes a évolué au cours du temps. Les premiers paliers français, d'une puissance électrique de 900MW, sont dotés d'une enceinte en béton précontraint autour d'un liner en acier : le liner assure la fonction d'étanchéité et le béton celle de la tenue mécanique. Les paliers suivants, d'une puissance électrique de 1300MW à 1450MW, présentent deux enceintes. L'espace entre les enceintes est en dépression pour éviter toute fuite vers l'extérieur en cas d'accident. L'enceinte intérieure, en béton précontraint, assure l'étanchéité et la tenue mécanique. C'est cet ouvrage qui fait l'objet de la présente étude. Le réacteur Réacteur Pressurisé Européen (EPR) présente deux enceintes et un liner métallique : l'enceinte externe a ici pour fonction de protéger le réacteur des agressions extérieures.

La fonction des enceintes à double parois est précisée dans les Décrets d'Autorisation de Création des sites nucléaires(DAC, 1985) :

> L'enceinte interne sera en particulier conçue pour supporter, sans perte d'intégrité, les sollicitations résultant d'un accident consistant en la rupture circonférentielle complète et soudaine d'une tuyauterie du circuit primaire avec séparation totale des extrémités. Dans les conditions de cet accident, le taux de fuite maximal de cette enceinte sera inférieur à 1.5% par jour de la masse de gaz contenue dans cette enceinte.

L'efficacité de l'enceinte est vérifiée avant la mise en service du réacteur et lors des visites décennales. L'ouvrage subit alors une épreuve en air, calquée sur les dispositions prises pour les équipements métalliques sous pression. L'opération prend de l'ordre de cinq jours et le débit de fuite ne doit pas dépasser 1,125% par jour à la pression d'épreuve, de l'ordre de $p = 4,2$ bar entre l'intérieur et l'extérieur.

Si l'enceinte ne réussit pas l'épreuve avec un radier sec, celui-ci peut être noyé, ce qui serait le cas lors d'un accident. En cas d'échec, des travaux doivent

être entrepris avant une nouvelle épreuve. L'Autorité de Sûreté Nucléaire peut ne pas donner l'autorisation de redémarrer le réacteur tant que l'enceinte ne réussit pas cette épreuve. Des travaux de couverture de l'intérieur de l'enceinte par des matériaux à base de polymères peuvent être entrepris afin de restaurer une étanchéité satisfaisante. Pour exploiter efficacement ses installations, EDF anticipe ces opérations et développe des connaissances pour mieux cibler les besoins de maintenance(Galenne et al., 2014).

Par ailleurs, il doit être établi que le critère décrit dans le Décrets d'Autorisation de Création ne doit pas être dépassé entre les visites décennales. L'enceinte interne fait donc l'objet d'une surveillance attentive par son système d'auscultation : elle est dotée dès sa construction de nombreux dispositifs (pendules, cordes vibrantes en fils INVAR, dynamomètres sur les câbles de précontrainte...) pour suivre l'évolution des déformations de l'ouvrage.

En effet, comme tout ouvrage en béton précontraint, les déformations de l'enceinte évoluent au cours du temps.

0.1.2 L'intérêt de la précontrainte

En cas de pression interne dans l'enceinte de confinement et en l'absence de précontrainte, le béton serait sollicité en traction. La « formule du chaudronnier » permet de se faire rapidement une idée des efforts présents dans la section courante de l'enceinte, d'épaisseur $e = 90$cm (palier P4) à $e = 120$cm (paliers P'4 et N4). Le diamètre intérieur est pris égal à $D = 45$m (Granger, 1995). La contrainte verticale σ_{zz} doit retenir la pression qui s'exerce sur une coupe horizontale circulaire de l'enceinte. De même, la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ doit retenir la pression qui s'exerce sur une coupe verticale de l'enceinte.

$$\begin{array}{llll} \sigma_{zz} & \approx & \frac{D}{4e}p & \sigma_{\theta\theta} \approx \frac{D}{2e}p \\ \sigma_{zz} & \approx & 4\text{MPa} & \sigma_{\theta\theta} \approx 8\text{MPa} \end{array}$$

pour une épaisseur de $e = 120$cm et une pression d'épreuve de $p = 4.2$ bar. Ces chiffres sont supérieurs à la résistance à la traction des bétons, inférieure à 4MPa pour les résistances à compression de moins de 50MPa (AFNOR, 2005). Pour assurer la tenue mécanique de l'enceinte, des câbles en acier viennent donc comprimer le béton en permanence. Les câbles horizontaux assurent une précontrainte de l'ordre de 12MPa et les câbles verticaux une précontrainte de 8,5MPa. Ainsi, même en cas d'accident, le béton reste comprimé, ce qui assure la tenue mécanique de l'ouvrage et son étanchéité : une compression résiduelle de 1 MPa doit suffire à assurer la fermeture des microfissures créées par les gradients thermiques existants lors des premières heures après la mise en place du béton. **La fonction d'étanchéité est ainsi la plus limitante pour les bétons des enceintes 1300MW à 1450MW.** De fait, on note l'écart entre les contraintes estimées par la formule du chaudronnier et la précontrainte. Cet écart permet de prendre en compte plusieurs éléments (Tillequin and Costaz, 1997) :

- Les passages au travers de l'enceinte, comme le tampon d'arrivée matériel (TAM) peuvent perturber le tracé des câbles de précontrainte.
- La précontrainte verticale peut être renforcée pour tenir compte de chargements supplémentaires, comme ceux liés à un séisme.
- Les pertes de précontraintes liées aux déformations différées des matériaux sont anticipées.

0.1.3 Une précontrainte qui diminue

Une évolution de la précontrainte au cours du temps est donc un mode de vieillissement de la structure étudiée. Au cours du temps, les torons d'acier se détendent et le béton est de moins en moins comprimé. L'effet en est mesuré grâce au dispositif d'auscultation : on observe ainsi une augmentation de la déformation verticale et de la déformation circonférentielle de la structure au cours du temps. Il existe des différences entre les déformations mesurées sur les différents sites qui ne peuvent pas être expliquées par les seules différences de dimensions entre les enceintes (Granger, 1995). Pour comprendre ces différences, il nous faut descendre à l'échelle des matériaux.

La diminution différée de la tension des câbles a plusieurs origines physiques, liées aux comportements des matériaux :

- Les aciers peuvent se relaxer : sous une déformation constante, la contrainte de traction dans le toron diminue. Le béton est alors moins comprimé, ce qui devrait se traduire par une déformation différée positive, c'est-à-dire une élongation. L'enceinte devrait présenter une expension au cours du temps : ce n'est pas ce qui est mesuré par les dispositifs d'auscultation.
- Les bétons présentent des déformations différées importantes dans le dimensionnement des structures précontraintes. Ces déformations correspondent au retrait de séchage et au fluage du béton sous l'effet de la compression. Ces contributions s'additionnent pour former une déformation négative, un raccourcissement. Cela se traduit par une perte de précontrainte car la déformation des torons suit la déformation du béton.

Les différences de déformations différées entre les sites peuvent difficilement être expliquées par la relaxation des aciers. Les aciers utilisés étant des aciers à très basse relaxation, leur contribution à la déformation différée est limitée et leur fourniture est homogène. En revanche, les déformations différées du béton représentent une part importante de l'origine des pertes de précontrainte et les bétons utilisées sont différents d'une enceinte à l'autre. En effet, les ciments utilisés proviennent de cimenteries réparties sur le territoire français et les granulats sont prélevés dans une carrière proche du site d'implantation. On peut donc considérer qu'à chaque enceinte correspond un béton et essayer de prévoir les déformations différées de l'enceinte en fonction des constituants du béton.

0.2 Le comportement différé du béton

0.2.1 Modèles réglementaires ou académiques

Des modèles réglementaires ou académiques existent pour estimer les déformations différées des bétons. La déformation différée totale ε_t est souvent divisée en plusieurs contributions (RILEM TC107-CSP, 1998).

En l'absence d'effort extérieur et en l'absence d'échange d'eau avec le milieu environnant, le béton présente une déformation différée liée à son hydratation : le retrait endogène. Avant sa prise, le béton présente déjà une diminution de volume importante liée aux réactions chimiques, appelée la contraction Le Chatelier. Ces réactions perdurent après la prise du béton mais elles se traduisent alors par une déformation plus faible, cette fois liée aux forces capillaires modifiées par le changement de l'hygrométrie interne du matériau. Elle n'induit qu'une

faible perte de précontrainte dans la mesure où elle n'évolue de façon importante que dans les premiers mois après la prise, c'est à dire bien avant la mise en précontrainte de l'enceinte. Sa prise en compte est néanmoins nécessaire dans l'exploitation des essais de fluage (Granger, 1995; Grasley and Lange, 2007).

En l'absence d'effort extérieur, une éprouvette de béton qui sèche présente une déformation supérieure au retrait endogène : cette contribution est appelée le retrait de séchage ou retrait de dessiccation ε_r. Là encore, des effets capillaires sont à l'œuvre, mais la modification de l'humidité interne est liée au séchage du béton. La cinétique de séchage étant gouvernée par un processus de diffusion, le temps de séchage quadruple lorsque l'épaisseur de l'ouvrage double. Le séchage de l'enceinte se produit ainsi tout au long de la vie de l'ouvrage, même si le phénomène est accéléré par la température (Granger, 1995). Il faut aussi noter que la modélisation du séchage ne se résume pas à une simple équation de diffusion sur la teneur en eau, du fait de non-linéarités : le coefficient de diffusion dépend de la teneur en eau via l'isotherme de désorption(Coussy, 1995; Granger, 1995).

En l'absence d'échange d'eau avec le milieu environnant, sous l'effet d'une contrainte constante, la déformation d'une éprouvette de béton évolue : le béton présente en fait un comportement viscoélastique. Cette déformation de fluage propre ε_{fp} représente une part non-négligeable des pertes de précontrainte et des déformations différées des bétons. C'est ce comportement qui fera l'objet d'une attention particulière dans la présente étude.

Sous l'effet combiné d'un effort extérieur et du séchage, lors d'un essai de fluage séchant, les éprouvettes de béton présentent une déformation différée supérieure à la somme des contributions exposées précédemment : il s'agit de l'effet Pickett(Pickett, 1942). Cette contribution supplémentaire est appelée fluage de dessiccation ε_{fd}.

Les modèles réglementaires ou académiques permettent de se faire une idée de l'importance des différentes composantes. Parmi ces modèles (Berthollet, 2003; ACI, 2008), on peut citer :

- Le modèle de Béton Précontraint aux États Limites (BPEL) 1991 a été le modèle réglementaire en France jusqu'en 2005.
- Le modèle Eurocode 2 est le modèle réglementaire actuel en Europe.
- Le modèle ACI209 a été le modèle utilisé dans le dimensionnement des structures en Amérique du Nord. Il date des années 1970.
- Le modèle académique B3 de Bazant et Baweja (Bažant and Baweja, 1995a,b) s'appuie sur des modèles physiques pour expliquer les déformations différées des matériaux cimentaires. Il a été récemment mis à jour pour donner le modèle ...B4 (RILEM TC-242-MDC, 2015).
- Le modèle CEB-FIB 1999, dérivé du modèle CEB-FIB 1990, permet une estimation du retrait d'autodessiccation : il est a noter que cette composante n'évolue que très peu après la première année.
- Le modèle GL2000 de Gardner et Lockman(Gardner, 2004) est une modification du modèle CEB-FIB 1990.

Les estimations des déformations différées de ces modèles peuvent être comparées sur un béton donné, choisi proche de ceux utilisés dans les enceintes, dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1. De même, l'épaisseur e est fixée à 120cm, l'humidité relative à 70% et le temps du chargement à un an. On observe alors des différences entre les déformations différées estimées (Tab. 2). En particulier, certains modèles introduisent un temps caractéristique pour le

Résistance à la compression à 28 jours	fc_{28}	45MPa
Rapport eau/ciment	w/c	0,5
Quantité de ciment	c	350 kg/m^3
Fines sur granulat	f/a	0,017
Granulat sur ciment	a/c	7.16
Humidité relative	RH	50%
Taille caractéristique	e	120cm
Affaissement au cône d'Abraham	slump	7cm
Temps de cure	t_c	7 jours
Chargement uniaxial	σ	10MPa
Temps de chargement	t_0	365 jours

TABLE 1 – Les caractéristiques d'un béton et les dimensions sont choisies pour tester les différents modèles sur une configuration proche de celle d'une enceinte. Les modèles utilisent chacun une partie des données.

séchage τ_{sh}. Pour le modèle B3, il s'écrit :

$$\tau_{sh} = 0.085 t_c^{-0.08} fc_{28}^{-0.25} e^2$$

Avec t_c en jours, fc_{28} en MPa et e en mm, on trouve un temps caractéristique de $\tau_{sh} = 44000$ jours, soit plus d'un siècle ! L'eurocode introduit lui aussi un temps caractéristique τ_{sh} qui vaut $\tau_{sh} = 0.035e^2$ (e toujours en mm) soit environ 50000 jours. Le retrait de séchage et le fluage de dessiccation restent donc limités du fait de l'épaisseur de l'ouvrage et le fluage propre représente alors approximativement la moitié des déformations différées de l'enceinte.

De manière générale, la dispersion des estimations traduit une connaissance limitée par les possibilités d'expérimentations. Une expérience de fluage sur une éprouvette de béton prend du temps (parfois des années) et nécessite un appareillage complexe ainsi que des conditions d'humidité et de température contrôlées : rares sont les laboratoires capables de fournir des mesures expérimentales valides et exploitables.

Les estimations de ces modèles sont comparées à une banque de résultats expérimentaux pour donner une idée des erreurs commises ou pour calibrer certains coefficients (Bažant and Panula, 1978; Bažant and Baweja, 1995b; Gardner, 2004; ACI, 2008). La banque NU-ITI contenait en 2008 les résultats de 621 essais de fluage et 490 essais de retrait (Bažant and Li, 2008b; cre). La définition de l'erreur commise dépend des études (Bažant and Li, 2008a; ACI, 2008) : elle varie en fonction des poids attribués à chacune des mesures dans la construction d'un coefficient de variation. La définition suivante de l'erreur ω (Bažant and Baweja, 1995b) semble intéressante car elle assure que toutes les décades du temps de chargement t_0 ou du temps écoulé depuis le chargement $t - t_0$ ont un même poids. Un coefficient de variation ω_j est défini pour l'essai j tel que :

$$\omega_j = \frac{1}{\bar{J}_j} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (w_{ij} (J_{ij}^m - J_{ij}^e)^2}$$

où J_{ij}^m et J_{ij}^e sont respectivement les valeurs mesurées et estimées de la complaisance (ou du retrait) au point i de l'essai j. n est le nombre de points de

modèle	ε_{fp} (10^{-6})	ε_{fd} (10^{-6})	ε_r (10^{-6})	total ε_t (10^{-6})	$\frac{\varepsilon_{fp}(t)-\varepsilon_{fp}(t_0)}{\varepsilon_t(t)-\varepsilon_t(t_0)}$
$t-t_0$ =0 jours					
BPEL1991	251	0	78	330	
Eurocode2	265	0	44	309	
ACI209	292	0	186	478	
B3	228	0	50	278	
CEB-FIB99	206	0	82+22	311	
GL2000	297	0	31	329	
$t-t_0$ =1 an					
BPEL1991	324	111	125	560	31%
Eurocode2	391	104	62	557	51%
ACI209	442	83	195	720	62%
B3	305	33	70	408	59%
CEB-FIB99	299	30	84+31	444	70%
GL2000	502	28	44	575	83%
$t-t_0$ =10 ans					
BPEL1991	399	226	245	870	27%
Eurocode2	447	90	141	678	49%
ACI209	471	101	202	774	60%
B3	400	92	161	653	46%
CEB-FIB99	343	43	84+73	543	59%
GL2000	595	86	104	785	65%
$t-t_0$ =60 ans					
BPEL1991	456	315	296	1067	28%
Eurocode2	461	82	289	832	37%
ACI209	480	105	204	789	60%
B3	492	219	333	1044	34%
CEB-FIB99	354	47	84+164	649	43%
GL2000	666	201	233	1099	48%

TABLE 2 – La déformation d'un mur de 120cm d'épaisseur, chargé à 10MPa à 365 jours peut être estimé par différents modèles existants. A l'exception du modèle B3, les modèles n'estiment que la déformation de fluage total $\varepsilon_{fp}+\varepsilon_{fd}$. La part du fluage propre ε_{fp} est donc ici calculée en fixant l'humidité RH à 100% au lieu de 50%, sans modifier l'épaisseur. La dernière colonne $(\varepsilon_{fp}(t)-\varepsilon_{fp}(t_0))/(\varepsilon_t(t)-\varepsilon_t(t_0))$ traduit la part des déformations de fluage propre dans la déformation associée à la perte de précontrainte $\varepsilon_t(t)-\varepsilon_t(t_0)$.

l'essai j et $\bar{J}_j$ est défini par :

$$\bar{J}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_{ij} J_{ij}^m$$

Cette pondération par $\bar{J}_j$ permet de comparer les ω_j de signaux de magnitudes différentes : ω_j reste inchangé si toutes les mesures et les estimations sont multipliées par un scalaire non nul. Ainsi, les bétons les plus souples n'ont pas un poids plus fort que les bétons les plus rigides dans l'estimation de l'erreur. Le poids $w_{ij} = n/(n_d n_1)$ est inversement proportionnel au nombre total de points dans la décade du point i (n_1). Ainsi, pour un essai donné, toutes les décades ont le même poids. Dans l'expression de w_{ij}, n est le nombre de points de l'essai j et n_d est le nombre de décades balayées par l'essai j. Les poids sont ensuite normalisés de façon à ce que $\sum_i w_{ij} = n$. Enfin, l'erreur sur un ensemble de N essais est définie par :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2}$$

Cette erreur a été évaluée pour différents modèles (Bažant and Baweja, 1995b). Pour le modèle B3, elle vaut $\omega_r \approx 34\%$ pour les déformations de retrait et $\omega_c \approx 23\%$ pour les complaisances. Sous l'hypothèse lourde d'une distribution gaussienne des grandeurs, l'intervalle de confiance à 95% sur la complaisance estimée est alors de $23\% \times 1.96 = 45\%$ et celui sur le retrait estimé de $34\% \times 1.96 = 67\%$ (RILEM, 1995). L'American Concrete Institute considère ainsi que les deux meilleurs modèles B3 et GL2000 conduisent à une erreur de 20% sur le retrait et de 30% sur la complaisance(ACI, 2008). Le modèle B4, qui s'appuie sur une base de données plus large, semble permettre de réduire ce coefficient de variation $\omega_c \approx 15\%$ (Wendner et al., 2015).

Pour réduire ces incertitudes, il est conseillé de faire des essais de courte durée (de 1 à 3 mois) pour mettre à jour des paramètres du modèle (Bažant and Baweja, 1995; Jirásek and Dobrushý, 2012). En effet, les valeurs par défaut de ces paramètres sont souvent des fonctions ajustées de la résistance fc_{28} ou de la composition du béton, fonctions dont la fiabilité et le sens physique sont limités.

La déformation de fluage propre, sujet principal de cette thèse, présente deux intérêts :

- Elle ne dépend pas de la taille de l'éprouvette ou de l'ouvrage, ce qui en fait une caractéristique du matériau, au même titre que le rapport eau/ciment w/c ou le module de Young. C'est une propriété intéressante qui permet de découpler l'échelle du matériau de celle de l'ouvrage.
- Elle est responsable d'une part non-négligeable des pertes de précontrainte. Améliorer son estimation permettrait de prévoir les pertes de précontrainte avec une plus grande fiabilité.

0.2.2 Quelques résultats expérimentaux sur le fluage propre

On peut s'appuyer sur des résultats expérimentaux répertoriés dans la banque NU-ITI (Bažant and Li, 2008b; cre) pour rappeler rapidement quelques faits

établis.

La déformation de fluage propre est proportionnelle à la précontrainte appliquée tant que cet effort ne dépasse pas une fraction significative de la résistance à compression du béton au moment du chargement $fc(t_0)$. La limite est fixée à 50% par les modèles BPEL1991, ACI209 ; à 45% pour les modèles Eurocode2, B3 et à 40% pour le modèle CEB-FIB99. On peut ainsi observer sur des résultats expérimentaux répertoriés dans la base de donnée (Bažant and Li, 2008b; cre) que les complaisances estimées ne dépendent pas de la contrainte imposée jusqu'à une fraction non-négligeable de la résistance à compression (Fig.1a,1b,1c).

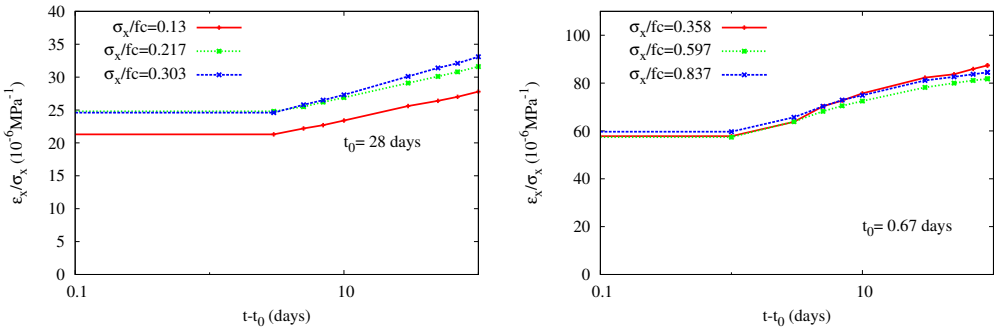
La déformation de fluage augmente avec la température. C'est la raison pour laquelle la température de l'échantillon doit être fixée pendant un essai de fluage(RILEM TC107-CSP, 1998). L'influence de la température peut être modélisée comme une accélération suivant une loi d'Arrhenius (Granger, 1995; RILEM TC-242-MDC, 2015). Cette loi permet la définition d'un temps équivalent $\xi(t)$, âge corrigé de la structure, qui dépend de l'histoire de la température $T(t)$:

$$\xi(t) = \int_{\tau=0}^{t} e^{-\frac{U}{R}\left(\frac{1}{T(\tau)}-\frac{1}{T_0}\right)} d\tau$$

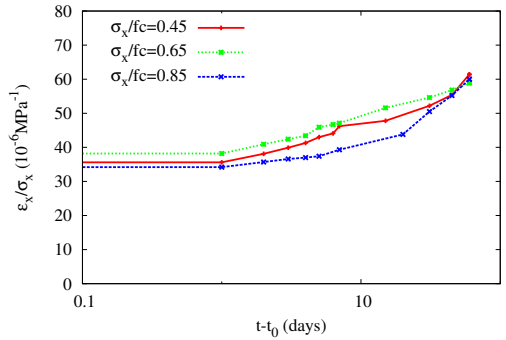
où $R = 8.3144621$ J.mol^{-1}.K^{-1} est la constante des gaz parfaits, $T = 20$°C =293 K est la température de référence et U est l'énergie d'activation. Le rapport U/R vaut 5000 K (Granger, 1995) ou 4000 K (RILEM TC-242-MDC, 2015) selon les modèles. Une fourchette d'énergie d'activation de 12 à 40 kJ.mol^{-1} (1400K-4800K) avec une valeur typique à 25 kJ.mol^{-1} (3000K), est trouvée par Day et Gamble (Day and Gamble, 1983; Benboudjema, 2011). L'énergie d'activation thermique des processus de séchage est similaire à celle du fluage, de l'ordre de 4700K (Granger, 1995) à 4000K (RILEM TC-242-MDC, 2015). L'influence de la température sur l'hydratation du ciment peut aussi se réduire à la définition d'une énergie d'activation mesurée par calorimétrie, de l'ordre de 35 à 40 kJ.mol^{-1} (4200-4800K) pour un ciment Portland ordinaire(Waller, 1999; Zhang et al., 1999; Kada-Benameur et al., 2000; Jayapalan et al., 2014).

La température à l'intérieur de l'enceinte est de l'ordre de 30 à 35°C, la température à l'extérieur (dans l'espace inter-enceinte) avoisine les 15°C (Granger, 1995; Benboudjema, 2011). Une fois pris en compte le coefficient d'échange entre le béton et l'air, la plage de température dans le béton calculée par Granger est de 17 à 27°C (Granger, 1995). Par ailleurs, la température mesurée dans la partie interne des enceintes suédoises de Forsmark 2 et Ringhals 4 est comprise entre 30°C et 40°C lors du fonctionnement (Oxfall, 2013). Sous l'hypothèse d'une énergie d'activation thermique de 4000K, une structure à une température de 25°C après 60 ans de chargement présente donc la même déformation différée qu'une structure à une température de 20°C après 75 ans de chargement. Ainsi, une bonne maîtrise de la température de l'ouvrage pourrait donc lui garantir une longue durée de vie. A l'inverse, une différence de température élevée (de 20°C) entre la partie inférieure et la partie supérieure des voussoirs a été citée comme étant une des causes des déformations excessives du pont Koror–Babeldaob de Palau (Bažant et al., 2010, 2012) : ce pont s'est effondré après 18 ans de service seulement !

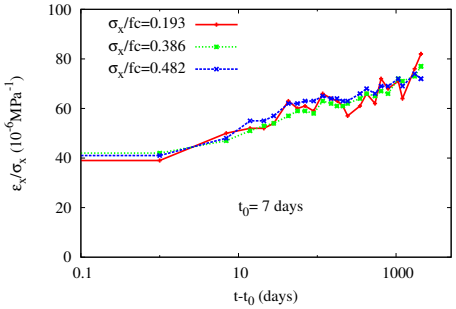
L'énergie d'activation peut aussi nous renseigner sur les phénomènes physiques responsables du fluage. La valeur de 25 kJ.mol^{-1} (Day and Gamble,

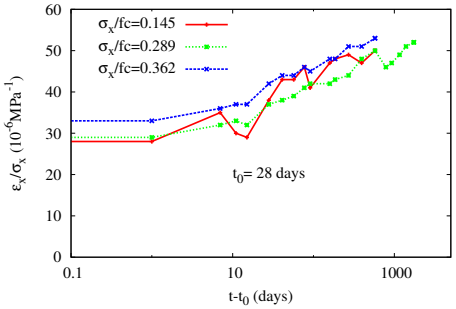


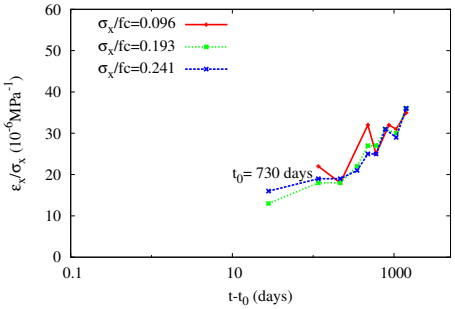
(a) $w/c = 0.316$, $a/c = 3.78$, (Han and Walraven, 1995)



(b) $w/c = 0.32$, $a/c = 2.81$, $t_0 = 30$ days(Ngab et al., 1981)







(c) $w/c = 0.49$, $a/c = 4.814$ (L'Hermite and Mamillan, 1969)

FIGURE 1 – Les déformations différées sont proportionnelles à la contrainte appliquée. Ainsi, le rapport $\varepsilon_x(t)/\sigma_x$ ne dépend pas de la contrainte imposée, ce que corroborent les résultats de la base de données NU-ITI(Bažant and Li, 2008b; cre) reportés ici.

1983) est cohérente avec les phénomènes physiques liés à la diffusion d'eau ou la diffusion d'ions dans l'eau (Benboudjema, 2011) : les énergies d'activation de ces diffusions sont d'environ 18kJ.mol^{-1} à 20°C (Talekar, 1977). Elle est aussi proche de l'énergie d'activation de la diffusion de l'eau physi-sorbée (environ 15 kJ.mol^{-1}) (Dias et al., 1987), ce qui vient appuyer un des phénomènes physiques avancés pour expliquer le fluage : sous l'effet de la contrainte, l'eau physi-sorbée sur les feuillets de C-S-H migre lentement vers la porosité capillaire ((Dias et al., 1970; Wittman, 1982; Ulm et al., 1999) cité par (Benboudjema, 2011)), d'où la déformation différée. Day et Gamble notent aussi que cette énergie d'activation croit avec le temps pour rejoindre rapidement une valeur de l'ordre de 115 kJ.mol^{-1}, ce qui suggère d'autres mécanismes physiques que la diffusion de l'eau, liés à des mouvements solides(Day and Gamble, 1983). Les mécanismes physiques aujourd'hui évoqués pour expliquer le fluage propre à long terme sont liés au glissement des feuillets de C-S-H, à une échelle inférieure à celle de la pâte de ciment (Benboudjema, 2011). En effet, la tendance logarithmique à long terme des déformations de fluage propre est similaire à celle rencontrée lors d'essais de nanoindentation sur des C-S-H (Vandamme, 2008). Cette tendance logarithmique est commune avec les sols, ce qui invite à rechercher une origine granulaire au fluage des C-S-H(Vandamme, 2008; Vandamme and Ulm, 2013). Les énergies d'activation mesurées pour le fluage des sols (sables et argiles) sont de l'ordre de 84 à 190 kJ.mol^{-1} (Kwok, 2010; James K. Mitchell, 2005), à rapprocher de la valeur de 115 kJ.mol^{-1} trouvée par Day et Gamble (Day and Gamble, 1983). Il serait intéressant de faire des essais de nanoindentation sur du C-S-H à plusieurs températures pour tenter de mesurer une énergie d' activation : la valeur trouvée pourra infirmer ou remettre en question l'origine granulaire du fluage des C-S-H.

La déformation de fluage propre dépend du degré d'humidité dans le béton. Pour mener cette expérience, une éprouvette de mortier est séchée à 105°C(Glucklich and Ishai, 1962). L'éprouvette est retirée du four après plusieurs heures et la perte en masse permet de déduire le degré d'humidité de l'éprouvette. Elle est alors enveloppée d'une gaine imperméable pour mener un essai de fluage propre. Ces expériences montrent que les déformations différées sont globalement proportionnelles au degré d'humidité(Glucklich and Ishai, 1962; Abiar, 1986). Le constat est identique lors d'expériences sur des cylindres creux et fins(0.7mm) de pâte de ciment placé en enceinte climatique(Bažant et al., 1976). De plus, un mortier totalement sec ne présente plus de déformation de fluage propre (Glucklich and Ishai, 1962; Pihlajavaara, 1974; Abiar, 1986). Plusieurs modèles existants ont donc tenu compte d'une humidité fixée via un changement d'amplitude du taux de déformation proportionnel à l'humidité(Benboudjema, 2011) ou croissant (Bažant and Chern, 1985).

L'humidité relative à l'intérieur de l'enceinte est de l'ordre de 45%, l'humidité relative à l'extérieur (dans l'espace inter-enceinte) est de l'ordre de 60% (Granger, 1995; Benboudjema, 2011). Mais il faut garder à l'esprit que le degré d'humidité dans le béton est supérieur à cela du fait de la durée de séchage de l'enceinte. Les calculs de Granger montrent ainsi qu'à 54 ans, la teneur en eau au cœur de l'enceinte vaut encore 60% à 70% de la teneur en eau initiale (Granger, 1995) (p202-204). Si on utilise comme Granger l'isotherme de désorption mesurée par Pihlajavaara (Pihlajavaara, 1982)(cité par (Granger, 1995)) sur un béton de rapport $w/c = 0.5$, l'humidité correspondante vaut entre 75% et 85%. Cela est cohérent avec les valeurs trouvées sur les enceintes

suédoises : des sondes d'humidité placées à 25 cm de la parois intérieure des enceintes mesurent des humidités supérieures à 80% après 30 ans d'exploitation (Oxfall, 2013). De plus, du fait du liner métallique situé à 30cm de profondeur sur les enceintes suédoises, on peut considérer que la partie interne de 30cm d'épaisseur sèche comme un mur de 60cm d'épaisseur soumis des deux cotés à une humidité de 45%. Notons aussi que les rapports w/c des bétons constituants ces parties internes (0.42-0.46) sont légèrement inférieurs aux rapports w/c des bétons de la partie externe ou des enceintes françaises (Granger, 1995), ce qui joue sur la cinétique du séchage et limite la portée de la comparaison.

La déformation de fluage dépend de l'âge de chargement t_0 : le béton est un matériau viscoélastique vieillissant. On sait que le module de Young du béton, comme sa résistance à la compression, augmente avec l'âge du fait de l'hydratation du ciment. Il en va de même pour les déformations différées, qui diminuent si le béton est chargé plus tardivement (Fig. 2a,2b,2c).

Ces constats expérimentaux valident la modélisation du fluage propre des matériaux cimentaires par des modèles viscoélastiques linéaires vieillissants.

0.2.3 Le cadre théorique de la viscoélasticité linéaire vieillissante

Le béton, comme d'autres matériaux utilisés dans ce travail, est donc modélisé comme un matériau viscoélastique linéaire vieillissant. Dans ces matériaux, le tenseur de contrainte $\sigma(t)$ dépend de l'histoire du tenseur de déformation $\varepsilon(t)$. La linéarité des déformations en fonction de la contrainte permet d'appliquer le principe de superposition de Boltzmann(Boltzmann, 1874; Salençon, 2009). La loi de comportement viscoélastique linéaire est ainsi entièrement caractérisée par la fonction de relaxation (tenseur du quatrième ordre) $\mathbf{C}(t,t')$ telle que :

$$\sigma(t) = \int_0^t \mathbf{C}(t,t')\frac{d\varepsilon}{dt}(t')dt'$$

si on part à l'instant $t = 0$ d'un état de référence naturel libre de contrainte. De façon similaire, la complaisance (tenseur du quatrième ordre), $\mathbf{J}(t,t')$ est telle que :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \mathbf{J}(t,t')\frac{d\sigma}{dt}(t')dt'$$

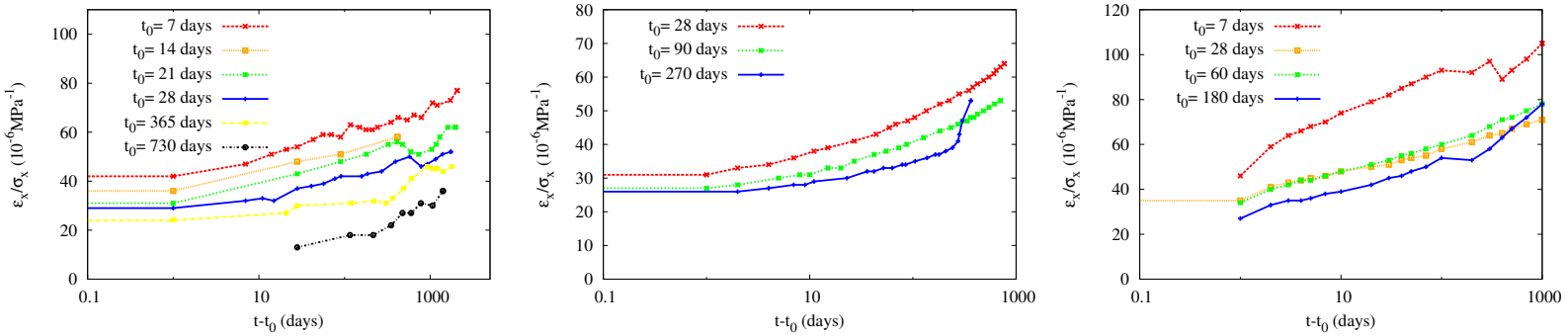
Si le temps écoulé depuis le moment du chargement $t - t'$ est le seul paramètre influant, le matériau est non-vieillissant :

$$\mathbf{J}(t,t') = \mathbf{\Phi}(t-t')$$

Des conditions doivent être vérifiées pour garantir que la relaxation $\mathbf{C}(t,t')$ est correcte du point de vue de la thermodynamique. Elles sont reproduites dans les équations A.3 et A.5 de l'annexe A.

Si le comportement du matériau est isotrope, la partie sphérique $k(t,t')$ et la partie déviatorique $\mu(t,t')$ de la relaxation peuvent être définies telles que :

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^t 3k(t,t')\tfrac{d\varepsilon}{dt}(t')dt' \\ \sigma^d(t) &= \int_0^t 2\mu(t,t')\tfrac{d\varepsilon^d}{dt}(t')dt' \end{aligned}$$



(a) $w/c = 0.49$, $a/c = 4.814$ (L'Hermite and Mamillan, 1969)

(b) $w/c = 0.381$, $a/c = 4.339$ (Kommendant et al., 1976)

(c) $w/c = 0.42$, $a/c = 4.4$ (Browne and Blundell, 1969)

FIGURE 2 – Les déformations différées de fluage d'un béton dépendent du temps écoulé depuis le moment du chargement $t - t_0$, mais aussi de l'âge du béton au chargement t_0. Quelques résultats de la base NU-ITI(Bažant and Li, 2008b; cre) sont reportés ici.

où $e(t) = tr(\varepsilon(t))/3$, $p(t) = tr(\sigma(t))/3$, $\sigma^d(t)$ et $\varepsilon^d(t)$ sont respectivement les parties sphériques et déviatoriques de $\sigma(t)$ et $\varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned} \sigma^d_{ij}(t) &= \sigma_{ij}(t) - p(t)\delta_{ij} \\ \varepsilon^d_{ij}(t) &= \varepsilon_{ij}(t) - e(t)\delta_{ij} \end{aligned}$$

où δ_{ij} est le delta de Kronecker.

Les complaisances non-vieillissantes peuvent être approchées par une série de chaînes de Kelvin, aussi appelé modèle de Kelvin généralisé (Fig. 2.5). Ce modèle appartient à la famille des modèles rhéologiques (Tab. 3), qui ont pour avantage de résumer l'histoire de la déformation subie par le matériau dans une ou plusieurs variables internes. Sa complaisance s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}_K(t-t') = \sum_1^n \left(1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_k}}\right) \mathbf{C}_k^{-1} + \mathbf{C}_0^{-1}$$

où $\mathbf{C}_0$ est la raideur élastique instantanée (tenseur d'ordre quatre) et pour chaque $1 \leq k \leq n$, $\mathbf{C}_k$ est la raideur correspondant au temps caractéristique τ_k. La souplesse au temps long d'une serie de chaine de Kelvin correspond à la mise en série des ressorts (Fig. 2.5), elle est donc égale à $\sum_1^n \mathbf{C}_k^{-1} + \mathbf{C}_0^{-1}$.

0.3 Le béton comme un matériau composite

Les résultats expérimentaux existants (Troxell et al., 1958; Granger, 1995; Bažant and Li, 2008b; cre) montrent que le comportement de fluage dépend fortement de la composition du béton. Parmi les facteurs pouvant influer sur les déformations différées du béton, on trouve le rapport eau sur ciment w/c, la fraction volumique et la qualité du granulat (Troxell et al., 1958; Rüsch et al., 1962; Brooks, 2005), en particulier son module de Young (Neville et al., 1983; Brooks, 2007; Neville, 2011).

Plusieurs mécanismes physiques sont envisagés pour expliquer le fluage propre du béton. Tous sont construits aux petites échelles, à celle de la pâte de ciment pour des échanges entre eau capillaire et eau adsorbée liés à des équilibres de pression (Dias et al., 1970; Wittman, 1982; Ulm et al., 1999), ou à l'échelle des C-S-H pour le glissement des feuillets (Vandamme, 2008). On trouvera une bonne description de ces modèles dans (Benboudjema, 2011; Hilaire et al., 2014). Il faut néanmoins rapeller ici que d'autres modèles existent comme ceux de Rossi (Rossi et al., 1994, 2012) et de Sellier et. al.(Sellier et al., 2012; Hilaire, 2014). Ces modèles introduisent des phénomènes liés à de la fissuration ou à de l'endommagement pour expliquer des résultats d'expériences et pour élargir le domaine de validité du comportement (plage de chargement, de température, explication du fluage de dessiccation).

Par ailleurs, les bétons apparaissent à l'œil nu comme des matériaux à structure hétérogène : on distingue les granulats (sables et graviers) de la pâte de ciment. Cette pâte joue le rôle de colle entre les granulats. On peut aussi apercevoir l'air occlus. La microstructure de la pâte de ciment aux échelles inférieure à 100μm dépend du ciment, de l'eau, des additions et des particules les plus fines. Les réactions d'hydratation et les mouvements d'eau au jeune âge sont à l'origine du réseau capillaire qui constitue la plus grande partie de la porosité.

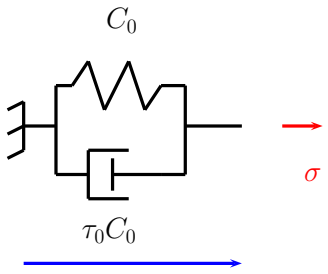
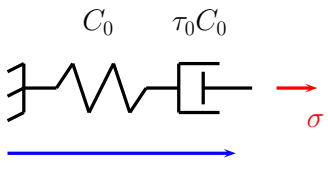
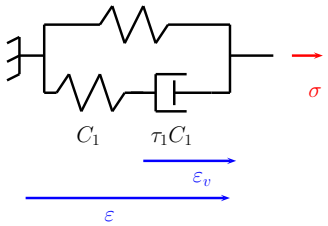
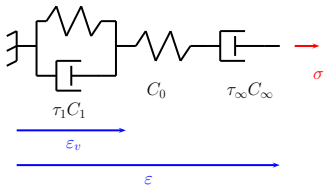
modèle		équation d'évolution	relaxation $\mathbf{C}(t,t')$	complaisance $\mathbf{J}(t,t')$
Kelvin		$\sigma = \mathbf{C}_0(\tau_0\dot{\varepsilon} + \varepsilon)$	$\mathbf{C}_0(1 + \tau_0\delta(t-t'))$	$\mathbf{C}_0^{-1}(1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_0}})$
Maxwell		$\dot{\varepsilon} = \mathbf{C}_0^{-1}(\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_0})$	$\mathbf{C}_0 e^{-\frac{t-t'}{\tau_0}}$	$\mathbf{C}_0^{-1}\frac{t-t'}{\tau_0} + \mathbf{C}_0^{-1}$
Zener		$\sigma = \mathbf{C}_0\varepsilon + \mathbf{C}_1(\varepsilon - \varepsilon_v)$ $\dot{\varepsilon_v} = \frac{1}{\tau_1}(\varepsilon - \varepsilon_v)$	$\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}}$	
Burger		$\varepsilon = \mathbf{C}_0^{-1}\sigma + \frac{\mathbf{C}_\infty^{-1}}{\tau_\infty}\dot{\sigma} + \varepsilon_v$ $\sigma = \mathbf{C}_1(\tau_1\dot{\varepsilon_v} + \varepsilon_v)$		$\mathbf{C}_0^{-1} + \frac{\mathbf{C}_\infty^{-1}}{\tau_\infty}(t-t') + \mathbf{C}_1^{-1}(1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}})$

TABLE 3 – Quelques modèles rhéologiques en viscoélasticité linéaire non-vieillissante.

Cela rend pertinentes les approches de changement d'échelle, pour passer de l'échelle d'intérêt pour une loi de comportement en fluage à celle d'usage pour les calculs de structure, tout en tenant compte de la composition du béton. Une séparation d'échelle arbitraire est introduite par la définition d'une matrice cimentaire : cette dernière est définie comme correspondant à la pâte de ciment et au passant à 100μm des sables. Cette séparation d'échelle permet de rester dans des dimensions supérieures à celles du plus gros grain de ciment : les mortiers et les bétons sont ainsi considérés comme des mélanges de granulats plongés dans une matrice cimentaire. Mais cette séparation d'echelle arbitraire ne satisfait pas les conditions de séparation d'échelle introduite dans la théorie de l'homogénéisation : les propriétés de la matrice fluctuent probablement sur des longueurs comparables à la taille des inclusions les plus petites. Dans la plupart des études, la matrice cimentaire est néanmoins considérée comme un matériau homogène. Les méthodes d'homogénéisation sont donc mises à profit pour estimer la raideur élastique ou le comportement viscoélastique du béton, vu comme un matériau composite.

Les premières études d'homogénéisation du béton se sont appuyées sur des modèles parallèle-série pour prévoir les déformations élastiques ou viscoélastiques d'un béton à partir des propriétés élastiques des granulats et des propriétés élastiques ou viscoélastique de la matrice cimentaire (Counto, 1964; Hansen, 1966; Hirsch, 1962; Gopalakrishnan et al., 1970; Monteiro, 1991; Yang et al., 1995). Des essais sur des bétons constitués de granulats de différentes raideurs, de l'acier au plomb, ont démontré que ces raideurs influencent les déformations du béton (Hirsch, 1962; Yang et al., 1995). La borne de Hashin-Shtrikman (Hashin and Shtrikman, 1963) a ensuite été utilisée avec des résultats mitigés (Monteiro, 1991; Yang et al., 1995; de Larrard, 1999). Ainsi, le fait que la raideur élastique macroscopique mesurée soit parfois inférieure à celle estimée a justifié l'introduction d'une troisième phase, plus souple, appelée auréole de transition (Nilsen and Monteiro, 1993). Des modèles d'homogénéisation plus poussés, comme le modèle autocohérent généralisé (Hervé and Zaoui, 1993), ont donc été utilisés pour tenir compte de l'hétérogénéité de la matrice cimentaire(Nadeau, 2003).

Par ailleurs, pour des Bétons à Hautes Performance, le modèle tri-sphère de de Larrard (de Larrard, 1999; Roy, 1995) résorbe l'écart entre les mesures de module de Young macroscopique et les estimations en tenant compte d'un paramètre supplémentaire : la compacité du mélange granulaire traduit la fraction volumique maximale qui peut être atteinte en tassant les granulats. Les résultats expérimentaux en désaccord avec la borne inférieure de Hashin-Shtrikman sont expliqués par une adhérence moindre entre pâte et granulat ou par microfissuration de la pâte dont le retrait est empêché par les granulats. La matrice cimentaire dans le béton aurait donc des propriétés mécaniques plus faible que la matrice cimentaire reconstituée pour les expériences d'homogénéisation. Son module de Young élastique E_m à 28 jours est alors déduit de la résistance à compression du béton étudié $E_m = 226 f_{c28}$. La démarche d'homogénéisation utilisée en viscoélasticité peut alors donner de bons résultats : le coefficient de variation de la déformation différée calculé par Le Roy sur une dizaine de bétons est de l' ordre de $\omega = 17\%$ après 1000 jours de fluage. Mais ce coefficient remonte à $\omega = 27\%$ si d'autres résultats de la littérature (y compris ceux de Granger(Granger, 1995)) sont pris en compte (Roy, 1995).

Granger (Granger, 1995)(p88) a comparé les résultats de deux modèles d'ho-

mogénéisation aux modules de Young expérimentaux sur six bétons de centrales. Les modèles d'homogénéisation sont le modèle tri-sphère et un modèle parallèle-série qu'il définit. Les modèles permettent de retrouver le bon module de Young à 10% près, mais l'adéquation est moins bonne que dans les résultats présentés par F. de Larrard (de Larrard, 1999). Granger avance plusieurs explications :

- Les BHP ne présentent pas une interface aussi marquée que les bétons ordinaires
- Les bétons testés par De Larrard étaient constitués du même type de granulat et le module de la pâte n'était pas mesuré expérimentalement.
- Le facteur minéralogie des granulats, en plus de son seul module, n'est pas négligeable. Les roches présenteraient des propriétés d'adhésion avec la matrice cimentaire qui dépenderaient de la nature chimique ou de la structure cristalline des minéraux du granulat, ces propriétés pouvant évoluer dans le temps.

Plus récemment, le modèle de Mori-Tanaka (Mori and Tanaka, 1973) appliqué à des inclusions sphériques a été utilisé pour lier des résultats de nanoindentation sur de la pâte de ciment au fluage propre des mortiers et des bétons (Zhang et al., 2014). Là encore, l'utilisation de schémas d'homogénéisation permet de lier la tendance logarithmique des déformations différées mesurées à la petite échelle avec la tendance logarithmique mesurée à l'échelle supérieure (Vandamme and Ulm, 2013).

Il existe une limitation commune à toutes ces études : le béton y est modélisé comme un matériau viscoélastique non-vieillissant, ce qui n'est pertinent que pour des âges de chargement tardifs. La transformée de Laplace-Carson peut alors être utilisée pour transformer le problème viscoélastique en plusieurs problèmes élastiques (Appendice D). Mais cette méthode n'est plus valable en viscoélasticité vieillissante et ce n'est que récemment que les méthodes d'homogénéisation ont été étendues à de tels comportements.

Des démarches d'homogénéisation faisant appel à la simulation numérique ont déjà été mises en place à l'échelle du béton. Ces simulations numériques sont limitées à l'élasticité en raison de temps de calcul largement supérieurs à ceux des schémas d'homogénéisation à champs moyens. Garboczi (Garboczi and Berryman, 2001) commence ainsi son article : "Concrete is a good example of a composite material in which the inclusions (rock and sand) are surrounded by a thin shell of altered matrix and embedded in the normal matrix material.". Il remplace alors le grain et l'ITZ par une inclusion homogène dont le comportement dépend de sa taille. Il continue ensuite avec des méthodes de champs moyens ou des méthodes numériques de calcul par éléments finis. Les volumes traités font 200^3 éléments en 2001 : il utlise des éléments finis sur grille régulière sans stocker la matrice et résout le système avec un gradient conjugué [1]. Il écrit que pour tenir compte proprement de l'ITZ, il faudrait une taille de pixel de 5μm, soit 2000^3 pixels pour un volume de 1cm^3 encore trop faible pour étudier du béton, ce qui rend la première étape d'homogénéisation nécessaire.

Cette méthode a été utilisée par Gal en 2011 (Gal and Kryvoruk, 2011) pour étudier le comportement de bétons renforcés par des fibres avec des éléments finis. Le résultat est comparé à des mesures expérimentales (Stock et al., 1979).

1. Le code en fortran77 peut être télé-chargé à l'url suivant : `http://ciks.cbt.nist.gov/garbocz/manual/node1.html`

L'épaisseur de l'ITZ est fixée à 50μm, E=12GPa et $\nu = 0.35$. L'agrégat sans la couche a un module de 74.5GPa ($\nu = 0.2$). Après homogénéisation avec l'ITZ, les inclusions ont un module apparent qui va de 67.5GPa (D=1.5cm) à 41.2GPa (D=1.7mm). Le plus gros grain faisant 1.5cm de diamètre, la microstructure reconstruite étant périodique, un volume de $5 \times 5 \times 5\text{cm}^3$ semble suffire. Selon cette étude, ne pas tenir compte de l'ITZ revient presque à surestimer la rigidité des agrégats.

Un des challenges associés aux simulations numériques 3D par éléments finis (Gal and Kryvoruk, 2011) est le maillage adapté de la microstructure : cette opération reste compliquée à automatiser. Cette difficulté est contournée par les méthodes de différences finies ou d'éléments finis sur grilles régulières (Dupray, 2008) et la méthode Fast Fourier Transform (FFT) (Moulinec and Suquet, 1998a). Les performances de ces méthodes ont été comparées dans (Dunant et al., 2013). Escoda (Escoda, 2012) a utilisé la méthode FFT pour examiner des microstructures tirées d'image de tomographie. Une image de mortier a ainsi permis de retrouver le module de Young du matériau. La taille du domaine observé a progressivement été augmentée pour atteindre une précision relative estimée (Kanit et al., 2003) de 5%.

Pour étudier le béton, des Volumes Élémentaires Représentatifs (VER) constitués de polyèdres de Poisson ont été construits en se rapprochant des caractéristiques d'un béton proche de ceux utilisés pour construire les enceintes. Deux approches sont tentées :

- Une séparation d'échelle artificielle entre la classe des petits grains et les plus gros
- Un calcul sur l'ensemble de la granulométrie.(FFT, 1600^3)

Le module de Young estimé en s'appuyant sur la séparation d'échelle artificielle est 15% supérieur à celui obtenu sur la granulométrie globale. Escoda attribue cette surestimation à l'introduction de cette séparation d'échelle.

Les modules de Young choisis pour les granulats sont dans les plages des mesures de Granger (Granger, 1995). En revanche, les caractéristiques de la pâte sont légèrement sur-estimées par rapport aux résultats expérimentaux de Granger (20GPa choisi contre 18GPa mesuré). Granger précise d'ailleurs que ce module pour le béton B11 est surprenant, puisqu'il est supérieur à celui du BHP de Civaux. La valeur du module de Young obtenue est de 40.8GPa, ce qui est bien supérieur à celui du béton Biloba (28.7GPa)(Escoda) ou du béton B11 (31.3GPa à 33 mois, 33.7 à 28j, 36.4 à 1 an, 34.6 à 28j) ((Granger, 1995)). Différentes hypothèses sont évoquées par Escoda pour expliquer la différence :

1. Un écart entre les données d'entrée et les propriétés réelles.
2. Une fraction volumique de pores non négligeable
3. Une fraction volumique de granulat supérieure à la fraction réelle.
4. Des phénomènes de décohésion ou de fissuration

Le calcul multi-échelle a été repris avec une matrice cimentaire affaiblie correspondant à l'introduction de 7% de pores, la borne supérieure de Hashin-Shtrikman étant choisie. Le module trouvé devient alors de 35.5GPa : c'est encore supérieur à la mesure expérimentale de 28.7GPa. Escoda conclut qu'il faut des essais sur la pâte cimentaire et sur les granulats pour lever les doutes et que la cause la plus probable est l'hétérogénéité de la pâte de ciment avec l'interface de transition. Pour retrouver un module de l'ordre de 35GPa, il faut

que le module de la matrice soit d'environ 17GPa (12GPa pour retrouver les 28.7GPa de Biloba) d'après le modèle de Hashin-Shtrikman. Les mesures faites par Granger sur les différentes matrices définies vont de 14.2GPa à 18GPa. Un écart entre les données d'entrée et les propriétés réelles constitue bien une explication que l'on ne peut pas écarter.

Au delà des déformations du béton, plusieurs matériaux composites viscoélastiques ont fait l'objet d'étude visant à prévoir leur déformations différées. Il s'agit maintenant d'exposer brièvement les différents modèles d'homogénéisation appliqués à cette fin.

0.4 Les méthodes d'homogénéisation des matériaux composites viscoélastiques

Différentes techniques d'homogénéisation des matériaux composites élastiques ont été adaptées au cas de matériaux viscoélastiques. Tout d'abord, en appliquant le théorème de correspondance (Mandel, 1966), la transformée de Laplace-Carson a été couplée aux méthodes d'homogénéisation à champs moyens (Hashin and Shtrikman, 1963; Kröner, 1958; Mori and Tanaka, 1973) pour traiter le cas des matériaux viscoélastiques non-vieillissants (Christensen, 1969; Laws and McLaughlin, 1978; Wang and Weng, 1992) (voir l'appendice D, page 209).

Cette technique est toujours employée, avec des schémas d'homogénéisation de plus en plus complexes tels que celui des inclusions équivalentes(Mos; El Assami, 2015). Elle a permis d'obtenir des résultats analytiques pour des comportements maxwelliens isotropes incompressibles (Rougier et al., 1993). Elle souffre cependant des problèmes liés au mauvais conditionnement de l'inverse de la transformée de Laplace-Carson. Les méthodes d'inversion les plus couramment utilisées sont la méthode de collocation (Schapery, 1962) et la formule de Gaver-Stehfest (Stehfest, 1970). La méthode de collocation a évolué pour réduire les erreurs commises dans l'identification de la complaisance et assurer le respect de certaines restrictions thermodynamiques (Lévesque et al., 2007). De même, le nombre de termes de la formule de Gaver-Stehfest peut être réduit pour assurer une meilleure stabilité au dépend de la précision. Néanmoins, l'inversion de la transformée de Laplace-Carson reste une opération délicate et les méthodes d'homogénéisation les plus modernes ne s'appuient donc plus uniquement sur le théorème de correspondance.

Les nouvelles méthodes d'homogénéisation se fondent sur une itération sur des pas de temps successifs. Le développement d'une approche variationelle sur chaque pas de temps a permis de faire un lien rigoureux avec un problème d'homogénéisation thermoélastique (Lahellec and Suquet, 2007), qui a pour particularité que la prédéformation n'est plus homogène dans chacune des phases. La méthode variationnelle de Ponte Castañeda (Castañeda, 1992) est appliquée pour définir une prédéformation homogène dans chacune des phases et résoudre le problème d'homogénéisation sur le pas de temps. Les développements récents permettent de tenir compte des fluctuations des champs dans chacune des phases et d'estimer leur variance (Lahellec and Suquet, 2013; Badulescu et al., 2015).

Une nouvelle méthode d'homogénéisation a été découverte en constatant l'équivalence entre la méthode de collocation destinée à l'inversion de la transformée de Laplace-Carson et une formulation à variables internes (Ricaud and

Masson, 2009; Masson et al., 2012; Vu et al., 2012). Sur chaque pas de temps, la complaisance est approximée par une complaisance non-vieillissante à variables internes et le problème d'homogénéisation est résolu en utilisant la méthode de collocation. La continuité des variables internes est imposée d'un pas de temps à l'autre.

Plus récemment, une solution analytique a été établie pour traiter l'homogénéisation de composites viscoélastiques vieillissants à renforts sphériques (Sanahuja, 2013b). L'expression analytique obtenue fait appel à l'opérateur de Volterra, un opérateur de convolution très utilisé dans la résolution de problèmes viscoélastiques (Salençon, 2009; Maghous and Creus, 2003). Cet opérateur peut être évalué en représentant les complaisances par des matrices et les histoires de déformation ou de contrainte par des vecteurs (Bažant, 1972).

L'application des techniques d'homogénéisation à champs complets, passant par la simulation numérique, traite efficacement le cas de comportements viscoélastiques à variables internes. Pour alléger les simulations numériques 3D, l'histoire des déformations subies par le matériau est résumée par quelques scalaires, les variables internes, d'un stockage aisé. Pour chaque pas de temps, l'intégration de la loi de comportement définit un problème élastique qui est résolu par la méthode des éléments finis ou par la méthode FFT (Moulinec and Suquet, 1998b; Monchiet and Bonnet, 2012; Moulinec and Silva, 2013). Une intégration soignée de la loi de comportement permet de réduire le nombre de pas de temps sans compromettre la précision de la réponse mécanique estimée (Crochon et al., 2010). Une autre stratégie s'appuie sur le constat que les contraintes locales sont similaires entre les pas de temps d'un même calcul, voire entre des chargements différents. La NTFA (analyse par champs de transformation non uniformes) (Michel et al., 2002; Michel and Suquet, 2003) représente ainsi la déformation comme une combinaison linéaire de modes de déformation bien choisis. Elle a été utilisée pour traiter le cas de matériaux composites viscoélastiques vieillissants (Largenton et al., 2014). L'homogénéisation périodique par simulation numérique 3D est principalement utilisée pour vérifier la pertinence des méthodes d'homogénéisation semi-analytiques plus rapides (Blanc et al., 2011; Vu2, 2011; Badulescu et al., 2015) ou pour traiter le cas de microstructures complexes (Šmilauer and Bažant, 2010).

Pour la présente étude, nous avons utilisé les deux extrémités du spectre des méthodes disponibles. D'une part, les méthodes s'appuyant sur le théorème de correspondance sont choisies pour leur rapidité. D'autre part, la simulation numérique 3D par la méthode FFT est choisie pour sa fiabilité et sa capacité à prendre en compte une grande variété de microstructures. La solution analytique de Sanahuja Sanahuja (2013b) fera aussi l'objet d'un travail particulier. Les autres méthodes pourraient compléter les résultats obtenus.

0.5 Démarche adoptée pour ce travail

0.5.1 Problématique

On remarque donc que l'homogénéisation des matériaux cimentaires s'appuie sur une description de plus en plus fine de la morphologie de la microstructure au travers d'indicateurs, comme l'épaisseur de l'auréole de transition ou la compacité. Ces modèles, qui peuvent s'appuyer sur la connaissance existante

des phénomènes aux petites échelles, peuvent aussi tenir compte de paramètres de formulation, comme le rapport w/c, la fraction volumique des agrégats, leur granulométrie et leur qualité mécanique. La section précédente a mis en évidence des outils mis à profit pour la prévision des déformations des bétons : la tomographie, les schémas d'homogénéisation à champs moyens et les simulations numériques 3D.

La tomographie d'un béton peut permettre d'acquérir des données sur la morphologie de la microstructure Escoda (2012). Ce constat peut-il être étendue à l'ensemble des bétons ? Par ailleurs, la plupart des modèles existants décrivent le béton comme un matériau composite de type matrice-inclusion, avec le plus souvent une hypothèse d'adhésion parfaite entre la matrice cimentaire et les inclusions. De plus, la matrice cimentaire y est souvent considérée comme une phase homogène. Des images de tomographie à plus petites échelles, mieux résolues, pourraient alors apporter plus de solidité à cette description du béton.

Pour améliorer la prévision des déformations différées des bétons, il y a un besoin d'étendre l'usage de ces méthodes de changement d'échelles à la viscoélasticité linéaire vieillissante. **Peut-on améliorer la qualité des prévisions des déformations différées par une meilleure prise en compte des particularités de la microstructure ?**

Le béton vu comme un composite matrice-inclusion se caractérise par des fractions volumiques d'inclusions élevées et une granulométrie étendue. De plus, le passage de l'élasticité à la viscoélasticité conduit dans le cas du béton à des contrastes plus importants entre les phases. Dans ces conditions délicates, les schémas d'homogénéisation traduisent-ils correctement l'effet des paramètres mécaniques ou des paramètres microstructuraux pris en compte ? Comme pour l'élasticité, les estimations du comportement macroscopique produites par les schémas d'homogénéisation doivent être vérifiées en s'appuyant sur des résultats expérimentaux ou, à défaut, sur des résultats de simulations numériques 3D. De telles simulations permettraient en outre d'obtenir une estimation de l'influence de la granulométrie ou de la forme des inclusions sur les déformations différées du béton, sous la condition d'étudier un volume élémentaire assez grand pour être représentatif et assez finement résolu pour décrire les détails de la microstructure. Enfin, les simulations numériques 3D sur des microstructures finement résolues produisent des estimations des contraintes locales dans la matrice cimentaire. La magnitude des contraintes locales estimées est-elle compatible avec l'hypothèse d'un comportement linéaire ?

0.5.2 Utilisation de l'imagerie et de la simulation numérique

Les outils modernes qui seront ici mis en œuvre sont la tomographie par rayons X et la simulation numérique 3D. Le chaînage direct de la tomographie et de la simulation numérique 3D est techniquement possible. Cependant, à l'échelle d'un béton, les résultats obtenus seront nécessairement d'un intérêt et d'une qualité limités.

La première partie de cette thèse est dédié à l'étude des déformations différées des bétons précontraints. L'observation d'échantillons de béton par la tomographie par rayon X permet d'acquérir une image 3D de la microstructure. On présentera les images obtenues et les leçons que l'on peut en tirer. Dans un premier temps, une démarche d'homogénéisation simple sur des mortiers modèles est mise en place pour mettre en relief l'importance des paramètres de formu-

lation dans l'estimation du module de Young du matériau. Dans les cas où la tomographie produit une image de bonne qualité, elle peut servir à améliorer la fraction volumique de granulat estimée. Enfin, des images de tomographie de bétons à plusieurs échelles viendront appuyer la description du béton comme matériau composite multi-échelle.

La simulation numérique 3D et les schémas d'homogénéisation à champs moyens sont comparés dans le deuxième chapitre, les phases ayant des comportements viscoélastiques linéaires non-vieillissants. Des procédures pour construire numériquement des cellules unitaires de matériaux composites matrice-inclusion permettent un contrôle fin de la morphologie de la microstructure. Son influence sur la réponse macroscopique du composite est alors étudiée par simulation numérique 3D à l'aide de la méthode FFT : l'utilisation d'un cluster et du calcul parallèle permet des calculs rapides sur des cellules unitaires décrites avec précision tout en gardant un volume d'étude suffisant pour pouvoir estimer la réponse mécanique macroscopique du matériau. On montrera que la simulation numérique 3D peut être utilisée pour remettre en question la pertinence des schémas d'homogénéisation à champs moyens ou pour estimer l'influence de la granulométrie, de la forme des granulats ou d'une auréole de transition sur les déformations différées d'un matériau cimentaire.

Le fluage propre des bétons doit être modélisé comme un comportement viscoélastique linéaire vieillissant : ces comportements sont donc traités dans le troisième chapitre. La méthode d'homogénéisation de Sanahuja pour les matériaux composites viscoélastiques linéaires vieillissants à inclusions sphériques sera étendue à des inclusions ellipsoïdales noyées dans une matrice viscoélastique à coefficient de Poisson constant. Les estimations des déformations différées prévues par cette méthode étendue seront comparées à des résultats de simulations numériques 3D.

Enfin, dans le dernier chapitre de la première partie, les résultats des méthodes d'homogénéisation à champs moyens sont confrontées à des mesures rapportées dans la littérature. En particulier, on montrera qu'il reste difficile d'expliquer les différences de comportement des bétons étudiés par Granger compte tenu de la proximité de leur formulation. Par ailleurs, on présentera les intérêts des simulations numériques 3D, qui peuvent permettre une estimations des déformations et des contraintes locales, à l'intérieur de la matrice cimentaire. Une cellule unitaire numérique subira une histoire de chargement représentative de celles rencontrées sur les ouvrages et l'évolution des contraintes locales sera surveillée au travers de différents indicateurs qui seront définis.

Dans la seconde partie de la thèse, les outils developpés sont appliqués à d'autres matériaux. Les polymères renforcés par des fibres de verre sont des matériaux composites viscoélastiques qui peuvent être utilisés pour fabriquer des conduites d'eau ou des pièces d'automobiles. En se limitant au cas de fibres courtes, il est possible d'utiliser les simulations numériques 3D pour calculer les concentrations de contrainte dans les fibres en vue d'estimer une potentielle rupture différée du matériau. De plus, une seconde extension de la méthode de Sanahuja est proposée pour traiter toute matrice viscoélastique isotrope, présentant éventuellement un coefficient de Poisson variable dans le temps. Elle repose sur une approximation, qui a pu être validée sur l'exemple d'un enrobé bitumineux. Enfin, la flexibilité et l'efficacité de la méthode d'homogénéisation à champs moyens permettra de modéliser un béton fibré comme un matériau composite à plusieurs échelles.

Première partie

Etude du comportement à long terme des bétons précontraints par l'imagerie et la simulation numérique

Introduction

Les résultats de tomographies d'échantillons de bétons sont exposés dans le premier chapitre de cette partie. La tomographie par rayon X sera brièvement présentée. Ensuite, une démarche simple d'homogénéisation d'un mortier sera mise en place et la tomographie sera utilisée pour estimer la fraction volumique des inclusions. Enfin, des images de tomographie de deux bétons à plusieurs échelles sont reproduites pour mieux décrire la microstructure des bétons.

Les méthodes numériques 3D sont présentées et mises en place dans le second chapitre. Lors de la construction numérique de microstructures périodiques de composites matrice-inclusion, la fraction volumique, la granulométrie et la forme des inclusions peuvent être choisies pour simuler un béton. La réponse viscoélastique du composite est ensuite estimée par la méthode FFT (Moulinec and Suquet, 1998a). La méthode est appliquée à des microstructures similaires à des bétons ou à des plastiques renforcés par des fibres de verre et les estimations des complaisances macroscopiques sont comparées à celles des schémas d'homogénéisation à champs moyens. En ce qui concerne les bétons, l'estimation du comportement viscoélastique macroscopique ne varie pas de façon importante lorsque l'on change la granulométrie et la forme des inclusions. L'influence d'une auréole de transition (ITZ) est aussi étudiée.

Dans le troisième chapitre la méthode d'homogénéisation de Sanahuja (2013b), dédiée aux matériaux composites viscoélastiques à inclusions sphériques, est étendue au cas d'inclusions ellipsoïdales, sous réserve que la matrice présente un coefficient de Poisson constant. L'extension est validée sur un plastique renforcé par des fibres de verre avant d'être utilisée pour évaluer l'influence du rapport d'aspect des granulats sur les déformations différées des bétons.

Le deuxième chapitre de cette partie a été publié dans la revue Cement and Concrete Research Lavergne et al. (2015a) et le troisième chapitre dans la revue International Journal of Solids and Structures Lavergne et al. (2015c).

Le dernier chapitre de cette partie est dédié à l'application aux bétons des méthodes d'homogénéisation et des simulations numériques 3D, avec une prise en compte des chargements rencontrés sur les enceintes de confinement.

Chapitre 1

Observation de la microstructure par tomographie X

1.1 La tomographie par rayons X

1.1.1 Principe de la tomographie

Des radios d'une éprouvette sont prises sous plusieurs angles. Le coefficient d'atténuation μ_X d'un rayonnement monochromatique dépend de la masse volumique ρ et du numéro atomique moyen du matériau traversé. Des capteurs collectent les photons qui sont parvenus à traverser l'échantillon N_p selon la loi de Beer-Lambert :

$$N_p = N_{p0}.e^{\int_{trajet} -\mu_X(x).dx}$$

On obtient donc pour chaque angle une projection qui dépend de l'absorption au sein de l'échantillon (Fig. 1.1).

Le domaine photoélectrique (<0,2 MeV) est favorable à ce type d'imagerie : $\frac{\mu_X}{\rho}$ varie beaucoup en fonction de l'énergie des photons $E = h\nu$ et du numéro atomique moyen Z, ce qui produit une image dont le contraste reflète l'hétérogénéité de la structure de l'échantillon.

La mesure de densité est possible dans les gammes d'énergie 0,2 à 3 MeV, où l'effet Compton domine. Le coefficient d'atténuation varie alors faiblement entre des numéros atomiques différents. L'absorption diminue lorsque l'énergie des photons augmente, ce qui permet aussi d'observer de plus gros échantillons. La reconstruction d'image est le processus qui permet de résoudre le problème inverse que constitue le calcul de l'absorption au sein du matériau. La tomographie X connaît un développement rapide grâce à l'amélioration des moyens expérimentaux et des outils de reconstruction. Ses champs d'application s'élargissent. Elles est très utile en médecine (scanners médicaux) et dans l'industrie pour le contrôle non destructif. Un champ de recherche important est la tomographie rapide, à faible nombre de projections, qui permet de limiter l'exposition, d'améliorer l'efficacité et de conduire des expériences in-situ.

Notre étude est loin d'être la première observation d'un béton à l'aide d'un

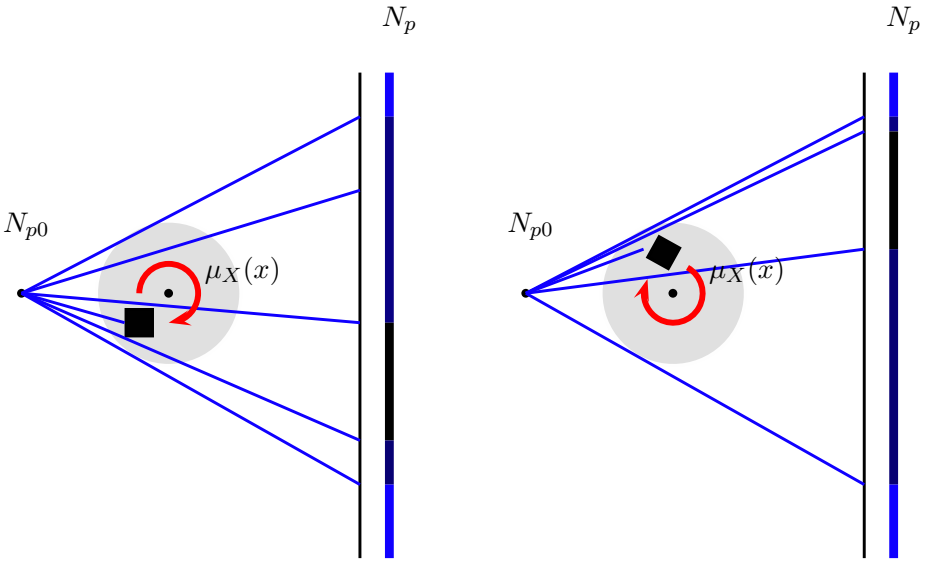


FIGURE 1.1 – Principe de la tomographie : l'intensité du flux de photon traversant l'échantillon N_p dépend de l'intensité de la source N_{p0} ainsi que de l'atténuation $\mu_X(x)$ dans l'échantillon. Selon l'angle sous lequel on observe l'échantillon, on obtient ainsi différentes projections.

tomographe à rayon X. Des carottes de béton ont été imagées pour observer des fissures et quantifier leurs niveaux d'endommagement (Landis and Bridges, 2010; Peng et al., 2010; Suzuki and Aoki, 2010; Poinard et al., 2012). Il est aussi possible de quantifier une distribution de tailles des pores à l'échelle de l'air occlus(Stein, R.C. et al., 2013; du Plessis et al., 2014). L'orientation de fibres peut être estimée à partir d'images de tomographie d'un béton fibré (Bordelon and Roesler, 2014; Ponikiewski et al., 2015). Enfin, des données sur la forme des granulats (Garboczi, 2002) ou sur la morphologie de la microstructure d'un béton (Escoda, 2012) ont été extraites d'images de tomographie.

1.1.2 Interaction entre les rayons X et le béton

On peut estimer l'atténuation μ_X pour chacun des constituants du béton à partir de leurs constitutions chimiques. Les atténuations spécifiques μ_X/ρ sont mesurées pour chaque élément du tableau périodique (Grodstein, 1957; w. H. McMaster et al., 1969; Henke et al., 1993; Gullikson, 2009; Hubbell and Seltzer, 2009) et on suppose que l'atténuation spécifique d'un mélange μ_X/ρ ne dépend que des atténuations spécifiques de ses constituants $\mu_{X,i}/\rho, i$:

$$\frac{\mu_X}{\rho} = \sum_i w_i \frac{\mu_{X,i}}{\rho_i}$$

où w_i est la fraction massique de l'élément i dans le mélange. Pour les molécules, on calcule donc l'atténuation spécifique à partir de leur formule chimique et des masses molaires des éléments. Pour le ciment anhydre, les constituants et les w_i sont donnés directement par la composition de Bogue. Enfin, pour le ciment

Constituant	Formule chimique	Fraction massique w_i
alite	$C_3S = (CaO)_3SiO_2$	56%
belite	$C_2S = (CaO)_2SiO_2$	18%
tricalcium aluminate	$C_3A = (CaO)_3AlO_3$	5.2%
tetracalcium aluminoferrite	$C_4AF = (CaO)_4AlO_3Fe_2O_3$	11%
filler calcaire	$CaCO_3$	9.8%

TABLE 1.1 – Composition de Bogue d'un des ciments de (Granger, 1995).

frais, constitué d'eau et de ciment anhydre, w_{water} et w_{cement} ne dépendent que du rapport w/c :

$$\begin{aligned} w_{water} &= \frac{w/c}{w/c+1} \\ w_{cement} &= \frac{1}{w/c+1} \end{aligned}$$

La composition de Bogue est tirée de (Granger, 1995)(Tab. 1.1), le rapport w/c étant de 0.5 pour l'exemple développé ci-après. Pour passer de l'atténuation spécifique μ_X/ρ à l'atténuation μ_X, il faut fixer des densités. La densité du ciment est fixée à 3.15, celle du quartz (SiO_2) à 2.65, celle du calcaire ($CaCO_3$ pour simplifier) à 2.6 et celle de la pâte de ciment à 1.8. Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 1.2 ; ils ont été calculés à partir des tables d'atténuations des composants élémentaires publiées par le NIST (Grodstein, 1957; Hubbell and Seltzer, 2009). Ces tables contiennent l'atténuation spécifique $(\mu_X/\rho)_i$ de chacun des éléments i du tableau périodique en fonction de l'énergie du rayon. L'atténuation spécifique d'une molécule μ_X/ρ dépend de la fraction massique w_i des éléments i qui la constituent :

$$\mu_X/\rho = \sum_i w_i(\mu_X/\rho)_i$$

Les fractions massiques w_i sont calculées à partir des masses molaires des éléments et de la formule chimique de la molécule. . Pour les hautes énergies (>150keV), là où l'effet Compton gagne en importance, on observe bien que l'atténuation dépend principalement de la densité du matériau. En effet, l'atténuation des granulats siliceux ou calcaire doit être similaire et elle est plus importante que celle de la pâte de ciment qui est moins dense. Pour les basses énergies, l'atténuation dépend des espèces chimiques observées à cause de l'effet photoélectrique. Ainsi, l'atténuation du quartz devient plus faible et finit par rejoindre celle de la pâte de ciment vers $E = 60$keV.

Pour pouvoir distinguer le granulat de la pâte de ciment et obtenir une image contrastée, il faut que leur atténuation respectives soit différentes. On peut en déduire que l'observation d'un béton à base de calcaire sera plus facile que celle d'un béton de granulats siliceux, ce que l'on va vérifier. Les vides (air occlus ou fissures ouvertes) seront bien visibles du fait de leur atténuation nulle.

1.1.3 Reconstruction d'images et sources d'erreurs

Quelques mots sur la reconstruction d'image

Le logiciel X-Act (version 1.1 rev. 6007) de la société RX-solutions a été utilisé pour la reconstruction des images 3D. Cette étape importante permet de

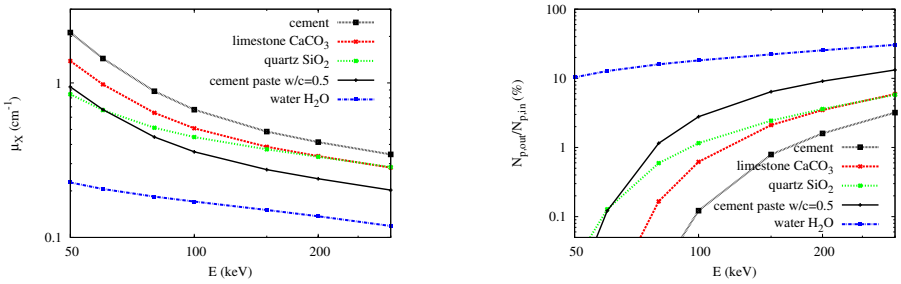


FIGURE 1.2 – A gauche : les atténuations μ_X des différents constituants d'un béton sur la gamme d'énergie des micro-tomographes sont calculées à partir des données sur les éléments (Grodstein, 1957; Hubbell and Seltzer, 2009). A droite, le rapport du flux sortant sur le flux entrant $N_{p,out}/N_{p,in}$ pour une épaisseur de 10cm de matière augmente avec l'énergie du rayon.

passer d'une collection de radios de l'objet à une image de l'atténuation dans le volume.

On a vu que les flux transmis mesurés par les capteurs dépendent de l'atténuation sur le trajet du rayon :

$$b = ln(\frac{N_p}{N_{p0}}) = \int_{trajet} -\mu_X(x).dx \tag{1.1}$$

On voit que $b = ln(\frac{N_p}{N_{p0}})$ dépend linéairement de $\mu_X(x)$. Si on représente l'absorption comme une somme de fonctions de formes $\mu_X(x) = \sum_k x_k \Psi_k(x)$, alors le flux b_{ijp} reçu par le voxel ij de la projection p est une combinaison linéaire des x_k :

$$b_{ijp} = \sum_k x_k \int_{trajet} -\Psi_k(x).dx = \sum_k A_{ijp,k} x_k$$

L'estimation de l'atténuation dans le volume du matériau peut ainsi être vu comme un problème inverse :

$$x = \arg\min_x ||b - A.x||$$

où la norme $||x||$ utilisée peut être choisie en fonction du problème étudié.

Tentons d'estimer la taille de A. Pour l'application qui nous intéresse, on utilise typiquement 1440 projections faisant chacune 1840×1456 voxels. Le nombre de lignes est donc de $1840 \times 1456 \times 1440 = 3.8 \times 10^9$. La grille des x fait de l'ordre de 1500^3 voxels : chaque rayon traverse de l'ordre de 1500 voxels. Il y a donc de l'ordre de $3.8 \times 10^9 \times 1500 = 6 \times 10^{12}$ termes non nuls dans la matrice A. Le produit matrice-vecteur reste donc long à calculer, même pour les ordinateurs actuels. Un méthode de résolution itérative comme LSQR (Paige and Saunders, 1982) ou celle de Kaczmarz (Kaczmarz, 1937; Gordon et al., 1970) prendrait ici sans doute un temps considérable à cause du nombre de projections. Cette conception algébrique de la reconstruction d'image de tomographie est néanmoins très utile : elle est la base des méthodes ART (Gordon et al., 1970) et SIRT (Gilbert, 1972) utilisées pour des images médicales et les tomographies rapides ou le nombre de projection est plus faible.

Pour résoudre le problème de reconstruction, on utilise l'algorithme de rétro-projection des projections filtrées pour les géométries coniques (Feldkamp et al., 1984). En effet, le laboratoire Navier dispose de sources X focalisées. Pour simplifier l'explication, on ne présente ici que l'algorithme que pour une géométrie parallèle (Fig. 1.3). On se rapportera à (Feldkamp et al., 1984; Grangeat, 2002) pour le lien entre la géométrie conique et la géométrie parallèle.

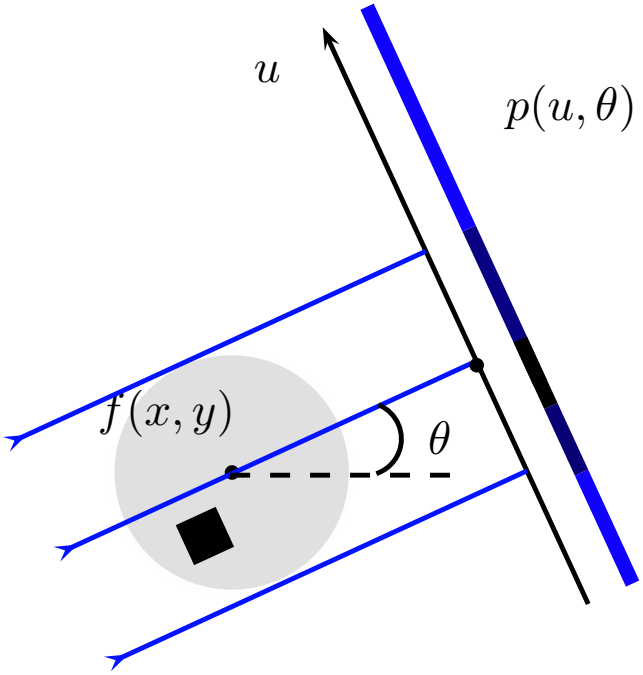


FIGURE 1.3 – Tomographie en géométrie parallèle et paramétrage des projections.

L'écriture de la loi de Beer-Lambert sous la forme d'une transformée de Radon à l'équation 1.1 peut être exploitée. Pour une géométrie parallèle, en posant $b = p(u,\theta)$ et $-\mu_X = f(x,y)$, on a :

$$p(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dv$$

avec (voir figure 1.3) :

$$\begin{array}{rcl} x & = & u\cos\theta - v\sin\theta \\ y & = & u\sin\theta + v\cos\theta \end{array} \tag{1.2}$$

La transformée de Fourier 1D $\mathcal{F}(p)$ par rapport à u de $p(u,\theta)$ s'écrit :

$$\mathcal{F}(p)(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u,\theta)e^{-2\pi i\rho u}du$$

En s'appuyant sur le théorème de coupe-projection, on peut écrire $f(x,y)$ en fonction des projections :

$$f(x,y) \quad = \quad \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(p)(\rho,\theta)e^{2\pi i\rho u}|\rho|d\rho d\theta$$

avec $u = x\cos\theta + y\sin\theta$. On a donc :

$$f(x,y) \quad = \quad \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(p).|\rho|)(u,\theta)d\theta$$

On remarque que la projection filtrée $\tilde{p} = \mathcal{F}^-1(\mathcal{F}(p).|\rho|)$ est une convolution selon u entre la projection p et un filtre de transformée de Fourier $|\rho|$ à la fréquence ρ. La reconstruction vient donc amplifier les hautes fréquences des projections, ce qui peut entraîner une amplification du bruit. On ajoute donc un filtre passe-bas, une fenêtre $W(\rho)$, pour limiter l'amplification des hautes fréquences. On a alors :

$$f^*(x,y) \quad = \quad \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(p).|\rho|.W(\rho))(u,\theta)d\theta$$

Pour les reconstructions effectuées dans cette étude, on utilise une fenêtre de Tukey (Harris, 1978). Ce filtre est la convolution d'un lobe de cosinus de largeur $(\alpha/2)N$ avec une fenêtre rectangulaire de largeur $(\beta/2)N$. Dans notre cas, on utilise $\alpha = 80\%$ et $\beta = 75\%$. Les hautes fréquences sont alors fortement atténuées par rapport au filtre rampe de la reconstruction exacte (Fig. 1.4).

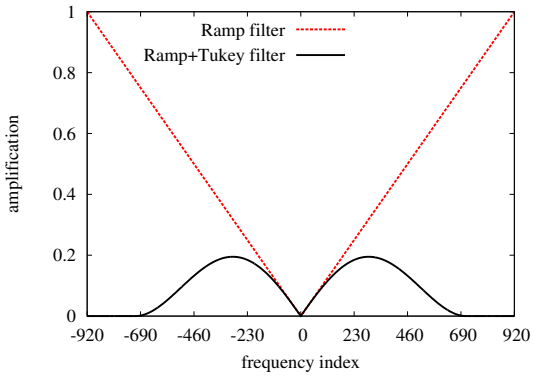


FIGURE 1.4 – L'amplification des fréquences de la projection. Le filtre rampe (rouge) qui correspond à une reconstruction parfaite conduit à une amplification trop importante des hautes fréquences. On utilise donc un filtre rampe multiplié par une fenêtre de Tukey (noir).

Plusieurs éléments sont à retenir de cette explication rapide de la méthode de reconstruction :

- L'image 3D reconstruite est déjà une vision filtrée de l'atténuation dans le volume du matériau.
- La transformée de Fourier est très performante pour calculer des convolutions, en particulier lorsque le noyau de convolution est étendu. Cette qualité de la transformée de Fourier sera mise à profit dans l'algorithme FFT de Moulinec et Suquet pour l'homogénéisation élastique(Moulinec and Suquet, 1998a).

Sources d'erreurs

Plusieurs sources d'erreur conditionnent la qualité de l'image obtenue. Elles peuvent être liée au bruit des capteurs (Grangeat, 2002) :

- Lorsque la source de rayonnement est polychromatique, le spectre est atténué différemment au sein du matériau inspecté. La diminution relative des faibles énergies est plus importante : il y a un durcissement du spectre. Cela entraîne des artefacts dans l'image reconstruite : les valeurs de l'atténuation sont ous-estimées au centre de l'objet (cupping effect). On peut atténuer ces effets en filtrant le faisceau à l'aide d'une tôle de cuivre de faible épaisseur.
- Artefacts circulaires (rings artefacts) : les cellules du détecteur ne sont pas correctement calibrées.
- Rayures (streaks), repliement (aliasing) dû à un sous-échantillonnage angulaire : il faut augmenter le nombre de projections.
- Raies tangentielles entre zones les plus atténuantes dues à l'utilisation d'un rayonnement polychromatique
- Raies isolées, ombre derrière les zones atténuantes : des voxels du détecteur sont saturés ou défaillants et il faut alors adapter la dose ou la corriger par interpolation dans les projections.
- Lunules, déformation, dé-doublage : la géométrie est mal déterminée.

D'autres erreurs peuvent être liées à des variations de la source au cours du temps. En microtomographie, la dimension de la source, des voxels du capteur et la qualité de la géométrie du dispositif limitent la résolution. La taille du voxel est dictée par la taille du capteur qui fait de l'ordre de 2000 voxels, et la taille de l'échantillon. En effet, pour reconstruire sans biais un échantillon il faut l'imager dans toute la largeur. Certes des méthodes de tomographie locale, consistant à ne s'intéresser qu'à une zone centrale de l'image, existent mais elles induisent d'autres sources d'erreurs et elles n'ont pas été utilisées. En outre, les sources d'erreurs évoquées conduisent à une image bruitée après reconstruction. Pour détecter les hétérogénéités dans une éprouvette, il faut que le contraste entre les phases soit suffisant pour ne pas être masqué par le bruit dans les images reconstruites.

1.2 Une démarche d'homogénéisation sur des mortiers modèles

Pour savoir si la tomographie peut apporter un gain de précision dans l'estimation des propriétés élastiques d'un mortier, il faut d'abord mettre en place une démarche d'homogénéisation des matériaux cimentaires. Dans un premier temps, il convient d'évaluer la précision avec laquelle on peut estimer la fraction volumique de granulat en partant de la formulation du matériau. La borne d'Hashin-Shtrikman, qui s'appuie sur cette fraction volumique, est ensuite utilisée pour estimer la raideur élastique du mortier. On montrera qu'il est difficile d'obtenir une estimation précise du module de Young d'un mortier à partir des seules données de formulation. Enfin, des images de tomographie de mortiers sont exploitées pour obtenir une nouvelle valeur de la fraction volumique de granulat de façon indépendante. Les propriétés élastiques correspondantes sont alors comparées à celle obtenue à partir des données de formulation.

1.2.1 Données d'entrée et cheminement

De la formulation à la fraction volumique de granulat

La formulation nous fournit des données sur la composition du béton : on utilise maintenant ces données pour estimer la fraction volumique de granulats f_g. On connaît les masses des granulats m_g, le rapport w/c visé, la quantité de ciment c et d'eau totale m_{et}. Les fiches techniques des granulats peuvent nous renseigner sur leur masse volumique. L'absorption des granulats a_g vient soustraire une partie de l'eau m_{ea} :

$$m_{ea} = a_g.m_g$$

Le reste, l'eau efficace $w = m_{et} - m_{ea}$, va servir à l'hydratation de la pâte de ciment. On peut alors calculer le rapport w/c. La masse volumique de toutes les quantités étant connues, on peut calculer le volume de granulats, le volume de ciment, et le volume eau+ciment. Pour obtenir le volume de pâte, il faut soustraire la contraction le ChatelierδV, qui est proportionnelle au volume de ciment consommé par l'hydratation au moment de la prise (Granger, 1995) :

$$\delta V = -1.462 \times 0.11.h_{prise}.V_{ciment}$$

où h_{prise} est le degrée d'hydratation au moment de la prise et V_{ciment} le volume de ciment. Le volume de la pâte V_{pate} s'écrit alors :

$$V_{pate} = w + V_{ciment} + \delta V$$

De l'air entraîné, ou de l'air occlus vient s'ajouter au mélange. On peut en tenir compte en utilisant la masse volumique du matériau final ρ_{beton} :

$$f_g = \frac{\rho_{beton}}{\rho_{granulat_mouille} + \frac{V_{pate}}{V_{granulat}}\rho_{pate}}$$

où $\rho_{granulat_mouille}$ est la densité des granulats mouillés. A défaut d'information, cet air occlus peut être négligé :

$$f_g = \frac{V_{granulat}}{V_{granulat} + V_{pate}}$$

L'enchaînement des relations est synthétisé sur la figure 1.5.

De la fraction volumique de granulat au module de Young du mortier

On utilise la borne de Hashin-Shtrikman pour calculer le comportement du mortier, le granulat (normal ou léger) étant toujours considéré comme l'inclusion. Les grandeurs d'entrée sont des modules de Young, des coefficients de Poisson et la fraction volumique de granulat.

Les comportements sont décrits par module de Young et coefficient de Poisson car, pour la pâte de ciment, le module est un résultat expérimental mais le

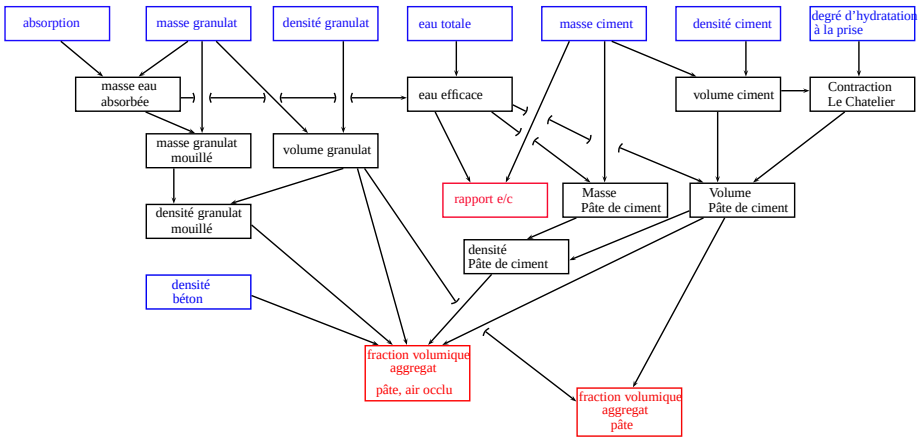


FIGURE 1.5 – Ensemble des relations et des grandeurs permettant de calculer le rapport w/c et la fraction volumique de granulat f_g.

coefficient de Poisson est tiré de la littérature. Les entrées pour le granulat sont de la même forme : les essais de la littérature sont bien souvent exprimés par un module de Young et un coefficient de Poisson.

Une source importante d'erreur peut venir de la définition de la matrice. En effet, les essais sont conduits sur une pâte de ciment qui peut avoir un rapport w/c différent de celui présent dans le mortier. Le module de la pâte de ciment dépendant du rapport w/c, cela se traduit par un biais à corriger. Par ailleurs, l'incertitude sur le rapport w/c se traduit par une incertitude supplémentaire sur le comportement de la matrice (tab. 1.2).

Étude	conditions	pente du module de Young à w/c=0.55 $\frac{E(0.6)-E(0.5)}{0.1\times E(0.55)}$
(Haecker et al., 2005)	D : ASTM type I fin,$t_c = 28j$, $t = 56j$	-2.14
(Haecker et al., 2005)	D : ASTM type I fin,$t_c = 56j$, $t = 56j$	-2.04
(Haecker et al., 2005)	H : ASTM type I grossier $t_c = 14j$, $t = 56j$	-1.36
(Haecker et al., 2005)	H : ASTM type I grossier $t_c = 56j$, $t = 56j$	-1.23

TABLE 1.2 – Influence du rapport w/c sur le module de la pâte. L'étude (Haecker et al., 2005) donne aussi le module de cisaillement G. Les coefficients de Poisson vont de 0.22 (w/c faible, ciment fin) à 0.34. Les modules sont obtenus par résonance élastique, selon la méthode ASTM E1875-00el.

Un traitement simple des incertitudes

Ici est mise en place une méthode simple de traitement d'incertitudes. On suppose que les incertitudes liées aux différents paramètres d'entrée sont dé-

corrélés et qu'elles sont assez faibles pour que le développement limité à l'ordre 1 des différentes relations soit pertinent.

Soit $\underline{X}$ le vecteur des données d'entrée et $\underline{\Delta X}$ le vecteur des incertitudes associées. Soit $f : \underline{X} \rightarrow y$ la fonction qui permet de calculer la sortie y du modèle.

L'incertitude sur y est définie comme :

$\Delta y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Delta X_i \right)^2}$

Dans le cas où f est linéaire et où les X_i ont une incertitude d'écart-type ΔX_i, Δy est l'écart-type de y.

En propageant cette étude de relation en relation, on peut avoir une première estimation de l'effet de l'incertitude des paramètres d'entrée sur l'incertitude du comportement estimé.

Cette méthode tient compte des compensations d'une relation à une autre. En effet, dans le cas présenté ici, le volume de ciment a un effet positif direct sur le volume de la pâte de ciment, mais un effet négatif sur ce dernier au travers de la contraction le Chatelier et la dérivée partielle $\frac{V_{pate}}{V_ciment} = 1 - 1.462 \times 0.11.h_{prise}$ traduit bien ces deux effets. Cette méthode peut néanmoins conduire à une mauvaise estimation des incertitudes dans le cas où les amplitudes des incertitudes ne permettent pas de considérer que f est linéaire.

1.2.2 Résultats de la borne de Hashin-Shtrikman

Résultats des essais de compression

Les essais de compression de quatre mortiers formulés par A. Legrix ont été faits sur des éprouvettes prismatiques $4 \times 4 \times 16$ (cm). Les déformations sont mesurées par des extensomètres. Les matériaux avaient tous le même âge au moment des essais (30/31jours). Le module de Young d'un échantillon est donné avec une précision de 100MPa, mais la répétabilité n'est pas de cet ordre là (Tab. 1.3).

S1 et S2 sont des mortiers de sable siliceux d'Hostun et B1 et B2 des mortiers de billes de verre expansé (PORAVER). Ces billes sont légères et très poreuses.

Quelques données sur les incertitudes

On fait l'hypothèse que toutes les masses ont été mesurées avec une incertitude de 1%.

Les masses volumiques réelles et les coefficients d'absorption d'eau peuvent être mesurés par la norme NF EN 1097-6. Cinq méthodes sont définies pour les granulats courants et une pour les granulats légers. Le coefficient d'absorption d'eau traduit l'augmentation de masse entre des granulats séchés, étuvés et des granulats saturés superficiellement secs. Les masses sont déclarées comme constantes lorsqu'elle ne varient plus que de 0.1% sur une heure. Les volumes sont déterminés par le volume d'eau déplacé, soit par mesure de variation de

matériau	masse volumique (kg/m^3)	module d'élasticité (GPa)	moyenne (GPa)	estimation de l'écart-type (GPa)
pâte	1800	12,1	11,5	0.49
	1800	11,2		
	1800	11,3		
S1	2180	20,9	18,7	1,95
	2150	18,0		
	2150	17,2		
S2	2190	24,4	24,9	1,23
	2200	24,0		
	2170	26,3		
B1	1210	**	6,7	0,8 ?
	1230	7,4		
	1190	6,0		
B2	1150	5,6	5,5	0.18
	1150	5,6		
	1140	5,3		

TABLE 1.3 – Mesures expérimentales de modules de Young de mortiers obtenues par A. Legrix.

masse après passage dans un panier à treillis (gros grains), soit par pycnomètre (<3.15cm). Un pycnomètre est un récipient à col fin dont le volume peut facilement être contrôlé. Il peut donc servir à mesurer la masse volumique d'un liquide. Les températures sont mesurées afin de tenir compte de la variation de la masse volumique de l'eau. L'annexe E de la norme décrit la fidélité des méthodes en terme de répétabilité (un même laboratoire) et de reproductibilité (différents laboratoires).

grandeur	donnée	granulat >3.15cm	granulat >4mm	granulat <4mm
masse volumique pré-séché (T/m^3)	moyenne	2.70	3.06	2.60
	écart type de reproductibilité	0.0067	0.0094	0.0134
coefficient d'absorption d'eau	moyenne	1%	0.5%	3.1%
	écart type de reproductibilité	0.0101%	0.0112%	0.222%

TABLE 1.4 – Comparaison de 19 laboratoires rapportée dans l' annexe E de la norme NF EN 1097-6

La plage des comportements retenus pour les granulats des mortiers est précisée dans le tableau 1.5.

La densité particulaire du ciment Portland est de 3.15 avec une incertitude de 0.03 (du même ordre que pour les granulats).

La contraction Le Chatelier correspond à un changement de volume dû à la réaction d'hydratation. Ce mécanisme n'a lieu que jusqu'à la prise du béton : le squelette solide s'oppose ensuite à toute déformation macroscopique et les hy-

grandeur	valeur “typique“	min	max
E, sable	65 GPa	60 GPa	70 GPa
ν, sable	0.15	0.05	0.25
E, billes	1 GPa	0GPa	2GPa
ν, billes	0.2	0	0.25

TABLE 1.5 – Comportements retenus pour les granulats des mortiers

drates formés plus tard comblent une partie de la porosité capillaire. Le retrait endogène qui a alors lieu ne cause pas de changement de volume important. Pour chiffrer la contraction Le Chatelier, il faut donc connaître le degré d'hydratation au moment de la prise. Les plages d'hydratation étudiées pendant les premières 24h de la prise sont 0%-40% (Bouasker et al., 2008). On prendra ici une hydratation à la prise de 25% avec une incertitude de 15%.

Le module de Young du ciment de référence à $w/c = 0.55$ est de 11.5 GPa avec une incertitude de 0.5GPa. On prendra comme coefficient de Poisson $\nu_p = 0.25$ avec une incertitude de 0.05.

On fait l'hypothèse que la densité du béton est mesurée avec une précision similaire à celle des granulats, environ 1% d'erreur relative.

Données de formulation

Les données de formulation, les masses volumiques et les absorptions sont tirées de la note de A. Legrix (Leg), les incertitudes et les valeurs de comportement des sources évoquées. Tous les mortiers sont tels que le rapport w/c visé est de 0.55. Les données sont rassemblées dans le tableau 1.6.

Résultats de la méthode

La méthode permet d'estimer les fractions volumiques de granulat, le rapport w/c et le module de Young du mortier (Tab. 1.7).

La méthode estime une porosité additionnelle de 8-9% pour S1 et S2. Elle permet d'estimer les fractions volumiques de granulats, le rapport w/c et le module de Young du mortier. Dans le cas des mortiers de billes de verre, il faut noter que cette méthode prévoit une porosité additionnelle négative, avec des valeurs non négligeables (env -12%) ! La fraction volumique des granulats est donc sans doute largement sur-estimée (Tab. 1.8). L'incertitude estimée sur la fraction volumique de granulat est élevée : de l'ordre de 5% à 7%. Elle est principalement dues à l'incertitude sur les densités. Ces incertitudes sont fournies par l'entreprise PORAVER en utilisant la norme EN 1097-6, annexe C (pycnomètre). D'autres chiffres sont fournis en utilisant la norme DIN V 18004, partie 5 (norme allemande) (Tab. 1.9).

En reprenant les calculs avec ces densités, la méthode prévoit une porosité quasi nulle pour les deux formulations B1 et B2. C'est donc ces densités qui seront préférées dans la suite des comparaisons. Les modules de Young estimés sont rapportés dans le tableau 1.10.

		S1		S2		B1		B2	
		moy	Δ	moy	Δ	moy	Δ	moy	Δ
masse gros granulat	kg	376	3	977	8	67	1	143	1.5
densité gros granulat		2.65	0.02	2.65	0.02	0.34	0.05	0.34	0.05
absorption gros granulat	%	6	1	6	1	20	5	20	5
masse granulat moyen	kg	376	3	226	2	67	1	33	1
densité granulat moyen		2.65	0.02	2.65	0.02	0.43	0.06	0.43	0.06
absorption granulat moyen	%	6	1	6	1	25	5	25	5
masse sable	kg	376	3	226	2	67	1	33	1
densité sable		2.65	0.02	2.65	0.02	0.52	0.07	0.52	0.07
absorption sable	%	6	1	6	1	30	5	30	5
masse sable fin	kg	376	3	75	1	67	1	11	1
densité sable fin		2.65	0.02	2.65	0.02	0.66	0.09	0.66	0.09
absorption sable fin	%	6	1	6	1	35	5	35	5
eau totale	kg	366	4	360	4	333	3	320	3
masse ciment	kg	501	4	501	4	484	4	490	4
hydratation à prise	%	25	15						
densité mortier		2.16	0.02	2.19	0.02	1.24	0.04	1.15	0.02
module de Young granulat	GPa	65	5	65	5	1	1	1	1
ν granulat		0.15	0.1	0.15	0.1	0.2	0.15	0.2	0.15
module de Young pâte	GPa	11.5	0.5						
w/c ref		0.55							
ν pâte		0.25	0.05						
pente E(w/c) pâte	GPa	-1.5	0.5						

TABLE 1.6 – Les données de formulation des quatre mortiers S1, S2, B1 et B2.

grandeur	unité	S1		S2	
		estimation	Δ	estimation	Δ
w/c		0.55	0.017	0.55	0.022
f_g	%	52	0.6	52	0.6
$E_{mortier}$	GPa	24.5	0.9	24.8	1.0

TABLE 1.7 – Estimations de la fraction volumique de granulat f_g et du module de Young du mortier $E_{mortier}$ obtenues par homogénéisation pour les mortiers S1 et S2, en tenant compte de la densité mesurée du mortier. La légère différence entre les modules estimés vient de la petite différence d'eau totale, ce qui joue sur le rapport w/c et le module estimé de la matrice.

grandeur	unité	B1		B2	
		estimation	Δ	estimation	Δ
w/c		0.55	0.016	0.55	0.018
f_g	%	66	5	64	7
$E_{mortier}$	GPa	3.3	0.8	3.4	0.8

TABLE 1.8 – Premières estimations de la fraction volumique de granulat f_g et du module de Young du mortier $E_{mortier}$ obtenues par homogénéisation pour les mortiers B1 et B2, en tenant compte de la densité mesurée du mortier.

On peut maintenant comparer ces estimations aux résultats expérimentaux. Le comportement du sable S2 est bien reproduit (fig 1.6). En revanche, l'estimation du module de Young est erronée pour S1, B1 et B2. Dans le cas de S1, les entrées de la borne d'Hashin-Shtrikman sont quasiment les mêmes que

grain size, mm	0.1-0.3	0.25-0.5	0.5-1	1-2
EN 1097-6, kg/m^3	660+/-90	520+/-70	430+/-50	340+/-50
DIN V 18004, kg/m^3	850+/-120	660+/-90	540+/-80	410+/-60

TABLE 1.9 – Les valeurs de masses volumiques trouvées pour les billes de verre par les normes EN 1097-6 et DIN V 18004 sont très différentes.

grandeur	unité	B1		B2	
		estimation	Δ	estimation	Δ
w/c		0.53	0.016	0.55	0.018
f_g	%	53	4	53	6
$E_{mortier}$	GPa	4.4	0.7	3.7	0.8

TABLE 1.10 – Estimations corrigées de la fraction volumique de granulats f_g et du module de Young du mortier $E_{mortier}$ obtenues par homogénéisation pour les mortiers B1 et B2. Le rapport w/c différent a un effet sensible sur les modules de Young de la pâte de ciment et du mortier.

celles de S2. Les données de formulation sont identiques entre les deux mortiers sauf pour la granulométrie. Estime-t-on correctement les sources d'erreurs ? Le modèle de propagation d'erreur est-il valide ?

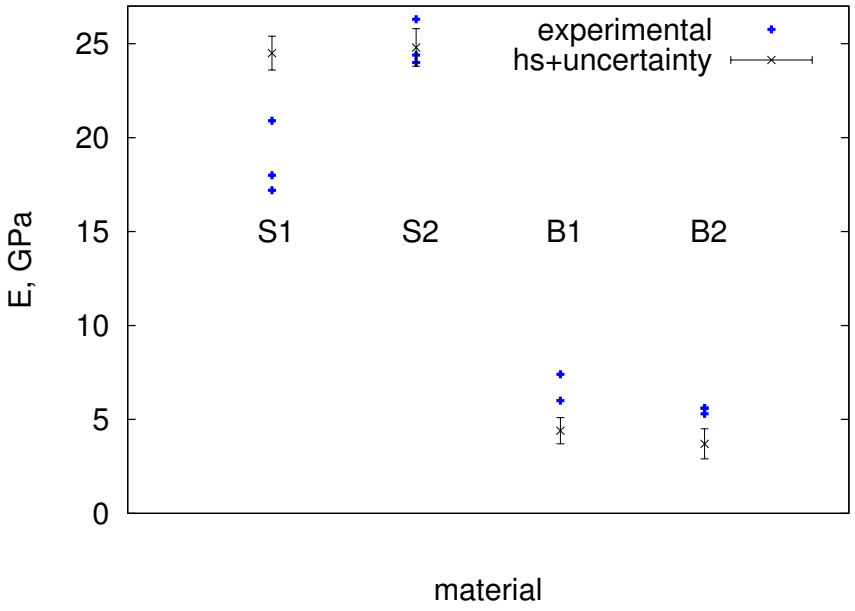


FIGURE 1.6 – En noir, les bornes d'Hashin-Shtrikman pour le module de Young et les incertitudes estimées (écart-type) pour chaque mortier. En bleu, les résultats expérimentaux correspondants.

Dans le cas des billes, la borne supérieure a tendance à sous-estimer le comportement des billes. Mais cela peut provenir d'une mauvaise estimation du comportement des billes, des masses volumiques particulaires ou de l'absorp-

tion en eau.

Pour expliquer le comportement de S1, on peut faire varier le rapport w/c en remplaçant un volume de ciment par un volume d'eau. Pour affaiblir la pâte et obtenir un module de Young du mortier de 19.5GPa, il faut un rapport w/c de 0.73 ! Le module calculé de la pâte est alors de 8.15GPa contre 11.5GPa à w/c=0.55. En agissant uniquement sur la fraction volumique de granulat, il faut passer de $f_g = 52\%$ à $f_g = 37\%$. Annuler complètement l'effet de l'absorption des granulats en partant du principe que les granulats sont saturés ou non poreux conduit au même résultat, en portant le rapport w/c à 0.73. Il faut introduire 11% de vide a posteriori ou 17% dans la pâte (via la borne supérieure de Hashin-Shtrikman) pour passer d'un module de 24.4GPa à 19.5GPa. Pourquoi faudrait-il tenir compte d'un vide dans le cas de S1 et pas dans le cas de S2 ?

Cette simple analyse pour l'élasticité montre les difficultés qu'il y a à exploiter les données de formulation dans un changement d'échelle pour retrouver le comportement macroscopique du béton. L'imagerie pourrait être un moyen pratique de contrôler les données morphologiques (fractions volumiques, granulométrie) obtenues à partir de la formulation.

1.2.3 Utilisation de la tomographie

Conditions d'acquisition

Les échantillons de mortier de sable et de billes ont été examinés le 7 janvier 2013 avec une source provisoire du tomographe. Une source plus fiable est maintenant en fonctionnement. La taille du voxel est de 22,5μm et les images font $1840 \times 1840 \times 1126$ voxels. 1440 projections sont utilisées pour chaque image, à raison de 6 images moyennées par projection aquises à la fréquence de 3 images par seconde. Le scan prend donc 48 minutes. La tension accélératrice est fixée à 100kV et le courant à 160μA : la puissance du faisceau d'électrons frappant la cible de tungstène est de 16W. Les éprouvettes cylindriques faisaient 4cm de diamètre.

Une éprouvette de béton de 16 cm de diamètre a été passée au tomographe à l'aide de la nouvelle source (Fig. 1.7), qui seule permet d'étudier de telles épaisseurs. En effet, celle-ci est bien plus puissante : $V = 210$kV et $I = 600\mu$A. La taille du voxel est bien plus grosse (90μm), le nombre de voxels restant identique. Le temps du scan est de l'ordre de l'heure.

Traitements d'images

Le traitement appliqué aux images reste proche de celui décrit dans (Escoda, 2012)(Fig. 1.8). Après l'application d'un filtre (gaussien) nécessaire pour distinguer clairement les phases, une étape de segmentation sépare les grains de la pâte de ciment. A ce stade, il est possible d'estimer une fraction volumique de granulat mais il y a de forte chance que les granulats soient connectés. Une étape de déconnexion s'appuyant sur un algorithme de lignes de partage des eaux est donc appliqué. Enfin, les grains sont numérotés, leur volume est estimé. Seul les grains entièrement dans l'image sont pris en compte pour l'estimation de la granulométrie. Cela introduit un biais : les gros grains ont plus de chances d'être coupé que les petits. La correction de Milles-Lantuejoul est donc appliquée et les granulométries obtenues se rapprochent de celles provenant de

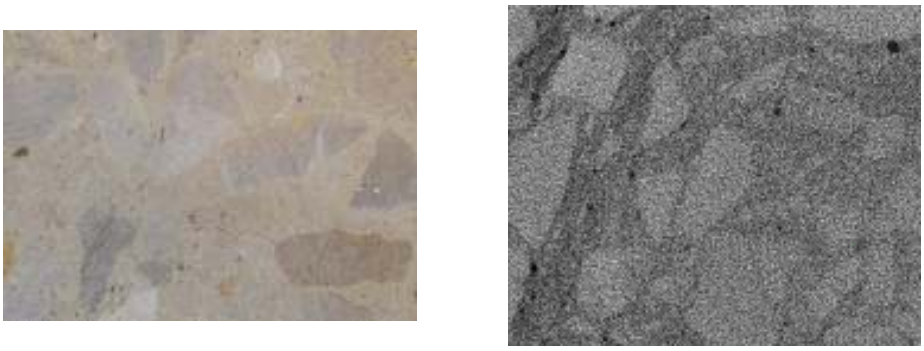


FIGURE 1.7 – A gauche : une photo de la surface d'une éprouvette de béton B11. A droite, un extrait de l'image de tomographie correspondante non filtrée.

tamisage. Pour les gros granulat, une erreur peut être commise si la taille de l'image est trop faible. Pour les petits granulats, la résolution de l'image limite la précision du volume estimé.

La librairie de traitement d'images ITK (Insight Segmentation and Registration Toolkit) (Ibáñez et al., 2003) a été utilisée. On peut citer en particulier :

- les filtres gaussiens `DiscreteGaussianImageFilter`
- les filtres médians `MedianImageFilter`
- les outils de seuillage comme `OtsuThresholdImageFilter`
- l'outil de calcul de ligne de partage des eaux `MorphologicalWatershedImageFilter` utilisé pour séparer les grains
- l'outil `ConnectedComponentImageFilter` utilisé pour rassembler les voxels par grains.

La librairie ITK, écrite en C++, présente l'intérêt de pouvoir traiter directement des images 3D, stockées au format VTK.

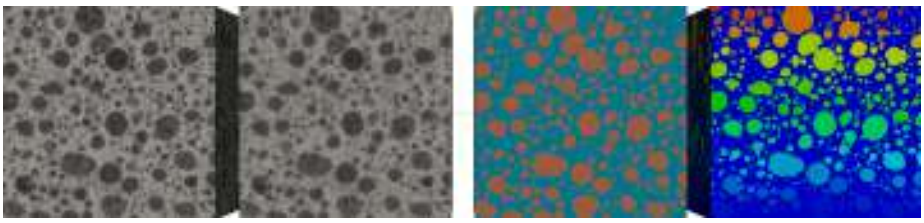


FIGURE 1.8 – Les différents traitements d'une image

Exploitation des résultats obtenus

Estimation du temps d'exposition nécessaire pour examiner l'échantillon S1

On parvient à distinguer par le traitement d'image des grains sur l'image du mortier B1 comprenant des billes de verre. C'est plus difficile sur l'image du mortier S1. Les deux images ont été prises rapidement : à raison de 3 images par seconde, de 6 images par projection et de 1440 projections, la durée totale est de 48 min. Augmenter le temps de prise permettrait-il d'obtenir une image exploitable de S1 ?

Dans un premier temps, on quantifie le bruit et le contraste sur les images. On sélectionne à la main des zones d'une coupe pour créer deux masques, contenants chacun deux ensembles de voxels que l'on attribuerait à la pâte ou à un grain (Fig. 1.9)(Tab. 1.11).

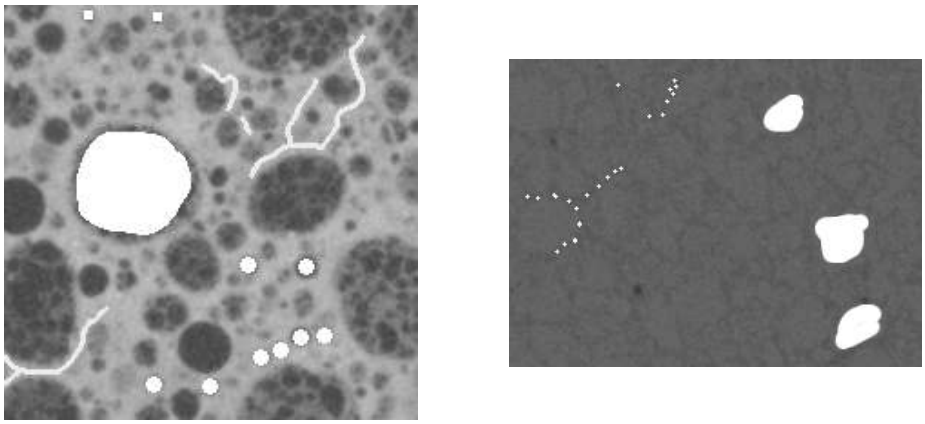


FIGURE 1.9 – Extrait des masques utilisés : à gauche B1, à droite S1.

matériau	phase	moyenne	écart-type	nombre voxel
B1	grain	21838	4081	47933
	pâte	40461	2530	8023
S1	grain	20886	1123	22256
	pâte	19019	796	1549

TABLE 1.11 – Résultats des masques

Une grandeur adimensionnelle traduisant le rapport bruit/signal est alors la somme des écarts-type divisée par la différence entre les moyennes : $Q = \frac{\sigma_g+\sigma_p}{\mu_g-\mu_p}$.

B1 $Q = 0.35$
S1 $Q = 1.02$

Pour obtenir la même "qualité", il faudrait réduire l'écart-type d'un facteur trois. Si la situation est telle que l'on puisse s'appuyer sur la loi des grands nombres pour estimer l'évolution de l'écart-type, il faut neuf fois plus de temps d'exposition total, soit environ une dizaine d'heures. La source actuellement en service étant plus puissante, des images d'une meilleure qualité peuvent sûrement être obtenues.

Estimation de la fraction volumique de B1

A partir de l'image seuillée

L'image de tomographie de B1 a permis de segmenter les grains et d'estimer une granulométrie (Fig. 1.10) et une fraction volumique de 38.4%. Cette méthode s'appuyant sur un seuillage, on pourrait faire varier le seuil pour observer la sensibilité du résultat a ce choix de seuil. Ce seuil étant la dernière étape d'un travail de l'image qui commence par un filtre médian de largeur un, l'hypothèse est ici faite que l'on se trompe de un ou deux voxels sur

l'interface. Des érosion ou des dilations sont donc appliquées à l'image avant l'étape de séparation des grains pour voir la sensibilité au positionnement de la frontière.

	fraction volumique de grain
tel que	38.4%
érosion par sphère de rayon 1 voxel	27%
érosion par sphère de rayon 2 voxels	20.7%
dilation par sphère de rayon 1 voxel	53%
dilation par sphère de rayon 2 voxels	67%

TABLE 1.12 – Évolution de la fraction volumique estimée lorsque l'on effectue des érosions ou des dilations.

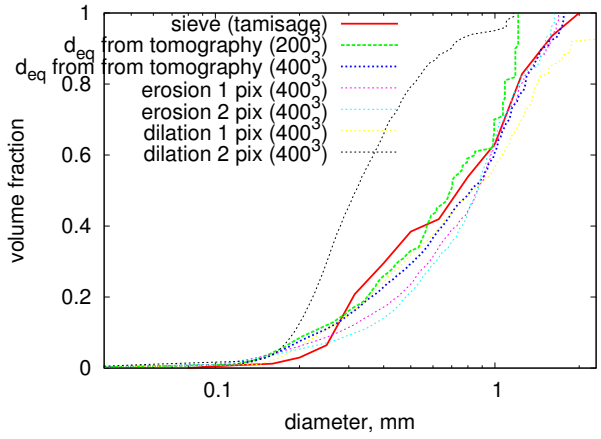


FIGURE 1.10 – Granulométries estimées à partir des diamètres équivalents calculés à partir des volumes des grains. Une érosion ou une dilation a aussi un effet sur la granulométrie. L'érosion efface les plus petits grains, la dilation crée ou élargit des ponts entre les grains : les grains percolent artificiellement.

On peut en déduire une tendance : sur cette microstructure, se tromper de 1μm lors du seuillage, c'est se tromper de 0.5% de fraction volumique. Se tromper d'un voxel, c'est créer une erreur de 11% de fraction volumique (Le voxel fait 22.5μm) (Tab. 1.12). Le grand nombre de petits granulats conduit à une surface spécifique importante, ce que traduit cette erreur.

Une autre source d'erreur est la taille du volume examiné. Plusieurs volumes disjoints de B1 de taille 400^3 ont donc subi le même traitement avec des réglages identiques. Les fractions volumiques obtenues sont très proches (Tab. 1.13), ce qui suggère que le volume étudié est assez gros pour permettre une estimation fiable de la fraction volumique. En l'occurence, on peut avancer que le Volume Elémentaire Représentatif semble atteint avec une erreur d'environ un pourcent pour ce qui est de la fraction volumique.

La fidélité de la granulométrie est aussi à vérifier par rapport à celle obtenue par tamisage. Elle s'améliore avec la taille de l'image pour les gros grains. En revanche, elle reste discutable pour les petits grains segmentés, mais mal résolus

offset	fraction volumique estimée
500,500,300	38.4%
1000,500,300	38.5%
500,1000,300	38.0%
1000,1000,300	38.1%
500,500,800	38.4%
1000,500,800	38.8%
500,1000,800	38.6%
1000,1000,800	38.8%

TABLE 1.13 – Fractions volumiques de granulats estimées pour différents sous-volumes de taille 400^3.

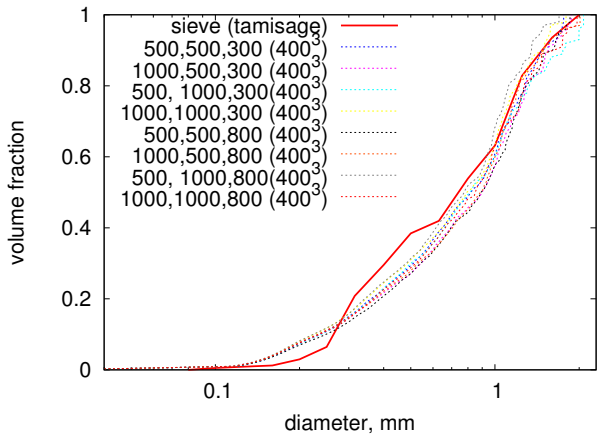


FIGURE 1.11 – Granulométries estimées à partir des diamètres équivalents pour huit volumes disjoints de taille 400^3 de B1 reperés par leur position dans l'image globale.

(Fig. 1.11).

A partir de l'histogramme des niveaux de gris

Une alternative au seuillage de l'image est de partir de l'histogramme des niveaux de gris (Fig. 1.12). En supposant que chaque phase est caractérisée par un niveau de gris adoptant une distribution gaussienne, on peut chercher à identifier les phases et leurs fractions volumiques à partir de l'histogramme des niveaux de gris.

On optimise une somme de courbes gaussiennes pour traduire au mieux l'histogramme des niveaux de gris :

$$f(\alpha) = \sum_k A_k e^{\frac{(\alpha-\alpha_k)^2}{\sigma_k^2}}$$

On peut alors calculer des fractions volumiques à partir des A_k et des σ_k. Il faut se reporter sur l'image pour voir quelle phase est identifiée par α_k.

Voici les résultats pour B1 :

	phase A	frac	phase B	frac	phase C	frac
2 gaussiennes	sombre, grain	0,58	clair, pâte	0,42		
3 gaussiennes	clair, pâte	0,29	clair, pâte	0,29	sombre,étalée grain	0,42

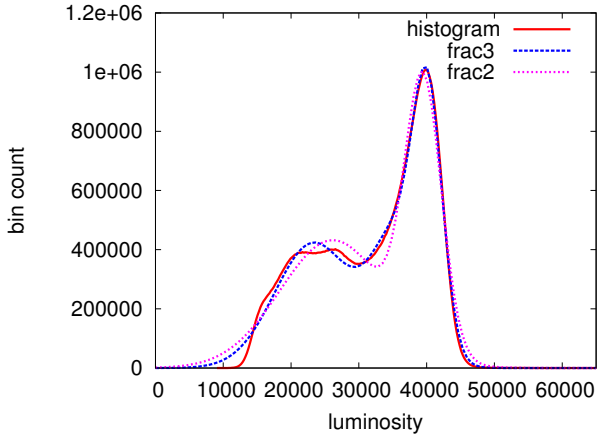


FIGURE 1.12 – L'histogramme des niveaux de gris dans l'image 400^3 de B1 et les sommes de deux ou trois gaussiennes ajustées.

La fraction volumique de granulat donnée par deux gaussiennes (58%) semble erronée mais celle donnée par trois gaussiennes (42%) est plus proche de la valeur obtenue par seuillage (38.4%). Il pourrait être intéressant de mettre en place la démarche entreprise dans (Clausnitzer and Hopmans, 1999), où à deux gaussiennes de même variance sont ajoutées une phase intermédiaire tenant compte des voxels à cheval sur la pâte et les granulats. En effet, ces derniers présentent des atténuations comprises entre celles des granulats et celle de la pâte : ils ne peuvent pas être classés comme appartenant à une phase ou à une autre.

Retour sur la borne de Hashin-Shtrikman avec la fraction trouvée sur l'image

La fraction volumique trouvée sur l'image est nettement inférieure à celle prévue par la formulation. La fraction issue de la formulation prévoit un comportement trop souple : que prévoit la fraction issue de la tomographie ?

En prenant une fraction volumique de 38.4%, la borne de Hashin-Shtrikman prévoit un module de 6GPa. Si on affecte une incertitude de 11% sur la fraction volumique estimée, l'incertitude sur le module estimé est de 1GPa (Tab. 1.14).

Pour B2, on trouve une fraction volumique de 45% (Fig. 1.14,1.15). La borne de Hashin-Shtrikman produit un module de Young de 4.96GPa. Si on affecte une incertitude de 11% sur la fraction volumique estimée (Tab. 1.15), l'incertitude sur le module de Young estimé est de 0.9GPa.

Les images de tomographie ont conduit à des estimations des fractions volumiques très différentes de celles escomptées à la formulation, mais qui semblent donner des résultats plus cohérents sur le plan mécanique (Fig.1.13). Sur ces mortiers de granulat légers, on peut

grandeur	unité	valeur	incertitude entrée	sensibilité	incertitude sur E,GPa
module granulat	GPa	1	1	0.15	0.022
poisson granulat		0.2	0.15	0.50	0.0055
module pâte mesuré	GPa	11.5	0.5	0.66	0.11
poisson pâte		0.25	0.05	0.05	0.049
fraction volumique	%	38.4	11	-8.25	0.82

TABLE 1.14 – Les principales sources d'incertitude sur le module estimé via la tomographie pour B1

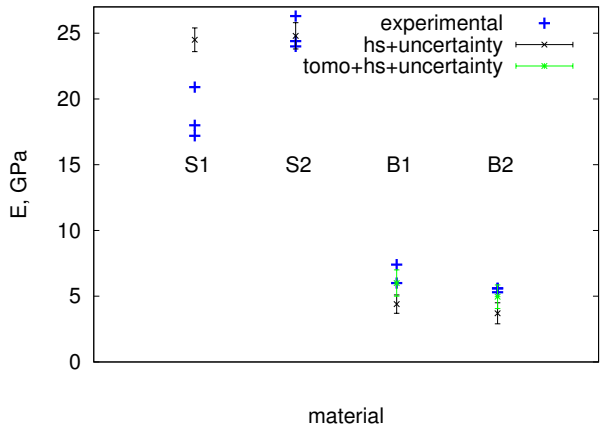


FIGURE 1.13 – En noir, les bornes d'Hashin-Shtrikman et les incertitudes estimées (écart-type). En bleu, les résultats expérimentaux. En vert, les résultats obtenus via la tomographie. La fraction volumique prévue par la tomographie semble fournir un résultat plus correct.

pointer du doigt l'incertitude sur la densité et celle sur l'absorption comme des sources d'incertitude notables sur les fractions volumiques estimées à partir des paramètres de formulation. La tomographie est alors une source de données supplémentaire et indépendante qui permet d'acquérir une information a posteriori sur la géométrie de la microstructure. Il reste tout de même des incertitudes notables sur la fraction volumique des granulats qu'un traitement d'image plus poussé et plus soigneux pourrait permettre de réduire. Le cas des mortiers reste simple par rapport aux bétons. En effet, ces derniers présentent des granulométries plus étendues et des granulats diversifiés.

1.3 Le béton observé à plusieurs échelles

Cette section est consacrée à l'observation d'échantillons de béton à plusieurs échelles. Deux bétons différents ont été imagés pour mettre en valeur les différences qui peuvent exister entre les morphologies des granulats. On notera à cette occasion que la composition chimique des granulats peut influer sur l'atténuation des rayons X et rendre les images de tomographie plus ou moins exploitables.

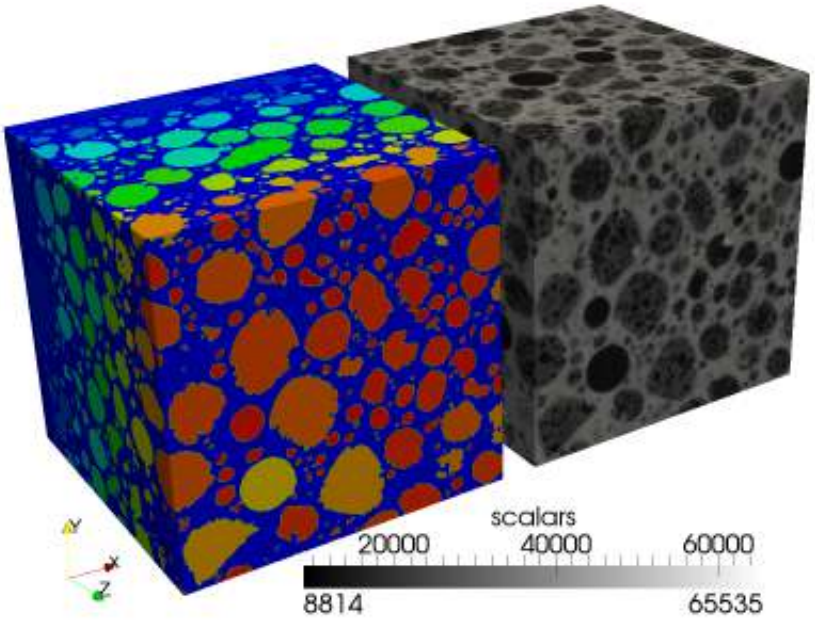


FIGURE 1.14 – En niveau de gris, un extrait 400^3 de la tomographie de B2. A gauche, les granulats extraits et déconnectés.

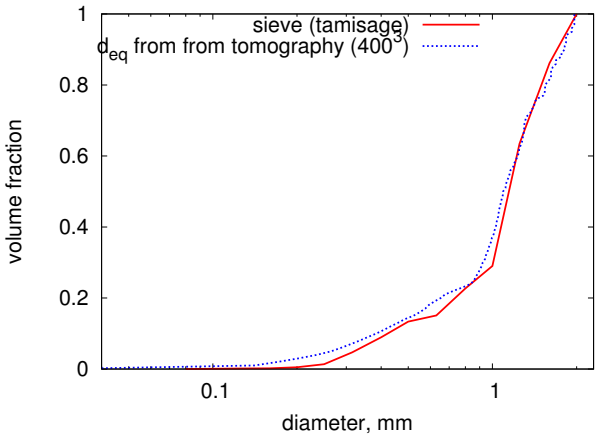


FIGURE 1.15 – Granulométries estimées à partir des diamètres équivalents, à partir d'un extrait 400^3 de la tomographie du mortier B2

	fraction volumique de grain
après seuillage	44.9%
érosion par sphère de rayon 1 voxel	34%
érosion par sphère de rayon 2 voxels	28%
dilation par sphère de rayon 1 voxel	57%
dilation par sphère de rayon 2 voxels	68%

TABLE 1.15 – Effet du seuillage sur la fraction volumique estimée pour B2. La tendance est presque identique à B1 : sur cette microstructure, se tromper de 1μm lors du seuillage, c'est se tromper de 0.5% de fraction volumique. Se tromper d'un voxel, c'est créer une erreur de 11% de fraction volumique (Le voxel fait 22.5μm).

Un même endroit a été imagé à différentes résolutions pour mettre en évidence la multiplicité des échelles du matériau béton. Enfin, les images les plus fines, avec des tailles de voxels de l'ordre du micron, viendront à l'appui de l'hypothèse d'adhésion parfaite entre pâte et granulats qui sera nécessaire à la suite de l'étude.

1.3.1 Préparations des éprouvettes et conditions d'acquisition

Les conditions d'acquisition

Une éprouvette de béton type B11 de diamètre 16cm ayant subi un essais de fluage séchant à TEGG (référence 2507-F4) a été imagée au Laboratoire Navier. Cette éprouvette a été carottée et imagée successivement à des diamètres de 95mm, 50mm, 20mm et 5mm. Les conditions de l'imagerie dépendent naturellement du diamètre de l'éprouvette (Tab. 1.16). La tension accélératrice et l'intensité diminuent lorsque la taille de l'échantillon diminue, avec une règle approximative d'une puissance de 1W pour 1μm de taille de voxel : l'objectif est d'une part d'avoir une taille de la source comparable à la taille de voxel, sachant qu'une taille trop importante rendrait l'image floue et une taille trop petite induirait un temps de scan excessivement long. D'autre part, l'énergie des photons doit être telle que l'atténuation du faisceau traversant l'échantillon soit compatible avec la dynamique du capteur.

	16cm	95mm	50mm	20mm	5mm
source	micro	micro	micro	micro	nano
tension E, kV	215	220	120	120	95
intensité I, μA	600	240	200	100	70
puissance, W	130	53	24	12	6.5
clichés par seconde s^{-1}	6	1	5	3	1
nb clichés par image	10	6	12	8	8
nb images	1440	1440	1440	1440	1440
taille du voxel (μm)	89.9	56.1	25.5	12.7	4.0
temps de scan	40min	140min	60min	60min	190min

TABLE 1.16 – Les conditions de micro-tomographie X en fonction du diamètre

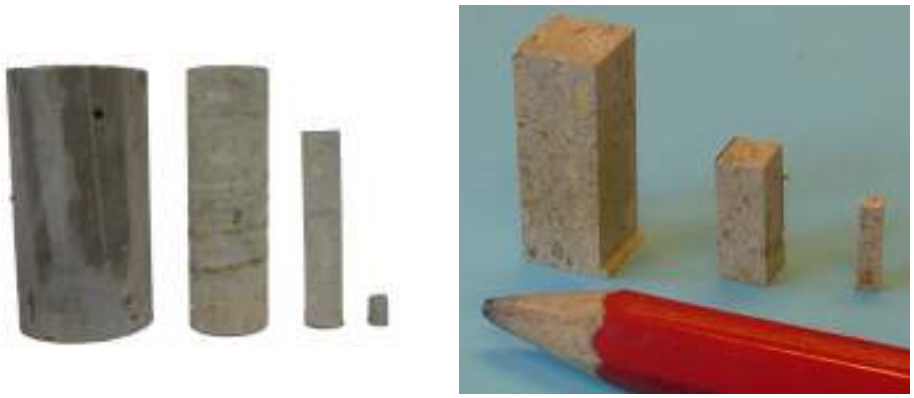


FIGURE 1.16 – A gauche : les éprouvettes entre 16cm et 20mm. A droite : les éprouvettes de 8mm, 4mm et 2.5mm.

L'échantillon est carotté pour passer d'un diamètre à l'autre (Fig. 1.16). Une certaine latitude sur le choix de la zone à imager est possible, mais cette latitude décroit avec le diamètre de l'échantillon :

- Pour les diamètres initiaux inférieurs ou égaux à 50mm, l'enveloppe extérieure peut se rompre lors du carottage. Il est préférable de carotter au centre de l'échantillon, pour obtenir une éprouvette de bonne longueur. De plus, l'épaisseur du trépan doit être prise en compte.
- Pour de petits diamètres inférieurs au diamètre maximal du granulat, ici au diamètre de 5mm, la carotte rompt à l'intérieur du trépan. De plus, elle devient difficile à sortir du trépan. Cela induit une sélection sur la zone imagée : c'est une zone résistante. Ainsi sur les deux échantillons obtenus, l'un est intégralement taillé dans un granulat, l'autre est aux trois quarts constitué d'un gros granulat.

Pour contourner ce problème, une microtronçonneuse est utilisée pour les petites tailles d'échantillons. Des prismes de 8mm, 4mm et 2.5mm de coté ont ainsi pu être découpés puis imagés par le tomographe (Fig.1.16). Le séchage de si petits échantillons est rapide. Ainsi, si le temps caractéristique de séchage d'une éprouvette de 16cm de diamètre est de l'ordre de l'année, un échantillon de 5mm de diamètre séchera 1000 fois plus rapidement, c'est à dire en quelques heures.

Les conditions d'imagerie sont adaptées à la taille de l'échantillon : l'énergie est diminuée pour augmenter le contraste, l'intensité est également réduite pour augmenter la résolution spatiale, mais le temps d'exposition est augmenté pour réduire le bruit (Tab. 1.17).

Les images obtenues

Au gros diamètre, la qualité de l'image est altérée par la faiblesse du flux de rayon X transmis (Fig. 1.17). A petite échelle, on obtient des images exploitables, sur lesquelles on remarque des détails intéressants de la microstructure (Fig. 1.18). Sur un échantillon de 20 mm de diamètre, on observe des grains de formes et d'absorptions différentes ou des défauts au sein de quelques grains. Certains bords paraissent plus sombres que le reste de la pâte de ciment, ce qui peut

	8mm	4mm	2.5mm
source	micro	micro	nano
tension E, kV	93	90	70
intensité I, μA	80	50	30
puissance, W	7.4	4.5	2.1
clichés par seconde s^{-1}	1	1	(Vhr)0.5
nb clichés par image	7	5	36
nb images	1440	1440	1536
taille du voxel (μm)	6.3	3.8	1.6
temps de scan	168min	120min	30h

TABLE 1.17 – Les conditions de micro-tomographie X en fonction de la taille du prisme. Pour le prisme le plus petit, un imageur à très haute résolution (Vhr) a été utilisé.

provenir d'une Interface de Transition (Interfacial Transition Zone ou ITZ), d'une décohésion partielle ou d'un effet d'ombre. Ce dernier effet artificiel peut probablement être écarté, dans la mesure où ce caractère ne se retrouve pas partout dans l'image, mais sur quelques bords de quelques grains.

A partir de 95mm, on peut retrouver une même zone d'une image à l'autre (Fig. 1.19,1.20). Cela pourra être utilisé pour qualifier une procédure de segmentation des granulats.

Les éprouvettes de 8mm, 4mm et 2.5mm étant bien plus petites que la taille du plus gros granulat, elles ne peuvent pas être exploitées pour retrouver une fraction volumique de granulat. Il y a aussi un biais de sélection : l'endroit imagé est choisi pour présenter du granulat et de la pâte de ciment. Ces images sont intéressantes car elles nous renseignent sur les particularités de la microstructure.

La multiplicité des échelles du béton apparaît clairement sur les images présentées. Aucune séparation d'échelle n'est visible : sur chaque image sont présents des granulats de taille comparable à l'image et des granulats de la taille du voxel. Cette particularité peut provenir de la façon dont les bétons sont formulés. Par exemple, la maximisation de la compacité introduite par de Larrard (de Larrard, 1999) invite naturellement à un équilibre des classes granulaires. Il est ainsi difficile de deviner l'échelle d'une image de tomographie sans les indications fournies en légende. Des traitements d'image plus poussés seraient nécessaires pour essayer d'évaluer un indice de serrage pour les granulats d'une taille donnée. Des fonctions de corrélation à deux points pourraient permettre de savoir si certaines classes granulaires sont présentes se façon préférentielle autour des gros granulats pour quantifier un éventuel effet de parois. De même, la quantification des contacts entre grains n'a pas été tentée : la séparation de grains proches est déjà un problème complexe.

De même, les granulométries sont élargies au maximum : le diamètre maximal des granulats dépend de l'espacement des armatures et les sables contiennent des fines dont la taille est similaire à celle des grains de ciment (10μm). Il n'est donc pas d'échelle où la segmentation d'une matrice cimentaire soit une opération aisée. En dehors des granulats, chaque voxel à l'échelle la plus grossière peut être vu comme un matériau hétérogène contenant un mélange de pâte de ciment et de grains de sable.

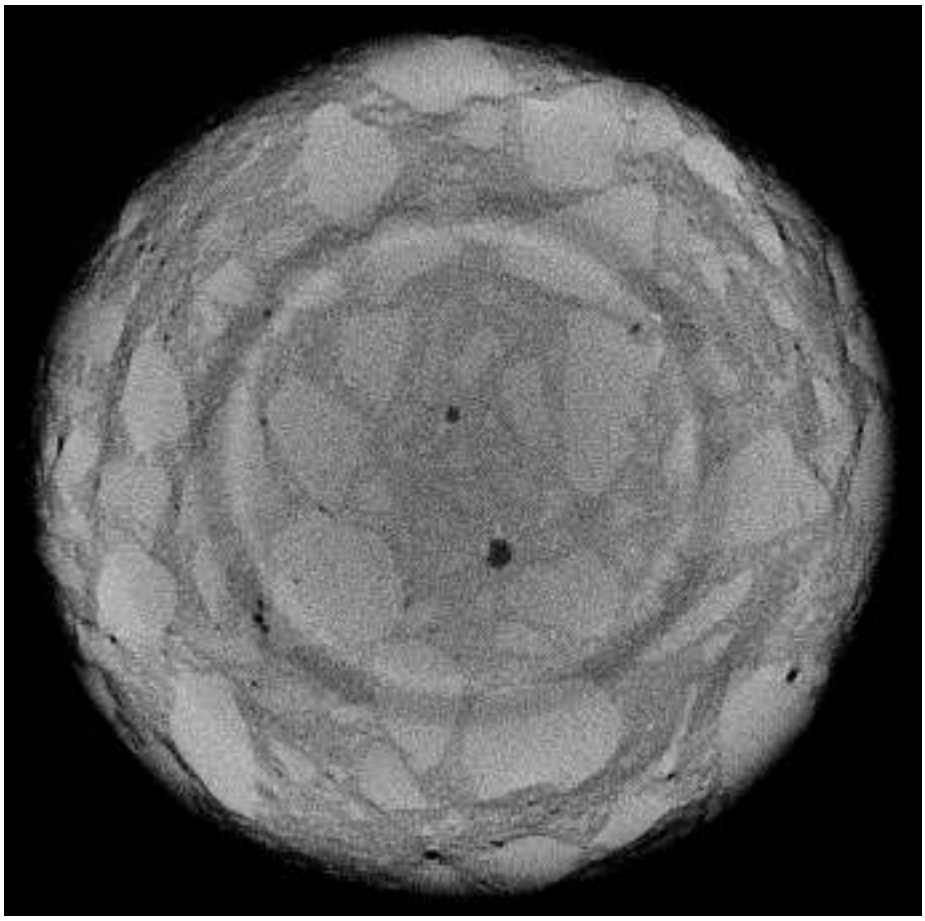


FIGURE 1.17 – Extrait de tomographie, diamètre 16cm. On distingue difficilement les gros granulats. Cette image peut difficilement faire l'objet d'un traitement.

Sur chaque image, il est facile de segmenter les pores. À cette échelle, ce sont encore des pores d'air occlus ou d'air entrainé. Sur les images des éprouvettes de 8mm et 4mm, la segmentation de ces pores pourrait avoir un intérêt dans l'évaluation de la résistance au gel des bétons. En effet, un réseau de petites bulles est nécessaire pour assurer la tenue au gel de bétons à hautes résistances (Derache et al., 2004). Pour ces bétons, l'espacement entre les bulles, actuellement évalué à l'aide de microscopes suivant la norme ASTM C457 (ASTM, 2012a), devient un critère important dans le dosage de l'agent entraineur d'air. L'usage de la tomographie pourrait devenir une alternative sérieuse à cette procédure.

1.3.2 Observation de deux bétons

Les observations de deux bétons sont comparées dans cette section. Le béton type B11 dont des images ont été présentées dans les sections précédentes est un béton à base de granulat calcaire, tandis que le béton de la maquette VERCORS

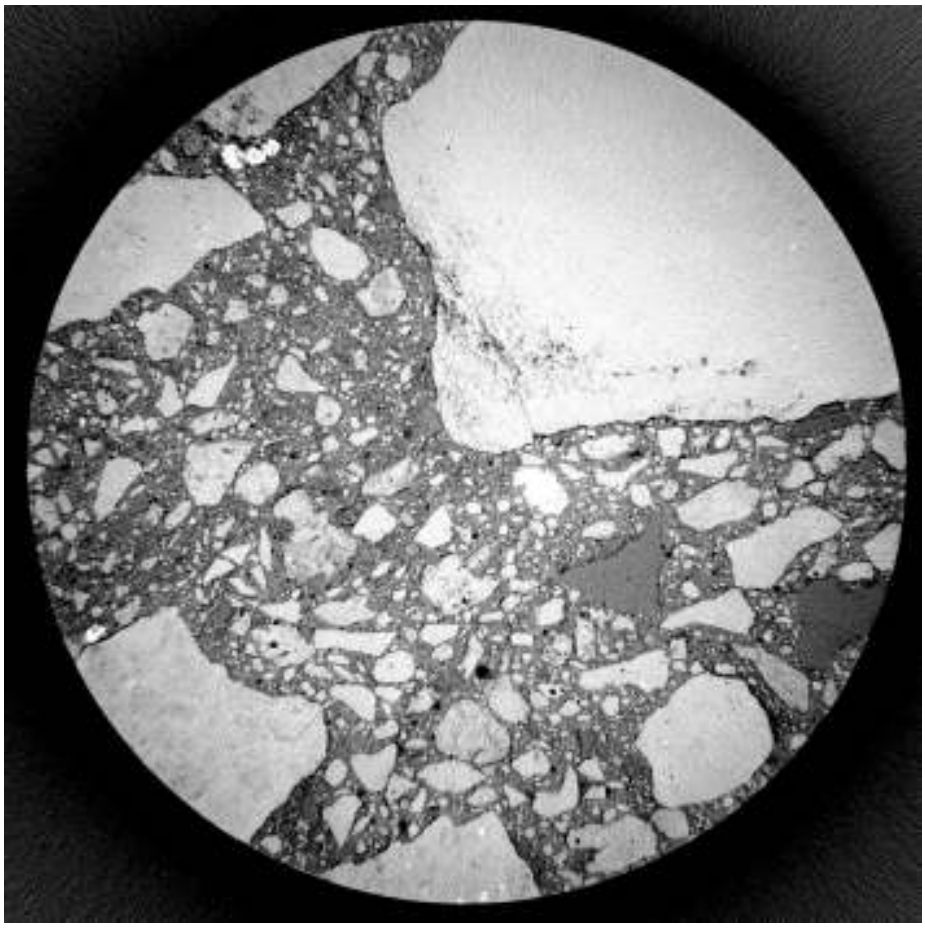


FIGURE 1.18 – Extrait de tomographie, diamètre 20mm. On voit clairement les granulats et des détails de la microstructure sont visibles.

contient des granulats silico-calcaire de rivière. Le granulat de VERCORS est plus rond, plus aplati que le granulat du béton type B11 (Fig. 1.21). On observe aussi sur les images de tomographie une différence de fraction volumique d'air occlus.

Sur l'image de tomographie entière de l'éprouvette de béton de VERCORS, de 11cm de diamètre, on constate une orientation particulière des grains : les grains plats se disposent préférentiellement de façon parallèle à la parois. De plus, il y a peu de gros granulats au centre de l'éprouvette, là où a été introduite l'aiguille vibrante.

Aux échelles inférieures, sur des prismes de coté 8mm, on observe la différence de composition entre les deux bétons (Fig. 1.22). Sur l'image du béton type B11, on distingue assez clairement le granulat calcaire et la matrice cimentaire, alors que les granulats siliceux sont difficiles à séparer de la matrice cimentaire sur l'image du béton VERCORS. Cela est cohérent avec les atténuations calculées au début de ce chapitre : le calcaire atténue les rayons X plus efficacement que la silice. On constate bien le faible contraste entre la pâte de ciment et les grains

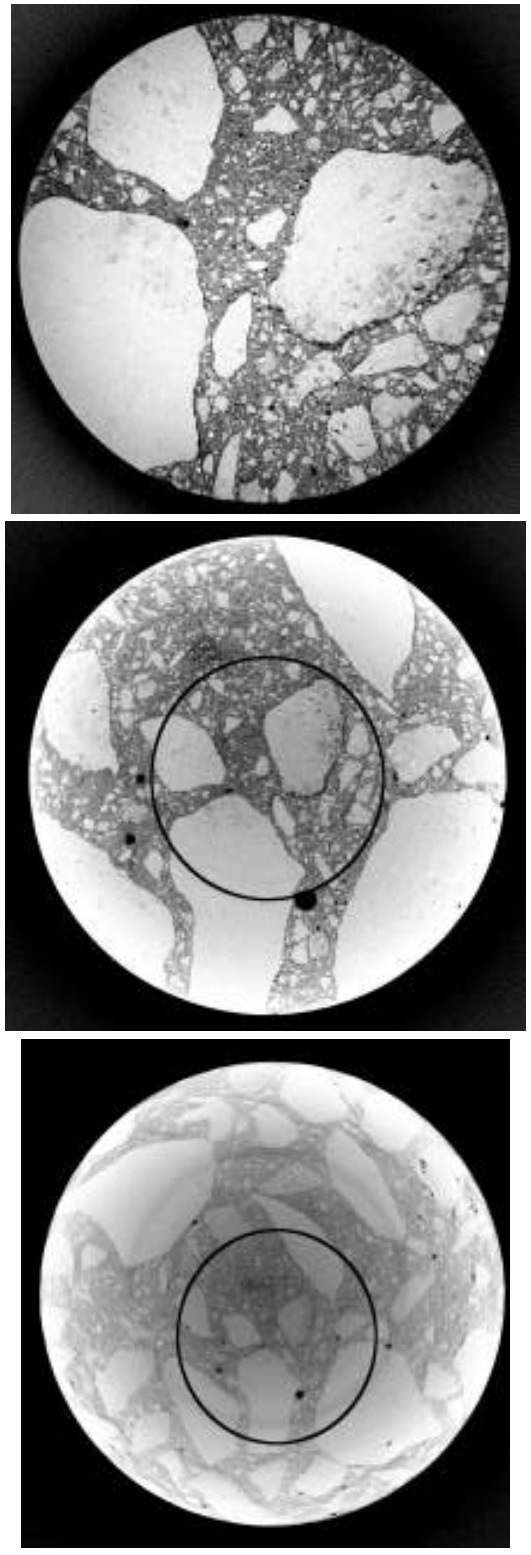


FIGURE 1.19 – Extraits de tomographies, diamètre 95mm, 50mm et 20mm. On retrouve la même zone d'une image sur l'autre. Un coté d'un granulat semble fissuré sur les deux images les mieux résolues. Ce défaut est-il la conséquence du retrait de la pâte de ciment ? Ce coté du grain semble présenter plus de défauts que les grains voisins.

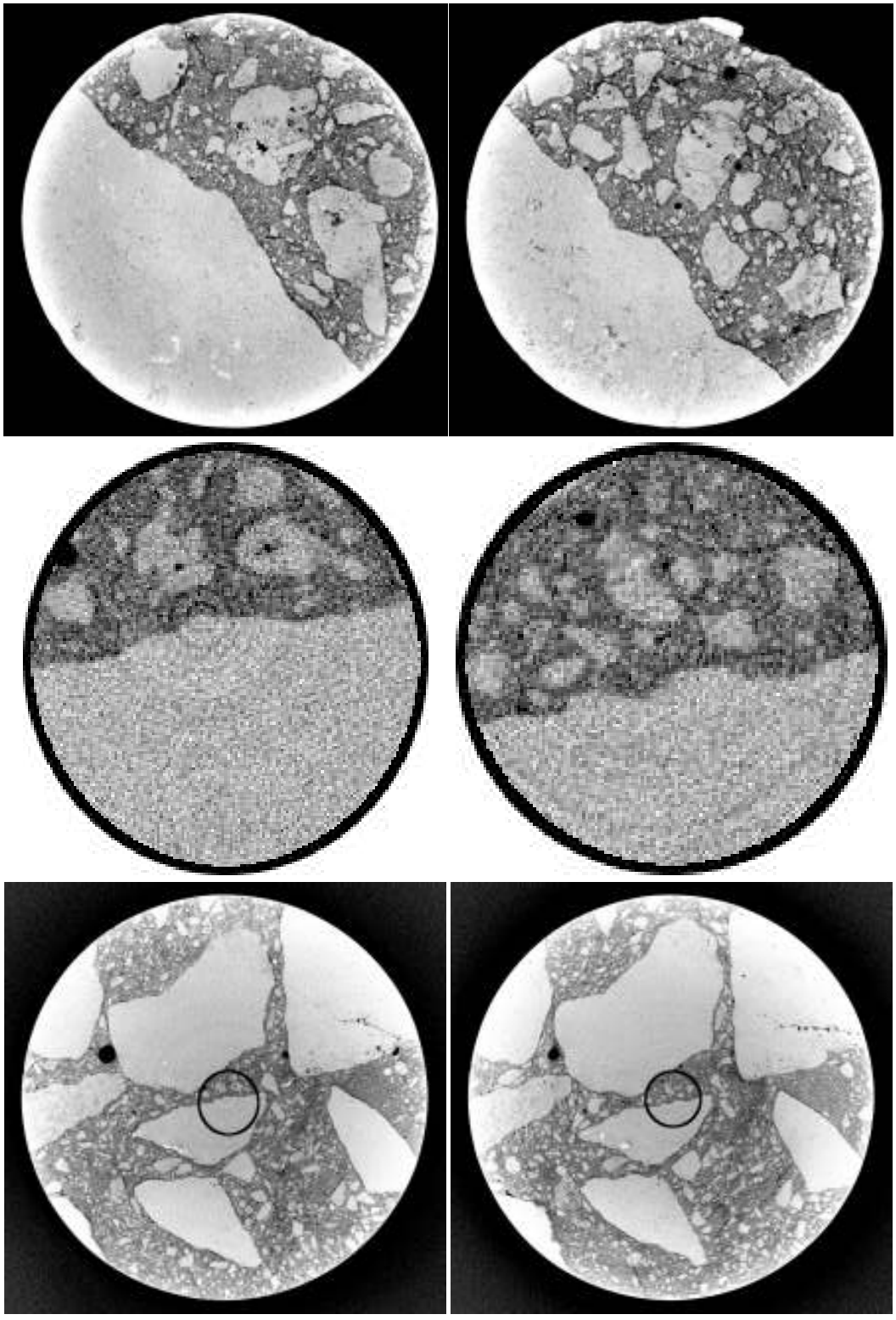


FIGURE 1.20 – Extrait de tomographies, diamètre 50mm à gauche et 5mm à droite. L'image du centre est un agrandissement de l'image de gauche. On retrouve la même zone d'une image sur l'autre, à une rotation près. Les micro-fissures visibles à la petite échelle sont vraisemblablement dues au carottage.

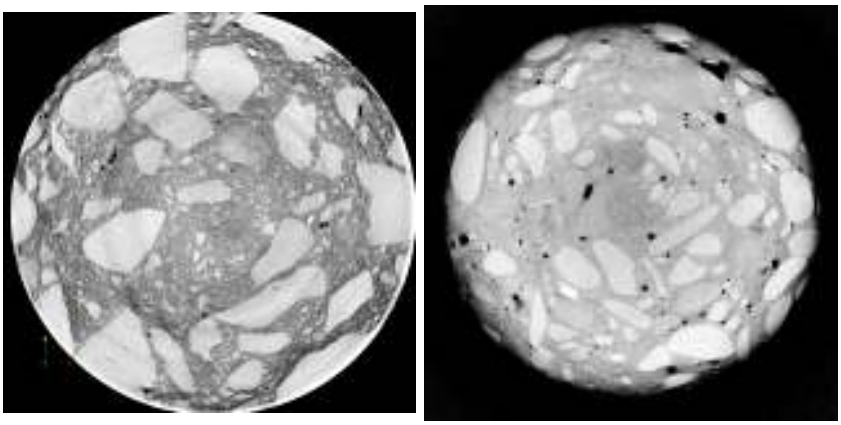


FIGURE 1.21 – Extraits de tomographies. A gauche est présentée une carotte de béton type B11 de diamètre 95mm, à droite, une carotte de béton VERCORS de diamètre 11cm.

de quartz dans le cas du béton VERCORS. On peut aussi constater un biais de sélection : la coupe du béton type B11 ne contient que des petits grains de sable alors que la coupe du béton VERCORS intersecte des gros granulats. On ne peut donc pas prétendre estimer une fraction volumique de granulats sur des images aussi petites.

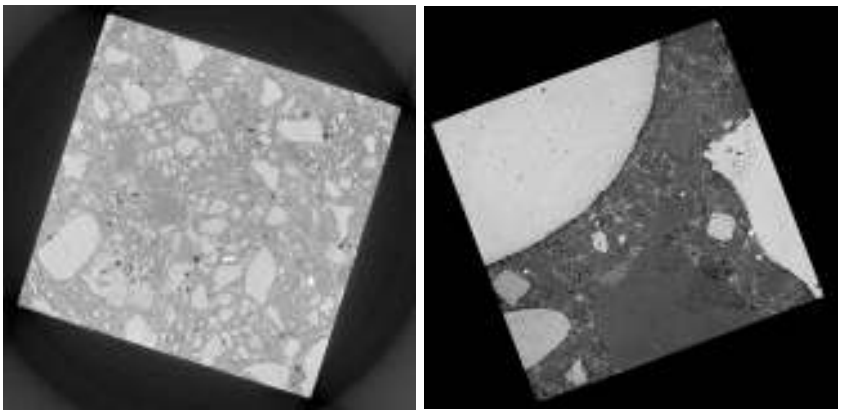


FIGURE 1.22 – Extraits de tomographies de prismes de béton de 8mm de coté découpé à la microtronçonneuse. Le béton type B11 est à gauche, le béton VERCORS à droite. A droite, il est vraiment difficile de distinguer les grains de quartz de la matrice cimentaire : le contraste entre les phases et si faible que les détails de la microstructure sont masqués par les artefacts de reconstruction.

Aux plus petites échelles, sur des prismes de coté 2.5mm, on retrouve l'effet de la composition sur le contraste entre la matrice et le granulat (Fig. 1.23). Malgré une taille de voxel de l'ordre de 1.5μm, il est difficile de voir distinctement une auréole de transition entre les granulats et la pâte cimentaire sur ces images.

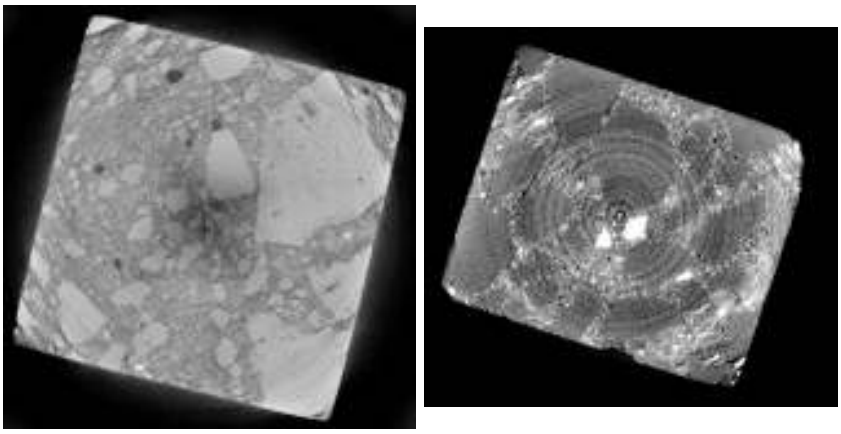


FIGURE 1.23 – Extraits de tomographies de prismes de béton de 2mm de coté découpé à la microtronçonneuse. Le béton type B11 est à gauche, le béton VERCORS à droite.

Conclusion

Les bétons à granulats calcaires permettent des images mieux contrastées que les bétons à granulats siliceux. La tomographie X a alors deux intérêts pour l'étude des bétons :

- Elle peut permettre une estimation de certains paramètres morphologiques de la microstructure, comme la fraction volumique de granulats ou la granulométrie. L'étendue de la granulométrie reste cependant un obstacle de taille. On remarque d'ailleurs une certaine similarité entre les images de coupe de béton : il semble même difficile d'estimer les dimensions d'un échantillon à la seule vue d'une image de tomographie.
- Elle produit une image des détails de la microstructure. On peut ainsi constater une hétérogénéité de la pâte de ciment à proximité des granulats. On peut voir des micro-fissures, mais il est probable que certaines soient provoquées par le carottage. L'utilisation d'une microtronçonneuse permet d'obtenir un échantillon plus petit et moins endommagé.

Il faut noter la multiplicité des échelles rencontrées sur les bétons. L'autre point intéressant est que la diversité des bétons est visible sur les images de tomographie. Les différences de formes des granulats peuvent être observées sur les images et la composition chimique des granulats affecte l'atténuation des rayons X. Sur ce point, il faut recommander l'usage de granulats calcaires pour obtenir des images de tomographie plus facilement exploitables. Enfin, on observe des differences entre les formes des granulats des différents bétons. La forme des granulats, qui peuvent être concassés, roulés ou applatis, peut-elle influer sur le comportement mécanique du béton ?

La tomographie permet donc de distinguer le granulat et la pâte de ciment dans certains cas. La pâte de ciment étant viscoélastique, le granulat élastique, la simulation numérique 3D peut-elle tenir compte des particularités microstructurales pour construire une prévision des déformations différées ?

Chapitre 2

Investigation of the effect of aggregates'morphology on concrete creep properties by numerical simulations

DOI : 10.1016/j.cemconres.2015.01.003

Prestress losses due to creep of concrete is a matter of interest for long term operations of nuclear power plants containment buildings. Experimental studies by Granger (1995) have shown that concretes with similar formulations have different creep behaviors. The aim of this paper is to numerically investigate the effect of size distribution and shape of elastic inclusions on the long term creep of concrete. Several microstructures with prescribed size distribution and spherical or polyhedral shape of inclusions are generated. By using the 3D numerical homogenization procedure for viscoelastic microstructures proposed by Šmilauer and Bažant (2010), it is shown that the size distribution and shape of inclusions have no measurable influence on the overall creep behavior. Moreover, a mean-field estimate provides close predictions. An Interfacial Transition Zone was introduced according to the model of Nadeau (2003). It is shown that this feature of concrete's microstructure can explain differences between creep behaviors.

Introduction

Concrete structures evolves due to time-dependent phenomena such as shrinkage and creep. Predicting basic creep is necessary to estimate the time-dependent prestress losses in thick structures such as nuclear containment buildings. For this purpose, experimental investigations were conducted by Granger Granger (1995) in order to assess the basic creep of six concretes with various formulations.

According to this study, concretes with apparently similar formulation may exhibit different long term behaviors. For instance, the concrete from Flamanville and the one from Paluel have very similar formulation regarding cement composition, water to cement ratio and grain size distribution as shown in table [Tab.

2.1]. Fillers were added to the concrete from Paluel so that the total amount of fine aggregates (smaller than 100 μm) was almost equal in these two concretes. However, the major difference between the two concretes is the nature of the aggregates : crushed granite (granodiorite) for Flamanville and semi-crushed sand-lime river gravel for Paluel. Actually, the time-dependent strains of these two concretes are very different as shown in figure [Fig. 2.1] : The average strain measured on concrete samples from Flamanville after three years of the same compressive loading was twice as much as the one measured on samples from Paluel. Since tests revealed comparable mechanical properties for aggregates, Granger Granger (1995) also measured the basic creep strains of the cementitious matrices without finding noticeable deviation. He concluded that the differences of overall creep properties were due to the aggregates (shape, mineralogy or interface with the cement paste).

	Flamanville	Paluel
(12.5/25mm)	700kg	700kg
(5/12.5mm)	340kg	348kg
(0/0.8mm)	170kg	
(0.1/0.5mm)	485kg	
(0/5mm)	140kg	722kg
Filler Piketty		50kg
Cement (St Vigor) (CPA HP PM)	375kg	375kg
Water	180kg	180kg
BV40 plasticizer	1.5kg	1.56kg
Young Modulus of aggregates	51-65GPa	65GPa
Young Modulus of concrete at 28 days	31.9GPa	38.4GPa
compressive strength f_c at 28 days	50MPa-53.4MPa	43.0MPa-52MPa

TABLE 2.1 – Formulation of two concretes of Granger Granger (1995)

Because experimental results are difficult to obtain, a natural way to perform parametric studies is to rely on models. The purpose of this paper is to numerically investigate the effect of size distribution and shape of inclusions on the long term creep of a matrix-inclusion material where the viscoelastic phase is the matrix. The matrix has the same behavior as a cement paste, the inclusions are perfectly bonded to the matrix and they have the elastic properties of aggregates.

One could use X-ray tomography images as inputs of 3D FFT-based computations Escoda et al. (2011). This procedure has two drawbacks : the image must be segmented in order to differentiate the phases, and boundary effects may occur since the sample is not the unit cell of a periodic material. Filtering strategies have recently been defined to mitigate the effect of such boundary effects and get a macroscopically consistent estimate of the overall behaviour Bignonnet et al. (2014). This study is focused on numerically generated periodic microstructures so as to tightly control the volume fraction of inclusions, their sizes and their shapes. The generation of several microstructures with prescribed grain size distribution and spherical or polyhedral shape of inclusions is made by dense sphere packing or Random Sequential Adsorption algorithm. The 3D numerical homogenization procedure for viscoelastic microstructures proposed by Šmilauer and Bažant Šmilauer and Bažant (2010) is used to compute the

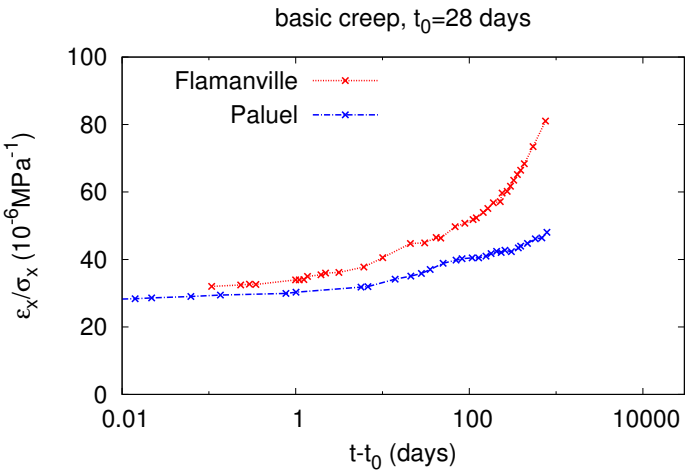


FIGURE 2.1 – Results of uniaxial compressive creep tests reported by L. Granger Granger (1995). Although the formulations of concretes from Flamanville and Paluel were comparable, the basic creep strain (10^{-6}MPa^{-1} vs days) proved different. The compressive stress was 12 MPa and the concrete was loaded at $t_0 = 28$ days.

time-dependent response to a constant applied load. The Interface Transition Zone is described, the model of Nadeau Nadeau (2003) is recalled and the assumption to extend it to viscoelasticity are exposed. Then, the obtained results are compared to the predictions of mean-field homogenization.

In the first part of the paper, the microstructure generator is described, the 3D numerical homogenization method is introduced, some numerical tests are performed to validate and assess the performances of the simulations, the case of an Interfacial Transition Zone is exposed and its effect on the creep strain is numerically estimated. In the second part, the micromechanics methods are recalled and their predictions are compared to the numerical results. The paper ends with a discussion and a conclusion.

2.1 Simulation of viscoelastic matrix-inclusion microstructures

2.1.1 Generation of matrix-inclusion microstructures

In this section, the microstructure generator and the 3D numerical method for computing the overall viscoelastic response are presented. A matrix-inclusion microstructure is generated according to given volume fraction, sieve curve and shape of inclusions.

Scope statement

Some features are to be enforced in order to obtain a valuable matrix-inclusion microstructure generator :

- Inclusions are placed in a cubic cell and they should not overlap.
- The microstructure should be periodic.
- A tight control of the volume fraction, the size distribution and the shape of inclusions are required.
- High volume fractions of inclusions ($> 50\%$) are needed to represent realistic microstructures of concrete.
- The simulated material should be isotropic.
- The generator should run as fast as possible.

At least two methods may fulfill these requirements. The Random Sequential Adsorption (RSA) algorithm Feder (1980) is the simplest method to design and implement. Its ability to handle convex polyhedra makes it useful to assess the effect of shape of inclusions. A high volume fraction of inclusions (up to 68%) may be reached for wide sieve curves. On the other hand, this method fails to simulate monodisperse grain size distribution for volume fraction greater than 30%.

The other algorithm is the one of Lubashevky and Stillinger Lubachevsky and Stillinger (1990) which is dedicated to pack efficiently sets of ellipsoidal inclusions. In the case of monodisperse spheres, volume fraction up to 63% can be reached. To the authors' knowledge, there is no extension of this method to polyhedral inclusions.

Determination of the number of inclusions and their volumes

Given the sieve curve (volume fraction vs particle diameter), the volume fraction of inclusions f_g and the dimension l of the cubic cell, the starting point, common to both methods, is the generation of the random number of the inclusions in the cubic cell and their volumes. The sieve curve is first approximated by a piecewise linear function of the equivalent diameters on twenty classes, each class representing 5% of the total volume of inclusions. The equivalent diameter of an inclusion, d, is given by $d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}v}$, where v is the volume of the inclusion. Each class must provide a volume $V_{5\%} = 0.05 \times l^3 \times f_g$ of inclusions. On each class $i \in \{0, 1, ..., 19\}$, the distribution of diameters is such that the approximated sieve curve $s(d)$ is an affine function of d on the interval $[d_{i+1}, d_i[$ with $D_{max} = d_0 > d_1 > ... > d_{20} = d_{min}$. [Fig. 2.2]. The classes are filled one after another, starting from the class 0 of largest inclusions $[d_1, d_0[$ to the class 19 of the smallest inclusions $[d_{20}, d_{19}[$. While the volume of the generated inclusions in class i is less than $V_{5\%}$, a new inclusion of diameter d_{picked} is repeatedly generated in this class as explained hereafter.

Let $F_i(d)$ be the probability to pick in the class i an inclusion of diameter lower than d. Since the sieve function is piecewise linear, $F_i'(d)\frac{\pi}{6}d^3$ must be uniform. Taking into account $F_i(d_{i+1}) = 0$ and $F_i(d_i) = 1$, we find that F_i is

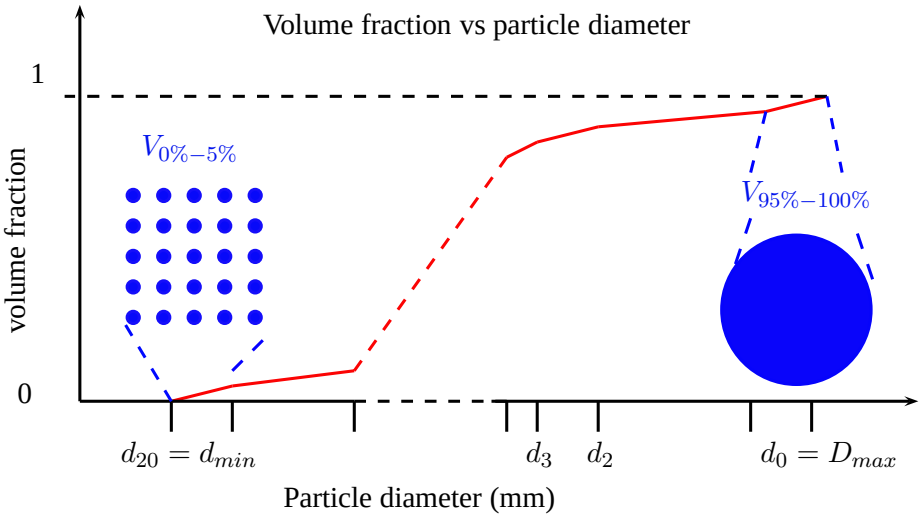


FIGURE 2.2 – The sieve curve : volume fraction vs particle diameter. This curve is approximated by a piecewise linear function on twenty classes, each class representing 5% of the total volume of inclusions.

given by

$$F_i(d) = \frac{d^{-2} - d_{i+1}^{-2}}{d_i^{-2} - d_{i+1}^{-2}}$$

Hence, d_{picked} is generated by :

$$d_{picked} = F_i^{-1}(R()) = \left(d_{i+1}^{-2} + (d_i^{-2} - d_{i+1}^{-2})R()\right)^{-\frac{1}{2}}$$

where F_i^{-1} is the inverse function of F_i and $R()$ is the generator of the uniform random law on $[0, 1[$

Convex polyhedra and the RSA algorithm

A convex polyhedron is generated aiming at controlling its shape [Fig.2.3,2.4]. A center is generated and a number of points is picked according to a Poisson law (parameter $\lambda > 0$). Then, directions are selected on the unit sphere according to the uniform random law, and distances to the center are generated according to a log-normal law (parameters $\mu_l \in \boldsymbol{R}$, $\sigma_l > 0$). The polyhedron is defined as the convex hull of those points which is computed through the C++ interface of the Qhull software Barber et al. (1996); qhu.

Each convex polyhedron is generated according to the previously described procedure and is placed into the cubic cell avoiding overlapping with already generated polyhedra : its position is randomly picked in the cubic cell until non-overlapping is achieved. By putting the bigger inclusions first, high volume fraction may be reached. This method has already been used to generate concrete and mortar microstructures with spherical Bentz et al. (1999) or polyhedral inclusionsEscoda (2012). Unlike Escoda (2012), the computation of overlapping between polyhedra is performed analytically in the proposed generator. Indeed, overlapping between two polyhedra is computed thanks to the Gilbert-Johnson-

Keerthi distance algorithm Gilbert et al. (1987) as implemented in the Bullet physics library bul. This procedure suppresses the exclusion-zone of one voxel adopted in Escoda (2012) and it speeds up the computations. In addition, in order to limit the potential pair of polyhedra to be tested, the cubic cell is divided into sectors : two polyhedra can potentially overlap if they share the same sector. Moreover, each polyhedra is embedded in a rectangular bounding box because testing overlapping of boxes is much easier than testing overlapping of polyhedra. A polyhedron may be present in different sectors of the cubic cell in order to ensure periodicity.

The maximum reachable volume fraction depends on the size distribution and on inclusions' shape. A wide range of inclusions' sizes allows larger volume fractions. Simulating spherical inclusions is faster than simulating unaligned elongated inclusions with sharp edges. Artificial concrete microstructures with high volume fraction ($60 - 68\%$) and polyhedral inclusions can be built with the RSA method for some size distributions [Fig. 2.3]. In particular, the ratio between the largest inclusions' equivalent diameter to the smallest one must be less than 20. If this ratio is too large, the number of inclusions would become prohibitive. If this ratio is too small, reaching the given volume fraction would take too long or could not be achieved.

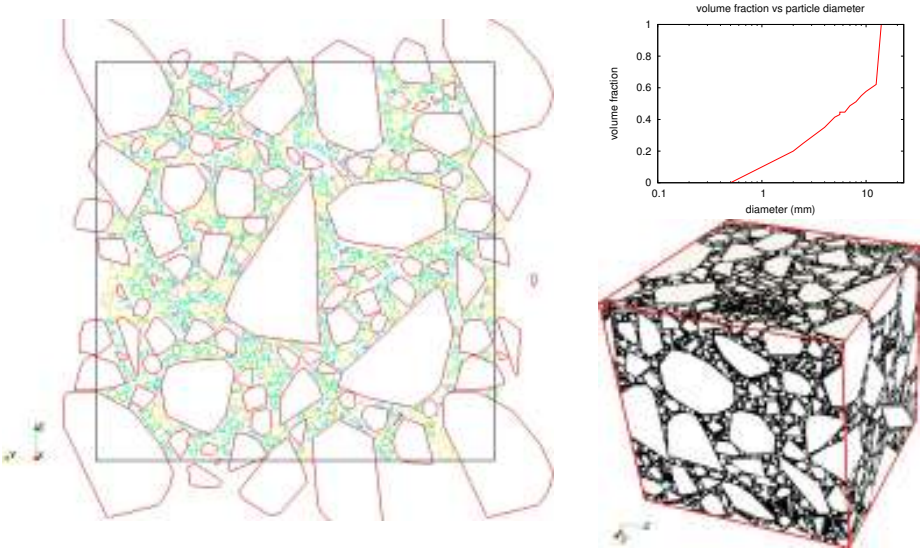


FIGURE 2.3 – A section of a 4 cm-wide sample of a concrete made of coarse sand ($d > 0.5$ mm) and small gravel ($d < 13.5$ mm) built by the RSA algorithm is shown. There are 28760 polyhedra in the cubic cell and the volume fraction is 68%.

Lubashevsky and Stillinger algorithm for spherical inclusions

The RSA algorithm described above cannot achieve high volume fraction for monodisperse particles. For this reason, we use the Lubashevsky and Stillinger

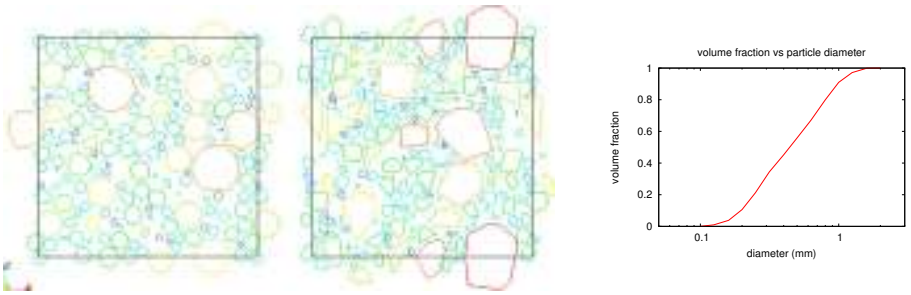


FIGURE 2.4 – On the left, polyhedra are rather round whereas polyhedra feature sharp edges in the middle. The RSA algorithm has been used. The sieve curve of the corresponding mortar is presented on the right.

algorithm for generating matrix-inclusion microstructures with monodisperse spherical inclusions.

In our implementation, we use the algorithm described in Lubachevsky and Stillinger (1990) and Kansal et al. (2002) for simulating polydisperse packing of spherical inclusions. This dynamic, event-driven algorithm enables very high packing ratio of spheres. Seeds are placed in the cubic cell and their growth rate are chosen to comply with the size distribution. Each radius increases proportionally to time t and each center moves with a constant velocity. As spheres collide, the algorithm changes their velocities to avoid overlapping. Thanks to uniform speeds and growth rates, collisions, or events, can be computed analytically. There is no need for time steps since nothing happen until the next event. Therefore the procedure jumps from one event to another and the program runs tremendously fast. This method has been extended to ellipsoids Donev et al. (2005a,b), but this implementation is limited to spherical inclusions or sets of spheres. This algorithm has already been used to model composite materials in the range of elasticity Ghossein and Lévesque (2012).

2.1.2 Numerical determination of the effective viscoelastic properties of heterogeneous materials

The unit cell problem

The aim of this section is to numerically determine the overall viscoelastic behavior of a matrix-inclusion microstructure where the inclusions are elastic and the matrix viscoelastic.

The strain tensor $\varepsilon(t)$ in a viscoelastic material depends on the history of stress tensor $\sigma(t)$. If the constitutive law is linear, the Boltzmann superposition principle states that the material properties are defined by a compliance function (fourth order tensor), $\mathbf{J}(t,t')$, such that :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \mathbf{J}(t,t')\frac{d\sigma}{dt}(t')dt'$$

If the elapsed time since loading is the only relevant parameter, the material is non-aging :

$\mathbf{J}(t,t') = \mathbf{J}(t-t')$

The determination of the overall viscoelastic behavior of a periodic microstructure can be obtained by solving the following auxiliary problem on the periodic unit cell V.

$$\begin{array}{rcll} div\ \sigma(x,t) & = & 0 & x \in V \\ \varepsilon(x,t) & = & \int_0^t \mathbf{J}(x,t,t')\frac{d\sigma}{dt}(x,t')dt' & x \in V \\ \varepsilon(x,t) & = & E(t) + \nabla^s u(x,t) & x \in V \\ u(x,t) & & periodic & x \in \partial V \\ \sigma(x,t)\cdot n(x) & & skew-periodic & x \in \partial V \end{array}$$

Here $E(t)$ is the time-dependent overall strain, $u(t,x)$ is the displacement field in V,$\nabla^s u(x,t)$ is its symmetric gradient, ∂V is the boundary of V and $n(x)$ is the outer normal to ∂V. Actually, $E(t)$ is the volume average of $\varepsilon(x,t)$ and we denote by $\Sigma(t)$ the volume average of $\sigma(x,t)$.

Numerical discretizations

We use the computational method of Šmilauer and Bažant in Šmilauer and Bažant (2010) developed for cementitious materials. This method which relies on the exponential algorithm Zienkiewicz et al. (1968); Taylor et al. (1970); Bažant and Wu (1974) is a time-iteration procedure to solve the viscoelastic problem for the case of steady loads. It features an integration of the constitutive equations on each time step assuming a constant stress rate. It enables the time step to grow exponentially when performing a relaxation (or creep) simulation. This method has recently made use of the FFT algorithm as the solver for the unit cell tangent problem Šmilauer and Bažant (2010); Suquet et al. (2012).

Let $\Delta\varepsilon(x) = \varepsilon(x,t_{i+1}) - \varepsilon(x,t_i)$, $\Delta\sigma(x) = \sigma(x,t_{i+1}) - \sigma(x,t_i)$ and $\Delta u(x) = u(x,t_{i+1}) - u(x,t_i)$ be respectively the strain, stress and displacement increment between time t_i and t_{i+1}. These fields are solution of the following unit cell tangent problem :

$$\begin{array}{rcll} div\ \Delta\sigma(x) & = & 0 & x \in V \\ \Delta\varepsilon(x) & = & \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{J}(x,t_{i+1},t')\frac{d\sigma}{dt}(x,t')dt' + \varepsilon_0(x) & x \in V \\ \Delta\varepsilon(x) & = & \Delta E + \nabla^s \Delta u(x) & x \in V \\ \Delta u(x) & & periodic & x \in \partial V \\ \Delta\sigma(x)\cdot n(x) & & skew-periodic & x \in \partial V \end{array}$$

where

$$\varepsilon_0(x) = \int_0^{t_i} \left[\mathbf{J}(x,t_{i+1},t') - \mathbf{J}(x,t_i,t')\right] \frac{d\sigma}{dt}(x,t')dt'$$

and

$\Delta E = E(t_{i+1}) - E(t_i)$.

It is assumed that the stress rate $\frac{d\sigma}{dt}$ in the interval $[t_i : t_{i+1}]$ is constant and that the compliance corresponds to a series of Kelvin chains [Fig. 2.5] :

$$\mathbf{J}(t-t') = \int_{t'}^{t} \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau}{\tau_k} e^{-\frac{\tau-t'}{\tau_k}} \mathbf{C}_k^{-1} d\tau + \mathbf{C}_0^{-1}$$

where $\mathbf{C}_k, k = 0, 1, ..., n$ are $n+1$ fourth-order elasticity tensors and $\tau_k, k = 1, 2, ..., n$ are n characteristic times. The integration of the constitutive equations on the time step gives the following incremental constitutive equation :

$$\Delta\sigma(x) \quad = \quad \mathbf{C}_t^i(x)(\Delta\varepsilon(x) - \varepsilon^i(x))$$

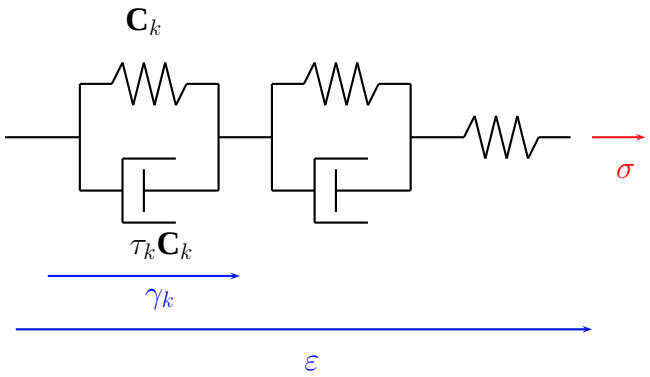


FIGURE 2.5 – The rheological model is made of a series of Kelvin chains

where $\mathbf{C}_t^i(x)$ and $\varepsilon^i(x)$ are explicitly given by :

$$(\mathbf{C}_t^i)^{-1} = \mathbf{C}_0^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \tau_k \frac{1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\tau_k}}}{t_{i+1} - t_i}\right) \mathbf{C}_k^{-1}$$

$$\varepsilon^i = \sum_{k=1}^{n} \tau_k (1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\tau_k}}) \gamma_k^i$$

where γ_k^i are n symmetric second-order strains corresponding to internal variables of Kelvin chains [Fig. 2.5]. They are defined incrementally as $\gamma_k^0 = 0$ and for $i \geq 0$:

$$\gamma_k^{i+1} = \frac{1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\tau_k}}}{t_{i+1} - t_i} \mathbf{C}_k^{-1} \Delta\sigma + e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\tau_k}} \gamma_k^i$$

Notice that the choice of a series of Kelvin chains combined with the above described exponential algorithm allows for the introduction of these internal variables. Hence, storing these few internal variables enables large computations (FEM or FFT).

To solve the unit cell tangent problem at each time step, a method is required. The FFT algorithm of H. Moulinec and P. Suquet has proved a powerful tool to compute the elastic Moulinec and Suquet (1998b) and viscoelastic Idiart et al. (2006) response of a periodic microstructure. It takes digital images of materials and prestress as inputs. Both the basic [Alg.1]Moulinec and Suquet (1998b) and the accelerated [Alg.2]Eyre and Milton (1999); Moulinec and Silva (2013) versions are written for this study. An isotropic reference material $\mathbf{C}_0^*$ is to be introduced and its Green operator Γ^0 is applied in the Fourier space. The loading can be either the prescribed macroscopic strain or the prescribed macroscopic stress as explained in Moulinec and Suquet (1998b).

Regarding implementation details, the MPI extension of the FFTW library fft; Frigo and Johnson (2005) and the PETSc library Balay et al. (2013b,a, 1997) are combined. The software routinely performs its computation on several processors on shared-memory machines as well as on clusters (Ivanhoe at EDF R&D). Using less than twenty nodes and about 100-200 processes on this cluster, the size of the problem may be increased up to $700 \times 700 \times 700$ for elasticity and $400 \times 400 \times 400$ for viscoelasticity with 8 Kelvin chains and our computations last less than two hours (180 time steps).

Constituents' properties

Long term behavior of concretes were experimentally identified by Granger in Granger (1995). Characteristic times τ_k and stiffness $\mathbf{C}_k$ of Kelvin chains correspond to a creep test of a concrete (Penly) loaded at 28 days. Eight characteristic times were introduced, one for each decade, from 0.002 days to 20000 days. Properties of the cement paste are assumed to be similar. To model a viscoelastic cimentitious matrix, the elastic and viscoelastic stiffnesses of a concrete were divided by three [Tab. 2.2]. Its Young modulus is $E_{matrix} = 12$ GPa, which is comparable to the measured ones of reconstituted cementitious matrices Granger (1995). A reverse identification of these values could have been performed. All Poisson's ratios are assumed to be 0.2. The behavior of inclusions is elastic isotropic (Young Modulus $E = 60$ GPa and Poisson's ratio 0.2).

	Concrete, L. Granger	cement paste
τ_k (days)	Young Modulus E, GPa	Young Modulus E, GPa
Elastic	36.02	12
0.002	1901.73	634
0.02	1426.16	475
0.2	546.23	182
2	240.54	80.2
20	112.68	37.6
200	54.79	18.3
2000	36.5	12.2
20000	27.04	9.01

TABLE 2.2 – Mechanical behavior of a concrete identified on a creep test Granger (1995) and the behavior of the defined cement paste. All Poisson ratios are assumed to be 0.2.

Studied microstructures

To explore the effect of grain size distribution and shape, the volume fraction was set to 63% and three different microstructures were defined :

- Unimodal : all inclusions are spherical and their diameters are equal. There are 150 inclusions for a volume of 8 mm^3 and their radius is about 0.2 mm.
- Bimodal : all inclusions are spherical. Two diameters coexist : about 0.2 mm and 1 mm.
- Concrete : inclusions are polyhedra and their grain size distribution is described on [Fig. 2.3]. Regarding their shape, crushed inclusions correspond to convex hulls of about $\lambda = 12$ points whose distances to center are picked according to a log-normal law ($\mu_l = 0.08$, $\sigma_l = 0.02$) before scaling.
  With these parameters, the polyhedral inclusions are similar to inclusions used in concrete mixes. Indicators describing the inclusions' shape such as elongation ratio and flakiness ratio have been defined and measured on real samples of aggregates Kwan et al. (1999); ASTM (2009); AFNOR (2012);

Hu and Stroeven (2011). For an ellipsoidal inclusion with principal axes of lengths $a > b > c$, the elongation ratio is a/b and the flakiness ratio is c/b. The average elongation ratio of the polyhedral inclusions used in our simulations is 1.08 and their average flakiness ratio is 0.8. The elongation index and flakiness index correspond to the volume fraction of inclusions featuring respectively an elongation ratio greater than 1.8 and a flakiness ratio lower than 0.6. For normal mix design, the combined (flakiness + elongation) index for coarse aggregates must be limited to 25%, for workability reasons Gambhir (2013). In our simulations, the elongation index is less than 1% and the flakiness index is 11%.

Examples of these microstructures are displayed on [Fig. 2.9].

Validation of the numerical procedure

To ensure the reliability of the method and its implementation, some basic tests were performed.

Time Discretization

Is the response of a homogeneous microstructure precisely computed ? The integration of the constitutive law on the time step may induce a numerical error. In the case of Kelvin chain, the result of a relaxation test is estimated by the Laplace-Carson transform and it serves as a reference to compute the relative numerical error for the cement paste (Fig.2.6). It should be emphasized that the long term stress of a series of Kelvin chain under a constant strain is steady. Therefore the numerical error due to time discretization vanishes. Different values of the rate $b = \frac{t_{i+2}-t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}$ of the geometric growth of the time steps were tested. In all our simulations, we chose the geometric growth $b = 1.12$. Therefore, 180 unit cell tangent problems have to be solved to cover the range between $t - t_0 = 5 \times 10^{-6}$ days and $t - t_0 = 21900$ days where t_0 is the time of the initial loading.

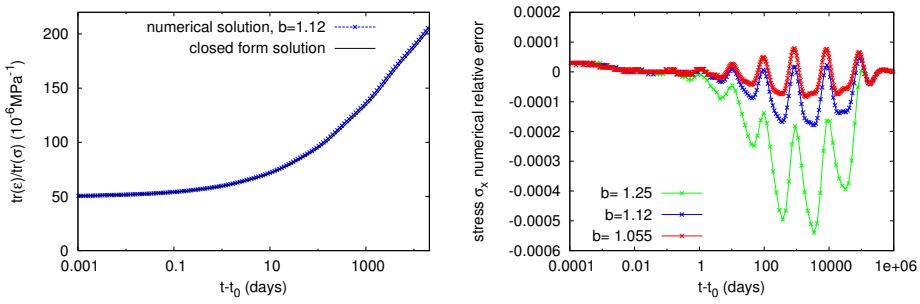


FIGURE 2.6 – Time discretization. Left : Dilation strain during a hydrostatic creep test on a cement paste. The closed-form response and numerical estimate through the iterative procedure remain close. Right : Relative error on ε_x during an uniaxial relaxation test on a homogeneous microstructure. The numerical error depends on the base b for the geometric growth of the time step.

Space discretization

In the case of heterogeneous microstructures, the discretization of the FFT grid also triggers numerical errors :

- The stress and strain field are stored per voxel which induces numerical errors. See Brisard and Dormieux (2010) for further discussions about this issue.
- The heterogeneous microstructure is projected on a grid. Therefore, there is a loss of information about the local behavior of the material. A critical comparison of numerical methods working on conforming meshes or Cartesian grids was performed in the range of thermal conduction and linear elasticity at high phase contrast Dunant et al. (2013). FFT solvers lead to very good approximations of overall properties since extremely fine meshes can be considered.

In order to lower the error due to the projection on a grid, for each voxel, a local volume fraction based on 64 sensing points is computed and a Reuss-like constitutive law is computed and assigned to each voxel. Therefore, the microstructure is made of black voxels (pure matrix), white voxels (pure inclusions) and gray voxels (composite). To estimate the error due to discretization, the response of the unimodal microstructure with a volume fraction of 55% is computed at various resolutions [Fig. 2.7 2.8]. The use of a low contrast between the Young modulus of the phases (< 20), the ability of parallel FFT to deal with large grids and the choice of the Reuss bound for gray voxel lead to a mesh-independent overall response.

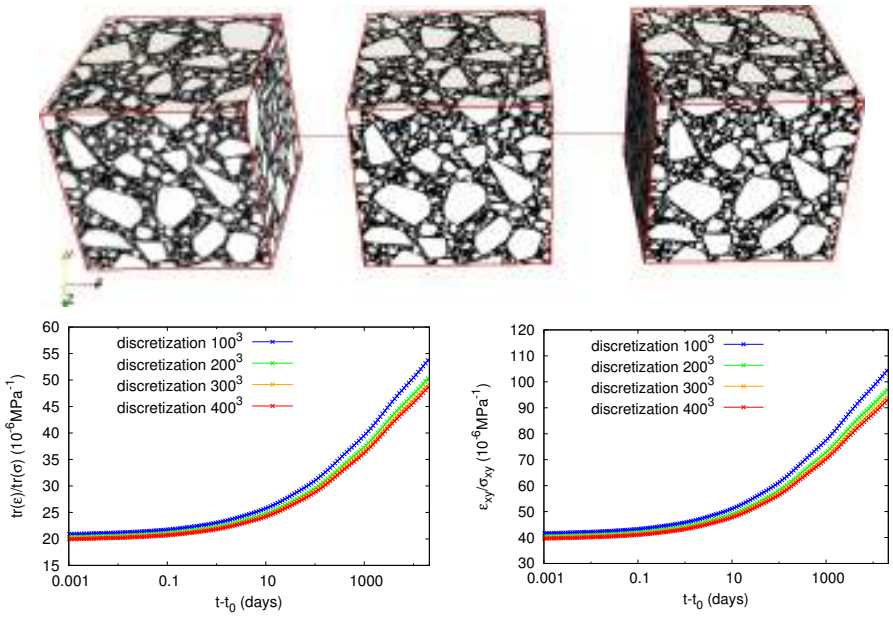


FIGURE 2.7 – Top : One microstructure of concrete of size 40 mm made of 63% of inclusions at discretization 100^3,200^3 and 400^3. Bottom : The delayed responses to hydrostatic (left) and shear(right) creep tests are computed.

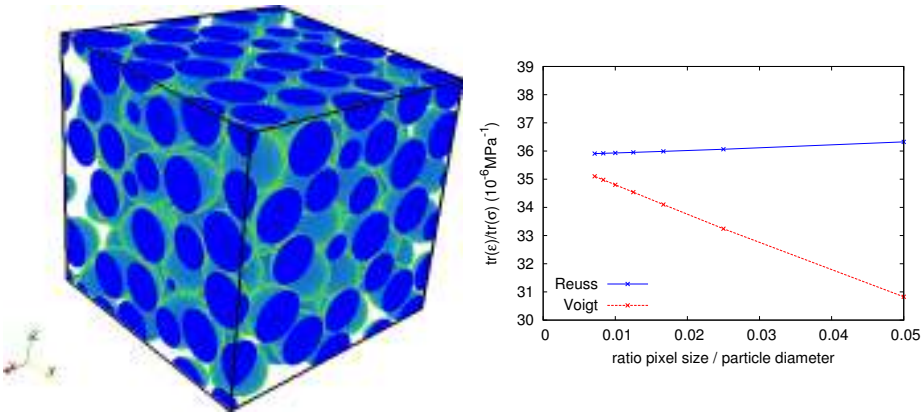


FIGURE 2.8 – On the left : a microstructure made of 55% of spherical inclusions is discretized on a 500^3 grid. On the right : Numerical elastic hydrostatic tests were performed on this microstructure ($E_{inclusions}$=60 GPa, E_{matrix}=6 GPa). The smallest voxel size corresponds to a discretization on a 700^3 grid. Assigning the Reuss-like behavior to gray (composite) voxels is less sensitive to discretization that the Voigt-like behavior.

Representative Volume Element

It is well-known that the asymptotic overall response should not depend on the generated sample neither on the size of the unit cell which must be large enough to be representative of the microstructure (Sab (1992); Kanit et al. (2003) among others). For each microstructure defined in section 2.1.2, different size of the unit cell and many samples were generated. Numerical hydrostatic and shear creep tests are performed.

Two criteria were defined to ensure that the unit cell is a representative volume element :

- For a hydrostatic creep test, the unit-cell hydrostatic compliance at time t is defined as $\frac{1}{3K(t)} = \frac{tr(\varepsilon(t))}{tr(\sigma)}$ and for a shear creep test, the unit-cell shear compliance is $\frac{1}{2G}(t) = \frac{\varepsilon_{xy}(t)}{\sigma_{xy}}$ The corresponding relative standard deviation of the compliance is defined as the ratio of the standard deviation to the average of the unit-cell compliance over the samples that were generated. It represents the statistical dispersion of the estimated overall time-dependent strains and it is expected to decrease as the size of the unit cell increases.
- An anisotropic indicator a is defined to check that the unit-cell compliance is isotropic. For a hydrostatic creep test, it is defined as
$$a = \sqrt{\frac{(\varepsilon_{xx}^{dev})^2 + (\varepsilon_{yy}^{dev})^2 + (\varepsilon_{zz}^{dev})^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2}{(tr(\varepsilon)/3)^2}}$$
where ε^{dev} is the deviatoric part of the overall strain. For a shear creep test, σ_{xy} being the direction of loading, it writes :

microstructure	size of cubic cell (mm)	maximum of inclusion diameter (mm)	average compliance, in 10^{-6}MPa^{-1}	compliance relative standard deviation	anisotropic indicator a	number of tests
hydrostatic test						
$t - t_0 = 0$ day						
unimodal	2	0.4	19.7	0.003	0.01	10
unimodal	4	0.4	19.8	0.0005	0.003	5
bimodal	2	1	19.8	0.0005	0.013	10
bimodal	4	1	19.9	0.0003	0.004	5
concrete	40	14	19.8	0.0005	0.012	10
$t - t_0 = 21900$ days						
unimodal	2	0.4	47.7	0.022	0.03	10
unimodal	4	0.4	47.2	0.003	0.008	5
bimodal	2	1	48.9	0.004	0.05	10
bimodal	4	1	48.9	0.002	0.016	5
concrete	40	14	48.9	0.003	0.04	10
shear test						
$t - t_0 = 0$ day						
unimodal	2	0.4	38.8	0.004	0.007	10
unimodal	4	0.4	38.9	0.001	0.002	5
bimodal	2	1	39.3	0.003	0.007	10
bimodal	4	1	39.4	0.001	0.003	5
concrete	40	14	39.3	0.002	0.006	10
$t - t_0 = 21900$ days						
unimodal	2	0.4	88.9	0.02	0.02	10
unimodal	4	0.4	88.3	0.005	0.005	5
bimodal	2	1	94.1	0.01	0.03	10
bimodal	4	1	93.8	0.003	0.01	5
concrete	40	14	92.7	0.006	0.02	10

TABLE 2.3 – For each kind of microstructure and different size of the unit cell, many samples are built and numerical hydrostatic and shear creep tests are performed. The relative standard deviation of the estimated macroscopic compliances are very low and the overall response is isotropic.

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_{xy}^2}}$$

a is positive and a is null if and only if the overall strain corresponds to the response of an isotropic material.

The results of these tests are described in [Tab. 2.3]. The relative standard deviation of the estimated macroscopic compliances are very low and the overall response is isotropic. These features are obtained for cubic unit cells of concrete of 4 cm×4 cm×4 cm size, the largest inclusion diameter being less than 1.25 cm and the constituents' properties being those described in section 2.1.2. In the case of bimodal microstructures, a 2mm unit cell, twice as large as the largest aggregates, was sufficient to retrieve a precise estimate of the overall strain. The frame of periodic homogenization allows precise results on small unit cells in the range of elasticity Gusev (1997); Sab and Nedjar (2005). Gal and Kryvoruck have performed 3D elastic computations on 50mm large samples of concrete, the maximum diameter of aggregates being 15mm Gal and Kryvoruk (2011). Our simulations indicate that the size of the RVE remains small in the range of linear viscoelasticity, as long as the elastic contrast between phases is limited, while it may enlarge for phenomena like plasticityOstoja-Starzewski (2006) or fatigueLachihab and Sab (2005).

Influence of grain size distribution and shape

Responses to hydrostatic and shear creep tests are computed, the matrix being made of cement paste. The microstructures are those defined in section 2.1.2 on page 71. The volume fraction of inclusions is set at 63%.

The overall time dependent strains remain close, even for very different microstructures[Fig. 2.9]. The sieve curve and the shape of inclusions have little effect on the overall viscoelastic behavior of the matrix-inclusion composite. Therefore, the only relevant parameter is the volume fraction of inclusions.

Thanks to 3D computations, stress concentrations can be estimated. During a shear creep test $\sigma_{xy} = 1$MPa, the instantaneous local shear stress is above 1.37MPa in 5% of the microstructure. After 60 years, the local shear stress is above 1.71MPa in 5% of the microstructure : for prescribed constant average stress, the stress distribution in the microstructure evolves with time. The matrix tends to relax while the stress increases in inclusions [Fig. 2.10]. The concrete and the bimodal microstructures cannot be distinguished based on the probability distributions of the stress component σ_{xy} during a shear creep test [Fig. 2.10].

The limited heterogeneity between the inclusions and the matrix may be one of the reasons for the overall time dependent strains being so close. On the first time step, the elastic loading, the inclusions are 5 times stiffer than the matrix. On the last time step, 60 years after loading, the tangent behavior of the inclusions is 14 times stiffer than the one of the matrix.

As long as concrete is modeled as a matrix-inclusion microstructure, the discrepancies between creep strains of similar concretes cannot be attributed to the sieve curve or to the shape of inclusions. The description of concrete's microstructure must be refined.

Considering the cementitious matrix as homogeneous seems arguable as there is no strong scale separation in concrete. Considering a 40 mm-wide sample of concrete and a 400^3 discretization, each voxel is 100 μm wide. At this scale, SEM images Scrivener et al. (2004); Diamond and Huang (2001); Hussin and Poole (2011) clearly show that the behavior of the matrix may differ from one voxel to another due to fine aggregates, bundled partly unhydrated cement grains or a variable porosity [Fig. 2.11]. The assumption of a matrix-inclusion material might also be questionable for concrete since there sometimes exists an Interfacial Transition Zone between the inclusions and the cement paste. This feature is studied in the next section.

Introducing an Interfacial Transition Zone

The Interfacial Transition Zone is a ≈ 20 μm-thick layer of the cement paste that is more porous than the rest of the cement paste and has a different chemical composition Scrivener et al. (2004). It is due to the imperfect packing of cement grains (< 50 μm) on aggregates known as wall effect and it evolves during hydration. This feature may be observed on SEM images Scrivener et al. (2004); Diamond and Huang (2001); Hussin and Poole (2011) and it might af-

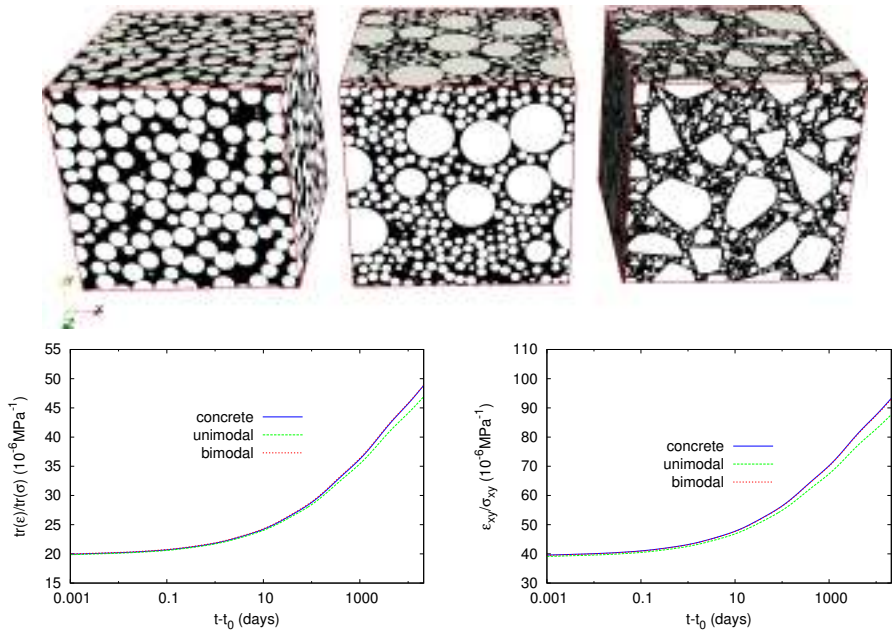


FIGURE 2.9 – Viscoelastic responses to hydrostatic or shear macroscopic loadings. Various matrix-inclusion microstructures with the same inclusions' volume fraction lead to very close time-dependent strains. The unimodal microstructures seem to creep slightly less than the other microstructures.

fect the mechanical properties Scrivener et al. (2004); Neubauer et al. (1996). Garboczi and Berryman have successfully compared their analytical model to numerical elastic computations in the range of elasticity, the ITZ being introduced as effective layers around particlesGarboczi and Berryman (2001). For the elastic 3D computations of Gal and Kryvoruck Gal and Kryvoruk (2011), this porous zone is merged with the aggregates. This procedure increases the volume fraction of inclusions, but it decreases their elastic stiffness, especially for small aggregates if the thickness of the ITZ is taken as uniform. For the 2D finite element computations of Grondin Grondin and Matallah (2014), an effective mixed interphase around each aggregate is formed by the ITZ and by a volume fraction of the bulk cement paste. Micromechanics methods may also take account of the ITZ as an effective layer surrounding inclusions Nadeau (2003); Garboczi and Berryman (2001) or as an imperfect bonding between inclusions and matrix Vandamme and Ulm (2013).

Representing the ITZ would not be possible a concrete scale since the size of the voxel would be 100 μm. Multiscale approaches may deliver a consistent way to set the behavior of composite voxels Bignonnet et al. (2014), since the finer details of the microstructure cannot be accurately described at concrete scale. To perform realistic homogenization computation, a 4 mm-wide sample of a mortar was considered, so that 10μm details such as an ITZ can be pictured . The model of Nadeau Nadeau (2003) described hereafter was used to estimate the local behavior as a function of the distance to the nearest inclusion. Let δ be the thickness of the ITZ.

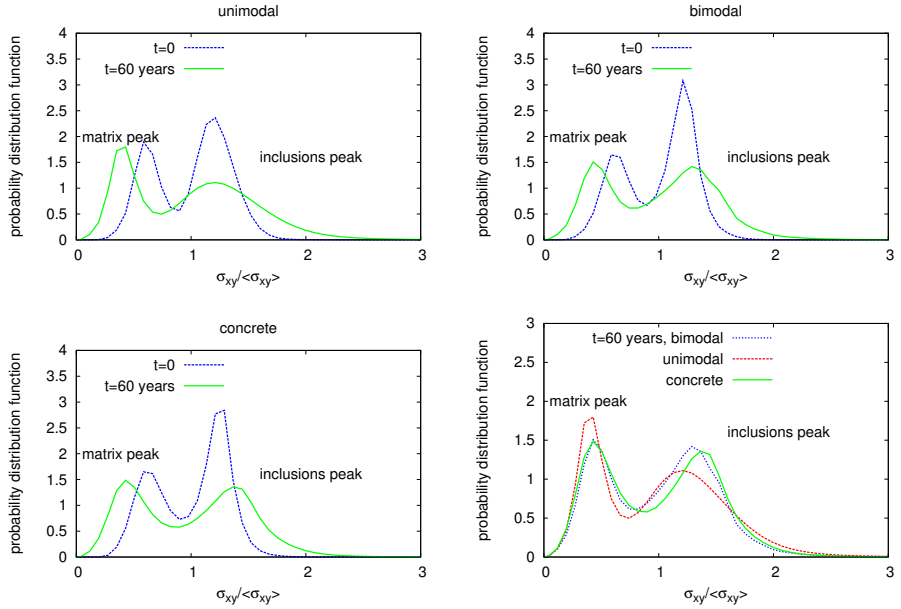


FIGURE 2.10 – Probability distributions of a stress component σ_{xy} during a shear creep test for different microstructures. On the top and bottom left, the relaxation of the matrix and the increase of stress in aggregates are displayed. On the bottom right, there are some differences between unimodal and concrete microstructures after 60 years.

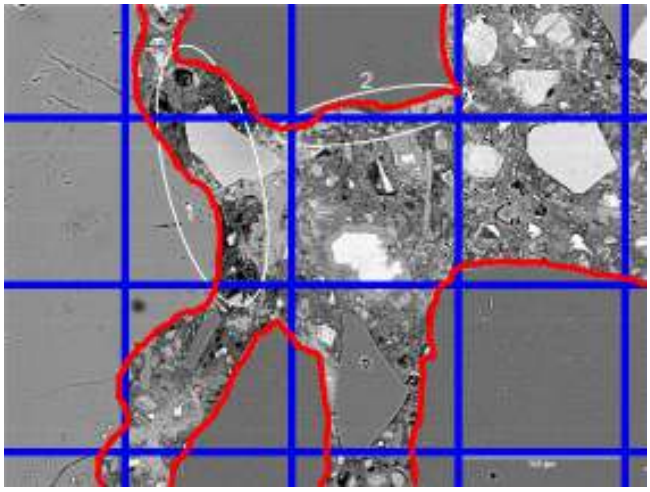


FIGURE 2.11 – A blue 100 μm grid is put on top of a SEM image from Scrivener Scrivener et al. (2004). The red lines indicate the largest inclusions. The cement paste is clearly heterogeneous over a 10 0μm voxel.

– The local volume fraction of cement $\alpha_c(d_i)$ depends on the distance to the nearest inclusion d_i

$$\alpha_c(d_i) = \begin{cases} \bar{\alpha_c}\left(1 - 0.5\left(\dfrac{\delta - d_i}{\delta}\right)^2\right) & d_i < \delta \\ \bar{\alpha_c} & d_i > \delta \end{cases}$$

where $\bar{\alpha}_c$ is the volume fraction of cement far from the inclusions. As described below, it is computed for each microstructure so that the overall water to cement ratio w/c is equal to 0.48.

Let $f(d_i)\delta d$ be the volume fraction of the cementitious matrix located at a distance of the nearest inclusion between d_i and $d_i + \delta d$. $f(d_i)$ is numerically estimated for each microstructure. The following equality stands :

$$w/c = \frac{\int_0^\infty \alpha_w(x) f(x) dx}{\rho_c \int_0^\infty \alpha_c(x) f(x) dx}$$

where $\rho_c \approx 3.15$ is the density of cement and $\alpha_w(d_i)$ is the local volume fraction of water. If cement and water are the only constituents of the cement paste, $\alpha_w(d_i) + \alpha_c(d_i) = 1$ for all d_i and :

$$\int_0^\infty \alpha_c(x) f(x) dx = \frac{1}{1 + \rho_c w/c}$$

and finally :

$$\bar{\alpha_c} = \left((1 + \rho_c w/c)(\int_0^\delta (1 - 0.5\left(\frac{\delta - x}{\delta}\right)^2) f(x) dx + \int_\delta^\infty f(x) dx)\right)^{-1}$$

– The elastic behavior $\mathbf{C}_0$ as a function of the local water to cement ratio, equal to $\frac{\alpha_w}{\rho_c \alpha_c}$, is provided by fit on experimental tests, as reported by Nadeau Nadeau (2002). To set viscoelastic parameters, two assumptions were made.

1. The viscoelastic Poisson's ratio of each Kelvin chain is the same as the elastic one.
2. The effect of water to cement ratio on the elastic and viscoelastic parameter are identical : $\mathbf{C}_k = A_k \mathbf{C}_0(\frac{\alpha_w}{\rho_c \alpha_c})$ where A_k is a constant. For instance, if increasing the water to cement ratio from 0.48 to 0.55 decreases the elastic Young Modulus ($\mathbf{C}_0$) by 30%, then the drop of all viscoelastic modulus of Kelvin chains $\mathbf{C}_k, k \geq 1$ is also 30%.

The assumption $\mathbf{C}_k = A_k \mathbf{C}_0(\frac{\alpha_w}{\rho_c \alpha_c})$ holds true if the cement paste is considered as a porous material which solid phase is a non aging linear viscoelastic material with a uniform Poisson's ratio. Indeed, in this case, at the scale of the porous material, the local compliance writes :

$\mathbf{J}(t, x) = \mathbf{J}(0, x) f(t)$

where $f(t)$ is a scalar function of time t. The determination of the overall response of the cement paste as a function of porosity necessitates the resolution of a homogenization problem on the unit cell representing the porous material.

In the Laplace-Carson space (D), the constitutive equation for this unit cell problem becomes :

$\mathbf{J}^*(p, x) = \mathbf{J}(0, x) f^*(p)$

Let $\varepsilon(x)$ be the elastic solution of the unit cell problem for prescribed overall strain E. Then, $\varepsilon(x)$ is also the solution of the unit problem with prescribed overall strain E for all p in the Laplace Carson space. Therefore :

$\mathbf{J}^{hom,*}(p) = \mathbf{J}^{hom}(0) f^*(p)$

τ_k	no ITZ $\delta = 0$ Young Modulus of C_k	relative difference to no-itz case	$\delta = 20\mu$m Young Modulus of C_k	relative difference to no-itz case	$\delta = 50\mu$m Young Modulus of C_k	relative difference to no-itz case
0	35	0	28.6	-0.18	27.7	-0.21
20	181	0	123	-0.32	116	-0.36
20000	41	0	26.7	-0.35	25.3	-0.39

TABLE 2.4 – Effect of the ITZ on the identified macroscopic Young modulus of $\mathbf{C}_k$. The effect of the interface is more important on the long term creep behavior than on the elastic behavior as shown by the relative difference to the no-ITZ case.

Inverting the Laplace Carson transform gives :
$\mathbf{J}^{hom}(t) = \mathbf{J}^{hom}(0)f(t)$

This demonstrates that if the cement paste is a two-phase porous material, the local compliance having a uniform in time Poisson's ratio, then the cement paste has a uniform in time Poisson's ratio and the effect of time and microstructure are uncoupled.

If the effect of changing the water to cement ratio were limited to a change of porosity in a two-phase porous material, the consequence on the viscoelastic behavior would be similar to the one described above. But it is known that the microstructure of the cement paste includes porosity, elastic unhydrated cement, elastic or viscoelastic products of hydration and other additives Diamond (2004). The higher the water to cement ratio is, the higher the hydration degree becomes Cook and Hover (1999) and the hydrated phases are assumed to be responsible for the viscoelastic behavior of cement paste Šmilauer and Bažant (2010). Therefore, the assumption $\mathbf{C}_k = A_k\mathbf{C}_0(\frac{\alpha_w}{\rho_c\alpha_c})$ probably underestimates the long term effect of an ITZ.

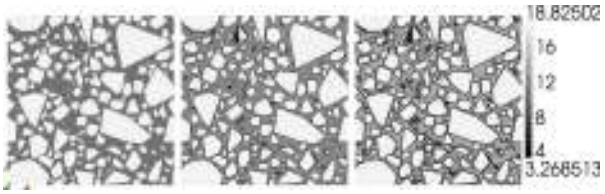
Numerical tests were performed on a 4 mm wide cubic cell depicting the microstructure of a mortar [Fig. 2.12]. At this scale, a voxel is approximately 10 μm wide and the ITZ can be introduced. Various thickness δ between 0 μm (no ITZ) and 50 μm were tested. The larger the ITZ is, the lower the elastic and viscoelastic stiffnesses are. The relative decreases of identified viscoelastic stiffnesses are twice larger than the one of the elastic stiffness [Tab. 2.4]. Moreover, according to the previous paragraph, it is likely that this effect is underestimated by our computations.

Therefore, the presence of an ITZ is a plausible explanation of discrepancies between creep strains of various concretes.

2.2 Comparison of numerical and micromechanics methods

2.2.1 Semi-analytic methods

Linear viscoelastic homogenization



Lamé coefficient λ (GPa)
at elastic time step, $t - t_0 = 0$,
for $\delta = 0\mu$m, 20μm and 50μm.

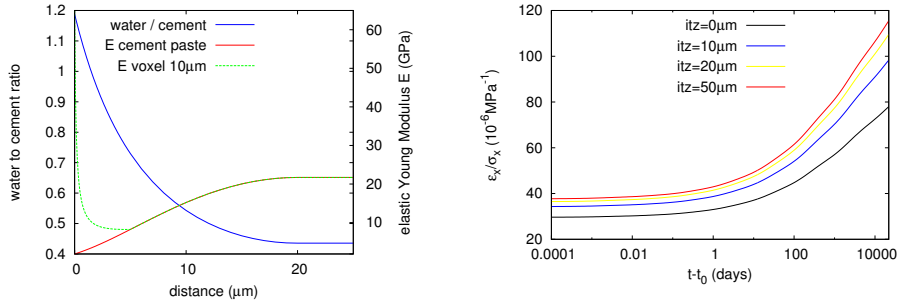


FIGURE 2.12 – Top : an ITZ can be pictured on the microstructure of a mortar, depending on its thickness δ. Bottom left : the local water to cement ratio is displayed as a function of the distance to the inclusion. The corresponding elastic Young modulus and the Young modulus of a 10 μm voxel overlapping with inclusions are also displayed. Bottom right : the numerical solution to uniaxial creep test depends on the thickness of the ITZ. Both the elastic response and the the long term strain are modified by the introduction of an ITZ.

Micromechanics methods remain practical to upscale the overall viscoelastic properties. In the frame of non-aging creep, the Laplace-Carson transform turns the time-depend problem into several elastic problems thanks to the correspondence principle Lee (1961); Mandel (1966). In this space, the Hashin-Shtrikman bounds Hashin and Shtrikman (1963), the Mori-Tanaka model Mori and Tanaka (1973); Fisher and Brinson (2001), the three-phase model of Christensen & LoChristensen and Lo (1979) or the $n+1$-phase spherical model of Hervé & Zaoui Hervé and Zaoui (1993) deliver estimates of the macroscopic response. Coming back to the real space requires inverting the Laplace-Carson transform with numerical tools such as the Gaver-Stehfest algorithm Stehfest (1970); Whitt (2006) or the collocation method Schapery (1962); Lévesque et al. (2007). Semi-analytical elastic homogenization models may also provide the time-dependent response through time stepping procedures Lahellec and Suquet (2007); Vu et al. (2012); Sanahuja (2013b). The analytic method combining the Hashin-Shtrikman bound and the Laplace Carson transform is described in D.

The tri-sphere model : a scalar parameter to account for the morphology of the microstructure

Compared to the Hashin-Shtrikman model, the tri-sphere model of de Larrard & Le Royde Larrard (1999); Roy (1995) introduces an additional parameter g^* to account for the morphology of the microstructure. The cementitious matrix is divided in two parts. A minimal part fills the gaps between the aggregates

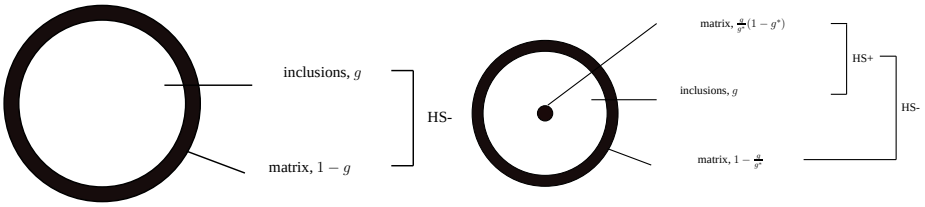


FIGURE 2.13 – Homogenization schemes of the Hashin-Shtrikman model (left) and tri-sphere model (right).

at maximum packing density g^*. The rest of the matrix ensures good rheological properties.

The corresponding homogenization procedure has two steps. First, the minimal part is merged with the inclusions using the upper Hashin-Shtrikman bound (volume fraction g^*). Then, the rest of the matrix is introduced thank to a lower Hashin-Shtrikman bound [Fig. 2.13].

The close packing volume fraction g^* arises from the compressible packing model of de Larrard de Larrard (1999), which extends the linear packing model of Stovall Stovall et al. (1986). It depends on the close packing density Φ_i^* and volume fraction of solid material y_i of each class i of the sieve curve.

- For unimodal spherical inclusions, $g* = \Phi^* = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$
- For bimodal spherical inclusions and if there exists no interaction between the two classes :
  $g^* = \min\left(\frac{\Phi^*}{1-y_{small}}, \frac{\Phi^*}{1-(1-\Phi^*)(1-y_{small})}\right)$
  At packing limits, if $y_{small} < 0.21$, large inclusions dominate and small inclusions fill in the gaps. On the opposite, if $y_{small} > 0.21$, large inclusions are scarce and small inclusions are tightly packed. The bimodal distribution used in our numerical simulations has a volume fraction of solid material of small inclusions of $y_{small} = 0.5$.
- A more precise knowledge of interactions between classes is required to address continuous inclusions' size distributions and irregular shapes. Typical values of g^* for concretes are between 80% and 90%.

2.2.2 $n+1-$phase spherical model to account for the Interfacial Transition Zone

The $n+1-$phase spherical model of Hervé & Zaoui Hervé and Zaoui (1993) [Fig. 2.16] extends the three-phase model of Christensen & LoChristensen and Lo (1979). It has been used by Nadeau Nadeau (2003) to upscale the elastic properties of mortars with an ITZ. The ITZ is depicted as successive layers of cement paste having different mechanical properties. This method is combined with the Laplace-Carson transform to estimate the time dependent strain of such a material.

In our case, the inputs are the same as in the numerical method : the distribution of the cement paste as a function of the distance to the nearest inclusion $f(d_i)$ is provided by the microstructure. The link between d_i, the water to cement ratio and the viscoelastic properties is described in section 2.1.2. Each layer has a width of 1μm and the corresponding volume fraction of the microstructure

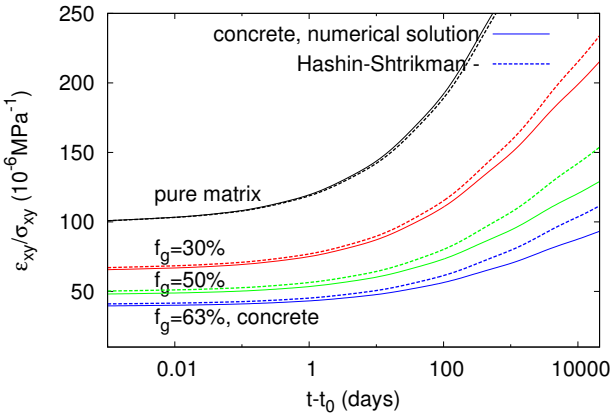


FIGURE 2.14 – Viscoelastic responses to a shear loading for different volume fraction of inclusions. Results of crushed inclusions are close to the Hashin-Shtrikman bound in the Laplace Carson space.

is estimated according to its discretized image. These volume fractions are then used as inputs for the $n+1-$phase spherical model in the Laplace Carson space.

The sieve curve and the shape of inclusions change the output of this micromechanics method since they affect the distribution of the cement paste as a function of the distance to the nearest inclusion $f(d_i)$ and the local volume fraction of cement $\alpha_c(d_i)$.

Outputs of these models are to be compared to full field numerical results.

2.2.3 Comparison with numerical estimates

Influence of volume fraction

Concrete microstructures made of crushed inclusions are built thank to the RSA algorithm. Three unit cells of each volume fraction of inclusions are built and discretized on 384^3 grids [Fig. 2.4] to run viscoelastic computations. A numerical shear creep test is performed on these unit cells. The overall strains is close the one estimated by the Hashin-Shtrikman bound in the Laplace-Carson space [Fig. 2.14] at different volume fractions of inclusions.

The volume fraction of inclusions being set to 63%, a small deviation from the Hashin-Shtrikman bound in the Laplace-Carson space occurs at long term [Fig. 2.9]. The heterogeneity between the inclusions and the matrix may explain this feature. On the first time step, the elastic loading, the inclusions are 5 times stiffer than the matrix. On the last time step, 60 years after loading, the tangent behavior of the inclusions is 14 times stiffer than the one of the matrix.

Hashin-Shtrikman, tri-sphere model and numerical estimates

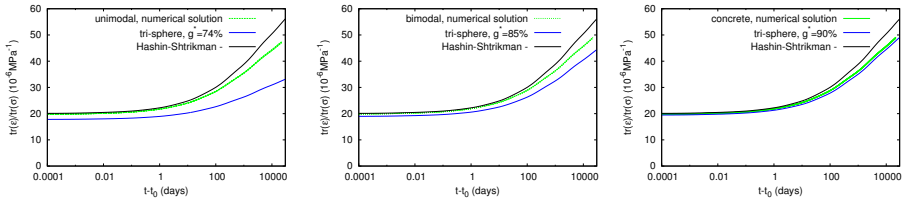


FIGURE 2.15 – Results of the tri-sphere model de Larrard (1999); Roy (1995) for unimodal(left), bimodal(center) and concrete microstructures are compared to numerical estimates. The volume fraction of inclusions is 63%.

The creep strains estimated by the tri-sphere model are close to our numerical results for the bimodal and concrete microstructures. As g^* is large, this model delivers estimates close to the Hashin-Shtrikman ones. But estimated time-dependent strains are different for the unimodal microstructure. Though the tri-sphere model anticipates a lower creep strain due to $g^* = 0.74$, the numerical results for unimodal microstructures remain close to the other ones [Fig. 2.15]. Since concrete materials exhibit large g^*, the three methods are relevant to produce estimates of the overall macroscopic strain.

Interfacial Transition Zone : n+1 phase spherical model and numerical estimates

Numerical uniaxial creep tests are performed on the mortar with ITZ defined in section 2.1.2 on page 80. There is a difference between the estimated overall strain estimated by the numerical method and the one produced by the $n+1$-phase spherical model : the later seems to slightly underestimate the effect of the ITZ [Fig. 2.16].

Inputs are similar up to the mechanical computations. Therefore, representing the ITZ as successive layers of coating around the inclusions is not precise for this mortar. At this scale, with this volume fraction of inclusions (50%) and the given sieve curve, a 10μm-wide ITZ is a percolated phase. Moreover, stress concentrations occur between close inclusions, that is in the ITZ. It could explain why the effect of the ITZ is larger than expected by the semi-analytical model.

A two-scale homogenization method was defined by merging the layers of the ITZ and the matrix first according to the Reuss bound. Then, the inclusions are introduced through a lower Hashin-Shtrikman bound. Even if this crude method performs slightly better than the $n+1$-phase spherical model on this mortar, it still underestimates the time dependent strain. The fact that the numerical estimates are softer than the response of this crude model is a clue than the scale of the ITZ and the scale of the inclusions cannot be separated.

2.2.4 Discussions

There are several assumptions to question :
– Are the inclusions perfectly bonded to the matrix ?

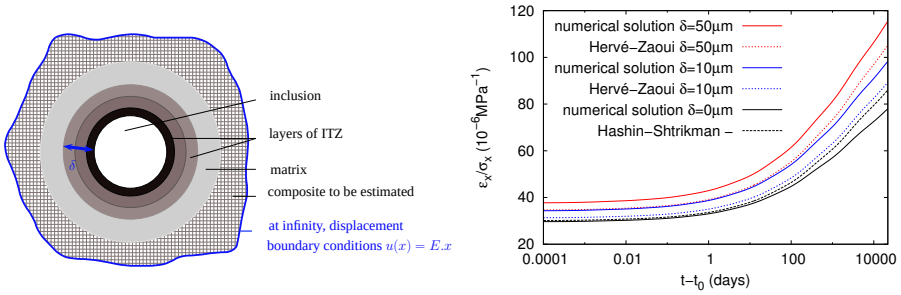


FIGURE 2.16 – Results of the $n+1$ phase spherical model (left) Hervé and Zaoui (1993) for a mortar is compared to numerical estimates for different thickness of ITZ δ. The $n+1$ phase spherical model underestimates the time dependent strain in case of a creep test (right).

– Is viscoelasticity the right frame to model the basic creep of concrete ?

The long-term discrepancies between these two concretes [Tab. 2.1] may also be partly due to the chemical reaction between calcium carbonate $CaCO_3$ from the limestone filler at Paluel and tricalciium aluminate C_3A from the clinker. For the concrete of Paluel, using the model defined by de Larrard de Larrard (1999), the long term effect of the additional binder on compressive strength is comparable to 30kg/m^3 of cement par cubic meter of concrete.

It is well known that the time dependent behavior of concrete goes beyond viscoelasticity. The time-depend strain may be separated in different components : endogenous shrinkage, drying shrinkage, basic creep and drying creep. This divide-and-conquer strategy is the frame of EU standards Eurocode 2 and models of Granger Granger (1995), Benboudjema Benboudjema (2011), de Larrard de Larrard (1999) and B3 model of Bažant RILEM (1995) among others. It eases the introduction of moisture content, structural effects and temperature effects. Rossi pledges instead for a unified strategy in which basic creep is a self-drying shrinkage under stress Rossi et al. (2012). The assumption is that the creation of microcracks during a creep step (constant load level imposed during the creep test) generates water transfers which induces some additional self-drying shrinkage. This model is consistent with records of acoustic emissions during compressive creep tests Rossi et al. (1994).

The basic creep of concrete is an ageing phenomenon and the current numerical model could be improved by considering ageing linear viscoelasticity. Moreover, additional eigenstrains due to shrinkage (autogeneous or drying) could be introduced, in order to better estimate the local stresses in the matrix and assess the possible occurrence of damage. The introduction of microcracking, or damage, would also help to explain non-linear creep above $\approx 40\%$ of compressive strength. In Rossi et al. (2012), stress levels are above $\approx 50\%$ of compressive strength whereas the overall biaxial prestress of containment buildings is below 30% of compressive strength in each direction ($\sigma_{\theta\theta} \approx 12MPa$ and $\sigma_{zz} \approx 8MPa$)
.

Conclusion

Methods to build various artificial microstructures have been defined and a numerical frame to study the viscoelastic behavior of concrete as a matrix-inclusion material is presented. Numerical results do not differ largely from the Hashin-Shtrikman estimates as long as volume fractions remain below 63% and the aspect ratio of inclusions and the contrast between phases remain low. Either the sieve curve and the inclusion shape do not influence creep or the matrix-inclusion model is too simple to be accurate. Since concretes with close volume fraction of aggregates exhibit very different long term creep, considering such concretes as a two-phase matrix-inclusion materials to study creep is questionable. A heterogeneous cementitious matrix, interfacial zones or decohesion phenomena might explain such differences.

3D numerical simulations may be performed to assess the correctness of micromechanics models. For instance, it has been shown that numerical estimates of creep strains are different from the one obtained by the micromechanics $n+1$ phase spherical model for modeling the Interfacial Transition Zone in a mortar. The $n+1$ phase spherical model assumes that the ITZ is an isolated layer of around each inclusion whereas the numerical model accounts for the ITZ being a percolated phase in the mortar.

The gains of 3D numerical simulation are the ability to handle aging behaviors and, to a certain extent, the access to the magnitude of stress concentrations. Large scale computations are required to study concrete or other heterogeneous materials with a large representative volume element, especially if a non-linear phenomenon is introduced at the local scale.

Chapitre 3

Homogenization schemes for aging linear viscoelastic matrix-inclusion composite materials with elongated inclusions

An extension of the Mori-Tanaka and Ponte Castañeda-Willis homogenization schemes for linear elastic matrix-inclusion composites with ellipsoidal inclusions to aging linear viscoelastic composites is proposed. To do so, the method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b) dedicated to spherical inclusions is generalized to ellipsoidal inclusions under the assumption of time-independent Poisson's ratio. The obtained time-dependent strains are successfully compared to those predicted by an existing method dedicated to time-shift aging linear viscoelasticity showing the consistency of the proposed approach. Moreover, full 3D numerical simulations on complex matrix-inclusion microstructures show that the proposed scheme accurately estimates their overall time-dependent strains. Finally, it is shown that an aspect ratio of aggregates in the range 0.3 to 3 has no significant influence on the time-dependent strains of composites with per-phase constitutive relations representative of a real concrete.

Introduction

Eshelby's solution (Eshelby, 1957) of an ellipsoidal inclusion in an elastic material has been used in various ways to upscale the behavior of composite materials. The Mori-Tanaka (Mori and Tanaka, 1973; Benveniste, 1987) scheme and the Ponte Castañeda-Willis scheme (Castañeda and Willis, 1995) have been designed to retrieve the elastic behavior of composites featuring spherical (Weng, 1984) or elongated inclusions (Tandon and Weng, 1984). Such mean-field homogenization schemes based on Eshelby's solution have been coupled to the correspondence principle (Lee, 1961; Mandel, 1966) to estimate the time-dependent

strains of non-aging viscoelastic materials (Wang and Weng, 1992; Brinson and Lin, 1998; Lévesque et al., 2007) : the Laplace-Carson transform turns the non-aging problem into a set of formal elastic problems in complex space. For composite materials made of elastic inclusions and a matrix modeled by a time shift method, such as many plastic materials and glasses (Struik, 1978; Sullivan, 1990; Odegard and Bandyopadhyay, 2011), the Laplace-Carson transform may still be applied in the equivalent time space (Zheng and Weng, 2002; Lavergne et al., 2015b). Yet, inverting the Laplace-Carson transform is still a compromise between accuracy and stability since this operation is ill-conditioned. This is one of the reasons why modern homogenization methods operate in the time domain (Lahellec and Suquet, 2007; Tran et al., 2011; Masson et al., 2012; Berbenni et al., 2015).

Regarding aging viscoelastic materials, a closed-form solution has been proposed by Sanahuja (Sanahuja, 2013b) to handle the case of spherical inclusions in an aging linear viscoelastic matrix. Moreover, a reliable numerical procedure has been proposed to efficiently estimate the time-dependent strains. This procedure does not require inverting the Laplace-Carson transform and is able to handle any isotropic compliance.

This paper is devoted to validating and extending Sanahuja's method to ellipsoidal inclusions. Yet, the extension is limited to isotropic aging viscoelastic matrices featuring time-independent Poisson's ratio in the sense of Hilton (Hilton and Yi, 1998).

This extension may be valuable to study cementitious materials. Indeed, modern formulations of concrete may include aggregates (de Larrard, 1999), steel fibers, expanded polystyrene particles (Babu and Babu, 2003; Roy et al., 2005) or wood shavings (Bederina et al., 2007) as inclusions and such inclusions can change the viscoelastic properties of the material (Chern and Young, 1989).

A recent numerical study has shown that the size distribution and the shape of aggregates have little effect on the time-dependent strains of concretes made with non-aging cementitious matrices(Lavergne et al., 2015a). Full 3D numerical simulations and semi-analytical homogenization schemes delivered similar estimates of the time-dependent strains. Yet, this study was limited to polyhedral aggregates with an aspect ratio close to 1 (the aggregates were neither flat nor elongated). Consequently, there is a question left : does the aspect ratio of the aggregates affect the time-dependent strains of concrete made with aging cementitious matrices ? To answer this question, the following steps have been carried out :

- In section 1, the method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b) is extended to ellipsoidal inclusions. Eshelby's solution for an isotropic aging viscoelastic matrix featuring a time-independent Poisson's ratio is presented. The strain within the inclusion is still uniform and a time-dependent Eshelby's tensor may be defined. Then, the closed-form of the time-dependent localization tensor is derived using the Volterra operator. Finally, the Mori-Tanaka estimate of the overall viscoelastic behavior is obtained. The more sophisticated Ponte Castañeda-Willis linear estimate, which accounts separately for inclusion shape effects and effects of the spatial distribution of inclusion centers, is formally similarly extended to composites with elastic inclusions embedded in an aging viscoelastic matrix.
- In section 2, the numerical procedure described in (Sanahuja, 2013b) is used to evaluate the proposed homogenization schemes. The resulting esti-

mates of the overall time-dependent strains are compared to existing ones for a fiber-reinforced polymer with a time-shift aging viscoelastic matrix. Then, a complex microstructure featuring 60% of polyhedral elastic aggregates embedded in an aging viscoelastic cementitious matrix is considered. The estimates of the time-dependent strains as evaluated by the method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b) and by full 3D numerical computations are first compared for spherical inclusions. Finally, the proposed extension to ellipsoidal inclusions of the Mori-Tanaka and Ponte Castañeda-Willis schemes are used to estimate the overall response of concrete-like materials. In particular, it will be shown that the aspect ratio of aggregates used in concrete does not significantly affect their viscoelastic behavior.

3.1 Extension of the model of Sanahuja to ellipsoidal inclusions

3.1.1 Estimating the overall time-dependent strains

Aging viscoelasticity

The stress tensor $\sigma(t)$ in a viscoelastic material depends on the history of strain tensor $\varepsilon(t)$. If the constitutive law is linear, the Boltzmann superposition principle states that the material properties are defined by a relaxation function (fourth order tensor), $\boldsymbol{C}(t,t')$, such that :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{C}(t,t') d\varepsilon(t')$$

where the integral is a Stieltjes integral. Similarly, the compliance function (fourth order tensor), $\boldsymbol{J}(t,t')$ is such that :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{J}(t,t') d\sigma(t')$$

If the elapsed time since loading is the only relevant parameter, the material is non-aging :

$$\boldsymbol{J}(t,t') = \boldsymbol{\Phi}(t-t')$$

However, the assumption of non aging is not made in the following derivations. If the viscoelastic behavior is isotropic, a spherical relaxation function $K(t,t')$ and a deviatoric relaxation function $G(t,t')$ are defined, such that :

$$\begin{array}{rcl} p(t) & = & \int_{-\infty}^{t} 3K(t,t') de(t') \\ \sigma^d(t) & = & \int_{-\infty}^{t} 2G(t,t') d\varepsilon^d(t') \end{array}$$

where $e(t) = tr(\varepsilon(t))/3$, $p(t) = tr(\sigma(t))/3$. The tensors $\sigma^d(t)$ and $\varepsilon^d(t)$ are respectively the deviatoric parts of $\sigma(t)$ and $\varepsilon(t)$:

$$\begin{array}{rcl} \sigma^d_{ij}(t) & = & \sigma_{ij}(t) - p(t)\delta_{ij} \\ \varepsilon^d_{ij}(t) & = & \varepsilon_{ij}(t) - e(t)\delta_{ij} \end{array}$$

where δ_{ij} is the Kronecker symbol.

The homogenization method of Sanahuja

The homogenization method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b) operates in the time domain to deal with a composite featuring isotropic aging viscoelastic phases. A spherical inclusion featuring a linear viscoelastic isotropic behavior $(K_i(t,t'), G_i(t,t'))$ is embedded in an infinite matrix featuring a linear viscoelastic isotropic behavior $(K_m(t,t'), G_m(t,t'))$ and a strain history $\mathbf{E}(t)$ is applied far from the inclusion.

As usually for linear elasticity, the solution of this problem provides the exact solution of the localization problem of a composite made of such inclusions embedded in the matrix, in the so-called "dilute limit", i.e. for volume fractions of inclusions sufficiently low so that mechanical interactions between inclusions can be neglected. For isotropic composites, this localization solution is fully determined when purely spherical or deviatoric overall strains histories $\mathbf{E}(t)$ are considered. Sanahuja proved that the strain history in the inclusion is uniform, with value $\varepsilon(t)$. In addition, a localization tensor $\boldsymbol{A}(t,t')$ is defined such that :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{A}(t,\tau) : d\mathbf{E}(\tau)$$

To ease the computations, the Volterra operator has been introduced. It reads :

$$f \circ g(t,t') = \int_{-\infty}^{t} f(t,\tau) d_\tau g(\tau,t')$$

for any scalar functions f and g. The identity element of the Volterra operator H is defined from the Heaviside function :

$$(t,t') \mapsto H(t-t') = \begin{cases} 1 & \text{if}(t > t') \\ 0 & \text{if}(t < t') \end{cases}$$

The value of the H function at $t = t'$ does not need to be specified. The inverse of f in the sense of the Volterra operator is denoted as f^{-1} so that $f^{-1} \circ f = H$.

The spherical part $A_k(t,t')$ of $\boldsymbol{A}(t,t')$ reads :

$$A_k = (3K_i + 4G_m)^{-1} \circ (3K_m + 4G_m)$$

The closed-form expression of the deviatoric part $A_g(t,t')$ has been computed as well :

$$A_g = H + 2(2H + 3D_m) \circ (2G_i \circ (2H + 3D_m) + G_m \circ (6H - D_m))^{-1}(G_m - G_i)$$

where $D_m = (K_m + G_m)^{-1} \circ \frac{2}{3} G_m$

These expressions provide functionnal relations between time histories of spherical and deviatoric strain prescribed far away from the inclusion and the induced uniform strain history in the latter. They can be used to extend, at least from a formal point of view, to aging viscoleasticity any linear elastic homogenization scheme based on Eshelby's solution, by simply substituting the classical tensor double contraction operations by Volterra operations. The resulting expressions will involve multiple time convolutions as well as Volterra inversions, and will thus be rather involved.

To face this difficulty, numerical procedures to compute the Volterra operator and its inverse proposed in (Bažant, 1972) are used to turn these formula

into a practical tool (Sanahuja, 2013b). The estimate of the effective behavior of a concrete will be compared to results of 3D numerical simulations in section 3.2.3. It is to be mentioned that the method of Sanahuja produces an estimate of the effective behavior at once : the output is a matrix representing the global linear viscoelastic behavior of the composite material over an initially specified period of time. A single run of the method of Sanahuja handles all loading directions at once while two full 3D numerical computations are needed to simulate hydrostatic and shear creep tests.

In its initial formulation, the method of Sanahuja is limited to homogenization models based on the Eshelby solution of an isotropic spherical inclusion embedded in an isotropic matrix. Since solving the Eshelby inhomogeneity problem for ellipsoidal inclusions is likely to be a tedious and complex task because in particular of the multiplicity of the loading cases to be considered to address the induced anisotropy, another viewpoint is introduced in the next section. Eshelby's inhomogeneity problem is solved for ellipsoidal inclusions provided that the linear viscoelastic matrix features a time-independent Poisson's ratio which means that the time dependence of the relaxation function is purely scalar, of the form $\boldsymbol{C}(t,t') = f(t,t')\boldsymbol{C}(0,0)$, as illustrated in figure 3.1.

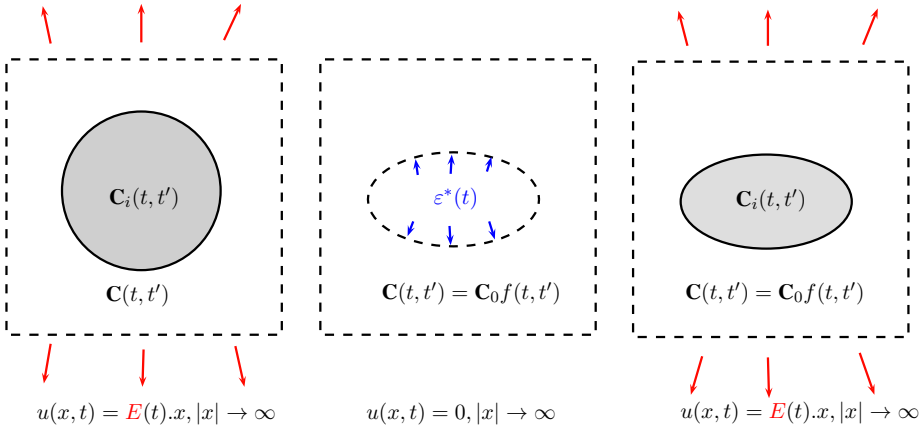


FIGURE 3.1 – Left : the inhomogeneity problem solved by Sanahuja(Sanahuja, 2013b). Center and right : the inclusion problem and the inhomogeneity problem solved in the present study.

3.1.2 The hypothesis of a time-independent Poisson's ratio

It is well known that the contraction ratio of a viscoelastic materials is a function of time or frequency (Lakes and Wineman, 2006; Lee and Kim, 2009). The ratio of the lateral strain to the axial strain during a tensile creep test is called the creep Poisson's ratio as in (Kim et al., 2005), the effective time-dependent Poisson's ratio $\nu(t,t')$ being the ratio of the lateral strain ε_{lat} to the axial strain ε during a tensile stress relaxation test(Tschoegl, 1989; Wineman and Rajagopal, 2000; Tschoegl et al., 2002; Kim et al., 2005; Lakes and

Wineman, 2006; Lee and Kim, 2009) :

$$\nu(t,t') = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon}$$

The time-dependent Poisson's ratio is consistent with the Poisson's ratio defined in the Laplace-Carson space (Tschoegl et al., 2002; Lakes and Wineman, 2006; Li et al., 2015a) or in the frequency domain (Read and Dean, 1978; Pritz, 2000; Tschoegl et al., 2002; Boiko et al., 2010) for non-aging materials and it represents a valid constitutive property (Tschoegl et al., 2002; Li et al., 2015a). The experimental measurement of a creep Poisson's ratio demands highly accurate measurements be made on the same specimen, at the same time, and under the same conditions of the experimental environment(Yee and Takemori, 1982; Tschoegl et al., 2002).

Regarding cementitous materials, the creep Poisson's ratio of concretes (Parrott, 1974; Kogan, 1983; Kim et al., 2005) has been measured. The time-dependent Poisson's ratio (Kim et al., 2005) has been estimated and was found to be almost uniform at constant humidity (approximately $\nu = 0.18$) (Bažant et al., 1988; Kim et al., 2005). This fact has been used to model concrete (Granger, 1995; Bažant and Baweja, 1995a,b). Grasley and Lange found that the Poisson's ratio of cement paste was increasing for some materials or almost time-independent for others(Grasley and Lange, 2007; Li et al., 2015a). The accuracy of experimental measurements of the Poisson's ratio may be undermined by additional strains such as autogeneous shrinkage in cementitious materials, which must be accounted for (Grasley and Lange, 2007). The viscoelastic Poisson's ratio of a hydrating cement paste has been investigated by full 3D numerical simulations (Li et al., 2015a,b) in which the cement paste is described as a composite material. The dissolution of cement grains results in a predicted decreasing viscoelastic Poisson's ratio at early ages, but later-age cement paste is capable of exhibiting increasing, decreasing, or uniform evolution of the Poisson's ratio with time(Li et al., 2015a).

The hypothesis of a time-independent Poisson's ratio is nevertheless considered as reasonable for cementitious materials and it is necessary for the extension proposed in the current section. It is formally explained in the following equations.

The aging viscoelastic constitutive phases of the composite materials considered here are supposed to have a time-independent Poisson's ratio ν. The consequences on the relaxation functions $K(t,t')$ and $G(t,t')$ are derived by writing that the lateral stress must be null during tensile stress relaxation tests :

$$\begin{aligned} 0 = \sigma_{lat}(t) &= \int_{-infty}^{t} 2(G(t,t') + 3K(t,t'))d\varepsilon_{lat}(t') + \int_{-infty}^{t}(3K(t,t') - 2G(t,t'))d\varepsilon(t') \\ &= \int_{-infty}^{t}(-\nu 2(G(t,t') + 3K(t,t')) + (3K(t,t') - 2G(t,t')))d\varepsilon(t') \end{aligned}$$

Since the previous equation is valid for all loading times t' and all times t, the spherical relaxation function $K(t,t')$ varies directly with the deviatoric relaxation function $G(t,t')$ and :

$$\nu = \frac{3K(t,t') - 2G(t,t')}{2(3K(t,t') + G(t,t'))}$$

Hence, the relaxation tensor of these materials have the following property(Hilton and Yi, 1998) :

$$\boldsymbol{C}(t,t') = \boldsymbol{C}(0,0)f(t,t') \tag{3.1}$$

where $\boldsymbol{C}(0,0)$ is the instantaneous elastic stiffness at $t=0$ and $f(t,t')$ is a scalar function such that $f(0,0)=1$.

3.1.3 Eshelby's solution for ellipsoidal inclusions

Let us consider here an elastic solid of stiffness $\boldsymbol{C}(0,0)$ that undergoes a uniform eigenstrain ε^* in a bounded domain V of characteristic function $\chi_V(x)$. Because of the linearity of the equations governing local strain and stress fields, the strain $\varepsilon(x)$ at any point x in the body is a linear function of the eigenstrain ε^* :

$$\varepsilon(x) = \boldsymbol{S}(x) : \varepsilon^*$$

This strain field $\varepsilon(x)$ is compatible and the corresponding stress field $\sigma(x)$ is :

$$\sigma(x) = \boldsymbol{C}(0,0) : (\boldsymbol{S}(x) - \chi_V(x)\mathbf{1}) : \varepsilon^*$$

The stress field $\sigma(x)$ is self-balanced. Moreover, assuming the elastic body infinite and the domain V of ellipsoidal shape, Eshelby (Eshelby, 1957) showed that the tensor $\boldsymbol{S}(x)$ is uniform on the inclusion :

$$\boldsymbol{S}(x) \quad = \quad \boldsymbol{S} \quad x \in V$$

where $\boldsymbol{S}$ is Eshelby's tensor(Eshelby, 1957). In the case of an isotropic tensor of module $\boldsymbol{C}(0,0)$, the tensor $\boldsymbol{S}$ only depends on the Poisson's ratio ν of $\boldsymbol{C}(0,0)$ and on the shape of the ellipsoidal inclusion.

It is now supposed that, in an ellipsoidal domain V of characteristic function $\chi_V(x)$, an aging viscoelastic solid of relaxation tensor $\boldsymbol{C}(0,0)f(t,t')$ undergoes a history of eigenstrain $\varepsilon^*(t)$. Let us show that the strain field history $\varepsilon(t,x) = \boldsymbol{S}(x) : \varepsilon^*(t)$ is the solution to the aging viscoelastic Eshelby's problem. First, it is compatible at all time t. Second, the corresponding stress field history reads :

$$\sigma(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{C}(t,t') : (d\varepsilon(t',x) - d\varepsilon^*(t')\chi_V(x))$$

$$\sigma(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{C}(t,t') : (\boldsymbol{S}(x) : d\varepsilon^*(t') - d\varepsilon^*(t')\chi_V(x))$$

The property of the aging viscoelastic compliance described in equation 3.1 is used :

$$\sigma(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{C}(0,0)f(t,t') : (\boldsymbol{S}(x) : d\varepsilon^*(t') - d\varepsilon^*(t')\chi_V(x))$$

$$\sigma(t,x) = \boldsymbol{C}(0,0) : (\boldsymbol{S}(x) - \chi_V(x)\mathbf{1}) : \int_{-\infty}^{t} f(t,t')d\varepsilon^*(t')$$

An equivalent eigenstrain history $\varepsilon^{**}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t,t')d\varepsilon^*(t')$ is introduced and directly linked to stress field history at the same time :

$$\sigma(t,x) = \boldsymbol{C}(0,0) : (\boldsymbol{S}(x) - \chi_V(x)\mathbf{1}) : \varepsilon^{**}(t)$$

Hence, $\sigma(t,x)$ is self-balanced at all time t. Consequently, $\varepsilon(t,x) = \boldsymbol{S}(x) : \varepsilon^*(t)$ is the solution of the aging viscoelastic Eshelby's problem for this class of materials. The viscoelastic tensor $\boldsymbol{S}(t,t',x)$ is similar to the elastic case :

$$\boldsymbol{S}(t,t',x) = H(t-t')\boldsymbol{S}(x)$$

The strain field reads :

$$\varepsilon(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{S}(t,t',x) : d\varepsilon^*(t')$$

In particular, it must be noticed that the viscoelastic localization tensor is still uniform on the ellipsoid and the viscoelastic Eshelby's tensor $\boldsymbol{S}(t,t') = H(t-t')\boldsymbol{S}$ is defined. For any eigenstrain history $\varepsilon^*(t)$, the uniform strain field in the inclusion $\varepsilon(t)$ reads :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{S}(t,t') : d\varepsilon^*(t')$$

$$\varepsilon(t) = \boldsymbol{S} : \varepsilon^*(t)$$

From a more physical point of view, this means that the strain field in this viscoelastic problem is essentially identical to the one of the purely elastic one. The time dependence of this strain field directly follows the time dependence of the prescribed eigenstrain, On the other hand, the stress field is sensitive to the time-dependence of the constitutive relation. This property will be used hereafter to extend standard linear homogenization schemes based on Eshelby's solution for ellipsoidal inclusions to aging visco-elasticity.

3.1.4 Extension of homogenization schemes

Eshelby's reasoning to extend Eshelby's solution to the inhomogeneity problem of an ellipsoidal inclusion having an elastic stiffness differing from the one of the remainder is applied to aging viscoelastic materials in the current section.

Definition of Volterra's tensorial operators and properties

The tensorial Volterra operator described by Sanahuja (Sanahuja, 2013b) have interesting properties which ease further computations. Let $\boldsymbol{C}_a(t,t')$ and $\boldsymbol{C}_b(t,t')$ be two relaxation tensors (order 4) and $\varepsilon(t)$ be an history of the strain field (tensor of order 2). The tensorial Volterra operator of order 2, noted as $\overset{\circ}{:}$ is the operator such that :

$$\boldsymbol{C}_a \overset{\circ}{:} \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{C}_a(t,t') : d\varepsilon(t')$$

It must be noticed that :

$$H(t-t')\mathbf{1} \overset{\circ}{:} \varepsilon = \varepsilon$$

where $H(t-t')$ is Heaviside's function and $\mathbf{1}$ is the unit tensor of order 4. The tensorial Volterra operator of order 4 is such that :

$$\boldsymbol{C}_a \overset{\circ}{:} \boldsymbol{C}_b(t,t') = \int_{\tau=-\infty}^{t} \boldsymbol{C}_a(t,\tau) : d_\tau \boldsymbol{C}_b(\tau,t')$$

Some properties of these operators are listed in the current section. Their proofs, in F, rely on the causality principle. Obviously, these operators are bilinear. Moreover, the right and left identity of the tensorial Volterra operator of order 4 is $H(t-t')\mathbf{1}$:

$$H(t-t')\mathbf{1} \overset{\circ}{:} \boldsymbol{C}_a \quad = \quad \boldsymbol{C}_a \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{C}_a \overset{\circ}{:} H(t-t')\mathbf{1} \quad = \quad \boldsymbol{C}_a \tag{3.3}$$

These operators can be associated :

$$(\boldsymbol{C}_a \overset{\circ}{:} \boldsymbol{C}_b) \overset{\circ}{:} \varepsilon = \boldsymbol{C}_a \overset{\circ}{:} (\boldsymbol{C}_b \overset{\circ}{:} \varepsilon) \tag{3.4}$$

The tensorial Volterra operator of order 4 is associative :

$$\boldsymbol{C}_a \overset{\circ}{:} (\boldsymbol{C}_b \overset{\circ}{:} \boldsymbol{C}_c) = (\boldsymbol{C}_a \overset{\circ}{:} \boldsymbol{C}_b) \overset{\circ}{:} \boldsymbol{C}_c \tag{3.5}$$

Nevertheless, the Volterra operator is not commutative. The inverse of the relaxation tensor $\boldsymbol{C}_a$ is the compliance tensor $\boldsymbol{C}_a^{-1}$ such that :

$$\boldsymbol{C}_a^{-1} \overset{\circ}{:} \boldsymbol{C}_a = H(t-t')\mathbf{1}$$

The left and right inverses are equal since the Volterra operator is associative.

These notations are applied to the viscoelastic Eshelby's solution. The strain history in the inclusion ε reads :

$$\varepsilon = \boldsymbol{S} H \overset{\circ}{:} \varepsilon^*$$

The stress history in the inclusion reads :

$$\sigma = \boldsymbol{C} \overset{\circ}{:} (\varepsilon - \varepsilon^*)$$

Extension to the ellipsoidal inclusion

A homogeneous strain field $\mathbf{E}(t)$ is added to the viscoelastic Eshelby's solution for a uniform eigenstrain history $\varepsilon^*(t)$ in an ellipsoidal region of a linear viscoelastic material. The total strain in the inclusion is $\varepsilon + \mathbf{E}$ where $\varepsilon = \boldsymbol{S} H \overset{\circ}{:} \varepsilon^*$. The stress field in the inclusion is :

$$\sigma = \boldsymbol{C} \overset{\circ}{:} (\varepsilon - \varepsilon^* + \mathbf{E})$$

A viscoelastic inhomogeneity of relaxation tensor $\boldsymbol{C}_i(t,t')$, free from eigenstrain, is substituted to the reference material in the ellipsoidal region. To ensure a compatible strain field history at all time, this inclusion feature the same total strain history $\varepsilon + \mathbf{E}$. Hence, the stress field in the ellipsoidal region reads :

$$\sigma(t) = \boldsymbol{C}_i \overset{\circ}{:} (\varepsilon + \mathbf{E})$$

To ensure a self-balanced stress field, the stress field in the ellipsoidal inclusion is required to be equal to the one before substitution :

$$\boldsymbol{C} \overset{\circ}{:} (\varepsilon - \varepsilon^* + \mathbf{E}) = \boldsymbol{C}_i \overset{\circ}{:} (\varepsilon + \mathbf{E})$$

$$-\boldsymbol{C} \overset{\circ}{:} (\varepsilon^*) = (\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}) \overset{\circ}{:} (\varepsilon + \mathbf{E})$$

$$-(\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}) \overset{\circ}{:} (\boldsymbol{S} H \overset{\circ}{:} \varepsilon^*) - \boldsymbol{C} \overset{\circ}{:} (\varepsilon^*) = (\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}) \overset{\circ}{:} \mathbf{E}$$

$$[-(\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}) \overset{\circ}{:} \boldsymbol{S} H - \boldsymbol{C}] \overset{\circ}{:} (\varepsilon^*) = (\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}) \overset{\circ}{:} \mathbf{E}$$

This requirement dictates the choice of the eigenstrain history ε^* :

$$\varepsilon^* = [(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_i) \overset{\circ}{:} \boldsymbol{S} H - \boldsymbol{C}]^{-1} \overset{\circ}{:} (\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}) \overset{\circ}{:} \mathbf{E}$$

The strain in the inclusion ε^l reads :

$$\begin{aligned}\varepsilon^l &= \boldsymbol{S}H\overset{\circ}{:}\left[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_i)\overset{\circ}{:}\boldsymbol{S}H-\boldsymbol{C}\right]^{-1}\overset{\circ}{:}(\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{C})\overset{\circ}{:}\mathbf{E}+\mathbf{E}\\ &= \left[\boldsymbol{S}H\overset{\circ}{:}\left[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_i)\overset{\circ}{:}\boldsymbol{S}H-\boldsymbol{C}\right]^{-1}\overset{\circ}{:}(\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{C})+H\mathbf{1}\right]\overset{\circ}{:}\mathbf{E}\end{aligned}$$

Hence, the expression of a localization tensor for the inhomogeneous inclusion $\varepsilon^l = \boldsymbol{T}\overset{\circ}{:}\mathbf{E}$ has been derived. It is similar to the elastic case, except for the use of the Volterra operator :

$$\boldsymbol{T} = \left[H\mathbf{1}+\boldsymbol{S}H\overset{\circ}{:}\boldsymbol{C}^{-1}\overset{\circ}{:}(\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{C})\right]^{-1} \tag{3.6}$$

This result is restricted to a viscoelastic reference material $\boldsymbol{C}$ featuring a time-independent Poisson's ratio, as described in equation 3.1. It must be noticed that there is no restriction on $\boldsymbol{C}_i$. Indeed $\boldsymbol{C}_i$ can represent any aging linear viscoelastic anisotropic material. An anisotropic behavior may also be considered for the reference material, as long as the property defined in equation 3.1 is satisfied. Eshelby's tensor $\boldsymbol{S}$ has been explicitly evaluated up to transversely isotropic material (Mura, 1987) and numerically evaluated in other cases(Gavazzi and Lagoudas, 1990).

The particular case of an elastic inclusion $\boldsymbol{C}_i(t,t') = \boldsymbol{C}_i H(t-t')$ leads to further simplifications :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^{-1} &= H\mathbf{1}+\boldsymbol{S}H\overset{\circ}{:}(\boldsymbol{C}^{-1}\overset{\circ}{:}\boldsymbol{C}_i H-H\mathbf{1})\\ \boldsymbol{T}^{-1}\overset{\circ}{:}\varepsilon^l &= \varepsilon^l+\boldsymbol{S}:(\boldsymbol{C}^{-1}\overset{\circ}{:}(\boldsymbol{C}_i:\varepsilon^l))-\boldsymbol{S}:\varepsilon^l\end{aligned}$$

The equation $\boldsymbol{T}^{-1}\overset{\circ}{:}\varepsilon^l = \mathbf{E}$ where ε^l is the unknown is a Volterra integral equation of the first kind.

Homogenization schemes

Mean field homogenization schemes considered in the present study are the Hashin-Shtrikman lower bound (Hashin and Shtrikman, 1963) or the Mori-Tanaka scheme (Mori and Tanaka, 1973), as reconsidered by Benveniste (Benveniste, 1987). These mean field methods rely on Eshelby's equivalent inclusion theory (Eshelby, 1957) to estimate the stress concentrations in ellipsoidal inclusions. The elastic Mori-Tanaka estimate $\boldsymbol{C}^e_{MT}$ accounts for the volume fraction of inclusions c_i and the distribution of orientations of inclusions $f(\psi)$. It is the solution of equation :

$$c_i\int_\psi f(\psi)(\boldsymbol{C}^e_{MT}-\boldsymbol{C}_i(\psi)):\boldsymbol{T}^e(\psi)d\psi+(1-c_i)(\boldsymbol{C}^e_{MT}-\boldsymbol{C}(0,0))=0 \tag{3.7}$$

Here, $\boldsymbol{C}_i(\psi)$ is the elastic stiffness of inclusions having orientation ψ ; $\boldsymbol{C}(0,0)$ is the elastic stiffness of the matrix ; $\boldsymbol{T}^e(\psi)$ is the strain concentration tensor expressing the strain in the inclusions having orientation ψ as a linear function of the strain at infinity, $\boldsymbol{C}(0,0)$ being the elastic stiffness tensor of the reference material. Tensors $\boldsymbol{C}_i(\psi)$ and $\boldsymbol{T}^e(\psi)$ are computed by rotating $\boldsymbol{C}_i(0)$ and $\boldsymbol{T}^e(0)$ using Bond transformations (Bond, 1943; Auld and Auld, 1973).

The equation 3.7 is extended to the case of viscoelastic materials (Sanahuja, 2013b) :

$$c_i\int_\psi f(\psi)(\boldsymbol{C}_{MT}-\boldsymbol{C}_i(\psi))\overset{\circ}{:}\boldsymbol{T}(\psi)d\psi+(1-c_i)(\boldsymbol{C}_{MT}-\boldsymbol{C})=0$$

where $\boldsymbol{T}(\psi)$ is derived by rotating $\boldsymbol{T}(0)$, which expression is given in equation 3.6. The relaxation tensor of the overall material $\boldsymbol{C}_{MT}$ is computed as :

$$\boldsymbol{C}_{MT} = \left[c_i \int_{\psi} f(\psi)\boldsymbol{C}_i(\psi)\dddot{:}\boldsymbol{T}(\psi)d\psi + (1-c_i)\boldsymbol{C}\right] \dddot{:} \left[c_i \int_{\psi} f(\psi)\boldsymbol{T}(\psi)d\psi + (1-c_i)H\mathbf{1}\right]^{-1} \tag{3.8}$$

This closed-form formula summarizes the extension of the Mori-Tanaka scheme to aging linear viscoelastic matrices featuring a time-independent Poisson's ratio. It is to be noticed that there is no restriction on the behavior of the inclusions : aging linear viscoelastic anisotropic inclusions can be considered.

The alternative Ponte Castañeda-Willis scheme also provides an estimate of the overall stiffness of a composite featuring ellipsoidal inclusions(Castañeda and Willis, 1995). It accounts for inclusion shape and spatial distribution independently. Its extension to linear aging viscoelasticity reads :

$$\boldsymbol{C}_{PCW} = \boldsymbol{C} + \left[\mathbf{1} - c_i \int_{\psi} f(\psi)\dddot{:}\boldsymbol{Q}(\psi)d\psi\dddot{:}\boldsymbol{P}_d\right]^{-1} \dddot{:} \left[c_i \int_{\psi} f(\psi)\boldsymbol{Q}(\psi)d\psi\right] \tag{3.9}$$

where $\boldsymbol{Q}(\psi) = \left[(\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C})^{-1} + \boldsymbol{P}(\psi)\right]^{-1}$. Hill's tensor $\boldsymbol{P}(\psi)$ is derived by rotating $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{S}\dddot{:}\boldsymbol{C}^{-1}$ and $\boldsymbol{P}_d = \boldsymbol{S}_d\dddot{:}\boldsymbol{C}^{-1}$ where $\boldsymbol{S}_d$ is Eshelby's tensor corresponding to spherical inclusions. The similarities and differences between the Mori-Tanaka scheme and the Ponte Castañeda-Willis scheme are presented in references(Castañeda and Willis, 1995; Hu and Weng, 2000a; Hori and Nemat-Nasser, 1993; Hu and Weng, 2000b).

To turn these closed form formulas (Eq. 3.8,3.9) into a practical way to upscale the viscoelastic behavior of composite materials, a procedure to represent strain history and to compute the Volterra operators is defined in the next section.

3.2 Applications of the extended Mori-Tanaka scheme

3.2.1 Numerical computation of Volterra's operators

A numerical procedure is now depicted to compute the localization tensor according to equation 3.6 and to evaluate the overall behavior defined by the extended Mori-Tanaka scheme in equation 3.8. This procedure is similar to the one of Sanahuja(Sanahuja, 2013b), except that it must be able to deal with tensor histories instead of scalar functions of time.

Following Sanahuja(Sanahuja, 2013b) and Bažant(Bažant, 1972), time is discretized into steps $0 < t_0 < ... < t_n$ and a quadrature rule is used to approximate integrals and solve the Volterra equation. The strain history $\varepsilon(t')$ and the relaxation function $\boldsymbol{C}(t_i, t')$ are approximated as a piecewise linear functions on $[t_0; t_n]$: for all time t_i and at time $t' \in [t_j; t_{j+1}]$, these functions are evaluated as :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t') &= \varepsilon(t_j) + \frac{t'-t_j}{t_{j+1}-t_j}\left(\varepsilon(t_{j+1}) - \varepsilon(t_j)\right) \\ \boldsymbol{C}(t_i,t') &= \boldsymbol{C}(t_i,t_j) + \frac{t'-t_j}{t_{j+1}-t_j}\left(\boldsymbol{C}(t_i,t_{j+1}) - \boldsymbol{C}(t_i,t_j)\right) \end{aligned}$$

Moreover, it is assumed that $\varepsilon(t') = 0$ on $[0; t_0[$. This difference to the method of Sanahuja(Sanahuja, 2013b) is introduced to accurately depict situations where the material is loaded at t_0, such as relaxation tests or creep tests. The corresponding stress history $\sigma = \boldsymbol{C}^{\circ}\varepsilon$ is estimated by trapezoidal approximation :

$$\sigma(t_i) = \boldsymbol{C}(t_i, t_0)\varepsilon(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{C}(t_i, t_j) + \boldsymbol{C}(t_i, t_{j+1})\right) \left(\varepsilon(t_{j+1}) - \varepsilon(t_j)\right)$$

Hence, strain history and stress history are represented as vectors $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon(t_0), ..., \varepsilon(t_i), ..., \varepsilon(t_n)]$ and $\underline{\sigma} = [\sigma(t_0), ..., \sigma(t_i), ..., \sigma(t_n)]$. The relaxation function $\boldsymbol{C}$ is represented as a matrix $\underline{\underline{C}}$ such that $\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}.\underline{\varepsilon}$. As written by Sanahuja (2013b), its generic blocs of size 6×6 reads :

$$2\boldsymbol{C}_{ij} = \begin{cases} 2\boldsymbol{C}(t_0, t_0) & i = j = 0 \\ \boldsymbol{C}(t_i, t_0) - \boldsymbol{C}(t_i, t_1) & i > 0, j = 0 \\ \boldsymbol{C}(t_i, t_{j-1}) - \boldsymbol{C}(t_i, t_{j+1}) & i > 1, 0 < j < i \\ \boldsymbol{C}(t_i, t_{i-1}) + \boldsymbol{C}(t_i, t_i) & i > 0, j = i \\ 0 & i < j \end{cases}$$

This matrix is lower triangular per block, as could have been anticipated from the causality principle. An elastic behavior corresponds to a diagonal per block matrix. Computing $\boldsymbol{T}$ and $\boldsymbol{C}_{MT}$ resumes to matrix-matrix products, matrix-vector products and inverting lower triangular per block matrices. It must be noticed that the last step is equivalent to time-stepping if blocked lines are inverted one after another(Huet, 1980).

The accuracy of the extended Mori-Tanaka scheme, which uses the numerical procedure described above, is to be checked.

3.2.2 Validation against reference solutions

The method described above must be validated against existing tools whenever possible. The case of aging viscoelastic polymer is interesting due to the fact that the Laplace-Carson method may be used after a change of variable defining an equivalent time. The time-dependent strains estimated by this method are used as references to validate the model described above in case of elongated inclusions.

Aging of polymer by the time-shift method

A composite material made of elastic glass fibers embedded in an aging viscoelastic polymer as in (Lavergne et al., 2015b) is considered. The compliance of an aging viscoelastic polymer is modeled by the time-shift method and a Kohlrausch-Williams-Watts (KWW) function (Kohlrausch, 1854; Williams and Watts, 1970). It reads :

$$\boldsymbol{J}(t, t') = \boldsymbol{J}_0 e^{\left(\frac{t^{1+\mu} - t'^{1+\mu}}{(1+\mu)\tau_{ref}^{\mu}\tau_0}\right)^m}$$

where $\boldsymbol{J}_0$ is an isotropic stiffness tensor and $m = 1/3$ is common to various polymers below the glassy temperature and to metals. If the snapshot condition

μ	τ_{ref} (s)
-0.958	1

(a) Aging parameters

E_0 (GPa)	τ_0(s)	m
3.28	22.5	0.324

(b) KWW function

E_0 (GPa)	ν
80	0.22

(c) Fibers

i	τ_i (s)	E_i (GPa)
0	instantaneous	3.27
1	4.8×10^{-6}	906
2	4.8×10^{-5}	387
3	4.8×10^{-4}	198
4	4.8×10^{-3}	83.9
5	4.8×10^{-2}	43.0
6	4.8×10^{-1}	16.5
7	4.8×10^{0}	9.21
8	4.8×10^{1}	1.23

(d) Kelvin chains

TABLE 3.1 – Values fitted according to the experimental results of Read et. al. (Read et al., 1992) on rigid PVC, at T=23°C. All Poisson's ratios of hard PVC are assumed to be 0.40. Both the values of the aging parameter $\mu = -0.958$ and the shape parameter $m = 0.324$ are close to the values identified by Struik or Read et. al. (Struik, 1978; Read et al., 1992)

$(t - t') << t'$ is satisfied, the expression of the compliance resumes to the momentary creep curve :

$$J(t,t') \approx J_0 e^{\left(\frac{t'^{1+\mu}(t-t')}{\tau_{ref}^{\mu}\tau_0}\right)^m}$$

which is similar to the KWW function if t' is set.

The aging parameters μ and τ_{ref} define an equivalent time $\lambda = \int_0^t \frac{d\tau}{\phi(\tau)}$ where $\phi(t) = (t/\tau_{ref})^{-\mu}$. Values of these parameters have been fitted to the experimental creep performed by Read (Read et al., 1992) on Polyvinyl Chloride (PVC). It must be noticed that the ratio between the function $\phi_{ZW}(t) = 1 + t/b$ with $b = 3000$s defined in (Zheng and Weng, 2002) and the function $\phi(t)$ used in the present article is nearly uniform between 1 day and 100 days for PVC, leading to the conclusion that these definitions of the equivalent time are consistent in this range. Yet, the equivalent time defined in (Zheng and Weng, 2002) can be preferred if extrapolation to long term creep is to be performed.

Furthermore, Kelvin chains are adjusted to the KWW function to ease the forward Laplace-Carson transform. These values from (Lavergne et al., 2015b) are recalled in table 3.1 along with properties of glass fibers.

The Mori-Tanaka scheme in the Laplace-Carson space

To upscale the viscoelastic response of a non-aging viscoelastic material, the Laplace-Carson transform is combined to mean-field homogenization schemes (Hashin, 1970; Lévesque et al., 2007). The Laplace-Carson transform turns a non-aging viscoelastic homogenization problem into a set of elastic homogenization problems parametrized by $p > 0$. The transform of a function $g(t)$ is $\hat{g}(p) = p\int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt$ (D). This transform is still usable on polymer-based composites since aging is defined as an equivalent time.

For a given p, the elastic Mori-Tanaka estimate $\boldsymbol{C}^p_{MT}$ accounts for the volume fraction of inclusions c_i and the distribution of orientations of inclusions $f(\psi)$.

It is the solution of equation :

$$c_i \int_\psi f(\psi)(\boldsymbol{C}^p_{MT} - \boldsymbol{C}_i(\psi)) : \boldsymbol{T}^p(\psi) d\psi + (1 - c_i)(\boldsymbol{C}^p_{MT} - \boldsymbol{C}^p_m) = 0$$

Here, $\boldsymbol{C}_i(\psi)$ is the elastic stiffness of inclusions having orientation ψ ; $\boldsymbol{C}^p_m$ is the elastic stiffness of the matrix corresponding to p ; $\boldsymbol{T}^p(\psi)$ is the strain concentration tensor expressing the strain in the inclusions having orientation ψ as a linear function of the strain at infinity, $\boldsymbol{C}^p_m$ being the elastic stiffness tensor of the reference material. Tensors $\boldsymbol{C}_i(\psi)$ and $\boldsymbol{T}^p(\psi)$ are computed by rotating $\boldsymbol{C}_i(0)$ and $\boldsymbol{T}^p(0)$ using Bond transformations (Bond, 1943; Auld and Auld, 1973). Formula to compute $\boldsymbol{T}^p(0)$ in the local reference are recalled in references (Mura, 1987; Torquato, 2002; Pierard et al., 2007a).

Results on a fiber reinforced polymer

The effect of large aspect ratios on the time-dependent strain is estimated by the Laplace-Carson method and the extended Mori-Tanaka scheme, the volume fraction of glass fibers being set at 20% and the time of loading at 10 days. A large aspect ratio tends to reduce the time-dependent strains. The estimate of these strains are merely identical for the two methods, which both rely on the Mori-Tanaka model to perform the homogenization step. The relative error between the estimates of strains remain below 1% (Fig. 3.2). This error arises from the fit of the Kelvin chain and from the Gaver-Stehfest inversion formula for the Laplace-Carson method or from the representation of the compliance as a matrix and subsequent computations for the time-space method.

Since the accuracy of the extended Mori-Tanaka scheme is established, it is applied to aging cementitious materials in the next section.

3.2.3 Validation against full 3D numerical simulations

Full 3D numerical simulations

In the frame of periodic homogenization, the determination of the overall viscoelastic behavior of a periodic microstructure can be obtained by solving the following auxiliary problem on the periodic unit cell V.

$$\begin{array}{rcll} \text{div } \sigma(x,t) & = & 0 & x \in V \\ \varepsilon(x,t) & = & \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{J}(x,t,t') d\sigma(x,t') & x \in V \\ \varepsilon(x,t) & = & \mathbf{E}(t) + \nabla^s u(x,t) & x \in V \\ u(x,t) & & periodic & x \in \partial V \\ \sigma(x,t) \cdot n(x) & & anti-periodic & x \in \partial V \end{array}$$

Here $\mathbf{E}(t)$ is the time-dependent overall strain, $u(t,x)$ is the displacement field in V,$\nabla^s u(x,t)$ is its symmetric gradient, ∂V is the boundary of V and $n(x)$ is the outer normal to ∂V. Actually, $\mathbf{E}(t)$ is the volume average of $\varepsilon(x,t)$ and we denote by $\Sigma(t)$ the volume average of $\sigma(x,t)$.

Full 3D numerical simulations have already been performed to upscale mechanical properties of composites in the frame of the periodic homogenization theory. The finite element method or the Fast Fourier Transform (FFT) method (Moulinec and Suquet, 1998a; Šmilauer and Bažant, 2010; Suquet et al., 2012;

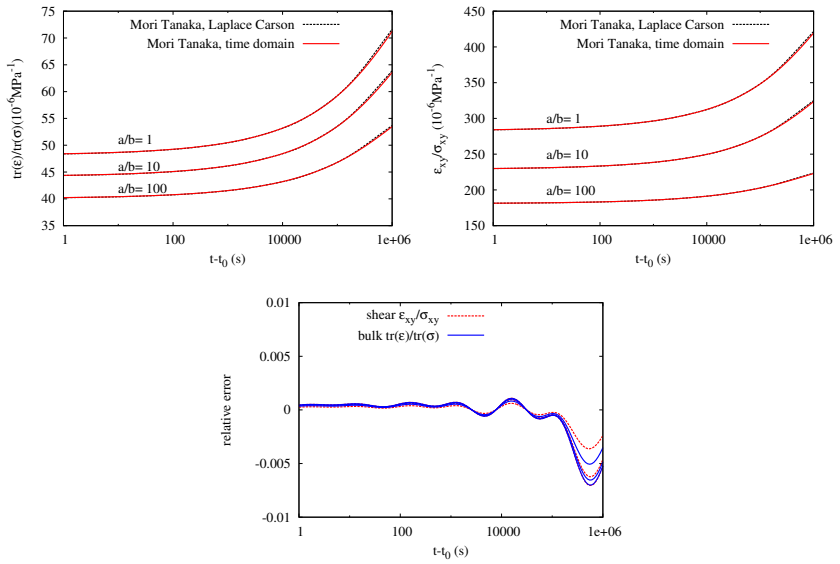


FIGURE 3.2 – Top : the estimated normalized creep strains are displayed as functions of time elapsed since loading $t-t_0$. Time-dependent strains for different aspect ratios a/b, for bulk (left) and shear (right) loadings, are estimated by using the Mori-Tanaka scheme in the Laplace-Carson space and by the Mori-Tanaka scheme in the space domain. Bottom : the relative error between the estimated time-dependent strains is displayed as a function of the time elapsed since loading $t - t_0$. The time of loading is 10 days after quenching.

Escoda, 2012; Sliseris et al., 2014) are used to solve elastic problems. The Random Sequential Adsorption algorithm (Feder, 1980) is used to generate periodic microstructures(Bentz et al., 1999; Pan et al., 2008). Overlapping between polyhedral inclusions is prevented thanks to the Gilbert-Johnson-Keerthi distance algorithm (Gilbert et al., 1987) as in (Lavergne et al., 2015a). Convex polyhedral inclusions are defined as the convex hull of 12 points. Polyhedra are then scaled to match the volume of the corresponding inclusion. The resulting microstructure is displayed on figure 3.3.

The 3D numerical method used in the present article is the one designed by Šmilauer and Bažant (Šmilauer and Bažant, 2010) developed for cementitious materials. This method which relies on the exponential algorithm (Zienkiewicz et al., 1968; Taylor et al., 1970; Bažant and Wu, 1974) is a time-iteration procedure to solve the viscoelastic problem for the case of steady loads. It features an integration of the constitutive equations on each time step assuming a uniform stress rate, to enable the time step to grow exponentially when performing a relaxation (or creep) simulation. The exponential algorithm has been recently combined with the FFT algorithm as solver for the unit cell tangent problem (Šmilauer and Bažant, 2010; Suquet et al., 2012).

The strain ε triggered by a periodic polarization field τ in an homogeneous material of stiffness $\boldsymbol{C}_0^*$, submitted to the average strain $\mathbf{E}$ is given by the

Lippman-Schwinger equation :

$$\varepsilon = \mathbf{E} - \mathbf{\Gamma}_0^* * \tau$$

where $\mathbf{\Gamma}_0^*$ is a Green operator. The convolution of $\mathbf{\Gamma}_0^*$ and τ is computed in the frequency domain thanks to the FFT. The polarity tensor τ is chosen so as to account for the heterogeneity of the considered material $\boldsymbol{C}(x)$:

$$\tau(x) = (\boldsymbol{C}(x) - \boldsymbol{C}_0^*) : \varepsilon(x)$$

The strain field must satisfy the following equation :

$$\varepsilon = E - \mathbf{\Gamma}_0^* * ((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_0^*) : \varepsilon)$$

This equation is solved by a fixed point algorithm (Moulinec and Suquet, 1998a)(C).

Although this 3D numerical method can treat large and complex microstructures, it requires large amount of memory and time. The implementation used in this article is parallel so as to be ran on clusters (Lavergne et al., 2015a,b).

The case of cementitious materials : the B3 model

The B3 model (Bažant and Prasannan, 1988; RILEM, 1995) has been designed to estimate the mechanical behavior of concrete, including its basic creep. The creep compliance of the B3 model $\boldsymbol{J}_{B3}$ is the sum of two aging compliances. The first one $\boldsymbol{J}_{ea}$ represents the effect of hydration at early age and the second one $\boldsymbol{J}_{q4}$ is irrecoverable, while satisfying the logarithmic long term trend of creep strains of concretes.

$$\boldsymbol{J}_{B3}(t,t') = \boldsymbol{J}_{ea}(t,t) + \boldsymbol{J}_{q4}(t,t')$$

At early age, the phenomenon of aging, which is caused by cement hydration and probably also by gradual formation of bonds akin to polymerization, causes major complications for the modeling of concrete creep. The aging of a cement paste is treated as a consequence of volume growth of the load-bearing solidified matter (hydrated cement) whose compliance $\mathbf{\Phi}$ is non-aging :

$$\mathbf{\Phi}(t-t') \propto \ln(1 + \lambda_0^{-n}(t-t')^n)$$

where $\lambda_0 = 1$ day. Although a value of $n = 0.1$ is used at concrete scale (Bažant and Prasannan, 1988; RILEM, 1995), higher values ($n = 0,24$) have been used for a cement paste with high water to cement ratio (Granger and Bažant, 1995). At the nanometric scale of the calcium-silicate-hydrates (C-S-H), this parameter may be set at $n \approx 0.35$ (Šmilauer and Bažant, 2010). The parameter n drives the discrepancy between the elastic response $t - t' << 1$, where $\mathbf{\Phi}(t-t') \approx (t-t')^n$ and the long term trend $t - t' >> 1$, where $\mathbf{\Phi}(t-t') \approx n \ln(t-t')$. The creep tests of Grasley & Lange (Grasley and Lange, 2007) may be used to set this value.

The early-age compliance $\boldsymbol{J}_{ea}(t,t')$ of the solidifying cementitious material should satisfy the following conditions :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{J}_{ea}}{dt}(t,t') &= \tfrac{1}{v(t)} \tfrac{d\mathbf{\Phi}}{dt}(t-t') \\ \boldsymbol{J}_{ea}(t,t) &= \boldsymbol{C}_{q1}^{-1} + \tfrac{1}{v(t)}\mathbf{\Phi}(0) \end{aligned}$$

dynamic Young Modulus E_d GPa	static Young Modulus E_s GPa	E_s/E_d
1	0.33	0.30
5	2.52	0.50
10	6.27	0.62
15	10.7	0.71
20	15.6	0.78
25	21	0.84

TABLE 3.2 – According to Kawasumi et al. the static modulus of a cement paste E_s may be retrieved from the dynamic Young Modulus E_d thanks to the following equation : $E_s = 0.001628 \times (E_d/0.0981)^1.315$ where E_s and E_d are in MPa. The ratio E_s/E_d is 0.6 at 28 days in the aging viscoelastic model. The ratio being lower for small values of E_s means that the static modulus ages more than the dynamic modulus. This dynamic modulus does not age at all in the B3 model (Bažant and Prasannan, 1988; RILEM, 1995)
.

where $v(t)$ is proportional to the volume fraction of load-bearing material at time t and $\boldsymbol{C}_{q1}$ is the dynamic part of the elastic stiffness. The inverse of this dynamic Young Modulus is $q_1 = 0.6/E_{28}$ where E_{28} is the measured elastic stiffness at 28 days. This ratio of 0.6 is consistent with the experimental results of Kawasumi et al. (Endo et al., 2009) (Tab.3.2).

According to the B3 model, $v(t)$ reads :

$$\frac{1}{v(t)} = q_2 \left(\sqrt{\frac{\lambda_0}{t}} + 0.29 * (w/c)^4 \right)$$

where w/c is the water to cement weight ratio. q_2 is related to q_1 and the elastic stiffness at 28 days E_{28}. As in (RILEM, 1995), it is assumed that the elastic stiffness E_{28} is measured at $t - t' = 0.01$ and $t = 28$ days. Hence :

$$q_2 = \frac{0.4}{\ln(1 + (0.01)^n) E_{28} \left(\sqrt{1/28} + 0.29(w/c)^4 \right)}$$

The Young Modulus increases with time up to a limit :

$$\frac{1}{E(t)} = \frac{1}{E(28)} \left(0.6 + 0.4 \frac{\sqrt{\frac{1}{t}} + 0.29 w/c^4}{\sqrt{\frac{1}{28}} + 0.29 w/c^4} \right) > \frac{1}{E(28)} \left(0.6 + 0.4 \frac{0.29 w/c^4}{\sqrt{\frac{1}{28}} + 0.29 w/c^4} \right)$$

For $w/c = 0.5$, the B3 model expects the long term Young Modulus to be 30% higher than the Young Modulus at 28 days while experimental results on sealed samples of concretes (Granger, 1995) exhibits an increase of about 10% of the Young Modulus between 28 days and 1 year. Moreover, models ACI209, Eurocode2 and the BPEL91 expect respectively the long term Young Modulus to be 8%, 9% and 3% higher than the Young Modulus at 28 days, for a normal cement (R or ASTM I)(Berthollet, 2003). Consequently, the function $v(t)$ is modified under the assumption that aging stops once the Young modulus

		n	0.1	0.24
Elastic		E_0	2.37	5.44
τ_1	0.01 days	E_1	11.42	7.95
τ_2	0.1 days	E_2	10.09	5.45
τ_3	1 days	E_3	9.03	3.93
τ_4	10 days	E_4	7.84	2.92
τ_5	100 days	E_5	7.59	2.60
τ_6	1000 days	E_6	5.99	1.99
τ_7	10000 days	E_7	8.31	2.69
τ_8	100000 days	E_8	3.60	1.22

TABLE 3.3 – A Dirichlet series $\sum_1^n \left(1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_k}}\right) E_k^{-1} + E_0^{-1}$is fitted according to the non-aging part of the compliance $\Phi(t-t') = \ln(1 + \lambda_0^{-n}(t-t')^n)$, where $\lambda_0 = 1$ day.

reaches 1.1 times the Young modulus at 28 days and $v(t)$ must remain below a maximum value v_{max}, which reads :

$$v_{max} = \frac{1}{\frac{1}{1.1} - 0.6} E(28) ln(1 + 0.01^n)$$

The strain rate reads :

$$\dot{\varepsilon}_{ea}(t) = \left(\boldsymbol{C}_{q1}^{-1} + v(t)^{-1}\boldsymbol{\Phi}(0)\right)\dot{\sigma}(t) - \int_0^t v^{-1}(t)\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt}(t-t')\dot{\sigma}(t')dt'$$

To enable full 3D numerical simulations, the non-aging part of the compliance $\boldsymbol{\Phi}(t-t')$ is considered as a series of Kelvin chains (Tab. 3.3) :

$$\dot{\varepsilon}_{ea}(t) = \left(\boldsymbol{C}_{q1}^{-1} + v^{-1}(t)\boldsymbol{C}_0^{-1}\right)\dot{\sigma}(t) + \int_0^t v^{-1}(t)\sum_1^n \frac{1}{\tau_k} e^{-\frac{t-t'}{\tau_k}} \boldsymbol{C}_k^{-1}\dot{\sigma}(t')dt'$$

The internal variables are :

$$\gamma_k(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau_k} e^{-\frac{t-t'}{\tau_k}} \boldsymbol{C}_k^{-1}\dot{\sigma}(t')dt'$$

The evolution equations are :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ea}(t) &= \left(\boldsymbol{C}_{q1}^{-1} + v^{-1}(t)\boldsymbol{C}_0^{-1}\right)\dot{\sigma}(t) + v^{-1}(t)\textstyle\sum_1^n \gamma_k(t) \\ \dot{\gamma}_k(t) + \frac{1}{\tau_k}\gamma_k(t) &= \boldsymbol{C}_k^{-1}\dot{\sigma}(t) \end{aligned}$$

A irrecoverable part of creep strain ε_{q4} in cementitious materials is taken account of in the second compliance $\boldsymbol{J}_{q4}(t,t')$. Its expression was derived from the theory of the relaxation of microprestress (Bažant et al., 1997), designed to explain long-term aging and model the Pickett effect when the relative humidity changes. This aging compliance features a logarithmic long term trend :

$$\boldsymbol{J}_{q4}(t,t') = ln\left(\frac{t}{t'}\right)\boldsymbol{C}_{q4}^{-1}$$

cement paste		
Elastic	E_{28}	13.5 GPa
	w/c	0.5
	q_4	2 10^{-6}MPa^{-1}
aggregates		
Elastic	E_0	60 GPa
	ν	0.25

TABLE 3.4 – Parameters of the viscoelastic behavior of a cement paste, according to model B3. The Poisson's ratio of the cement paste is assumed to be equal to 0.2.

where the inverse of the Young modulus of $\boldsymbol{C}_{q4}$ is $q_4 = 2.10^{-6}\text{MPa}^{-1}$ for a saturated cement paste (Šmilauer and Bažant, 2010). The corresponding evolution equation is :

$$\dot{\varepsilon}_{q4}(t) = \frac{1}{t}\boldsymbol{C}_{q4}^{-1}\sigma(t)$$

The strain rate $\dot{\varepsilon}(t)$ is the sum of these two strain rates. It results in the following evolution equations :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \left(\boldsymbol{C}_{q1}^{-1} + v^{-1}(t)\boldsymbol{C}_0^{-1}\right)\dot{\sigma}(t) + v^{-1}(t)\textstyle\sum_1^n \gamma_k(t) + \frac{1}{t}\boldsymbol{C}_{q4}^{-1}\sigma(t) \\ \dot{\gamma}_k(t) + \frac{1}{\tau_k}\gamma_k(t) &= \boldsymbol{C}_k^{-1}\dot{\sigma}(t) \end{aligned}$$

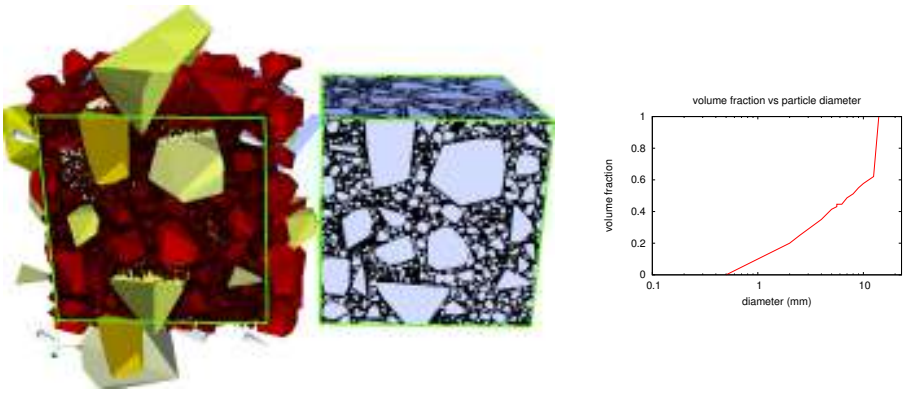


FIGURE 3.3 – A 4 cm-wide sample of a concrete made of coarse sand ($d > 0.5$ mm) and small gravel ($d < 13.5$ mm) built by the RSA algorithm is shown along with its discrezation on a $384 \times 384 \times 384$ grid. The volume fraction of polyhedral inclusions in the cubic cell is 60%.

Results

The behavior of the matrix is the one of a cement paste (Fig. 3.4) of water to cement ratio $w/c = 0.5$ and Young Modulus at 28 days $E_{28} = 13.5$GPa. The inclusions are considered as elastic, as aggregates in concrete (Tab. 3.4) and the volume fraction of inclusions is 60%. The sieve curve corresponds to the

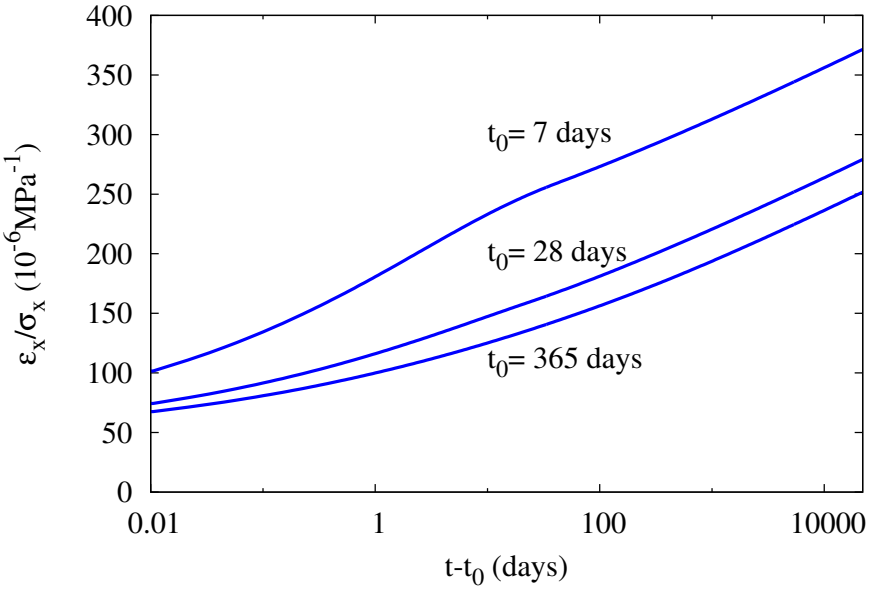


FIGURE 3.4 – The normalized creep strains ε_x/σ_x of a cement paste according to the modified B3 model (RILEM, 1995) are displayed as functions of the time elapsed since loading $t-t_0$ for different times of loading t_0. An uniaxial creep test σ_x is considered. The Young modulus ($t - t_0 \approx 0.01$ days) depends on the time of loading t_0. The long term trend of creep strains is logarithmic ($t - t_0 \geq 100$ days).

one of a concrete with a small maximal diameter (13.5mm) and a coarse sand (Fig. 3.3). A 3D microstructure featuring polyhedral inclusions is generated and discretized on a $384\times384\times384$ grid as described in (Lavergne et al., 2015a). Uniaxial creep tests are simulated, the concrete being loaded at 7, 28 and 365 days. The numerical estimates of the time-dependent strains are compared to the one produced by the time-space method of Sanahuja (Fig. 3.5). The difference between instantaneous strains is small and the time-space method overestimates the time-dependent strains compared to 3D numerical results. A significant discrepancy exists as the concrete is loaded at early ages ($\leq$7 days). The difference between estimates of time-dependent strains increases with time elapsed since loading but remains acceptable. In conclusion of this comparative study, the method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b) can be considered as a practical and efficient method to upscale the viscoelastic properties of a concrete featuring round aggregates.

3.2.4 New possibilities : studying influence of aggregates'aspect ratio

The time-space method is now used to study the influence of the aspect ratio of aggregates on the time-dependent strain of concrete, the volume fraction of aggregates being set to 60%. Indicators describing the inclusions' shape

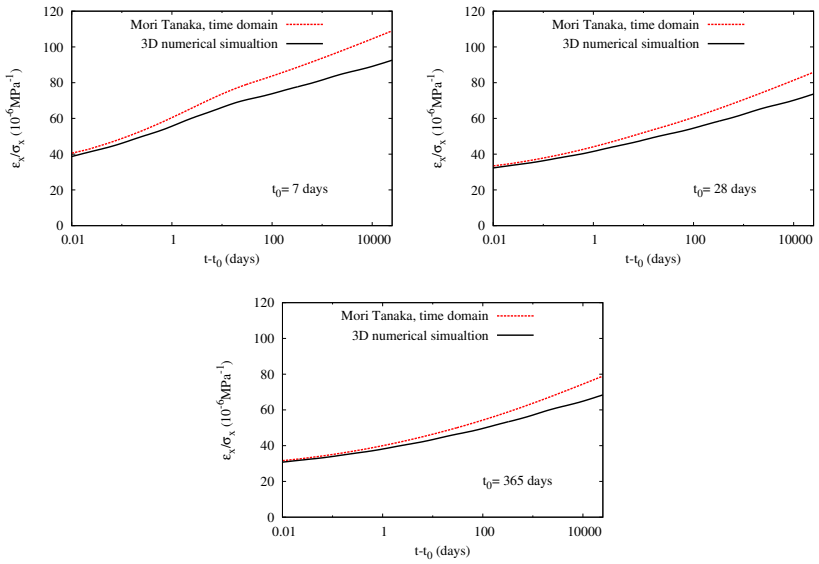


FIGURE 3.5 – The normalized creep strains ε_x/σ_x of a concrete estimated by the time-space method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b) and full 3D numerical simulations are displayed as functions of the time elapsed since loading $t - t_0$. Considered times of loading are $t_0 = 7$ days (top left), $t_0 = 28$ days (top right) and $t_0 = 365$ days (bottom). The inclusions are assumed to be spherical so as to use the model of Sanahuja. The loading corresponds to an uniaxial creep test.

such as elongation ratio and flakiness ratio have been defined and measured on real samples of aggregates (Kwan et al., 1999; ASTM, 2009; AFNOR, 2012; Hu and Stroeven, 2011). For an ellipsoidal inclusion with principal axes of lengths $a > c > b$, the elongation ratio is a/c and the flakiness ratio is b/c. The elongation index and flakiness index correspond to the volume fraction of inclusions featuring respectively an elongation ratio greater than 1.8 and a flakiness ratio lower than 0.6. For normal mix design, the combined (flakiness + elongation) index for coarse aggregates must be limited to 25%, for workability reasons (Gambhir, 2013). If the inclusions are spheroids, or ellipsoid of revolution, of semi-diameters a, b, b. The aspect ratio is defined as a/b. By using the time-space method, it is shown in figure 3.6 that the aspect ratio of aggregates has little effect on the estimated time- dependent strains of concretes, even as the aspect ratio a/b of all aggregates is 0.33 or 3, corresponding to a combined index of 100%. Moreover, full 3D numerical computations are performed on periodic microstructures featuring spherical ($a/b = 1$) elongated ($a/b = 3$) or flat ($a/b = 0.33$) inclusions (Fig.3.7). It must be mentioned that a single run of the 3D numerical simulation takes more than one hour using eight nodes of the Athos cluster of EdF Lab (top500.org, 2015) while running the time-space method lasts less than five minutes on a common laptop computer. It is shown on figure 3.8 that the results of the time-space method are consistent with the ones of full 3D numerical simulations. In case of non-spherical inclusions, the estimates of the Ponte Castañeda-Willis scheme are closer to the results of 3D numerical than the ones of Mori-Tanaka. Indeed, both the Ponte Castañeda-

Willis scheme and 3D numerical simulation expect the flat inclusions to be slightly more effective than elongated inclusions at reducing creep strains. Yet, the time-dependent strains estimated by 3D numerical simulation are slightly higher than the one of Ponte Castañeda-Willis scheme though the later is a lower bound on the elastic stiffness in the range of elasticity. It may be due to numerical errors since the numerical simulations are performed by using Kelvin chains adjusted to the compliance used by the Ponte Castañeda-Willis scheme. Moreover, in 3D numerical simulations, the behavior of voxels overlapping on two phases is set according to a Reuss bound : the estimated creep strains slightly decreases as the grid size increases(Lavergne et al., 2015a). Finally, it must be noticed that the considered aspect ratio ($a/b = 3$ or $a/b = 0.33$) and volume fraction ($c_i = 60\%$) are out of the domain defined by Ponte Castañeda and Willis to enforce the hypothesis of impenetrability of the inclusions (Castañeda and Willis, 1995; Hu and Weng, 2000a) :

$$\begin{aligned} c_i &\leq a/b & \text{if}(a/b \leq 1) \\ c_i &\leq \left(\frac{1}{a/b}\right)^2 & \text{if}(a/b \geq 1) \end{aligned}$$

However, the small difference between the estimated time-dependent strains spotted in the case of spherical inclusions is not larger in the case of elongated of flat inclusions. Indeed, both full 3D numerical simulations and homogenization schemes lead to the conclusion that the influence of the aspect ratio of aggregates on the time-depend strains is limited. Consequently, as long as an isotropic distribution of the orientations of aggregates is considered, the aspect ratio of aggregates cannot be held responsible for the discrepancies between the time-dependent strains of concretes of similar formulations.

3.2.5 Discussions

It has been shown that the time-space method is relevant to estimate the time-depend strains of a concrete since these estimates are similar to the one obtained by full 3D numerical simulations (Fig. 3.5,3.8). Moreover, the small difference between these estimates and its increase with the time elapsed since loading can be attributed to the low contrast between the elastic stiffness of the aggregates and the tangent stiffness of the cement paste on each time step. Indeed, the contrast of mechanical properties between the phases coupled with the large volume fraction of inclusions may explain such a difference, since it is higher at early age and it increases with the time elapsed since loading. A definition of the contrast between phases featuring isotropic elastic behavior Θ stems from the FFT algorithm (Moulinec and Silva, 2013). It reads :

$$\Theta = \max\left(\frac{K_{max}}{K_{min}}, \frac{G_{max}}{G_{min}}\right)$$

where K_{min} and K_{min} (respectively G_{min} and G_{max}) are the minimum and maximum of the bulk modulus (respectively shear modulus) in the microstructure. For numerical computations, the contrast of tangent stiffness between the cement paste and the aggregates on the first time step is $\Theta = 11$ at 1 day and $\Theta = 4.5$ at 365 days. 20000 days after loading, it increases to $\Theta = 14$ in both cases. In the range of elasticity, Ghossein and Lévesque (Ghossein and Lévesque,

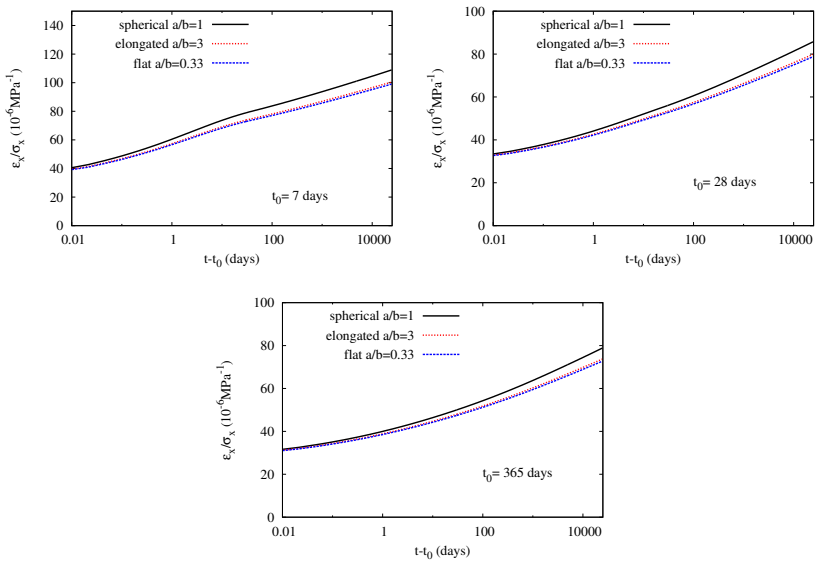


FIGURE 3.6 – The estimated normalized creep strains ε_x/σ_x of concrete featuring different aspect ratios of aggregates are displayed as functions of the time elapsed since loading $t-t_0$. Considered time of loading are $t_0 = 7$ days (top left), $t_0 = 28$ days (top right) and $t_0 = 365$ days (bottom). In case of uniaxial creep tests, the aspect ratio of aggregates has little effect on the time-dependent strains of concretes estimated by the time-space method.

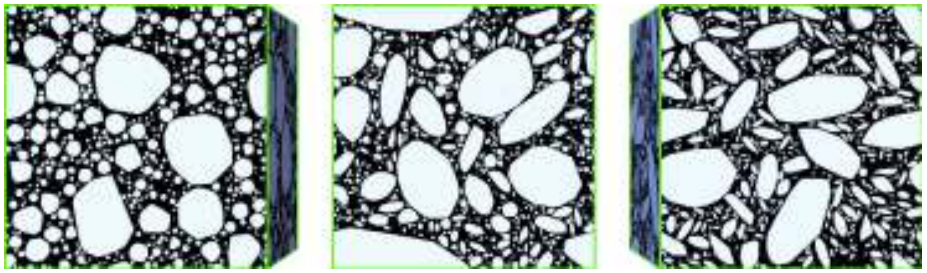


FIGURE 3.7 – Microstructures featuring spherical ($a/b = 1$), elongated ($a/b = 3$) or flat ($a/b = 0,33$) aggregates are discretized on $384 \times 384 \times 384$ regular grids to perform full 3D numerical simulations. The volume fraction of aggregates is 60%.

2012, 2014) have shown that that none of the analytical models they have tested provides accurate estimates for all contrasts and all volume volume fractions of inclusions. Yet, they have checked that the error on the overall elastic strains estimated by the Mori-Tanaka scheme is low if the contrast between the stiffnesses of inclusion and matrix is lower than 20 and for volume fractions of inclusions lower than 50%. Choosing the tangent stiffness to define the contrast between the phases is arguable, since the tangent stiffness depends on the duration of the time step. Yet there is not an obvious definition of the contrast between phases for viscoelastic materials and the duration of time-step can be related to

FIGURE 3.8 – The normalized creep strains ε_x/σ_x of concretes estimated by the Mori-Tanaka scheme, the Ponte Castañeda-Willis scheme and full 3D numerical simulations are displayed as functions of the time elapsed since loading $t-t_0$. Considered aspect ratios of aggregates for these uniaxial creep tests are $a/b = 1$ (left), $a/b = 3$ (center) and $a/b = 0.33$ (right). The time of loading is $t_0 = 28$ days. In case of spherical inclusions $a/b = 1$, the estimate of the Ponte Castañeda-Willis scheme is equal to the one of the Mori-Tanaka scheme.

the loading duration and variability, which must be accounted for as viscoelastic materials are considered. The tangent stiffnesses of a series of Kelvin chain, the Generalized Maxwell model and the Zener model are bounded, but it is not the case of the Maxwell model or of the Burger model due to the dashpot in series. In these cases, the tangent stiffness tends to zero for long time steps and the contrast would become infinite if the loading duration were not accounted for.

The analytical result presented in this paper is restricted to viscoelastic materials featuring a time-independent Poisson's ratio. Some important materials, such as asphalt concrete(Di Benedetto et al., 2007; Nguyen et al., 2013; Kassem et al., 2013; Islam et al., 2015) do not comply with this restriction. Moreover, the effect of bulk viscosity is not considered as rubber (Rendek and Lion, 2010; Fritzen and Böhlke, 2013) is studied and the same assumption is made to model mixed oxides nuclear fuels (Siefken et al., 2001; Largenton et al., 2014), except if hot pressing it to be considered (Siefken et al., 2001). The extended Mori-Tanaka scheme proposed in this paper is not able to handle these composite materials due to the hypothesis of a time-independent Poisson's ratio of the matrix. Incremental homogenization approaches (Lahellec and Suquet, 2007; Ricaud and Masson, 2009; Masson et al., 2012), full-field computations (Li et al., 2015b,a; Islam et al., 2015) or reduced-order models (Fritzen and Böhlke, 2013; Largenton et al., 2014) proved useful to estimate the overall time-dependent strains of such composite materials.

Conclusion

The homogenization method of Sanahuja(Sanahuja, 2013b) is extended to the case of elongated or flat inclusions embedded in an aging viscoelastic matrix, as long as the reference material features a relaxation tensor which can be written as $\boldsymbol{C}(t,t') = \boldsymbol{C}(0,0)f(t,t')$. It corresponds to reference materials having a time-independent Poisson's ratio and it is a common assumption due to lack of clear experimental evidence on the evolution of the viscoelastic Poisson's ratio. As for the method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b), a practical procedure to derive an estimate of the time-dependent strains of a composite material is proposed.

The method described above has been successfully compared to existing methods, namely a semi-analytical homogenization method using the Laplace-Carson transform for non-aging viscoelastic materials and full 3D numerical simulations. Estimates of the time-dependent strains of a fiber-reinforced polymer and a concrete have been compared and they are found similar. Consequently, these three methods are consistent. The extended method was used to estimate the influence of the aspect ratio of aggregates on the time-dependent strains of concretes : it is shown that the viscoelatic behavior of concrete is not significantly affected by the aspect ratio of aggregates.

The extension presented in this article has many advantages. As in the method of Sanahuja, the output is an estimate of the effective behavior of the material and the computational time is much lower that the one of a single full 3D numerical simulation. Moreover, there is no restriction on the behavior of the inclusions : anisotropic aging viscoelastic materials can be handled as easily as isotropic ones. Regarding the matrix , as long as the reference material features a time-independent Poisson's ratio, any compliance can be incorporated

without additional adjustment.

If the viscoelastic Poisson's ratio of the reference material is time-dependent, the method presented in this paper is not valid anymore and extending the method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b) to the case of elongated or flat inclusions is not straightforward. A perturbation method is currently being investigated to account for a change of Poisson's ratio with time.

Chapitre 4

Les leçons retirées des modèles d'homogénéisation

Dans cette section, les déformations différées estimées par les méthodes d'homogénéisation seront confrontées aux mesures de déformations différées de bétons représentatifs de ceux utilisés pour les enceintes de confinement. Dans un premier temps, on appliquera le schéma de Mori-Tanaka pour estimer les déformations différées de bétons à partir de leur composition. L'utilisation du modèle B3 sera justifiée et analysée avec un regard critique avant de procéder aux comparaisons entre déformations estimées et déformations mesurées. Dans un second temps, la simulation numérique 3D sera utilisée pour faire vivre à un volume de béton les contraintes subies dans la section courante de l'enceinte sur une durée de 60 ans. On surveillera alors l'évolution des contraintes locales dans la matrice cimentaire car elles pourraient constituer une source de dégradation de la perméabilité du béton.

4.1 Quelques mots sur le modèle B3 de viscoélasticité linéaire vieillissante

Le modèle de fluage B3 a été utilisé et modifié à la marge pour modéliser le comportement de la matrice cimentaire. Certains aspects doivent être justifiés et d'autres mériteraient quelques améliorations. Ce modèle B3 permet d'estimer les déformations de fluage propre d'une matrice cimentaire à partir du rapport eau/ciment (w/c) et de son module de Young à 28 jours. Comme ce modèle ne dépend que de deux paramètres, il est assez facile à utiliser en pratique. De plus, la complaisance obtenue satisfait les inégalités dues à la thermodynamique (Bažant and Huet, 1999).

4.1.1 La tendance logarithmique des déformations différées à long terme

Le modèle B3 partage avec d'autres modèles le choix d'une complaisance logarithmique à long terme. A long terme, la complaisance du modèle B3 devient

non-vieillissante et on peut l'approximer sous la forme uniaxiale suivante :

$$J(t-t') = \frac{1}{E}\left(0.6 + 0.4\frac{\ln(1+(t-t')^n)}{\ln(1+(0.01)^n)}\right) \tag{4.1}$$

où E est une raideur élastique mesurée à $t-t' = 0.01$ jours. A long terme, cette complaisance devient proche de :

$$J(t-t') \approx \frac{1}{E}\left(0.6 + 0.4\frac{n}{\ln(1+(0.01)^n)}\ln(t-t')\right)$$

La coefficient n dicte donc le rapport de la déformation différée à long terme sur la déformation différée instantanée. Plus n augmente, plus les déformations différées évoluent rapidement à long terme. C'est l'analogue du paramètre K_{fl} pour le modèle BPEL91 : la valeur de n est liée au rapport entre les déformations différées et la déformation élastique instantanée.

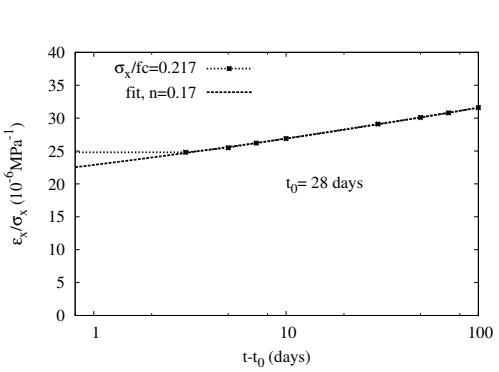
Listons les principaux arguments en faveur d'une telle évolution des déformations différées de fluage propre :

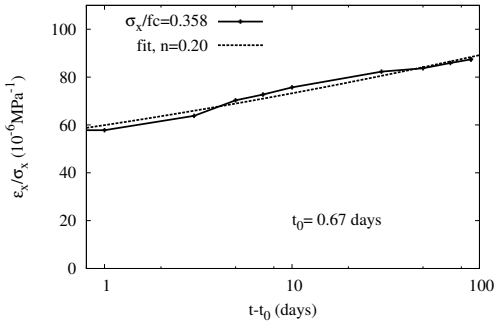
- Les déformations de fluage mesurées par des essais de nanoindentation sur des C-S-H et sur des pâtes de ciment ont une tendance logarithmique(Vandamme, 2008). Les mécanismes physiques avancés pour expliquer le fluage propre à long terme des matériaux cimentaires sont décrit à l'échelle des feuillets de C-S-H (Benboudjema, 2011).
- Le constat d'une évolution logarithmique des déformations différées des matériaux cimentaire a été utilisé dans des démarches de changement d'échelles(Zhang et al., 2014).
- Si on modélise un matériau composite viscoélastique non-vieillissant en utilisant un schéma de Mori-Tanaka dans l'espace de Laplace-Carson, la tendance logarithmique à long terme des déformations de la matrice est préservée par le changement d'échelle.

Rappelons que cela n'invalide pas l'utilisation des modèles rhéologiques, du moment que les temps caractéristiques utilisés soient comparables aux durées de chargement. Ainsi, Granger introduit des temps caractéristiques jusqu'à 20000 jours (55 ans) pour décrire la complaisance des bétons : les déformations de fluage propre évoluent encore, mais très faiblement, à long terme.

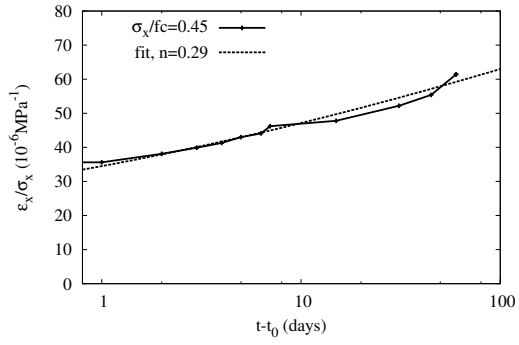
On peut confronter cette tendance aux essais existants dans la littérature (Bažant and Li, 2008b; cre). Les coefficients E et n peuvent être ajustés aux différents résultats expérimentaux de la littérature de façon aisée. Cela est un argument supplémentaire en faveur d'une tendance logarithmique à long terme des déformations différées (Fig. 4.1a4.1c4.1b). On note cependant que le paramètre n est sensiblement différent de celui trouvé pour le modèle B3. Ainsi, là où une valeur $n = 0.1$ est utilisée pour le modèle B3, la valeur trouvée dans nos régressions est plus proche de $n = 0.2$. Cela s'explique dans la mesure où la complaisance complète du modèle B3 contient un terme supplémentaire lié à la relaxation des micro-précontraintes. Ce terme a aussi une tendance logarithmique à long terme puisqu'il s'écrit $J_{q4}(t,t') \propto \ln\frac{t}{t'}$. Il s'agit d'un terme vieillissant car $J_{q4}(t,t')$ ne peut pas s'écrire en fonction de $t-t'$.

On peut aussi confronter cette tendance aux essais de Brooks (Brooks, 2005). Lors de ces essais, des éprouvettes de béton ont été chargées pendant une période de 30 ans, ce qui en fait une donnée expérimentale particulièrement riche. Les paramètres E et n de l'équation 4.1 peuvent à nouveau être ajustés sur ces

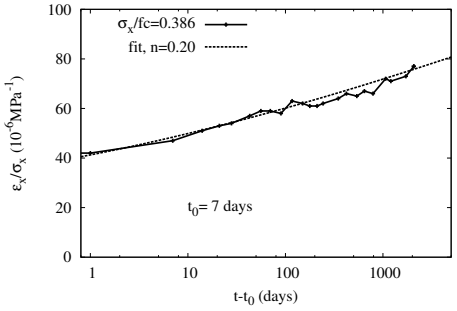


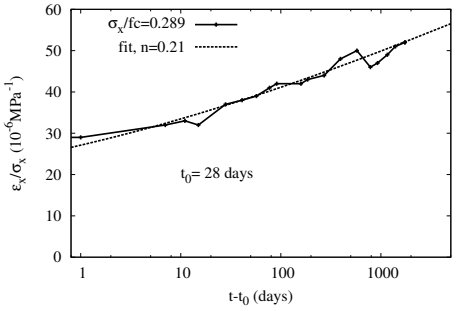


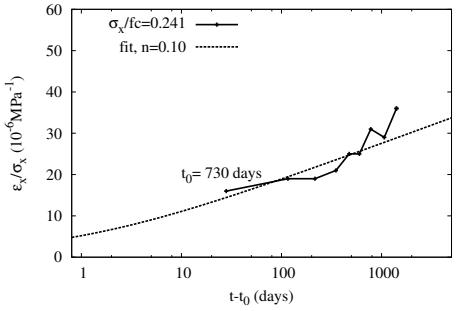
(a) $w/c = 0.316$, $a/c = 3.78$, (Han and Walraven, 1995)



(b) $w/c = 0.32$, $a/c = 2.81$, $t_0 = 30$ days(Ngab et al., 1981)







(c) $w/c = 0.49$, $a/c = 4.814$ (L'Hermite and Mamillan, 1969)

FIGURE 4.1 – La complaisance simplifiée du modèle B3 est ajustée à des résultats expérimentaux de la base de données NU-ITI(Bažant and Li, 2008b; cre)

mesures expérimentales de déformations de fluage. On trouve alors des valeurs de n situées entre $n = 0.2$ et $n = 0.24$. Ainsi, le rapport entre les déformations différées à 60 ans et la déformation instantanée correspondant $1 + K_{fl}$ va de 3.1 à 4.1. En revanche, les déformations de certaines éprouvettes semblent dévier de la tendance logarithmique en la dépassant. Brooks attribue l'accélération de ces déformations différées à long terme à un fluage de dessiccation. En effet, les conditions des essais ne correspondent pas à un essai de fluage propre. Il s'agit soit d'essais séchants, soit d'essais en conditions humides où tout se passe comme si le béton était stocké dans l'eau. Dans le premier cas, la déformation mesurée contient aussi le retrait de séchage et la déformation liée au fluage de dessiccation. Dans le second cas, les échanges d'humidité avec l'extérieur ne sont pas empêchés non plus. Cela a pour conséquence un gonflement mesuré sur des éprouvettes témoins. On note aussi une forte évolution de la résistance à compression et du module de Young entre 14 jours et à 30 ans. Ainsi pour les sept bétons de rapports w/c entre 0.45 et 0.58, le module de Young a augmenté en moyenne de 70% entre 14 jours et 15-30 ans et la résistance à compression f_c de 43%. A titre de comparaison, l'Eurocode 2 (Berthollet, 2003; ACI, 2008) prévoit bien une augmentation de la résistance à compression de $a = e^{0.25\left(\sqrt{\frac{28}{14}}-\sqrt{\frac{28}{30x365}}\right)} - 1 = 40\%$ sur la même période pour des ciment normaux ou rapides (type N ou R), mais l'augmentation correspondante du module de Young n'est que de $(a+1)^{\frac{1}{3}} - 1 = 12\%$. Il y a donc potentiellement dans les essais de Brooks (Brooks, 2005) des mouvements d'eau qui peuvent entraîner un fluage de dessiccation, y compris pour les éprouvettes stockées en eau.

Enfin, il est aussi possible de confronter cette tendance aux essais de Granger (Granger, 1995). La fonction ajustée est :

$$J(t-t') = \frac{1}{E}\left(\alpha + (1-\alpha)\frac{\ln(1+\left(\frac{t-t'}{100}\right)^n)}{\ln(1+\left(\frac{0.01}{100}\right)^n)}\right) \tag{4.2}$$

On note l'introduction artificielle d'un temps caractéristique de 100 jours. Les paramètres α, E et n sont ajustés sur les déformations différées mesurées par Granger sur les durées $t - t_0$ inférieures à 100 jours (Fig. 4.3). Le paramètre α dicte le rapport entre le module dynamique et le module de Young, il est ajusté sur la courbe de Chooz et il vaut $\alpha = 94\%$. En conséquence, les valeurs de n que l'on trouve sont plus élevées, entre 0.30 et 0.36. Ainsi, le rapport entre les déformations différées à 60 ans et la déformation instantanée est de $1 + K_{fl} = 2.7$ à $1 + K_{fl} = 4.4$. A titre de comparaison, le coefficient K_{fl} pris en compte lors de la conception des enceintes vaut $K_{fl} = 2.2$ selon le RCC-G, qui reprend le règlement BPEL91(Granger, 1995). Cela marque aussi une grande disparité entre les déformations différées des différents bétons. Le lien entre la composition d'un béton et ses déformations différées de fluage n'est pas encore clair : les modèles d' homogénéisation ne parviennent pas à reproduire cette disparité en partant de formulations si proches Sanahuja et al. (2009); Lavergne et al. (2015a).

4.1.2 Viscoélasticité linéaire vieillissante

La forme de la fonction de vieillissement $v(t)$ du modèle B3 est fixée. Cette fonction traduit la fraction volumique de la pâte en mesure de supporter les

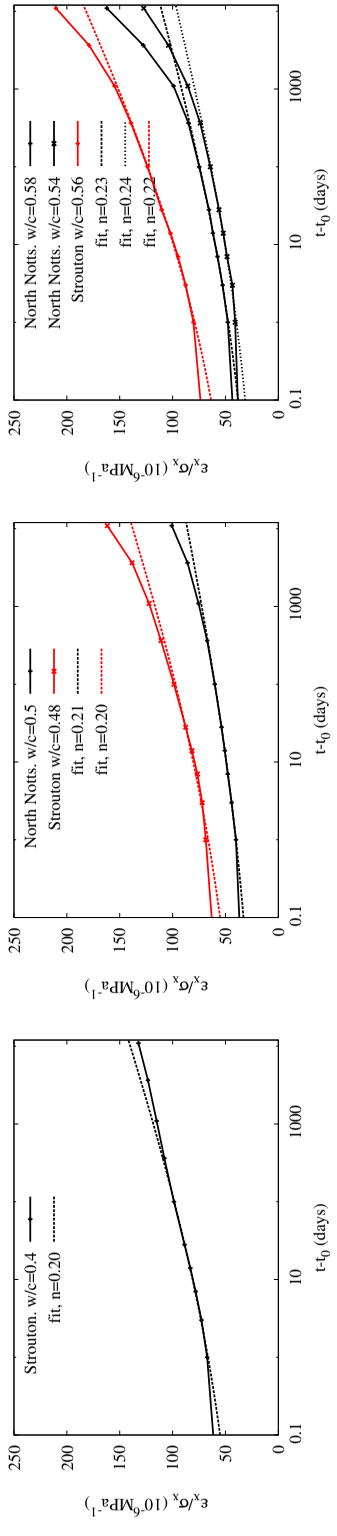


FIGURE 4.2 – La complaisance simplifiée du modèle B3 est ajustée aux résultats expérimentaux de Brooks (Brooks, 2005) pour les éprouvettes en conditions humides.

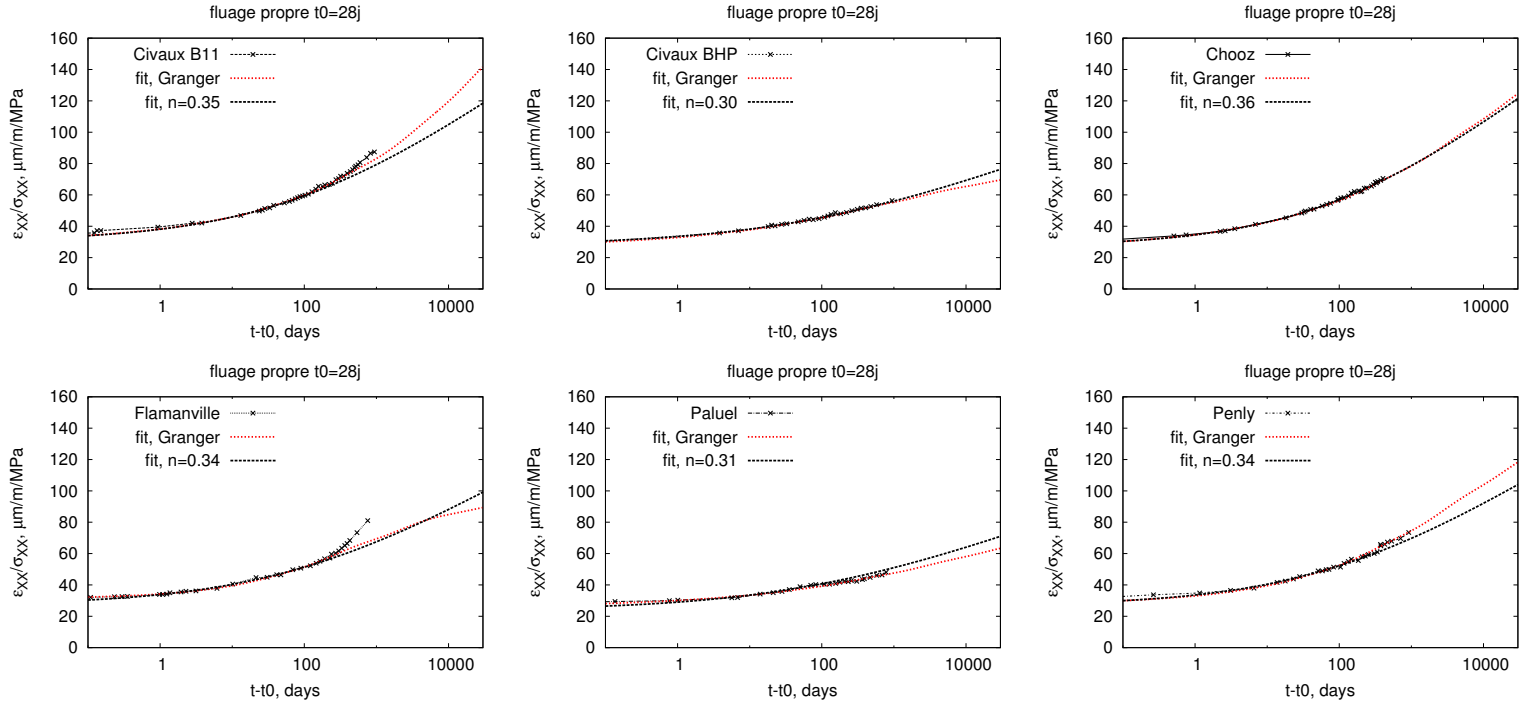


FIGURE 4.3 – La complaisance simplifiée du modèle B3 est ajustée aux résultats expérimentaux de Granger (Granger, 1995). La série de chaînes de Kelvin ajustée par Granger est affichée en rouge.

contraintes à l'instant t. On a vu qu'une modification est nécessaire pour éviter que le module de Young à long terme ne soit trop important :

$$\frac{1}{v(t)} = \max\left(\frac{0,4}{E_{28}\ln(1+0.01^n)}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{t}}+0.29*(w/c)^4}{\sqrt{\frac{1}{28}}+0.29*(w/c)^4}\right); \frac{\frac{1}{1.1}-0.6}{E_{28}\ln(1+0.01^n)}\right)$$

Le module de Young $E(t)$ est directement lié à la fonction de vieillissement $v(t)$:

$$\frac{1}{E(t)} = \frac{0.6}{E_{28}} + \frac{1}{v(t)}\ln(1+0.01^n)$$

On a donc ainsi :

$$\frac{1}{E(t)} = \frac{1}{E_{28}}\max\left(0.6+0.4\frac{\sqrt{\frac{1}{t}}+0.29*(w/c)^4}{\sqrt{\frac{1}{28}}+0.29*(w/c)^4}; \frac{1}{1.1}\right)$$

L'évolution du module de Young prévue par le modèle B3 dépend uniquement du rapport w/c. Mais cette dépendance n'est que symbolique dans la mesure où le rapport w/c est élevé à la puissance quatrième. Ainsi, si l'on s'en tient au modèle B3, tous les bétons présentent la même évolution du module de Young au cours du temps. Or on sait que cette évolution est fortement influencée par la composition du ciment et par l'histoire de température au jeune âge. Ce défaut est partiellement corrigé par le modèle B4, qui fait la distinction entre les ciments de type R (normal ou rapide), RS (rapide à haute résistance) ou SL (lent). Seul le rapport entre le module de Young dynamique et le module de Young à 28 jours est modifié : il vaut 0.7 pour le type R, 0.6 pour le type RS et 0.8 pour le type SL. En pratique, l'évolution du module de Young gagnerait à être déduite d'un modèle d'hydratation fournissant le module de Young d'un matériau cimentaire au cours du temps comme le fait le logiciel Vi$(Ca)_2$T (Le Pape et al., 2009, 2014).

4.2 Estimations des complaisances des bétons des enceintes

4.2.1 Estimation des paramètres d'entrée

Dans cette section, on utilise le schéma de Mori-Tanaka pour estimer la déformation différée des bétons des différentes centrales. Les entrées utilisées ont déjà été publiées dans les thèses de Granger (Granger, 1995) et dans la thèse de Verdier (Verdier, 2001). On utilise les données sur la composition du béton (Tab. 4.2) et des mesures du module de Young à 1 an (Tab. 4.3). Les données des formulations étant constituées de proportions massiques, on estime la fraction volumique des granulats en supposant une densité de 3.15 pour le ciment et de 2.65 pour les granulats. Il est tenu compte d'une fraction volumique d'air occlus. Cette fraction volumique des granulats est aussi diminuée des fines, particules de moins de 100μm, qui forment une phase de la matrice cimentaire.

Ne disposant pas des propriétés mécanique de la matrice cimentaire, on ne s'appuie ici que sur le module de Young du béton et sur le paramètre w/c pour

estimer les propriétés mécaniques de la matrice. Plusieurs façons d'estimer les propriétés de la matrice cimentaires peuvent être comparées :

- Connaissant le module du béton et les propriétés élastiques des granulats ainsi que leur fraction volumique, on peut calculer de manière inverse un module de Young équivalent de la matrice cimentaire en utilisant le schéma de Mori-Tanaka. L'hypothèse est faite d'un coefficient de Poisson de 0.2 pour la matrice cimentaire. Des défauts tels qu'une auréole de transition auraient ainsi pour conséquence un module équivalent plus faible.
- En faisant l'hypothèse que le comportement de la matrice cimentaire est uniquement fonction du rapport w/c, on peut déduire le module de la matrice cimentaire (Haecker et al., 2005) (Tab. 1.2) :

  $$E_m(w/c) = (1 - 2.04(w/c - 0.51))E_m(0.51)$$

  Le module de Young de la matrice trouvé à l'étape précédente est de $E_m(0.51) = 16.7$GPa en moyenne, Civaux BHP étant exclu. La moyenne du rapport e/c correspondant est de 0.51. Le rapport w/c du béton de Civaux BHP n'est pas très significatif car la fumée de silice participe à l'hydratation et à la qualité du béton. Cette relation ne peut donc pas être utilisée pour estimer le module de Young de la matrice cimentaire de Civaux BHP. Le module de Young trouvé ne peut pas prendre en compte l'existence d'une auréole de transition.
- Le dernier moyen d'estimer la raideur de la matrice cimentaire à 28 jours est d'utiliser la relation $E_{m,28} = 226 f_{c28}$ de de Larrard (de Larrard, 1999; Roy, 1995) qui s'appuie sur la résistance à la compression à 28 jours f_{c28}. On trouve alors des raideurs très inférieures à celle estimée par le schéma de Mori-Tanaka. Cela est naturel, dans la mesure où le schéma trisphère augmente la raideur macroscopique estimée par rapport au schéma de Mori-Tanaka. En outre, la matrice cimentaire est plus raide que la pâte de ciment prédite par la relation de de Larrard du fait des fines. Enfin, cette formule permet l'estimation de la raideur à 28 jours $E_{m,28}$. Pour corriger cela, on multiplie ces raideurs par un facteur de 1.57 pour rétablir la moyenne des raideurs à $E(0.51) = 16.7$GPa. On remarque alors que les raideurs obtenues de cette façon sont proches des raideurs estimées en utilisant le rapport w/c (Tab. 4.3).

Pour définir le module de Young de la matrice cimentaire à un an, on utilisera la valeur la plus faible obtenue par les deux premières méthodes décrites ci-dessus. Les cas pour lesquels les valeurs sont les plus distinctes sont Flamanville et Penly. Dans le premier cas, le module obtenu par le schéma de Mori-Tanaka est significativement plus faible que celui estimé en utilisant le rapport w/c. Cela pourrait marquer une auréole de transition. Dans le second cas, c'est l'inverse : compte tenu du rapport w/c du béton considéré, la raideur mesurée du béton est très élevée.

Une fois le module de Young de la matrice cimentaire à un an $E_m(365)$ estimé, on se conforme à la complaisance du modèle B3. Le module de Young à 28 jours vaut donc $E_m(28) = E_m(365)/1.1$. Pour la matrice cimentaire, le coefficient de Poisson est supposé constant, de valeur 0.2.

Le paramètre n de la complaisance du modèle B3 est fixé à $n = 0.247$, indépendamment du rapport w/c. Pour s'en convaincre, on peut faire une étude d'homogénéisation à l'échelle de la pâte de ciment, comme celle présentée à

w/c	0.45	0.48	0.5	0.52	0.55	0.58
anhydre	0,072	0,070	0,067	0,066	0,063	0,062
portlandite	0,147	0,141	0,138	0,135	0,127	0,126
ettringite	0,066	0,064	0,062	0,061	0,057	0,057
C-S-H	0,516	0,497	0,485	0,473	0,448	0,442
porosité	0,149	0,181	0,201	0,220	0,262	0,272
filler	0,046	0,044	0,043	0,042	0,040	0,040

TABLE 4.1 – La composition d'une pâte de ciment à 28 jours en terme de fractions volumiques, d'après le modèle d'hydratation de Jennings et Tennis (Jennings and Tennis, 1994) pour différentes valeurs de w/c. La porosité augmente avec w/c au détriment des fractions volumiques des produits d'hydratation

la section 6 en page 174. On reprend les paramètres présentés en table 3.4 à l'exception des fractions volumiques des différentes phases de la pâte de ciment. Ces fractions sont ajustées en fonction du rapport w/c en utilisant le modèle d'hydratation de Jennings et Tennis (Jennings and Tennis, 1994). Elles sont prises égales à celles obtenues à 28 jours (Tab. 4.1). La composition de Bogue du ciment est égale à celle du ciment CPA HP PM de Saint Vigor de la thèse de Granger (Granger, 1995), p.57. La déformation différée de la pâte de ciment est alors estimée à l'aide du schéma de Mori-Tanaka pour différentes valeurs du rapport w/c. Enfin, les paramètre E et n de la fonction 4.1 sont ajustés. On trouve que le coefficient n ne varie que très peu en fonction du rapport w/c, avec une valeur typique de 0.247 (Fig. 4.4).

Tous les éléments sont donc maintenant réunis pour pouvoir estimer la déformation de fluage propre des bétons considérés pour un chargement à 1 an.

4.2.2 Résultats obtenus

Sur les six bétons étudiés par Granger

Les prévisions du schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka peuvent être comparées aux déformations de fluage propre mesurées par Granger sur six des bétons (Fig. 4.5). On remarque des écarts non-négligeables entre l'estimation et la mesure. Si la démarche d'homogénéisation parvient bien à reproduire l'amplitude des déformations différées dans certains cas (Civaux BHP, Paluel), elle peut sous-estimer les déformations de fluage propre de façon importante (Civaux B11, Chooz). On reproduit en fait le constat de Sanahuja (Sanahuja et al., 2009) : il est difficile d'estimer a priori les déformations de fluage propre d'un béton en utilisant un schéma d'homogénéisation. Les estimations proposées présentent plusieurs défauts :

- Elles ne parviennent pas à reproduire la variabilité des déformations mesurées par Granger. Les déformations estimées par l'homogénéisation ne présentent qu'une très faible disparité d'un béton à l'autre alors que les mesures de Granger peuvent présenter de grandes différences.
- L'homogénéisation ne modifie pas ou peu l'évolution des déformations différées : la complaisance homogénéisée reste proche de celle du modèle

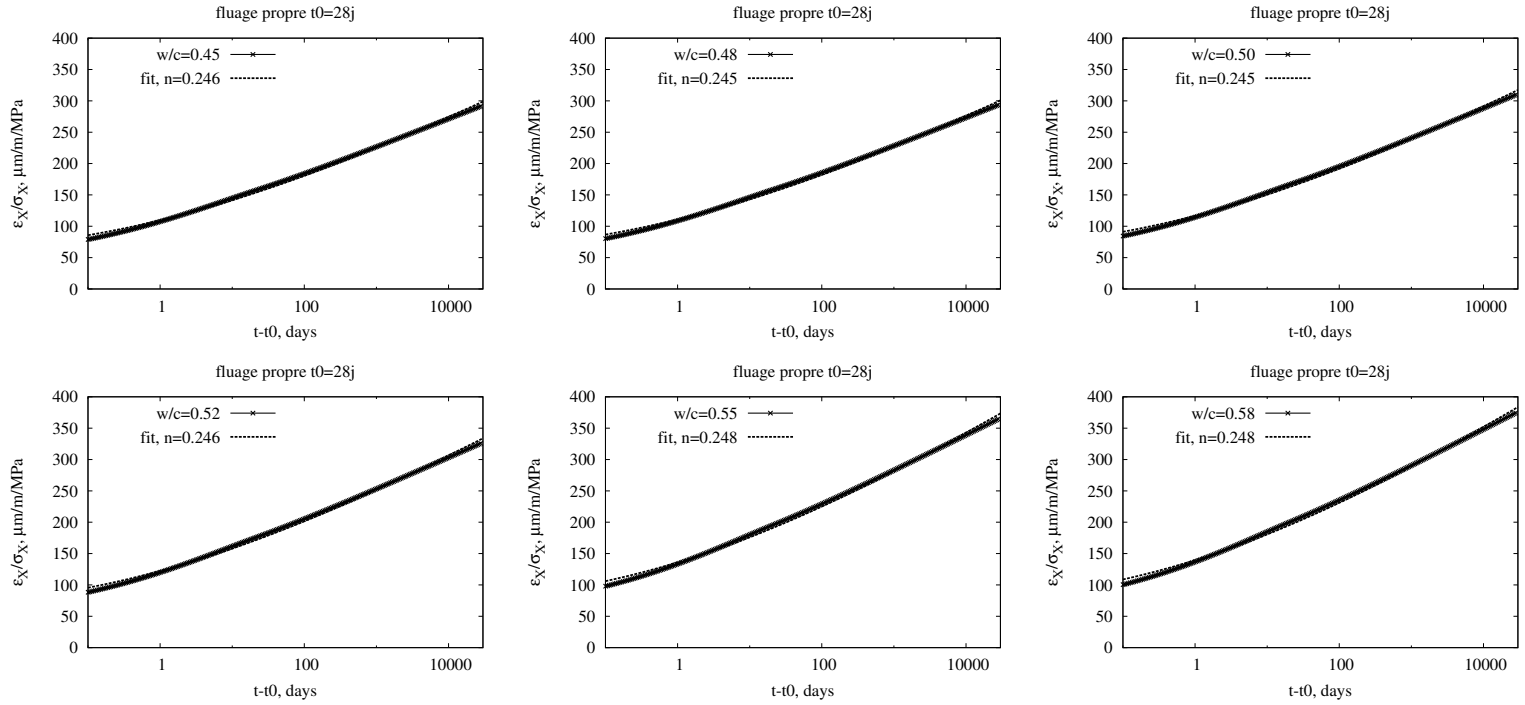


FIGURE 4.4 – La complaisance simplifiée du modèle B3 est ajustée aux déformations différées de différentes pâtes de ciment estimées par homogénéisation. Seul le paramètre w/c est modifié. Le moment de chargement est $t_0 = 28$ jours.

	flamanville P4	paluel P4	penly P'4	golfech P'4	belleville P'4	cattenom P'4	st alban P4	nogent P'4	chooz N4	civaux b11 N4	civaux BH N4
Filler kg		50	50								57
Agrégats kg	1835	1770	1714	1850	1810	1860	1845	1844	1880	1872	1915
ciment kg	375	375	350	375	375	375	375	375	350	350	266
fumée silice kg											40,3
eau L	180	180	202	185	200	180	175	190	190	195	161
masse totale	2390	2375	2316	2410	2385	2415	2395	2409	2420	2417	2439,3
densité béton	2406	2306	2276						2402	2334	2376
air occlus %	1,1	2,1	3	2	2	2	2	2	0,9	2,9	1,9
fines kg	51,8	13	10,5	50	50	50	50	50	42,9	142,8	144,7
agrégat $> 100\mu$m, kg	1783,2	1757	1703,5	1800	1760	1810	1795	1794	1837,1	1729,2	1770,3
fraction granulat	0,67	0,66	0,64	0,66	0,65	0,67	0,67	0,66	0,68	0,63	0,66
w/c	0,48	0,48	0,58	0,49	0,53	0,48	0,47	0,51	0,54	0,56	0,60

TABLE 4.2 – Paramètres de formulation des bétons d'après (Granger, 1995; Verdier, 2001). Les valeurs bleues sont des valeurs par défaut. La fraction volumique de granulats est calculée à partir de ces données.

	flamanville	paluel	penly	golfech	belleville	cattenom	st alban	nogent	chooz	civaux b11	civaux BHP
f_{c28} MPa	50,3	52,8	46,2	48,6	46,4	44,3	45,8	42	59,5		
Module 1 an béton GPa	34,4	38,4	42,2	35,4		35,7		40,2	43,3	34,6	39,5
module granulat GPa	64,4	65	65	65	65	65	65	65	72	61,4	61,4
poisson granulat	0,23	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,27	0,28	0,28
E_m, Mori-Tanaka (GPa)	13,345	17,05	21,93	14,27		14,3		18,65	18,42	15,99	19,08
E_m, w/c (GPa)	17,88	17,88	14,81	17,54	16,07	17,88	18,33	16,96	15,73	15,25	34,28
$E_{m,28}$, de Larrard (GPa)	11,37	11,93	10,44	10,98		10,49		10,01	10,35	9,49	13,44
E_m, de Larrard (GPa)	17,90	18,79	16,44	17,30		16,51		15,77	16,30	14,95	21,18
$E_{m,365}$	13,35	17,05	14,81	14,27	16,07	14,3	18,33	15,77	15,73	14,95	19,08

TABLE 4.3 – Propriétés mécaniques des bétons d'après (Granger, 1995; Verdier, 2001).

B3 utilisée à l'échelle de la pâte de ciment (eq. 4.1), avec un même temps caractéristique de 1 jour. Les mesures expérimentales peuvent être reproduites plus ou moins fidèlement par une complaisance proche du modèle B3 (eq. 4.2), mais le temps caractéristique est alors de 100 jours.

4.3 Analyse et Perspectives

Commençons par souligner que nos simulations numériques ne parviennent pas à expliquer une déformation différée dont l'évolution à long terme serait plus rapide que logarithmique. En particulier, une hétérogénéité de la matrice cimentaire, comme une auréole de transition, n'entraîne pas à elle seule une augmentation importante des déformations différées à long terme. De même, une porosité fixe dans le temps affecte les déformations instantanées et les déformations à long terme de façon similaire. Pour obtenir une évolution des déformations différées plus rapide que logarithmique, il faudrait remettre en question des hypothèses de notre étude.

Si on considère la tendance logarithmique du fluage des matériaux cimentaires comme acquise, il faudrait introduire d'autre phénomènes pour expliquer une déformation différée plus rapide que cette tendance. Parmi les pistes qui seraient alors à explorer, on peut citer une dégradation différée de l'accroche entre le granulat et la pâte de ciment ou un endommagement de la pâte de ciment dans le temps. Mais ces deux phénomènes entraîneraient une diminution du module de Young qui a priori ne chute pas. Ce module de Young peut être estimé lors des épreuves décennales pour décider de l'intêret de l'exploration de cette piste. Enfin, une autre piste est celle d'un fluage des granulats. Rappelons cependant que Granger a conduit des essais de fluage sur plusieurs types de granulats sans pouvoir observer de déformation de fluage significative (Granger, 1995). Des expériences de fluage sur des barres de granite et de gabbro sous charge pendant dix ans ont été faites (Itô and Sasajima, 1987; Ito and Kumagai, 1994). Leurs auteurs ont estimé des viscosités de l'ordre de 10^{20}Pa.s en modélisant le granite comme un liquide Maxwellien. Au bout de 60 ans, cela correspond à une déformation spécifique de l'ordre de 20μm/m/MPa. En revanche, sur la durée de 3 ans des essais de Granger, la déformation spécifique serait de 1μm/m/MPa. Cette valeur serait bien trop faible pour expliquer les différences entre les déformations différées des bétons : les déformations différées sont de l'ordre de 50 à 80μm/m/MPa au bout de trois ans.

4.4 Simulation numérique 3D d'un volume de béton sous précontrainte biaxiale

Dans cette section, on simule la réaction d'une microstructure de béton à un chargement similaire à celui rencontré dans la section courante d'une enceinte de type N4. L'objectif est d'obtenir une estimation de l'évolution de la précontrainte couplée à une indication des contraintes locales en traction, de telles contraintes pouvant être une source de dégradation de la perméabilité de l'enceinte.

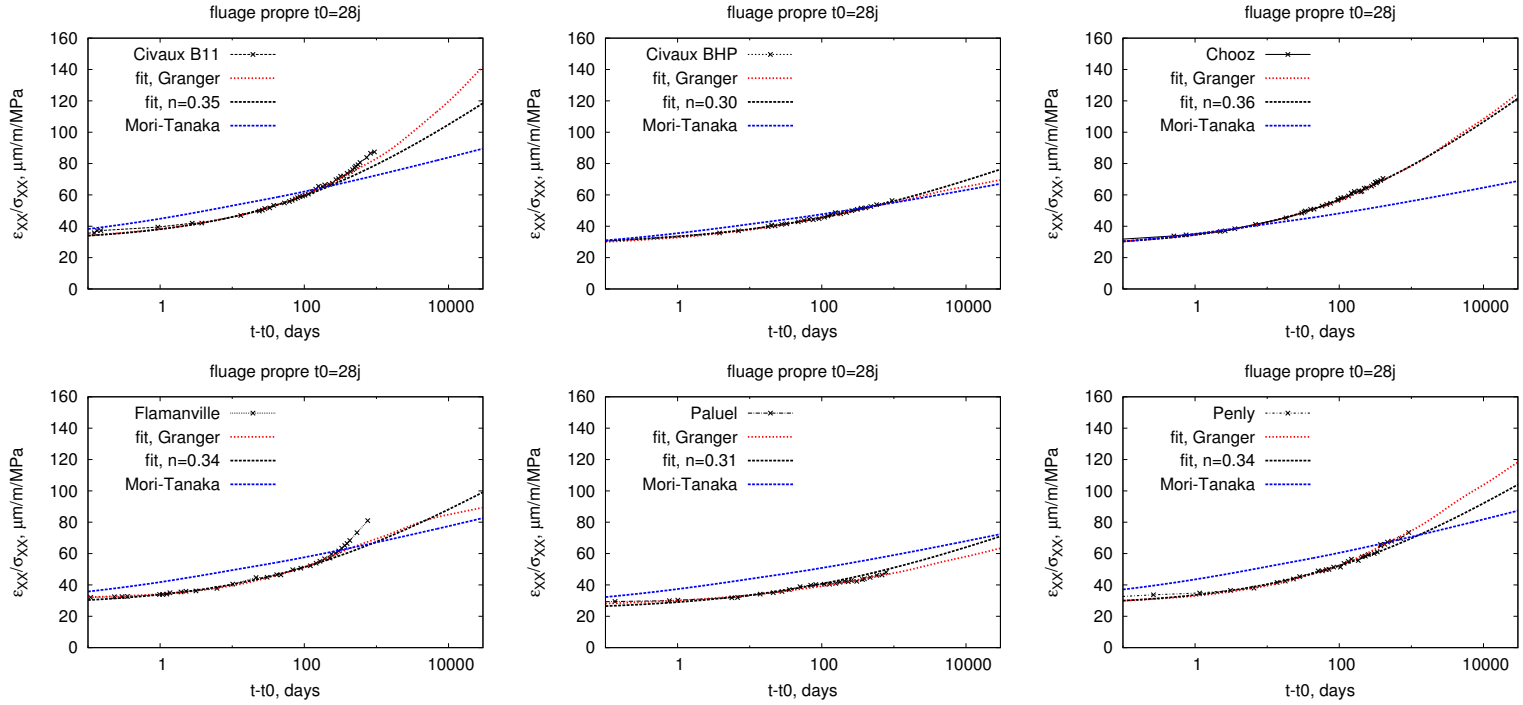


FIGURE 4.5 – Les déformations de fluage propre prévues par le modèle de Mori-Tanaka sont comparées aux mesures expérimentales de Granger (Granger, 1995).

4.5 Cadre de la simulation

4.5.1 Histoire du chargement

L'histoire de chargement considérée ne commence que quelques jours après la coulée du béton. On ne modélise pas ici la montée en température de la levée et son refroidissement qui, couplée au retrait endogène, peut entraîner un endommagement du béton(Briffaut, 2010). L'étude de ces phénomènes nécessite des approches poussées, où il faut tenir compte du fluage du béton en traction et de l'effet de la température sur ce fluage (Reviron, 2009; Briffaut, 2010). L'histoire du champ de température dans la levée doit aussi être modélisée finement, en lien avec l'hydratation du béton. On supposera pour notre étude que cette étape délicate est passée et que la microstructure est libre de contrainte à son terme. L'état de la microstructure est aussi pris comme référence pour la mesure des déformations. Pour appuyer cette hypothèse d'une microstructure libre de contrainte, on notera que les contraintes estimées par Briffaut pour ses essais de retrait gêné à l'anneau sont de l'ordre de 1MPa en traction(Briffaut, 2010).

Lors des deux premières années, la microstructure ne vas subir que les déformations liées au séchage du béton. Le retrait de la pâte du ciment sera empêché par les granulats, ce qui sera à l'origine de contraintes à l'échelle locale, dans la microstructure. On s'attend à ce que la matrice cimentaire soit en traction et les granulats en compression.

A $t_{chargement}$ =2 ans, la précontrainte $\sigma_{\theta\theta} = -12\text{MPa}$,$\sigma_{zz} = -8.1\text{MPa}$ est appliquée. Cette précontrainte va entraîner la déformation du béton. Par adhérence, la déformation des câbles de précontrainte suit celle du béton. La perte de précontrainte dans les câbles est donc :

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{\text{acier},\theta\theta} &= E_{acier}\Delta\varepsilon_{\theta\theta} \\ \delta\sigma_{\text{acier},z} &= E_{acier}\Delta\varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

où $\Delta\varepsilon_{\theta\theta}$ et $\Delta\varepsilon_{zz}$ sont les déformations macroscopiques du béton après la fin de la mise en précontrainte. La réaction élastique du béton et de l'acier et les pertes de précontrainte instantanées étant déjà prises en compte dans l'estimation $8.1 - 12\text{MPa}$, il convient de ne mesurer $\Delta\varepsilon_{\theta\theta}$ et $\Delta\varepsilon_{zz}$ qu'à partir de $t_{chargement+0.01jour}$ comme le fait Granger (Granger, 1995).

La perte de précontrainte dans le béton peut alors s'exprimer en écrivant l'équilibre de la section :

$$\begin{aligned} A_\theta\sigma_{\text{acier},\theta} + B_\theta\sigma_{\theta\theta} &= 0 \\ A_z\sigma_{\text{acier},z} + B_z\sigma_{zz} &= 0 \end{aligned}$$

où $A\theta$ et A_z représente l'aire de section d'un câble et B_θ, B_z l'aire de section de béton correspondant à un câble.

Pour une enceinte de type N4, les grandeurs B_θ et B_z sont comptées pour une épaisseur e de 1.2m (Tab. 4.4). L'intervalle entre les câbles horizontaux est de 40cm. Les câbles verticaux sont au nombre de 170 avec un diamètre intérieur de l'enceinte de 43.8m. Les câbles de précontrainte sont des 37T15, constitués de 37 torons de 139mm^2 de surface. La surface d'un câble est donc de $A_{\theta\theta} = A_{zz} = 5143\text{mm}^2$.

De plus, avant sa mise service et tout les dix ans, l'enceinte subit une épreuve en air à la pression de 4.3 bar relatif. D'après la formule du chaudronnier,

A_θ	5143mm^2
A_z	5143mm^2
B_θ	0.48m^2
B_z	0.98m^2
E_{acier}	190GPa

TABLE 4.4 – Les grandeurs géométriques dans le cas d'une enceinte de type N4.

cela correspond à un chargement supplémentaire $\sigma_{zz}^{p=4.3} = 4.03MPa$, $\sigma_{\theta\theta}^{p=4.3} = 8.06MPa$. La durée de ces épreuves (quelques jours) n'aura que peut d'effet sur les déformations différées si on considère qu'elles n'endommagent pas la structure. En revanche, on s'intéresse à l'état des contraintes locales dans la microstructure lors de ces essais. On explorera des pressions différentielles de $p = 1$bar, $p = 2$bars, $p = 3$bars et $p = 4.3$bars pour surveiller l'évolution des contraintes locales en fonction de la pression d'épreuve. Si on se fie aux calculs de thermique de Granger (Granger, 1995),p.189., la température au milieu de l'enceinte est de 22.5°C. Pour tenir compte de l'accélération des déformations différées due à une température de 22.5°C, ces épreuves sont simulées tout les 11 ans en gardant la complaisance associée à la température de référence de 20°C.

De plus, on tient aussi compte des déformations de relaxation des aciers pour les câbles. Les torons considérés sont des torons de classe 3, à très basse relaxation, de force de rupture garantie de 25.2 tonnes, soit une résistance à la traction proche de $\sigma_{\text{acier},max} = 1800$MPa. On peut estimer la tension initiale dans les aciers après la mise précontrainte :

$$\begin{array}{rcccl} \sigma_{\text{acier},\theta} & = & -\frac{B_\theta}{A_\theta}\sigma_{\theta\theta} & = & 1119\text{MPa} \\ \sigma_{\text{acier},z} & = & -\frac{B_z}{A_z}\sigma_{zz} & = & 1543\text{MPa} \end{array}$$

Notons qu'en pratique, la précontrainte du béton doit être déduite de la tension des armatures et qu'elle varie d'un point à l'autre de la structure, en fonction du tracé de la précontrainte. Cela est d'une complexité trop importante pour être exposer ici. Il faudrait tenir compte de la courbure des câbles qui induit des efforts normaux à la ligne du câble ainsi que des fortements entre le câble et la gaine, qui induisent des efforts tangeants et une précontrainte moins importante à distance des ancrages. Le phasage de la précontrainte a aussi sont importance. Ainsi, lorsqu'un câble est tendu, le béton se déforme élastiquement et les câbles déjà tendus se détendent légèrement. Ces pertes de précontraintes instantanées se sont pas modélisées ici : elles sont déjà prises en compte dans l'estimation de la précontrainte $\sigma_{\theta\theta} = -12$MPa,$\sigma_{zz} = -8.1$MPa.

La tension initiale dans les aciers vaut donc $\sigma_{\text{acier},\theta}/\sigma_{\text{acier},max} = 65\%$ de la résistance à la traction pour les câbles horizontaux et $\sigma_{\text{acier},z}/\sigma_{\text{acier},max} = 82\%$ de la résistance à la traction pour les câbles verticaux. Ce rapport entre dans l'estimation des pertes de précontrainte par relaxation. Ainsi, dès 1964, pour des aciers normaux, on a la formule de Magura et. al. (Magura et al., 1964) :

$$\frac{\sigma_{\text{acier}}(t)}{\sigma_{\text{acier}(0)}} = 1 - \frac{\ln(t)}{10}\left(\frac{\sigma_{\text{acier}}(0)}{\sigma_{\text{acier},max}} - 0.55\right) \qquad \text{si } \frac{\sigma_{\text{acier}}(0)}{\sigma_{\text{acier},max}} > 0.55$$

où $\sigma_{\text{acier}}(t)$ est la relaxation de l'acier suite à un échelon de déformation à $t = 0$. Dans cette expression, le temps t est en heures.

$\sigma_{\text{acier}(0)}/\sigma_{\text{acier},max}$	ρ_1
60%	1%
70%	2%
80%	5%

TABLE 4.5 – La relaxation à 1000h ρ_1 pour différentes chargements $\sigma_{\text{acier}(0)}/\sigma_{\text{acier},max}$ d'après (du Béton, 1991).

Les traitements thermiques réduisent la relaxation des aciers et plusieurs catégories sont définies par le modèle de la CEB(du Béton, 1991), étendu par Bažant et Yu (Bažant and Yu, 2013) :

$$\frac{\sigma_{\text{acier}}(0) - \sigma_{\text{acier}}(t)}{\sigma_{\text{acier}}(0)} = \rho_1 \left(\frac{t}{1000}\right)^k$$

avec $k = 0.19$ pour les câbles à très basse relaxation. Le temps t est toujours en heures. La relaxation à 1000h ρ_1 dépend du rapport $\sigma_{\text{acier}(0)}/\sigma_{\text{acier},max}$ (Tab. 4.5).

Au bout de 60 ans à 20°C, la perte de précontrainte par relaxation peut donc être estimée : elle est de 5% avec $\rho_\theta = 1.5\%$ pour les câbles horizontaux et de 18% avec $\rho_z = 5.5\%$ pour les câbles verticaux. Cette estimation est erronée de plusieurs façons :

- La loi CEB1990 est ici utilisée sur de très longues durées et Bažant et Yu (Bažant and Yu, 2013) ont montré que cette loi présente des défauts importants à long terme : les courbes de relaxation pour différents niveaux de chargement peuvent se croiser. Le modèle CEB1990 stipule que cet estimation des pertes par relaxation est utilisable sur 30 ans. Pour des durées de cinquante ans ou plus, la relaxation est limitée à trois fois la relaxation à 1000 heures.
- L'influence de la température peut être traitée de façon similaire au béton, via une énergie d'activation. La relaxation des aciers de précontrainte est beaucoup plus sensible à la température que le comportement du béton, avec une énergie d'activation de l'ordre de 14600K. Un câble chargé pendant 60 ans une température de 22.5°C a un âge équivalent à 91 ans à la température de référence de 20°C. Les pertes de précontrainte estimées sont alors de l'ordre de 5% pour les câbles horizontaux et 19% pour les câbles verticaux.

4.5.2 Chargement imposé à la microstructure

Le chargement imposé à la microstructure est double. D'une part, on prend en compte les pertes de précontrainte pour imposer une contrainte macroscopique de compression qui diminue dans le temps. D'autre part, le retrait de la pâte de ciment se traduit par une pré-déformation dans la matrice cimentaire. Les effets de la dilatation ne sont pas pris en compte : on fait l'hypothèse que les coefficients de dilatation de la matrice cimentaire, des granulats et des câbles de précontrainte sont identiques. La déformation libre qui en résulte n'entraîne donc pas de contrainte ou de variation de la précontrainte. Cette déformation est mesurable sur les enceintes : elle se traduit par une élongation de l'ordre de 100μm/m lors de la mise en route du réacteur.

Retrait de la pâte de ciment

Le retrait de séchage est estimé en utilisant le modèle B3 (Bažant and Baweja, 1995a; ACI, 2008). A l'âge t après la fin de la cure t_c, la déformation de retrait vaut pour les bétons à l'air libre :

$$\varepsilon_{sh}(t) = -\varepsilon_{sh,\infty}(1-h^3)S(t-t_c)$$

où $\varepsilon_{sh,\infty}$ est la valeur ultime du retrait, h est l'humidité relative et $S(t-t_c)$ traduit l'évolution des déformations dans le temps. La déformation ultime $\varepsilon_{sh,\infty}$ est donnée par :

$$\varepsilon_{sh,\infty} = 1.08\varepsilon_\infty\sqrt{\frac{4+0.85(t_c+\tau_{sh})}{t_c+\tau_{sh}}}$$

où le temps de cure t_c sera petit devant le temps caractéristique de séchage τ_{sh}. Pour des ciments type R (ou I) et pour une cure à 100% d'humidité relative, ε_∞ vaut :

$$\varepsilon_\infty = -\left(0.019w^{2.1}f_{c28}^{-0.28}+270\right) \qquad \mu\text{m/m}$$

où w est la masse d'eau par mètre cube de béton, en kg et f_{c28} est la résistance à la compression à 28 jours en MPa. La dépendance en temps est donnée par la fonction $S(t-t_c)$:

$$S(t-t_c) = \tanh\left(\sqrt{\frac{t-t_c}{\tau_{sh}}}\right)$$

où le temps caractéristique de séchage vaut :

$$\tau_{sh} = 0.085t_c^{-0.08}f_{c28}^{-0.25}(e)^2 \qquad \text{jours}$$

où le temps de cure t_c est en jours, f_{c28} en MPa et l'épaisseur du mur e en millimètres.

On applique ces formules avec les valeurs répertoriées dans le tableau 1 pour estimer les déformations différées du béton. Le temps caractéristique trouvé est de $\tau_{sh} = 44000$ jours et la déformation ultime de $\varepsilon_{sh,\infty} = -603\times10^{-6}$. A l'échelle de la microstructure, ce retrait est le fait de la pâte de ciment. Elle se voit donc affectée une pré-déformation de $3\varepsilon_{sh}(t)$, le facteur 3 correspondant au ratio du module de Young du béton sur celui de la matrice cimentaire.

La valeur ultime $\varepsilon_{sh,\infty}$ de la déformation peut être ajustée sur les résultats expérimentaux de Granger (Granger, 1995) p. 222 pour mieux tenir compte des différences entre les bétons des sites.

Prise en compte des pertes de précontrainte

Si l'unique objectif est d'estimer les déformations différées, on peut facilement en obtenir un majorant en maintenant la contrainte biaxiale imposée à la valeur initiale de $\sigma_{\theta\theta} = 12$MPa et $\sigma_{zz} = 8.1$MPa. Pour obtenir une estimation plus précise, on peut actualiser le chargement en tenant compte des pertes de précontrainte, comme cela est fait par Granger (Granger, 1995). En outre, cela

est indispensable si on souhaite observer l'effet des pertes de précontrainte sur les contraintes locales atteintes en épreuve. La déformation de référence ε^{ref} utilisée pour calculer les pertes de précontraintes est mesurée 0.01 jours après le chargement t_{load}. Au pas de temps t_i postérieur à t_{load}, la précontrainte biaxiale macroscopique imposée σ^i est :

$$\begin{aligned}\sigma^i_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}(1-\rho_\theta(\tfrac{91}{60}\tfrac{t-t_{load}}{1000})^k) - \tfrac{A_\theta}{B_\theta}E_{\text{acier}}(\varepsilon^{i-1}_{\theta\theta}-\varepsilon^{ref}_{\theta\theta})\\ \sigma^i_{zz} &= \sigma_{zz}(1-\rho_z(\tfrac{91}{60}\tfrac{t^i-t_{load}}{1000})^k) - \tfrac{A_z}{B_z}E_{\text{acier}}(\varepsilon^{i-1}_{zz}-\varepsilon^{ref}_{zz})\end{aligned}$$

avec $\rho_\theta = 1.5\%$ et $\rho_z = 5.5\%$. On distingue bien dans cette expression les pertes liées à la relaxation des câbles et celles liées au fluage du béton.

4.5.3 Une surveillance des contraintes locales

La simulation numérique 3D permet d'estimer la perte de précontrainte macroscopique, mais aussi les contraintes locales à l'intérieur de la microstructure. Pour synthétiser l'information sur ces contraintes locales, nous devons définir des indicateurs pertinents sur le plan de la mécanique. L'objectif est de répondre à deux questions :

- Quelle est l'amplitude des efforts locaux dans la matrice cimentaire ?
- Si des tractions ou des extensions apparaissent dans la pâte de ciment, quelle serait l'orientation des micro-fissures ouvertes ?

Pour répondre à ces questions deux indicateurs peuvent être surveillés, en lien avec les modèles d'endommagement développés pour le béton. Le modèle de Mazars (Mazars, 1984; Kondo et al., 2007; Mazars et al., 2014) s'appuie ainsi sur les déformations principales en traction $\sqrt{\sum(<\varepsilon>^+)^2}$ pour définir le déclenchement de l'endommagement dans les milieux élastiques. D'autres choix seraient possibles, comme la plus grande contrainte principale en traction $<\sigma>^+$ (critère de Rankine) utilisée par le modèle du logiciel *Code_Aster* pour prévoir les effets de la réaction alcali-granulat dans les bétons (De Bonnieres, 2013). Ce critère de Rankine peut être combiné avec un critère de Drucker-Praguer(Benboudjema et al., 2005) pour obtenir une résistance finie en compression uniaxiale.

Pour coupler le modèle d'endommagement de Mazars avec la viscoélasticité, le critère n'est plus calculé à partir des déformations différées totales. On peut ainsi faire le choix de soustraire une partie des déformations de fluage ε_v comptabilisées dans les variables internes. Le critère porte alors sur $<\varepsilon-\beta\varepsilon_v>^+$ où le scalaire β vaut de l'ordre de 0.1 à 0.2 (Mazzotti et al., 2001; Reviron et al., 2007; Torrenti et al., 2008; De Larrard, 2010). On peut aussi définir la déformation utilisée dans le critère ε_R en s'appuyant sur la contrainte effective $\sigma(t)$, par le biais d'une raideur de référence $\mathbf{C}_R(t)$ (Park et al., 1996; Thai, 2012; Thai et al., 2014) :

$$\varepsilon_R(t) = \mathbf{C}_R(t)^{-1} : \sigma(t)$$

Cette raideur est prise égale à la raideur élastique du matériau à l'instant t :

$$\mathbf{C}_R(t) = \mathbf{C}(t,t)$$

Cela permet de retrouver le modèle de Mazars dans le cas d'un matériau élastique. A l'échelle du béton, la déformation seuil d'endommagement ε_{d0} est comprise entre 50×10^{-6} et 150×10^{-6} (Hamon, 2013). Dans leurs simulations numériques d'endommagement des pâte de ciment due au gel, Hain et Wriggers (Hain and

Wriggers, 2008) déclenchent l'endommagement lorsque la trace de la déformation dépasse 4000×10^{-6}. La différence entre ces critères est importante. Néanmoins, la résistance à la traction des mortiers ne semblent pas sensiblement supérieure à celle des bétons (Chen et al., 2013). La raideur de la matrice cimentaire étant du tiers de celle du béton, on pourrait donc lui affecter une déformation seuil d'endommagement entre 150×10^{-6} et 450×10^{-6}. La différence entre les critères est aussi liée à la sensibilité des modèle numériques d'endommagement au maillage. Ainsi, la déformation seuil d'endommagement est souvent adaptée pour conserver une énergie de fissuration indépendante de la taille de maille(Matallah et al., 2010; Grondin and Matallah, 2014). Plus le maillage est fin, plus le seuil d'endommagement est élevé. Il est intéressant de noter que la déformation liée à l'ouverture de fissure estimée par Matallah et. al. est proportionnelle à l'endommagement d'une part et à la contrainte d'autre part(Matallah et al., 2010).

L'indicateur retenu pour notre étude s'appuie sur la contrainte locale, via la définition de la déformation de référence $\varepsilon_R(x,t)$ pour chaque point x dans la matrice cimentaire.

$$\varepsilon_R(x,t) = \mathbf{C}(t,t)^{-1} : \sigma(x,t)$$

Dans le cas où on utilise le modèle de fluage B3, la partie purement élastique $\mathbf{C}(t,t) = \mathbf{C}_0$ ne varie pas dans le temps. Son inverse $\mathbf{C}_0^{-1}$ représente toujours 60% de la complaisance mesurée à 28 jours après 0.01 jours de chargement. La déformation $\varepsilon_R(x,t)$ peut être écrite sur une base propre :

$$\varepsilon_R(x,t) = \varepsilon_1.e_1 \otimes e_1 + \varepsilon_2.e_2 \otimes e_2 + \varepsilon_3.e_3 \otimes e_3$$

où ε_1, ε_2 et ε_3 sont les déformations principales. Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 forment ici une base orthonormée de l'espace. En pratique, la fonction `dsyev()` de la librairie LAPACK est utilisée pour obtenir les valeurs de ε_1, ε_2, ε_3, e_1, e_2 et e_3. Pour jauger la possibilité d'un endommagement, comme pour le critère de Mazars, on peut s'intéresser au scalaire ε_d défini par :

$$\varepsilon_d(x) = \sqrt{(<\varepsilon_1>^+)^2 + (<\varepsilon_2>^+)^2 + (<\varepsilon_3>^+)^2}$$

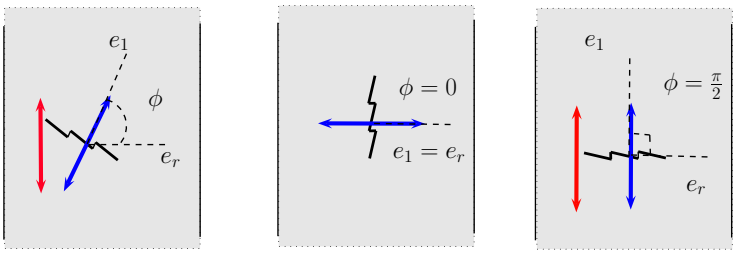


FIGURE 4.6 – L'indicateur ε_f dépend de l'angle ϕ entre l'axe e_1 d'une déformation principale positive $\varepsilon_1 > 0$ et la normale au mur e_r pour tenir compte de l'orientation de la famille de micro-fissures correspondantes.

Du point de vue de l'étanchéité, l'ouverture de micro-fissures de normale e_r est moins grave que celle de micro-fissures de normale e_θ ou e_z. En effet, les micro-fissures de normales e_θ ou e_z peuvent être vues comme des chemins

privilégiés pour la diffusion d'un produit de l'intérieur de l'enceinte interne vers l'espace entre-enceinte. Par ailleurs, on peut faire l'hypothèse qu'une déformation principale positive ε_1 selon $e_1 \otimes e_1$ permet d'ouvrir un réseau de micro-fissures dont la normale est proche de e_1. Un indicateur scalaire $\varepsilon_f(x)$ est donc construit pour tenir compte de la direction des déformations équivalentes principales :

$$\varepsilon_f(x) =< \varepsilon_1 >^+ .\sqrt{1-(e_1.e_r)^2} + < \varepsilon_2 >^+ .\sqrt{1-(e_2.e_r)^2} + < \varepsilon_3 >^+ .\sqrt{1-(e_3.e_r)^2}$$

La fonction $\sqrt{1-(e_1.e_r)^2}$ est choisie car elle correspond au sinus de l'angle entre e_1 et e_r (Fig. 4.6). L'indicateur $\varepsilon_f(x)$ est une fonction positivement homogène de degré un de la contrainte ou de la déformation de référence, au même titre que l'ouverture de fissure estimée dans (Matallah et al., 2010).

Finalement, des indicateurs macroscopiques $\varepsilon_f(\sigma)$ et $\varepsilon_d(\sigma)$ sont définis respectivement comme les moyennes volumiques de $\varepsilon_d(x)$ et $\varepsilon_f(x)$. En pratique, on pondère cette moyenne par la fraction volumique locale de matrice cimentaire pour les voxels à cheval sur la matrice et les inclusions. On remarque que ces indicateurs sont des fonctions positivement homogènes de degré 1 du champ de contrainte. En effet, si le champ de contrainte est multiplié par $\lambda > 0$ en tout point, il en va de même pour la déformation de référence $\varepsilon_R(x)$. Ces valeurs propres sont aussi aussi multipliées par λ et les vecteurs propres restent identiques. On a donc bien :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d(\lambda\sigma) &= \lambda\varepsilon_d(\sigma) \qquad \forall\sigma, \lambda > 0 \\ \varepsilon_f(\lambda\sigma) &= \lambda\varepsilon_f(\sigma) \qquad \forall\sigma, \lambda > 0 \end{aligned}$$

On peut surveiller ces indicateurs au cours des différentes épreuves subies par l'enceinte, et pour des pressions d'épreuve différentes.

4.6 Les résultats de la simulation numérique 3D

4.6.1 Contraintes et déformations macroscopiques

La simulation numérique 3D permet d'estimer les contraintes et les déformations macroscopiques du volume élémentaire représentatif considéré. On obtient ainsi en fonction du temps sur la figure 4.7 :

- La contrainte macroscopique, qui va traduire la perte de précontrainte au cours du temps.
- La déformation différée estimée, qui peut être comparée aux données d'auscultation.

Influence de la discrétisation spatiale et de la géométrie des granulats

Pour étudier l'influence de la discrétisation spatiale, un VER cubique de 40 mm de coté contenant 64% d'inclusions polyédriques a été construit à l'aide de l'algorithme RSA puis discrétisé sur des grilles régulières de tailles $N = 128$ et $N = 384$ (Fig. 4.8). On observe que la perte de précontrainte estimée ne varie que très peu en fonction de la taille de la grille (Fig. 4.8). La déformation différée est moins importante lorsqu'on augmente la finesse de la discrétisation spatiale. Cela est dû à l'utilisation de la borne inférieure de Reuss pour définir le comportement des voxels à cheval sur la matrice cimentaire et le granulat.

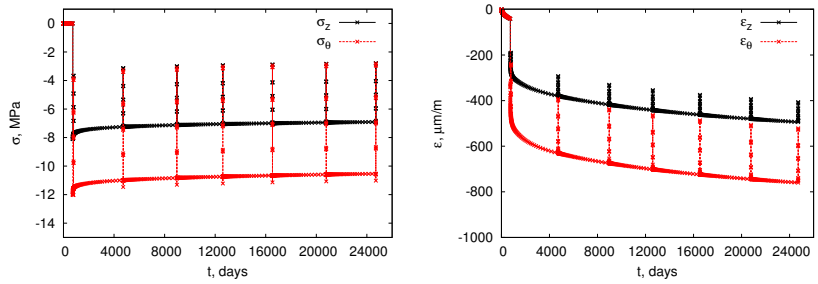


FIGURE 4.7 – Évolution estimée de la contrainte et de la déformation macroscopique en fonction du temps. A gauche, sur les composantes σ_z et σ_θ, on observe la mise en précontrainte, les épreuves décennales et la perte de précontrainte au cours du temps. A droite, sur la déformation différée, on peut voir le retrait avant le chargement, la déformation élastique et la déformation en épreuve.

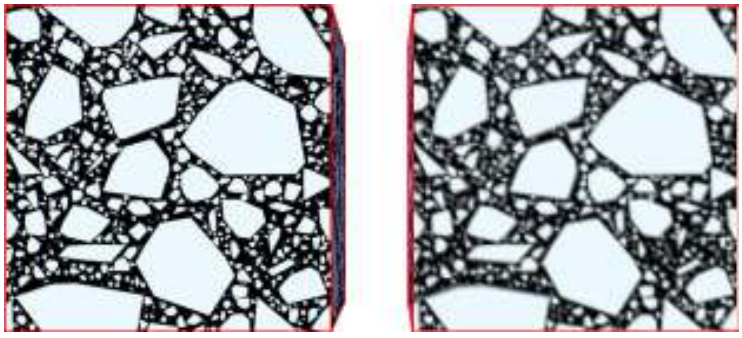


FIGURE 4.8 – La microstructure contenant 64% d'inclusions polyédriques est dicrétisée sur des grilles de taille $N = 384$ (gauche) et $N = 128$ (droite)

Pour évaluer l'influence de la géométrie des granulats, une microstructure contenant 64% d'inclusions sphériques est fabriquée à l'aide de l'algorithme de Lubashevky et Stillinger (Lubachevsky and Stillinger, 1990) (Fig. 4.9). La granulométrie est plus resserrée que celle employée pour fabriquer la microstructure à base d'inclusions polyédriques. La plus petite sphère est donc beaucoup plus grosse que le plus petit polyèdre implanté dans la microstructure décrite précédemment. Cette microstructure à inclusions sphériques est discrétisée sur une grille 3D de taille $N = 128$. Les contraintes et les déformations macroscopiques estimée sont alors quasiment identiques à celles calculées sur la microstructure contenant des polyèdres discrétisée sur une grille de taille $N = 384$(Fig. 4.11). La finesse de la discrétisation est ainsi adaptée à la taille de la plus petite inclusion, qui est plus petite dans le cas des inclusions polyèdriques. Ce résultat vient encore confirmer que la granulométrie ou la forme des inclusions n'ont que peu d'effet sur les déformations différées du composite, tant que l'on suppose une adhésion parfaite entre une matrice homogène et les inclusions.

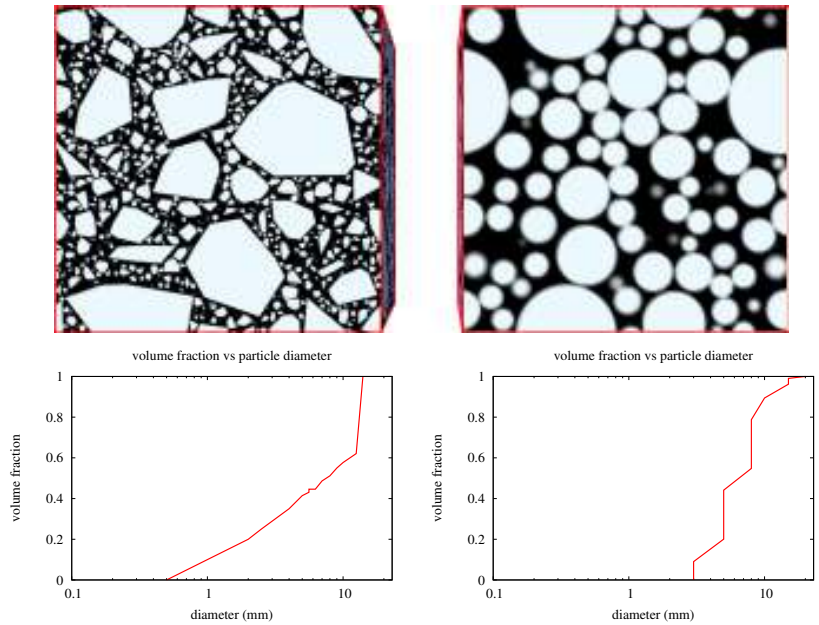


FIGURE 4.9 – A gauche : la microstructure contenant 64% d'inclusions polyédriques est dicrétisée sur des grilles de taille $N = 384$. A droite : une microstructure contenant 64% d'inclusions sphériques et discrétisée sur une grille de taille $N = 128$. Les granulométries correspondantes sont présentées en dessous.

Estimations de la perte de précontrainte

Pour chaque épreuve et pour chaque pression, on a donc une estimation de l'état de contrainte et de déformation macroscopique. La raideur de la matrice ou la déformation de retrait imposée pourraient être modifiées pour accorder la déformation différée estimée et les mesures issues du dispositif d'auscultation. Les valeurs obtenues par ces calculs laborieux sont néanmoins similaires à celles estimées par Granger (Granger, 1995), p322 (Tab. 4.6) : la perte de précontrainte verticale estimée ici est légèrement supérieure et la perte de précontrainte circonférentielle légèrement inférieure. Cela peut être expliqué par la prise en compte de la relaxation des câbles, plus importante pour les câbles verticaux. L'intérêt des calculs numériques 3D réside dans la possibilité d'obtenir des renseignements sur l'état du champ de contrainte dans la matrice cimentaire.

4.6.2 Indicateurs des contraintes locales dans la microstructure

L'atout des simulations numériques 3D est de produire une estimation des contraintes locales, à l'échelle de la microstructure. Ainsi, même si le matériau reste globalement en compression biaxiale, il peut apparaître localement des contraintes principales en traction du fait de l'hétérogénéité du matériau ou du

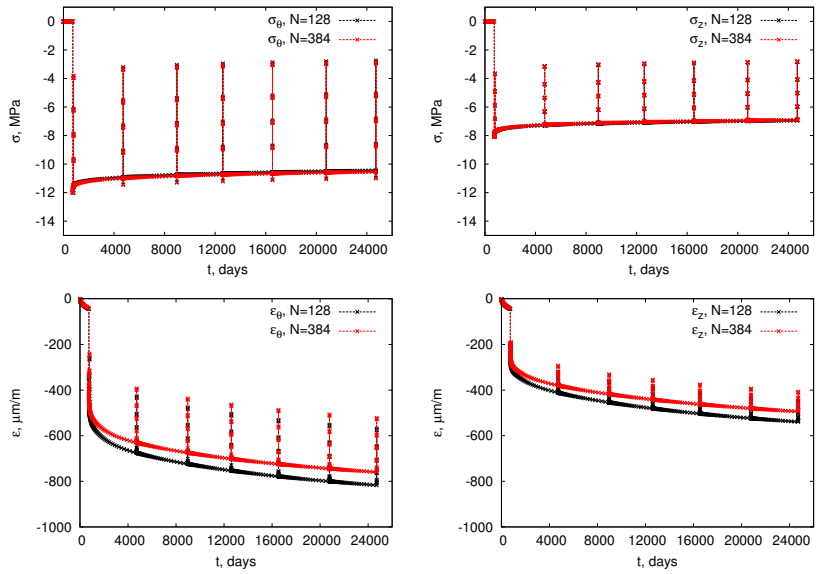


FIGURE 4.10 – Évolution estimée de la contrainte et de la déformation macroscopique en fonction du temps pour deux discrétisations spatiales (Fig. 4.8). Pour les contraintes circonférentielles $\sigma_{\theta\theta}$ à gauche comme pour les contraintes verticales σ_{zz} à droite, les contraintes macroscopiques estimées sont quasiment indépendantes de la taille de grille. En bas, les déformations différées estimées sont légèrement différentes.

retrait de la matrice cimentaire. Grâce aux calculs numériques 3D, on peut donc produire une estimation de ces contraintes locales.

Évolution des indicateurs au cours du temps

Le critère de Rankine $< \sigma >^+$, celui de Mazars ε_d et l'indicateur ε_f ont été calculés pour les deux microstructures, l'une contenant des inclusions polyédriques et l'autre des inclusions sphériques. Pour la microstructure à inclusions polyédriques, le calcul a été fait pour les deux tailles de discrétisation $N = 384$ et $N = 128$. On peut voir sur la figure 4.12 que les indicateurs ne connaissent que des variations limitées si on raffine la discrétisation ou si on change la forme des grains et la granulométrie. On voit malgré tout des indicateurs légèrement plus importants pour les polyèdres à N=384.

La première constatation à faire est qu'aucun des indicateurs $< \sigma >^+$, ε_d ou ε_f ne reste nul au cours du temps. Pour le critère de Rankine $< \sigma >^+$, cela veut dire qu'il y a des contraintes principales de traction dans la matrice qui croissent dans le temps. Cela est attendu au début de la vie du béton : avant la mise en précontrainte, le retrait de la matrice cimentaire est empêché par les granulats. Il en résulte des contraintes de traction dans la matrice et des contraintes de compression dans les granulats. Ce qui est plus intéressant est qu'il reste des contraintes de traction après que le béton soit soumis au chargement de compression biaxiale.

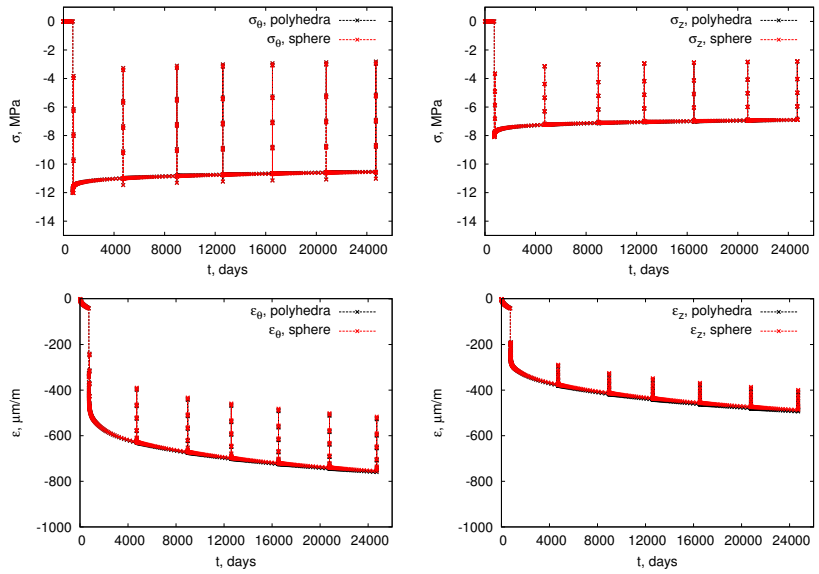


FIGURE 4.11 – Évolution estimée de la contrainte et de la déformation macroscopique en fonction du temps pour deux microstructures différentes. Pour les contraintes circonférentielles $\sigma_{\theta\theta}$ à gauche comme pour les contraintes verticales σ_{zz} à droite, les contraintes macroscopiques estimées sont quasiment indépendantes de la microstructure considérée. En bas, il en va de même pour les déformations différées.

Même si le retrait n'est pas pris en compte, il apparaît des contraintes de traction dans la matrice cimentaire lors d'un essai de fluage propre sous chargement de compression biaxiale (Fig. 4.13). Ces contraintes apparaissent dès le moment du chargement, à proximité des inclusions élastiques. Au cours du temps, la matrice cimentaire se relaxe et les inclusions portent une part de plus en plus grande du chargement. La matrice cimentaire entre les inclusions se trouve donc de plus en plus chargée et on observe une augmentation de ses contraintes en traction au cours du temps. Pour une précontrainte biaxiale 8-12 MPa, ces contraintes de traction restent inférieures à 4 MPa : on peut donc considérer que le béton ne sera pas endommagé. Ces contraintes de traction sont plus importantes dans le cas uniaxial et l'orientation de la contrainte principale en traction est très différente (Fig. 4.14). Un tel chargement pourrait être rencontré à proximité d'une singularité (TAM, traversées), les câbles de précontrainte étant déviés. Dans le cas du chargement biaxial, la contrainte principale en traction est logiquement alignée avec la direction non chargée. Dans le cas d'un chargement uniaxial, la direction de la contrainte principale en traction est fortement influencée par la normale à la surface de l'inclusion la plus proche.

Lorsque le retrait de la matrice cimentaire est pris en compte, les contraintes de traction augmentent avec le retrait et elles peuvent atteindre des valeurs importantes, localement de l'ordre de 6 MPa à 62 ans (Fig. 4.15).

	σ_θ MPa	σ_z MPa	ε_θ μm/m	ε_z μm/m
Avant précontrainte, $t = 2$ ans	0	0	-41	-41
Après précontrainte, $t = 2+$ ans	-12	-8.1	-341	-201
Essais pré opérationnel, $t = 2$ ans et 2 mois, $p = 0$ bar	-11.5	-7.8	-477	-276
Essais pré opérationnel, $t = 2$ ans et 2 mois, $p = 4.3$ bar	-4.0	-3.7	-240	-190
$1^{\text{ère}}$ Épreuve décennale $t = 12$ ans, $p = 0$ bar	-11.0	-7.2	-626	-376
$1^{\text{ère}}$ Épreuve décennale $t = 12$ ans, $p = 4.3$ bar	-3.4	-3.1	-392	-292
$2^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 22$ ans, $p = 0$ bar	-10.8	-7.1	-669	-413
$2^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 22$ ans, $p = 4.3$ bar	-3.2	-3.0	-437	-330
$3^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 32$ ans, $p = 0$ bar	-10.7	-7.1	-700	-440
$3^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 32$ ans, $p = 4.3$ bar	-3.2	-2.9	-463	-354
$4^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 42$ ans, $p = 0$ bar	-10.7	-7.0	-721	-459
$4^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 42$ ans, $p = 4.3$ bar	-3.1	-2.9	-486	-375
$5^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 52$ ans, $p = 0$ bar	-10.6	-6.9	-741	-477
$5^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 52$ ans, $p = 4.3$ bar	-3.0	-2.8	-506	-392
$6^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 62$ ans, $p = 0$ bar	-10.5	-6.9	-760	-494
$6^{\text{ème}}$ Épreuve décennale $t = 62$ ans, $p = 4.3$ bar	-2.9	-2.8	-521	-407

TABLE 4.6 – L'état de contrainte et la déformation estimé avant épreuve et la précontrainte résiduelle à la pression de 4.3 bar. Le béton de la section courante reste bien en compression tout au long de sa vie.

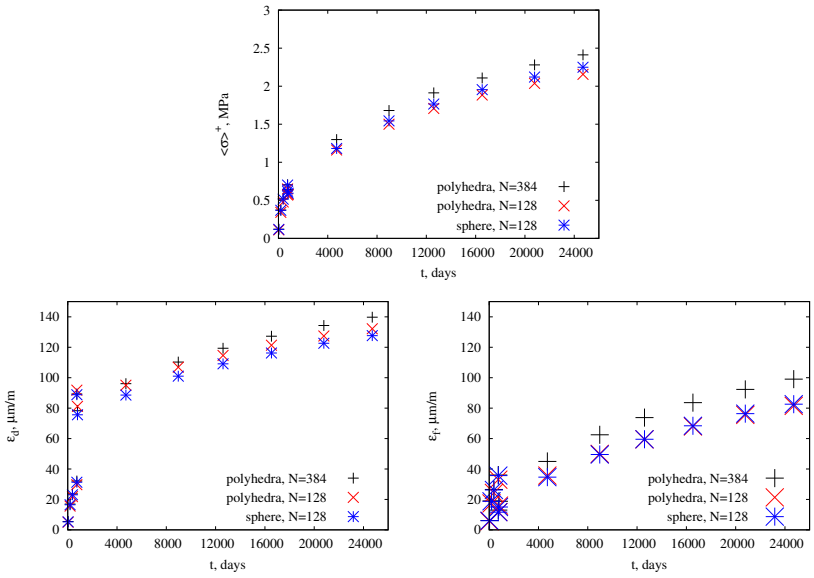


FIGURE 4.12 – Le critère de Rankine $< \sigma >^+$(haut) ainsi que le critère de Mazars ε_d (bas, gauche) et l'indicateur ε_f varient au cours du temps. Ils ne dépendent que faiblement de la finesse de la discrétisation N et de la forme des granulat.

Le retrait de la matrice cimentaire ne donne lieu à des élongations qu'à proximité des inclusions et le critère de Mazars $\varepsilon_d(x)$ reste donc assez faible pendant les deux premières années avant le chargement (Fig. 4.16). Le chargement à

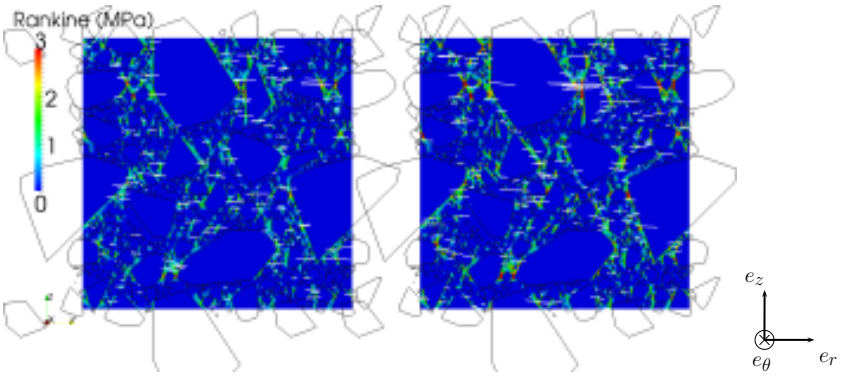


FIGURE 4.13 – Le critère de Rankine $< \sigma >^+$ dans la matrice cimentaire lors d'un essai de fluage biaxial $\sigma_{\theta\theta} = -12$ MPa, $\sigma_{zz} = -8$ MPa est évalué au moment du chargement (gauche) et 60 ans après (droite). La coupe présentée est une coupe de normale e_θ. Les lignes blanches figurent la direction de la contrainte principale, qui est quasiment alignée avec la direction radiale.

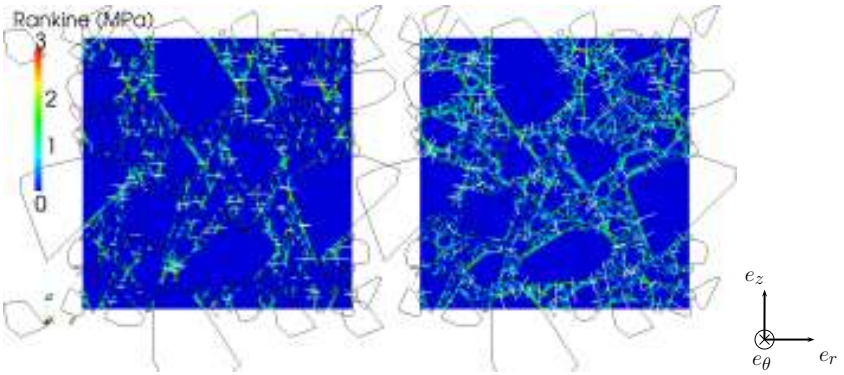


FIGURE 4.14 – Le critère de Rankine $< \sigma >^+$ dans la matrice cimentaire pour un chargement biaxial $\sigma_{\theta\theta} = -12$ MPa, $\sigma_{zz} = -8$ MPa à gauche et uniaxial $\sigma_{\theta\theta} = -10$ MPa à droite. Les lignes blanches figurent la direction de la contrainte principale, qui dépend fortement du chargement considéré. Le critère est calculé au moment du chargement et la coupe présentée est une coupe de normale e_θ.

deux ans se traduit par une augmentation du critère de Mazars $\varepsilon_d(x)$ du fait de l'effet Poisson. En effet, du point de vue macroscopique, la contrainte de compression biaxiale se traduit par une élongation ε_{rr} dans la direction radiale e_r non contrainte. Le critère de Mazars n'est peut-être pas le plus précis pour juger du risque d'endommagement dans un état de bi-compression, mais il a le mérite d'avoir une valeur non nulle. Au contraire, dans cette même situation de chargement, le critère de Rankine reste nul : on ne peut donc pas l'utiliser pour prévoir l'endommagement des structures en compression. Les valeurs rencontrées ici sont de l'ordre de 200μm/m à l'échelle dans la matrice cimentaire.

Enfin, le dernier indicateur ε_f tient compte de la direction des déformations principale. En effet, la déformation principale ε_{rr} mise en évidence par le critère de Mazars aboutirait à l'ouverture de micro-fissures de normale e_r, qui n'ont que

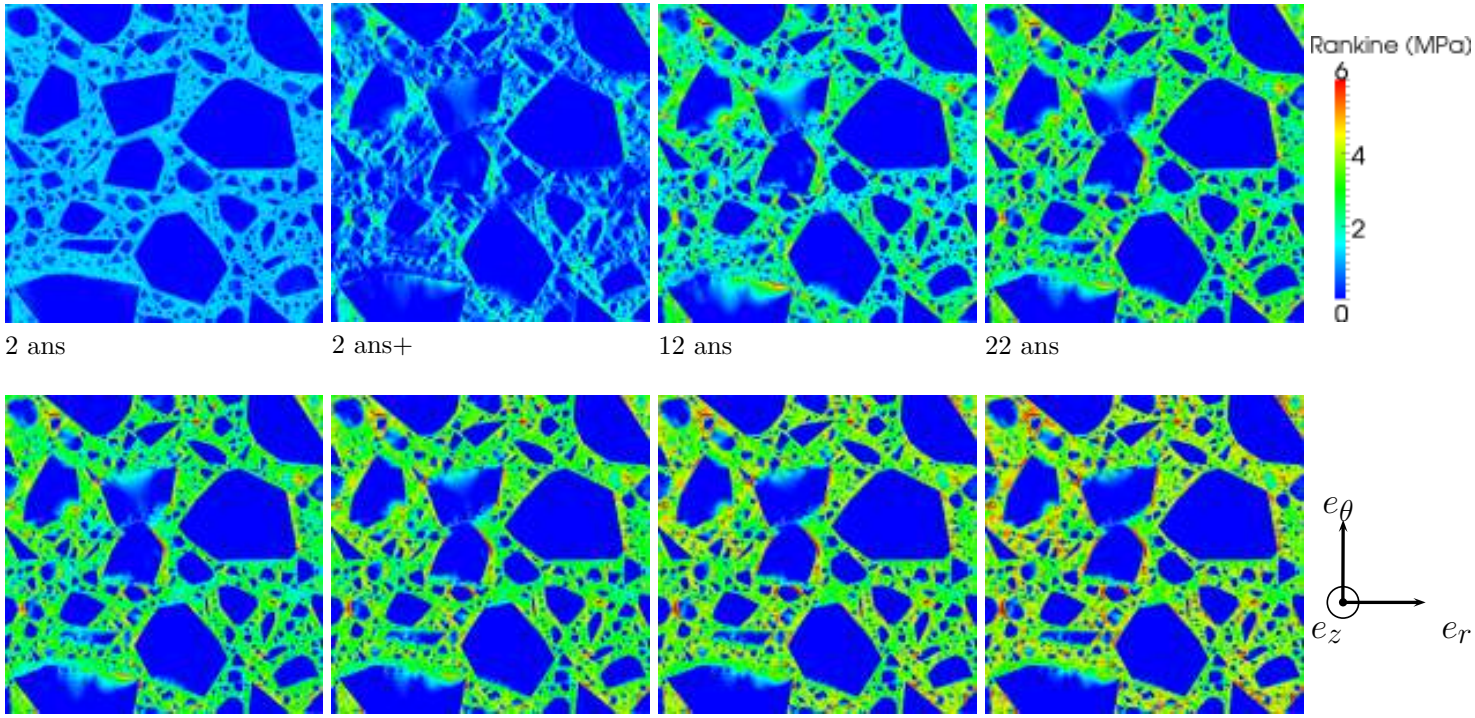


FIGURE 4.15 – Le critère de Rankine $< \sigma >^+$ évolue au cours du temps, principalement du fait du retrait de la matrice cimentaire. Le chargement à deux ans change la distribution du critère de Rankine.

peu d'intérêt si on s'intéresse à la perméabilité du béton. Notons que cet indicateur diminue au moment du chargement, là où le critère de Rankine et le critère de Mazars augmentent (Fig. 4.17). Mais, tout comme ces deux indicateurs, ε_f augmente d'une épreuve à l'autre.

L'estimation de l'état de contrainte dans la matrice cimentaire apporte ainsi une certaine cohérence à la modélisation conduite ici. Ainsi, on peut voir que les contraintes de traction dans la matrice cimentaire restent globalement inférieures à 4 MPa et que les déformations associées au critère de Mazars sont globalement inférieures à 450μm/m. Le recours à un modèle d'endommagement ne semble donc pas être imposé pour le traitement de la section courante de l'enceinte à long terme. Émettons toutefois une réserve concernant l'état initial de contrainte du matériau ou des valeurs élevées du retrait, qui pourraient conduire à de l'endommagement localisé. Le chargement peut aussi fortement modifier ces indicateurs.

L'estimation de l'état de contrainte dans la matrice cimentaire peut être une information intéressante pour les modèles de fuite. Les indicateurs construits évoluent dans le temps, mais on peut aussi suivre leurs valeurs en fonction de la pression durant les épreuves décennales.

Évolution des indicateurs en épreuve

Les indicateurs ont aussi été calculés pour les différentes pressions aux différentes épreuves subies par l'enceinte. Les pressions testées sont $p = 0$ bar, $p = 1$ bar, $p = 2$, $p = 3$ et $p = 4.3$ bars. A pression fixée, les critères augmentent d'une épreuve sur l'autre (Fig. 4.18). En revanche, on remarque que le critère de Mazars diminue lorsque la pression augmente, alors que la contrainte de Rankine et l'indicateur ε_f augmentent. Le critère de Mazars est lié à la déformation dans la direction radiale ε_{rr}, qui est dûe à l'effet Poisson. Lorsque la pression augmente, cette déformation diminue et le critère de Mazars suit cette diminution. Cette diminution est moins marquée pour les épreuves à 32 et 62 ans que pour l'épreuve à 2 ans. En effet, à long terme, les effets du retrait sont plus importants que l'effet de Poisson : l'orientation des déformations principales peut tourner. Cela peut aussi s'observer sur l'indicateur ε_f qui devient plus sensible à la pression.

4.6.3 Une vision centrée sur la modélisation du matériau

Les phénomènes pris en compte dans cette modélisation entrent dans le cadre de la mécanique des matériaux. Ainsi, les aspects liés à la géométrie de la structure ne sont pas pris en compte, ou de façon très simplifiée. Des causes d'écarts potentiels peuvent être présentées :

- Le comportement du béton dépend de l'humidité et de la température. Ces grandeurs sont variables dans la section et notre modélisation ne s'appuie que sur des valeurs moyennes dans la section. Ainsi, le retrait de séchage est plus rapide sur la peau de la parois que dans le coeur de la paroi. Pour satisfaire la compatibilité, les contraintes de compression sont donc plus fortes au coeur de la paroi qu'à proximité de la peau. De même, le gradient thermique entre l'intérieur et l'extérieur de l'enceinte

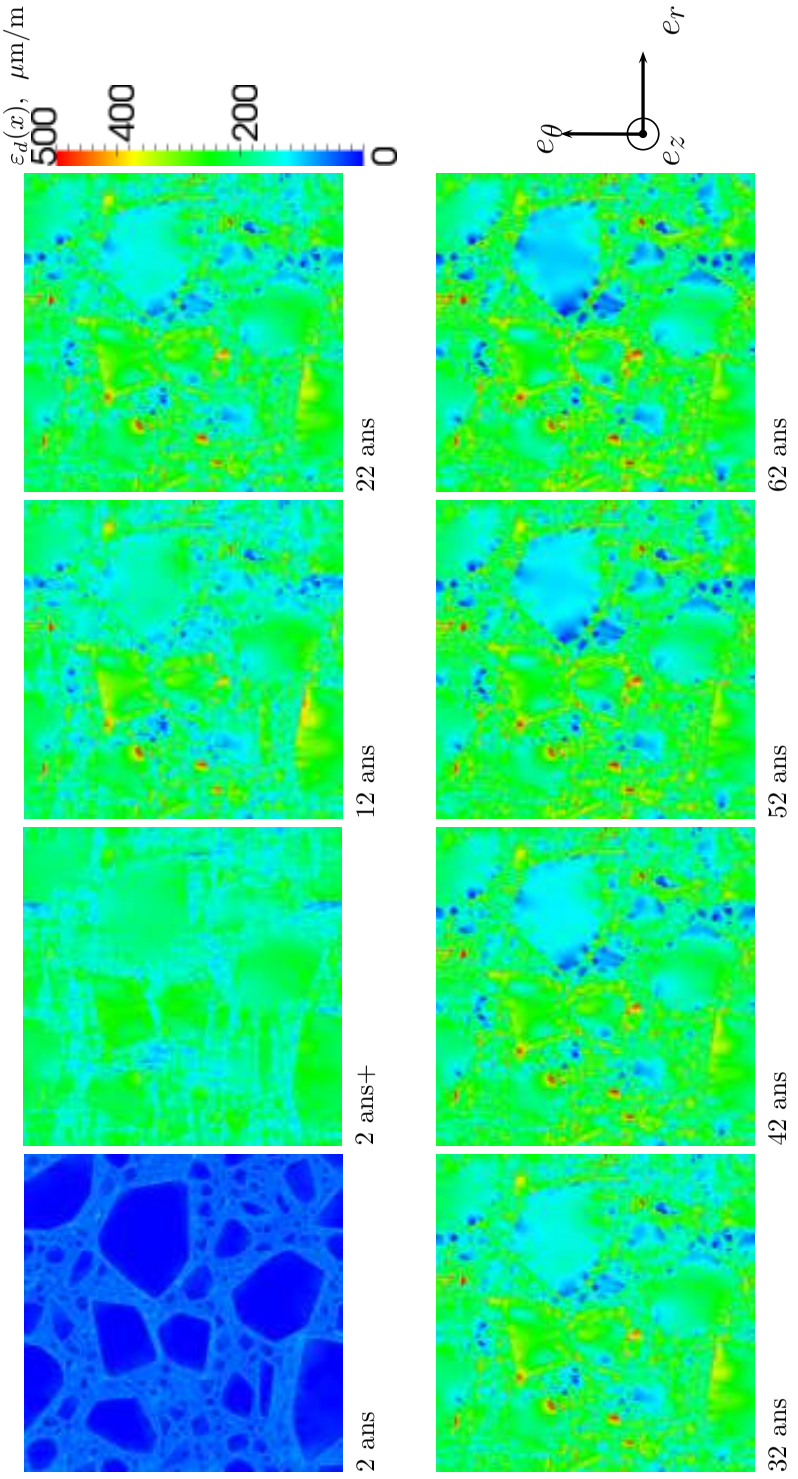


FIGURE 4.16 – Le critère de Mazars évolue fortement lors du chargement du fait de l'effet Poisson.

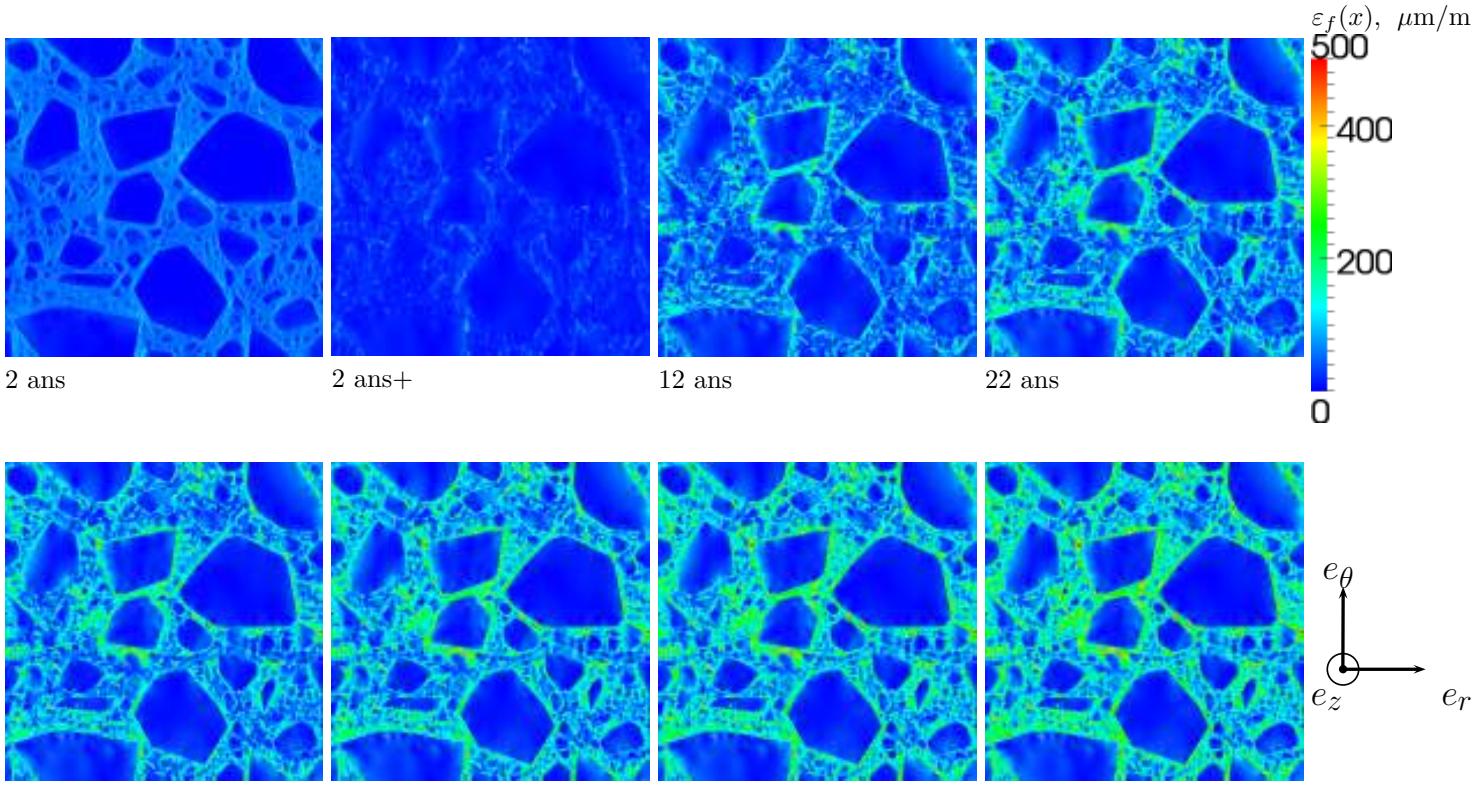


FIGURE 4.17 – L'indicateur ε_f dépendant de l'orientation des déformations principales évolue dans le temps. Le chargement à deux ans conduit ici à une diminution de ce critère.

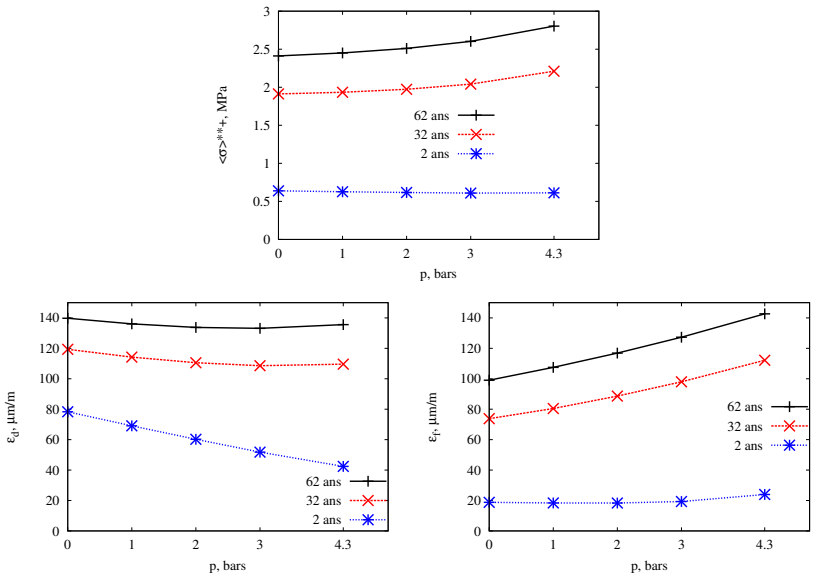


FIGURE 4.18 – Le critère de Rankine $< \sigma >^{+}$(haut) ainsi que le critère de Mazars ε_d (bas, gauche) et l'indicateur ε_f varient en fonction de la pression d'épreuve p. Les épreuves à 2 ans, 32 ans et 62 ans sont représentées.

interne est de l'ordre de 10-15°C. Le béton de la partie intérieure se dilate plus que celui de la partie extérieure, avec une différence de l'ordre de 100μm/m. Pour satisfaire la compatibilité des déformations, la partie intérieure doit être légèrement plus comprimée que la partie externe. En outre, les phénomènes de fluage et de retrait seront accélérés pour la partie interne du fait de la température. Seul un calcul de structure s'appuyant sur une loi de comportement adaptée peut permettre de tenir compte de ces effets pour produire une estimation valable de la contrainte et de la déformation de l'ouvrage en tout point (Godard, 2005; Hadj-Sassi, 2007).

– L'état initial du matériau n'est pas pris en compte. Ainsi, on part du principe que la microstructure est libre de contrainte après le jeune âge. De plus, à cet instant, la microstructure est supposée saine, dans la mesure où on suppose que la matrice cimentaire n'est pas endommagée, avec une adhésion parfaite entre le granulat et la matrice. Or, à l'échelle de la structure, le retrait endogène et les déformations liées au refroidissement peuvent engendrer de l'endommagement : les déformations d'une levée sont empêchées par la levée précédente plus rigide, ce qui entraîne des contraintes de traction dans la levée la plus jeune. Ce phénomène est particulièrement important au niveau du gousset, qui est coulé sur le radier (Briffaut, 2010). Or l'indicateur $\varepsilon_f(\sigma)$ associé à l'étanchéité ne dépend pas du degré d'endommagement dans notre étude. Pour obtenir un indicateur plus précis, il faudrait multiplier $\varepsilon_f(\sigma)$ par la variable d'endommagement produite par un calcul de structure. Cela correspondrait alors à l'ouverture de fissure définie par Matallah et. al. (Matallah et al., 2010). On peut supposer que cela pointera le gousset et les reprises de bétonnage comme des endroits particuliers.

– Il n'a pas été tenu compte du poids propre de la structure. Une hauteur de $h = 30$m de béton impose ainsi une compression verticale supplémentaire de $\rho_b.h = 0.68$MPa à mi-hauteur de la structure.

Il n'est pas proposé ici de coupler fortement le calcul numérique à l'échelle de la structure et celui à l'échelle du matériau. Le calcul de la réponse d'une microstructure en chaque points de Gauss d'un maillage d'enceinte par éléments finis serait en effet d'un coût prohibitif. Mais l'outil numérique 3D peut être utilisé de plusieurs façons :

– La façon la plus courante d'utiliser les modèles micro-mécaniques est d'ajuster les lois de comportement des codes de calcul d'élément finis sur les comportements macroscopiques estimés (Tran et al., 2011, 2013). On peut faire quelques calculs numériques 3D pour tenir compte de variations dans la composition du béton en cours de chantier et affecter les comportements ajustés à différentes levées ou à différents secteurs de la structure. Le calcul de structure peut alors commencer.
– On peut stocker l'histoire des déformations subies en un nombre limité de points de la structure. En imposant cette histoire de déformation à une microstructure de béton, on peut calculer les indicateurs liés à la distribution des contraintes dans la matrice cimentaire. Les indicateurs des différents points peuvent alors être comparés pour savoir en quels points l'ouverture des micro-fissures est la plus susceptible d'évoluer. Cela permettrait de mieux cibler les endroits où un revêtement étanche peut apporter quelque chose.
– Si le calcul 3D sur une microstructure complexe est jugé trop lent, on pourra conduire ces calculs sur un modèle réduit, avec un nombre réduit d'inclusions. Dans la mesure où le nombre de paramètres d'entrée peut être restreint, on pourra approcher $\varepsilon_f(\sigma)$ par une fonction polynomiale. Parmi les paramètres intéressants, on pourra ainsi choisir le module du béton, le rapport w/c, le rapport de biaxialité du chargement $\sigma_{zz}/\sigma_{\theta\theta}$, les pressions aux différentes épreuves ou encore l'amplitude du retrait $\varepsilon_{sh,\infty}$. Par ailleurs, les contraintes locales $\sigma(x)$ respectent le principe de superposition et l'indicateur $\varepsilon_f(\sigma)$ est une fonction positivement homogène de degré un du champ de contrainte σ. En conséquence, il suffit de stoker les champs de contraites obtenus par quelques calculs pour traiter facilement l'influence croisée de la précontrainte σ_{zz}, $\sigma_{\theta\theta}$, des pressions imposées aux différentes épreuves et du retrait de séchage $\varepsilon_{sh,\infty}$ sur l'indicateur $\varepsilon_f(\sigma)$. On peut négliger l'influence de la pression d'une épreuve décennale sur les contraintes locales aux épreuves suivantes : la durée d'une épreuve est trop courte pour générer une déformation différée significative.

Conclusion

Pour le béton, les simulations numériques 3D ont montré que la granulométrie et la forme des granulats n'ont que peu d'effets directs sur la complaisance macroscopique estimée. Pour les bétons, la complaisance viscoélastique estimée par l'extension de la méthode d'homogénéisation de Sanahuja n'est que peu influencée par le rapport d'aspect des granulats. On peut donc penser que la granulométrie et la forme des granulats n'influent sur le comportement mécanique du béton qu'au travers de l'absorption des granulats et de la maniabilité du béton frais. De plus, les complaisances estimées par les simulations numériques 3D restent proches de celles estimées par les schémas d'homogénéisation à champs moyens. Il reste donc difficile d'expliquer les différences de comportements viscoélastiques entre les bétons étudiés par Granger compte-tenu de la proximité de leur formulation.

La fraction volumique des inclusions et leur qualité mécanique ou le rapport w/c de la matrice cimentaire peuvent être pris en compte dans l'estimation des déformations différées par les méthodes d'homogénéisation semi-analytiques telles que le schéma de Mori-Tanaka. Le modèle de complaisance vieillissante B3 choisi pour la matrice cimentaire reste assez simple d'utilisation et sa tendance logarithmique à long terme est conforme à plusieurs résultats de la littérature. L'estimation des déformations différées de fluage propre des bétons s'avère cependant une tâche délicate, même lorsque les modèles d'homogénéisation sont mis à profit. Ainsi, la disparité des déformations mesurées par Granger (Granger, 1995) peut difficilement être expliquée, compte-tenu de la proximité des formulations des bétons étudiés. Une expérience de fluage propre d'une durée de plusieurs mois demeure donc le moyen le plus fiable d'obtenir une estimation valable des déformations différées d'un béton.

La simulation numérique 3D apporte un nouvel éclairage sur les contraintes locales dans la matrice cimentaire. En effet, on a mis en évidence l'existence de contraintes principales en traction ou de déformation principales équivalentes en élongation dans un éléments de béton soumis à une histoire de chargement similaire à celle rencontrée dans la section courante des enceintes. Les indicateurs définis pour surveiller les contraintes locales évoluent au cours du temps, principalement du fait du retrait de la matrice cimentaire empêché par les granulats. L'indicateur ε_f a été construit pour tenir compte de l'orientation de ces élongations principales par rapport à la normale au mur, en lien avec les problématiques liées à la perméabilité. Il diminue au moment de l'application de la précontrainte. Mais cet indicateur augmente d'une épreuve à l'autre et il croit avec la pression en épreuve.

L'estimation des déformations différées au jeune âge par les schémas d'homogénéisation pourrait être améliorée par une meilleure prise en compte des effets liés au vieillissement du béton. En effet, la complaisance du modèle B3 offre une possibilité d'adapter la fonction de vieillissement $v(t)$ qui n'est pas exploitée. Deux approches sont possibles :

- La fonction $v(t)$ peut être modifiée pour suivre l'augmentation du module de Young au cours du temps. Cette évolution du module de Young peut être estimée par des modèles d'homogénéisation tenant compte des réactions chimiques d'hydratation, comme le fait le logiciel $\mathrm{Vi(CA)_2T}$ (Le Pape et al., 2009, 2014).

– La complaisance de la matrice cimentaire peut directement être le fruit d'une étape d'homogénéisation à l'échelle de la pâte de ciment. On a vu que ce chaînage était faisable si l'on s'appuie sur la méthode d'homogénéisation de Sanahuja (Sanahuja, 2013b).

Les méthodes d'homogénéisation ne peuvent pas changer la tendance à long terme des déformations différées d'un matériau cimentaire. Si une tendance logarithmique des déformations différée à long terme est choisie à la petite échelle pour des raisons physiques, la complaisance homogénéisée présentera aussi une évolution logarithmique à long terme des déformation différées. Une porosité fixe ou une auréole de transition qui n'évolue pas dans le temps ne change pas ce constat. Si l'évolution des déformations de fluage propre ne s'inscrit pas dans cette tendance, il faut évoquer d'autres explications. De même, la difficulté à expliquer la disparité des déformations mesurées invite à l'introduction d'autres phénomènes. La piste la plus vraisemblable est celle d'un endommagement très limité ou d'une accroche entre la pâte et le granulat qui évolue dans le temps du fait de phénomènes chimiques. Rappelons que le fluage propre doit être linéaire en fonction de la contrainte sur la plage de chargement étudié et que le module de Young n'évolue pas de façon significative au cours du temps.

La simulation numérique 3D montre l'existence de contraintes de traction dans la section courante de l'enceinte, mais leur magnitude se semble pas imposer l'introduction d'un endommagement. L'extension de la méthode numérique 3D à de tels phénomènes est cependant attrayante pour un chercheur. La prévision de la résistance à compression pourrait être un moyen de contrôler la validité des calculs, mais elle ne présente que peu d'intérêt pour l'ingénieur, qui préférera avec raison un essai normalisé. Le chercheur appréciera lui la capacité d'estimer une limite de rupture dans des configurations de chargement difficiles à obtenir du point de vue expérimental.

Deuxième partie

Upscaling the aging viscoelastic behavior of composite materials

Introduction

Les méthodes d'homogénéisation sont maintenant appliquées à plusieurs matériaux. Les cas des bétons et des plastiques renforcés par des fibres de verre sont étudiés, ainsi que ceux d'un enrobé bitumineux et d'un béton renforcé par des fibres d'acier.

Pour les plastiques renforcés de fibres de verre, on s'intéresse à l'estimation de la complaisance macroscopique, mais aussi à l'estimation des contraintes locales dans les fibres. En effet, lors d'un essai de fluage d'un plastique renforcé par des fibres de verre, le plastique flue et les fibres supportent une part croissante de la contrainte. Si la défaillance du composite est due à la rupture des fibres, on peut estimer l'influence de la fraction volumique de fibres et de leur longueur sur la durée de vie du matériau en s'appuyant sur l'évolution estimée des contraintes locales.

Les enrobés bitumineux et la modélisation du béton renforcé par des fibres d'acier présentent des intérêts supplémentaires : l'enrobé bitumineux se distingue par un coefficient de Poisson qui dépend de la fréquence de la sollicitation et le béton fibré est ici traité comme un matériau multi-échelle. De plus, pour les bétons renforcés par des fibres, les influences estimées de la fraction volumique de fibre et du moment du chargement sur la complaisance macroscopique sont similaires à celles déduites des expériences de Chern & Young Chern and Young (1989).

Le premier chapitre de cette partie a été publié dans la revue Mechanics of Materials Lavergne et al. (2015b) et le second chapitre a été soumis dans la revue Cement and Concrete Research Lavergne et al. (2015d).

Chapitre 5

Estimation of creep strain and creep failure of a glass reinforced plastic by semi-analytical methods and 3D numerical simulations.

DOI : 10.1016/j.mechmat.2015.06.005

Glass reinforced plastics based on Polyvinyl chloride (PVC) is a material of choice for construction applications, such as pipes. The lifetime of pipes may be limited by creep failure and polymers exhibit a viscoelastic response that depends on the time of loading. In this paper, homogenization methods are designed to upscale the viscoelastic properties of a composite material made of chopped glass fibers with random orientations and PVC. The estimates of the Mori-Tanaka scheme and 3D numerical computations for creep strains and creep failure are compared, validating the Mori-Tanaka model as a practical tool to predict the effect of fiber length and volume fraction of fibers on creep strain and creep failure. In particular, it appears that, for a given creep load, the lifetime of the material is increased if the volume fraction of fibers increases or if the length of fibers decreases, as long as the failure mode is fiber breakage.

Introduction

Polyvinyl chloride (PVC) is a material of choice for construction applications, such as pipes for water and gas, house sidings or window frames where long service life is required Rabinovitch and Summers (1992). The European demand of PVC was 5000 ktons in 2012 PlasticsEurope (2013). Many polymers may be part of composite materials, such as fiber-reinforced materials. For instance, glass fibers may be incorporated into a polymer matrix such as PVC to increase

stiffness, creep resistance and dimensional stability Rahrig (1985); Kinson and Faber (1992); O'brien-Bernini et al. (2006). The effect on tensile strength of glass fibers depends on the volume fraction of inclusions, on the fiber length and on fiber orientation. These parameters can be significantly affected by processing operationsTungjitpornkull and Sombatsompop (2009); Hohe et al. (2015).

In case of water pipes, different permanent loads coexist. Cooling after extrusion could trigger internal tensile stress in the range 1.5 to 4.8MPa on the inner diameter, the water pressure induces a permanent hoop stress and additional stresses can occur as a result of non-uniform soil settlement Breen and in't Veld (2006). The lifetime of such pipes depends on the operating conditions and on the mechanical properties of the constitutive materials.

Glass reinforced plastic pipes may feature a complex structure, including chopped strand mat layers on the inner side and filament wound layers on the outer side Guedes et al. (2010); Diniz Melo et al. (2011); Rafiee and Reshadi (2014). Short-time hydraulic failure occurs on the inner diameter Diniz Melo et al. (2011). Ring deflection tests may be performed according to standard ISO 9967 to estimate the time-dependent strain of a pipe and study the long term creep failure AFNOR (2007); Guedes et al. (2010). In this case, failure mode was always the same, fiber breakage, and always localized in the same region, on the inner diameter Guedes et al. (2010). The strain at failure is almost constant, slightly decreasing with the time elapsed since loading. An internal pressure test is defined by the standard ASTM D2992 to estimate the long term static hydrostatic strength of glass-fiber-reinforced pipes ASTM (2012b). The time-to-failure is expected to depend on the pressure level, following a power law. Hence, studying the viscoelastic behavior of glass reinforced plastics is required to adjust delayed fracture criterion Guedes (2012) and estimate the lifetime and durability of such pipes.

Polymers exhibit a viscoelastic response that depends on the time of loading t'. This phenomenon is described as physical aging. It is well known that the viscoelastic properties of polymer glasses are significantly influenced by a physical aging processStruik (1978); Sullivan (1990); Odegard and Bandyopadhyay (2011). This is the reason why the standard ISO 9967 specifies both the temperature (23$\pm$2°C) and the age of the samples at loading (21$\pm$2 days), measured since quenching. Experimental evidences on creep properties of various polymer materials below the glassy temperature have been gathered by Struik Struik (1978) and further creep tests have been performed on PVC since Read et al. (1992); Zhou et al. (2012). A PVC quenched from 90°C to 20°C at starting time $t_0 = 0$ is considered in the present study.

This article is focused on the aging creep and failure of the chopped mat strand layer of the pipe, modeled as a composite material made of E-glass fibers and PVC. Homogenization methods are designed to upscale the viscoelastic behaviors of such materials. Mean-field homogenization schemes such as the one of Mori-Tanaka Mori and Tanaka (1973); Wang and Weng (1992); Li et al. (2006) or coupling the single fiber problem and the rule of mixture Hohe et al. (2015) produce estimates of these elastic properties while taking account of fiber aspect ratio and distribution of orientations. Complete modeling of the failure of fiber-reinforced plastics, including damage of fibers and matrix, have been performed by Sasayama et. al. Sasayama et al. (2013) and Hashimoto et. al. Hashimoto et al. (2012). Some of these micromechanical approaches have recently been able to treat aging linear viscoelastic materials and their accuracy

is to be checked by numerical simulations Ricaud and Masson (2009); Sanahuja (2013b); Šmilauer and Bažant (2010).

Mean-field homogenization schemes and 3D numerical simulations of matrix-inclusion materials have been compared in the range of elasticity III and Liang (1999); Moussaddy (2013); Ghossein and Lévesque (2014); Moumen et al. (2015). The case of elongated or flat inclusions has been explored III and Liang (1999); Moussaddy (2013); Ghossein and Lévesque (2014) with the conclusion that Lielen's model Lielens et al. (1998) was the most accurate one provided that the inclusion is stiffer that the matrix. Such comparisons have also been performed on viscoelastic Lahellec and Suquet (2007), plastic Pierard et al. (2007a) or viscoplastic Pierard et al. (2007b); Lahellec and Suquet (2007) matrices to assess the accuracy and performances of different methods. Lahellec and Suquet Lahellec and Suquet (2007) have used 2D full finite element simulations to validate a semi-analytical scheme which combines the Hashin-Shtrikman estimate for periodic materials and a time-stepping procedure to compute the in-plane time-dependent strain of aligned circular fibers in a viscoelastic matrix. The range of applications of such models depends on the contrast between phases and volume fraction of inclusions.

The objective of the present article is to estimate the aging viscoelastic behavior and creep failure of a E-glass fiber reinforced PVC. Therefore, the Mori-Tanaka scheme is to be compared to full-field computations. The main features of the model presented in this article are :

1. Both the Mori-Tanaka scheme and the 3D numerical procedure rely on a time-shift procedure to account for the aging creep of PVC.
2. The Mori-Tanaka scheme and a 3D numerical procedure are presented and successfully compared.
3. The influence of volume fraction of fibers and length of fibers are investigated.
4. An estimate of creep failure related to the strength of glass fiber, based on the largest principal stress (Rankine criterion), is proposed.

The behavior of each phase is described and the microstructure is presented in the first section. The methods to obtain the overall property are briefly recalled. The outputs of these methods are compared in the second section and the effect of the length of fibers and of the volume fraction of fibers on the time dependent strain and creep failure are estimated.

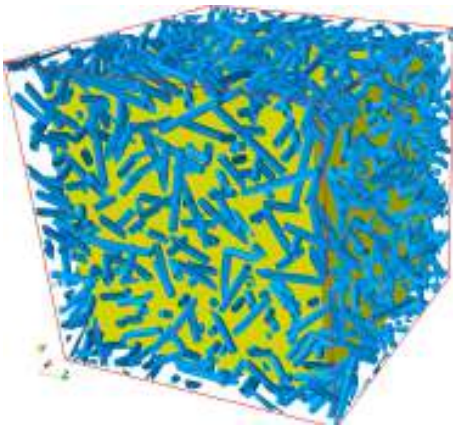
5.1 Microstructure : geometry and mechanical properties

5.1.1 A short-fiber reinforced plastic

The polymer-based composite that is described in the present article will be a mix of hard PVC and short E-glass fibers. Figure 5.1a shows the microstructure of the considered materialRahrig (1985).

In the considered fiber-reinforced material, elastic inclusions are added to the viscoelastic matrix, their elastic stiffness being the one of E-glass fibers :

(a) Photomicrograph of a cross section of a fiber-reinforced plastic, the cross section being of a fractured tensile dumbbell Rahrig (1985). The distribution of the orientations of fibers does not seem isotropic and this particular sample exhibits fiber-matrix debonding. The failure mode highly depends on the coupling agentRahrig (1985).



(b) a 400μm-wide sample of a fiber-reinforced plastic by the RSA algorithm is shown. The volume fraction of fibers in the cubic cell is 15%. Fibers are 10μm in diameter and 100μm in length.

FIGURE 5.1 – Real and numerical microstructures.

the Young modulus is $E = 80$GPa and the Poisson's ratio is $\nu = 0.22$ Wallenberger et al. (2001); AGY (2001); Mounier et al. (2012). These inclusions are assumed to be cylindrical chopped fibers, with a diameter of 10μm and a length of 100μm. The distribution of their directions is chosen as isotropic and their volume fraction is 15%. The density of E-glass being about 2.55 and the one of PVC being about 1.35, a weight ratio of 34 phr (part per hundred part of resin) corresponds to a volume fraction of 15%. Above 50 phr (or 20% volume fraction), processing difficulties may appear during the extrusion Rahrig (1985).

The considered chopped strand mat features shorter fibers than the one used in automotive applications Haque (2007) (11mm to 75mm) or pipes, comparable to fibers used for flooring materials(0.2mm to 1mm) Nakano (2003). The considered microstructure could be similar to the one obtained by the use of chopped strand glass as reinforcement in extruded products, where the integrity of the dry glass fiber strands is broken down by a screw extruder Yuan et al. (1984); O'brien-Bernini et al. (2006); Tungjitpornkull et al. (2007); Phelps et al. (2013).

5.1.2 Failure mode

Experimental tests have shown that the lifetime of a pipe under permanent loading decreases as the level of the applied loading increases AFNOR (2007); Guedes et al. (2010). Moreover, the strain at failure decreases slightly with respect to lifetime. The failure mode of a glass fiber-reinforced PVC highly depends on the coupling agentRahrig (1985) : the observed failure mode of water pipes was fiber breakage located at points where the largest tensile stress

occurred Guedes et al. (2010). These experimental evidences will drive the proposed estimates of the lifetime of a pipe using the Mori-Tanaka procedure described in this paper. Indeed, it is assumed that the fibers are perfectly bonded to the matrix until failure occurs.

A fiber is considered as brittle, and a maximum stress criterion is defined to describe its failure Hashimoto et al. (2012). The large variability in strength found in brittle fibers Chiao and Moore (1971) is well modeled by Weibull-Poisson statistics and is due to various random flaws on the fiber surface Phoenix (2000). Moreover, the strength of glass fibers is a function of time when subject to permanent loads Barbero and Damiani (2003) : moisture ingress in glass fiber reinforced polymers increases stress corrosion cracking in the fibers Taylor (1947); STUART and ANDERSON (1953); Charles (1958a,b); Khennane and Melchers (2003) and thus shortening their lifetime in humid or alkali environments Ren (2001); Phillips (1983). Nevertheless, for the seek of simplicity, these features will be ignored in the present study and the same uniform-in-time maximum stress criterion σ_c will be set for all fibers.

Let $\sigma_R(\sigma)$ be the largest principal stress of the stress tensor σ. Then the scalar Rankine criterion stipulates that the failure occurs if $\sigma_R(\sigma) > \sigma_c$. This criterion coincides with Hashimoto's one Hashimoto et al. (2012) in case of uniaxial tensile stress in the fiber.

5.1.3 Polymers : Temperature shift and Time shift approach

A time-shift approach is designed to model the aging viscoelastic behavior of the matrix. See Grasley & Lange Grasley and Lange (2007) for a description of this approach, which has been used to model cement paste. Samples are loaded at different times t' elapsed since quenching and the time dependent strains are measured. The obtained strain curves plotted as functions of $log(t - t')$ are identical up to a shift in the horizontal direction, defining a master curve $\mathbf{\Phi}$, so that the aging compliance is written as :

$$\mathbf{J}(t, t') = \mathbf{\Phi}(\xi(t) - \xi(t'))$$

where $\xi(t)$ is a pseudo-time. StruikStruik (1978), following KohlrauschKohlrausch (1854), found the Kohlrausch-Williams-Watts (KWW) Williams and Watts (1970) function

$$\mathbf{\Phi}_{KWW}(t) = \mathbf{J}_0 e^{\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^m}$$

where $\mathbf{J}_0$ is an isotropic stiffness tensor and $m = 1/3$ is common to various polymers below the glassy temperature and to metals. This function is also valid for PVC at 63°C Zhou et al. (2012).

The pseudo time $\xi(t)$ is given by Morland and Lee (1960) :

$$\xi(t) - \xi(t') = \int_{t'}^{t} \frac{dv}{A(v)}$$

where $A(t)$ is an activity. For instanceGrasley and Lange (2007),

$$A(t) = \left(\frac{t}{t_{ref}}\right)^{-\mu} \left(\frac{T(t)}{T_{ref}}\right)^{-\mu_T}$$

where μ is the time shift factor and μ_T is a temperature shift factor. A change of variable $u = \xi(t)$, $\sigma^*(u) = \sigma(t)$ where u is the equivalent time may be performed to turn the aging problem into a non-aging one :

$$\varepsilon(t) = \int_0^{\xi(t)} \mathbf{\Phi}(\xi(t) - v) \frac{d\sigma^*}{du}(v) dv$$

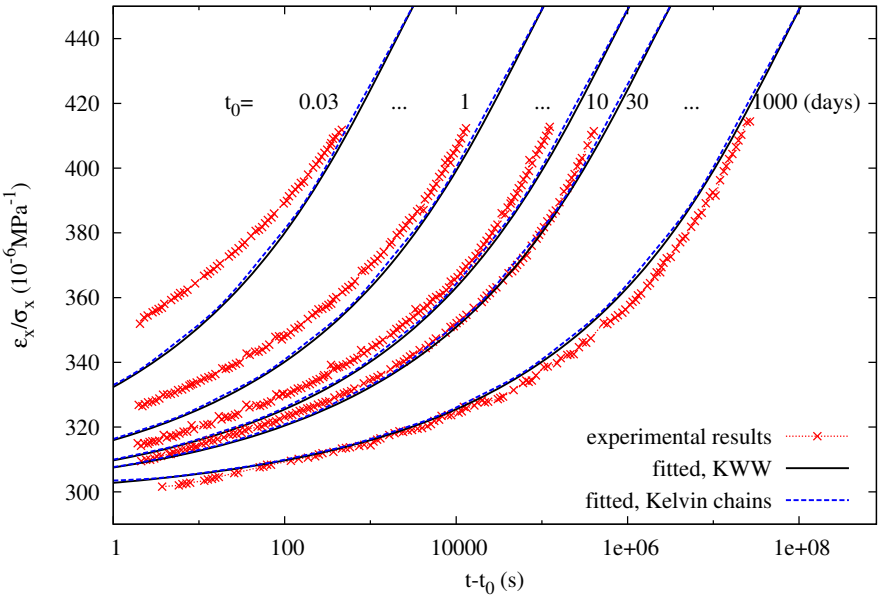


FIGURE 5.2 – The experimental results of Struik Struik (1978) on hard polyvinyl chloride (PVC) at T=20°C are digitalized. First parameters of aging μ and of the KWW function are fitted according to some of these curves ($t_0 = 10, 30, 100, 300$ and 1000 days). Then a series of Kelvin chains is adjusted to the KWW function to enable 3D numerical computations (blue).

5.1.4 Identification of the viscoelastic parameters

The identification of the parameters of the constitutive law is performed in two steps. First, the aging parameter μ_{KWW} and the parameters of the KWW function m, τ_0 and $\mathbf{J}_0$ are fitted at once according to the experimental results. Then, to enable 3D numerical computations, a series of Kelvin chain is fitted according to the KWW function.

To perform the first step, the Levenberg-Marquardt algorithm Levenberg (1944); Marquardt (1963) is used, as implemented in the gnuplot software Williams et al. (2014). This algorithm minimizes the scalar

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \left(\frac{\mathbf{\Phi}_{KWW}(\xi(t_{ij}) - \xi(t'_i)) - y_{ij}}{\delta y_{ij}} \right)^2$$

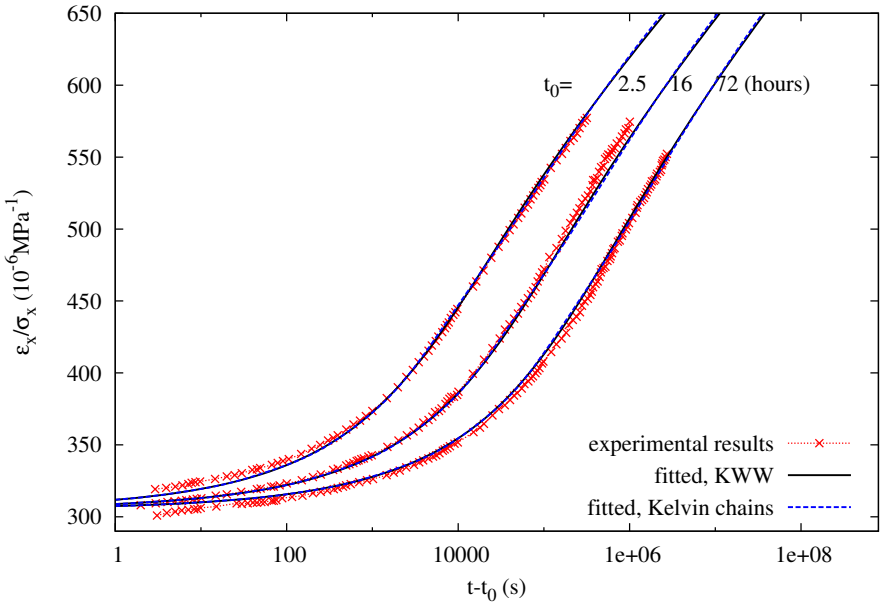


FIGURE 5.3 – The experimental results of Read et. al. Read et al. (1992) on hard polyvinyl chloride (PVC) at T=23°C are digitalized. First parameters of aging μ and of the KWW function are fitted according to these curves. Then a series of Kelvin chains is adjusted to the KWW function to enable 3D numerical computations (blue).

where y_{ij} is the experimental strain measured at time t_{ij} on the sample loaded at time t'_i and δy_{ij} is the standard deviation of y_{ij}. δy_{ij} could be interpreted as an estimation of the error on y_{ij}, or as a weight $w_{ij} = 1/\sqrt{\delta y_{ij}}$. These weights are chosen so that all curves have the same weight and all decades of a given curve have the same weight for fitting. Let N_i be the number of points in a creep curve and N_{ij} be the number of points of that curve between $t_{ij}/\sqrt{10}$ and $\sqrt{10}t_{ij}$. The corresponding weight worths $w_{ij} = 1/(N_{ij}.N_i)$.

The procedure described in the present section was applied to the digitalized experimental results of Struik Struik (1978) (Fig. 5.2)(Tab. 5.1) and to those of Read et. al. Read et al. (1992). The obtained results are presented in figure 5.3 and table 5.2. Note that the identified values of μ and m are similar to those identified by Read et. al.Read et al. (1992).

For the second step, a series of Kelvin chain $\mathbf{\Phi}_K$ is identified to the master curve $\mathbf{\Phi}_{KWW}$, keeping the same equivalent time $\xi(t)$. Hence, the aging parameter $\mu_K = \mu_{KWW}$ is left unchanged. As performed in the collocation method Schapery (1962); Cost and Becker (1970); Lévesque et al. (2007), characteristic times τ_i are chosen as terms of a geometric sequence, with one term per decade, and corresponding Young modulus $\mathbf{E}_i$ are required to be positive. This requirement is sufficient to ensure the thermodynamic correctness of the identified compliance Lévesque et al. (2007). The KWW function is sampled at equivalent times in a geometric sequence, between half the smallest characteristic time and twice the largest one, so that each decade has the same weight.

μ	τ_{ref} (s)
-0.99998	1

(a) Aging parameters

$\mathbf{E}_0$ (GPa)	τ_0(s)	m
3.37	135	0.17

(b) KWW function

$\mathbf{E}_0$ (GPa)	ν
80	0.22

(c) Fibers

i	τ_i (s)	$\mathbf{E}_i$ (GPa)
0	instantaneous	3.3
1	5×10^{-8}	347
2	5×10^{-7}	224
3	5×10^{-6}	152
4	5×10^{-5}	99
5	5×10^{-4}	66
6	5×10^{-3}	40.8
7	5×10^{-2}	27.4
8	5×10^{-1}	11.8

(d) Kelvin chains

TABLE 5.1 – Values fitted according to the experimental results of Struik Struik (1978) on rigid PVC at T=20°C and values for E-glass fibers. All Poisson's ratios of PVC are assumed to be 0.40. The aging coefficient μ is set at -0.99998.

For a regular uniaxial loading, the representation of the KWW function by a series of Kelvin chain is accurate as shown in figure 5.2 and 5.3. It must be noticed that identifying directly μ and $\mathbf{E}_i$ on the experimental data with the Levenberg-Marquardt algorithm has been tried unsuccessfully.

5.2 Homogenization of aging viscoelastic materials

In an heterogeneous material, the compliance $\mathbf{J}(x,t,t')$ depends on the spacial position x. Mean-field homogenization schemes and numerical simulations are designed to estimate the overall compliance of the composite material.

5.2.1 Micromechanical models

To upscale the viscoelastic response of a non-aging viscoelastic material, the Laplace-Carson transform is combined to mean-field homogenization schemes Hashin (1970); Lévesque et al. (2007). The Laplace-Carson transform turns a non-aging viscoelastic homogenization problem into a set of elastic homogenization problems parametrized by $p > 0$. The transform of a function $g(t)$ is $\hat{g}(p) = p\int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt$ (D). This transform is still usable in this study since aging is defined as an equivalent time.

Mean field homogenization schemes considered in the present study are the Hashin-Shtrikman lower bound Hashin and Shtrikman (1963) or the Mori-Tanaka scheme Mori and Tanaka (1973), as reconsidered by Benveniste Benveniste (1987). These mean field methods rely on Eshelby's equivalent inclusion theory Eshelby (1957) to estimate the stress concentrations in ellipsoidal inclusions. Weng Weng (1990), extending the results of Zhao and Tandon Zhao et al. (1989), have proven that the effective moduli of the composite containing either aligned or random oriented, identically shaped ellipsoidal inclusions, as estimated by the Mori-Tanaka scheme, have the same expression as those of the Hashin-Shtrikman-Walpole bounds, only with the latter's comparison material

μ	τ_{ref} (s)
-0.958	1

(a) Aging parameters

$\mathbf{E}_0$ (GPa)	τ_0(s)	m
3.28	22.5	0.324

(b) KWW function

$\mathbf{E}_0$ (GPa)	ν
80	0.22

(c) Fibers

i	τ_i (s)	$\mathbf{E}_i$ (GPa)
0	instantaneous	3.27
1	4.8×10^{-6}	906
2	4.8×10^{-5}	387
3	4.8×10^{-4}	198
4	4.8×10^{-3}	83.9
5	4.8×10^{-2}	43.0
6	4.8×10^{-1}	16.5
7	4.8×10^{0}	9.21
8	4.8×10^{1}	1.23

(d) Kelvin chains

TABLE 5.2 – Values fitted according to the experimental results of Read et. al. Read et al. (1992) on rigid PVC, at T=23°C. All Poisson's ratios of hard PVC are assumed to be 0.40. Both the values of the aging parameter $\mu = -0.958$ and the shape parameter $m = 0.324$ are close to the values identified by Struik or Read et. al. Struik (1978); Read et al. (1992)

identified as the matrix phase and Eshelby's tensor interpreted according to the appropriate inclusion shape. For a given p, the elastic Mori-Tanaka estimate $\mathbf{C}^p_{MT}$ accounts for the volume fraction of inclusions c_i and the distribution of orientations of inclusions $f(\psi)$. It is the solution of equation :

$$c_i \int_{\psi} f(\psi)(\mathbf{C}^p_{MT} - \mathbf{C}_i(\psi)) : \mathbf{T}^p(\psi) d\psi + (1 - c_i)(\mathbf{C}^p_{MT} - \mathbf{C}^p_m) = 0$$

Here, $\mathbf{C}_i(\psi)$ is the elastic stiffness of inclusions having orientation ψ ; $\mathbf{C}^p_m$ is the elastic stiffness of the matrix corresponding to p ; $\mathbf{T}^p(\psi)$ is the strain concentration tensor expressing the strain in the inclusions having orientation ψ as a linear function of the strain at infinity, $\mathbf{C}^p_m$ being the elastic stiffness tensor of the reference material. Tensors $\mathbf{C}_i(\psi)$ and $\mathbf{T}^p(\psi)$ are computed by rotating $\mathbf{C}_i(0)$ and $\mathbf{T}^p(0)$ using Bond transformations Bond (1943); Auld and Auld (1973). Formula to compute $\mathbf{T}^p(0)$ in the local reference are recalled in references Mura (1987); Torquato (2002); Pierard et al. (2007a).

The average stress in the inclusions of orientation ψ is expressed as a linear function of the overall strain through the localization tensor $\mathbf{B}^p(\psi)$ given by :

$$\mathbf{B}^p(\psi) = \mathbf{C}_i(\psi) : \mathbf{T}^p(\psi) : \left(c_i \int_{\psi'} f(\psi') \mathbf{T}^p(\psi') d\psi' + (1 - c_i)\mathbf{1} \right)^{-1}$$

Once the Laplace-Carson transform is inverted, the Rankine criterion of the average stress in the inclusions of orientation ψ is computed to detect the failure of these inclusions. The Rankine criterion is computed by using the routine `dsyev()` of the LAPACK package Anderson et al. (1990).

It should be mentioned that many homogenization schemes have recently been adapted by Sanahuja Sanahuja (2013b) to treat arbitrary aging compliances such as the KWW compliance, or any interpolation of experimental points : instead of using the Laplace-Carson transform, this method operates in

the time domain. The expression of the strain localization operator requires computations of Volterra integrals by using trapezoidal rules and inversions of lower triangular per block matrices Bažant (1972); Huet (1980). Sanahuja's method handles the case of matrix-inclusion composites with spherical inclusions and we are currently investigating its extension to matrix-inclusion composites with ellipsoidal inclusions.

5.2.2 3D numerical computations

In the frame of periodic homogenization, the determination of the overall viscoelastic behavior of a periodic microstructure can be obtained by solving the following auxiliary problem on the periodic unit cell V.

$$\begin{array}{rcll} \text{div } \sigma(x,t) & = & 0 & x \in V \\ \varepsilon(x,t) & = & \int_0^t \mathbf{J}(x,t,t') \frac{d\sigma}{dt}(x,t')dt' & x \in V \\ \varepsilon(x,t) & = & E(t) + \nabla^s u(x,t) & x \in V \\ u(x,t) & & periodic & x \in \partial V \\ \sigma(x,t) \cdot n(x) & & anti-periodic & x \in \partial V \end{array}$$

Here $E(t)$ is the time-dependent overall strain, $u(t,x)$ is the displacement field in V,$\nabla^s u(x,t)$ is its symmetric gradient, ∂V is the boundary of V and $n(x)$ is the outer normal to ∂V. Actually, $E(t)$ is the volume average of $\varepsilon(x,t)$ and we denote by $\Sigma(t)$ the volume average of $\sigma(x,t)$.

3D numerical computations have already been performed to upscale mechanical properties of composites in the frame of the periodic homogenization theory. The finite element method or the Fast Fourier Transform (FFT) method Moulinec and Suquet (1998a); Šmilauer and Bažant (2010); Suquet et al. (2012); Escoda (2012); Sliseris et al. (2014) are used to solve elastic problems. The Random Sequential Adsorption algorithm Feder (1980) is used to generate periodic microstructuresBentz et al. (1999); Pan et al. (2008)(Fig. 5.1b). Overlapping between polyhedral inclusions is prevented thanks to the Gilbert-Johnson-Keerthi distance algorithm Gilbert et al. (1987) as in Lavergne et al. (2015a). The distribution of orientations of fibers is isotropic : the direction of each fiber is randomly picked on the unit sphere. To test if the distribution of the orientations of fibers is isotropic, a 400μm-wide microstructure featuring 1223 fibers is built and chi square tests are performed. Fiber orientations are binned into 20 sectors of equal angle and the estimated number of fibers in each sector ($n_{f,e} = 61,1$) is compared to the observed ones $n_{f,o}(\theta)$, $\theta \in 1..20$ (Fig. 5.4). The chi-squared test statistic $\chi^2 = \sum_{\theta=1}^{20}(n_{f,o}(\theta) - n_{f,e})^2/n_{f,e}$ is computed and is found to be 9.7, 14.5 and 18.6 depending on the axis chosen to split the sectors (x, y and z). If χ^2 follows a chi-squared distribution of 19 degrees of freedom, there is a 70% probability that χ^2 is lower than 21.7. Hence, the obtained values of χ^2 are not surprising and an isotropic distribution of the orientations of fibers can produce such a set of observations.

The 3D numerical method used in the present article is the one designed by Šmilauer and Bažant Šmilauer and Bažant (2010) developed for cementitious materials. This method which relies on the exponential algorithm Zienkiewicz et al. (1968); Taylor et al. (1970); Bažant and Wu (1974) is a time-iteration procedure to solve the viscoelastic problem for the case of steady loads. It features an integration of the constitutive equations on each time step assuming

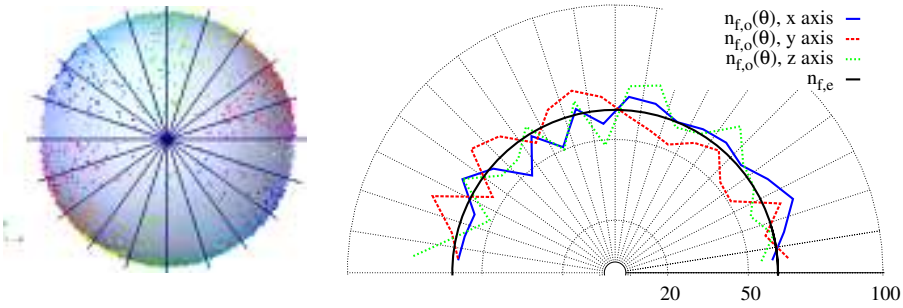


FIGURE 5.4 – Left : fiber orientations are binned into 20 sectors of equal angle along y axis. Right : the estimated number of fiber in each sector $n_{f,e} = 61,1$ is compared to the observed ones $n_{f,o}(\theta)$, $\theta \in 1..20$. An isotropic distribution of orientation can produce such a set of observations.

a constant stress rate, to enable the time step to grow exponentially when performing a relaxation (or creep) simulation. This assumption is adapted to treat the case of a time-shift aging compliance based on a series of Kelvin chains, which writes :

$$\boldsymbol{J}(t,t') = \sum_{k\geq 1} \left(1 - e^{-\frac{t^{\mu+1} - t'^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^{\mu}\tau_k}}\right) \boldsymbol{C}_k^{-1} + \boldsymbol{C}_0^{-1}$$

The internal variables are :

$$\gamma_k(t) = \int_0^t \frac{t^{\mu}}{\tau_k t_{ref}^{\mu}} e^{-\frac{t^{\mu+1} - t'^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^{\mu}\tau_k}} \boldsymbol{C}_k^{-1} \dot{\sigma}(t') dt'$$

and the evolution equations write :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \boldsymbol{C}_0^{-1}\dot{\sigma}(t) + \sum_{k\geq 1}\gamma_k \\ \dot{\gamma}_k(t) + \frac{t^{\mu}}{\tau_k t_{ref}^{\mu}}\gamma_k(t) - \frac{\mu}{t}\gamma_k(t) &= \frac{t^{\mu}}{\tau_k t_{ref}^{\mu}} \boldsymbol{C}_k^{-1}\dot{\sigma}(t) \end{aligned}$$

The constitutive equation is integrated on the time step $[t_i; t_{i+1}]$ under the following assumption :

$$\sigma(t) = \sigma(t_i) + \Delta\sigma \frac{t^{\mu+1} - t_i^{\mu+1}}{t_{i+1}^{\mu+1} - t_i^{\mu+1}}$$

where μ is the aging parameter (B). This assumption is unchanged for non-aging material ($\mu = 0$), for which the stress varies linearly on the time step.

The exponential algorithm has been recently combined with the FFT algorithm as solver for the unit cell tangent problem Šmilauer and Bažant (2010);

Suquet et al. (2012). The FFT algorithm requires the microstructure to be discretized on a regular grid. Consequently, issues regarding the automatic generation of high-quality adapted meshes for the finite element method are avoided.

The strain ε triggered by a periodic polarization field τ in an homogeneous material of stiffness $\mathbf{C}_0^*$, submitted to the average strain E is given by the Lippman-Schwinger equation :

$$\varepsilon = E - \mathbf{\Gamma}_0^* * \tau$$

where $\mathbf{\Gamma}_0^*$ is a Green operator. The convolution of $\mathbf{\Gamma}_0^*$ and τ is computed in the frequency domain thanks to the FFT. The polarity tensor τ is chosen so as to account for the heterogeneity of the considered material $\mathbf{C}(x)$:

$$\tau(x) = (\mathbf{C}(x) - \mathbf{C}_0^*) : \varepsilon(x)$$

The strain field must satisfy the following equation :

$$\varepsilon = E - \mathbf{\Gamma}_0^* * ((\mathbf{C} - \mathbf{C}_0^*) : \varepsilon)$$

This equation is solved by a fixed point algorithm Moulinec and Suquet (1998a)(C).

Although this 3D numerical method can treat large and complex microstructures, it requires large amount of memory and time. The implementation used in this article is parallel so as to be ran on clusters Lavergne et al. (2015a).

Such 3D computations may deliver more precise estimates of the overall behavior than mean-field methods since they rely on an accurate description of the microstructure. Moreover, a distribution of stress concentrations per phase may be retrieved. Large scale computations are required to match both the need for a Representative Elementary Volume and the need for a precise description of the microstructural details.

A careful assessment of the quality of 3D numerical computations is performed in the next section.

5.2.3 Convergence study

Time discretization

To assess the accuracy of the integration of the constitutive law on the time step, the response of the matrix to an uniaxial relaxation test $\sigma_{num}(t)$ is numerically computed for different rate of growth of the time step $b = (t_{i+1} - t_i)/(t_i - t_{i-1})$ (Fig. 5.5). The Laplace-Carson transform provides a reference $\sigma_{LC}(t)$ to compute a relative error $(\sigma_{num}(t) - \sigma_{LC}(t))/\sigma_{LC}(t)$. This relative error is found to be very small, as long as the rate of growth remains limited. A rate of growth of 1.118 is set for further computations. Approximately 180 time steps are needed to compute the response between $t_1 - t_0 = 10^{-3}$ s and $t - t_0$=50 days, the materials being loaded $t_0 = 10$ days after quenching.

Space discretization

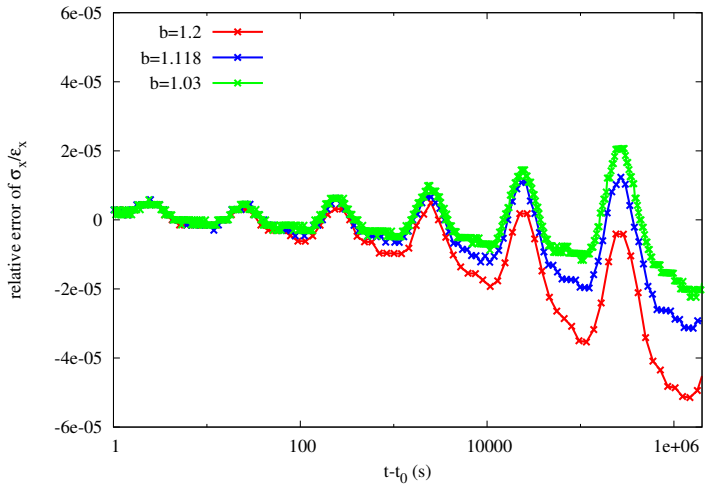


FIGURE 5.5 – Relative error due to time stepping. Numerical relaxation tests are performed on the matrix for different rate of growth of the time step $b = (t_{i+1} - t_i)/(t_i - t_{i-1})$. The relative error decreases as the time steps decrease. Rises correspond to characteristic times of Kelvin chains. The relative error seems discrete due to numbers being stored in files as single-precision floats.

The FFT algorithm solves the tangent elastic problem on each time step. To perform fast Fourier transform, strain $\varepsilon(t, x)$, stress $\sigma(t, x)$ and internal variables are stored on a regular grid of $N \times N \times N$ points, where N is called the grid size. The microstructure is also discretized on a regular grid (Fig. 5.6). Hence, some information about the microstructure is lost, which could trigger an error due to discretization. In order to lower the error, for each voxel, a local volume fraction based on 64 sensing points is computed and a Reuss-like constitutive law is computed and assigned to each voxel Lavergne et al. (2015a). Therefore, the microstructure is made of black voxels (pure matrix), white voxels (pure inclusions) and gray voxels (composite).

To estimate the error due to space discretization, a given microstructure, $l = 133\mu$m in length, is discretized at different grid step (Fig. 5.6,5.8) and the response to a shear creep test are computed. Grid sizes N and numerical performances are provided in table 5.3 : the largest grid is $N = 648$ and the numerical shear creep test took less than a day thanks to parallel computing. The probability distribution function of the Von Mises stress depicts the magnitude of stress concentrations within the microstructure and it is a matter of concern for further durability assessment, especially if non-linear phenomenon were to be considered. The estimation of this distribution depends on the grid size N and it becomes more accurate as the grid size increases (Fig. 5.8).

Representative Elementary Volume

It is well-known that the asymptotic overall response should not depend on

N	number of degree of freedom	number of nodes (cluster)	number of processes	wall-clock time s
32	2×10^5	1	4	86
64	1.5×10^6	1	4	756
128	1.2×10^7	1	12	4012
288	1.4×10^8	12	144	4225
512	8×10^8	12	128	29440
648	1.6×10^9	16	162	47490

TABLE 5.3 – Grid sizes and numerical performances on the Ivanhoé cluster of EDF R&D (iDataPlex, Xeon X5670 6C 2.93 GHz, Infiniband). Increasing the memory bandwidth by using twelve nodes instead of one allows a tenfold increase of the number of degrees of freedom while keeping comparable wall-clock times.

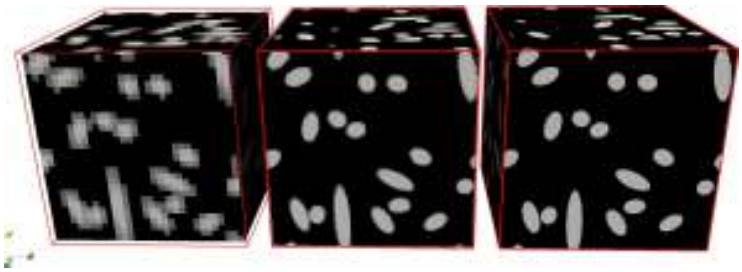


FIGURE 5.6 – The same microstructure of length 133μm is discretized on grids of size $N = 32$, $N = 128$ and $N = 648$. Hence the corresponding total numbers of voxels are respectively 32^3, 128^3 and 648^3. Cross sections of cylindrical fibers are ellipses, except at edges.

the generated sample neither on the size of the unit cell l which must be large enough to be representative of the microstructure (Sab (1992); Kanit et al. (2003) among others). A size of the unit cell $l = 200\mu$m of two times the length of the fibers is chosen and the unit cell is discretized on a $N = 384$ grid so that the error due to representativity is of the same magnitude as the error due to discretization. To assess the error due to representativity, different sizes of the unit cell l and nine samples of each size were generated (Fig. 5.9a). Since the distribution of orientations of fibers is chosen as uniform, the overall behavior is expected to be isotropic. For a given size, numerical hydrostatic and shear creep tests are performed to estimate the average of overall responses and the relative standard deviation of these responses. As l increases, the average of nine overall responses does not change much and the standard deviation of these nine responses decreases(Fig. 5.9b). The standard deviation of the elastic strain of an hydrostatic test is much lower that the standard deviation of the elastic strain of a shear test, as if the representative elementary volume for the shear test were larger than the one for a hydrostatic test. Two reasons could explain such a discrepancy. On the one hand, the Poisson's ratio of the matrix, the soft phase, is twice as large as the one of the fibers. Hence the ratio of bulk moduli is lower than the ratio of shear moduli : the contrast between phases is larger if shear is considered. On the other hand, when an hydrostatic test is performed,

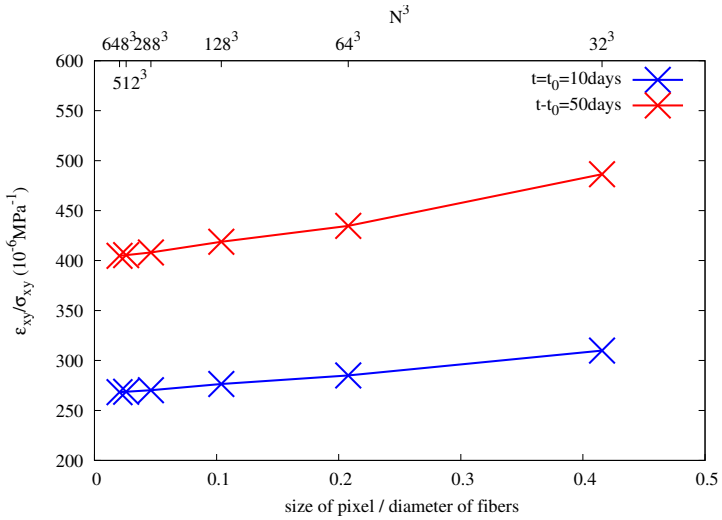


FIGURE 5.7 – The estimated instantaneous strain ε_{xy} and the estimated strain 50 days after loading are plotted as a functions of the grid size N. A grid size corresponds to a ratio between the size of the pixel and the diameter of the fibers.

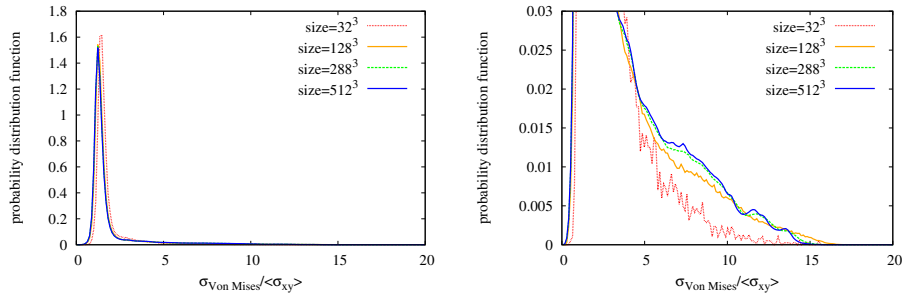
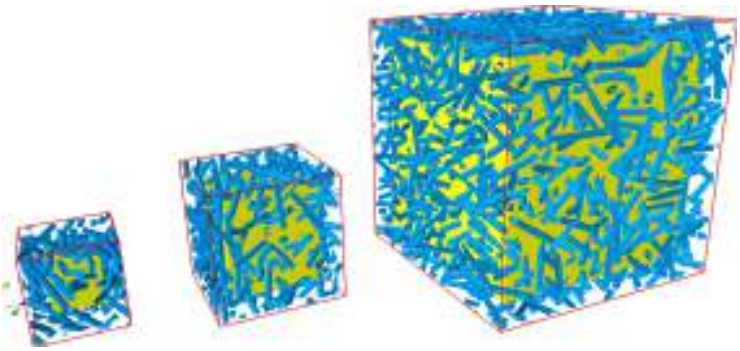


FIGURE 5.8 – The elastic response to a shear stress at $t_0 = 10$ days is computed and probability distribution functions of the Von Mises stress are displayed for different grid size N. On the right : the prediction of large stress concentrations becomes more and more accurate as the grid size N increases. The focus on large stress concentrations helps defining an accurate failure criteria.

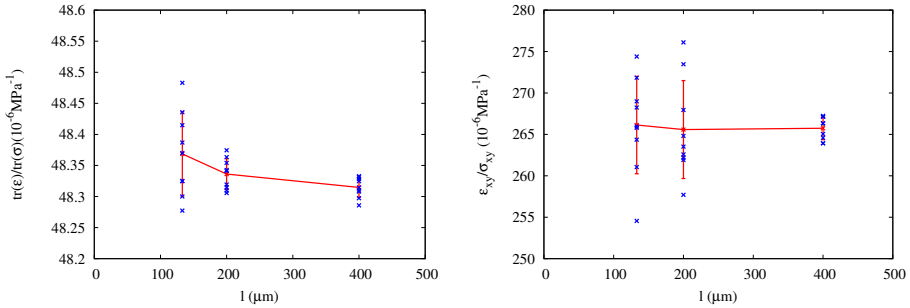
all fibers are acting as reinforcements, independently of their orientation. In the shear test σ_{xy}, fibers aligned along z exhibit lower stress concentrations than fibers in the xy plane. Hence, the overall result might be more sensible to the set of orientations of fibers in the cubic cell.

It should be mentioned that the relative standard deviations are lower than the error due to space discretization (5%) : the later may be considered as a bias. The average overall results are stable because the grid size N was proportional to l. Relative standard deviations increase during numerical creep tests, as the contrast between tangent stiffnesses of inclusions and matrix increases. The estimate of the probability distribution function of the Von Mises stress depends

slightly on l : it gets smoother as l increases (Fig. 5.10).



(a) Unit cells of sizes $l = 133\mu$m, 200μm and 400μm are respectively discretized on grids of sizes $N = 128, N = 192$ and $N = 384$.



(b) On the left, the overall responses to an hydrostatic stress is displayed as a function of the size of the unit cell. On the right, a shear stress is considered. The red lines and error bars correspond to averages and standard deviation respectively. As the size of the unit cell increases, the estimate of the overall response becomes less variable.

FIGURE 5.9 – The elastic response of unit cells of different sizes l at $t_0 = 10$ days is computed.

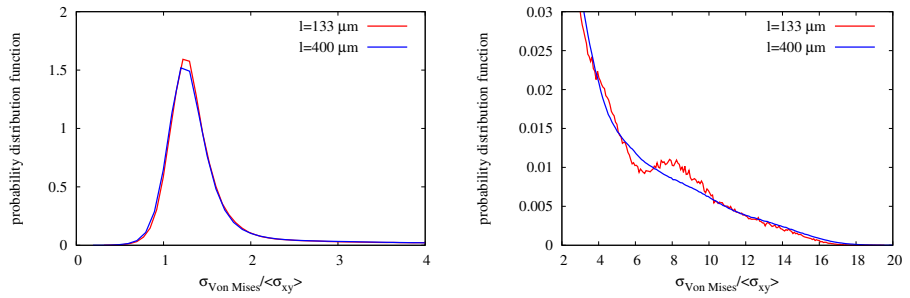


FIGURE 5.10 – Left : the estimate of the probability distribution function of the Von Mises stress depends slightly on the size of the unit cell l (left). Right : a focus on large stress concentrations is displayed. The hump at $l = 133\mu$m is due to a lack of representativity of the unit cell. As l increases, the probability distribution becomes smoother.

5.3 Results and discussions

5.3.1 Overall properties

The results of the Hashin-Shtrikman lower bound in the Laplace-Carson space are first compared to 3D numerical results featuring spherical inclusions or short cylindrical inclusions in figure 5.11, the volume fraction of inclusions being 20%. The length of short cylindrical inclusions is equal to their diameter. For the hydrostatic creep test, the numerical time-dependent strains are close to the one estimated by the Hashin-Shtrikman bound, while a discrepancy is to be noticed for the shear creep test. This discrepancy may be attributed to the contrast between the mechanical behavior of phases : the elastic bulk modulus of glass fibers is 8.1 times the one of PVC and the shear modulus of glass fiber is 28.3 times the one of PVC. During viscoelastic 3D computations, this contrast changes at each time step : the ratio of bulk moduli changes from 8.1 to 10.9, while the ratio of shear moduli changes from 28.3 to 36.5. For the shear creep test, the time-dependent strains depends slightly on the shape of inclusions : short cylindrical inclusions induce a small decrease of the time-dependent strain compared to spherical inclusions.

For 100μm-long fibers, the aspect ratio of fibers induces a larger difference between the behavior estimated by the Hashin-Shtrikman bound and the one estimated by 3D numerical computations. The Hashin-Shtrikman bound does not take account of the shape of inclusions. Hence, the shape of inclusions is a good candidate to explain the difference between the overall strain estimated by the Hashin-Shtrikman bound and the one estimated by numerical simulations. Indeed, the Mori-Tanaka estimate, with an aspect ratio identical to the one of the fibers (10), is very close to the result of numerical simulations (Fig. 5.12).

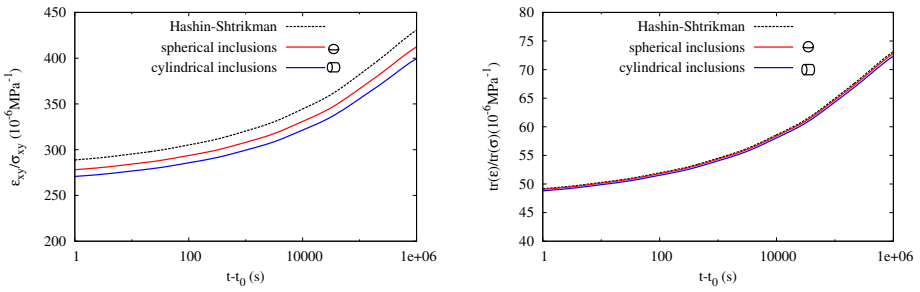


FIGURE 5.11 – Overall responses estimated by the Hashin-Shtrikman scheme (dashed lines) and 3D numerical computations (solid lines) for glass-reinforced PVC featuring different shapes of inclusions. A shear creep test $\sigma_{xy} = 1$ (left) and a hydrostatic creep test $tr(\sigma) = 1$ (right) are performed. The volume fraction of fibers is 20%. $N = 384$, $l = 80\mu$m.

A parametric study of the influence of the volume fraction of inclusions (Fig. 5.13) and of the aspect ratio (Fig. 5.12) of fibers is performed. The range of aspect ratio and volume fraction is limited by the Random Sequential Algorithm applied to build the unit cells. Mori-Tanaka estimates are close to numerical results, as long as the aspect ratio is lower than 10 and the volume fraction

lower than 20%.

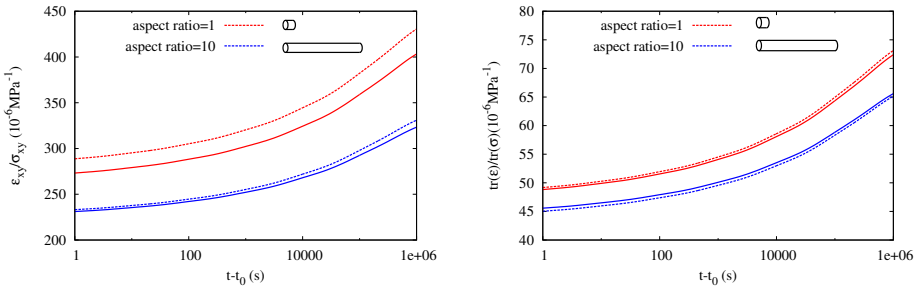


FIGURE 5.12 – Overall responses estimated by the Mori-Tanaka scheme (dashed lines) and 3D numerical computations (solid lines) for fiber-reinforced polymers featuring different lengths of fibers. A shear creep test $\sigma_{xy} = 1$ (left) and a hydrostatic creep test $tr(\sigma) = 1$ (right) are performed. The Mori-Tanaka scheme manages to capture the influence of the aspect ratio. The volume fraction of fibers is 20%.

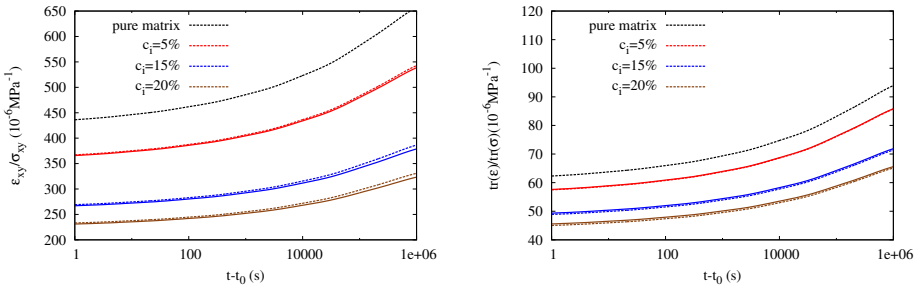


FIGURE 5.13 – Overall responses estimated by the Mori-Tanaka scheme (dashed lines) and 3D numerical computations (solid lines) for fiber-reinforced polymers featuring different volume fractions of fibers. A shear creep test $\sigma_{xy} = 1$ (left) and a hydrostatic creep test $tr(\sigma) = 1$ (right) are performed. The Mori-Tanaka estimates match the numerical one. The length of fibers is 100μm, corresponding to an aspect ratio of 10.

5.3.2 Stress concentrations

The 3D numerical computations produce estimates of stress concentrations (Fig. 5.14). Hence, it is possible to display the Von Mises stress within the matrix and the Rankine criteria within the fibers. It is shown here that there is little difference between the instantaneous Von Mises stress and the one 50 days after loading (Fig. 5.15). The Von Mises stress slightly decreases far from the fibers and increases close to the fibers. The fibers already bear much of the loading right after loading time and it increases slightly with time. It is clearly visible on the probability distribution function of the Rankine criteria during an hydrostatic creep test. Since no orientation of fibers is favored by this loading,

stress concentrations in fibers trigger a rise on the probability distribution function and this rise shifts toward larger stress concentrations during the creep test. On the contrary, in case of a shear creep test, there is no rise on the probability distribution function and this distribution does not change over time elapsed since loading. A small increase of large stress concentrations in the matrix is visible on the probability distribution function of the Von Mises stress in the matrix.

In case of an hydrostatic loading, the Mori-Tanaka model expects the Rankine criteria to be equal in all fibers. Yet, the numerical computations exhibit a wide distribution of the Rankine criteria in the fibers (Fig. 5.15). Though the overall strains predicted by these models are similar, stress concentrations may be different.

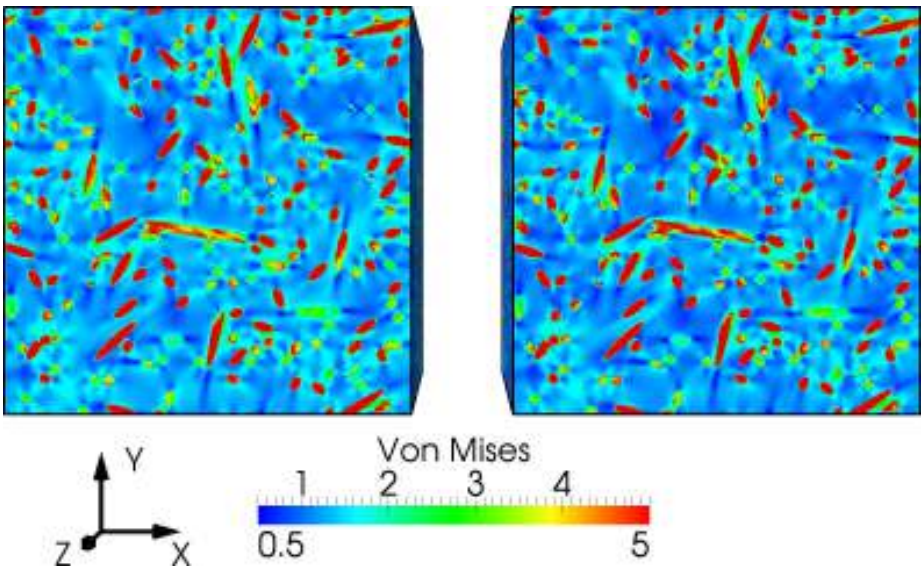


FIGURE 5.14 – Stress concentrations in a a fiber-reinforced polymer may be estimated by 3D numerical computations. A numerical shear creep test $\sigma_{xy} = 1$ is performed and the Von Mises stress is displayed at $t - t_0 = 0$ (left) and $t - t_0 =$ 50 days (right). It is noticeable that the Von Mises stress is highly variable in the matrix. These stress concentrations do not change much over time : the fibers already bear much of the loading at the time of loading. $N = 384$, $l = 200\mu$m

5.3.3 Prediction of lifetime of the material under tensile stress

A tensile stress σ_l is applied to the material and both the overall strain and the Rankine criteria in fibers are estimated. According to the Mori-Tanaka estimate of stress concentrations, the fibers aligned with the direction of loading feature the largest Rankine criterion $\sigma_R(t)$ and they are expected to fail first Hashimoto et al. (2012). The Von Mises stress in these fibers increases with time elapsed since loading, which explains the delayed rupture of the material. Since the model remains in the range of linear viscoelasticity, a single run is necessary

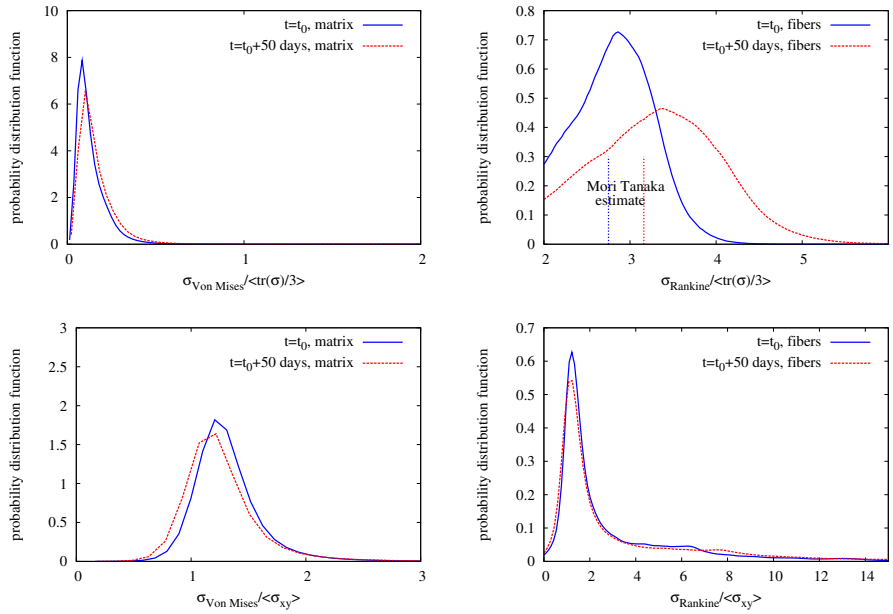


FIGURE 5.15 – The estimate of the probability distribution function of the Von Mises stress stress in the matrix and Rankine criteria in fibers during an hydrostatic creep test (top) and a shear creep test (bottom). Stress concentrations do not change largely during creep tests : inclusions already bear a large part of the loading at $t = t_0$. Top right : the Rankine criteria increase in fibers during an hydrostatic creep test. The numerical results are compared to the Mori-Tanaka estimates. $N = 384$, $l = 200\mu$m

to define a ratio $r(t) = \sigma_R(t)/\sigma_l$ between the Rankine criterion and the level of loading and this ratio increases with time. A critical stress of fibers σ_c is introduced and the lifetime t_l under load $\sigma_{l'}$ is such that $r(t_l)\sigma_{l'} = \sigma_c = r(0)\sigma_0$, where σ_0 is the tensile strength of the material. The Mori-Tanaka estimate predicts a decrease of the lifetime as the creep load increases (Fig. 5.16), which is consistent with experiments. The estimated strain at failure is almost uniform in time. The critical stress of fibers σ_c^{MT} is set to 2.4GPa to match the experimental instantaneous tensile strength of the material.

3D numerical computations also deliver an estimate of the Rankine criteria in the microstructure. As in Lavergne et al. (2013), the failure of the specimen is expected to occur when the Rankine criterion is above σ_c^{3D} in a volume fraction of fiber equal to c_R^{3D}. Note that, using the maximum value of the criterion in all the specimen ($c_R^{3D} \to 0$) would make the result too volatile and using a large c_R^{3D} would not be realistic. The volume fraction c_R^{3D} being set, σ_c^{3D} is adjusted to match the overall instantaneous tensile strength of the material (Fig. 5.17). If σ_c^{3D} is set to 2.4GPa, a c_R^{3D} of 0.5% is required to match the instantaneous tensile strength. Yet, for a given creep load, the numerical simulations predict a shorter lifetime than the Mori-Tanaka estimate using the same value $\sigma_c^{MT} = 2.4$GPa. Indeed, the fact that the Mori-Tanaka estimate is based on the Rankine criterion of the average stress for a given direction is a reason of this discrepancy : the 3D

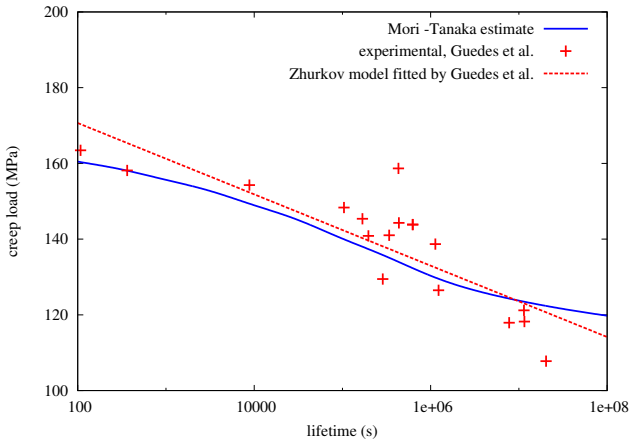


FIGURE 5.16 – The Mori-Tanaka estimate of the lifetime versus the creep load. The volume fraction of fibers is 15% and their aspect ratio is 300, corresponding to 3mm-long fibers. The material is loaded at 10 days. The strength of fiber is set at $\sigma_c^{MT} = 2.4$GPa so that the estimated instantaneous tensile strength is close to the one measured by Guedes et al.Guedes (2012). The Zhurkov model of creep failure Zhurkov (1984) is a straight line $t/\tau = e^{U-\gamma\sigma}$ adjusted by Guedes et al. on their experimental data (τ=3600s, U=38.1MPa,$\gamma = 0.24$.

numerical estimate accounts for the heterogeneity of the stress field in the fibers. A larger c_R^{3D} mitigates the effect of stress concentrations : for $c_R^{3D} = 2\%$ and $\sigma_c^{3D} = 1.2$GPa, the numerical estimate of creep failure is close to one obtained by the Mori-Tanaka scheme, which requires the Rankine criteria of the average stress in fiber parallel to the loading direction to be $\sigma_c^{MT} = 2.4$GPa. Hence, the Mori-Tanaka model is a practical tool to estimate the creep failure of the composite material.

Aging affects the Mori-Tanaka estimate of creep failure in the same way it changes the creep strain : the composite material is aging viscoelastic and can be modeled by the time-shift method, the μ parameter being the one identified on the creep tests of the polymer matrix. The lifetime of the pipe is expected to increase if it is loaded later than 21 days after quenching.

A parametric study of the effect of the volume fraction of fibers and fiber length on the Mori-Tanaka estimate of creep failure is performed (Fig. 5.18). The tensile strength of the glass fibers is set at $\sigma_c^{MT} = 2.4$GPa and the composite material is loaded at 21 days. A raise of the volume fraction of inclusions induces a raise of the tensile strength of the material and its lifetime. If the fibers are more than 1mm long, the fiber length has little influence on the tensile strength and creep failure. On the contrary, fibers smaller than 300μm may enable larger tensile strengths and improve durability. In this case, larger strains may appear and the durability might be limited by the mechanical properties of the polymer or by the quality of bonding between fibers and polymers, which are not taken account of in the present study.

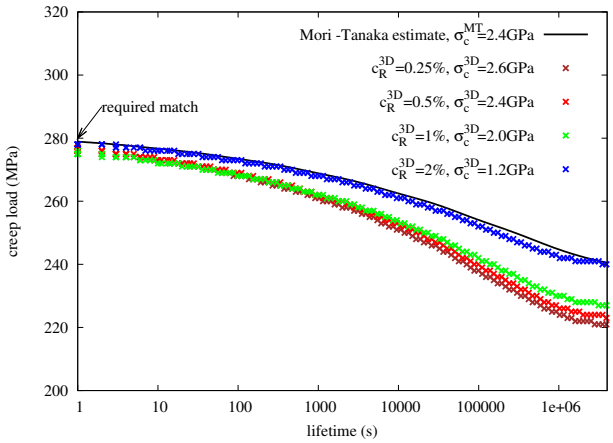


FIGURE 5.17 – The Mori-Tanaka estimate and numerical estimates of the lifetime versus the creep load. The volume fraction of fibers is 15% and their aspect ratio is 10, corresponding to 100μm-long fibers. The material is loaded at 10 days. The grid size is $N = 384$ and $l = 200\mu$m. The 3D criteria depends on parameters c_R^{3D} and σ_c^{3D}, which can be adjusted to match the Mori-Tanaka estimate.

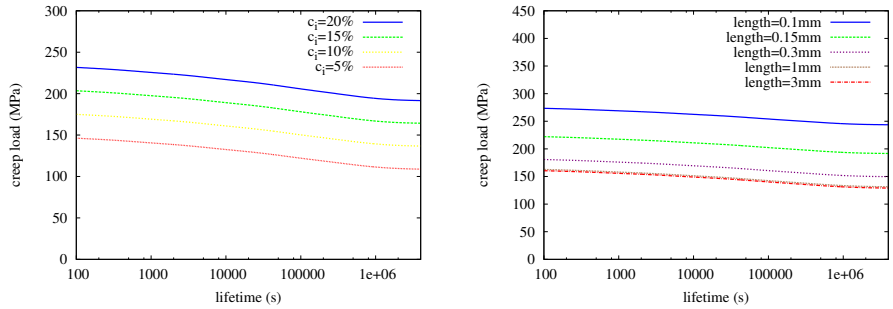


FIGURE 5.18 – The Mori-Tanaka estimate of the lifetime versus the uniaxial traction creep load. Left : effect of the volume fraction of fibers, the length of fibers being 1mm. Right : Effect of the length of fibers, the volume fraction of fibers being 15%. If fibers are more than 1mm long, the size of the fiber has little effect on tensile strength or creep failure. Fiber lengths lower than 300μm may improve the mechanical performance of the composite, but the polymer may become the limiting factor.

5.3.4 Discussion

The model presented in this article has several limitations compared to other models in the literature. It has been mentioned that it does not account for the statistical variability of the strength of fibers Chiao and Moore (1971); Phoenix (2000) and the effect of moisture on the stress corrosion cracking of glass fibers Barbero and Damiani (2003); Khennane and Melchers (2003) is ignored. Moreover, this model does not describe the progressive rupture of the fibers until the final rupture of the specimen : models have been designed to

investigate damage phenomena Sasayama et al. (2013); Hashimoto et al. (2012), by including damage in the matrix or debonding. Regarding uniaxial composites, the shear lag model Hedgepeth (1961); Beyerlein and Landis (1999) may be extended to viscous matrices Blassiau et al. (2009); Kotelnikova-Weiler et al. (2013) to investigate the load transfer after the breakage of a fiber and explain delayed failure of the composite under constant load. The present study remains in the range of the linear strain theory, which is not seen as a limitation, since the experimental strain at failure is less than 2% Guedes et al. (2010). Numerical strain at failure reaches 7% if 100μm-long fibers are considered. In such cases, it is likely that either damage in the matrix or fiber debonding would have to be considered, as performed in Yang et al. (2013).

Regarding the ability of the Mori-Tanaka estimate to depict the effect of short fibers on creep strains, our results is limited to volume fraction of fibers lower than 20%. In this range, the Mori-Tanaka estimate is expected to be close to the one of Lielen Lielens et al. (1998). Hence, our results comply with existing results in the range of elasticity III and Liang (1999); Moussaddy (2013); Ghossein and Lévesque (2014).

The fiber failure may be defined by using the axial stress Baxevanis and Charalambakis (2010); Hashimoto et al. (2012). It may be the case in the shear-lag model, where fibers may be considered as springs Beyerlein and Landis (1999). The use of the Rankine criteria should deliver comparable results : it has been observed on our 3D computational results that the maximal principal stress is almost parallel to the axis of the fiber during an uniaxial tensile creep test (Fig. 5.19).

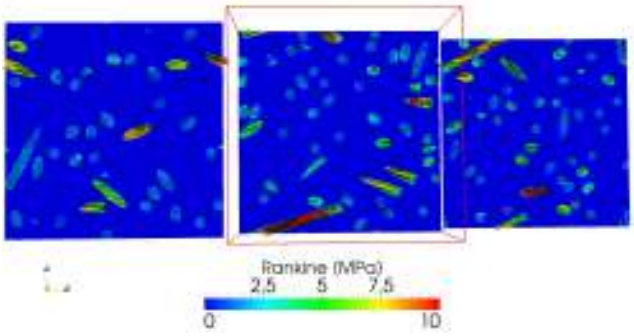


FIGURE 5.19 – The Rankine criteria in fibers as computed by 3D numerical computation of an uniaxial creep test $\sigma_x = 1$MPa. Three slices are displayed. Fibers parallel to axis x feature larger Rankine criteria. Black lines correspond to the direction of the maximal principal stress in fiber. This direction is parallel to the axis of the fiber.

Conclusion

The results of full field computations and mean-field homogenization methods have been compared in the range of viscoelasticity, on a fiber reinforced polymer. If the volume fraction of fibers is lower than 20% and the behavior of

the matrix similar to the one of PVC, combining the Laplace-Carson transform on the equivalent time and the Mori-Tanaka scheme was sufficient to produce an accurate estimate of the overall time-dependent strain.

3D numerical simulations produce estimates of stress concentrations. It has been shown that stress concentrations may change during a creep test. In particular, the fibers bear an increasing part of the load : an increase of Rankine criteria in fibers is clearly visible during an hydrostatic creep test. The Von Mises stress may slightly increase in the viscoelastic matrix as well, on the high side of the Von Mises stress probability distribution function, even if the most part of the matrix is relaxing. Such a feature might trigger a delayed damage of the material. As 3D numerical computations and the Mori-Tanaka scheme lead to similar estimate of creep failure based on the Rankine criteria, the Mori-Tanaka model remains an efficient and practical tool to estimate the creep failure of the composite material.

Regarding 3D numerical simulations, further developments are necessary to properly handle the case of long fibers such as the one used in the automotive industry or pipes.

Chapitre 6

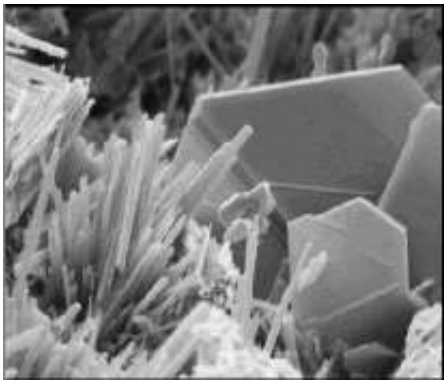
An approximate multiscale model for aging viscoelastic materials exhibiting time-dependent Poisson's ratio

A multi-scale homogenization scheme is proposed to estimate the time-dependent strains of fiber-reinforced concrete. This material is modeled as an aging linear viscoelastic composite material featuring ellipsoidal inclusions embedded in a viscoelastic cementitious matrix characterized by a time-dependent Poisson's ratio. To this end, the homogenization scheme proposed in (Lavergne et al., 2016) is adapted to the case of a time-dependent Poisson's ratio and it is successfully validated on a non-aging material computed in the Fourier domain. Finally, the new extended estimates of the time-dependent strains of fiber-reinforced concrete are compared to the experimental measurements of Chern and Young(Chern and Young, 1989)and the effects of the volume fraction and aspect ratio of the steel fibers on the time-dependent strains of fiber-reinforced concrete are investigated.

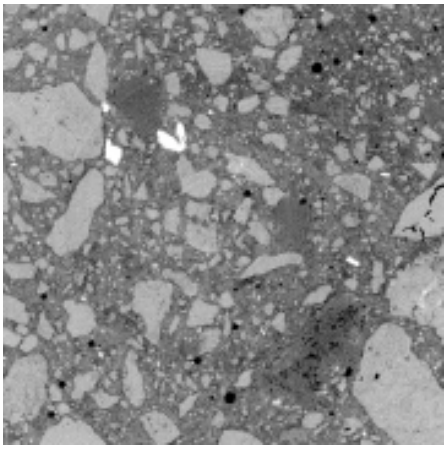
Introduction

Fiber-reinforced concrete can be modeled as an aging linear viscoelastic materials : a uniform stress induces a proportional time-dependent strain. Moreover, it can be described as a matrix-inclusion composite material. Two scales are distinguished : the mesoscopic scale (Fig. 6.1b), where inclusions larger than 100μm are accounted for, and the microscopic scale of the cement paste (Fig. 6.1a). The basic creep of concrete stems from the microscopic scale (Vandamme and Ulm, 2013) and homogenization methods have been applied to bridge the gap between the scales (Sanahuja et al., 2009; Scheiner and Hellmich, 2009; Šmilauer and Bažant, 2010; Li et al., 2015a). Some aspects of fiber-reinforced

concrete make it challenging.



(a) A SEM image of a cement paste performed by Walker et. al. (Walker et al., 2006). The image shows ettringite needles and also the plate-like morphology of portlandite.



(b) A 5.7mm×5.7mm slice of a X-ray tomography of concrete performed at the Navier Laboratory. The aggregates and the trapped air can be distinguished from the cement paste.

The aspect ratio of steel fibers in fiber-reinforced concrete can be as large as $a/b = 100$ (Chern and Young, 1989) : full 3D numerical simulations (Šmilauer and Bažant, 2010; Lavergne et al., 2015a; Li et al., 2015a) would hardly take account of such aspect ratios for the moment since the RVE would be too large and the details too small to be accurately depicted.

Accounting for the aging viscoelastic properties of the matrix is still a challenge for homogenization schemes. The Mori–Tanaka (Mori and Tanaka, 1973; Benveniste, 1987) scheme and the Ponte Castañeda–Willis scheme (Castañeda and Willis, 1995) have been designed to retrieve the elastic behavior of composites featuring ellipsoidal inclusions. These schemes are coupled to the correspondence principle (Lee, 1961; Mandel, 1966) to handle the case of non-aging viscoelastic materials (Wang and Weng, 1992; Brinson and Lin, 1998; Lévesque et al., 2007). Nevertheless, modern iterative homogenization methods operate in the time domain (Lahellec and Suquet, 2007; Tran et al., 2011; Masson et al., 2012; Berbenni et al., 2015) to avoid inverting the Laplace-Carson transform.

Regarding aging viscoelastic materials, a closed-form solution has been proposed by Sanahuja(Sanahuja, 2013b) to handle the case of spherical inclusions embedded in an aging linear viscoelastic matrix. Moreover, a reliable and efficient numerical procedure has been proposed to estimate the overall viscoelastic behavior of the composite material : it does not require inverting the Laplace-Carson transform and is able to handle any compliance. Sanahuja's closed-form solution has recently been extended to the case of elongated or flat inclusions embedded in a matrix featuring a time-independent creep Poisson's ratio (Lavergne et al., 2016). This restriction entails the scope of the extended method. Indeed, it cannot be introduced as-is in a multi-scale homogenization procedure of fiber-reinforced concrete, since it is likely that the estimated viscoelastic behaviors of materials at the mesoscopic scale do not feature a time-independent Poisson's ratio(Li et al., 2015a). Consequently, there is a need to extend the analytical

homogenization solutions (Sanahuja, 2013b; Lavergne et al., 2016) to the case of elongated or flat inclusions embedded in matrices featuring a time-dependent Poisson's ratio.

This paper contains two original contributions :

- In the first section, the extended Sanahuja's method for a matrix featuring a time-independent Poisson's ratio is briefly recalled (Sanahuja, 2013b; Lavergne et al., 2016) and an approximated viscoelastic Eshelby's tensor for a matrix featuring a time-dependent Poisson's ratio is proposed. This approximated viscoelastic Eshelby's tensor is combined to the Mori–Tanaka homogenization scheme to estimate the time-depend strains of an asphalt concrete at 0°C (Di Benedetto et al., 2007). The estimate of the complex Young modulus is successfully compared to the corresponding estimate computed in the Fourier space, hence validating the proposed approximation of the viscoelastic Eshelby's tensor.
- In the second section, the proposed procedure is applied to a fiber-reinforced concrete. The estimates of the time-dependent strains are compared to the experimental data of Chern and Young(Chern and Young, 1989). Finally, the effects of the volume fraction and aspect ratio of the steel fibers on the time-dependent strains of fiber-reinforced concrete are estimated.

6.1 Semi-analytical homogenization of aging viscoelastic materials

6.1.1 Aging viscoelasticity and time-independent Poisson's ratio

Aging viscoelasticity

The stress tensor $\sigma(t)$ in a viscoelastic material depends on the history of strain tensor $\varepsilon(t)$. If the constitutive law is linear, the Boltzmann superposition principle states that the material properties are defined by a relaxation function (fourth order tensor), $\mathbf{C}(t,t')$, such that :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{C}(t,t') d\varepsilon(t') \tag{6.1}$$

where the integral is a Stieltjes integral. Similarly, the compliance function (fourth order tensor), $\mathbf{J}(t,t')$ is such that :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{J}(t,t') d\sigma(t') \tag{6.2}$$

If the elapsed time since loading is the only relevant parameter, the material is non-aging :

$$\mathbf{J}(t,t') = \mathbf{\Phi}(t-t') \tag{6.3}$$

However, the assumption of non aging is not made in the following derivations. If the viscoelastic behavior is isotropic, a spherical relaxation function $K(t,t')$ and a deviatoric relaxation function $G(t,t')$ are defined, such that :

$$\begin{array}{rcl} p(t) & = & \int_{-\infty}^{t} 3K(t,t') de(t') \\ \sigma^d(t) & = & \int_{-\infty}^{t} 2G(t,t') d\varepsilon^d(t') \end{array} \tag{6.4}$$

where $e(t) = tr(\varepsilon(t))/3$, $p(t) = tr(\sigma(t))/3$. The tensors $\sigma^d(t)$ and $\varepsilon^d(t)$ are respectively the deviatoric parts of $\sigma(t)$ and $\varepsilon(t)$:

$$\begin{array}{rcl} \sigma^d_{ij}(t) & = & \sigma_{ij}(t) - p(t)\delta_{ij} \\ \varepsilon^d_{ij}(t) & = & \varepsilon_{ij}(t) - e(t)\delta_{ij} \end{array} \tag{6.5}$$

where δ_{ij} is the Kronecker symbol. Similarly, the spherical part $k(t,t')$ and the deviatoric part $g(t,t')$ of the compliance are defined, such that :

$$\begin{array}{rcl} e(t) & = & \int_{-\infty}^{t} 3k(t,t')dp(t') \\ \varepsilon^d(t) & = & \int_{-\infty}^{t} 2g(t,t')d\sigma^d(t') \end{array} \tag{6.6}$$

The aging viscoelastic constitutive phases of the composite materials considered in (Lavergne et al., 2016) are supposed to have a time-independent Poisson's ratio ν, defined as :

$$\nu = \frac{3K(t,t') - 2G(t,t')}{2(3K(t,t') + G(t,t'))} \tag{6.7}$$

Hence, the relaxation tensors of these materials have the following property(Hilton and Yi, 1998) :

$$\mathbf{C}(t,t') = \mathbf{C}(0,0)f(t,t') \tag{6.8}$$

where $\mathbf{C}(0,0)$ is the instantaneous elastic stiffness at $t = 0$ and $f(t,t')$ is a scalar function such that $f(0,0) = 1$.

6.1.2 Existing framework for homogenization

Eshelby's solution for aging viscoelastic materials

The results presented in (Lavergne et al., 2016) are briefly recalled in the following paragraphs. Let us consider here an elastic solid of stiffness $\mathbf{C}(0,0)$ that undergoes a uniform eigenstrain ε^* in a bounded domain V of characteristic function $\chi_V(x)$. Because of the linearity of the equations governing local strain and stress fields, the strain $\varepsilon(x)$ at any point x in the body is a linear function of the eigenstrain ε^* :

$$\varepsilon(x) = \mathbf{S}(x) : \varepsilon^* \tag{6.9}$$

Let us consider now an aging viscoelastic solid of relaxation tensor $\mathbf{C}(0,0)f(t,t')$ that undergoes an history of eigenstrain $\varepsilon^*(t)$ in the bounded domain V. The strain field history $\varepsilon(t,x) = \mathbf{S}(x) : \varepsilon^*(t)$ is the solution to the aging viscoelastic problem(Lavergne et al., 2016). In particular, if the bounded domain V is of ellipsoidal shape, Eshelby(Eshelby, 1957) showed that the tensor $\mathbf{S}(x)$ is uniform on the inclusion and Eshelby's tensor $\mathbf{S}$ is defined. Consequently, for all eigenstrain histories $\varepsilon^*(t)$, the uniform strain field in the ellipsoidal inclusion $\varepsilon(t)$ reads :

$$\varepsilon(t) = \mathbf{S} : \varepsilon^*(t) \tag{6.10}$$

Definition of Volterra's tensorial operators and properties

The tensorial Volterra operators described by Sanahuja(Sanahuja, 2013b) have interesting properties which ease further computations. Let $\mathbf{C}_a(t,t')$ and

$\mathbf{C}_b(t,t')$ be two relaxation tensors (order 4) and $\varepsilon(t)$ be an history of the strain field (tensor of order 2). The tensorial Volterra operator of order 2, noted as $\overset{\circ}{:}$ is the operator such that :

$$\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{C}_a(t,t') : d\varepsilon(t') \tag{6.11}$$

It must be noticed that :

$$H(t-t')\mathbf{1}_4 \overset{\circ}{:} \varepsilon = \varepsilon \tag{6.12}$$

where $H(t-t')$ is Heaviside's function and $\mathbf{1}_4$ is the unit tensor of order 4. The tensorial Volterra operator of order 4 is such that :

$$\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_b(t,t') = \int_{\tau=-\infty}^{t} \mathbf{C}_a(t,\tau) : d_\tau \mathbf{C}_b(\tau,t') \tag{6.13}$$

Some properties of these operators are listed in the current section. Their proofs, in (Lavergne et al., 2016), rely on the causality principle. Obviously, these operators are bilinear. Moreover, the right and left identity of the tensorial Volterra operator of order 4 is $H(t-t')\mathbf{1}_4$:

$$H(t-t')\mathbf{1}_4 \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_a = \mathbf{C}_a \tag{6.14}$$

$$\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} H(t-t')\mathbf{1}_4 = \mathbf{C}_a \tag{6.15}$$

These operators can be associated :

$$(\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_b) \overset{\circ}{:} \varepsilon = \mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} (\mathbf{C}_b \overset{\circ}{:} \varepsilon) \tag{6.16}$$

The tensorial Volterra operator of order 4 is associative :

$$\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} (\mathbf{C}_b \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_c) = (\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_b) \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_c \tag{6.17}$$

Nevertheless, the Volterra operator is not commutative. The inverse of the relaxation tensor $\mathbf{C}_a$ is the compliance tensor $\mathbf{C}_a^{-1}$ such that :

$$\mathbf{C}_a^{-1} \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_a = H(t-t')\mathbf{1}_4 \tag{6.18}$$

The left and right inverses are equal since the Volterra operator is associative.

These notations are applied to the viscoelastic Eshelby's solution. The strain history in the inclusion ε reads :

$$\varepsilon = \mathbf{S} H \overset{\circ}{:} \varepsilon^* \tag{6.19}$$

The stress history in the inclusion reads :

$$\sigma = \mathbf{C} \overset{\circ}{:} (\varepsilon - \varepsilon^*) \tag{6.20}$$

6.1.3 The approximated viscoelastic Eshelby's tensor

The exact solution to the aging viscoelastic Eshelby's problem has been derived in (Lavergne et al., 2016) for material having a relaxation tensor complying with the property (6.8). Noticing that the variations of the Poisson's ratio of a compliance $\mathbf{J}(t,t')$ are limited, the idea is to represent this compliance as a

sum of a compliance featuring a time independent Poisson's ratio plus a small correction term. So the first step is to define a reference compliance $\mathbf{J}_m(t,t')$ with a time-independent Poisson's ratio.

The isotropic compliance tensor $\mathbf{J}(t,t')$ features a spherical part $k(t,t')$ and deviatoric part $g(t,t')$. Since the Poisson's ratio of the reference compliance $\mathbf{J}_m(t,t')$ is time-independent, its spherical part is $k_m(t,t')$ and its deviatoric part is $\alpha k_m(t,t')$ where α is a positive scalar. The scalar α and $k_m(t,t')$ are defined so as to minimize a difference between $\mathbf{J}(t,t')$ and $\mathbf{J}_m(t,t')$:

$$(\alpha, k_m(t,t')) = \underset{(\beta,k_r(t,t'))}{\arg\min} \int_t \int_{t'} \left(k(t,t') - k_r(t,t')\right)^2 + A\left(g(t,t') - \beta k_r(t,t')\right)^2 dt'dt \tag{6.21}$$

where the scalar $A > 0$ represents the relative weight of the spherical and deviatoric parts of the compliance. A is set to 1. This definition of the distance between $\mathbf{J}(t,t')$ and $\mathbf{J}_m(t,t')$ ensures that $\mathbf{J}(t,t')$ and $\mathbf{J}_m(t,t')$ are identical if and only if $\mathbf{J}(t,t')$ features a time-independent Poisson's ratio. Indeed, the application which associates the reference compliance $\mathbf{J}_m(t,t')$ to the compliance $\mathbf{J}(t,t')$ is idempotent.

By differentiating the expression with respect to $k_r(t,t')$, the minimum $(\alpha, k_m(t,t'))$ must satisfy the following equation :

$$k_m(t,t') - k(t,t') - \alpha g(t,t') + \alpha^2 k_m(t,t') = 0 \tag{6.22}$$

Hence, $k_m(t,t')$ is computed according to the following equation :

$$k_m(t,t') = \frac{k(t,t') + \alpha g(t,t')}{1+\alpha^2} \tag{6.23}$$

These two equations are combined and the result is differentiated with respect to α :

$$(\alpha^2 - 1) \int_t \int_{t'} k(t,t')g(t,t')dt'dt + \alpha \int_t \int_{t'} (k(t,t'))^2 - (g(t,t'))^2 dt'dt = 0 \tag{6.24}$$

The scalar α is a root of the quadratic polynomial presented in the previous equation. Consequently, α is :

$$\alpha = \frac{-\int_{t,t'} (k(t,t'))^2 - (g(t,t'))^2 dt'dt + \sqrt{\Delta}}{2\int_{t,t'} g(t,t')k(t,t')dt'dt} \tag{6.25}$$

In the equation above, Δ reads :

$$\Delta = \left[\int_{t,t'} (k(t,t'))^2 - (g(t,t'))^2 dt'dt\right]^2 + 4\left[\int_{t,t'} k(t,t')g(t,t')dt'dt\right]^2 \tag{6.26}$$

The scalar α is related to the Poisson's ratio of the reference material :

$$\nu_m = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2\alpha}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2\alpha}} \tag{6.27}$$

It must be noticed that α is positive and $-1 < \nu_m < 0.5$. Hence, the compliance of the reference material $\mathbf{J}_m(t,t')$ satisfies the thermodynamic restrictions listed in (Drozdov, 1998).

From a practical point of view, time is discretized into steps $0 < t_0 < ... < t_n$ and integrals are approximated as sums. For instance :

$$\int_t \int_{t'} k(t,t')g(t,t')dt'dt \approx \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} k(t_i,t_j)g(t_i,t_j) \tag{6.28}$$

Hence, the time-independent Poisson's ratio of $\mathbf{J}_m(t,t')$ depends on the compliance $\mathbf{J}(t,t')$ and considered time steps $0 < t_0 < ... < t_n$.

The second step is to define an approximated viscoelastic Eshelby's tensor for $\mathbf{J}(t,t')$ by using the reference compliance $\mathbf{J}_m(t,t')$. To this end, it is now assumed that the difference $\Delta\mathbf{J}(t,t') = \mathbf{J}(t,t') - \mathbf{J}_m(t,t')$ is small :

$$\Delta\mathbf{J}(t,t') << \mathbf{J}_m(t,t') \tag{6.29}$$

The tensor $\varepsilon^*(t)$ being the history of the eigenstrain in the ellipsoid χ_V, the Eshelby's solution for material $\mathbf{J}_m(t,t')$ is computed as $\varepsilon_m = \mathbf{S}_m(x)\overset{\circ}{:}\varepsilon^*$ and the stress field history $\sigma_m = \mathbf{J}_m^{-1}\overset{\circ}{:}\varepsilon_m$ is equilibrated. The Eshelby's solution for material $\mathbf{J}(t,t')$ is expressed as :

$$\begin{array}{rcl} \sigma & = & \sigma_m + \Delta\sigma \\ \varepsilon & = & \varepsilon_m + \Delta\varepsilon \end{array} \tag{6.30}$$

where the correction to the stress field $\Delta\sigma << \sigma_m$ and the correction to the strain field $\Delta\varepsilon << \varepsilon_m$ are assumed to be small. Consequently, $\Delta\sigma$ is equilibrated at all times and $\Delta\varepsilon$ is compatible at all times. Moreover, the following equations stand :

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon - \varepsilon^*\chi_V & = & (\mathbf{J}_m + \Delta\mathbf{J}(t,t'))\overset{\circ}{:}\sigma \\ \varepsilon_m - \varepsilon^*\chi_V & = & \mathbf{J}_m\overset{\circ}{:}\sigma_m \end{array} \tag{6.31}$$

The second equation is subtracted from the first and the term $\Delta\mathbf{J}\overset{\circ}{:}\Delta\sigma$ is neglected :

$$\Delta\varepsilon = \mathbf{J}_m\overset{\circ}{:}\Delta\sigma + \Delta\mathbf{J}\overset{\circ}{:}\sigma_m \tag{6.32}$$

Hence, $\Delta\varepsilon$ is Eshelby's solution for material $\mathbf{J}_m(t,t')$ and eigenstrain history $\Delta\varepsilon^* = \Delta\mathbf{J}(t,t'))\overset{\circ}{:}\sigma_m$. This eigenstrain history is uniform on the ellipsoidal inclusion, it's value being :

$$\Delta\varepsilon^* = \Delta\mathbf{J}\overset{\circ}{:}\mathbf{J}_m^{-1}\overset{\circ}{:}(\mathbf{S}_m - H\mathbf{1}_4)\overset{\circ}{:}\varepsilon^* \tag{6.33}$$

where $\mathbf{S}_m$ is the viscoelastic Eshelby's tensor of material $\mathbf{J}_m(t,t')$. The eigenstrain history is assumed to be null out of the ellipsoid to solve Eshelby's problem :

$$\Delta\varepsilon^*(t,x) \approx (\Delta\mathbf{J}\overset{\circ}{:}\mathbf{J}_m^{-1}\overset{\circ}{:}(\mathbf{S}_m - H\mathbf{1}_4)\overset{\circ}{:}\varepsilon^*)(t)\chi_V(x) \tag{6.34}$$

Finally, the approximated solution reads :

$$\varepsilon = (\mathbf{S}_m(x) + \mathbf{S}_m(x)\overset{\circ}{:}\Delta\mathbf{J}\overset{\circ}{:}\mathbf{J}_m^{-1}\overset{\circ}{:}(\mathbf{S}_m - H\mathbf{1}_4))\overset{\circ}{:}\varepsilon^* \tag{6.35}$$

The approximated localization tensor $S(x) = (\mathbf{S}_m(x) + \mathbf{S}_m(x)\overset{\circ}{:}\Delta\mathbf{J}\overset{\circ}{:}\mathbf{J}_m^{-1}\overset{\circ}{:}(\mathbf{S}_m - H\mathbf{1}_4))$ is uniform on the ellipsoid and an expression of the approximated viscoelastic Eshelby's tensor for the material $\mathbf{J}(t,t')$ reads :

$$\mathbf{S} = (\mathbf{S}_m + \mathbf{S}_m\overset{\circ}{:}\Delta\mathbf{J}\overset{\circ}{:}\mathbf{J}_m^{-1}\overset{\circ}{:}(\mathbf{S}_m - H\mathbf{1}_4)) \tag{6.36}$$

The equation above can be pictured as a linear approximation of the viscoelastic Eshelby's tensor on the space of compliances having $\mathbf{J}_m$ as reference compliance. Errors are triggered by assuming the eigenstrain history $\Delta\varepsilon^*$ to be null outside of the ellipsoid in equation (6.34) and by neglecting the term $\Delta\mathbf{J}\overset{\circ}{:}\Delta\sigma$ in equation (6.32). The effect of these approximations on the estimated overall response of a composite material is investigated in section 6.1.4, on a non-aging material, where a reference solution can be computed in the Fourier domain.

6.1.4 Applying the approximated scheme to non-aging asphalt concrete

Eshelby's reasoning to extend Eshelby's solution to the inhomogeneity problem of an ellipsoidal inclusion having an elastic stiffness differing from the one of the remainder is applied to aging viscoelastic materials as in (Lavergne et al., 2016). Furthermore, the Mori–Tanaka scheme is adapted to produce estimates of the compliance of composite viscoelastic materials such as asphalt concrete.

Extension to the inhomogeneous inclusion

Eshelby's reasoning to extend Eshelby's solution to the case of an inhomogeneous inclusion is still valid(Lavergne et al., 2016). The expression of a localization tensor for the inhomogeneous inclusion $\varepsilon^I = \mathbf{T}\overset{\circ}{:}E$ has been derived. It is similar to the elastic case, expect for the use of the Volterra's operator :

$$\mathbf{T} = \left[H\mathbf{1}_4 + \mathbf{S}\overset{\circ}{:}\mathbf{C}^{-1}\overset{\circ}{:}(\mathbf{C}_i - \mathbf{C})\right]^{-1} \tag{6.37}$$

This result is restricted to an isotropic viscoelastic reference material $\mathbf{C}$. It must be noticed that there is no restriction on $\mathbf{C}_i$. For instance, the relaxation function $\mathbf{C}_i$ can correspond to an anisotropic aging viscoelastic material.

The Mori–Tanaka homogenization scheme Mean field homogenization schemes considered in the present study are the Hashin–Shtrikman lower bound (Hashin and Shtrikman, 1963) or the Mori–Tanaka scheme (Mori and Tanaka, 1973), as reconsidered by Benveniste(Benveniste, 1987). These mean field methods rely on Eshelby's equivalent inclusion theory (Eshelby, 1957) to estimate the stress concentrations in ellipsoidal inclusions. The elastic Mori–Tanaka estimate $\mathbf{C}^e_{MT}$ accounts for the volume fraction of inclusions c_i and the distribution of orientations of inclusions $f(\psi)$. It is the solution of equation :

$$c_i \int_\psi f(\psi)(\mathbf{C}^e_{MT} - \mathbf{C}_i(\psi)) : \mathbf{T}^e(\psi)d\psi + (1 - c_i)(\mathbf{C}^e_{MT} - \mathbf{C}(0,0)) = 0 \tag{6.38}$$

Here, $\mathbf{C}_i(\psi)$ is the elastic stiffness of inclusions having orientation ψ ; $\mathbf{C}(0,0)$ is the elastic stiffness of the matrix ; $\mathbf{T}^e(\psi)$ is the strain concentration tensor expressing the strain in the inclusions having orientation ψ as a linear function of the strain at infinity, $\mathbf{C}(0,0)$ being the elastic stiffness tensor of the reference material. Tensors $\mathbf{C}_i(\psi)$ and $\mathbf{T}^e(\psi)$ are computed by rotating $\mathbf{C}_i(0)$ and $\mathbf{T}^e(0)$ using Bond transformations (Bond, 1943; Auld and Auld, 1973).

The equation (6.38) is extended to the case of viscoelastic materials (Sanahuja, 2013b) :

$$c_i \int_{\psi} f(\psi)(\mathbf{C}_{MT} - \mathbf{C}_i(\psi)) \overset{\cdot}{:} \mathbf{T}(\psi) d\psi + (1 - c_i)(\mathbf{C}_{MT} - \mathbf{C}) = 0 \tag{6.39}$$

where $\mathbf{T}(\psi)$ is derived by rotating $\mathbf{T}(0)$, which expression is given in equation (6.37). The relaxation tensor of the overall material $\mathbf{C}_{MT}$ is computed as :

$$\mathbf{C}_{MT} = \left[c_i \int_{\psi} f(\psi) \mathbf{C}_i(\psi) \overset{\cdot}{:} \mathbf{T}(\psi) d\psi + (1 - c_i)\mathbf{C} \right] \overset{\circ}{:} \left[c_i \int_{\psi} f(\psi) \mathbf{T}(\psi) d\psi + (1 - c_i) H \mathbf{1}_4 \right]^{-1} \tag{6.40}$$

Numerical computation Following (Sanahuja, 2013b) and (Bažant, 1972), time is discretized into steps $0 < t_0 < ... < t_n$ and a quadrature rule is used to approximate integrals and solve the Volterra's equation. Hence, strain history and stress history are represented as vectors $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon(t_0), ..., \varepsilon(t_i), ..., \varepsilon(t_n)]$ and $\underline{\sigma} = [\sigma(t_0), ..., \sigma(t_i), ..., \sigma(t_n)]$. The relaxation function $\mathbf{C}$ is represented as a matrix $\underline{\underline{C}}$ such that $\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}.\underline{\varepsilon}$. As written in references (Sanahuja, 2013b; Lavergne et al., 2016), its generic blocks of size 6×6 reads :

$$2\mathbf{C}_{ij} = \begin{cases} 2\mathbf{C}(t_0, t_0) & i = j = 0 \\ \mathbf{C}(t_i, t_0) - \mathbf{C}(t_i, t_1) & i > 0, j = 0 \\ \mathbf{C}(t_i, t_{j-1}) - \mathbf{C}(t_i, t_{j+1}) & i > 1, 0 < j < i \\ \mathbf{C}(t_i, t_{i-1}) + \mathbf{C}(t_i, t_i) & i > 0, j = i \\ 0 & i < j \end{cases} \tag{6.41}$$

This matrix is lower triangular per block, as could have been anticipated from the causality principle. An elastic behavior corresponds to a diagonal per block matrix. Computing $\mathbf{T}$ and $\mathbf{C}_{MT}$ resumes to matrix-matrix products, matrix-vector products and inverting a lower triangular per block matrices. It must be noticed that the last step is equivalent to time-stepping if blocked lines are inverted one after another(Huet, 1980).

Validation of the proposed method against a reference solution on asphalt concrete

The asphalt concrete is a composite material made of elastic inclusions embedded in a bitumen and bitumen is a non-aging viscoelastic material. Consequently, the overall complex Young modulus of asphalt concrete may be estimated by analytical homogenization in the Fourier space. Moreover, it is a good candidate to validate the method described above since bitumen does not feature a time-independent Poisson's ratio.

The non-aging viscoelastic behavior of bitumen The Poisson's ratio of asphalt concrete increases with temperature (Di Benedetto et al., 2007; Nguyen et al., 2013; Islam et al., 2015) and testing time (Kassem et al., 2013; Islam et al., 2015) and decreases with frequency (Di Benedetto et al., 2007; Nguyen et al., 2013; Gudmarsson et al., 2014; Islam et al., 2015). The viscoelastic behavior of bitumen is commonly assumed to be purely deviatoric (Christensen and Anderson, 1992; Yusoff et al., 2010; Behzadfar and Hatzikiriakos, 2013)

$\mathbf{E}_\infty$ (GPa)	$\mathbf{E}_0$ (GPa)	k	h	δ	β	τ_0(s)	ν_{infty}	ν_0
0	2.4	0.21	0.55	2.3	450	0.006	0.5	0.36

(a) 2S2P1D Model

$\mathbf{E}_0$ (GPa)	ν
60	0.25

(b) Limestone (Granger, 1995)

i	τ_i (s)	$\mathbf{E}_i$ (GPa)
0	instantaneous	2.00
1	1×10^{-5}	13.5
2	1×10^{-4}	6.4
3	1×10^{-3}	2.70
4	1×10^{-2}	8.5×10^{-1}
5	1×10^{-1}	2.90×10^{-1}
6	1×10^{0}	8.0×10^{-2}
7	1×10^{1}	2.49×10^{-2}
8	1×10^{2}	4.1×10^{-3}

(c) DBN Model (Kelvin chains)

TABLE 6.1 – Values describing the master curve of a pure 50/70 penetration grade bitumen (Di Benedetto et al., 2007) at 0°C. The DBN model is adjusted in the range [0.1Hz; 100000Hz]. The instantaneous Poisson's ratio is 0.38. All Poisson's ratio of Kelvin chains are 0.5.

to model asphalt concrete as a composite material by discrete elements(Collop et al., 2007; yi Zhu et al., 2014). This hypothesis is valid only at high temperature and low frequencies (Di Benedetto et al., 2007). The non-aging viscoelastic behavior of bitumen exhibits a change of Poisson's ratio with time elapsed since loading. It is well modeled by the 2S2P1D model (Olard and Di Benedetto, 2003; Md. Yusoff et al., 2010). In this model, the complex Young Modulus $E^*(\omega)$ is a function of the pulsation ω :

$$E^*(\omega) = E_\infty + \frac{E_0 - E_\infty}{1 + \delta(j\omega\tau)^{-h} + (j\omega\tau)^{-k} + (j\omega\beta\tau)^{-1}} \tag{6.42}$$

where $E_0, E_\infty, \delta, \tau, h, k$ and β are scalar parameters adjusted on experimental results. Values presented in table 6.1 describe the master curve of a pure 50/70 penetration grade bitumen (Di Benedetto et al., 2007) at 0°C. The bitumen of grade 50/70 is normally used in the construction of pavements in France (Alam and Hammoum, 2015). A complex viscoelastic Poisson's ratio $\nu^*(\omega)$ is accounted for thanks to the following equation (Di Benedetto et al., 2007) :

$$\nu^*(\omega) = \nu_\infty + (\nu_0 - \nu_\infty)\frac{E^*(\omega) - E_\infty}{E_0 - E_\infty} \tag{6.43}$$

where $\nu_\infty = 0.5$ and $\nu_0 = 0.36$ respectively corresponds to low frequencies and high frequencies. A series of non-aging Kelvin chains, named a DBN model (Olard and Di Benedetto, 2005) in the range of asphalt concrete, is adjusted to this compliance in the frequency domain, following the procedure of Di Benedetto et. al.(Di Benedetto et al., 2007). The obtained values for parameters of the Kelvin chains are displayed in table 6.1.

The change of the Poisson's ratio of bitumen from 0.38 to nearly 0.5 as the frequency is increased is a challenge for the approximated homogenization scheme proposed in the present article. Indeed, the value of 0.5 corresponds to

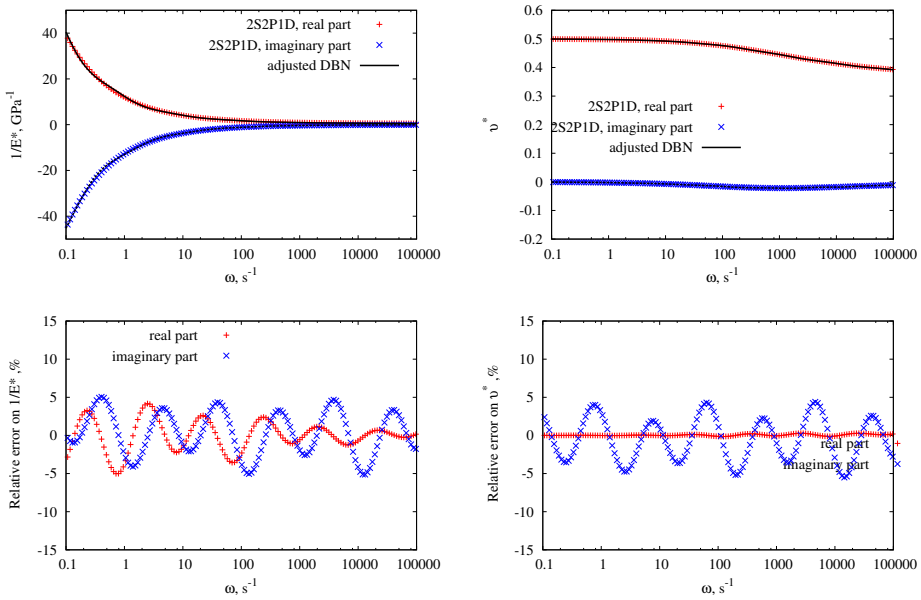


FIGURE 6.1 – The DBN model is adjusted to the 2S2P1D model of a bitumen (Di Benedetto et al., 2007) in the range [0.1Hz; 1000Hz]. The obtained real and imaginary parts of the complex Young Modulus (top left) and Poisson's ratio (top right) are displayed as functions of the pulsation w. The corresponding relative error are displayed below.

incompressible materials : in this range, a small change of the Poisson's ratio corresponds to a big change of the ratio $\alpha = \frac{3}{2}\frac{\nu_m+1}{1-2\nu_m}$ between the deviatoric part and the spherical part of the reference compliance $\mathbf{J}_m(t,t')$.

The Mori–Tanaka scheme in the Fourier space For a given pulsation ω, the Mori–Tanaka estimate of the complex stiffness $\mathbf{C}^{\omega}_{MT}$ accounts for the volume fraction of inclusions c_i and the distribution of orientations of inclusions $f(\psi)$. It is the solution of equation :

$$c_i \int_{\psi} f(\psi)(\mathbf{C}^{\omega}_{MT} - \mathbf{C}_i(\psi)) : \mathbf{T}^{\omega}(\psi) d\psi + (1-c_i)(\mathbf{C}^{\omega}_{MT} - \mathbf{C}^{\omega}_{m}) = 0 \qquad (6.44)$$

Here, $\mathbf{C}_i(\psi)$ is the elastic stiffness of inclusions having orientation ψ ; $\mathbf{C}^{\omega}_m$ is the elastic stiffness of the matrix corresponding to ω ; $\mathbf{T}^{\omega}(\psi)$ is the strain concentration tensor expressing the strain in the inclusions having orientation ψ as a linear function of the strain at infinity, $\mathbf{C}^{\omega}_m$ being the elastic stiffness tensor of the reference material. Tensors $\mathbf{C}_i(\psi)$ and $\mathbf{T}^{\omega}(\psi)$ are computed by rotating $\mathbf{C}_i(0)$ and $\mathbf{T}^{\omega}(0)$ using Bond transformations (Bond, 1943; Auld and Auld, 1973). Formula to compute $\mathbf{T}^{p}(0)$ in the local reference are recalled in references (Mura, 1987; Torquato, 2002; Pierard et al., 2007a).

Results on asphalt concrete On the one hand, for a given frequency, the complex Young modulus and the Poisson's ratio of an asphalt featuring 32%

of circular inclusions are estimated by the Mori–Tanaka scheme in the Fourier space. On the other hand, the proposed approximated homogenization scheme computes estimates of the time dependent strains in the time domain. Hence, a sinusoidal loading $\sigma_x(t) = sin(\omega t)$ is applied and the magnitude and the phase of the complex Young modulus are identified on the corresponding time-dependent strains $\varepsilon_x(t)$. $\varepsilon_x(t)$ is identified as the sum of a periodic signal, a transient state and an offset.

$$\varepsilon_x(t) = Asin(\omega t + \phi) + \frac{B}{0.001 + 100\omega^2 t^2} + O \tag{6.45}$$

where $|A|$ is related to the magnitude of $E(\omega)$ and ϕ to its phase. The scalars B and O corresponds respectively to the transient state and the offset.

The overall Young Modulus estimated by the proposed approximated homogenization scheme is close to the one obtained by using the Fourier method (Fig.6.2) : both the magnitude and the phase coincide. Indeed, the relative difference between the estimates of the magnitude of the inverse of the complex Young modulus is lower than 2% for frequencies between 0.1 Hz and 100000 Hz. Hence, the approximated viscoelastic Eshelby's tensor introduced to extend the analytical viscoelastic homogenization method to the case of a variable Poisson's ratio is validated. The proposed homogenization scheme is applied to an aging material in the next section.

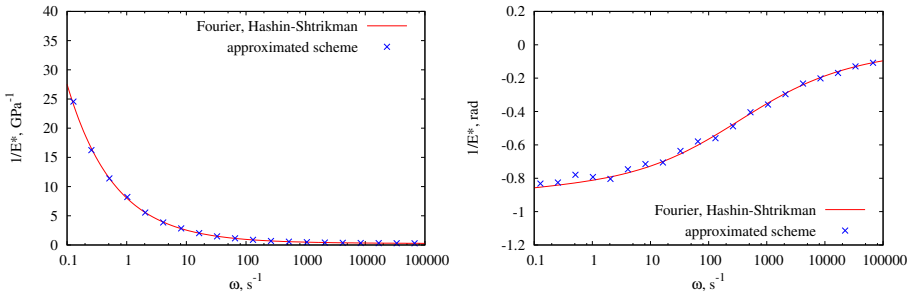


FIGURE 6.2 – The magnitude (left) and phase (right) of the inverse of the complex Young modulus estimated by the Fourier method and the proposed homogenization scheme coincide at all frequencies. ω.

6.2 Applying the proposed scheme to fiber-reinforced concrete

6.2.1 Fiber reinforced concrete as a multi-scale material

First, the behavior of the cement paste is estimated by the Mori–Tanaka scheme, the Calcium-Silicate-Hydrate (C-S-H) phase of the cement paste being the matrix. Then, the overall behavior of the fiber-reinforced concrete is estimated by the approximated Mori–Tanaka scheme, the cement paste being the matrix. Since the estimated relaxation tensor of the cement paste is produced by an homogenization scheme at the microscopic scale, its Poisson's ratio is

time-dependent [Fig. 6.4] and the approximated homogenization scheme must be applied at the mesoscopic scale.

The fiber-reinforced concrete is to be described at each scale. In particular, the volume fraction of each phase and the corresponding behavior are presented.

The mesoscopic scale

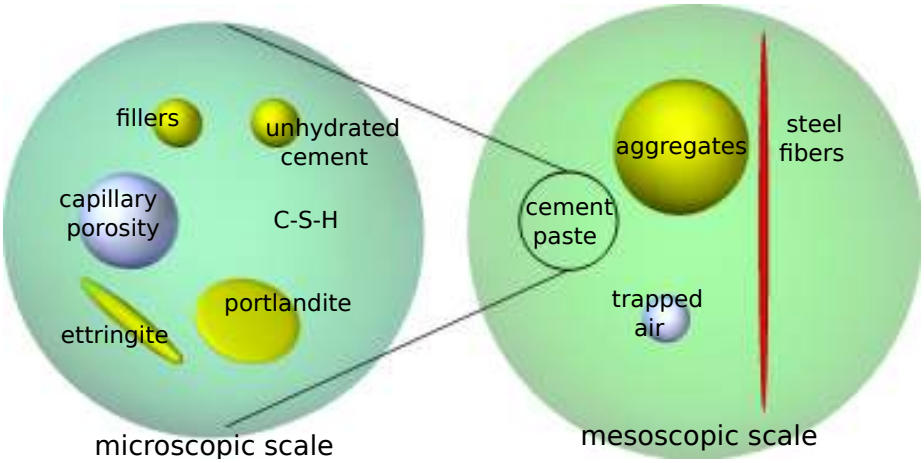


FIGURE 6.3 – The overall behavior of the concrete is estimated by a two-step homogenization procedure. First, the behavior of the cement paste is estimated by the Mori–Tanaka scheme, the C-S-H being the reference material. Then, the behavior of the concrete is estimated by the Mori–Tanaka scheme, the cement paste being the reference material.

At the mesoscopic scale, the Mori–Tanaka scheme is used, the cement paste being the reference material. Aggregates and steel fibers are considered as elastic for the present study, the cement paste being the sole responsible for the viscoelastic behavior of concrete. Their Young Moduli and Poisson's ratios are reported in table 6.2. Trapped air and entrained air are also accounted for in our homogenization method. Considered volume fractions of each phase are reported in table 6.2.

At the mesoscopic scale, the formulations of concrete may include aggregates (de Larrard, 1999), steel fibers (Chern and Young, 1989), expanded polystyrene particles (Babu and Babu, 2003; Roy et al., 2005) or wood shavings (Bederina et al., 2007) as inclusions and such inclusions change the mechanical properties of the material. Indeed, experimental tests have shown that a volume fraction of 2% of steel fibers can reduce the basic creep of concrete (Chern and Young, 1989).

The microscopic scale

The homogenization scheme of Mori–Tanaka is applied to upscale the viscoelastic behavior of the cement paste. This scheme has been used to estimate the time-dependent strain of a two-year old cement paste in the range of non-aging viscoelasticity(Šmilauer and Bažant, 2010). Indeed, at the microscopic

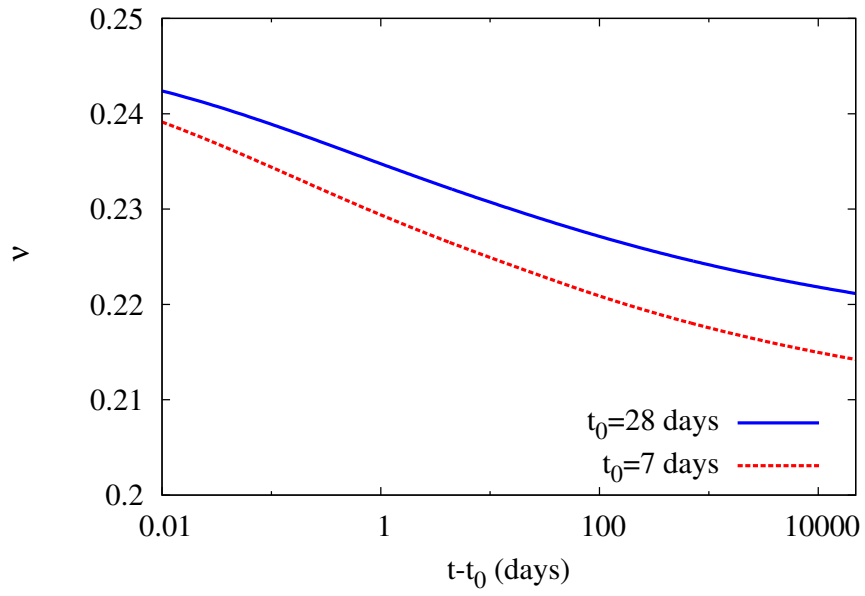


FIGURE 6.4 – The viscoelastic Poisson's ratio ν of the cement paste is estimated : a bulk relaxation test and a shear relaxation test are performed based on the relaxation tensor estimated by the Mori–Tanaka scheme and equation (6.7) is applied. The viscoelastic Poisson's ratio ν changes with time of loading t_0 and time elapsed since loading t. Consequently, the approximated viscoelastic Eshelby's tensor is needed at the mesoscopic scale.

scale, the cement paste is a viscoelastic composite material. The fresh Portland cement paste consists in a mix of water and unhydrated cement particles. Hydration reactions produce various solid phases which represent the major part of an hydrated cement paste. Among them, the C-S-H phase percolates and constitutes the solid skeleton of the cement paste, thus increasing its stiffness. Other products of hydration of a cement paste include portlandite and ettringite. Since the volume of the products of the hydration is larger than the one of the solid reactants, the capillary porosity decreases with time.

It must be mentioned that this use of the Mori–Tanaka scheme was validated against 3D numerical simulations in the range of non-aging cementitious materials at the scale of the cement paste(Šmilauer and Bažant, 2010) and concrete (Lavergne et al., 2015a). The novelty of the multi-scale homogenization method presented in the current section is that it is able to account for the aging of phases. Nevertheless, instead of modeling the hydration of the cement paste, it is assumed that the only effect of hydration is an increase of stiffness of C-S-H. Hence, the volume fraction of each phase is time-independent and set equal to the one estimated at 28 days by the hydration model of Jennings and Tennis(Jennings and Tennis, 1994), the one of Bernard et. al.(Bernard et al., 2003) or the numerical hydration model CEMHYD3D (Bentz, 1997, 2006; Haecker et al., 2005).

All solid phases except C-S-H are considered as elastic isotropic (Šmilauer

and Bažant, 2010) and their Young Moduli and Poisson's ratios are reported in table 6.2. SEM images of a cement paste show the needle-like ettringite and the plate-like portlandite (Walker et al., 2006) 6.1a : the aspect ratios or ettringite and portlandite are respectively set to $a/b_{ettringite} = 10$ and $a/b_{portlandite} = 0.1$.

The C-S-H features a viscoelastic behavior and the logarithmic creep properties of C-S-H measured by minutes-long nanoindentations are quantitatively representative of the long-term creep properties of macroscopic cementitious materials (Vandamme and Ulm, 2013). The C-S-H is modeled as an aging viscoelastic material and its compliance is described in the next section.

The compliance of C-S-H

The compliance of the C-S-H is the one of the B3 model, as described in (Šmilauer and Bažant, 2010; Lavergne et al., 2016). The B3 model (Bažant and Prasannan, 1988; RILEM, 1995) has been designed to estimate the mechanical behavior of concrete, including its basic creep. The creep compliance of the B3 model $\mathbf{J}_{B3}$ is the sum of two aging compliances. The first one $\mathbf{J}_{ea}$ represents the effect of hydration at early age and the second one $\mathbf{J}_{q4}$ is irrecoverable, while satisfying the logarithmic long term trend of creep strains of concretes.

$$\mathbf{J}_{B3}(t,t') = \mathbf{J}_{ea}(t,t) + \mathbf{J}_{q4}(t,t') \tag{6.46}$$

The aging of a cement paste is treated as a consequence of volume growth of the load-bearing solidified matter (hydrated cement) whose compliance $\mathbf{\Phi}$ is non-aging :

$$\mathbf{\Phi}(t-t') \propto \ln(1+\lambda_0^{-n}(t-t')^n) \tag{6.47}$$

where $\lambda_0 = 1$ day. Although a value of $n = 0.1$ is used at concrete scale (Bažant and Prasannan, 1988; RILEM, 1995), higher values ($n = 0,24$) have been used for a cement paste with high water to cement ratio (Granger and Bažant, 1995). At the nanometric scale of the calcium-silicate-hydrates (C-S-H), this parameter may be set at $n \approx 0.35$ (Šmilauer and Bažant, 2010).

The early-age compliance $\mathbf{J}_{ea}(t,t')$ of the solidifying cementitious material should satisfy the following conditions :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d\mathbf{J}_{ea}}{dt}(t,t') & = & \frac{1}{v(t)}\frac{d\mathbf{\Phi}}{dt}(t-t') \\ \mathbf{J}_{ea}(t,t) & = & \mathbf{C}_{q1}^{-1} + \frac{1}{v(t)}\mathbf{\Phi}(0) \end{array} \tag{6.48}$$

where $v(t)$ is proportional to the volume fraction of load-bearing material at time t and $\mathbf{C}_{q1}$ is the dynamic part of the elastic stiffness. The inverse of this dynamic Young Modulus is $q_1 = 0.6/E_{28}$ where E_{28} is the measured elastic stiffness at 28 days.

According to the B3 model, $v(t)$ reads :

$$\frac{1}{v(t)} = q_2\left(\sqrt{\frac{\lambda_0}{t}} + 0.29 * (w/c)^4\right) \tag{6.49}$$

where w/c is the water to cement weight ratio. q_2 is related to q_1 and the elastic stiffness at 28 days E_{28}. As performed in (Šmilauer and Bažant, 2010), the values of E_{28}, q_1 and q_4 are based on nanoindentation measurements of the

elastic modulus of C-S-H (Velez et al., 2001; Constantinides and Ulm, 2004; Sorelli et al., 2008). These values are written in table 6.2.

Following (Lavergne et al., 2016), the function $v(t)$ is modified under the assumption that aging stops once the Young modulus reaches 1.1 times the Young modulus at 28 days and $v(t)$ must remain below a maximum value v_{max}, which reads :

$$v_{max} = \frac{1}{\frac{1}{1.1} - 0.6} E_{28} ln(1 + 0.01^n) \tag{6.50}$$

A irrecoverable part of creep strain ε_{q4} in cementitious materials is taken account of in the second compliance $\mathbf{J}_{q4}(t, t')$. This aging compliance features a logarithmic long term trend :

$$\mathbf{J}_{q4}(t, t') = ln\left(\frac{t}{t'}\right) \mathbf{C}_{q4}^{-1} \tag{6.51}$$

where the inverse of the Young modulus of $\mathbf{C}_{q4}$ is $q_4 = 2.10^{-6}\text{MPa}^{-1}$ for a saturated cement paste (Šmilauer and Bažant, 2010).

The proposed approximated homogenization scheme does not require the conversion of the compliance of the B3 model into a series of Kelvin chains. Such a conversion is useful to enable 3D numerical simulations relying on internal variables(Šmilauer and Bažant, 2010; Lavergne et al., 2015a) or to provide a microstructural interpretation of the compliance in which the characteristic times of the Kelvin chains can be related to the distribution of dimensions and the interface viscosity of viscous microscopic interfaces (Shahidi et al., 2014; Sha, 2015a,b).

6.2.2 Results on fiber-reinforced concrete

The estimate of the time dependent strains produced by the approximated homogenization scheme are to be compared to the time-dependent strains measured by Chern and Young (Chern and Young, 1989). Then, the effects of the volume fraction and aspect ratio of the steel fibers on the time-dependent strains of fiber-reinforced concrete are estimated.

Comparison with experimental results

Chern and Young(Chern and Young, 1989) have performed creep tests on sealed samples of fiber-reinforced concrete, among other tests. Their study was focused on the influence of the volume fraction of steel fibers and time of loading on the time-dependent strains. The volume fraction of steel fibers was $c_f = 0\%$, 1% and 2%, their aspect ratio was a/b =44 and the times of loading were $t_0 = 7$ and 28 days. Since the water to cement ratio was 0.5 and little is known about the cement paste, the volume fraction at the scale of the cement paste are kept unchanged, as in table 6.2. The volume fraction of aggregates is arbitrarily set to 60% : even if the aggregate to cement weight ratio is known, the density of the aggregates are not provided. It is to be noticed that the Young modulus at 28 days of the concrete without fiber is 23.5 GPa, that is much lower that the Young Moduli of concrete with comparable w/c measured by Granger (31.9 to 38.6 GPa) (Granger, 1995). This discrepancy is attributed to the quality of the aggregates and their Young modulus is set to 35 GPa. The

C-S-H				
Viscoelastic				
nanoindentation Young modulus	$E_{2.6s}$	25 GPa	volume fraction	47%
	ν	0.24	aspect ratio	1
parameters of model B3	w/c	0.5		
	E_{28}	16.4 GPa		
	q_1	0.0365 GPa^{-1}		
	q_2	0.646 GPa^{-1}		
	q_4	2 $10^{-6}MPa^{-1}$		
Capillary porosity				
			volume fraction	20%
			aspect ratio	1
Portlandite				
Elastic	E_0	38 GPa	volume fraction	14%
	ν	0.305	aspect ratio	0.1
Ettringite				
Elastic	E_0	42.3 GPa	volume fraction	7%
	ν	0.324	aspect ratio	10
Anhydrous				
Elastic	E_0	130 GPa	volume fraction	7%
	ν	0.3	aspect ratio	1
Fillers (Limestone)				
Elastic	E_0	60 GPa	volume fraction	5%
	ν	0.25	aspect ratio	1
Aggregates (Limestone)				
Elastic	E_0	60 GPa	volume fraction	60%
	ν	0.25	aspect ratio	1
Steel fiber				
Elastic	E_0	183.7 GPa	volume fraction	1-2%
	ν	0.3	aspect ratio	44
Trapped air				
			volume fraction	2%
			aspect ratio	1

TABLE 6.2 – Geometrical and mechanical parameters for the multi-scale homogenization of concrete. Parameters of the viscoelastic behavior of C-S-H are set according to the model B3. Elastic parameters are similar to those measure and used in previous homogenization studies of cementitious materials(Beaudoin, 1983; Wittmann, 1986; Granger, 1995; Monteiro and Chang, 1995; Velez et al., 2001; Bernard et al., 2003; Kamali et al., 2004; Constantinides and Ulm, 2004; Haecker et al., 2005; Šmilauer and Bittnar, 2006; Sanahuja et al., 2007; Sorelli et al., 2008; Šmilauer and Bažant, 2010)

fiber volume fraction	0%		1%		2%	
time of loading t_0	7 days	28 days	7days	28 days	7 days	28 days
measured $E_{exp}(t_0 + 0.01\text{days}, t_0)$ (GPa)	19.3	23.5	22.2	25.7	22.3	26.1
estimated $E(t_0 + 0.01\text{days}, t_0)$	21.1	23.7	21.8	24.4	22.4	25.1
measured $E_{exp}(t_0 + 170\text{days}, t_0)$ (GPa)	7.5	9.6	9.3	10.9	9.7	11.9
estimated $E(t_0 + 170\text{days}, t_0)$	10.2	12.8	10.9	13.5	11.5	14.1

TABLE 6.3 – The experimental instantaneous Young Modulus and apparent Young Modulus 170 days after loading measured by Chern and Young(Chern and Young, 1989) are compared to corresponding estimates produced by the multi-scale homogenization method. Values for different volume fractions of fibers and different time of loading are available.

time-dependent strains during a creep test are estimated, the instantaneous Young modulus $E(t_0 + 0.01\text{days}, t_0)$ and the apparent Young modulus 170 days after loading $E(t_0 + 170\text{days}, t_0)$ are compared to the experimental results of Chern and Young(Chern and Young, 1989) in table 6.3 and in figure 6.5. There is a difference between the estimated moduli and the measured ones, especially at long term : the multi-scale homogenization procedure underestimates the time-dependent strains. This difference is partly attributed to the temperature of the experiments (23°C) which is higher than the temperature used in the B3 model (20°C). However, a perfect match was not expected given the number of approximations that have been performed. Moreover, the parameters of the B3 model have not been modified to reduce the difference between the estimated long term Young moduli and the measured ones. Nevertheless, it should be emphasized that the trends of the estimates follow the ones of the experimental measurements for both the volume fraction of steel fibers and the time of loading. Indeed, our results are consistent with the experimental observations of Chern and Young(Chern and Young, 1989) : the effect of steel fibers on the long term strain is larger than the effect on the instantaneous strain and concrete specimens containing higher volume fraction of fibers yield less basic creep. Moreover, the estimates of strains and the measurements of Chern and Young(Chern and Young, 1989) are ranked in the same order : in both cases, loading a plain concrete at 28 days was more efficient at reducing creep strains that loading at 7 days a fiber-reinforced concrete featuring a volume fraction of fibers of $c_f = 1\%$.

Influence of the steel fiber

The aspect ratio of steel fibers being set to $a/b = 44$, the estimate of the time-dependent strain is computed for different volume fractions of steel fibers c_f. As shown in figure 6.6a, a volume fraction of 2% reduces the time-dependent strains. The steel fibers are expected to be more effective at reducing the long-term creep strains of the fiber-reinforced concrete. This expectation is consistent with the experimental results of Chern and Young(Chern and Young, 1989).

The volume fraction of steel fibers being set to $c_f = 2\%$, the influence of the aspect ratio of fibers is studied and results are displayed on figure 6.6b. It is shown that the aspect ratio significantly affects the estimated time-dependent strains of the fiber reinforced concrete. Indeed, spherical steel inclusions are

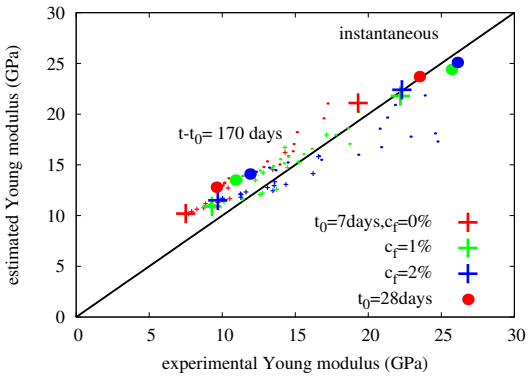
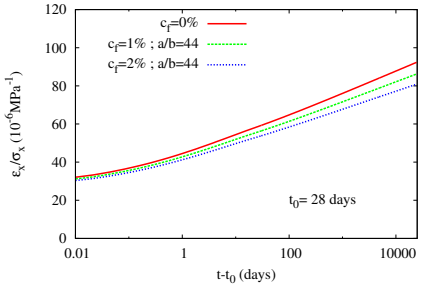
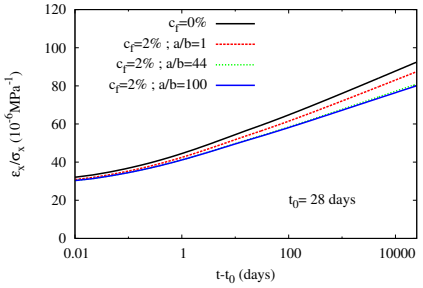


FIGURE 6.5 – The instantaneous Young Modulus and apparent Young Modulus from 0 to 170 days after loading of fiber-reinforced concrete for different fiber volume fraction and time of loading of 7 days and 28 days. The experimental results of Chern and Young(Chern and Young, 1989) are compared to the estimates of the multi-scale homogenization method.

expected to be less efficient at reducing these strains than elongated fibers. The higher the aspect ratio is, the more efficient the steel fibers are. Yet, changing the aspect ratio of $a/b = 44$ for $a/b = 100$ makes little difference. It should be mentioned that the distribution of the orientations of the fibers is assumed to be isotropic. It is known that wall-effects due to the mold, casting and vibrating the concrete can affect the distribution of the orientations of the fibers(Edgington and Hannant, 1972; Rudzki et al., 2012; Sebaibi et al., 2014).



(a) Normalized uniaxial creep strains of fiber-reinforced concrete estimated by the multiscale homogenization method are displayed as functions of the time elapsed since loading $t - t_0$ for different volume fractions of steel fibers. The aspect ratio a/b of steel fibers is 44.



(b) Normalized uniaxial creep strains of fiber-reinforced concrete estimated by the multiscale homogenization method are displayed as functions of the time elapsed since loading $t-t_0$ for different aspect ratios of steel fibers. The volume fraction of steel fibers is $c_f = 2\%$.

6.2.3 Discussions

Regarding cementitious materials, it has been shown that a multi-scale homogenization of aging viscoelastic concrete is now feasible. Yet, existing multi-

scale models in the range of elasticity or non-aging viscoelasticity included more scales. For instance, two different classes of C-S-H, featuring different densities and mechanical properties are accounted for in (Constantinides and Ulm, 2004; Sanahuja et al., 2007, 2009; Sorelli et al., 2008) and a softer Interfacial Transition Zone is introduced between the aggregates and the cement paste at the scale of mortar or concrete in (Scrivener et al., 2004; Neubauer et al., 1996; Nadeau, 2003; Garboczi and Berryman, 2001; Gal and Kryvoruk, 2011; Grondin and Matallah, 2014). The main drawback of the homogenization method presented in the current article is that the volume fractions of each phase (unhydrated cement, hydration products and porosity) are supposed to be time-independent while it is well known that these volume fractions change over time. Further research is necessary to account for changes of volume fractions related to the hydration of the cement paste, as performed in (Sanahuja, 2013a). Accounting for the progressive hydration of the cement paste would allow the investigation of creep at early age, that is before 7 days (Atrushi, 2003). For instance, in (Ullah et al., 2012), the influence of the composition of shotcrete on the load-level of tunnel shells has been successfully investigated using a micromechanics-based model where the aging is due to changes of the volume fractions of phases at the scale of the cement paste (Scheiner and Hellmich, 2009).

The method exposed in the current article delivers an estimate of the complex Young Modulus of asphalt concrete which is similar to the analytical one in the Fourier space. Yet, from a practical point of view, the former is slower than the latter. Indeed, the computations in the Fourier space only consist in applying the Mori–Tanaka once for each frequency while the approximated scheme requires the introduction of time steps and an additional procedure to identify the complex Young Modulus of each frequency. The approximated scheme can become useful to handle complex loading histories at once or to upscale the mechanical properties of aging viscoelastic materials.

The usefulness of the approximated Eshelby tensor can be assessed by comparing the presented approximated estimates of the time-dependent strains to the one produced by assuming the Poisson's ratio of the matrix to be time-independent. For instance, in the latter, the compliance of the matrix is approximated as $\mathbf{J}_m$.

On the one hand, in the case of asphalt concrete, the overall time-dependent strains estimated by the approximated scheme are similar to those obtained by using the correspondence principle as a bulk creep test is considered (Fig. 6.6). But the estimated time-dependent strains obtained by assuming the Poisson's ratio of bitumen to be time-independent are one order of magnitude lower and these estimates are not consistent with those produced by using the correspondence principle. Thus, the fact that the Poisson's ratio of bitumen is time-dependent is not to be neglected. Indeed, as the Kelvin chains are adjusted to the 2S2P1D model of bitumen (Di Benedetto et al., 2007) , it must be noticed that the Poisson's ratio of each Kelvin chain was found to be close to 0.5. Consequently, the elastic bulk modulus is the only responsible for dilatational strains of bitumen and the asphalt concrete follows the same trend. Other materials share the same feature : the effect of the bulk viscosity is not considered as rubber (Rendek and Lion, 2010; Fritzen and Böhlke, 2013) is studied and the same assumption is made to model mixed oxides nuclear fuels (Siefken et al., 2001; Largenton et al., 2014), except in the case of hot pressing (Siefken et al., 2001).

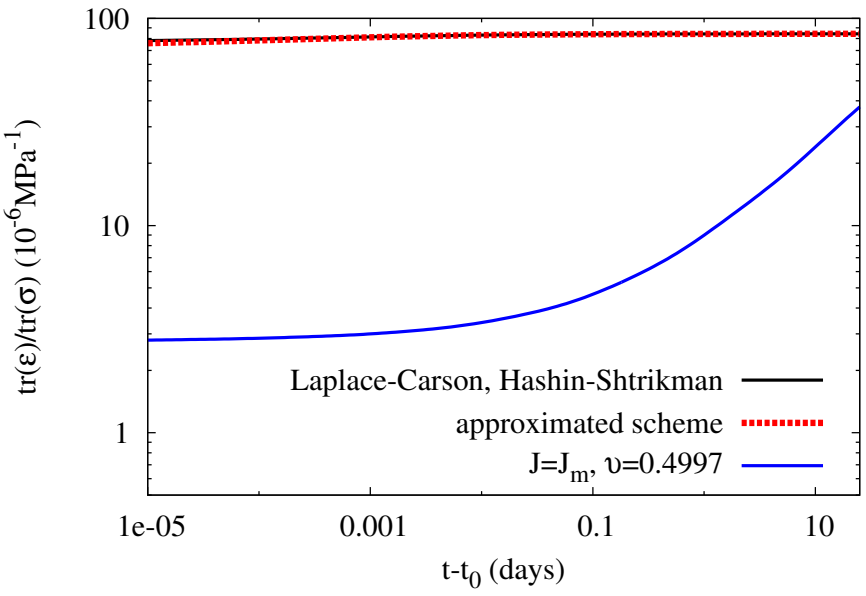


FIGURE 6.6 – The overall time-dependent strains of an asphalt concrete are estimated by three different methods : the correspondence principle, the approximated scheme and the assumption of a time-independent Poisson's ratio. A bulk creep test is considered, the volume fraction of inclusions being 32%.

On the other hand, the estimated Poisson's ratio of the cement paste remains in the range $[0.2; 0.3]$. Consequently, the approximated scheme and the assumption of a time-independent Poisson's ratio ($\nu = 0.212$) lead to similar estimates of the time-dependent strains of a concrete featuring 60% of aggregates and 2% of voids : the relative differences between the overall estimated strains, computed using the approximated scheme as a reference, are lower than 2% in case of bulk creep test, shear creep test and uniaxial creep test. Moreover, the difference between the creep Poisson's ratio and the relaxation Poisson's ratio of the cement paste(Aili et al., 2015) can be investigated by the proposed approximated homogenization scheme. Results are consistent with the conclusions of Aili et. al. (Aili et al., 2015) : at the time of loading, both Poisson's ratios are equal to the elastic Poisson's ratio and the relative difference between the creep Poisson's ratio and the relaxation Poisson's ratio remains below 2% since the change of Poisson's ratio with time is moderate. Finally, the approximated scheme proposed in the present article proves more comprehensive and more reliable as it is able to handle both asphalt concrete and concrete.

Conclusion

The homogenization method of Sanahuja(Sanahuja, 2013b), which deals with spherical inclusions, was extended in (Lavergne et al., 2016) to ellipsoidal inclusions provided that the Poisson's ratio of the isotropic reference material is

time-independent. In the current article, an approximated viscoelastic Eshelby's tensor is defined to handle any aging viscoelastic isotropic reference materials. Although the Mori-Takana scheme is the only homogenization scheme used in the present study, the same approximation can be performed for the Ponte Castañeda–Willis scheme (Castañeda and Willis, 1995). The approximated viscoelastic Eshelby's tensor is successfully validated against existing estimates on the time-dependent behavior of asphalt concrete, which is modeled as a non-aging viscoelastic material.

Moreover, since both the behaviors of phases and the overall behavior of the homogenized material are represented as matrices, multi-scale homogenization of complex aging viscoelastic materials, such as fiber-reinforced concrete, is achieved. The influence of steel fibers volume fraction and aspect ratio on the aging viscoelastic behavior of the concrete is studied by estimating the time-dependent strains thanks to the multi-scale homogenization scheme defined above. The lessons extracted from these estimates are consistent with the experimentally-based conclusions of Chern and Young(Chern and Young, 1989) : the time-dependent strain of a concrete are reduced by adding steel fibers or by loading the concrete as late as possible. Moreover, the influence of steel fibers on the long term creep strains is larger than the one on the elastic strain.

Nevertheless, the multi-scale method presented in this article is limited : as-is, it is not able to account for changes of the volume fractions of phases during the hydration of the cement paste. Hence, the modeling of aging is rather crude and could be improved if the homogenization method of Sanahuja were extended to the case of variable volume fractions.

Conclusion

On a montré la souplesse des simulations numériques 3D : elles peuvent être rapidement adaptées pour l'étude d'autres matériaux composites viscoélastiques, comme les plastiques renforcés par des fibres de verre. De plus, l'estimation des contraintes locales permet de se pencher sur d'autres phénomènes, en l'occurrence une rupture différée des fibres de verre. Cependant, les modèles numériques 3D peuvent difficilement tenir compte des rapports d'aspect des fibres utilisées dans l'industrie, souvent supérieurs à 100.

La méthode d'homogénéisation proposée par Sanahuja Sanahuja (2013b) dédiée à des inclusions sphériques est étendue au cas d'inclusions ellipsoïdales. Cela permet une estimation rapide de la complaisance viscoélastique macroscopique de matériaux composites tels que le béton, ou les plastiques renforcés par des fibres de verre. Le cas d'une variation du coefficient de Poisson de la matrice est traité par approximation. N'importe quel composite viscoélastique peut donc faire l'objet d'une démarche d'homogénéisation semblable à celle de Sanahuja : les enrobés bitumineux et les bétons fibrés sont traités dans ce cadre. Il reste néanmoins à vérifier la qualité de ces estimations par une comparaison avec des résultats expérimentaux.

L'application cette méthode d'homogénéisation à des composites à plusieurs échelles, comme le béton fibré, ouvre des perspectives intéressantes. En effet, cela permet de prendre en compte la composition du ciment (composition de Bogue, additions minérales) comme le fait le logiciel $\mathrm{Vi(Ca)_2T}$ (Le Pape et al., 2009, 2014). Mais il faudra s'attacher à mieux modéliser l'hydratation de la pâte de ciment qui a pour conséquence des changements de fractions volumiques des phases au cours du temps. La complaisance du modèle B3, qui s'appuie principalement sur la théorie de la solidification, ne suffit sans doute pas à une description précise du vieillissement. Les changements de fractions volumiques au cours du temps peuvent être intégrés à une démarche d'homogénéisation en viscoélasticité vieillissante Sanahuja (2013a).

Conclusion

L'objectif de la première partie de ce travail de doctorat est d'améliorer la prise en compte des particularités morphologiques de la microstructure des bétons pour mieux estimer le comportement à long terme des bétons précontraints. Cette étude est limitée au cadre de la mécanique des matériaux et à la théorie de l'homogénéisation : le béton y est décrit comme un matériau composite constitué de granulats élastiques enchâssés dans une matrice viscoélastique linéaire vieillissante. Les outils novateurs mis en œuvre sont la tomographie et la simulation numérique 3D.

La qualité de la tomographie peut varier d'un béton à l'autre : les images de bétons à granulats calcaires ou à granulats légers sont plus contrastées que celles de bétons à granulats siliceux. Pour des échantillons de mortier de tailles raisonnables, il est possible d'estimer une fraction volumique et une partie de la granulométrie. Nous ne sommes pas parvenu à une estimation fiable et systématique de la fraction volumique d'un béton à partir d'une image de tomographie : la tâche est complexe compte-tenu de l'étendue de la granulométrie et du contraste limité entre les phases. Les images à petites échelles, où le pixel a une taille de l'ordre de 8μm, apportent aussi des informations utiles : elles ne semblent pas mettre en défaut l'hypothèse d'une adhésion parfaite entre la pâte de ciment et les granulats nécessaire à notre démarche d'homogénéisation.

La simulation numérique 3D est ensuite utilisée pour estimer le comportement macroscopique d'un composite viscoélastique linéaire, le comportement de chacune des phases étant supposé connu. Des algorithmes sont présentés pour obtenir des microstructures matrice-inclusions ayant des propriétés morphologiques (fractions volumiques, granulométrie et forme) maîtrisées. Pour les bétons, on observe une influence très faible de la granulométrie ou de la forme des inclusions sur le comportement macroscopique du béton. Une des raisons expliquant cela est que le contraste entre les raideurs des phases reste limité, même s'il augmente au cours du temps. De plus, si l'on reste dans le domaine de la viscoélasticité non-vieillissante, les schémas d'homogénéisation semi-analytiques produisent des estimations du comportement macroscopique qui restent assez proches de l'estimation obtenue par simulation numérique 3D.

Ces résultats sont alors étendus à la viscoélasticité linéaire vieillissante. La méthode d'homogénéisation de Sanahuja adaptée aux inclusions sphériques a été étendu au cas d'inclusions ellipsoïdales pour étudier l'influence du rapport d'aspect des inclusions sur le comportement macroscopique du composite. Pour ce qui est du béton, les rapports d'aspects des granulats n'ont pas une influence importante sur le comportement macroscopique estimé. Notons que ces calculs sont beaucoup plus rapides que des simulations numériques 3D.

On a donc fait le constat que l'utilisation des méthodes d'homogénéisation ne

permet pas d'expliquer la dispersion des résultats expérimentaux de déformation de fluage propre obtenus par Granger, compte-tenu de la proximité des formulations. La cause de cette dispersion reste encore à découvrir. La minéralogie, la composition chimique des granulats influe-t-elle sur le comportement mécanique du béton ? Si oui, comment ? Par ailleurs, la simulation numérique 3D permet d'appliquer à un échantillon de béton les chargements rencontrés sur les ouvrages. On en retire une estimation des déformations différées macroscopiques ainsi qu'une estimation des contraintes locales dans la pâte de ciment tout au long de vie de l'ouvrage. Des indicateurs ont été proposés pour suivre l'évolution de ces contraintes locales avec en tête les questions de tenu mécanique et d'étanchéité. Ces indicateurs dépendent des déformations de séchage de la matrice cimentaire, de la formulation du béton et de l'histoire de chargement imposé à l'échantillon de béton. Pour le chargement étudié, les valeurs de contraintes locales rencontrées dans la matrice cimentaire ne semblent pas imposer l'introduction de phénomènes d'endommagement. Ce point de contrôle supplémentaire est un atout notable des simulations numériques 3D.

Plusieurs perspectives peuvent être avancées pour améliorer la pertinence de la description du béton présenté dans ce travail.

La complaisance de la matrice cimentaire est la donnée la plus difficile à estimer. La complaisance vieillissante choisie reflète cela : elle ne dépend que de deux paramètres, le module de Young à 28 jours et le rapport w/c. On peut sans doute améliorer la description de la complaisance en tenant compte de la composition du béton et en s'appuyant sur un modèle d'hydratation pour prévoir l'évolution du module de Young au cours du temps. Néanmoins, il est difficile de penser pouvoir expliquer la dispersion des résultats expérimentaux de Granger de cette seule façon. En effet, les compositions de Bogue des ciments utilisés par Granger sont assez proches. Une piste pour expliquer ces disparités est de remettre en cause l'hypothèse d'une adhésion parfaite entre le granulat et la matrice cimentaire, en ajoutant une dépendance à la minéralogie du granulat. Une explication théorique du fluage est d'ailleurs liée à la création de microfissures lors du chargement : l'eau capillaire va remplir les fins vides crées, ce qui entraîne un retrait supplémentaire (Rossi et al., 1994, 2012, 2013).

Même si la simulation numérique 3D produit une estimation du comportement macroscopique similaire aux estimations des modèles d'homogénéisation semi-analytiques, elle présente plusieurs intérêts. Des chargements plus proches des situations réelles peuvent être imposés à l'échantillon étudié et des comportements plus complexes peuvent maintenant être envisagés, comme l'introduction d'un endommagement. Cependant, la pertinence du recours à l'endommagement reste cependant discutable pour la section courante de l'enceinte. Les simulations numériques 3D ont montré que les indicateurs de contraintes locales sont fortement influencés par le retrait de la matrice cimentaire, qui peut varier de façon importante d'un béton à l'autre si on se réfère aux résultats expérimentaux de Granger. Les effets de structure liées au séchage invitent alors à ne plus se restreindre à la seule mécanique des matériaux. Le problème n'est plus seulement de développer des outils numériques performants à l'échelle du matériau : il faut maintenant les adapter pour y intégrer des effets de structure (épaisseur du mur, état initial d'endommagement après le jeune âge) et les effets environnementaux (température, humidité).

Enfin, les déformations différées estimées doivent être comparées à des données expérimentales de qualité et de telles données sont très rares. L'utilisation

des modèles et des simulations numériques ne peut que mettre en valeur le caractère nécessaire d'un volet expérimental, pour améliorer la qualité des données d'entrée ou vérifier les estimations obtenus. Le faible nombre de résultats expérimentaux sur les déformations différées à long terme des bétons nous pousse à essayer d'appliquer les outils développés à d'autres matériaux composites.

Les simulations numériques 3D ont donc pu être appliquées à d'autres matériaux, tels que les plastiques renforcés par des fibres, pour modéliser la rupture différée des fibres. Cependant, nous ne sommes pas allés au delà de l'estimation d'un critère à l'issue d'un calcul viscoélastique et nous n'avons pas tenu compte du caractère aléatoire des résistances des fibres. Enfin, les simulations numériques 3D sur maillages réguliers ne peuvent traiter que des fibres courtes. Il reste donc bien des sujets à étudier et les schémas d'homogénéisation à champs moyens peuvent encore nous aider. Dans ce cadre, la méthode d'homogénéisation de Sanahuja pour des inclusions sphériques a été étendue à des inclusions ellipsoïdales plongées dans une matrice viscoélastique à coefficient de Poisson constant. Cette dernière restriction a ensuite été levée au moyen d'une approximation, ce qui a ouvert la voie à l'homogénéisation multi-échelle de matériaux tels que les bétons renforcés par des fibres. La modélisation multi-échelle peut donc maintenant apporter des éléments de réponses sur la durabilité des matériaux composites viscoélastiques vieillissants.

Annexe A

Cadre thermodynamique de la viscoélasticité linéaire vieillissante

Le premier et le second principes de la thermodynamique imposent des propriétés à la fonction de relaxation $\mathbf{C}(t,t')$ (DAY, 1971; Drozdov, 1998; Bažant and Huet, 1999). Ces propriétés sont déduite de la thermodynamique appliquée aux matériaux(Coleman, 1964). Elles sont détaillées dans (Drozdov, 1998) pour le cas d'un fluage déviatorique et elles sont rappelées dans cette annexe pour une complaisance 3D, en tenant compte de la dilatation thermique. L'hypothèse est faite de transformations quasi-statiques : les effets liés à l'inertie sont négligés.

L'énergie libre spécifique de Helmholz Ψ s'écrit :

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{1}{\rho_0}W - \frac{1}{\rho_0}k : \varepsilon(T-T_0) - S_0(T-T_0) - \frac{c}{2T_0}(T-T_0)^2$$

où Ψ_0, S_0 et c sont l'énergie libre spécifique, l'entropie spécifique et la capacité calorifique spécifique au repos, à la température de référence T_0. k sera lié au coefficient de dilatation thermique du matériau (ici un tenseur d'ordre deux). W est la densité d'énergie de déformation, qui vaut :

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon(t) : \mathbf{C}(t,0) : \varepsilon(t) + \frac{1}{2}\int_0^t [\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)] : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \tau}(t,\tau) : [\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)]d\tau$$

Pour simplifiée, l'effet de la température sur la complaisance n'est pas pris en compte ici. L'entropie spécifique S vaut :

$$S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{1}{\rho_0}k : \varepsilon + S_0 + \frac{c}{T_0}(T-T_0) \tag{A.1}$$

On peut maintenant calculer l'énergie interne U par une transformation de Legendre $U = \Psi + S.T$:

$$U = U_0 + \frac{1}{\rho_0}W + \frac{c}{2T_0}(T^2 - T_0^2) + \frac{1}{\rho_0}k : \varepsilon.T_0 \tag{A.2}$$

avec $U_0 = \Psi_0 + S_0.T_0$

On commence par appliquer le principe du minimum de l'énergie libre pour des transformations isothermes à la température T. Pour ce faire, sur un domaine Ω de volume $|\Omega|$, de frontière Γ, l'histoire de déplacement $u(\tau, x)$ est fixée jusqu'au temps t. On peut calculer l'énergie libre de la structure :

$$\Psi^+(t) = \int_\Omega \rho_0 \Psi(t) dV = \rho_0 \Psi_0 |\Omega| + W^+(t) - \int_\Omega k : \varepsilon (T - T_0) dV$$

où $W^+(t) = \int_\Omega W(t) dV$. L'indice de coordonnée spatiale x est omis pour garder des expressions claires.

La frontière est découpée en deux parties de conditions limites en déplacement Γ_u et en force Γ_σ et $u(\tau, x)$ respecte ces conditions en déplacement. On introduit alors au temps t un incrément de déplacement δu qui satisfait les conditions limites en déplacement. Ou pose aussi $\delta\varepsilon(t)$ le champ de déformation associé à δu. Le travail des forces extérieures s'écrit :

$$W^+_{ext} = \int_\Omega \rho_0 B(t).\delta u.dV + \int_{\Gamma_\sigma} b(t).\delta u.dS$$

où $B(t)$ est un vecteur représentant une densité de force massique et $b(t)$ est un vecteur représentant les forces surfaciques appliquées sur Γ_σ. De même, on peut calculer le changement d'énergie libre $\Phi^+(u + \delta u(t)) - \Phi^+(u)$ associé à l'ajout de $\delta u(t)$:

$$\begin{aligned}
\Phi(u+\delta u(t)) - \Phi(u) &= W^+(u+\delta u(t)) - W^+(u) - \int_\Omega k : \delta\varepsilon (T - T_0) dV \\
&= \int_\Omega W(u+\delta u(t)) - W(u) - k : \delta\varepsilon (T - T_0) dV \\
&= \int_\Omega \tfrac{1}{2}(\varepsilon(t) + \delta\varepsilon(t)) : \mathbf{C}(t,0) : (\varepsilon(t) + \delta\varepsilon(t)) \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \int_0^t [\varepsilon(t) + \delta\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)] : \tfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \tau}(t,\tau) : [\varepsilon(t) + \delta\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)] d\tau \\
&\quad - \tfrac{1}{2} \varepsilon(t) : \mathbf{C}(t,0) : \varepsilon(t) \\
&\quad - \tfrac{1}{2} \int_0^t [\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)] : \tfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \tau}(t,\tau) : [\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)] d\tau \\
&\quad - k : \delta\varepsilon (T - T_0) dV \\
&= \int_\Omega \left[\varepsilon(t) : \mathbf{C}(t,0) + \int_0^t ([\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)] : \tfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \tau}(t,\tau) d\tau \right] : \delta\varepsilon - k : \delta\varepsilon (T - T_0) dV \\
&= \int_\Omega \sigma : \delta\varepsilon dV
\end{aligned}$$

En posant $\sigma = \int_0^t \mathbf{C}(t,\tau) \frac{d\varepsilon}{dt}(\tau) d\tau - k(T - T_0)$. On a utilisé les symétries de $\mathbf{C}$ et k qui découlent de l'objectivité. L'écart entre la variation d'énergie libre et le travail des forces extérieures $\mathcal{T}^+ = \Phi(u + \delta u(t)) - \Phi(u) - W^+_{ext}$ s'écrit alors :

$$\mathcal{T}^+ = \int_\Omega \sigma : \delta\varepsilon dV - \int_\Omega \rho_0 B(t).\delta u.dV - \int_{\Gamma_\sigma} b(t).\delta u.dS$$

Après l'utilisation de la formule de Stockes, cela donne :

$$\mathcal{T}^+ = -\int_\Omega (\mathrm{div}\sigma + \rho_0 B(t).\delta u.dV - \int_{\Gamma_\sigma} (n.\sigma - b(t)).\delta u.dS$$

avec n la normale sortante à la frontière. D'après le principe du minimum de l'énergie libre, le système étant à l'équilibre, on a $\mathcal{T}^+ = 0$ pour tout δu. Ainsi, on retrouve les équations d'équilibre :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{div}\sigma + \rho_0 B(t) & = & 0 & \text{sur } \Omega \\ n.\sigma - b(t) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_\sigma \end{array}$$

Par ailleurs, pour qu'il s'agisse bien d'un minimum d'énergie libre, il faut :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}(t,0) & \geq & 0 \\ \frac{d\mathbf{C}}{d\tau}(t,t') & \geq & 0 \end{array} \tag{A.3}$$

ce qui implique $\mathbf{C}(t,\tau) \geq 0$ où $\geq$ signifie "défini positif".

On applique maintenant le premier principe de la thermodynamique : en condition adiabatique, la variation l'énergie interne $U^+ = \int\limits_\Omega \rho_0 U dV$ entre t et $t + dt$ est égale au travail des forces extérieures W^+_{ext}.

$$\frac{dU^+}{dt} = \int\limits_\Omega \rho_0 B(t).\frac{du}{dt}.dV + \int\limits_{\Gamma_\sigma} b(t).\frac{du}{dt}.dS$$

On dérive l'équation A.2 pour obtenir :

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{\rho_0} k : \frac{d\varepsilon}{dt} T_0 + \frac{c}{T_0} T \frac{dT}{dt} dV = \int\limits_\Omega \rho_0 B(t).\frac{du}{dt}.dV + \int\limits_{\Gamma_\sigma} b(t).\frac{du}{dt}.dS - \frac{dW^+}{dt}$$

En utilisant l'expression de l'entropie S de l'équation A.1, on trouve que :

$$\int\limits_\Omega T\frac{dS}{dt}dV = \int\limits_\Omega \rho_0 B(t).\frac{du}{dt}.dV + \int\limits_{\Gamma_\sigma} b(t).\frac{du}{dt}.dS - \frac{dW^+}{dt} + \int\limits_\Omega k : \frac{d\varepsilon}{dt}(T - T_0)dV \tag{A.4}$$

où $S^+ = \int\limits_\Omega T\frac{dS}{dt}dV$ représente la variation globale d'entropie, qui doit être positive d'après le second principe de la thermodynamique.

Le membre de droite peut être simplifié après le calcul de $\frac{dW^+}{dt}$, qui vaut :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dW^+}{dt} & = & \displaystyle\int\limits_\Omega \varepsilon(t) : \mathbf{C}(t,0) : \tfrac{d\varepsilon}{dt}(t) \\ & & +\tfrac{1}{2}\varepsilon(t) : \tfrac{d\mathbf{C}}{dt}(t,0) : \varepsilon(t) \\ & & +\displaystyle\int_0^t \frac{d\varepsilon}{dt}(t) : \frac{d\mathbf{C}}{d\tau}(t,\tau) : (\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau))d\tau \\ & & +\tfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t (\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)) : \frac{d\mathbf{C}}{d\tau dt} : (\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau))d\tau dV \\ & = & \displaystyle\int\limits_\Omega \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt}dV + Q(t) + \int\limits_\Omega k : \frac{d\varepsilon}{dt}(T - T_0)dV \end{array}$$

avec :

$$Q(t) = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon(t) : \frac{d\mathbf{C}}{dt}(t,0) : \varepsilon(t) + \frac{1}{2}\int_0^t (\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau)) : \frac{d\mathbf{C}}{d\tau dt} : (\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau))d\tau dV$$

La simplification utilise les équations d'équilibre et la formule de Stokes. L'équation A.4 devient alors :

$$\int_{\Omega} T\frac{dS}{dt}dV = -Q(t)$$

Ce résultat est valable pour toute histoire de déplacement $u(t)$. Pour assurer une entropie croissante, il faut donc que :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d\mathbf{C}}{dt}(t,0) & \leq & 0 \\ \dfrac{d\mathbf{C}}{dtd\tau}(t,t') & \leq & 0 \end{array} \tag{A.5}$$

où $\leq$ signifie "défini négatif". Ces conditions impliquent $\frac{d\mathbf{C}}{dt}(t,t') \leq 0$. Ainsi, lors d'un essai de relaxation, les contraintes ne peuvent que diminuer.

Annexe B

Integration on the time step for the exponential algorithm

The strain rate writes :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{C}_0^{-1}\dot{\sigma}(t) + \int_0^t \sum_{k\geq 1} \frac{t^\mu}{\tau_k t_{ref}^\mu} e^{-\frac{t^{\mu+1}-t'^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu \tau_k}} \boldsymbol{C}_k^{-1}\dot{\sigma}(t')dt'$$

The internal variables are :

$$\gamma_k(t) = \int_0^t \frac{t^\mu}{\tau_k t_{ref}^\mu} e^{-\frac{t^{\mu+1}-t'^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu \tau_k}} \boldsymbol{C}_k^{-1}\dot{\sigma}(t')dt'$$

and :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \boldsymbol{C}_0^{-1}\dot{\sigma}(t) + \textstyle\sum_{k\geq 1}\gamma_k \\ \dot{\gamma}_k(t) + \frac{t^\mu}{\tau_k t_{ref}^\mu}\gamma_k(t) - \frac{\mu}{t}\gamma_k(t) &= \frac{t^\mu}{\tau_k t_{ref}^\mu}\boldsymbol{C}_k^{-1}\dot{\sigma}(t) \end{aligned}$$

The constitutive law is integrated on the time step $[t_i, t_{i+1}]$ under the following assumption :

$$\sigma(t) = \sigma(t_i) + \Delta\sigma \frac{t^{\mu+1} - t_i^{\mu+1}}{t_{i+1}^{\mu+1} - t_i^{\mu+1}}$$

This choice for $\sigma(t)$ enables to solve the evolution of internal variables through a variation of parameter. The solution for a constant stress $\dot{\gamma}_k(t) + \frac{t^\mu}{\tau_k t_{ref}^\mu}\gamma_k(t) - \frac{\mu}{t}\gamma_k(t) = 0$ writes :

$$\gamma_k(t) = Ct^\mu e^{-\frac{t^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu \tau_k}}$$

The assumption on $\sigma(t)$ is used :

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \frac{t^\mu}{\tau_k t_{ref}^\mu}\frac{\mu+1}{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}} e^{\frac{t^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu \tau_k}} \boldsymbol{C}_k^{-1}\Delta\sigma \\ C &= \frac{\mu+1}{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}} e^{\frac{t^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu \tau_k}} \boldsymbol{C}_k^{-1}\Delta\sigma + D \end{aligned}$$

Hence :

$$\begin{aligned}
\gamma_k(t) &= \frac{(\mu+1)t^\mu}{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}\boldsymbol{C}_k^{-1}\Delta\sigma + Dt^\mu e^{-\frac{t^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu\tau_k}} \\
\gamma_k(t) &= \frac{(\mu+1)t^\mu}{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}\left(1-e^{-\frac{t^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu\tau_k}}\right)\boldsymbol{C}_k^{-1}\Delta\sigma + \gamma_{k,t_i}\frac{t^\mu}{t_i^\mu}e^{-\frac{t^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu\tau_k}} \\
\gamma_{k,i+1} &= \frac{(\mu+1)t_{i+1}^\mu}{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}\left(1-e^{-\frac{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu\tau_k}}\right)\boldsymbol{C}_k^{-1}\Delta\sigma + \gamma_{k,t_i}\frac{t_{i+1}^\mu}{t_i^\mu}e^{-\frac{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu\tau_k}}
\end{aligned}$$

The strain must be computed :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(t) &= \boldsymbol{C}_0^{-1}\dot{\sigma}(t) + \textstyle\sum_{k\geq 1}\gamma_k(t) \\
\Delta\varepsilon &= \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\boldsymbol{C}_0^{-1}\dot{\sigma}(t') + \textstyle\sum_{k\geq 1}\gamma_k(t')\right)dt'
\end{aligned}$$

The first part, $\boldsymbol{C}_0^{-1}\dot{\sigma}(t')$ writes :

$$\Delta\varepsilon_0 = \boldsymbol{C}_0^{-1}\Delta\sigma$$

The part coming from the internal variables writes :

$$\Delta\varepsilon_k = \left(1-\frac{(\mu+1)t_{ref}^\mu\tau_k}{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}\left(1-e^{-\frac{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu\tau_k}}\right)\right)\boldsymbol{C}_k^{-1}\Delta\sigma + \frac{t_{ref}^\mu\tau_k}{t_i^\mu}\left(1-e^{-\frac{t_{i+1}^{\mu+1}-t_i^{\mu+1}}{(\mu+1)t_{ref}^\mu\tau_k}}\right)\gamma_{k,t_i}$$

The sum of these parts is $\Delta\varepsilon$. This defines the tangent elastic problem.

Annexe C

FFT solvers

The basic FFT algorithm (Alg. 1) is the one of Moulinec and Suquet as described in (Moulinec and Suquet, 1998a). The accelerated FFT algorithm (Alg. 2) is the one of Eyre and Milton (Eyre and Milton, 1999). These algorithms are particular cases of the polarization-based scheme (Monchiet and Bonnet, 2012; Moulinec and Silva, 2013). The error on equilibrium $error_{eq}$ and $\Gamma^0(\xi)$ are computed as described in reference (Moulinec and Suquet, 1998a). If the loading is a macroscopic stress Σ instead of a macroscopic strain E, the macroscopic strain E_i is modified at each time step as $E^i = C_0(\Sigma - \langle\sigma^i\rangle) + \langle\varepsilon^i\rangle$, where $\langle\sigma^i\rangle$ denotes the volume average of σ^i. In this case, the error on boundary condition is modified as $error_{bc} =< \sigma^i > -\Sigma$ (Moulinec and Suquet, 1998a).

Algorithm 1 Basic FFT scheme

Initial strain field $\varepsilon^0(x)$ and prestress $\sigma_0(x)$ are provided
Initial strain field $\hat{\varepsilon}^{-1}(\xi)$ is set
while $error_{eq} > 10^{-7} \times error_{eq,0}$ **do**
  for $x \in$ points **do**
    $\sigma^i(x) \leftarrow C(x)\varepsilon^i(x) + \sigma_0(x)$
  end for
  $\hat{\sigma}^i \leftarrow \mathbf{FFT}(\sigma)$
  Compute error on equilibrium $error_{eq}$
  for $\xi \in$ frequencies **do**
    $\hat{\varepsilon}(\xi)^{i+1} \leftarrow \hat{\varepsilon}(\xi)^i - \Gamma^0(\xi) : \hat{\sigma}^i(\xi)$
  end for
  $\hat{\varepsilon}(0)^{i+1} \leftarrow E$
  $\varepsilon^{i+1} \leftarrow \mathbf{FFT}^{-1}(\hat{\varepsilon}^{i+1})$
end while

Algorithm 2 Accelerated FFT scheme

Initial strain field $\varepsilon^0(x)$ and prestress σ_0 are provided
Initial strain field $\hat{\varepsilon}^{-1}(\xi)$ is set
while $error_{eq} > 10^{-7} \times error_{eq,0}$or $error_{bc} > 10^{-7} \times error_{bc,0}$ or $error_{comp} > 10^{-7}$ **do**
  $\sigma^i(x) \leftarrow C(x)e^i(x) + \sigma_0$
  if $i\%5 == 0$ **then**
    $\hat{\sigma}^i \leftarrow \mathbf{FFT}(\sigma)$
    Compute error on equilibrium $error_{eq}$
  end if
  for $x \in$ points **do**
    $\tau(x) \leftarrow (C(x) - C_0)e^i(x) + \sigma_0(x)$
  end for
  $\hat{\tau} \leftarrow \mathbf{FFT}(\tau)$
  for $\xi \in$ frequencies **do**
    $\hat{e_b}(\xi) \leftarrow -2\Gamma^0(\xi) : \hat{\tau}(\xi)$
  end for
  $\hat{e_b}(0) \leftarrow 2E$
  $e_b \leftarrow \mathbf{FFT}^{-1}(\hat{e_b})$
  $e^{i+1}(x) \leftarrow (C(x) + C_0)^{-1} : (\tau(x) + C_0 : e_b(x) - \sigma_0(x))$
  Error on boundary conditions : $error_{bc} \leftarrow < e^{i+1} > -E$
  Error on compatibility : $error_{comp} \leftarrow \frac{||e^{i+1} - e_b||_2}{||e^{i+1}||_2}$
end while

Annexe D

Hashin-Shtrikman bound and Laplace-Carson transform

D.1 The correspondence principle

The non-aging linear viscoelastic problem corresponds to elastic problems thank to the Laplace-Carson transform. The transform of a function $g(t)$ is $\hat{g}(p) = p\int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt$. The transform of its derivative $\dot{g}(t)$ is $\hat{\dot{g}}(p) = p\hat{g}(p) - p.g(0)$.

Elastic inclusions (volume fraction f_i) are embedded in a viscoelastic matrix modeled by a single Kelvin chain. The relaxation problem reads :

$$\begin{array}{rcll} \text{div } \sigma(x,t) & = & 0 & x \in V \\ \sigma(x,t) & = & C_i\varepsilon(x,t) & x \in \text{inclusions} \\ \sigma(x,t) & = & C_m\varepsilon(x,t) + \tau C_m\dot{\varepsilon}(x,t) & x \in \text{matrix} \\ \varepsilon(x,t) & = & E(t) + \nabla^s u(x,t) & x \in V \\ u(x,t) & & periodic & x \in \partial V \\ \sigma(x,t)\cdot n(x) & & anti-periodic & x \in \partial V \end{array}$$

In the Laplace-Carson space, for each p, this set of equation corresponds to the elastic problem :

$$\begin{array}{rcll} \text{div } (\hat{\sigma}(x,p)) & = & 0 & x \in V \\ \hat{\sigma}(x,p) & = & C_i\hat{\varepsilon}(p) & x \in \text{inclusions} \\ \hat{\sigma}(p) & = & (1+p\tau)C_m\hat{\varepsilon}(x,p) & x \in \text{matrix} \\ \hat{\varepsilon}(x,p) & = & E(p) + \nabla^s\hat{u}(x,p) & x \in V \\ \hat{u}(x,p) & & periodic & x \in \partial V \\ \hat{\sigma}(x,p)\cdot n(x) & & anti-periodic & x \in \partial V \end{array}$$

The Hashin-Shtrikman bound is an analytical model which provides estimates of the macroscopic response of the elastic material.

$$< \hat{\sigma}(p) >= \hat{C_{HS}}(p) < \hat{\varepsilon}(p) >= \hat{C_{HS}}(p)E$$

$\hat{C_{HS-}}(p)$ is isotropic and its bulk modulus and shear modulus are :

$$\begin{aligned} K_m(p) &= (1+p\tau)K_m \\ \mu_m(p) &= (1+p\tau)\mu_m \\ K_{HS-}(p) &= K_m(p) + \frac{f_i}{\frac{1}{K_i - K_m(p)} + \frac{3(1-f_i)}{3K_m(p)+4\mu_m(p)}} \\ \mu_{HS-}(p) &= \mu_m(p) + \frac{f_i}{\frac{1}{\mu_i - \mu_m(p)} + \frac{6(K_m(p)+2\mu_m(p))(1-f_i)}{5\mu_m(p)(3K_m(p)+4\mu_m(p))}} \end{aligned}$$

The Laplace-Carson transform of the macroscopic stress $< \hat{\sigma} > (p)$ is computed and the last stage is inverting this transform.

D.2 Inverting the Laplace-Carson transform

Lots of methods are available to invert the Laplace-Carson transform. In the present study, the Gaver-Stehfest formula (Stehfest, 1970) has been used :

$$g(t,M) = \sum_{k=1}^{2M} \frac{\xi_k}{k} \hat{g}(\frac{k\ln(2)}{t})$$

and

$$\xi_k = (-1)^{M+k} \sum_{j=E(\frac{k+1}{2})}^{min(k,M)} \frac{j^{M+1}}{M!} \binom{M}{j} \binom{2j}{j} \binom{j}{k-j}$$

Computing the binomial coefficients requires high precision and the long double type (IEEE 754, decimal on 128 bits) provided it. If M is too low, the formula lacks precision (Whitt, 2006). If M is too large, small errors on $\hat{g}(\frac{k\ln(2)}{t})$ may trigger large errors on the outcome. M is set to 7.

Therefore, to estimate the response at time t, about 14 elastic computations are required. The Gaver-Stehfest formula does not seem to be practical for FEM since it lacks stability or precision. It is suitable as long as the numerical error in the Laplace-Carson space remains very low. This formula is useful when the Hashin-Shtrikman analytical formula or self-consistent estimate are computed in the Laplace-Carson space.

Annexe E

The Mori-Tanaka homogenization scheme

The present appendix recalls the formula (Torquato, 2002; Pierard et al., 2007a) needed to compute the estimates of the overall moduli according to the Mori-Tanaka scheme (Mori and Tanaka, 1973; Benveniste, 1987). The considered microstructure is a biphasic material made of a isotropic elastic matrix and isotropic elastic inclusions. These inclusions are spheroids, or ellipsoid of revolution, of semi-diameters a, b, b. The aspect ratio is defined as $\alpha = a/b$. The orientations of the inclusions is random isotropic. The overall behavior is expected to be isotropic, of bulk modulus k_{MT} and shear modulus μ_{MT}.

E.1 Eshelby's tensor

The Eshelby's tensor $\mathbf{S}$ (Eshelby, 1957) of one spheroid embedded in a elastic isotropic matrix of Poisson's ratio ν_m along the axis 1 is written, component by component :

$$\begin{aligned}
S_{1111} &= \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[\frac{4\alpha^2-2}{\alpha^2-1} - 2\nu_m - g(\alpha)\left(1 - 2\nu_m + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1}\right)\right] \\
S_{2222} = S_{3333} &= \frac{1}{4(1-\nu_m)}\left[\frac{3\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} + g(\alpha)\left(1 - 2\nu_m - \frac{9}{4(\alpha^2-1)}\right)\right] \\
S_{1122} = S_{1133} &= \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + 2\nu_m + g(\alpha)\left(1 - 2\nu_m + \frac{3}{2(\alpha^2-1)}\right)\right] \\
S_{2211} = S_{3311} &= \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + \frac{g(\alpha)}{2}\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} - (1 - 2\nu_m)\right)\right] \\
S_{2233} = S_{3322} &= \frac{1}{4(1-\nu_m)}\left[\frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} - g(\alpha)\left(1 - 2\nu_m + \frac{3}{4(\alpha^2-1)}\right)\right] \\
S_{1212} = S_{1313} &= \frac{1}{4(1-\nu_m)}\left[-\frac{2}{\alpha^2-1} - 2\nu_m - \frac{g(\alpha)}{2}\left(1 - 2\nu_m - \frac{3(\alpha^2+1)}{\alpha^2-1}\right)\right] \\
S_{2323} &= \frac{S_{2222}-S_{2233}}{2}
\end{aligned}$$

where $g(\alpha)$ is a function of α :

$$\begin{aligned}
g(\alpha) &= \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \cosh^{-1}(\alpha)\right] \quad \alpha > 1 \\
g(\alpha) &= \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[-\alpha\sqrt{1-\alpha^2} + \cos^{-1}(\alpha)\right] \quad \alpha < 1
\end{aligned}$$

The Eshelby tensor is minor-symmetric, that is $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$. The

case $\alpha = 1$ corresponds to spherical inclusions. In this particular case, the Eshelby's tensor writes :

$$S_{ijkl} = \frac{5\nu_m - 1}{15(1-\nu_m)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{4-5\nu_m}{15(1-\nu_m)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

The strain concentration tensor in the inclusion $\mathbf{T}$, describing the strain in the inclusion as a function of the strain at infinity writes :

$$\mathbf{T} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{S} : \mathbf{C}_m^{-1} : (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m)\right]^{-1}$$

where $\mathbf{I}$ is the identity tensor of order 4, $\mathbf{C}_i$ is the elastic stiffness in the inclusion and $\mathbf{C}_m$ is the isotropic elastic stiffness of the matrix. These tensors $\mathbf{C}_i(\psi)$,$\mathbf{T}(\psi)$, are then rotated according to the orientation of the inclusion ψ.

E.2 Mori-Tanaka estimate

The Mori-Tanaka estimate $\mathbf{C}_{MT}$ accounts for the volume fraction of inclusions f_i and the distribution of orientations of inclusions $f(\psi)$:

$$f_i \sum_{\psi} f(\psi)(\mathbf{C}_{MT} - \mathbf{C}_i(\psi)) : \mathbf{T}(\psi)d\psi + (1-f_i)(\mathbf{C}_{MT} - \mathbf{C}_m) = 0$$

Since the distribution of orientations is isotropic, $f(\psi)$ is uniform. Since the stiffness of the inclusions $\mathbf{C}_i$ is isotropic :

$$f_i(\mathbf{C}_{MT} - \mathbf{C}_i) < \mathbf{T}(\psi) >_{\psi} + (1-f_i)(\mathbf{C}_{MT} - \mathbf{C}_m) = 0$$

where $< \mathbf{T}(\psi) >_{\psi}$ is the average of $\mathbf{T}(\psi)$ over orientations ψ. It is an isotropic tensor, featuring a bulk component T_h and a shear component T_s, written as :

$$\begin{aligned} T_h &= \frac{T_{iijj}}{3} \\ T_s &= \frac{1}{5}\left(T_{ijij} - \frac{T_{iijj}}{3}\right) \end{aligned}$$

The Mori-Tanaka estimates of the bulk modulus k_{MT} and shear modulus μ_{MT} writes :

$$\begin{aligned} k_{MT} &= \frac{(1-f_i)k_m + f_i.k_i.T_h}{1-f_i+f_i.T_h} \\ \mu_{MT} &= \frac{(1-f_i)\mu_m + f_i.\mu_i.T_s}{1-f_i+f_i.T_s} \end{aligned}$$

where f_i is the volume fraction of inclusions, k_i and μ_i the bulk and shear modulus of inclusions and k_m and μ_m the bulk and shear modulus of the matrix.

Annexe F

Definition of Volterra's operators and properties

The properties of Volterra's operators listed in section 3.1.4 are demonstrated in the current appendix.

The left and right identity of the tensorial Volterra operator of order 4 is $H(t-t')\mathbf{1}_4$, as stated in equation 3.2 and 3.3 :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} H(t-t')\mathbf{1}_4(t,t') &= \int_{\tau=-\infty}^{t} \mathbf{C}_a(t,\tau) d_\tau H(\tau,t') \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{t} \mathbf{C}_a(t,\tau)\delta(\tau-t')d\tau \\ &= \mathbf{C}_a(t,t')\end{aligned}$$

$$H(t-t')\mathbf{1}_4 \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_a(t,t') = \int_{\tau=-\infty}^{t} H(t,\tau) d_\tau \mathbf{C}_a(\tau,t')$$

Due to the causality principle, if $\tau < t'$ then $\mathbf{C}_a(\tau,t') = 0$. Hence :

$$\begin{aligned}H(t-t')\mathbf{1}_4 \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_a(t,t') &= \int_{\tau=t'}^{t} H(t,\tau) d_\tau \mathbf{C}_a(\tau,t') \\ &= \mathbf{C}_a(t,t')\end{aligned}$$

As stated in equation 3.4, the operator of order 4 and the one of order 2 can be associated :

$$(\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} \mathbf{C}_b) \overset{\circ}{:} \varepsilon = \mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} (\mathbf{C}_b \overset{\circ}{:} \varepsilon)$$

Let's compute $\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} (\mathbf{C}_b \overset{\circ}{:} \varepsilon)(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_a \overset{\circ}{:} (\mathbf{C}_b \overset{\circ}{:} \varepsilon)(t) &= \int_{t'=-\infty}^{t} \mathbf{C}_a(t,t') : d_{t'}(\mathbf{C}_b \overset{\circ}{:} \varepsilon)(t') \\ &= \int_{t'=-\infty}^{t} \mathbf{C}_a(t,t') : d_{t'} \left[\int_{\tau=-\infty}^{t'} \mathbf{C}_b(t',\tau) : d\varepsilon(\tau) \right](t') \\ &= \int_{t'=-\infty}^{t} \mathbf{C}_a(t,t') : \left[\mathbf{C}_b(t',t')d\varepsilon(t') + \int_{\tau=-\infty}^{t'} d_{t'}\mathbf{C}_b(t',\tau) : d\varepsilon(\tau) \right]\end{aligned}$$

Due to the causality principle, if $\tau > t'$ then $d_{t'}\mathbf{C}_b(t',\tau) = 0$. Hence :

$$\mathbf{C}_b(t',t')d\varepsilon(t') + \int_{\tau=-\infty}^{t'} d_{t'}\mathbf{C}_b(t',\tau) : d\varepsilon(\tau) = \int_{\tau=-\infty}^{t} d_{t'}\mathbf{C}_b(t',\tau) : d\varepsilon(\tau)$$

and :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}(\mathbf{C}_b\overset{\circ}{:}\varepsilon)(t) &= \int_{t'=-\infty}^{t}\mathbf{C}_a(t,t'):\int_{\tau=-\infty}^{t}d_{t'}\mathbf{C}_b(t',\tau):d_\tau\varepsilon(\tau)\\
&= \int_{\tau=-\infty}^{t}\left[\int_{t'=-\infty}^{t}\mathbf{C}_a(t,t'):d_{t'}\mathbf{C}_b(t',\tau)\right]:d_\tau\varepsilon(\tau)\\
&= \int_{\tau=-\infty}^{t}\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_b(t,\tau):d_\tau\varepsilon(\tau)\\
&= (\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_b)\overset{\circ}{:}\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

As stated in equation 3.5, the tensorial Volterra operator of order 4 is associative :

$$\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}(\mathbf{C}_b\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_c) = (\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_b)\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_c$$

First, let's compute $\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}(\mathbf{C}_b\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_c)(t,t')$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}(\mathbf{C}_b\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_c)(t,t') &= \int_{\tau=-\infty}^{t}\mathbf{C}_a(t,\tau):d_\tau[\mathbf{C}_b\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_c](\tau,t')\\
&= \int_{\tau=-\infty}^{t}\mathbf{C}_a(t,\tau):d\tau[\int_{u=-\infty}^{\tau}\mathbf{C}_b(\tau,u):d_u\mathbf{C}_c(u,t')]\\
&= \int_{\tau=-\infty}^{t}\mathbf{C}_a(t,\tau):[\mathbf{C}_b(\tau,\tau):d_\tau\mathbf{C}_c(\tau,t')+\int_{u=-\infty}^{\tau}d_\tau\mathbf{C}_b(\tau,u):d_u\mathbf{C}_c(u,t')]
\end{aligned}$$

Due to the causality principle, if $u>\tau$ then $d_\tau\mathbf{C}_b(\tau,u)=0$. Hence :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}(\mathbf{C}_b\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_c)(t,t') &= \int_{\tau=-\infty}^{t}\mathbf{C}_a(t,\tau):\int_{u=-\infty}^{t}d_\tau\mathbf{C}_b(\tau,u):d_u\mathbf{C}_c(u,t')\\
&= \int_{u=-\infty}^{t}\left[\int_{\tau=-\infty}^{t}\mathbf{C}_a(t,\tau):d_\tau\mathbf{C}_b(\tau,u)\right]:d_u\mathbf{C}_c(u,t')\\
&= \int_{u=-\infty}^{t}[\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_b(t,u)]:d_u\mathbf{C}_c(u,t')\\
&= (\mathbf{C}_a\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_b)\overset{\circ}{:}\mathbf{C}_c(t,t')
\end{aligned}$$

The associativity has been demonstrated.

Bibliographie

Chapitre ier : Dispositions générales relatives à la sécurité nucléaire, article l591-1. http://www.legifrance.gouv.fr/affichCode.do?idArticle=LEGIARTI000025108609&idSectionTA=LEGISCTA000025108607&cidTexte=LEGITEXT000006074220&dateTexte=20150504. Code de l'Environnement, Livre V : Prévention des pollutions, des risques et des nuisances, Titre IX : La sécurité nucléaire et les installations nucléaires de base ; Article L591-1 crée par l'ordonnance n 2012-6 du 5 janvier 2012 ; Accessed : 2015-05-04.

Technical report.

Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method.

Bullet physics library. http://www.bulletphysics.org. Accessed : 2013-08-07.

Comprehensive database on concrete creep and shrinkage. http://www.iti.northwestern.edu/publications../bazant/index.html. Accessed : 2015-05-08.

Fastest fourier transform in the west. http://www.fftw.org. Accessed : 2013-08-07.

Qhull software. http://www.qhull.org. Accessed : 2013-06-28.

Décret du 31 juillet 1985 autorisant la création par electricité de france d'une tranche de la central nucléaire de golfech dans le département de tarn-et-garonne. http://www.legifrance.gouv.fr/jopdf/common/jo_pdf.jsp?numJO=0&dateJO=19850807&numTexte=&pageDebut=09011&pageFin=09015, 1985. Accessed : 2015-05-04.

Une méthode incrémentale pour l'homogénéisation de polycristaux thermo-viscoélastiques. *International Journal of Solids and Structures*, 2011. URL.

Interfacial micromechanics assessment of classical rheological models. i : Single interface size and viscosity. *Journal of Engineering Mechanics*, 0(0) :04015092, 2015a. ISSN 0733-9399. doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001012. URL.

Interfacial micromechanics assessment of classical rheological models. ii : Multiple interface sizes and viscosities. *Journal of Engineering Mechanics*, 0 (0) :04015093, 2015b. ISSN 0733-9399. doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001013. URL.

Gholam Abiar. *Cinétique de dessiccation et déformations différées du béton (analyse et modélisation)*. PhD thesis, 1986.

ACI. Guide for modeling and calculating shrinkage and creep in hardened concrete. Technical Report ACI209.2R-08, American Concrete Institute, may 2008.

AFNOR. Eurocode2 : Calcul des structures en béton partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments. Technical Report NF EN 1992-1-1 (2005-10-01), AFNOR, 2005. Section 3 matériaux 3.1.2 Résistance.

AFNOR. Determination du taux de fluage pour les tubes en matières thermoplastiques. Technical Report NF EN ISO 9967 :2007, Norme ISO, 2007.

AFNOR. Essais pour déterminer les caractéristiques géométriques des granulats - partie 3 : détermination de la forme des granulats - coefficient d'aplatissement. Technical Report NF EN 933-3, AFNOR, 2012.

AGY. High strength glass fibers. Technical Report LIT-2006-111 R2, AGY, 2001.

Abudushalamu Aili, Matthieu Vandamme, Jean-Michel Torrenti, and Benoit Masson. Theoretical and practical differences between creep and relaxation poisson's ratios in linear viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 19(4) :537–555, 2015. ISSN 1385-2000. doi : 10.1007/s11043-015-9277-5. URL.

S.Y. Alam and F. Hammoum. Viscoelastic properties of asphalt concrete using micromechanical self-consistent model. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 15(1) :272 – 285, 2015. ISSN 1644-9665. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.acme.2014.02.005. URL.

E. Anderson, Z. Bai, J. Dongarra, A. Greenbaum, A. McKenney, J. Du Croz, S. Hammerling, J. Demmel, C. Bischof, and D. Sorensen. Lapack : A portable linear algebra library for high-performance computers. In *Proceedings of the 1990 ACM/IEEE Conference on Supercomputing*, Supercomputing '90, pages 2–11, Los Alamitos, CA, USA, 1990. IEEE Computer Society Press. ISBN 0-89791-412-0. URL.

ASTM. Standard practice for description and identification of soils (visual-manual procedure). Technical Report ASTM Standard D2488-09a, ASTM, 2009.

ASTM. Standard test method for microscopical determination of parameters of the air-void system in hardened concrete. Technical Report ASTM C457 / C457M - 12, ASTM, 2012a.

ASTM. Standard practice for obtaining hydrostatic or pressure design basis for fiberglass (glass-fiber-reinforced thermosetting-resin) pipe and fittings. Technical Report ASTM Standard D2992 -12, ASTM, 2012b.

Dawood S. Atrushi. *Tensile and Compressive Creep of Early Age Concrete : Testing and Modelling*. PhD thesis, The Norwegian University of Science and Technology Trondheim, Norway, 2003.

B.A. Auld and B.A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. Number vol. 1 in Acoustic Fields and Waves in Solids. Wiley, 1973. ISBN 9780471037026. URL.

K.Ganesh Babu and D.Saradhi Babu. Behaviour of lightweight expanded polystyrene concrete containing silica fume. *Cement and Concrete Research*, 33(5) :755 – 762, 2003. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(02)01055-4. URL.

Claudiu Badulescu, Noel Lahellec, and Pierre Suquet. Field statistics in linear viscoelastic composites and polycrystals. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 49 :329 – 344, 2015. ISSN 0997-7538. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.07.012. URL.

Satish Balay, William D. Gropp, Lois Curfman McInnes, and Barry F. Smith. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. In E. Arge, A. M. Bruaset, and H. P. Langtangen, editors, *Modern Software Tools in Scientific Computing*, pages 163–202. Birkhäuser Press, 1997.

Satish Balay, Jed Brown, Kris Buschelman, Victor Eijkhout, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matthew G. Knepley, Lois Curfman McInnes, Barry F. Smith, and Hong Zhang. PETSc users manual. Technical Report ANL-95/11 - Revision 3.4, Argonne National Laboratory, 2013a.

Satish Balay, Jed Brown, Kris Buschelman, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matthew G. Knepley, Lois Curfman McInnes, Barry F. Smith, and Hong Zhang. PETSc Web page, 2013b. `http://www.mcs.anl.gov/petsc`.

C. Bradford Barber, David P. Dobkin, and Hannu Huhdanpaa. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM TRANSACTIONS ON MATHEMATICAL SOFTWARE*, 22(4) :469–483, 1996.

Ever J. Barbero and Thomas M. Damiani. Phenomenological prediction of tensile strength of e-glass composites from available aging and stress corrosion data. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 22(4) :373–394, 2003. doi : 10.1177/0731684403022004269. URL.

Z. P. Bažant and Qiang Yu. Relaxation of prestressing steel at varying strain and temperature : Viscoplastic constitutive relation. *Journal of Engineering Mechanics*, 139(7) :814–823, 2013. doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000533. URL.

Zdeněk P. Bažant, Anders B. Hauggaard, Sandeep Baweja, and Franz Josef Ulm. Microprestress-solidification theory for concrete creep. i : Aging and drying effects. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(11) :1188–1194, 1997. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:11(1188). URL.

ZdeněkP. Bažant, RILEM, and U.S. National Science Foundation. *Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete*. John Wiley & Sons, 1988.

ZdeněkP. Bažant and Sandeep Baweja. Justification and refinements of model b3 for concrete creep and shrinkage 2. updating and theoretical basis. *Materials and Structures*, 28(8) :488–495, 1995. ISSN 1359-5997. doi : 10.1007/BF02473171. URL.

ZdeněkP. Bažant and Guang-Hua Li. Unbiased statistical comparison of creep and shrinkage prediction models. *Materials Journal*, 105(6) :610–621, 2008a. doi : 10.14359/20203. URL.

ZdeněkP. Bažant and Guang-Hua Li. Comprehensive database on concrete creep and shrinkage. *Materials Journal*, 105(6) :635–637, 2008b. doi : 10.14359/20206. URL.

Z.P. Bažant and J.C. Chern. Concrete creep at variable humidity : constitutive law and mechanism. *Materials and Structures*, 18(1) :1–20, 1985. ISSN 1359-5997. doi : 10.1007/BF02473360. URL.

Theocharis Baxevanis and Nicolas Charalambakis. A micromechanically based model for damage-enhanced creep-rupture in continuous fiber-reinforced ceramic matrix composites. *Mechanics of Materials*, 42(5) :570 – 580, 2010. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2010.02.004. URL.

Z.P. Bažant. Numerical determination of long-range stress history from strain history in concrete. *Matériaux et Construction*, 5(3) :135–141, 1972. ISSN 0025-5432. doi : 10.1007/BF02539255. URL.

ZdeněkP. Bažant and Sandeep Baweja. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures— model b3. *Materials and Structures*, 28(6) :357–365, 1995a. ISSN 1359-5997. doi : 10.1007/BF02473152. URL.

ZdeněkP. Bažant and Sandeep Baweja. Justification and refinements of model b3 for concrete creep and shrinkage 1. statistics and sensitivity. *Materials and Structures*, 28(7) :415–430, 1995b. ISSN 1359-5997. doi : 10.1007/BF02473078. URL.

Zdeněk P. Bažant and Christian Huet. Thermodynamic functions for ageing viscoelasticity : integral form without internal variables. *International Journal of Solids and Structures*, 36(26) :3993 – 4016, 1999. ISSN 0020-7683. doi : 10.1016/S0020-7683(98)00184-X. URL.

Zdeněk P. Bažant and Santosh Prasannan. Solidification theory for aging creep. *Cement and Concrete Research*, 18(6) :923 – 932, 1988. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0008-8846(88)90028-2. URL.

Zdeněk P. Bažant and S. T. Wu. Creep and shrinkage law for concrete at variable humidity. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100(6) :1183–1209, 1974.

Zdeněk P. Bažant, Q. Yu, G. Li, Gary J. Klein, and Vladim'ir Kř'istek. Excessive deflections of record-span prestressed box girder. *Concrete International*, 32 (6) :44–52, June 2010. URL.

Zdeněk P. Bažant, Q. Yu, and G. Li. Excessive long-time deflections of prestressed box girders. i : Record-span bridge in palau and other paradigms. *Journal of Structural Engineering*, 138(6) :676–686, 2012. doi : 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000487. URL.

Z.P. Bažant and L. Panula. Practical prediction of time-dependent deformations of concrete. *Matériaux et Construction*, 11(5) :307–316, 1978. ISSN 0025-5432. doi : 10.1007/BF02473872. URL.

Z.P. Bažant, A.A. Asghari, and J. Schmidt. Experimental study of creep of hardened portland cement paste at variable water content. *Matériaux et Construction*, 9(4) :279–290, 1976. ISSN 0025-5432. doi : 10.1007/BF02478648. URL.

J.J. Beaudoin. Comparison of mechanical properties of compacted calcium hydroxide and Portland cement paste systems. *Cement and Concrete Research*, 13(3) :319 – 324, 1983. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0008-8846(83)90030-3. URL.

M. Bederina, L. Marmoret, K. Mezreb, M.M. Khenfer, A. Bali, and M. Quéneudec. Effect of the addition of wood shavings on thermal conductivity of sand concretes : Experimental study and modelling. *Construction and Building Materials*, 21(3) :662 – 668, 2007. ISSN 0950-0618. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2005.12.008. URL. Fracture, Acoustic Emission and {NDE} in Concrete (KIFA-4).

Ehsan Behzadfar and Savvas G. Hatzikiriakos. Viscoelastic properties and constitutive modelling of bitumen. *Fuel*, 108(0) :391 – 399, 2013. ISSN 0016-2361. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.fuel.2012.12.035. URL.

F. Benboudjema, F. Meftah, and J.M. Torrenti. Interaction between drying, shrinkage, creep and cracking phenomena in concrete. *Engineering Structures*, 27(2) :239 – 250, 2005. ISSN 0141-0296. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2004.09.012. URL.

Farid Benboudjema. *Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux enceintes de confinement de batiments réacteurs des centrales nucléaires.* PhD thesis, Université de Marne la Vallée, 2011.

Dale Bentz, Eward J. Garboczi, and Kenneth A. Snyder. A hard core/soft shell microstructural model for studying percolation and transport in three-dimensional composite media. Technical Report NISTIR 6265, National Institute of Standards and Technology, 1999.

Dale P. Bentz. Three-dimensional computer simulation of Portland cement hydration and microstructure development. *Journal of the American Ceramic Society*, 80(1) :3–21, 1997. ISSN 1551-2916. doi : 10.1111/j.1151-2916.1997.tb02785.x. URL.

D.P. Bentz. Modeling the influence of limestone filler on cement hydration using CEMHYD3D. *Cement and Concrete Composites*, 28(2) :124 – 129, 2006. ISSN 0958-9465. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2005.10.006. URL.

Y. Benveniste. A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6(2) :147 – 157, 1987. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636(87)90005-6. URL.

Stéphane Berbenni, Florence Dinzart, and Hafid Sabar. A new internal variables homogenization scheme for linear viscoelastic materials based on an exact eshelby interaction law. *Mechanics of Materials*, 81(0) :110 – 124, 2015. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2014.11.003. URL.

Olivier Bernard, Franz-Josef Ulm, and Eric Lemarchand. A multiscale micromechanics-hydration model for the early-age elastic properties of cement-based materials. *Cement and Concrete Research*, 33(9) :1293 – 1309, 2003. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(03)00039-5. URL.

Amandine Berthollet. *Contribution à la modélisation du béton vis-à-vis du vieillissement et de la durabilité : interaction des déformations de fluage et du comportement non-linéaire du matériau*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2003.

Irene J. Beyerlein and Chad M. Landis. Shear-lag model for failure simulations of unidirectional fiber composites including matrix stiffness. *Mechanics of Materials*, 31(5) :331 – 350, 1999. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6636(98)00075-1. URL.

François Bignonnet, Karam Sab, Luc Dormieux, Sébastien Brisard, and Antoine Bisson. Macroscopically consistent non-local modeling of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 278(0) :218 – 238, 2014. ISSN 0045-7825. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2014.05.014. URL.

V. Blanc, L. Barbie, R. Largenton, and R. Masson. Homogenization of linear viscoelastic three phase media : Internal variable formulation versus full-field computation. *Procedia Engineering*, 10 :1889 – 1894, 2011. ISSN 1877-7058. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2011.04.314. URL. 11th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials (ICM11).

S. Blassiau, A. Thionnet, and A.R. Bunsell. Three-dimensional analysis of load transfer micro-mechanisms in fibre/matrix composites. *Composites Science and Technology*, 69(1) :33 – 39, 2009. ISSN 0266-3538. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.10.041. URL. Mechanical Response of Fibre Reinforced Composites.

Andrey V. Boiko, Victor M. Kulik, Basel M. Seoudi, H.H. Chun, and Inwon Lee. Measurement method of complex viscoelastic material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 47(3–4) :374 – 382, 2010. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.037. URL.

L. Boltzmann. Zur theorie der elastischen nachwirkung. In *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*, pages 70(II),275. 1874.

Walter L. Bond. The mathematics of the physical properties of crystals. *Bell System Technical Journal*, 22(1) :1–72, 1943. ISSN 1538-7305. doi : 10.1002/j.1538-7305.1943.tb01304.x. URL.

Amanda C. Bordelon and Jeffery R. Roesler. Spatial distribution of synthetic fibers in concrete with x-ray computed tomography. *Cement and Concrete Composites*, 53 :35 – 43, 2014. ISSN 0958-9465. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2014.04.007. URL.

M. Bouasker, P. Mounanga, P. Turcry, A. Loukili, and A. Khelidj. Chemical shrinkage of cement pastes and mortars at very early age : Effect of limestone filler and granular inclusions. *Cement and Concrete Composites*, 30(1) :13 – 22, 2008. ISSN 0958-9465. doi : 10.1016/j.cemconcomp.2007.06.004. URL.

J. Breen and A.J. Huis in't Veld. Expected lifetime of existing pvc water systems ; summary. Technical Report MT-RAP-06-18693/mso, TNO Science and Industry, 2006. URL.

Matthieu Briffaut. *Etude de la fissuration au jeune âge des structures massives en béton : influence de la vitesse de refroidissement, des reprises de bétonnage et des armatures*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2010.

L.C. Brinson and W.S. Lin. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Composite Structures*, 41 (3–4) :353 – 367, 1998. ISSN 0263-8223. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00019-1. URL.

S. Brisard and L. Dormieux. Fft-based methods for the mechanics of composites : A general variational framework. *Computational Materials Science*, 49(3) :663 – 671, 2010. ISSN 0927-0256. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.06.009. URL.

J.J. Brooks. 30-year creep and shrinkage of concrete. *Magazine of Concrete Research*, 57(9) :545–556, 2005.

J.J. Brooks. 3 - dimensional stability and cracking processes in concrete. In C.L. Page and M.M. Page, editors, *Durability of Concrete and Cement Composites*, Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering, pages 45 – 85. Woodhead Publishing, 2007. ISBN 978-1-85573-940-6. doi : http://dx.doi.org/10.1533/9781845693398.45. URL.

R.D. Browne and R. Blundell. The influence of loading age and temperature on the long term creep behaviour of concrete in a sealed, moisture stable, state. *Matériaux et Construction*, 2(2) :133–143, 1969. ISSN 0025-5432. doi : 10.1007/BF02475101. URL.

P.Ponte Castañeda. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 (8) :1757 – 1788, 1992. ISSN 0022-5096. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(92)90050-C. URL.

P.Ponte Castañeda and J.R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12) :1919 – 1951, 1995. ISSN 0022-5096. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(95)00058-Q. URL.

R. J. Charles. Static fatigue of glass. i. *Journal of Applied Physics*, 29(11), 1958a.

R. J. Charles. Static fatigue of glass. ii. *Journal of Applied Physics*, 29(11), 1958b.

Xudong Chen, Shengxing Wu, and Jikai Zhou. Influence of porosity on compressive and tensile strength of cement mortar. *Construction and Building Materials*, 40(0) :869 – 874, 2013. ISSN 0950-0618. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2012.11.072. URL. Special Section on Recycling Wastes for Use as Construction Materials.

Jenn-Chuan Chern and Chin-Huai Young. Compressive creep and shrinkage of steel fibre reinforced concrete. *International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, 11(4) :205 – 214, 1989. ISSN 0262-5075. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0262-5075(89)90100-0. URL.

T.T. Chiao and R.L. Moore. Stress-rupture of s-glass epoxy multifilament strands. *Journal of Composite Materials*, 5(1) :2–11, 1971. doi : 10.1177/002199837100500101. URL.

D. W. Christensen and D. A. Anderson. Interpretation of dynamic mechanical test data for paving grade asphalt cements. *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, 61, 1992. ISSN 0270-2932.

R.M. Christensen. Viscoelastic properties of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(1) :23 – 41, 1969. ISSN 0022-5096. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(69)90011-8. URL.

R.M. Christensen and K.H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4) :315 – 330, 1979. ISSN 0022-5096. doi : 10.1016/0022-5096(79)90032-2. URL.

V. Clausnitzer and J. W. Hopmans. Determination of phase-volume fractions from tomographic measurements in two-phase systems. *Advances in Water Resources*, 22(6) :577 – 584, 1999. ISSN 0309-1708.

BernardD. Coleman. Thermodynamics of materials with memory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(1) :1–46, 1964. ISSN 0003-9527. doi : 10.1007/BF00283864. URL.

A. C. Collop, G. R. McDowell, and Y. Lee. On the use of discrete element modelling to simulate the viscoelastic deformation behaviour of an idealized asphalt mixture. *Geomechanics and Geoengineering*, 2(2) :77–86, 2007. doi : 10.1080/17486020701243128. URL.

Georgios Constantinides and Franz-Josef Ulm. The effect of two types of C-S-H on the elasticity of cement-based materials : Results from nanoindentation and micromechanical modeling. *Cement and Concrete Research*, 34(1) :67 – 80, 2004. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(03)00230-8. URL.

Raymond A. Cook and Kenneth C. Hover. Mercury porosimetry of hardened cement pastes. *Cement and Concrete Research*, 29(6) :933 – 943, 1999. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(99)00083-6. URL.

Thomas L. Cost and Eric B. Becker. A multidata method of approximate Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(2) :207–219, 1970. ISSN 1097-0207. doi : 10.1002/nme.1620020206. URL.

Upendra J. Counto. The effect of the elastic modulus of the aggregate on the elastic modulus, creep and creep recovery of concrete. *Magazine of Concrete Research*, 16(48) :129–138, 1964. ISSN 0024-9831. doi : 10.1680/macr.1964.16.48.129. URL.

O. Coussy. *Mechanics of Porous Continua*. Wiley, 1995. ISBN 9780471952671.

Thibaut Crochon, Tony Schönherr, Chun Li, and Martin Lévesque. On finite-element implementation strategies of Schapery-type constitutive theories. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 14(4) :359–387, 2010. ISSN 1573-2738. doi : 10.1007/s11043-010-9115-8. URL.

R.L. Day and B.R. Gamble. The effect of changes in structure on the activation energy for the creep of concrete. *Cement and Concrete Research*, 13(4) :529 – 540, 1983. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0008-8846(83)90012-1. URL.

W. A. DAY. Restrictions on relaxation functions in linear viscoelasticity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 24(4) :487–497, 1971. doi : 10.1093/qjmam/24.4.487. URL.

Philippe De Bonnieres. Relation de comportement beton_rag. Technical Report Code Aster R7.01.26, EdF, 2013. URL.

François de Larrard. *Structures granulaires et formulation des bétons - Concrete Mixture - Proportionning - A scientific approach*. Number 9. Modern technology Series, E & FN SPON, Londres, 1999.

Thomas De Larrard. *Variabilité des propriétés du béton : caractérisation expérimentale et modélisation probabiliste de la lixiviation*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2010.

Claude Derache, Patrick Guiraud, Marc Plumat, Patrick Rougeau, Benoist Thomas, Michel Vallès, and Angélique Vichot. *Durabilité des bétons soumis au gel et aux sels de déverglaçage*, chapter 4, pages 37–52. 2004. URL.

H. Di Benedetto, B. Delaporte, and C. Sauzéat. Three-dimensional linear behavior of bituminous materials : Experiments and modeling. *International Journal of Geomechanics*, 7(2) :149–157, 2007. doi : 10.1061/(ASCE)1532-3641(2007)7:2(149). URL.

Sidney Diamond. The microstructure of cement paste and concrete—a visual primer. *Cement and Concrete Composites*, 26(8) :919 – 933, 2004. ISSN 0958-9465. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2004.02.028. URL. Scanning electron microscopy of cements and concretes.

Sidney Diamond and Jingdong Huang. The {ITZ} in concrete – a different view based on image analysis and {SEM} observations. *Cement and Concrete Composites*, 23(2–3) :179 – 188, 2001. ISSN 0958-9465. doi : http://dx.doi.

org/10.1016/S0958-9465(00)00065-2. URL. Special Theme Issue on Image Analysis.

W. P. S. Dias, G. A. Khoury, and P. J. E. Sullivan. Mechanism of creep in concrete. *Roorkee University Research Journal*, 12(1-2) :37–47, 1970.

W. P. S. Dias, G. A. Khoury, and P. J. E. Sullivan. An activation energy approach for the temperature dependence of basic creep of hardened cement paste. *Magazine of Concrete Rsearch*, 39(140) :141–147, 1987. ISSN 0024-9831. doi : 10.1680/macr.1987.39.140.141. URL.

José Daniel Diniz Melo, Flaminio Levy Neto, Gustavo de Araujo Barros, and Fausto Nogueira de Almeida Mesquita. Mechanical behavior of grp pressure pipes with addition of quartz sand filler. *Journal of Composite Materials*, 45 (6) :717–726, 2011. doi : 10.1177/0021998310385593. URL.

Aleksandar Donev, Salvatore Torquato, and Frank H. Stillinger. Neighbor list collision-driven molecular dynamics simulation for nonspherical hard particles. i. algorithmic details. *Journal of Computational Physics*, 202(2) :737 – 764, 2005a. ISSN 0021-9991. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2004.08.014. URL.

Aleksandar Donev, Salvatore Torquato, and Frank H. Stillinger. Neighbor list collision-driven molecular dynamics simulation for nonspherical hard particles. : Ii. applications to ellipses and ellipsoids. *Journal of Computational Physics*, 202(2) :765 – 793, 2005b. ISSN 0021-9991. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2004.08.025. URL.

Aleksey D. Drozdov. Chapter 2 - constitutive models in linear viscoelasticity. In Aleksey D. Drozdov, editor, *Viscoelastic Structures*, pages 25 – 106. Academic Press, Burlington, 1998. ISBN 978-0-12-222280-1. doi : http://dx.doi.org/10.1016/B978-012222280-1/50002-3. URL.

Comité Euro-International du Béton. *CEB-FIP model code 1990.* design code. Thomas Telford Services Ltd, London, 1991. ISBN 0 7277 1696 4.

Anton du Plessis, BabatundeJames Olawuyi, WilliamPeter Boshoff, and StephanGerhard le Roux. Simple and fast porosity analysis of concrete using x-ray computed tomography. *Materials and Structures*, pages 1–10, 2014. ISSN 1359-5997. doi : 10.1617/s11527-014-0519-9. URL.

Cyrille F. Dunant, Benoît Bary, Alain B. Giorla, Christophe Péniguel, Julien Sanahuja, Charles Toulemonde, Anh-Binh Tran, François Willot, and Julien Yvonnet. A critical comparison of several numerical methods for computing effective properties of highly heterogeneous materials. *Advances in Engineering Software*, 58(0) :1 – 12, 2013. ISSN 0965-9978. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.advengsoft.2012.12.002. URL.

F. Dupray. *Comportement du béton sous fort confinement : Étude en compression et en extension triaxiales à l'échelle mésoscopique.* PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2008.

J. Edgington and D.J. Hannant. Steel fibre reinforced concrete. the effect on fibre orientation of compaction by vibration. *Matériaux et Construction*, 5 (1) :41–44, 1972. ISSN 0025-5432. doi : 10.1007/BF02479076. URL.

Yassine El Assami. *Homogenization of non-ageing linearly viscoelastic materials by the equivalent inclusion method : application to cementitious materials*. Theses, Université Paris-Est, May 2015. URL.

T. Endo, M. Ishikawa, and M. Kawasumi. Determination of the static elastic constant of concrete derived from the elastic constant of cement paste. In *Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, pages 97–102, 2009.

Julie Escoda. *Modélisation morphologique et micromécanique 3D de matériaux cimentaires*. PhD thesis, Mines Paristech, 2012.

Julie Escoda, François Willot, Dominique Jeulin, Julien Sanahuja, and Charles Toulemonde. Estimation of local stresses and elastic properties of a mortar sample by FFT computation of fields on a 3D image. *Cement and Concrete Research*, 41(5) :542–556, May 2011. doi : 10.1016/j.cemconres.2011.02.003. URL.

J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226) :376–396, 1957. doi : 10.1098/rspa.1957.0133. URL.

D. J. Eyre and G. W. Milton. A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement. *The European Physical Journal Applied Physics*, 6 :41–47, 4 1999. ISSN 1286-0050. doi : 10.1051/epjap:1999150. URL.

Jens Feder. Random sequential adsorption. *Journal of Theoretical Biology*, 87(2) :237 – 254, 1980. ISSN 0022-5193. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0022-5193(80)90358-6. URL.

L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress. Practical cone-beam algorithm. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1(6) :612–619, Jun 1984. doi : 10.1364/JOSAA.1.000612. URL.

F.T. Fisher and L.C. Brinson. Viscoelastic interphases in polymer–matrix composites : theoretical models and finite-element analysis. *Composites Science and Technology*, 61(5) :731 – 748, 2001. ISSN 0266-3538. doi : 10.1016/S0266-3538(01)00002-1. URL.

Matteo Frigo and Steven G. Johnson. The design and implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE*, 93(2) :216–231, 2005. Special issue on "Program Generation, Optimization, and Platform Adaptation".

Felix Fritzen and Thomas Böhlke. Reduced basis homogenization of viscoelastic composites. *Composites Science and Technology*, 76(0) :84 – 91, 2013. ISSN 0266-3538. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2012.12.012. URL.

Erez Gal and Roman Kryvoruk. Meso-scale analysis of {FRC} using a two-step homogenization approach. *Computers & Structures*, 89(11-12) :921–929, 2011. ISSN 0045-7949. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.02.006. URL. Computational Fluid and Solid Mechanics 2011 Proceedings Sixth MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.

E. Galenne, S. Michel-Ponnelle, J. Salin, G. Moreau, J. Sanahuja, and C. Toulemonde. The aim of computational methods for managing concrete structures in nuclear power plants. In Nenad Bicanic, Herbert Mang, Gunther Meschke, and René de Borst, editors, *Computational Modelling of Concrete Structures*, volume 8 of *Lecture Notes in Medical Informatics*, pages 51–60. CRC Press, 2014. ISBN 978-1-138-00145-9. doi : doi:10.1201/b16645-7. URL.

M.L. Gambhir. *Concrete Technology : Theory and Practice*. Mc Graw Hill Education, 2013. ISBN 9781259062551.

E.J. Garboczi. Three-dimensional mathematical analysis of particle shape using x-ray tomography and spherical harmonics : Application to aggregates used in concrete. *Cement and Concrete Research*, 32(10) :1621 – 1638, 2002. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(02)00836-0. URL.

E.J. Garboczi and J.G. Berryman. Elastic moduli of a material containing composite inclusions : effective medium theory and finite element computations. *Mechanics of Materials*, 33(8) :455 – 470, 2001. ISSN 0167-6636. doi : 10.1016/S0167-6636(01)00067-9. URL.

N J Gardner. Comparison of prediction provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concretes. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 31(5) :767–775, 2004. doi : 10.1139/l04-046. URL.

A.C. Gavazzi and D.C. Lagoudas. On the numerical evaluation of eshelby's tensor and its application to elastoplastic fibrous composites. *Computational Mechanics*, 7(1) :13–19, 1990. ISSN 0178-7675. doi : 10.1007/BF00370053. URL.

E. Ghossein and M. Lévesque. A fully automated numerical tool for a comprehensive validation of homogenization models and its application to spherical particles reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 49(11-12) :1387–1398, 2012. ISSN 0020-7683.

Elias Ghossein and Martin Lévesque. A comprehensive validation of analytical homogenization models : The case of ellipsoidal particles reinforced composites. *Mechanics of Materials*, 75(0) :135 – 150, 2014. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2014.03.014. URL.

E.G. Gilbert, D. Johnson, and S.S. Keerthi. A fast procedure for computing the distance between complex objects in three space. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 1883–1889, 1987. doi : 10.1109/ROBOT.1987.1087825.

Peter Gilbert. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. *Journal of Theoretical Biology*, 36(1) :105 – 117, 1972. ISSN 0022-5193. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0022-5193(72)90180-4. URL.

Joseph Glucklich and Ori Ishai. Creep mechanism in cement mortar. *ACI Materials Journal*, 59(7) :923–948, 1962. doi : 10.14359/7946.

Vincent Godard. *Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton avec prise en compte de l'effet unilatéral : Application à la simulation des enceintes de confinement nucléaires*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2005.

K.S. Gopalakrishnan, A.M. Neville, and Amin Ghali. Elastic and time-dependent effects of aggregate-matrix interaction. *Matériaux et Construction*, 3(4) :225–236, 1970. ISSN 0025-5432. doi : 10.1007/BF02474011. URL.

Richard Gordon, Robert Bender, and Gabor T. Herman. Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of Theoretical Biology*, 29(3) :471 – 481, 1970. ISSN 0022-5193. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0022-5193(70)90109-8. URL.

Pierre Grangeat. *La tomographie : Fondements mathématiques, imagerie microscopique et imagerie industrielle*. Hermes Science Publications, 2002. ISBN 2-7462-0356-1.

L. Granger and Z. Bažant. Effect of composition on basic creep of concrete and cement paste. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(11) :1261–1270, 1995. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1995)121:11(1261). URL.

Laurent Granger. *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires : analyse et modélisation*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.

ZacharyC. Grasley and DavidA. Lange. Constitutive modeling of the aging viscoelastic properties of portland cement paste. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 11(3-4) :175–198, 2007. ISSN 1385-2000. doi : 10.1007/s11043-007-9043-4. URL.

Gladys White Grodstein. X-ray attenuation coefficients from 10 kev to 100 mev. Technical Report Circular 583, National Bureau of Standards, United States Department of Commerce, april 1957.

F. Grondin and M. Matallah. How to consider the interfacial transition zones in the finite element modelling of concrete ? *Cement and Concrete Research*, 58(0) :67 – 75, 2014. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2014.01.009. URL.

Anders Gudmarsson, Nils Ryden, Hervé Di Benedetto, Cédric Sauzéat, Nouffou Tapsoba, and Björn Birgisson. Comparing linear viscoelastic properties of asphalt concrete measured by laboratory seismic and tension–compression tests. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 33(4) :571–582, 2014. ISSN 0195-9298. doi : 10.1007/s10921-014-0253-9. URL.

Rui Miranda Guedes, Alcides Sá, and Hugo Faria. On the prediction of long-term creep-failure of grp pipes in aqueous environment. *Polymer Composites*, 31(6) :1047–1055, 2010. ISSN 1548-0569. doi : 10.1002/pc.20891. URL.

RuiMiranda Guedes. Analysis of a delayed fracture criterion for lifetime prediction of viscoelastic polymer materials. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 16(3) :307–316, 2012. ISSN 1385-2000. doi : 10.1007/s11043-011-9163-8. URL.

Eric M. Gullikson. The aim of computational methods for managing concrete structures in nuclear power plants. In James H. Underwood, Kwang-Je Kim, Ingolf Lindau, Piero Pianetta, Herman Winick, Gwyn P. Williams, James H. Scofield, and Albert C. Thompson, editors, *X-Ray data booklet, thrid edition*, pages 51–60. Center for X-Ray Optics Advanced Light Source, Lawrence Livermore National Laboratory, 2009. URL.

Andrei A. Gusev. Representative volume element size for elastic composites : A numerical study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(9) :1449 – 1459, 1997. ISSN 0022-5096. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096(97)00016-1. URL.

Khaled Hadj-Sassi. *Une Stratégie d'Estimation Conjointe des Paramètres et de l'Etat de Structures à Comportements Non Linéaires. Assimilation de Données et Erreur en Loi de Comportement.* PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2007.

C.-J. Haecker, E.J. Garboczi, J.W. Bullard, R.B. Bohn, Z. Sun, S.P. Shah, and T. Voigt. Modeling the linear elastic properties of portland cement paste. *Cement and Concrete Research*, 35(10) :1948 – 1960, 2005. ISSN 0008-8846. doi : 10.1016/j.cemconres.2005.05.001. URL.

M. Hain and P. Wriggers. Computational homogenization of micro-structural damage due to frost in hardened cement paste. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(5) :233 – 244, 2008. ISSN 0168-874X. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2007.11.020. URL. The Nineteenth Annual Robert J. Melosh Competition.

François Hamon. Modèle d'endommagement de Mazars. Technical Report Code Aster R7.01.08, EdF, 2013. URL.

N. Han and J. C. Walraven. Creep and shrinkage of high-strength concrete at early and normal ages. In *Advances in Concrete Technology, Proceedings of Second CANMET/ACI International Symposium, Las Vegas, edited by V.M. Malhorta, American Concrete Institute, SP 154, (1995) 73-94, Detroit, USA.*, pages 73–94, 1995. doi : 10.14359/951. URL.

T.C. Hansen. Theories of multi-phase materials applied to concrete, cement mortar and cement paste. In *International Conference on the Structure of Concrete and its behaiour under load, London*, pages 16–23, 1966.

E. Haque. Polymer/wucs mat for use in automotive applications, October 9 2007. URL. US Patent 7,279,059.

F.J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 66(1) :51–83, Jan 1978. ISSN 0018-9219. doi : 10.1109/PROC.1978.10837.

M. Hashimoto, T. Okabe, T. Sasayama, H. Matsutani, and M. Nishikawa. Prediction of tensile strength of discontinuous carbon fiber/polypropylene composite with fiber orientation distribution. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43(10) :1791 – 1799, 2012. ISSN 1359-835X. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.05.006. URL. CompTest 2011.

Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) :127 – 140, 1963. ISSN 0022-5096. doi : 10.1016/0022-5096(63)90060-7. URL.

Zvi Hashin. Complex moduli of viscoelastic composites—i. general theory and application to particulate composites. *International Journal of Solids and Structures*, 6(5) :539 – 552, 1970. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(70)90029-6. URL.

John M. Hedgepeth. Stress concentrations in filamentary structures. Technical Report NASA-TN-D-882, L-1502, NASA Langley Research Center ; Hampton, VA United States, 1961. URL.

B.L. Henke, E.M. Gullikson, and J.C. Davis. X-ray interactions : Photoabsorption, scattering, transmission, and reflection at e = 50-30,000 ev, z = 1-92. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 54(2) :181 – 342, 1993. ISSN 0092-640X. doi : http://dx.doi.org/10.1006/adnd.1993.1013. URL.

Eveline Hervé and André Zaoui. n-layered inclusion-based micromechanical modelling. *International Journal of Engineering Science*, 31(1) :1 – 10, 1993. ISSN 0020-7225. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(93)90059-4. URL.

Adrien Hilaire. *Étude des déformations différées des bétons en compression et en traction, du jeune âge au long terme. Application aux enceintes de confinement.* PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2014.

Adrien Hilaire, Farid Benboudjema, Aveline Darquennes, Yves Berthaud, and Georges Nahas. Modeling basic creep in concrete at early-age under compressive and tensile loading. *Nuclear Engineering and Design*, 269 :222 – 230, 2014. ISSN 0029-5493. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.nucengdes.2013.08.034. URL. Special Issue - The International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT21), New Delhi India, Nov 06-11, 2011.

Harry H. Hilton and Sung Yi. The significance of (an)isotropic viscoelastic Poisson ratio stress and time dependencies. *International Journal of Solids and Structures*, 35(23) :3081 – 3095, 1998. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00357-0. URL.

Teddy J. Hirsch. Modulus of elasticity of concrete affected by elastic moduli of cement paste matrix and aggregate. *ACI Journal Proceedings*, 59(3) :427–452, 1962. doi : 10.14359/7924.

Jörg Hohe, Carla Beckmann, and Hanna Paul. Modeling of uncertainties in long fiber reinforced thermoplastics. *Materials & Design*, 66, Part B(0) :390 – 399, 2015. ISSN 0261-3069. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.matdes.2014.

05.067. URL. Lightweight Materials and Structural Solutions for Transport Applications.

Muneo Hori and Sia Nemat-Nasser. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. *Mechanics of Materials*, 14(3) :189 – 206, 1993. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636(93)90066-Z. URL.

G.K. Hu and G.J. Weng. Some reflections on the mori-tanaka and ponte castañeda-willis methods with randomly oriented ellipsoidal inclusions. *Acta Mechanica*, 140(1-2) :31–40, 2000a. ISSN 0001-5970. doi : 10.1007/BF01175978. URL.

G.K Hu and G.J Weng. The connections between the double-inclusion model and the ponte castaneda–willis, mori–tanaka, and kuster–toksoz models. *Mechanics of Materials*, 32(8) :495 – 503, 2000b. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6636(00)00015-6. URL.

Jing Hu and Piet Stroeven. Shape characterization of concrete aggregate. *Image Analysis & Stereology*, 25(1) :43–53, 2011. ISSN 1854-5165. URL.

J. H. Hubbell and S. M. Seltzer. Tables of x-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients from 1 kev to 20 mev for elements z = 1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest. `http://www.nist.gov/pml/data/xraycoef/`, september 2009. Accessed : 2015-06-16.

C. Huet. Adaptation d'un algorithme de bažant au calcul des multilames viscoélastiques vieillissants. *Matériaux et Construction*, 13(2) :91–98, 1980. ISSN 0025-5432. doi : 10.1007/BF02473805. URL.

Azimah Hussin and Colin Poole. Petrography evidence of the interfacial transition zone (itz) in the normal strength concrete containing granitic and limestone aggregates. *Construction and Building Materials*, 25(5) :2298 – 2303, 2011. ISSN 0950-0618. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2010.11.023. URL.

Luis Ibáñez, Will Schroeder, Lydia Ng, Josh Cates, theInsightSoftware Consortium, and Richard Hamming. The ITK software guide. 01 2003.

M.I. Idiart, H. Moulinec, P. Ponte Castañeda, and P. Suquet. Macroscopic behavior and field fluctuations in viscoplastic composites : Second-order estimates versus full-field simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(5) :1029 – 1063, 2006. ISSN 0022-5096. doi : 10.1016/j.jmps.2005.11.004. URL.

Charles L. Tucker III and Erwin Liang. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites : Review and evaluation. *Composites Science and Technology*, 59(5) :655 – 671, 1999. ISSN 0266-3538. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0266-3538(98)00120-1. URL.

Md Rashadul Islam, Hasan M. Faisal, and Rafiqul A. Tarefder. Determining temperature and time dependent Poisson's ratio of asphalt concrete using indirect tension test. *Fuel*, 146(0) :119 – 124, 2015. ISSN 0016-2361. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.fuel.2015.01.028. URL.

H. Ito and N. Kumagai. A creep experiment on a large granite beam started in 1980. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 31(4) :359 – 367, 1994. ISSN 0148-9062. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0148-9062(94)90903-2. URL.

H. Itô and S. Sasajima. A ten year creep experiment on small rock specimens. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 24(2) :113 – 121, 1987. ISSN 0148-9062. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0148-9062(87)91930-9. URL.

Kenichi Soga James K. Mitchell. *Fundamentals of Soil Behavior, 3rd Edition*. Wiley, 2005. ISBN 978-0-471-46302-3. URL.

Amal R. Jayapalan, Melinda L. Jue, and Kimberly E. Kurtis. Nanoparticles and apparent activation energy of portland cement. *Journal of the American Ceramic Society*, 97(5) :1534–1542, 2014. ISSN 1551-2916. doi : 10.1111/jace.12878. URL.

Hamlin M. Jennings and Paul D. Tennis. Model for the developing microstructure in Portland cement pastes. *Journal of the American Ceramic Society*, 77(12) :3161–3172, 1994. ISSN 1551-2916. doi : 10.1111/j.1151-2916.1994.tb04565.x. URL.

Milan Jirásek and Svatopluk Dobrushý. Accuracy of concrete creep predictions based on extrapolation of short-time data. In *5th International Conference on Reliable Engineering Computing (REC2012)*, 2012.

S. Kaczmarz. Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres*, 35 : 355–357, 1937.

H. Kada-Benameur, E. Wirquin, and B. Duthoit. Determination of apparent activation energy of concrete by isothermal calorimetry. *Cement and Concrete Research*, 30(2) :301 – 305, 2000. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(99)00250-1. URL.

S. Kamali, M. Moranville, E. Garboczi, S. Prené, and B. Gérard. Hydrate dissolution influence on the Young's modulus of cement paste. In *Fracture Mechanics of Concrete Structures (FraMCoS-V)*, pages 631–638, 2004. URL.

T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. J. Solids Struct.*, 40 :3647–3679, 2003.

Anuraag R. Kansal, Salvatore Torquato, and Frank H. Stillinger. Computer generation of dense polydisperse sphere packings. *The Journal of Chemical Physics*, 117(18) :8212–8218, 2002. doi : 10.1063/1.1511510. URL.

E. Kassem, Z. Grasley, and E. Masad. Viscoelastic Poisson's ratio of asphalt mixtures. *International Journal of Geomechanics*, 13(2) :162–169, 2013. doi : 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000199. URL.

A. Khennane and R. Melchers. Durability of glass polymer composites subject to stress corrosion. *Journal of Composites for Construction*, 7(2) :109–117, 2003. doi : 10.1061/(ASCE)1090-0268(2003)7:2(109). URL.

J. K. Kim, S. H. Kwon, S. Y. Kim, and Y. Y. Kim. Experimental studies on creep of sealed concrete under multiaxial stresses. *Magazine of Concrete Research*, 57(10) :623–634, 2005. URL.

P.L. Kinson and E.M. Faber. Compositions de polychlorure de vinyle renforcée par des fibres de verre avec stabilité dimensionnelle et résistance à la traction, May 20 1992. URL. EP Patent 0,313,003.

E.A. Kogan. Creep of concrete under multiaxial compression. *Hydrotechnical Construction*, 17(9) :448–452, 1983. ISSN 0018-8220. doi : 10.1007/BF01425303. URL.

R. Kohlrausch. Theorie des elektrischen rückstandes in der leidner flasche. In *Annalen der Physik*, number 91 in Annalen der Physik, pages 56–82,179–213. Wiley-VCH, 1854.

G.J. Kommendant, M. Polivka, and D. Pirtz. Study of concrete properties for prestressed concrete reactor vessels. Technical Report UCSESM 76-3, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1976.

Djimédo Kondo, Hélène Welemane, and Fabrice Cormery. Basic concepts and models in continuum damage mechanics. *Revue européenne de génie civil*, 11 (7-8) :927–943, 2007. ISSN 1774-7120. doi : 10.1002/polb.22384. URL.

N. Kotelnikova-Weiler, J.-F. Caron, and Olivier Baverel. Kinetic of fibre ruptures in a UD composite material with a viscoelastic matrix subject to traction [Cinétique de ruptures de fibres dans un matériau composite UD soumis à la traction avec une matrice viscoélastique]. *Revue des composites et des matériaux avancés*, 23(1) :125–138, 2013. doi : 10.3166/rcma.23.125-138. URL.

E. Kröner. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Zeitschrift fur Physik*, 151 :504–518, August 1958. doi : 10.1007/BF01337948.

A.K.H Kwan, C.F Mora, and H.C Chan. Particle shape analysis of coarse aggregate using digital image processing. *Cement and Concrete Research*, 29 (9) :1403 – 1410, 1999. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(99)00105-2. URL.

C.-Y. Kwok. Dem simulations of thermally activated creep in soils. *Géotechnique*, 60 :425–433(8), 2010. URL.

Adel Lachihab and Karam Sab. Aggregate composites : a contact based modeling. *Computational Materials Science*, 33(4) :467 – 490, 2005. ISSN 0927-0256. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2004.10.003. URL.

Noël Lahellec and Pierre Suquet. Effective behavior of linear viscoelastic composites : A time-integration approach. *International Journal of Solids and Structures*, 44(2) :507 – 529, 2007. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.04.038. URL.

Noël Lahellec and Pierre Suquet. Effective response and field statistics in elasto-plastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non-radial loadings. *International Journal of Plasticity*, 42 :1 – 30, 2013. ISSN 0749-6419. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.09.005. URL.

R.S. Lakes and A. Wineman. On Poisson's ratio in linearly viscoelastic solids. *Journal of Elasticity*, 85(1) :45–63, 2006. ISSN 0374-3535. doi : 10.1007/s10659-006-9070-4. URL.

E. Landis and M. Bridges. 3D tomographic imaging applied to split cylinder fracture. In *FraMCos-7 Proceedings*, pages 100–104, 2010.

Rodrigue Largenton, Jean-Claude Michel, and Pierre Suquet. Extension of the nonuniform transformation field analysis to linear viscoelastic composites in the presence of aging and swelling. *Mechanics of Materials*, 73(0) :76 – 100, 2014. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2014.02.004. URL.

F. Lavergne, R. Brenner, and K. Sab. Effects of grain size distribution and stress heterogeneity on yield stress of polycrystals : A numerical approach. *Computational Materials Science*, 77(0) :387 – 398, 2013. ISSN 0927-0256. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.04.061. URL.

F. Lavergne, K. Sab, J. Sanahuja, M. Bornert, and C. Toulemonde. Investigation of the effect of aggregates' morphology on concrete creep properties by numerical simulations. *Cement and Concrete Research*, 71(0) :14 – 28, 2015a. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2015.01.003. URL.

F. Lavergne, K. Sab, J. Sanahuja, M. Bornert, and C. Toulemonde. Estimation of creep strain and creep failure of a glass reinforced plastic by semi-analytical methods and 3d numerical simulations. *Mechanics of Materials*, 89(0) :130 – 150, 2015b. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.06.005. URL.

F. Lavergne, K. Sab, J. Sanahuja, M. Bornert, and C. Toulemonde. Homogenization schemes for aging linear viscoelastic matrix-inclusion composite materials with elongated inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, pages –, 2015c. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.10.014. URL.

F. Lavergne, K. Sab, J. Sanahuja, M. Bornert, and C. Toulemonde. Predicting the aging viscoelastic behavior of fiber-reinforced concrete by a multi-scale homogenization scheme. *submitted to the journal Cement & Concrete Research*, 2015d. ISSN 0008-8846.

F. Lavergne, K. Sab, J. Sanahuja, M. Bornert, and C. Toulemonde. Homogenization schemes for aging linear viscoelastic matrix-inclusion composite materials with elongated inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 80 : 545 – 560, 2016. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.10.014. URL.

N. Laws and R. McLaughlin. Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1697) :251–273, 1978. ISSN 0080-4630. doi : 10.1098/rspa.1978.0041. URL.

Y. Le Pape, C. Toulemonde, and Q.V. Le. Modeling concrete creep as an heterogeneous material combining analytical and numerical approaches. In *Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, pages 223–227, London, 2009. Taylor & Francis Group. ISBN 978-0-415-48508-1.

Yann Le Pape, Julien Sanahuja, Nanthilde Reviron, and Nhu-Cuong Tran. Vi(CA)2T - virtual cement & concrete aging analysis toolbox. In *7th Intenational Conference on Multiscale modeling of material microstructure*, 2014.

E.H. Lee. Stress analysis for linear viscoelastic materials. *Rheologica Acta*, 1 (4-6) :426–430, 1961. ISSN 0035-4511. doi : 10.1007/BF01989085. URL.

H. Lee and J. Kim. Determination of viscoelastic Poisson's ratio and creep compliance from the indirect tension test. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 21(8) :416–425, 2009. doi : 10.1061/(ASCE)0899-1561(2009)21:8(416). URL.

Kenneth Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly Journal of Applied Mathmatics*, II(2) :164–168, 1944.

Martin Lévesque, Michael Gilchrist, Nicolas Bouleau, Katell Derrien, and Didier Baptiste. Numerical inversion of the Laplace–Carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media. *Computational Mechanics*, 40(4) :771–789, 2007. doi : 10.1007/s00466-006-0138-6. URL.

R. L'Hermite and M. Mamillan. Nouveaux résultats et récentes études sur le fluage du béton. *Matériaux et Construction*, 2(1) :35–41, 1969. ISSN 0025-5432. doi : 10.1007/BF02473653. URL.

K. Li, X.-L. Gao, and A. K. Roy. Micromechanical modeling of viscoelastic properties of carbon nanotube-reinforced polymer composites. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 13(4) :317–328, 2006. doi : 10.1080/15376490600583931. URL.

X. Li, Z.C. Grasley, J.W. Bullard, and E.J. Garboczi. Computing the time evolution of the apparent viscoelastic/viscoplastic Poisson's ratio of hydrating cement paste. *Cement and Concrete Composites*, 56(0) :121 – 133, 2015a. ISSN 0958-9465. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2014.11.004. URL.

X. Li, Z.C. Grasley, E.J. Garboczi, and J.W. Bullard. Modeling the apparent and intrinsic viscoelastic relaxation of hydrating cement paste. *Cement and Concrete Composites*, 55(0) :322 – 330, 2015b. ISSN 0958-9465. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2014.09.012. URL.

G. Lielens, P. Pirotte, A. Couniot, F. Dupret, and R. Keunings. Prediction of thermo-mechanical properties for compression moulded composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(1–2) :63 – 70, 1998. ISSN 1359-835X. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S1359-835X(97)00039-0. URL. Selected Papers Presented at the Fourth International Conference on Flow Processes in Composite Material.

Boris D. Lubachevsky and Frank H. Stillinger. Geometric properties of random disk packings. *Journal of Statistical Physics*, 60 :561–583, 1990.

S. Maghous and G.J. Creus. Periodic homogenization in thermoviscoelasticity : case of multilayered media with ageing. *International Journal of Solids and Structures*, 40(4) :851 – 870, 2003. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00549-8. URL.

Donald D. Magura, Mete A. Sozen, and Chester P. Siess. A study of stress relaxation in prestressing reinforcement. *Precast/Prestressed Concrete Institute Journal*, 9(2) :13–57, april 1964. URL.

Jean Mandel. *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, 1966.

D. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2) : 431–441, 1963. doi : 10.1137/0111030. URL.

Renaud Masson, Renald Brenner, and Olivier Castelnau. Incremental homogenization approach for ageing viscoelastic polycrystals. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(4–5) :378 – 386, 2012. ISSN 1631-0721. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2012.02.021. URL. Recent Advances in Micromechanics of Materials.

M. Matallah, C. La Borderie, and O. Maurel. A practical method to estimate crack openings in concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 34(15) :1615–1633, 2010. ISSN 1096-9853. doi : 10.1002/nag.876. URL.

J. Mazars. *APPLICATION DE LA MECANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT AU COMPORTEMENT NON LINEAIRE ET A LA RUPTURE DU BETON DE STRUCTURE*. Laboratoire de mécanique et technologie, 1984.

Jacky Mazars, François Hamon, and Stéphane Grange. A model to forecast the response of concrete under severe loadings the mu damage model. *Procedia Materials Science*, 3(0) :979 – 984, 2014. ISSN 2211-8128. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.mspro.2014.06.159. URL. 20th European Conference on Fracture.

C. Mazzotti, M. Savoia, and A. Tralli. An isotropic damage model for non linear creep behavior of concrete in compression. In de Borst et. al., editor, *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, pages 255–262. Swets & Zeitlinger, Lisse, 2001. ISBN 90 2651 825 0.

N. I. Md. Yusoff, D. Mounier, and G. D. Airey. The 2S2P1D : An excellent liner viscoelastic model. *UNIMAS e-Journal of Civil Engineering*, 1(2) :1–7, 2010. URL.

J. C. Michel, U. Galvanetto, and P. Suquet. *Continuum Thermomechanics : The Art and Science of Modelling Material Behaviour*, chapter Constitutive relations involving internal variables based on a micromechanical analysis, pages 301–312. Springer Netherlands, Dordrecht, 2002. ISBN 978-0-306-46946-6. doi : 10.1007/0-306-46946-4_23. URL.

J.C. Michel and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40(25) :6937 – 6955, 2003. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00346-9. URL. Special issue in Honor of George J. Dvorak.

V. Monchiet and G. Bonnet. A polarization-based FFT iterative scheme for computing the effective properties of elastic composites with arbitrary contrast. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(11) : 1419–1436, 2012. ISSN 1097-0207. doi : 10.1002/nme.3295. URL.

Paulo J.M. Monteiro. A note on the hirsch model. *Cement and Concrete Research*, 21(5) :947 – 950, 1991. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0008-8846(91)90190-S. URL.

Paulo J.M. Monteiro and C.T. Chang. The elastic moduli of calcium hydroxide. *Cement and Concrete Research*, 25(8) :1605 – 1609, 1995. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0008-8846(95)00154-9. URL.

T Mori and K Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5) :571 – 574, 1973. ISSN 0001-6160. doi : 10.1016/0001-6160(73)90064-3. URL.

L. W. Morland and E. H. Lee. Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation. *Transactions of The Society of Rheology (1957-1977)*, 4(1), 1960.

H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157(1–2) :69 – 94, 1998a. ISSN 0045-7825. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00218-1. URL.

H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engeneering*, 157 :69–94, may 1998b.

Hervé Moulinec and Fabrice Silva. Comparison of three accelerated FFT-based schemes for computing the mechanical response of composite materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, page soumis, 2013. URL.

A. El Moumen, T. Kanit, A. Imad, and H. El Minor. Effect of reinforcement shape on physical properties and representative volume element of particles-reinforced composites : Statistical and numerical approaches. *Mechanics of Materials*, 83(0) :1 – 16, 2015. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2014.12.008. URL.

Denis Mounier, Christophe Poilâne, Cécile Bûcher, and Pascal Picart. Evaluation of transverse elastic properties of fibers used in composite materials by laser resonant ultrasound spectroscopy. In Société Française d'Acoustique, editor, *Acoustics 2012*, Nantes, France, April 2012. URL.

H. Moussaddy. *A new definition of the representative volume element in numerical homogenization problems and its application to the performance evaluation of analytical homogenization models*. PhD thesis, Ecole Polytechnique de Montréal, 2013.

Toshio Mura. Isotropic inclusions. In *Micromechanics of defects in solids*, volume 3 of *Mechanics of Elastic and Inelastic Solids*, pages 74–128. Springer Netherlands, 1987. ISBN 978-90-247-3256-2. doi : 10.1007/978-94-009-3489-4_2. URL.

J.C. Nadeau. Water–cement ratio gradients in mortars and corresponding effective elastic properties. *Cement and Concrete Research*, 32(3) :481 – 490, 2002. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(01)00710-4. URL.

J.C. Nadeau. A multiscale model for effective moduli of concrete incorporating {ITZ} water–cement ratio gradients, aggregate size distributions, and entrapped voids. *Cement and Concrete Research*, 33(1) :103 – 113, 2003. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(02)00931-6. URL.

R. Nakano. Use of polyvinyl chlorine resin sheets as flooring material, August 13 2003. URL. EP Patent 0,732,354.

C.M. Neubauer, H.M. Jennings, and E.J. Garboczi. A three-phase model of the elastic and shrinkage properties of mortar. *Advanced Cement Based Materials*, 4(1) :6 – 20, 1996. ISSN 1065-7355. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S1065-7355(96)90058-9. URL.

Adam M Neville, W. H. (Walter H.) Dilger, and J. J Brooks. *Creep of plain and structural concrete*. London ; New York : Construction Press, 1983. ISBN 0860958345. Includes bibliographical references and indexes.

A.M. Neville. *Properties of Concrete*. Pearson, 2011. ISBN 9780273755807.

Ali S. Ngab, Arthur H. Nilson, and Floyd O. Slate. Shrinkage and creep of high strength concrete. *ACI Journal Proceedings*, 78(4) :251–261, 1981. doi : 10.14359/6922. URL.

QuangTuan Nguyen, Hervé Di Benedetto, and Cédric Sauzéat. Prediction of linear viscoelastic behaviour of asphalt mixes from binder properties and reversal. In Niki Kringos, Björn Birgisson, David Frost, and Linbing Wang, editors, *Multi-Scale Modeling and Characterization of Infrastructure Materials*, volume 8 of *RILEM Bookseries*, pages 237–248. Springer Netherlands, 2013. ISBN 978-94-007-6877-2. doi : 10.1007/978-94-007-6878-9_17. URL.

A. Ulrik Nilsen and Paulo J.M. Monteiro. Concrete : A three phase material. *Cement and Concrete Research*, 23(1) :147 – 151, 1993. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0008-8846(93)90145-Y. URL.

F.C. O'brien-Bernini, D.R. Vermilion, S.W. Schweiger, B.J. Guhde, W.D. Graham, G.A. Walrath, and L.A. Morris. Wet use chopped strand glass as reinforcement in extruded products, May 26 2006. URL. WO Patent App. PCT/US2005/040,810.

G. M. Odegard and A. Bandyopadhyay. Physical aging of epoxy polymers and their composites. *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Physics*, 49 (24) :1695–1716, 2011. ISSN 1099-0488. doi : 10.1002/polb.22384. URL.

F. Olard and H. Di Benedetto. The "dbn" model : A thermo-visco-elasto-plastic approach for pavement behavior modeling. In *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, volume 74, pages 791–828, 2005.

François Olard and Hervé Di Benedetto. General "2S2P1D" model and relation between the linear viscoelastic behaviours of bituminous binders and mixes. *Road Materials and Pavement Design*, 4(2) :185–224, 2003. doi : 10.1080/14680629.2003.9689946. URL.

Martin Ostoja-Starzewski. Material spatial randomness : From statistical to representative volume element. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(2) :112 – 132, 2006. ISSN 0266-8920. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.probengmech.2005.07.007. URL.

Michael Oxfall. Climatic conditions inside nuclear reactor containments, monitoring campaign. Technical Report TVBM-3172, Division of Building Materials,Faculty of Engineering, Lund University, august 2013.

Christopher C. Paige and Michael A. Saunders. Lsqr : An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Trans. Math. Softw.*, 8(1) : 43–71, March 1982. ISSN 0098-3500. doi : 10.1145/355984.355989. URL.

Yi Pan, Lucian Iorga, and Assimina A. Pelegri. Analysis of 3d random chopped fiber reinforced composites using {FEM} and random sequential adsorption. *Computational Materials Science*, 43(3) :450 – 461, 2008. ISSN 0927-0256. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2007.12.016. URL.

Sun Woo Park, Y. Richard Kim, and Richard A. Schapery. A viscoelastic continuum damage model and its application to uniaxial behavior of asphalt concrete. *Mechanics of Materials*, 24(4) :241 – 255, 1996. ISSN 0167-6636. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6636(96)00042-7. URL.

L. J. Parrott. Lateral strains in hardened cement paste under short- and long-term loading. *Magazine of Concrete Research*, 26(89) :198–202, 1974. URL.

C. Peng, T. Rougelot, and N. Burlion. Cementitious composites during leaching and drying : X-ray microtomography analysis of cracking pattern dependence on size of rigid inclusions. In *FraMCos-7 Proceedings*, pages 1084–1091, 2010.

Jay H. Phelps, Ahmed I. Abd El-Rahman, Vlastimil Kunc, and Charles L. Tucker III. A model for fiber length attrition in injection-molded long-fiber composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 51(0) :11 – 21, 2013. ISSN 1359-835X. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2013.04.002. URL.

M.G. Phillips. Prediction of long-term stress-rupture life for glass fibre-reinforced polyester composites in air and in aqueous environments. *Composites*, 14(3) :270 – 275, 1983. ISSN 0010-4361. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0010-4361(83)90015-0. URL.

S Leigh Phoenix. Modeling the statistical lifetime of glass fiber/polymer matrix composites in tension. *Composite Structures*, 48(1–3) :19 – 29, 2000. ISSN 0263-8223. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00069-0. URL.

Gerald Pickett. The effect of change in moisture-content on the crepe of concrete under a sustained load. *ACI Materials Journal*, 38(-) :333–356, 1942. doi : 10.14359/8607.

O. Pierard, C. González, J. Segurado, J. LLorca, and I. Doghri. Micromechanics of elasto-plastic materials reinforced with ellipsoidal inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 44(21) :6945 – 6962, 2007a. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.03.019. URL.

O. Pierard, J. LLorca, J. Segurado, and I. Doghri. Micromechanics of particle-reinforced elasto-viscoplastic composites : Finite element simulations versus affine homogenization. *International Journal of Plasticity*, 23(6) :1041 – 1060, 2007b. ISSN 0749-6419. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2006.09.003. URL.

S. E. Pihlajavaara. Creep and shrinkage mechanisms. In Z. P. Bažant and F. H. Wittman, editors, *in Concrete Structures*, pages 87–110. John Wiley & Sons, 1982. ISBN 0-471-10409-4.

S.E. Pihlajavaara. A review of some of the main results of a research on the ageing phenomena of concrete : Effect of moisture conditions on strength, shrinkage and creep of mature concrete. *Cement and Concrete Research*, 4(5) :761 – 771, 1974. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0008-8846(74)90048-9. URL.

PlasticsEurope. Plastics - the facts 2013 an analysis of european latest plastics production, demand and waste data. Technical report, PlasticsEurope, Association of Plastics Manufacturers, 2013. URL.

Cedric Poinard, Ewa Piotrowska, Yann Malecot, Laurent Daudeville, and Eric N. Landis. Compression triaxial behavior of concrete : the role of the mesostructure by analysis of x-ray tomographic images. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 16(sup1) :s115–s136, 2012. doi : 10.1080/19648189.2012.682458. URL.

T. Ponikiewski, J. Gołaszewski, M. Rudzki, and M. Bugdol. Determination of steel fibres distribution in self-compacting concrete beams using x-ray computed tomography. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 15(2) :558 – 568, 2015. ISSN 1644-9665. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.acme.2014.08.008. URL.

T. Pritz. Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials. *Applied Acoustics*, 60(3) :279 – 292, 2000. ISSN 0003-682X. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0003-682X(99)00049-3. URL.

Elvira B. Rabinovitch and James W. Summers. The effect of physical aging on properties of rigid polyvinyl chloride. *Journal of Vinyl Technology*, 14(3) : 126–130, 1992. ISSN 1548-0585. doi : 10.1002/vnl.730140303. URL.

Roham Rafiee and Farshid Reshadi. Simulation of functional failure in {GRP} mortar pipes. *Composite Structures*, 113(0) :155 – 163, 2014. ISSN 0263-8223. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.03.024. URL.

D.B. Rahrig. Glass fiber reinforced vinyl chloride polymer products and process for their preparation, August 20 1985. URL. US Patent 4,536,360.

B.E. Read and G.D. Dean. *The Determination of Dynamic Properties of Polymers and Composites*. Wiley, 1978. ISBN 9780470265437.

B.E. Read, G.D. Dean, P.E. Tomlins, and J.L. Lesniarek-Hamid. Physical ageing and creep in {PVC}. *Polymer*, 33(13) :2689 – 2698, 1992. ISSN 0032-3861. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0032-3861(92)90439-4. URL.

Weiju Ren. Investigation on stress-rupture behavior of a chopped-glass-fiber composite for automotive durability design criteria. Technical Report ORNL/TM-2001/106, Metals and Ceramics Division, Oak Ridge National Laboratory, 2001. URL.

Martin Rendek and Alexander Lion. Amplitude dependence of filler-reinforced rubber : Experiments, constitutive modelling and FEM – implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 47(21) :2918 – 2936, 2010. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.06.021. URL.

N. Reviron. *Etude du fluage des bétons en traction. Application aux enceintes de confinement des centrales nuclé aires à eau sous pression.* PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2009.

N. Reviron, F. Benboudjema, J.-M. Torrenti, G. Nahas, and A. Millard. Coupling between creep and cracking in tension. In *6th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, 2007.

Jean-Marc Ricaud and Renaud Masson. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media : Internal variables formulation and extension to ageing behaviours. *International Journal of Solids and Structures*, 46(7–8) :1599 – 1606, 2009. ISSN 0020-7683. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2008.12.007. URL.

RILEM. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures— model b3. *Materials and Structures*, 28(6) :357–365, 1995. ISSN 1359-5997. doi : 10.1007/BF02473152. URL.

RILEM TC-242-MDC. *Materials and Structures*, 48(4), 2015. ISSN 1359-5997. doi : 10.1617/s11527-014-0485-2.

RILEM TC107-CSP. Measurement of time-dependent strains of concrete. *Materials and Structures*, 31(8) :507–512, 1998. ISSN 1359-5997. doi : 10.1007/BF02481530. URL.

P. Rossi, N. Godart, J.L. Robert, J.P. Gervais, and D. Bruhat. Investigation of the basic creep of concrete by acoustic emission. *Materials and Structures*, 27 (9) :510–514, 1994. ISSN 1359-5997. doi : 10.1007/BF02473211. URL.

Pierre Rossi, Jean-Louis Tailhan, Fabrice Le Maou, Laurent Gaillet, and Eric Martin. Basic creep behavior of concretes investigation of the physical mechanisms by using acoustic emission. *Cement and Concrete Research*, 42(1) : 61 – 73, 2012. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2011.07.011. URL.

Pierre Rossi, Jean-Louis Tailhan, and Fabrice Le Maou. Comparison of concrete creep in tension and in compression : Influence of concrete age at loading and drying conditions. *Cement and Concrete Research*, 51 :78 – 84, 2013. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2013.04.001. URL.

Yves Rougier, Claude Stolz, and André Zaoui. Représentation spectrale en viscoélasticité linéaire des matériaux hétérogènes. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II*, 316 :1517–1522, 1993. URL.

R. Le Roy. *Déformations Instantanées et différées des bétons à hautes performances*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.

Robert Le Roy, Edouard Parant, and Claude Boulay. Taking into account the inclusions' size in lightweight concrete compressive strength prediction. *Cement and Concrete Research*, 35(4) :770 – 775, 2005. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2004.06.002. URL.

Marcin Rudzki, Monika Bugdol, and Tomasz Ponikiewski. An image processing approach to determination of steel fibers orientation in reinforced concrete. In Ewa Pietka and Jacek Kawa, editors, *Information Technologies in Biomedicine*, volume 7339 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 143–150. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-31195-6. doi : 10.1007/978-3-642-31196-3_15. URL.

H. Rüsch, K. Kordina, and H. Hilsdorf. Der einfluss des mineralogischen charakters der zuschläge auf das kriechen von beton. In *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 146, Berlin*, pages 19–133, 1962.

K Sab. On the homogenization and the simulation of random materials. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 11(5) :585–607, 1992. ISSN 0997-7538.

Karam Sab and Boumediene Nedjar. Periodization of random media and representative volume element size for linear composites. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(2) :187 – 195, 2005. ISSN 1631-0721. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2004.10.003. URL.

Jean Salençon. *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Palaiseau : Éd. de l'École polytechnique : les Presses des Ponts et chaussées, 2009. ISBN 978-2-7302-1557-2. URL.

J. Sanahuja. *Efficient Homogenization of Ageing Creep of Random Media : Application to Solidifying Cementitious Materials*, chapter 23, pages 201–210. 2013a. ISBN 978-0-7844-1311-1. doi : 10.1061/9780784413111.023. URL.

J. Sanahuja, L. Dormieux, Y. Le Pape, and C. Toulemonde. Modélisation micro-macro du fluage propre du béton. In *19ème Congrès Français de Mécanique*, pages 1–6, 2009. URL.

Julien Sanahuja. Effective behaviour of ageing linear viscoelastic composites : Homogenization approach. *International Journal of Solids and Structures*, 50 (19) :2846 – 2856, 2013b. ISSN 0020-7683. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.04.023. URL.

Julien Sanahuja, Luc Dormieux, and Gilles Chanvillard. Modelling elasticity of a hydrating cement paste. *Cement and Concrete Research*, 37(10) :1427 – 1439, 2007. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2007.07.003. URL.

Toshiki Sasayama, Tomonaga Okabe, Yoshiteru Aoyagi, and Masaaki Nishikawa. Prediction of failure properties of injection-molded short glass fiber-reinforced polyamide 6,6. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 52(0) :45 – 54, 2013. ISSN 1359-835X. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2013.05.004. URL.

R. Schapery. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. In *fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics*, pages 1075–1085, 1962.

S. Scheiner and C. Hellmich. Continuum microviscoelasticity model for aging basic creep of early-age concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 135(4) : 307–323, 2009. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:4(307). URL.

Karen L. Scrivener, Alison K. Crumbie, and Peter Laugesen. The interfacial transition zone (itz) between cement paste and aggregate in concrete. *Interface Science*, 12 :411–421, 2004. ISSN 0927-7056. URL. 10.1023/B :INTS.0000042339.92990.4c.

Nassim Sebaibi, Mahfoud Benzerzour, and Nor Edine Abriak. Influence of the distribution and orientation of fibres in a reinforced concrete with waste fibres and powders. *Construction and Building Materials*, 65(0) :254 – 263, 2014. ISSN 0950-0618. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.04.134. URL.

A. Sellier, L. Buffo-Lacarriere, S. Multon, T. Vidal, and X. Bourbon. Nonlinear basic creep and drying creep modeling. In *Numerical Modeling Strategies for Sutainable Concrete Structures*, 2012. URL.

M. Shahidi, B. Pichler, and Ch. Hellmich. Viscous interfaces as source for material creep : A continuum micromechanics approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 45 :41 – 58, 2014. ISSN 0997-7538. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.11.001. URL.

L. J. Siefken, E. W. Coryell, and E. A. Harvego. Scdap/relap5/mod3.3 code manual matpro a library of materials properties for light-water-accident analysis. Technical Report NUREG/CR-6150, Vol. 4, Rev. 2 INEL-96/0422, Idaho National Engineering and Environmental Laboratory, january 2001.

Janis Sliseris, Heiko Andrä, and Matthias Kabel. An accelerated simulation method of medium density wood fiber boards. *PAMM*, 14(1) :555–556, 2014. ISSN 1617-7061. doi : 10.1002/pamm.201410265. URL.

Luca Sorelli, Georgios Constantinides, Franz-Josef Ulm, and François Toutlemonde. The nano-mechanical signature of ultra high performance concrete by statistical nanoindentation techniques. *Cement and Concrete Research*, 38 (12) :1447 – 1456, 2008. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2008.09.002. URL.

Harald Stehfest. Algorithm 368 : Numerical inversion of laplace transforms [d5]. *Commun. ACM*, 13(1) :47–49, January 1970. ISSN 0001-0782. doi : 10.1145/361953.361969. URL.

Stein, R.C., Petkovski, M., Engelberg, D.L., Leonard, F., and Withers, P.J. Characterizing the effects of elevated temperature on the air void pore structure of advanced gas-cooled reactor pressure vessel concrete using x-ray computed tomography. *EPJ Web of Conferences*, 56 :04003, 2013. doi : 10.1051/epjconf/20135604003. URL.

A. F. Stock, D. J. Hannantt, and I. T. Williams. The effect of aggregate concentration upon the strength and modulus of elasticity of concrete. *Magazine of Concrete Research*, 31(109) :225–234, 1979. ISSN 0024-9831. doi : 10.1680/macr.1979.31.109.225. URL.

T. Stovall, F. de Larrard, and M. Buil. Linear packing density model of grain mixtures. *Powder Technology*, 48(1) :1 – 12, 1986. ISSN 0032-5910. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0032-5910(86)80058-4. URL.

L. C. E. Struik. *Physical aging in amorphous polymers and other materials / L. C. E. Struik.* Elsevier Scientific Pub. Co. ; distributors for the U.S. and Canada, Elsevier North-Holland Amsterdam ; New York : New York, 1978. ISBN 0444416552.

DERALD A. STUART and ORSON L. ANDERSON. Dependence of ultimate strength of glass under constant load on temperature, ambient atmosphere, and time. *Journal of the American Ceramic Society*, 36(12) :416–424, 1953. ISSN 1551-2916. doi : 10.1111/j.1151-2916.1953.tb12831.x. URL.

J.L. Sullivan. Creep and physical aging of composites. *Composites Science and Technology*, 39(3) :207 – 232, 1990. ISSN 0266-3538. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0266-3538(90)90042-4. URL.

P. Suquet, H. Moulinec, O. Castelnau, M. Montagnat, N. Lahellec, F. Grennerat, P. Duval, and R. Brenner. Multi-scale modeling of the mechanical behavior of polycrystalline ice under transient creep. *Procedia {IUTAM}*, 3(0) :76 – 90, 2012. ISSN 2210-9838. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.piutam.2012.03.006. URL. IUTAM Symposium on Linking Scales in Computations : From Microstructure to Macro-scale Properties.

T. Suzuki and M. Aoki. Damage identification of cracked concrete by X-Ray computed tomography method. In *FraMCos-7 Proceedings*, pages 1143–1148, 2010.

Subhash V. Talekar. Temperature dependence of activation energies for self-diffusion of water and of alkali ions in aqueous electrolyte solutions. a model for ion selective behavior of biological cells. *International Journal of Quantum Chemistry*, 12(S4) :459–469, 1977. ISSN 1097-461X. doi : 10.1002/qua.560120741. URL.

G. P. Tandon and G. J. Weng. The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites. *Polymer Composites*, 5(4) :327–333, 1984. ISSN 1548-0569. doi : 10.1002/pc.750050413. URL.

Nelson W. Taylor. Mechanism of fracture of glass and similar brittle solids. *Journal of Applied Physics*, 18(11) :943–955, Nov 1947. ISSN 0021-8979. doi : 10.1063/1.1697579.

R. L. Taylor, K. S. Pister, and G. L. Goudreau. Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. *International journal for numerical methods in engineering*, 2 :45–59, 1970.

Minh Quan Thai. *Modélisation micromécanique et simulation numérique du fluage des bétons avec prise en compte de l'endommagement et des effets thermo-hydriques*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2012.

Minh-Quan Thai, Benoit Bary, and Qi-Chang He. A homogenization-enriched viscodamage model for cement-based material creep. *Engineering Fracture Mechanics*, 126(0) :54 – 72, 2014. ISSN 0013-7944. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.04.021. URL.

Jean Tillequin and Jean-Louis Costaz. Confinement. enceintes. *Techniques de l'Ingénieur*, pages 1 – 18, 1997. URL. b3290.

top500.org. Athos EdF R&D. `http://www.top500.org/system/178201`, 2015. Accessed : 2015-06-03.

S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 2002. ISBN 9780387951676. URL.

J.M. Torrenti, V.H. Nguyen, H. Colina, F. Le Maou, F. Benboudjema, and F. Deleruyelle. Coupling between leaching and creep of concrete. *Cement and Concrete Research*, 38(6) :816 – 821, 2008. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2008.01.012. URL.

A.B. Tran, J. Yvonnet, Q.-C. He, C. Toulemonde, and J. Sanahuja. A simple computational homogenization method for structures made of linear heterogeneous viscoelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(45–46) :2956 – 2970, 2011. ISSN 0045-7825. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2011.06.012. URL.

A.B. Tran, J. Yvonnet, Q.-C. He, C. Toulemonde, and J. Sanahuja. A four-scale homogenization analysis of creep of a nuclear containment structure. *Nuclear Engineering and Design*, 265(0) :712 – 726, 2013. ISSN 0029-5493. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.nucengdes.2013.07.038. URL.

G.E. Troxell, J.M. Raphael, and R.E. Davis. Long-time creep and shrinkage tests of plain and reinforced concrete. In *ASTM Proceedings*, pages 1101–1120, 1958.

N. W. Tschoegl. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior, an introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989. ISBN 978-3-642-73604-9. URL.

N.W. Tschoegl, WolfgangG. Knauss, and Igor Emri. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 6 (1) :3–51, 2002. ISSN 1385-2000. doi : 10.1023/A:1014411503170. URL.

S. Tungjitpornkull and N. Sombatsompop. Processing technique and fiber orientation angle affecting the mechanical properties of e-glass fiber reinforced wood/pvc composites. *Journal of Materials Processing Technology*, 209(6) :3079 – 3088, 2009. ISSN 0924-0136. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2008.07.021. URL.

S. Tungjitpornkull, K. Chaochanchaikul, and N. Sombatsompop. Mechanical characterization of e-chopped strand glass fiber reinforced wood/pvc composites. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 20(6) :535–550, 2007. doi : 10.1177/0892705707084541. URL.

S. Ullah, B. Pichler, S. Scheiner, and C. Hellmich. Influence of shotcrete composition on load-level estimation in natm-tunnel shells : Micromechanics-based sensitivity analyses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 36(9) :1151–1180, 2012. ISSN 1096-9853. doi : 10.1002/nag.1043. URL.

F.-J. Ulm, F. Le Maou, and C. Boulay. Creep and shrinkage coupling : New review of some evidence. *Revue française de génie civil*, 3(3-4) :21–37, 1999. ISSN 1279-5119.

Vít Šmilauer and Zdeněk P. Bažant. Identification of viscoelastic c-s-h behavior in mature cement paste by fft-based homogenization method. *Cement and Concrete Research*, 40(2) :197 – 207, 2010. ISSN 0008-8846. doi : 10.1016/j.cemconres.2009.10.003. URL.

M. Vandamme and F.-J. Ulm. Nanoindentation investigation of creep properties of calcium silicate hydrates. *Cement and Concrete Research*, 52(0) :38 – 52, 2013. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2013.05.006. URL.

Mathieu Vandamme. *The nanogranular origin of concrete creep : a nanoindentation investigation of microstructure and fundamental properties of Calcium-Silicate-Hydrates*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2008.

Karine Velez, Sandrine Maximilien, Denis Damidot, Gilbert Fantozzi, and Fransois Sorrentino. Determination by nanoindentation of elastic modulus and hardness of pure constituents of Portland cement clinker. *Cement and Concrete Research*, 31(4) :555 – 561, 2001. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(00)00505-6. URL.

J. Verdier. *Contribution à la caractérisation de l'évolution du taux de fuite des enceintes de confinement du parc nucléaire*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2001.

Q H Vu, R Brenner, O Castelnau, H Moulinec, and P Suquet. A self-consistent estimate for linear viscoelastic polycrystals with internal variables inferred from the collocation method. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 20(2) :024003, 2012. URL.

w. H. McMaster, N. K. Del Grande, J. H. Mallett, and J. H. Hubbell. Compilation of x-ray cross sections. Technical Report UCRL-50174, Lawrence Livermore National Laboratory, 1969.

Hollis N. Walker, D. Stephen Lane, and Paul E. Stutzman. Petrographic methods of examining hardened concrete : A petrographic manual. Technical Report FHWA-HRT-04-150, Federal Highway Administration, Virginia Transportation Research Council, 2006.

Frederick T. Wallenberger, James C. Watson, and Hong Li. Glass fibers, asm handbook. Technical Report 06781G, ASM International, 2001.

Vincent Waller. *Relations entre composition des betons, exothermie en cours de prise et resistance en compression*. PhD thesis, 1999. URL. Thèse de doctorat dirigée par DE LARRARD, FRANCOIS Sciences appliquées ENPC 1999.

Y.M. Wang and G.J. Weng. Influence of inclusion shape on the overall viscoelastic behavior of composites. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 59(3) :510–518, 1992. URL. cited By 69.

Roman Wendner, MijaH. Hubler, and ZdeněkP. Bažant. Statistical justification of model b4 for multi-decade concrete creep using laboratory and bridge databases and comparisons to other models. *Materials and Structures*, 48(4) : 815–833, 2015. ISSN 1359-5997. doi : 10.1617/s11527-014-0486-1. URL.

G.J. Weng. Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions. *International Journal of Engineering Science*, 22(7) :845 – 856, 1984. ISSN 0020-7225. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(84)90033-8. URL.

G.J. Weng. The theoretical connection between mori-tanaka's theory and the hashin-shtrikman-walpole bounds. *International Journal of Engineering Science*, 28(11) :1111 – 1120, 1990. ISSN 0020-7225. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(90)90111-U. URL.

Ward Whitt. A unified framework for numerically inverting laplace transforms. *INFORMS Journal on Computing*, 18 :408–421, 2006.

Graham Williams and David C. Watts. Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function. *Trans. Faraday Soc.*, 66 :80–85, 1970. doi : 10.1039/TF9706600080. URL.

Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. Gnuplot 4.6 : an interactive plotting program. `http://gnuplot.sourceforge.net/`, November 2014. URL.

A. S. Wineman and K. R. Rajagopal. *Mechanical Response of Polymers, an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000. ISBN 9780521644099. URL.

F. H. Wittman. Creep and shrinkage mechanisms. In Z. P. Bažant and F. H. Wittman, editors, *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*, pages 225–240. John Wiley & Sons, 1982.

F.H. Wittmann. Estimation of the modulus of elasticity of calcium hydroxide. *Cement and Concrete Research*, 16(6) :971 – 972, 1986. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0008-8846(86)90021-9. URL.

C.C. Yang, R. Huang, W. Yeih, and I.C. Sue. Aggregate effect on elastic moduli of cement-based composite materials. *Journal of Marine Science and Technology*, 3(1) :5–10, 1995.

Wensong Yang, Yi Pan, and Assimina A Pelegri. Multiscale modeling of matrix cracking coupled with interfacial debonding in random glass fiber composites based on volume elements. *Journal of Composite Materials*, 47(27) :3389–3399, 2013. doi : 10.1177/0021998312465977. URL.

A. F. Yee and M. T. Takemori. Dynamic bulk and shear relaxation in glassy polymers. i. experimental techniques and results on PMMA. *Journal of Polymer Science : Polymer Physics Edition*, 20(2) :205–224, 1982. ISSN 1542-9385. doi : 10.1002/pol.1982.180200204. URL.

Xing yi Zhu, Xinfei Wang, and Ying Yu. Micromechanical creep models for asphalt-based multi-phase particle-reinforced composites with viscoelastic imperfect interface. *International Journal of Engineering Science*, 76(0) :34 – 46, 2014. ISSN 0020-7225. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijengsci.2013.11.011. URL.

J. Yuan, A. Hiltner, E. Baer, and D. Rahrig. The effect of high pressure on the mechanical behavior of short fiber composites. *Polymer Engineering & Science*, 24(11) :844–850, 1984. ISSN 1548-2634. doi : 10.1002/pen.760241103. URL.

N. I. Md Yusoff, G. D. Airey, and M. R. Hainin. Predictability of complex modulus using rheological models. *Asian Journal of Scientific Research*, 3 (1) :18–30, 2010. doi : 10.3923/ajsr.2010.18.30. URL.

Qing Zhang, Robert Le Roy, Matthieu Vandamme, and Bruno Zuber. Long-term creep properties of cementitious materials : Comparing microindentation testing with macroscopic uniaxial compressive testing. *Cement and Concrete Research*, 58(0) :89 – 98, 2014. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2014.01.004. URL.

X. Zhang, Y. Yang, and C.K. Ong. A novel way of estimation of the apparent activation energy of cement hydration using microwave technique. *Journal of Materials Science*, 34(13) :3143–3147, 1999. ISSN 0022-2461. doi : 10.1023/A:1004665403208. URL.

Y.H. Zhao, G.P. Tandon, and G.J. Weng. Elastic moduli for a class of porous materials. *Acta Mechanica*, 76(1-2) :105–131, 1989. ISSN 0001-5970. doi : 10.1007/BF01175799. URL.

S.F. Zheng and G.J. Weng. A new constitutive equation for the long-term creep of polymers based on physical aging. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(3) :411 – 421, 2002. ISSN 0997-7538. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0997-7538(02)01215-9. URL.

Zhi-hong Zhou, Yao-long He, Hong-jiu Hu, Feng Zhao, and Xiao-long Zhang. Creep performance of pvc aged at temperature relatively close to glass transition temperature. *Applied Mathematics and Mechanics*, 33(9) :1129–1136, 2012. ISSN 0253-4827. doi : 10.1007/s10483-012-1610-x. URL.

S.N. Zhurkov. Kinetic concept of the strength of solids. *International Journal of Fracture*, 26(4) :295–307, 1984. ISSN 0376-9429. doi : 10.1007/BF00962961. URL.

O.C. Zienkiewicz, M. Watson, and I.P. King. A numerical method of visco-elastic stress analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 10(10) : 807 – 827, 1968. ISSN 0020-7403. doi : 10.1016/0020-7403(68)90022-2. URL.

Vít Šmilauer and Zdeněk Bittnar. Microstructure-based micromechanical prediction of elastic properties in hydrating cement paste. *Cement and Concrete Research*, 36(9) :1708 – 1718, 2006. ISSN 0008-8846. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2006.05.014. URL.

Table des figures

1 Les déformations différées de fluage des bétons sont proportionnelles à la contrainte appliquée. 16
2 Les déformations différées de fluage d'un béton dépendent de l'âge du béton au chargement t_0 19

1.1 Principe de la tomographie 32
1.2 Les atténuations μ_X des différents constituants d'un béton 34
1.3 Tomographie en géométrie parallèle 35
1.4 L'amplification des fréquences de la projection 36
1.5 Calcul de w/c et de f_g 39
1.6 Comparaison de module de Young expérimental et d'estimation du module de Young par les bornes de Hashin-Shtrikman 44
1.7 Photo d'une section et coupe d'une tomographie de béton 46
1.8 Les différents traitements d'une image 46
1.9 Extrait des masques utilisés 47
1.10 Granulométries estimées à partir des diamètres équivalents . . . 48
1.11 Granulométries estimées à partir des diamètres équivalents pour les huit volumes disjoints de B1 49
1.12 L'histogramme des niveaux de gris dans l'image de B1 50
1.13 Comparaison de module de Young expérimental et d'estimation du module de Young par les bornes de Hashin-Shtrikman, apport de la tomograpghie 51
1.14 Extrait de tomographie du mortier B2 52
1.15 Granulométries estimées à partir des diamètres équivalents, mortier B2 52
1.16 Les éprouvettes du béton type B11 tomographiées 54
1.17 Extrait de tomographie, diamètre 16cm 56
1.18 Extrait de tomographie, diamètre 20mm 57
1.19 Extraits de tomographies, diamètre 95mm, 50mm et 20mm . . . 58
1.20 Extrait de tomographies, diamètre 50mm et 5mm 59
1.21 Extraits de tomographies de deux bétons 60
1.22 Extraits de tomographies de prismes de béton de 8mm de coté . 60
1.23 Extraits de tomographies de prismes de béton de 2mm de coté . 61

2.1 Results of uniaxial compressive creep tests reported by L. Granger Granger (1995) 64
2.2 The sieve curve : volume fraction vs particle diameter 66
2.3 A section of a 4 cm-wide sample of a concrete built by the RSA algorithm is shown 67

2.4 On the left, polyhedra are rather round whereas polyhedra feature sharp edges in the middle 68
2.5 The rheological model is made of a series of Kelvin chains 70
2.6 Effect of the time discretization on the estimated time-dependent strains 72
2.7 The delayed responses to hydrostatic (left) and shear(right) creep tests are computed 73
2.8 Assigning the Reuss-like behavior to gray (composite) voxels is less sensitive to discretization that the Voigt-like behavior. . . . 74
2.9 Viscoelastic responses to hydrostatic or shear macroscopic loadings. Various matrix-inclusion microstructures with the same inclusions' volume fraction lead to very close time-dependent strains. 77
2.10 Probability distributions of a stress component σ_{xy} during a shear creep test for different microstructures 78
2.11 A blue 100 μm grid is put on top of a SEM image from Scrivener Scrivener et al. (2004) 78
2.12 Top : an ITZ can be pictured on the microstructure of a mortar, depending on its thickness δ. Bottom left : the local water to cement ratio is displayed as a function of the distance to the inclusion. Bottom right : the numerical solution to uniaxial creep test depends on the thickness of the ITZ 81
2.13 Homogenization schemes of the Hashin-Shtrikman model (left) and tri-sphere model (right). 82
2.14 Viscoelastic responses to a shear loading for different volume fraction of inclusions 83
2.15 Results of the tri-sphere model de Larrard (1999); Roy (1995) for unimodal(left), bimodal(center) and concrete microstructures are compared to numerical estimates 84
2.16 Results of the $n+1$ phase spherical model (left) Hervé and Zaoui (1993) for a mortar is compared to numerical estimates for different thickness of ITZ δ 85

3.1 Left : the inhomogeneity problem solved by Sanahuja(Sanahuja, 2013b). Center and right : the inclusion problem and the inhomogeneity problem solved in the present study. 91
3.2 Top : the estimated normalized creep strains are displayed as functions of time elapsed since loading $t - t_0$. Time-dependent strains for different aspect ratios a/b, for bulk (left) and shear (right) loadings, are estimated by using the Mori-Tanaka scheme in the Laplace-Carson space and by the Mori-Tanaka scheme in the space domain. Bottom : the relative error between the estimated time-dependent strains is displayed as a function of the time elapsed since loading $t - t_0$. The time of loading is 10 days after quenching. 101
3.3 A 4 cm-wide sample of a concrete made of coarse sand ($d > 0.5$ mm) and small gravel ($d < 13.5$ mm) built by the RSA algorithm is shown along with its discrezation on a $384 \times 384 \times 384$ grid. The volume fraction of polyhedral inclusions in the cubic cell is 60%. 105

3.4 The normalized creep strains ε_x/σ_x of a cement paste according to the modified B3 model (RILEM, 1995) are displayed as functions of the time elapsed since loading $t - t_0$ for different times of loading t_0. An uniaxial creep test σ_x is considered. The Young modulus ($t - t_0 \approx 0.01$ days) depends on the time of loading t_0. The long term trend of creep strains is logarithmic ($t - t_0 \geq 100$ days). 106
3.5 The normalized creep strains ε_x/σ_x of a concrete estimated by the time-space method of Sanahuja (Sanahuja, 2013b) and full 3D numerical simulations are displayed as functions of the time elapsed since loading $t - t_0$. Considered times of loading are $t_0 =$ 7 days (top left), $t_0 = 28$ days (top right) and $t_0 = 365$ days (bottom). The inclusions are assumed to be spherical so as to use the model of Sanahuja. The loading corresponds to an uniaxial creep test. 107
3.6 The estimated normalized creep strains ε_x/σ_x of concrete featuring different aspect ratios of aggregates are displayed as functions of the time elapsed since loading $t-t_0$. Considered time of loading are $t_0 = 7$ days (top left), $t_0 = 28$ days (top right) and $t_0 = 365$ days (bottom). In case of uniaxial creep tests, the aspect ratio of aggregates has little effect on the time-dependent strains of concretes estimated by the time-space method. 109
3.7 Microstructures featuring spherical ($a/b = 1$), elongated ($a/b =$ 3) or flat ($a/b = 0,33$) aggregates are discretized on $384 \times 384 \times$ 384 regular grids to perform full 3D numerical simulations. The volume fraction of aggregates is 60%. 109
3.8 The normalized creep strains ε_x/σ_x of concretes estimated by the Mori-Tanaka scheme, the Ponte Castañeda-Willis scheme and full 3D numerical simulations are displayed as functions of the time elapsed since loading $t-t_0$. Considered aspect ratios of aggregates for these uniaxial creep tests are $a/b = 1$ (left), $a/b = 3$ (center) and $a/b = 0.33$ (right). The time of loading is $t_0 = 28$ days. In case of spherical inclusions $a/b = 1$, the estimate of the Ponte Castañeda-Willis scheme is equal to the one of the Mori-Tanaka scheme. 110

4.1 Comparaison entre la complaisance simplifiée du modèle B3 et des résultats expérimentaux 115
4.2 Comparaison entre la complaisance simplifiée du modèle B3 et les résultats expérimentaux de Brooks 117
4.3 Comparaison entre la complaisance simplifiée du modèle B3 et les résultats expérimentaux de Granger 118
4.4 Comparaison entre la complaisance simplifiée du modèle B3 et des estimations obtenues par homogénéisation 122
4.5 Comparaison entre les estimations obtenues par homogénéisation et les résultats expérimentaux de Granger 126
4.6 L'indicateur ε_f dépend de l'orientation des contraintes locales . . 132
4.7 Évolution estimée de la contrainte et de la déformation macroscopique en fonction du temps 134

4.8 La microstructure contenant 64% d'inclusions polyédriques est dicrétisée 134
4.9 Microstructures contenant des inclusions polyédriques ou sphériques 135
4.10 Évolution estimée de la contrainte et de la déformation macroscopique en fonction du temps pour deux discrétisations spatiales 136
4.11 Évolution estimée de la contrainte et de la déformation macroscopique en fonction du temps pour deux microstructures différentes 137
4.12 Le critère de Rankine $< \sigma >^+$ ainsi que le critère de Mazars ε_d et l'indicateur ε_f varient au cours du temps. 138
4.13 Le critère de Rankine $< \sigma >^+$ dans la matrice cimentaire lors d'un essai de fluage biaxial 139
4.14 Le critère de Rankine $< \sigma >^+$ dans la matrice cimentaire pour un chargement biaxial et uniaxial 139
4.15 Le critère de Rankine $< \sigma >^+$ évolue au cours du temps 140
4.16 Le critère de Mazars évolue fortement lors du chargement 142
4.17 L'indicateur ε_f dépendant de l'orientation des déformations principales évolue dans le temps 143
4.18 Le critère de Rankine $< \sigma >^+$ ainsi que le critère de Mazars ε_d et l'indicateur ε_f varient en fonction de la pression d'épreuve p . 144

5.1 Real and numerical microstructures. 153
5.2 The experimental results of Struik Struik (1978) on hard polyvinyl chloride (PVC) at T=20°C are digitalized 155
5.3 The experimental results of Read et. al. Read et al. (1992) on hard polyvinyl chloride (PVC) at T=23°C are digitalized 156
5.4 Left : fiber orientations are binned into 20 sectors of equal angle along y axis. Right : the estimated number of fiber in each sector $n_{f,e} = 61, 1$ is compared to the observed ones $n_{f,o}(\theta)$, $\theta \in 1..20$. 160
5.5 Relative error due to time stepping 162
5.6 The same microstructure of length 133μm is discretized on grids of size $N = 32$, $N = 128$ and $N = 648$ 163
5.7 The estimated instantaneous strain ε_{xy} and the estimated strain 50 days after loading are plotted as a functions of the grid size N 164
5.8 The elastic response to a shear stress at $t_0 = 10$ days is computed and probability distribution functions of the Von Mises stress are displayed for different grid size N 164
5.9 The elastic response of unit cells of different sizes l at $t_0 = 10$ days is computed. 165
5.10 Left : the estimate of the probability distribution function of the Von Mises stress depends slightly on the size of the unit cell l (left). Right : a focus on large stress concentrations is displayed. 165
5.11 Overall responses estimated by the Hashin-Shtrikman scheme (dashed lines) and 3D numerical computations (solid lines) for glass-reinforced PVC featuring different shapes of inclusions. . . 166
5.12 Overall responses estimated by the Mori-Tanaka scheme (dashed lines) and 3D numerical computations (solid lines) for fiber-reinforced polymers featuring different lengths of fibers 167
5.13 Overall responses estimated by the Mori-Tanaka scheme (dashed lines) and 3D numerical computations (solid lines) for fiber-reinforced polymers featuring different volume fractions of fibers 167

5.14 Stress concentrations in a a fiber-reinforced polymer may be estimated by 3D numerical computations 168
5.15 The estimate of the probability distribution function of the Von Mises stress stress in the matrix and Rankine criteria in fibers during an hydrostatic creep test (top) and a shear creep test (bottom) 169
5.16 The Mori-Tanaka estimate of the lifetime versus the creep load. . 170
5.17 The Mori-Tanaka estimate and numerical estimates of the lifetime versus the creep load 171
5.18 The Mori-Tanaka estimate of the lifetime versus the uniaxial traction creep load. Left : effect of the volume fraction of fibers, the length of fibers being 1mm. Right : Effect of the length of fibers, the volume fraction of fibers being 15% 171
5.19 The Rankine criteria in fibers as computed by 3D numerical computation of an uniaxial creep test $\sigma_x = 1$MPa 172

6.1 The DBN model is adjusted to the 2S2P1D model of a bitumen (Di Benedetto et al., 2007) in the range $[0.1\text{Hz}; 1000\text{Hz}]$. The obtained real and imaginary parts of the complex Young Modulus (top left) and Poisson's ratio (top right) are displayed as functions of the pulsation w. The corresponding relative error are displayed below. 184
6.2 The magnitude (left) and phase (right) of the inverse of the complex Young modulus estimated by the Fourier method and the proposed homogenization scheme coincide at all frequencies. ω. . 185
6.3 The overall behavior of the concrete is estimated by a two-step homogenization procedure. First, the behavior of the cement paste is estimated by the Mori–Tanaka scheme, the C-S-H being the reference material. Then, the behavior of the concrete is estimated by the Mori–Tanaka scheme, the cement paste being the reference material. 186
6.4 The viscoelastic Poisson's ratio ν of the cement paste is estimated : a bulk relaxation test and a shear relaxation test are performed based on the relaxation tensor estimated by the Mori–Tanaka scheme and equation (6.7) is applied. The viscoelastic Poisson's ratio ν changes with time of loading t_0 and time elapsed since loading t. Consequently, the approximated viscoelastic Eshelby's tensor is needed at the mesoscopic scale. 187
6.5 The instantaneous Young Modulus and apparent Young Modulus from 0 to 170 days after loading of fiber-reinforced concrete for different fiber volume fraction and time of loading of 7 days and 28 days. The experimental results of Chern and Young(Chern and Young, 1989) are compared to the estimates of the multi-scale homogenization method. 192
6.6 The overall time-dependent strains of an asphalt concrete are estimated by three different methods : the correspondence principle, the approximated scheme and the assumption of a time-independent Poisson's ratio. A bulk creep test is considered, the volume fraction of inclusions being 32%. 194

Liste des tableaux

1 Les caractéristiques d'un béton 12
2 La déformation d'un mur peut être estimé par différents modèles existants. 13
3 Quelques modèles rhéologiques en viscoélasticité linéaire non-vieillissante. 21

1.1 Composition de Bogue d'un des ciments de (Granger, 1995). . . . 33
1.2 Influence du rapport w/c sur le module de la pâte. 39
1.3 Mesures expérimentales de modules de Young de mortiers obtenues par A. Legrix. 41
1.4 Comparaison de 19 laboratoires rapportée dans l' annexe E de la norme NF EN 1097-6 41
1.5 Comportements retenus pour les granulats des mortiers 42
1.6 Les données de formulation des quatre mortiers S1, S2, B1 et B2. 43
1.7 Estimations de la fraction volumique de granulat f_g et du module de Young du mortier $E_{mortier}$ obtenues par homogénéisation pour les mortiers S1 et S2, en tenant compte de la densité mesurée du mortier. La légère différence entre les modules estimés vient de la petite différence d'eau totale, ce qui joue sur le rapport w/c et le module estimé de la matrice. 43
1.8 Premières estimations de la fraction volumique de granulat f_g et du module de Young du mortier $E_{mortier}$ obtenues par homogénéisation pour les mortiers B1 et B2, en tenant compte de la densité mesurée du mortier. 43
1.9 Les valeurs de masses volumiques trouvées pour les billes de verre par les normes EN 1097-6 et DIN V 18004 sont très différentes. . 44
1.10 Estimations corrigées de la fraction volumique de granulats f_g et du module de Young du mortier $E_{mortier}$ obtenues par homogénéisation pour les mortiers B1 et B2. Le rapport w/c différent a un effet sensible sur les modules de Young de la pâte de ciment et du mortier. 44
1.11 Résultats des masques 47
1.12 Évolution de la fraction volumique estimée lorsque l'on effectue des érosions ou des dilations. 48
1.13 Fractions volumiques de granulats estimées pour différents sous-volumes de taille 400^3. 49
1.14 Les principales sources d'incertitude sur le module estimé via la tomographie pour B1 51
1.15 Effet du seuillage sur la fraction volumique estimée pour B2 . . . 53

1.16 Les conditions de micro-tomographie X en fonction du diamètre . 53
1.17 Les conditions de micro-tomographie X en fonction de la taille du prisme. Pour le prisme le plus petit, un imageur à très haute résolution (Vhr) a été utilisé. 55

2.1 Formulation of two concretes of Granger Granger (1995) 63
2.2 Mechanical behavior of a concrete identified on a creep test Granger (1995) and the behavior of the defined cement paste 71
2.3 Estimated macroscopic compliances for different kinds of microstructure and different size of the unit cell 75
2.4 Effect of the ITZ on the identified macroscopic Young modulus of $\mathbf{C}_k$ 80

3.1 Values fitted according to the experimental results of Read et. al. (Read et al., 1992) on rigid PVC, at T=23°C. All Poisson's ratios of hard PVC are assumed to be 0.40. Both the values of the aging parameter $\mu = -0.958$ and the shape parameter $m = 0.324$ are close to the values identified by Struik or Read et. al. (Struik, 1978; Read et al., 1992) 99
3.2 According to Kawasumi et al. the static modulus of a cement paste E_s may be retrieved from the dynamic Young Modulus E_d thanks to the following equation : $E_s = 0.001628 \times (E_d/0.0981)^{1}.315$ where E_s and E_d are in MPa. The ratio E_s/E_d is 0.6 at 28 days in the aging viscoelastic model. The ratio being lower for small values of E_s means that the static modulus ages more than the dynamic modulus. This dynamic modulus does not age at all in the B3 model (Bažant and Prasannan, 1988; RILEM, 1995) . . . 103
3.3 A Dirichlet series $\sum_1^n \left(1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_k}}\right) E_k^{-1} + E_0^{-1}$is fitted according to the non-aging part of the compliance $\Phi(t-t') = \ln(1+\lambda_0^{-n}(t-t')^n)$, where $\lambda_0 = 1$ day. 104
3.4 Parameters of the viscoelastic behavior of a cement paste, according to model B3. The Poisson's ratio of the cement paste is assumed to be equal to 0.2. 105

4.1 La composition d'une pâte de ciment à 28 jours en terme de fractions volumiques 121
4.2 Paramètres de formulation des bétons d'après (Granger, 1995; Verdier, 2001) 123
4.3 Propriétés mécaniques des bétons d'après (Granger, 1995; Verdier, 2001). 124
4.4 Les grandeurs géométriques dans le cas d'une enceinte de type N4.128
4.5 La relaxation à 1000h ρ_1 pour différentes chargements $\sigma_{\text{acier}(0)}/\sigma_{\text{acier},max}$ d'après (du Béton, 1991). 129
4.6 L'état de contrainte et la déformation estimé avant épreuve et la précontrainte résiduelle à la pression de 4.3 bar 138

5.1 Values fitted according to the experimental results of Struik Struik (1978) on rigid PVC at T=20°C and values for E-glass fibers. All Poisson's ratios of PVC are assumed to be 0.40. The aging coefficient μ is set at -0.99998. 157
5.2 Values fitted according to the experimental results of Read et. al. Read et al. (1992) on rigid PVC, at T=23°C. All Poisson's ratios of hard PVC are assumed to be 0.40. Both the values of the aging parameter $\mu = -0.958$ and the shape parameter $m = 0.324$ are close to the values identified by Struik or Read et. al. Struik (1978); Read et al. (1992) 158
5.3 Grid sizes and numerical performances on the Ivanhoé cluster of EDF R&D (iDataPlex, Xeon X5670 6C 2.93 GHz, Infiniband). Increasing the memory bandwidth by using twelve nodes instead of one allows a tenfold increase of the number of degrees of freedom while keeping comparable wall-clock times. 163

6.1 Values describing the master curve of a pure 50/70 penetration grade bitumen (Di Benedetto et al., 2007) at 0°C. The DBN model is adjusted in the range [0.1Hz; 100000Hz]. The instantaneous Poisson's ratio is 0.38. All Poisson's ratio of Kelvin chains are 0.5. 183
6.2 Geometrical and mechanical parameters for the multi-scale homogenization of concrete. Parameters of the viscoelastic behavior of C-S-H are set according to the model B3. Elastic parameters are similar to those measure and used in previous homogenization studies of cementitious materials(Beaudoin, 1983; Wittmann, 1986; Granger, 1995; Monteiro and Chang, 1995; Velez et al., 2001; Bernard et al., 2003; Kamali et al., 2004; Constantinides and Ulm, 2004; Haecker et al., 2005; Šmilauer and Bittnar, 2006; Sanahuja et al., 2007; Sorelli et al., 2008; Šmilauer and Bažant, 2010) . . . 190
6.3 The experimental instantaneous Young Modulus and apparent Young Modulus 170 days after loading measured by Chern and Young(Chern and Young, 1989) are compared to corresponding estimates produced by the multi-scale homogenization method. Values for different volume fractions of fibers and different time of loading are available. 191