



HAL
open science

Analyse des instabilités plastiques dans les matériaux ductiles endommageables : application à la prédiction de la striction et de la formabilité des tôles métalliques

Lotfi Zoher Mansouri

► To cite this version:

Lotfi Zoher Mansouri. Analyse des instabilités plastiques dans les matériaux ductiles endommageables : application à la prédiction de la striction et de la formabilité des tôles métalliques. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2014. Français. NNT : 2014ENAM0059 . tel-01312915

HAL Id: tel-01312915

<https://pastel.hal.science/tel-01312915>

Submitted on 4 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

THÈSE

Pour obtenir le grade de docteur délivré par

L'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Mécanique et Matériaux "

Présentée et soutenue publiquement par

Lotfi MANSOURI

Le 17 Décembre 2014

Analyse des instabilités plastiques dans les matériaux ductiles endommageables : application à la prédiction de la striction et de la formabilité des tôles métalliques

Directeur de thèse : **Farid ABED-MERAIM**
Co-encadrement de la thèse : **Hocine CHALAL**

Jury

Mme	Sandrine THUILLIER , Professeur, LIMATB, Université de Bretagne-Sud	Rapporteur
M.	Patrice LONGÈRE , Professeur, Institut Clément ADER, ISAE Toulouse	Rapporteur
Mme	Anne-Marie HABRAKEN , Directrice de Recherches FNRS, MS ² F, Université de Liège	Présidente
M.	Xavier LEMOINE , Docteur/Ingénieur, ArcelorMittal Maizières-Lès-Metz	Examineur
M.	Farid ABED-MERAIM , Professeur, LEM3, Arts et Métiers ParisTech	Examineur
M.	Hocine CHALAL , Maître de Conférences, LEM3, Arts et Métiers ParisTech	Examineur

DÉDICACES

REMERCIEMENTS

Ce présent travail a été réalisé dans l'équipe Mécanique Numérique (MENU) du Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3) à Arts et Métiers ParisTech. Je remercie le directeur du LEM3 M. Mikhail Lebedkin ainsi que le responsable de l'équipe MENU M. Michel Potier-Ferry pour tout l'intérêt porté à ce travail.

Mes vifs remerciements vont à l'ensemble des membres du jury, et particulièrement Mme Sandrine Thuillier et M. Patrice Longère pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur. Je remercie également Mme Anne-Marie Habraken pour avoir présidé ce jury de thèse.

Je tiens également à remercier mon directeur de thèse M. Farid Abed-Meraim pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche et pour les conseils scientifiques qu'il m'a donné au cours de ces années de thèse tout en me laissant suffisamment d'autonomie pour mener à terme ce travail. Je remercie d'autre part mon encadrant M. Hocine Chalal pour les discussions que nous avons eues ainsi que pour sa sympathie.

Je remercie l'ensemble des doctorants et chercheurs avec qui j'ai partagé d'excellents moments. Enfin, je remercie tout les membres de ma famille ainsi que tout mes amis pour leur soutien.

Table des matières

<i>Introduction générale</i>	9
Contexte général.....	10
Problématique et cadre de l'étude.....	11
Objectifs de la thèse.....	15
Organisation du manuscrit.....	16
<i>Chapitre 1 : Endommagement et critères d'instabilités : état de l'art</i>	19
<i>Partie A : Endommagement, aspects physiques et modélisations</i>	21
A.1 Introduction.....	21
A.2 Mécanismes d'endommagement dans les matériaux ductiles.....	21
A.3 Modélisation de l'endommagement par des approches phénoménologiques.....	25
A.4 Modélisation de l'endommagement par des approches micromécaniques.....	26
A.4.1 Critères d'amorçage des microcavités par germination.....	27
A.4.2 Modélisation du comportement des matériaux poreux et ductiles.....	30
A.4.3 Critère de plasticité macroscopique de (Gurson, 1977).....	32
A.4.4 Critère de plasticité macroscopique de Gurson-Tvergaard.....	37
A.4.5 Prise en compte de la coalescence des microcavités.....	39
A.5 Modélisation des matériaux poreux anisotropes et ductiles.....	41
A.5.1 Critère de plasticité macroscopique de (Liao et al., 1997).....	42
A.5.2 Critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001).....	43
A.6 Synthèse.....	46
<i>Partie B : Critères de striction diffuse et localisée en transformations finies</i>	49
B.1 Introduction.....	49
B.2 Critères basés sur le Principe de Force Maximum (P.F.M.).....	51
B.2.1 Critère de Force Maximum.....	52
B.2.2 Critère de taux d'extension nul.....	53
B.2.3 Critère de Force Maximum Modifié.....	54
B.3 Analyse de Bifurcation.....	57
B.3.1 Bifurcation Générale.....	59
B.3.2 Bifurcation par Point Limite.....	61
B.3.3 Perte d'Ellipticité.....	62
B.3.4 Perte d'Ellipticité Forte.....	65
B.4 Critère de striction localisée basé sur l'introduction d'un défaut initial (Marciniak-Kuczyński).....	65
B.4.1 Implantation du critère de Marciniak-Kuczyński.....	66
B.4.2 Rapprochement théorique entre le critère de Marciniak-Kuczyński et le critère de Perte d'Ellipticité.....	69

B.4.3	Formulation 3D du critère basé sur un défaut initial.....	70
B.5	Analyse de Stabilité par Perturbation Linéaire.....	73
B.5.1	Relation théorique entre le critère de Stabilité par Perturbation Linéaire et le critère de Perte d'Ellipticité.....	75
B.6	Synthèse.....	75
Chapitre 2 : Modélisation du comportement et intégration numérique des équations constitutives.....		77
2.1.	Introduction.....	78
2.2.	Cinématique des grandes déformations.....	78
2.3.	Comportement élasto-plastique couplé à l'endommagement.....	80
2.3.1.	Critère de plasticité macroscopique.....	81
2.3.2.	Lois d'évolution des variables internes.....	82
2.3.3.	Condition de cohérence.....	89
2.3.4.	Détermination du module tangent analytique.....	90
2.4.	Implantation numérique du modèle de comportement.....	91
2.4.1.	Position du problème.....	91
2.4.2.	Intégration du modèle de comportement par des schémas explicites.....	92
2.4.3.	Intégration du modèle de comportement par un schéma implicite.....	95
2.5.	Analyse de la performance des schémas d'intégration.....	101
2.5.1.	Simulation de l'essai de traction uniaxiale.....	102
2.5.2.	Simulation d'une traction hydrostatique.....	108
2.6.	Conclusions.....	109
Chapitre 3 : Couplage entre modèles de comportement et critères d'instabilités plastiques pour la prédiction des limites de formage.....		111
3.1.	Introduction.....	112
3.2.	Prédiction de la striction localisée le long de trajets de chargement linéaires.....	113
3.3.	Analyse de sensibilité aux paramètres du modèle de comportement.....	115
3.3.1.	Effet des paramètres d'endommagement sur la prédiction des limites de formage.....	115
3.3.2.	Effet des paramètres d'écrouissage.....	122
3.3.3.	Influence de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction des limites de formage : interaction endommagement-anisotropie plastique.....	126
3.4.	Confrontation aux résultats expérimentaux de la littérature.....	129
3.4.1.	Prédiction des CLF par des approches expérimentales.....	130
3.4.2.	Confrontation des CLF théoriques aux résultats expérimentaux de la littérature.....	131
3.4.3.	Discussion sur l'écart entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir d'une approche théorique.....	133

3.5.	Analyse de l'effet d'un changement de trajet de déformation sur la prédiction des CLF.....	139
3.6.	Conclusions.....	140
Chapitre 4 : Classification des critères de bifurcation et analyse des effets de non-normalité, d'anisotropie plastique et de présence d'un défaut initial.....		143
4.1.	Introduction.....	144
4.2.	Prédiction des différents modes d'instabilités plastiques, effet de la non-normalité de la loi d'écoulement.....	144
4.2.1.	Analyse de l'apparition de la striction diffuse et localisée pour des trajets de chargements linéaires.....	145
4.2.2.	Hiérarchisation théorique des critères basés sur l'Analyse de Bifurcation...	147
4.3.	Prédiction des courbes limites de striction diffuse.....	150
4.3.1.	Influence des paramètres d'endommagement sur la prédiction de la striction diffuse.....	150
4.3.2.	Effet des paramètres de la loi d'écrouissage.....	154
4.3.3.	Effet de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction de la striction diffuse.....	156
4.4.	Influence de la présence d'un défaut initial de type matériau sur l'apparition de la striction localisée.....	158
4.4.1.	Bifurcation élastique/plastique, approche de (Rice & Rudnicki, 1980).....	158
4.4.2.	Analyse de l'apparition des points de localisation sur une tôle contenant un défaut initial de type matériau.....	160
4.5.	Analyse de l'influence des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies sur la prédiction des modes de striction diffuse et localisée.....	166
4.6.	Conclusions.....	168
Conclusion générale		171
	Synthèse.....	171
	Perspectives.....	173
Annexes.....		177
	Annexe A1.....	178
1.	Démonstration de certains outils mathématiques mentionnés au cours de la présentation du modèle de Gurson.....	178
2.	Détermination des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies.....	180
	Annexe A2.....	183
1.	Calcul des termes intervenant dans la matrice Jacobienne.....	183
2.	Calcul des termes intervenant dans la construction du module tangent cohérent ..	184
Bibliographie.....		189

Introduction générale

Sommaire

1. Contexte général.....	10
2. Problématique et cadre de l'étude.....	11
3. Objectifs de la thèse	15
4. Organisation du manuscrit	16

1. Contexte général

Les matériaux métalliques représentent une part importante de la matière première utilisée lors de la fabrication de diverses pièces et produits finis, allant de l'agro-alimentaire, jusqu'à l'industrie aéronautique, en passant par l'électroménager, ...etc. Dans l'industrie automobile par exemple, l'acier est le principal matériau utilisé, puisqu'il représente 40% du poids total des véhicules produits et 98% de leur squelette structurel. Il est très utilisé pour la carrosserie automobile sous forme de produits plats (tôles). Parmi les procédés de mise en forme des tôles métalliques, l'emboutissage est le plus utilisé dans l'industrie car il autorise des cadences de production élevées, et un taux élevé d'exploitation du matériau. Il permet également de concevoir des pièces de formes complexes non-développables, contrairement à d'autres opérations de formage telles que le profilage à froid ou le pliage. La mise en forme des tôles par emboutissage reste toutefois un domaine qui n'est pas parfaitement maîtrisé, et fait souvent appel à des connaissances empiriques basées sur l'expérience et l'observation.

Compte tenu des nouvelles normes européennes concernant la réduction des émissions de dioxyde de carbone, ainsi que de l'augmentation du prix des matières premières, les producteurs de métaux se trouvent soumis à des pressions de plus en plus fortes. L'optimisation du gain de matière lors de la fabrication de pièces métalliques a des répercussions positives tant sur le plan écologique que sur le plan économique. L'allègement des pièces métalliques et des produits finis passe par la conception de nouveaux matériaux qui ont des caractéristiques améliorées (e.g. résistance mécanique, résistance à la corrosion, ...etc.), et fait donc appel à une compréhension plus approfondie des mécanismes physiques mis en jeu lors des opérations de formage par déformation plastique. Dans cette perspective d'allègement des structures, de nouvelles nuances d'aciers ont été élaborées durant ces dernières années (voir Figure 1) telles que les aciers à haute résistance (e.g. Dual Phase (DP), Transformation Induced Plasticity (TRIP), Aciers Martensitiques (MS), ...etc.), ou les aciers à hautes caractéristiques mécaniques (e.g. High Strength Low Alloy (HSLA), ...etc.), en plus de l'utilisation croissante de nouveaux alliages d'aluminium et de titane.

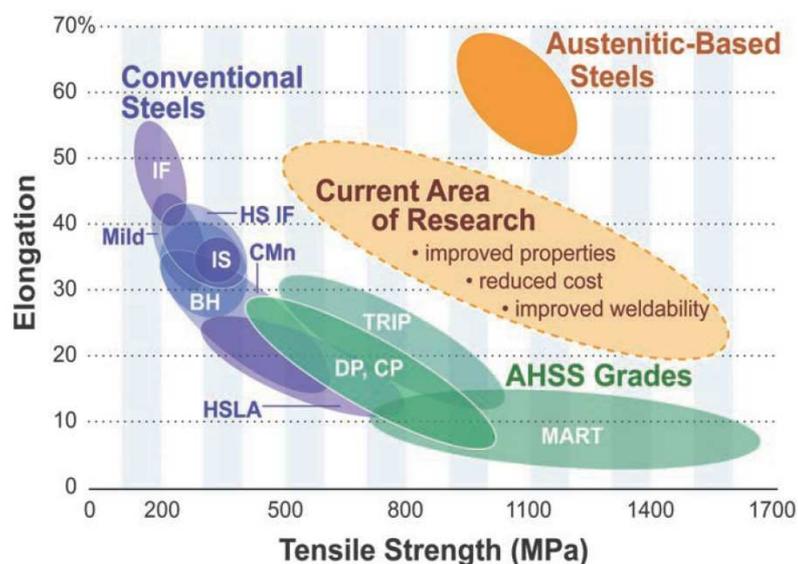


Figure 1 : Évolution de l'allongement total à rupture en fonction de la limite d'élasticité, pour les nouvelles nuances d'aciers. D'après (Tamarelli, 2011).

Ces nouveaux matériaux permettent d'avoir certaines caractéristiques mécaniques intéressantes comparées à celles des aciers traditionnels, bien qu'ils soient élaborés pour des besoins et des applications spécifiques. Ainsi, ils privilégient certaines propriétés mécaniques par rapport à d'autres (e.g. ductilité, limite d'élasticité, ...etc.). Cette spécificité nécessite d'importants investissements industriels tant sur le plan économique que sur le plan de l'innovation et de la recherche.

Les aciers à hautes caractéristiques mécaniques et les alliages d'aluminium contiennent souvent des inclusions non-métalliques et ont tendance à se rompre d'une manière brutale et localisée. L'apparition de défauts indésirables tels que la rupture, la localisation, ...etc. conduit inévitablement au rebut des pièces produites, et nécessite parfois une modification de l'outillage à des coûts élevés. Afin d'éviter de telles déconvenues, il est important pour les industriels de disposer d'outils théoriques et numériques fiables permettant de prédire l'apparition des défauts. C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail de thèse, et plus précisément dans la modélisation théorique et numérique du comportement des matériaux métalliques et d'indicateurs d'instabilités locales, dans le but de prédire l'apparition de défauts de type striction diffuse et localisée.

2. Problématique et cadre de l'étude

Il existe une variété importante de défauts susceptibles d'apparaître au cours de la mise en forme des tôles métalliques par emboutissage. Ces défauts peuvent être scindés en deux catégories, à savoir les défauts globaux et les défauts locaux (voir e.g., (Haddag, 2007)). Les défauts globaux concernent généralement la géométrie finale de la pièce tels que : le plissement, le retour élastique ou encore la formation des cornes d'emboutissage, ...etc. Bien que ces phénomènes appartiennent à la même catégorie, les causes susceptibles d'être à l'origine de leur apparition ne sont pas toujours les mêmes. Le plissement, apparait généralement pour les tôles très minces et est dû à la présence de contraintes de compression dans le plan de la tôle. En ce qui concerne le retour élastique, ce dernier se manifeste par un relâchement de la pièce qui évolue vers un nouvel état d'équilibre après son extraction du dispositif d'emboutissage. Son apparition est principalement due au comportement élastique du matériau et est particulièrement prononcé pour les nouveaux aciers à hautes caractéristiques. Ce type de défauts dépend également des paramètres procédés utilisés tels que l'effort de serrage, la vitesse d'avance du poinçon d'emboutissage, la nature du contact entre les outils et la tôle, ...etc. (voir e.g. (Geng & Wagoner, 2002), (Lee et al., 2005), (Haddag, 2007)). Enfin, l'apparition des cornes d'emboutissage sous forme d'ondulations est généralement due à l'anisotropie plastique initiale, qui à son tour est liée à la texture cristallographique (voir e.g. (Yoon et al., 2000), (Banabic, 2010)).

Les défauts locaux concernent généralement une zone restreinte de la tôle, et se manifestent principalement sous trois formes distinctes, à savoir, la striction diffuse, la striction localisée et la rupture ductile. Cette dernière est caractérisée par l'apparition d'une fissure macroscopique. La striction diffuse est caractérisée par une réduction relativement douce de la section d'une éprouvette dans le cas d'une traction uniaxiale par exemple. Elle indique ainsi le passage d'un état de déformation homogène vers un état de déformation quasi-homogène, voire hétérogène sur une zone relativement large, perceptible en particulier

pour les tôles minces soumises à un chargement en traction uniaxiale. La striction localisée est caractérisée par l'apparition d'une concentration des champs de déformation dans des zones étroites. Ce phénomène s'accompagne d'un amincissement local prononcé au niveau de l'épaisseur de la tôle, ainsi que d'une dégradation locale des propriétés mécaniques de la tôle. Contrairement à certains défauts cités précédemment tels que le retour élastique ou l'apparition des cornes d'emboutissage, la modélisation du comportement des matériaux métalliques n'est pas toujours suffisante pour prédire l'apparition des instabilités locales. En effet, une prédiction rigoureuse de ces défauts nécessite d'introduire, en plus d'un modèle de comportement fiable, des indicateurs d'instabilités locales afin de détecter le moment précis pour lequel ce type de phénomènes est susceptible d'apparaître. La modélisation des instabilités locales continue à faire l'objet de nombreux travaux de recherche tant sur le plan théorique qu'expérimental. La détermination précise de l'apparition de ces phénomènes passe tout d'abord par l'identification des mécanismes élémentaires qui sont à l'origine de leur apparition. Les études expérimentales menées dans les différents travaux de la littérature montrent qu'il existe plusieurs mécanismes physiques qui sont à l'origine de l'apparition des instabilités locales, ou bien qui ont une influence considérable sur leur apparition.

La perte d'homogénéité des champs de déformation dépend sensiblement de l'échelle à laquelle on observe le matériau. À l'échelle du grain, la déformation plastique d'un monocristal se produit par formation et croissance des bandes de glissement, générées par le mouvement des dislocations.

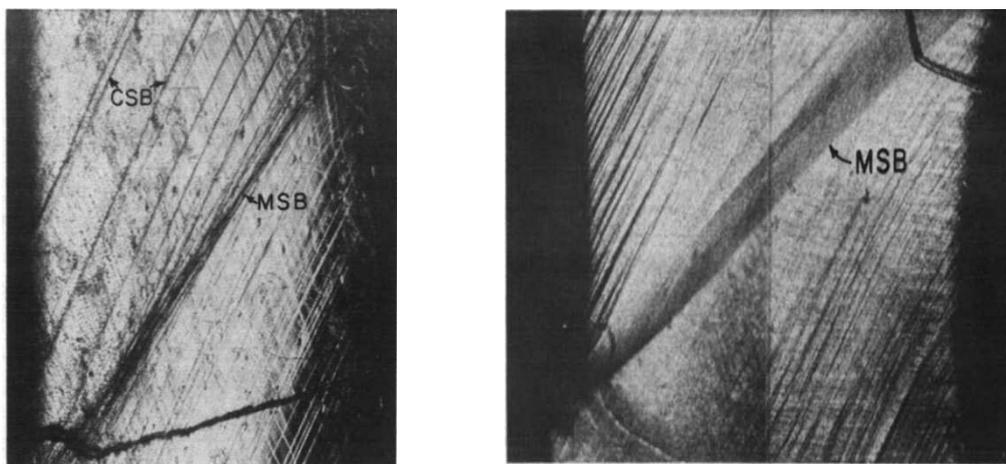


Figure 2 : Micrographies montrant la formation des bandes de glissement grossières (Coarse Slip Bands en anglais) et des bandes de cisaillement macroscopiques (Macroscopic Shear Bands en anglais) dans un monocristal Al-Cu. D'après (Chang & Asaro, 1981).

Dans le cas d'un polycristal, l'orientation plus ou moins aléatoire des nombreux grains qui constituent le matériau, la distribution statistique des divers systèmes de glissement possibles, et leurs activations dans divers endroits d'un monocristal font que les champs de déformation demeurent homogènes jusqu'à un certain niveau de chargement. La perte d'homogénéité des champs de déformation se produit progressivement pour donner lieu à la formation de bande de cisaillement macroscopique qui précède l'apparition de la rupture. (Chang & Asaro, 1981) ont montré sur un monocristal Al-Cu que l'apparition des bandes de cisaillement macroscopiques (MSB, voir Figure 2) est généralement précédée par la formation de bandes

de glissement grossières (CSB, voir Figure 2), elles-mêmes précédées par l'apparition de la striction diffuse. Les bandes de glissement grossières apparaissent alignées par rapport aux systèmes de glissement cristallographiques actifs et ont été observées sur d'autres types de cristaux. La prise en compte de modèles de comportement reposant sur la plasticité cristalline se traduit en partie par la formation de points anguleux (vertex) sur la surface de plasticité. Plusieurs études montrent que la présence de points anguleux sur la surface de charge constitue un effet "déstabilisant" et permet de prédire des points de localisation plus réalistes lorsque ce type de comportement est couplé aux critères de striction localisée basés sur l'analyse de bifurcation (voir par exemple (Asaro & Rice., 1977), (Franz et al., 2009)). Un second aspect lié au comportement, et qui a également une influence sur la prédiction de la striction diffuse et localisée, réside dans le fait de considérer une loi de comportement pour laquelle la normalité de la règle d'écoulement n'est plus vérifiée. Cette situation peut être rencontrée lorsqu'on considère des modèles de plasticité phénoménologiques présentant une dépendance à la pression hydrostatique (e.g. Drucker-Prager, ...etc.), ou encore des modèles de comportement reposant sur la plasticité cristalline avec une légère déviation par rapport à la loi de Schmidt (Rudnicki & Rice, 1975), (Asaro & Rice., 1977), (Rice, 1976).

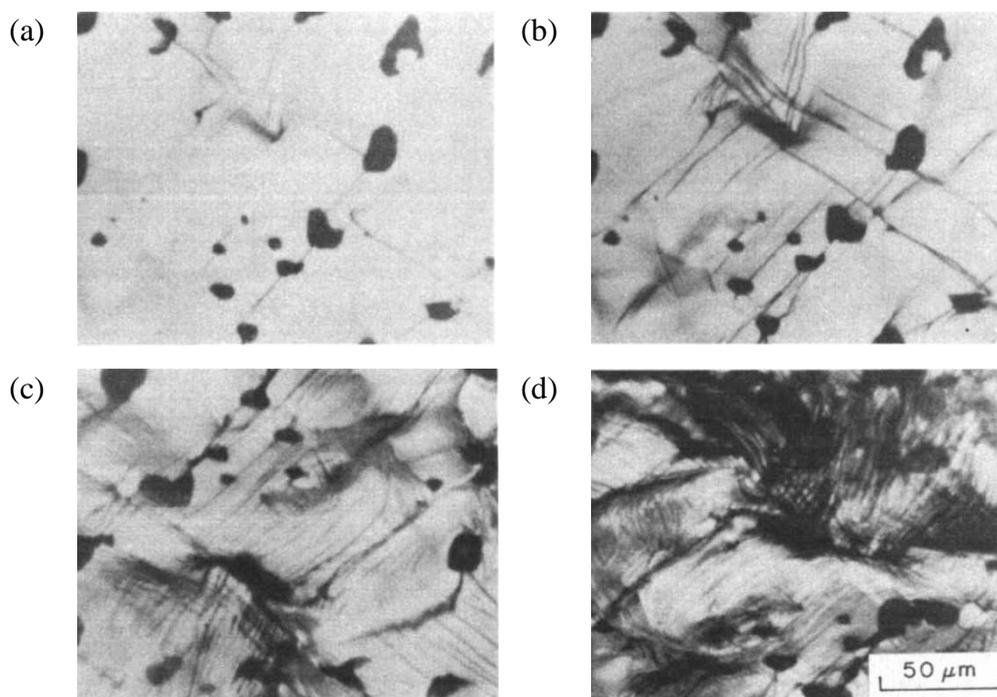


Figure 3 : Formation de bandes de cisaillement grossières sur un acier contenant une porosité initiale de 0,6% lors d'un essai en traction uniaxiale. D'après (Vedula & Heckel, 1981).

Bien que les mécanismes élémentaires qui sont à l'origine de la déformation plastique des métaux se produisent par glissement au sein des grains, la quasi-totalité des matériaux métalliques commercialisés contiennent des impuretés en quantités parfois importantes. Ces impuretés, constituées de précipités, de particules de secondes phases et d'inclusions ont généralement des propriétés mécaniques très différentes de la matrice métallique qui les entoure. Au cours du chargement, des concentrations de contraintes apparaissent autour de ces particules et conduisent à la création de microcavités soit par rupture de particule ou bien par

décohésion de l'interface matrice-particule. Une fois les cavités amorcées, ces dernières tendent à augmenter leur volume pour se rejoindre et former une bande de localisation macroscopique (voir Figure 3). D'un point de vue expérimental, l'évolution de l'endommagement due à la présence d'impuretés dans les matériaux métalliques se traduit par l'apparition d'un régime adoucissant au-delà d'un certain niveau de chargement et se termine par la rupture de l'éprouvette. Par conséquent, ce type de phénomènes constitue un des aspects physiques du comportement qui est à l'origine de l'apparition des bandes de localisation. D'autres propriétés liées à la microstructure peuvent influencer également l'apparition des bandes de localisation, telles que l'anisotropie plastique initiale et induite, la courbure de la surface de plasticité, ...etc.

Un second aspect important lié à la prédiction de la striction diffuse et localisée réside dans le choix des critères d'instabilités locales. Dans les travaux de la littérature ayant trait à la formulation d'indicateurs d'instabilités locales, on retrouve principalement quatre approches distinctes. Ces approches se différencient principalement par leurs fondements théoriques ainsi que par les hypothèses sur lesquelles elles s'appuient.

- La première approche est basée sur le Principe de Force Maximum de (Considère, 1885), dont les premières extensions au cas d'un chargement biaxial ont été proposées dans les travaux de (Swift, 1952), et (Hill, 1952). Le critère de (Swift, 1952) permet de prédire uniquement l'apparition de la striction diffuse et représente par conséquent une borne trop conservatrice pour l'étude de la formabilité des tôles métalliques en général. Concernant le critère du taux d'extension nul de (Hill, 1952), il a été développé spécifiquement pour la prédiction de la striction localisée. Son application se limite toutefois à un intervalle de trajets de chargement restreint. D'autres critères de striction localisée, qui peuvent être vus comme des extensions basées sur l'approche de Force Maximum, ont été proposés plus tard dans les travaux de (Hora et al., 1996), (Mattiasson et al., 2006), (Hora et al., 2013) et sont communément appelés critère de Force Maximum Modifié ou encore, critère de Force Maximum Etendu.
- Afin de répondre à certaines insuffisances associées au critère du taux d'extension nul, (Marciniak & Kuczyński, 1967) ont proposé un critère de striction localisée reposant sur l'introduction d'un défaut initial au sein de la tôle. Ce défaut est constitué d'une bande dont l'épaisseur est légèrement plus faible que le reste de la tôle. Ce critère a été amélioré dans (Hutchinson & Neale, 1978) afin de prendre en compte l'effet de l'orientation initiale du défaut. Cette approche est sans conteste la plus utilisée dans la littérature afin de caractériser la formabilité des tôles métalliques. Les nombreux travaux de la littérature basés sur cette approche montrent en général que la forme de la surface de charge a une influence considérable sur la prédiction des limites de formabilité. La prise en compte de l'anisotropie plastique semble améliorer la prédiction des limites de formabilité lorsqu'on fait appel à ce type d'approche (Barlat, 1987).
- L'analyse de bifurcation représente la troisième approche qui, bien que moins utilisée que la précédente (en particulier dans le domaine de la mise en forme des tôles métalliques), repose sur des fondements théoriques rigoureux. Suite aux travaux de (Thomas, 1962), (Hill, 1962), (Mandel, 1966), (Rice, 1973), un critère permettant de

prédire l'apparition de la striction localisée a été proposé dans (Stören & Rice, 1975) et (Rice, 1976). Une condition de bifurcation sous forme de bandes de localisation a été établie et permet de relier l'apparition de ces bandes à la Perte d'Ellipticité des équations du problème à valeurs aux limites incrémental. Cette approche repose sur des fondements théoriques rigoureux, et n'introduit aucun paramètre utilisateur. Néanmoins, elle nécessite la prise en compte de certains ingrédients associés au comportement du matériau. Ces ingrédients induisent un effet "déstabilisant" et permettent de prédire l'apparition du phénomène de localisation à des niveaux de déformations réalistes.

- Enfin, la dernière approche permettant de prédire l'apparition de la localisation repose sur l'étude de la stabilité des équations d'équilibre locales, communément appelée Analyse de Stabilité par Perturbation Linéaire (A.S.P.L), (voir par exemple (Dudzinski & Molinari, 1991), (Toth et al., 1996)). Rigoureuse d'un point de vue théorique, cette approche est aussi applicable aux solides dont le comportement dépend du temps physique (c.-à-d., pour un comportement élasto-viscoplastique). Notons également que dans la limite d'un comportement élasto-plastique, il a été montré que l'A.S.P.L permet de retrouver le critère de Perte d'Ellipticité (Barbier et al., 1999).

3. Objectifs de la thèse

Nous avons vu précédemment que les mécanismes qui sont à l'origine de la formation des bandes de localisation sont nombreux et variés. Compte tenu des observations expérimentales discutées plus haut, il apparait que le choix du modèle de comportement utilisé, afin de prédire l'apparition des instabilités locales, doit se baser sur des considérations physiques permettant ainsi des prédictions plus réalistes. Dans ce travail, nous ferons le choix de considérer un modèle de comportement reposant sur l'approche de Gurson (Gurson, 1977), mais faisant intervenir la plupart des aspects physiques qui sont soit à l'origine de l'apparition des bandes de localisation (e.g. endommagement, non-normalité de la loi d'écoulement) ou bien qui ont une influence importante sur leur apparition (e.g. anisotropie plastique initiale, écrouissage). Les modèles de comportement basés sur l'approche de Gurson permettent de reproduire un comportement élasto-plastique avec endommagement dû à l'évolution de la fraction volumique des cavités. L'anisotropie plastique initiale du matériau sera considérée en utilisant le critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001), qui constitue une extension du critère de plasticité de Gurson (Gurson, 1977) au cas d'une matrice de comportement anisotrope contenant une cavité sphérique ou cylindrique. Nous verrons également qu'il est possible d'obtenir un effet de non-normalité de la loi d'écoulement moyennant un choix particulier de la loi d'évolution de la fraction volumique des cavités. Le modèle final permettra ainsi de prendre en compte l'endommagement, l'anisotropie plastique initiale, diverses lois d'écrouissage isotrope et enfin la non-normalité de la loi d'écoulement. Concernant les critères d'instabilités locales, notre choix s'est tourné vers les critères de bifurcation, étant donné que ces derniers reposent sur un cadre théorique rigoureux. Les critères de striction diffuse et localisée issus de cette approche permettent également d'établir des bornes inférieures et supérieures à l'apparition du phénomène de striction. Pour cela, différents points ont été abordés dans le cadre de cette thèse afin d'apporter une contribution à la prédiction de la formabilité des tôles métalliques. Ces points sont énumérés ci-dessous :

1. Sélectionner un modèle de comportement élasto-plastique capable de reproduire certains mécanismes élémentaires à l'origine des instabilités plastiques locales (c.-à-d., la striction diffuse et localisée). Le modèle d'endommagement micromécanique basé sur l'approche de Gurson a été adopté dans ce travail. Ce modèle permettra de reproduire l'adoucissement dû à l'évolution de la fraction volumique des cavités au cours du chargement en intégrant différents mécanismes d'endommagement (c.-à-d. germination, croissance et coalescence des cavités). En outre, les différents aspects du comportement liés à l'écroutissage, l'anisotropie plastique initiale ou encore la non-normalité de la loi d'écoulement seront pris en compte afin de proposer un modèle complet permettant d'inclure le plus possible d'ingrédients nécessaires à une prédiction réaliste des instabilités locales. Le modèle de comportement proposé est formulé dans le cadre tridimensionnel en grandes déformations.
2. Formuler les principaux critères de striction diffuse et localisée basés sur l'analyse de bifurcation dans un cadre tridimensionnel en grandes déformations. Certains de ces critères seront également capables de prédire les modes de localisation, c.-à-d. les orientations des bandes pour différents trajets de chargement. En plus, l'existence de certains liens théoriques entre les différentes approches permettant de prédire l'apparition des instabilités locales sera discutée.
3. Mettre en œuvre numériquement l'approche couplant le modèle de comportement aux critères de striction développés. La performance de l'implantation numérique ainsi que des algorithmes d'intégration choisis est analysée. Une attention particulière a été portée à la modularité de l'implantation numérique afin d'inclure facilement l'outil numérique résultant de ce travail de recherche dans divers codes de calcul par éléments finis.
4. Mener une analyse de sensibilité des prédictions de striction diffuse et localisée par rapport aux paramètres du modèle de comportement. Les modèles d'endommagement basés sur l'approche de Gurson s'appuient en partie sur des considérations physiques faisant intervenir des paramètres liés à la microstructure tels que la densité des inclusions ou la porosité initiale. Cette analyse de sensibilité permettra ainsi de mettre en avant les principaux mécanismes qui influent sur la prédiction des instabilités locales (e.g. écroutissage, endommagement, ...etc.).
5. Confronter les résultats numériques obtenus par l'approche proposée (modèle de comportement couplé aux critères de striction) à ceux obtenus à partir d'essais expérimentaux issus de la littérature.
6. Chercher des rapprochements théoriques pouvant exister entre les critères de striction. Ceci se fera dans un premier temps par une formulation unifiée des différentes approches théoriques permettant d'analyser l'apparition des instabilités locales.

4. Organisation du manuscrit

Après avoir défini le contexte de l'étude, les objectifs de la thèse, ainsi que les différentes tâches nécessaires pour mener à terme ces objectifs, on décrit ici l'organisation des différents chapitres de ce mémoire. Le présent manuscrit de thèse s'articule autour des quatre chapitres suivants :

Le premier chapitre de ce manuscrit est divisé en deux parties. La première partie est dédiée à la modélisation de l'endommagement isotrope dans les matériaux ductiles (c.-à-d., en considérant un endommagement dont l'évolution est décrite à partir d'une variable interne

scalaire). Cette partie est entamée par une discussion sur les différents mécanismes physiques qui sont à l'origine de l'apparition et de l'évolution de l'endommagement dans les matériaux métalliques. Les principales approches théoriques permettant de modéliser l'endommagement sont discutées ensuite. Dans la seconde partie de ce chapitre, on présente sous un formalisme unifié les différentes approches analytiques permettant de prédire l'apparition des instabilités locales dans le cadre tridimensionnel en grandes déformations. Les liens et les rapprochements théoriques entre certains critères d'instabilités seront également mis en évidence.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à l'implantation numérique du modèle de comportement que nous avons considéré dans ce travail. On commence par décrire les différentes équations constitutives du modèle de comportement considéré en donnant les différentes lois d'évolution des variables internes. On montrera, entre autres, qu'en fonction du choix du critère d'amorçage par germination, il est possible d'introduire dans le modèle de comportement de Gurson un effet de non-normalité de la loi d'écoulement. Ensuite, les principaux schémas d'intégration utilisés pour l'implantation de la loi de comportement seront décrits ainsi que leur mise en œuvre dans le code de calcul par éléments finis Abaqus/Implicit. Les difficultés rencontrées au niveau de certains schémas d'intégration seront discutées et une analyse de la performance et de la modularité (c.-à-d. l'aptitude d'un schéma d'intégration à prendre en compte d'éventuelles extensions du modèle de comportement) sera effectuée.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à la prédiction des Courbes Limites de Formage (C.L.F) à striction localisée. Les modèles de comportement de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) et de (Benzerga & Besson, 2001) seront couplés au critère de Perte d'Ellipticité dans le but d'étudier la formabilité de certains matériaux métalliques utilisés dans l'industrie. Une analyse de sensibilité des limites de formage par rapport aux paramètres des modèles de comportement présentés dans ce travail sera menée. Notre objectif étant d'analyser et de classer les différents mécanismes physiques les plus influents sur la prédiction de la striction localisée dans le cas d'un comportement basé sur l'approche de Gurson. Une confrontation entre les limites de formabilité obtenues à partir de la modélisation proposée et celles issues de la littérature sera réalisée.

Dans le chapitre 4, on présente les limites de formabilité pour plusieurs matériaux en utilisant différents critères de striction diffuse et localisée formulés dans le premier chapitre. On commence par analyser l'effet de la non-normalité de la loi d'écoulement sur la prédiction de la striction. Dans un second temps, une hiérarchisation théorique des critères de Bifurcation sera établie et permettra d'expliquer les différences observées lorsque la normalité de la loi d'écoulement n'est plus vérifiée. Ensuite, une étude de sensibilité des prédictions de C.L.F à striction diffuse aux paramètres de la loi de comportement sera menée. Cette étude de sensibilité permettra d'analyser l'influence des différents mécanismes physiques liés au comportement du matériau (e.g. endommagement, anisotropie plastique initiale, écrouissage) sur la prédiction de la striction diffuse. Enfin, on se propose d'établir des liens théoriques entre certaines approches permettant de prédire l'apparition de la striction localisée. Les rapprochements théoriques entre le critère de Perte d'Ellipticité et le critère de (Marciniak & Kuczyński, 1967), et qui ont été établis dans les travaux de (Altmeyer, 2011), seront complétés et discutés de manière détaillée.

Chapitre 1 : Endommagement et critères d'instabilités : état de l'art

Sommaire

Partie A :	Endommagement, aspects physiques et modélisations	21
A.1	Introduction.....	21
A.2	Mécanismes d'endommagement dans les matériaux ductiles.....	21
A.3	Modélisation de l'endommagement par des approches phénoménologiques	25
A.4	Modélisation de l'endommagement par des approches micromécaniques	26
A.4.1	Critères d'amorçage des microcavités par germination	27
A.4.2	Modélisation du comportement des matériaux poreux et ductiles	30
A.4.3	Critère de plasticité macroscopique de (Gurson, 1977)	32
A.4.4	Critère de plasticité macroscopique de Gurson-Tvergaard	37
A.4.5	Prise en compte de la coalescence des microcavités	39
A.5	Modélisation des matériaux poreux anisotropes et ductiles.....	41
A.5.1	Critère de plasticité macroscopique de (Liao et al., 1997).....	42
A.5.2	Critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001)	43
A.6	Synthèse	46
Partie B :	Critères de striction diffuse et localisée en transformations finies	49
B.1	Introduction.....	49
B.2	Critères basés sur le Principe de Force Maximum (P.F.M.)	51
B.2.1	Critère de Force Maximum	52
B.2.2	Critère du taux d'extension nul	53
B.2.3	Critère de Force Maximum Modifié	54
B.3	Analyse de Bifurcation.....	57
B.3.1	Bifurcation Générale	59
B.3.2	Bifurcation par Point Limite	61
B.3.3	Perte d'Ellipticité	62
B.3.4	Perte d'Ellipticité Forte	65
B.4	Critère de striction localisée basé sur l'introduction d'un défaut initial (Marciniak-Kuczyński)	65
B.4.1	Implantation du critère de Marciniak-Kuczyński.....	67

B.4.2	Rapprochement théorique entre le critère de Marciniak-Kuczyński et le critère de Perte d'Ellipticité.....	69
B.4.3	Formulation 3D du critère basé sur un défaut initial.....	70
B.5	Analyse de Stabilité par Perturbation Linéaire	73
B.5.1	Relation théorique entre le critère de Stabilité par Perturbation Linéaire et le critère de Perte d'Ellipticité	75
B.6	Synthèse	75

Partie A : Endommagement, aspects physiques et modélisations

A.1 Introduction

L'analyse et la compréhension des mécanismes physiques caractérisant la ductilité et la formabilité des matériaux métalliques représentent un enjeu majeur pour les industriels tant sur le plan économique qu'environnemental. La formabilité des matériaux métalliques est généralement définie comme l'aptitude d'un matériau à subir des déformations irréversibles sans qu'il y ait apparition de défauts que ce soit sous forme d'une fissure macroscopique, ou bien sous forme de striction localisée. Ce dernier phénomène se distingue généralement par la formation de bandes étroites dans lesquelles une forte concentration des champs de déformation apparaît. En ce qui concerne la rupture ductile, il est de nos jours admis que ce phénomène est dû principalement à la présence d'impuretés dans les matériaux métalliques. Au cours du chargement, les matériaux métalliques s'endommagent suivant trois mécanismes différents à savoir : germination, croissance et coalescence des cavités. Les notions de ductilité et de formabilité étant intrinsèques à chaque matériau, il devient intéressant de comprendre et d'analyser les mécanismes fondamentaux qui influencent l'aptitude d'un matériau à subir des déformations irréversibles, sans qu'il y ait apparition de défauts. L'apparition du phénomène de rupture ductile ainsi que la propagation des fissures créées peuvent être décrites à partir d'un modèle de comportement prenant en compte l'endommagement du matériau (Approche locale de la rupture ductile). En revanche, la prédiction des instabilités locales nécessite en plus d'un modèle de comportement adéquat, l'utilisation de critères d'instabilités. De ce fait, il est important de discuter les différentes approches permettant de prédire l'apparition de ces instabilités. L'objectif de cette réflexion est, d'une part, de justifier les choix que nous avons fait dans ce travail, et d'autre part, de mettre en avant d'éventuels liens théoriques entre les différentes approches utilisées dans le domaine de la mise en forme des tôles métalliques.

La première partie de ce chapitre permet de passer en revue les différents mécanismes d'endommagement observés dans les matériaux ductiles au cours de leur sollicitation. Sans être exhaustif, nous donnons une description des principaux mécanismes d'endommagement étudiés dans la littérature ainsi que les principaux facteurs qui sont susceptibles d'influencer l'endommagement. Ensuite, on présente une revue bibliographique des deux principales approches permettant de modéliser le comportement des matériaux métalliques endommageables. Les différents critères d'instabilités utilisés dans le but de prédire le phénomène de striction seront présentés dans la seconde partie de ce chapitre.

A.2 Mécanismes d'endommagement dans les matériaux ductiles

Nous avons évoqué le fait que les matériaux métalliques s'endommagent suivant trois mécanismes différents à savoir : germination, croissance et coalescence des cavités voisines. Bien que la plupart des modèles présents dans la littérature considèrent que ces mécanismes sont successifs, cette hypothèse n'est rigoureusement valable que pour un même site d'endommagement. L'amorçage des microcavités par germination est généralement considéré

comme homogène ou hétérogène, selon la nature du champ de déformation au sein de la matrice (Weck et al., 2008). La germination homogène apparaît dans les grains ou au niveau des joints de grains, et n'est pas nécessairement associée à la présence d'inclusions ou de particules de seconde phase. Elle se produit par fissuration de la matrice et apparaît souvent lors des déformations plastiques importantes (François, 2012).

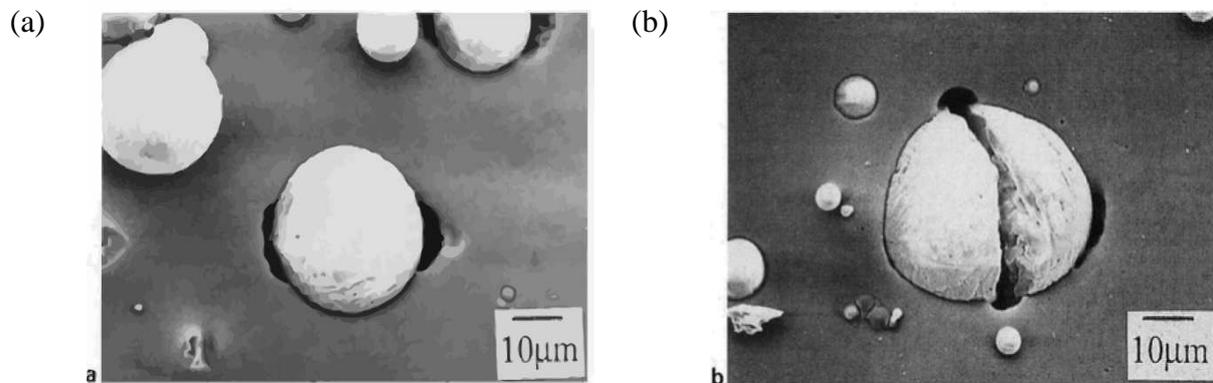


Figure 1.1 : Amorçage d'une microcavité par décohésion partielle de l'interface inclusion-matrice (à gauche) et amorçage en mode mixte (à droite) dans un alliage d'aluminium AA6061. D'après (Kanetake et al., 1995).

La germination hétérogène apparaît généralement lorsque la déformation est inhomogène au sein de la matrice principalement à cause de la présence d'inclusions ou de particules de seconde phase. Bien que la germination homogène ait été observée sur un acier monophasé de haute pureté, notamment dans (Thompson & Williams, 1978), ce mode d'amorçage demeure relativement rare, compte tenu de la présence inévitable d'hétérogénéités, même pour des matériaux très purs (Montheillet & Briotet, 2009), (Landron et al., 2010). Ainsi, la germination hétérogène représente le mode d'amorçage le plus fréquemment rencontré dans les matériaux métalliques industriels. Le comportement d'une inclusion au cours de la déformation plastique, ainsi que son rôle de site éventuel d'amorçage de l'endommagement ont été largement étudiés dans la littérature (Goods & Brown, 1979), (van Stone et al., 1985), (Garrison & Moody, 1987), (Babout et al., 2001), (Weck et al., 2008), (Landron et al., 2010). Il a été montré que le mécanisme d'amorçage des cavités par germination dépend du système matrice-particule considéré. De façon générale, les caractéristiques suivantes peuvent s'avérer influentes (Babout et al., 2001), (Landron et al., 2010) :

1. La forme des inclusions ainsi que leurs fractions volumiques ;
2. L'orientation des inclusions par rapport aux directions principales de chargement ;
3. Les propriétés élastiques du couple matrice-inclusion, c.-à-d., les modules de Young de la matrice E_M et de l'inclusion E_I ainsi que leurs coefficients de Poisson respectifs, ν_M et ν_I ;
4. Les propriétés d'écoulement plastique de la matrice et éventuellement celles de l'inclusion.

Concernant la germination hétérogène, deux principaux modes d'amorçage sont couramment rencontrés dans la littérature, à savoir par décohésion partielle de l'interface inclusion-matrice (voir Figure 1.1.a) et par rupture de particules. D'autres modes de germination ont été mis en évidence dans différents travaux (voir (van Stone et al., 1985), (Garrison & Moody, 1987), (Kanetake et al., 1995)), où l'amorçage se produit soit par décohésion totale de l'interface inclusion-matrice, ou bien par une combinaison des deux modes cités plus haut (c'est à dire décohésion partielle de l'interface inclusion-matrice et rupture de particule, voir Figure 1.1.b). Ce dernier mode est parfois appelé mode d'amorçage mixte, et est souvent rencontré pour des inclusions de forme aplatie (Garrison & Moody, 1987).

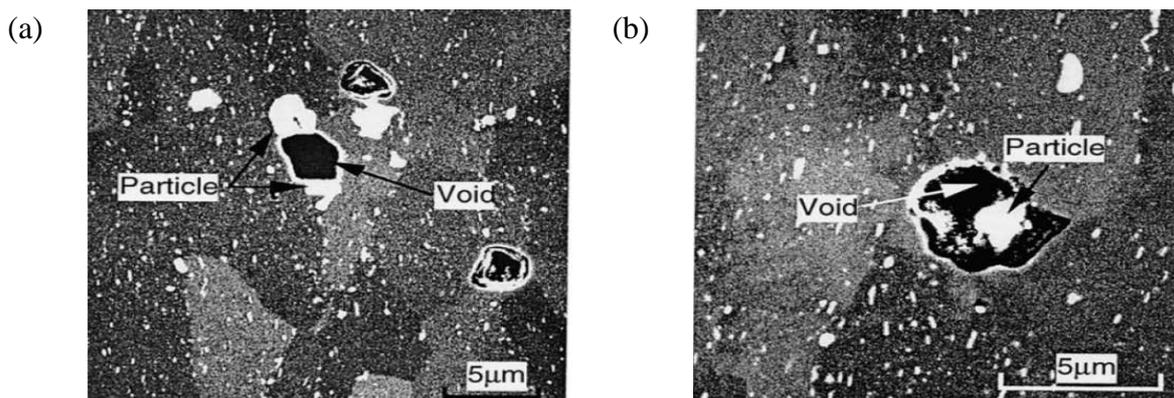


Figure 1.2 : Début de croissance d'une cavité après rupture de la particule (à gauche) et décohésion totale de l'interface inclusion-matrice (à droite) dans un alliage Al-Mg-Mn-Cu. D'après (Bae & Ghosh, 2002).

Une fois les cavités créées, ces dernières se dilatent au cours du chargement jusqu'à atteindre une configuration critique pour finalement se joindre par rupture du ligament qui les sépare, c.-à-d., par mécanisme de coalescence. Pour une décohésion totale de l'interface inclusion-matrice, la croissance de la cavité est considérée comme libre dans la mesure où l'inclusion ne joue aucun rôle sur la dilatation des cavités (voir Figure 1.2.b). En revanche, pour un amorçage par rupture de particule, la présence de l'inclusion peut constituer un obstacle à la dilatation de la cavité (voir Figure 1.2.a). Ainsi, selon le mode d'amorçage, la croissance d'une cavité peut être perturbée ou pas par la présence d'une inclusion. La majeure partie des modèles de croissance présents dans la littérature ne prend pas en compte la présence de l'inclusion, du fait de la complexité théorique que peut engendrer ce type de problèmes. Dans la plupart des cas, les modèles se limitent à l'étude de la croissance d'une cavité entourée d'une matrice dont le comportement est décrit par une surface de plasticité phénoménologique.

Outre le mode d'amorçage, la croissance des cavités dépend de plusieurs autres facteurs à commencer par le type de chargement considéré. Les modèles théoriques proposés dans (McClintock, 1968), (Rice & Tracey, 1969) et (Huang, 1991) prédisent une forte dépendance de la croissance des cavités par rapport à la triaxialité des contraintes. Par conséquent, ces modèles mettent en avant l'importance de la pression hydrostatique sur le taux de croissance. Les études expérimentales réalisées notamment dans (Marini et al., 1985), (Pardoën &

Delannay, 1998) confirment l'importance du taux de triaxialité sur le mécanisme de croissance.

Le mécanisme de coalescence correspond à une localisation des champs de déformations à l'échelle microscopique. Cette localisation apparaît généralement au niveau du ligament qui relie deux ou plusieurs cavités et se termine par une jonction de celles-ci une fois le ligament complètement rompu. Puisque la coalescence correspond à une instabilité plastique, ce mécanisme d'endommagement demeure complexe à étudier. Des efforts considérables ont été déployés ces quinze dernières années afin d'approfondir la compréhension de ce mécanisme d'endommagement, tant sur le plan théorique (Leblond & Perrin, 1999), (Gologanu et al., 2001), (Benzerga, 2002), (Tekoglu et al., 2012), numérique (Koplik & Needleman, 1988), (Benzerga et al., 1999), (Gao & Kim, 2006), ou alors expérimental (Faleskog & Shih, 1997), (Benzerga et al., 2004), (Weck et al., 2008). Les premières études expérimentales, réalisées notamment dans (Cox & Low, 1974), sont principalement limitées à des observations qualitatives sans donner d'explications détaillées sur comment et quand se produit ce phénomène et que se passe-t-il après (Benzerga, 2002), (Benzerga et al., 2004). La compréhension de la coalescence, du point de vue expérimental, est difficile à cause de la nature instantanée de ce phénomène. Par ailleurs, la déformation plastique durant le régime de coalescence est considérée faible comparée à la déformation plastique totale (Benzerga, 2002), ce qui a amené beaucoup de spécialistes à considérer la coalescence comme une phase de croissance accélérée (Tvergaard & Needleman, 1984), (Needleman & Tvergaard, 1992).

Différents modes de coalescence ont été mis en évidence, et une analyse détaillée de ce mécanisme d'endommagement peut être trouvée dans (Benzerga et al., 2004). Les études expérimentales présentes dans la littérature montrent que la coalescence se produit suivant trois différents modes à savoir, par **striction interne du ligament** (Figure 1.3.a), par formation d'une **bande cisailée inclinée** (voir Figure 1.3.b) et enfin par l'apparition d'une colonne ruinée (**coalescence en chapelet** voir Figure 1.3.b).

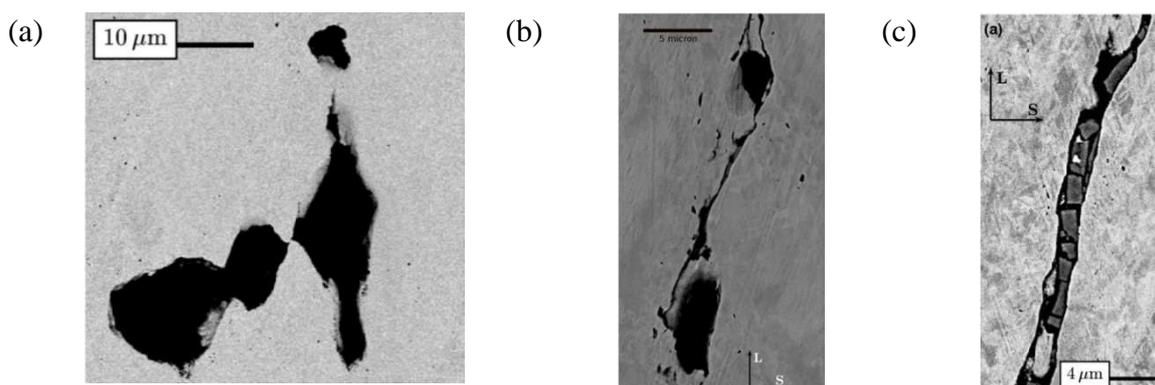


Figure 1.3 : Coalescence par striction interne du ligament (à gauche), en bande cisailée inclinée (au milieu) et en chapelet (à droite). D'après (Benzerga et al., 2004).

A.3 Modélisation de l'endommagement par des approches phénoménologiques

Les concepts de base sur lesquels repose la mécanique de l'endommagement continu (Continuum Damage Mechanics) ont été initiés par (Kachanov, 1958) puis (Rabotnov, 1968) afin d'étudier le fluage tertiaire. L'idée de départ consiste à introduire une variable d'état représentant la densité des défauts constitués de cavités et de microfissures. Cette variable d'état est couplée au comportement élasto-plastique du matériau à travers la notion de variable effective (Lemaitre & Chaboche, 1990). Dans cette approche, l'endommagement peut être introduit soit, par l'intermédiaire d'une variable scalaire ω , (Lemaitre, 1970), (Benallal et al., 1991), (Lemaitre, 1996), ou bien par l'intermédiaire d'un tenseur d'ordre deux $\underline{\omega}$ (Cordebois & Sidoroff, 1982), (Murakami, 1983), (Voyiadjis & Kattan, 1999), ou encore à partir d'un tenseur d'ordre quatre $\underline{\underline{\omega}}$ (Chaboche, 1981), (Hammi et al., 2004). Seuls les deux derniers cas permettent de rendre compte convenablement de l'anisotropie de l'endommagement. Dans le reste de cette section, nous considérons le cas de l'endommagement isotrope, en négligeant les effets thermiques. L'aire effective d'une section appartenant au Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R) endommagé, orientée d'une normale $\underline{\mathbf{n}}$ est définie par :

$$\tilde{A} = A - A_D \quad (1.1)$$

où A représente l'aire totale de la section considérée, et A_D l'aire des défauts. Par définition, la variable d'endommagement ω est donnée par :

$$\omega = A_D / A \Rightarrow \tilde{A} = A(1 - \omega) \quad (1.2)$$

En supposant que le V.E.R est soumis à un chargement uniaxial, la contrainte effective $\tilde{\Sigma}$ (c.-à-d. la contrainte appliquée au V.E.R endommagé) s'écrit en vertu de la relation (1.2) sous la forme :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{A}{\tilde{A}} \Sigma = \frac{\Sigma}{(1 - \omega)} \quad (1.3)$$

où Σ représente la composante du tenseur de contrainte de Cauchy suivant la direction de chargement au sein du V.E.R vierge. Pour un chargement tridimensionnel, et sous l'hypothèse d'une équivalence en déformation, il est possible de généraliser la relation précédente sous la forme :

$$\tilde{\underline{\underline{\Sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (1.4)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ représente un opérateur caractérisant l'effet de l'endommagement donné par :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{e-1} \quad (1.5)$$

En mécanique de l'endommagement continu, le critère de plasticité peut être obtenu en remplaçant le tenseur de contrainte de Cauchy par le tenseur de contrainte effective (Lemaitre & Chaboche, 1990), (Benallal et al., 1991), (Lemaitre, 1996). Ainsi, le critère de plasticité quadratique de (Hill, 1948) se réécrit sous la forme :

$$\mathcal{F}_H = \left((\tilde{\underline{\underline{\Sigma}}} - \underline{\underline{\mathbf{X}}}) : \underline{\underline{\mathbf{H}}} : (\tilde{\underline{\underline{\Sigma}}} - \underline{\underline{\mathbf{X}}}) \right)^{1/2} - \mathcal{Y}_0 - R \quad (1.6)$$

où $\tilde{\Sigma}'$ représente le déviateur du tenseur de contrainte effective, et $\tilde{\mathbf{H}}$ un opérateur contenant les six paramètres du critère de plasticité quadratique de (Hill, 1948). $\underline{\mathbf{X}}$ et \mathcal{Y}_0 désignent, respectivement, la contrainte de rappel et la limite d'écoulement initiale et R est une mesure de l'écrouissage isotrope. À noter qu'il est toujours possible d'introduire l'effet de l'endommagement au sein des variables d'écrouissage en remplaçant $\underline{\mathbf{X}}$ et R , respectivement, par les variables d'écrouissage effectives $\tilde{\underline{\mathbf{X}}}$ et \tilde{R} dans la relation (1.6) (Besson et al., 2009). Afin de déterminer l'expression des forces thermodynamiques associées aux variables d'état, on postule l'existence d'un potentiel d'état scalaire et convexe, que l'on suppose égal à l'énergie libre de Helmholtz. Pour un endommagement isotrope et en négligeant les effets thermiques, le potentiel d'état est donné par (Lemaitre, 1996) :

$$\rho \Phi = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}}^e : \tilde{\underline{\mathbf{C}}}^e : \underline{\mathbf{E}}^e + \rho \psi_r(r) + \rho \psi_\alpha(\alpha) \quad (1.7)$$

où r et α représentent, respectivement, les variables internes associées aux variables de l'écrouissage isotrope R et de l'écrouissage cinématique $\underline{\mathbf{X}}$. Les termes $\rho \psi_r(r)$ et $\rho \psi_\alpha(\alpha)$ dépendent respectivement de la loi d'évolution des variables R et $\underline{\mathbf{X}}$. Les lois d'évolution des variables internes ainsi que des variables associées sont obtenues à partir de l'expression du potentiel d'état. Outre le modèle de Lemaitre, le modèle d'endommagement de (Rousselier, 1987) est lui aussi basé sur une approche phénoménologique et est écrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Ce modèle a été utilisé principalement pour des applications liées à la rupture ductile des matériaux métalliques (Besson et al., 2001), (Besson et al., 2003). En outre, ce modèle possède une certaine ressemblance avec le modèle de Gurson dans la mesure où il fait intervenir la contrainte hydrostatique au sein du critère de plasticité. En effet, contrairement à l'approche de Lemaitre, le modèle de Rousselier fait intervenir dans le critère de plasticité la contrainte équivalente au sens de von Mises, la contrainte moyenne et la fraction volumique de cavités. Cette dernière est introduite comme une variable d'état au sein du critère de plasticité qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F}_R(\underline{\Sigma}, R, f) = \frac{\Sigma_{eq}}{(1-f)} + \sigma_1 D f \exp\left(\frac{\underline{\Sigma} : \underline{\mathbf{1}}}{(1-f)\sigma_1}\right) - \mathcal{Y} \quad (1.8)$$

où σ_1 et D représentent les paramètres du modèle d'endommagement et peuvent être identifiés à partir d'essais expérimentaux. La loi d'évolution de f peut être décomposée en une partie liée à la germination des cavités et une autre partie liée à la croissance des cavités, conformément à l'approche utilisée pour le modèle de Gurson-Tvergaard (Besson et al., 2003).

A.4 Modélisation de l'endommagement par des approches micromécaniques

Les modèles présentés dans les prochaines sections sont basés sur une approche micromécanique et font appel à deux échelles, c.-à-d. échelles microscopique et macroscopique. Dans le reste de la présentation, on considère que l'échelle microscopique correspond à l'échelle des défauts (cavités et inclusions) alors que l'échelle macroscopique correspond à celle de la structure. L'échelle microscopique est caractérisée par le tenseur de

contrainte de Cauchy $\underline{\sigma}$ et le tenseur de déformation Eulérien $\underline{\epsilon}$ (ou dans le cas où l'on considère une approche incrémentale, le tenseur taux de déformation Eulérien \underline{d}). En ce qui concerne l'échelle macroscopique, les variables d'état caractérisant cette échelle seront notées $\underline{\Sigma}$ pour le tenseur de contrainte de Cauchy, et \underline{E} pour le tenseur de déformation Eulérien. Nous donnerons les définitions nécessaires à la compréhension des modèles discutés au fur et à mesure de la présentation.

On commence par rappeler certains critères d'amorçage permettant de prédire la naissance d'une cavité par germination. Ces critères nous permettront en particulier de donner une loi d'évolution du taux de porosité due à la germination des microcavités conformément aux travaux de (Chu & Needleman, 1980), (Tvergaard & Needleman, 1984), (Tvergaard, 1990). Par conséquent, seuls certains critères utilisés dans les modèles d'endommagement basés sur l'approche de (Gurson, 1977) seront discutés dans la prochaine section.

Nous passerons ensuite à la description du comportement macroscopique des matériaux poreux et ductiles. Une attention particulière sera portée au modèle développé initialement par (Gurson, 1977) ainsi que certaines extensions apportées à ce modèle afin de prendre en compte davantage de mécanismes d'endommagement (ex. interaction entre les cavités, coalescence des cavités, ... etc.). Cette première partie se termine par une présentation de certaines extensions apportées au critère de Gurson afin de prendre en compte l'anisotropie plastique de la matrice.

A.4.1 Critères d'amorçage des microcavités par germination

On entend par critères d'amorçage, des critères basés sur des approches analytiques ou semi-empiriques permettant de prédire la naissance d'une microcavité par germination. Les critères disponibles dans la littérature découlent de deux approches distinctes, à savoir, la théorie des dislocations (Argon et al., 1975), (Goods & Brown, 1979), (Garrison & Moody, 1987) et la mécanique des milieux continus (Argon et al., 1975), (Beremin, 1981), (Gilormini & Montheillet, 1986), (Shabrov et al., 2004). Il est communément admis que le domaine d'application des critères basés sur les deux théories dépend sensiblement de l'échelle étudiée. En effet, les études expérimentales réalisées dans différents travaux (voir e.g. (Beremin, 1981), (Garrison & Moody, 1987), (Babout et al., 2004)), s'accordent sur le fait que les critères reposant sur la théorie des dislocations sont applicables dans le cas de particules de petites tailles ($d < 1 \mu m$ où d représente le diamètre des particules) alors que pour des particules de grandes tailles, les critères basés sur la Mécanique des Milieux Continus (M.M.C.) sont préférables. Concernant les approches reposant sur la M.M.C., la prédiction de l'amorçage revient à déterminer une condition de rupture (c.-à-d. rupture de l'inclusion ou de l'interface inclusion-matrice). Cette condition de rupture est obtenue en considérant soit un critère énergétique, ou bien, un critère basé sur une contrainte critique (Garrison & Moody, 1987), (Montheillet & Briotet, 2009).

Les critères basés sur une condition énergétique supposent qu'à l'instant d'apparition d'une microcavité, l'énergie de déformation E^d libérée lors de la relaxation des contraintes doit être égale à l'énergie de cohésion des surfaces libres créées E^r . Cette condition s'écrit sous la forme (Goods & Brown, 1979), (Garrison & Moody, 1987) :

$$E^d = E^\gamma \Leftrightarrow \alpha^N V_I \cdot g(\varepsilon_{eq}^p) = \beta^N S_I \gamma \quad (1.9)$$

où V_I représente le volume de l'inclusion et $g(\varepsilon_{eq}^p)$ une fonction scalaire qui dépend de la déformation plastique équivalente microscopique. γ désigne l'énergie superficielle de la cavité amorcée et S_I la surface de l'inclusion. Enfin, α^N et β^N représentent des constantes qui dépendent des modules de Young et des coefficients de Poisson du couple inclusion-matrice. À partir de la relation (1.9), il est possible de déterminer l'expression de la déformation plastique équivalente microscopique pour laquelle une cavité s'amorce tel que :

$$\varepsilon_{eq}^p = g^{-1}(\gamma \beta^N S_I / \alpha^N V_I) \quad (1.10)$$

Les critères basés sur la condition de contrainte critique supposent que l'amorçage apparaît lorsque la contrainte à l'intérieur de l'inclusion (ou au niveau de l'interface inclusion-matrice) est égale à la contrainte de rupture de l'inclusion (ou de l'interface inclusion-matrice). Le critère proposé par (Argon et al., 1975) est obtenu en considérant une inclusion de forme cylindrique ou sphérique possédant un comportement élastique, entourée d'une matrice infinie de comportement élasto-plastique, soumise à un chargement axisymétrique. Le comportement élasto-plastique de la matrice est encadré par deux cas extrêmes à savoir, plasticité parfaite et élasticité linéaire. La condition d'amorçage d'une microcavité par décohésion de l'interface ou rupture de l'inclusion s'écrit sous la forme (Argon et al., 1975) :

$$\sigma^c = \kappa^A \Sigma_{eq} + \Sigma_m \quad (1.11)$$

où σ^c est une constante du matériau, égale au minimum entre la contrainte de fragmentation de l'inclusion et la contrainte de décohésion de l'interface inclusion-matrice en traction uniaxiale. Σ_{eq} et Σ_m désignent, respectivement, les contraintes macroscopiques équivalente et moyenne et κ^A est un facteur d'intensité de contrainte. Ce dernier a été introduit afin de prendre en compte la forme des particules, c.-à-d. $\kappa^A = 1,77$ pour une inclusion de forme sphérique, et $\kappa^A = 1$ pour une inclusion cylindrique. Un autre critère a été développé dans (Beremin, 1981) à partir des travaux de (Berveiller & Zaoui, 1979) qui ont généralisé la solution d'Eshelby au comportement élasto-plastique. Ce critère est obtenu en considérant une inclusion en forme d'ellipsoïde de révolution, de comportement élastique, entourée d'une matrice élasto-plastique infinie, soumise à un chargement axisymétrique monotone. Comme dans la plupart des critères basés sur des approches purement analytiques, le champ de contrainte à l'intérieur de l'inclusion est supposé homogène. Pour un comportement isotrope de l'inclusion et de la matrice, et en considérant un chargement extérieur monotone, la solution du problème inhomogène d'Eshelby aboutit à la loi d'interaction suivante (Berveiller & Zaoui, 1979) :

$$\dot{\mathbf{\sigma}}^i = \dot{\mathbf{\Sigma}} + 2\mu^p \left(\mathbf{\underline{\underline{S}}}^{-1} - \mathbf{\underline{\underline{1}}} \right) : (\mathbf{\underline{\underline{D}}}^p - \mathbf{\underline{\underline{d}}}^p) \quad (1.12)$$

où $\dot{\mathbf{\Sigma}}$ et $\mathbf{\underline{\underline{D}}}^p$ désignent, respectivement, les tenseurs taux de contrainte et taux de déformation plastique macroscopiques ; $\mathbf{\underline{\underline{d}}}^p$ et $\dot{\mathbf{\sigma}}^i$ désignent, respectivement, les tenseurs taux de déformation plastique et taux de contrainte microscopiques (c.-à-d., à l'intérieur et au

voisinage de l'inclusion). Enfin, μ^p et $\underline{\underline{S}}$ représentent, respectivement, le module de cisaillement équivalent et le tenseur d'Eshelby (voir (Berveiller & Zaoui, 1979), (Beremin, 1981)). En supposant que l'inclusion se déforme élastiquement, la relation précédente nous donne :

$$\underline{\underline{\sigma}}^i = \underline{\underline{\Sigma}} + 2\mu^p (\underline{\underline{S}}^{-1} - \underline{\underline{1}}) : \underline{\underline{D}}^p \quad (1.13)$$

À partir de la relation (1.13), (Beremin, 1981) a montré que l'expression de la contrainte principale maximale à l'intérieur de l'inclusion s'écrit sous la forme :

$$\sigma_1^i = \kappa^B(\lambda) S^p E_{eq} + \frac{2}{3} \Sigma_{eq} + \Sigma_m \quad (1.14)$$

où S^p désigne le module sécant (Berveiller & Zaoui, 1979), égal au module tangent dans le cas d'un écrouissage linéaire, et $\kappa^B(\lambda)$ une fonction scalaire qui dépend de la forme de l'inclusion tel que :

$$\begin{cases} \kappa^B(\lambda) = 1 & \text{inclusion sphérique} \\ \kappa^B(\lambda) = \frac{2}{9} \left(-1 + \left(1 + 2\lambda^2 / 2 \ln(2\lambda - 1) - 1 \right) \right) & \text{ellipsoïde allongé } \lambda > 1 \\ \kappa^B(\lambda) = \frac{2}{3} \left(-1 + (4\lambda/3\pi) \right) & \text{ellipsoïde aplati } \lambda < 1 \end{cases} \quad (1.15)$$

avec λ le rapport de forme, égal au rapport entre la longueur de l'inclusion et son diamètre. Si l'on considère que le comportement de la matrice est décrit par une loi d'écrouissage linéaire, la relation (1.14) se réécrit sous la forme (Beremin, 1981) :

$$\sigma_1^i = \Sigma_m + \left(\frac{2}{3} + \kappa^B(\lambda) \right) \Sigma_{eq} \quad (1.16)$$

La relation (1.16) indique que l'amorçage se produit lorsque $\sigma_1^i = \sigma^c$. À noter que, pour une inclusion de forme sphérique et compte tenu de la relation (1.15), il est possible de retrouver à partir de la relation (1.16) une expression presque identique à la relation (1.11). Toutefois, contrairement au critère proposé par (Argon et al., 1975) qui découle d'une approche semi-empirique, le critère donné par la relation (1.16) repose sur une approche purement analytique.

Les critères basés sur une condition énergétique font apparaître un effet de taille (voir la relation (1.10)) qui n'est pas présent dans les approches basées sur une contrainte critique (voir les relations (1.11) et (1.16)). Ainsi, pour des inclusions dont le rayon moyen est relativement faible (c.-à-d., $1\mu m < d < 10\mu m$), l'amorçage des microcavités sera énergétiquement favorable (Garrison & Moody, 1987), (Montheillet & Briotet, 2009). Par ailleurs, les critères basés sur une contrainte critique font intervenir l'effet de la pression hydrostatique contrairement aux critères obtenus par une approche énergétique. Ainsi, les critères basés sur une contrainte critique prédisent que l'amorçage de l'endommagement est favorisé par une augmentation de la pression hydrostatique.

Dans le reste de cette première partie, on néglige la présence des inclusions et seule la présence des cavités sera considérée. Il s'agit en particulier de décrire le comportement macroscopique des matériaux poreux ductiles dont la matrice contient uniquement des cavités. Nous verrons au deuxième chapitre comment il est possible de prendre en compte la présence des inclusions dans le comportement à partir d'une loi d'évolution du taux de porosité due à la germination des cavités moyennant certaines hypothèses additionnelles.

A.4.2 Modélisation du comportement des matériaux poreux et ductiles

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la modélisation du comportement des matériaux ductiles et poreux dans le but de prédire leur comportement macroscopique. On considère un V.E.R de volume total Ω constitué d'une matrice métallique incompressible, entourant des cavités de sorte que ces dernières ne débouchent pas sur la surface externe $\partial\Omega$. Ce V.E.R est censé représenter un matériau composite contenant deux phases à savoir, les vides qui occupent le volume Ω_C et la matrice métallique entourant ces vides qui occupe le volume Ω_M . Nous tenterons dans cette section de présenter certains outils de la théorie de l'homogénéisation en nous inspirant des travaux de (Benzerga & Besson, 2001), (Benzerga & Leblond, 2010). Ces outils seront utilisés pour la détermination d'un critère de plasticité macroscopique permettant de décrire le comportement du matériau composite considéré, suivant l'approche de (Gurson, 1977). On définit le tenseur de contrainte macroscopique de Cauchy par la relation :

$$\underline{\Sigma} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) d\Omega \equiv \langle \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega} \quad (1.17)$$

où $\underline{\sigma}$ désigne le tenseur de contrainte de Cauchy microscopique, $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$ l'opérateur moyenne sur le volume Ω et $\bar{\mathbf{x}}$ le vecteur position. Étant donné que $\Omega = \Omega_M \cup \Omega_C$ et puisqu'on suppose que les cavités ne sont pas chargées, c.-à-d. $\underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_C$, la relation précédente peut se réécrire sous la forme :

$$\underline{\Sigma} = (1-f) \langle \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} \quad (1.18)$$

où $f = \Omega_C/\Omega$ désigne la fraction volumique de vides. On définit d'autre part le tenseur taux de déformation Eulérien macroscopique par la relation :

$$\underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) d\Omega \equiv \langle \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega} \quad (1.19)$$

Théorème : Soit $\underline{\sigma}$ un champ de tenseurs symétrique dans Ω qui vérifie $\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}, \forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega$. Si on suppose que le V.E.R considéré plus haut est soumis à des conditions de contrainte homogène au bord, c'est à dire $\underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\Sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}), \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$ où $\underline{\Sigma}$ représente un tenseur symétrique et constant indépendant de $\bar{\mathbf{x}}$, alors on a :

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega} = (1-f) \langle \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} \quad (1.20)$$

Théorème : Supposons que le V.E.R considéré plus haut est soumis à des conditions de taux de déformation homogène au contour, c'est à dire $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{x}}, \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$, où $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})$ est un champ de vecteurs défini dans Ω et $\underline{\mathbf{D}}$ un tenseur symétrique et constant indépendant de $\bar{\mathbf{x}}$. Dans ce cas on a :

$$\underline{\mathbf{D}} = \langle \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega} \quad (1.21)$$

Ainsi pour des conditions de contrainte homogène au contour, les relations (1.17) et (1.18) possèdent le statut de théorème et non pas celui d'une définition. En revanche, pour des conditions de taux de déformation homogène au contour, c'est la relation (1.19) qui possède le statut de théorème. Les conditions de contrainte ou de taux de déformation homogène au contour assurent également que le taux du travail des efforts macroscopiques est égal à la moyenne du taux du travail des efforts microscopiques. Ce résultat est exprimé par le lemme de Hill-Mandel.

Lemme de Hill-Mandel : Soit Ω un domaine suffisamment régulier, $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ un champ de tenseurs vérifiant $\bar{\mathbf{V}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}, \forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega$ et $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})$ un champ de vecteurs défini dans Ω . Soient $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$ et $\underline{\mathbf{D}}$ les tenseurs de contrainte et de taux de déformation macroscopiques associés.

- Pour des conditions de contrainte homogène au contour, c'est-à-dire lorsque $\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}), \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$ où $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$ est un tenseur symétrique et constant, indépendant du vecteur position, on a :

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})) d\Omega = (1-f) \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} \quad (1.22)$$

- Pour des conditions de taux de déformation homogène au contour, c'est-à-dire lorsque $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{x}}, \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$ où $\underline{\mathbf{D}}$ est un tenseur symétrique et constant, on a :

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})) d\Omega = (1-f) \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} \quad (1.23)$$

La preuve des deux théorèmes précédents ainsi que du Lemme de Hill-Mandel est donnée en annexe A1. Dans le cas d'un comportement rigide-plastique de la matrice, la dissipation plastique microscopique associée au tenseur taux de déformation $\underline{\mathbf{d}}$ que l'on suppose symétrique et déviatorique est définie par (Benzerga & Leblond, 2010) :

$$\varpi(\underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})) = \sup_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^* \in \mathcal{C}} (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^* : \underline{\mathbf{d}}) \quad (1.24)$$

où \mathcal{C} représente le convexe d'élasticité. L'utilisation du Lemme de Hill-Mandel combiné à la relation (1.24) permet d'écrire :

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \underline{\mathbf{D}} = (1-f) \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} \leq (1-f) \langle \varpi(\underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})) \rangle_{\Omega_M} \quad (1.25)$$

On a alors :

$$\forall \underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\mathbf{D}} \quad \underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \underline{\mathbf{D}} \leq \inf_{\underline{\mathbf{d}} \in \mathcal{K}(\underline{\mathbf{D}})} \langle \varpi(\underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})) \rangle_{\Omega} := \Pi(\underline{\mathbf{D}}) \quad (1.26)$$

où $\Pi(\mathbf{D})$ est appelé potentiel plastique macroscopique et $\mathcal{K}(\mathbf{D})$ représente l'espace des champs de vitesse cinématiquement admissible et vérifiant des conditions de taux de déformation homogène au contour tel que :

$$\mathcal{K}(\mathbf{D}) = \left\{ \underline{\mathbf{d}} \mid \exists \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{d}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\mathbf{v}} + \nabla' \underline{\mathbf{v}}), \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \text{ et } \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{D} \cdot \underline{\mathbf{x}}, \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \right\} \quad (1.27)$$

La théorie de l'analyse limite indique que la surface de plasticité peut être obtenue à partir de la relation paramétrique suivante (Benzerga & Leblond, 2010) :

$$\underline{\Sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}) \quad (1.28)$$

A.4.3 Critère de plasticité macroscopique de (Gurson, 1977)

Le modèle qui découle du critère de plasticité macroscopique de (Gurson, 1977) traduit le comportement homogénéisé pour une classe de matériaux ductiles poreux. Ce modèle est construit à partir de l'analyse limite d'un V.E.R constitué d'une cavité sphérique ou cylindrique entourée d'une matrice incompressible (voir Figure 1.4). Le comportement de la matrice est considéré rigide parfaitement plastique, décrit par une surface de plasticité de von Mises. Le critère de plasticité macroscopique obtenu par (Gurson, 1977) fait intervenir les deux premiers invariants du tenseur de contrainte de Cauchy à savoir, la contrainte équivalente (au sens de von Mises) et la contrainte moyenne, ainsi que la fraction volumique de vide. Bien que dans les travaux originaux de (Gurson, 1977) la matrice est considérée soumise à un chargement axisymétrique, (Leblond et al., 1995) ont montré que l'analyse de (Gurson, 1977) reste valable pour un chargement arbitraire. D'une manière générale, la détermination d'un critère de plasticité macroscopique suivant l'approche de (Gurson, 1977) se fait en deux étapes successives à savoir :

- Proposer une famille de champs de vitesse compatibles avec les conditions aux limites considérées dans la section précédente (c.-à-d. contrainte ou taux de déformation homogène au contour).
- Minimiser la dissipation plastique obtenue à partir de la famille de champs de vitesse proposée.

Nous avons vu dans la section précédente que le Lemme de Hill-Mandel permet d'obtenir l'expression de la dissipation plastique macroscopique à partir de la dissipation plastique microscopique en imposant des conditions aux limites adéquates. Dans l'approche de (Gurson, 1977), l'auteur considère que les deux V.E.R étudiés (voir Figure 1.4) sont soumis à des conditions de taux de déformations homogènes aux bords. Dans ce cas, l'expression du champ de vitesse prend la forme générale suivante :

$$\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{D} \cdot \underline{\mathbf{x}}, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \quad (1.29)$$

où Ω désigne le volume total du V.E.R considéré (matrice et cavité) et \mathbf{D} le tenseur taux de déformation macroscopique, constant et indépendant du vecteur position $\underline{\mathbf{x}}$.

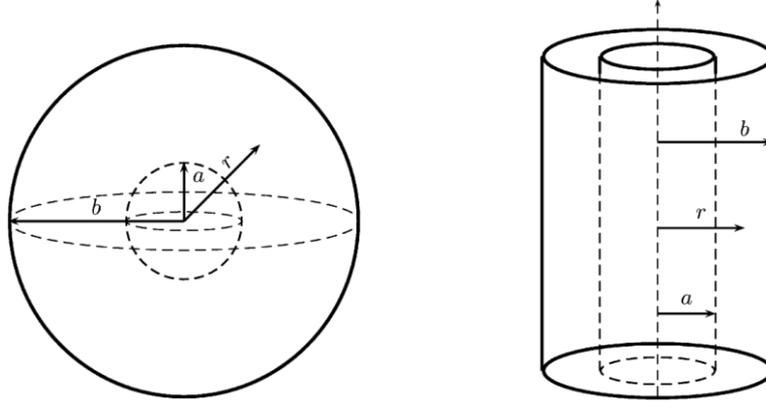


Figure 1.4 : Volumes Elémentaires Représentatifs considérés par (Gurson, 1977).

L'expression du champ de vitesse retenu par (Gurson, 1977) s'écrit sous la forme :

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}^{(A)}(\vec{x}) + \vec{v}^{(B)}(\vec{x}) = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r + \mathfrak{B} \cdot \vec{x} \quad (1.30)$$

où α représente une constante, $r = \|\vec{x}\|$ désigne le module du vecteur position et \mathfrak{B} un tenseur d'ordre deux constant, symétrique et déviateur. À noter que le champ de vitesse donné par la relation (1.30) est identique à celui proposé initialement par (Rice & Tracey, 1969). Ainsi, $\vec{v}^{(A)}(\vec{x})$ correspond à un champ radial incompressible décrivant l'expansion de la cavité et du volume extérieur alors que $\vec{v}^{(B)}(\vec{x})$ correspond à un champ uniforme déviateur décrivant le changement de forme de la cavité et du volume extérieur. Dans le reste de la présentation, on s'intéressera uniquement au V.E.R contenant une cavité sphérique. Etant donné que le V.E.R est considéré soumis à des conditions de taux de déformation homogène au contour, on a forcément :

$$\vec{v}(\vec{x} = b\vec{e}_r) = \left(\left(\frac{\alpha}{b^3} \right) \mathbf{1} + \mathfrak{B} \right) \cdot \vec{x} = \mathfrak{D} \cdot \vec{x} \quad (1.31)$$

ce qui permet de déduire que : $\alpha/b^3 = D_m$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}'$. Pour une matrice de comportement rigide parfaitement plastique, la dissipation plastique microscopique donnée par la relation (1.24) s'écrit sous la forme :

$$\varpi(\mathfrak{d}(\vec{x})) = \sigma_0 d_{eq}(\vec{x}) \quad (1.32)$$

où :

$$d_{eq} = \left(\frac{2}{3} \mathfrak{d}(\vec{x}) : \mathfrak{d}(\vec{x}) \right)^{1/2} \quad (1.33)$$

désigne le taux de déformation plastique équivalente microscopique et σ_0 la limite d'écoulement plastique de la matrice entourant la cavité. Étant donné que $\mathfrak{d}(\vec{x}) = (\nabla \vec{v}(\vec{x}) + \nabla' \vec{v}(\vec{x}))/2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}^{(A)}(\vec{x}) &= \frac{\alpha}{r^3} (-2\vec{e}_r \otimes \vec{e}_r + \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta + \vec{e}_\varphi \otimes \vec{e}_\varphi) \\ \mathfrak{d}^{(B)}(\vec{x}) &= \mathfrak{B} \end{aligned} \quad (1.34)$$

D'autre part, en vertu de la relation (1.33), on peut écrire que :

$$\begin{aligned} d_{eq}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) &= 2D_m (b/r)^3 \\ d_{eq}^{(B)}(\bar{\mathbf{x}}) &= D_{eq} \end{aligned} \quad (1.35)$$

En injectant les relations (1.31), (1.34) et (1.35) dans la relation (1.32), on obtient l'expression de la dissipation plastique microscopique qui s'écrit sous la forme :

$$\varpi(\underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})) = \sigma_0 \left[\frac{4}{3} \underline{\mathbf{d}}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}^{(B)}(\bar{\mathbf{x}}) + \left(d_{eq}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) \right)^2 + \left(d_{eq}^{(B)}(\bar{\mathbf{x}}) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.36)$$

Il s'agit à présent de déterminer à partir des relations (1.34), (1.35) et (1.36), l'expression de la dissipation plastique macroscopique, ce qui peut être obtenu à partir du Lemme de Hill-Mandel tel que :

$$\begin{aligned} \Pi(\underline{\mathbf{D}}) &\leq \Pi^+(\underline{\mathbf{D}}) \equiv (1-f) \langle \varpi(\underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})) \rangle_{\Omega_M} \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_a^b dr \iint_{S(r)} \varpi(\underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})) dS \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_a^b 4\pi r^2 \langle \varpi(\underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})) \rangle_{S(r)} dr \\ &\leq \frac{1}{\Omega} \int_a^b 4\pi r^2 \left[\langle \varpi^2(\underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})) \rangle_{S(r)} \right]^{1/2} dr \equiv \Pi^{++}(\underline{\mathbf{D}}) \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwartz}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

où $S(r) = 4\pi r^2$ désigne la surface sphérique, $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ et $\Omega = 4\pi b^3/3$. Dans la relation précédente, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz telle que proposée par (Gurson, 1977) est due au fait que le terme $\Pi^+(\underline{\mathbf{D}})$ n'est pas calculable analytiquement (voir aussi (Benzerga & Leblond, 2010)). L'expression du majorant de la dissipation plastique macroscopique $\Pi^{++}(\underline{\mathbf{D}})$ peut être calculée en injectant les relations (1.35) et (1.36) dans la relation (1.37). Toutefois, certaines simplifications doivent être prises en compte afin de rendre le calcul possible. Sachant que :

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r \rangle_{S(r)} = \langle \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta \rangle_{S(r)} = \langle \bar{\mathbf{e}}_\phi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\phi \rangle_{S(r)} = \frac{1}{3} \langle \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\phi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\phi \rangle_{S(r)} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad (1.38)$$

on obtient *a fortiori* $\langle \underline{\mathbf{d}}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{S(r)} = \mathbf{0}$, ce qui permet d'écrire compte tenu des relations (1.34)

et (1.35) :

$$\langle \underline{\mathbf{d}}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}^{(B)}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{S(r)} = \langle \underline{\mathbf{d}}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{S(r)} : \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.39)$$

puisque $\underline{\mathbf{B}}$ est un tenseur constant au vu des conditions aux limites appliquées au V.E.R. Ainsi, en vertu des relations (1.35), (1.36), (1.37) et (1.39), le majorant de la dissipation plastique macroscopique se réécrit sous la forme :

$$\Pi^{++}(\mathbf{D}) = \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_a^b \left(d_{eq}^{(A)2}(r) + d_{eq}^{(B)2} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_a^b \left(4D_m^2 \frac{b^6}{r^6} + D_{eq}^2 \right) 4\pi r^2 dr \quad (1.40)$$

L'utilisation d'un changement de variable adéquat permet de calculer le majorant de la dissipation plastique macroscopique sous la forme :

$$\Pi^{++}(D_m, D_{eq}, f) = \sigma_0 \left[2D_m \arg \sin \left(\frac{2D_m x}{D_{eq}} \right) - \sqrt{4D_m^2 + D_{eq}^2/x^2} \right]_{x=1}^{x=1/f} \quad (1.41)$$

Le tenseur de contrainte macroscopique est obtenu à partir de la forme décomposée de la relation paramétrique (1.28) :

$$\underline{\Sigma} = \frac{\partial \Pi^{++}}{\partial D_m} \frac{\partial D_m}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial \Pi^{++}}{\partial D_{eq}} \frac{\partial D_{eq}}{\partial \mathbf{D}} \quad (1.42)$$

En calculant les expressions $\Sigma_m = \partial \Pi^{++} / \partial D_m$ et $\Sigma_{eq} = \left| \partial \Pi^{++} / \partial D_{eq} \right|$ qui constituent les deux premiers invariants de contrainte à un facteur prêt, il apparait que ces quantités sont liées à travers la fraction volumique de vide. Cette relation définit le critère de plasticité approché de (Gurson, 1977) qui est donné dans le cas d'une cavité sphérique sous la forme :

$$\mathcal{F}_G^{sph}(\underline{\Sigma}, f) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_0^2} + 2f \cosh \left(\frac{\underline{\Sigma} : \underline{1}}{2\sigma_0} \right) - (1 + f^2) \quad (1.43)$$

Pour une cavité cylindrique, (Gurson, 1977) obtient le critère de plasticité macroscopique suivant :

$$\mathcal{F}_G^{cyl}(\underline{\Sigma}, f) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_0^2} + 2f \cosh \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{\sigma_0} \right) - (1 + f^2) \quad (1.44)$$

On remarque que dans la limite d'une porosité nulle (c.-à-d. absence d'endommagement), les critères de plasticité macroscopiques définis par les relations (1.43) et (1.44) se réduisent au critère de von Mises. En outre, ces critères possèdent des propriétés de symétrie d'une part, par rapport à la contrainte équivalente au sens de von Mises $\Sigma_{eq} = (3\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}')^{1/2}$ et d'autre part, par rapport à la contrainte moyenne $\Sigma_m = \underline{\Sigma} : \underline{1}/3$ (voir Figure 1.5). À noter que, dans le cas d'un chargement hydrostatique (compression ou traction), le critère de Gurson permet de retrouver la charge limite exacte d'une sphère creuse soumise au même type de chargement.

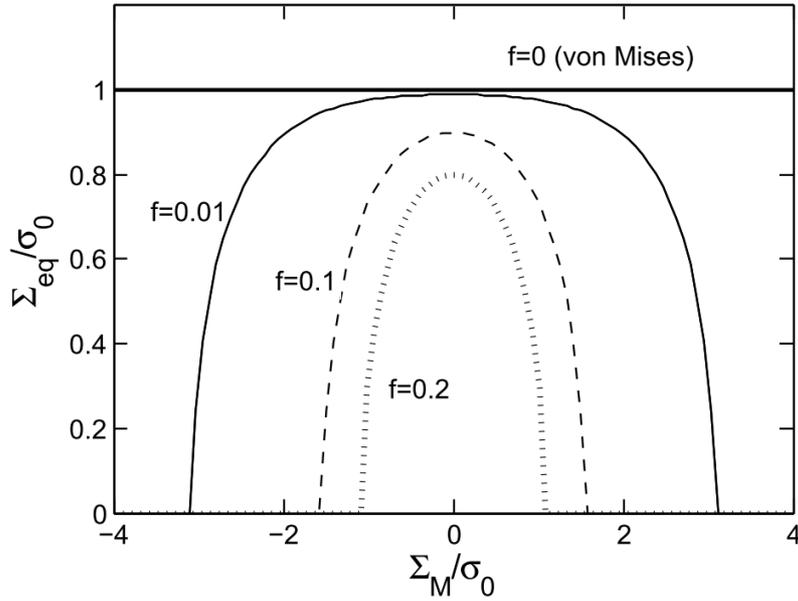


Figure 1.5 : Représentation de la surface de plasticité macroscopique de Gurson dans le plan $\Sigma_{eq}/\sigma_0 - \Sigma_m/\sigma_0$ pour différentes valeurs de la fraction volumique de vide.

La prise en compte de l'érouissage isotrope présente un intérêt considérable en particulier pour des applications liées à la mise en forme des matériaux métalliques. La démarche adoptée par Gurson dans le but de prendre en compte l'effet de l'érouissage consiste à remplacer le matériau réel par un matériau fictif obéissant à une loi d'érouissage isotrope de la forme $\sigma_M = \sigma_M(\varepsilon_M^p)$. Cette approche revient à prendre en compte un érouissage uniforme équivalent où l'on suppose que l'érouissage est homogène au sein de la matrice. Dans ce cas, on peut écrire que¹ :

$$(1-f)\langle \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} = (1-f)\langle \sigma_M \dot{\varepsilon}_M^p \rangle_{\Omega_M} \quad (1.45)$$

où $\dot{\varepsilon}_M^p$ représente le taux de déformation plastique équivalente du matériau fictif. Étant donné que l'érouissage est supposé homogène au sein de la matrice, (c.-à-d. les variables σ_M et $\dot{\varepsilon}_M^p$ sont indépendantes du point considéré dans le V.E.R), on a :

$$(1-f)\langle \sigma_M \dot{\varepsilon}_M^p \rangle_{\Omega_M} = (1-f)\sigma_M \dot{\varepsilon}_M^p \quad (1.46)$$

À partir des relations (1.25), (1.45) et (1.46), on obtient :

$$\underline{\Sigma} : \underline{\mathbf{D}}^p = (1-f)\sigma_M \dot{\varepsilon}_M^p \quad (1.47)$$

Cette dernière relation permet de définir la loi d'évolution de la variable $\dot{\varepsilon}_M^p$. Ainsi, pour une matrice de comportement rigide-plastique et dans le cas d'un V.E.R constitué d'une cavité sphérique, le critère de Gurson s'écrit sous la forme :

¹ En toute rigueur, la dissipation plastique microscopique qui apparaît dans la relation (1.45) devrait faire intervenir le taux de déformation plastique microscopique $\underline{\mathbf{d}}^p$ (au lieu du taux de déformation $\underline{\mathbf{d}}$). Puisque dans l'approche originale de Gurson, on suppose que le comportement de la matrice est rigide parfaitement plastique, on a $\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{d}}^p$. Cette remarque est valable également pour la dissipation plastique macroscopique.

$$\mathcal{F}_G^{sph}(\underline{\Sigma}, \sigma_M, f) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_M^2} + 2f \cosh\left(\frac{\underline{\Sigma} : \underline{1}}{2\sigma_M}\right) - (1 + f^2) \quad (1.48)$$

Alors que pour un V.E.R constitué d'une cavité cylindrique, on a :

$$\mathcal{F}_G^{cly}(\underline{\Sigma}, \sigma_M, f) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_M^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{\sigma_M}\right) - (1 + f^2) \quad (1.49)$$

A noter que l'approche proposée par (Gurson, 1977) est purement heuristique, puisqu'elle néglige l'hétérogénéité de l'érouissage au sein de la matrice. Néanmoins, cette approche demeure satisfaisante pour les matériaux dont l'exposant d'érouissage est relativement faible (Tvergaard, 1981), (Tvergaard, 1982).

A.4.4 Critère de plasticité macroscopique de Gurson-Tvergaard

La modélisation par éléments finis des milieux hétérogènes à l'échelle microscopique a permis de guider l'avancée des modèles analytiques développés depuis la fin des années 1960 (Tvergaard, 1981), (Tvergaard, 1982), (Koplik & Needleman, 1988), (Tvergaard, 2011). Plusieurs améliorations ont été apportées au critère de (Gurson, 1977) à partir de calculs micromécaniques par E.F. que ce soit de manière heuristique (Tvergaard, 1981), (Tvergaard & Needleman, 1984), (Brocks et al., 1995), (Faleskog et al., 1998), (Kim et al., 2004), (Gao & Kim, 2006), (Tvergaard, 2011) ou bien, en améliorant les modèles existants par des approches théoriques (Fleck & Hutchinson, 1986), (Perrin & Leblond, 1990), (Leblond & Perrin, 1999), (Gologanu et al., 2001), (Tekoglu et al., 2012). Les modifications heuristiques apportées au modèle de Gurson introduisent généralement des paramètres additionnels afin de prendre en compte des mécanismes d'endommagement (Tvergaard, 1982), (Tvergaard & Needleman, 1984), (Nahshon & Hutchinson, 2008), (Xue & Wierzbicki, 2009), (Xue et al., 2010). Les paramètres ainsi introduits n'ont pas toujours une signification physique précise et la modélisation par E.F. permet d'identifier ces nouveaux paramètres. En outre, la modélisation par E.F. permet une compréhension approfondie de certains mécanismes d'endommagement, difficiles à étudier d'un point de vue expérimental. Citons par exemple les travaux de (Gologanu et al., 1997) sur la mise en évidence 'numérique' du mode de coalescence en chapelet, en plus des deux mécanismes fondamentaux discutés notamment dans ((Cox & Low, 1974), (van Stone et al., 1985) (c.-à-d. coalescence en bande cisailée inclinée et striction interne du ligament (voir Figure 1.3)). La coalescence en chapelet a été observée plus tard dans (Benzerga et al., 2004) en analysant la rupture de barres entaillées en acier, soumises à un chargement en traction uniaxiale.

Nous avons vu précédemment que l'amorçage des cavités dépend fortement de la taille des inclusions à partir desquelles elles prennent naissance et que les critères énergétiques sont capables de prendre en compte cet effet de taille. Spécifiquement, on a évoqué le fait que les cavités tendent à s'amorcer de manière plus précoce à partir des inclusions les plus grosses. Par conséquent, on s'attend à ce que la taille des cavités qui s'amorcent au cours du chargement possède au moins deux échelle, à savoir de grosses cavités entourées de cavités beaucoup plus petites. La coalescence en bande cisailée inclinée montre la présence d'une telle situation (voir Figure 1.3.b). En effet, l'interaction entre les cavités de petite taille provoque une perte d'homogénéité des champs de déformation de façon plus précoce que

dans le cas où la matrice est dense. Ce mécanisme d'endommagement se termine généralement par l'apparition d'une bande de cisaillement à l'intérieur du ligament qui sépare les grosses cavités, suivie d'une rupture du ligament. Ainsi, l'interaction entre les cavités voisines se manifeste généralement lorsque le ligament (ou la matrice) qui sépare les cavités voisines est lui-même poreux et contient des cavités de petite taille. Or, les deux V.E.R considérés par (Gurson, 1977) ne contiennent qu'une seule cavité, ce qui manifestement ne permet pas de prendre en compte de tels effets. Dans (Tvergaard, 1981), (Tvergaard, 1982), des calculs par éléments finis ont été effectués sur un matériau périodiquement poreux, constitué de cavités cylindriques (modélisation en déformation planes) ou sphériques (modèle axisymétrique) entourées d'une matrice isotrope dont le comportement est décrit par le critère de plasticité de (Gurson, 1977). La modélisation par éléments finis réalisée dans (Tvergaard, 1981) et (Tvergaard, 1982) montre que le modèle de comportement qui découle du critère de plasticité de (Gurson, 1977), tend à surestimer la ductilité des matériaux à faibles taux de triaxialité. Une modification purement heuristique du critère de (Gurson, 1977) a été proposée dans (Tvergaard, 1981) qui consiste à introduire un paramètre ajustable noté q dans les critères (1.48) et (1.49). Ainsi, le critère de plasticité macroscopique de Gurson-Tvergaard s'écrit dans le cas d'une cavité sphérique sous la forme :

$$\mathcal{F}_{GT}(\underline{\Sigma}, \sigma_M, f) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_M^2} + 2qf \cosh\left(\frac{\underline{\Sigma} : \underline{1}}{2\sigma_M}\right) - (1 + (qf)^2) \quad (1.50)$$

(Tvergaard, 1981) propose de prendre la valeur de q égale à 1,5 dans le cas où l'écroutissement de la matrice est décrit par une loi puissance dont l'exposant est égal à 0,1. En outre, lorsque $q=1$, le critère (1.50) se réduit au critère de Gurson. Une autre forme du critère (1.50) a été proposée dans (Tvergaard, 1982) en introduisant cette fois trois paramètres q_1 , q_2 et q_3 . Le critère proposé s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F}_{GT}(\underline{\Sigma}, \sigma_M, f) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_M^2} + 2q_1f \cosh\left(q_2 \frac{\underline{\Sigma} : \underline{1}}{2\sigma_M}\right) - (1 + q_3f^2) \quad (1.51)$$

Un second « prototype numérique » qui est plus répandu que celui de Tvergaard a été proposé dans (Koplik & Needleman, 1988) en considérant un V.E.R dont le comportement de la matrice est décrit par le critère de plasticité de von Mises. (Koplik & Needleman, 1988) suggèrent de prendre une valeur du paramètre q égale à 1,25, en considérant que les écarts entre les résultats obtenus par éléments finis et ceux obtenus à partir du critère de plasticité de (Gurson, 1977), sont liés au changement de forme du V.E.R. Ce dernier étant constitué d'un cylindre à base hexagonale contenant une cavité sphérique en son centre (voir Figure 1.6). Bien que le V.E.R proposé par (Koplik & Needleman, 1988) soit plus réaliste que celui de Gurson, il n'existe pas de solution analytique permettant de formuler un critère de plasticité macroscopique pour ce type de V.E.R.

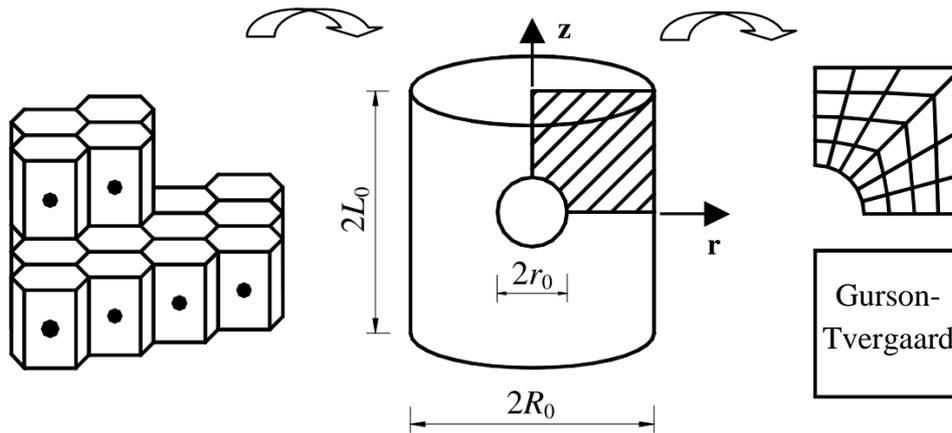


Figure 1.6 : Principe de la modélisation micromécanique par éléments finis d'un milieu périodiquement poreux suivant l'approche de (Koplik & Needleman, 1988). Figure reprise de (Kim et al., 2004).

Enfin, une étude théorique basée sur un schéma auto-cohérent a été proposée dans (Perrin & Leblond, 1990), en reprenant l'analyse de (Gurson, 1977). Les auteurs considèrent un V.E.R constitué d'une cavité centrale entourée d'une matrice poreuse contenant des cavités diluées de petite taille (c.-à-d. uniformément réparties, contrairement aux travaux de (Gurson, 1977), où la matrice est supposée dense), soumise à un chargement hydrostatique au bord. Ainsi, par une démarche théorique, (Leblond & Perrin, 1999) arrivent à justifier l'introduction du paramètre d'interaction des cavités, et trouvent une valeur de q égale à $4/e=1,472\dots$. Cette valeur est par ailleurs très proche de celle proposée initialement par (Tvergaard, 1981), (Tvergaard, 1982), c'est à dire $q=1,5$ sur la base de simulations par éléments finis. Toutefois, l'analyse théorique proposée dans (Perrin & Leblond, 1990) se limite au cas d'une matrice rigide-parfaitement plastique, et ne permet pas de donner une appréciation sur un éventuel couplage entre l'interaction des cavités et l'écroutissement de la matrice. Or, les études numériques réalisées dans (Faleskog et al., 1998), (Kim et al., 2004), (Vadillo & Fernández-Sáez, 2009) montrent que le paramètre q dépend fortement de la triaxialité des contraintes ainsi que de l'exposant d'écroutissement.

A.4.5 Prise en compte de la coalescence des microcavités

Bien que l'interaction entre les cavités soit prise en compte à travers l'introduction du paramètre q de Tvergaard, les limites de ductilité prédites à partir du modèle qui découle du critère (1.50) restent trop élevées comparées à l'expérience. Ces écarts sont principalement dus au mécanisme d'endommagement par coalescence qui n'est pas pris en compte à travers le critère de Gurson ou celui de Gurson-Tvergaard. En outre, si le taux de porosité dû à la germination et à la croissance des cavités peut être décrit à partir de lois d'évolution adéquates (voir chapitre 2), la prise en compte de la coalescence nécessite en plus d'une loi d'évolution, une modification des critères (1.48) et (1.50). Pour se rendre compte de la nécessité de modifier les critères définis par les relations (1.48) et (1.50), il suffit d'analyser l'instant pour lequel le tenseur de contrainte macroscopique de Cauchy s'annule (c.-à-d. perte totale de la résistance du matériau). Les critères (1.48) et (1.50) prédisent respectivement une perte totale de la résistance du matériau lorsque $f=1$ et $f=1/q$, ce qui constitue manifestement des

valeurs trop élevées. En effet, les différentes études menées tant sur le plan numérique qu'expérimental montrent que, en ce qui concerne les matériaux métalliques, la porosité pour laquelle il y a rupture du V.E.R ne dépasse pas la valeur 0,25 (Tvergaard, 1990).

La modélisation du mécanisme d'endommagement par coalescence des cavités soulève deux principales difficultés. La première est liée à la détermination de l'instant précis pour lequel on observe l'entrée en régime de coalescence, alors que la seconde est liée à la description du comportement au cours du régime de coalescence. Différentes approches ont été proposées dans la littérature afin de prédire, d'une part, l'entrée en régime de coalescence, et d'autre part, de décrire le comportement du matériau durant le régime de coalescence (Leblond & Perrin, 1999), (Zhang et al., 2000), (Pardoën & Hutchinson, 2000), (Gologanu et al., 2001), (Benzerga, 2002), (Lecarme & Pardoën, 2011). Nous nous limitons dans ce travail à la description de l'approche proposée dans (Tvergaard & Needleman, 1984) et (Needleman & Tvergaard, 1987). Ces auteurs proposent une extension phénoménologique du critère donné par la relation (1.50) afin de reproduire la chute brutale des propriétés mécaniques du matériau observée pendant le régime de coalescence. Dans cette approche, la coalescence est considérée comme un mécanisme de croissance accélérée et le critère (1.51) est modifié en remplaçant le terme de la porosité réelle f par la porosité effective f_* définie par :

$$f_* = \begin{cases} f & \text{si } f < f_C \\ f_C + \delta_A (f - f_C) & \text{si } f \geq f_C \end{cases} \quad (1.52)$$

où $\delta_A \geq 1$ désigne le facteur accélération de croissance et f_C un second paramètre qui désigne la porosité critique pour laquelle on considère l'entrée en régime de coalescence. Le critère de plasticité macroscopique de Gurson-Tvergaard-Needleman ainsi modifié devient alors :

$$\mathcal{F}_{GTN}(\underline{\Sigma}, \sigma_M, f_*) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_M^2} + 2q f_* \cosh\left(\frac{\underline{\Sigma} : \underline{1}}{2\sigma_M}\right) - \left(1 + (q f_*)^2\right) \quad (1.53)$$

En dépit du fait que l'approche proposée par (Tvergaard & Needleman, 1984), (Needleman & Tvergaard, 1987) soit purement phénoménologique, les paramètres mis en jeu possèdent une connotation micromécanique, c.-à-d. accélération de croissance et porosité critique (Benzerga, 2002). Dans (Tvergaard & Needleman, 1984) et (Needleman & Tvergaard, 1987), les auteurs proposent de prendre $f_C = 0,15$ et $\delta_A \approx 5$ sur la base de simulations micromécaniques par E.F. Les paramètres f_C et δ_A peuvent être identifiés soit à partir de calculs par éléments finis sur des cellules élémentaires (Tvergaard et Needleman, 1984), (Tvergaard, 1990), (Zhang et al., 2000), ou alors sur la base de données expérimentales (Pardoën & Delannay, 1998), (Besson et al., 2003). Toutefois, les simulations par E.F. réalisées notamment dans (Benzerga et al., 1999), (Pardoën & Hutchinson, 2000), (Benzerga, 2002) et (Gao & Kim, 2006) montrent que, dans le cas d'une porosité initiale élevée ($f_0 \geq 10^{-3}$), le couple de paramètres (f_C, δ_A) n'est pas unique, et dépend du trajet de chargement considéré (c.-à-d. de la triaxialité des contraintes). En outre, la valeur de la porosité critique dépend fortement de la porosité initiale ainsi que de l'exposant d'écrouissage tel que discuté dans (Koplik & Needleman, 1988), (Benzerga et al., 1999), (Pardoën & Hutchinson, 2000). Notons que l'approche proposée par (Tvergaard & Needleman, 1984) a été améliorée notamment dans (Zhang et al., 2000) en

conservant un seul paramètre, c.-à-d. le facteur d'accélération de croissance. Cette approche consiste à utiliser le critère de coalescence de (Thomason, 1985) afin de détecter l'entrée en régime de coalescence, tout en conservant le concept de porosité effective.

A.5 Modélisation des matériaux poreux anisotropes et ductiles

Etant donné que les tôles métalliques sont obtenues généralement par laminage, elles présentent une texture particulière caractérisée par une orientation privilégiée des grains. En outre, les hétérogénéités présentes dans les tôles métalliques (c.-à-d. inclusions, précipités, microcavités, ... etc.), possèdent généralement une forme allongée le long de la direction de laminage, ce qui conduit à une anisotropie de l'endommagement (Hammi & Horstemeyer, 2007). Nous nous limitons dans cette présentation à la modélisation de l'anisotropie plastique initiale, due à l'orientation privilégiée des grains, en considérant l'endommagement comme isotrope (c.-à-d. inclusions et microcavités de forme sphérique ou cylindrique). L'orientation privilégiée des grains après laminage des tôles conduit généralement à des limites d'écoulement dépendant de la direction de chargement. En effet, le procédé de laminage introduit une forme particulière d'anisotropie caractérisée par une symétrie des limites d'écoulement par rapport aux plans orthogonaux formés par les axes principaux d'anisotropie. Dans ce cas particulier, on parle généralement d'orthotropie plastique (Hill, 1950). La modélisation de l'anisotropie initiale (c.-à-d. dépendance de la limite d'écoulement vis-à-vis du chargement) s'effectue soit à partir des approches basées sur la plasticité cristalline, où bien à partir des approches phénoménologiques.

Les modèles basés sur la plasticité cristalline utilisent les lois de comportement du monocristal couplées à des techniques d'homogénéisation afin de reproduire le comportement macroscopique du polycristal. Ce type de modélisation procure plusieurs avantages, à commencer par un nombre restreint de paramètres à identifier (Banabic, 2010). La finesse de ces modèles fait que les paramètres intervenant dans les lois d'évolutions sont liés à des grandeurs physiques (densité de dislocation, cission critique, ... etc.). Cette richesse de modélisation est toutefois accompagnée de certains inconvénients, parmi lesquels on peut citer la lourdeur des temps de calculs. L'utilisation de ces modèles pour des applications industrielles demeure jusqu'à présent hors de portée.

En ce qui concerne les approches phénoménologiques, l'anisotropie initiale est reproduite à partir d'une loi d'écoulement et d'une surface de plasticité, dont la forme dépend de l'expression de la contrainte équivalente macroscopique. Un nombre important de surfaces de plasticité anisotropes ont été proposées dans la littérature (Hill, 1948), (Hill, 1993), (Barlat & Lian, 1989), (Barlat et al., 2007) et une revue des différents critères de plasticité anisotropes peut être trouvée dans (Banabic, 2010). Le critère quadratique de (Hill, 1948) est probablement le critère le plus utilisé afin de reproduire l'anisotropie initiale pour deux principales raisons. D'une part, le nombre de paramètres intervenant dans le critère est relativement faible ce qui simplifie considérablement l'identification des paramètres et d'autre part, son implantation numérique est relativement simple comparée aux autres critères disponibles dans la littérature. En plus de leur nombre qui peut être parfois élevé, les paramètres intervenant dans les surfaces de charges phénoménologiques ne possèdent pas toujours une interprétation physique. Toutefois, les principaux atouts de ces approches

demeurent leur faible coût CPU et une implantation relativement aisée dans des codes de calcul par E.F. comparées aux approches basées sur la plasticité cristalline.

Les modèles présentés dans les deux prochains paragraphes supposent qu'à l'échelle du V.E.R (c.-à-d. échelle microscopique), le comportement de la matrice est décrit par une surface de plasticité anisotrope issue d'une approche phénoménologique. Une fois la surface de plasticité de la matrice définie, on cherche à déterminer une surface de plasticité macroscopique à partir de certains outils d'homogénéisation couplés à une analyse limite.

A.5.1 Critère de plasticité macroscopique de (Liao et al., 1997)

Le critère développé dans (Liao et al., 1997) représente une extension du critère de (Gurson, 1977) au cas d'un comportement isotrope transverse de la matrice. Ce critère a été développé spécifiquement pour des applications liées à la mise en forme des tôles métalliques. Le V.E.R considéré par (Liao et al., 1997) est constitué d'une matrice cylindrique, dont le comportement est considéré rigide parfaitement plastique, contenant une cavité de même forme, soumis à un chargement plan. Selon (Liao et al., 1997), ce V.E.R est censé représenter une tôle contenant des cavités cylindriques dont le plus grand axe est dirigé dans l'épaisseur de la tôle. Des calculs par E.F. sur des cellules élémentaires ont été menés dans (Wang et al., 2004) afin d'analyser les effets d'interaction entre les cavités dans le cas d'une matrice de comportement orthotrope.

La surface de plasticité proposée par (Liao et al., 1997) a été couplée au critère de Force Maximum Modifié (Hora et al., 1996) dans le but de prédire les limites de formage pour différentes nuances d'aciers (Brunet & Morestin, 2001). Ces derniers ont montré que l'utilisation du critère de (Liao et al., 1997) reproduit des limites de formage plus basses dans la partie de l'expansion comparées à celles obtenues à partir du critère de Gurson-Tvergaard. Le critère de plasticité obtenu par (Liao et al., 1997) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F}_{LPT}(\underline{\Sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}^H}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left(\sqrt{\frac{1+2R_L}{2(1+R_L)}} \frac{\Sigma_{\alpha\alpha}}{\sigma_0} \right) - (1+f^2) \quad (1.54)$$

tel que $\alpha=1,2$ et R_L désigne le rapport de déformation plastique (*plastic strain ratio*). Ce dernier représente le rapport entre le taux de déformation plastique suivant la direction de laminage et le taux de déformation plastique suivant l'épaisseur de la tôle pour un chargement en traction uniaxiale. Σ_{eq}^H désigne la contrainte équivalente au sens de (Hill, 1948) dans le cas d'un comportement isotrope transverse tel que :

$$\Sigma_{eq}^H = \left[\left(\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2 + R_L (\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + 2(1+2R_L) \Sigma_{12}^2 \right) / (1+R_L) \right]^{1/2} \quad (1.55)$$

Le critère de plasticité défini par la relation (1.54) montre que lorsque R_L augmente, la dépendance à la pression hydrostatique augmente aussi. D'autre part, dans la limite d'un comportement isotrope de la matrice, c'est à dire lorsque $R_L=1$, on retrouve le critère de plasticité macroscopique de (Gurson, 1977) pour une cavité cylindrique.

A.5.2 Critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001)

Nous avons vu dans la section précédente que le critère proposé par (Liao et al., 1997) se limite au cas d'un chargement en contraintes planes pour des cavités de formes cylindriques. Cette approche considère en outre que le V.E.R est censé représenter une tôle contenant des cavités distribuées de façon périodique, de sorte que ces dernières traversent l'épaisseur de la tôle. Or, plusieurs études expérimentales montrent que la taille des inclusions et par conséquent des cavités créées juste après amorçage est de l'ordre du micron et ce pour une large gamme de matériaux métalliques (voir Figures 1.1, 1.2 et 1.3). Ainsi, les cavités créées après amorçage sont très petites devant l'épaisseur de la tôle et l'hypothèse d'une cavité traversant l'épaisseur de la tôle devient difficilement justifiable au moins durant les premiers stades de l'endommagement (c.-à-d. par germination et croissance). D'autre part, les matériaux métalliques de haute pureté tels que les alliages d'aluminium contiennent des inclusions de forme globulaire qui donnent généralement naissance à des cavités de forme plus ou moins sphérique. Afin de surmonter certaines limitations inhérentes au modèle de (Liao et al., 1997), (Benzerga & Besson, 2001) ont repris l'approche à deux champs de vitesse de (Gurson, 1977), en considérant le cas d'une cavité sphérique et cylindrique entourées d'une matrice incompressible. La matrice est considérée rigide parfaitement-plastique dont le comportement est décrit par la surface de plasticité de (Hill, 1948). Pour un tel comportement, la contrainte équivalente microscopique s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{eq} = \left(3 \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}'}} : \underline{\underline{\mathbf{h}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}'}} / 2 \right)^{1/2} \quad (1.56)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{h}}}$ représente le tenseur d'anisotropie de (Hill, 1948) à l'échelle microscopique. Compte tenu de l'incompressibilité de la matrice, on a $\underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} = 0$, ce qui permet d'exprimer le taux de déformation plastique équivalente microscopique sous la forme :

$$d_{eq} = \left(2 \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\hat{\mathbf{h}}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}} / 3 \right)^{1/2} \quad (1.57)$$

où $\underline{\underline{\hat{\mathbf{h}}}}$ représente le tenseur inverse de $\underline{\underline{\mathbf{h}}}$, de manière à respecter l'égalité $\sigma_{eq} d_{eq} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}'}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}$. En vertu des relations (1.30) et (1.32), l'expression de la dissipation plastique microscopique s'écrit sous la forme :

$$\varpi(\underline{\underline{\mathbf{d}}}) = \sigma_0 d_{eq} = \sigma_0 \left[\frac{4}{3} \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\underline{\hat{\mathbf{h}}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{(B)}(\bar{\mathbf{x}}) + \left(d_{eq}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) \right)^2 + \left(d_{eq}^{(B)}(\bar{\mathbf{x}}) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.58)$$

où :

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{(A)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\alpha}{r^3} \left(-2 \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\varphi \right) \quad (1.59)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{(B)}(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mathcal{B}}} = \underline{\underline{\mathcal{D}'}} \quad (1.60)$$

Conformément à l'approche de (Gurson, 1977), les conditions aux limites appliquées au V.E.R correspondent à un taux de déformation homogène au bord, ce qui permet d'écrire à partir des relations (1.30) et (1.57) :

$$d_{eq}^{(B)}(\bar{\mathbf{x}}) = D_{eq} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{(B)} : \underline{\underline{\hat{\mathbf{h}}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{(B)} = \underline{\underline{\mathcal{D}'}} : \underline{\underline{\hat{\mathbf{H}}}} : \underline{\underline{\mathcal{D}'}} \quad (1.61)$$

En combinant cette dernière relation avec la relation (1.60) on montre que $\underline{\mathbf{h}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}$. Afin de déterminer l'expression de $d_{eq}^{(A)}$, (Benzerga & Besson, 2001) proposent d'exprimer le tenseur d'anisotropie de (Hill, 1948) en coordonnées sphériques ce qui permet en vertu de la relation (1.57) d'écrire :

$$d_{eq}^{(A)} = \chi(\underline{\underline{\mathbf{H}}}, \theta, \phi) D_m (b/r)^3 \quad (1.62)$$

où $\chi(\underline{\underline{\mathbf{H}}}, \theta, \phi)$ représente une fonction scalaire obtenue en exprimant le tenseur d'anisotropie macroscopique de (Hill, 1948) en coordonnées sphériques (voir (Benzerga & Besson, 2001)). Par ailleurs, puisque le tenseur $\underline{\mathbf{d}}^{(B)}$ est constant (voir relation (1.60)), et compte tenu de la relation (1.38), on peut écrire que :

$$\left\langle \underline{\mathbf{d}}^{(A)} : \underline{\underline{\mathbf{h}}} : \underline{\mathbf{d}}^{(B)} \right\rangle_{S(r)} = \left\langle \underline{\mathbf{d}}^{(A)} \right\rangle_{S(r)} : \underline{\underline{\mathbf{h}}} : \underline{\mathbf{d}}^{(B)} = 0 \quad (1.63)$$

En vertu des relations (1.37), (1.58), (1.61), (1.62), le majorant de la dissipation plastique macroscopique $\Pi^{++}(\underline{\mathbf{D}})$ s'écrit sous la forme :

$$\Pi^{++}(\underline{\mathbf{D}}) = \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_a^b \left(d_{eq}^{(A)2}(r) + d_{eq}^{(B)2} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{\sigma_0}{b^3} \int_{\xi}^{\xi f} \sqrt{1+u^2} \frac{du}{u^2} \quad (1.64)$$

où :

$$\xi = h D_m / D_{eq}, \quad h = \left[\left\langle \chi(\underline{\underline{\mathbf{H}}}, \theta, \phi) \right\rangle_{S(r)} \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad u = \xi b^3 / r^3 \quad (1.65)$$

Une fois l'expression du majorant de la dissipation plastique établie, il est possible d'obtenir un critère de plasticité macroscopique à partir des relations (1.42) et (1.64) conformément aux travaux de (Gurson, 1977). Ainsi, pour une cavité sphérique, le critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F}_{BB}^{sph}(\underline{\underline{\Sigma}}, f) = \frac{3\underline{\underline{\Sigma}}' : \underline{\underline{\mathbf{H}}} : \underline{\underline{\Sigma}}'}{2\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{1}{h} \frac{\underline{\underline{\Sigma}}' : \underline{\underline{\mathbf{1}}}}{\sigma_0}\right) - (1+f^2) \quad (1.66)$$

avec h le facteur d'anisotropie défini par :

$$h = \left[\frac{8}{5} \frac{h_1 + h_2 + h_3}{h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{h_4} + \frac{1}{h_5} + \frac{1}{h_6} \right) \right]^{1/2} \quad (1.67)$$

où $h_i = \mathcal{H}_{H_i}$ tel que le tenseur \mathcal{H}_{H_i} représente une réécriture en notation de Voigt du tenseur d'anisotropie de (Hill, 1948). Pour une matrice de comportement isotrope, c'est à dire lorsque $\underline{\underline{\mathbf{H}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ et $h=2$, on retrouve le critère de plasticité macroscopique de (Gurson, 1977) dans le cas d'une cavité sphérique (voir la relation (1.43)). Par ailleurs, dans la limite d'une porosité nulle, le critère de plasticité définit par la relation (1.66) se réduit au critère (Hill, 1948) (voir Figure 1.7). (Benzerga & Besson, 2001) ont par ailleurs considéré un V.E.R constitué d'une cavité cylindrique entourée d'une matrice incompressible de comportement orthotrope. Le critère de plasticité macroscopique obtenu par ces auteurs s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F}_{BB}^{cyl}(\underline{\Sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}^H}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{\sqrt{3}}{2h_m} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - (1 + f^2) \quad (1.68)$$

tel que $\Sigma_m = (\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2$ représente la contrainte moyenne et h_m le facteur d'anisotropie défini par la relation :

$$h_m = \left[\frac{1}{4} \frac{h_1 + h_2 + 4h_3}{h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1} + \frac{1}{2h_6} \right] \quad (1.69)$$

On remarque également que le critère défini par la relation (1.68) se réduit au critère de (Hill, 1948) en condition de déformations planes généralisées lorsque la porosité est nulle. D'autre part, dans la limite d'un comportement isotrope, le critère défini par la relation (1.68) permet de retrouver le critère de (Gurson, 1977) pour une cavité cylindrique.

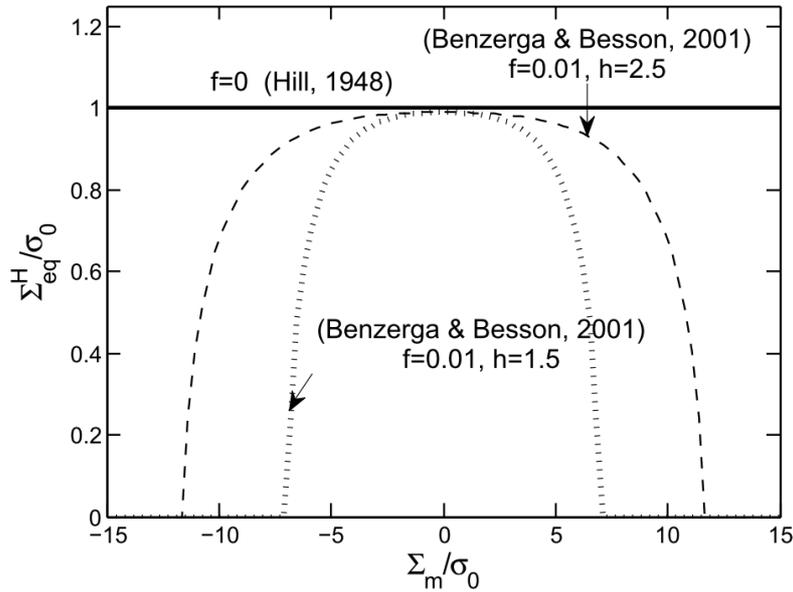


Figure 1.7 : Représentation de la surface de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001) dans le plan $\Sigma_{eq}^H / \sigma_0 - \Sigma_m / \sigma_0$ pour différentes valeurs du facteur d'anisotropie h .

Enfin, (Benzerga & Besson, 2001) montrent que pour un comportement isotrope transverse de la matrice, on a $h_m = \sqrt{3} \sqrt{R_L + 1/2(2R_L + 1)}$ ce qui permet de retrouver une expression identique au critère de (Liao et al., 1997). La prise en compte de l'écouissage isotrope ainsi que de l'effet d'interaction entre les cavités peut être établie conformément aux travaux de (Gurson, 1977) et (Tvergaard, 1982), respectivement. Dans ce cas, le critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001) s'écrit dans le cas d'un V.E.R constitué d'une cavité sphérique sous la forme :

$$\mathcal{F}_{BB}(\underline{\Sigma}, \sigma_M, f) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\mathbf{H}} : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_M^2} + 2qf \cosh \left(\frac{1}{h} \frac{\underline{\Sigma} : \underline{\mathbf{1}}}{\sigma_M} \right) - (1 + (qf)^2) \quad (1.70)$$

A.6 Synthèse

Dans cette première partie, nous avons présenté les différents mécanismes d'endommagement observés dans les matériaux métalliques. Les études expérimentales réalisées depuis le début des années 1960 montrent que les mécanismes d'endommagement qui apparaissent au cours d'une sollicitation mécanique sont en général complexes et dépendent sensiblement de la microstructure des matériaux étudiés ainsi que de la nature du chargement appliqué. L'endommagement se produit généralement suivant trois mécanismes différents que sont la germination, la croissance et la coalescence des cavités. Il est important de rappeler que ces trois mécanismes ne sont successifs que pour le même site d'endommagement. Nous avons ensuite présenté les principales approches permettant de modéliser l'endommagement des matériaux métalliques. Il apparaît que les différents modèles existant dans la littérature peuvent se classer en deux catégories à savoir, les modèles basés sur une approche phénoménologique et les modèles basés sur une approche micromécanique.

Les modèles phénoménologiques de Lemaitre (Continuum Damage Mechanics) et de Rousselier sont écrits dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et sont basés sur des développements théoriques rigoureux et cohérents. La mécanique de l'endommagement continu permet de prendre en compte de façon relativement aisée différents aspects du comportement des matériaux métalliques, e.g., anisotropie plastique, effet Bauschinger, ...etc. Ceci n'est pas le cas concernant les modèles d'endommagement basés sur l'approche de Gurson (Besson & Guillemer-Neel, 2003), principalement à cause du caractère théorique complexe de cette approche. Toutefois, les lois d'évolution qui interviennent dans les approches basées sur la mécanique de l'endommagement continu reposent généralement sur des considérations purement phénoménologiques. Les paramètres ainsi introduits sont purement mathématiques et ne représentent pas une grandeur physique précise. En d'autres termes, les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement continu ne permettent pas d'étudier l'effet des paramètres microstructuraux sur la ductilité des matériaux métalliques. Par conséquent, une telle approche ne permet pas d'analyser l'effet de la microstructure (e.g. à travers la densité des inclusions, porosité initiale, ... etc.) sur la prédiction des instabilités plastiques. En outre, les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement continu ne permettent pas de prendre en compte le changement de volume dû à la dissipation plastique, bien que des améliorations aient été proposées dans (Hammi & Horstemeyer, 2007).

Les modèles micromécaniques basés sur l'approche de (Gurson, 1977) ont été largement utilisés pour des applications liées à la rupture des matériaux métalliques (Tvergaard & Needleman, 1984), (Becker, 1987), (Becker et al., 1988), (Besson et al., 2001), (Besson et al., 2003), (Huang & Xue, 2009), (Morgeneyer & Besson, 2011). Toutefois, leur utilisation dans le cadre de la mise en forme des tôles métalliques est bien plus récente (Brunet & Morestin, 2001), (Lievers et al., 2004), (Ben Bettaieb et al., 2010), (Thuillier et al., 2011). Nous avons vu que dans le cas d'un V.E.R de comportement rigide parfaitement plastique, le critère de plasticité macroscopique de Gurson repose sur des considérations purement micromécaniques combinant une analyse limite ainsi que certains outils mathématiques issus de la théorie de l'homogénéisation. Néanmoins, les extensions proposées dans (Tvergaard, 1982), (Tvergaard & Needleman, 1984), (Needleman & Tvergaard, 1987) ont été obtenues de manière purement

heuristique. Ces extensions sont fondées sur une comparaison par rapport aux calculs par éléments finis sur un V.E.R de forme plus réaliste que celui utilisé par Gurson (Koplik & Needleman, 1988). Ceci étant, les différents travaux qui traitent de la rupture ductile des matériaux métalliques tant sur le plan numérique qu'expérimental montrent que le modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman est suffisamment performant (Becker et al., 1988), (Besson et al., 2001), (Besson et al., 2003). Ce modèle devrait *a priori* donner des résultats intéressants quant à la prédiction de la formabilité des tôles métalliques.

Le comportement anisotrope de certains matériaux métalliques a une importance considérable, d'une part, par rapport à la forme finale de la pièce après sa mise en forme et d'autre part, par rapport à la formabilité des matériaux métalliques en question (Banabic et al., 2005), (Aretz, 2007), (Butuc et al., 2010). En ce sens, nous avons présenté certaines extensions apportées au modèle de Gurson afin de prendre en compte l'anisotropie plastique de la matrice. Nous avons vu que le critère de plasticité macroscopique de (Liao et al., 1997) considère un V.E.R en forme de cylindre contenant une cavité cylindrique soumis à un chargement plan. Ce V.E.R, dont le comportement est considéré isotrope transverse, est censé représenter une tôle contenant des cavités cylindriques traversant l'épaisseur de la tôle. Une approche plus générale a été proposée dans (Benzerga & Besson, 2001) en considérant une cavité sphérique et cylindrique séparément. Dans le cas d'une cavité cylindrique entourée d'une matrice dont le comportement est isotrope transverse, le critère de (Benzerga & Besson, 2001) permet de retrouver celui proposé par (Liao et al., 1997). En outre, l'approche proposée dans (Benzerga & Besson, 2001) permet d'analyser le cas d'une cavité sphérique généralement rencontré dans les matériaux métalliques de haute pureté. Ces derniers possèdent en général des inclusions de forme globulaire qui donnent naissance à des cavités de forme sphérique.

Les modèles de comportement discutés dans cette première partie permettent, d'une part, d'évaluer la ductilité d'un matériau donné et d'autre part, de prédire l'initiation et la propagation de fissures macroscopiques, moyennant des paramètres proprement identifiés. Néanmoins, ces modèles ne permettent pas à eux seuls de prédire l'apparition d'instabilités plastiques, phénomène précurseur à la rupture ductile. Or, la formabilité des tôles métalliques est principalement caractérisée par l'apparition d'instabilités sous forme de striction diffuse et localisée. En ce sens, la seconde partie de ce chapitre a pour objet de présenter les différents indicateurs d'instabilités plastiques présents dans la littérature. Une attention particulière sera portée aux critères basés sur l'analyse de bifurcation.

Partie B : Critères de striction diffuse et localisée en transformations finies

B.1 Introduction

Au cours des procédés de mise en forme (ex. emboutissage, hydroformage, ... etc.), les tôles métalliques subissent de grandes déformations (au moins localement), ce qui peut mener à l'apparition d'instabilités matérielles. Les instabilités matérielles (appelées également instabilités plastiques), se manifestent principalement sous deux formes distinctes, à savoir la striction diffuse et la striction localisée (voir Figure 1.8).

La striction diffuse se caractérise par l'apparition d'un léger amincissement sur une zone relativement large de la tôle. Elle représente ainsi le passage d'un état de déformation homogène vers un état de déformation quasi-homogène (voire hétérogène), visible en particulier sur des tôles relativement épaisses soumises à un chargement en traction uniaxiale. La striction localisée est caractérisée par l'apparition d'une fine bande dont la largeur est de l'ordre de l'épaisseur de la tôle (Col, 2006), (Eyckens, 2009), et dans laquelle se concentrent les champs de déformation. L'apparition de la striction localisée se produit de façon assez brutale ce qui complique considérablement les analyses tant expérimentales que théoriques du phénomène en question. La striction localisée se termine généralement par l'apparition de la rupture ductile, c.-à-d. déchirure de la tôle. Ainsi, la striction localisée représente l'une des principales causes de rebut d'une pièce lors de sa mise en forme. Par ailleurs, pour certains types de pièces comme les pièces d'aspect, l'apparition de la striction diffuse peut être considérée également comme une cause de rebut. La prédiction de la striction diffuse par des approches théoriques procure un second intérêt, lié à l'identification des paramètres du modèle comportement. En effet, une fois l'apparition de la striction diffuse, les champs de déformation deviennent hétérogènes et l'identification des paramètres de la loi de comportement ne peut plus se faire uniquement sur la base d'essais mécaniques classiques (homogènes) ; elle doit donc recourir à des méthodes inverses utilisant des techniques de mesures de champs hétérogènes (Springmann & Kuna, 2005).

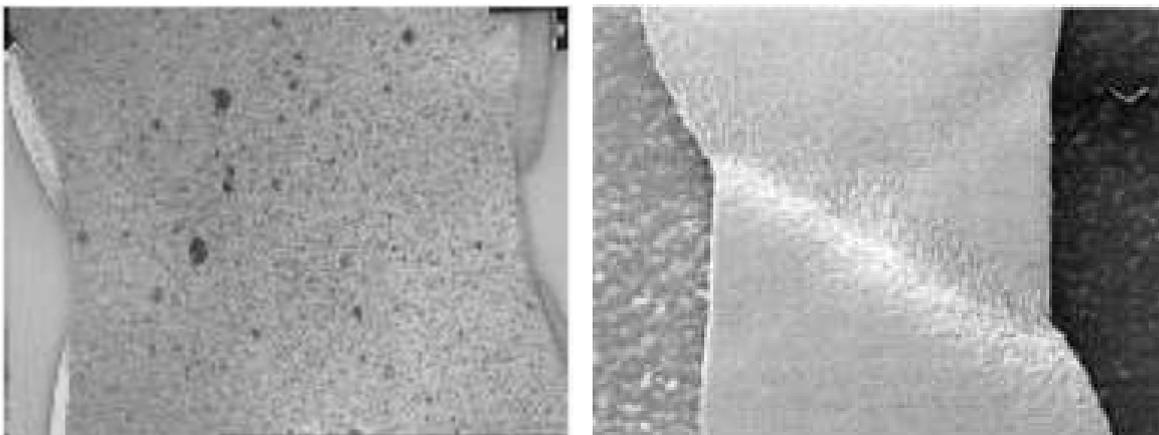


Figure 1.8 : Exemples de striction diffuse (à gauche d'après (Vacher, 2003)), et striction localisée en bande de cisaillement (à droite d'après (Hoc et al., 2001)).

Compte tenu des travaux de la littérature, la striction diffuse précède généralement la striction localisée, à l'exception de certains cas particuliers, liés soit à la géométrie de la pièce, ou bien aux conditions aux limites appliquées. En effet, pour des tôles de faible épaisseur, l'instabilité plastique, pour certains trajets de déformation, se manifeste quasiment sous forme de striction localisée, la striction diffuse étant dans ce cas peu perceptible (Col, 2006). Ainsi, outre la dépendance aux propriétés du matériau, l'apparition de la striction diffuse dépend par ailleurs de la géométrie de la pièce considérée et des conditions aux limites.

Afin de caractériser la formabilité des tôles métalliques, (Keeler & Backofen, 1963) et (Goodwin, 1968) ont introduit le concept de Courbe Limite de Formage (C.L.F). Ce concept permet de représenter sur un graphe les limites de formabilité d'un matériau donné, dans un espace approprié (Figure 1.9). La C.L.F permet de définir deux zones, la première étant synonyme de rupture de la pièce (située au-dessus de la C.L.F) alors que la seconde zone correspond à la réussite de la pièce (partie hachurée, voir Figure 1.9). Bien que dans la majorité des travaux les C.L.F sont tracées dans l'espace des déformations principales, certains auteurs proposent de les tracer dans l'espace des contraintes principales afin de s'affranchir de la dépendance au changement de trajet de déformation. Les premiers travaux traitant de la prédiction des C.L.F étaient basés sur des approches purement expérimentales (Col, 2006). Il existe dans la littérature différentes procédures expérimentales permettant de prédire les limites de formage d'un matériau donné dont la fiabilité dépend souvent du coût des essais.

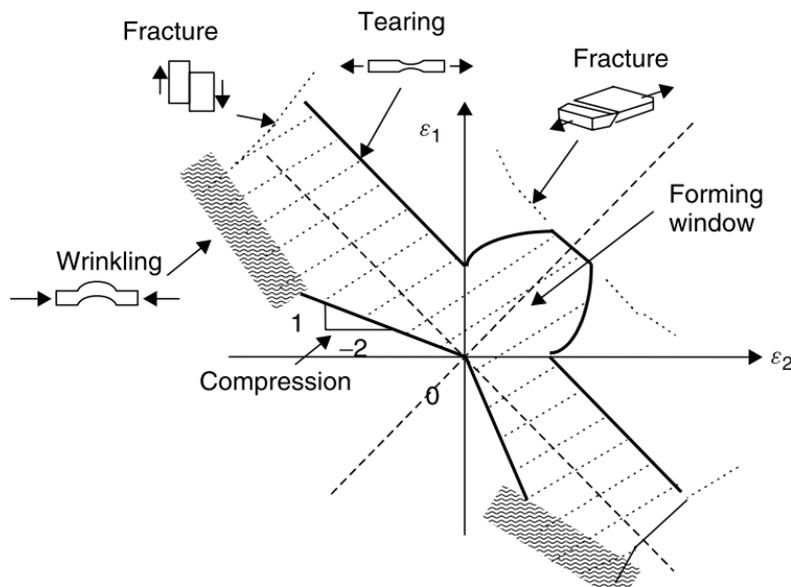


Figure 1.9 : Limites de formabilité en emboutissage et C.L.F à localisation (trait épais) d'après (Marciniak et al., 2002).

En ce qui concerne la prédiction de la striction diffuse ou localisée par des approches analytiques, une multitude de critères ont été développés à partir des années 1950. Les différentes approches présentes dans la littérature peuvent se classer, en fonction de leurs fondements théoriques ou physiques, en au moins quatre catégories, à savoir :

- *Critères basés sur le Principe de Force Maximum ;*
- *Critères basés sur l'Analyse de Bifurcation ;*
- *Critères supposant la présence d'un défaut initial ;*
- *Critères basés sur l'Analyse de Stabilité par Perturbation Linéaire.*

Dans les sections suivantes, nous donnons un rappel des principaux critères de striction utilisés pour la prédiction des limites de formabilité des tôles métalliques. Une attention particulière sera portée aux critères basés sur l'Analyse de Bifurcation, en discutant les éventuels liens théoriques qui existent entre les critères présentés.

B.2 Critères basés sur le Principe de Force Maximum (P.F.M.)

Les travaux pionniers de (Considère, 1885) ont permis d'établir un critère de prédiction de la striction diffuse dans une barre sollicitée en traction uniaxiale. Les fondements de ce critère reposent sur une observation expérimentale, indiquant que la striction diffuse apparaît lorsque l'effort appliqué atteint son maximum. Les extensions apportées à cette approche sont toutes basées sur la condition de stationnarité de l'effort, exprimée soit dans le repère de chargement (Swift, 1952), (Hora et al., 1996), (Mattiasson et al., 2006), (Hora et al., 2013), ou bien dans un repère particulier lié à l'orientation de la bande de localisation (Hill, 1952), (Hill, 2001).

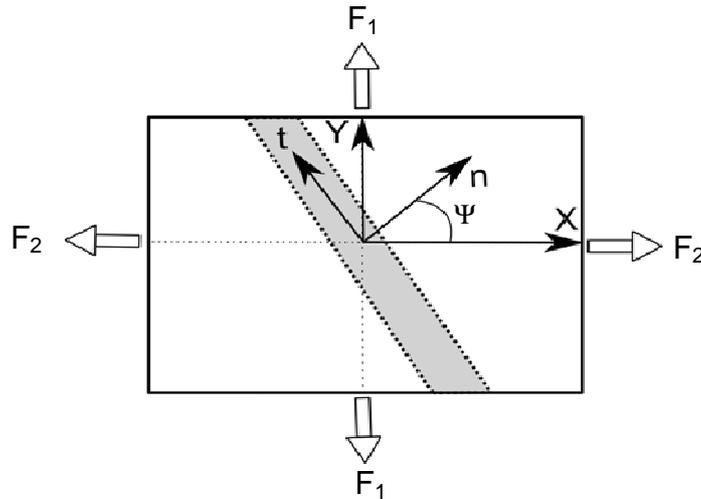


Figure 1.10 : Chargement biaxial d'une tôle, notations.

Étant donné que la quasi-totalité des critères qui découlent du P.F.M. sont basés sur une formulation en contraintes planes, on considère dans cette partie une tôle soumise à un chargement plan (voir Figure 1.10). On se place ici dans le cas simplifié d'une tôle ayant un comportement rigide plastique décrit par une surface de charge de von Mises tel que $\mathcal{F}_{vM} = \Sigma_{eq} - \mathcal{Y} = 0$. Σ_{eq} désigne la contrainte équivalente au sens de von Mises et \mathcal{Y} une variable scalaire caractérisant la taille de la surface de charge. Pour un comportement rigide plastique décrit par une surface de charge de von Mises, la loi d'écoulement prend la forme suivante :

$$\mathbf{D}^p = D_{eq}^p \partial \mathcal{F}_{vM} / \partial \underline{\Sigma} = D_{eq}^p \partial \Sigma_{eq} / \partial \underline{\Sigma} = \mathbf{D} \quad (1.71)$$

où $\underline{\mathbf{D}}^p$ représente le taux de déformation plastique et D_{eq}^p le taux de déformation plastique équivalente. Etant donné que le matériau est considéré comme rigide-plastique, on a $D_{eq} = (2\underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{D}}/3)^{1/2} = D_{eq}^p$.

B.2.1 Critère de Force Maximum

L'une des premières extensions du critère de (Considère, 1885) aux chargements biaxiaux est due à (Swift, 1952). Ce dernier suppose que la striction diffuse apparaît lorsque, simultanément, il y a stationnarité des efforts appliqués, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \dot{F}_1 = 0 \Rightarrow \dot{F}_1/F_1 = \dot{\Sigma}_1/\Sigma_1 - D_1 = 0 \\ \dot{F}_2 = 0 \Rightarrow \dot{F}_2/F_2 = \dot{\Sigma}_2/\Sigma_2 - D_2 = 0 \end{cases} \quad (1.72)$$

où Σ_γ , $\gamma=1,2$ représentent les composantes principales du tenseur de contrainte de Cauchy, et D_γ les composantes principales du tenseur taux de déformation Eulérien. Sous l'hypothèse d'un chargement plan, le taux de contrainte équivalente $\dot{\Sigma}_{eq}$ s'écrit sous la forme :

$$\dot{\Sigma}_{eq} = \left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_\gamma} \right) \dot{\Sigma}_\gamma = \Sigma_1 \left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_1} \right) D_1 + \Sigma_2 \left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_2} \right) D_2 \quad (1.73)$$

En injectant la relation (1.71) dans la relation (1.73), on obtient :

$$\dot{\Sigma}_{eq} = \left[\left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_1} \right)^2 \Sigma_1 + \left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_2} \right)^2 \Sigma_2 \right] D_{eq} \quad (1.74)$$

Dans le cas d'un comportement rigide-plastique sous conditions de contraintes planes, l'équivalence du travail plastique s'écrit sous la forme $\Sigma_{eq} D_{eq} = \Sigma_1 D_1 + \Sigma_2 D_2$, ce qui permet d'écrire en vertu de la relation (1.71) :

$$\Sigma_{eq} = \left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_1} \right) \Sigma_1 + \left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_2} \right) \Sigma_2 \quad (1.75)$$

Le rapport des équations (1.74) et (1.75) donne la forme générale du critère de striction diffuse de (Swift, 1952), tel que :

$$\frac{\dot{\Sigma}_{eq}}{\Sigma_{eq} D_{eq}} = \frac{\left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_1} \right)^2 \Sigma_1 + \left(\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_2} \right)^2 \Sigma_2}{\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_1} \Sigma_1 + \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_2} \Sigma_2} \quad (1.76)$$

Pour un comportement rigide-plastique avec écrouissage isotope, il est possible d'établir une expression analytique du critère de (Swift, 1952). En effet, pour un écrouissage décrit par la loi d'Hollomon, c.-à-d. $\gamma = k^H (D_{eq})^{n^H}$, où k^H et n^H représentent des paramètres d'écrouissage liés au taux de croissance de la surface de plasticité, on peut montrer que les déformations principales majeure E_{MAJ} et mineure E_{MIN} s'expriment sous la forme (Ben Tahar, 2005) :

$$E_{MAJ} = \frac{4n^H (1-\alpha/2)(1-\alpha+\alpha^2)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3}; \quad E_{MIN} = \frac{4n^H (\alpha-1/2)(1-\alpha+\alpha^2)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \quad (1.77)$$

où $\alpha = \Sigma_{22}/\Sigma_{11}$. En règle générale, le tracé des C.L.F est obtenu à partir de la striction localisée, phénomène précurseur de la rupture ductile. Dans les deux prochaines sections, nous présentons certaines extensions apportées au P.F.M. dans le but de prédire la striction localisée.

B.2.2 Critère du taux d'extension nul

Le critère développé dans (Hill, 1952) et (Hill, 2001), représente une extension du critère de (Considère, 1885) au cas d'un chargement biaxial, dédié cette fois à la prédiction de la striction localisée. Ce critère est basé sur deux hypothèses, permettant d'une part de prédire l'orientation de la bande de localisation et d'autre part, de fournir une condition d'apparition de la localisation. L'orientation de la bande est obtenue en supposant que le taux de déformation transversal le long de celle-ci s'annule au moment de la localisation. Cette hypothèse s'exprime sous la forme :

$$D_{tt} = 0 = D_1 (\sin^2 \Psi + \beta \cos^2 \Psi) \quad (1.78)$$

avec :

$$\beta = D_2/D_1 \quad (1.79)$$

où D_{tt} représente la composante du taux de déformation portée par le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{t}}$ (voir Figure 1.10). En combinant les relations (1.78) et (1.79), on obtient l'angle d'inclinaison de la bande tel que $\Psi = \arctg(\sqrt{-\beta})$. L'expression de Ψ implique nécessairement que le critère de (Hill, 1952) ne peut prédire une localisation que lorsque les déformations principales mineures sont négatives. En d'autres termes, le critère de (Hill, 1952) ne permet de prédire que la partie gauche de la courbe limite de formage.

La seconde hypothèse sur laquelle repose le critère de (Hill, 1952) indique que la localisation apparaît lorsqu'il y a stationnarité de l'effort normal à travers la bande, ce qui permet d'écrire :

$$\dot{F}_n = 0 \quad (1.80)$$

tel que F_n représente la composante du vecteur force portée par le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{n}}$. Dans le cas d'un comportement rigide-plastique, la relation (1.80) peut être réécrite, sous une forme similaire au critère de Considère, exprimée toutefois dans un repère particulier lié à la bande de localisation tel que :

$$\dot{\Sigma}_{nn}/D_{nn} = \Sigma_{nn} \quad (1.81)$$

où D_{nn} représente la composante du tenseur taux de déformation portée par le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{n}}$. En supposant que la tôle est soumise à un chargement plan, et compte tenu de la relation (1.71) on a :

$$\dot{\Sigma}_{eq}/\Sigma_{eq} = \dot{\Sigma}_{nn}/\Sigma_{nn} \quad (1.82)$$

ce qui permet de réécrire le critère donné par la relation (1.81) sous la forme :

$$\frac{\dot{\Sigma}_{eq}}{\Sigma_{eq} D_{eq}} = \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_1} + \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Sigma_2} \quad (1.83)$$

Le critère défini par la relation (1.83) peut également mener à une expression analytique des déformations principales majeure et mineure. En effet, pour un comportement rigide-plastique simplifié, décrit par une surface de charge de von Mises et un écrouissage isotrope suivant la loi d'Hollomon, on peut montrer que (voir e.g. (Ben Tahar, 2005), (Altmeyer, 2011)) :

$$E_{MAJ} = n^H (2 - \alpha)/(1 + \alpha); E_{MIN} = n^H (2\alpha - 1)/(1 + \alpha) \quad (1.84)$$

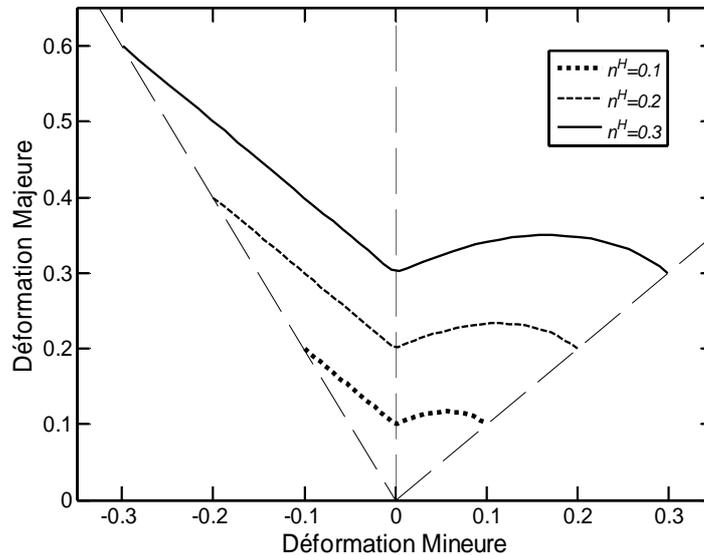


Figure 1.11 : Prédiction d'une C.L.F en combinant les critères de (Hill, 1952) et de (Swift, 1952). Sensibilité des limites de formage par rapport à l'exposant d'écrouissage de la loi d'Hollomon.

Une approche simple et pratique, permettant d'évaluer approximativement les limites de formabilité d'un matériau donné, serait de combiner les critères de (Hill, 1952) et de (Swift, 1952). Ainsi, le critère de (Hill, 1952) est utilisé pour prédire la partie gauche de la C.L.F, alors que le critère (Swift, 1952) permet de prédire la partie droite (voir Figure 1.11). À noter que l'utilisation du critère de (Swift, 1952) comme indicateur de localisation peut mener à des limites de formage trop conservatives dans le domaine de l'expansion.

B.2.3 Critère de Force Maximum Modifié

Les insuffisances concernant les critères discutés dans les précédents paragraphes ont mené certains auteurs à proposer d'autres extensions du Principe de Force Maximum (Hora et al., 1996), (Mattiasson et al., 2006), (Aretz, 2007), (Hora et al., 2013). Le critère de Force Maximum Modifié proposé initialement par (Hora et al., 1996), représente une extension empirique du Principe de Force Maximum dédié à la prédiction de la striction localisée. Il a ensuite été adapté à un comportement en plasticité orthotrope avec endommagement dans (Brunet & Morestin, 2001). Nous passerons brièvement en revue ce critère tel qu'il est décrit dans (Hora et al., 1996), (Aretz, 2004) et (Hora et al., 2013).

Contrairement au critère de (Swift, 1952), (Hora et al., 1996) supposent que la striction localisée apparaît lorsqu'il y a stationnarité de l'un des efforts appliqués à la tôle. En d'autres termes, on suppose que la striction localisée apparaît lorsque l'une des relations suivantes est satisfaite :

$$\begin{cases} dF_1 = 0 \Rightarrow \frac{dF_1}{F_1} = \frac{d\Sigma_1}{\Sigma_1} - dE_1 = 0 \\ dF_2 = 0 \Rightarrow \frac{dF_2}{F_2} = \frac{d\Sigma_2}{\Sigma_2} - dE_2 = 0 \end{cases} \quad (1.85)$$

Outre la stationnarité de l'effort, le critère de (Hora et al., 1996), (Hora et al., 2013), repose sur une seconde hypothèse, issue de certaines observations expérimentales. Ces observations indiquent une dépendance des déformations principales par rapport au trajet de chargement considéré. Selon (Hora et al., 1996), (Hora et al., 2013), cette hypothèse revient à considérer que durant le chargement, les contraintes principales Σ_1 et Σ_2 dépendent d'une part des déformations principales E_1 et E_2 , et d'autre part, du rapport des déformations principales $\beta = E_2/E_1$ tel que :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \Sigma_1(E_1, \beta) \\ \Sigma_2 &= \Sigma_2(E_2, \beta) \end{aligned} \quad (1.86)$$

Conformément à ce qui existe dans la littérature, nous considérons que $\Sigma_1 > \Sigma_2, \forall \beta$. En injectant la relation (1.86) dans la relation (1.85), on obtient :

$$\frac{d\Sigma_1}{dE_1} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial E_1} + \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial E_1} = \Sigma_1 \quad (1.87)$$

Il est possible d'exprimer les termes Σ_1 et E_1 respectivement, en fonction de la contrainte équivalente Σ_{eq} et de la déformation plastique équivalente E_{eq} tel que :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= f_H(\alpha) \Sigma_{eq} \\ E_{eq} &= g_H(\beta) E_1 \end{aligned} \quad (1.88)$$

où f_H et g_H représentent des fonctions scalaires positives et $\alpha = \Sigma_2/\Sigma_1$. En Supposant que la tôle est soumise à des incréments de chargement linéaires, et en vertu de la loi d'écoulement (voir relation (1.71)), on a :

$$\beta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{D_2}{D_1} \Rightarrow \beta = \frac{\partial \mathcal{F}_{vM} / \partial \Sigma_2}{\partial \mathcal{F}_{vM} / \partial \Sigma_1} = \beta(\alpha) \quad (1.89)$$

Par ailleurs, l'équivalence du travail plastique est donnée par la relation :

$$\Sigma_{eq} E_{eq} = \Sigma_1 E_1 + \Sigma_2 E_2 \quad (1.90)$$

En injectant les relations (1.88) et (1.89) dans l'équation (1.90), on obtient :

$$g_H(\beta) = f_H(\alpha) (1 + \alpha \cdot \beta(\alpha)) \quad (1.91)$$

D'autre part, la relation (1.87) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \Sigma_{eq}} \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial E_{eq}} \frac{\partial E_{eq}}{\partial E_1} + \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial E_1} = \Sigma_1 \quad (1.92)$$

En combinant les relations (1.88), (1.90) et (1.91), on obtient :

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \beta} = \frac{\partial f_H}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \Sigma_{eq} \quad (1.93)$$

Pour un comportement rigide-plastique, une fois l'état de régime plastique obtenu, nous avons l'identité $\Sigma_{eq} = \mathcal{Y}$. En injectant cette identité dans la relation (1.92), et compte tenu des relations (1.88) et (1.93), on obtient :

$$\frac{1}{\mathcal{Y}} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial E_{eq}} = \frac{1}{f_H \cdot g_H} \left(f_H - \frac{\partial f_H / \partial \alpha}{\partial \beta / \partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial E_1} \right) \quad (1.94)$$

D'autre part, en vertu de la relation (1.89), on peut écrire que :

$$\beta = \frac{D_2}{D_1} = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial E_1} = -\frac{E_2}{E_1^2} = -\frac{\beta}{E_1} \quad (1.95)$$

En injectant cette dernière relation dans la relation (1.94), on obtient l'expression du critère de Force Maximum Modifié qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{\mathcal{Y}} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial E_{eq}} = \frac{1}{g_H} + \frac{\partial f_H / \partial \alpha}{f_H} \frac{\beta}{\partial \beta / \partial \alpha} \frac{1}{E_{eq}} \quad (1.96)$$

Une expression analytique des déformations principales majeure et mineure peut être obtenue pour un comportement décrit par le critère de charge de von Mises avec une loi d'écroutissage isotope d'Hollomon, (Altmeyer, 2011) :

$$E_{MAJ} = n^H + \frac{4(1-\alpha/2)(1/2-\alpha)^2}{3(1-\alpha+\alpha^2)}; E_{MIN} = \frac{\alpha-1/2}{1-\alpha/2} n^H + \frac{4(\alpha-1/2)^3}{3(1-\alpha+\alpha^2)} \quad (1.97)$$

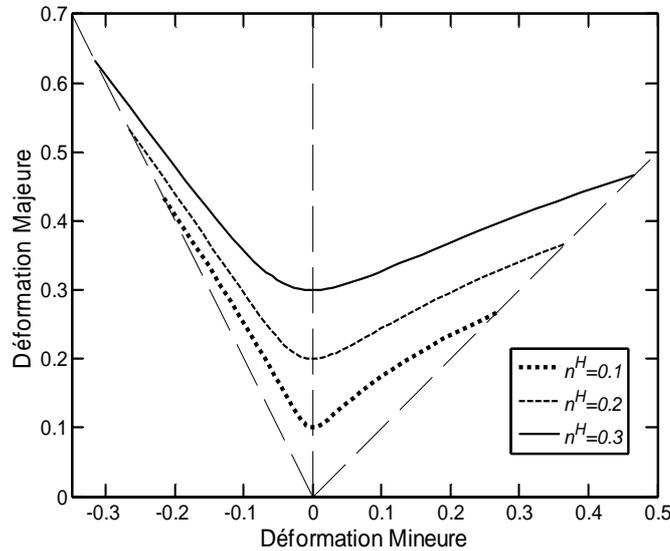


Figure 1.12 : Courbes limites de formage obtenues à partir du Critère de Force Maximum Modifié pour une loi d'écroutissage d'Hollomon.

La figure précédente illustre des C.L.F obtenues à partir de la relation (1.97) pour différentes valeurs du coefficient d'écroutissage n^H , où l'on peut remarquer que les tendances sont en accord avec celles obtenues à partir des critères de (Hill, 1952) et (Swift, 1952). Certaines précautions doivent être prises quant à l'utilisation du critère de Force Maximum Modifié. En

effet, dans (Aretz, 2004), il a été montré que le critère donné par la relation (1.96) peut mener à une singularité en β pour des surfaces de charges comportant des facettes. Enfin, contrairement à la quasi-totalité des critères permettant de prédire la striction localisée, le critère de Force Maximum Modifié ne fournit aucune information quant à l'orientation de la bande de localisation.

B.3 Analyse de Bifurcation

Dans cette partie, nous nous intéressons aux critères d'unicité et de stabilité locale des solides anélastiques, basés sur l'Analyse de Bifurcation. Ces critères conduisent généralement à une analyse de valeurs propres du module tangent élasto-plastique ou bien du tenseur acoustique. Ce dernier étant obtenu à partir du module tangent élasto-plastique, son expression sera définie dans le paragraphe dédié au critère de (Rice, 1976). Afin de formuler ces critères dans un cadre de transformations finies, il convient d'identifier les modules tangents intervenant dans les différentes configurations.

En configuration courante, la loi hypo-élastique permet de relier le taux de déformation \mathbf{D} à une dérivée objective du tenseur de contrainte de Cauchy $\dot{\underline{\Sigma}}^{\nabla}$ tel que :

$$\dot{\underline{\Sigma}}^{\nabla} = \underline{\mathbb{L}} : \mathbf{D} \quad (1.98)$$

où $\underline{\mathbb{L}}$ représente le module tangent analytique. L'expression générale de $\underline{\mathbb{L}}$ pour la classe de comportement considérée dans la première partie de ce chapitre prend la forme :

$$\underline{\mathbb{L}} = \underline{\mathbb{C}}^e - \alpha \frac{(\underline{\mathbb{C}}^e : \underline{\mathbb{Q}}) \otimes (\underline{\mathbb{P}} : \underline{\mathbb{C}}^e)}{\mathcal{H}_{\lambda}} \quad (1.99)$$

où $\underline{\mathbb{C}}^e$ représente le tenseur des propriétés élastiques, $\underline{\mathbb{P}}$ et $\underline{\mathbb{Q}}$ désignent, respectivement, les normales au potentiel plastique et à la surface de charge et \mathcal{H}_{λ} un scalaire qui dépend des variables internes. Le scalaire α est égal à un pour un chargement élasto-plastique et à zéro autrement. On commence par relier les différentes mesures de contrainte correspondant à une configuration donnée tel que (Sidoroff, 1982) :

$$\underline{\Sigma} = J^{-1} \underline{\mathbb{F}} \cdot \underline{\mathbb{N}} = J^{-1} \underline{\mathbb{F}} \cdot \underline{\mathbb{B}}^T \quad (1.100)$$

où $\underline{\mathbb{F}}$ représente le gradient de la transformation et $J = \det(\underline{\mathbb{F}})$ le Jacobien de la transformation. $\underline{\mathbb{N}}$ désigne le tenseur de contrainte nominale et $\underline{\mathbb{B}} = \underline{\mathbb{N}}^T$ le tenseur de Boussinesq, appelé également premier tenseur de Piola-Kirchhoff, ou encore tenseur de Piola-Lagrange. Contrairement à $\underline{\Sigma}$, $\underline{\mathbb{N}}$ et $\underline{\mathbb{B}}$ ne sont pas symétriques. En vertu de la relation (1.100), la loi hypo-élastique peut être réécrite à partir des variables conjuguées $\dot{\underline{\mathbb{N}}}$ et $\underline{\mathbb{G}}$ ou bien $\dot{\underline{\mathbb{B}}}$ et $\underline{\mathbb{F}}^{\dot{}}$. Ainsi, la relation (1.98) peut se réécrire sous la forme :

$$\dot{\underline{\mathbb{N}}} = \underline{\mathbb{L}}^{\mathbb{N}} : \underline{\mathbb{G}} \quad (1.101)$$

en configuration Lagrangienne actualisée, ou bien :

$$\dot{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}} : \dot{\underline{\mathbf{F}}} \quad (1.102)$$

en configuration mixte. Afin d'établir l'expression du module tangent $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}}$, on dérive temporellement la relation (1.100), ce qui donne :

$$J\dot{\underline{\underline{\Sigma}}} + J\dot{\underline{\underline{\Sigma}}} = \dot{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \underline{\mathbf{F}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} \quad (1.103)$$

On peut montrer que la dérivée temporelle du Jacobien J est donnée par $\dot{J} = J \text{tr}(\underline{\mathbf{D}})$, ce qui permet de réécrire la relation (1.103) sous la forme :

$$J \left(\text{tr}(\underline{\mathbf{D}}) \underline{\underline{\Sigma}} + \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} - \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \right) = \underline{\mathbf{F}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} \quad (1.104)$$

On obtient ainsi le taux de contrainte nominale sous la forme :

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} = J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \left(\text{tr}(\underline{\mathbf{D}}) \underline{\underline{\Sigma}} + \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} - \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \right) \quad (1.105)$$

Considérons à présent que la dérivée objective intervenant dans la loi hypo-élastique correspond à une dérivée de Jaumann définie par :

$$\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}^{\nabla} = \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} - \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\mathbf{W}} \quad (1.106)$$

où $\underline{\mathbf{W}}$ représente le tenseur taux de rotation, donné par la partie anti-symétrique du gradient de vitesse $\underline{\mathbf{G}}$. En configuration Lagrangienne actualisée, on a $J=1$ et $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}}$ (Sidoroff, 1982), ce qui permet de réécrire la relation (1.105) sous la forme :

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} : \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\mathbf{W}} + \underline{\underline{\Sigma}} \text{tr}(\underline{\mathbf{D}}) - \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \quad (1.107)$$

Ou encore, en utilisant la définition de $\underline{\mathbf{G}}$:

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} : \underline{\mathbf{D}} - \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\mathbf{W}} + \underline{\underline{\Sigma}} \text{tr}(\underline{\mathbf{D}}) - \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \quad (1.108)$$

En identifiant cette dernière relation avec la relation (1.101), on peut montrer que le module tangent $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} + \underline{\underline{\mathbf{L}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{L}}}_2 - \underline{\underline{\mathbf{L}}}_3 \quad (1.109)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{1ijkl} = \Sigma_{ij} \delta_{kl}$, $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{2ijkl} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \Sigma_{lj} + \delta_{il} \Sigma_{kj}]$ et $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{3ijkl} = \frac{1}{2} [\Sigma_{ik} \delta_{lj} - \Sigma_{il} \delta_{jk}]$ sont appelés termes convectifs (voir Annexe 1). Afin de déterminer l'expression du module $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}}$, il suffit de différentier la partie droite de la relation (1.100), ce qui donne :

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} = \dot{\underline{\mathbf{B}}}^{\text{T}} \Leftrightarrow \left(\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} : \dot{\underline{\mathbf{F}}} \right) = \left(\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}} : \dot{\underline{\mathbf{F}}} \right)^{\text{T}} \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}} = {}^{\text{T}} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} \quad (1.110)$$

tel que ${}^{\text{T}} \bullet_{ijkl} = \bullet_{jikl}$. En combinant les relations (1.109) et (1.110), on obtient :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}} = {}^{\text{T}} \underline{\underline{\mathbf{L}}} + {}^{\text{T}} \underline{\underline{\mathbf{L}}}_1 - {}^{\text{T}} \underline{\underline{\mathbf{L}}}_2 - {}^{\text{T}} \underline{\underline{\mathbf{L}}}_3 \quad (1.111)$$

Les termes convectifs $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_1$, $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_2$ et $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_3$ ont été obtenus en considérant la dérivée de Jaumann. À noter que pour certaines classes de comportement (ex. comportements avec anisotropie initiale ou induite), le choix de la dérivée objective a une importance notable quant à la prédiction de la localisation (Tvergaard & van der Giessen, 1991), (Kuroda, 1996).

Néanmoins, dans le cas d'un comportement isotrope, le choix de la dérivée objective n'influe pas sur la prédiction de la localisation.

B.3.1 Bifurcation Générale

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'écriture du critère de Bifurcation Générale en transformations finies. Ce critère constitue une condition d'exclusion de toute bifurcation du problème aux valeurs limites écrit en vitesse (c.-à-d. écrit sous forme incrémentale). Autrement dit, il s'agit de définir une condition garantissant l'unicité de la solution du problème considéré. Ce critère a été proposé initialement par (Hill, 1957) pour les solides rigides parfaitement plastique, puis étendu aux solides élasto-plastiques dans (Hill, 1958).

Considérons un solide Ω_0 , soumis à des efforts volumiques $\bar{\mathbf{b}}_0$, à des efforts imposés $\bar{\mathbf{t}}_0$ sur une partie de sa frontière $\partial_T \Omega_0$ et à des déplacements imposés $\bar{\mathbf{U}}_0$ sur une partie de sa frontière $\partial_U \Omega_0$. Les frontières du solide $\partial_T \Omega_0$ et $\partial_U \Omega_0$ sont telles que :

$$\partial_T \Omega_0 \cup \partial_U \Omega_0 = \partial \Omega_0 \text{ et } \partial_T \Omega_0 \cap \partial_U \Omega_0 = \emptyset \quad (1.112)$$

Les équations d'équilibre quasi-statique et les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{b}}_0 = \bar{\mathbf{0}} & \text{sur } \Omega_0 \\ \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0 & \text{sur } \partial_T \Omega_0 \\ \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}}_0 & \text{sur } \partial_U \Omega_0 \end{cases} \quad (1.113)$$

À noter que l'opérateur divergence qui apparait dans la relation (1.113), fait référence à un point matériel $\bar{\mathbf{x}}_0$ dans la configuration fixe (c.-à-d. $\bar{\nabla} = (\partial/\partial \bar{\mathbf{x}}_0)$). Le principe des travaux virtuels indique que « *pour tout champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible $\bar{\mathbf{v}}_0^*$, la somme des travaux des efforts intérieurs et extérieurs est nulle quel que soit le domaine Ω_0 du solide considéré* ». En configuration Lagrangienne, ce principe s'écrit sous la forme (Hill, 1978), (Sidoroff, 1982) :

$$-\int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{B}} : \dot{\bar{\mathbf{F}}}^* d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{b}}_0 \cdot \bar{\mathbf{v}}_0^* d\Omega_0 + \int_{\partial_T \Omega_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \bar{\mathbf{v}}_0^* dS_0 = 0 \quad (1.114)$$

En considérant que le chargement est appliqué de manière incrémentale, la relation (1.114) devient :

$$-\int_{\Omega_0} \dot{\bar{\mathbf{B}}} : \dot{\bar{\mathbf{F}}}^* d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \dot{\bar{\mathbf{b}}}_0 \cdot \bar{\mathbf{v}}_0^* d\Omega_0 + \int_{\partial_T \Omega_0} \dot{\bar{\mathbf{t}}}_0 \cdot \bar{\mathbf{v}}_0^* dS_0 = 0 \quad (1.115)$$

Afin de tester l'unicité du problème aux limites incrémental défini par les relations (1.112), (1.113) et (1.115), considérons les variables conjuguées $(\dot{\bar{\mathbf{B}}}^{(1)}, \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{(1)})$ et $(\dot{\bar{\mathbf{B}}}^{(2)}, \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{(2)})$ comme étant deux solutions distinctes du problème. En injectant ces deux solutions dans l'équation (1.115) on obtient :

$$\begin{cases} -\int_{\Omega_0} \dot{\mathbf{B}}^{(1)} : \dot{\mathbf{F}}^* d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \vec{\mathbf{b}}_0 \cdot \vec{\mathbf{v}}_0^* d\Omega_0 + \int_{\partial_r \Omega_0} \vec{\mathbf{t}}_0 \cdot \vec{\mathbf{v}}_0^* dS_0 = 0 \\ -\int_{\Omega_0} \dot{\mathbf{B}}^{(2)} : \dot{\mathbf{F}}^* d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \vec{\mathbf{b}}_0 \cdot \vec{\mathbf{v}}_0^* d\Omega_0 + \int_{\partial_r \Omega_0} \vec{\mathbf{t}}_0 \cdot \vec{\mathbf{v}}_0^* dS_0 = 0 \end{cases} \quad (1.116)$$

Puisque la relation (1.115) est valable pour tout champs de vitesse cinématiquement admissible $\vec{\mathbf{v}}_0^*$, elle reste valable en particulier pour $\vec{\mathbf{v}}_0^* = \vec{\mathbf{v}}_0^{(1)} - \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)}$. En combinant les deux dernières relations on obtient :

$$\int_{\Omega_0} \left(\dot{\mathbf{B}}^{(1)} - \dot{\mathbf{B}}^{(2)} \right) : \dot{\mathbf{F}}^* d\Omega_0 = 0 \quad (1.117)$$

En injectant la relation (1.101) dans la relation (1.117), cette dernière se réécrit sous la forme :

$$\mathfrak{S} \left(\vec{\mathbf{v}}_0^{(1)}, \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} \right) = \int_{\Omega_0} \left(\mathcal{L}^{\mathbf{B}} \left(\dot{\mathbf{F}}^{(1)} \right) : \dot{\mathbf{F}}^{(1)} - \mathcal{L}^{\mathbf{B}} \left(\dot{\mathbf{F}}^{(2)} \right) : \dot{\mathbf{F}}^{(2)} \right) : \left(\dot{\mathbf{F}}^{(1)} - \dot{\mathbf{F}}^{(2)} \right) d\Omega_0 = 0 \quad (1.118)$$

Une condition suffisante d'unicité serait d'écrire :

$$\mathfrak{S} \left(\vec{\mathbf{v}}_0^{(1)}, \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} \right) > 0, \quad \forall \left(\vec{\mathbf{v}}_0^{(1)}, \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} \right) \in C.A. \text{ et } \vec{\mathbf{v}}_0^{(1)} \neq \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} \quad (1.119)$$

où *C.A.* représente l'espace des champs de vitesse cinématiquement admissibles. Pour un comportement en plasticité associée, où la normalité de la loi d'écoulement est vérifiée, (Hill, 1958) a montré que \mathfrak{S} est toujours minorée par une fonctionnelle \mathcal{H} tel que : $\mathfrak{S} \left(\vec{\mathbf{v}}_0^{(1)}, \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} \right) \geq \mathcal{H} \left(\vec{\mathbf{v}}_0^{(1)}, \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} \right)$. La fonctionnelle \mathcal{H} est obtenue en considérant le solide linéaire de comparaison pour lequel aucune décharge n'est permise, c.-à-d. le matériau se charge uniformément avec le module tangent $\mathcal{L}^{\mathbf{B}}$. En d'autres termes, si l'unicité de la solution est garantie pour le solide linéaire de comparaison, elle sera forcément garantie pour le solide réel. La fonctionnelle de Hill s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega_0} \Delta \dot{\mathbf{F}} : \mathcal{L}^{\mathbf{B}} : \Delta \dot{\mathbf{F}} d\Omega_0 \quad (1.120)$$

avec $\Delta \dot{\mathbf{F}} = \left(\dot{\mathbf{F}}^{(1)} - \dot{\mathbf{F}}^{(2)} \right)$. La condition $\mathcal{H} > 0$ constitue une condition suffisante d'exclusion de toute bifurcation du problème aux limites incrémental. En effet, le critère donné par la relation (1.120) sous forme intégrale constitue une condition d'exclusion de toute bifurcation, ce qui inclut les instabilités géométriques comme le flambage ou le voilement. Etant donné que nous nous intéressons dans ce travail à l'étude des instabilités locales (ou matérielles), il est possible de définir à partir de la relation (1.120) une condition d'unicité locale telle que (Neilsen & Schreyer, 1993) :

$$\Delta \dot{\mathbf{F}} : \mathcal{L}^{\mathbf{B}} : \Delta \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \quad (1.121)$$

La relation (1.121), appelée positivité du travail de second ordre, constitue une condition encore plus restrictive que le critère défini par la relation (1.119), dont elle découle.

B.3.2 Bifurcation par Point Limite

Le critère de Bifurcation Générale décrit précédemment peut être associé à un taux de contrainte non-nul dans tout le domaine considéré (Neilsen & Schreyer, 1993). Une condition moins conservative, susceptible de correspondre à l'apparition de la striction diffuse, serait d'imposer la nullité du taux de contrainte. Cette dernière condition peut être écrite sous la forme (Valanis, 1989), (Neilsen & Schreyer, 1993) :

$$\dot{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}(\underline{\dot{\mathbf{F}}}) : \underline{\dot{\mathbf{F}}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (1.122)$$

Le système d'équations (1.122) possède une solution si, et seulement si, le module tangent $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}(\underline{\dot{\mathbf{F}}})$ est singulier. Par conséquent, le critère de Bifurcation par Point Limite peut se réécrire sous la forme :

$$\det(\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}) = 0 \quad (1.123)$$

Dans (Altmeyer, 2011), il a été montré que le critère donné par la relation (1.122) correspond à une généralisation du critère de (Swift, 1952) au cas d'un chargement tridimensionnel. En effet, si on généralise l'hypothèse de (Swift, 1952), en considérant que l'apparition de la striction diffuse correspond à une stationnarité simultanée des efforts appliqués, on a :

$$\underline{\dot{\mathbf{F}}} = \underline{\mathbf{0}}, \quad \underline{\dot{\mathbf{F}}} \neq \underline{\mathbf{0}} \quad (1.124)$$

En supposant que la tôle est soumise à un chargement plan, la troisième composante du vecteur force $\underline{\dot{\mathbf{F}}}$ est forcément nulle. La relation (1.124) se réécrit sous la forme :

$$\underline{\dot{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_0 ds_0 = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \underline{\dot{\mathbf{N}}} = \underline{\mathbf{0}} = \underline{\dot{\mathbf{B}}}^T \quad (1.125)$$

ce qui correspond au critère de Bifurcation par Point Limite. Notons également que ce critère ne fait pas d'hypothèses quant à la symétrie mineure ou majeure du module tangent $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}$. Dans le cas où $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}$ possède une symétrie majeure, on peut montrer que les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite deviennent équivalents.

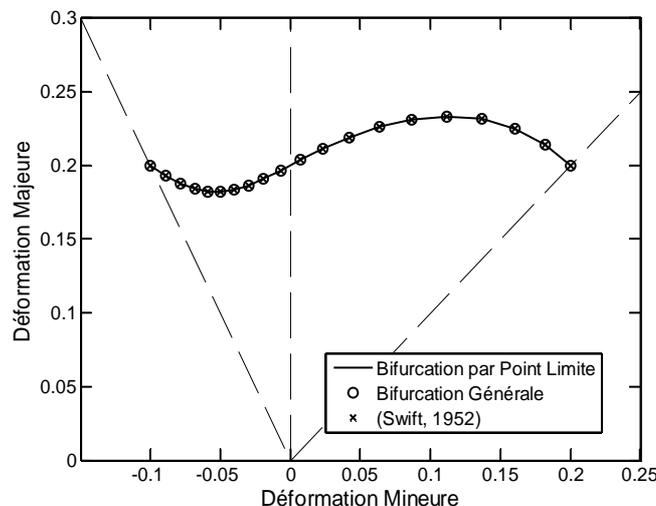


Figure 1.13 : Comparaison des différents critères BG, BPL et (Swift, 1952) pour un matériau décrit par une surface de charge de von Mises et une loi d'érouissage isotrope d'Hollomon.

La Figure 1.13 illustre les déformations principales majeure et mineure, à striction diffuse, obtenues à partir des critères de (Swift, 1952), BPL et BG. Le matériau considéré est décrit par une surface de charge de von Mises et un écrouissage isotrope suivant une loi puissance (loi d'écrouissage d'Hollomon). On remarque bien que les différents critères donnent les mêmes résultats, bien que le module tangent ne soit pas symétrique à cause de la présence des termes convectifs. Une analyse plus fine des termes convectifs responsables de la non-symétrie du module tangent montre néanmoins que ces termes sont faibles comparés à la partie principale du module tangent, ce qui explique pourquoi leur influence est trouvée quasi-négligeable pour les paramètres matériau considérés. Notons également que des résultats similaires ont été obtenus dans (Altmeyer, 2011) à partir d'un modèle d'endommagement continu.

B.3.3 Perte d'Ellipticité

Les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite présentés dans les paragraphes précédents ont été formulés à partir d'une configuration de référence fixe, en considérant les variables conjuguées $\dot{\mathbf{B}}$ et $\dot{\mathbf{F}}$. Nous faisons ici le choix de formuler le critère de Perte d'Ellipticité en configuration actuelle (c.-à-d. en configuration Lagrangienne actualisée), en utilisant les variables conjuguées $\dot{\mathbf{N}}$ et $\dot{\mathbf{G}}$. Par conséquent, la configuration de référence sera considérée comme étant l'état courant déformé. À noter qu'il est toujours possible de formuler le critère de Perte d'Ellipticité dans une configuration de référence fixe, puis d'adopter le cadre Lagrangien actualisé une fois le critère formulé (Needleman & Tvergaard, 1992), (Abed-Meraim, 2009).

Les fondements théoriques sur lesquels repose le critère de Perte d'Ellipticité ont été établis par (Hadamard, 1903) pour les solides élastiques puis, étendus aux solides anélastiques par (Thomas, 1962), (Hill, 1962), (Mandel, 1966) et (Rice, 1976). Dans cette approche, la localisation est perçue comme le passage brutal d'un état de déformation homogène, vers un état de déformation hétérogène présentant des plans de discontinuité du gradient de vitesse. À l'instant de localisation, il se produit une concentration des champs de déformation au sein des surfaces de discontinuités, ce phénomène étant précurseur à la rupture ductile (Rice, 1976).

Considérons à présent un solide homogène et infini Ω , soumis à un chargement quasi-statique. On cherche à déterminer le moment d'apparition d'une discontinuité du gradient de vitesse. Autrement dit, on cherche à déterminer la condition d'apparition d'une bifurcation sous forme d'une bande étroite de normale $\bar{\mathbf{n}}$ dans la configuration de référence. Définissons l'opérateur $\llbracket \bullet \rrbracket$, comme étant le saut d'une grandeur considérée entre l'intérieur et l'extérieur de la bande de discontinuité tel que $\llbracket \bullet \rrbracket = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$ (voir Figure 1.14).

Bien que l'apparition de la surface de discontinuité entraîne un saut du gradient de vitesse, le vecteur taux de contrainte nominale reste continu à travers la bande de localisation. Ainsi, on peut écrire :

$$\llbracket \bar{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{N}} \rrbracket = \bar{\mathbf{n}} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{N}} \rrbracket = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.126)$$

tel que $\bar{\mathbf{n}} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{N}} \rrbracket$ représente le saut du vecteur taux de contrainte nominale à travers la surface singulière et $\bar{\mathbf{n}}$ la normale à la surface singulière (voir Figure 1.14). La relation (1.126) est appelée condition d'équilibre statique.

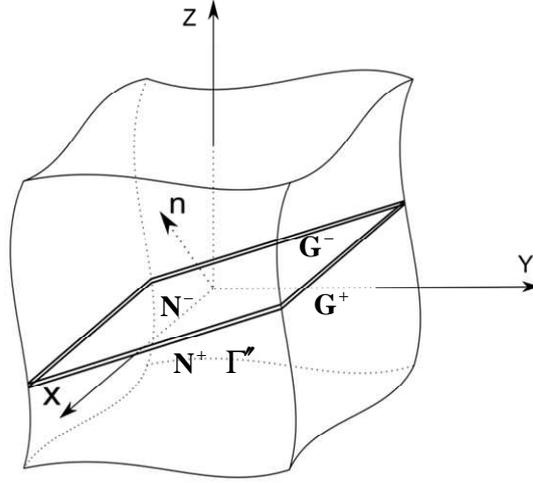


Figure 1.14 : Position du problème de localisation pour le critère de Perte d'Ellipticité (Rice, 1976).

Que ce soit en configuration Lagrangienne ou Eulérienne, la continuité du vecteur vitesse impose certaines restrictions quant à la forme du saut du gradient de vitesse $\llbracket \mathbf{G} \rrbracket$ à travers la surface singulière. En effet, le théorème de Maxwell, appelé également condition de compatibilité cinématique d'Hadamard (Hadamard, 1903), indique que le saut du gradient de vitesse s'écrit nécessairement sous la forme :

$$\llbracket \mathbf{G} \rrbracket = \llbracket \vec{\nabla} \vec{v} \rrbracket = \vec{g} \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (1.127)$$

où \vec{g} est appelé vecteur discontinuité de vitesse (Rice & Rudnicki, 1980), (Bigoni & Hueckel, 1991). Ce dernier caractérise le mode de localisation dès lors que la surface de discontinuité apparaît. Ainsi, lorsque \vec{g} et $\bar{\mathbf{n}}$ sont orthogonaux (c.-à-d. $\vec{g} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$), on a par définition une bande de cisaillement, alors que dans le cas où \vec{g} et $\bar{\mathbf{n}}$ sont colinéaires (c.-à-d. $\vec{g} \times \bar{\mathbf{n}} = \vec{0}$), on a ouverture de la bande de localisation. En configuration Lagrangienne actualisée, la loi hypo-élastique prend la forme :

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathcal{L}^{\mathbf{N}} : \mathbf{G} \quad (1.128)$$

En substituant la relation (1.128) dans la condition statique (1.126), on obtient :

$$\llbracket \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathcal{L}^{\mathbf{N}} : \mathbf{G} \rrbracket = \bar{\mathbf{n}} \cdot (\mathcal{L}^{\mathbf{N}} : \mathbf{G})^+ - \bar{\mathbf{n}} \cdot (\mathcal{L}^{\mathbf{N}} : \mathbf{G})^- = \vec{0} \quad (1.129)$$

Deux cas de figures se présentent à partir de la relation (1.129), selon la nature du saut du module tangent $\mathcal{L}^{\mathbf{N}}$ à travers la surface singulière. Considérons dans un premier temps que le saut du module tangent $\mathcal{L}^{\mathbf{N}}$ est identiquement nul, c'est-à-dire $\llbracket \mathcal{L}^{\mathbf{N}} \rrbracket = \underline{\underline{0}}$ à travers la surface singulière. La relation (1.129) nous donne :

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} : \llbracket \underline{\underline{\mathbf{G}}} \rrbracket = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.130)$$

En injectant la relation (1.127) dans la relation (1.130), on obtient :

$$\left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \cdot \bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.131)$$

Le système d'équations (1.131) admet une solution non triviale (c.-à-d. non-identiquement nulle) si, et seulement si :

$$\det(\underline{\underline{\mathcal{A}}}) = \det\left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{n}}\right) = 0 \quad (1.132)$$

où $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ est appelé tenseur acoustique. En plus d'être une condition de Perte d'Ellipticité des équations du problème à valeurs limites, la relation (1.132) correspond physiquement à la nullité de la vitesse de propagation des ondes d'accélération (Hill, 1962), (Mandel, 1966). En plasticité non-associée, le module tangent $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}}$ perd sa symétrie, indépendamment des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies. Par conséquent, le tenseur acoustique $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ peut posséder des valeurs propres complexes. L'hypothèse de continuité du module tangent $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}}$ à travers la surface singulière correspond en fait à une bifurcation continue, appelée également bifurcation plastique/plastique. Ce mode de localisation revient à supposer que tout le domaine considéré est en régime dissipatif lors de l'apparition de la bande de localisation. (Rice & Rudnicki, 1980) ont étudié l'éventualité d'une bifurcation discontinue (c.-à-d. bifurcation élastique/plastique), où $\llbracket \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} \rrbracket \neq \bar{\mathbf{0}}$. Ce dernier mode correspond à une décharge élastique du domaine extérieur de la bande, alors que l'intérieur de la bande continue en charge plastique. Il a été montré (voir (Rice & Rudnicki, 1980)) que la bifurcation élastique/plastique apparaît toujours après l'apparition de la bifurcation plastique/plastique. Nous reviendrons sur ce dernier point au chapitre 4.

Concernant la prédiction de la localisation à partir du critère de (Rice, 1976), certaines propriétés liées au comportement du matériau doivent être introduites au sein du modèle afin de prédire des points de bifurcations réalistes. En effet, pour un comportement décrit par une surface de charge lisse sans effets adoucissants, le tenseur acoustique demeure régulier quel que soit le niveau de déformation atteint. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire au sein du comportement, soit des points anguleux (points de vertex) sur la surface de charge, ou bien, introduire un effet adoucissant (Rudnicki & Rice, 1975), (Stören & Rice, 1975), (Rice, 1976). L'introduction de points anguleux sur la surface de charge peut être obtenue à partir d'un modèle de plasticité cristalline (Asaro & Rice., 1977), (Anand & Spitzig, 1980), (Franz et al., 2009), (Franz et al., 2013). Pour ce qui est des effets adoucissants, on utilise généralement des modèles de plasticité couplés à l'endommagement (Doghri & Billardon, 1995), (Haddag et al., 2009), (Mansouri et al., 2012). À noter que pour des modèles de plasticité dont la surface de charge présente des points de vertex, la Perte d'Ellipticité apparaît en régime d'écrouissage positif. Par contre, dans le cas où des effets adoucissants sont introduits dans le comportement en considérant une surface de plasticité lisse, la singularité du tenseur acoustique n'est possible que durant la phase adoucissante (Haddag et al., 2009).

B.3.4 Perte d'Ellipticité Forte

Le critère de Perte d'Ellipticité Forte représente une alternative au critère de (Rice, 1976), permettant de garantir la stabilité locale des solides élasto-plastiques. Ce critère a été formulé par (van Hove, 1947) pour les solides élastiques, puis étendu aux solides élasto-plastiques par (Bigoni & Zaccaria, 1992), (Bigoni, 1996). Des méthodes analytiques pour la détection de la Perte d'Ellipticité Forte ont été proposées dans (Szabó, 2000) sous l'hypothèse des petites perturbations, en considérant un modèle de plasticité décrit par une surface de charge de Drucker-Prager. Récemment, ce critère a été couplé à un modèle de plasticité cristalline, basé sur une transition d'échelle auto-cohérente afin d'étudier les limites de formabilité des aciers polycristallins (Franz et al., 2013).

Lors de la présentation du critère de Bifurcation Générale, nous avons montré que la forme locale de ce critère, en configuration Lagrangienne totale est donnée par :

$$\Delta \dot{\mathbf{F}} : \mathcal{L}^{\mathbf{B}} : \Delta \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \dot{\mathbf{F}}^T : {}^T \mathcal{L}^{\mathbf{B}} : \Delta \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \quad (1.133)$$

Etant donné que $\mathbf{G} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ et en vertu de la relation (1.110), la relation (1.133) se réécrit en configuration Lagrangienne actualisée sous la forme :

$$\Delta \mathbf{G}^T : \mathcal{L}^{\mathbf{N}} : \Delta \mathbf{G} \geq 0 \quad (1.134)$$

Il s'agit à présent d'introduire des conditions additionnelles d'admissibilité cinématique des modes de déformation, ce qui peut être établi à partir de la condition de compatibilité cinématique d'Hadamard tel que :

$$\Delta \mathbf{G} = \bar{\mathbf{g}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (1.135)$$

En injectant la relation (1.135) dans la relation (1.134), on obtient la condition de Perte d'Ellipticité Forte :

$$\bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{g}} : \mathcal{L}^{\mathbf{N}} : \bar{\mathbf{g}} \otimes \bar{\mathbf{n}} > 0, \quad \forall \bar{\mathbf{g}} \neq \mathbf{0}, \quad \|\bar{\mathbf{n}}\| = 1 \quad (1.136)$$

Ou bien, en introduisant le tenseur acoustique :

$$\bar{\mathbf{g}} \cdot \mathcal{A} \cdot \bar{\mathbf{g}} > 0, \quad \forall \bar{\mathbf{g}} \neq \mathbf{0}, \quad \|\bar{\mathbf{n}}\| = 1 \quad (1.137)$$

Le critère de Perte d'Ellipticité Forte, défini par la relation (1.137), assure la stabilité matérielle en tout point du solide tant que la partie symétrique du tenseur acoustique est définie positive. Dans le cas où le tenseur acoustique est symétrique (c.-à-d. lorsque le module tangent $\mathcal{L}^{\mathbf{N}}$ est symétrique), le critère de Perte d'Ellipticité Forte devient identique au critère de Rice (Perte d'Ellipticité). En outre, par analogie au critère de (Rice, 1976), l'utilisation du critère donné par la relation (1.137) comme indicateur de stabilité locale nécessite soit la présence de points anguleux sur la surface de charge, ou bien la présence d'un effet adoucissant.

B.4 Critère de striction localisée basé sur l'introduction d'un défaut initial (Marciniak-Kuczyński)

Les méthodes multizones constituent une alternative aux approches basées sur l'analyse de bifurcation, dans le but de prédire l'apparition de la striction localisée. Les fondements de ces

méthodes reposent sur des considérations semi-empiriques supposant la présence d'un défaut initial dans la tôle (Hart, 1967), (Marciniak & Kuczyński, 1967), (Ghosh, 1974), (Son & Kim, 2003), (Simha et al., 2007), (Eyckens et al., 2011). Dans cette section, nous présentons uniquement le modèle initié par Marciniak et Kuczyński (Marciniak & Kuczyński, 1967), (Marciniak et al., 1973), puis généralisé par (Hutchinson & Neale, 1978) que nous noterons par les lettres M-K. Dans un premier temps, les équations de base nécessaires à l'implantation numérique de cette approche seront décrites. Ensuite, un lien théorique établi entre le modèle M-K et le critère de Rice sera présenté conformément aux travaux de (Altmeyer, 2011). Dans un dernier temps, une réécriture du critère de défaut initial sera présentée, en introduisant un défaut de propriété du matériau constitué d'une concentration des sites d'endommagement (c.-à-d. porosité initiale, densité des inclusions).

Le critère M-K est probablement le critère de localisation le plus utilisé pour la détermination des courbes limites de formage (Zhou & Neale, 1995), (Banabic et al., 2005), (Eyckens et al., 2009). L'idée de départ de ce modèle est fondée sur une observation semi-empirique qui suppose initialement la présence d'une zone de défaut géométrique possédant une épaisseur légèrement inférieure au reste de la tôle. Ce défaut est caractérisé par une variable appelée facteur d'imperfection et notée f^{MK} , telle que sa valeur initiale est définie par :

$$f_0^{MK} = e_0^{(B)} / e_0^{(A)} < 1 \quad (1.138)$$

où $e_0^{(A)}$ et $e_0^{(B)}$ représentent, respectivement, l'épaisseur initiale de la tôle dans les zones homogène (notée (A)) et celle contenant le défaut (notée (B)). Le choix de la valeur de f_0^{MK} reste jusqu'à présent une question ouverte. Dans (Barlat, 1987), par exemple, l'auteur propose de prendre $f_0^{MK} = 0,996$ pour un alliage d'aluminium, alors que pour le même matériau, (Banabic et al., 2005) et (Barata da Rocha et al., 1985) proposent de prendre, respectivement, $f_0^{MK} = 0,97$ et $f_0^{MK} = 0,98$.

Outre le facteur d'imperfection, on définit généralement un critère d'arrêt indiquant l'apparition de la striction localisée. Ce critère d'arrêt repose sur la comparaison de certains champs mécaniques entre les zones saine et défectueuse. Parmi les critères d'arrêt utilisés dans la littérature, on trouve (Cao et al., 2000), (Banabic et al., 2005) :

$$D_{eq}^{(B)} / D_{eq}^{(A)} > N_L \quad (1.139)$$

où $D_{eq}^{(A)}$ et $D_{eq}^{(B)}$ représentent, respectivement, le taux de déformation plastique équivalente dans les zones (A) et (B), et N_L un paramètre à définir par l'utilisateur. Le paramètre N_L doit être suffisamment grand de manière à retrouver un état plan de déformation dans la zone défectueuse au moment de la localisation. Ce paramètre adimensionnel, varie généralement entre 7 et 10 (Cao et al., 2000), (Banabic et al., 2005), mais peut parfois atteindre une valeur de 300 (Wu et al., 2003).

B.4.1 Implantation du critère de Marciniak-Kuczyński

Afin de vérifier le critère d'arrêt donné par la relation (1.139), il convient à chaque incrément de chargement, de réactualiser les champs de contrainte et de déformation ainsi que les variables internes dans les deux zones (A) et (B). Concernant la zone saine, la réactualisation de ces grandeurs se fait en utilisant la théorie incrémentale de la plasticité, décrite au chapitre deux de ce mémoire. Par conséquent, nous décrivons uniquement le raisonnement permettant de déterminer à chaque incrément de chargement, l'état de contrainte et de déformation dans la zone défectueuse. En outre, nous donnons la loi d'évolution du facteur d'imperfection f^{MK} caractérisant la taille relative du défaut ainsi que son orientation par rapport aux axes de chargement.

Dans l'approche originale de (Marciniak & Kuczyński, 1967), la normale au défaut était considérée constante au cours du chargement, et portée par l'axe de chargement principal. Bien que cette approche reproduise des résultats satisfaisants dans le domaine de l'expansion, elle surestime néanmoins la formabilité des tôles dans le domaine du retreint. L'extension proposée par (Hutchinson & Neale, 1978) tend à remédier à cet inconvénient, en considérant une orientation initiale quelconque du défaut. En outre, le défaut subit d'une part une déformation (allongement dans les deux directions) et d'autre part, une rotation de corps rigide autour de l'axe perpendiculaire au plan de chargement. Chaque point de la courbe limite de formage est obtenu en faisant tourner la normale au défaut d'un quart de cercle $\Psi \in [0^\circ, 90^\circ]$ tel que :

$$E_{MAJ}^{(A)} = \text{Min} \left\{ E_{MAJ}^{(A)}(\Psi_0) / \Psi_0 \in [0^\circ, 90^\circ] \right\} \quad (1.140)$$

où $E_{MAJ}^{(A)}$ représente la déformation principale majeure. Supposons à présent que (x_0, y_0) représentent les coordonnées d'un point P situé sur la frontière entre les zones (A) et (B) en configuration initiale (avant chargement). En configuration courante, la position du point P sera notée par (x, y) . Au cours du chargement, les composantes du tenseur de déformation suivant les axes principaux à l'incrément $n+1$ sont données par les relations :

$$E_x^{(A)} = \ln(x/x_0), \quad E_y^{(A)} = \ln(y/y_0) \quad (1.141)$$

En combinant les deux dernières équations, on obtient :

$$E_x^{(A)} - E_y^{(A)} = \ln(x y_0 / y x_0) \Rightarrow x/y = \left[\exp(E_x^{(A)} - E_y^{(A)}) \right] x_0 / y_0 \quad (1.142)$$

Ainsi, l'angle d'inclinaison du défaut en configuration courante est donné par :

$$\tan \Psi = \exp \left[(1 - \beta) E_x^{(A)} \right] \tan(\psi_0) \quad (1.143)$$

où ψ_0 représente l'angle d'inclinaison du défaut avant chargement. La relation (1.143) permet de déterminer à tout moment l'orientation du défaut tel que :

$$\bar{\mathbf{n}} = (\cos \Psi, \sin \Psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \Psi}} (1, \tan \Psi) \quad (1.144)$$

Afin de déterminer la loi d'évolution de la variable f^{MK} , on écrit les composantes de déformation logarithmique suivant l'épaisseur dans les deux zones (A) et (B) à l'incrément $n+1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} E_{z(n+1)}^{(A)} = \ln\left(e_{n+1}^{(A)}/e_0^{(A)}\right) &\Rightarrow e_{n+1}^{(A)} = e_0^{(A)} \exp\left(E_{z(n+1)}^{(A)}\right) \\ E_{z(n+1)}^{(B)} = \ln\left(e_{n+1}^{(B)}/e_0^{(B)}\right) &\Rightarrow e_{n+1}^{(B)} = e_0^{(B)} \exp\left(E_{z(n+1)}^{(B)}\right) \end{aligned} \quad (1.145)$$

La loi d'évolution du facteur d'imperfection $f_{n+1}^{MK} := e_{n+1}^{(B)}/e_{n+1}^{(A)}$ est obtenue en combinant les deux équations précédentes tel que :

$$f_{n+1}^{MK} := e_{n+1}^{(B)}/e_{n+1}^{(A)} = f_0^{MK} \exp\left(E_{z(n+1)}^{(B)} - E_{z(n+1)}^{(A)}\right) \quad (1.146)$$

Cette dernière relation possède un caractère implicite. Autrement dit, la variable f_{n+1}^{MK} dépend de la composante $E_{z(n+1)}^{(B)}$ qui n'est pas connue *a priori*. Cependant, dès lors que l'on considère des incréments de déformation relativement faibles ($\Delta\epsilon \leq 10^{-4}$), il est possible d'utiliser une forme explicite de la relation précédente tel que (Cao et al., 2000) :

$$f_{n+1}^{MK} = f_0^{MK} \exp\left(E_{z(n)}^{(B)} - E_{z(n)}^{(A)}\right) \quad (1.147)$$

En plus de la présence du défaut, on suppose que le taux de déformation transversal D_{tt} est identique entre les deux zones, ce qui permet d'écrire :

$$D_{tt}^{(B)} = D_{tt}^{(A)} \quad (1.148)$$

Avant rupture, la zone défectueuse doit nécessairement transmettre les efforts d'une zone saine à l'autre ; ainsi, on a :

$$e^{(B)} \underline{\underline{\Sigma}}^{(B)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} = e^{(A)} \underline{\underline{\Sigma}}^{(A)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} \quad (1.149)$$

En exprimant la relation (1.149) dans le repère local $(\underline{\underline{\mathbf{n}}}, \underline{\underline{\mathbf{t}}})$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}_{nn}^{(B)} & \underline{\underline{\Sigma}}_{nt}^{(B)} \\ \underline{\underline{\Sigma}}_{nt}^{(B)} & \underline{\underline{\Sigma}}_{tt}^{(B)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{f^{MK}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}_{nn}^{(A)} & \underline{\underline{\Sigma}}_{nt}^{(A)} \\ \underline{\underline{\Sigma}}_{nt}^{(A)} & \underline{\underline{\Sigma}}_{tt}^{(A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.150)$$

Cette dernière relation permet d'obtenir deux des trois composantes du tenseur de contrainte dans la zone défectueuse tel que :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_{nt}^{(B)} = \frac{1}{f^{MK}} \underline{\underline{\Sigma}}_{nt}^{(A)} \quad (1.151)$$

où f^{MK} est donné par la relation (1.147). À partir de la relation (1.143), on détermine l'orientation du repère local $(\underline{\underline{\mathbf{n}}}, \underline{\underline{\mathbf{t}}})$ par rapport au repère de chargement. Le tenseur de contrainte de Cauchy dans la zone saine est obtenu à partir d'une matrice de passage $\underline{\underline{\mathcal{Q}}}$ tel que :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_{nt}^{(A)} = \underline{\underline{\mathcal{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\Sigma}}_{xy}^{(A)} \cdot \underline{\underline{\mathcal{Q}}} \quad (1.152)$$

avec :

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_2 \end{bmatrix} \quad (1.153)$$

À présent, il reste à déterminer la composante du tenseur de contrainte de Cauchy $\Sigma_{tt}^{(B)}$ ainsi que le taux de déformation plastique équivalente $D_{eq}^{(B)}$ dans la zone défectueuse. La détermination de ces grandeurs se fait en introduisant un système d'équations non-linéaire que nous écrivons sous la forme $\bar{\mathbf{S}}(\Sigma_{tt}^{(B)}, D_{eq}^{(B)}) = \bar{\mathbf{0}}$. La première équation de ce système n'est autre que la relation définissant la fonction de charge dans le cas d'un comportement rigide-plastique :

$$S_1(\Sigma_{tt}^{(B)}, D_{eq}^{(B)}) := \mathcal{F}(\Sigma_x^{(B)}, \Sigma_y^{(B)}, \Sigma_{xy}^{(B)}) - \mathcal{Y}(E_{eq}^{(B)}, D_{eq}^{(B)}) = 0 \quad (1.154)$$

Les composantes du tenseur de contrainte sont obtenues dans le repère de chargement en utilisant la relation (1.152). La loi d'écoulement représente la seconde équation du système non-linéaire que nous écrivons comme suit :

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(B)} \right]_{xy} = D_{eq}^{(B)} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}^{(B)}} \right]_{xy} \quad (1.155)$$

tel que $\left[\right]_{xy}$ désigne un tenseur ou une matrice, exprimé dans le repère de chargement (x, y) .

En combinant la relation (1.155) avec la relation (1.152) on obtient :

$$D_{tt}^{(B)} = D_{eq}^{(B)} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_x^{(B)}} n_2^2 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_y^{(B)}} n_1^2 - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{xy}^{(B)}} n_1 n_2 \right] \quad (1.156)$$

D'autre part, puisque $\Sigma_{xy}^{(A)} = 0$, on peut en déduire que $\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_{xy}^{(A)} = 0$ ce qui permet d'écrire :

$$D_{tt}^{(A)} = D_{eq}^{(A)} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_x^{(A)}} n_2^2 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_y^{(A)}} n_1^2 \right] \quad (1.157)$$

La seconde équation du système non-linéaire est obtenue en réécrivant la condition de compatibilité (1.148) tel que :

$$S_2(\Sigma_{tt}^{(B)}, D_{eq}^{(B)}) := D_{tt}^{(B)} - D_{tt}^{(A)} = 0 \quad (1.158)$$

Une fois le système non-linéaire écrit, il s'agit de le résoudre en utilisant un algorithme de Newton-Raphson par exemple. Les détails de la mise en œuvre numérique peuvent être trouvés dans (Eyckens, 2009).

B.4.2 Rapprochement théorique entre le critère de Marciniak-Kuczyński et le critère de Perte d'Ellipticité

Un rapprochement théorique a été établi entre le critère de Perte d'Ellipticité et l'approche M-K en considérant dans un premier temps un défaut de propriétés du matériau (Rice, 1976), (Yamamoto, 1978), puis en considérant un défaut géométrique, conformément à l'approche classique M-K (Altmeyer, 2011). Afin de mettre en évidence ce lien théorique, reprenons l'équation d'équilibre des efforts entre la zone saine et la zone défectueuse donnée par la relation (1.149). Sous forme incrémentale, cette relation s'écrit :

$$e^{(B)}\bar{\mathbf{n}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{N}}}^{(B)} = e^{(A)}\bar{\mathbf{n}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{N}}}^{(A)} \quad (1.159)$$

ou bien en introduisant la relation (1.101) :

$$e^{(B)}\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(B)}} : \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(B)} = e^{(A)}\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(A)}} : \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(A)} \quad (1.160)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(A)}$ représente le tenseur gradient de vitesse dans la zone (A), $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(B)}$ le tenseur gradient de vitesse dans la zone (B). Reprenons à présent l'hypothèse de compatibilité entre les composantes du taux de déformation $D_{tt}^{(B)}$ et $D_{tt}^{(A)}$ portées par le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{t}}$ (voir relation (1.148)). En fait, cette hypothèse découle directement du théorème de Maxwell donné par la relation (1.127) (Hill, 2001). En effet, le théorème de Maxwell indique que le saut du gradient de vitesse entre les zones saine et défectueuse s'écrit nécessairement sous la forme :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(B)} - \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(A)} = \bar{\mathbf{g}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (1.161)$$

Puisque le tenseur taux de déformation est relié au tenseur gradient de vitesse par la relation :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = (\underline{\underline{\mathbf{G}}} + \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T) / 2 \quad (1.162)$$

on montre que :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(B)} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(A)} + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{g}}) \Rightarrow \bar{\mathbf{t}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(B)} \cdot \bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{t}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(A)} \cdot \bar{\mathbf{t}} \Rightarrow D_{tt}^{(B)} = D_{tt}^{(A)} \quad (1.163)$$

En substituant la relation (1.161) dans la relation (1.160), on obtient :

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(B)}} : (\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(A)} + \bar{\mathbf{g}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) = \frac{1}{f^{MK}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(A)}} : \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(A)} \quad (1.164)$$

ou encore :

$$(\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(B)}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{f^{MK}} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(A)}} - \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(B)}} \right) : \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(A)} \quad (1.165)$$

Supposons à présent que le facteur d'imperfection tend vers un, ce qui sous-entend que le défaut géométrique tend à disparaître, et que la tôle devient homogène, on aura forcément :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(A)}} \equiv \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}^{(B)}} \equiv \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(A)} \equiv \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(B)} \equiv \underline{\underline{\mathbf{G}}} \quad (1.166)$$

La partie droite de la relation (1.165) nous donne :

$$\lim_{f^{MK} \rightarrow 1} \bar{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{f^{MK}} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} - \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} \right) : \underline{\underline{\mathbf{G}}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.167)$$

ce qui permet de réécrire la relation (1.165) sous la forme :

$$(\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow \det(\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) = 0 \quad (1.168)$$

Cette dernière relation correspond au critère de (Rice, 1976).

B.4.3 Formulation 3D du critère basé sur un défaut initial

La majeure partie des travaux qui utilisent le critère de M-K repose sur l'hypothèse d'un chargement en contraintes planes. Récemment, (Allwood & Shouler, 2009), puis (Eyckens et al., 2009), (Assempour et al., 2010) ont proposé une extension de l'approche M-K afin de

prendre en compte les effets du cisaillement à travers l'épaisseur de la tôle. Ces effets de cisaillement apparaissent généralement dès lors qu'il y a glissement entre la tôle et les outils du dispositif d'emboutissage. Dans (Allwood & Shouler, 2009), (Eyckens et al., 2009) et (Assempour et al., 2010), il a été montré que la prise en compte de l'effet du cisaillement à travers l'épaisseur de la tôle fournit des limites de formabilité plus hautes comparées à l'approche bidimensionnelle classique. Ceci est en particulier observé d'un point de vue expérimental dans le cas du formage incrémental des tôles. Ce procédé permet en effet d'augmenter les limites de formabilité par rapport au procédé d'emboutissage classique par l'intermédiaire d'un poinçon de petite taille.

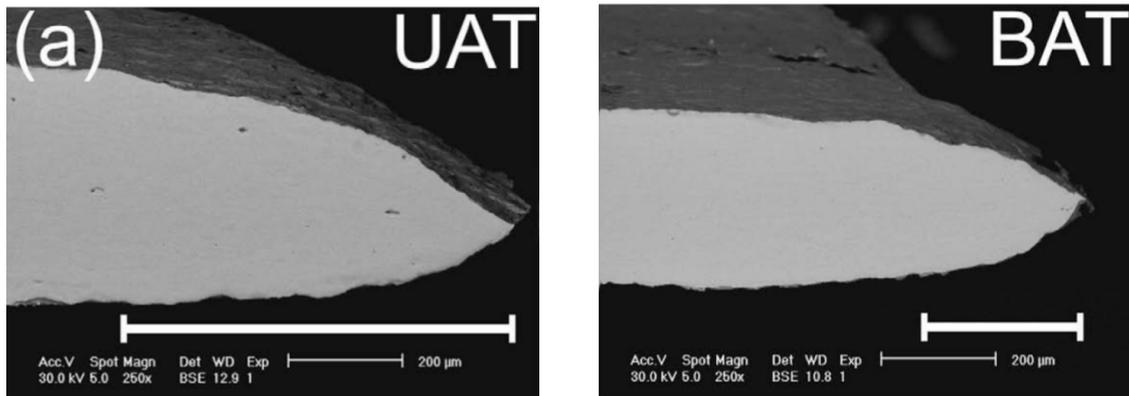


Figure 1.15 : Surface de rupture inclinée lors d'un essai Marciniak sur une tôle en acier Dual Phase pour un chargement en traction uniaxiale (à gauche) et en traction équi-biaxiale (à droite). D'après (Tasan et al., 2009).

Récemment, dans (Altmeyer, 2011), une formulation complètement tridimensionnelle de l'approche M-K a été proposée, sous un formalisme proche du critère de Rice, pour ensuite établir un lien théorique entre l'approche M-K et le critère de Rice (voir section précédente). Bien que cette formulation soit complètement tridimensionnelle, elle impose néanmoins que le défaut doit rester dans le plan de la tôle. Cette contrainte est inhérente à la nature même du défaut géométrique, étant donné que ce dernier doit forcément être porté par l'épaisseur de la tôle. Or, les surfaces de rupture qui suivent l'apparition des bandes de localisation lors des essais d'emboutissage possèdent en général une inclinaison hors plan. En effet, dans (Tasan et al., 2009) entre autres, des essais Marciniak ont été réalisés sur deux nuances d'aciers (Dual Phase et Interstitiel Free), où il apparaît que les surfaces de rupture possèdent une inclinaison hors plan et ce pour différents trajets de chargement (voir Figure 1.15). Des résultats similaires ont été obtenus dans (Dilmec et al., 2013) à partir d'essais Nakazima sur des tôles en alliage d'aluminium AA2024-T4.

Nous présentons dans cette section une variante du critère de défaut initial, conformément aux travaux de (Yamamoto, 1978), (Needleman & Tvergaard, 1992). Autrement dit, contrairement à ce qui a été présenté dans les sections précédentes, il s'agit d'introduire un défaut de propriétés matériau. Ce défaut est constitué d'une fine bande possédant une concentration des sites d'endommagement (ex. porosité initiale ou densité des inclusions) supérieure au reste de la tôle. Ce concept devra *a priori* s'adapter aisément à la classe de

comportement que nous avons considérée dans le premier chapitre, d'une part, et d'autre part, de permettre l'apparition d'une bande de localisation hors plan de la tôle.

Reprenons la formulation du critère de défaut initial, dans un esprit similaire à l'approche de (Rice, 1976), et considérons un solide tridimensionnel traversé par une fine bande de normale $\bar{\mathbf{n}}_0$ dans la configuration de référence. On suppose que cette bande contient une imperfection matérielle initiale de type endommagement (ex. porosité initiale ou densité des inclusions légèrement supérieure au reste du solide). On considère que le solide est soumis à un chargement incrémental quasi-statique de telle sorte que le gradient de vitesse de déformation dans les deux zones soit uniforme. En configuration Lagrangienne, la condition de compatibilité cinématique d'Hadamard s'écrit sous la forme (Needleman & Tvergaard, 1992) :

$$\dot{\mathbf{F}}^{(B)} - \dot{\mathbf{F}}^{(A)} = \bar{\mathbf{g}}_0 \otimes \bar{\mathbf{n}}_0 \quad (1.169)$$

où $\dot{\mathbf{F}}^{(A)}$ et $\dot{\mathbf{F}}^{(B)}$ désignent les tenseurs gradients de vitesse Lagrangiens à l'extérieur et à l'intérieur de la bande, respectivement. D'autre part, l'équilibre des efforts entre la bande et le reste du solide est donné par :

$$\left(\dot{\mathbf{B}}^{(B)} - \dot{\mathbf{B}}^{(A)} \right) \cdot \bar{\mathbf{n}}_0 = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.170)$$

En substituant les relations (1.169) et (1.102) dans la relation (1.170) on obtient :

$$\left(\bar{\mathbf{n}}_0 \cdot {}^T \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}(B)} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0 \right) \cdot \bar{\mathbf{g}}_0 = \left(\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}(A)} - \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}(B)} \right) : \dot{\mathbf{F}}^{(A)} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0 \quad (1.171)$$

Ainsi, le critère de défaut initial, avec un défaut de type 'matériau' formulé sous forme tridimensionnelle, se base sur l'obtention du vecteur saut $\bar{\mathbf{g}}_0$ sous la forme :

$$\bar{\mathbf{g}}_0 = \left(\bar{\mathbf{n}}_0 \cdot {}^T \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}(B)} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0 \right)^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}(A)} - \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}(B)} \right) : \dot{\mathbf{F}}^{(A)} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0 \quad (1.172)$$

Ensuite, à partir de l'équation ci-dessus, l'application de ce critère de défaut initial de type 'propriétés matériau' se fait comme pour l'approche classique M-K, c'est-à-dire en résolvant de manière incrémentale les équations mécaniques dans les zones A et B, jusqu'à ce que la déformation dans la zone B devienne beaucoup plus grande que dans la zone A. Cette dernière situation est indiquée de manière indirecte lorsque le tenseur à inverser et qui apparaît dans la partie droite de l'équation (1.172) approche de la singularité, ce qui évite ainsi de recourir à une autre forme de critère d'arrêt nécessitant de postuler *a priori* la valeur d'un paramètre. En revanche, comme c'est le cas dans l'approche classique M-K, le choix de l'amplitude du défaut initial reste quelque peu arbitraire. A noter que lorsque le solide est homogène initialement (absence de défaut), c'est à dire lorsque $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}(B)} \equiv \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}(A)} \equiv \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}}$, on peut montrer que le critère donné par la relation (1.172) devient équivalent au critère de Perte d'Ellipticité (voir relation (1.132)), sachant que $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{B}} = {}^T \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\mathbf{N}}$. Le critère défini par la relation (1.172) est proche de celui obtenu en introduisant un défaut géométrique (voir relation (1.165)). Néanmoins, le critère de défaut initial de type 'matériau' écrit sous la forme (1.172) offre la possibilité de rechercher une bande de localisation dans l'espace tridimensionnel, ce qui permet de se rapprocher de la réalité observée au cours des essais d'emboutissage. En

outre, cette formulation ne fait intervenir qu'un seul paramètre lié au défaut initial, contrairement à l'approche classique M-K qui fait intervenir en plus du facteur d'imperfection, un second paramètre lié au critère d'arrêt.

B.5 Analyse de Stabilité par Perturbation Linéaire

Les critères basés sur l'analyse de bifurcation ne sont pas applicables aux solides dont le comportement dépend du temps physique (c.-à-d. comportement visqueux et thermosensible). En effet, l'introduction d'une régularisation visqueuse au sein du comportement, permet de garantir l'unicité du problème aux valeurs limites incrémental, et donc d'exclure toute bifurcation au cours du chargement (Needleman, 1988). Les méthodes par perturbations constituent une alternative aux critères basés sur l'analyse de bifurcation pour les solides possédant un comportement thermo-élasto-viscoplastique, soumis à un chargement thermomécanique. Dans cette section, nous présentons uniquement la méthode d'Analyse de Stabilité par Perturbation Linéaire (ASPL), proposée initialement par (Clifton, 1980), (Bai, 1981) et (Bai, 1982), afin de prédire l'apparition des bandes de cisaillement pour un solide viscoplastique soumis à un chargement en cisaillement simple. La prise en compte des effets thermiques et inertiels a été étudiée par (Fressengeas & Molinari, 1987) pour des chargements dynamiques simples, et une extension des travaux de (Clifton, 1980) au cas des chargements tridimensionnels a été proposée dans (Anand et al., 1987) en négligeant la partie élastique du comportement. Les travaux de (Fressengeas & Molinari, 1987) ont été poursuivis par (Dudzinski & Molinari, 1991) afin d'étudier la formabilité des tôles possédant un comportement dépendant du temps physique. Cette approche a été utilisée ensuite pour prédire la formabilité des tôles pour une classe de comportements micromécaniques (Toth et al., 1996), (Boudeau & Gelin, 2000), et phénoménologiques (Altmeyer, 2011), (Li et al., 2012).

Nous faisons ici le choix de présenter l'ASPL conformément aux travaux de (Barbier et al., 1999), (Rousselier, 2001), consistant à perturber toutes les relations constitutives y compris les lois d'évolution des variables internes. Considérons un élément de volume homogène, soumis à un chargement quasi-statique tel que son évolution se produit de façon lente. L'ASPL consiste à analyser l'effet d'une perturbation en déplacement $\delta\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ appliquée à cet élément de volume (Barbier et al., 1999). Afin de formuler le critère d'ASPL, on suppose généralement que la perturbation en déplacement appliquée à l'élément de volume possède la forme suivante (Barbier et al., 1999) :

$$\delta\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \delta\bar{\mathbf{u}}_0 \exp(\eta t + i\xi \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \quad (1.173)$$

où $\bar{\mathbf{x}}$ représente le vecteur position, η le taux de croissance de la perturbation, $\delta\bar{\mathbf{u}}_0$ l'amplitude de la perturbation initiale, ξ le nombre d'ondes et $\bar{\mathbf{n}}$ la direction de propagation de l'onde. La perturbation donnée par la relation (1.173) correspond à une onde plane exponentielle complexe afin de pouvoir faire apparaître un mode de déformation localisé (Keryvin, 1999).

L'état mécanique d'un point matériel peut être caractérisé par l'ensemble des variables observables et des variables internes noté $\mathbf{Z} = [\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\mathbf{z}}]^T$, où $\bar{\mathbf{z}}$ représente un vecteur regroupant

l'ensemble des variables internes. L'ordre tensoriel de \mathbf{Z} n'est pas précisé car il dépend des relations de comportement du matériau. D'autre part, si l'on regroupe toutes les lois d'évolution donnant le taux de contrainte de Cauchy $\dot{\underline{\Sigma}} = \mathcal{F}^{\underline{\Sigma}}(\underline{\Sigma}, \underline{\bar{z}}, \underline{\mathbf{D}})$ et le taux des variables internes $\dot{\underline{z}} = \bar{\mathcal{F}}^{\underline{z}}(\underline{\Sigma}, \underline{\bar{z}}, \underline{\mathbf{D}})$, la loi d'évolution de $\dot{\mathbf{Z}}$ sera donnée par :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathcal{F}(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{D}}) = \mathcal{F} \left(\begin{array}{c} \mathcal{F}^{\underline{\Sigma}}(\underline{\Sigma}, \underline{\bar{z}}, \underline{\mathbf{D}}) \\ \bar{\mathcal{F}}^{\underline{z}}(\underline{\Sigma}, \underline{\bar{z}}, \underline{\mathbf{D}}) \end{array} \right) \quad (1.174)$$

où \mathcal{F} représente un opérateur générique construit à partir des équations d'équilibre, des lois d'état, des lois complémentaires et des conditions initiales (Barbier et al., 1999), (Altmeyer, 2011). L'application d'une perturbation en déplacement définie par la relation (1.174), nous permet d'écrire :

$$\delta \dot{\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{Z}} \cdot \delta \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\mathbf{D}}} : \delta \underline{\mathbf{D}} \quad (1.175)$$

Le taux de la perturbation $\delta \dot{\mathbf{Z}}$ peut être obtenu en prenant en compte la relation (1.173) ce qui permet d'avoir : $\delta \dot{\mathbf{Z}} = \eta \delta \mathbf{Z}$ (Anand et al., 1987). En injectant cette dernière relation dans la relation (1.175), on obtient :

$$\delta \mathbf{Z} = \mathbf{H}(\eta) : \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{\underline{\Sigma}}(\eta) \\ \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{\underline{z}}(\eta) \end{pmatrix} : \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (1.176)$$

avec :

$$\mathbf{H}(\eta) = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{D}})}{\partial \mathbf{Z}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{D}})}{\partial \underline{\mathbf{D}}} \quad (1.177)$$

où $\mathbf{1}$ représente un tenseur unité dont l'ordre dépend des relations de comportement du matériau. L'expression du module $\mathbf{H}(\eta)$ peut être trouvée dans (Altmeyer, 2011) pour un comportement élasto-viscoplastique phénoménologique. Dans le cas où les forces d'inertie sont négligeables, la relation d'équilibre s'écrit sous la forme :

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.178)$$

La perturbation du système d'équations (1.178) conduit à :

$$\bar{\nabla} \cdot \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \bar{\nabla} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{\underline{\Sigma}}(\eta) : \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.179)$$

En injectant l'expression du tenseur de déformation perturbé $\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ obtenu à partir de la relation (1.173), on obtient :

$$\bar{\nabla} \cdot \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \bar{\nabla} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{\underline{\Sigma}}(\eta) : i \xi (\bar{\mathbf{n}} \otimes \delta \bar{\mathbf{u}}) \right) = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.180)$$

Cette dernière relation peut se réécrire sous la forme :

$$\bar{\nabla} \cdot \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = (i \xi)^2 (\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{\underline{\Sigma}}(\eta) \cdot \bar{\mathbf{n}}) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}_0 \exp(\eta t + i \xi \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.181)$$

Ou encore, en vertu de la relation (1.173), on a :

$$\bar{\nabla} \cdot \delta \underline{\Sigma} = (i\xi)^2 \left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^{\Sigma}(\eta) \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (1.182)$$

Le système d'équations défini par la relation (1.182) admet une solution non triviale (c.-à-d. non-identiquement nulle) si, et seulement si :

$$\det \left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^{\Sigma}(\eta) \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) = 0 \quad (1.183)$$

La relation (1.183) représente le critère d'ASPL. Si pour un état de déformation donné, la solution du système (1.183) possède une valeur propre η_0 strictement positive, alors, la perturbation périodique donnée par la relation (1.173) peut croître, ce qui peut conduire à l'apparition d'une bande de localisation de normale $\bar{\mathbf{n}}$.

B.5.1 Relation théorique entre le critère de Stabilité par Perturbation Linéaire et le critère de Perte d'Ellipticité

(Barbier et al., 1999) ont établi un lien théorique entre le critère de Stabilité par Perturbation Linéaire et le critère de Perte d'Ellipticité. En effet, dans la limite d'un comportement élasto-plastique (c.-à-d. sans effets visqueux et thermiques), le taux de croissance par perturbation η tend vers l'infini, ce qui donne :

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \underline{\mathbf{H}}^{\Sigma}(\eta) = \underline{\mathbf{L}} \quad (1.184)$$

Ainsi, le critère défini par la relation (1.183) se réécrit sous une forme identique au critère de Perte d'Ellipticité (voir relation (1.132)). (Barbier et al., 1999) proposent d'interpréter le critère de Perte d'Ellipticité comme un cas limite du critère de Stabilité par Perturbation Linéaire.

B.6 Synthèse

Dans cette seconde partie du premier chapitre, les principaux critères de striction diffuse et localisée ont été présentés.

Les critères qui découlent du Principe de Force Maximum, tels que présentés dans la littérature, sont écrits dans la quasi-totalité des travaux sous une formulation bidimensionnelle. Le critère de Force Maximum de (Swift, 1952) permet de prédire la striction diffuse et son utilisation comme indicateur de limite de ductilité mène à des limites de formage trop conservatives. Bien que le critère de (Hill, 1952) soit formulé spécifiquement pour prédire la striction localisée, ce critère n'est valable que dans la partie du retreint (c.-à-d. partie gauche de la C.L.F). D'autre part, le critère de Force Maximum Modifié présente lui aussi certains inconvénients. En effet, bien que (Hora et al., 1996), (Hora et al., 2013) préconisent l'utilisation du critère de Force Maximum Modifié comme indicateur de localisation, ce critère ne donne toutefois aucune information sur l'orientation de la bande de localisation.

Les critères basés sur l'analyse de bifurcation reposent sur des fondements théoriques rigoureux, bien qu'ils soient peu appliqués à la mise en forme des tôles métalliques. Le critère de Bifurcation Général possède un statut clair, permettant de garantir l'unicité de la solution du problème aux limites incrémental. Le critère de Bifurcation par Point Limite un peu moins

conservatif, constitue une alternative au critère de Bifurcation Générale dans le but de prédire la striction diffuse (Valanis, 1989), (Neilsen & Schreyer, 1993). En outre, un lien théorique a été récemment établi entre le critère de Bifurcation par Point Limite et le critère de (Swift, 1952) (voir (Altmeyer, 2011)). Concernant les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte, ces derniers permettent de prédire l'apparition de la localisation sous forme d'une fine bande dans laquelle se concentrent des champs de déformation. Toutefois, leur utilisation avec un comportement donné n'est pas toujours possible, puisque certains effets déstabilisants (ex. points anguleux sur la surface de charge, effets adoucissants) sont nécessaires pour prédire un point de localisation.

La troisième catégorie de critères que nous avons discutée dans cette partie repose sur l'introduction d'un défaut initial. Le critère proposé initialement par (Marciniak & Kuczyński, 1967) puis amélioré dans (Hutchinson & Neale, 1978) demeure largement utilisé dans le but de prédire des limites de formage des tôles métalliques. Cette popularité est principalement due à la capacité de ce critère à reproduire les C.L.F expérimentales. Néanmoins, le critère M-K fait intervenir deux paramètres utilisateur (c.-à-d. facteur d'imperfection et le paramètre intervenant dans le critère d'arrêt) qui diffèrent parfois pour un même matériau. Des rapprochements théoriques entre le critère M-K et le critère de Perte d'Ellipticité ont été apportés notamment dans (Rice, 1976), (Yamamoto, 1978) et (Altmeyer, 2011). Ces rapprochements font tous abstraction du critère d'arrêt (voir la relation (1.139)) bien que la valeur du paramètre intervenant dans le critère d'arrêt possède un faible impact sur la prédiction du point de localisation (Abed-Meraim, 2009).

Enfin, la dernière catégorie de critères que nous avons présentée dans cette partie est basée sur l'Analyse de Stabilité par Perturbation Linéaire (Bai, 1982), (Fressengeas & Molinari, 1987), (Anand et al., 1987). Tout en étant basée sur des fondements théoriques rigoureux, cette approche permet d'établir des critères d'instabilités locales dans le cas d'un comportement dépendant du temps physique. En outre, dans la limite d'un comportement indépendant du temps physique, un lien entre les critères d'ASPL et de Perte d'Ellipticité a été établi dans (Barbier et al., 1999).

Chapitre 2 : Modélisation du comportement et intégration numérique des équations constitutives

Sommaire

2.1	Introduction	78
2.2	Cinématique des grandes déformations	78
2.3	Comportement élasto-plastique couplé à l'endommagement.....	80
2.3.1	Critère de plasticité macroscopique	81
2.3.2	Lois d'évolution des variables internes	82
2.3.3	Condition de cohérence	89
2.3.4	Détermination du module tangent analytique	90
2.4	Implantation numérique du modèle de comportement	91
2.4.1	Position du problème.....	91
2.4.2	Intégration du modèle de comportement par des schémas explicites	92
2.4.3	Intégration du modèle de comportement par un schéma implicite	95
2.5	Analyse de la performance des schémas d'intégration.....	101
2.5.1	Simulation de l'essai de traction uniaxiale.....	102
2.5.2	Simulation d'une traction hydrostatique	108
2.6	Conclusions	109

2.1 Introduction

L'écriture et l'implantation numérique des équations d'un modèle élasto-plastique dans le but de simuler le comportement des tôles métalliques soulève plusieurs difficultés. En effet, d'une part, les tôles métalliques subissent des déformations importantes au cours de leur mise en forme et la prise en compte de cet aspect au sein d'un code de calcul par éléments finis s'avère nécessaire. D'autre part, le choix des variables internes intervenant dans le modèle de comportement dépend en général des phénomènes physiques que l'on cherche à reproduire (e.g. écrouissage, endommagement, anisotropie, ... etc.), ou à prédire (e.g. instabilités plastiques, rupture, durée de vie des pièces en service, ... etc.). Il est par conséquent nécessaire d'introduire des lois d'évolution permettant de décrire convenablement les phénomènes physiques mis en jeu au cours des procédés de formage. Enfin, étant donné que la plupart des relations de comportement correspond à des équations différentielles ordinaires, le choix de la méthode d'intégration permettant de retrouver la solution recherchée n'est pas trivial. En effet, bien que pour des modèles de plasticité simples la supériorité des schémas implicites est un fait indiscutable, l'introduction de certaines propriétés liées au comportement tels que des effets adoucissants ou encore la non-normalité de la loi d'écoulement rend la mise en œuvre des schémas implicites bien plus complexe. En outre, puisque ces schémas sont basés sur une résolution itérative, ils nécessitent dans certains cas des inversions de matrices ce qui peut parfois causer des problèmes de convergence (Sánchez et al., 2008).

Dans ce chapitre, on commence par décrire certains aspects liés à la cinématique des transformations finies afin d'assurer l'objectivité des lois de comportement. Ensuite, à partir du critère de plasticité développé dans (Benzerga & Besson, 2001), on construit un modèle de comportement en introduisant les différentes lois d'évolution des variables internes. Une attention particulière sera portée à la description des mécanismes d'endommagement en s'inspirant des différents critères de germination présentés au premier chapitre. On passera ensuite aux différentes méthodes d'intégration que nous avons exploitées dans le but d'implanter le modèle de comportement dans le code de calcul par éléments finis Abaqus/Standard. Ce chapitre est clôturé par une étude comparative de certains schémas implicites et explicites que nous avons utilisés dans le but d'évaluer leurs performances lorsque le comportement étudié présente des effets adoucissants marqués. Certains résultats exposés dans ce chapitre sont développés et complétés dans une précédente contribution (Mansouri et al., 2014).

2.2 Cinématique des grandes déformations

Comme mentionné précédemment, les tôles métalliques subissent de grandes déformations ainsi que de grandes rotations au cours de leur mise en forme. Par conséquent, certaines précautions doivent être prises afin de garantir l'objectivité des grandeurs tensorielles. Cette objectivité assure la non-dépendance de la loi de comportement vis-à-vis du référentiel d'observation (Sidoroff, 1982). L'approche que nous considérons dans ce travail consiste à écrire la loi de comportement dans un repère tournant afin de prendre en compte le mouvement rigidifiant subi par le solide (Hughes & Winget, 1980). La notion de configuration intermédiaire relâchée permet d'établir une décomposition multiplicative du

tenseur gradient de transformation $\underline{\mathbf{F}}$ sous la forme (voir e.g. (Sidoroff, 1982), (Gurtin & Anand, 2005)) :

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}^e \cdot \underline{\mathbf{F}}^p \quad (2.1)$$

où $\underline{\mathbf{F}}^e$ et $\underline{\mathbf{F}}^p$ désignent, respectivement, la partie élastique et la partie plastique du tenseur gradient de transformation. Cette configuration revient plus précisément à 'relâcher élastiquement' les contraintes internes tout en bloquant les mécanismes de plasticité. Dans ce travail, l'étude est restreinte aux procédés de mise en forme à froid ce qui exclut la prise en compte des effets thermiques. En outre, nous considérons tout au long de ce travail que le comportement est indépendant du temps physique. Dans ce cas, il est généralement admis que la norme de la partie élastique du tenseur de déformation Eulérien demeure petite devant l'unité. Ceci revient à supposer que les configurations actuelle et relâchée élastiquement restent très voisines sauf rotations. Ainsi, la décomposition polaire de la partie élastique du tenseur gradient de transformation s'écrit sous la forme :

$$\underline{\mathbf{F}}^e \cong (\underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{E}}^e) \cdot \underline{\mathbf{R}} \quad (2.2)$$

où $\underline{\mathbf{E}}^e$ désigne la partie élastique du tenseur de déformation Eulérien $\underline{\mathbf{E}}$ tel que $\|\underline{\mathbf{E}}^e\| \ll 1$. $\underline{\mathbf{R}}$ représente le tenseur de rotation élastique qui possède la propriété d'orthogonalité tel que $\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{-1} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T = \underline{\mathbf{1}}$. En vertu de la relation (2.1), l'expression du tenseur gradient de vitesse Eulérien $\underline{\mathbf{G}}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\mathbf{G}} = \dot{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1} = \dot{\underline{\mathbf{F}}}^e \cdot \underline{\mathbf{F}}^{e-1} + \underline{\mathbf{F}}^e \cdot (\dot{\underline{\mathbf{F}}}^p \cdot \underline{\mathbf{F}}^{p-1}) \cdot \underline{\mathbf{F}}^{e-1} \quad (2.3)$$

En injectant la relation (2.1) dans la relation (2.3) et en gardant uniquement les termes du premier ordre en $\underline{\mathbf{E}}$, on trouve :

$$\underline{\mathbf{G}} = \dot{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T + \underline{\mathbf{E}}^\nabla + \underline{\mathbf{R}} \cdot (\dot{\underline{\mathbf{F}}}^p \cdot \underline{\mathbf{F}}^{p-1}) \cdot \underline{\mathbf{R}}^T \quad (2.4)$$

avec

$$\underline{\mathbf{E}}^\nabla = \dot{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\mathbf{E}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T - \dot{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \quad (2.5)$$

où $\underline{\mathbf{E}}^\nabla$ désigne la dérivée co-rotationnelle du tenseur de déformation Eulérien $\underline{\mathbf{E}}$ associée au taux de rotation élastique $\underline{\mathbf{W}}^e = \dot{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T$. Les taux de déformation $\underline{\mathbf{D}}$ et de rotation $\underline{\mathbf{W}}$ sont obtenus en considérant, respectivement, la partie symétrique et antisymétrique du tenseur gradient de vitesse $\underline{\mathbf{G}}$ tel que :

$$\underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{G}} + \underline{\mathbf{G}}^T) = \underline{\mathbf{E}}^\nabla + \underline{\mathbf{D}}^p, \quad \underline{\mathbf{W}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{G}} - \underline{\mathbf{G}}^T) = \dot{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T + \underline{\mathbf{W}}^p \quad (2.6)$$

où $\underline{\mathbf{D}}^p$ et $\underline{\mathbf{W}}^p$ désignent, respectivement, le taux de déformation et le taux rotation plastiques définis par :

$$\underline{\mathbf{D}}^p = \underline{\mathbf{R}} \cdot \hat{\underline{\mathbf{D}}}^p \cdot \underline{\mathbf{R}}^T, \quad \underline{\mathbf{W}}^p = \underline{\mathbf{R}} \cdot \hat{\underline{\mathbf{W}}}^p \cdot \underline{\mathbf{R}}^T \quad (2.7)$$

avec $\hat{\mathbf{D}}^p$ et $\hat{\mathbf{W}}^p$ les parties symétrique et antisymétrique du tenseur $\dot{\mathbf{F}}^p \cdot (\mathbf{F}^p)^{-1}$, respectivement.

La formulation des équations de comportement en transformations finies requiert l'utilisation de dérivées dites objectives afin d'assurer la non-dépendance de la loi de comportement vis-à-vis du référentiel d'observation. Celles-ci peuvent être obtenues par le biais d'un repère tournant, qui permet de compenser le mouvement de corps rigide subi par le solide. Dans un tel repère, le taux des variables tensorielles se réduit à leur dérivée temporelle, ce qui permet une écriture des lois de comportement identique à celle obtenue sous l'hypothèse des petites déformations. On considère que le repère tournant est défini par un tenseur de rotation noté \mathfrak{R} . Ce dernier est généré par le tenseur spin antisymétrique $\underline{\Omega}$ tel que $\dot{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{R}^T = \underline{\Omega}$. Ainsi, pour un tenseur d'ordre deux noté $\underline{\mathbf{A}}$, l'écriture de ce tenseur dans le repère tourné défini par le tenseur de rotation \mathfrak{R} est donnée par :

$$\hat{\underline{\mathbf{A}}} = \mathfrak{R}^T \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \mathfrak{R} \quad (2.8)$$

D'autre part, la dérivée co-rotationnelle du tenseur $\underline{\mathbf{A}}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\mathbf{A}}^\nabla = \dot{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Omega} - \underline{\Omega} \cdot \underline{\mathbf{A}} \quad (2.9)$$

Ainsi, la dérivée co-rotationnelle du tenseur $\underline{\mathbf{A}}$ est simplement reliée à la dérivée de la quantité tournée $\hat{\underline{\mathbf{A}}}$ par la relation :

$$\dot{\hat{\underline{\mathbf{A}}}} = \mathfrak{R}^T \cdot \underline{\mathbf{A}}^\nabla \cdot \mathfrak{R} \quad (2.10)$$

On peut montrer que la relation (2.10) reste valable pour des tenseurs d'ordre quatre (voir e.g. (Abed-Meraim, 2009)). Par conséquent, l'utilisation d'un repère tournant permet de réduire la dérivée objective d'un tenseur à une simple dérivée temporelle. La plupart des codes de calcul par éléments finis utilisent cette stratégie puisque, d'une part, sa mise en œuvre est relativement simple et, d'autre part, cette technique permet de simplifier considérablement l'écriture des lois de comportement. Compte tenu de la non-unicité de la décomposition multiplicative du tenseur gradient de transformation $\underline{\mathbf{F}}$, le choix du tenseur de rotation \mathfrak{R} n'est pas unique. Ainsi, lorsque $\underline{\Omega} = \dot{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{R}^T = \underline{\mathbf{W}}$, la relation (2.9) permet de retrouver la dérivée de Jaumann alors que pour $\mathfrak{R} = \mathbf{R}$, on retrouve la dérivée de Green-Naghdi, appelée également dérivée en rotation propre.

2.3 Comportement élasto-plastique couplé à l'endommagement

Après avoir discuté certains aspects liés à la cinématique des transformations finies, on présente dans cette section les différents 'ingrédients' permettant de construire un modèle de comportement. On s'intéressera plus précisément à l'écriture des équations d'un modèle élasto-plastique orthotrope indépendant du temps physique, mais présentant une dépendance à la pression hydrostatique. D'une manière générale, un tel modèle de comportement se compose principalement de quatre types d'équations, à savoir :

1. Un critère de plasticité macroscopique délimitant le domaine d'élasticité ;

2. Une loi hypo-élastique définissant une relation entre le tenseur taux de contrainte de Cauchy et le tenseur taux de déformation élastique Eulérien ;
3. Une loi d'écoulement plastique définissant l'évolution des déformations irréversibles ;
4. Un ensemble de lois d'évolution des variables internes décrivant les phénomènes mis en jeu lors de la déformation plastique (e.g. lois d'évolution de la variable d'endommagement, loi d'écrouissage, ... etc.).

2.3.1 Critère de plasticité macroscopique

Le critère de plasticité retenu dans ce travail est celui développé dans les travaux de (Benzerga & Besson, 2001). Ce dernier représente une généralisation du critère de plasticité macroscopique de (Gurson, 1977), permettant de reproduire un comportement orthotrope avec dépendance à la pression hydrostatique. Tel qu'il a été discuté au cours du premier chapitre, ce critère de plasticité a été obtenu à partir d'une approche micromécanique reposant sur une analyse limite d'un V.E.R constitué d'une matrice sphérique ou cylindrique contenant une cavité de même forme. Le comportement de la matrice est supposé rigide parfaitement plastique décrit par le critère de plasticité de (Hill, 1948). Néanmoins, certaines extensions qui seront apportées à ce modèle vont être introduites de manière purement phénoménologique. Ainsi, la prise en compte de l'écrouissage isotrope sera établie conformément aux travaux de (Gurson, 1977), (Tvergaard, 1981), en supposant un écrouissage homogène de la matrice. Le modèle ainsi obtenu ne sera en toute rigueur valable que pour des matériaux dont l'exposant d'écrouissage est relativement faible (Benzerga & Besson, 2001). En outre, afin d'obtenir des limites de ductilité réalistes, la prise en compte de la coalescence des cavités s'effectuera à travers le concept de porosité effective introduit dans (Tvergaard & Needleman, 1984), (Needleman & Tvergaard, 1987). À noter que d'autres modèles de coalescence basés sur des approches micromécaniques ont été développés plus récemment dans (Gologanu et al., 2001), (Benzerga, 2002). L'expression du critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F}(\underline{\Sigma}, \sigma_M, f_\star) = \frac{3\underline{\Sigma}' : \underline{\mathbf{H}} : \underline{\Sigma}'}{2\sigma_M^2} + 2q_1 f_\star \cosh\left(\frac{q_2}{\mathcal{H}^{BB}} \frac{\underline{\Sigma}' : \underline{\mathbf{1}}}{\sigma_M}\right) - (1 + q_3 f_\star^2) \quad (2.11)$$

où $\underline{\Sigma}'$ représente le déviateur du tenseur de contrainte macroscopique de Cauchy $\underline{\Sigma}$. σ_M désigne la contrainte équivalente microscopique et q_i les paramètres de Tvergaard qui permettent de prendre en compte l'effet d'interaction entre les cavités. Dans la plupart des travaux traitant du modèle de Gurson-Tvergaard, on considère que $q_1 = 1,5$, $q_2 = 1$ et $q_3 = q_1^2$ (Tvergaard, 1982), (Needleman & Tvergaard, 1987). Comme discuté dans le premier chapitre, ces paramètres ajustables sont souvent obtenus à partir de simulations numériques en considérant un V.E.R en forme de cylindre à base hexagonale contenant une cavité sphérique (Koplik & Needleman, 1988), (Benzerga et al., 1999), (Pardoen & Hutchinson, 2000). En outre, dans le cas où le comportement de la matrice est décrit par le critère de plasticité de (Hill, 1948), les résultats obtenus dans (Benzerga & Besson, 2001) montrent que les valeurs

des paramètres q_i ne changent pas comparées aux valeurs obtenues dans le cas d'une matrice de comportement isotrope décrit par le critère de von Mises. Enfin, $f_*(f)$ représente la porosité effective permettant de reproduire l'accélération du taux de porosité au cours de la coalescence des cavités. Le facteur d'anisotropie plastique \mathcal{H}^{BB} qui intervient dans la relation (2.11) est défini dans le cas d'une cavité sphérique par :

$$\mathcal{H}^{BB} = h_m^{sph} = \left[\frac{8}{5} \frac{h_1 + h_2 + h_3}{h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{h_4} + \frac{1}{h_5} + \frac{1}{h_6} \right) \right]^{1/2} \quad (2.12)$$

Pour une cavité cylindrique, on a :

$$\mathcal{H}^{BB} = \frac{4}{\sqrt{3}} h_m^{cyl} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{4} \frac{h_1 + h_2 + 4h_3}{h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1} + \frac{1}{2h_6} \right] \quad (2.13)$$

avec $h_i = \mathcal{H}_{ii}$ tel que \mathcal{H} représente une réécriture du tenseur d'anisotropie de Hill en notation de Voigt. Dans la limite d'un comportement plastique isotrope, c'est-à-dire lorsque le tenseur d'anisotropie de Hill est égal au tenseur identité $\underline{\underline{1}}$ et que $\mathcal{H}^{BB} = 2$ (respectivement, $\mathcal{H}^{BB} = 4/\sqrt{3}$), le critère défini par la relation (2.11) se réduit au critère de Gurson-Tvergaard-Needleman dans le cas d'une cavité sphérique (respectivement, cylindrique).

2.3.2 Lois d'évolution des variables internes

Nous avons vu dans le premier chapitre que l'endommagement est intimement lié à la présence de défauts dans les matériaux métalliques, et ce même pour les matériaux de pureté relativement élevée (Babout et al., 2004), (Landron et al., 2010). Ces défauts se présentent généralement sous forme d'inclusions ou de particules de secondes phases. Au cours du chargement, des cavités s'amorcent par germination et peuvent éventuellement être présentes initialement¹ dans le matériau, puis se dilatent jusqu'à atteindre une taille critique. Le processus final de l'endommagement se caractérise par une jonction des cavités voisines qui se produit par striction puis rupture du ligament qui les sépare (c.-à-d. par coalescence des cavités). Dans cette section, on donne une description des différentes lois d'évolution des variables internes qui interviennent dans certains modèles de comportement basés sur l'approche de (Gurson, 1977).

2.3.2.1 Taux de porosité due à la germination et à la croissance des cavités

Au cours de la première phase de l'endommagement, c'est à dire avant coalescence des cavités, l'évolution de la porosité est due principalement à la germination et à la croissance des vides. À partir de ce constat, on peut intuitivement décomposer le taux de porosité sous la forme :

$$\dot{f} = \dot{f}_n + \dot{f}_g \quad (2.14)$$

¹ La porosité initiale dans la plupart des matériaux métalliques est généralement comprise entre 10^{-5} et 5×10^{-3} .

où \dot{f}_n et \dot{f}_g désignent, respectivement, le taux de porosité due à la germination et à la croissance des vides. On cherche à présent à définir une loi d'évolution du taux de porosité due à la germination des cavités. Les critères d'amorçage décrits dans le premier chapitre sont principalement basés sur deux approches. Les critères issus de l'approche énergétique indiquent que l'amorçage se produit lorsque la déformation plastique équivalente microscopique à l'intérieur de l'inclusion, ou au voisinage de l'interface inclusion-matrice atteint une valeur critique considérée comme une constante du matériau ε^c . Par conséquent, ce type de critères indique que la naissance d'une cavité par germination est principalement contrôlée par la déformation plastique équivalente microscopique. Les différentes études expérimentales présentes dans la littérature montrent que pour la plupart des matériaux métalliques, il existe une dispersion relativement importante du diamètre moyen des particules (Devillers-Guerville et al., 1997), (Benzerga et al., 2004), (Babout et al., 2004), (Chen & Worswick, 2008), (Landron et al., 2010).

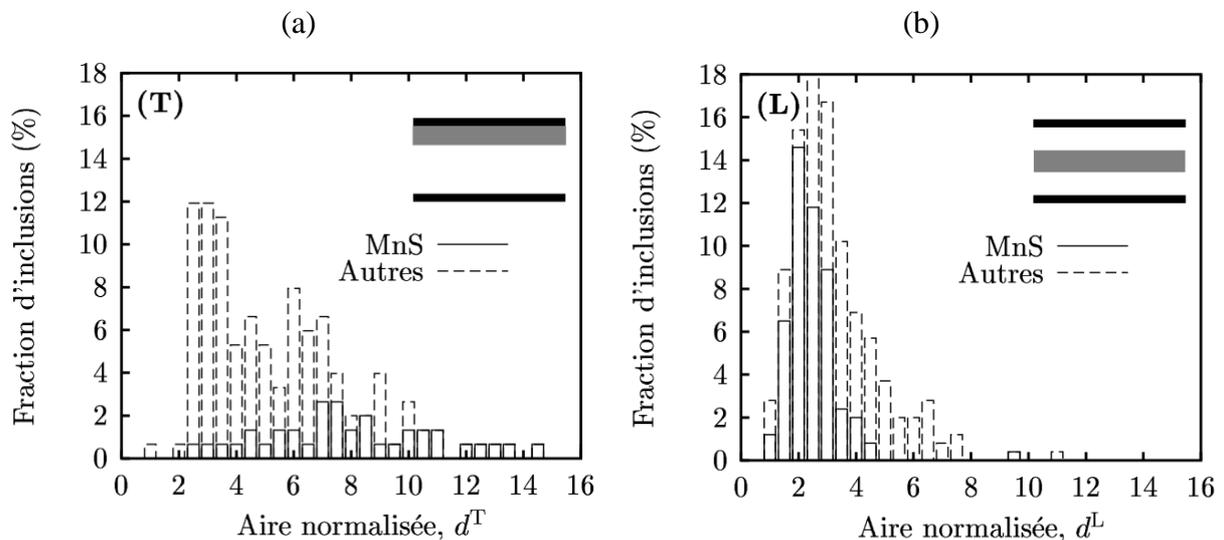


Figure 2.1 : Distribution de la fraction d'inclusions en (%), en fonction de l'aire normalisée des particules dans la direction transverse (a) et longitudinale (b) d'une tôle laminée à chaud contenant des sulfures de manganèse (MnS). D'après (Devillers-Guerville et al., 1997).

La Figure 2.1.a donne un exemple de la distribution de la fraction des inclusions en fonction de leurs diamètres moyens dans la direction transverse et longitudinale d'une tôle en acier contenant des sulfures de manganèse. Rappelons par ailleurs que les critères d'amorçage basés sur une condition énergétique indiquent que la déformation plastique équivalente à l'intérieur ou au voisinage de l'inclusion est inversement proportionnelle au volume de l'inclusion. Cet effet de taille a par ailleurs été mis en évidence d'un point de vue expérimental dans plusieurs travaux (Devillers-Guerville et al., 1997), (Besson et al., 2000). Étant donné que pour la plupart des matériaux métalliques le volume des inclusions n'est pas constant, on peut s'attendre à ce que la germination des cavités ne soit pas instantanée pour l'ensemble des sites d'endommagement présents dans le matériau. De surcroît, ces sites d'endommagement sont en général distribués d'une manière plus ou moins aléatoire, ce qui porte à croire que la germination des cavités dans son ensemble peut être considérée comme un phénomène probabiliste (Spitzig, 1985), (Devillers-Guerville et al., 1997), (Besson et al.,

2000), (Chen et al., 2005) (voir également Figure 2.2.a). La dispersion liée au volume des inclusions ainsi que leur distribution plus ou moins aléatoire dans l'espace montrent que l'amorçage de l'endommagement dans son ensemble se produit de manière successive et continue au cours du chargement. En se basant sur les travaux de (Gurson, 1977) et (Goods & Brown, 1979), (Chu & Needleman, 1980) supposent que le taux de porosité due à la germination des cavités peut être corrélé à la déformation plastique équivalente microscopique à partir d'une loi Gaussienne faisant intervenir trois paramètres f_N , ε_N et s_N^ε . Ces derniers désignent, respectivement, la fraction volumique des inclusions susceptibles de germiner, la déformation plastique équivalente microscopique pour laquelle la moitié des inclusions ont germé, et l'écart type sur ε_N .

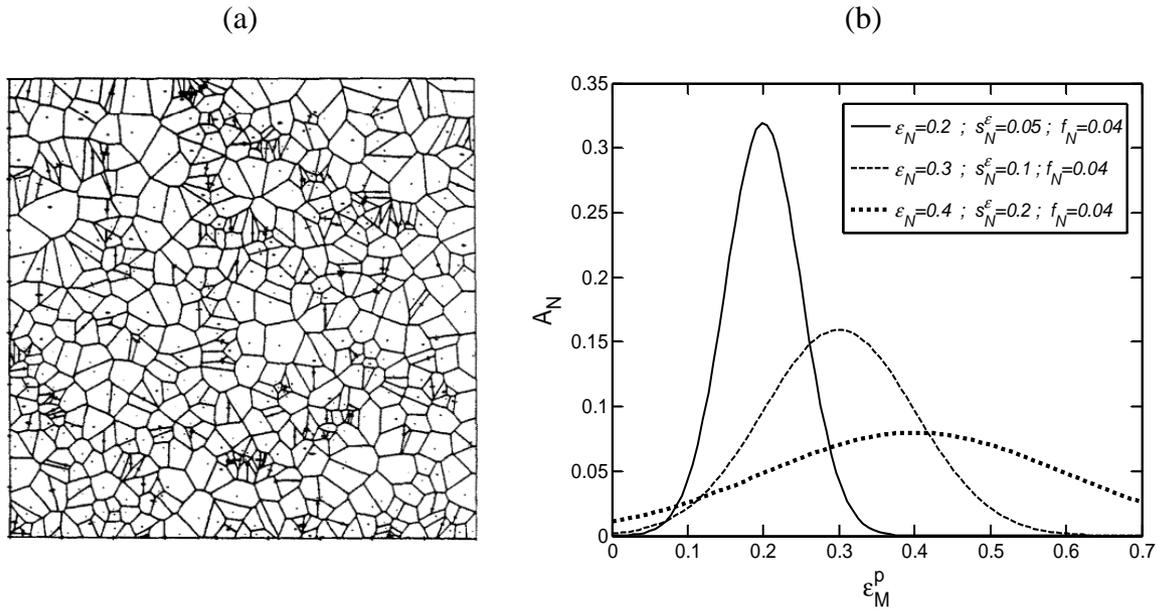


Figure 2.2 : (a) : Réseau de Dirichlet associé à la création de microcavités par germination dans une tôle en acier laminée à chaud, contenant des sulfures de manganèse. D'après (Spitzig, 1985). (b) : Evolution de \mathcal{A}_N en fonction de la déformation plastique équivalente microscopique ε_M^p .

Selon (Chu & Needleman, 1980), le taux de porosité due à la germination s'écrit sous la forme (voir aussi (Tvergaard, 1982), (Tvergaard & Needleman, 1984)) :

$$\dot{f}_n = \mathcal{A}_N \dot{\varepsilon}_M^p \quad (2.15)$$

tel que

$$\mathcal{A}_N = \frac{f_N}{s_N^\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s_N^\varepsilon}\right)^2\right) \quad \text{pour } \dot{\varepsilon}_M^p > 0 \quad (2.16)$$

La Figure 2.2.b illustre l'évolution de \mathcal{A}_N en fonction de la déformation plastique équivalente microscopique ε_M^p pour différentes valeurs de ε_N et s_N^ε . L'identification des paramètres intervenant dans la loi (2.16) par une approche inverse classique basée sur un essai en traction uniaxiale n'est pas toujours une tâche aisée, principalement à cause de la forte non-linéarité de

la fonction \mathcal{A}_N (Zhang et al., 2000). Pour certaines nuances d'aciers, la densité des inclusions f_N peut être approximée moyennant la connaissance de la composition chimique du matériau (Franklin, 1969). Une seconde approche plus générale permettant d'identifier les paramètres intervenant dans la relation (2.16) serait de combiner les mesures expérimentales reposant sur les techniques de visualisation par Tomographie à des calculs par éléments finis (Maire et al., 2008). Cette approche a été exploitée récemment dans (Requena et al., 2014) afin d'identifier certains paramètres microstructuraux intervenant dans le modèle de Gurson-Tvergaard (c.-à-d. densité des inclusions, porosité initiale, ... etc.) pour un acier Dual Phase.

La seconde approche permettant de définir un critère d'amorçage d'une cavité indique que la germination se produit lorsque la contrainte principale maximale à l'intérieur ou au voisinage de l'interface inclusion-matrice atteint une contrainte critique notée σ^c . Les critères basés sur une contrainte critique prennent la forme générale suivante (Argon et al., 1975), (Beremin, 1981), (Gilormini & Montheillet, 1986) :

$$\sigma^{\max} = \kappa^B \Sigma_{eq} + \Sigma_m = \sigma^c \quad (2.17)$$

où σ^{\max} désigne la contrainte principale maximale à l'intérieur ou au voisinage de l'interface inclusion-matrice. Σ_{eq} et Σ_m représentent, respectivement, la contrainte équivalente (au sens de von Mises) et la contrainte moyenne macroscopiques et κ^B un facteur d'intensité de contrainte qui dépend de la forme des cavités (Beremin, 1981). En ce qui concerne cette seconde approche, σ^c est également considérée comme une constante du matériau (Argon et al., 1975), (Beremin, 1981). Si l'on suppose que l'amorçage se produit pour de faibles valeurs de la porosité, on peut à partir du critère de Gurson écrire $\Sigma_{eq} \simeq \sigma_M$. Ainsi, la contrainte principale maximale définie par la relation (2.17) peut être obtenue en écrivant ²:

$$\sigma^{\max} \simeq \kappa^B \sigma_M + \Sigma_m \quad (2.18)$$

Les critères définis par les relations (2.17) et (2.18) indiquent que lorsque σ^{\max} atteint une valeur critique, une cavité s'amorce par rupture de particule ou par décohésion de l'interface inclusion-matrice. Compte tenu de la nature hétérogène de la germination des cavités, la contrainte critique d'amorçage σ^c n'est en général pas constante et dépend de la taille des particules, de leurs formes, de leur composition chimique, de leur distribution dans l'espace, ... etc. Pour un amorçage contrôlé par la contrainte, (Chu & Needleman, 1980) proposent de relier le taux de porosité due à la germination des cavités au taux de contrainte principale maximale à partir d'une loi Gaussienne. Selon (Chu & Needleman, 1980), le taux de porosité due à la germination des cavités dans le cas d'un amorçage contrôlé par la contrainte s'écrit sous la forme :

$$\dot{f}_n = \mathcal{C}_N \dot{\sigma}^{\max} = \mathcal{B}_N \dot{\sigma}_M + \mathcal{C}_N \dot{\Sigma}_m \quad (2.19)$$

² À noter que dans les travaux de (Chu & Needleman, 1980) et (Tvergaard, 1990), le paramètre κ^B intervenant dans la relation (2.18) est pris égal à un que ce soit pour une cavité sphérique ou cylindrique. Dans notre travail, nous considérons que pour des inclusions sphériques, $\kappa^B = 1,69$ afin d'être en conformité avec le critère de (Beremin, 1981).

tel que

$$\mathcal{B}_N = \kappa^B \mathcal{C}_N = \frac{\kappa^B f_N}{s_N^\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa^B \sigma_M + \Sigma_m - \sigma_N}{s_N^\sigma}\right)^2\right) \quad \text{pour } \dot{\sigma}^{\max} > 0 \quad (2.20)$$

où σ_N représente la contrainte principale maximale à l'intérieur ou au voisinage de l'interface inclusion-matrice pour laquelle la moitié des inclusions ont germinées et s_N^σ désigne l'écart type sur la contrainte moyenne d'amorçage σ_N . Étant donné que $\sigma_M = \sigma_M(\varepsilon_M^p)$, on peut écrire que $s_N^\sigma = s_N^\varepsilon \sigma_0$ tel que σ_0 représente la limite d'écoulement de la matrice. On peut également proposer une expression unifiée du taux de porosité due à la germination sous la forme (Tvergaard, 1990) :

$$\dot{f}_n = \mathcal{A}_N \dot{\sigma}_M + \mathcal{B}_N \dot{\Sigma}_m \quad (2.21)$$

tel que

$$\begin{cases} \mathcal{A}_N = \frac{f_N}{\mathcal{H}_{\sigma_M} s_N^\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s_N^\varepsilon}\right)^2\right) & \text{et } \mathcal{B}_N = 0 \quad \text{pour } \dot{\varepsilon}_M^p > 0 \\ \mathcal{A}_N = \kappa^B \mathcal{B}_N = \frac{\kappa^B f_N}{s_N^\varepsilon \sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^{\max} - \sigma_N}{s_N^\varepsilon \sigma_0}\right)^2\right) & \text{pour } \dot{\sigma}^{\max} > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

avec $\mathcal{H}_{\sigma_M} = \partial \sigma_M / \partial \varepsilon_M^p$. Lorsque $\mathcal{A}_N \neq 0$ et $\mathcal{B}_N = 0$, l'amorçage est contrôlé par la déformation plastique équivalente microscopique, alors que pour $\mathcal{A}_N = \kappa^B \mathcal{B}_N \neq 0$, l'amorçage est contrôlé par la contrainte principale maximale à l'intérieur de l'inclusion ou au voisinage de l'interface inclusion-matrice. Notons par ailleurs que (Chu & Needleman, 1980) préconisent l'utilisation des relations (2.15) ou (2.21) lorsque l'amorçage des cavités se produit par rupture des particules ou par décohésion de l'interface particule-matrice, respectivement. Étant donné que les deux modes de germination sont susceptibles de se produire au cours du chargement (Kanetake et al., 1995), (Babout et al., 2004) (voir aussi Figure 1.1 du chapitre 1), on peut supposer que le taux de porosité dépend de la déformation plastique équivalente microscopique ainsi que de la contrainte principale maximale microscopique. En combinant les relations (2.15) et (2.21), le taux de porosité due à la germination des cavités peut également s'exprimer sous la forme (Gullerud et al., 2001) :

$$\dot{f}_n = \mathcal{A}_N \dot{\varepsilon}_M^p + \mathcal{B}_N \dot{\sigma}_M + \mathcal{C}_N \dot{\Sigma}_m \quad (2.23)$$

Dans le cas où la relation (2.23) est utilisée afin de décrire l'évolution de \dot{f}_n , certaines précautions doivent être prises quant à la détermination des fonctions \mathcal{A}_N , \mathcal{B}_N et \mathcal{C}_N . En effet, le paramètre f_N intervenant dans les relations (2.16) et (2.20) engendre par définition la densité des inclusions susceptibles de germiner suivant les deux principaux modes d'amorçage (c.-à-d. par rupture de particule et par décohésion de l'interface inclusion-matrice). Dans ce cas particulier, il est nécessaire de différencier entre la fraction volumique

des inclusions susceptibles de germer par rupture de particule et celle des inclusions susceptibles de germer par décohésion de l'interface inclusion-matrice.

À présent, on définit la loi d'évolution au taux de porosité due à la croissance des cavités. Les critères de plasticité macroscopiques basés sur l'approche de Gurson présentés dans le premier chapitre considèrent que la matrice est incompressible. En notant Ω_C le volume total des cavités contenues dans le matériau, le taux de porosité due à la dilatation des cavités s'écrit sous la forme :

$$\dot{f}_g = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega_C}{\Omega} \right) = \left(1 - \frac{\Omega_C}{\Omega} \right) \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad (2.24)$$

où Ω désigne le volume total du V.E.R. La plupart des modèles de comportement reposant sur l'approche de (Gurson, 1977) considère que la partie élastique du tenseur taux de déformation Eulérien est négligeable (comportement rigide-plastique de la matrice). En notant $f = \Omega_C/\Omega$, la loi d'évolution du taux de croissance des cavités s'exprime sous la forme :

$$\dot{f}_g = (1-f) \underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{1}} = (1-f) \underline{\mathbf{D}}^p : \underline{\mathbf{1}} \quad (2.25)$$

où $\underline{\mathbf{D}}$ représente le taux de déformation totale et $\underline{\mathbf{D}}^p$ le taux de déformation plastique macroscopique.

2.3.2.2 Taux de porosité due à la coalescence des cavités

Afin de définir une loi d'évolution pour le taux de porosité due à la coalescence des cavités, on reprend l'approche proposée initialement dans (Tvergaard & Needleman, 1984), (Needleman & Tvergaard, 1987). Cette approche est aujourd'hui largement utilisée dans la littérature dans le but de décrire l'accélération de la croissance au cours du régime de coalescence. Comme discutée au premier chapitre, cette approche consiste à remplacer le terme de porosité au sein du critère de Gurson ou celui de Gurson-Tvergaard par la porosité effective f_\star . On suppose que f_\star suit une loi bilinéaire en fonction de la porosité f à travers l'introduction de deux paramètres f_C et δ_A (voir Figure 2.3). Ces derniers désignent, respectivement, la porosité critique pour laquelle on considère l'entrée en régime de coalescence et le facteur d'accélération de croissance. Conformément aux travaux de (Tvergaard & Needleman, 1984), (Needleman & Tvergaard, 1987), l'expression du taux de porosité effective s'exprime sous la forme :

$$f_\star = \begin{cases} f & \text{pour } f \leq f_C \\ f_C + \left(\frac{\kappa - f_C}{f_R - f_C} \right) (f - f_C) & \text{pour } f_C < f \leq f_R \end{cases} \quad (2.26)$$

avec f_R la porosité à rupture pour laquelle le V.E.R ne peut plus supporter un chargement et

κ un scalaire qui correspond à la valeur maximale que peut prendre la porosité effective (c'est-à-dire $\kappa = f_{\star}(f_R) = (q_1 + \sqrt{q_1^2 - q_3})/q_3$). En combinant les relations (2.14) et (2.26), on peut exprimer le taux de porosité effective sous la forme :

$$\dot{f}_{\star} = \delta_A (\dot{f}_n + \dot{f}_g) \quad (2.27)$$

tel que

$$\delta_A = \begin{cases} 1 & \text{pour } f \leq f_C \\ \frac{\kappa - f_C}{f_R - f_C} & \text{pour } f_C < f \leq f_R \end{cases} \quad (2.28)$$

où δ_A est appelé facteur d'accélération de croissance.

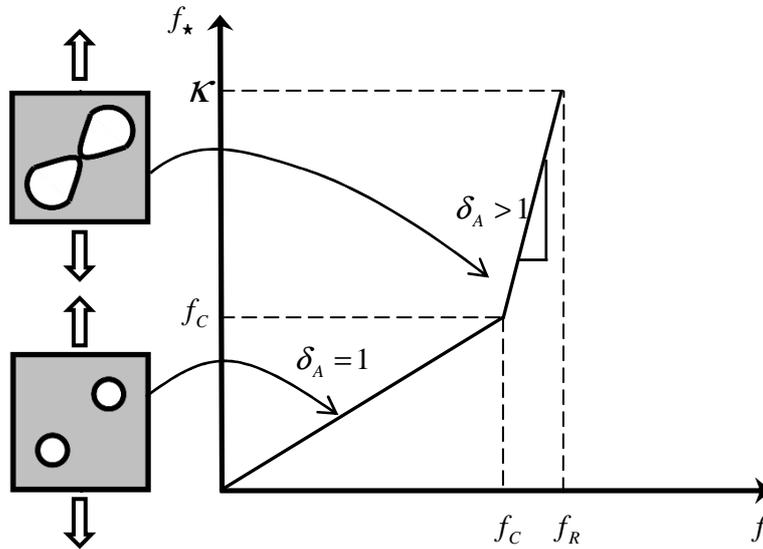


Figure 2.3 : Schématisation de la relation bilinéaire de la porosité effective en fonction de la porosité d'après l'approche de (Tvergaard & Needleman, 1984).

En combinant les relations (2.21), (2.25) et (2.27), on obtient la loi d'évolution du taux de porosité effective qui s'exprime sous la forme :

$$\dot{f}_{\star} = \delta_A (\mathcal{A}_N \dot{\sigma}_M + \mathcal{B}_N \dot{\Sigma}_m + (1-f) \mathbf{D}^p : \mathbf{1}) \quad (2.29)$$

2.3.2.3 Taux de déformation plastique équivalente microscopique

En plus de la loi d'évolution du taux de porosité, on définit la loi d'évolution de la déformation plastique équivalente microscopique. Pour une matrice dont le comportement est rigide-plastique avec écrouissage isotrope, (Gurson, 1977) a montré que le lemme de Hill-Mandel permet d'écrire :

$$\underline{\Sigma} : \underline{\mathbf{D}}^p = (1-f) \sigma_M \dot{\epsilon}_M^p \quad (2.30)$$

Par analogie au modèle de (Gurson, 1977), la relation (2.30) n'est en fait exacte que pour une porosité nulle, et demeure une approximation raisonnable dans le cas où la porosité n'est pas nulle à condition que la valeur de l'exposant d'écrouissage soit relativement faible

(Tvergaard, 1987). La loi d'écoulement permet de définir l'expression du taux de déformation plastique macroscopique sous la forme :

$$\underline{\mathbf{D}}^p = \dot{\Lambda} \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} \quad (2.31)$$

tel que $\dot{\Lambda}$ représente le multiplicateur plastique qui peut être obtenu à partir de la condition de cohérence, et $\underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} = \partial \mathcal{F} / \partial \underline{\Sigma}$ un tenseur d'ordre deux définissant la direction d'écoulement normale à la surface de charge dans l'espace des contraintes principales. En injectant la relation (2.31) dans la relation (2.30), on obtient la loi d'évolution de la déformation plastique microscopique tel que :

$$\dot{\underline{\epsilon}}_M^p = \frac{\underline{\Sigma} : \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}}}{(1-f) \sigma_M} \dot{\Lambda} \quad (2.32)$$

À noter que la relation (2.32) permet également de décrire l'évolution de la contrainte équivalente microscopique, moyennant une loi d'écrouissage donnée.

2.3.3 Condition de cohérence

Afin de déterminer l'expression du multiplicateur plastique dans le cas d'un modèle de plasticité indépendant du temps physique, on utilise généralement la condition de cohérence. Cette dernière est obtenue à partir des conditions de complémentarité de Kuhn-Tucker (Simo & Hughes, 1998) tel que :

$$\mathcal{F} \leq 0, \quad \dot{\Lambda} \geq 0, \quad \dot{\Lambda} \mathcal{F} = 0 \quad (2.33)$$

À partir des relations (2.33), on écrit la condition de cohérence tel que :

$$\dot{\mathcal{F}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} : \dot{\underline{\Sigma}} + \mathcal{F}_{\sigma_M} \dot{\sigma}_M + \mathcal{F}_{f_\star} \dot{f}_\star = 0 \quad (2.34)$$

avec $\mathcal{F}_{\sigma_M} = \partial \mathcal{F} / \partial \sigma_M$ et $\mathcal{F}_{f_\star} = \partial \mathcal{F} / \partial f_\star$. D'autre part, la loi hypo-élastique permet de relier le taux de contrainte de Cauchy (ou plus précisément une dérivée objective de la contrainte de Cauchy) au tenseur taux de déformation élastique Eulérien. Cette relation s'exprime sous la forme :

$$\dot{\underline{\Sigma}} = \underline{\mathbf{C}}^e : (\underline{\mathbf{D}} - \underline{\mathbf{D}}^p) = \underline{\mathbf{C}}^e : (\underline{\mathbf{D}} - \dot{\Lambda} \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}}) \quad (2.35)$$

En injectant les relations (2.21), (2.25), (2.32) et (2.35) dans l'équation (2.34) on obtient l'expression du multiplicateur plastique donnée par :

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{\mathcal{H}_\Lambda} \underline{\mathbf{P}} : \underline{\mathbf{C}}^e : \underline{\mathbf{D}} \quad (2.36)$$

avec

$$\mathcal{H}_\Lambda = \underline{\mathbf{P}} : \underline{\mathbf{C}}^e : \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} - \mathcal{H}_{\sigma_M} \frac{\underline{\Sigma} : \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}}}{(1-f) \sigma_M} \left(\mathcal{F}_{\sigma_M} + \mathcal{A}_N \mathcal{F}_{f_\star} \delta_A \right) - \mathcal{F}_{f_\star} \delta_A (1-f) \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} : \underline{\mathbf{1}} \quad (2.37)$$

$$\underline{\mathbf{P}} = \left(\underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} + \frac{\mathcal{B}_N}{3} \mathcal{F}_{f_\star} \delta_A \underline{\mathbf{1}} \right) \quad (2.38)$$

On peut montrer à partir des équations (2.22) et (2.38) que lorsque la germination est contrôlée par la déformation plastique équivalente microscopique, on a $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}}$. En combinant les relations (2.31) et (2.36) on trouve l'expression du taux de déformation plastique macroscopique qui s'exprime sous la forme :

$$\underline{\mathbf{D}}^p = \frac{\underline{\mathbf{P}} : \underline{\mathbf{C}}^e : \underline{\mathbf{D}}}{\mathcal{H}_\lambda} \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} \quad (2.39)$$

Les relations précédentes font apparaître une propriété remarquable qui est souvent rencontrée dans les modèles de plasticité pertinents aux géo-matériaux, mais peu en ce qui concerne la modélisation du comportement des métaux. En effet, en plus du fait que le comportement est orthotrope et dépend de la pression hydrostatique ($\underline{\mathbf{D}}^p : \underline{\mathbf{1}} \neq 0$), les relations précédentes indiquent que lorsque la nucléation est contrôlée par la contrainte³, c.-à-d. lorsque $\mathcal{A}_N = \kappa^B \mathcal{B}_N \neq 0$, on obtient un effet de non-normalité de la loi d'écoulement. Par contre, lorsque la nucléation est contrôlée par la déformation plastique équivalente microscopique, c.-à-d. lorsque $\mathcal{A}_N \neq 0$ et $\mathcal{B}_N = 0$, la normalité de la loi d'écoulement est vérifiée.

2.3.4 Détermination du module tangent analytique

Le module tangent analytique $\underline{\mathbf{L}}_{\underline{\Sigma}}$ permet de relier le taux de contrainte de Cauchy (ou plus précisément une dérivée objective du tenseur de contrainte de Cauchy) au tenseur taux de déformation Eulérien à travers la loi hypo-élastique tel que :

$$\underline{\dot{\Sigma}} = \underline{\mathbf{L}}_{\underline{\Sigma}} : \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{C}}^e : (\underline{\mathbf{D}} - \dot{\Lambda} \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}}) \quad (2.40)$$

En injectant l'expression du multiplicateur plastique donnée par l'équation (2.36) dans la relation (2.40), on obtient l'expression du module tangent analytique dans le repère matériau qui s'exprime sous la forme :

$$\underline{\mathbf{L}}_{\underline{\Sigma}} = \underline{\mathbf{C}}^e - \frac{\alpha}{\mathcal{H}_\lambda} (\underline{\mathbf{C}}^e : \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}}) \otimes (\underline{\mathbf{P}} : \underline{\mathbf{C}}^e) \quad (2.41)$$

où α représente un scalaire égal à un pour un chargement élasto-plastique et à zéro autrement. On peut remarquer à partir de la relation précédente que les propriétés de symétrie de l'opérateur tangent $\underline{\mathbf{L}}_{\underline{\Sigma}}$ dépendent du critère de germination considéré. En effet, à partir des relations (2.22) et (2.38) on montre que lorsque $\dot{f}_n = \dot{f}_n(\dot{\epsilon}_M^p)$, l'opérateur $\underline{\mathbf{L}}_{\underline{\Sigma}}$ possède les symétries majeure et mineure, alors que pour $\dot{f}_n = \dot{f}_n(\dot{\sigma}_M)$ l'opérateur $\underline{\mathbf{L}}_{\underline{\Sigma}}$ n'est plus symétrique. Contrairement au module tangent $\underline{\mathbf{L}}_{\underline{\Sigma}}$, les opérateurs $\underline{\mathcal{L}}^N$ et $\underline{\mathcal{A}}$ qui interviennent dans les différents critères de bifurcation, ne sont pas symétriques à cause de l'introduction des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies. Nous analyserons dans les prochains chapitres l'effet de ces termes convectifs sur la singularité du tenseur acoustique

³ On fait ici allusion à la contrainte principale maximale à l'intérieur et au voisinage de l'interface inclusion-matrice (voir chapitre 1 pour plus de détails).

\mathcal{A} , d'une part, et sur la singularité ou la perte de définie positivité du module tangent $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$, d'autre part.

2.4 Implantation numérique du modèle de comportement

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté les différentes équations permettant de construire un modèle de comportement à partir du critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001). On s'intéresse à présent à l'intégration numérique des équations du modèle de comportement décrit précédemment. L'implantation numérique a été effectuée dans le code de calcul par éléments finis Abaqus/Standard, à partir d'une routine utilisateur UMAT. On se restreint dans cette partie à l'intégration numérique des équations du modèle élasto-plastique, sans discuter les techniques de résolution des problèmes non-linéaires par la méthode des éléments finis.

Plus précisément, il s'agit de discuter de certaines méthodes numériques permettant de prédire l'état de contrainte ainsi que les variables internes à l'instant t_{n+1} , connaissant l'état de contrainte ainsi que les variables internes à l'instant t_n , en plus de l'incrément de déformation totale $\Delta \underline{\underline{\mathbf{E}}}$ fourni par le code de calcul. En outre, puisque Abaqus/Standard repose sur une résolution des équations d'équilibre par une méthode implicite, il est impératif de déterminer l'expression du module tangent cohérent. Ce dernier sert en particulier à la détermination de la matrice de rigidité locale à chaque incrément de chargement, moyennant des méthodes d'intégration numérique appropriées.

2.4.1 Position du problème

La mise en œuvre d'algorithmes et de méthodes d'intégration de lois de comportement offrant une robustesse et une stabilité satisfaisante est d'un enjeu primordial s'agissant de la résolution des problèmes non-linéaires. En ce qui concerne la modélisation du comportement des métaux, la non-linéarité des équations sur lesquelles reposent la plupart des modèles de plasticité impose une résolution incrémentale du problème (théorie de la plasticité incrémentale). Cette résolution introduit en général des erreurs qui doivent être maîtrisées afin de fournir des résultats suffisamment précis, d'une part, et de minimiser les coûts relatifs aux temps de calcul, d'autre part. Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature afin d'intégrer les équations de différents modèles de plasticité permettant de décrire le comportement de matériaux variés (e.g. matériaux métalliques, géo-matériaux, ... etc.). Les principales méthodes d'intégration des lois de comportement développées dans la littérature depuis ces trente dernières années peuvent être scindées en deux catégories à savoir, les schémas explicites et implicites.

Les schémas explicites sont connus pour être relativement simples à mettre en œuvre tant sur le plan théorique que sur le plan numérique. Cette simplicité de mise en œuvre est encore plus attractive lorsque l'expression de la surface de charge ou celle des variables internes est complexe (e.g. présence de points anguleux sur la surface de charge, plasticité non-associée). C'est pourquoi, ces méthodes sont souvent utilisées en plasticité cristalline (Franz et al., 2009), ou encore pour modéliser le comportement des géo-matériaux (Hong et al., 2012).

Bien entendu, ces avantages sont accompagnés de certains inconvénients liés principalement à la stabilité de ces schémas. En effet, différentes études réalisées dans (Ortiz & Popov, 1985), (Lee, 1988), (Loret et al., 1992), (Zhang, 1996), (Haddag, 2007) montrent que les schémas explicites que ce soit celui d'Euler ou de Runge-Kutta s'avèrent conditionnellement stables. Par conséquent, ces derniers nécessitent des incréments de chargement relativement faibles afin d'assurer une précision acceptable. Cette stabilité conditionnelle se traduit par des temps de calculs qui peuvent être élevés, en particulier lorsque le nombre d'éléments finis associés à la discrétisation spatiale est important.

Les schémas implicites se divisent en plusieurs familles dont on peut citer la méthode asymptotique (Freed & Walker, 1992), ainsi que la thêta méthode (Ortiz & Popov, 1985), (Chaboche & Cailletaud, 1996). Il est à noter que les méthodes implicites possèdent toutes la caractéristique d'une résolution itérative. La thêta méthode a connu une popularité grandissante depuis les travaux de (Ortiz & Popov, 1985), (Simo & Taylor, 1985) et consiste à introduire un paramètre scalaire noté θ compris entre zéro et un. Cette méthode générale permet de retrouver la méthode d'Euler implicite lorsque $\theta = 1$, la méthode d'Euler explicite lorsque $\theta = 0$ alors que pour $\theta = 1/2$ la méthode est dite semi-implicite. Dans (Ortiz & Popov, 1985) et (Lee, 1988), il a été montré que la méthode d'Euler implicite est inconditionnellement stable et autorise par conséquent des incréments de chargement importants. Cette propriété permet une réduction considérable des temps de calculs tout en conservant une précision satisfaisante. Néanmoins, la mise en œuvre de ce type de schémas d'intégration nécessite le calcul de dérivées premières et secondes en plus d'éventuelles inversions de matrices, ce qui rend leur mise en œuvre bien plus complexe comparée à celle des schémas explicites.

Dans les deux prochains paragraphes, on commence par donner une présentation des différentes méthodes explicites que nous avons mises en œuvre et implantées sous forme d'une routine utilisateur (UMAT). Les schémas explicites seront utilisés afin d'intégrer le modèle de plasticité de (Benzerga & Besson, 2001) en considérant la germination comme étant contrôlée par la contrainte ou la déformation. En ce qui concerne les méthodes implicites, on se limitera à l'implantation du modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman en prenant en compte la coalescence des cavités.

2.4.2 Intégration du modèle de comportement par des schémas explicites

Dans cette partie, on s'intéresse aux méthodes d'intégration explicites d'Euler et de Runge-Kutta sous une forme unifiée, dans le but d'intégrer les équations du modèle de comportement décrit précédemment. Les lois d'évolution présentées dans les précédents paragraphes correspondent à des équations différentielles ordinaires (E.D.O.) du premier ordre. En outre, il est possible de regrouper ces lois d'évolution sous la forme vectorielle suivante⁴ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_x(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

⁴ Afin d'alléger la notation, les grandeurs vectorielles seront notées en gras uniquement. Ainsi, le vecteur contenant les variables internes est noté \mathbf{x} au lieu de $\bar{\mathbf{x}}$.

où \mathbf{x} est un vecteur qui comporte l'ensemble des variables constitutives du modèle de comportement et \mathbf{h}_x un vecteur qui dépend du nombre de ces variables. Sous forme incrémentale, le taux des variables définies par la relation (2.42) s'obtient à chaque incrément sous la forme :

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{h}_x(\mathbf{x}_n + a_i \Delta \mathbf{x}_{i-1}), \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}^S \quad (2.43)$$

Les méthodes explicites d'Euler ou de Runge-Kutta permettent de réactualiser le vecteur \mathbf{x} à l'instant t_{n+1} uniquement à partir de la connaissance de \mathbf{x} à l'instant t_n tel que :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}^S} b_i \Delta \mathbf{x}_i \quad (2.44)$$

où $\mathcal{N}^S = \{1, 2, 4\}$ indique l'ordre du schéma d'intégration considéré. Lorsque $\mathcal{N}^S = 1$, on obtient la méthode d'Euler explicite alors que pour $\mathcal{N}^S = 2$ et $\mathcal{N}^S = 4$, on obtient, respectivement, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4. Les coefficients a_i et b_i dépendent du schéma explicite considéré, et sont définis par la relation suivante :

$$\begin{cases} a_i = \{0\}, & b_i = \{1\}, & \mathcal{N}^S = 1 \\ a_i = \{0, \frac{1}{2}\}, & b_i = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, & \mathcal{N}^S = 2 \\ a_i = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}, & b_i = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}, & \mathcal{N}^S = 4 \end{cases} \quad (2.45)$$

À présent, il est possible de condenser les équations du modèle élasto-plastique décrites précédemment sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : (\underline{\underline{\mathbf{D}}} - \underline{\underline{\mathbf{D}}}^p) \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}}^p = \dot{\underline{\underline{\lambda}}} \mathcal{F}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}} \\ \dot{\underline{\underline{\lambda}}} = \mathbf{h}_{\underline{\underline{\lambda}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{h}_y(\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}, \mathbf{y}) \dot{\underline{\underline{\lambda}}} \end{cases} \quad (2.46)$$

où \mathbf{y} désigne le vecteur regroupant les variables internes et $\mathbf{h}_{\underline{\underline{\lambda}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}} : \underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^e / \mathcal{H}_{\underline{\underline{\lambda}}}$ peut être obtenu à partir de la relation (2.36). Sous forme incrémentale, les relations (2.46) sont données par :

$$\begin{cases} \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}_i = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : (\Delta \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \Delta \underline{\underline{\mathbf{E}}}_i^p) \\ \Delta \underline{\underline{\mathbf{E}}}_i^p = \mathcal{F}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}} \Big|_i \Delta \Lambda_i = \mathcal{F}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}_n + a_i \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}_{i-1}, \mathbf{y}_n + a_i \Delta \mathbf{y}_{i-1}) \Delta \Lambda_i \\ \Delta \Lambda_i = \mathbf{h}_{\underline{\underline{\lambda}}} \Big|_i : \Delta \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \mathbf{h}_{\underline{\underline{\lambda}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}_n + a_i \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}_{i-1}, \mathbf{y}_n + a_i \Delta \mathbf{y}_{i-1}) : \Delta \underline{\underline{\mathbf{E}}} \\ \Delta \mathbf{y}_i = \mathbf{h}_y(\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}_n + a_i \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}_{i-1}, \mathbf{y}_n + a_i \Delta \mathbf{y}_{i-1}) \Delta \Lambda_i \end{cases} \quad (2.47)$$

À présent, l'utilisation de l'une des méthodes explicites résumées par les relations (2.43), (2.44) et (2.45) permet d'intégrer les équations de comportement incrémentales définies par les relations (2.47) tel que :

$$\underline{\Sigma}_{n+1} = \underline{\Sigma}_n + \sum_{i=1}^{N^S} b_i \Delta \underline{\Sigma}_i \quad ; \quad \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^{N^S} b_i \Delta \mathbf{y}_i \quad (2.48)$$

2.4.2.1 Détermination du module tangent cohérent

On s'intéresse à présent à la détermination du module tangent cohérent, appelé également module tangent algorithmique, dans le cadre des méthodes d'intégration explicites. Comme mentionné précédemment, en ce qui concerne les codes éléments finis reposant sur une résolution implicite (e.g. Abaqus/Standard), il est nécessaire de déterminer à chaque incrément de chargement le module tangent cohérent en plus de la réactualisation du tenseur de contrainte et des variables internes. Sous forme incrémentale, la loi hypo-élastique (voir relation (2.35) permet d'écrire :

$$d(\Delta \underline{\Sigma}) = \underline{\mathbf{L}}^{alg} : d(\Delta \underline{\mathbf{E}}) \quad (2.49)$$

En prenant en compte les relations (2.47) et (2.48), la précédente équation se réécrit sous la forme :

$$d(\Delta \underline{\Sigma}) = \sum_{i=1}^{N^S} b_i \left[\underline{\mathbf{C}}^e - \underline{\mathbf{C}}^e : \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} \Big|_{\mathbf{h}_{\lambda}} \Big|_i \right] : d(\Delta \underline{\mathbf{E}}) \quad (2.50)$$

En injectant les relations (2.36), (2.37) et (2.38) dans la relation (2.50), on obtient l'expression du module tangent cohérent donnée par :

$$\underline{\mathbf{L}}^{alg} = \sum_{i=1}^{N^S} b_i \underline{\mathbf{L}}^{ep} \Big|_i \quad (2.51)$$

où

$$\underline{\mathbf{L}}^{ep} \Big|_i = \underline{\mathbf{C}}^e - \frac{\alpha}{\mathcal{H}_{\lambda} \Big|_i} \left(\underline{\mathbf{C}}^e : \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} \Big|_i \right) \otimes \left(\underline{\mathbf{P}} \Big|_i : \underline{\mathbf{C}}^e \right) \quad (2.52)$$

À noter que le module tangent cohérent défini par la relation (2.51) est sensiblement différent du module tangent analytique défini par la relation (2.41). Néanmoins, lorsqu'on considère le schéma d'Euler explicite, l'expression du module tangent algorithmique devient identique au module tangent analytique. Le Tableau 2.1 illustre l'algorithme utilisé pour l'implantation numérique du modèle élasto-plastique sous forme d'une routine utilisateur (UMAT) dans Abaqus/Standard. On remarquera en particulier dans le Tableau 2.1 l'introduction d'une variable scalaire notée $\beta = \underline{\mathcal{F}}_{\underline{\Sigma}} : \Delta \underline{\mathbf{E}}$ qui permet de détecter la décharge élastique. Ainsi, lorsque le paramètre β est strictement négatif, le comportement suit une décharge élastique, alors que pour une valeur positive, le comportement est élasto-plastique. Ce n'est que dans ce deuxième cas que l'incrément des variables internes est non-nul.

Tableau 2.1 : Algorithme pour les méthodes explicites d'Euler et de Runge-Kutta.

- 1 Données d'entrée : $\Delta \underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{\Sigma}}_n$ et $\underline{\mathbf{y}}_n$
- 2 Initialisation : $\Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_0 = \mathbf{0}, \Delta \underline{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{0}$
- 3 Faire pour $i=1$ à \mathcal{N}^S (\mathcal{N}^S indique l'ordre du schéma d'intégration considéré)
 - 3.1 Calculer $\underline{\mathbf{\Sigma}}_i = \underline{\mathbf{\Sigma}}_n + a_i \Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_{i-1}, \underline{\mathbf{y}}_i = \underline{\mathbf{y}}_n + a_i \Delta \underline{\mathbf{y}}_{i-1}$
 - 3.2 Vérifier le critère de plasticité $\mathcal{F}|_i = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{\Sigma}}_i, \underline{\mathbf{y}}_i) < 0$?

- Si $\mathcal{F}|_i = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{\Sigma}}_i, \underline{\mathbf{y}}_i) < 0$, alors calcul élastique

$$\Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_i = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : \Delta \underline{\mathbf{E}}, \Delta \underline{\mathbf{y}}_i = \mathbf{0}, \underline{\underline{\mathbf{L}}}^{ep}|_i = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e$$

- Sinon, calculer $\beta_i = \mathcal{F}_{\underline{\mathbf{\Sigma}}}|_i : \Delta \underline{\mathbf{E}}$

- Si $\beta_i < 0$, alors décharge élastique

$$\Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_i = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : \Delta \underline{\mathbf{E}}, \Delta \underline{\mathbf{y}}_i = \mathbf{0}, \text{ et } \underline{\underline{\mathbf{L}}}^{ep}|_i = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e$$

- Sinon, calcul élasto-plastique

$$\Delta \Lambda_i = \mathbf{h}_{\Lambda}(\underline{\mathbf{\Sigma}}_n + a_i \Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_{i-1}, \underline{\mathbf{y}}_n + a_i \Delta \underline{\mathbf{y}}_{i-1}) : \Delta \underline{\mathbf{E}}$$

$$\Delta \underline{\mathbf{E}}_i^p = \mathcal{F}_{\underline{\mathbf{\Sigma}}}(\underline{\mathbf{\Sigma}}_n + a_i \Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_{i-1}, \underline{\mathbf{y}}_n + a_i \Delta \underline{\mathbf{y}}_{i-1}) \Delta \Lambda_i$$

$$\Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_i = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : (\Delta \underline{\mathbf{E}} - \Delta \underline{\mathbf{E}}_i^p)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{y}}_i = \mathbf{h}_{\mathbf{y}}(\underline{\mathbf{\Sigma}}_n + a_i \Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_{i-1}, \underline{\mathbf{y}}_n + a_i \Delta \underline{\mathbf{y}}_{i-1}) \Delta \Lambda_i$$

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}^{ep}|_i = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e - \frac{1}{\mathcal{H}_{\Lambda}|_i} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : \mathcal{F}_{\underline{\mathbf{\Sigma}}}|_i) \otimes (\underline{\mathbf{P}}|_i : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e)$$

Fin Boucle

- 4 Réactualiser le tenseur de contrainte de Cauchy ainsi que le vecteur contenant les variables internes et déterminer le module tangent cohérent

$$\underline{\mathbf{\Sigma}}_{n+1} = \underline{\mathbf{\Sigma}}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \underline{\mathbf{\Sigma}}_i, \quad \underline{\mathbf{y}}_{n+1} = \underline{\mathbf{y}}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \underline{\mathbf{y}}_i, \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}}^{alg} = \sum_{i=1}^N b_i \underline{\underline{\mathbf{L}}}^{ep}|_i$$

Retourner $\underline{\mathbf{\Sigma}}_{n+1}$ et $\underline{\mathbf{y}}_{n+1}$ ainsi que $\underline{\underline{\mathbf{L}}}^{alg}$ au code de calcul afin de vérifier l'équilibre.

2.4.3 Intégration du modèle de comportement par un schéma implicite

On s'intéresse dans cette partie à l'implantation numérique du modèle Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) en considérant la germination comme étant contrôlée par la déformation plastique équivalente. Les premiers travaux traitant de l'implantation numérique du modèle

GTN par un schéma implicite remontent à ceux de (Aravas, 1987). L'algorithme proposé dans (Aravas, 1987) repose sur une résolution des équations de comportement à partir de la méthode d'Euler implicite. Nous allons voir que cet algorithme permet de réduire considérablement la taille du système d'équations à résoudre (généralement par la méthode de Newton-Raphson). (Zhang, 1996) a proposé une extension de l'algorithme de (Aravas, 1987) à partir de la méthode du point milieu généralisée, incluant la méthode d'Euler implicite ainsi que la méthode d'Euler explicite. Conformément aux travaux de (Ortiz & Popov, 1985) et (Lee, 1988), (Zhang, 1996) a montré que pour un modèle de plasticité présentant une dépendance à la pression hydrostatique, la méthode d'Euler explicite se révèle être la moins précise, alors que la méthode d'Euler implicite s'avère inconditionnellement stable. Récemment, (Ben Bettaieb et al., 2011) ont proposé une méthode implicite originale basée sur une extension des travaux de (Aravas, 1987) dans le but d'implanter le modèle de (Benzerga & Besson, 2001) en considérant uniquement la croissance des cavités. Notons qu'à l'exception des travaux de (Keavey, 2006) et (Sánchez et al., 2008), la plupart des algorithmes proposés dans la littérature ne prennent pas en compte l'accélération de porosité due à la coalescence des cavités.

On présente dans ce qui suit l'algorithme proposé par (Aravas, 1987), dans le but d'implanter le modèle GTN. Conformément aux travaux de (Aravas, 1987), (Zhang, 1996) et (Sánchez et al., 2008), on commence par décomposer le tenseur de contrainte de Cauchy en une partie déviatorique et une partie sphérique tel que :

$$\underline{\Sigma}_{t+\Delta t} = \Sigma_m \Big|_{t+\Delta t} \underline{\mathbf{1}} + \frac{2}{3} \Sigma_{eq} \Big|_{t+\Delta t} \underline{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} \quad (2.53)$$

où $\underline{\mathbf{Q}}$ désigne un tenseur dont la direction est normale à la surface de charge dans l'espace des contraintes déviatoriques (c.-à-d. $\underline{\mathbf{Q}} = 3\underline{\Sigma}'/2\Sigma_{eq}$). Σ_m et Σ_{eq} désignent, respectivement, la contrainte moyenne et la contrainte équivalente au sens de von Mises (c.-à-d. $\Sigma_m = \underline{\Sigma}:\underline{\mathbf{1}}/3$ et $\Sigma_{eq} = (3\underline{\Sigma}':\underline{\Sigma}'/2)^{1/2}$). De même, il est possible de décomposer l'incrément du tenseur de déformation plastique en une partie sphérique et une autre partie déviatorique tel que :

$$\Delta \underline{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{3} \Delta E_m \Big|_{t+\Delta t} \underline{\mathbf{1}} + \Delta E_{eq} \Big|_{t+\Delta t} \underline{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} \quad (2.54)$$

où ΔE_m et ΔE_{eq} sont obtenus à partir de la loi d'écoulement (voir la relation (2.31)) :

$$\Delta E_m \Big|_{t+\Delta t} = \Delta \Lambda \left(\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_m \right)_{t+\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta E_{eq} \Big|_{t+\Delta t} = \Delta \Lambda \left(\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_{eq} \right)_{t+\Delta t} \quad (2.55)$$

En éliminant $\Delta \Lambda$ de cette dernière équation, on obtient :

$$\Delta E_m \Big|_{t+\Delta t} \left(\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_{eq} \right)_{t+\Delta t} - \Delta E_{eq} \Big|_{t+\Delta t} \left(\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_m \right)_{t+\Delta t} = 0 \quad (2.56)$$

En combinant les relations (2.40), (2.53) et (2.54), on obtient :

$$\underline{\Sigma}_{t+\Delta t} = \underline{\Sigma}^{\text{Tr}} - K \Delta E_m \Big|_{t+\Delta t} \underline{\mathbf{1}} - 2G \Delta E_{eq} \Big|_{t+\Delta t} \underline{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} \quad (2.57)$$

où $\underline{\Sigma}^{\text{Tr}} = \underline{\Sigma}_t + \underline{\mathbf{C}}^e : \Delta \underline{\mathbf{E}}$ désigne le tenseur de contrainte de Cauchy au temps $t + \Delta t$ avant correction (le tenseur $\underline{\Sigma}^{\text{Tr}}$ est obtenu en considérant que l'incrément de chargement est purement élastique). G et K représentent, respectivement, les modules de cisaillement et de compressibilité. La relation (2.57) montre que dans l'espace des contraintes déviatoriques, la prédiction par retour radial s'effectue suivant la direction du tenseur $\underline{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t}$. Par conséquent, les tenseurs $(\underline{\Sigma}^{\text{Tr}})'$ et $\underline{\Sigma}'_{t+\Delta t}$ sont *a fortiori* coaxiaux et il devient possible d'exprimer le tenseur $\underline{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t}$ sous la forme :

$$\underline{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} = \frac{3}{2\underline{\Sigma}_{eq}^{\text{Tr}}} (\underline{\Sigma}^{\text{Tr}})' \quad (2.58)$$

où $\underline{\Sigma}_{eq}^{\text{Tr}} = \left(3(\underline{\Sigma}^{\text{Tr}})' : (\underline{\Sigma}^{\text{Tr}})' / 2 \right)^{1/2}$. D'autre part, l'incrément des variables internes peut s'exprimer sous la forme vectorielle suivante :

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{h}_y (\Delta \underline{\mathbf{E}}^p, \underline{\Sigma}_{t+\Delta t}, \mathbf{y}_{t+\Delta t}) \quad (2.59)$$

En comparant les relations (2.53) et (2.57), on en déduit que :

$$\begin{aligned} \Sigma_m|_{t+\Delta t} &= \Sigma_m^{\text{Tr}} - K \Delta E_m|_{t+\Delta t} \\ \Sigma_{eq}|_{t+\Delta t} &= \Sigma_{eq}^{\text{Tr}} - 3G \Delta E_{eq}|_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Compte tenu des relations (2.57) et (2.58), le tenseur de contrainte de Cauchy peut être réactualisé en connaissant uniquement les deux variables scalaires ΔE_m et ΔE_{eq} . Par ailleurs, en injectant les relations (2.53) et (2.54) dans la relation (2.59), on trouve :

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{h}_y (\Delta E_m, \Delta E_{eq}, \Sigma_m, \Sigma_{eq}, \mathbf{y}_{t+\Delta t}) \quad (2.61)$$

Afin d'alléger la notation, on considère dans la suite (sauf mention contraire) que toutes les quantités sont évaluées à la fin de l'incrément de chargement (c.-à-d. au temps $t + \Delta t$). Ainsi, les équations permettant de résoudre le problème se résument au système suivant :

$$\Delta E_m (\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_{eq}) - \Delta E_{eq} (\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_m) = 0 = R_E \quad (2.62)$$

$$\mathcal{F} (\underline{\Sigma} (\Delta E_m, \Delta E_{eq}), \sigma_M (\varepsilon_M^p), f_\star (f)) = 0 = R_{\mathcal{F}} \quad (2.63)$$

$$\Delta \varepsilon_M^p - \frac{\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq}}{(1-f) \sigma_M} = 0 = R_\varepsilon \quad (2.64)$$

$$\Delta f - (1-f) \Delta E_m - \mathcal{A}_N \Delta \varepsilon_M^p = 0 = R_f \quad (2.65)$$

La résolution des équations (2.62) à (2.65) s'effectue à partir de la méthode de Newton-Raphson. En notant $\Delta \mathbf{x} = [\Delta E_m, \Delta E_{eq}, \Delta \varepsilon_M^p, \Delta f]^T = \mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{x}_t$, et $\mathbf{R} = [R_E, R_{\mathcal{F}}, R_{\varepsilon}, R_f]^T$, la méthode de Newton-Raphson consiste à linéariser le résidu \mathbf{R} sous la forme :

$$\mathbf{R}^{(k)} + \tilde{\mathbf{J}}^{(k)} \delta \Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (2.66)$$

où $\tilde{\mathbf{J}}^{(k)}$ désigne la matrice Jacobienne évaluée à l'itération k tel que :

$$\tilde{\mathbf{J}}^{(k)} = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta \mathbf{x}} \right|^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

et

$$\delta \Delta \mathbf{x}^{(k)} = [\delta \Delta E_m, \delta \Delta E_{eq}, \delta \Delta \varepsilon_M^p, \delta \Delta f]^T = [\delta_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \quad \vdots \quad \delta_{\varepsilon}^f]^T \quad (2.68)$$

Les composantes $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$, dont l'expression est détaillée en annexe A2, font intervenir les dérivées du résidu \mathbf{R} par rapport aux variables intervenant dans le système d'équations (2.62) à (2.65). La linéarisation du résidu \mathbf{R} , telle que décrite par la relation (2.66), permet de réactualiser à chaque itération k le vecteur $\delta \Delta \mathbf{x}^{(k)}$ simplement en inversant la matrice Jacobienne $\tilde{\mathbf{J}}^{(k)}$. Ce choix a été fait dans (Ben Bettaieb et al., 2011), en considérant uniquement la croissance des cavités, en ce qui concerne l'implantation numérique du modèle de (Benzerga & Besson, 2001). Néanmoins, si on prend en compte la germination des cavités, et compte tenu de la forte non-linéarité de la fonction \mathcal{A}_V (voir Figure 2.2), il est généralement difficile de résoudre le système d'équations (2.66) par une méthode directe. L'idée proposée notamment dans (Sánchez et al., 2008) est de résoudre le système (2.66) en utilisant deux boucles imbriquées l'une dans l'autre. La boucle externe est définie par les relations (2.62) et (2.63), alors que la boucle interne est définie par les relations (2.64) et (2.65). Dans la boucle interne, on cherche à résoudre $\mathbf{R}_{\varepsilon}^f = [R_{\varepsilon}, R_f]^T = \mathbf{0}$ en posant $\delta_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \mathbf{0}$ ce qui revient à supposer que ΔE_m et ΔE_{eq} restent constants à l'intérieur de cette boucle. Compte tenu des relations (2.66), (2.67) et (2.68), on calcule à chaque itération k :

$$\delta_{\varepsilon}^f = -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{\varepsilon}^f \quad (2.69)$$

jusqu'à ce que la condition de convergence soit vérifiée (voir Tableau 2.2).

2.4.3.1 Détermination du module tangent cohérent

On cherche à présent à déterminer l'expression du module tangent cohérent dans le cas du schéma d'intégration d'Euler implicite. La linéarisation de loi d'élasticité écrite sous forme incrémentale, combinée à la relation (2.54), nous donne :

$$d\tilde{\Sigma} = \tilde{\mathbf{C}}^e : \left(d\tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{3} d\Delta E_m \mathbf{1} - d\Delta E_{eq} \mathbf{Q} - \Delta E_{eq} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tilde{\Sigma}} : d\tilde{\Sigma} \right) \quad (2.70)$$

À partir de la définition de \mathbf{Q} , on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \underline{\Sigma}} = \frac{1}{\Sigma_{eq}} \left(\frac{3}{2} \underline{\mathbf{1}} - \frac{1}{2} \underline{\mathbf{1}} \otimes \underline{\mathbf{1}} - \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \right) \quad (2.71)$$

La relation (2.70) fait apparaître les termes $d\Delta E_m$ et $d\Delta E_{eq}$ qui peuvent être obtenus en différenciant la relation (2.62) tel que :

$$\begin{aligned} d\Delta E_m \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq}} + \Delta E_m \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq} \partial \Sigma_m} \frac{\partial \Sigma_m}{\partial \underline{\Sigma}} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq}^2} \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \underline{\Sigma}} \right) : d\underline{\Sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq} \partial y_\alpha} dy_\alpha \right] - \\ d\Delta E_{eq} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m} - \Delta E_{eq} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m^2} \frac{\partial \Sigma_m}{\partial \underline{\Sigma}} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial \Sigma_{eq}} \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \underline{\Sigma}} \right) : d\underline{\Sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial y_\alpha} dy_\alpha \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

avec $y_\alpha = [\Delta \varepsilon_M^p, \Delta f]$. En différenciant les relations (2.63), (2.64) et (2.65), on obtient respectivement :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m} \frac{\partial \Sigma_m}{\partial \underline{\Sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq}} \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \underline{\Sigma}} \right) : d\underline{\Sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_\alpha} dy_\alpha = 0 \quad (2.73)$$

$$dy_\alpha = \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Delta E_m} d\Delta E_m + \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Delta E_{eq}} d\Delta E_{eq} + \left(\frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Sigma_m} \frac{\partial \Sigma_m}{\partial \underline{\Sigma}} + \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Sigma_{eq}} \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \underline{\Sigma}} \right) : d\underline{\Sigma} \right] \quad (2.74)$$

Puisqu'on a $\partial \Sigma_m / \partial \underline{\Sigma} = \underline{\mathbf{1}}/3$ et $\partial \Sigma_{eq} / \partial \underline{\Sigma} = \mathbf{Q}$, on peut réécrire les relations (2.72) et (2.73) sous la forme :

$$\begin{aligned} A_{11} d\Delta E_m + A_{12} d\Delta E_{eq} &= (B_{11} \underline{\mathbf{1}} + B_{12} \mathbf{Q}) : d\underline{\Sigma} \\ A_{21} d\Delta E_m + A_{22} d\Delta E_{eq} &= (B_{21} \underline{\mathbf{1}} + B_{22} \mathbf{Q}) : d\underline{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.75)$$

À partir du système d'équations (2.75), il est possible d'extraire les variables $d\Delta E_m$ et $d\Delta E_{eq}$ tel que :

$$\begin{aligned} d\Delta E_m &= (D_{11} \underline{\mathbf{1}} + D_{12} \mathbf{Q}) : d\underline{\Sigma} \\ d\Delta E_{eq} &= (D_{21} \underline{\mathbf{1}} + D_{22} \mathbf{Q}) : d\underline{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.76)$$

où les coefficients $B_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}$ et $D_{\alpha\beta}$ sont donnés en annexe A2. En injectant cette dernière relation dans la relation (2.70), on obtient :

$$\left(\underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{C}}^e : \underline{\mathbf{M}} \right) : d\underline{\Sigma} = \underline{\mathbf{C}}^e : d\underline{\mathbf{E}} \quad (2.77)$$

tel que

$$\underline{\mathbf{M}} = \frac{1}{3} \left(D_{11} \underline{\mathbf{1}} \otimes \underline{\mathbf{1}} + D_{12} \underline{\mathbf{1}} \otimes \mathbf{Q} \right) + D_{21} \mathbf{Q} \otimes \underline{\mathbf{1}} + D_{22} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} + \Delta E_{eq} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \underline{\Sigma}} \quad (2.78)$$

Ainsi, en vertu de la relation (2.77), le module tangent cohérent s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{L}_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}^{\text{Algo}} = \left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{d\tilde{\mathbf{E}}} \right)_{t+\Delta t} = \left(\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{C}}^{e-1} \right)^{-1} \quad (2.79)$$

Le Tableau 2.2 illustre l'algorithme que nous avons implanté dans le code de calcul Abaqus/Standard afin d'intégrer le modèle GTN à partir du schéma d'Euler implicite. Cet algorithme fait intervenir deux scalaires (c.-à-d. i_{max} et j_{max}) dont la valeur est fixée par l'utilisateur. Généralement, une dizaine d'itérations sont suffisantes pour assurer la convergence de l'algorithme.

Tableau 2.2 : Algorithme implicite basé sur l'approche de (Aravas, 1987).

1. Données d'entrée au temps t : $\Delta\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ et \mathbf{y}_t

2. Prédiction élastique :

$$\circ \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\text{Tr}} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_t + \tilde{\mathbf{C}}^e : \Delta\tilde{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{Q}_{t+\Delta t} = \frac{3}{2\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{eq}^{\text{Tr}}} \left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\text{Tr}} \right)', \quad \mathcal{F}^{\text{Tr}} = \mathcal{F} \left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\text{Tr}}, \sigma_M|_t, f_\star|_t \right)$$

3. Critère de plasticité :

$$\circ \quad \begin{cases} \text{Si } \mathcal{F}^{\text{Tr}} \left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\text{Tr}}, \sigma_M|_t, f_\star|_t \right) < 0 \text{ alors} \\ \Delta E_m = \Delta E_{eq} = 0 ; \mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{y}_t ; \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{0}} \rightarrow \text{Aller à l'étape 5} \\ \text{Sinon} \rightarrow \text{Aller à l'étape 4} \end{cases}$$

4. Boucle de Newton-Raphson externe : itérations sur ΔE_m et ΔE_{eq}

○ Faire de $i=1$ à i_{max}

$$\circ \quad \text{Calculer } \sigma_M = \sigma_M \left(\boldsymbol{\varepsilon}_M^p \right) \text{ et } \mathcal{A}_N = \mathcal{A}_N \left(\boldsymbol{\varepsilon}_M^p \right)$$

$$\circ \quad \text{Calculer le résidu } \mathbf{R}_E^{\mathcal{F}} \text{ et la matrice Jacobienne } \mathbf{J}$$

$$\circ \quad \text{Calculer les incréments pour les deux premières éq. } \boldsymbol{\delta}_E^{\mathcal{F}} = \left[\mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{11} \right]^{-1} \mathbf{R}_E^{\mathcal{F}}$$

$$\circ \quad \text{Actualiser } \Delta E_m \text{ et } \Delta E_{eq} \text{ tel que } \begin{bmatrix} \Delta E_m \\ \Delta E_{eq} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta E_m \\ \Delta E_{eq} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\delta}_E^{\mathcal{F}}$$

$$\circ \quad \text{Actualiser } \Sigma_m = \Sigma_m^{\text{Tr}} - K \Delta E_m \text{ et } \Sigma_{eq} = \Sigma_{eq}^{\text{Tr}} - 3G \Delta E_{eq}$$

4.1 Boucle de Newton-Raphson interne : itérations sur $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_M^p$ et Δf

○ Faire de $j=1$ à j_{max}

$$\circ \quad \text{Calculer } \sigma_M = \sigma_M \left(\boldsymbol{\varepsilon}_M^p \right) \text{ et } \mathcal{A}_N = \mathcal{A}_N \left(\boldsymbol{\varepsilon}_M^p \right)$$

$$\circ \quad \text{Calculer le résidu } \mathbf{R}_\varepsilon^f \text{ ainsi que } \mathbf{A}_{22}$$

$$\circ \quad \text{Calculer } \boldsymbol{\delta}_\varepsilon^f = -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{R}_\varepsilon^f$$

- Actualiser $\Delta \varepsilon_M^p$ et Δf à partir de : $\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_M^p \\ \Delta f \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_M^p \\ \Delta f \end{bmatrix} + \delta_\varepsilon^f$,
 - Vérifier le critère de convergence de la boucle interne
 - Actualiser le résidu \mathbf{R}_ε^f
 - Si $\|\mathbf{R}_\varepsilon^f\| < \text{TOL}_2 \rightarrow$ sortir de la boucle interne
 - Sinon si $j=j_{max}$, divergence de l'algorithme \rightarrow sortir du programme.
 - Sinon, continuer.
 - Fin de boucle interne
 - Vérifier le critère de convergence de la boucle externe
 - Actualiser le résidu $\mathbf{R}_E^{\mathcal{F}}$
 - Si $\|\mathbf{R}_E^{\mathcal{F}}\| < \text{TOL}_1 \rightarrow$ Aller à l'étape (5),
 - Sinon si $i < i_{max}$, aller à l'étape (4)
 - Sinon, divergence de l'algorithme \rightarrow sortir du programme.
- 1.1. Fin de boucle externe
5. Réactualiser le tenseur de contrainte de Cauchy
- $\underline{\Sigma}_{t+\Delta t} = \underline{\Sigma}^{\text{Tr}} - K \Delta E_m \underline{\mathbf{1}} - 2G \Delta E_{eq} \underline{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t}$
6. Déterminer le module tangent cohérent
- $\underline{\mathbf{L}}_{t+\Delta t}^{\text{Algo}} = \left(\frac{d\underline{\Sigma}}{d\underline{\mathbf{E}}} \right)_{t+\Delta t} = \left(\underline{\mathbf{M}} + \underline{\mathbf{C}}^{e-1} \right)^{-1}$
7. Retourner $\underline{\Sigma}_{t+\Delta t}$, $\underline{\mathbf{y}}_{t+\Delta t}$ ainsi que $\underline{\mathbf{L}}_{t+\Delta t}^{\text{alg}}$ au code de calcul afin de vérifier l'équilibre.

2.5 Analyse de la performance des schémas d'intégration

Dans cette section, on étudie la performance des différents schémas d'intégration qui ont été présentés dans ce chapitre. Étant donné que le schéma d'Euler implicite a été utilisé pour l'intégration du modèle GTN, ce modèle sera par conséquent utilisé afin d'analyser et de comparer la performance des schémas d'Euler explicite et implicite ainsi que celui de Runge-Kutta d'ordre quatre. En général, deux critères permettent de juger la performance d'un schéma d'intégration à savoir, la précision de la solution recherchée et le temps CPU nécessaire pour l'obtenir. Bien que la supériorité des schémas d'intégration implicite soit un fait indiscutable lorsqu'il s'agit de modèles de comportement relativement simples, peu de travaux se sont intéressés à la comparaison des différents schémas explicites et implicites lorsque le comportement présente des effets adoucissants marqués. (Haddag, 2007) a proposé une étude détaillée sur la performance des schémas d'intégration explicites et implicites à partir d'un modèle de plasticité phénoménologique, couplé à un modèle d'érouissage

microstructural (Teodosiu & Hu, 1998). L'étude réalisée dans (Haddag, 2007) a montré qu'en dépit de la supériorité du schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre comparé au schéma d'Euler explicite, ces deux derniers nécessitent des incréments de chargement faibles afin d'assurer une précision satisfaisante. Les études réalisées dans (Zhang, 1996) ont permis d'analyser la performance des schémas d'Euler implicite et explicite à partir du modèle GTN sans considérer toutefois la coalescence des cavités. Une extension de l'algorithme de (Aravas, 1987) a été proposée dans (Ben Bettaieb et al., 2011) afin d'intégrer le modèle de (Benzerga & Besson, 2001) à partir de la méthode d'Euler implicite. Cependant, seule la croissance des vides a été considérée dans ces travaux. En d'autres termes, ces auteurs considèrent que $\dot{f}_* = \dot{f} = \dot{f}_g$. Par ailleurs, certains auteurs ont évoqué des problèmes de convergence numérique lorsque la germination est contrôlée par la contrainte (Søvik, 1996), (Pardoen, 2010). En effet, en plus de la non-normalité de la loi d'écoulement, le fait de considérer la germination comme étant contrôlée par la contrainte rend l'algorithme proposé par (Aravas, 1987) difficilement applicable. Cette difficulté est principalement due au fait que la partie sphérique du tenseur taux de contrainte de Cauchy intervient dans la loi d'évolution de la porosité. Nous allons voir dans les prochains paragraphes que l'algorithme de (Aravas, 1987) est susceptible de présenter des difficultés de convergence lorsqu'on considère la coalescence des cavités en prenant des incréments de chargement relativement importants.

2.5.1 Simulation de l'essai de traction uniaxiale

On considère ici le modèle de comportement de Gurson-Tvergaard-Needleman avec trois jeux de paramètres correspondant à trois matériaux différents illustrés dans le Tableau 2.3. Les paramètres du matériau M3 qui figurent dans le Tableau 2.3 correspondent à un alliage d'Aluminium AA6016. Ces paramètres ont été identifiés dans (Brunet et al., 1998) à partir d'un essai de traction uniaxiale (voir aussi Chapitre 3 pour une discussion détaillée), alors que les deux autres jeux de paramètres correspondent à des matériaux fictifs (M1 et M2). Les paramètres du matériau M1 sont identiques à ceux du matériau M3 sauf pour le facteur d'accélération de croissance δ_A qui est pris égal à un pour ce matériau afin d'éviter l'entrée en régime de coalescence. Le but étant d'analyser la performance des schémas d'intégration implicite et explicite dans les deux cas avec et sans coalescence. En ce qui concerne le matériau M2, les paramètres de ce dernier sont identiques aux paramètres du matériau M1, sauf pour le paramètre f_N qui est multiplié par un facteur dix. Pour les trois matériaux on considère $q_1 = 1,5$, $q_2 = 1$ et $q_3 = q_1^2$. Avant d'entamer la discussion sur les résultats obtenus à partir des différents schémas d'intégration présentés dans ce chapitre, il convient de rappeler que le modèle GTN est disponible dans le code de calcul Abaqus/Standard. Toutefois, la version disponible dans Abaqus/Standard ne prend pas en compte le régime de coalescence des vides. En outre, on suppose que la germination des cavités est contrôlée par la déformation plastique équivalente microscopique. Par conséquent, ce modèle disponible dans Abaqus/Standard sera utilisé uniquement comme une référence afin de valider les schémas d'intégration en ce qui concerne les matériaux M1 et M2. Les trois matériaux sont décrits par une loi d'écrouissage de Swift qui s'exprime sous la forme :

$$\sigma_M = k^s (\varepsilon_0 + \varepsilon_M^p)^{n^s} \quad (2.80)$$

où k^s , ε_0 et n^s représentent les paramètres de la loi d'écrouissage.

Tableau 2.3 : Paramètres des différents matériaux utilisés pour la validation des schémas d'intégration.

Mat.	Elasticité		Ecrouissage			Endommagement					
	E (MPa)	ν	k^s (MPa)	ε_0	n^s	f_N	ε_N	s_N	f_0	f_C	δ_A
M1	7×10^4	0,33	388,3	0,00975	0,22	0,036	0,276	0,1	0,001	0,015	1
M2	7×10^4	0,33	388,3	0,00975	0,22	0,36	0,276	0,1	0,001	0,015	1
M3	7×10^4	0,33	388,3	0,00975	0,22	0,036	0,276	0,1	0,001	0,015	15

La Figure 2.4.a illustre les courbes de comportement en traction uniaxiale (matériau M1) obtenues à partir des schémas d'Euler explicite et implicite ainsi que celles obtenues à partir du modèle existant dans Abaqus/Standard. On peut constater sur cette figure que les écarts obtenus à partir du schéma d'Euler explicite, sont relativement importants en particulier pour des incréments de déformation de l'ordre de 10^{-3} (c.-à-d. $\|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\| = \|\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n\| = 10^{-3}$). L'utilisation d'un incrément de déformation faible (c.-à-d. $\|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\| = 10^{-4}$) permet d'améliorer sensiblement la précision de ce schéma. L'évolution de la porosité correspondante est illustrée sur la Figure 2.4.b. On peut remarquer sur cette figure une surestimation de la variable d'endommagement par rapport à la courbe de référence (c.-à-d. la courbe obtenue à partir du code Abaqus/Standard). Des résultats similaires sont présentés sur les Figures 2.4.c et 2.4.d en utilisant cette fois le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, à savoir une surestimation de la contrainte ainsi que de la variable d'endommagement par rapport à la courbe de référence. Néanmoins, on peut remarquer sur ces quatre figures une amélioration de la précision avec le schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre 4 comparé au schéma d'Euler explicite. Une idée assez simple, permettant d'améliorer la précision des schémas explicites, consiste à utiliser des incréments de chargement à pas adaptatif. Les incréments de chargement peuvent être adaptés en utilisant un critère reposant sur un incrément de contrainte limite $\Delta \Sigma_{\text{lim}}$ qui ne doit pas être dépassé afin d'assurer une précision suffisante. Ce critère peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\text{si } \|\Delta \boldsymbol{\Sigma}\| = \|\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}_n\| > \Delta \Sigma_{\text{lim}} \quad \text{alors} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{nouveau}} = \frac{\Delta \Sigma_{\text{lim}}}{\Delta \Sigma} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{courant}}$$

Si le critère précédent est vérifié, un nouvel incrément de chargement $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{nouveau}}$ est introduit à la place de l'incrément courant $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{courant}}$. Cette approche a été utilisée dans (Haddag, 2007) à partir d'un modèle de plasticité phénoménologique pour lequel il a été montré que lorsque la valeur de $\Delta \Sigma_{\text{lim}}$ est prise égale à 2,5 MPa, la précision des schémas explicites se trouve être sensiblement améliorée. Toutefois, bien que cette technique permette une automatisation des pas de chargement assurant une précision acceptable, elle est inévitablement accompagnée d'une augmentation des temps CPU. Cette augmentation des temps CPU peut être considérable lorsque le nombre d'éléments appartenant à la discrétisation est important.

Comme mentionné dans (Haddag, 2007), la précision des schémas explicites est intimement liée à la détection du moment précis pour lequel on passe d'un comportement purement élastique à un comportement élasto-plastique.

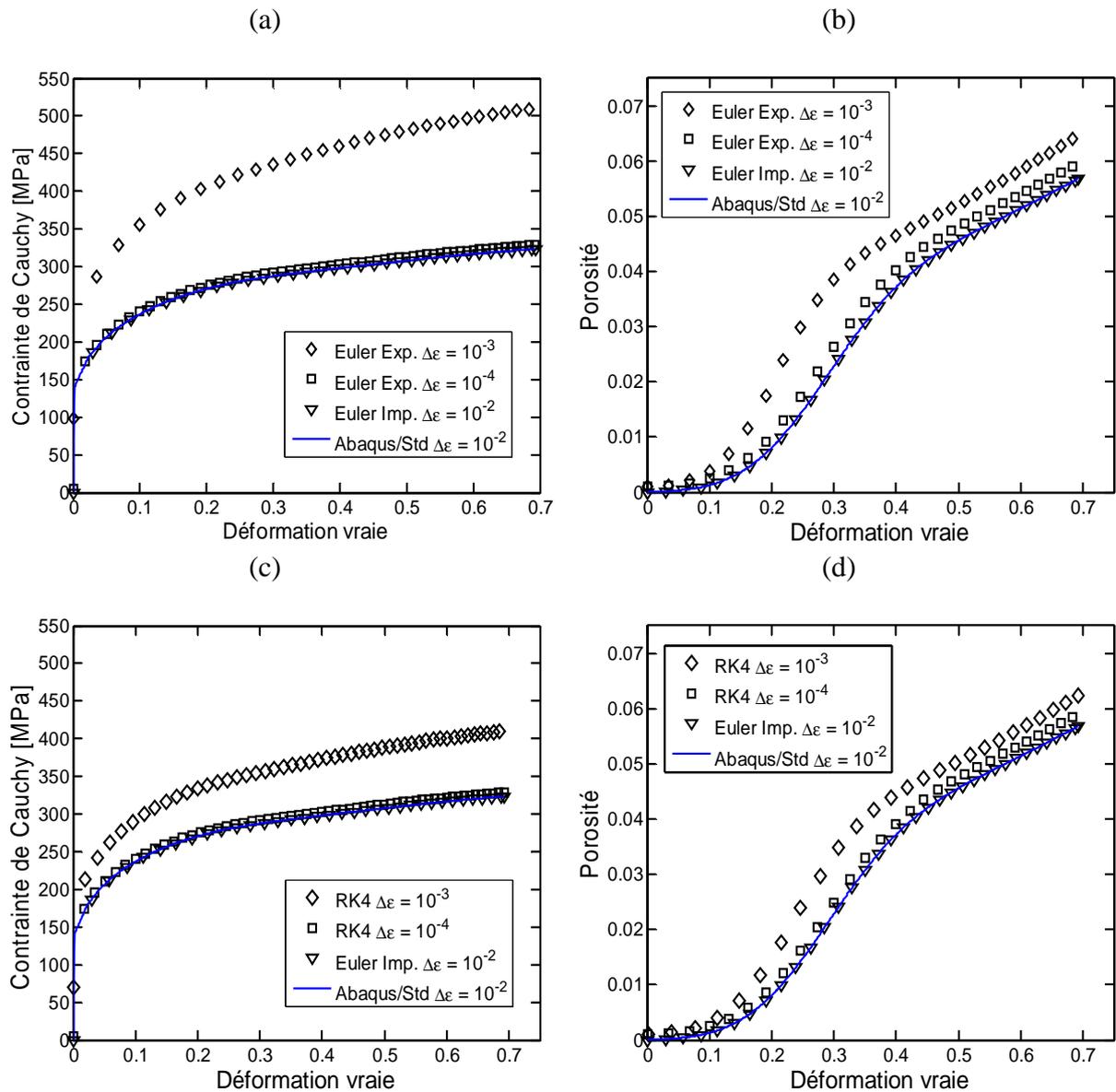


Figure 2.4 : Courbes contrainte-déformation et porosité-déformation en traction uniaxiale pour le matériau M1, obtenues en utilisant les schémas d'intégration d'Euler explicite, Runge-Kutta d'ordre 4 et Euler implicite.

Une autre idée simple, susceptible d'améliorer la précision des schémas explicites tout en conservant des temps CPU raisonnables, serait de réduire l'incrément de chargement durant le comportement purement élastique. Le but étant de détecter le moment précis pour lequel se produit le passage entre un comportement purement élastique et un comportement élasto-plastique. La Figure 2.5 illustre les courbes de comportement et de porosité en traction uniaxiale obtenues en utilisant cette technique (matériau M2). Les incréments de chargement sont identiques à ceux reportés dans la Figure 2.4, à la différence que durant la phase élastique, l'incrément de chargement est fixé à 10^{-5} (c.-à-d. $\|\Delta\epsilon\| = 10^{-5}$). Outre le fait que

cette approche soit très simple à mettre en œuvre, on peut remarquer sur la Figure 2.5 que la précision des schémas explicites est nettement améliorée.

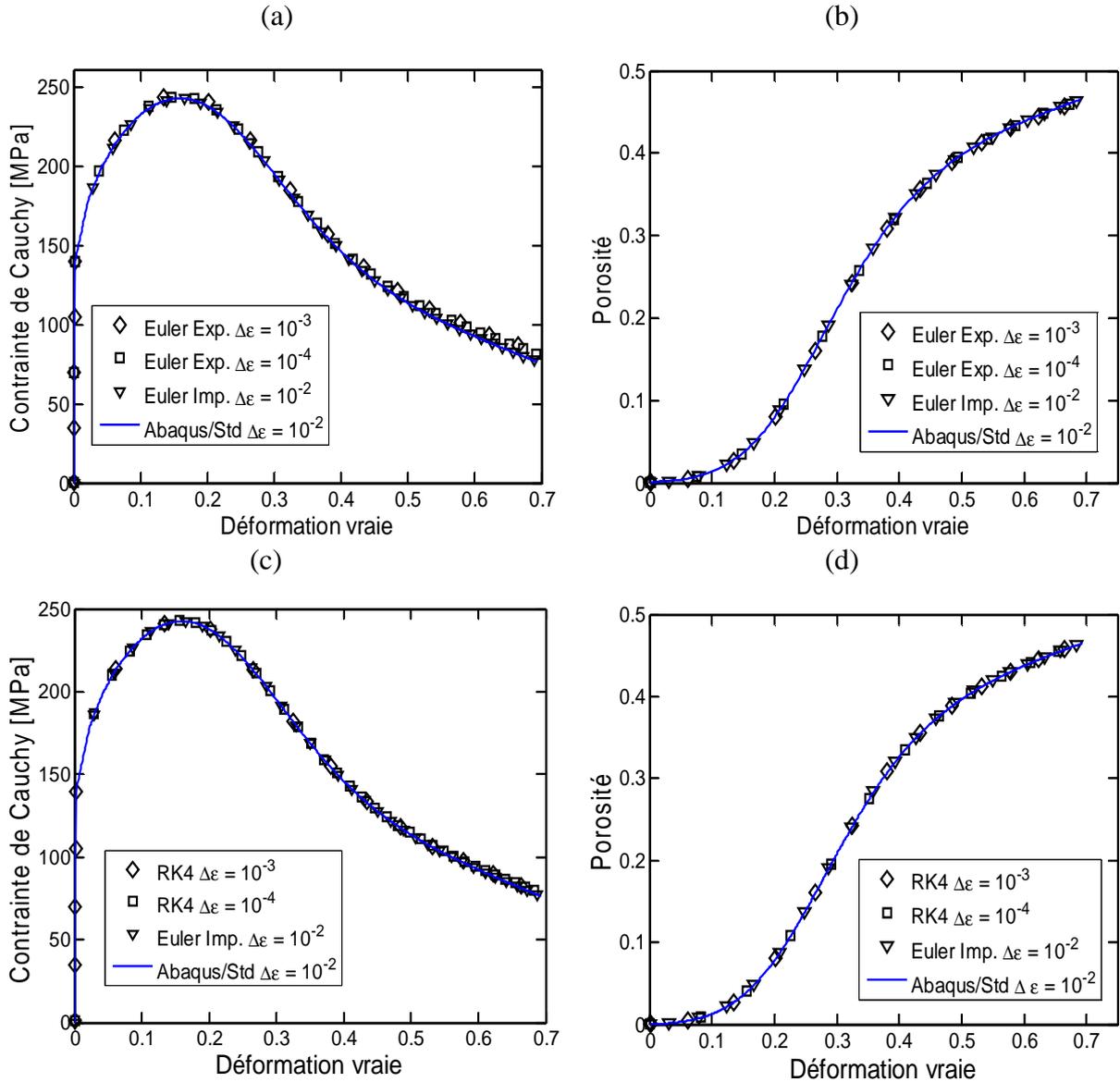


Figure 2.5 : Courbes contrainte-déformation et porosité-déformation en traction uniaxiale, pour le matériau M2 obtenues en utilisant les schémas d'intégration d'Euler explicite, Runge-Kutta d'ordre 4 et Euler implicite.

Le Tableau 2.4 regroupe les différents temps CPU qui ont été nécessaires à la simulation des courbes de comportement en considérant un essai de traction uniaxiale. La mention '*' indique l'utilisation d'incrément de chargement de l'ordre de 10^{-5} lorsque le comportement est purement élastique. Bien que cette technique permette une amélioration non-négligeable de la précision des schémas d'Euler explicite et de Runge-Kutta, les temps CPU correspondants n'augmentent que très peu. Notons que l'erreur relative donnée dans le Tableau 2.4 a été calculée à partir de la relation suivante :

$$ER = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_{inc}} \left((\Sigma_1^k)_{SE} - (\Sigma_1^k)_{AB} \right)^2} / \sqrt{\sum_{k=1}^{n_{inc}} (\Sigma_1^k)_{AB}^2} \quad (2.81)$$

où $(\Sigma_1^k)_{SE}$ désigne la contrainte uniaxiale obtenue à l'incrément k à partir du schéma d'intégration considéré et $(\Sigma_1^k)_{Ab}$ la contrainte uniaxiale obtenue à partir d'Abaqus/Standard au même incrément k . n_{inc} représente le nombre d'incrémentes considéré dans les calculs.

Tableau 2.4 : Temps CPU en secondes pour un chargement en traction uniaxiale en considérant un seul élément volumique à huit nœuds et à intégration réduite (C3D8R).

	Temps CPU en secondes	$\ \Delta\epsilon\ $	Erreur relative en % (ER)
EE/EE*	26,64/28,87	10^{-3}	355,69/6,4
RK4/RK4*	27,17/28,95		81,01/0,93
EE/EE*	219,85/222,16	10^{-4}	53,65/4,1
RK4/RK4*	221,81/222,9		20,25/0,63

On considère à présent les paramètres du matériau M3 qui prennent en compte la coalescence des cavités, puisque pour ce jeu de paramètres, le facteur d'accélération de croissance δ_A est égal à 15. La Figure 2.6.a illustre la courbe de comportement obtenue à partir du schéma d'Euler implicite pour différentes valeurs de l'incrément de chargement. Des difficultés de convergence ont été rencontrées avec ces schémas, en particulier lorsque $\|\Delta\epsilon\| = 10^{-2}$ (voir Figures 2.6.a et 2.6.b). En effet, lorsque $\|\Delta\epsilon\| = 10^{-2}$, on a remarqué que les calculs s'arrêtent pour une valeur de la porosité effective égale à 0,33 c'est-à-dire bien avant la porosité à rupture. Ce problème de convergence tend à disparaître, lorsque la valeur de l'incrément de chargement $\|\Delta\epsilon\|$ est prise égale à 10^{-4} . A noter que de tels problèmes de convergence ont été signalés dans (Sánchez et al., 2008), bien que ces derniers ne donnent pas d'exemples concrets. Les Figures 2.6.c, et 2.6.e illustrent les courbes de comportement obtenues à partir des schémas d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4. Nous avons utilisé également la technique qui consiste à réduire les incréments de chargement lorsque le comportement est purement élastique. On remarque sur ces figures que les schémas d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 donnent des résultats relativement précis malgré la prise en compte de la coalescence des cavités.

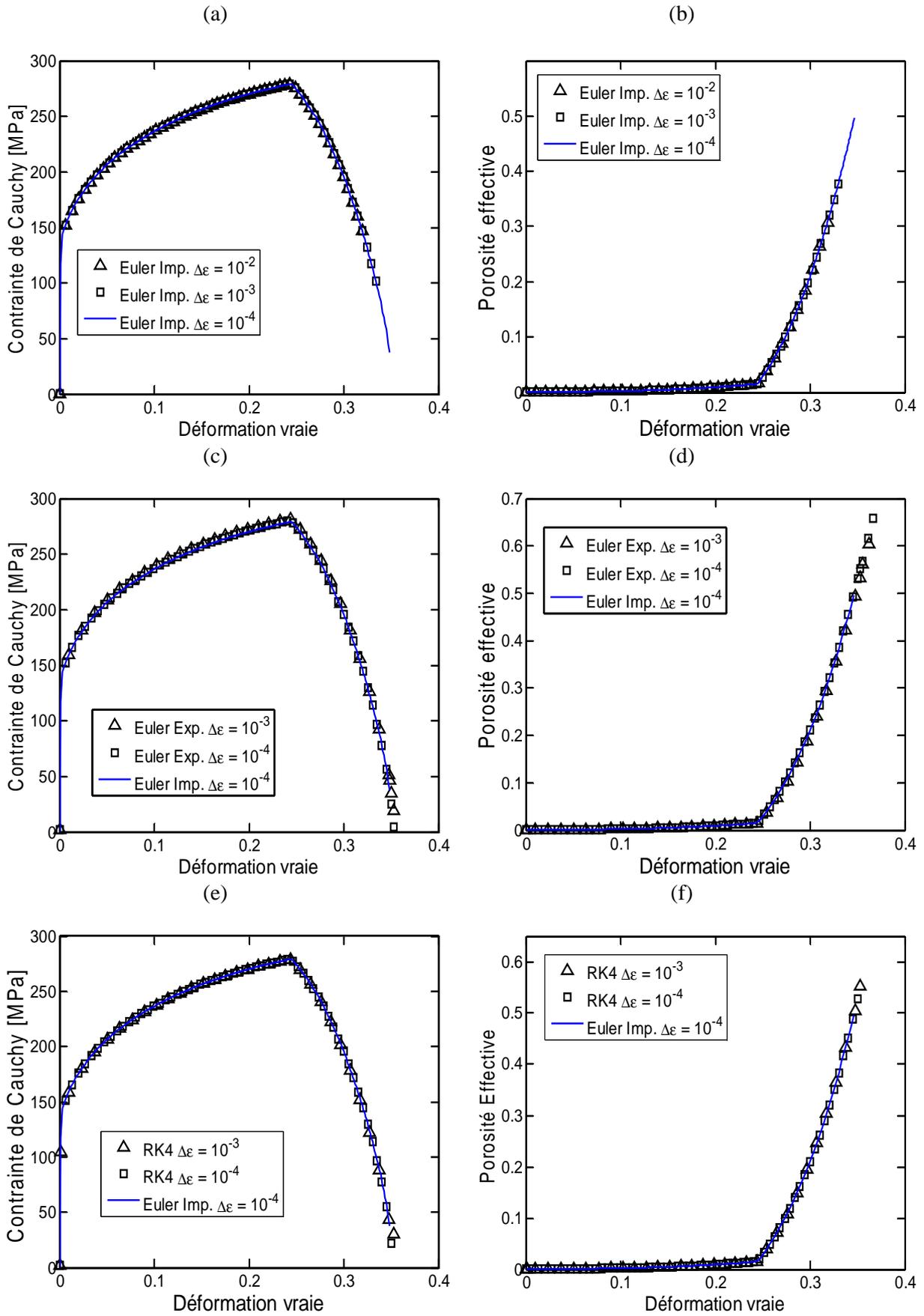


Figure 2.6 : Courbes contrainte-déformation et porosité-déformation en traction uniaxiale pour le matériau M3 obtenues à partir des trois schémas d'intégration.

2.5.2 Simulation d'une traction hydrostatique

Dans cette section, on étudie la performance des schémas explicites et implicites à partir d'un essai de traction hydrostatique. On considère un élément fini volumique contenant un seul point d'intégration (C3D8R, disponible dans Abaqus/Standard), soumis à un chargement en traction hydrostatique. Le modèle de comportement utilisé est celui de Gurson-Tvergaard-Needleman sans prendre en compte la coalescence des cavités. Cet essai de traction hydrostatique a été discuté notamment dans (Aravas, 1987) et (Yoon et al., 2011) afin d'analyser la performance des schémas d'intégration proposés. Les paramètres matériau pris de (Aravas, 1987) sont résumés dans le Tableau 2.5. La loi d'écrouissage utilisée dans les travaux de (Aravas, 1987) est une loi implicite dont l'expression est donnée par :

$$\frac{\sigma_M}{\sigma_Y} = \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_Y} + \frac{3G}{\sigma_Y} \varepsilon_M^p \right)^N \quad (2.82)$$

où G représente le module de cisaillement et σ_Y la limite d'écoulement initiale.

Tableau 2.5 : Paramètres matériau pour la simulation de la traction hydrostatique.

Elasticité		Ecrouissage		Endommagement						
E (MPa)	ν	σ_Y (MPa)	N	q_1	q_2	q_3	f_N	ε_N	s_N	f_0
30000	0,3	100	0,1	1,5	1	2,25	0,04	0,3	0,1	0,04

Les Figures 2.7.a et 2.7.b illustrent, respectivement, l'évolution de la contrainte hydrostatique et de la porosité en fonction de la déformation volumétrique obtenue à partir des différents schémas d'intégration explicites et implicites.

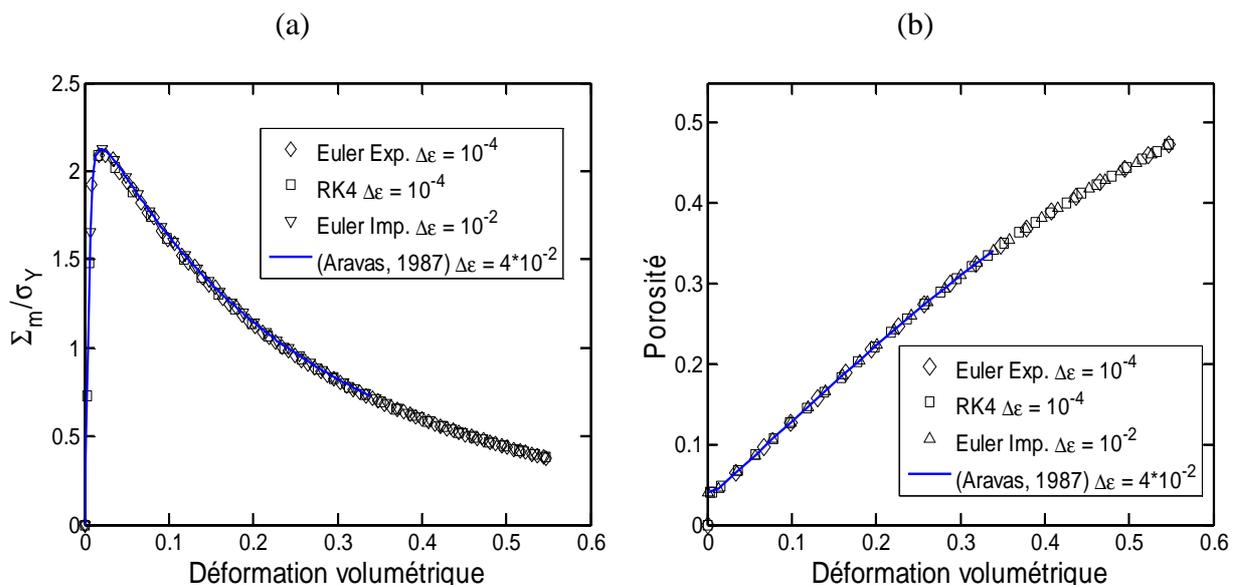


Figure 2.7 : (a) Contrainte hydrostatique normalisée en fonction de la déformation volumétrique. (b) Courbe porosité-déformation volumétrique.

Concernant les schémas explicites, des incréments de chargement de l'ordre de 10^{-4} ont été considérés afin d'assurer une précision optimale. On remarque sur ces figures que les résultats obtenus à partir des différents schémas d'intégration sont en bonne concordance avec les résultats obtenus dans (Aravas, 1987). À noter que les courbes obtenues à partir des méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta utilisent la technique d'adaptation du pas de chargement, présentée dans la section précédente.

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales étapes permettant d'aboutir à un modèle de comportement à partir du critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001). En ce qui concerne la prise en compte des transformations finies, nous avons vu que l'utilisation d'un repère co-rotationnel permet de conserver une écriture des équations constitutives identique à celle obtenue à partir de l'hypothèse des petites déformations. Cette approche permet en effet une écriture relativement simple, tout en respectant l'objectivité de la loi de comportement. Nous avons ensuite introduit les différentes lois d'évolution qui nous ont permis d'aboutir à un modèle de comportement. Ce modèle prend en compte l'orthotropie plastique des tôles laminées et introduit en même temps une dépendance à la pression hydrostatique. En ce qui concerne les lois d'évolution qui décrivent la variable d'endommagement, il a été montré que selon le critère de germination considéré, il est possible d'obtenir un effet de non-normalité de la loi d'écoulement conformément à l'approche proposée initialement par (Chu & Needleman, 1980), (Tvergaard, 1990). Nous nous sommes ensuite intéressés à l'implantation numérique du modèle en question. Trois schémas d'intégration ont été considérés et utilisés dans le but d'analyser leurs performances et de discuter des difficultés inhérentes à leur mise en œuvre numérique. Il a été montré que la méthode d'intégration proposée par (Aravas, 1987), qui repose sur une méthode implicite, se trouve être plus performante que les schémas explicites d'Euler ou de Runge-Kutta, ce qui corrobore les travaux de (Zhang, 1996). Toutefois, la mise en œuvre d'un schéma implicite reposant sur l'approche de (Aravas, 1987) introduit des difficultés tant sur le plan théorique que numérique (calcul des dérivées premières et secondes, inversions de matrices etc.). En outre, lorsque la coalescence des cavités est prise en compte à travers l'approche de (Tvergaard & Needleman, 1984), nous avons rencontré des problèmes de convergence qui apparaissent dans la phase adoucissante (Sanchez et al., 2008). Ces problèmes de convergence apparaissent en particulier lorsqu'on utilise des incréments de chargement importants. En ce qui concerne les schémas explicites, une technique simple a été introduite et qui repose sur un pas de chargement adaptatif. Nous avons montré sur deux cas tests (traction uniaxiale et traction hydrostatique), que cette technique permet d'améliorer la performance des schémas explicites de manière non-négligeable tout en conservant des temps CPU raisonnables. L'implantation numérique du modèle GTN dans Abaqus a été validée par rapport à des résultats de la littérature, ou par rapport à des simulations utilisant la version simplifiée disponible dans le code.

Chapitre 3 : Couplage entre modèles de comportement et critères d'instabilités plastiques pour la prédiction des limites de formage

Sommaire

3.1	Introduction.....	112
3.2	Prédiction de la striction localisée le long de trajets de chargement linéaires.....	113
3.3	Analyse de sensibilité aux paramètres du modèle de comportement.....	115
3.3.1	Effet des paramètres d'endommagement sur la prédiction des limites de formage.....	115
3.3.2	Effet des paramètres d'écrouissage.....	122
3.3.3	Influence de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction des limites de formage : interaction endommagement-anisotropie plastique.....	126
3.4	Confrontation aux résultats expérimentaux de la littérature.....	129
3.4.1	Prédiction des CLF par des approches expérimentales.....	130
3.4.2	Confrontation des CLF théoriques aux résultats expérimentaux de la littérature.....	131
3.4.3	Discussion sur l'écart entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir d'une approche théorique.....	133
3.5	Analyse de l'effet d'un changement de trajet de déformation sur la prédiction des CLF.....	139
3.6	Conclusions.....	140

3.1 Introduction

La compréhension et la modélisation des mécanismes physiques qui sont à l'origine de l'apparition de la rupture ductile et des différents modes d'instabilités plastiques est d'une importance majeure, qui permettra d'aboutir *in fine* à une réduction des coûts liés à la matière première. Les courbes limites de formage à striction localisée et à rupture introduites dans les années soixante représentent des concepts pratiques, utilisés de manière extensive dans l'industrie métallurgique et qui continuent à faire l'objet de nombreux travaux de recherche. Ces concepts permettent en particulier de juger des aptitudes d'un matériau métallique à se déformer, sans qu'il y ait apparition de phénomènes indésirables tels que la rupture ou la striction localisée. Au cours des précédents chapitres, nous avons présenté certains modèles de comportement reposant sur l'approche de Gurson. Ces modèles permettent de prendre en compte les principaux mécanismes d'endommagement qui se produisent par germination, croissance et coalescence des microcavités, en plus de l'anisotropie plastique initiale de la matrice. Nous avons également passé en revue les critères d'instabilités plastiques communément rencontrés dans la littérature. Une attention particulière a été portée aux critères d'instabilités basés sur l'analyse de bifurcation qui ont été formulés en transformations finies. En outre, nous avons discuté les éventuels liens théoriques qui existent entre ces différents indicateurs d'instabilités.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la prédiction des limites de formage à striction localisée à partir d'un couplage entre des modèles d'endommagement reposant sur l'approche de Gurson (Gurson, 1977), (Tvergaard & Needleman, 1984), (Needleman & Tvergaard, 1987), (Benzerga & Besson, 2001) et le critère de Perte d'Ellipticité (Rice, 1976), (Stören & Rice, 1975). Différents aspects liés à la microstructure des matériaux métalliques (e.g. écrouissage, texture cristallographique, ... etc.) influent considérablement sur la prédiction des limites de formage. Cependant, il est parfois difficile de donner une tendance générale de l'influence de ces propriétés sur les niveaux de déformations à striction localisée, quel que soit le critère d'instabilité considéré. Pour la plupart des critères de localisation utilisés dans le domaine de la mise en forme des tôles, l'écrouissage et l'anisotropie plastique initiale jouent un rôle significatif dans la prédiction des limites de formage (Marciniak & Kuczyński, 1967), (Stören & Rice, 1975), (Hutchinson & Neale, 1978), (Barlat, 1987), (Dudzinski & Molinari, 1991), (Zhou & Neale, 1995), (Tóth et al., 1996), (Hora et al., 1996), (Banabic et al., 2005), (Haddag et al., 2009). Ces deux aspects du comportement ne sont évidemment pas suffisants pour étudier le phénomène de rupture ductile qui nécessite la prise en compte de l'endommagement. Notons d'emblée que peu d'études se sont intéressées à l'influence de l'endommagement sur la prédiction des limites de formage à partir des modèles de comportement reposant sur une approche micromécanique couplé au critère de Perte d'Ellipticité. Ceci est d'autant plus vrai lorsqu'on considère l'anisotropie plastique initiale de la matrice à travers le critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001).

On étudie dans ce chapitre l'influence des principaux mécanismes physiques qui sont à l'origine de l'apparition de la striction localisée à travers l'approche citée plus haut. Différents matériaux métalliques communément utilisés dans l'industrie automobile seront étudiés. Dans un premier temps, on commence par analyser la singularité du tenseur acoustique qui

correspond à l'apparition d'une bande de localisation selon l'approche de (Rice, 1976) en considérant différents trajets de chargement linéaires. Ensuite, on étudie l'influence des paramètres d'endommagement et des paramètres liés à la loi d'érouissage sur la prédiction des limites de formage à striction localisée. L'effet de la prise en compte de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction des limites de formage sera également discuté en détails. Dans un second temps, on propose une confrontation des résultats du modèle proposé dans ce travail avec ceux de la littérature et qui ont été obtenus à partir d'une approche expérimentale. Enfin, on étudiera l'effet de la prise en compte de trajets de chargement complexes sur la prédiction des limites de formage à striction localisée. Des résultats complémentaires à ceux donnés dans ce chapitre peuvent être trouvés dans (Mansouri et al., 2014), dans lesquels le lecteur pourra trouver des analyses plus détaillées et des discussions approfondies.

3.2 Prédiction de la striction localisée le long de trajets de chargement linéaires

Dans cette section, on commence par donner les différents paramètres associés au modèle de comportement considéré dans ce travail et qui correspondent à trois alliages d'aluminium AA5182, AA6016, AA5754 ainsi que deux aciers XES et ULC-Ti (voir Tableaux 3.1, 3.2 et 3.3).

Tableau 3.1 : Constantes d'élasticité et paramètres d'érouissage.

Matériau	E (MPa)	ν	k (MPa)	ϵ_0	n
AA5182	70000	0,33	371,2	0,00324	0,170
AA5754	70000	0,33	309,1	0,00173	0,177
AA6016	70000	0,33	388,1	0,00975	0,220
Acier XES	198000	0,3	551,1	0,00954	0,279
ULC-Ti	207838	0,3	599,3	0,00352	0,260

Tableau 3.2 : Paramètres d'endommagement.

Matériau	f_0	s_N	ϵ_N	f_N	f_c	δ_A
AA5182	0,001	0,1	0,27	0,035	0,00213	10
AA5754	0,001	0,1	0,32	0,034	0,00284	7
AA6016	0,001	0,1	0,276	0,036	0,0152	15
Acier XES	0,001	0,1	0,50	0,040	0,040	5
ULC-Ti	0,001	0,1	0,50	0,040	0,040	5

Tableau 3.3 : Coefficients de Lanckford.

Matériau	r_0	r_{45}	r_{90}
AA5182	0,73	0,68	0,65
AA5754	0,70	0,70	0,70
AA6016	0,87	0,76	0,71
Acier XES	2,20	1,90	1,60
ULC-Ti	1,67	1,85	1,5

Les paramètres donnés dans les tableaux ci-dessus ont été identifiés dans les travaux de (Mguil, 1997) et (Brunet et al., 1998) à partir d'une approche inverse qui combine des essais expérimentaux de traction et des simulations numériques par éléments finis. Les Figures 3.1.a et 3.1.b illustrent les courbes de comportement obtenues à partir du modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN), jusqu'au point de localisation (singularité du tenseur acoustique) pour les deux alliages d'aluminium AA5182 et AA5754. Trois trajets de chargement ont été simulés sur ces figures, à savoir un chargement en traction uniaxiale (TU), en traction plane (TP) et en traction équi-biaxiale (TE). En ce qui concerne le trajet de chargement en TP, on peut remarquer que la singularité du tenseur acoustique apparaît dès l'entrée en régime adoucissant, ce qui se traduit par un module d'écrouissage critique proche de zéro.

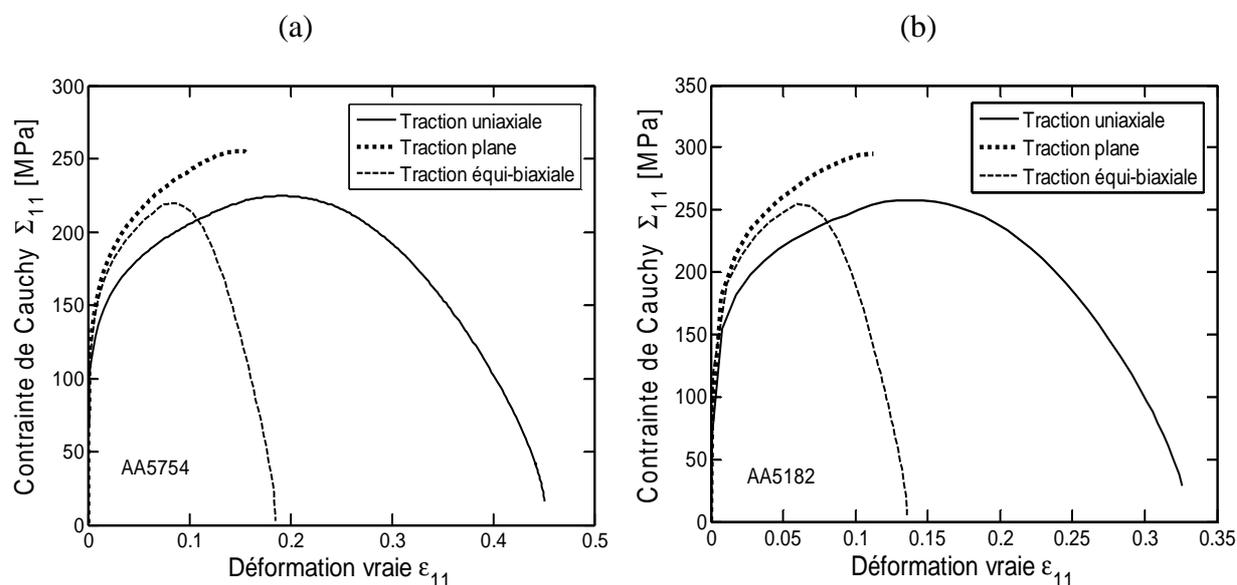


Figure 3.1 : Courbes de comportement jusqu'à localisation pour différents trajets de chargement obtenues à partir du modèle GTN. (a) Alliage d'aluminium AA5754. (b) Alliage d'aluminium AA5182.

En revanche, pour les deux autres trajets de chargement considérés (c.-à-d. la traction uniaxiale et la traction équi-biaxiale), la singularité du tenseur acoustique apparaît bien après

l'entrée en régime adoucissant, ce qui correspond à des modules d'écroutissage critiques très négatifs. Des tendances similaires ont été obtenues dans (Haddag, 2007) et (Haddag et al., 2009) à partir du modèle d'endommagement de Lemaitre couplé au critère de (Rice, 1976). L'évolution du minimum du déterminant du tenseur acoustique normalisé, relatif aux trajets de chargement considérés plus haut, est illustrée par les Figures 3.2.a et 3.2.b. L'allure des courbes apparaît également en concordance avec les travaux de (Haddag et al., 2009) et (Altmeyer, 2011), bien qu'il existe une légère différence en ce qui concerne le chargement en traction équi-biaxiale.

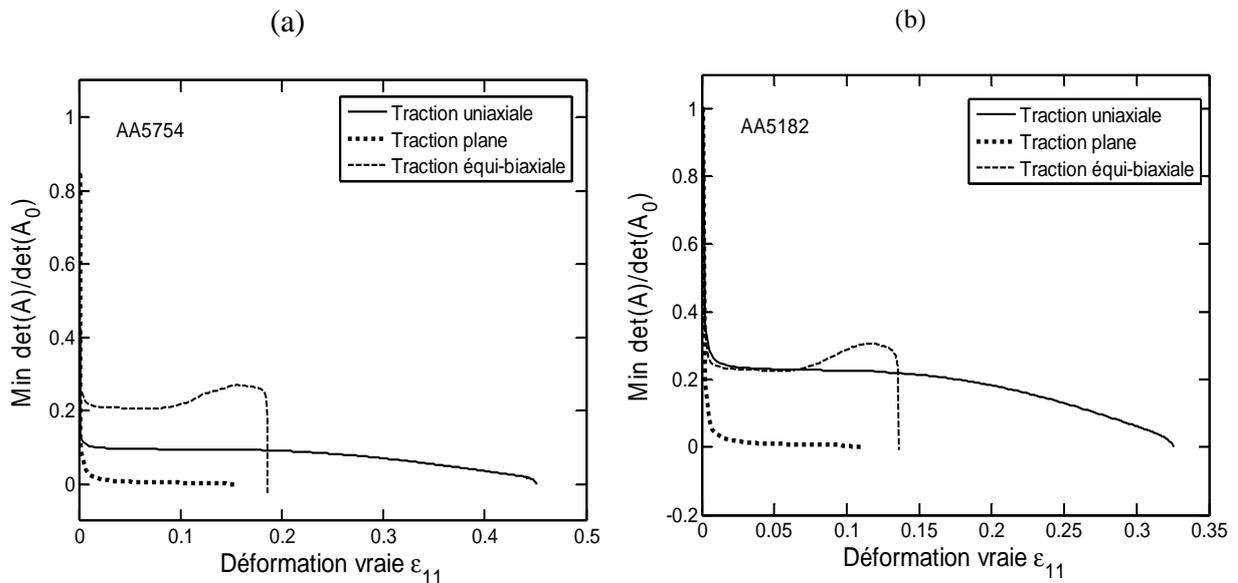


Figure 3.2 : Évolution du minimum du déterminant du tenseur acoustique normalisé jusqu'à localisation pour différents trajets de chargement. (a) Alliage d'aluminium AA5754. (b) Alliage d'aluminium AA5182.

Cette différence semble provenir de la loi d'évolution de la variable d'endommagement qui intervient dans le modèle GTN. En effet, dans le modèle de Lemaitre, l'évolution de l'endommagement devient fortement non-linéaire à partir d'un paramètre seuil qui est généralement identifié sur des courbes de comportement expérimentales (voir e.g. (Haddag, 2007)). La forte non-linéarité de la variable d'endommagement qui intervient dans le modèle de Lemaitre fait que pour la plupart des trajets de chargement, les contraintes à striction localisée sont relativement élevées par rapport à celles obtenues en utilisant le modèle GTN (voir Figure 3.1). On montrera dans les prochaines sections que l'augmentation du facteur d'accélération de croissance, δ_A , permet d'obtenir des niveaux de contraintes à striction localisée proches de ceux obtenus à partir du modèle d'endommagement de Lemaitre.

3.3 Analyse de sensibilité aux paramètres du modèle de comportement

3.3.1 Effet des paramètres d'endommagement sur la prédiction des limites de formage

Dans ce paragraphe, on étudie l'influence des paramètres d'endommagement sur la prédiction des limites de formage des tôles métalliques. En ce qui concerne le modèle GTN,

l'évolution de la porosité est due aux mécanismes d'endommagement observés dans les matériaux métalliques à savoir, par germination, croissance et coalescence des vides. Les paramètres d'endommagement sont reliés à ces trois mécanismes principaux à travers les différentes lois d'évolution qui ont été présentées au cours du deuxième chapitre. On commence par étudier l'impact des paramètres liés à l'évolution de la porosité due à la germination des cavités. Ensuite, on discute de l'impact des paramètres liés à la croissance et à la coalescence des cavités.

3.3.1.1 Influence des paramètres associés à la germination des microcavités

Nous avons vu au cours du chapitre 2 que l'approche proposée dans (Chu & Needleman, 1980) consiste à relier le taux de porosité due à la germination des cavités au taux de déformation plastique équivalente microscopique¹, à partir d'une loi Gaussienne faisant intervenir trois paramètres f_N , ε_N et s_N^ε . Ces derniers désignent, respectivement, la densité des inclusions susceptibles de germiner, la déformation plastique équivalente microscopique pour laquelle la moitié des inclusions ont germé et enfin l'écart type sur ε_N . Les Figures 3.3.a à 3.3.f illustrent la sensibilité des limites de formage aux paramètres de germination f_N , ε_N et s_N^ε pour les deux alliages d'aluminium AA5754 et AA5182. En ce qui concerne les paramètres f_N et ε_N , les tendances illustrées par les Figures 3.3.a à 3.3.d sont cohérentes avec la signification physique que l'on peut attribuer à ces deux paramètres. En d'autres termes, pour un matériau à forte densité de défauts, on s'attend à ce que les limites de formabilité soient plus basses que celles obtenues pour un matériau contenant moins d'inclusions. Par ailleurs, la diminution du paramètre ε_N conduit à un amorçage plus précoce des cavités qui se traduit par une diminution de la ductilité du matériau. Cette tendance est cohérente avec la loi d'évolution de la porosité due à la germination (voir équations (2.15) et (2.16) du chapitre 2). En effet, cette relation permet de voir clairement que lorsque f_N augmente (respectivement ε_N diminue), la germination est accélérée ce qui conduit à la baisse de la ductilité du matériau. Dans (Kuwabara et al., 2005), les auteurs ont étudié par une approche expérimentale l'influence de la fraction volumique des inclusions sur les limites de formage d'un alliage d'aluminium contenant différentes fractions volumiques de particules de Magnésium. Les tendances expérimentales obtenues dans les travaux de (Kuwabara et al., 2005) sont globalement en accord avec celles illustrées par les Figures 3.3.c et 3.3.d, à savoir une diminution des niveaux de déformation à striction localisée pour le matériau contenant une densité d'inclusions plus élevée.

On étudie à présent l'influence de l'écart type s_N^ε sur la prédiction des limites de formage des deux alliages d'aluminium considérés. On peut constater sur les Figures 3.3e et 3.3.f que l'augmentation du paramètre s_N^ε a pour effet de retarder la striction localisée pour l'alliage d'aluminium AA5182, alors que l'effet inverse se produit pour l'alliage AA5754.

¹ On considère dans ce chapitre que la germination des cavités est contrôlée uniquement par la déformation plastique équivalente ε_M^p . L'approche qui consiste à relier le taux de porosité due à la germination à la contrainte principale maximale sera considérée dans le prochain chapitre.

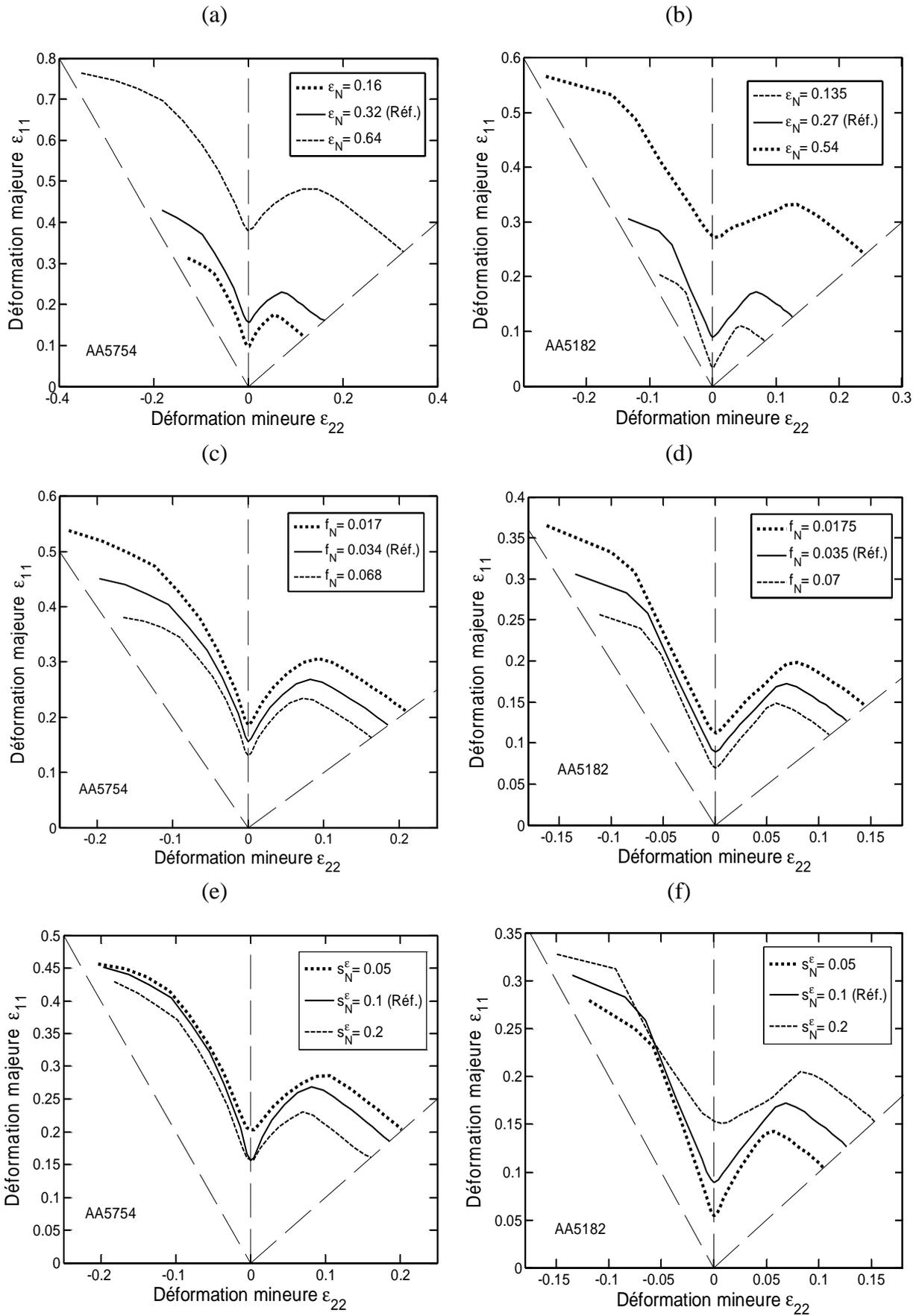


Figure 3.3 : Effet des paramètres liés à la germination des cavités sur la prédiction des limites de formage.

Afin d'éclaircir ces résultats qui semblent *a priori* contradictoires, on reprend l'expression du potentiel de nucléation \mathcal{A}_N qui permet de relier le taux de porosité due à la germination au taux de déformation plastique équivalente microscopique (voir chapitre précédent). La dérivée du potentiel de nucléation \mathcal{A}_N par rapport à l'écart type s_N^ε s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{A}_N}{\partial s_N^\varepsilon} = \frac{f_N}{(s_N^\varepsilon)^4 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s_N^\varepsilon} \right)^2 \right] \left((\varepsilon_M^p - \varepsilon_N)^2 - (s_N^\varepsilon)^2 \right) \quad (3.1)$$

Cette relation montre que le potentiel \mathcal{A}_N n'évolue pas de manière monotone par rapport à l'écart type s_N^ε . En effet, on peut remarquer à partir de la relation précédente que \mathcal{A}_N est une fonction croissante de s_N^ε si et seulement si la déformation plastique équivalente microscopique appartient à certains intervalles (c.-à-d. $\varepsilon_M^p \in [0, \varepsilon_N - s_N^\varepsilon] \cup [s_N^\varepsilon + \varepsilon_N, +\infty]$). Si la localisation apparaît dans ces intervalles, une valeur plus élevée du paramètre s_N^ε mènera à des limites de formage plus basses. Dans le cas contraire, une valeur plus élevée du paramètre s_N^ε mènera à des limites de formage plus hautes. Par conséquent, il est difficile de prédire au préalable l'effet de ce paramètre sur l'apparition de la striction localisée.

3.3.1.2 Influence des paramètres associés à la croissance et à la coalescence des microcavités

La porosité initiale représente l'un des paramètres clés des modèles d'endommagement reposant sur l'approche de Gurson. Ce paramètre est d'autant plus important lorsqu'on introduit des modèles de coalescence basés sur des approches micromécaniques (Thomason, 1985), (Perrin, 1992), (Leblond & Perrin, 1999), (Zhang et al., 2000), (Pardoën & Hutchinson, 2000), (Benzerga, 2002). Dans ce type d'approches, la porosité initiale a un impact non seulement sur la réponse rhéologique du matériau avant coalescence, mais également sur le moment correspondant au début de la jonction des cavités jusqu'à la rupture du V.E.R. Compte tenu du sens physique de la porosité initiale, on s'attend à ce que la ductilité d'un matériau soit inversement proportionnelle à ce paramètre. Les Figures 3.4.a et 3.4.b illustrent l'effet de f_0 sur la prédiction des limites de formage pour les deux alliages d'aluminium considérés. On peut constater sur ces figures que les niveaux de déformation à striction localisée sont inversement proportionnels à f_0 ce qui est cohérent avec le sens physique que l'on attribue à ce paramètre. En outre, on remarque que plus f_0 est grand, plus son effet sur les prédictions des limites de formage est important.

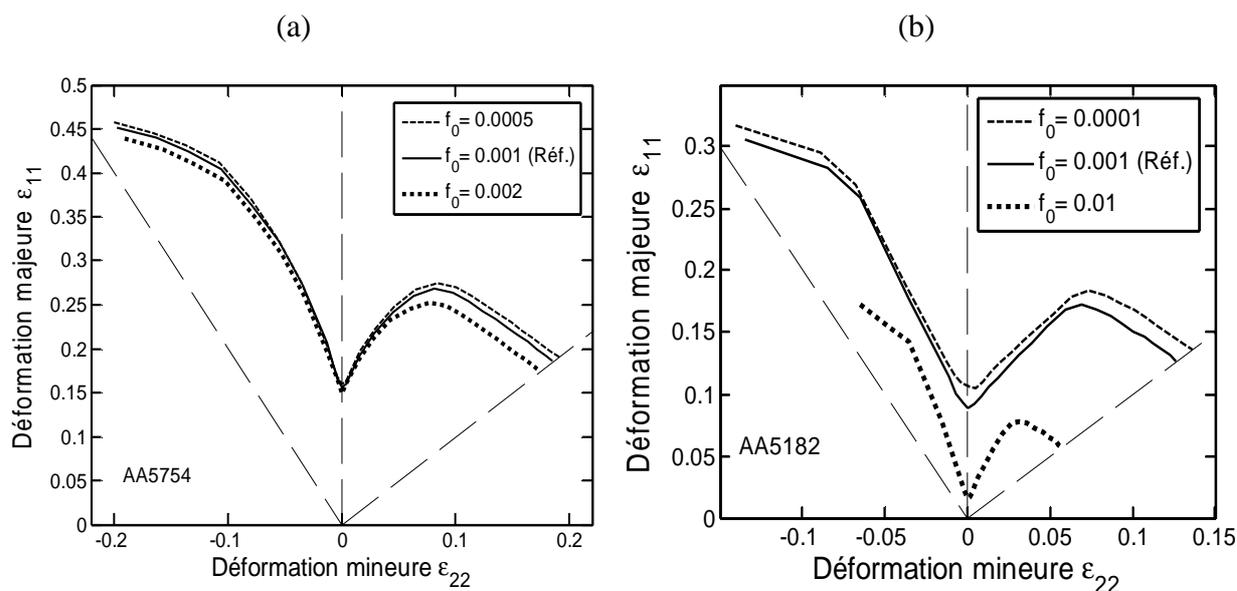


Figure 3.4 : Effet de la porosité initiale sur la prédiction des limites de formage pour les alliages d'aluminium AA5182 et AA5754.

Dans le reste de cette section, on commence par analyser l'impact du comportement au cours de la jonction des cavités par coalescence sur la prédiction des niveaux de contrainte et de porosité à striction localisée. Ensuite, on étudie l'influence des paramètres de coalescence sur la prédiction des limites de formage. Rappelons que l'approche considérée dans ce travail s'appuie sur les travaux de (Tvergaard & Needleman, 1984), (Needleman & Tvergaard, 1987). Cette approche introduit le concept de porosité effective f_* au sein du critère de plasticité macroscopique de Gurson, ce qui permet de prendre en compte l'accélération de porosité due à la jonction des cavités voisines (voir les relations 2.27 et 2.28 du chapitre 2). L'accélération de porosité est introduite à partir de deux paramètres f_c et δ_A qui désignent, respectivement, la porosité critique pour laquelle on entre en régime de coalescence et le facteur d'accélération de croissance. Il a été montré précédemment (voir Figure 3.1) que la singularité du tenseur acoustique apparaît pour certains trajets de chargement bien après l'entrée en régime adoucissant, et parfois proche du point de rupture du V.E.R. Ainsi, à l'exception du trajet de chargement en traction plane, les niveaux de contrainte à striction localisée se sont avérés relativement bas, comparés à ceux issus de la littérature (obtenus par exemple à partir du modèle de Lemaitre, voir e.g. (Doghri & Billardon, 1995), (Haddag et al., 2009)). Bien que les paramètres associés à la germination et à la croissance possèdent un impact important sur la prédiction des niveaux de déformation à striction localisée, leur influence sur les niveaux de contraintes à localisation reste néanmoins faible. La Figure 3.5 illustre les réponses rhéologiques de l'alliage d'aluminium AA5182 jusqu'au point de localisation, pour un trajet de chargement en TE et pour différentes valeurs de f_c et δ_A . On peut remarquer sur cette figure que la porosité critique a un effet négligeable sur les niveaux de contrainte à localisation, contrairement au facteur d'accélération de croissance. Des résultats similaires ont été obtenus sur d'autres trajets de chargement et pour d'autres matériaux métalliques.

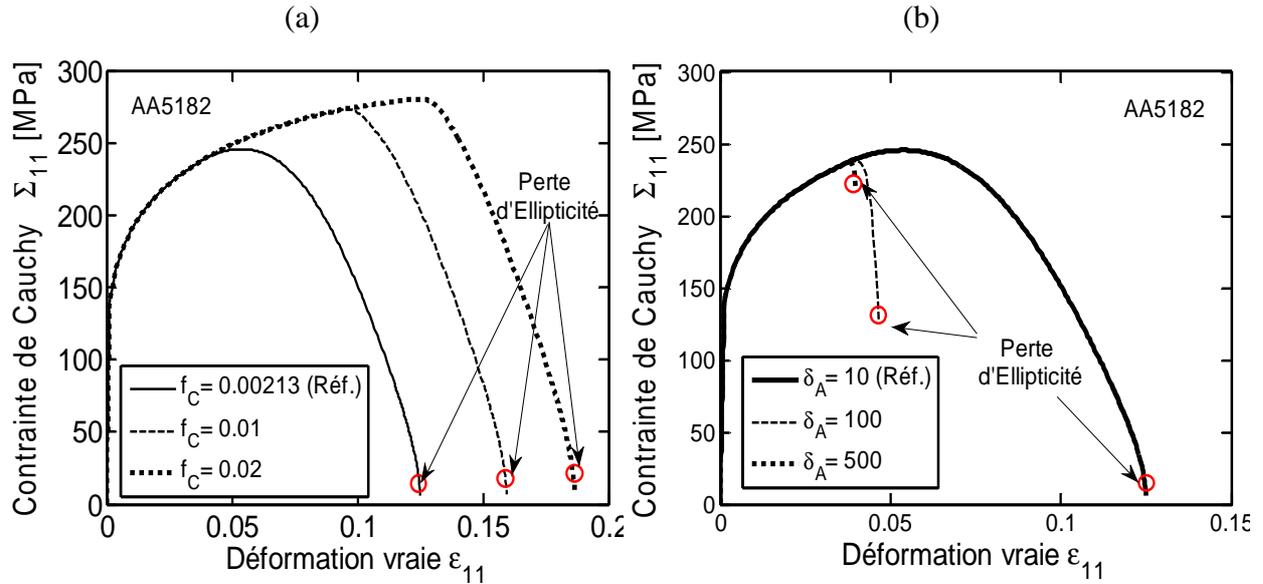


Figure 3.5 : Influence des paramètres de coalescence sur la prédiction du point de localisation pour un chargement en traction équi-biaxiale.

Les niveaux de porosité à localisation peuvent également donner une appréciation sur les modèles d'endommagement considérés, étant donné qu'il est possible dans certains cas de mesurer cette grandeur localement avec une précision suffisante (Maire et al., 2005), (Maire et al., 2011), (Requena et al., 2014). À partir d'une approche expérimentale basée sur des essais d'emboutissage de type Nakazima, (Tasan et al., 2009) ont montré que, pour un acier Dual Phase, les niveaux de porosité à localisation sont de l'ordre de 10^{-3} à 2×10^{-3} en fonction du trajet de chargement considéré. Dans ces travaux, les écarts entre les niveaux de porosité mesurée à rupture et à striction localisée sont relativement faibles pour la traction uniaxiale et la traction plane alors que pour la traction équi-biaxiale, l'écart est plus important (un facteur de quatre). En outre, d'après (Tasan et al., 2009), les niveaux de porosité à striction localisée les plus élevés ont été mesurés pour des trajets de chargement en traction équi-biaxiale. Ce résultat est cohérent avec celui obtenu à partir du modèle discuté dans ce travail. Néanmoins, les valeurs de porosité prédites à partir du modèle discuté dans ce travail restent relativement élevées par rapport à celles mesurées expérimentalement (voir (Tasan et al., 2009), (Thuillier et al., 2012)). Si la prise en compte de la coalescence des cavités à partir du concept de porosité effective permet de reproduire des niveaux de déformation à localisation et à rupture assez réalistes, elle n'en demeure pas moins une extension heuristique du modèle de Gurson. Ainsi, il n'existe pas de fondement micromécanique derrière cette approche qui puisse démontrer que les paramètres f_C et δ_A sont constants quel que soit le trajet de chargement considéré (ou bien la triaxialité de contraintes). Nous reviendrons sur ce point dans la section dédiée à la confrontation des CLF obtenues à partir du modèle discuté dans ce travail et celles issues de travaux expérimentaux.

Les Figures 3.6.a et 3.6.b représentent l'évolution de la porosité jusqu'au point de localisation pour l'alliage d'aluminium AA5182. Le chargement considéré dans ces figures est celui de la traction équi-biaxiale, bien que les mêmes tendances ont été obtenues pour d'autres trajets. On peut remarquer sur ces figures que la prédiction du point de localisation dépend sensiblement

de la vitesse d'évolution de la variable d'endommagement. En outre, le facteur d'accélération δ_A joue un rôle important sur le point de localisation et permet d'obtenir des valeurs de porosité à localisation proches de celles mesurées expérimentalement (c.-à-d. autour de 1% pour la traction équi-biaxiale d'après (Tasan et al., 2009)).

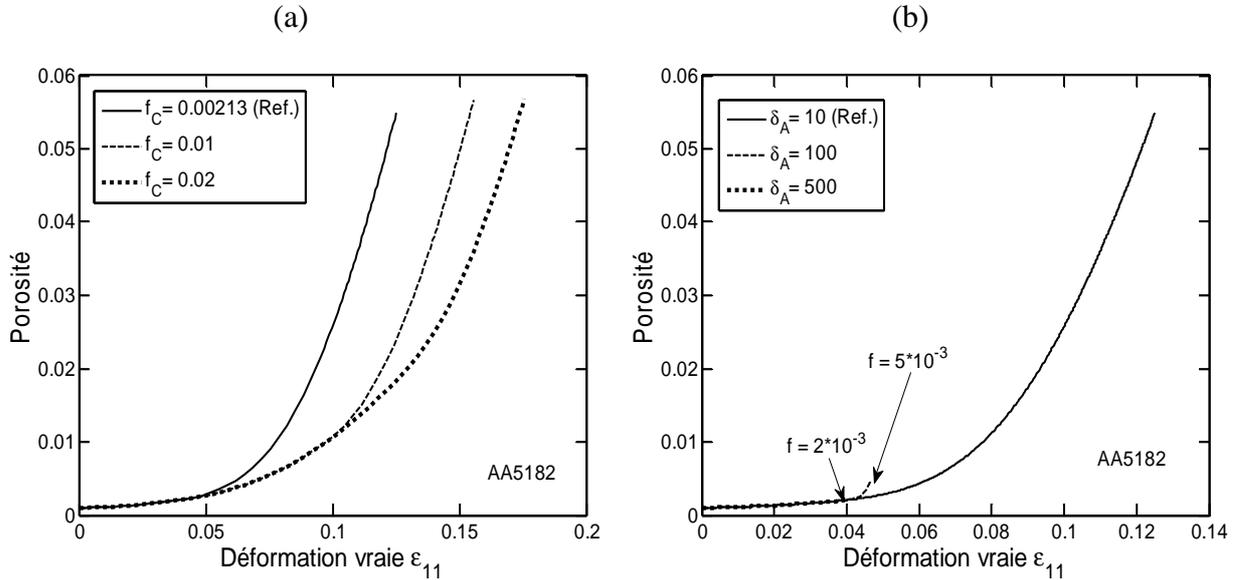


Figure 3.6 : Influence des paramètres de coalescence sur l'évolution de la variable d'endommagement jusqu'au point de localisation pour un chargement en traction équi-biaxiale.

L'influence des paramètres intervenant dans la loi d'évolution de la porosité effective sur la prédiction des limites de formage est illustrée sur les Figures 3.7.a et 3.7.b. On peut remarquer sur ces figures que l'augmentation de f_c ou la diminution de δ_A permet dans les deux cas d'obtenir des limites de formage plus hautes. Ce résultat est cohérent avec le sens physique que l'on attribue à ces deux paramètres.

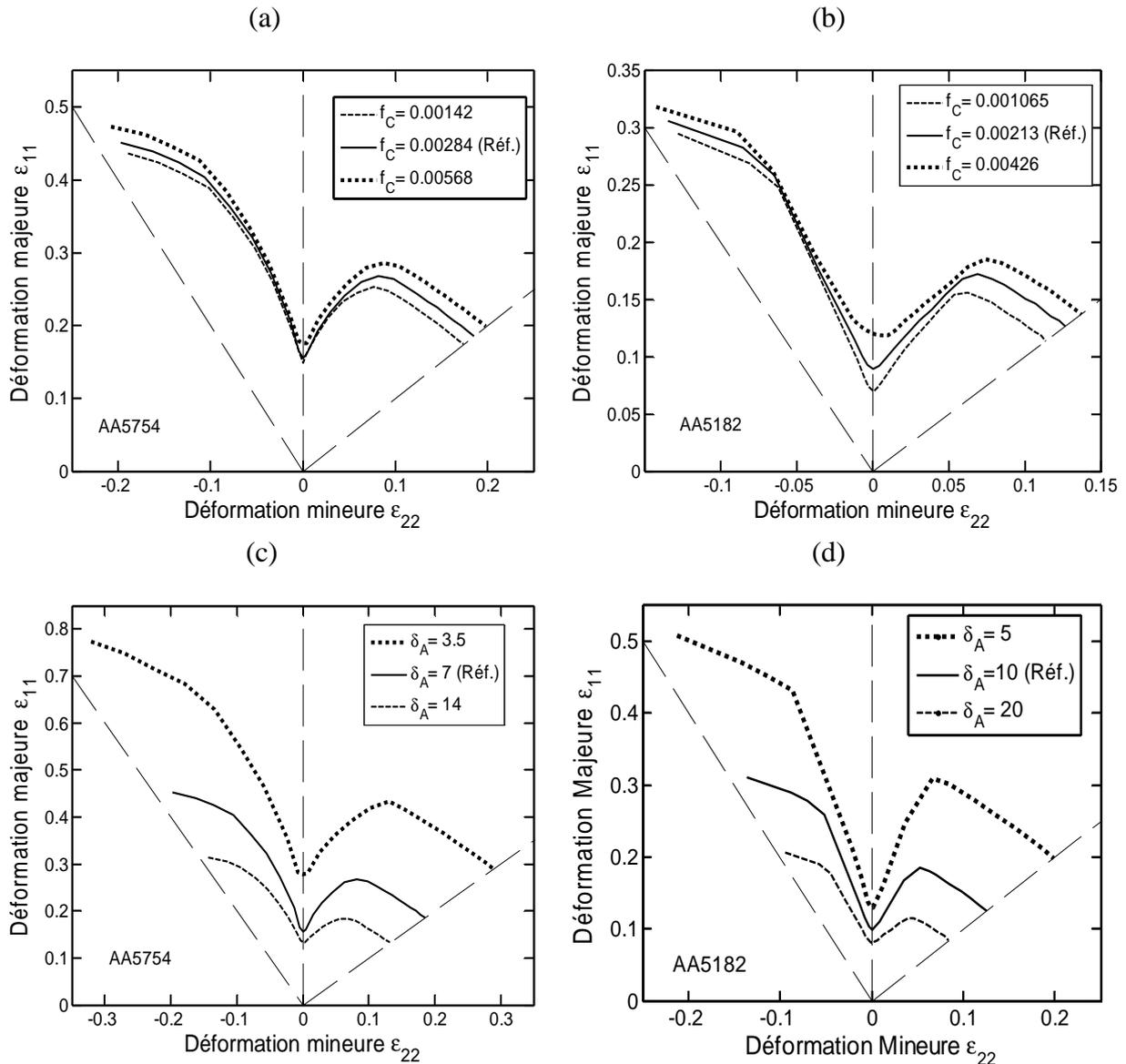


Figure 3.7 : Influence des paramètres de coalescence sur la prédiction des limites de formage.

3.3.2 Effet des paramètres d'écroutissage

D'une manière générale, l'expérience montre que les matériaux à fort exposant d'écroutissage présentent des niveaux de déformation à striction localisée élevés et dont la pente des CLF est négative ou nulle dans le domaine de l'expansion. En revanche, les matériaux à faible exposant d'écroutissage présentent souvent des niveaux de déformation à striction localisée plus bas et une pente plutôt positive dans le domaine de l'expansion (voir (Pearce, 1991), (Fromentin, 1998)). Les critères théoriques de striction diffuse de (Swift, 1952) et de striction localisée de (Hill, 1952), (Marciniak & Kuczynski, 1967), (Hora et al., 1996), (Mattiasson et al., 2006) indiquent que le niveau des CLF à striction diffuse et localisée est proportionnel à l'exposant d'écroutissage (voir Chapitre 1). Les résultats issus de l'expérience confirment les tendances obtenues à partir des critères théoriques cités plus haut, en particulier lorsque les matériaux étudiés possèdent un exposant d'écroutissage faible, (voir e.g. (Pearce, 1991), (Fromentin, 1998)). En ce qui concerne le critère de Perte d'Ellipticité, l'utilisation d'un modèle de comportement construit à partir d'une surface de charge lisse, où

la normalité de la loi d'écoulement est vérifiée (c.-à-d., pour un comportement en plasticité associée) ne permet pas toujours de prédire la singularité du tenseur acoustique. Pour les modèles d'endommagement qui s'appuient sur des approches phénoménologiques (e.g. modèle de Lemaitre), l'évolution de la variable d'endommagement est liée en partie à la loi d'écrouissage considérée ainsi qu'aux paramètres qui interviennent dans cette loi (voir chapitre 1). L'utilisation de ce type de comportement couplé au critère de (Rice, 1976) donne des points de bifurcation qui dépendent sensiblement de l'exposant d'écrouissage (Doghri & Billardon, 1995), (Haddag, 2007).

Les Figures 3.8.a à 3.8.f illustrent l'effet des paramètres de la loi d'écrouissage de Swift sur la prédiction des limites de formage pour les deux alliages d'aluminium AA5182 et AA5754. On remarque sur ces figures que l'influence de ces paramètres est négligeable, ce qui contraste avec l'effet des paramètres d'endommagement. Les tendances illustrées sur les Figures 3.8.a à 3.8.f peuvent être interprétées de la manière suivante. Le modèle de comportement considéré dans ce chapitre introduit l'endommagement comme seul effet déstabilisant (absence de points de vertex sur la surface de charge et comportement en plasticité associée). Dans ce cas, l'endommagement est le mécanisme prédominant dans l'approche couplant le modèle de comportement GTN au critère de perte d'ellipticité. Rappelons que l'extension proposée par Gurson au cas d'un comportement rigide-plastique de la matrice a été introduite de manière purement heuristique. Malgré ses avantages, cette approche a l'inconvénient de découpler complètement l'évolution de l'endommagement de celle de l'écrouissage (Leblond et al., 1995). En outre, le critère de plasticité macroscopique de Gurson ne permet pas de retrouver la solution analytique exacte d'une sphère creuse de comportement rigide-plastique soumise à un chargement hydrostatique, alors que dans le cas d'un comportement rigide parfaitement plastique, la solution analytique exacte est retrouvée (Leblond et al., 1995). En utilisant des essais de traction sur des barres entaillées, (Pardoën & Delannay, 1998) ont étudié l'influence de l'écrouissage sur l'évolution de la porosité, en comparant le comportement de barres de cuivre à froid ($n^S = 0,1$) et après recristallisation ($n^S = 0,4$). Les résultats obtenus dans ces travaux montrent que les prédictions obtenues à partir du modèle GTN (en termes de niveaux de porosité) sont en accord avec les mesures expérimentales lorsque l'exposant d'écrouissage est faible ($n^S = 0,1$). En revanche, pour le matériau ayant subi une recristallisation ($n^S = 0,4$), les prédictions du modèle GTN sont surestimées par rapport aux mesures expérimentales. L'influence de l'exposant d'écrouissage ainsi que de la triaxialité de contraintes sur la croissance de l'endommagement a été étudiée aussi dans (Faleskog et al., 1998) et (Kim et al., 2004) à partir de calculs par E.F sur un V.E.R à base hexagonale contenant une cavité sphérique. Il a été montré dans ces travaux que la croissance des cavités est inversement proportionnelle à l'exposant d'écrouissage. En comparant leurs résultats issus du modèle E.F avec les prédictions du modèle de Gurson-Tvergaard, les auteurs montrent également que le facteur d'interaction des cavités q varie sensiblement avec l'exposant d'écrouissage, la limite d'écoulement et la triaxialité des contraintes.

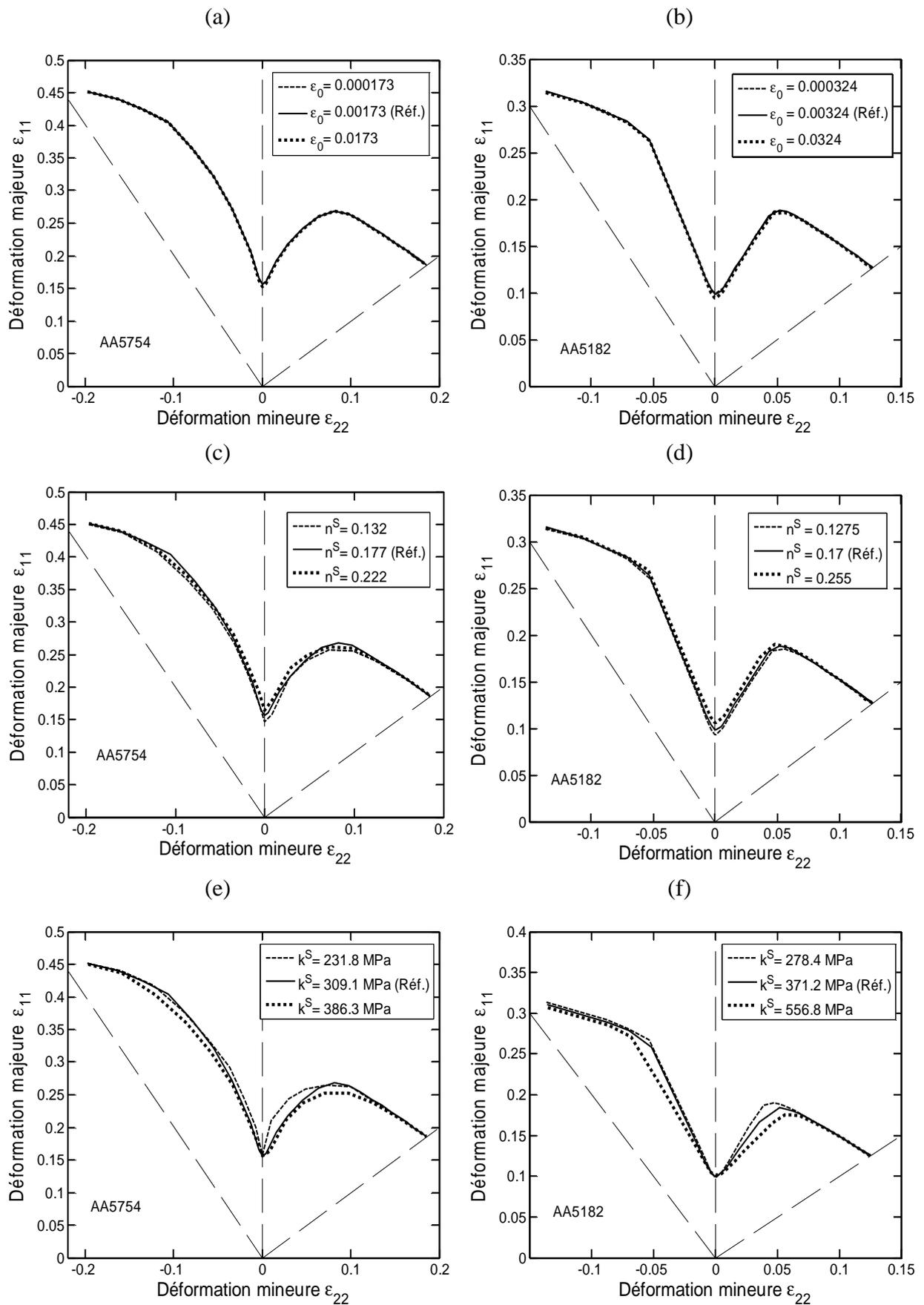


Figure 3.8 : Effet des paramètres d'érouissage de la loi de Swift couplée au modèle GTN sur la prédiction des limites de formage.

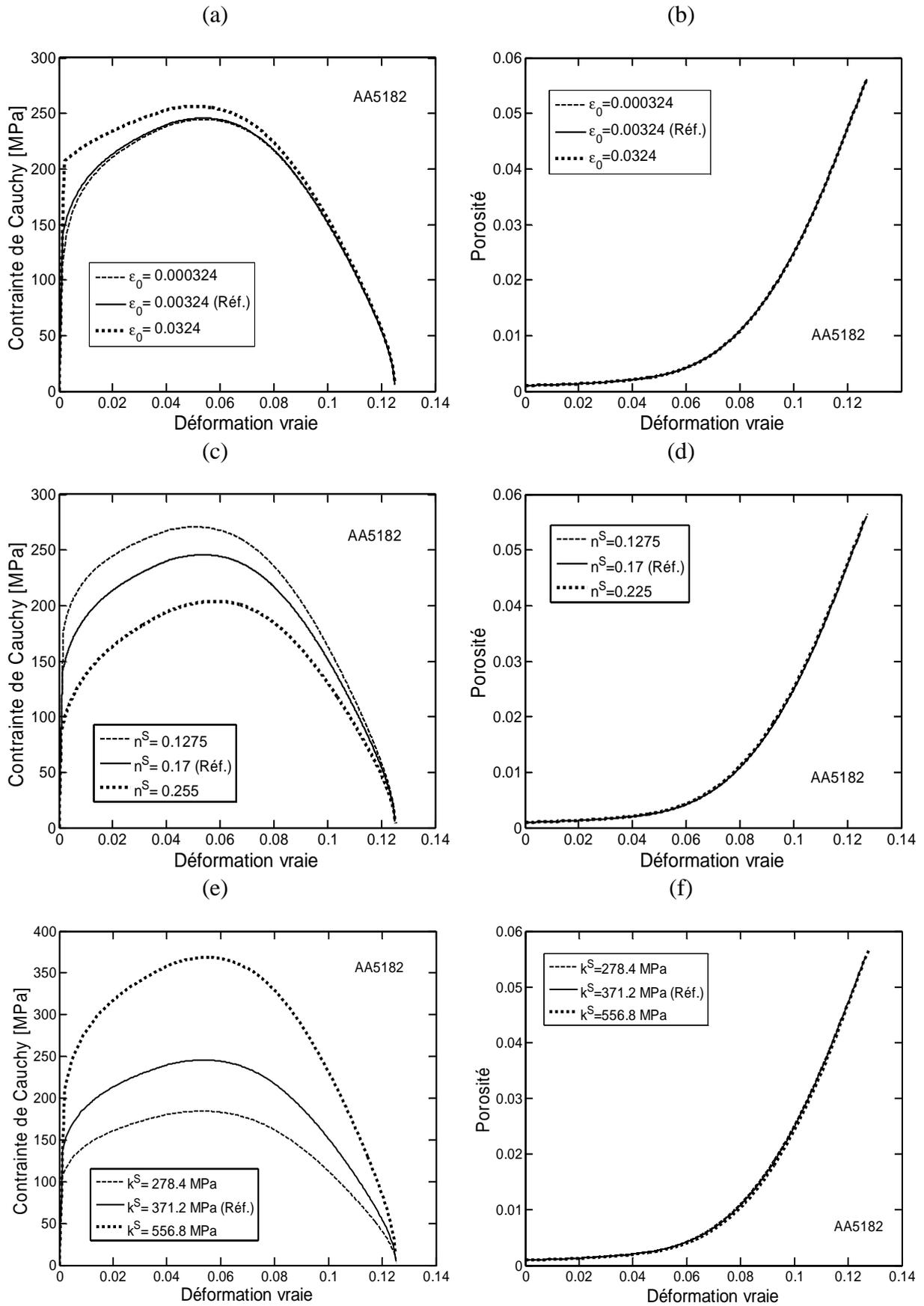


Figure 3.9 : Courbes de comportement et courbes d'évolution de la porosité pour un chargement en TE jusqu'au point de localisation. Influence des paramètres de la loi d'écroutissage de Swift.

Tous ces travaux montrent que l'évolution de l'endommagement dans les matériaux métalliques dépend sensiblement de l'exposant d'écrouissage contrairement à ce qui est prédit à partir du modèle de Gurson-Tvergaard. En effet, on peut remarquer sur les Figures 3.9.a à 3.9.f que les paramètres de la loi d'écrouissage de Swift n'ont quasiment aucune influence sur l'évolution de la variable d'endommagement. Les mêmes tendances ont été obtenues en ce qui concerne les niveaux de contrainte à striction localisée. Le trajet de chargement considéré est la traction équi-biaxiale, bien que des résultats similaires ont été obtenus pour d'autres trajets de chargement. Puisque la singularité du tenseur acoustique dépend principalement de la variable d'endommagement (lorsqu'on considère l'endommagement comme un effet déstabilisant majeur), les résultats obtenus sont donc cohérents. Il est à noter que des tendances quasi-identiques ont été obtenues à partir des lois d'écrouissage de Voce ou de Hollomon.

3.3.3 Influence de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction des limites de formage : interaction endommagement-anisotropie plastique

Les travaux de la littérature montrent que la prise en compte de l'anisotropie plastique influe considérablement sur la prédiction des limites de formage (voir e.g. (Barlat, 1987), (Banabic et al., 2005), (Dasappa et al., 2012)). Les CLF prédites à partir du critère de localisation de (Marciniak & Kuczyński, 1967) ou celui de (Rice, 1976) dépendent sensiblement de la forme et de la courbure de la surface de charge considérée (Barlat, 1987), (Tvergaard, 1987), (Tóth et al., 1996). D'une manière générale, la prise en compte de l'anisotropie plastique initiale a pour conséquence d'abaisser les niveaux de déformation à striction localisée dans le domaine de l'expansion. Ces tendances sont la plupart du temps observées à partir du critère de localisation de (Marciniak & Kuczyński, 1967), bien que les critères de localisation reposant sur l'Analyse de Stabilité par Perturbation Linéaire conduisent aux mêmes conclusions (Tóth et al., 1996), (Boudeau & Gelin, 2000). Pour des trajets de chargement en traction plane, les travaux de la littérature qui s'appuient sur des approches théoriques indiquent qu'en général, la prise en compte de l'anisotropie plastique influe peu sur les niveaux de déformation à striction localisée. Dans (Brunet et al., 1998) et (Brunet & Morestin, 2001), les auteurs ont analysé la prédiction des limites de formage à partir d'un modèle d'endommagement basé sur le critère de plasticité macroscopique de (Liao et al., 1997). Ce modèle de comportement a été couplé au critère de Force Maximum Modifié (Hora et al., 1996), (Hora et al., 2013). Les résultats obtenus dans (Mguil, 1997) et (Brunet et al., 1998) montrent que pour une variété relativement importante de matériaux, la prise en compte de l'anisotropie plastique suivant l'approche de (Liao et al., 1997) permet de retrouver des limites de formage plus basses dans le domaine de l'expansion comparées au modèle GTN.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse plus particulièrement à l'influence de l'anisotropie plastique sur la prédiction des limites de formage lorsque le comportement est couplé au critère de Perte d'Ellipticité. Compte tenu de ce qui a été discuté dans le précédent paragraphe, l'anisotropie plastique initiale est susceptible d'affecter la prédiction des limites de formage, à condition qu'il existe une interaction entre endommagement et anisotropie plastique. Concernant le modèle d'endommagement décrit dans le chapitre précédent, il est

possible de décomposer le taux de déformation plastique \mathbf{D}^p à partir de la loi d'écoulement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{D}}^{p'} = \frac{3}{2} \frac{D_{eq}^p}{\Sigma_{eq}} \underline{\mathbf{J}} : (\underline{\mathbf{H}} : \underline{\Sigma}') \\ \underline{\mathbf{D}}_m^p = q_1 q_2 \frac{f_\star}{\mathcal{H}_{BB}} \frac{\sigma_M}{\Sigma_{eq}} \sinh\left(\frac{3q_2}{\mathcal{H}_{BB}} \frac{\Sigma_m}{\sigma_M}\right) D_{eq}^p \underline{\mathbf{1}} \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\underline{\mathbf{D}}^{p'}$ et $\underline{\mathbf{D}}_m^p$ désignent, respectivement, la partie déviatorique et sphérique du tenseur taux de déformation plastique. $\underline{\mathbf{J}}$ est l'opérateur déviatorique d'ordre quatre $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{I}} - \frac{1}{3} \underline{\mathbf{1}} \otimes \underline{\mathbf{1}}$. Par ailleurs, nous avons vu au chapitre précédent que la loi d'évolution de la porosité due à la croissance des vides s'exprime sous la forme $\dot{f}_g = (1-f) \underline{\mathbf{D}}^p : \underline{\mathbf{1}}$. En combinant cette expression avec la relation précédente, on obtient :

$$\frac{\dot{f}_g}{f_\star (1-f)} = q_1 q_2 \frac{3\sigma_M}{\mathcal{H}_{BB} \Sigma_{eq}} \sinh\left(\frac{3q_2}{\mathcal{H}_{BB}} \frac{\Sigma_m}{\sigma_M}\right) D_{eq}^p \quad (3.3)$$

Cette dernière relation montre que le facteur d'anisotropie plastique \mathcal{H}_{BB} qui intervient dans le critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001) a une influence non-négligeable sur l'évolution de la croissance des cavités. Rappelons que le critère de plasticité macroscopique de Gurson-Tvergaard représente un cas particulier du critère de (Benzerga & Besson, 2001), retrouvé lorsque le facteur d'anisotropie plastique est égal à deux. On peut montrer par ailleurs que le taux de porosité due à la germination des cavités dépend également du facteur d'anisotropie \mathcal{H}_{BB} , étant donné que l'expression du taux de déformation plastique microscopique est donnée par :

$$\dot{\epsilon}_M^p = \frac{\underline{\Sigma} : (\underline{\mathbf{D}}^{p'} + \underline{\mathbf{D}}_m^p)}{(1-f) \sigma_M} \quad (3.4)$$

En prenant en compte les deux dernières relations, on montre également que l'influence du facteur d'anisotropie s'accroît davantage dès le début de la jonction des cavités par coalescence. En effet, la loi d'évolution de la porosité effective est donnée par la formule (voir Chapitre 2) :

$$\dot{f}_\star = \delta_A (\mathcal{A}_N \dot{\sigma}_M + \mathcal{B}_N \dot{\Sigma}_m + (1-f) \underline{\mathbf{D}}^p : \underline{\mathbf{1}}) \quad (3.5)$$

Lorsque la germination est contrôlée par la déformation plastique équivalente microscopique, on a $\mathcal{A}_N \neq 0$ et $\mathcal{B}_N = 0$. Ainsi, la relation précédente peut s'exprimer sous la forme :

$$\dot{f}_\star = \delta_A \left(\frac{\mathcal{A}_N \mathcal{H}_{\sigma_M} \underline{\Sigma}}{(1-f) \sigma_M} + (1-f) \underline{\mathbf{1}} \right) : (\underline{\mathbf{D}}^{p'} + \underline{\mathbf{D}}_m^p) \quad (3.6)$$

La relation précédente indique que le modèle de comportement qui découle du critère de (Benzerga & Besson, 2001) introduit un couplage entre endommagement et anisotropie plastique. En d'autres termes, l'évolution de la variable d'endommagement f dépend du facteur d'anisotropie \mathcal{H}_{BB} comme le montre les relations précédentes. Ainsi, lorsque la valeur du facteur d'anisotropie est supérieure à deux, la croissance des cavités est retardée par rapport au modèle GTN (voir (Benzerga & Besson, 2001)). En revanche, lorsque la valeur de \mathcal{H}_{BB} est inférieure à deux, le modèle anisotrope devrait prédire des niveaux de ductilité plus bas comparés à ceux obtenus à partir du modèle isotrope. Les deux matériaux considérés dans cette section, à savoir l'alliage d'aluminium AA5754 et l'acier XES, possèdent des facteurs d'anisotropie égaux à 2,18 et 1,56, respectivement.

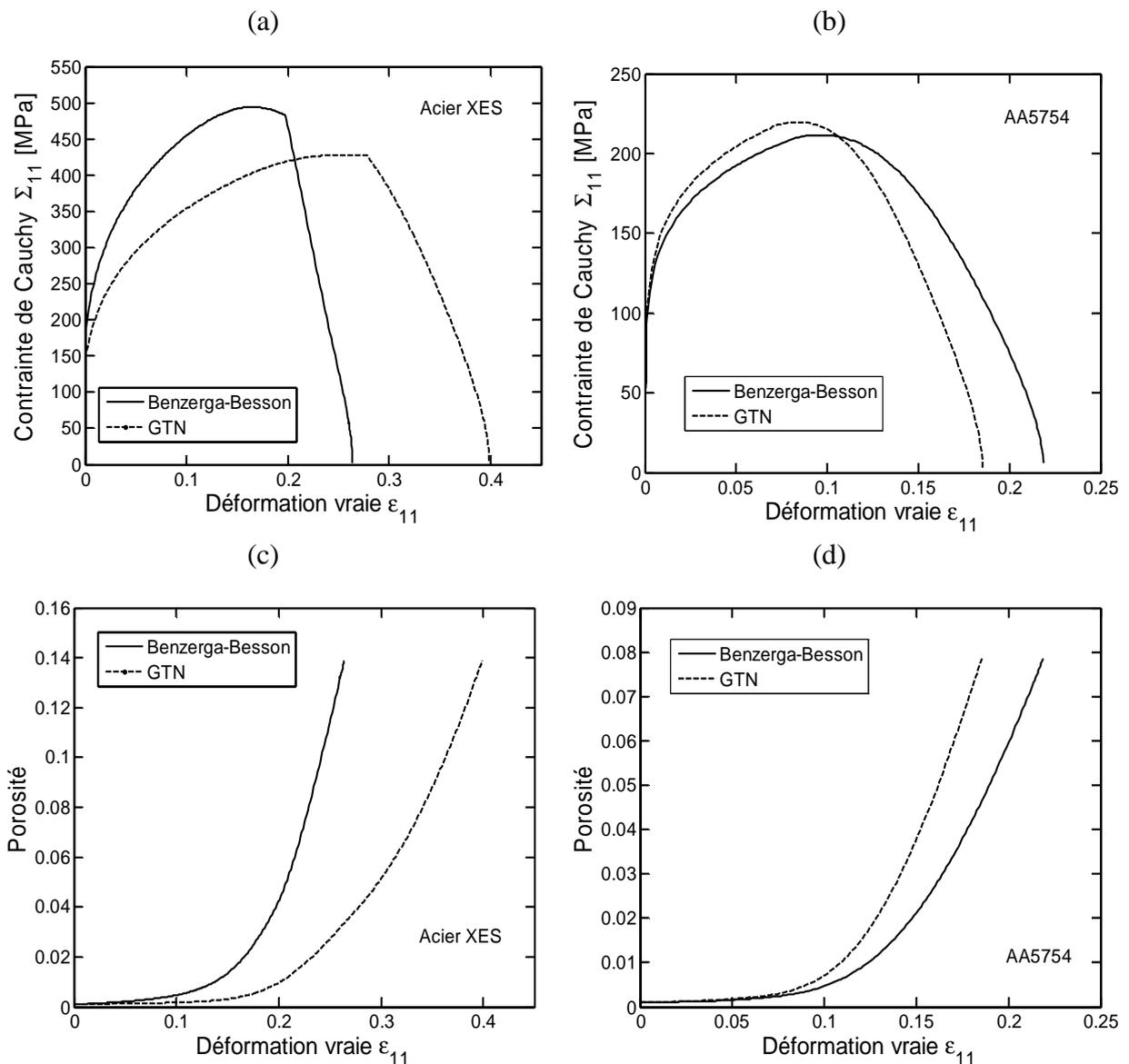


Figure 3.10 : Courbes de comportement et d'évolution de la porosité pour un chargement en traction équi-biaxiale pour l'acier XES et l'alliage d'aluminium AA5457. Influence de l'anisotropie plastique.

D'après la relation précédente, on devrait obtenir des limites de ductilité supérieures à celles obtenues à partir du modèle GTN lorsqu'on considère l'alliage d'aluminium AA5754. Concernant l'acier XES, les limites de ductilité devraient être plus basses par rapport à celles obtenues à partir du modèle GTN. Les Figures 3.10.a et 3.10.b illustrent les courbes rhéologiques obtenues à partir des modèles d'endommagement isotrope et anisotrope. On remarque sur ces deux figures que la ductilité prédite à partir du modèle anisotrope est sensiblement inférieure à celle obtenue à partir du modèle GTN s'agissant de l'acier XES. En revanche, pour l'alliage d'aluminium AA5754, c'est plutôt l'effet inverse qui est observé. Le trajet de chargement correspond à une traction équi-biaxiale, bien que les mêmes tendances aient été retrouvées pour d'autres trajets de chargement. On observe sur les courbes des Figures 3.10.c et 3.10.d que l'évolution de la porosité est sensiblement affectée par la prise en compte de l'anisotropie plastique initiale. L'écart au niveau de la variable d'endommagement entre les deux modèles est d'autant plus important après l'entrée en régime de coalescence, conformément à ce qui est prédit par la loi d'évolution de la porosité effective. Les Figures 3.11.a et 3.11.b représentent les CLF à striction localisée obtenues à partir des modèles d'endommagement de (Benzerga & Besson, 2001) et de Gurson-Tvergaard-Needleman. On peut remarquer sur ces figures que la prise en compte de l'anisotropie plastique initiale a pour effet de réduire les limites de formage lorsqu'il s'agit de l'acier XES alors que l'effet inverse est observé pour l'alliage d'aluminium AA5754.

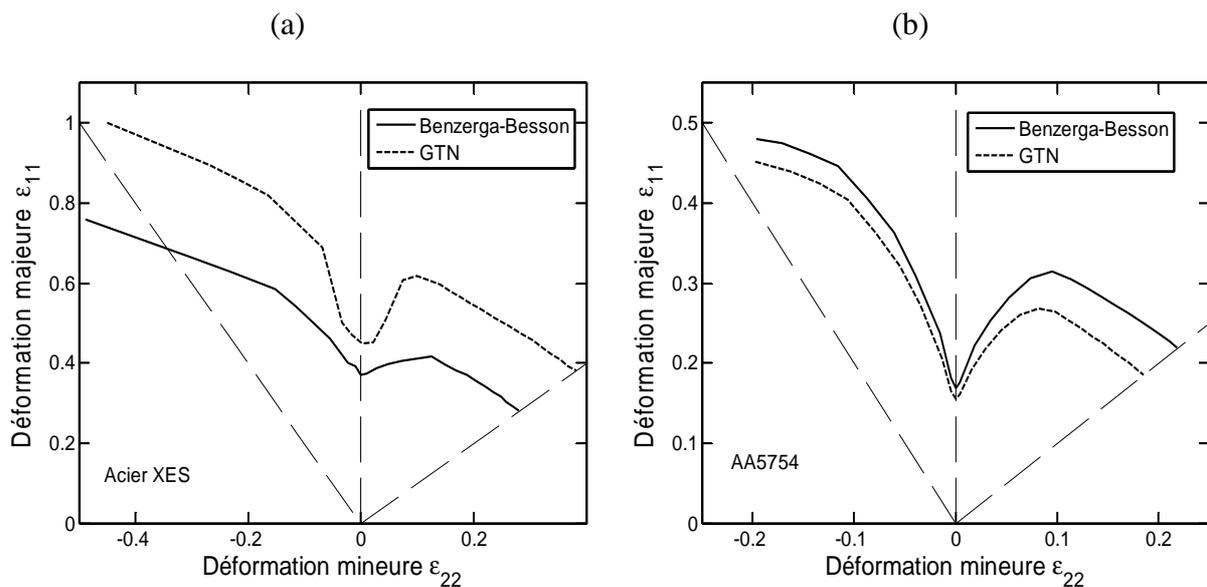


Figure 3.11 : Influence de l'anisotropie plastique sur la prédiction des courbes limites de formage pour l'acier XES et l'alliage d'aluminium AA5754.

3.4 Confrontation aux résultats expérimentaux de la littérature

Dans ce paragraphe, on présente dans un premier temps certains aspects liés à la détermination des courbes limites de formage par des approches expérimentales. On discutera de manière concise les différentes méthodes expérimentales utilisées, dans le but d'analyser et de discuter de la fiabilité de ces approches. Ensuite, on propose une confrontation des résultats obtenus à partir du modèle considéré dans ce chapitre avec certains résultats expérimentaux pris des travaux de la littérature.

3.4.1 Prédiction des CLF par des approches expérimentales

La détermination des CLF à partir d'une approche expérimental consiste à cerner avec le plus de précision possible l'apparition de la localisation afin d'en extraire les déformations majeures et mineures. La plupart du temps, le principe de caractérisation expérimentale des CLF repose sur la détection d'un fort gradient de déformation qui est associé à la striction localisée. Il existe dans la littérature une variété importante de méthodes permettant de déterminer les limites de formage d'un matériau donné. D'une part, une multitude de techniques ont été proposées afin d'évaluer les niveaux de déformation à striction localisée, dont on peut citer les méthodes de Bragaard ou de Veerman (Col, 2010). D'autre part, plusieurs essais de laboratoire ont été développés dans le but de caractériser les limites de formage de tôles métalliques. Chacun de ces essais permet de simuler différents trajets de chargements linéaires afin de reproduire tout ou une partie de la CLF. D'une manière générale, les CLF expérimentales dans le domaine du rétreint sont sensiblement parallèles pour une variété importante de matériaux métalliques (Fromentin, 1998). Cependant, cette particularité n'est pas vérifiée dans le domaine de l'expansion, où l'on observe généralement des formes différentes de la CLF qui semblent dépendre de la microstructure du matériau considéré. Les Figures 3.12.a et 3.12.b montrent différentes CLF expérimentales prises à partir des travaux de la littérature pour différentes nuances d'aciers (à gauche) et différents alliages d'aluminium (à droite). On peut constater sur ces deux figures que dans le domaine du rétreint, les points expérimentaux sont parallèles et possèdent des pentes quasiment identiques. Néanmoins, dans le domaine de l'expansion, l'allure des CLF expérimentales varie considérablement d'un matériau à l'autre et ne présente pas toujours une pente positive. La Figure 3.12.a montre que les niveaux de déformations majeures à striction localisée pour les aciers SS304 et ULC/Ti présentent un maximum local dans le domaine de l'expansion.

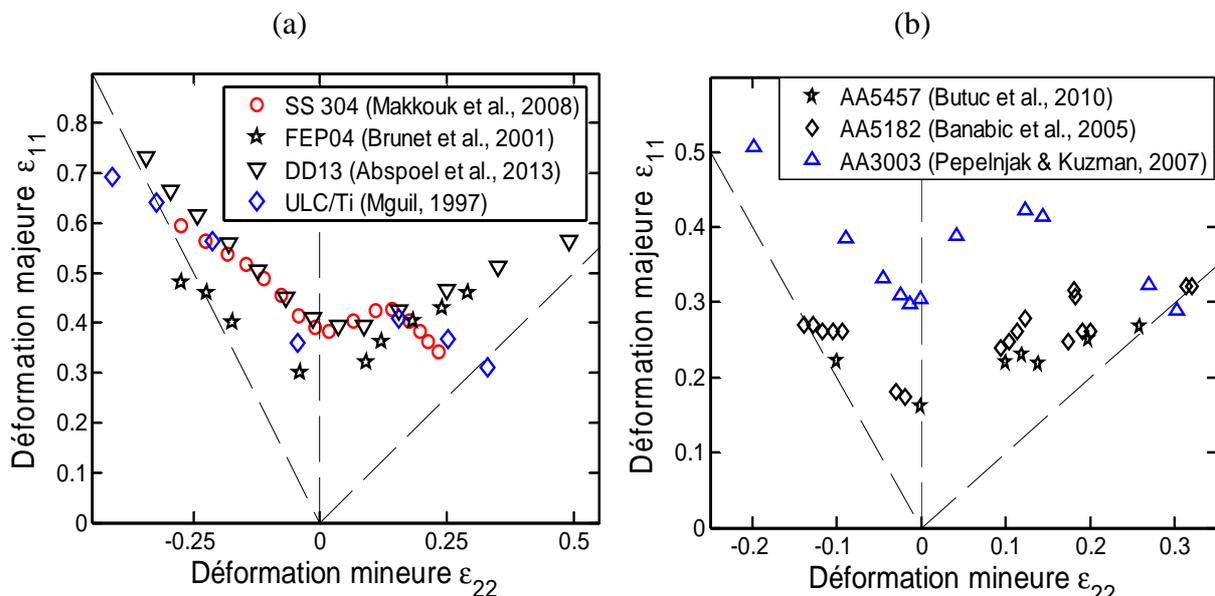


Figure 3.12 : Courbes limites de formage expérimentales pour différents matériaux métalliques prises à partir des travaux de la littérature.

Les mêmes constats peuvent être faits pour les différents alliages d'aluminium représentés dans la Figure 3.12.b. Outre la forme des CLF qui peut varier sensiblement en fonction du

matériau étudié, le manque de normalisation des essais conduit souvent à une forte dispersion des points expérimentaux, lorsque ces essais sont réalisés par différents laboratoires de recherche. En effet, l'existence de plusieurs méthodes expérimentales et techniques de dépouillements associées fait que parfois, les résultats obtenus à partir de ces essais souffrent d'un manque de reproductibilité (voir e.g. (Pearce, 1991), (Ben Tahar, 2005), (Banabic, 2010)). La Figure 3.13 représente des CLF expérimentales prises à partir des travaux de la littérature pour une tôle en alliage d'aluminium AA5182. Les points expérimentaux correspondant aux travaux de (Banabic et al., 2005) et (Butuc et al., 2005) ont été obtenus à partir de l'essai Nakazima (Nakazima et al., 1968), alors que ceux donnés dans (Brunet & Morestin, 2001) et (Brunet et al., 2004) ont été obtenus à partir de l'essai Marciniak. On peut observer sur la Figure 3.13 que dans le domaine du rétreint les courbes expérimentales sont assez proches et quasiment alignées, alors que dans le domaine de l'expansion, il existe une dispersion relativement importante. La dispersion des points expérimentaux est d'autant plus importante dans le domaine de l'expansion (en particulier lorsqu'on se rapproche d'un chargement en traction équi-biaxiale). En effet, on peut observer sur la Figure 3.13 que la différence entre les déformations majeures à striction localisée données dans (Banabic et al., 2005) et celles données dans (Brunet et al., 2004) est de l'ordre de dix pour cent, ce qui représente un écart considérable. Ces écarts sont souvent dus en partie à la mesure des déformations locales, qui introduit certaines hypothèses et approximations. En outre, le frottement entre la pièce et les outils qui dépend à son tour de la qualité de lubrification, de l'état de surface des outils et de la pièce, ... etc. joue un rôle important sur la caractérisation expérimentale des CLF.

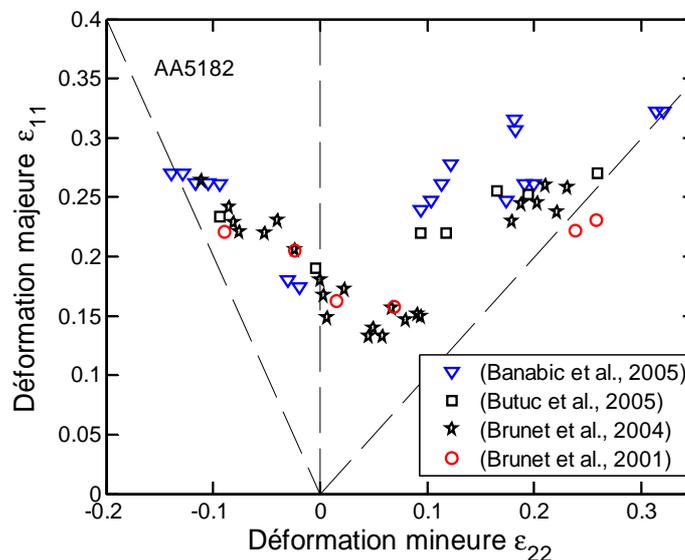


Figure 3.13 : Différentes courbes limites de formage expérimentales prises à partir des travaux de la littérature pour l'alliage d'aluminium AA5182.

3.4.2 Confrontation des CLF théoriques aux résultats expérimentaux de la littérature

Les Figures 3.14.a à 3.14.d illustrent la confrontation entre les CLF expérimentales prises des travaux de la littérature et celles obtenues à partir des deux modèles d'endommagement

considérés dans ce travail, couplés au critère de localisation de Rice. Cette comparaison se veut qualitative car nous ne connaissons pas les conditions dans lesquelles les paramètres des lois de comportement ont été identifiés (type d'essai, mesures, niveau des déformations, ... etc.). Concernant les deux alliages d'aluminium AA6016 et AA5754 (voir Figures 3.14.a et 3.14.b), on remarque que pour certains trajets de chargement, les CLF obtenues à partir des deux modèles d'endommagement sont relativement éloignées des points expérimentaux, alors que pour d'autres trajets de chargement, les prédictions du modèle proposé sont proches des résultats de la littérature.

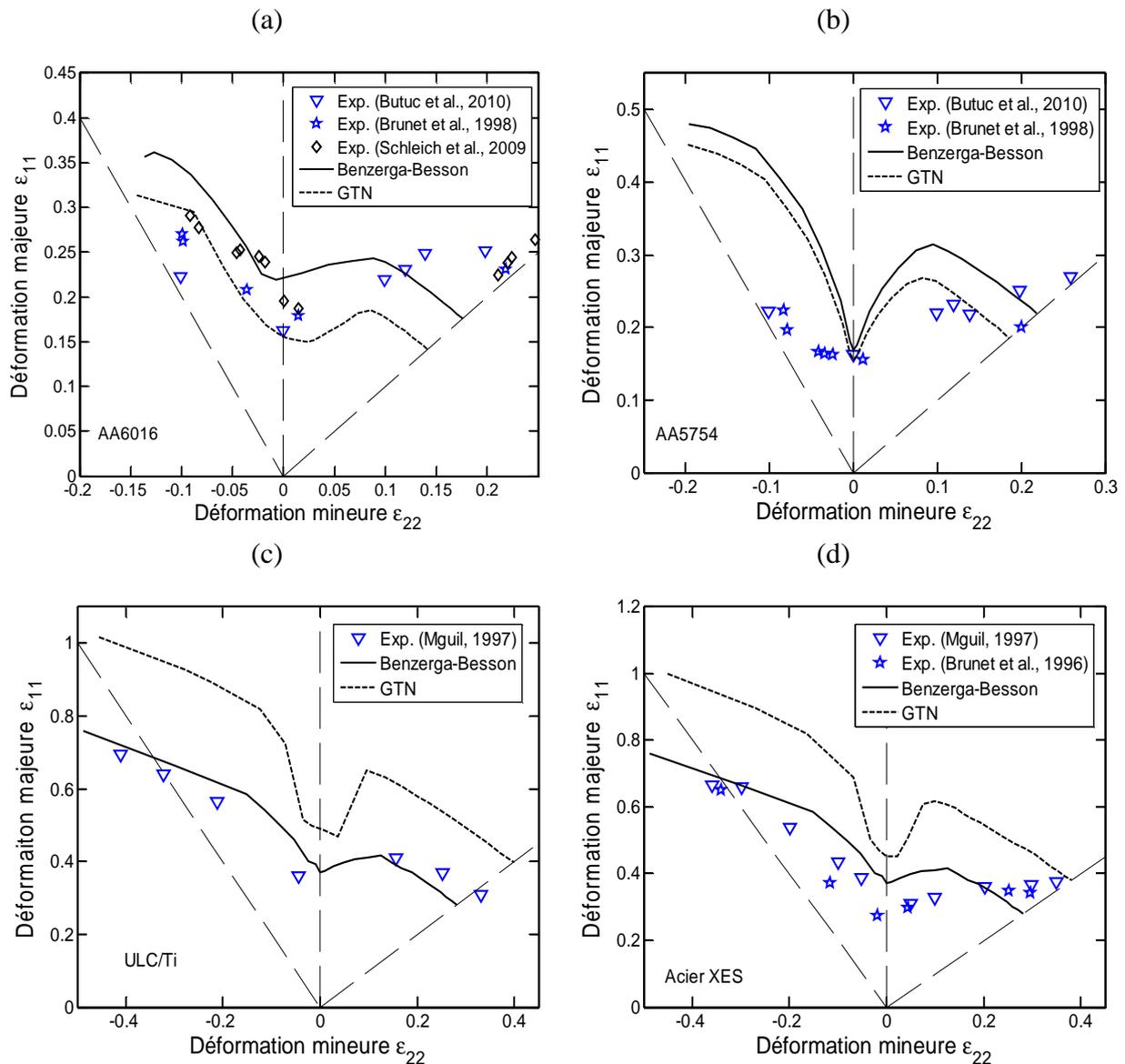


Figure 3.14 : Confrontation des CLF obtenues à partir d'une approche théorique et celles obtenues à partir d'une approche expérimentale pour différents matériaux métalliques.

S'agissant de l'alliage AA6016, c'est dans le domaine de l'expansion que les écarts sont relativement importants alors que pour l'alliage AA5754, c'est plutôt dans le domaine du rétreint. On peut remarquer également sur la Figure 3.14 (voir également Figure 3.13) que les points expérimentaux issus de la littérature sont relativement tous coïncidents, au voisinage d'un chargement en traction plane, ce qui n'est pas le cas pour la traction uniaxiale ou la

traction équi-biaxiale. Différentes causes sont susceptibles d'être à l'origine des écarts entre les CLF obtenues avec le modèle proposé et celles obtenues expérimentalement, et seront discutées en détails dans le prochain paragraphe. Il est à noter que pour les alliages AA6016 et AA5754, le facteur d'anisotropie \mathcal{H}_{BB} est supérieur à deux, ce qui explique le fait que les niveaux de ductilité prédits à partir du modèle anisotrope sont plus élevés que ceux prédits à partir du modèle isotrope. Concernant les deux aciers XES et ULC/Ti, on peut constater sur les Figures 3.14.c et 3.14.d, que la prise en compte de l'anisotropie plastique initiale permet d'obtenir des prédictions proches des points expérimentaux de la littérature. Pour ces deux matériaux, le facteur d'anisotropie est inférieur à deux ce qui influe significativement sur la prédiction des limites de formage. Notons par ailleurs que toutes les CLF obtenues à partir des modèles discutés dans ce travail présentent un maximum local dans le domaine de l'expansion. Ce type d'allure a déjà été retrouvé dans (Haddag et al., 2009), (Altmeyer, 2011), (Abed-Meraim et al., 2014) en utilisant des modèles de comportement phénoménologiques couplés au modèle d'endommagement de Lemaitre. Par ailleurs, les travaux de la littérature qui s'appuient sur des approches expérimentales montrent que certains matériaux métalliques, tels que l'acier SS304 ou l'alliage d'aluminium AA2024, présentent aussi un maximum local dans le domaine de l'expansion (voir e.g. (Mguil, 1997), (Talyan et al., 1998), (Pepelnjak & Kuzman, 2007), (Makkouk et al., 2008)).

3.4.3 Discussion sur l'écart entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir d'une approche théorique

Dans cette partie, nous tentons d'énumérer les causes susceptibles d'être à l'origine des écarts qui ont été observés entre les limites de formage issues des approches expérimentales et celles issues d'une approche théorique.

3.4.3.1 Difficultés liées à l'identification des paramètres du modèle de comportement

L'identification des paramètres d'un modèle de plasticité complexe prenant en compte différents aspects physiques du comportement des matériaux métalliques constitue un problème délicat. Nous tenterons d'énumérer les principales limitations associées aux techniques d'identification des paramètres et qui sont susceptibles d'expliquer les écarts entre les CLF expérimentales et celles obtenues à partir du modèle théorique.

- Le nombre de paramètres intervenant dans les lois de comportement phénoménologiques, permettant de modéliser à la fois l'anisotropie plastique et l'endommagement, peut dans certains cas dépasser la vingtaine (voir e.g. (Haddag et al., 2009)). Par conséquent, le processus d'identification de l'ensemble des paramètres basé sur la construction d'une fonction coût complexe devient très difficile (non-unicité de la solution, nombre d'itérations élevé... etc.). En ce qui concerne les modèles d'endommagement reposant sur l'approche de Gurson, le sens physique que l'on attribue à certains paramètres (densité des inclusions, porosité initiale, porosité critique) peut guider la procédure d'identification afin de mener à un jeu de paramètres plus réaliste (voir e.g. (Thuillier et al., 2012), (Li et al., 2011)). Néanmoins, ce type d'approches nécessite des moyens expérimentaux coûteux (tomographie,

laminographie, MEB, ... etc.) pour analyser les mécanismes d'endommagement à différentes échelles.

- Les paramètres d'endommagement sont souvent identifiés à partir d'une approche inverse qui s'appuie sur l'utilisation de plusieurs types d'essais expérimentaux (traction uniaxiale, compression, cisaillement, ... etc.). L'exploitation de ces essais se fait généralement par des méthodes dites de recalage qui consistent à minimiser l'écart entre des grandeurs mesurées (courbe Force-déplacement, champs de déplacement/déformation, ...etc.) et simulées par la méthode des éléments finis. Outre le problème de temps de calcul par la méthode des éléments finis, la solution obtenue par cette dernière dépend sensiblement du maillage utilisé dans le cas des modèles de comportement couplé à l'endommagement. C'est là l'une des difficultés majeures que l'on rencontre lors de l'identification des modèles d'endommagement locaux, d'où la nécessité d'introduire une régularisation au sein du modèle de comportement (voir e.g., (de Borst et al., 1999), (Besson et al., 2001), (Crété et al., 2014)).
- Outre les aspects liés à l'hétérogénéité des champs de déformation, certains auteurs ont soulevé un autre problème associé à la transférabilité des paramètres identifiés entre deux types d'essais différents (Brocks et al., 1995), (Søvik, 1996). Ces travaux indiquent qu'en ce qui concerne le modèle GTN, les paramètres identifiés à partir d'un essai de traction uniaxiale par exemple, ne sont pas toujours valables lorsqu'on considère un autre type de chargement (traction équi-biaxiale par exemple). Il semble que ce problème est dû aux extensions heuristiques introduites dans le modèle original de Gurson afin de prendre en compte certains mécanismes d'endommagement, e.g. effet d'interaction entre les cavités, concept de porosité effective, ... etc. (Søvik, 1996), (Benzerga, 2002).

La Figure 3.15.a illustre les réponses contrainte-déformation vraie pour un trajet de chargement en traction uniaxiale pour différentes valeurs du paramètre ε_N ainsi que la courbe expérimentale prise de (Brunet et al., 1998) pour l'alliage d'aluminium AA5182. La courbe expérimentale a été tronquée au point de force maximum correspondant au critère de striction diffuse de Considère. On peut observer sur cette figure que différentes valeurs du paramètre ε_N donnent des courbes de comportement identiques jusqu'au point de force maximum. Cependant, le comportement qui suit le point de force maximum est très différent. Rappelons que le point de force maximum correspond généralement à l'apparition du premier point de bifurcation de la solution (Bifurcation Générale, voir chapitre 1), où l'on commence à observer un léger début de striction diffuse en particulier pour un chargement en traction uniaxiale. C'est également à partir de ce point que la réponse force-déplacement commence à présenter une légère dépendance au maillage et qui va s'accroître graduellement jusqu'au point de Perte d'Ellipticité. Ce résultat montre clairement qu'une identification des paramètres d'endommagement, si elle s'appuie sur la partie homogène de l'essai de traction uniaxiale (petites déformations), peut conduire à une erreur non-négligeable lorsque les données ainsi identifiées sont exploitées dans des plages de déformations plus importantes.

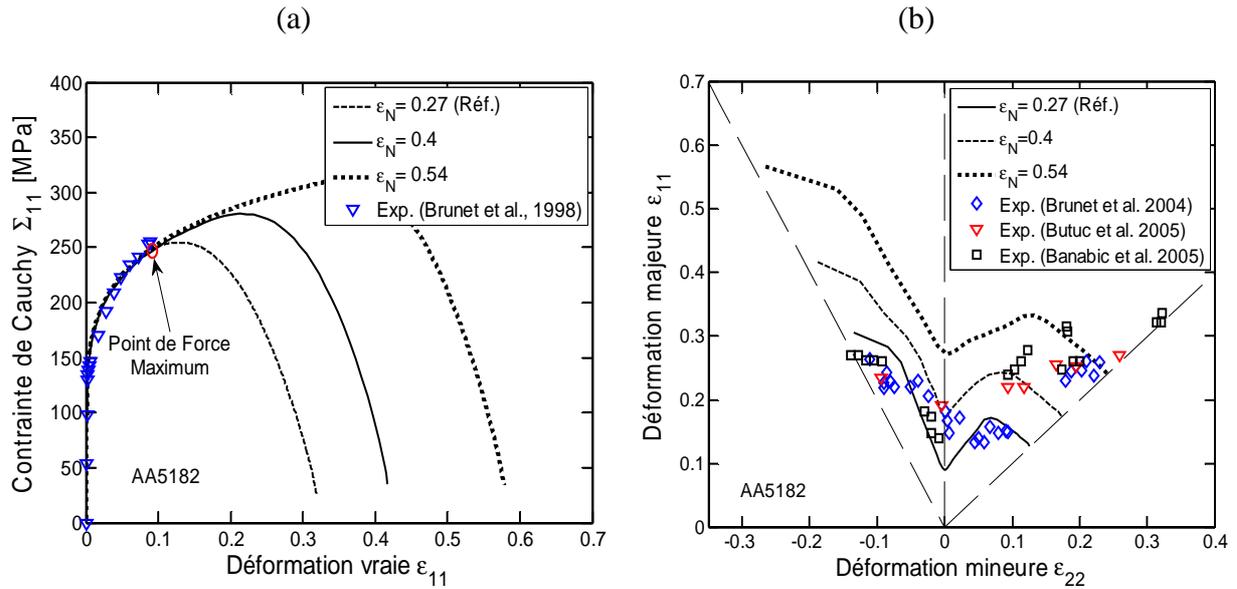


Figure 3.15 : (a) Effet du paramètre de nucléation ε_N sur les réponses contrainte-déformation obtenues avec le modèle GTN : (a) Comparaison avec la courbe expérimentale en traction uniaxiale, pour l'alliage d'aluminium AA5182, (b) Courbes limites de formage obtenues avec le modèle GTN pour différentes valeurs du paramètre de nucléation ε_N .

Les CLF obtenues à partir du modèle GTN qui correspondent aux différentes valeurs du paramètre ε_N sont illustrées sur la Figure 3.15.b. On peut remarquer sur cette figure qu'une identification des paramètres d'endommagement, qui s'appuie uniquement sur la partie homogène de l'essai de traction uniaxiale, laisse une grande incertitude quant aux valeurs réelles de ces paramètres, ce qui se traduit en retour par une incertitude similaire sur les niveaux des CLF associées.

3.4.3.2 Hypothèses inhérentes au modèle de comportement considéré

3.4.3.2.1 Forme des cavités au cours du chargement

Les modèles de comportement qui découlent du critère de plasticité de Gurson supposent qu'au cours du chargement, les cavités conservent une forme sphérique jusqu'à la rupture du V.E.R. Toutefois, cette hypothèse n'est vérifiée que pour des triaxialités de contrainte² relativement élevées, c'est-à-dire autour de 1,5. En effet, la plupart des mécanismes d'endommagement se produisent de manière très différente de ceux observés à forte triaxialité de contraintes (Tvergaard, 2012), (Longère & Dragon, 2013). D'une part, l'amorçage à faible triaxialité s'effectue souvent par décohésion partielle de l'interface inclusion-matrice ou par rupture de particule donnant naissance à des cavités de formes allongées ou aplaties (*Penny-Shape crack* en anglais). D'autre part, la croissance de l'endommagement s'accroît sur certaines directions privilégiées liées aux axes principaux de chargement, ce qui donne lieu également à des cavités allongées ou aplaties bien avant la jonction des vides (voir e.g. (Benzerga et al., 2004), (Tvergaard, 2012), (Requena et al., 2014)). Les cavités peuvent subir

² La triaxialité des contraintes est définie comme étant le rapport entre la contrainte moyenne et la contrainte équivalente au sens de von Mises, c'est-à-dire $\tau = \Sigma_m / \Sigma_{eq}$

également une rotation autour de leurs axes principaux, si ces derniers ne sont pas alignés avec les axes principaux de chargement ou bien lorsque le solide est soumis à un cisaillement simple (Benzerga et al., 2004), (Lecarme & Pardoën, 2011), (Tvergaard, 2012). Tous ces aspects ne sont évidemment pas pris en compte dans les modèles de comportement qui découlent du critère de Gurson, étant donné qu'on fait l'hypothèse que les cavités conservent une forme sphérique. Cela dit, c'est dans le domaine de l'expansion et en particulier au voisinage d'un chargement en traction équi-biaxiale que l'hypothèse des cavités sphériques correspond le plus aux observations expérimentales. Il serait toutefois intéressant de vérifier si la non-prise en compte de l'anisotropie morphologique des cavités au sein du modèle de comportement est à l'origine des écarts observés entre CLF expérimentales et théoriques, en particulier dans le domaine du rétreint. Cette perspective pourrait être entamée à partir d'un modèle de comportement qui découle du critère de plasticité macroscopique de (Gologanu et al., 1993), (Gologanu et al., 1997). Des modèles de coalescence théoriques devront être introduits afin de conserver le caractère micromécanique du modèle (Benzerga, 2002), (Gologanu et al., 2001).

3.4.3.2 Extensions heuristiques du modèle de Gurson

Nous avons vu dans les chapitres précédents les différentes extensions apportées au modèle de Gurson, notamment dans (Chu & Needleman, 1980), (Tvergaard, 1982), (Tvergaard & Needleman, 1984). En outre, il a été mentionné plus haut que les calculs par éléments finis réalisés dans (Faleskog et al., 1998), (Kim et al., 2004) et (Vadillo & Fernández-Sáez, 2009) indiquent que le facteur d'interaction entre les cavités, introduit initialement dans (Tvergaard, 1981), n'est pas constant et dépend sensiblement de l'exposant de l'écrouissage ainsi que de la triaxialité des contraintes. D'un point de vue théorique, le critère de plasticité macroscopique de (Gurson, 1977) permet de retrouver la solution exacte d'une sphère creuse de comportement rigide parfaitement plastique soumise à un chargement radial, ce qui n'est pas le cas lorsque l'on introduit le facteur q en considérant la valeur proposée par (Tvergaard, 1981), (Tvergaard, 1982). Par conséquent, l'hypothèse que q est constant quel que soit le trajet de chargement et quel que soit l'exposant d'écrouissage n'est pas tout à fait valide. Concernant la jonction des cavités par coalescence, certains travaux qui se sont appuyés dans un premier temps sur des simulations par éléments finis indiquent une forte dépendance de la porosité critique par rapport à la triaxialité des contraintes ainsi que la porosité initiale (Koplik & Needleman, 1988), (Tvergaard, 1990), (Benzerga et al., 1999), (Pardoën & Hutchinson, 2000), (Gao & Kim, 2006). Plusieurs approches théoriques ont été proposées dans la littérature afin de prédire, d'une part, le moment où la jonction des cavités par coalescence se produit et de décrire, d'autre part, le comportement du matériau lorsque les champs de déformations à l'échelle du V.E.R deviennent fortement hétérogènes (Thomason, 1985), (Perrin, 1992), (Leblond & Perrin, 1999), (Zhang et al., 2000), (Gologanu et al., 2001), (Benzerga, 2002), (Benzerga et al., 2004), (Lecarme & Pardoën, 2011). La Figure 3.16 illustre l'évolution de la porosité critique obtenue à partir des critères de coalescence de (Thomason, 1985) et de (Perrin, 1992) en fonction de la triaxialité des contraintes, pour une valeur de porosité initiale égale à 0,1% et 0.01%. On peut faire plusieurs constats à partir de cette figure. En premier lieu, on remarque que la valeur de la porosité critique dépend sensiblement de la triaxialité des contraintes. Des tendances similaires ont été obtenues à partir de calculs

par éléments finis sur des V.E.R à base hexagonale contenant une cavité sphérique au centre (voir e.g. (Pardoen & Hutchinson, 2000), (Gao & Kim, 2006)).

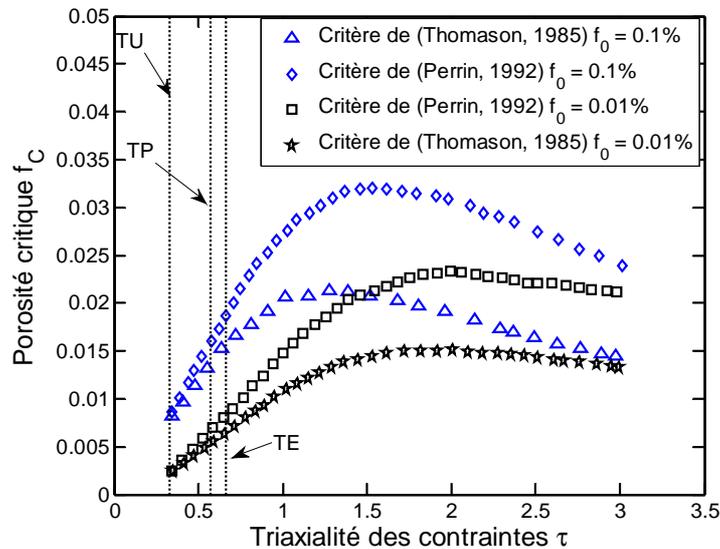


Figure 3.16 : Evolution de la porosité critique en fonction de la triaxialité des contraintes prédite à partir des critères de coalescence de (Thomason, 1985) et (Perrin, 1992). Figure adaptée de (Benzerga et al., 1999).

Pour des porosités initiales relativement faibles (c.-à-d. $f_0 \leq 0,01\%$) et pour des triaxialités de contrainte supérieures à $3/2$, la porosité critique varie peu. Néanmoins, en ce qui concerne les trajets de chargement rencontrés en emboutissage des tôles minces, l'hypothèse d'une porosité critique constante quel que soit le trajet de chargement ne correspond pas exactement à ce qui est prédit à partir des critères analytiques de (Thomason, 1985) ou de (Perrin, 1992). Enfin, les critères de (Thomason, 1985) ou de (Perrin, 1992) prédisent des niveaux de porosité critique identiques en traction uniaxiale, ce qui n'est pas le cas pour d'autres trajets de chargement tels que la traction plane ou la traction équi-biaxiale. Il est à noter que les valeurs de τ relatives aux trajets de chargements rencontrés en mise en forme (voir Figure 3.16) ont été calculées sous l'hypothèse des contraintes planes, valable pour les tôles minces. Cependant, si l'on considère l'hypothèse des déformations planes valable pour les tôles épaisses, on obtient une valeur de $\tau = 0,57$ pour un chargement en traction uniaxiale alors que pour la traction équi-biaxiale, on a $\tau \rightarrow \infty$. Il est possible d'avoir une appréciation sur l'impact que peut avoir la dépendance de la porosité critique vis-à-vis de la triaxialité des contraintes sur la prédiction des CLF à striction localisée. Pour un chargement en traction uniaxiale et pour une porosité initiale égale à $0,1\%$, les critères de coalescence analytiques prédisent une porosité critique de l'ordre de $0,8\%$. Cette valeur ne correspond pas à celle identifiée dans (Mguil, 1997) et (Brunet et al., 1998), bien que pour tous les matériaux considérés dans ce travail, la porosité initiale est de $0,1\%$. Concernant l'alliage d'aluminium AA5182, la porosité critique identifiée dans (Brunet et al., 1998) est égale à $0,213\%$ ce qui se rapproche de la valeur prédite par les critères de (Perrin, 1992) et de (Thomason, 1985) en traction uniaxiale ($f_C = 0,25\%$, voir Figure 3.16), à condition de supposer que pour ce matériau, la porosité initiale est de l'ordre de $0,01\%$.

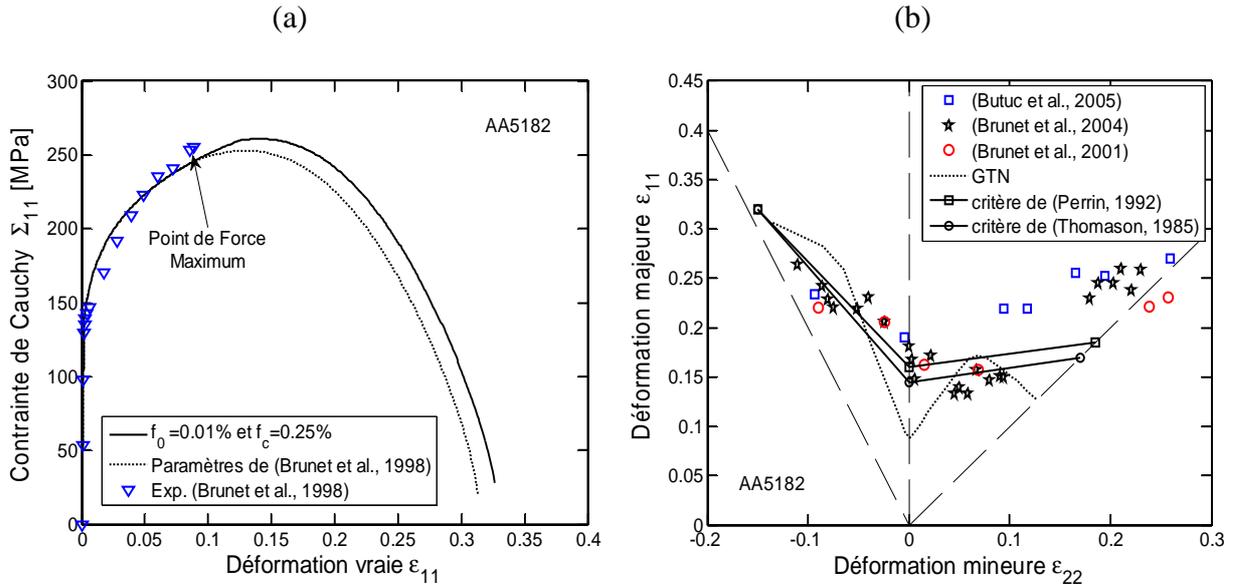


Figure 3.17 : (a) Courbes rhéologiques expérimentale et numériques pour l'alliage d'aluminium AA5182. (b) Confrontation entre CLF expérimentales et théoriques pour l'alliage d'aluminium AA5182. Effet de la dépendance de la porosité critique par rapport à la triaxialité des contraintes.

On considère à présent les mêmes paramètres matériau que ceux identifiés dans (Brunet et al., 1998) pour l'alliage d'aluminium AA5182, sauf que la porosité initiale est remplacée par une valeur de 0,01% et la porosité critique par les valeurs prédites à partir des critères de coalescence de (Perrin, 1992) et de (Thomason, 1985). La Figure 3.17.a illustre la réponse rhéologique obtenue à partir du modèle GTN en considérant les paramètres donnés par les Tableaux 3.1 et 3.2 ainsi que la courbe obtenue en remplaçant la valeur de la porosité critique par celle prédite à partir des critères de coalescence de (Perrin, 1992) ou de (Thomason, 1985) pour un chargement en traction uniaxiale. On peut constater sur cette figure que les deux courbes numériques sont identiques jusqu'au point de force maximum (Figure 3.18.a). La Figure 3.17.b représente les CLF expérimentales ainsi que celles obtenues à partir du modèle GTN, soit en considérant une porosité critique constante ou bien à partir des valeurs de f_c issues des critères de (Perrin, 1992) et de (Thomason, 1985). Seulement trois trajets de chargement ont été simulés lorsque la porosité critique dépend de la triaxialité des contraintes. On peut remarquer sur la figure une amélioration de la prédiction des niveaux de déformations à striction localisée en particulier pour la traction plane et la traction équi-biaxiale.

3.4.3.3 Hypothèses inhérentes au critère de Perte d'Ellipticité

Nous avons vu dans le premier chapitre que le critère de Perte d'Ellipticité considère qu'avant l'apparition de la bande de localisation, les champs de déformation sont homogènes. Or, pour la grande majorité des matériaux métalliques en feuilles, l'apparition de la striction localisée est précédée par la striction diffuse qui correspond à une perte d'homogénéité des champs de déformation. Ce phénomène est en particulier visible sur des tôles métalliques relativement minces et soumises à un chargement en traction uniaxiale. La striction diffuse est caractérisée par un léger amincissement de la tôle sur une zone relativement large ce qui a

pour conséquence de précipiter l'apparition de la striction localisée. Il semble que cet aspect soit pris en compte indirectement dans le critère de localisation de (Marciniak & Kuczyński, 1967) ou celui de (Hutchinson & Neale, 1978) étant donné que dans cette approche on suppose l'existence d'un défaut sous forme d'une bande dont l'épaisseur est légèrement plus faible que le reste de la tôle. Ainsi, le critère de Perte d'Ellipticité tel que nous l'avons formulé dans ce travail, constitue une borne supérieure à l'apparition de la striction localisée.

3.5 Analyse de l'effet d'un changement de trajet de déformation sur la prédiction des CLF

De nos jours, il est bien connu que les CLF tracées dans l'espace des déformations principales présentent une dépendance au changement de trajet de chargement (Arrieux et al., 1985), (Graf & Hosford, 1994), (Hiwatashi et al., 1998), (Stoughton & Zhu, 2004). Indépendamment du niveau des déformations à striction localisée qui se trouve être sensiblement différent, dès lors que l'on considère des trajets de chargement complexes, la forme de la CLF obtenue peut changer considérablement pour certains matériaux (Kuroda & Tvergaard, 2000), (Yoshida et al., 2007). De manière générale, une séquence de chargements en traction-expansion conduit à des niveaux de CLF plus élevés que ceux obtenus à partir d'un chargement linéaire. En contrepartie, lorsqu'on considère une séquence de chargements en expansion-traction, les niveaux de déformation à striction localisée sont plus bas que ceux obtenus en trajet de chargement linéaire. De ce fait, il n'existe pas de représentation unique de la CLF, permettant de caractériser les limites de formage d'un matériau donné quel que soit le chargement considéré. Afin de fournir une représentation intrinsèque des limites de formage, (Arrieux et al., 1985) ont proposé de caractériser la ductilité des tôles métalliques en traçant la CLF dans l'espace des contraintes principales ($CLF\sigma$). Bien que ce concept soit attractif, puisqu'il permet *a priori* de retrouver une seule et unique courbe quel que soit la complexité du trajet de chargement considéré, les $CLF\sigma$ sont restées beaucoup moins répandues en particulier dans l'industrie. Ceci s'explique par la difficulté inhérente à la détermination des $CLF\sigma$ par des approches expérimentales (Stoughton & Zhu, 2004). En effet, il est en général difficile de cerner avec précision la contrainte à striction localisée sur un point considéré de la tôle $\forall \beta \in [-0.5, 1]$, et ce même en trajet de chargement linéaire (Yoshida et al., 2007). Dans certains travaux cités précédemment, les auteurs ont utilisé une loi de comportement simple à partir de laquelle ils ont pu déterminer les contraintes principales à localisation par une approche expérimentale. Dans (Yoshida et al., 2007), (Yoshida & Suzuki, 2008), les auteurs ont considéré un modèle de plasticité phénoménologique présentant un effet de non-normalité de la loi d'écoulement dans le but d'étudier l'impact du changement de trajet de déformation sur la prédiction des $CLF\sigma$. Ce modèle de comportement, initialement développé dans (Kuroda & Tvergaard, 2000), a été couplé au critère de localisation de (Marciniak & Kuczyński, 1967). Deux types de changements de trajets de déformation ont été considérés, qui se différencient principalement par le fait de considérer ou non la décharge élastique.

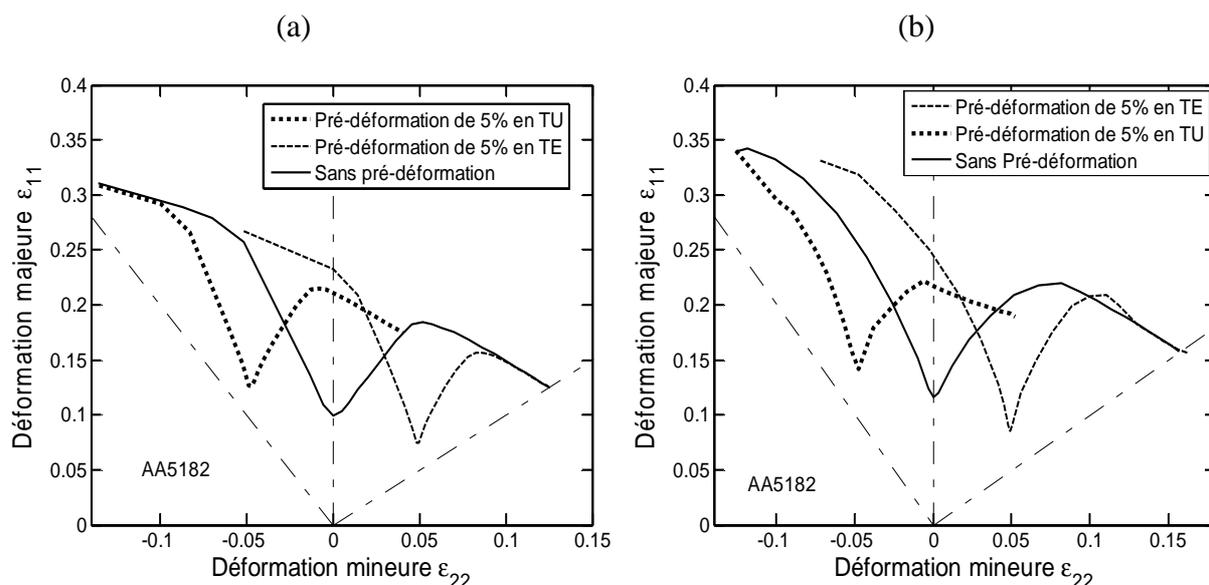


Figure 3.18 : Effet d'une pré-déformation sur la prédiction des limites de formage obtenues en considérant le modèle d'endommagement de Gurson-Tvergaard-Needleman (à gauche) et le modèle d'endommagement de (Benzerga & Besson, 2001) (à droite) couplés au critère de (Rice, 1976).

En ce qui concerne les changements de trajets de déformations qui se produisent de manière abrupte (c.-à-d. sans décharge élastique), les auteurs ont montré que les $CLF\sigma$ obtenues dans ce cas particulier, se différencient sensiblement des $CLF\sigma$ obtenues à partir d'un trajet linéaire. Néanmoins, lorsque la décharge élastique est prise en compte, il apparaît que les $CLF\sigma$ obtenues dans ce cas particulier, sont identiques à celles obtenues à partir d'un trajet de chargement linéaire. Les mêmes conclusions ont été obtenues dans (Yoshida & Suzuki, 2008) à partir d'une approche expérimentale. La Figure 3.18.a représente l'effet d'une pré-déformation sur la prédiction des limites de formage en considérant le modèle GTN pour l'alliage d'aluminium AA5182. On peut remarquer sur cette figure que les tendances expérimentales sont bien retrouvées, à savoir une translation de la CLF vers le domaine du rétreint lorsqu'on considère une pré-déformation en TU, alors que pour une pré-déformation en TE, on obtient une translation de la CLF vers le domaine de l'expansion. Les mêmes constats peuvent être faits en ce qui concerne le modèle d'endommagement anisotrope (voir Figure 3.18.b).

3.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la prédiction des courbes limites de formage à striction localisée à partir des modèles d'endommagement de Gurson-Tvergaard-Needleman et de (Benzerga & Besson, 2001), qui ont été couplés au critère de Perte d'Ellipticité (Rice, 1976). Dans un premier temps, une étude de sensibilité des limites de formage aux paramètres du modèle GTN a été réalisée. Il a été montré que les paramètres d'endommagement ont une influence considérable sur la prédiction des limites de formage. En ce qui concerne les paramètres liés à la loi d'écrouissage, nous avons constaté que ces derniers n'ont qu'un faible effet sur l'apparition de la localisation. Il s'avère que cette particularité soit liée à certains modèles d'endommagement reposant sur l'approche de

Gurson, étant donné que ces derniers ne permettent pas de reproduire un couplage entre endommagement et écrouissage. Notons que cette particularité associée aux modèles basés sur l'approche de Gurson a été déjà signalée dans les travaux de (Leblond et al., 1995), (Faleskog et al., 1998), (Pardoën & Delannay, 1998), bien que ces auteurs n'en discutent pas les conséquences sur la singularité du tenseur acoustique. Dans un second temps, on s'est intéressé à l'influence de l'anisotropie plastique sur l'apparition de la striction localisée pour différents matériaux métalliques à savoir un acier XES et un alliage d'aluminium AA5754. Il a été montré que les niveaux de déformation à striction localisée dépendent sensiblement du facteur d'anisotropie présent dans le critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001). En ce qui concerne les aciers XES et ULC-Ti, dont le facteur d'anisotropie est inférieur à deux, la prise en compte de l'anisotropie plastique donne des limites de ductilité plus basses que celles obtenues à partir du modèle d'endommagement isotrope classique (GTN). En revanche, c'est l'effet inverse qui a été constaté sur les différents alliages d'aluminium AA5182, AA5754 et AA6016, dont le facteur d'anisotropie plastique est supérieur à deux. Cet effet est principalement dû à un fort couplage entre anisotropie plastique initiale et endommagement. Ensuite, nous avons confronté les CLF obtenues à partir des modèles proposés dans ce travail à celles issues d'essais expérimentaux pour différents matériaux métalliques. D'une manière générale, la prise en compte de l'anisotropie plastique permet une meilleure prédiction des niveaux de déformation à striction localisée, comparée à celle obtenue à partir d'un modèle isotrope. Enfin, nous nous sommes intéressés à l'effet d'un changement de trajet de déformation sur la prédiction des limites de formage à partir de la modélisation précédente. Il apparaît que l'effet du changement de trajet de déformation sur les niveaux de déformation à striction localisée soit reproduit de manière correcte et correspond bien aux résultats issus de la littérature.

Chapitre 4 : Classification des critères de bifurcation et analyse des effets de non-normalité, d'anisotropie plastique et de présence d'un défaut initial

Sommaire

4.1	Introduction.....	144
4.2	Prédiction des différents modes d'instabilités plastiques, effet de la non-normalité de la loi d'écoulement.....	144
4.2.1	Analyse de l'apparition de la striction diffuse et localisée pour des trajets de chargements linéaires.....	145
4.2.2	Hiérarchisation théorique des critères basés sur l'Analyse de Bifurcation.....	147
4.3	Prédiction des courbes limites de striction diffuse.....	150
4.3.1	Influence des paramètres d'endommagement sur la prédiction de la striction diffuse.....	150
4.3.2	Effet des paramètres de la loi d'écrouissage.....	154
4.3.3	Effet de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction de la striction diffuse.....	156
4.4	Influence de la présence d'un défaut initial de type matériau sur l'apparition de la striction localisée.....	158
4.4.1	Bifurcation élastique/plastique, approche de (Rice & Rudnicki, 1980).....	158
4.4.2	Analyse de l'apparition des points de localisation sur une tôle contenant un défaut initial de type matériau.....	160
4.5	Analyse de l'influence des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies sur la prédiction des modes de striction diffuse et localisée.....	166
4.6	Conclusions.....	168

4.1 Introduction

Dans le précédent chapitre, nous avons étudié la prédiction des courbes limites de formage à striction localisée à partir d'un modèle de comportement reposant sur l'approche de Gurson couplée au critère de Perte d'Ellipticité. Dans le présent chapitre, on s'intéresse à l'apparition de la striction diffuse et localisée à partir du même modèle de comportement qui sera couplé aux différents critères reposant sur l'analyse de bifurcation, dont les fondements théoriques ont été présentés dans le premier chapitre. Dans un premier temps, on montre que selon le critère de germination considéré, le critère de Bifurcation Général peut être satisfait avant la stationnarité de l'effort appliqué. En d'autres termes, lorsque l'évolution de la porosité due à la germination est contrôlée par la contrainte, les critères de (Hill, 1958) et de (Valanis, 1989) donnent des points de bifurcation sensiblement différents. En revanche, lorsque l'évolution de la porosité due à la germination est contrôlée par la déformation plastique équivalente, les deux précédents critères (i.e. Bifurcation Générale et Bifurcation par Point Limite) prédisent l'apparition de la striction diffuse de façon quasi simultanée¹. Le même constat sera également fait en ce qui concerne les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte. Nous proposons une hiérarchisation de ces critères qui permettra de justifier les différents résultats obtenus, lorsque le taux de porosité due à l'amorçage des cavités est contrôlé par la contrainte principale maximale ou bien par la déformation plastique équivalente. Dans la seconde partie de ce chapitre, on étudie l'effet des différents paramètres intervenant dans le modèle de comportement sur la prédiction des courbes limites à striction diffuse. On montrera en particulier que, contrairement à la striction localisée, l'utilisation du critère de Bifurcation Générale couplé à un modèle d'endommagement de Gurson permet de reproduire des CLF à striction diffuse qui dépendent sensiblement des paramètres d'écroutissage. On discutera également l'effet de la prise en compte de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction des CLF à striction diffuse ainsi que l'influence de la présence d'un défaut initial lié à une concentration des sites d'endommagement. Ce chapitre est clôturé par une analyse des effets des termes convectifs dus au formalisme de transformations finies sur la prédiction des points de bifurcation associés à la striction diffuse et localisée.

4.2 Prédiction des différents modes d'instabilités plastiques, effet de la non-normalité de la loi d'écoulement

Nous avons vu au chapitre 2 que l'évolution de la porosité due à la germination peut être reliée à la déformation plastique microscopique (c.-à-d., ε_M^p) ou bien à la contrainte principale maximale à l'intérieur ou au voisinage de l'inclusion (c.-à-d., σ^{\max}). L'approche qui a été considérée jusqu'à présent consiste à relier le taux de porosité due à la germination des cavités à la déformation plastique équivalente à travers une loi Gaussienne traduisant l'effet probabiliste du phénomène de germination (Chu & Needleman, 1980), (Tvergaard, 1990). Ce choix a été principalement motivé par le fait que les paramètres matériau que nous avons pris de la littérature ont été identifiés en considérant cette approche. D'autre part, nous avons montré dans le chapitre 2 que lorsque le taux de porosité due à la germination dépend de la contrainte principale maximale, on obtient un effet de non-normalité de la loi

¹ Ceci se produit lorsque les termes non-symétriques de l'opérateur tangent (i.e., termes convectifs) sont faibles.

d'écoulement. Cette non-normalité provient du terme lié à la contrainte hydrostatique présent dans le critère d'amorçage de (Argon et al., 1975) ou encore celui de (Beremin, 1981). Dans ce cas, l'opérateur tangent perd sa symétrie, indépendamment des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies.

4.2.1 Analyse de l'apparition de la striction diffuse et localisée pour des trajets de chargements linéaires

Dans ce paragraphe, on commence par rappeler l'expression de la loi d'évolution de la porosité due à la germination \dot{f}_n que nous avons considérée dans ce travail. Conformément à l'approche proposée dans (Chu & Needleman, 1980), (Tvergaard, 1990), la variable \dot{f}_n peut être reliée au taux de déformation plastique équivalente microscopique $\dot{\varepsilon}_M^p$ ou bien au taux de contrainte principale maximale $\dot{\sigma}^{\max}$ tel que :

$$\dot{f}_n = \mathcal{A}_N \dot{\sigma}_M + \mathcal{B}_N \dot{\Sigma}_m \quad (4.1)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_N = \frac{f_N}{\mathcal{H}_{\sigma_M} s_N^\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s_N^\varepsilon}\right)^2\right) & \text{et } \mathcal{B}_N = 0 \quad \text{pour } \dot{\varepsilon}_M^p > 0 \\ \mathcal{A}_N = \kappa^B \mathcal{B}_N = \frac{\kappa^B f_N}{s_N^\varepsilon \sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^{\max} - \sigma_N}{s_N^\varepsilon \sigma_0}\right)^2\right) & \text{pour } \dot{\sigma}^{\max} > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

où $\mathcal{H}_{\sigma_M} = \partial\sigma_M / \partial\varepsilon_M^p$. Lorsque $\mathcal{A}_N \neq 0$ et $\mathcal{B}_N = 0$, l'amorçage est contrôlé par la déformation plastique équivalente microscopique, alors que pour $\mathcal{A}_N = \kappa^B \mathcal{B}_N \neq 0$, l'amorçage est contrôlé par la contrainte principale maximale à l'intérieur ou au voisinage de l'interface inclusion-matrice. Nous avons vu également que le potentiel \mathcal{B}_N est responsable de la non-symétrie du module tangent analytique et d'un effet de non-normalité de la loi d'écoulement. L'objet de cette étude n'est pas d'analyser l'effet de la prise en compte de la non-normalité de la loi d'écoulement sur le comportement en général, mais plutôt d'analyser son influence sur la prédiction des différents modes d'instabilités plastiques. Compte tenu de la définition du potentiel \mathcal{B}_N (voir relation (4.2)), ce dernier varie sensiblement au cours du chargement et peut éventuellement tendre vers zéro (e.g., lorsque $\sigma^{\max} \gg \sigma_N$). Dans cette section, nous considérons uniquement les paramètres de l'acier XES, qui semblent assurer que la fonction \mathcal{B}_N ne s'annule pas au cours du chargement, ce qui permet d'autre part d'assurer la non-symétrie de l'opérateur tangent. Pour ce matériau, le paramètre σ_N a été calculé en utilisant la loi d'écrouissage de Swift, tel que $\sigma_N = \sigma_M(\varepsilon_N)$, où ε_N représente la déformation plastique équivalente microscopique identifiée dans (Brunet et al., 1998). Le reste des paramètres d'écrouissage et d'endommagement sont identiques à ceux utilisés pour l'acier XES et sont donnés dans les Tableaux 3.1 et 3.2 du chapitre 3. La Figure 4.1 illustre l'évolution de la courbe de comportement pour un trajet de chargement en traction uniaxiale. Les différents

points de bifurcation donnés sur ces deux figures montrent en particulier que lorsque la normalité de la loi d'écoulement est vérifiée, les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite donnent des points quasiment identiques. De même, les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte prédisent l'apparition de la striction localisée quasiment en même temps.

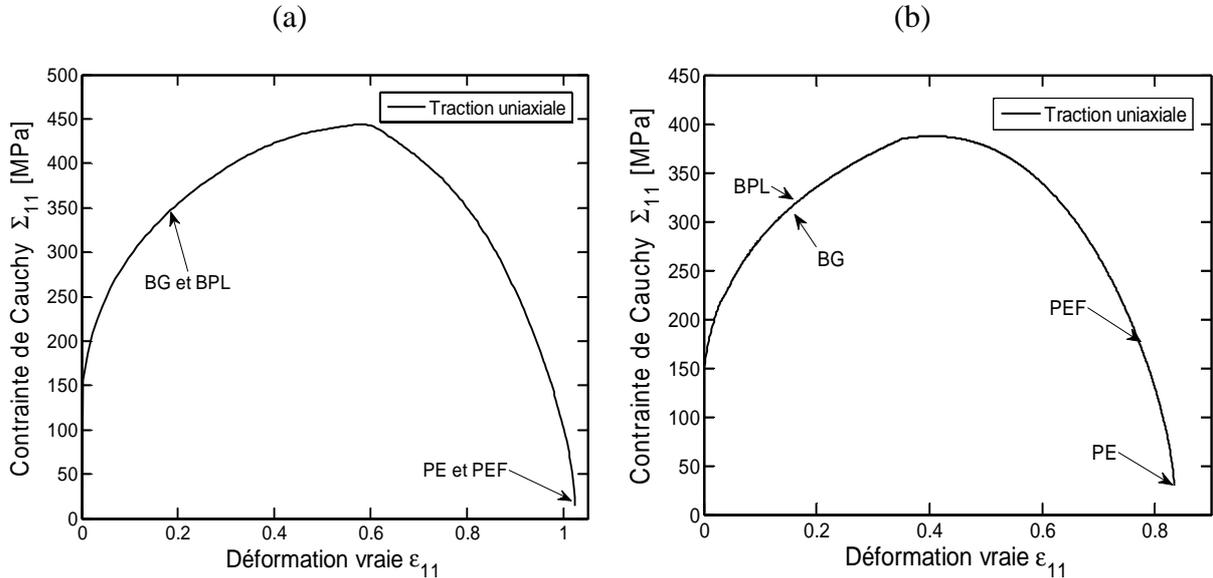


Figure 4.1 : Différents points de bifurcation obtenus en utilisant le modèle GTN avec porosité de germination contrôlée par la déformation plastique équivalente (a) ou par la contrainte principale maximale (b). Courbes de comportement pour un chargement en traction uniaxiale.

Toutefois, lorsque $\dot{f}_n = \dot{f}_n(\sigma^{\max})$ (c.-à-d. lorsque la normalité de la loi d'écoulement n'est plus vérifiée), les différents points de bifurcation obtenus à partir des quatre critères considérés sont tous différents.

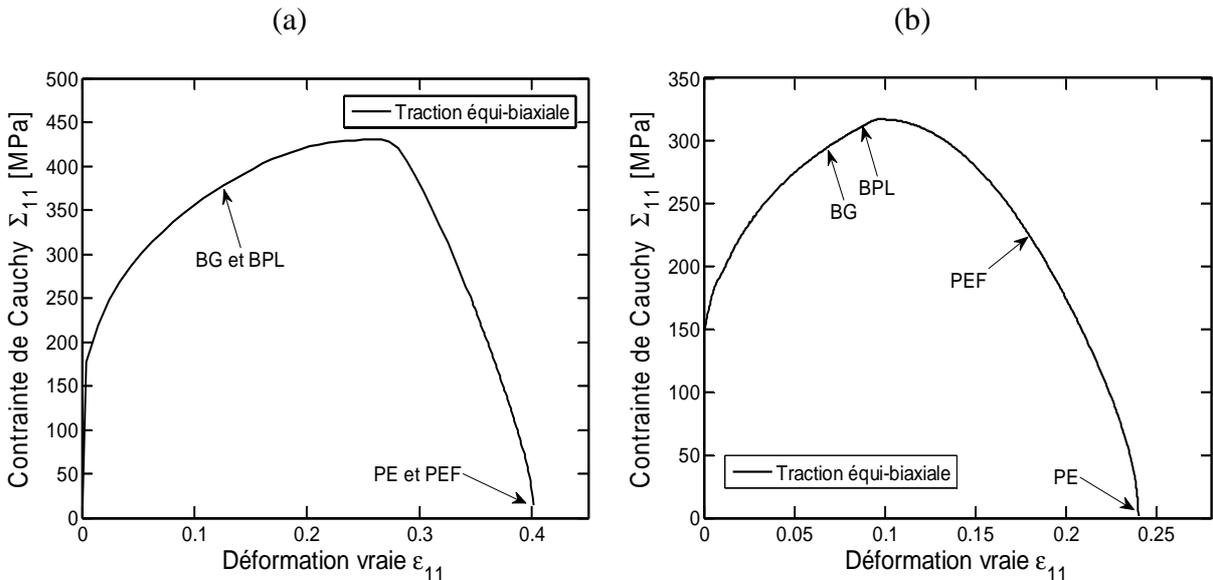


Figure 4.2 : Différents points de bifurcation obtenus en utilisant le modèle GTN avec porosité de germination contrôlée par la déformation plastique équivalente (a) ou par la contrainte principale maximale (b). Courbes de comportement pour un chargement en traction équi-biaxiale.

Les mêmes constats peuvent être faits pour un trajet de chargement en traction équi-biaxiale (voir Figure 4.2). On donne également les courbes limites de formage à striction diffuse et localisée obtenues à partir des quatre critères de bifurcation. On peut constater sur la Figure 4.3.a que les CLF à striction diffuse obtenues à partir des critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite sont quasiment confondues lorsque la normalité de la loi d'écoulement est vérifiée. Dans le cas de non-normalité de la loi d'écoulement (voir Figure 4.3.b), l'unicité de la solution peut être perdue avant la singularité du module $\underline{\underline{L}}^B$. D'autre part, le critère de Bifurcation par Point Limite prédit des niveaux de déformations critiques plus hauts que ceux obtenus à partir du critère de Bifurcation Générale lorsque la normalité de la loi d'écoulement n'est plus vérifiée. Les mêmes constats peuvent être faits au sujet des critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte.

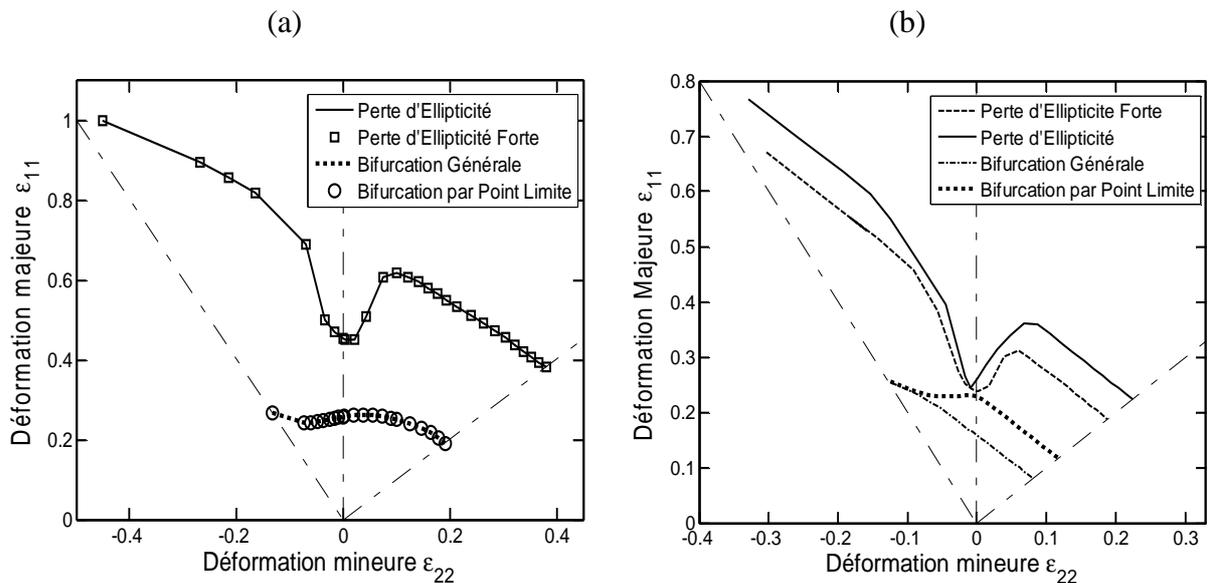


Figure 4.3 : Courbes limites de formage à striction diffuse et localisée. Analyse de l'effet d'une non-normalité de la loi d'écoulement sur la prédiction des différents modes de striction.

4.2.2 Hiérarchisation théorique des critères basés sur l'Analyse de Bifurcation

Nous avons vu dans le précédent paragraphe que les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite prédisent l'apparition de la striction diffuse de manière quasi simultanée lorsqu'on considère un critère de germination contrôlée par la déformation plastique équivalente. En revanche, lorsque la germination des cavités est contrôlée par la contrainte équivalente microscopique, les niveaux de déformation à striction diffuse obtenus à partir de ces deux critères sont sensiblement différents. L'objet de ce paragraphe est de montrer que ces résultats sont cohérents d'un point de vue théorique en indiquant les raisons susceptibles d'être à l'origine des différences observées. En d'autres termes, on montre qu'il est possible d'établir une hiérarchisation théorique des différents critères de striction diffuse et localisée reposant sur l'Analyse de Bifurcation, permettant de justifier les résultats obtenus précédemment. Nous commençons par faire un bref rappel des critères discutés dans le premier chapitre qui ont été développés dans le but de prédire, d'une part, la striction diffuse (i.e. Bifurcation Générale et Bifurcation par Point Limite) et, d'autre part, la striction localisée

(i.e. Perte d'Ellipticité et Perte d'Ellipticité Forte). Sous forme locale, le critère de Bifurcation Générale est donné par (voir Chapitre 1) :

$$\Delta \dot{\underline{\mathbf{F}}} : \underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}} : \Delta \dot{\underline{\mathbf{F}}} \geq 0 \Rightarrow \min_{sp(\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}^s})} \left(\lambda_i \left(\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}^s} \right) \right) \geq 0 \quad (4.3)$$

où $\dot{\underline{\mathbf{F}}}$ désigne la dérivée temporelle du gradient de transformation, $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}$ le module tangent élasto-plastique défini au chapitre 1, et $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}^s}$ la partie symétrique de l'opérateur tangent $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}$. Concernant le critère de Bifurcation par Point Limite, ce dernier est associé à la stationnarité du tenseur de contrainte de Boussinesq tel que (voir Chapitre 1) :

$$\dot{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}} \left(\dot{\underline{\mathbf{F}}} \right) : \dot{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \det \left(\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Ces deux dernières relations montrent que le critère de Bifurcation Générale est associé à une perte de définie positivité de la partie symétrique de l'opérateur tangent $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}$. Autrement dit, l'unicité de la solution du problème aux valeurs limites incrémental est garantie tant que la plus petite valeur propre du tenseur $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}^s}$ est strictement positive. En revanche, le critère de Bifurcation par Point Limite est associé à la singularité de $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}$, et donc l'exclusion de ce type de bifurcation est assurée par la non-nullité du déterminant de l'opérateur tangent $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{B}}$. Pour ce qui est de la prédiction de la striction localisée, nous avons vu que le critère de Perte d'Ellipticité Forte s'écrivait sous la forme (Bigoni & Zaccaria, 1992) :

$$\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{g}} : \underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{N}} : \underline{\mathbf{g}} \otimes \underline{\mathbf{n}} > 0, \quad \forall \underline{\mathbf{g}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \quad \|\underline{\mathbf{n}}\| = 1 \quad (4.5)$$

alors que le critère de Perte d'Ellipticité est donné par (Rice, 1976) :

$$\exists \underline{\mathbf{g}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \quad \|\underline{\mathbf{n}}\| = 1, \quad \text{tel que } \left(\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \cdot \underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (4.6)$$

où $\underline{\mathbf{g}}$ désigne le vecteur discontinuité de vitesse, $\underline{\mathbf{n}}$ le vecteur unitaire normal à la bande de localisation et $\underline{\mathcal{L}}^{\mathbf{N}}$ l'opérateur tangent écrit en configuration Lagrangienne actualisée. Les relations (4.5) et (4.6) indiquent en particulier que le critère de Perte d'Ellipticité Forte est associé à la définie positivité de la partie symétrique $\underline{\mathcal{A}}^s$ du tenseur acoustique $\underline{\mathcal{A}}$, alors que le critère de Perte d'Ellipticité est associé à la singularité du tenseur acoustique $\underline{\mathcal{A}}$. Les relations (4.5) et (4.6) peuvent donc se réécrire, respectivement, sous la forme :

$$\min_{sp(\underline{\mathcal{A}}^s)} \left(\lambda_i \left(\underline{\mathcal{A}}^s \right) \right) \geq 0 \quad (4.7)$$

$$\det(\underline{\mathcal{A}}) = 0 \quad (4.8)$$

où $\lambda_i \left(\underline{\mathcal{A}}^s \right)$, $i=1,3$ désignent l'ensemble des valeurs propres de la partie symétrique du tenseur acoustique. Afin de hiérarchiser les critères définis par les relations (4.3), (4.4), (4.5)

et (4.6), on se sert d'une propriété d'algèbre linéaire qui s'énonce comme suit (voir (Mirsky, 1958) pour la démonstration) :

Propriété : Soit \mathcal{M} une matrice et \mathcal{M}^s sa partie symétrique définie par $\mathcal{M}^s = (\mathcal{M} + \mathcal{M}^T) / 2$, tel que \mathcal{M}^T désigne la transposée de \mathcal{M} . Si on note $\lambda_i^{\mathcal{M}}$ et $\lambda_i^{\mathcal{M}^s}$ les valeurs propres associées, respectivement, aux matrices \mathcal{M} et \mathcal{M}^s , alors on a :

$$\min_{sp(\mathcal{M}^s)} \left(\lambda_i^{\mathcal{M}^s} \right) \leq \Re_{sp(\mathcal{M})} \left(\lambda_i^{\mathcal{M}} \right) \leq \max_{sp(\mathcal{M}^s)} \left(\lambda_i^{\mathcal{M}^s} \right) \quad (4.9)$$

où \Re représente la partie réelle. À partir de cette dernière relation, on peut déduire que :

$$\min_{sp(\underline{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}^s})} \left(\lambda_i \left(\underline{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}^s} \right) \right) \leq \Re_{sp(\underline{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}})} \left(\lambda_i \left(\underline{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}} \right) \right) \quad (4.10)$$

$$\min_{sp(\underline{\mathcal{A}}^s)} \left(\lambda_i \left(\underline{\mathcal{A}}^s \right) \right) \leq \Re_{sp(\underline{\mathcal{A}})} \left(\lambda_i \left(\underline{\mathcal{A}} \right) \right) \quad (4.11)$$

Les valeurs propres des tenseurs $\underline{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}^s}$ et $\underline{\mathcal{A}}^s$ étant initialement positives, la propriété précédente indique que tant que ces tenseurs restent définis positifs, les parties réelles des valeurs propres des tenseurs $\underline{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}}$ et $\underline{\mathcal{A}}$ restent également positives. La singularité du tenseur $\underline{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}}$ ou $\underline{\mathcal{A}}$ est atteinte après la perte de définie positivité du tenseur $\underline{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}^s}$ ou $\underline{\mathcal{A}}^s$, respectivement. Les critères de Bifurcation par Point Limite et de Perte d'Ellipticité sont donc, respectivement, moins conservatifs que les critères de Bifurcation Générale et de Perte d'Ellipticité Forte. Les inégalités (4.10) et (4.11) montrent par ailleurs que lorsque le module tangent intervenant dans ces critères est symétrique, ce qui est obtenu ici en considérant une règle de normalité ($\dot{f}_n = \dot{f}_n(\dot{\epsilon}_M^p)$) et en ignorant les termes convectifs de contraintes provenant du formalisme des grandes transformations, alors le critère de B.G. (respectivement P.E.F.) donne un point de bifurcation identique au point de bifurcation obtenu à partir du critère de B.P.L. (respectivement P.E.). D'autre part, lorsque le module tangent perd sa symétrie (ex. par non-normalité de l'écoulement $\dot{f}_n = \dot{f}_n(\dot{\sigma}_M)$), alors le critère de B.G. (respectivement P.E.F.) donne des points de bifurcation plus conservatifs que ceux obtenus à partir du critère de B.P.L. (respectivement P.E.). À noter que l'on peut également rencontrer le cas d'une non-symétrie du module tangent résultant uniquement des termes convectifs de contraintes, la partie principale donnée par le module tangent analytique étant quant à elle symétrique, avec néanmoins des prédictions quasi identiques entre les critères B.G. et B.P.L., d'une part, et les critères P.E.F. et P.E., d'autre part. C'est la situation notamment illustrée par les résultats des Figures 4.1.a, 4.2.a et 4.3.a. Dans ce cas, les prédictions données par les quatre critères sont toujours cohérentes avec les bornes données par les relations (4.10) et (4.11) et la classification qui en découle. L'interprétation que l'on peut donner à cette coïncidence des prédictions est que les termes convectifs de contraintes responsables de la non-symétrie du module tangent ne sont pas assez importants pour induire un effet perceptible dans les prédictions.

4.3 Prédiction des courbes limites de striction diffuse

Dans le précédent chapitre, nous avons analysé l'influence des différents paramètres du modèle de comportement considéré sur la prédiction des courbes limites de formage à striction localisée. Nous avons vu que les paramètres liés à l'endommagement ont une influence considérable sur les niveaux de déformation à striction localisée contrairement aux paramètres liés à la loi d'érouissage. En outre, il a été montré que ces résultats sont dus principalement aux modèles d'endommagement qui découlent de l'approche de Gurson. En effet, ce type de modèles de comportement ne permet pas de prendre en compte le couplage entre l'évolution de la variable d'endommagement et l'érouissage de la matrice. Cette limitation, déjà montrée dans (Leblond et al., 1995), a été analysée un peu plus dans notre étude en donnant des conclusions quant à l'effet de l'érouissage sur la singularité du tenseur acoustique lorsqu'on considère un modèle de comportement reposant sur l'approche de Gurson. L'influence de l'anisotropie plastique initiale de la matrice sur la prédiction des CLF à striction localisée a également été étudiée à partir du modèle de comportement de (Benzerga & Besson, 2001). Il a été montré que l'apparition de la striction localisée dépend sensiblement du facteur d'anisotropie présent dans le critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001).

Dans la partie qui va suivre, on étudie l'effet des principaux paramètres du modèle de comportement décrit dans les deux premiers chapitres sur la prédiction des CLF à striction diffuse à partir du critère de Bifurcation Générale. De manière analogue à ce qui a été proposé dans le précédent chapitre, nous commençons par étudier l'influence de l'endommagement sur l'apparition de la striction diffuse. Ensuite, on étudiera l'effet de l'érouissage de la matrice et enfin celui de l'anisotropie plastique initiale. Nous allons voir, en particulier, que l'influence de l'érouissage sur la prédiction du premier point de bifurcation (Bifurcation Générale) diffère sensiblement de celle constatée à partir du critère de Perte d'Ellipticité.

4.3.1 Influence des paramètres d'endommagement sur la prédiction de la striction diffuse

4.3.1.1 Influence des paramètres liés à la germination des cavités

Les Figures 4.4.a à 4.4.f illustrent l'influence des paramètres liés à la germination des cavités² sur la prédiction des courbes limites de formage à striction diffuse pour l'alliage d'aluminium AA5182 et l'acier XES. On peut remarquer sur ces figures que l'augmentation de la densité des inclusions f_N ou la diminution de la déformation plastique ε_N a pour conséquence de réduire les niveaux de déformation à striction diffuse. L'effet de ces paramètres est très prononcé en ce qui concerne l'alliage d'aluminium AA5182 étant donné que la porosité critique identifiée pour ce matériau est très faible ($f_c = 2,13 \times 10^{-3}$, voir le précédent chapitre). Notons également que les tendances illustrées sur les Figures 4.4.a à 4.4.d sont en accord avec l'interprétation physique de ces deux paramètres. En ce qui concerne l'écart type s_N^ε , nous avons montré dans le chapitre précédent qu'il n'est pas possible de donner une tendance générale pour l'influence de ce paramètre quelle que soit la valeur de ε_N .

² On suppose ici que la germination est contrôlée par la déformation plastique équivalente microscopique.

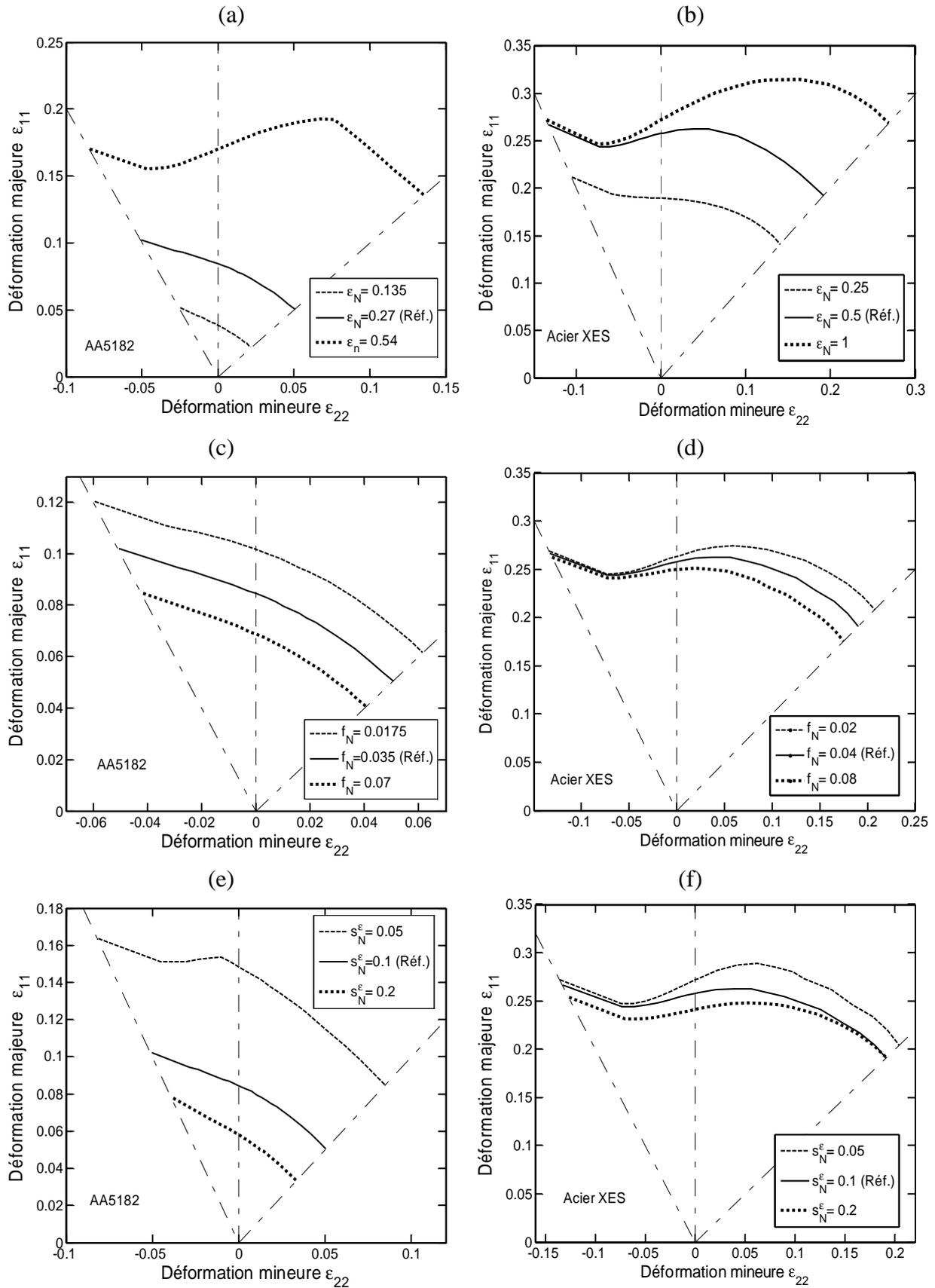


Figure 4.4 : Influence des paramètres de germination sur la prédiction des courbes limites de formage à striction diffuse.

Il a été montré que ceci est dû au fait que l'évolution de la fonction \mathcal{A}_N n'est pas monotone. En d'autres termes, si la localisation (Perte d'Ellipticité) apparaît dans l'intervalle $\varepsilon_M^p \in [0, \varepsilon_N - s_N^\varepsilon] \cup [s_N^\varepsilon + \varepsilon_N, +\infty]$, alors l'augmentation du paramètre s_N^ε mènera à des niveaux de déformation à striction localisée plus bas. Dans le cas contraire, c'est plutôt l'effet inverse qui est retrouvé. Les tendances illustrées sur les Figures 4.4.e et 4.4.f montrent qu'en général la diminution du paramètre s_N^ε conduit à des niveaux de déformation à striction diffuse plus élevés. Toutefois, une exception est rencontrée en ce qui concerne l'acier XES pour un trajet de chargement en traction équi-biaxiale. En effet, on peut remarquer sur la Figure 4.4.f que l'augmentation de l'écart type s_N^ε ne donne pas systématiquement des niveaux de déformation à striction diffuse strictement plus bas quel que soit le trajet de chargement considéré. Pour mieux comprendre ce point et l'interpréter, nous traçons dans les Figures 4.5.a et 4.5.b l'évolution de la porosité en fonction de la déformation plastique équivalente microscopique pour l'acier XES jusqu'au point de striction diffuse pour un trajet de chargement en traction uniaxiale et équi-biaxiale, respectivement. On remarque sur ces figures que la perte de définie positivité de l'opérateur $\mathcal{L}_{\approx}^{bS}$ apparaît dans l'intervalle $\varepsilon_M^p \in [\varepsilon_N - s_N^\varepsilon, \varepsilon_N + s_N^\varepsilon]$ pour un trajet de chargement en traction équi-biaxiale, alors que pour un chargement en traction uniaxiale, elle apparaît dans l'intervalle $\varepsilon_M^p \in [s_N^\varepsilon + \varepsilon_N, +\infty]$. Par conséquent, conformément à ce qui a été discuté au chapitre précédent, il est difficile de donner une tendance globale en ce qui concerne l'influence de l'écart type sur l'évolution de la variable d'endommagement, en particulier, et sur l'apparition de la striction diffuse et localisée d'une manière générale.

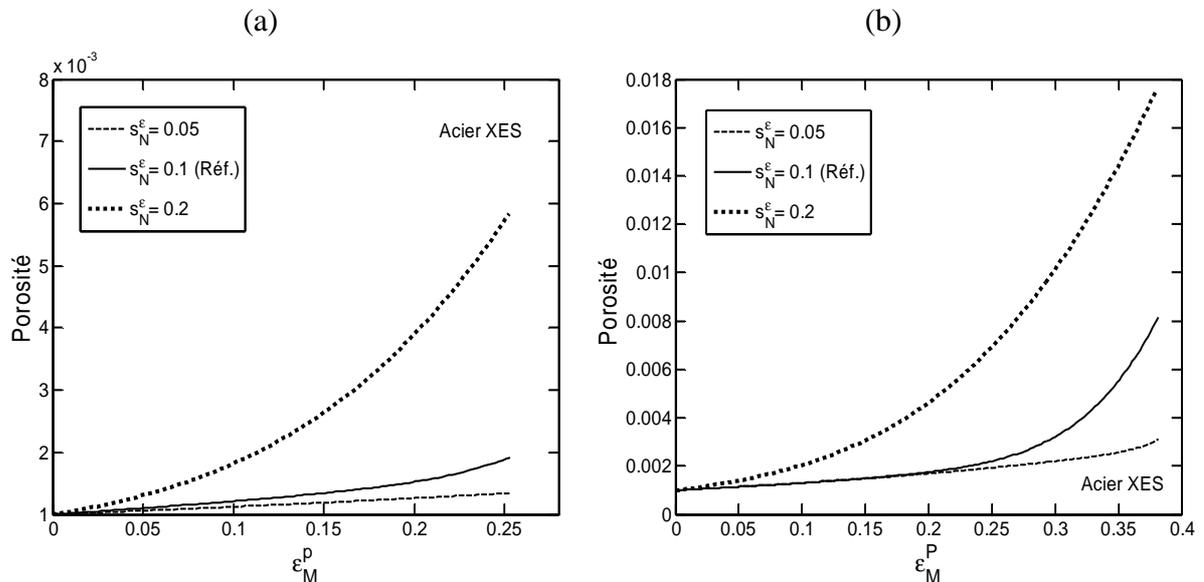


Figure 4.5 : Evolution de la porosité en fonction de la déformation plastique équivalente microscopique. (a) Trajet de chargement en traction uniaxiale. (b) Trajet de chargement en traction équi-biaxiale.

4.3.1.2 Influence de la porosité initiale et des paramètres liés à la coalescence des cavités

On étudie à présent l'influence de la porosité initiale ainsi que celle des deux paramètres intervenant dans la loi d'évolution de la porosité effective sur la prédiction des niveaux de déformation à striction diffuse. Nous avons vu dans le précédent chapitre que l'augmentation de la porosité initiale conduit à des CLF à striction localisée plus basses, ce qui est cohérent avec l'interprétation physique de ce paramètre. Les Figures 4.6.a et 4.6.b illustrent l'effet de la porosité initiale sur la prédiction des CLF à striction diffuse.

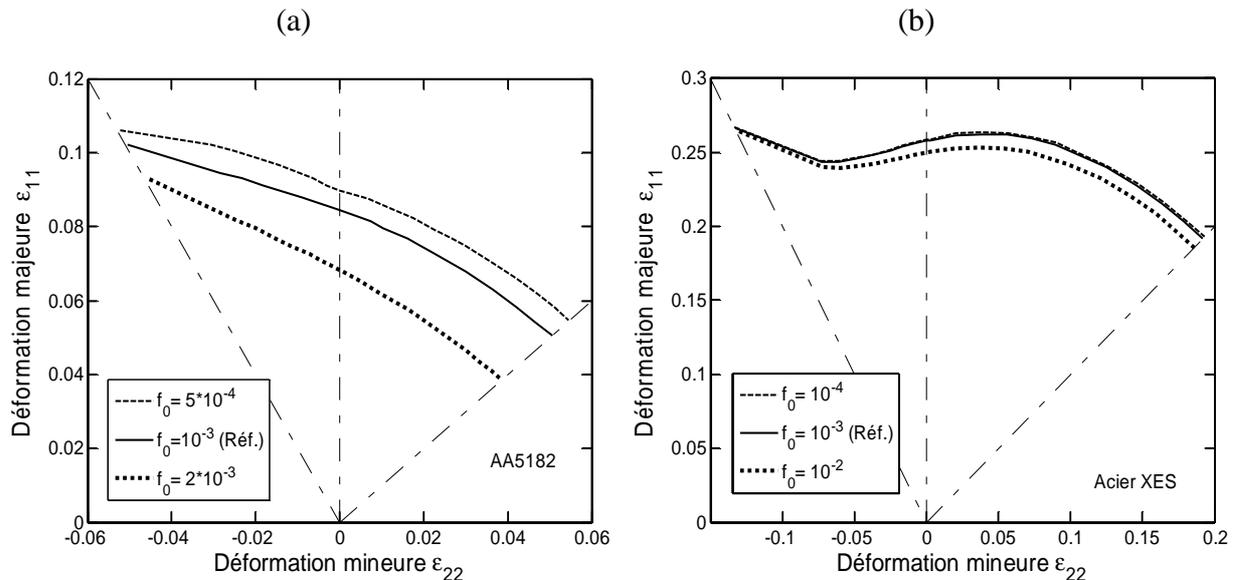


Figure 4.6 : Influence de la porosité initiale sur la prédiction des courbes limites de formage à striction diffuse.

On peut constater sur ces deux figures que l'augmentation de la porosité initiale a pour effet de diminuer les niveaux de déformation à striction diffuse bien que pour l'acier XES, cet effet est beaucoup moins prononcé comparé à l'alliage d'aluminium AA5182. Cette différence semble provenir du fait que la porosité critique correspondant à l'alliage d'aluminium AA5182 est très faible, ce qui induit une évolution trop forte et précoce de l'endommagement. La Figure 4.7 illustre l'influence des paramètres de coalescence, f_c et δ_A , sur la prédiction des niveaux de déformation à striction diffuse. Rappelons que ces deux paramètres représentent, respectivement, la porosité critique pour laquelle on considère l'entrée en régime de coalescence et le facteur d'accélération de croissance. D'une manière générale, les différents travaux de la littérature qui s'appuient sur des approches expérimentales montrent que la stationnarité de l'effort, dans le cas d'une traction uniaxiale, apparaît bien avant la jonction des cavités par coalescence. Cette dernière est la plupart du temps associée à la chute brutale de l'effort appliqué (voir e.g. (Thomson & Hancock, 1984), (Besson et al., 2003), (Li et al., 2011)). Ceci peut être également confirmé à partir de simulations numériques par éléments finis sur des V.E.R à base hexagonale contenant une ou plusieurs cavités (Thomson et al., 2003). Ainsi, on s'attend à retrouver des niveaux de déformation à striction diffuse quasi indépendants des paramètres de coalescence et en particulier du facteur d'accélération de croissance δ_A . On peut remarquer sur la Figure 4.7, qu'en ce qui concerne l'alliage

d'aluminium AA5182, les paramètres de coalescence ont une influence considérable, alors que pour l'acier XES leur influence est négligeable. Rappelons, que la porosité critique correspondant à l'alliage AA5182 et qui a été identifiée dans les travaux de (Brunet et al., 1998) est très faible comparée à celle obtenue à partir des critères de coalescence analytiques de (Thomason, 1985) et de (Perrin, 1992).

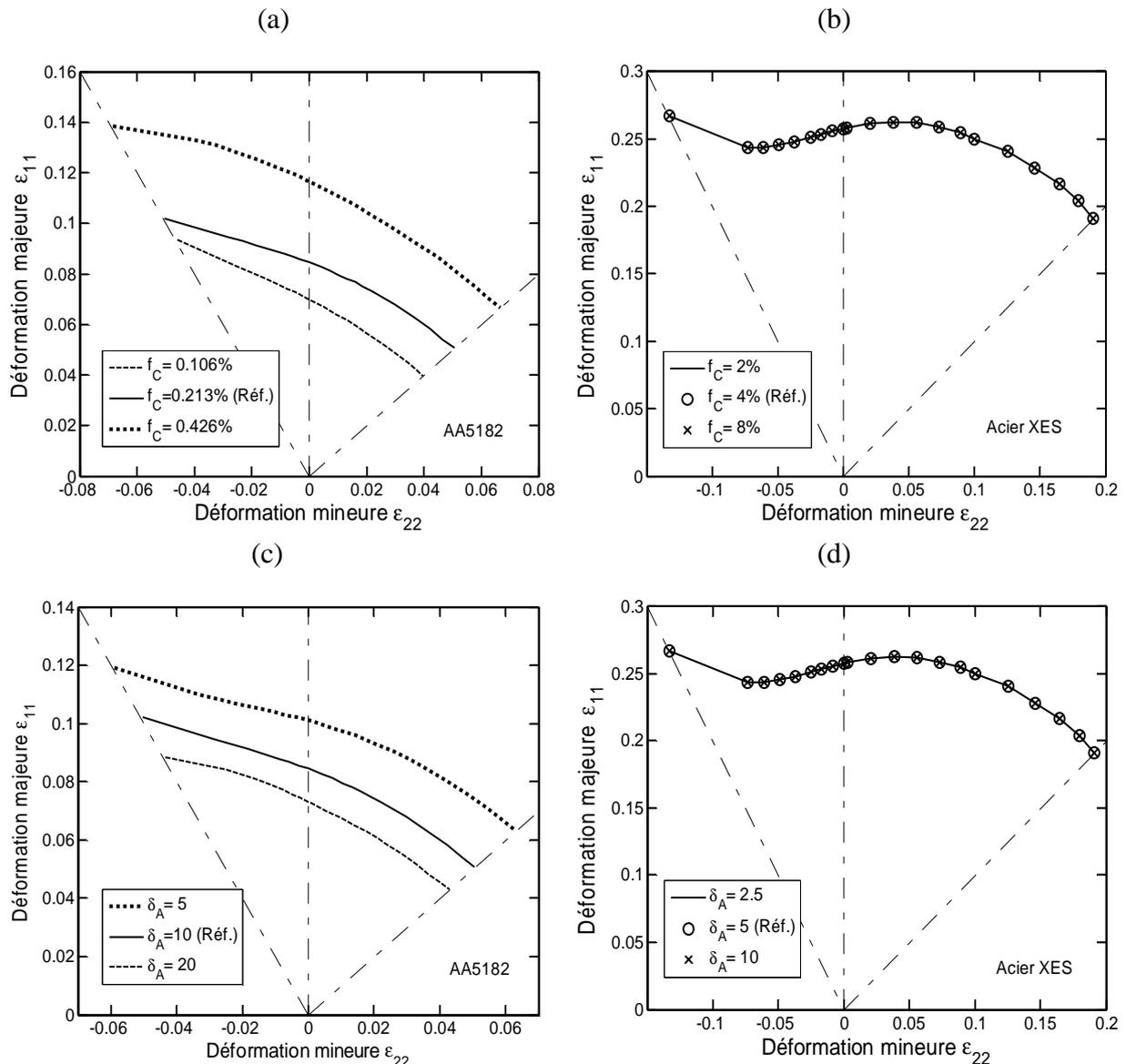


Figure 4.7 : Influence des paramètres de coalescence sur la prédiction de la striction diffuse.

C'est là l'un des avantages que procurent les critères de striction diffuse lorsqu'ils sont couplés à des modèles de comportement reposant sur une approche micromécanique. En effet, outre la détermination de bornes supérieures de déformations à ne pas dépasser lors d'identification des paramètres par des essais simples (essais mécaniques homogènes), ces critères permettent par ailleurs de juger de la pertinence des paramètres identifiés.

4.3.2 Effet des paramètres de la loi d'érouissage

Il a été montré dans le précédent chapitre que les modèles de plasticité reposant sur l'approche de Gurson couplés au critère de bifurcation de (Rice, 1976) mènent à des niveaux

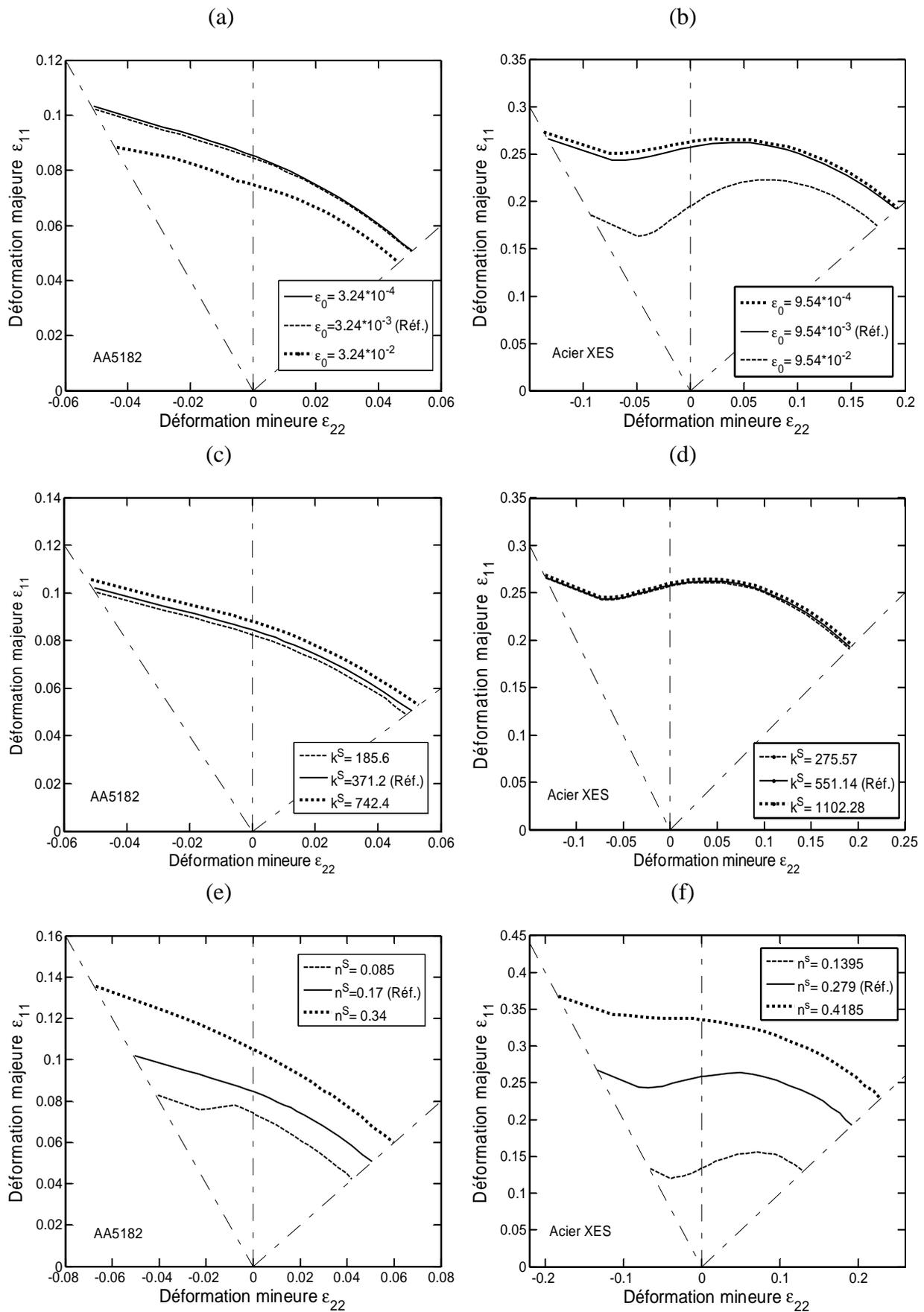


Figure 4.8 : Influence des paramètres d'érouissage de la loi de Swift sur la prédiction des courbes limites de formage à striction diffuse.

de déformation à striction localisée qui dépendent peu des paramètres de la loi d'érouissage. Il a été mentionné par ailleurs que ces tendances ne sont pas tout à fait conformes à celles issues des travaux de la littérature, obtenues à partir de différents critères de localisation analytiques, y compris le critère de Perte d'Ellipticité. Nous avons montré que ceci est dû au fait que l'évolution de la porosité est complètement découplée de la loi d'érouissage considérée ainsi que des paramètres associés à cette loi. Contrairement au critère de Perte d'Ellipticité, la prédiction des CLF à striction diffuse à partir des critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite ne nécessite pas la présence d'effets déstabilisants tels que l'endommagement ou la présence de points de vertex sur la surface de charge. En effet, la singularité du module tangent $\underline{\mathcal{L}}^B$ (ou de sa partie symétrique $\underline{\mathcal{L}}^{B^S}$) est liée à la stationnarité du tenseur de contrainte nominale. Par conséquent, on s'attend à ce que la striction diffuse soit sensible aux paramètres d'érouissage. La Figure 4.8 illustre l'effet des paramètres de la loi d'érouissage de Swift sur les niveaux de déformation à striction diffuse. On peut constater à partir de cette figure, qu'en dépit du fait que l'évolution de la variable d'endommagement soit indépendante de l'érouissage de la matrice, l'apparition de la striction diffuse dépend sensiblement des paramètres de la loi d'érouissage. Les tendances que l'on observe généralement à partir des critères de striction diffuse de Swift (Swift, 1952) ou de striction localisée de Hill'52 (Hill, 1952), Hora'96 (Hora et al., 1996) sont retrouvées, à savoir une augmentation des niveaux de déformation à striction lorsque l'exposant de la loi d'érouissage augmente.

4.3.3 Effet de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction de la striction diffuse

L'influence de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction des CLF à striction localisée a été étudiée dans le précédent chapitre. Comme déjà discuté, les travaux de la littérature montrent que la prise en compte de l'anisotropie plastique a un impact considérable sur les niveaux de déformation à striction localisée, en particulier dans le domaine de l'expansion. Plus précisément, les niveaux de déformations à striction localisée issus d'un modèle de comportement anisotrope sont presque toujours plus bas (en particulier dans le domaine de l'expansion) que ceux obtenus à partir d'un modèle de plasticité isotrope. Cependant, les tendances obtenues dans le précédent chapitre ne sont pas toujours identiques à celles discutées dans la littérature et dépendent du facteur d'anisotropie plastique \mathcal{H}^{BB} qui apparaît dans le critère de plasticité de (Benzerga & Besson, 2001). En effet, pour tous les alliages d'aluminium étudiés dans ce travail, la prise en compte de l'anisotropie plastique conduit à des limites de ductilité plus hautes que celles obtenues à partir du modèle isotrope, alors que ces tendances sont inversées pour les aciers XES et ULC-Ti. Il existe en fait peu de travaux traitant de l'influence de l'anisotropie plastique initiale sur la prédiction des courbes limites de striction diffuse, en particulier lorsqu'ils sont issus d'une approche expérimentale. Par conséquent, nous allons nous restreindre ici à des résultats numériques conformément à ce qui a été fait dans les précédents paragraphes. La Figure 4.9 illustre les niveaux de déformation à striction diffuse pour différents trajets de chargement obtenus à partir des modèles d'endommagement isotrope et anisotrope. Pour les trois alliages d'aluminium AA5182, AA5754 et AA6016, le facteur d'anisotropie \mathcal{H}^{BB} a une valeur supérieure à deux, alors que

pour l'acier XES la valeur de \mathcal{H}^{BB} est inférieure à deux. On peut remarquer sur ces figures que l'influence de l'anisotropie plastique initiale est plus prononcée dans le domaine de l'expansion pour les trois alliages d'aluminium contrairement à l'acier XES, où l'on observe une influence plus importante au voisinage d'un chargement en traction plane. Or c'est dans le domaine de l'expansion et en particulier au voisinage d'un chargement en TE que l'évolution de l'endommagement est la plus prononcée, puisque la croissance des cavités est proportionnelle à la triaxialité des contraintes. Ainsi, contrairement à la striction localisée, il est difficile de donner une tendance générale de l'influence de l'anisotropie plastique initiale sur l'apparition de la striction diffuse en se basant uniquement sur l'interaction Endommagement-Anisotropie. Ces résultats sont dus au fait que l'endommagement ne constitue pas l'unique effet déstabilisant permettant de provoquer l'apparition de la striction diffuse.

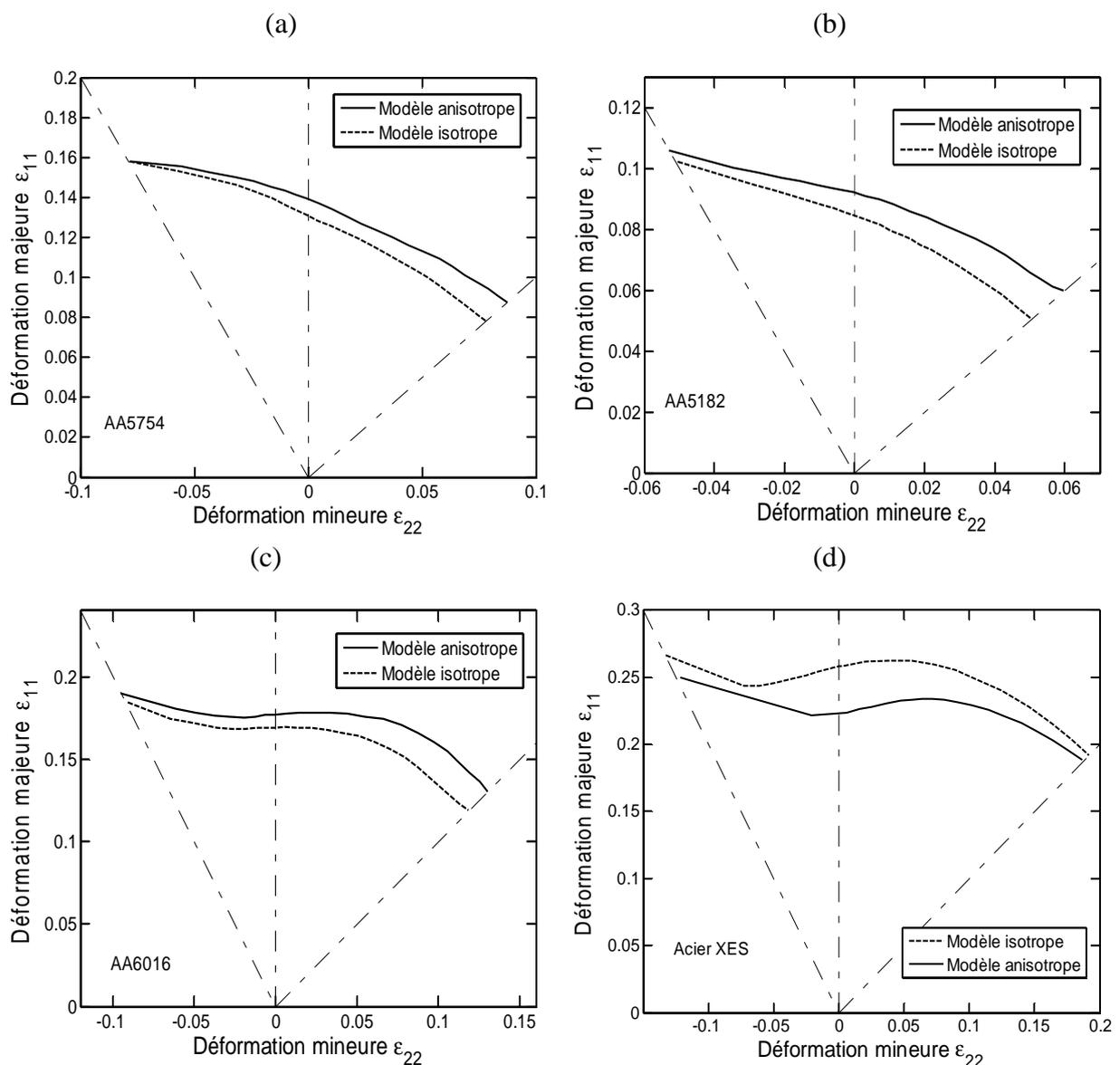


Figure 4.9 : Effet de l'anisotropie plastique sur la prédiction de la striction diffuse à partir du critère de Bifurcation Générale.

4.4 Influence de la présence d'un défaut initial de type matériau sur l'apparition de la striction localisée

Il a été mentionné dans les deux premiers chapitres que la distribution spatiale des sites d'endommagement dans la plupart des matériaux métalliques n'est pas tout à fait homogène. On peut ainsi se poser la question de l'influence d'une telle hétérogénéité spatiale sur l'apparition de la striction localisée. Dans cette section, on commence par donner une présentation synthétique du critère de bifurcation élastique/plastique de (Rice & Rudnicki, 1980) censé détecter l'apparition d'une décharge élastique à l'extérieur de la bande de localisation, alors que dans la bande, le matériau continue en régime dissipatif. Ensuite, à partir d'un modèle E.F simplifié, on introduit un défaut initial sous forme d'une bande contenant une porosité initiale supérieure au reste de la tôle. À partir de cette approche, on montrera par des exemples numériques qu'il est possible d'obtenir une décharge élastique à l'extérieur de la bande avant que la condition de localisation de (Rice, 1976) ne soit satisfaite localement.

4.4.1 Bifurcation élastique/plastique, approche de (Rice & Rudnicki, 1980)

Nous avons présenté dans le premier chapitre les fondements théoriques et les hypothèses sur lesquels repose le critère de Perte d'Ellipticité conformément aux travaux de (Rice, 1976). Parmi les hypothèses établies, notamment dans (Stören & Rice, 1975), (Rudnicki & Rice, 1975) et (Rice, 1976), il est supposé qu'au tout premier instant de l'initiation de la bifurcation, le saut du module tangent est nul à travers la bande de localisation, i.e. $\llbracket \underline{\underline{\mathcal{L}}^N} \rrbracket = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$. Cette hypothèse permet d'exprimer la condition de bifurcation sous la forme donnée par l'équation (4.8) (que l'on rencontre parfois dans la littérature sous le nom de bifurcation continue). Le critère de Perte d'Ellipticité qui se résume à cette relation est aussi appelé parfois bifurcation plastique/plastique dans la mesure où au moment de l'apparition de la bande de localisation, tout le solide est en régime dissipatif. Il est utile de rappeler également que le critère de Rice (Rice, 1976) a été obtenu sous l'hypothèse d'un milieu infini et homogène. La première hypothèse permet de s'affranchir de l'effet des conditions aux limites afin d'exclure d'autres types d'instabilités comme les instabilités géométriques (ou de type structure). Dans cette partie, on cherche à déterminer une condition de bifurcation sous forme de bande de localisation pour laquelle l'hypothèse de continuité du module tangent à travers la bande de localisation n'est plus vérifiée une fois l'apparition de celle-ci (c.-à-d., $\llbracket \underline{\underline{\mathcal{L}}^N} \rrbracket \neq \underline{\underline{\mathbf{0}}}$). Cette condition de bifurcation permettra de définir une borne supérieure, appelée bifurcation élastique/plastique. La condition ainsi définie correspond à la situation où le solide entre en décharge élastique à l'extérieur de la bande de localisation, alors qu'en son sein, le comportement continue en régime dissipatif. Afin de décrire l'approche de (Rice & Rudnicki, 1980), reprenons la condition d'équilibre statique qui exprime la continuité du vecteur taux de contrainte à travers la bande de localisation. En configuration Lagrangienne actualisée, cette relation est donnée par :

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot (\dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}}^{(B)} - \dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}}^{(A)}) = \bar{\underline{\underline{\mathbf{0}}}} \quad (4.12)$$

où $\dot{\mathbf{N}}^{(B)}$ et $\dot{\mathbf{N}}^{(A)}$ désignent, respectivement, les tenseurs taux de contrainte nominale à l'intérieur et à l'extérieur de la bande de localisation. Par ailleurs, la condition de compatibilité cinématique d'Hadarnard permet d'écrire :

$$\mathbf{G}^{(B)} - \mathbf{G}^{(A)} = \bar{\mathbf{g}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (4.13)$$

où $\mathbf{G}^{(B)}$ et $\mathbf{G}^{(A)}$ désignent, respectivement, les tenseurs gradients de vitesse à l'intérieur et à l'extérieur de la bande de localisation. Étant donné que le taux de contrainte nominale peut être relié au gradient de vitesse par la relation $\dot{\mathbf{N}} = \mathcal{L}^{\mathbf{N}} : \mathbf{G}$, la relation (4.12) se réécrit sous la forme :

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \left[\mathcal{L}^{\mathbf{N}} : \mathbf{G} \right] = \bar{\mathbf{n}} \cdot \left(\mathcal{L}^{\mathbf{N}(B)} : \mathbf{G}^{(B)} - \mathcal{L}^{\mathbf{N}(A)} : \mathbf{G}^{(A)} \right) = \bar{\mathbf{0}} \quad (4.14)$$

En injectant la relation (4.13) dans la relation (4.14), et en utilisant, d'une part, le fait que les tenseurs constitués des termes convectifs sont égaux entre eux dans les deux zones (A) et (B) et, d'autre part, que les tenseurs analytiques $\mathcal{L}^{(A)}$ et $\mathcal{L}^{(B)}$ ont la symétrie mineure, on trouve :

$$\mathcal{A}^{(B)} \cdot \bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\alpha_B}{\mathcal{H}_\lambda^{(B)}} \left(\mathbf{C}^e : \mathcal{F}_\Sigma^{(B)} \right) \otimes \left(\mathbf{P}^{(B)} : \mathbf{C}^e \right) - \frac{\alpha_A}{\mathcal{H}_\lambda^{(A)}} \left(\mathbf{C}^e : \mathcal{F}_\Sigma^{(A)} \right) \otimes \left(\mathbf{P}^{(A)} : \mathbf{C}^e \right) \right) : \mathbf{D}^{(A)} \quad (4.15)$$

Au point de bifurcation élastique/plastique, on a $\alpha_A = 0$, $\alpha_B = 1$ et $\mathbf{D}^{(A)} = \mathbf{D}^{e(A)}$, tel que $\mathbf{D}^{e(A)}$ désigne le taux de déformation élastique d'une partie du domaine du solide qui entre en décharge élastique. Ainsi, la relation précédente nous donne :

$$\mathcal{A}^{(B)} \cdot \bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{H}_\lambda^{(B)}} \left(\mathbf{C}^e : \mathcal{F}_\Sigma^{(B)} \right) \otimes \left(\mathbf{P}^{(B)} : \mathbf{C}^e \right) \right) : \mathbf{D}^{e(A)} \quad (4.16)$$

Cette dernière relation constitue la condition de bifurcation élastique/plastique de (Rice & Rudnicki, 1980). Tant que le tenseur $\mathcal{A}^{(B)}$ (qui a une forme similaire à celle du tenseur acoustique, mais qui est évalué ici dans la zone (B)) demeure régulier, il est possible de déterminer l'expression du vecteur donnant la discontinuité de vitesse sous la forme :

$$\bar{\mathbf{g}} = \left(\mathcal{A}^{(B)} \right)^{-1} : \bar{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{H}_\lambda^{(B)}} \left(\mathbf{C}^e : \mathcal{F}_\Sigma^{(B)} \right) \otimes \left(\mathbf{P}^{(B)} : \mathbf{C}^e \right) \right) : \mathbf{D}^{e(A)} \quad (4.17)$$

(Rice & Rudnicki, 1980) ont montré par une approche théorique que la condition de bifurcation de (Rice, 1976), donnée par $\det(\mathcal{A}) = 0$, constitue une borne inférieure à la condition (4.17) lorsque le solide est considéré initialement homogène jusqu'au premier point de bifurcation continue (c'est-à-dire, jusqu'au point de Perte d'Ellipticité). Nous verrons plus bas que lorsqu'on introduit un défaut de propriété du matériau, il est possible d'obtenir une décharge élastique à l'extérieur du défaut bien avant que le critère de (Rice, 1976) ne soit atteint localement.

4.4.2 Analyse de l'apparition des points de localisation sur une tôle contenant un défaut initial de type matériau

Afin de mieux prédire l'apparition des instabilités plastiques lorsque le comportement du matériau présente des effets adoucissants, il est intéressant d'étudier l'effet de la présence d'un défaut associé à une distribution inhomogène des sites d'endommagement. En effet, il a été mentionné au second chapitre que l'amorçage des cavités par germination a un caractère probabiliste, étant donné que la taille et la distribution spatiale des inclusions n'est en général pas homogène. D'autre part, la porosité initiale est en général distribuée de manière hétérogène dans la plupart des matériaux métalliques (voir e.g. (Devillers-Guerville et al., 1997)). Du fait de la nature hétérogène du phénomène d'endommagement, il devient intéressant d'analyser l'effet de la présence d'un défaut initial lié aux propriétés du matériau sur la prédiction des différents points de striction. Une approche couplée analytique / numérique reposant sur l'approche d'imperfection initiale a été proposée dans (Yamamoto, 1978), en considérant uniquement la croissance des cavités (critère de plasticité de Gurson), puis dans (Saje et al., 1982), en prenant en compte la germination des vides. Dans ces travaux, le défaut est constitué d'une bande contenant une concentration de la porosité initiale par rapport à l'extérieur du défaut. Ces travaux ont été poursuivis dans (Mear & Hutchinson, 1985) et (Tvergaard, 1987) qui ont analysé l'effet de la courbure de la surface de charge³, sur l'apparition des instabilités plastiques en considérant des trajets de chargement simples. En ce qui concerne l'analyse du phénomène de localisation à partir du critère de (Marciniak & Kuczyński, 1967), de récentes études se sont basées sur un modèle éléments finis au lieu de l'approche classique, qui consiste à faire un calcul élasto-plastique incrémental sur un seul point d'intégration et qui a été discuté également dans les travaux pionniers de (Yamamoto, 1978), (Saje et al., 1982), (Mear & Hutchinson, 1985). En ce qui concerne l'approche qui s'appuie purement sur un calcul par éléments finis, on peut citer les travaux de (Banabic et al., 2005) qui considèrent un défaut initial de nature géométrique, alors que dans les travaux de (Simha et al., 2007), les auteurs considèrent un défaut lié aux propriétés du matériau, en supposant d'une part une concentration de la porosité initiale dans la zone du défaut, et d'autre part un exposant d'écrouissage différent entre les deux zones. D'après ces auteurs, ce type de modélisation permet de reproduire des résultats similaires à ceux obtenus à partir de l'approche classique, bien que dans le domaine du rétreint, les prédictions sont légèrement surestimées⁴. Dans cette étude, nous allons reprendre ce type d'approche, en supposant que la zone du défaut a une porosité initiale supérieure à celle de la zone homogène. La coalescence des cavités n'est pas prise en compte dans cette étude et les paramètres matériau correspondant à la zone homogène sont ceux de l'alliage d'aluminium AA6016. Concernant la zone du défaut, nous allons considérer les mêmes paramètres que ceux de l'aluminium AA6016 sauf que la valeur de porosité initiale a été prise égale à 0,005 au lieu de 0,001. Pour avoir une idée plus précise sur le comportement de la zone contenant le défaut ainsi que la zone homogène, l'évolution de la contrainte de Cauchy en fonction de la déformation vraie ainsi que l'évolution de la variable d'endommagement sont données dans la Figure 4.10. Ces

³ Due à la prise en compte de l'écrouissage cinématique au sein du critère de plasticité de Gurson.

⁴ À cause de l'influence de l'orientation initiale du défaut ainsi que de sa rotation, et dont la prise en compte n'est pas aisée lorsqu'on s'appuie sur des calculs par E.F.

courbes ont été obtenues en considérant un seul élément fini et en reprenant les paramètres du modèle GTN relatifs à la zone saine ainsi qu'à la zone contenant une concentration de porosité initiale (c.-à-d., $f_0 = 10^{-3}$ et $f_0 = 5 \times 10^{-3}$). On donne également, sur la Figure 4.10.a, les points de striction diffuse et localisée relatifs à la zone homogène et à la zone contenant le défaut. Les points correspondant à la perte de définie positivité du module tangent (i.e. Bifurcation Générale) sont confondus, alors que la singularité du tenseur acoustique se produit de manière plus précoce lorsqu'on considère les paramètres relatifs à la zone du défaut.

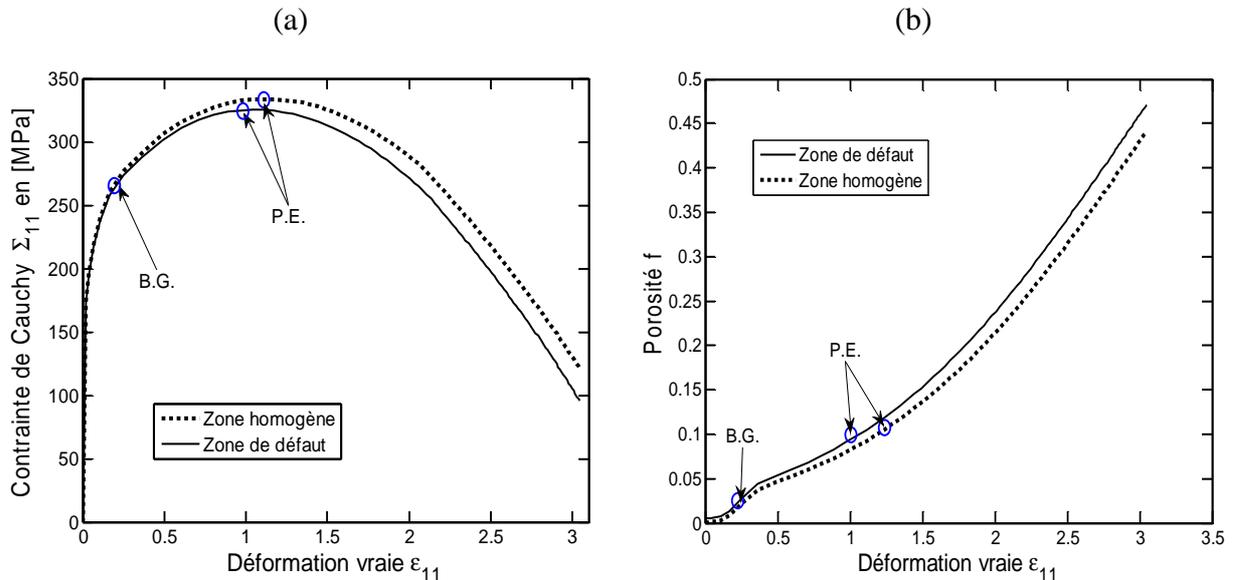


Figure 4.10 : Courbe de comportement (a) et de porosité (b) en fonction de la déformation vraie, obtenues à partir des paramètres matériau de la zone du défaut initial et de la zone homogène pour un chargement en traction plane.

On considère à présent le cas d'une tôle mince soumise à un chargement en traction plane, dont le déplacement des deux bords latéraux est bloqué alors que les deux autres bords dans la direction longitudinale sont soumis à un chargement de traction. Les deux faces parallèles aux plans de la tôle sont libres. Seul le cas d'un chargement en traction plane sera traité dans cette partie, étant donné que pour ce type de chargement les critères de (Marciniak & Kuczyński, 1967) et (Hutchinson & Neale, 1978) prédisent que le vecteur normal à la bande de localisation est porté par la direction de la contrainte principale maximale⁵ (c.-à-d., la contrainte principale portée par l'axe x_1 , voir Figure 4.11). Le maillage illustré dans la Figure 4.11.b est constitué d'éléments finis hexaédriques à huit nœuds et à intégration réduite (C3D8R) dans les deux zones.

⁵ Cette remarque est valable lorsque le comportement du matériau est isotrope. Pour un comportement anisotrope par exemple, le repère des déformations principales ne coïncide pas toujours avec celui des contraintes principales.

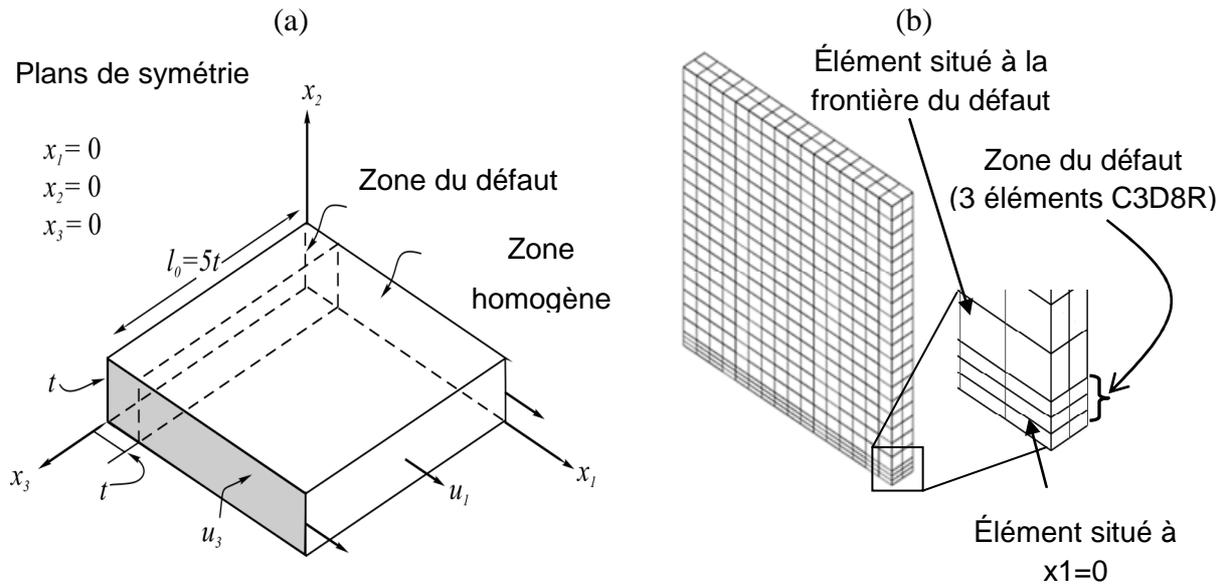


Figure 4.11 : (a) Schématisation du modèle de (Marciniak & Kuczyński, 1967) avec défaut de type propriété matériau ; (b) maillage utilisé pour le modèle éléments finis en considérant trois éléments dans la largeur du défaut.

La Figure 4.12 illustre l'évolution de la composante de déformation correspondant à la direction de chargement principale maximale en fonction de la position des nœuds. On peut remarquer sur cette figure qu'à partir d'un chargement donné, on retrouve une concentration graduelle de la composante de déformation ε_{11} qui s'accroît fortement au fur et à mesure que le chargement augmente, alors qu'à l'extérieur de la bande, on a $\dot{\varepsilon}_{11} \rightarrow 0$.

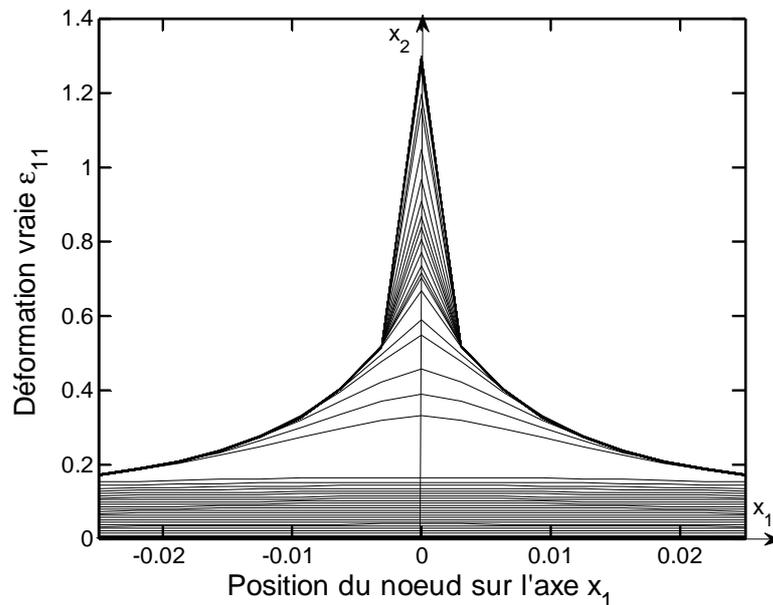


Figure 4.12 : Evolution de la composante de déformation ε_{11} au cours du chargement en fonction de la position du point considéré dans la zone du défaut.

On étudie à présent l'influence de la présence d'un défaut initial sur la singularité du tenseur acoustique local, c'est-à-dire évalué au point situé au centre de la zone de défaut, et qui peut être considéré comme un indicateur de localisation. Avant de nous intéresser à l'effet de la taille des éléments sur la prédiction de la localisation, on considère un unique maillage avec trois éléments dans la largeur du défaut (voir Figure 4.11). Les réponses contrainte-déformation relatives aux éléments appartenant à la zone de défaut ainsi que l'évolution de la porosité sont illustrées dans la Figure 4.13. On peut remarquer sur cette figure que l'apparition d'une décharge élastique du premier élément appartenant à la zone "homogène" se produit bien avant que la condition de localisation de (Rice, 1976) ne soit satisfaite localement. La Figure 4.13.a montre également qu'il existe plusieurs décharges élastiques qui apparaissent au fur et à mesure que le chargement augmente, en se rapprochant graduellement du point de singularité du tenseur acoustique déterminé localement sur chaque point d'intégration. Contrairement au cas d'un milieu supposé homogène jusqu'au premier point de bifurcation continue (i.e. $\left[\left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}^N \right] \right] = \underline{\underline{0}}$), l'introduction d'un défaut initial au sein du matériau mène à l'apparition d'une décharge élastique à l'extérieur de la bande de localisation avant que la condition $\det(\underline{\underline{\mathcal{A}}}) = 0$ ne soit vérifiée localement. La Figure 4.13.b illustre l'évolution de la porosité en fonction de la position des nœuds appartenant à la zone du défaut. On remarque également qu'à partir d'un certain moment, l'évolution de la porosité se produit de manière brutale au centre de l'éprouvette alors qu'aux extrémités de la zone du défaut le taux de porosité tend vers zéro.

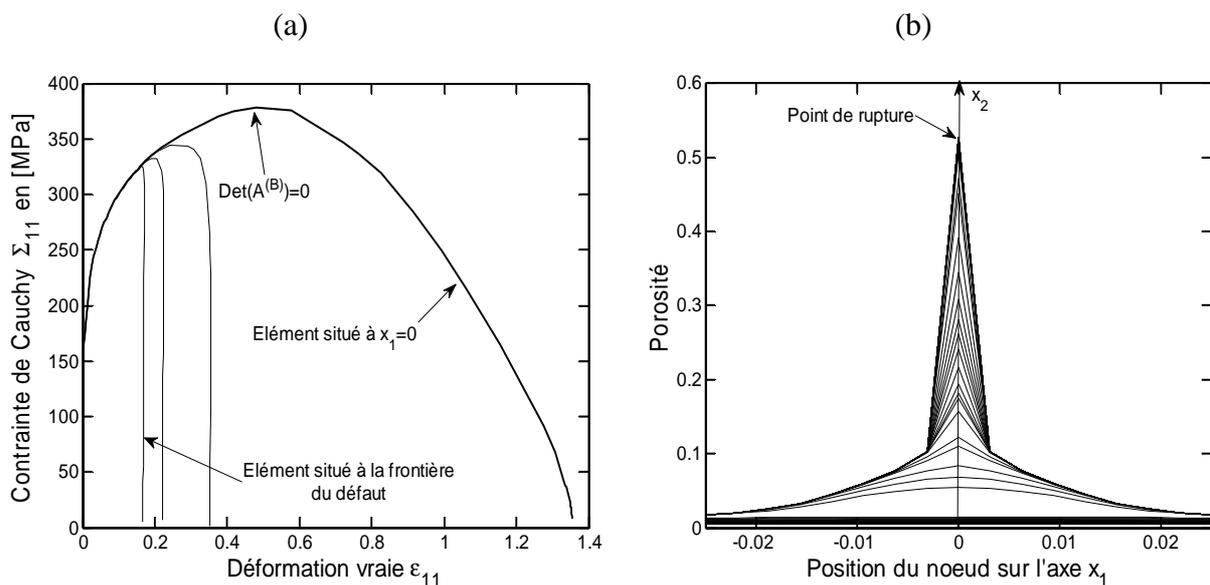


Figure 4.13 : (a) Réponses contrainte-déformation pour la zone 'homogène' et celle du 'défaut initial' pour un chargement en traction plane. (b) Evolution de la porosité au cours du chargement en fonction de la position du point considéré dans la zone du défaut.

À présent, on cherche à analyser l'influence du nombre d'éléments finis appartenant à la zone du défaut sur l'apparition du point de localisation avec décharge élastique. Pour cela, on reprend le modèle éléments finis décrit dans la précédente section en faisant varier uniquement la largeur des éléments appartenant au défaut, et en considérant deux éléments dans l'épaisseur de la tôle pour tous les cas étudiés (voir Figure 4.11). Une présentation plus

détaillée de l'influence du maillage sur l'apparition de la localisation et du mode de propagation des fissures peut être consultée dans (Besson et al., 2003). Les deux figures suivantes illustrent l'évolution du facteur d'imperfection, paramètre qui traduit l'évolution du rapport d'épaisseur entre les deux zones, ainsi que du ratio entre la déformation plastique équivalente de la zone du défaut et celle relative à la zone homogène. On peut remarquer sur la Figure 4.14.a que le facteur d'imperfection caractérisant l'amincissement local est quasiment égal à un jusqu'à la stationnarité de l'effort appliqué. Une fois que la striction diffuse au sens de (Swift, 1952) est atteinte (c'est-à-dire lorsqu'on a stationnarité des efforts appliqués dans le repère principal de chargement), on remarque une diminution progressive de la variable f^{MK} qui est suivie d'une chute brutale menant à l'apparition de la striction localisée et se termine par l'apparition de la rupture ductile. Cette figure montre également que l'évolution de la variable f^{MK} converge à partir de trois éléments finis dans la largeur du défaut, ce qui n'est pas le cas s'agissant de la variable N_L^c . En effet, lorsque le nombre d'éléments finis augmente dans la direction de la largeur, l'évolution de la variable N_L^c devient de plus en plus brutale, lorsqu'on s'approche de l'instant de localisation, et atteint des valeurs très élevées au point d'apparition de la localisation. Concernant l'approche classique du critère de localisation de (Marciniak & Kuczyński, 1967), le choix de la valeur du N_L^c a un effet négligeable à condition que l'on prenne une valeur suffisamment élevée (voir e.g. (Altmeyer, 2011)). Néanmoins, l'adaptation du critère d'arrêt présent dans l'approche de (Marciniak & Kuczyński, 1967) à un modèle éléments finis est susceptible de donner des points de localisation qui dépendent de manière plus importante de la discrétisation par éléments finis, en particulier lorsque des effets adoucissants sont présents dans le comportement.

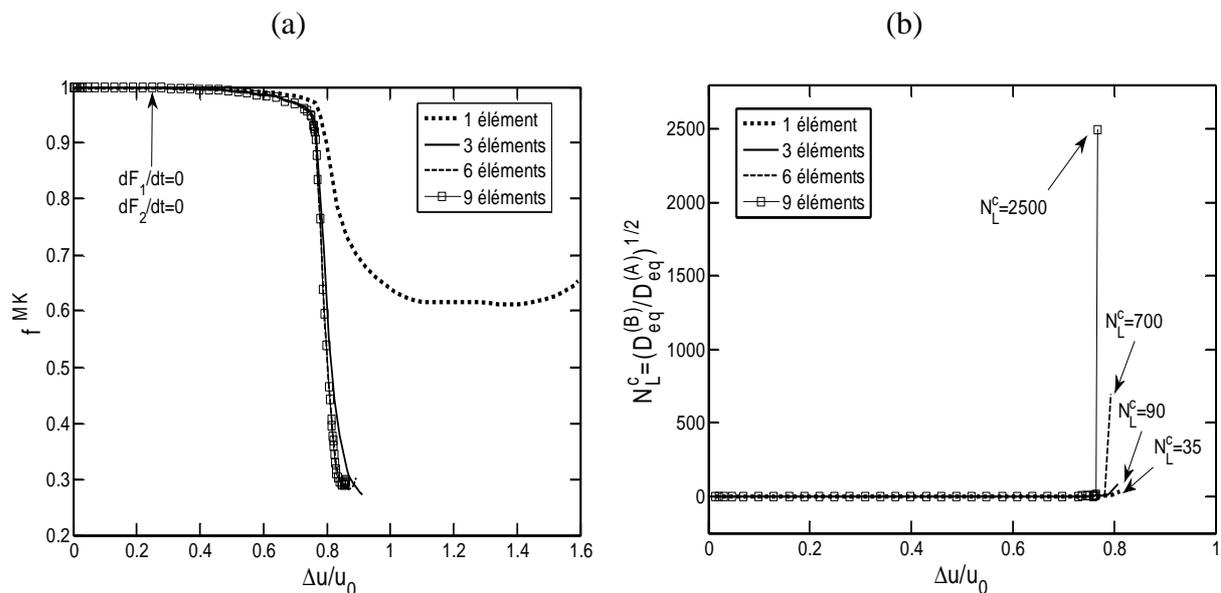


Figure 4.14 : (a) Influence du nombre d'éléments finis dans la zone du défaut sur l'évolution de la variable caractérisant l'amincissement, et (b) sur l'évolution de la variable intervenant dans le critère d'arrêt issu de l'approche de (Marciniak & Kuczyński, 1967).

Les Figures 4.15.a à 4.15.d donnent les réponses contrainte-déformation relatives aux éléments appartenant au défaut ainsi qu'à l'élément situé à la frontière du défaut, et ceci pour différents nombres d'éléments finis dans la largeur du défaut (voir également la Figure 4.11). On peut remarquer sur ces figures que, en fonction du raffinement du maillage, plusieurs points de décharge élastique apparaissent avant le point de localisation indiqué par la singularité du tenseur acoustique local (c'est-à-dire évalué au point situé au centre de la zone de défaut). La valeur de la déformation limite en ce point de localisation, qui est affectée par la présence d'un défaut initial de type matériau, est bien plus faible que celle prédite en l'absence de défaut (comparer pour cela les Figures 4.15 et 4.10). On peut également remarquer sur la Figure 4.15 que le nombre d'éléments finis influe sur la position du dernier point de décharge élastique. Ce dernier point se déplace en se rapprochant de plus en plus du point de singularité du tenseur acoustique local, au fur et à mesure que l'on augmente le nombre d'éléments finis dans la zone du défaut.

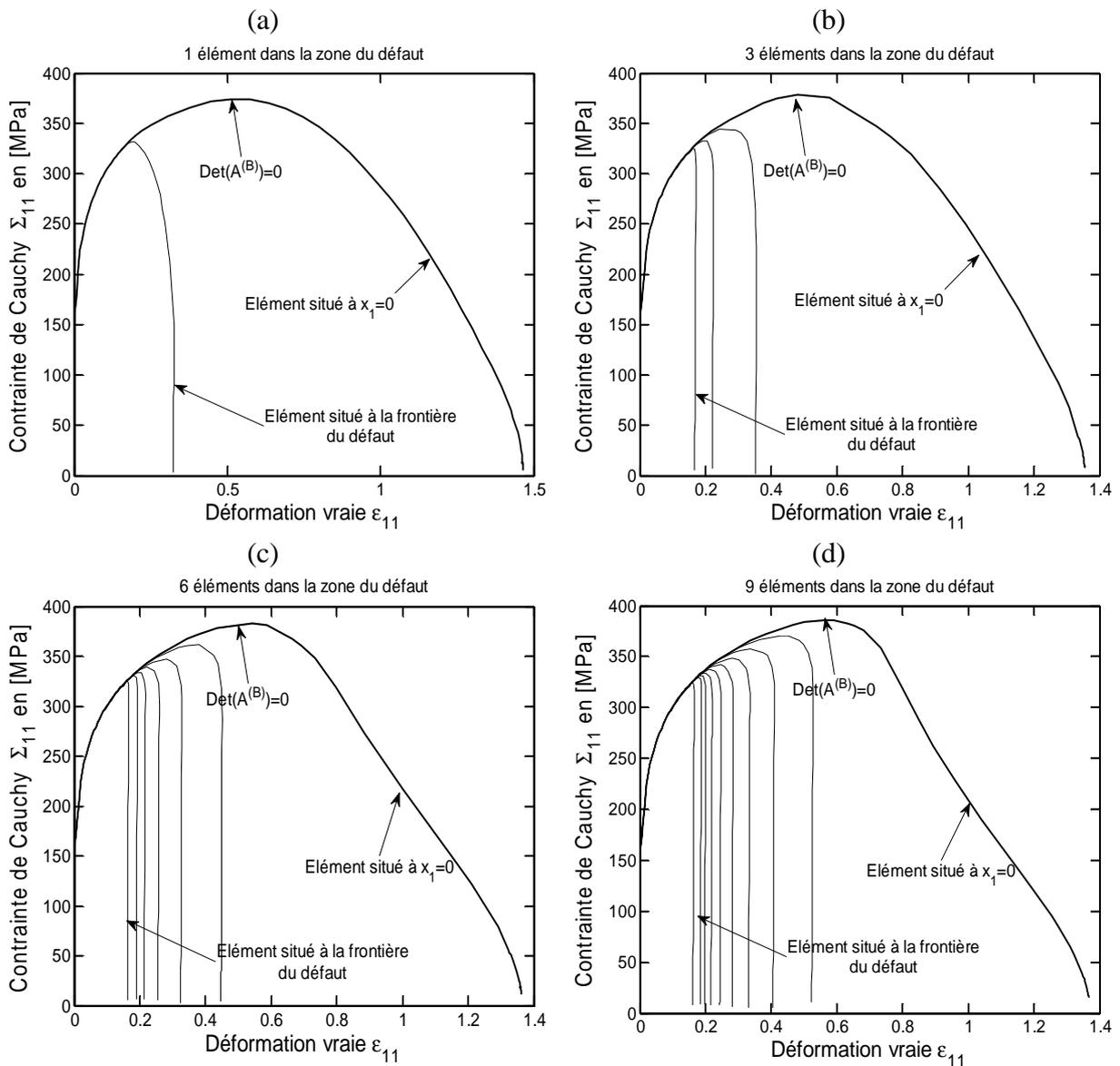


Figure 4.15 : Effet du nombre d'éléments finis sur la prédiction de la localisation dans une tôle mince contenant un défaut de type matériau.

Il est à noter que des défauts présents initialement, qui sont liés par exemple à la géométrie de la tôle (variations d'épaisseur) ou encore de type matériau (propriétés mécaniques qui diffèrent légèrement), sont inévitablement rencontrés dans des structures réelles. Par conséquent, si le critère bifurcation de (Rice, 1976) constitue une approche rigoureuse permettant de prédire l'apparition des bandes de localisation pour un milieu supposé homogène et infini (c'est-à-dire en négligeant les effets de type structure), il représente néanmoins une borne supérieure à l'apparition de la localisation lorsqu'on prend en compte la présence d'un défaut initial ou encore l'hétérogénéité induite par les effets de structure ou des conditions aux limites. Cette remarque conforte la démonstration présentée dans le premier chapitre concernant les rapprochements théoriques entre le critère de bifurcation de (Rice, 1976) et celui d'imperfection initiale de (Marciniak & Kuczyński, 1967). Ainsi, les deux critères étudiés précédemment qui sont le critère de Bifurcation Générale et le critère de Perte d'Ellipticité peuvent être interprétés comme des bornes inférieure et supérieure, respectivement, à l'apparition de la striction localisée.

4.5 Analyse de l'influence des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies sur la prédiction des modes de striction diffuse et localisée

Dans cette section, on étudie l'effet des termes convectifs, dus au formalisme des transformations finies, sur la prédiction des points de bifurcation (associés à une striction diffuse ou localisée). Le module tangent analytique correspondant au modèle de comportement que nous avons considéré dans ce travail s'exprime en configuration Lagrangienne actualisée sous la forme :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^N = \underline{\underline{\mathbf{L}}} + \underline{\underline{\mathbf{L}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{L}}}_2 - \underline{\underline{\mathbf{L}}}_3 \quad (4.23)$$

tel que

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e - \frac{\alpha}{\mathcal{H}_\lambda} \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : \underline{\underline{\mathcal{F}}}_\Sigma \right) \otimes \left(\underline{\underline{\mathbf{P}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e \right) \quad (4.24)$$

où α représente un scalaire défini par :

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{\underline{\mathcal{F}}}_\Sigma : \underline{\underline{\mathbf{D}}} \geq 0 \\ 0 & \text{si } \underline{\underline{\mathcal{F}}}_\Sigma : \underline{\underline{\mathbf{D}}} < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

$\underline{\underline{L}}_{1ijkl} = \Sigma_{ij} \delta_{kl}$, $\underline{\underline{L}}_{2ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \Sigma_{lj} + \delta_{il} \Sigma_{kj})$ et $\underline{\underline{L}}_{3ijkl} = \frac{1}{2} (\Sigma_{ik} \delta_{lj} - \Sigma_{il} \delta_{jk})$ désignent les termes convectifs dus au formalisme des transformations finies (voir Annexe 1 pour la détermination de ces termes). Sachant que le tenseur acoustique est défini par $\underline{\underline{\mathcal{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{n}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^N \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}$, la condition de Perte d'Ellipticité peut se réécrire sous la forme :

$$\det(\underline{\underline{\mathcal{A}}}) = 0 \Rightarrow (\mathcal{A}^p + \mathcal{A}^c)^3 \det(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^e) = 0 \quad (4.26)$$

tel que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^e &= \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e \cdot \bar{\mathbf{n}} \\
\mathcal{A}^p &= 1 - \frac{\alpha}{\mathcal{H}_\Lambda} \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \mathcal{A}^{e-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \\
\mathcal{A}^c &= \mathcal{A}^{e-1} : \left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}_3 \cdot \bar{\mathbf{n}} \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

avec $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : \underline{\underline{\mathcal{F}}}_\Sigma)$ et $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = (\underline{\underline{\mathbf{P}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e)$. Lorsque le tenseur d'élasticité est isotrope et linéaire, l'inverse du tenseur \mathcal{A}^e peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{A}^{e-1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \frac{1}{\mu} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \tag{4.28}$$

tel que λ et μ désignent les coefficients de Lamé. À partir de cette relation, on peut constater que le scalaire \mathcal{A}^c , dont la présence au sein de la relation (4.26) est due au formalisme de transformations finies, possède des termes de l'ordre de la contrainte divisée par le module de Young (voir l'expression des termes convectifs plus haut). Les Figures 4.16.a et 4.16.b illustrent l'influence de la prise en compte des termes $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_1$, $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_2$ et $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_3$ sur la prédiction des CLF à striction localisée dans le cas des deux modèles de comportement retenus dans ce travail. On peut remarquer sur ces deux figures que la prise en compte de ces termes n'influe pas sur la prédiction de la striction localisée. Toutefois, l'influence de ces termes sur la perte de définie positivité du module tangent $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^B$ et par conséquent sur la prédiction du point de Bifurcation Générale est sensiblement plus importante. En effet, on peut observer sur la Figure 4.17 que la propriété précédente n'est pas valable dans le cas du critère de Bifurcation Générale.

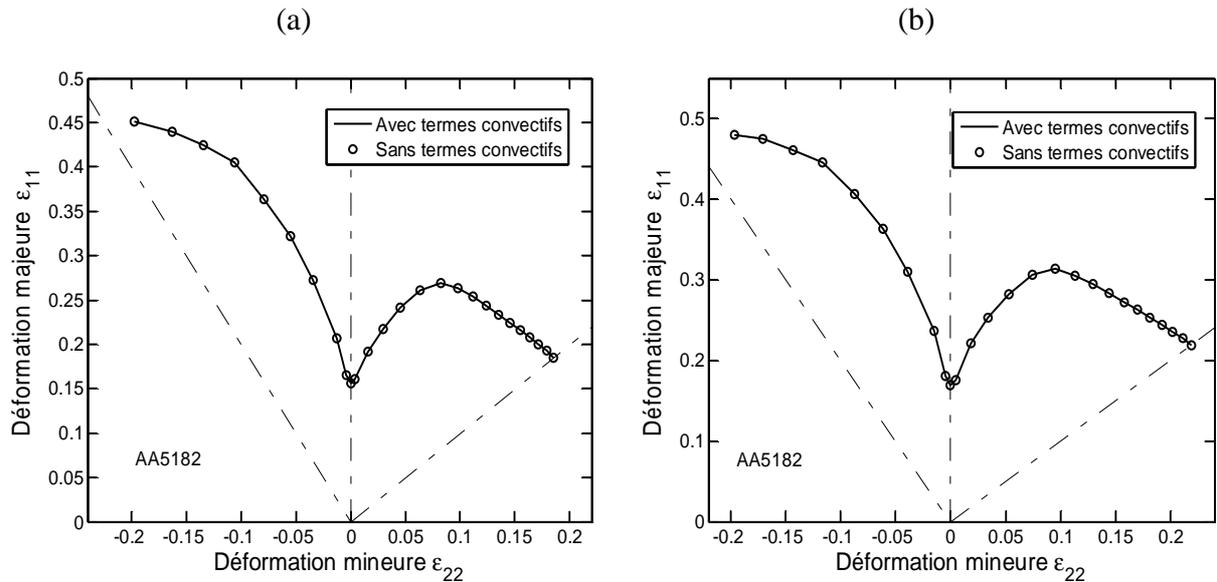


Figure 4.16 : Influence des termes convectifs sur la prédiction des niveaux de déformation à striction localisée pour l'alliage d'aluminium AA5182 à partir du critère de Perte d'Ellipticité. (a) Modèle de comportement de Gurson-Tvergaard-Needleman. (b) Modèle de comportement de (Benzerga & Besson, 2001).

À noter également que la détermination du point de bifurcation générale (perte de définitivité de la partie symétrique du module tangent \mathcal{L}^B) nécessite peu de temps CPU, étant donné que pour ce critère, la recherche des valeurs propres ne passe pas par un problème de minimisation, contrairement au critère de Perte d'Ellipticité. Les résultats illustrés dans la Figure 4.16 montrent que le critère de (Rice, 1976) peut être utilisé avec seulement le module tangent analytique élasto-plastique (i.e., sans les termes convectifs) dans le cas des matériaux étudiés.

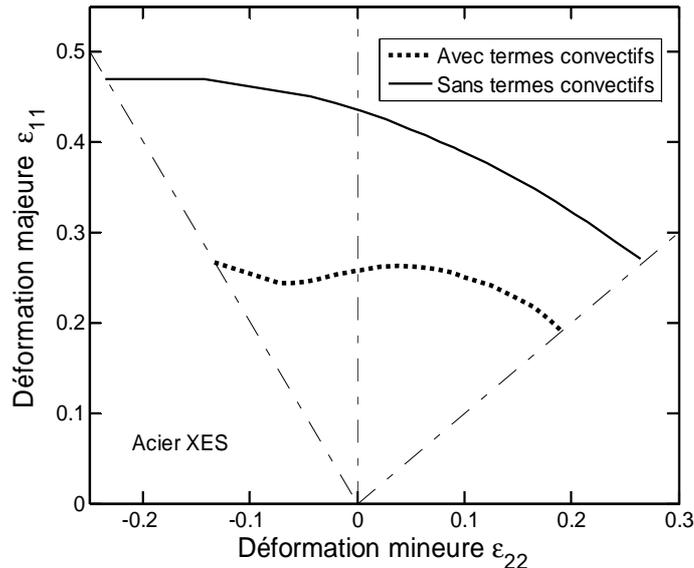


Figure 4.17 : Influence des termes convectifs sur la prédiction de la striction diffuse pour l'acier XES.

4.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons analysé certains aspects liés à la prédiction des différents modes de striction diffuse et localisée. Dans un premier temps, nous avons étudié l'effet de la non-normalité de la loi d'écoulement, qui découle du choix du critère de germination considéré, sur la prédiction des différents modes d'instabilités plastiques. Il a été montré que lorsque le taux de porosité due à la germination des cavités est contrôlé par la contrainte principale maximale, les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite donnent des limites à striction diffuse différentes. En revanche, lorsque l'évolution de porosité due à la germination est contrôlée par la déformation plastique équivalente, les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite prédisent l'apparition de la striction diffuse de façon quasi simultanée. De même, en ce qui concerne la striction localisée, le critère de Perte d'Ellipticité Forte s'est avéré plus conservatif que le critère de Perte d'Ellipticité lorsque la normalité de la loi d'écoulement n'est plus vérifiée. Une hiérarchisation de ces critères a permis d'expliquer les différences observées en fonction de la loi de germination choisie. Ensuite, nous nous sommes intéressés à la prédiction des courbes limites de formage à striction diffuse à partir des modèles d'endommagement de Gurson-Tvergaard-Needleman et de (Benzerga & Besson, 2001) qui ont été couplés au critère de Bifurcation Générale. Il a été montré que les niveaux de déformation correspondant à

l'apparition de la striction diffuse dépendent sensiblement des paramètres de la loi d'écroutissement considérée. Dans un second temps, nous avons étudié l'influence de la présence d'un défaut de type matériau, lié à une concentration des sites d'endommagement (porosité initiale), sur l'apparition de la striction localisée. À partir d'un modèle E.F simplifié, il a été montré qu'une décharge élastique est susceptible d'apparaître à l'extérieur de la zone du défaut bien avant que la condition de localisation de (Rice, 1976) ne soit atteinte localement. La valeur de déformation limite ainsi obtenue par la singularité du tenseur acoustique local est bien plus faible que celle prédite par le critère de bifurcation de Rice dans un solide sans défaut. Ce résultat est en accord avec ce qui est communément observé et confirme le fait que la condition de localisation par bifurcation de (Rice, 1976) doit être vue comme une borne supérieure à l'apparition de la striction localisée dans des solides contenant des défauts ou affectés par les conditions aux limites, introduisant ainsi des effets géométriques (ou de type structure). Enfin, l'anisotropie plastique a également une influence importante sur la prédiction des niveaux de déformation à striction diffuse, principalement à cause du couplage entre le facteur d'anisotropie de (Benzerga & Besson, 2001) et la loi d'évolution de la variable d'endommagement.

Conclusion générale

Synthèse

Dans le but d'apporter une contribution à la prédiction de la formabilité des matériaux métalliques, nous avons présenté dans ce travail une approche combinant un modèle de comportement basé sur une approche micromécanique d'endommagement et des critères de striction diffuse et localisée. Le choix du modèle de comportement s'appuie en grande partie sur l'identification des mécanismes physiques élémentaires qui sont soit à l'origine de l'apparition de ces défauts, ou bien qui ont une influence non-négligeable sur leur apparition. En ce qui concerne les phénomènes de striction diffuse et localisée, l'étude bibliographique a révélé que divers mécanismes physiques liés au comportement des matériaux peuvent constituer soit un effet « déstabilisant » (e.g. formation de bandes de glissement grossières parallèles aux plans de glissement cristallins, endommagement dû à la présence d'inclusions et de particules de seconde phase, ...etc.) ou bien jouent un rôle prépondérant dans l'apparition des différents modes d'instabilités plastiques (e.g. anisotropie plastique initiale et induite, courbure de la surface de plasticité, ...etc.). Outre le choix du modèle de comportement, une prédiction fiable des phénomènes de striction diffuse et localisée requiert l'introduction d'indicateurs d'instabilités locales. Plusieurs critères de striction diffuse et localisée basés sur l'analyse de bifurcation ont été appliqués à une sélection de matériaux ductiles. Les résultats numériques obtenus en termes de limites de formabilité sont réalistes et comparables aux résultats expérimentaux issus de la littérature. Les approches présentes dans la littérature peuvent être regroupées en quatre familles distinctes, qui se différencient au niveau de leurs fondements théoriques ainsi que des hypothèses sur lesquelles elles reposent. Certaines de ces approches offrent un caractère théorique rigoureux alors que d'autres s'inspirent davantage de l'observation et de l'expérimentation.

Le modèle de comportement retenu dans ce travail est basé sur le critère de plasticité macroscopique de (Benzerga & Besson, 2001) qui constitue une extension théorique du critère de plasticité de (Gurson, 1977). Ce modèle décrit le comportement des matériaux métalliques contenant des cavités sphériques ou cylindriques entourées d'une matrice de comportement élasto-plastique présentant une anisotropie plastique initiale. En outre, ce modèle offre la possibilité d'introduire un effet de non-normalité de la loi d'écoulement, moyennant un choix particulier de la loi d'évolution de la variable d'endommagement. Dans la limite d'un comportement isotrope de la matrice, ce modèle permet de retrouver celui de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN), alors que dans le cas d'un comportement isotrope transverse de la matrice, on retrouve celui de (Liao et al., 1997). D'autre part, une description détaillée des différentes approches analytiques permettant de prédire l'apparition des instabilités locales a été donnée, dans le cadre des transformations finies et sous un formalisme tridimensionnel unifié. Les éventuels liens et rapprochements théoriques qui existent entre ces approches ont été soulignés. Notre choix s'est ensuite porté sur les approches reposant sur l'analyse de bifurcation, qui permettent de définir une famille de

critères permettant la détection des deux principaux modes de bifurcation générale ou avec saut du gradient de vitesse (c.-à-d., striction diffuse et localisée). Dans le cas d'un comportement en plasticité associée, le critère de bifurcation générale de (Hill, 1958) assure l'unicité locale de la solution du problème aux valeurs limites, et définit ainsi une borne inférieure à l'apparition de la striction diffuse. D'autres critères moins conservatifs que le précédent ont été formulés et implantés dans le code de calcul par éléments finis Abaqus/Standard, dans le but de prédire la striction diffuse (Valanis, 1989), ainsi que la striction localisée (Bigoni & Zaccaria, 1992), (Rice, 1976).

La formulation et l'implantation numérique du modèle de comportement construit à partir du critère de plasticité de (Benzerga & Besson, 2001) ont été effectuées en considérant trois différents schémas d'intégration temporelle. Une analyse de la performance de ces schémas pour un comportement élasto-plastique avec ou sans effets adoucissants révèle que l'algorithme d'intégration proposé par (Aravas, 1987) qui s'appuie sur le schéma d'Euler implicite est le plus performant, car il autorise des incréments de chargement importants tout en préservant une précision élevée. Ces résultats sont en accord avec ceux discutés dans la littérature (Zhang, 1996), (Haddag, 2007). Toutefois, lorsque la courbe de comportement présente des effets adoucissants prononcés (e.g. régime de coalescence des cavités activé), le schéma d'intégration proposé par (Aravas, 1987) peut rencontrer des problèmes de convergence lorsque l'incrément de chargement est important. Concernant les schémas d'intégration explicite, une technique simple a été introduite et s'appuie sur un pas de chargement adaptatif. Il a été montré sur différents cas tests que cette technique permet d'améliorer la performance des schémas explicites de manière non-négligeable tout en conservant des temps CPU acceptables.

Concernant les applications qui ont été traitées dans ce travail, on s'est intéressé dans un premier temps à la prédiction des Courbes Limites de Formage (C.L.F) à striction localisée à partir d'un modèle de comportement basé sur l'approche de Gurson couplé au critère de Perte d'Ellipticité de Rice (Rice, 1976). Une analyse détaillée de la sensibilité des limites de formage par rapport aux paramètres du modèle a été menée. Cette étude a révélé que les paramètres d'endommagement intervenant dans le modèle de comportement ont une influence considérable sur la prédiction de la localisation. En outre, il s'est avéré que l'anisotropie plastique initiale joue un rôle important dans la prédiction des limites de formabilité, étant donné qu'il existe dans le modèle de comportement un couplage fort entre anisotropie plastique initiale et endommagement. En revanche, l'étude de sensibilité aux paramètres d'écroutissage a révélé que ces derniers ont une influence beaucoup plus faible sur les limites de formabilité dans le cas d'un comportement basé sur l'approche de Gurson couplé au critère de Perte d'Ellipticité. Bien que cette dernière tendance puisse paraître moins conforme à celles observées dans la littérature utilisant d'autres types de modèles de comportement ou de critères de striction, elle s'explique cependant par le rôle prédominant de l'endommagement comme mécanisme déstabilisant dans l'approche de bifurcation ainsi que par l'insensibilité de l'évolution de l'endommagement dans le modèle de Gurson par rapport aux paramètres d'écroutissage. Enfin, une confrontation des C.L.F obtenues à partir de l'approche proposée avec celles issues des travaux expérimentaux a montré que la prise en compte de l'anisotropie plastique initiale permet dans certains cas d'améliorer les prédictions. Néanmoins, il nous

semble qu'une identification rigoureuse des paramètres du modèle de comportement à partir de plusieurs essais (e.g. traction uniaxiale, traction équi-biaxiale, ... etc.) permettrait de tirer des conclusions beaucoup plus pertinentes sur l'influence de l'anisotropie plastique initiale.

Dans la dernière partie de ce travail, on s'est intéressé à différents aspects liés à la prédiction de la striction diffuse et localisée. Dans un premier temps, l'influence de la non-normalité de la loi d'écoulement sur la prédiction des différents modes de bifurcation a été analysée. Il a été montré que lorsque le taux de porosité due à l'amorçage des cavités est contrôlé par la contrainte principale maximale, la perte de définie positivité de l'opérateur tangent relatif au critère de Bifurcation Générale (voir, e.g., (Hill, 1958)) peut être perdue avant la stationnarité de l'effort appliqué, ce qui correspond au critère de Bifurcation par Point Limite discuté dans (Valanis, 1989), (Neilsen & Schreyer, 1993). De même, en ce qui concerne la striction localisée, le critère de Perte d'Ellipticité Forte s'est avéré plus conservatif que le critère de Perte d'Ellipticité de (Rice, 1976) lorsque la normalité de la loi d'écoulement n'est plus vérifiée. Ces résultats sont cohérents avec les fondements théoriques de ces critères et ont permis de proposer une hiérarchisation de ces derniers. Ensuite, nous nous sommes intéressés à la prédiction des courbes limites de formage à striction diffuse. Une étude de sensibilité a révélé que les niveaux de déformation correspondant à l'apparition de la striction diffuse dépendent sensiblement des paramètres de la loi d'écrouissage considérée. L'anisotropie plastique a également une influence importante sur la prédiction des niveaux de déformation à striction diffuse, en partie à cause du couplage entre le facteur d'anisotrope de (Benzerga & Besson, 2001) et la loi d'évolution de la variable d'endommagement.

Perspectives

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont permis de développer et de valider une approche théorique et numérique et de montrer son potentiel et ses limitations, s'agissant de la prédiction des instabilités locales. À l'issue de ce travail, de nombreuses perspectives sont envisageables dont les principales sont décrites ici. Certaines perspectives concernent le modèle de comportement alors que d'autres sont relatives à l'identification des paramètres du comportement et sa validation par rapport à des essais d'emboutissage.

Concernant le modèle de comportement utilisé dans ce travail, certaines de ses limitations sont dues aux hypothèses de base qui ont été faites dans les travaux originaux de Gurson. Ainsi, la plupart des extensions apportées au modèle de Gurson héritent de ses limitations ((Tvergaard, 1981), (Tvergaard, 1982), (Tvergaard & Needleman, 1984), (Mear & Hutchinson, 1985), (Liao et al., 1997), (Benzerga & Besson, 2001), ... etc.). La première hypothèse est relative à la forme des cavités considérée dans l'analyse de Gurson, où il est supposé que les cavités sont sphériques ou cylindriques et gardent la même forme au cours du chargement. Bien que l'hypothèse d'une cavité qui demeure sphérique au cours du chargement soit envisageable pour des taux de triaxialité relativement élevés (c.-à-d. autour d'une valeur de 1,5), elle devient de moins en moins réaliste lorsqu'on se rapproche d'un chargement déviatorique pur. Notons également que dans le cas d'un chargement déviatorique pur, le taux de croissance qui représente le principal mécanisme d'endommagement s'annule, puisqu'il dépend de la trace du tenseur taux de déformation plastique. Afin de répondre à cette

limitation, deux voies sont envisageables : la première consiste à considérer le critère de plasticité macroscopique de Gologanu-Leblond-Devaux ((Gologanu et al., 1993), (Gologanu et al., 1997)) qui a des fondements théoriques solides, mais demeure rigoureusement valable seulement pour un chargement axisymétrique. Ce critère constitue une reformulation de l'approche de Gurson offrant la possibilité de prendre en compte des formes de cavités plus complexes en plus de l'évolution de la forme des cavités au cours du chargement. La seconde possibilité, qui constitue une extension phénoménologique du modèle de Gurson, revient à introduire une variable d'endommagement qui dépend du troisième invariant de contrainte et offre ainsi la possibilité (tout comme la précédente) de décrire l'évolution de l'endommagement à basse triaxialité ((Nahshon & Hutchinson, 2008), (Xue & Wierzbicki, 2009), (Dunand & Mohr, 2011), (Malcher et al., 2014)). L'inconvénient de ce dernier type d'approche reste l'introduction de paramètres additionnels qui n'ont pas toujours un sens physique, ce qui ne facilite pas la tâche de l'identification. La seconde limitation inhérente aux approches de type Gurson réside dans la prise en compte de l'écroutissage de la matrice. En effet, il a été montré précédemment (voir (Leblond et al., 1995)) qu'il n'y a pas de couplage entre l'évolution de la variable d'endommagement et l'écroutissage. Ceci conduit à une prédiction de modes de bifurcation localisée qui sont quasiment insensible aux paramètres de la loi d'écroutissage. Or l'expérience montre que l'endommagement et en particulier la croissance des cavités dépend sensiblement du comportement de la matrice. En outre, les travaux de la littérature montrent que l'apparition de la striction localisée dépend également de l'écroutissage du matériau étudié. Des versions améliorées du modèle de Gurson ont été développées dans la littérature afin de s'affranchir de cette limitation, dont certaines s'appuient sur des développements théoriques rigoureux (Leblond et al., 1995), alors que d'autres reposent sur des extensions phénoménologiques (Vadillo & Fernández-Sáez, 2009). Enfin, la prise en compte d'un comportement visqueux semble avoir une influence importante sur la prédiction des défauts locaux, et en particulier sur l'apparition de la striction localisée. Si une telle modélisation est envisageable, les critères d'instabilités basés sur l'analyse de bifurcation ne sont plus applicables. Toutefois, il est possible de s'orienter vers des approches reposant sur l'analyse de stabilité par perturbation (Dudzinski & Molinari, 1991), (Barbier et al., 1999), applicables aux comportements avec effets visqueux.

Outre la modélisation d'un comportement plus riche, offrant la possibilité de prendre en compte davantage de mécanismes physiques, le développement d'outils numériques fiables passe également par une identification rigoureuse des paramètres matériaux. En effet, avant d'envisager toute confrontation et validation par rapport aux résultats expérimentaux issus de différents essais d'emboutissage (Nakajima, Marciniak, ... etc.), il nous semble nécessaire que les aspects liés à l'identification des paramètres de la loi de comportement soient maîtrisés. En ce qui concerne les modèles d'endommagement, la dépendance pathologique au maillage va inévitablement rendre la tâche de l'identification encore plus difficile, d'où la nécessité d'introduire une régularisation pour contrôler cette dépendance (e.g. à partir d'un comportement élasto-viscoplastique, modèle non-local à gradient de variables internes, ...etc.). Ce type de modélisation, combiné à une identification rigoureuse des paramètres matériaux, devrait contribuer à une amélioration des prédictions du phénomène de striction localisée. Il sera également possible d'envisager des simulations par E.F sur des essais

d'emboutissage classiques qui pourront être comparées aux essais expérimentaux, tout en garantissant l'objectivité de la solution vis-à-vis de la discrétisation. En outre, l'intégration de certaines familles de critères de localisation dans des codes de calcul permettra de détecter l'apparition de la striction diffuse et localisée au cours des essais.

Annexes

Sommaire

Annexe A1.....	178
1 Démonstration de certains outils mathématiques mentionnés au cours de la présentation du modèle de Gurson.....	178
2 Détermination des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies .	180
Annexe A2.....	183
1 Calcul des termes intervenant dans la matrice Jacobienne :	183
2 Calcul des termes intervenant dans la construction du module tangent cohérent.....	184
2.1 Détail des dérivées	186

Annexe A1

1 Démonstration de certains outils mathématiques mentionnés au cours de la présentation du modèle de Gurson

Dans ce paragraphe, on donne la démonstration du lemme de Hill-Mandel ainsi que des deux théorèmes permettant de relier d'une part le tenseur de contrainte (respectivement de déformation) macroscopique au tenseur de contrainte (respectivement de déformation) microscopique. On considère un V.E.R de volume total Ω constitué d'une matrice métallique incompressible, entourant des cavités de sorte que ces dernières ne débouchent pas sur la surface externe $\partial\Omega$. Ce V.E.R est censé représenter un matériau composite contenant deux phases à savoir, les vides qui occupent le domaine Ω_C et la matrice métallique entourant ces vides qui occupe le domaine Ω_M .

Théorème : Soit $\underline{\sigma}$ un champ de tenseurs symétrique dans Ω qui vérifie $\nabla \cdot \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}$, $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega$. Si on suppose que le V.E.R considéré plus haut est soumis à des conditions de contrainte homogène au bord, c.-à-d. $\underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\Sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}})$, $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$ où $\underline{\Sigma}$ représente un tenseur symétrique et constant indépendant de $\bar{\mathbf{x}}$, alors on a :

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega} = (1-f) \langle \underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} \quad (\text{A.1})$$

Démonstration : à partir de l'équation d'équilibre, il est possible d'exprimer le tenseur de contrainte microscopique sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ik} \delta_{jk} = \sigma_{ik} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right) = \left(\sigma_{ik} x_j \right)_{,k} - \sigma_{ik,k} x_j = \left(\sigma_{ik} x_j \right)_{,k} \quad (\text{A.2})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\sigma_{ik} x_j \right)_{,k} d\Omega = \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ik} x_j n_k dS \\ &= \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial\Omega} \Sigma_{ik} x_j n_k dS = \frac{\Sigma_{ik}}{\Omega} \oint_{\partial\Omega} x_j n_k dS = \frac{\Sigma_{ik}}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} d\Omega = \Sigma_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

D'autre part, on a :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_M} \sigma_{ij} d\Omega_M + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_C} \sigma_{ij} d\Omega_C \quad / \quad \Omega = \Omega_M \cup \Omega_C \quad (\text{A.4})$$

Puisque l'on suppose au départ que les cavités ne débouchent pas sur la surface externe du solide et que les cavités ne sont pas chargées (c.-à-d. $\underline{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_C$), le dernier terme de la relation (A.4) est nul. Sachant que $\Omega_M = (1-f)\Omega$, les relations (A.3) et (A.4) permettent d'écrire :

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega} = (1-f) \langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega_M} \quad (\text{A.5})$$

Théorème : Supposons que le V.E.R considéré plus haut est soumis à des conditions de taux de déformation homogène au contour, c.-à-d. $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{v}}^0(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{x}}, \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$, où $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})$ est un champ de vecteurs défini dans Ω et $\underline{\mathbf{D}}$ un tenseur symétrique, constant et indépendant de $\bar{\mathbf{x}}$. Dans ce cas, on a :

$$\underline{\mathbf{D}} = \langle \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega} \quad (\text{A.6})$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \langle d_{ij} \rangle_{\Omega} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d_{ij} d\Omega = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} (v_{i,j} + v_{j,i}) d\Omega = \frac{1}{2\Omega} \oint_{\partial\Omega} (v_i^0 n_j + v_j^0 n_i) dS \\ &= \frac{1}{2\Omega} \oint_{\partial\Omega} (D_{ik} x_k n_j + D_{jk} x_k n_i) dS = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} (D_{ik} \delta_{kj} + D_{jk} \delta_{ki}) d\Omega = D_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Lemme de Hill-Mandel : Soit Ω un domaine suffisamment régulier, $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ un champ de tenseurs vérifiant $\bar{\mathbf{V}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}, \forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega$ et $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})$ un champ de vecteurs défini dans Ω . Soient $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$ et $\underline{\mathbf{D}}$ les tenseurs de contrainte et de taux de déformation macroscopiques associés. Pour des conditions de contrainte homogène au contour, c.-à-d. lorsqu'on a :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \quad (\text{A.8})$$

où $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$ désigne un tenseur symétrique et constant, indépendant du vecteur position, dans ces conditions on a :

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})) d\Omega = (1-f) \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} \quad (\text{A.9})$$

Pour des conditions de taux de déformation homogène au contour, c.-à-d. lorsqu'on a :

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{x}}, \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \quad (\text{A.10})$$

où $\underline{\mathbf{D}}$ désigne un tenseur symétrique et constant, dans ces conditions on peut écrire que :

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})) d\Omega = (1-f) \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) : \underline{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle_{\Omega_M} \quad (\text{A.11})$$

Démonstration : On commence par donner la démonstration de la relation (A.9).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d_{ij} d\Omega &= \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i dS && \text{(Principe des puissances virtuelles)} \\ &= \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial\Omega} \Sigma_{ij} n_j v_i dS && \text{(Relation A.8)} \\ &= \frac{\Sigma_{ij}}{2\Omega} \oint_{\partial\Omega} (v_i n_j + v_j n_i) dS && (\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}) \\ &= \frac{\Sigma_{ij}}{2\Omega} \int_{\Omega} (v_{i,j} + v_{j,i}) d\Omega = \Sigma_{ij} D_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

La relation (A.11) s'obtient à partir du raisonnement suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Omega} \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i dS &= \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j D_{ik} x_k dS && \text{(Relation A.10)} \\
&= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} D_{ik} x_k)_{,j} d\Omega && \text{(Théo. de Green-Ostogradski) (A.13)} \\
&= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{ij} D_{ik} \delta_{kj} d\Omega = \Sigma_{ij} D_{ij} && \text{(Equation d'équilibre)}
\end{aligned}$$

2 Détermination des termes convectifs dus au formalisme des transformations finies

Nous avons vu dans le premier chapitre que les critères d'instabilités locales reposant sur l'analyse de bifurcation conduisent à une analyse de valeurs propres du module tangent ou du tenseur acoustique. Lorsque l'on se place dans un cadre de transformations finies, certains termes additionnels (c.-à-d. les termes dits convectifs) interviennent dans la construction de l'opérateur tangent $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^N$. Il a été montré dans le premier chapitre qu'il est possible d'exprimer la loi hypo-élastique en configuration Lagrangienne actualisée sous la forme :

$$\dot{\underline{\underline{N}}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^N : \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{C}}^e : (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^p) + \underline{\underline{\Sigma}} tr(\underline{\underline{D}}) - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{W}} \quad (\text{A.14})$$

Il s'agit à présent de construire, à partir de l'équation (A.14), un tenseur d'ordre quatre qui permettra de relier le taux de contrainte nominale au tenseur gradient de vitesse $\underline{\underline{G}}$. En configuration courante, la dérivée objective du tenseur de contrainte de Cauchy s'exprime sous la forme :

$$\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}^v = \underline{\underline{C}}^e : (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^p) = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{G}} \quad (\text{A.15})$$

En substituant cette dernière relation dans l'équation (A.14), on peut montrer que le module tangent $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^N$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^N = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}_1 - \underline{\underline{L}}_2 - \underline{\underline{L}}_3 \quad (\text{A.16})$$

où $\underline{\underline{L}}$ est le module tangent analytique (voir Chapitre 2, relation (2.42)). On va à présent déterminer l'expression des termes convectifs $\underline{\underline{L}}_1$, $\underline{\underline{L}}_2$ et $\underline{\underline{L}}_3$. On commence par le premier terme qui dans un premier temps peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{L}}_1 : \underline{\underline{G}} &= \underline{\underline{\Sigma}} tr(\underline{\underline{D}}) \\
&= (\underline{\underline{\Sigma}} \otimes \underline{\underline{1}}) : \underline{\underline{D}}
\end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

On peut aisément vérifier que le tenseur $\underline{\underline{\Sigma}} \otimes \underline{\underline{1}}$ possède les symétries mineures mais pas les symétries majeures. Puisque par définition on a : $\underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{G}} + \underline{\underline{G}}^T)/2$, la propriété de symétrie mineure du tenseur $\underline{\underline{\Sigma}} \otimes \underline{\underline{1}}$ permet d'obtenir l'expression de $\underline{\underline{L}}_1$ sous la forme :

$$\underline{\mathbf{L}}_1 = \underline{\Sigma} \otimes \underline{\mathbf{1}} \quad (\text{A.18})$$

On cherche à présent à déterminer l'expression du tenseur $\underline{\mathbf{L}}_2$ qui vérifie :

$$\underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\Sigma} = \underline{\mathbf{L}}_2 : \underline{\mathbf{G}} \quad (\text{A.19})$$

En notation indicielle, la relation précédente s'écrit :

$$D_{ip} \Sigma_{pj} = L_{2ijkl} G_{kl} \quad (\text{A.20})$$

D'autre part, on peut exprimer la partie gauche de la relation (A.20) sous la forme :

$$D_{il} \Sigma_{lj} = D_{kl} \delta_{ik} \Sigma_{lj} \quad (\text{A.21})$$

$$D_{ik} \Sigma_{kj} = D_{lk} \delta_{il} \Sigma_{kj} \quad (\text{A.22})$$

En combinant les deux relations précédentes, on a :

$$D_{ip} \Sigma_{pj} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ik} \Sigma_{lj} + \delta_{il} \Sigma_{kj} \right] D_{kl} \quad (\text{A.23})$$

La relation (A.23) indique que le tenseur $\delta_{ik} \Sigma_{lj} + \delta_{il} \Sigma_{kj}$ possède une symétrie mineure sur les deux derniers indices, c.-à-d. $L_{2ijkl} = L_{2ijlk}$. Comme pour $\underline{\mathbf{L}}_1$, on peut montrer que :

$$\underline{\mathbf{L}}_2 : \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{L}}_2 : \underline{\mathbf{G}} \quad (\text{A.24})$$

de sorte que

$$L_{2ijkl} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ik} \Sigma_{lj} + \delta_{il} \Sigma_{kj} \right] \quad (\text{A.25})$$

Enfin, l'expression du tenseur $\underline{\mathbf{L}}_3$ s'obtient à partir du raisonnement suivant :

$$\underline{\Sigma} \cdot \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{L}}_3 : \underline{\mathbf{G}} \quad (\text{A.26})$$

ou bien en notation indicielle :

$$\Sigma_{ip} W_{pj} = L_{3ijkl} G_{kl} \quad (\text{A.27})$$

Sachant que $\underline{\mathbf{W}}$ est antisymétrique, on peut exprimer la partie gauche de la relation précédente sous la forme :

$$\Sigma_{il} W_{lj} = -\Sigma_{il} W_{jl} = -\Sigma_{il} \delta_{jk} W_{kl} \quad (\text{A.28})$$

$$\Sigma_{ik} W_{kj} = \Sigma_{ik} \delta_{lj} W_{kl} \quad (\text{A.29})$$

En combinant les deux précédentes relations, on obtient :

$$\Sigma_{ip} W_{pj} = \frac{1}{2} \left[\Sigma_{ik} \delta_{lj} - \Sigma_{il} \delta_{jk} \right] W_{kl} = L_{3ijkl} W_{kl} \quad (\text{A.30})$$

La relation (A.30) montre que le tenseur L_{3ijkl} est antisymétrique sur les deux derniers indices.

À partir de cette propriété, on écrit :

$$\underline{\Sigma} \cdot \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{L}}_3 : \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{L}}_3 : \underline{\mathbf{G}} \quad (\text{A.31})$$

de sorte que

$$L_{3ijkl} = \frac{1}{2} \left[\Sigma_{ik} \delta_{lj} - \Sigma_{il} \delta_{jk} \right] \quad (\text{A.32})$$

Annexe A2

1 Calcul des termes intervenant dans la matrice Jacobienne

Les équations permettant de résoudre le problème se résument au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \Delta E_m (\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_{eq}) - \Delta E_{eq} (\partial \mathcal{F} / \partial \Sigma_m) \\ \mathcal{F}(\Sigma(\Delta E_m, \Delta E_{eq}), \sigma_M(\varepsilon_M^p), f_*(f)) \\ \Delta \varepsilon_M^p - \frac{\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq}}{(1-f)\sigma_M} \\ \Delta f - (1-f)\Delta E_m - \mathcal{A}_N \Delta \varepsilon_M^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_E \\ R_{\mathcal{F}} \\ R_{\varepsilon} \\ R_f \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Afin de résoudre ce système d'équations, on utilise la méthode de Newton-Raphson qui consiste à linéariser le résidu \mathbf{R} tel que :

$$\mathbf{R}^{(k)} + \mathbf{J}^{(k)} \delta \Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (\text{A.34})$$

où $\Delta \mathbf{x} = [\Delta E_m, \Delta E_{eq}, \Delta \varepsilon_M^p, \Delta f]^T = \mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{x}_t$, $\mathbf{R} = [R_E, R_{\mathcal{F}}, R_{\varepsilon}, R_f]^T$. $\mathbf{J}^{(k)}$ désigne la matrice Jacobienne évaluée à l'itération k tel que :

$$\mathbf{J}^{(k)} = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta \mathbf{x}} \right|^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

et

$$\delta \Delta \mathbf{x}^{(k)} = [\delta \Delta E_m, \delta \Delta E_{eq}, \delta \Delta \varepsilon_M^p, \delta \Delta f]^T \quad (\text{A.36})$$

On donne à présent l'expression des termes $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ qui interviennent dans la relation (A.35).

$$J_{aa} = \frac{\partial R_E}{\partial \Delta E_m} = \frac{1}{2\sigma_M^2} \left[4\Sigma_{eq} + 9q_1 q_2^2 K \Delta E_{eq} f_* \cosh(\eta) \right]; \quad \eta = \frac{3}{2} \frac{q_2 \Sigma_m}{\sigma_M} \quad (\text{A.37})$$

$$J_{ab} = \frac{\partial R_E}{\partial \Delta E_{eq}} = \frac{1}{\sigma_M^2} \left[-6\mu \Delta E_m - 3q_1 q_2 \sigma_M f_* \sinh(\eta) \right] \quad (\text{A.38})$$

$$J_{ac} = \frac{\partial R_E}{\partial \Delta \varepsilon_M^p} = -\frac{1}{2\sigma_M^3} \left[8\Sigma_{eq} \Delta E_m + 3q_1 q_2 f_* \Delta E_{eq} (-2\sigma_M \sinh(\eta) - 3q_2 \Sigma_m \cosh(\eta)) \right] \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} \quad (\text{A.39})$$

$$J_{ad} = \frac{\partial R_E}{\partial \Delta f} = \frac{3}{\sigma_M} q_1 q_2 \Delta E_{eq} \sinh(\eta) \frac{\partial f_*}{\partial f} \quad (\text{A.40})$$

$$J_{ba} = \frac{\partial R_{\mathcal{F}}}{\partial \Delta E_m} = -\frac{3}{\sigma_M} K q_1 q_2 f_* \sinh(\eta) \quad (\text{A.41})$$

$$J_{bb} = \frac{\partial R_{\mathcal{F}}}{\partial \Delta E_{eq}} = -\frac{6G}{\sigma_M^2} \Sigma_{eq} \quad (\text{A.42})$$

$$J_{bc} = \frac{\partial R_{\mathcal{F}}}{\partial \Delta \varepsilon_M^p} = -\frac{1}{\sigma_M^3} \left[2\Sigma_{eq}^2 - 3q_1 q_2 \Sigma_m \sigma_M f_{\star} \sinh(\eta) \right] \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} \quad (\text{A.43})$$

$$J_{bd} = \frac{\partial R_{\mathcal{F}}}{\partial \Delta f} = 2 \left[q_1 \cosh(\eta) - q_3 f_{\star} \right] \frac{\partial f_{\star}}{\partial f} \quad (\text{A.44})$$

$$J_{ca} = \frac{\partial R_{\varepsilon}}{\partial \Delta E_m} = -\frac{\Sigma_m - K \Delta E_m}{(1-f) \sigma_M} \quad (\text{A.45})$$

$$J_{cb} = \frac{\partial R_{\varepsilon}}{\partial \Delta E_{eq}} = -\frac{\Sigma_{eq} - 3G \Delta E_{eq}}{(1-f) \sigma_M} \quad (\text{A.46})$$

$$J_{cc} = \frac{\partial R_{\varepsilon}}{\partial \Delta \varepsilon_M^p} = \frac{(\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq}) \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} + \sigma_M^2 (1-f)}{(1-f) \sigma_M^2} \quad (\text{A.47})$$

$$J_{cd} = \frac{\partial R_{\varepsilon}}{\partial \Delta f} = -\frac{(\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq})}{(1-f)^2 \sigma_M} \quad (\text{A.48})$$

$$J_{da} = \frac{\partial R_f}{\partial \Delta E_m} = -(1-f) \quad (\text{A.49})$$

$$J_{db} = \frac{\partial R_f}{\partial \Delta E_{eq}} = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$J_{dc} = \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \varepsilon_M^p} = -\Delta \varepsilon_M^p \frac{\partial \mathcal{A}_N}{\partial \Delta \varepsilon_M^p} - \mathcal{A}_N \quad (\text{A.51})$$

$$J_{dd} = \frac{\partial R_f}{\partial \Delta f} = \Delta E_m + 1 \quad (\text{A.52})$$

tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} \\ J_{ba} & J_{bb} \end{bmatrix} ; & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} J_{ac} & J_{ad} \\ J_{bc} & J_{bd} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} J_{ca} & J_{cb} \\ J_{da} & J_{db} \end{bmatrix} ; & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} J_{cc} & J_{cd} \\ J_{dc} & J_{dd} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

et $K = \lambda + 2\mu/3$ et $G = \mu$ les modules de compressibilité et de cisaillement, respectivement, avec λ et μ les coefficients de Lamé.

2 Calcul des termes intervenant dans la construction du module tangent cohérent

L'expression du module tangent cohérent s'écrit sous la forme (voir Chapitre 2) :

$$\mathbf{L}_{\approx}^{\text{Algo}} = \left(\frac{d\mathbf{\Sigma}}{d\mathbf{E}} \right)_{t+\Delta t} = \left(\mathbf{M}_{\approx} + \mathbf{C}_{\approx}^{e-1} \right)^{-1} \quad (\text{A.54})$$

tel que :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \frac{1}{3} \left(D_{11} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} + D_{12} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \right) + D_{21} \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} + D_{22} \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{Q}}} + \Delta E_{eq} \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{Q}}}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad (\text{A.55})$$

Les termes intervenant dans la matrice $D_{\alpha\beta}$ vérifient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} d\Delta E_m &= (D_{11} \underline{\underline{\mathbf{1}}} + D_{12} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}) : d\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(m)} : d\underline{\underline{\Sigma}} \\ d\Delta E_{eq} &= (D_{21} \underline{\underline{\mathbf{1}}} + D_{22} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}) : d\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(eq)} : d\underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

tel que :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(m)} &= \frac{1}{(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(1)} A_{22} - \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(2)} A_{12} \right) \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(eq)} &= \frac{1}{(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(2)} A_{11} - \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(1)} A_{21} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Connaissant les tenseur $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(m)}$ et $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(eq)}$ il est possible de déterminer les facteurs $D_{\alpha\beta}$ intervenant dans la relation (A.56), étant donné que $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ est un tenseur déviatorique. D'autre part, la relation (2.74) du chapitre deux peut également se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} A_{11} d\Delta E_m + A_{12} d\Delta E_{eq} &= (B_{11} \underline{\underline{\mathbf{1}}} + B_{12} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}) : d\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(1)} : d\underline{\underline{\Sigma}} \\ A_{21} d\Delta E_m + A_{22} d\Delta E_{eq} &= (B_{21} \underline{\underline{\mathbf{1}}} + B_{22} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}) : d\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(2)} : d\underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Les termes $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\beta}$ sont donnés par les relations suivantes :

$$A_{11} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq}} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \left(\Delta E_m \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq} \partial y_\alpha} - \Delta E_{eq} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial y_\alpha} \right) C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Delta E_m} \quad (\text{A.59})$$

$$A_{12} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \left(\Delta E_m \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq} \partial y_\alpha} - \Delta E_{eq} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial y_\alpha} \right) C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Delta E_{eq}} \quad (\text{A.60})$$

$$A_{21} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_\alpha} C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Delta E_m} \quad (\text{A.61})$$

$$A_{22} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_\alpha} C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Delta E_{eq}} \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= -\frac{1}{3} \Delta E_m \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial \Sigma_{eq}} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq} \partial y_\alpha} C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Sigma_m} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \Delta E_{eq} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m^2} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial y_\alpha} C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Sigma_m} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$B_{12} = -\Delta E_m \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq}^2} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq} \partial y_\alpha} C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + \Delta E_{eq} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial \Sigma_{eq}} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial y_\alpha} C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \quad (\text{A.64})$$

$$B_{21} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_\alpha} C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Sigma_m} \right) \quad (\text{A.65})$$

$$B_{22} = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq}} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_\alpha} C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \quad (\text{A.66})$$

L'expression de la matrice $C_{\alpha\beta}$ est donnée par :

$$C_{\alpha\beta} = \left[\delta_{\alpha\beta} - \partial h_y^\beta / \partial y_\alpha \right]^{-1} \quad (\text{A.67})$$

2.1 Détail des dérivées

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial \Delta E_m} = C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Delta E_m} \quad (\text{A.68})$$

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial \Delta E_{eq}} = C_{\alpha\beta} \frac{\partial h_y^\beta}{\partial \Delta E_{eq}} \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m} = \frac{3q_1 q_2 f_\star \sinh(\eta)}{\sigma_M} \quad (\text{A.70})$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq}} = \frac{2\Sigma_{eq}}{\sigma_M^2} \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial \Sigma_{eq}} = 0 \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq}^2} = \frac{2}{\sigma_M^2} \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m^2} = \frac{9 q_1 q_2^2 f_\star \cosh(\eta)}{2 \sigma_M^2} \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial \varepsilon_M^p} = \left(\frac{9 q_1 q_2^2 f_\star \Sigma_m \cosh(\eta)}{2 \sigma_M^3} - \frac{3q_1 q_2 f_\star \sinh(\eta)}{\sigma_M^2} \right) \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} \quad (\text{A.75})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_m \partial f} = \frac{3q_1 q_2 \sinh(\eta)}{\sigma_M} \frac{\partial f_\star}{\partial f} \quad (\text{A.76})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq} \partial \varepsilon_M^p} = -\frac{4\Sigma_{eq}}{\sigma_M^3} \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} \quad (\text{A.77})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Sigma_{eq} \partial f} = 0 \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_M^p} = \left(-\frac{2\Sigma_{eq}^2}{\sigma_M^3} - \frac{3q_1q_2\Sigma_m f_\star \sinh(\eta)}{\sigma_M^2} \right) \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} = \left(2q_1 \cosh(\eta) - 2q_3 f_\star \right) \frac{\partial f_\star}{\partial f} \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{\partial h_y^1}{\partial \Delta E_m} = \frac{K\Sigma_m - \Delta E_m}{(1-f)\sigma_M} \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{\partial h_y^2}{\partial \Delta E_m} = \frac{\mathcal{A}_N(\Sigma_m - K\Delta E_m)}{(1-f)\sigma_M} + 1 - f \quad (\text{A.82})$$

$$\frac{\partial h_y^1}{\partial \Delta E_{eq}} = \frac{\Sigma_{eq} - 3G\Delta E_{eq}}{(1-f)\sigma_M} \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{\partial h_y^2}{\partial \Delta E_{eq}} = \frac{\mathcal{A}_N(\Sigma_{eq} - 3G\Delta E_{eq})}{(1-f)\sigma_M} \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{\partial h_y^1}{\partial \varepsilon_M^p} = \frac{(\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq})}{(1-f)\sigma_M} \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{\partial h_y^1}{\partial f} = \frac{\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq}}{(1-f)^2 \sigma_M} \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{\partial h_y^2}{\partial f} = \frac{\partial \mathcal{A}_N}{\partial \varepsilon_M^p} \left(\frac{\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq}}{(1-f)\sigma_M} \right) + \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} \left(\frac{\mathcal{A}_N(\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq})}{(1-f)\sigma_M^2} \right) \quad (\text{A.87})$$

$$\frac{\partial h_y^2}{\partial f} = \frac{\mathcal{A}_N(\Sigma_m \Delta E_m + \Sigma_{eq} \Delta E_{eq})}{(1-f)^2 \sigma_M} - \Delta E_m \quad (\text{A.88})$$

Bibliographie

Abed-Meraim, F., 2009. Contributions à la prédiction d'instabilités de type structure et matériau : modélisation de critères et formulation d'éléments finis adaptés à la simulation des structures minces. Habilitation à Diriger des Recherches. Metz: Université de Paul Verlaine.

Abed-Meraim, F., Balan, T. & Altmeyer, G., 2014. Investigation and comparative analysis of plastic instability criteria: application to forming limit diagrams. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 1(1), pp.1-16.

Abspoel, M., Scholting, M.E. & Droog, J.M., 2013. A new method for predicting Forming Limit Curves from mechanical properties. *Journal of Materials Processing Technology*, 213(5), pp.759-69.

Allwood, J.M. & Shouler, D.R., 2009. Generalised forming limit diagrams showing increased forming limits with non-planar stress states. *International Journal of Plasticity*, 25(7), pp.1207-1230.

Altmeyer, G., 2011. Modélisation théorique et numérique des critères d'instabilité plastique : Application à la prédiction des phénomènes de striction et de localisation lors d'opération de mise en forme par emboutissage. Thèse de Doctorat. Arts et Métiers Paris Tech.

Anand, L., Kim, K.H. & Shawki, T.G., 1987. Onset of shear localization in viscoplastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35(4), pp.407-429.

Anand, L. & Spitzig, W.A., 1980. Initiation of localized shear bands in plane strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 28(2), pp.113-128.

Aravas, N., 1987. On the numerical integration of a class of pressure dependant plasticity models. *International Journal of Numerical Methods and Engineering*, 24(7), pp.1395-1416.

Aretz, H., 2004. Numerical restrictions of the modified maximum force criterion for prediction of forming limits in sheet metal forming. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12(14), pp.677-692.

Aretz, H., 2007. Numerical analysis of diffuse and localized necking in orthotropic sheet metals. *International Journal of Plasticity*, 23(5), pp.798-840.

Argon, A.S., J, I. & Safoglu, R., 1975. Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Metallurgical Transactions A*, 6(4), pp.825-837.

Arrieux, R., Bedrin, C., Boivin, M. & Le Maître, R., 1985. Determination of the strain path influence of the forming limit diagrams, from the limit stress curve. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 34(1), pp.205-308.

Asaro, R.J. & Rice, J.R., 1977. Strain localization in ductile single crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25(5), pp.309-338.

Assempour, A., Nejadkhaki, H.K. & Hashemi, R., 2010. Forming limit diagrams with the existence of through-thickness normal stress. *Computational Materials Science*, 48(3), pp.504-518.

Babout, L., Maire, E., Buffière, J.Y. & Fougères, R., 2001. Characterization by X-ray computed tomography of decohesion, porosity growth and coalescence in model metal matrix composites. *Acta Materialia*, 49(11), pp.2055-2063.

Babout, L., Maire, E. & Fougères, R., 2004. Damage initiation in model metallic materials: X-ray tomography and modelling. *Acta materialia*, 52(8), pp.2475-2487.

- Bae, D.H. & Ghosh, A.K., 2002. Cavity formation and early growth in a superplastic Al–Mg alloy. *Acta materialia*, 50(3), pp.511-523.
- Bai, Y.L., 1981. In *International Conference on Metallurgical Effects of High-Strain-Rate Deformation and Fabrication*. Albuquerque, 1981.
- Bai, Y.L., 1982. Thermo-plastic instability in simple shear. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30(4), pp.195-207.
- Balan, T., 2009. *Mise en forme des tôles métalliques : interactions entre modélisation du comportement et simulation du procédé*. Habilitation à Diriger des Recherches. Metz: Université de Paul Verlaine.
- Banabic, D., 2010. A review on recent developments of Marciniak-Kuczynski model. *Computer Methods in Materials Science*, 10(1), pp.225-237.
- Banabic, D., 2010. Plastic behaviour of sheet metal. In *Sheet Metal Forming Processes*. Berlin Heidelberg: Springer. pp.27–140.
- Banabic, D., Aretz, H., Paraianu, L. & Jurco, P., 2005. Application of various FLD modelling approaches. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 13(5), pp.759-775.
- Barata da Rocha, A., Barlat, F. & Jalinier, J.M., 1985. Prediction of the forming limit diagrams of anisotropic sheets in linear and non-linear loading. *Materials Science and Engineering*, 68(2), pp.151-164.
- Barbier, G., Benallal, A. & Cano, V., 1999. Relation théorique entre la méthode de perturbation linéaire et l'analyse de bifurcation pour la prédiction de la localisation des déformations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 326(3), pp.153-158.
- Barlat, F., 1987. Crystallographic texture, anisotropic yield surfaces and forming limits of sheet metals. *Materials Science and Engineering*, 91, pp.55-72.
- Barlat, F. & Lian, K., 1989. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *International Journal of Plasticity*, 5(1), pp.51-66.
- Barlat, F., Yoon, J.W. & Cazacu, O., 2007. On linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy. *International Journal of Plasticity*, 23(5), pp.876-896.
- Becker, R., 1987. The effect of porosity distribution on ductile failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35(5), pp.577-599.
- Becker, R., Needleman, A., Richmond, O. & Tvergaard, V., 1988. Void growth and failure in notched bars. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36(3), pp.317-351.
- Bettaieb, M. B., Lemoine, X., Duchêne, L., & Habraken, A. M., 2011. On the numerical integration of an advanced Gurson model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(8), 1049-1072.
- Bettaieb, M. B., Lemoine, X., Duchêne, L., & Habraken, A. M., 2010. Simulation of the bending process of hardening metallic sheets using damage model. Part I: Theoretical development and numerical implementation. *Materials Science and Engineering: A*, 528(1), 434-441.
- Ben Tahar, M., 2005. *Contribution à l'étude et la simulation du procédé d'hydroformage*. Thèse de Doctorat. Nice : Mines ParisTech.

- Benallal, A., Billardon, R. & Lemaitre, J., 1991. Continuum damage mechanics and local approach to fracture: numerical procedures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(2), pp.141–155.
- Benallal, A. & Comi, C., 2003. Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(5), pp.851–899.
- Benallal, A. & Tvergaard, V., 1995. Nonlocal continuum effects on bifurcation in the plane strain tension-compression test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(5), pp.741-770.
- Benzerga, A.A., 2002. Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(6), pp.1331-1362.
- Benzerga, A.A. & Besson, J., 2001. Plastic potentials for anisotropic porous solids. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 20(3), pp.397-434.
- Benzerga, A.A., Besson, J. & Pineau, A., 1999. Coalescence-controlled anisotropic ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 121(2), pp.221-229.
- Benzerga, A.A., Besson, J. & Pineau, A., 2004. Anisotropic ductile fracture: Part I: experiments. *Acta Materialia*, 52(15), pp.4623-4638.
- Benzerga, A.A., Besson, J. & Pineau, A., 2004. Anisotropic ductile fracture: Part II: theory. *Acta Materialia*, 52(15), pp.4639-4650.
- Benzerga, A.A. & Leblond, J.B., 2010. Ductile fracture by void growth to coalescence.. *Advances in Applied Mechanics*, 44, pp.169-305.
- Beremin, F.M., 1981. Cavity formation from inclusions in ductile fracture of a 508 steel. *Metallurgical Transactions A*, 12(5), pp.723-731.
- Berveiller, M. & Zaoui, A., 1979. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26(5), pp.325-344.
- Besson, J., 2009. Damage of ductile materials deforming under multiple plastic or viscoplastic mechanisms. *International Journal of Plasticity*, 25(11), pp.2204-2021.
- Besson, J., 2010. Continuum models of ductile fracture: a review. *International Journal of Damage Mechanics*, 19(1), pp.3–52.
- Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L. & Forest, S., 2009. *Non-linear mechanics of materials. Series: Solid Mechanics and Its Applications* ed. Berlin: Springer.
- Besson, J., Devillers-Guerville, L. & Pineau, A., 2000. Modeling of scatter and size effect in ductile fracture: application to thermal embrittlement of duplex stainless steels. *Engineering Fracture Mechanics*, 67(2), pp.169-190.
- Besson, J. & Guillemer-Neel, C., 2003. An extension of the Green and Gurson models to kinematic hardening. *Mechanics of Materials*, 35(1), pp.1-18.
- Besson, J., Steglich, D. & Brocks, W., 2001. Modeling of crack growth in round bars and plane strain specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 38(46), pp.8259-8284.
- Besson, J., Steglich, D. & Brocks, W., 2003. Modeling of plane strain ductile rupture. *International Journal of Plasticity*, 19(10), pp.1517-1541.
- Bigoni, D., 1996. On smooth bifurcations in non-associative elastoplasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(8), pp.1337-1351.

- Bigoni, D. & Hueckel, T., 1991. Uniqueness and localization—I. Associative and non-associative elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28(2), pp.197-213.
- Bigoni, D. & Zaccaria, D., 1992. Loss of strong ellipticity in non-associative elastoplasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(6), pp.1313-1331.
- Boudeau, N. & Gelin, J.C., 2000. Necking in sheet metal forming. Influence of macroscopic and microscopic properties of materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42(11), pp.2209-2232.
- Brocks, W., Sun, D.Z. & Hömig, A., 1995. Verification of the transferability of micromechanical parameters by cell model calculations with visco-plastic materials. *International Journal of Plasticity*, 11(8), pp.971-989.
- Brown, L.M. & Embury, J.D., 1973. Initiation and growth of voids at second-phase particles. In *Proceeding Conference on Microstructure and Design of Alloys*. London, 1973. Institute of Metals and Iron and Steel Insitute.
- Brunet, M., Mguil, S. & Morestin, F., 1998. Analytical and experimental studies of necking in sheet metal forming processes. *Journal of Material Processing Technology*, 80, pp.40-46.
- Brunet, M. & Morestin, F., 2001. Experimental and analytical necking studies of anisotropic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*, 112(2), pp.214-226.
- Brunet, M., Morestin, F., & Walter, H., 2004. Damage identification for anisotropic sheet-metals using a non-local damage model. *International Journal of Damage Mechanics*, 13(1), 35-57.
- Brüinig, M., Chyra, O., Albrecht, D., Driemeier, L. & Alves, M., 2008. A ductile damage criterion at various stress triaxialities. *International Journal of Plasticity*, 24(10), pp.1731–1755.
- Butuc, M. C., Barlat, F., Gracio, J. J., & da Rocha, A. B., 2010. A new model for FLD prediction based on advanced constitutive equations. *International Journal of Material Forming*, 3(3), 191-204.
- Butuc, M.C., Vincze, G.T., Gracio, J.J. & Barata da Rocha, A., 2005. A Comparative Study Between Strain And Stress Based Forming Limit Analysis By Applying Several Phenomenological Yield Criteria. In *NumeeSheet*, 2005. edited by L. M. Smith, F. Pourboghrat, J.-W. Yoon, T. B. Stoughton.
- Cao, J., Yao, H., Karafillis, A. & Boyce, M.C., 2000. Prediction of localized thinning in sheet metal using a general anisotropic yield criterion. *International Journal of Plasticity*, 16(9), pp.1105-29.
- Chabanet, O., Steglich, D., Besson, J. & Brocks, X., 2003. Predicting crack growth resistance of aluminium sheets. *Computational Materials Science*, 26(1), pp.1-12.
- Chaboche, J.L., 1979. Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope. In *Boehler, J.-P., ed. Colloque EUROMECH*. Grenoble, 1979. Editions du CNRS.
- Chaboche, J.L., 1981. Continuous damage mechanics—a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering and Design*, 64(2), pp.233-247.
- Chaboche, J.L., 1999. Thermodynamically founded CDM models for creep and other conditions. In *Creep and damage in materials and structures*. Vienna: Springer-Verlag. pp.209-283.
- Chaboche, J.L. & Cailletaud, G., 1996. Integration methods for complex plastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133(1), pp.125-155.
- Chang, Y.W. & Asaro, R.J., 1981. An experimental study of shear localization in aluminum-copper single crystals. *Acta Metallurgica*, 29(1), pp.241-257.

- Chen, Z. & Worswick, M.J., 2008. Investigation of void nucleation in Al–Mg sheet. *Materials Science and Engineering: A*, 483(1), pp.99-101.
- Chen, Z., Worswick, M.J., Pilkey, K. & Lloyd, D.J., 2005. Damage percolation during stretch flange forming of aluminum alloy sheet. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(1), p.2692–2717.
- Chow, C.L. & Wang, J., 1987. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(5), pp.547-558.
- Chu, C.C. & Needleman, A., 1980. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *Journal of Engineering Material and Technology*, 102(3), pp.249-256.
- Clifton, R.J., 1980. Adiabatic shear banding. In *Materials Response to Ultra-High Loading Rates*. Washington D.C.: National Materials Advisory Board.
- Col, A., 2006. Emboutissage des tôles : Importance des modes de déformation. *Techniques de L'ingénieur*, M(3180), pp.1-20.
- Col, A., 2010. *L'emboutissage des aciers*. Paris ed. Paris: Dunod.
- Considère, A., 1885. *Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions*. Paris: Annales des ponts et chaussées.
- Cordebois, J.P. & Sidoroff, F., 1982. Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Numéro spécial, pp.45-60.
- Cottrell, A.H., 1958. Theory of brittle fracture in steel and similar metals. *Transaction Metallurgical Society*, 212.
- Cox, T.B. & Low, J.R., 1974. Investigation of the plastic fracture of aisi 4340 and 18 nickel - 200 grade maraging steels. *Metallurgical Transactions*, 5(6), pp.1457-1470.
- Crété, J. P., Longère, P., & Cadou, J. M., 2014. Numerical modelling of crack propagation in ductile materials combining the GTN model and X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 275, 204-233.
- Dasappa, P., Inal, K. & Mishra, R., 2012. The effects of anisotropic yield functions and their material parameters on prediction of forming limit diagrams. *International Journal of Solids and Structures*, 49(25), pp.3528-3550.
- de Borst, R., 1988. Bifurcations in finite element models with a non-associated flow law. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 12(1), pp.99-116.
- de Borst, R., Pamin, J., & Geers, M. G., 1999. On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 18(6), 939-962.
- Devillers-Guerville, L., Besson, J. & Pineau, A., 1997. Notch fracture toughness of a cast duplex stainless steel: modelling of experimental scatter and size effect. *Nuclear Engineering and Design*, 168(1), pp.211-225.
- Dilmec, M., Halkaci, H. S., Ozturk, F., Livatyali, H. & Yigit, O., 2013. Effects of sheet thickness and anisotropy on forming limit curves of AA2024-T4. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67 (9-12), pp.2689–2700.

- Doghri, I. & Billardon, R., 1995. Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials. *Mechanics of Materials*, 19(2), pp.129-149.
- Dudzinski, D. & Molinari, A., 1991. Perturbation analysis of thermoplastic instabilities in biaxial loading. *International Journal of Solids and Structures* 27, pp.601-628.
- Dunand, M. & Mohr, D., 2011. On the predictive capabilities of the shear modified Gurson and the modified Mohr–Coulomb fracture models over a wide range of stress triaxialities and Lode angles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(7), p. 1374-1394.
- Eyckens, P., 2009. Formability in incremental sheet forming: generalization of the Marciniak–Kuczynski model. Thèse de Doctorat. Katholieke Universiteit Leuven.
- Eyckens, P., Van Bael, A. & Van Houtte, P., 2009. Marciniak–Kuczynski type modelling of the effect of through-thickness shear on the forming limits of sheet metal. *International Journal of Plasticity*, 25(12), pp.2249-2268.
- Eyckens, P., Van Bael, A. & Van Houtte, P., 2011. An extended Marciniak–Kuczynski model for anisotropic sheet subjected to monotonic strain paths with through-thickness shear. *International Journal of Plasticity*, 27(10), pp.1577-1597.
- Faleskog, J., Gao, X. & Shih, C.F., 1998. Cell model for nonlinear fracture analysis—I. Micromechanics calibration. *International Journal of Fracture*, 89(4), pp.355-373.
- Faleskog, J. & Shih, C.F., 1997. Micromechanics of coalescence—I. Synergistic effects of elasticity, plastic yielding and multi-size-scale voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(1), pp.21-50.
- Fleck, N.A. & Hutchinson, J.W., 1986. Void growth in shear. In *Proceedings of the Royal Society of London*, 1986. *Mathematical and Physical Sciences*, 407(1833), 435-458.
- François, D., 2012. *Endommagement et rupture de matériaux*. Paris: EDP sciences.
- Franklin, A.G., 1969. Comparison between a quantitative microscope and chemical methods for assessment of non-metallic inclusions. *Journal of Iron Steel Institute*, 207(2), pp.181-186.
- Franz, G., Abed-Meraim, F., & Berveiller, M., 2013. Strain localization analysis for single crystals and polycrystals: towards microstructure-ductility linkage. *International Journal of Plasticity*, 48, 1-33.
- Franz, G., Abed-Meraim, F., Lorrain, J.-P., Ben Zineb, T., Lemoine, X. & Berveiller, M., 2009. Ellipticity loss analysis for tangent moduli deduced from a large strain elastic–plastic self-consistent model. *International Journal of Plasticity*, 25(2), pp.205–238.
- Freed, A. & Walker, K.P., 1992. Exponential integration algorithm for first-order ODEs with application to viscoplasticity. In *ASME Summer Conference On Mechanics and Materials Recent Advances on Damage Mechanics and Plasticity*. Tempe, 1992.
- Fressengeas, C. & Molinari, A., 1987. Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35(2), pp.185-211.
- Fromentin, S., 1998. Etablissement d'un critère de striction intrinsèque des tôles et validation numérique par simulations d'emboutissage. Thèse de Doctorat. Metz: Université de Paul Verlaine.
- Gao, X. & Kim, J., 2006. Modeling of ductile fracture: significance of void coalescence. *International Journal of Solids and Structures*, 43(20), pp.6277-6293.
- Garrison, W.M. & Moody, N.R., 1987. Ductile fracture. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 48(11), pp.1035-1074.

- Geng, L. & Wagoner, R.H., 2002. Role of plastic anisotropy and its evolution on springback. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(1), pp.123-148.
- Ghosh, K.A., 1974. Strain localization in the diffuse neck in sheet metal. *Metallurgical and Materials Transactions*, 5(7), pp.1607-1616.
- Gilormini, P. & Montheillet, F., 1986. Deformation of an inclusion in a viscous matrix and induced stress concentrations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(2), pp.97-123.
- Gologanu, M., Leblond, J.B. & Devaux, J., 1993. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids-case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(11), pp.1723-1754.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., Perrin, G. & Devaux, J., 1997. Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. In Suquet, P. *Continuum Micromechanics, CISM Courses and Lectures*. New York: Springer. p.61–130.
- Gologanu, M., Leblond, J.B., Perrin, G. & Devaux, J., 2001. Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids. I. Coalescence “in layers”. *International Journal of Solids and Structures*, 38(32), pp.5581-5594.
- Goods, S.H. & Brown, L.M., 1979. The nucleation of cavities by plastic deformation. *Acta Metallurgica*, 27(1), pp.1-15.
- Goodwin, G.M., 1968. Application of strain analysis to sheet metal forming problems in the press shop. SAE Technical Paper No. 680093.
- Graf, A. & Hosford, W., 1994. The influence of strain-path changes on forming limit diagrams of A1 6111 T4. *International Journal of Mechanical Sciences*, 36(10), pp.897-910.
- Green, A.E. & Naghdi, P.M., 1965. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 18(4), pp.251-281.
- Gullerud, A.S., Gao, X. & Dodds, R.H., 2001. Simulation of ductile crack growth using computational cells: numerical aspects. *Engineering Fracture Mechanics*, 66(1), pp.65-92.
- Gurson, A.L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I—Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of engineering materials and technology, Transactions of the ASME*, 99(1), pp.2-15.
- Gurtin, M.E. & Anand, L., 2005. The decomposition $F = F_e F_p$, material symmetry, and plastic irrotationality for solids that are isotropic-viscoplastic or amorphous. *International Journal of Plasticity*, 21(9), pp.1686-719.
- Hadamard, J., 1903. *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Chelsea.
- Haddag, B., 2007. Contribution à la modélisation de la mise en forme des tôles métalliques : Application au retour élastique et à la localisation. Thèse de doctorat. Metz: Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.
- Haddag, B., Abed-Meraim, F. & Balan, T., 2009. Strain localization analysis using a large deformation anisotropic elastic-plastic model coupled with damage. *International Journal of Plasticity*, 25(10), pp.1970-1996.
- Haddag, B., Balan, T. & Abed-Meraim, F., 2007. Investigation of advanced strain-path dependent material models for sheet metal. *International Journal of Plasticity* 23, p.951–979.

- Hammi, Y., Bammann, D.J. & Horstemeyer, M.F., 2004. Modeling of anisotropic damage for ductile materials in metal forming processes. *International Journal of Damage Mechanics*, 13(2), pp.123-146.
- Hammi, Y. & Horstemeyer, M.F., 2007. A physically motivated anisotropic tensorial representation of damage with separate functions for void nucleation, growth, and coalescence. *International Journal of Plasticity*, 23(10), pp.1641-1678.
- Hart, E.W., 1967. Theory of the tensile test. *Acta Metallurgica*, 15(2), pp.351-355.
- Hill, R., 1948. A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 193(1033), pp.281-297.
- Hill, R., 1950. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press.
- Hill, R., 1952. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1, pp.19-30.
- Hill, R., 1957. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 5(4), 229-241.
- Hill, R., 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 6, pp.236-49.
- Hill, R., 1962. Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(1), pp.1-16.
- Hill, R., 1978. Aspects of invariance in solid mechanics. *Advances in applied mechanics*, 18, pp.1-75.
- Hill, R., 1993. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 35(1), pp.19-25.
- Hill, R., 2001. On the mechanics of localized necking in anisotropic sheet metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(9), pp.2055-70.
- Hiwatashi, S., Van Bael, A. & Teodosiu, C., 1998. Prediction of forming limit strains under strain-path changes: application of an anisotropic model based on texture and dislocation structure. *International Journal of Plasticity*, 14(7), pp.647-669.
- Hoc, T., Dirras, G.F. & Rey, C., 2001. Mesostructure of the localization in prestrained mild steel. *Scripta materialia*, 42(8), pp.749-754.
- Hong, P.Y., Pereira, J.M., Cui, Y.J. & Tang, A., 2012. Explicit integration of a thermo-mechanical model for clays. *Computers & Geomechanics*, 46(1), pp.13-25.
- Hora, P., Tong, L. & Berisha, B., 2013. Modified maximum force criterion, a model for the theoretical prediction of forming limit curves. *International Journal of Material Forming*, 6(2), pp.1-13.
- Hora, P., Tong, L. & Reissner, J., 1996. A prediction method of ductile sheet metal failure in FE simulation. In University, O.S., ed. 3rd international Conference Numisheet. Michigan USA, 1996.
- Huang, Y., 1991. Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields. *Journal of Applied Mechanics*, 58(4), p.1084.
- Huang, H. & Xue, L., 2009. Prediction of slant ductile fracture using damage plasticity theory. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 86(5), pp.319-28.
- Hughes, T.J.R. & Winget, J., 1980. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(12), pp.1862-1867.

- Hutchinson, J.W. & Neale, K.W., 1978. Sheet Necking-I. Validity of plane stress assumption of the long-wave length approximation. In Wang, K.A., ed. *Mechanics of Sheet Metal Forming*. New York, 1978. Plenum Press.
- Hutchinson, J.W. & Neale, K.W., 1978. Sheet necking-II. Time-independent behavior. In US, S., ed. *Mechanics of sheet metal forming*. New York, 1978. Plenum Press.
- Kachanov, L.M., 1958. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk*, 26-31, p.8.
- Kanetake, N., Nomura, M. & Choh, T., 1995. Continuous observation of microstructural degradation during tensile loading of particle reinforced aluminium matrix composites. *Materials Science and Technology*, 11(12), pp.1246-1252.
- Keavey, M.A., 2006. A simplified canonical form algorithm with application to porous metal plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(5), pp.679-700.
- Keeler, S.P. & Backofen, W.A., 1963. Plastic instability and fracture in sheets stretched over rigid punches. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 56(1), pp.25-48.
- Keryvin, V., 1999. Contribution à la modélisation de l'endommagement localisé. 1999. Thèse de doctorat. University of Poitiers, Poitiers.
- Kim, J., Gao, X. & Srivatsan, T.S., 2004. Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity. *Engineering Fracture Mechanics*, 71(3), pp.379-400.
- Koplik, J. & Needleman, A., 1988. A void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids Structures*, pp.32:57-169.
- Krajcinovic, D., 1985. Continuous damage mechanics revisited- Basic concepts and definitions. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics*, 52, pp.829-834.
- Kuroda, M., 1996. Roles of plastic spin in shear banding. *International Journal of Plasticity*, 12(5), pp.671-93.
- Kuroda, M. & Tvergaard, V., 2000. Effect of strain path change on limits to ductility of anisotropic metal sheets. *International Journal Mechanical Science*, 42(5), p.867-887.
- Kuwabara, T., Umemura, M., Yoshida, K. & Kuroda, m., 2005. Forming limits of 5000 series aluminum alloys with different magnesium contents. In Banabic, D., ed. In *Proc. 8th ESAFORM Conference on Material Forming*. Cluj-Napoca, 2005.
- Landron, C., Bouaziz, O., Maire, E. & Adrien, J., 2010. Characterization and modeling of void nucleation by interface decohesion in dual phase steels. *Scripta Materialia*, 63(10), pp.973-976.
- Leblond, J.B. & Perrin, G., 1999. A self-consistent approach to coalescence of cavities in inhomogeneously voided ductile solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(9), pp.1823-1841.
- Leblond, J.-B., Perrin, G. & Devaux, J., 1995. An improved Gurson-type model for hardenable ductile metals. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 14(4), pp.499-527.
- Lecarme, L. & Pardoën, T., 2011. Void growth and coalescence in ductile solids with stage III and stage IV strain hardening. *International Journal of Plasticity*, 27(8), pp.1203-1223.
- Lee, E.H., 1969. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 69, pp.1-13.

- Lee, J.H., 1988. Accuracies of numerical solution methods for the pressure-modified von Mises model. *International journal for numerical methods in engineering*, 26(2), pp.453-465.
- Lee, M.G., Kim, D., Kim, C. & Wenner, M.L., 2005. Spring-back evaluation of automotive sheets based on isotropic-kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions, part III: applications.. *International Journal of Plasticity*, 21(5), pp.915-953.
- Lemaitre, J., 1970. Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-viscoplastiques. Thèse de Doctorat. Office national d'études et de recherches aérospatiales.
- Lemaitre, J., 1996. A course on damage mechanics. Berlin: Springer.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.-L., 1990. Mécanique des milieux solides. Paris: Dunod.
- Liao, K.-C., Pan, J. & Tang, S.C., 1997. Approximate yield criteria for anisotropic porous ductile sheet metals. *Mechanics of Materials*, 26(4), pp.213-226.
- Lievers, W.B., Pilkey, A.K. & Lloyd, D.J., 2004. Using incremental forming to calibrate a void nucleation model for automotive aluminum sheet alloys. *Acta Materialia*, 52(10), pp.3001-3007.
- Li, H., Fu, M.W., Lu, J. & Yang, H., 2011. Ductile fracture: experiments and computations. *International Journal of Plasticity*, 27(2), pp.147-180.
- Li, M.Y., Zhu, X. & Chu, E., 2012. Effect of Strain Rate Sensitivity on FLDs-An Instability Approach. *International Journal of Mechanical Sciences*, 64(1), pp.273-279.
- Longère, P., & Dragon, A., 2013. Description of shear failure in ductile metals via back stress concept linked to damage-microporosity softening. *Engineering Fracture Mechanics*, 98, 92-108.
- Loret, B., Hammoum, F. & Dafalias, Y.F., 1992. A note on the accuracy of stress-point algorithms for anisotropic elastic-plastic solids. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 98(3), pp.399-409.
- Maire, E., Bordreuil, C., Babout, L. & Boyer, J.C., 2005. Damage initiation and growth in metals. Comparison between modelling and tomography experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(11), pp.2411-2434.
- Maire, E., Bouaziz, O., Di Michiel, M. & Verdu, C., 2008. Initiation and growth of damage in a dual-phase steel observed by X-ray microtomography. *Acta materialia*, 56(18), pp.4954-4964.
- Maire, E., Zhou, S., Adrien, J. & Dimichiel, M., 2011. Damage quantification in aluminium alloys using in situ tensile tests in X-ray tomography. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(15), pp.2679-2690.
- Makkouk, R., Bourgeois, N., Serri, J., Bolle, B., Martiny, M., Teaca, M., & Ferron, G., 2008. Experimental and theoretical analysis of the limits to ductility of type 304 stainless steel sheet. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27(2), 181-194.
- Malcher, L., Andrade Pires, F.M. & César de Sá, C.M.A., 2014. An extended GTN model for ductile fracture under high and low stress triaxiality. *International Journal of Plasticity*, 54(1), pp.193-228.
- Mandel, J., 1966. Conditions de stabilité et postulat de Drucker. In *Rhéologie et Mécanique des Sols*. Grenoble, 1966. Springer Berlin Heidelberg.
- Mansouri, L.Z., Chalal, H. & Abed-Meraim, F., 2014. Ductility limit prediction using a GTN damage model coupled with localization bifurcation analysis. *Mechanics of Materials*, 76(1), pp.64-92.

- Mansouri, L.Z., Chalal, H., Abed-Meraim, F. & Balan, T., 2012. Plastic instability based on bifurcation analysis: effect of hardening and Gurson damage parameters on strain localization. *Key Engineering Materials*, 504, pp.35–40.
- Marciniak, Z., Duncan, J.L. & Hu, S.J., 2002. *Mechanics of Sheet Metal Forming*. Londres: Butterworth-Heinemann.
- Marciniak, Z. & Kuczyński, k., 1967. Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal. *International Journal of Mechanical Sciences*, 9(9), pp.609-620.
- Marciniak, Z., Kuczyński, K. & Pokora, T., 1973. Influence of the plastic properties of a material on the forming limit diagram for sheet metal in tension. *International Journal of Mechanical Sciences*, 15(10), pp.789-800.
- Marini, B., Mudry, F. & Pineau, A., 1985. Ductile rupture of A508 steel under nonradial loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 22(3), pp.375-386.
- Mattiasson, K., Sigvant, M. & Larson, M., 2006. Methods for forming limit prediction in ductile metal sheets. In *Proceedings of IDDRG. Porto, 2006*.
- McClintock, F., 1968. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35(1), pp.363-71.
- Mear, M.E. & Hutchinson, J.W., 1985. Influence of yield surface curvature on flow localisation in dilatant plasticity. *Mechanics of Materials*, 4(1), pp.395-407.
- Mguil, S., 1997. Une technique de corrélation d'images numérique : application a la détermination des courbes limites de formage et proposition d'un critère de striction. Villeurbanne: PhD. Institut des Sciences Appliquées de Lyon.
- Mirsky, L., 1958. *An introduction to linear algebra*. Courier : Dover Publications.
- Montheillet, F. & Briotet, L., 2009. Endommagement et ductilité en mise en forme. *Techniques de l'Ingénieur*, M(601), pp.1-12.
- Morgeneyer, T.F. & Besson, J., 2011. Flat to slant ductile fracture transition: Tomography examination and simulations using shear-controlled void nucleation. *Scripta Materialia*, 65(11), pp.1002-1005.
- Moussy, F. & Montheillet, F., 2012. *Physique et mécanique de l'endommagement*. EDP Sciences.
- Murakami, S., 1983. Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory. *ASME, Transactions, Journal of Engineering Materials and Technology*, 105, pp.99-105.
- Nahshon, K. & Hutchinson, J.W., 2008. Modification of the Gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27(1), pp.1-17.
- Nakazima, K., Kikuma, T. & Hasuka, K., 1968. Study on the formability of steel sheets. *Yawata Tech. Rep.*, 265, pp.517-530.
- Needleman, A. & Rice, J.R., 1978. Limits to ductility set by plastic flow localization. In *Mechanics of Sheet Metal Forming*. New York: Plenum Publishing Corporation. pp.264-265.
- Needleman, A., 1988. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1), pp.69-85.

- Needleman, A. & Tvergaard, V., 1987. An analysis of ductile rupture modes at a crack tip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35(3), pp.151-183.
- Needleman, A. & Tvergaard, V., 1992. Analyses of plastic flow localization in metals. *Applied Mechanics Reviews*, 45, pp.1-18.
- Neilsen, M.K. & Schreyer, H.L., 1993. Bifurcations in elastic-plastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 30(4), pp.521-544..
- Ortiz, M. & Popov, E.P., 1985. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(9), pp.1561-76.
- Pardoen, T., 2010. Communication privée.
- Pardoen, T. & Delannay, F., 1998. Assessment of void growth models from porosity measurements in cold-drawn copper bars. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 29(7), pp.1895-909.
- Pardoen, T. & Hutchinson, J.W., 2000. An extended model for void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(12), p.2467–2512.
- Pearce, R., 1991. *Sheet metal forming*. Springer.
- Pepelnjak, T. & Kuzman, K., 2007. Numerical determination of the forming limit diagrams. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 20(1-2), pp.375-378.
- Perrin, G., 1992. Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux. Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique de Paris.
- Perrin, G. & Leblond, J.B., 1990. Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension-application to some problems in ductile fracture of metals. *International Journal of Plasticity*, 6(6), pp.677-699.
- Rabotnov, Y.N., 1968. Creep rupture. In *Proceedings of the XII international congress on applied mechanics*, 1968.
- Requena, G., Maire, E., Leguen, C. & Thuillier, S., 2014. Separation of nucleation and growth of voids during tensile deformation of a dual phase steel using synchrotron microtomography. *Materials Science & Engineering A*, 58(1), p.242–251.
- Rice, J.R., 1973. The initiation and growth of shear bands. *Proc. of the symposium of the role of plasticity in soil mechanics*. Cambridge/UK, Septembre 1973.
- Rice, J.R., 1976. The localization of plastic deformation. In W.T. Koiter, ed. *Theoretical and Applied Mechanics*. North-Holland Publishing Company ed. Amsterdam: eds Koiter. pp.207-220.
- Rice, J.R. & Rudnicki, J.W., 1980. A note on some features of the theory of localization of deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 16(7), pp.597-607.
- Rice, J.R. & Tracey, D.M., 1969. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(3), pp.201-217.
- Richelsen, A.B. & Tvergaard, V., 1994. Dilatant plasticity or upper bound estimates for porous ductile solids. *Acta metallurgica et materialia*, 42(8), pp.2561-2577.
- Rousselier, G., 1987. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design*, 105(1), pp.97-111.
- Rousselier, G., 2001. Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(8), pp.1727-1746.

- Rudnicki, J.W. & Rice, J.R., 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6), pp.371-394.
- Saje, M., Pan, J. & Needleman, A., 1982. Void nucleation on shear localization in porous solids. *International Journal of Fracture*, 19(3), pp.163-182.
- Sánchez, P.J., Huespe, A.E. & Oliver, J., 2008. On some topics for the numerical simulation of ductile fracture. *International Journal of Plasticity*, 24(6), pp.1008-1038.
- Schleich, R., Sindel, M. & Liewald, M., 2009. Investigation on the effect of curvature on forming limit prediction for aluminium sheet alloys. *International Journal of Material Forming*, 2(2), pp.69-74.
- Shabrov, M.N., Briant, C. L., Needleman, A., Kim, S., Sylven, E., Sherman, D. H., Chuzhoy, L., 2004. Void nucleation by inclusion cracking. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 35(6), pp.1745-1755.
- Sidoroff, F., 1982. Cours sur les grandes déformations. Rapport G.R.E.C.O. N°51. LMT Cachan.
- Simha, C.M.H., Grantab, R. & Worswick, M.J., 2007. Computational analysis of stress-based forming limit curves. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25), p.663–684.
- Simo, J.C. & Hughes, T.J.R., 1998. *Computational inelasticity*. New York.
- Simo, J.C. & Taylor, R., 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, pp.101-118.
- Son, H.S. & Kim, Y.S., 2003. Prediction of forming limits for anisotropic sheets containing prolate ellipsoidal voids. *International journal of mechanical sciences*, 45(10), pp.1625-1643.
- Søvik, O.P., 1996. Experimental and numerical investigation of void nucleation in an AlMgSi alloy. *Journal de Physique*, 6(C6), pp.C6-155.
- Spitzig, W.A., 1985. Effect of various sulfide stringer populations on the ductility of hot-rolled C-Mn steels. *Acta Metallurgica*, 33(2), pp.175-184.
- Springmann, M. & Kuna, M., 2005. Identification of material parameters of the Gurson–Tvergaard–Needleman model by combined experimental and numerical techniques. *Computational Materials Science*, 32(3), pp.544-52.
- Steglich, D. & Brocks, W., 1998. Micromechanical modelling of damage and fracture of ductile materials. *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, 21(10), pp.1175-1188.
- Stören, S. & Rice, J.R., 1975. Localized necking in thin sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6), pp.421-441.
- Stoughton, T.B. & Zhu, X., 2004. Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD. *International Journal of plasticity*, 20(8), pp.1463-1486.
- Swift, H.W., 1952. Plastic instability under plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1(1), pp.1-18.
- Szabó, L., 2000. Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 37(28), pp.3775-3806.
- Talyan, V., Wagoner, R.H. & Lee, J.K., 1998. Formability of stainless steel. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 29(8), pp.2161-2172.
- Tamarelli, C.M., 2011. *The Evolving Use of of Advanced High-Strength Steels for Automotive Applications*. Southfield Michigan: www.autosteel.org Steel Market Development Institute.

- Tasan, C.C., Hoefnagels, J.P.M., Ten Horn, C.H.L.J. & Geers, M.G.D., 2009. Experimental analysis of strain path dependent ductile damage mechanics and forming limits. *Mechanics of Materials*, 41 (11), pp.1264-1276.
- Tekoglu, C., Leblond, J.B. & Pardoën, T., 2012. A criterion for the onset of void coalescence under combined tension and shear. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(7), pp.1363-1381.
- Teodosiu, C. & Hu, Z., 1998. Microstructure in the continuum modelling of plastic anisotropy. *Nineteenth Riso International Symposium on Materials Science*, pp.149-168.
- Thomas, T.Y., 1962. *Plastic flow and fracture in solids*. New York., 1962.
- Thomason, P.F., 1985. A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of micro-voids. *Acta Metallurgica*, 33(6), pp.1087-1182.
- Thompson, A.W. & Williams, J.C., 1978. Nuclei for ductile fracture in titanium. In *ICF4, ed. Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials*. Waterloo (Canada), 1978.
- Thomson, R.D. & Hancock, J.W., 1984. Ductile failure by void nucleation, growth and coalescence. *International Journal of Fracture*, 26(2), pp.99-112.
- Thomson, C.I.A., Worswick, M.J. & Lloyd, D.J., 2003. Void coalescence within periodic clusters of particles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(1), pp.127-146.
- Thuillier, S., Le Maoût, N., & Manach, P. Y., 2011. Influence of ductile damage on the bending behaviour of aluminium alloy thin sheets. *Materials & Design*, 32(4), pp. 2049-2057.
- Thuillier, S., Maire, E. & Brunet, M., 2012. Ductile damage in aluminium alloy thin sheets: Correlation between micro-tomography observations and mechanical modeling. *Materials Science and Engineering: A*, 558(1), pp.217-225.
- Tóth, L.S., Dudzinski, D. & Molinari, A., 1996. Forming limit predictions with the perturbation method using stress potential functions of polycrystal viscoplasticity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(8), pp.805-824.
- Tvergaard, V., 1981. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17(4), pp.389-407.
- Tvergaard, V., 1982. Ductile fracture by cavity nucleation between larger voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30(4), pp.265-286.
- Tvergaard, V., 1982. On localization in ductile materials containing spherical voids. *International Journal of Fracture*, 18(4), pp.237-252.
- Tvergaard, V. & Needleman, A., 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica* 32, 32(1), pp.157-169.
- Tvergaard, V., 1987. Effect of yield surface curvature and void nucleation on plastic flow localization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35(1), pp.43-60.
- Tvergaard, V., 1990. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in applied Mechanics*, 27(1), pp.83-151.
- Tvergaard, V. & van der Giessen, E., 1991. Effect of plastic spin on localization predictions for a porous ductile material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(6), pp.763-81.
- Tvergaard, V., 2011. Void shape effects and voids starting from cracked inclusion. *International Journal of Solids and Structures*, 48(7), pp.1101-1108.

- Tvergaard, V., 2012. Effect of stress-state and spacing on voids in a shear-field. *International Journal of Solids and Structures*, 44(22), p.3047–3054.
- Vacher, P., 2003. Apport des techniques de corrélation d'images en mécanique : Analyse des déformations et numérisation 3D. Habilitation à Diriger des Recherches. Université de Savoie.
- Vadillo, G. & Fernández-Sáez, J., 2009. An analysis of Gurson model with parameters dependent on triaxiality based on unitary cells. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(3), pp.417-427.
- Valanis, K.C., 1989. Banding and stability in plastic materials. *Acta Mechanica* 79, 79(1-2), pp.113-141.
- van Hove, L., 1947. Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiplesa plusieurs fonctions inconnues. *Nederl. Akad. Wetensch*, 50, pp.18-23.
- van Stone, R., Cox, T.B., Low, J.R. & Psioda, J., 1985. Microstructural aspects of fracture by dimpled rupture. *International Metals Reviews*, 30(1), pp.157-180.
- Vedula, K.M. & Heckel, R.W., 1981. modern Developments in Powder Metallurgy. In *Metallurgical Powder*. p.791.
- Voyiadjis, G.Z. & Kattan, P.I., 1999. *Advances in damage mechanics: Metals and Metal Matrix Composites*. Elsevier Science.
- Wang, D.A., Pan, J. & Liu, S.D., 2004. An anisotropic Gurson yield criterion for porous ductile sheet metals with planar anisotropy. *International Journal of Damage Mechanics*, 13(1), pp.7-33.
- Weck, A., Wilkinson, D.S. & Maire, E., 2008. Observation of void nucleation, growth and coalescence in a model metal matrix composite using X-ray tomography. *Materials Science and Engineering: A*, 488(1), pp.435-445.
- Wu, P. D., Jain, M., Savoie, J., MacEwen, S. R., Tuğcu, P., & Neale, K. W., 2003. Evaluation of anisotropic yield functions for aluminum sheets. *International Journal of Plasticity*, 19(1), pp.121-138.
- Xue, Z., Pontin, M.G., Zok, F. & Hutchinson, J.W., 2010. Calibration procedures for a computational model of ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(3), pp.492-509.
- Xue, L. & Wierzbicki, T., 2009. Numerical simulation of fracture mode transition in ductile plates. *International Journal of Solids and Structures*, 46(6), p.1423–1435.
- Yamamoto, H., 1978. Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. *International Journal of Fracture*, 14(4), pp.347-365.
- Yoon, J.W., Barlat, F., Chung, K. & Pourboghrat, F., 2000. Earing predictions based on asymmetric nonquadratic yield function. *International Journal of Plasticity*, 16(9), pp.1075-1104.
- Yoon, J.H., Stewart, J.B. & Cazacu, O., 2011. Coupled elastic–plastic damage model for a porous aggregate with an incompressible matrix displaying tension–compression asymmetry. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(7), pp.1407-1423.
- Yoshida, K., Kuwabara, T. & Kuroda, M., 2007. Path-dependence of the forming limit stresses in a sheet metal. *International journal of plasticity*, 23(2), pp.361-384.
- Yoshida, K. & Suzuki, N., 2008. Forming limit stresses predicted by phenomenological plasticity theories with anisotropic work-hardening behavior. *International Journal of Plasticity*, 24(1), pp.118-139.

Zhang, Z.L., 1995. Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 121(1), pp.29-44.

Zhang, Z.L., 1996. On the accuracies of numerical integration algorithms for Gurson-based pressure-dependent elastoplastic constitutive models. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 121(1), pp.15-28.

Zhang, Z.L., Thaulow, C. & Ødegård, J., 2000. A complete Gurson model approach for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 67(2), pp.155-168.

Zhou, Y. & Neale, K.W., 1995. Predictions of forming limit diagrams using a rate-sensitive crystal plasticity model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 37(1), pp.1-20.

Analyse des instabilités plastiques dans les matériaux ductiles endommageables : application à la prédiction de la striction et de la formabilité des tôles métalliques

RESUME : Le phénomène de striction est généralement précurseur de la rupture ductile et représente l'une des principales causes de rebut des pièces métalliques lors de leur mise en forme. La mise en œuvre d'outils théoriques et numériques capables de prédire l'apparition de ce type de défauts s'avère nécessaire pour des raisons économiques et environnementales. Ces outils nécessitent en partie l'utilisation d'un modèle de comportement adéquat, permettant de reproduire les phénomènes physiques mis en jeu. Un tel modèle de comportement est ensuite couplé à un indicateur d'instabilité plastique, offrant la possibilité de prédire de manière fiable les phénomènes de striction diffuse et localisée. Dans ce travail de thèse, nous avons considéré certains modèles d'endommagement micromécaniques basés sur l'approche de Gurson et qui ont été couplés à différents critères d'instabilités plastiques reposant sur l'Analyse de Bifurcation. L'implantation numérique des modèles retenus a été réalisée dans le code de calcul par éléments finis Abaqus/Standard. En ce qui concerne les modèles d'endommagement, plusieurs schémas d'intégration numérique ont été testés afin d'analyser leur performance et leur robustesse lorsque le comportement présente des effets adoucissants marqués. L'approche combinant le modèle de comportement couplé à l'endommagement et les critères de striction a ensuite été utilisée pour prédire les limites de formabilité en striction diffuse et localisée de plusieurs matériaux métalliques. Les résultats obtenus ont permis d'établir une hiérarchisation théorique et numérique des critères d'instabilités plastiques utilisés.

Mots clés : élasto-plasticité, endommagement, analyse de bifurcation, grandes déformations, striction diffuse et localisée, intégration numérique, emboutissage, courbes limites de formage.

Plastic instability analysis of damaged ductile materials: application to the prediction of necking and formability of metal sheets

ABSTRACT: The phenomenon of necking is generally precursor to ductile fracture, and represents one of the main causes leading to defective parts in sheet metal forming. The implementation of theoretical and numerical tools capable of predicting this type of defects is thus made necessary for economic and environmental reasons. These tools require in part the use of an adequate behavior model in order to reproduce the underlying key physical phenomena. Such a constitutive model is then coupled with a plastic instability indicator allowing us to reliably predict diffuse and localized necking. In the present work, we have considered some micromechanics damage models based on Gurson's approach, which were coupled with different plastic instability criteria based on Bifurcation Analysis. The numerical implementation of these models was achieved in the implicit finite element code Abaqus/Standard. With regard to damage models, several time integration schemes were tested to analyze their performance and robustness when the material behavior exhibits pronounced softening effects. The approach combining the constitutive model coupled with damage and the necking criteria has been then applied to the prediction of formability limits, both at diffuse and localized necking, of several metallic materials. The obtained results allowed us to establish a theoretical and numerical classification of the plastic instability criteria used.

Keywords : elasto-plasticity, ductile damage, bifurcation analysis, large deformations, diffuse and localized necking, numerical integration, sheet metal forming, forming limit diagrams.