HAL
open science

Etude de l'impact des flux zonaux sur la turbulence dans les plasmas, sur la transition L-H et la production d'entropie.

Vincent Berionni

▶ **To cite this version:**

Vincent Berionni. Etude de l'impact des flux zonaux sur la turbulence dans les plasmas, sur la transition L-H et la production d'entropie.. Plasmas. Ecole Polytechnique, 2014. Français. NNT : . tel-01314705

HAL Id: tel-01314705

https://pastel.hal.science/tel-01314705v1

Submitted on 11 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse soutenue le 14 mars 2014 pour obtenir le grade de :

Docteur de l'Ecole Polytechnique.

Spécialité : Physique des Plasmas

Etude de l'impact des flux zonaux sur la turbulence dans les plasmas, sur la transition L-H et la production d'entropie.

présentée par
Vincent BERIONNI

Jury composé de :

Directeur de thèse
Özgür GÜRCAN
Chargé de recherche, CNRS
Rapporteurs
Nicolas BESSE
Maître de Conférence, Université de Lorraine
Paolo RICCI
Professeur Assistant Tenure Track, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Examinateurs
Jean-Marcel RAX
Professeur, Ecole Polytechnique
Gérard BELMONT
Directeur de Recherche, CNRS
Xavier GARBET
Directeur de Recherche, CEA
Invité
Guido CIRAOLO
Maître de Conférence, Université Paul Cézanne

Résumé

Un des obstacles principaux au succès de la fusion thermonucléaire par confinement magnétique réside dans la présence de turbulence qui engendre un transport radial du plasma vers les parois des tokamaks. Pour étudier le mécanisme de réduction de la turbulence par les flux zonaux, qui permet d'atteindre un mode de confinement élevé, un modèle en couches dans l'espace de Fourier est utilisé. Basé sur les équations d'Hasegawa-Mima généralisées, il a permis d'étudier finement la dynamique des interactions de type prédateurs-proies entre les flux zonaux et la turbulence d'onde de dérive, soulignant l'importance du rôle du phénomène de friction des flux zonaux dans le comportement du système considéré. Une fois étendu à un plus grand nombre de couches, le comportement du système est en accord avec la règle de suppression de la turbulence par le cisaillement $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$. Le modèle révèle le transfert d'enstrophie potentielle turbulente qui se produit depuis les échelles d'injection vers les échelles de dissipation, résultant directement de l'action du cisaillement.

Parallèlement, un modèle simple de transport radial en une dimension est proposé. En incluant l'évolution de la pression, de la densité, et de l'intensité de la turbulence, il permet de reproduire un mécanisme basique de transition L-H. L'influence de plusieurs paramètres du modèle sur la nature de la transition L-H est mise en évidence.

Un troisième modèle couplant les deux précédents est alors construit pour reproduire la phénoménologie de la transition L-H en incluant les aspects spatial et spectral. Un comportement similaire aux observations expérimentales est constaté, et le rôle prépondérant des flux zonaux dans le déclenchement de la transition est mis en évidence. A l'aide de son aspect spectral, le modèle couplé prédit un aplatissement auto-cohérent du spectre turbulent lors de l'accès au mode H. L'impact de la diffusion radiale de la turbulence sur la dynamique de la transition est aussi discuté. Dans la dernière partie, une interprétation de la transition L-H à partir de la production d'entropie est proposée.

Abstract

One of the main obstacle to the success of thermonuclear magnetic confinement fusion is turbulence, which is mainly responsible for radial transport towards the walls. A shell model is used to study the mecanism of turbulence suppression by zonal flows, which are considered to play an important role in the L-H transition. Based on generalized Hasegawa-Mima equations, it gives an insight of predator-prey interactions between zonal flows and drift wave turbulence. The collisional drag of zonal flows is shown to play a major role in the behaviours of the system that is considered. With a larger number of shells, this model agrees well with the suppression rule of turbulence by $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ shear. According to the model, potential enstrophy transfer occurs from injection scales toward dissipation scales, resulting from the action of the shear flow.

On the other hand, a simple radial transport model is proposed. With three equations for the evolution of pressure, density, and intensity of turbulence, it can reproduce a basic mecanism of L-H transition. The influence of serveral parameters of the system on the nature of L-H transition is highlighted.

Then, a new multi-scales model is built by coupling both transport and shell models, in order to reproduce the L-H transition in real space and $k-$space simultaneously. The behaviour of the system is somewhat similar to several experimental observations, and the crucial role of zonal flows as a trigger of L-H transition is underlined. Due to its spectral nature, the coupled model allows us to predict the self-consistent flattening of the spectrum when the H mode is reached. The influence of turbulence spreading on the dynamic of L-H transition is also discussed. Finally, an interpretation of the L-H transition through entropy production is proposed.

Table des matières

1 Introduction aux plasmas de fusion par confinement magnétique **15**
1.1 Qu'est ce que la fusion : les réactions de fusion thermonucléaire 15
1.2 Reproduire les réactions de fusion sur la Terre 15
1.2.1 Les avantages de la fusion 15
1.2.2 L'état de plasma 16
1.2.3 Comment reproduire le mode de fonctionnement du Soleil sur Terre ? 16
1.2.4 Principes de fonctionnement d'un tokamak 17
1.2.4.1 Critère de Lawson, breakeven et ignition 18
1.2.4.2 Confinement et chauffage du plasma 19
1.2.5 Méthode de confinement 19
1.2.6 Le Projet ITER 20
1.3 Caractéristiques et description d'un plasma de tokamak 21
1.3.1 Centre guide 21
1.3.2 Adiabaticité 21
1.3.3 Dérives 22
1.3.4 Géométrie 22
1.3.5 De l'équation microscopique de Klimontovich à l'équation de continuité, en passant par l'équation de Vlasov 22
1.3.6 Quasi-neutralité 24
1.3.7 Hypothèse des électrons adiabatiques (ou Boltzmaniens) 24
1.3.8 Transport turbulent et néoclassique, barrières de transport et transition LH 25
1.4 Turbulence et flux zonaux 25
1.4.1 Turbulence d'onde de dérive 26
1.4.1.1 Equations d'Hasegawa-Wakatani 27
1.4.1.2 Equations d'Hasegawa-Mima et d'Hasagawa-Mima généralisée 30
1.4.1.3 Propagation des ondes de dérive 31
1.4.1.4 Instabilités d'ondes de dérive 32
1.4.2 Flux zonaux 32
1.4.2.1 Formation et amplification 34
1.4.2.2 Amortissement 34
1.4.3 Effet des interactions non locales sur la cascade turbulente et le spectre de Fourier 35

2 Etude des interactions entre turbulence et flux zonaux à partir d'un modèle en couches **39**
2.1 Introduction : le concept du modèle en couches 39

2.2 Construction du modèle en couches couplant des échelles disparates 41
2.3 Modèle à 2 couches de turbulence couplés à une couche de grande échelle . 44
2.4 Etude analytique du système prédateurs-proies flux zonaux - ondes de dérives 44
2.4.1 Recherche et analyse des points fixes 45
2.4.2 Solution analytique de la partie purement non linéaire 47
2.4.3 Dynamique moyennée du système prédateurs-proies. 48
2.5 Analyse à deux temps et régime instable 50
2.6 Exploration numérique des différents régimes selon les coefficients d'amortissement et de croissance linéaire. 51
2.6.1 Outil numérique 51
2.6.2 Influence de ν_F sur la stabilité et les états stationnaires 52
2.6.3 Influence du coefficient de croissance linéaire γ 54
2.7 Influence des flux zonaux et des écoulements cisaillés sur la micro-turbulence 56
2.7.1 Mise en place et vérification de la validité du modèle à N+1 couches 57
2.7.2 Etude numérique de l'influence des structures de grande échelle sur le spectre 58
2.7.3 Eléments de comparaison avec le code gyrocinétique GENE et des observations expérimentales sur Tore Supra 64

3 Modèle de transport radial pour l'étude de la transition L-H 69
3.1 Modèle réduit de transport radial à trois champs 70
3.1.1 Equations de transport radial 70
3.1.2 Comment établir l'équation modélisant la turbulence ? 72
3.1.3 Etude analytique du système à 3 champs pour la transition L-H . . 75
3.1.4 Expériences numériques 76
3.2 Modèle de transport couplé multi-échelles 81
3.2.1 Description du modèle 82
3.2.2 Observations numériques 84
3.2.2.1 Transition L-H avec augmentation rapide du chauffage . . 84
3.2.2.2 Transition L-H avec chauffage progressif 86

4 Production d'entropie 95
4.0.3 Entropie : le manque d'information peut-il constituer une information ? 95
4.0.3.1 L'entropie en thermodynamique 95
4.0.3.2 Théorie de l'information et physique statistique 95
4.0.3.3 Entropie de grain 97
4.1 Production d'entropie 97
4.1.1 Production d'entropie de grain à partir de l'équation de dérive cinétique 99
4.1.2 Production d'entropie par dissipation indirecte de l'énergie cinétique turbulente 103
4.2 Principe de production maximale d'entropie (PPME) 104
4.2.1 Une des premières utilisations concrètes : le cas du climat terrestre 104
4.2.2 Formulation et justification du PPME 105

4.2.3 Le principe de production maximale d'entropie appliqué au modèle 1D 108

Introduction

Après plusieurs décennies, la recherche scientifique sur la fusion thermonucléaire par confinement magnétique est sur le point de vivre un moment clef avec la mise en fonctionnement prochaine d'ITER, réacteur expérimental issu d'une collaboration internationale. Ce projet devrait permettre d'atteindre des objectifs dépassant toutes les performances réalisées par les tokamaks passés et actuels, franchissant ainsi une étape décisive vers une éventuelle application industrielle de production d'électricité à grande échelle. Dans le but de démontrer cette faisabilité avec succès, il est crucial de comprendre de manière aussi complète que possible les mécanismes à l'oeuvre dans les tokamaks. En aucun cas le travail présenté ici ne prétend résoudre cette vaste problématique, mais il vise à éclairer certains des nombreux phénomènes physiques mis en jeu.

- Le chapitre 1 introduit quelques bases de la physique des tokamaks, avant de s'attarder un peu plus longuement sur les caractéristiques générales connues de la turbulence d'onde de dérive et des flux zonaux.
- Le chapitre 2 porte sur les interactions entre microturbulence d'onde de dérive et structures de grande échelle, assimilées aux flux zonaux. A partir des équations d'Hasegawa-Mima généralisées, un modèle en couches dans l'espace de Fourier est construit dans le cadre de cette étude. La dynamique de ces interactions est d'abord analysée dans le détail à l'aide d'un modèle fortement réduit. De manière plus générale, la seconde partie porte sur l'influence des flots cisaillés sur le spectre de l'énergie turbulente et les transferts non linéaires dans l'espace de Fourier.
- Le chapitre 3 traite dans un premier temps de la construction d'un modèle de transport radial à même de présenter une bifurcation entre deux modes de confinement lorsque le paramètre d'injection de puissance est modifié. En y adjoignant le modèle en couches étudié au chapitre 2, un modèle couplé spatial/spectral est ensuite mis en place dans le but d'étudier la dynamique d'interactions lors d'une transition entre les deux configurations associées aux modes L et H.
- Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la production d'entropie lors de la transition. Plusieurs aspects de l'entropie sont abordés puis expérimentés en utilisant le modèle couplé proposé précédemment. Le chapitre se conclut sur une réflexion à propos du principe de production maximale d'entropie.

1 Introduction aux plasmas de fusion par confinement magnétique

Le début de ce chapitre est une introduction très générale s'adressant principalement aux lecteurs non initiés à la physique de la fusion nucléaire, qui pourront y découvrir l'intérêt et les bases de la fusion magnétique. Il se veut donc compréhensible par le plus grand nombre dans ses premières sections, puis plus axé vers la problématique principale dans sa seconde partie.

1.1 Qu'est ce que la fusion : les réactions de fusion thermonucléaire

Contrairement à la fission nucléaire, qui consiste à scinder des noyaux lourds en noyaux plus légers pour générer de l'énergie, la réaction de fusion nucléaire réunit deux noyaux légers qui forment un noyau plus lourd, "créant" là-aussi de l'énergie. Cet apport est issu de la différence d'énergie de liaison par nucléon de chaque noyau : celle-ci croît en partant des noyaux légers vers le Fer (élément le plus stable) et augmente aussi en partant des noyaux lourds vers le Fer, comme l'illustre la figure 1.1.1. L'énergie de liaison correspond à l'énergie nécessaire à fournir pour dissocier les éléments de ce noyau : plus celle-ci est importante, plus l'énergie dont le noyau a besoin pour rester soudé est au contraire faible. Une réaction de fusion d'éléments légers en un élément plus stable libère donc de l'énergie potentiellement utilisable pour produire de l'électricité.

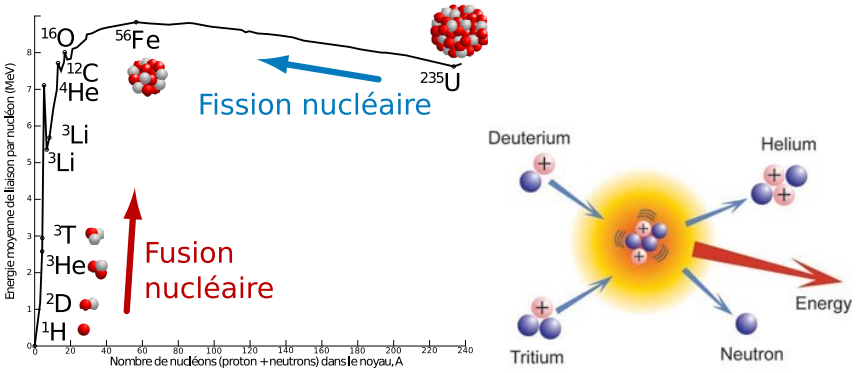
Malgré cet aspect exotique, les réactions de fusion nucléaire permettent à la vie de prospérer sur Terre et se produisent tous les jours presque sous nos yeux, au coeur même du soleil. La réaction qui sera reproduite dans les prototypes industriels consiste à faire fusionner un noyau de Deutérium (1 proton et 1 neutron) avec un noyau de Tritium (1 proton et 2 neutrons), donnant ainsi un neutron, un noyau d'Hélium, auxquels s'ajoutent comme indiqué une libération d'énergie.

1.2 Reproduire les réactions de fusion sur la Terre

1.2.1 Les avantages de la fusion

Plusieurs éléments sont de nature à montrer l'intérêt de la fusion nucléaire par confinement magnétique en tant que source d'énergie :

- La réaction de fusion en elle-même ne dégage pas d'éléments radioactifs. Les matériaux des parois peuvent toutefois être irradiés par les neutrons suffisamment énergétiques. La durée de vie de ces déchets radioactifs est plus faible que celle des déchets



Source : Wikimedia

FIGURE 1.1.1: Energie de liaison par nucléon en fonction du noyau (Courbe d'Aston) : deux types de réaction nucléaire permettent de dégager de l'énergie (à gauche). Réaction de fusion entre le Deutérium et le Tritium (à droite).

issus de la fission, ce qui implique un temps de stockage réduit avant que ces matériaux redeviennent inertes.

- Pas d'emballement incontrôlé des réactions nucléaires similaires aux accidents possibles sur des centrales à fission, tels que ceux des centrales de Tchernobyl (1986) et de Fukushima (2011). En effet, un champ magnétique est nécessaire au réacteur notamment pour le confinement qui ne peut s'auto-entretenir.
- Des réserves de combustibles très importantes : le deutérium peut s'extraire facilement de l'eau de mer, tandis que le tritium peut être produit directement dans un réacteur à fusion, à partir de lithium lui aussi très abondant sur Terre.

1.2.2 L'état de plasma

Avant de pouvoir tirer parti de l'énergie libérée par les réactions de fusion, il faut dans un premier temps en fournir aux ions pour qu'ils puissent vaincre les forces de répulsion électrostatiques. Une fois franchi un certain afflux de puissance, l'agitation thermique est telle que les électrons sont arrachés aux atomes. Le milieu est alors ionisé. Composé en partie non négligeable d'ions positifs et d'électrons, il prend le nom de "plasma", présenté parfois comme le quatrième état de la matière après les états solide, liquide et gazeux. Bien que peu présent naturellement sur Terre, le plasma représente la quasi-totalité de de la matière visible et connue, c'est-à-dire matière noire exclue. Le plasma peuple toutes les étoiles, mais aussi certains milieux interstellaires. Sur Terre, on le retrouve tout de même sous forme d'éclairs, de flammes, et dans les hautes couches de l'atmosphère (ionosphère notamment). Artificiellement, il est utilisé dans les ampoules à économie d'énergie et autres néons, dans les écrans plasmas ou encore dans de nombreux procédés industriels.

1.2.3 Comment reproduire le mode de fonctionnement du Soleil sur Terre ?

Au coeur du soleil, la force gravitationnelle résultant de la masse solaire qui engendre une pression extrême. Les noyaux ainsi compressés ont la capacité de fusionner. Ce phéno-

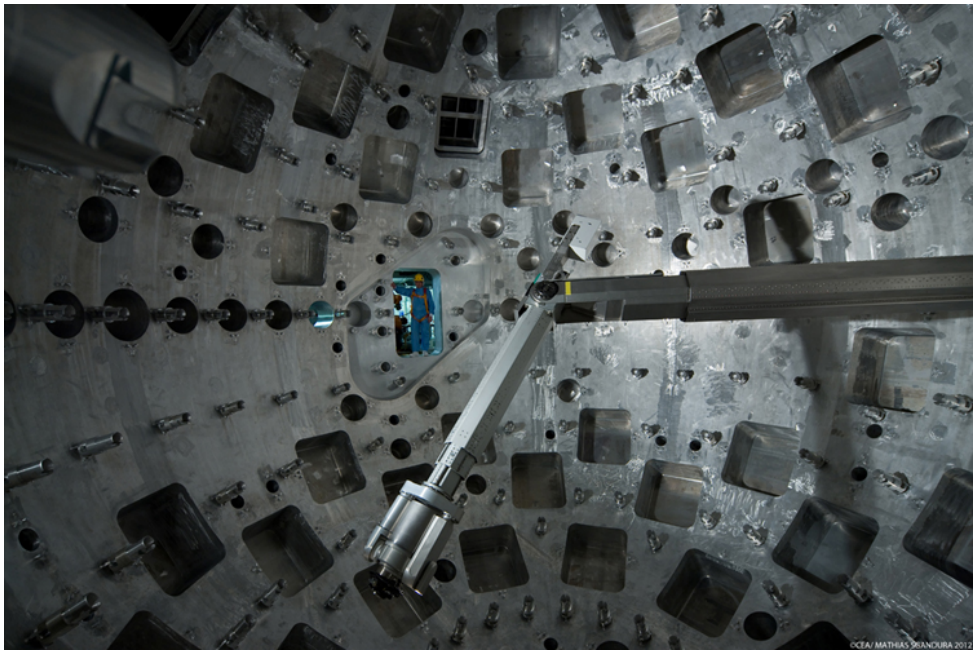


FIGURE 1.2.1: Le coeur du LMJ (Laser MégaJoule) du CEA en Gironde. Source : CEA

mène ne peut pas être reproduit sur Terre avec les technologies actuelles. Les techniques alternatives imaginées et expérimentées sur notre planète peuvent être regroupées en deux principales familles :

- L'utilisation de lasers extrêmement puissants : en tirant sur des petites cibles de matière à partir de dizaines de lasers, la pression et la température engendrées par l'énergie apportée sont telles que les atomes sont capables de fusionner. Le laser français MégaJoule (figure 1.2.1), dont la construction doit s'achever en 2014, constitue l'un des projets de ce genre les plus avancés. Le NIF (National Ignition Facility) est un complexe américain d'envergure similaire.
- La fusion par confinement magnétique, dont nous nous préoccupons dans cette thèse, est différente de la technique précédente qui met en jeu un confinement inertiel. Le confinement de la matière est effectué via la sensibilité de l'état de plasma au champ magnétique, qui s'explique par la présence d'éléments non neutres (ions et électrons) en forte proportion. Lorsque le champ magnétique est suffisamment intense, il devient possible de vaincre les forces de répulsion, et donc de comprimer fortement les noyaux pour qu'ils fusionnent. Plusieurs types de machines, qui répondent aux noms de tokamak, stellerator ou encore sphéromak, ont été construites dans le but de mettre en pratique ce concept.

1.2.4 Principes de fonctionnement d'un tokamak

Le travail présenté dans ce manuscrit porte sur les machines de type tokamak. Ce mot est l'abréviation d'une expression russe signifiant "chambre toroïdale avec des bobines magnétiques", mot ayant été conservé depuis son origine en ex-URSS au début des années 1950, les premières expérimentations ayant eu lieu quelques années plus tard. La figure 1.2.2 montre l'intérieur du tokamak européen JET, le plus grand tokamak en cours d'ex-

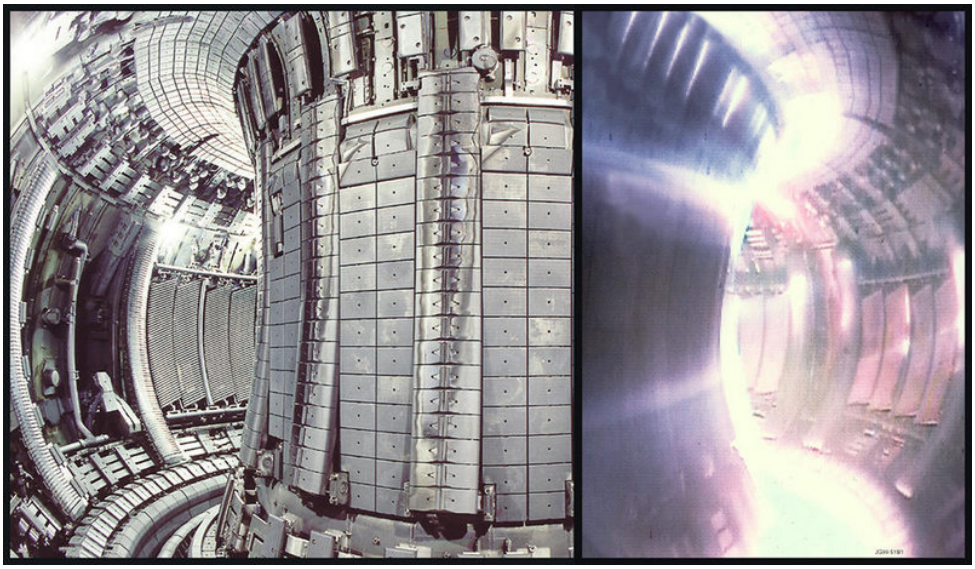


FIGURE 1.2.2: Intérieur du tokamak européen JET.

ploitation. Comme nous l'avons déjà indiqué, son concept repose sur l'utilisation d'un champ magnétique très intense qui permet de confiner la matière.

1.2.4.1 Critère de Lawson, breakeven et ignition

Dans le but de rendre les réactions de fusion rentables énergétiquement, il est indispensable d'atteindre des températures et pressions suffisantes. Celles-ci sont déterminées par le critère de Lawson [1], établi par le scientifique éponyme, définissant la limite pour laquelle l'énergie émise par les réactions du fusion est supérieure à l'énergie nécessaire pour les provoquer. Dans les tokamaks utilisant la réaction Deuterium-Tritium, ce principe peut s'écrire [2] :

$$nT\tau_E > 5.10^{21} keV\, m^{-3}\, s$$

où T est la température (exprimée en électrons-volts), n est la densité, et τ_E le temps de confinement de l'énergie, c'est-à-dire le temps pendant lequel les éléments restent dans les conditions adéquates pour fusionner, d'où son rôle dans le critère de Lawson. Le taux de réaction par unité de volume et par unité de temps est proportionnel au carré de la densité, ce qui explique l'importance de ce paramètre. Une des possibilités envisagées est de parvenir à l'état appelé en anglais "**breakeven**", équilibre, c'est-à-dire le seuil au delà duquel l'énergie récupérée est supérieure à l'énergie injectée. Un autre objectif est d'accomplir l'**ignition**, le seuil à franchir pour atteindre l'auto-entretien de la réaction de fusion (l'énergie qu'elle dégage suffisant alors à provoquer de nouvelles réactions). Cependant, ce régime de fonctionnement ne serait *a priori* pas utilisé pour une exploitation industrielle des tokamaks [3, 4].

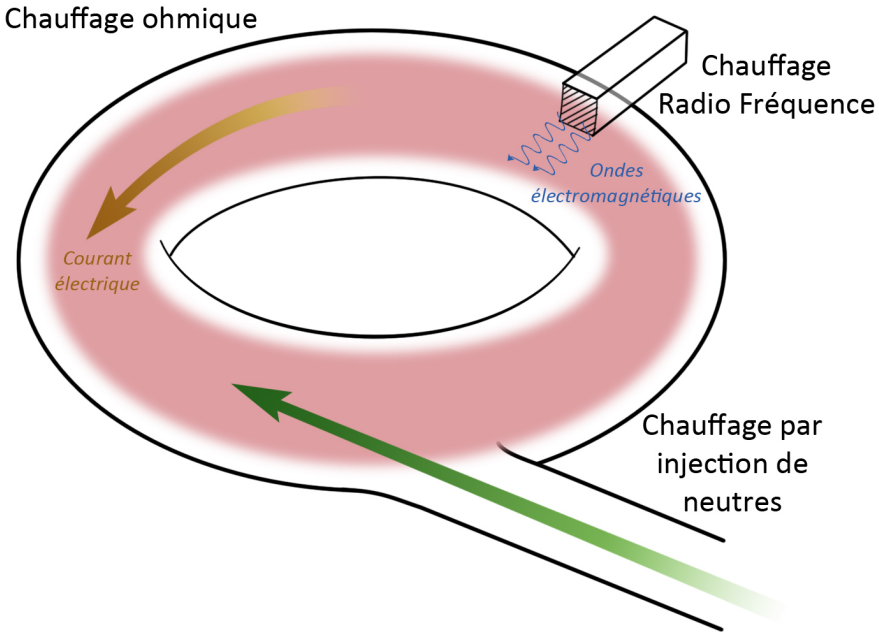


FIGURE 1.2.3: Modes de chauffage du plasma dans les tokamaks.

1.2.4.2 Confinement et chauffage du plasma

Pour chauffer le combustible afin d'atteindre la température désirée, trois moyens sont utilisables séparément ou conjointement (figure 1.2.3) :

1. Le courant circulant à l'intérieur du tokamak dans la direction toroïdale génère le chauffage ohmique.
2. L'injection de neutres à haute vitesse qui, par collisions interposées, augmentent la température du milieu.
3. Le chauffage par ondes électromagnétiques radiofréquences.

1.2.5 Méthode de confinement

Maintenir le plasma concentré au centre de la machine répond à deux exigences "vitales" : favoriser les réactions de fusion mais aussi protéger les matériaux des températures extrêmes. En effet, la température du coeur des tokamaks actuels atteint plus d'une centaine de millions de degrés, alors que les matériaux les plus avancés résistent difficilement à des températures de l'ordre du millier de degrés, d'où la nécessité de confinement des particules.

Les particules chargées suivent un mouvement de rotation, dit cyclotronique, autour des lignes de champ magnétique, illustré sur la figure 1.2.4. Plus ce champ magnétique est intense, plus le rayon de ces rotations est réduit et mieux le plasma est confiné, d'où l'intérêt d'appliquer un champ magnétique important. A cette fin, des bobines sont placées autour du tokamak. Un courant électrique intense y est injecté, ce qui engendre

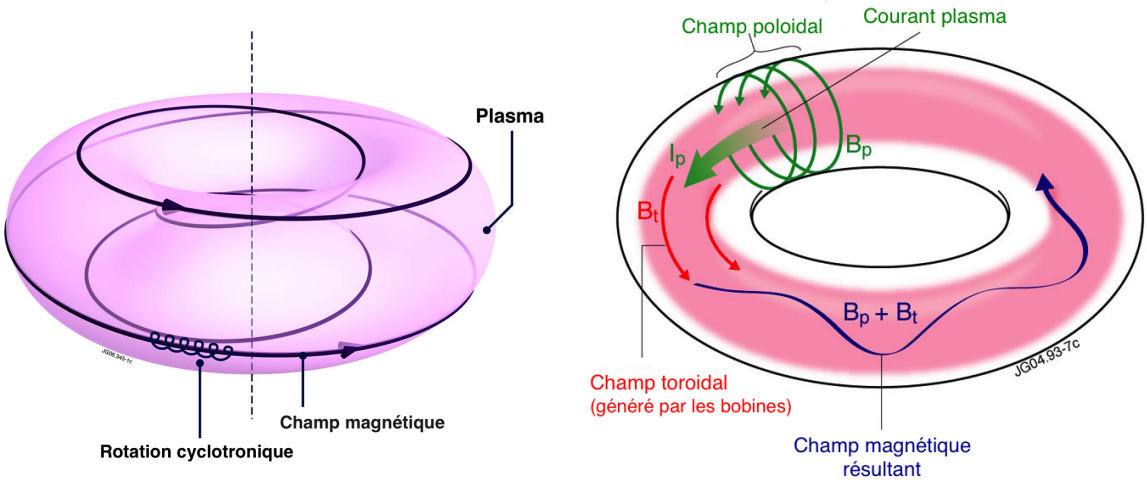


FIGURE 1.2.4: Méthode de confinement et configuration magnétique d'un tokamak (source : EFDA)

un champ magnétique. Cependant, l'existence d'un phénomène de dérive du plasma (voir paragraphe 1.3.3) rend nécessaire l'ajout de bobines au centre du tokamak pour contrer ce mouvement. La résultante correspond à un enroulement en spirale autour du tore (figure 1.2.4 à droite). Le champ magnétique total est de l'ordre de plusieurs Tesla sur certains tokamaks, ce qui représente environ cent mille fois le champ magnétique terrestre à la surface de la planète. Le tokamak français Tore Supra a la particularité de posséder des bobines supraconductrices, ce qui permet de limiter l'échauffement des matériaux lors du passage de courant intense, et donc de prolonger la durée d'utilisation en continu. Ce tokamak détient toujours le record mondial de la durée de maintien d'un plasma de fusion à une telle puissance (de l'ordre de 1MJ).

1.2.6 Le Projet ITER

Le projet de tokamak ITER est un projet scientifique mettant en jeu une coopération internationale d'une ampleur exceptionnelle. Le tokamak en fonctionnement rassemblant la plus grande diversité de contributions est actuellement le tokamak européen JET (figure 1.2.2 en bas). L'objectif d'ITER [3, 4] consiste à démontrer la faisabilité technique et scientifique d'un réacteur thermonucléaire de type tokamak. Plus précisément, il s'agit d'obtenir environ 500 MW de puissance thermonucléaire. Le rapport Q entre la puissance générée par la fusion et la puissance injectée devra être porté à 10 pendant plusieurs minutes, et à 5 de manière quasi-stationnaire. Ce tokamak sera notamment équipé de bobines supraconductrices. Ce projet offrira plusieurs défis : extraire la puissance du plasma de manière suffisamment efficace, concevoir des matériaux capables de résister à des conditions extrêmes, mettre en place la régénération du tritium, et surtout assurer un confinement satisfaisant du plasma. En effet, de nombreuses sources d'instabilités, notamment liées aux forts gradients de densité et de température, engendrent de la turbulence. Cette dernière est à l'origine d'intenses flux de chaleur et de particules vers les parois du tokamak. La compréhension du comportement de la turbulence est donc un enjeu majeur

pour la réussite du projet ITER. C'est dans ce cadre que s'inscrit ce manuscrit.

1.3 Caractéristiques et description d'un plasma de tokamak

Le plasma est un milieu qui permet l'émergence de nombreux phénomènes complexes, souvent non linéaires. La turbulence en est l'un des principaux exemples. Cependant, certaines hypothèses que nous présentons ici, justifiées par les conditions spécifiques aux plasmas en général ou aux plasmas de tokamaks en particulier, permettent une simplification très utile.

1.3.1 Centre guide

Le champ magnétique, de l'ordre du Tesla, joue un rôle important pour le confinement des plasmas thermonucléaires dans les tokamaks. On peut décomposer le mouvement des particules en vitesses parallèle et perpendiculaire au champ magnétique. Considérons pour l'instant une particule soumise uniquement à la force de Laplace : $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \mathbf{B})$ dans un repère cartésien ($\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$), avec $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ on trouve :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_z + v_c \left(cos(\frac{qB}{m}t)\boldsymbol{e}_x - sin(\frac{qB}{m}t)\boldsymbol{e}_y \right)$$

La pulsation électronique $\omega_c = \dfrac{q_e B}{m}$, et par extension la fréquence cyclotronique $f_c = \omega_c/2\pi$, correspond donc à la fréquence de rotation d'une particule autour d'une ligne de champ magnétique. De la même manière, la position d'une particule r peut s'exprimer à partir du centre guide, autour duquel tourne une particule :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}_l$$

où $\boldsymbol{R}$ détermine la position du centre guide, et où $|\boldsymbol{\rho}_l| = v_c/\omega_c$ est le rayon de Larmor, ou le rayon de giration de la particule.

1.3.2 Adiabaticité

La description du mouvement des particules via le centre guide prend tout son intérêt dans les tokamaks où $\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial B}{\partial t} \ll \omega_c$ et $\left(\dfrac{\nabla B}{B}\right)^{-1} \ll \rho_l$. Ces relations constituent l'hypothèse d'adiabaticité (temporelle et spatiale) : les particules peuvent effectuer plusieurs rotations autour d'une ligne de champ avant que la configuration spatiale du champ magnétique ne soit significativement modifiée.

1.3.3 Dérives

Aux échelles mésoscopiques, le mouvement du centre guide est pertinent pour décrire la dynamique du plasma. En première approximation, les particules sont prisonnières des lignes de champ magnétique, mais des effets d'ordre supérieur provoquent un décalage progressif du centre guide perpendiculairement à la direction de champ : il s'agit du mouvement de dérive. La dérive peut être de nature couplée électrique et magnétique (vitesse de champs croisés, vitesse de polarisation) ou purement magnétique (vitesse de courbure, vitesse de gradient). La vitesse d'une particule peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{V}_D$$

où $\boldsymbol{v_c}$ est la vitesse cyclotronique de la particule autour de la ligne de champ, $\boldsymbol{v}_\parallel$la vitesse du centre guide dans la direction du champ magnétique, et $\boldsymbol{V}_D$ la vitesse de dérive du centre guide, perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$. Nous nous contentons ici d'expliquer brièvement les mécanismes menant aux effets de dérives cités et d'en donner l'expression. La dérivation détaillée sera trouvée dans la référence [5]. La vitesse de dérive de champs croisés $\boldsymbol{V}_E$ et la vitesse de polarisation $\boldsymbol{V}_P$ s'écrivent respectivement :

$$\boldsymbol{V}_E = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2}$$
$$\boldsymbol{V}_P = -\frac{1}{\omega_c B}\frac{d}{dt}\boldsymbol{E}$$

1.3.4 Géométrie

La géométrie du tokamak peut être décrite par un système simplifié de coordonnées illustré par la figure 1.3.1. La direction toroïdale correspond ainsi à la rotation autour de l'axe de symétrie principal, la direction poloïdale à la rotation autour d'une petite section de tokamak, et la direction radiale au petit rayon de cette même surface. Les lignes de champ magnétique sont enroulées autour du tore (enroulement volontairement exagéré sur la figure), et les surfaces magnétiques peuvent être vues comme des tores emboîtés les uns dans les autres.

1.3.5 De l'équation microscopique de Klimontovich à l'équation de continuité, en passant par l'équation de Vlasov

L'équation de Klimontovich propose une description microscopique du plasma, indiquant la position et la vitesse des particules. Elle se lit [6, 7] :

$$\frac{\partial N(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{v},\, t)}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial N(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{v},\, t)}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{q}{m}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \frac{\partial N(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{v},\, t)}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

où $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{v},\, t)$ est la fonction de distribution microscopique qui s'exprime comme

$$N(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{v},\, t) = \sum_i^{N_{tot}} \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)$$

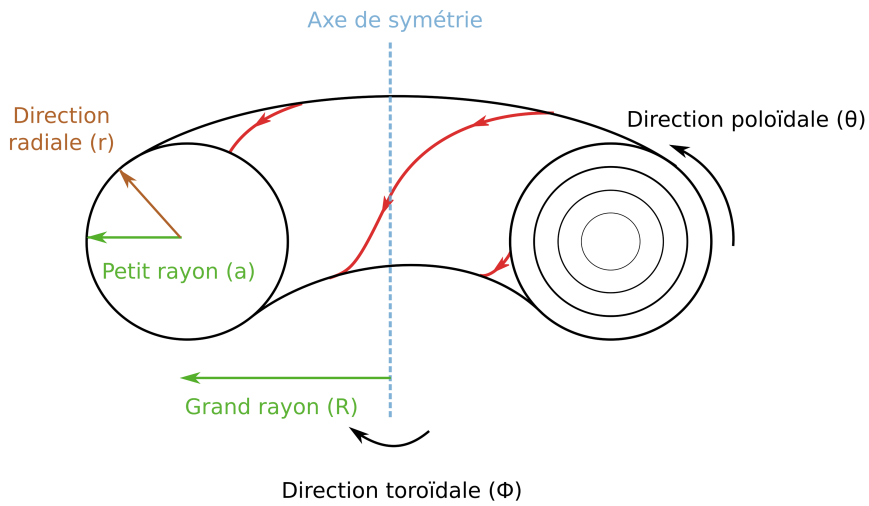


FIGURE 1.3.1: Coordonnées et géométrie utilisées couramment dans la description de la physique des tokamaks

N_{tot} étant le nombre total de particules, et où $\boldsymbol{x}_i$ et $\boldsymbol{v}_i$ vérifient les équations suivantes :

$$\frac{d\boldsymbol{x}_i(t)}{dt} = \boldsymbol{v}_i(t)$$
$$\frac{d\boldsymbol{v}_i(t)}{dt} = \frac{q}{m}\left(\boldsymbol{E}(x_i,\, t) + \boldsymbol{v_i}(t) \times \boldsymbol{B}(x_i,\, t)\right)$$

Cette équation microscopique permet de parvenir à l'équation cinétique de Vlasov, par l'intermédiaire de la fonction de distribution dans l'espace des phases, appelée $f(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{v},\, t)$. Ainsi, $f(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{v},\, t)\boldsymbol{dxdv}$ correspond au nombre de particules ayant une position comprise entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}$, et une vitesse comprise entre $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{dv}$ au temps t. La description n'est donc plus "particulaire" et la distribution f n'indique plus la position des particules présentes aux coordonnées $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ de manière exacte : il s'agit d'une distribution statistique. Ce changement de description permet d'obtenir l'équation de Vlasov [8] via une moyenne d'ensemble :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{q}{m}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

Les premiers moments s'expriment en fonction de la fonction de distribution comme suit :
-la densité $n(t,\, x) = \int f(t,\, x,\, v)d\boldsymbol{v}$
-la vitesse moyenne : $n\boldsymbol{V} = \int f(t,\, x,\, v)\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v}$
Les vitesses et positions des particules étant deux paramètres indépendants, il suffit d'intégrer l'équation de Vlasov sur $\boldsymbol{v}$ pour aboutir à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\boldsymbol{V} = 0$$

Dans un plasma de fusion fortement magnétisé, notamment à partir des hypothèses d'adiabaticité énoncées en 1.3.2, l'équation cinétique de dérive peut être retrouvée à partir de l'équation de Vlasov. Cette équation, dont la fonction de distribution décrit la position du centre guide, peut s'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\parallel} f + \boldsymbol{V}_D \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} f + \left(\frac{q}{m} \boldsymbol{E}_{\parallel} + m v_{\parallel} \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \boldsymbol{B} \right) \cdot \nabla_{v_{\parallel}} f = 0$$

où V_D est comme précédemment la vitesse totale de dérive du centre guide.

1.3.6 Quasi-neutralité

Dans un plasma, la longueur de Debye $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{nq^2}}$ détermine la distance caractéristique au dessus de laquelle on peut considérer le plasma comme quasi-neutre. Les densités électroniques et ioniques peuvent alors être considérées comme équivalentes : $n_e \approx n_i$. En d'autres termes, une séparation significative des charges ne peut avoir lieu pour une longueur supérieure à λ_D. ε_0 représente la constante diélectrique du vide, k la constante de Boltzmann, T la température du plasma considéré, n la densité, et q la charge des particules peuplant le plasma. Dans les tokamaks actuels, la longueur de Debye est de l'ordre du dixième de milimètre, tandis que nous nous focaliserons dans cette thèse aux échelles de transport qui sont d'ordre supérieur au milimètre, légitimant l'hypothèse de quasi-neutralité que nous utiliserons à plusieurs reprises.

1.3.7 Hypothèse des électrons adiabatiques (ou Boltzmaniens)

Dans la direction parallèle, la relation fondamentale de la dynamique pour les électrons soumis à un champ électrique peut s'écrire :

$$-\frac{\nabla P}{n_e} - n_e q \nabla \phi = 0$$

où le terme $nmdV_e/dt$ a été négligé en raison de la faible inertie des électrons. L'hypothèse d'un faible gradient de température électronique permet de transformer la relation précédente en :

$$\frac{\nabla n_e}{n_e} = -\frac{q}{kT_e} \nabla \phi$$
$$n_e = n_0 \exp\left(-\frac{q\phi}{kT_e} \right)$$

où le passage à une dimension a été effectué par simplification. Aux potentiels suffisamment petits, un développement de Taylor mène à l'expression de la réponse adiabatique des électrons :

$$n_e - n_0 = n_0 \frac{q\phi}{kT_e}$$

Dans ce paragraphe, n_0 correspond à une densité "de fond" qui varie très lentement dans le temps : la différence $n_e - n_0$ représente donc les fluctuations de densité à plus petit échelle. De plus, n_0 n'est supposé varier spatialement qu'en fonction de la direction du petit rayon. Dans la suite de cette thèse, le remplacement $n_e \to n_e - n_0$ est utilisé.

1.3.8 Transport turbulent et néoclassique, barrières de transport et transition LH

De nombreux phénomènes nuisant au confinement sont autant de défis à relever pour la communauté. Entre autres, des disruptions du plasma provoquées par des impuretés peuvent détruire le confinement, des éjections rapides d'électrons (dit "runaway") peuvent avoir lieu, et de nombreuses instabilités du plasma peuvent perturber son équilibre. Ces dernières sont autant de sources de turbulence, ce qui provoque une augmentation forte du transport radial "anormal". Ce terme est utilisé pour démarquer ce phénomène du transport néoclassique qui est lié à tous les processus d'origine collisionnelle. Ainsi, le transport mesuré expérimentalement est au moins d'un ordre de grandeur supérieur au transport calculé néoclassiquement, ce qui souligne l'importance de la prise en compte de la turbulence dans la modélisation du transport du plasma de tokamak.

Cependant, le développement de la turbulence peut être contenu par plusieurs phénomènes, dont l'un des principaux connus est l'apparition de flots cisaillés issus de la variation du champ électrique radial en fonction du petit rayon du tokamak. Ceux-ci peuvent réduire la turbulence de manière considérable, ce qui diminue le transport anormal et provoque l'apparition d'une barrière de transport. Il peut s'agir de barrière de transport interne (Internal Barrier Transport, ITB) ou externe (External Barrier Transport, ETB), ce qui forme dans ce dernier cas un piédestal. Le confinement du plasma dans le tokamak est ainsi amélioré. Il passe d'un mode de faible confinement (Low, L) à un mode de fort confinement (High, H). Cette transition L-H est illustrée sur la figure 1.3.2. Le profil H se distingue du profil L par l'apparition d'un fort gradient radial de pression proche des parois du tokamak. Les caractéristiques des flots cisaillés seront développés dans la suite de ce chapitre et dans le chapitre suivant, tandis que le phénomène de transition L-H sera plus longuement étudié dans le chapitre 3. Notons tout de même que le mode H n'est pas exempt de toute instabilité. Les ELMs (Edge Localized Mode), par exemple, sont même spécifiques à ce mode en raison des forts gradients de pression qui provoquent leur apparition.

1.4 Turbulence et flux zonaux

Les efforts de recherche menés dans la communauté pour améliorer le confinement du plasma ont mis en évidence le rôle clef de la turbulence issue des instabilités de dérive dans le transport radial "anormal", dont on cherche à se prémunir. En raison de l'importance de ce phénomène, nous allons analyser les mécanismes mis en jeu par l'apparition de ce

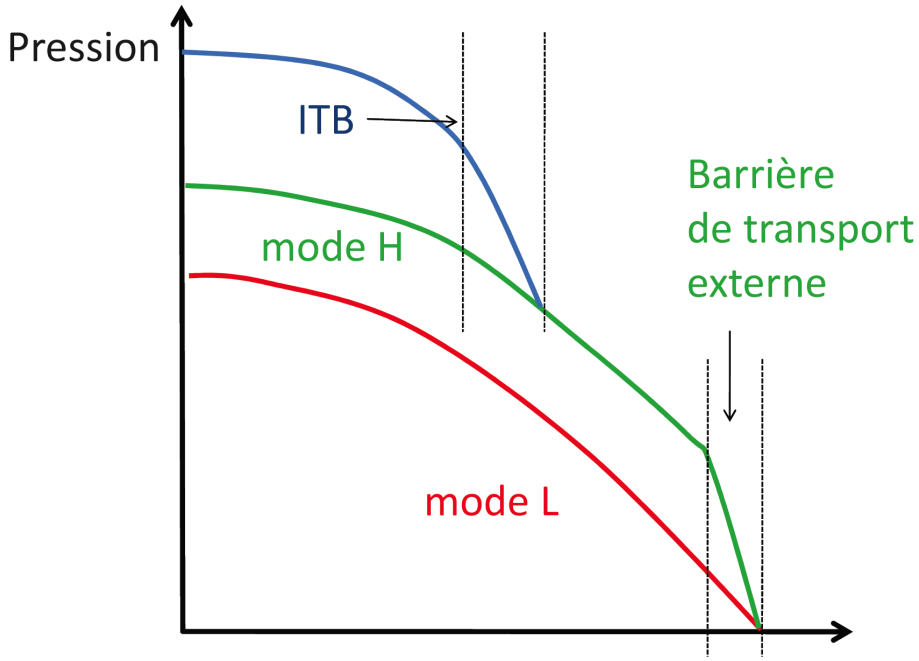


FIGURE 1.3.2: Configuration spatiale des modes L et H dans un tokamak et barrières de transport associées (figure issue de la thèse Elisée Trier [9])

type de turbulence, notamment son couplage avec des structures de plus grande échelle : les flux zonaux, et plus généralement les écoulements cisaillés. Dans cette section, nous aborderons les principales caractéristiques des ondes de dérive et des flux zonaux.

1.4.1 Turbulence d'onde de dérive

Il a été montré ces dernières décennies que le transport dans les tokamaks est principalement dominé par la turbulence d'onde de dérive[10]. Nous donnons d'abord un aperçu schématique introduisant le concept d'onde de dérive, avant d'en détailler certaines particularités en nous appuyant sur les équations d'Hasegawa-Mima et d'Hasegawa-Wakatani. S'il est difficile de décrire tous les phénomènes liés aux ondes de dérive de manière intuitive, leur propagation et déstabilisation peuvent s'appréhender de manière simple.

Propagation

Nous nous plaçons dans une configuration simplifiée se limitant aux ingrédients nécessaires à la formation des ondes de dérive : champ magnétique homogène $\boldsymbol{B}_0$ dirigé dans la direction $\boldsymbol{e}_z$, gradient de densité ∇n_0 selon $\boldsymbol{e}_r$. Les électrons sont supposés adiabatiques (voir section 1.3.7) : ils se déplacent de telle manière que la densité électronique soit exactement en phase avec le potentiel électrostatique. Pour expliquer ce phénomène, considérons la vitesse de dérive de champs croisés : $\boldsymbol{V}_E = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}^2}$. Dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, il est raisonnable d'envisager l'existence d'une variation de densité électronique le long de la direction $\boldsymbol{e}_y$. Comme l'illustre la figure 1.4.1, la dérive

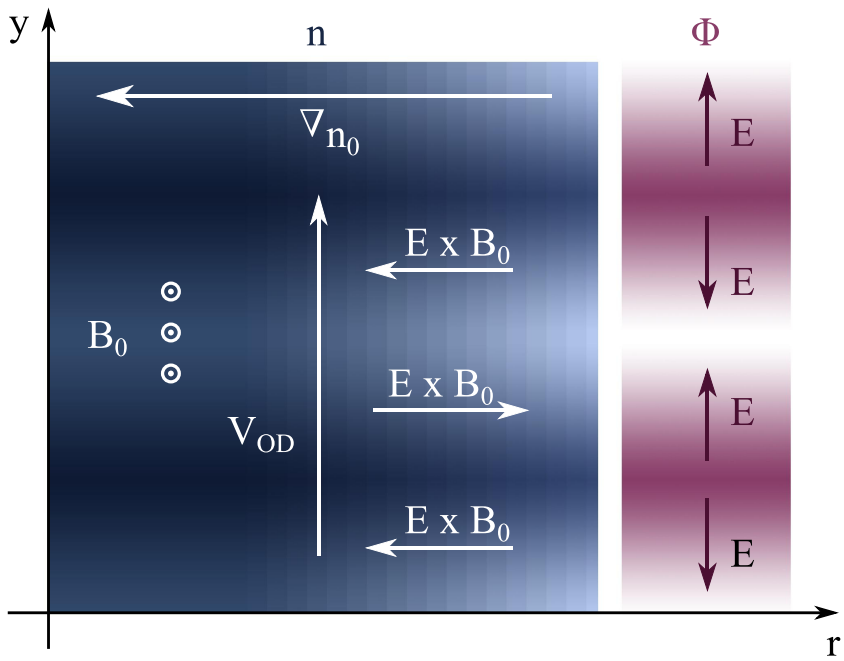


FIGURE 1.4.1: Propagation d'une onde de dérive : lorsque potentiel et densité varient en phase, une onde se propage dans la direction y à la vitesse V_{OD} en raison de l'effet combiné du gradient de densité et de la dérive de champs croisés $\boldsymbol{V}_{E\times B}$.

emmène des particules issues de zones denses vers des zones peu denses et inversement, ce qui a pour effet de déplacer les maxima de densité : il y a alors propagation de la perturbation qui devient une onde de dérive de vitesse $\boldsymbol{V}_{OD}$.

Déstabilisation

Dans la même configuration spatiale, des électrons non adiabatiques peuvent créer un léger déphasage entre le potentiel et la densité. Dans ce cas, une situation par exemple identique à la figure 1.4.2, il n'y a plus uniquement propagation mais aussi des accumulations dues à l'alimentation de zones denses par des flux provenant d'autres zones denses : il s'agit d'une instabilité de dérive.
Pour compléter l'approche intuitive proposée précédemment, il est indispensable d'étudier l'aspect analytique des ondes de dérive. Les équations établies par Hasegawa and Mima [11] puis par Wakatani and Hasegawa [12], permettent d'appréhender le phénomène physique relativement simplement et précisément. Nous établirons directement les équations d'Hasegawa-Wakatani, pour retrouver l'équation d'Hasegawa-Mima à la limite adéquate.

1.4.1.1 Equations d'Hasegawa-Wakatani

Pour obtenir ces équations, il est nécessaire d'émettre les hypothèses listées ci-dessous. Celles-ci sont pertinentes pour les plasmas de tokamaks, dont la particularité est la forte magnétisation des particules.

– Utilisation d'une géométrie "slab"

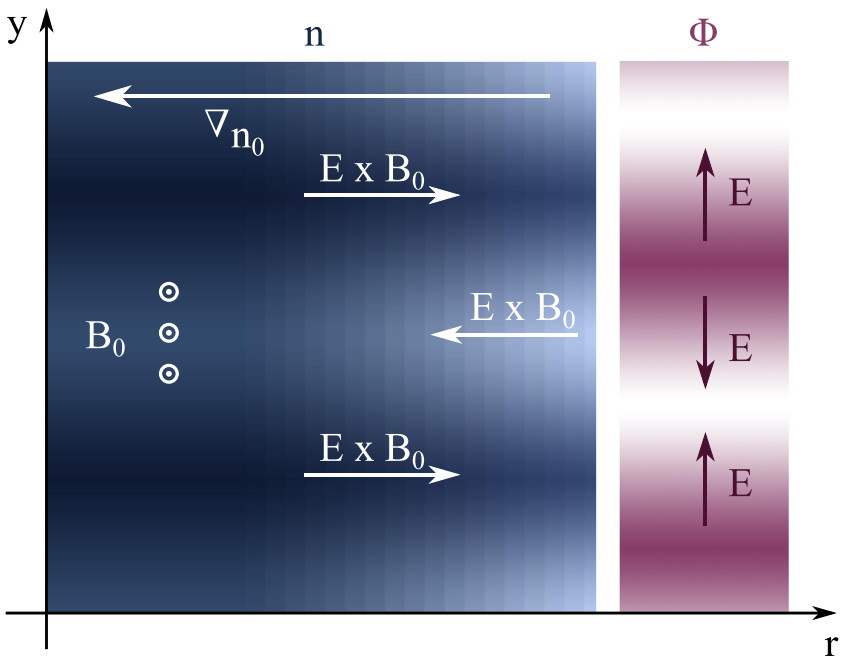


FIGURE 1.4.2: Instabilité de dérive : lorsque potentiel et densité électronique ne sont plus en phase, l'accumulation de densité provoquent l'émergence d'instabilités.

- Le champ magnétique est considéré homogène $\boldsymbol{B} = B_0\mathbf{e_z}$ et une densité "de fond" $n_0(x)$ est définie
- La population de particules est supposée fortement magnétisée, ce qui induit : $\frac{1}{\omega_{ci}}\frac{\partial}{\partial t} \ll 1$ et nous permet d'utiliser les définitions classiques des vitesses de dérive dans un tokamak (ω_{ci} est la pulsation cyclotronique ionique)
- La quasi-neutralité dans les plasmas $n_e \approx n_i$
- $T_i \ll T_e$

Selon nos hypothèses, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\parallel} + \boldsymbol{V}_E + \boldsymbol{V}_P$ où $\boldsymbol{V}_E$ est la vitesse de champs croisés, $\boldsymbol{V}_P$ la vitesse de polarisation et $\boldsymbol{V}_{\parallel}$ la vitesse parallèle au champ magnétique. Etant en géométrie slab, les vitesses de gradient et de courbure sont nulles. Ces vitesses s'expriment comme suit :

$$\boldsymbol{V}_E = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B_0^2} = \frac{\boldsymbol{e}_z \times \nabla\phi}{B_0}$$
$$\boldsymbol{V}_P = -\frac{1}{\omega_c B_0}\frac{d}{dt}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\omega_c B_0}\frac{d}{dt}\nabla\phi$$

L'équation de continuité des électrons, en s'appuyant sur la condition de quasi-neutralité $n_e = n_i = n$, peut être transformée :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \boldsymbol{V}_E \cdot \nabla n + \nabla_\parallel \cdot (n\boldsymbol{V}_{e\parallel}) = 0 \tag{1.4.1}$$

et avec $\boldsymbol{J}_\parallel = -en_e\boldsymbol{V}_{e\parallel}$, il vient : $$\frac{\partial}{\partial t}\frac{n}{n_0} + \boldsymbol{V}_E \cdot \nabla\frac{n}{n_0} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{1}{n_0}\frac{d}{dx}n_0 = \frac{1}{en_0}\nabla_\parallel \cdot \boldsymbol{J}_\parallel \tag{1.4.2}$$

La norme de la vitesse de polarisation électronique, qui est faible devant celle de la vitesse de dérive de champs croisés, est ici négligée. Par ailleurs, la loi d'Ohm résistive nous donne dans la direction parallèle :

$$n_0 q\boldsymbol{E} - \nabla_\parallel P + \eta\boldsymbol{J}_\parallel = 0$$

qui peut se mettre sous la forme suivante

$$\boldsymbol{J}_\parallel = \frac{n_0 T_e}{\eta}\nabla_\parallel\left(\frac{n}{n_0} - \frac{e\phi}{T_e}\right) \tag{1.4.3}$$

En intégrant l'équation (1.4.3) dans (1.4.2), nous obtenons la première équation d'Hasegawa-Wakatani :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{n}{n_0} + \frac{\boldsymbol{e}_z \times \nabla\phi}{B_0} \cdot \nabla\frac{n}{n_0} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{1}{n_0}\frac{dn_0}{dx} = \frac{T_e}{e\eta}\nabla_\parallel^2\left(\frac{n}{n_0} - \frac{e\phi}{T_e}\right)$$

En soustrayant les équations de continuité ionique et électronique l'une à l'autre, l'hypothèse de quasi-neutralité mène à la stationnarité des courants :

$$\nabla_\perp \cdot \boldsymbol{J}_\perp + \nabla_\parallel \cdot \boldsymbol{J}_\parallel = 0$$

Le calcul de la divergence de la densité de courant perpendiculaire implique la vitesse de polarisation, qui est conservée puisque la vitesse de champs croisés s'annule sous la divergence :$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}_E = (1/B_0^2)\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = 0$ pour B constant. Le ratio des masses ionique/électronique est amené dans l'expression de la vitesse de polarisation par la pulsation cyclotronique $\omega_c = qB/m$. La masse ionique étant bien plus grande que celle de l'électron, seule la partie ionique de cette vitesse est considérée :

$$\begin{aligned}
\nabla_\perp \cdot (ne\boldsymbol{V}_{Pi}) &= -\nabla_\parallel \cdot \boldsymbol{J}_\parallel \\
\frac{n_0}{\omega_{ci}B_0}\frac{d}{dt}\nabla_\perp^2\phi &\approx \frac{1}{e}\nabla_\parallel \cdot \boldsymbol{J}_\parallel \\
&\approx \frac{n_0 T_e}{e\eta}\nabla_\parallel^2\left(\frac{n}{n_0} - \frac{e\phi}{T_e}\right)
\end{aligned}$$

La viscosité, qui rend compte de la dissipation collisionnelle et de l'amortissement Landau, est modélisée par la substitution $d/dt \to d/dt - \nu\nabla_\perp^2$, ce qui nous permet d'obtenir la seconde équation et donc le système complet d'Hasegawa-Wakatani :

$$\left[\frac{1}{\omega_{ci}}\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{T_e}{\omega_{ci}eB_0}\boldsymbol{e}_z\times\nabla\left(\frac{e\phi}{T_e}\right)\right)\cdot\nabla\right]\frac{n}{n_0}-\frac{T_e}{eB_0\omega_{ci}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e\phi}{T_e}\right)\frac{1}{n_0}\frac{dn_0}{dx}$$
$$=\frac{T_e}{e\eta\omega_{ci}}\nabla_{\parallel}^2\left(\frac{n}{n_0}-\frac{e\phi}{T_e}\right) \tag{1.4.4}$$

$$\frac{T_e}{\omega_{ci}^2eB_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{T_e}{e}\left(\boldsymbol{e}_z\times\nabla\left(\frac{e\phi}{T_e}\right)\right)\cdot\nabla\right]\nabla_{\perp}^2\left(\frac{e\phi}{T_e}\right)-\nu\frac{T_e}{\omega_{ci}eB_0}\nabla_{\perp}^4\left(\frac{e\phi}{T_e}\right)$$
$$=\frac{T_e}{e\eta\omega_{ci}}\nabla_{\parallel}^2\left(\frac{n}{n_0}-\frac{e\phi}{T_e}\right) \tag{1.4.5}$$

Une fois adimensionnées avec les changements suivants, $\rho_s^2=\dfrac{T_e}{eB\omega_{ci}}$: $t\to t\omega_{ci}$, x, $y\to\dfrac{x}{\rho_s}$, $\dfrac{y}{\rho_s}$, $z\to zLn^{-1}\phi\to\dfrac{e\phi}{T_e}$, $n\to\dfrac{n}{n_0}$, $\dfrac{T_e}{e\eta\omega_{ci}Ln^2}\to C$, $\rho_sLn^{-1}\to v_*$ avec $Ln=-\left(\dfrac{1}{n_0}\dfrac{dn_0}{dx}\right)^{-1}$, $\dfrac{\nu}{\rho_s^2\omega_{ci}}\to\nu$, les deux équations d'Hasegawa-Wakatani deviennent :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{e}_z\times\nabla\phi)\cdot\nabla\right]n+v_*\frac{\partial}{\partial y}(\phi)=C\nabla_{\parallel}^2(n-\phi)$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{e}_z\times\nabla\phi)\cdot\nabla\right]\nabla_{\perp}^2\phi-\nu\nabla_{\perp}^4(\phi)=C\nabla_{\parallel}^2(n-\phi)$$

1.4.1.2 Equations d'Hasegawa-Mima et d'Hasagawa-Mima généralisée

A partir des équations d'Hasegawa-Wakatani, il est possible de retrouver l'équation d'Hasegawa-Mima en effectuant l'hypothèse supplémentaire de non-collisionnalité qui implique que $C\to\infty$ et $\nu\to 0$. Les termes de gauche ne pouvant être physiquement égaux à l'infini, ceux de droite doivent satisfaire à $C\nabla_{\parallel}^2(n-\phi)=0$, c'est-à-dire $n=\phi$. Les électrons sont donc considérés comme adiabatiques, ce qui mène à

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{e}_z\times\nabla\phi)\cdot\nabla_{\perp}\right]\left(\phi-\nabla_{\perp}^2\phi\right)+v_*\frac{\partial}{\partial y}(\phi)=0 \tag{1.4.6}$$

qui est équivalent à la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\phi-\phi\right)\quad+(\boldsymbol{e}_z\times\nabla\phi)\cdot\nabla\left(\nabla_{\perp}^2\phi-\ln n_0\right)=\quad 0$$

Notons que deux quantités remarquables sont conservées par cette équation, l'énergie généralisée :

$$E_G=\int\left(\phi^2+(\nabla\phi)^2\right)dV$$

et l'enstrophie généralisée :

$$W_G = \int \left((\nabla\phi)^2 + \left(\nabla^2\phi\right)^2 \right) dV$$

Il est possible de dériver une équation d'Hasegawa-Mima dite généralisée en séparant potentiel et densité en deux quantités "moyennées" et "fluctuantes" : $\phi = \overline{\phi}(x,\, t) + \tilde{\phi}(x,\, y,\, t)$ et $n = \tilde{n}(x,\, y\, t)$ à partir de l'équation d'Hasegawa-Wakatani. $\overline{\phi}$ évolue lentement dans le temps. Ces deux parties représentent donc respectivement les évolutions à plus larges échelles pour la première et les micro-fluctuations pour la seconde, assimilées à de la turbulence. Cette décomposition permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} + v_* \frac{\partial}{\partial y}\tilde{\phi} + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\left(\overline{\phi} + \tilde{\phi}\right)\right) \cdot \nabla\left(\tilde{n}\right) = C\nabla_{\parallel}^2\left(\tilde{n} - \tilde{\phi}\right) \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_{\perp}^2\left(\overline{\phi} + \tilde{\phi}\right)\right) + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\overline{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla_{\perp}^2\left(\tilde{\phi}\right) \\
&\quad + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla_{\perp}^2\left(\tilde{\phi} + \overline{\phi}\right) - \nu\nabla_{\perp}^4\left(\phi\right) = C\nabla_{\parallel}^2\left(\tilde{n} - \tilde{\phi}\right)
\end{aligned}$$

où le terme $\left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\overline{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla_{\perp}^2\overline{\phi}$ est nul en raison des hypothèses de dépendance qui s'appliquent à $\overline{\phi}$. En choisissant à nouveau la limite sans collision, par le même raisonnement qui nous a permis de faire la transition d'Hasegawa-Wakatani à Hasegawa-Mima, nous trouvons $\tilde{\phi} = \tilde{n}$ et le système devient :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\overline{\phi}\right) \cdot \nabla\right)\left(\tilde{\phi} - \nabla_{\perp}^2\tilde{\phi}\right) + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\left(\ln(n_0)\right) \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^2\overline{\phi} + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla_{\perp}^2\left(\overline{\phi} + \tilde{\phi}\right) \qquad (1.4.7)
\end{aligned}$$

Il est alors possible d'obtenir l'évolution temporelle des parties fluctuantes et moyennées. En moyennant cette équation sur les fluctuations pour obtenir la première équation, puis en soustrayant cette première équation à l'équation 1.4.7 pour obtenir la seconde, ce qui nous donne respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^2\overline{\phi} = -\left\langle\left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla_{\perp}^2\left(\tilde{\phi}\right)\right\rangle$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\overline{\phi}\right) \cdot \nabla\right)\left(\tilde{\phi} - \nabla_{\perp}^2\tilde{\phi}\right) + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\left(\ln(n_0) - \nabla_{\perp}^2\overline{\phi}\right) \qquad (1.4.8)$$

$$= \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla_{\perp}^2\tilde{\phi} - \left\langle\left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla_{\perp}^2\tilde{\phi}\right\rangle \qquad (1.4.9)$$

1.4.1.3 Propagation des ondes de dérive

Après avoir appréhendé la propagation des ondes de dérive de manière schématique en (1.4.1), nous pouvons étudier plus précisément leur fonctionnement via la relation de

dispersion de l'équation d'Hasegawa-Mima. Une fois linéarisée et passée dans l'espace de Fourier, la relation devient :

$$i\omega_k \left(1 + k_\perp^2\right) - ik_y v_* = 0$$
$$\omega_k = \frac{v_* k_y}{1 + k_\perp^2}$$

Il n'existe ici aucune instabilité linéaire : l'équation d'Hasegawa-Mima, en l'état, peut donc uniquement résoudre la propagation des ondes de dérive. En se plaçant aux plus grandes échelles, $k_\perp^2 \ll 1$, les ondes se propagent à une vitesse $v = v_*$. Le redimensionnement mène à l'expression suivante :

$$v_{diam} = \frac{T_e}{eB} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}$$

qui n'est autre que celle de la vitesse diamagnétique électronique. La pulsation diamagnétique est alors définie comme $\omega_* = k_y v_*$.

1.4.1.4 Instabilités d'ondes de dérive

L'équation d'Hasegawa-Mima ne faisant pas émerger d'instabilités, il est possible d'utiliser la relation de dispersion d'Hasegawa-Wakatani pour les étudier :

$$\left(i\omega - Ck_\parallel^2\right) n = \left(iv_* k_y - Ck_\parallel^2\right) \phi$$
$$Ck_\parallel^2 n = \left(-i\omega k_\perp^2 + Ck_\parallel^2 + \nu k_\perp^4\right) \phi$$

En divisant ces deux lignes l'une par l'autre, la relation devient :

$$\left(i\omega_* - Ck_\parallel^2\right) Ck_\parallel^2 = \left(i\omega - Ck_\parallel^2\right) \left(-i\omega k_\perp^2 + Ck_\parallel^2 + \nu k_\perp^4\right)$$

En posant $\omega = \omega_r + \gamma i$ avec $\gamma \ll \omega_r$ et en se plaçant dans une situation quasi-adiabatique $\nu \ll C$, l'instabilité de dérive présente le taux de croissance suivant :

$$\gamma = \frac{\omega_r k_\perp^2}{Ck_\parallel^2 \left(1 + k_\perp^2\right)}$$

1.4.2 Flux zonaux

Le transport radial turbulent étant plusieurs fois plus grand que le transport néoclassique, il est nécessaire d'explorer les possibilités existantes pour diminuer l'importance des fluctuations turbulentes. Les flux zonaux semblent être un des phénomènes qui limite le plus efficacement la micro-turbulence. Les flux zonaux peuvent être définis, de manière générale, comme des écoulements issus de champs croisés créant des structures azimutalement symétriques. Ils sont présents dans les atmosphères de certaines planètes, Vénus

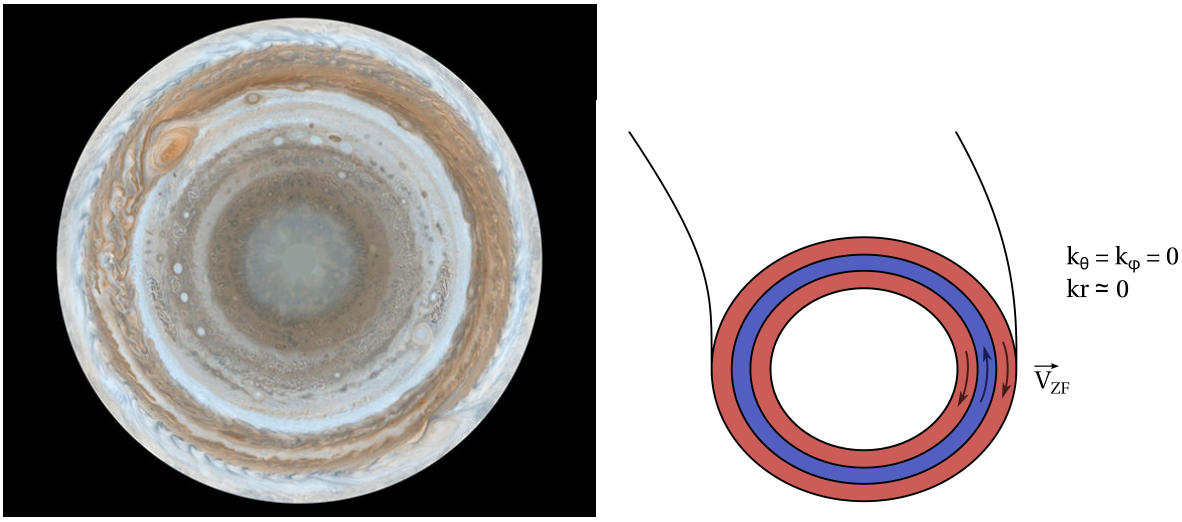


FIGURE 1.4.3: Flux zonaux capturés par la sonde Cassini à la surface de Jupiter (à gauche, source : Nasa.gov) et structure des flux zonaux dans un tokamak (à droite)

[13], la Terre [14] et Jupiter (figure 1.4.3) par exemple. Ils sont aussi à l'oeuvre dans les anneaux de Jupiter [15] et jouent un rôle dans la dynamo solaire [16]. En ce qui concerne le "laboratoire", et plus particulièrement les tokamaks, les flux zonaux occupent une place importante dans la dynamique du confinement magnétique, notamment par l'intermédiaire de leur fort couplage avec la turbulence d'onde de dérive. La revue de Diamond et al. [15] offre une vision globale et détaillée de ces interactions.

Dans le contexte d'un tokamak, les flux zonaux correspondent à des perturbations du potentiel électrostatique, formant des structures qu'on pourrait décrire comme des cellules de convection très étirées, et poloïdalement symétriques. Dans ce type de machine, les interactions entre les ondes de dérive et les flux zonaux, alors désignés sous le nom de cellules de convection, commencent à être mises au jour à la fin des années 70 [11, 17]. La capacité des flux zonaux à réduire la turbulence, via le cisaillement de vitesse radiale qu'ils produisent, a déjà été démontrée aussi bien théoriquement [18], qu'expérimentalement (se référer par exemple à [19] pour une revue détaillée dans ce domaine), où à l'aide de simulations gyrocinétiques notamment [20][21]. De plus amples détails sur la réduction de la turbulence par les écoulements cisaillés seront notamment trouvés dans les revues de Terry [22], Itoh and Itoh [23] et Burrell [24]. Les flux zonaux sont issus, via la vitesse de champs croisés $V_{E\times B}$, d'un champ électrique variant et s'inversant rapidement le long du petit rayon du tokamak, d'où résulte le cisaillement illustré sur la figure 1.4.3 (à droite). Ce champ électrique a pour particularités $k_\parallel = 0$ et $k_\theta = 0$, où $k_\parallel$ et k_θ sont respectivement les nombres d'onde parallèle et poloïdal, tandis que le nombre d'onde radial adimensionné est lui considéré petit devant 1 : $k_r\rho_i \ll 1$. Les flux zonaux diffèrent du cisaillement moyen par l'aptitude de ce dernier à subsister en l'absence de micro-turbulence, alors que les premiers sont exclusivement générés et entretenus par la turbulence.

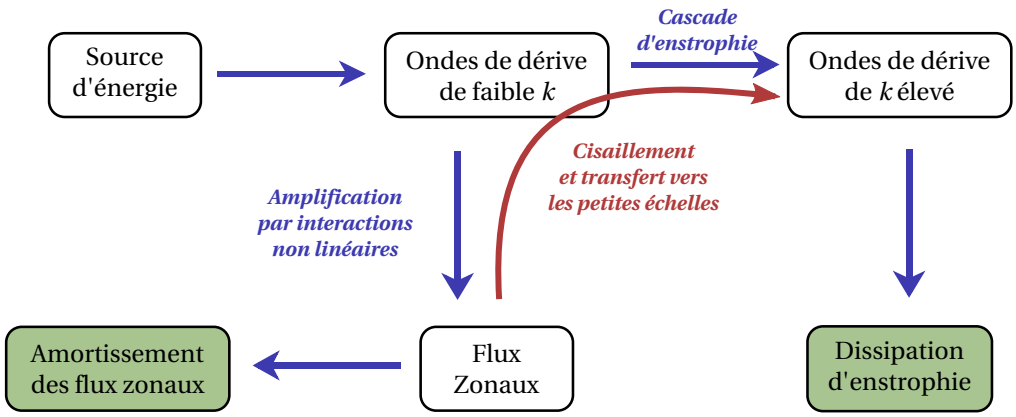


FIGURE 1.4.4: Interactions entre les ondes de dérive et les flux zonaux, de la génération à l'amortissement

1.4.2.1 Formation et amplification

Puisque les flux zonaux s'écoulent dans la direction poloïdale, ils ne peuvent accéder aux sources "habituelles" d'énergie libre que constituent les gradients radiaux de température ou de densité. L'accroissement des flux zonaux est donc majoritairement régi par des interactions de type non-linéaire. Plus précisément, à partir d'instabilités paramétriques, les ondes de dérive peuvent générer des cellules de convection avec $k_{\|} = 0$ [17], assimilables à des flux zonaux à la limite anisotropique pour laquelle $k_\theta \to 0$. De manière plus spécifique aux flux zonaux, il a été montré [25][26] que ceux-ci peuvent être excités via des modulations de l'enveloppe radiale d'une onde de dérive. Des calculs par approximation quasi-linéaire permettent également d'estimer le taux d'amplification des flux zonaux par la turbulence [27], qui s'exprime ainsi :

$$\gamma_q = -2q^2 c_s^2 \sum_k \frac{k_\theta^2 \rho_s^2}{\left(1 + k_\perp^2 \rho_s^2\right)^2} R(k,\, q) k_r \frac{\partial}{\partial k_r} \left\langle \left(1 + k_\perp^2 \rho_s^2\right) < \varepsilon(k) > \right\rangle$$

avec

$$R(k,\, q) = \frac{\gamma_k}{q^2 V_{g,r}^2 + \gamma_k^2}$$

où q est le nombre d'onde radial des flux zonaux, k_θ, $k_\perp$ et k_r les nombres d'onde des ondes de dérive dans les directions respectives, γ_k le taux de croissance des ondes de dérive, $V_{g,r}$ leur vitesse de groupe radiale et $\varepsilon(k)$ leur densité d'énergie.

1.4.2.2 Amortissement

En raison de ces caractéristiques ($k_{\|} = 0$), les flux zonaux ne sont pas sensibles à l'amortissement Landau, ce qui leur confère la possibilité de se développer significativement. L'unique dissipation linéaire qui agit sur les flux zonaux est donc due aux phénomenes neoclassiques. Dans la plupart des tokamaks, il s'agit de collisions ions-ions (voire

ions-neutres dans certains cas) ou de frictions collisionnelles entre particules passantes et piégées [28] : en régime de basse collisionnalité l'amortissement linéaire est en effet proportionnel à la fréquence de collision ions-ions ν_{ii} [29]. Certains effets "3D" peuvent aussi contribuer à l'amortissement des flux zonaux dans des cas particuliers : effet du ripple, perturbations magnétiques résoantes, ou encore géométrie spécifique (stellerators) qui freine le développement des flux zonaux. Des phénomènes non-linéaires, issus par exemple de l'instabilité de Kelvin-Helmotz, peuvent jouer un rôle de saturation sur les flux zonaux en régime de très faible collisionnalité [30]. Cependant, outre les interactions non linéaires directes avec la micro-turbulence, nous nous limiterons à la prise en compte du terme d'amortissement linéaire dans la suite de ce manuscrit. Les interactions entre les flux zonaux et les ondes de dérive sont résumées schématiquement sur la figure 1.4.4.

1.4.3 Effet des interactions non locales sur la cascade turbulente et le spectre de Fourier

L'analyse dimensionnelle est la manière la plus directe pour retrouver le spectre de Fourier correspondant à la turbulence. Nous disposons pour cela d'une quantité conservée par les interactions non linéaires locales et non locales, il s'agit de la vorticité potentielle :

$$h \approx n - \nabla^2 \Phi \tag{1.4.10}$$

Il est raisonnable de supposer qu'il existe un intervalle d'échelle pour lequel la production et la dissipation de la vorticité potentielle peuvent être négligées. Cet intervalle est qualifié d'"échelles inertielles". Le transfert de la quantité conservée est généralement associé au terme "cascade directe", lorsque celui-ci a lieu des grandes échelles vers les petites échelles, ou "cascade inverse" si le transfert s'effectue dans le sens opposé. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_d(k) = -\frac{\partial}{\partial k} \Pi_Z(k) + P_Z(k) - \varepsilon_Z(k) \tag{1.4.11}$$

où $Z_d(k) = \int k d\alpha_k \int_{k-\epsilon}^{k+\epsilon} h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}'} d^2\mathbf{k}'$ est la densité d'enstrophie potentielle , $\Pi_Z(k)$ est le flux dans l'espace des k, $P_Z(k)$est la production, $\varepsilon_Z(k)$ la dissipation d'enstrophie potentielle, et $\alpha_k = arctan(k_y/k_x)$ l'angle en espace de k. Les interactions non locales avec un mode unique dominant peuvent être ajoutées à cette équation de transfert de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_d(k) = -\frac{\partial}{\partial k} \Pi_Z^{(nl)}(k,\, q) - \frac{\partial}{\partial k} \Pi_Z^{(l)}(k) + P_Z(k) - \varepsilon_Z(k)$$

$$\Pi_Z^{(nl)}(k,\, q) = -\int_0^k dk' k' \left(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{q} \cdot \mathbf{k}'\right) \left[\overline{h}_{\mathbf{q}}^* \widetilde{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \widetilde{h}_{\mathbf{k}}^* + \overline{\Phi}_{\mathbf{q}} \widetilde{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^* \widetilde{h}_{\mathbf{k}}\right]$$

L'analyse dimensionnelle, avec $E(\mathbf{q}) = q^2 \overline{\Phi}_{\mathbf{q}}^2$, permet de déduire la dépendance du flux non linéaire d'enstrophie généralisée :

$$\Pi_Z^{(nl)}(k, q) = E(\mathbf{q})^{1/2} Z_d(k) k^2$$

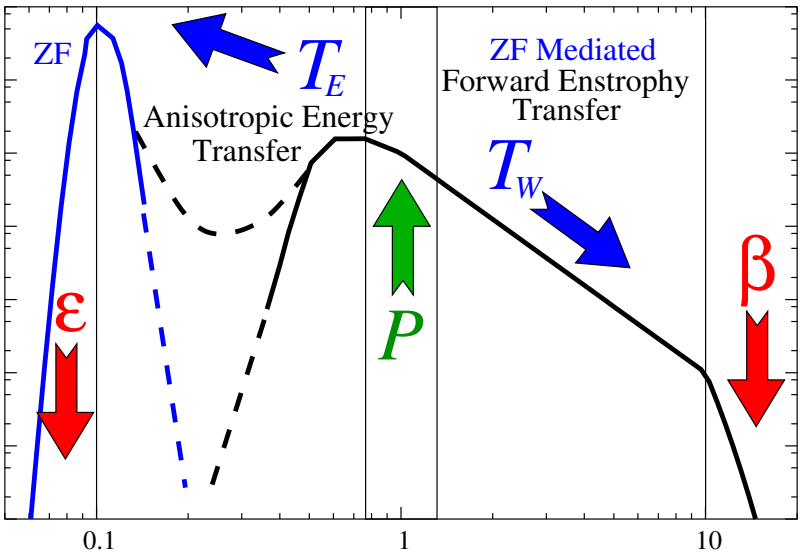


FIGURE 1.4.5: Représentation schématique de la cascade turbulente en deux dimensions dominée par les flux zonaux. Ici, alors que les échelles proches de l'injection d'énergie restent anisotropes, les petites échelles sont supposées isotropes. La région située entre les flux zonaux et les petites échelles n'est pas traitée puisqu'elle relève de la théorie quasi-linéaire (cette région étant fortement anisotropique, il n'est pas pertinent de la représenter en une dimension uniquement)

Et pour$\Pi_W^{(nl)} \gg \Pi_W^{(l)}$, nous parvenons au spectre limite de l'enstrophie

$$Z(k) \propto \frac{\beta}{E(\mathbf{q})^{1/2}} k^{-2}$$

Loin du mode dominant, et en considérant les électrons adiabatiques, le spectre des fluctuations de densité s'exprime comme

$$\left\langle |n_{\mathbf{k}}|^2 \right\rangle \propto \frac{\beta}{E(\mathbf{q})^{1/2}} \frac{k^{-3}}{(1+k^2)^2}$$

Le mode dominant correspond au mode le plus efficient en terme d'interactions non linéaires, y compris par rapport aux interactions locales entre modes voisins. Le spectre est dominé par ce mode unique discret, dont nous nous attendons à ce qu'il corresponde aux écoulements de grande échelle, notamment aux flux zonaux ou modes géodésiques acoustiques (GAMs). La figure 1.4.5 représente schématiquement le phénomène de cascade lorsque l'interaction avec les flux zonaux est prépondérante.

Bien que le mode H évoqué dans ce chapitre soit maintenant reproductible dans de nombreux tokamaks depuis plus de trois décennies, les mécanismes régissant la transition L-H restent imprécis, même si le fonctionnement global est désormais au moins partiellement compris. Les interactions entre la turbulence et les flots cisaillés, qu'il s'agisse de flots moyens, de flux zonaux ou de GAMs, semblent jouer un rôle prépondérant dans le déclenchement de la transition et le maintien d'un mode de fort confinement, d'après les recherches menées durant les vingt dernières années. Cependant, les conditions et les

causes du déclenchement de la transition L-H sont encore largement débattues. Ainsi, le rôle des flux zonaux n'est pas élucidé avec certitude : il n'est pas établi de manière définitive s'ils sont réellement à l'origine de la transition où s'ils n'en sont qu'un effet collatéral. C'est ce contexte qui motive le travail d'analyse des interactions dans l'espace de Fourier entre structures de grande échelle et micro-turbulence, présenté dans le chapitre suivant.

2 Etude des interactions entre turbulence et flux zonaux à partir d'un modèle en couches

Après avoir présenté les caractéristiques générales des flux zonaux et ondes de dérive à la fin du chapitre précédent, nous nous concentrons ici sur la construction d'un modèle en couches à partir du système d'équations d'Hasegawa-Mima généralisées en séparant les échelles fluctuantes des échelles moyennées. Une fois introduit le concept de modèle en couches, nous proposerons une version réduite de ce modèle qui nous permettra d'étudier finement les interactions prédateurs-proies entre turbulence et flux zonaux, aussi bien analytiquement que numériquement. La dernière section de ce chapitre sera consacrée à la mesure numérique de l'influence des écoulements cisaillés sur le spectre turbulent à l'aide d'une extension du modèle à un plus grand nombre de couches.

2.1 Introduction : le concept du modèle en couches

Le principe des modèles en couches ("shell model" en anglais) consiste à moyenner une grandeur conservée sur des intervalles spectraux successifs, qui forment ainsi les "shell" que nous appellerons "couches" en français. La largeur de cet intervalle dépend directement du coefficient d'espacement logarithmique des couches g. Les couches sont alors délimitées par les valeurs de k telles que $k_n = g^n k_0$ où n est en entier positif (voir figure 2.1.1). Les deux modèles en couches les plus connus ont été proposés par Desnianskii et Novikov [31][32] pour le premier, et par Glezder, Ohkitani, et Yamada pour le second [33, 34] (d'où le nom de GOY utilisé fréquemment). Initialement, ces modèles ont été utilisés pour décrire la turbulence fluide, et plus particulièrement les cascades turbulentes. En prenant l'exemple de la vitesse, ils proposent tous deux de définir chaque vitesse de couche u_n comme :

$$u_n = \sqrt{\int_{k_n}^{k_{n+1}} E(k)dk}$$

en utilisant les k_n tels que définis ci-dessus. Pour définir l'équation d'évolution temporelle de cette variable, il est supposé que les interactions sont locales dans l'espace de Fourier : les u_n ne peuvent donc interagir qu'avec les u_m tels que m soit proche de n. Les modèles de type GOY présentent l'avantage de laisser la possibilité d'existence d'une solution dynamique et chaotique, tandis que le modèle de Desnianskii-Novikov aboutit généralement à une solution asymptotique de type "point fixe". Etant donné notre objectif d'étudier des interactions comportant une composante dynamique importante, il est naturel d'uti-

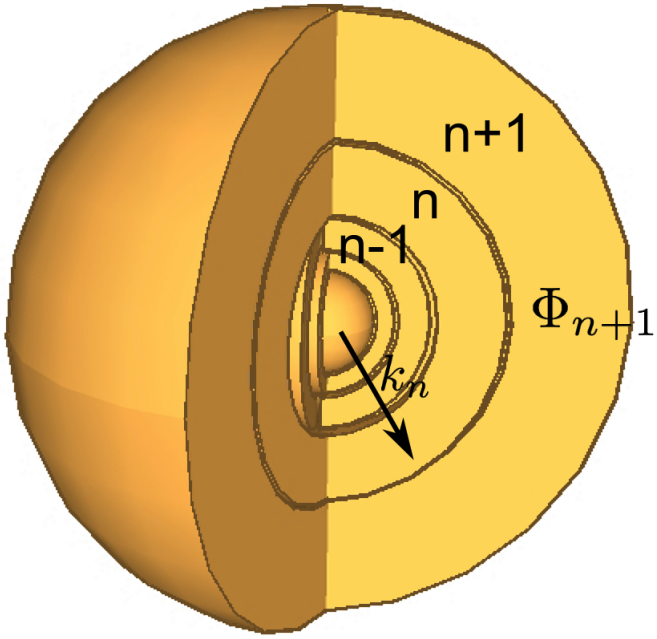


FIGURE 2.1.1: Coupe schématique d'un modèle en couche pour la turbulence 3D.

liser dans ce cas un modèle GOY, dont la partie non-linéaire de l'équation d'évolution s'exprime sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a_n {u^*}_{n+1} u^*_{n+2} + b_n {u^*}_{n-1} {u^*}_{n+1} + c_n {u^*}_{n-1} {u^*}_{n-2}$$

Les interactions, ici supposées locales, s'effectuent donc avec les couches voisines les plus proches et les couches d'un seul ordre supérieur. En utilisant l'équation de base (ici Navier-Stokes) dans l'espace de Fourier et en appliquant les lois de conservation, par exemple celle de l'énergie, les coefficients d'interaction a_n, b_n, c_n peuvent être déterminés, ou tout au moins les degrés de liberté peuvent être réduits. Dans les plasmas, et plus particulièrement dans l'équation d'Hasegawa-Mima, le potentiel électrostatique est la grandeur de référence. Pour une couche n donnée, il peut se définir comme suit :

$$\Phi_n^2 = \frac{1}{1+k_n^2} \int_0^{2\pi} \int_{k_n}^{k_{n+1}} \left|\tilde{\phi}_k\right|^2 (1+k^2) d\alpha_k k dk$$

où $\alpha_k = arctan\,(k_y/k_x)$ est l'angle en espace de k. Cette relation permet de définir l'énergie généralisée d'une manière cohérente :

$$E_n = \int_{k_n}^{k_{n+1}} E(k) dk = \Phi_n^2 \left(1+k_n^2\right)$$

C'est une quantité qui devra être conservée par le modèle en couche.

2.2 Construction du modèle en couches couplant des échelles disparates

Afin de construire un modèle en couches capable de saisir les interactions entre différentes échelles spectrales y compris celles des flux zonaux, nous choisissons de nous baser sur les équations généralisées d'Hasegawa-Mima.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_\perp^2 \overline{\phi}\right) = \left\langle \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla^2\tilde{\phi} \right\rangle \tag{2.2.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\overline{\phi}\right) \cdot \nabla\right)\left(\tilde{\phi} - \nabla_\perp^2\tilde{\phi}\right) + \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\left(n_0(x) - \nabla^2\overline{\phi}\right) \tag{2.2.2}$$

$$= \left[\left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla^2\tilde{\phi} - \left\langle \left(\boldsymbol{e}_z \times \nabla\tilde{\phi}\right) \cdot \nabla\nabla^2\tilde{\phi} \right\rangle\right] \tag{2.2.3}$$

Les termes "turbulence d'ondes de dérive" et "flux zonaux" feront respectivement référence à $\tilde{\phi}$ et $\overline{\phi}$ dans la suite de ce chapitre, même si la correspondance directe peut être questionnée dans un modèle simplifié. En effet, l'association entre les deux phénomènes physiques et les deux grandeurs est claire, mais il n'est pas exclu que $\tilde{\phi}$ et $\overline{\phi}$ puissent décrire d'autres structures d'échelle similaire en raison de leur définition qui reste générale.
A partir de ces deux équations, le schéma général suivant est établi :

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial t} = \sum_n a_n \Phi_n \Phi_{n+1} - \nu_F \overline{\Phi} \tag{2.2.4}$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial t} = b_n \overline{\Phi}\Phi_{n+1} + c_n \overline{\Phi}\Phi_{n-1} + C(\Phi_n,\, \Phi_n) \tag{2.2.5}$$

où :

$$C(\Phi_n,\, \Phi_n) = d_n \Phi_{n+1}\Phi_{n+2} + e_n \Phi_{n-1}\Phi_{n+1} + f_n \Phi_{n-1}\Phi_{n-2}$$

représente les interactions locales établies précédemment, et a_n, b_n , c_n sont des paramètres qui dépendent de k_n, de g, de q le nombre d'onde radial associé à $\overline{\Phi}$. L'évolution de $\overline{\Phi}$ est issue de l'interaction de tous les proches voisins entre eux. En effet, la condition de résonance $\boldsymbol{q} + \mathbf{k} + \boldsymbol{k}' = 0$ implique que seules les couches adjacentes sont susceptibles de mener au nombre d'onde q, puisque ce dernier est plus petit que k_0, lui-même étant le plus petit nombre d'onde qui borne la couche Φ_1. Le raisonnement est identique en ce qui concerne l'équation (2.2.5). Ainsi, en prenant un exemple pour lequel $g = 2$,

$$\begin{aligned} k_{n-2} \in [k/4,\, k/2] + k_{n-1} \in [k/2,\, k] &\rightarrow k_\mathrm{n} \in [k\, 2k] \\ k_{n+1} \in [2k,\, 4k] - k_{n-1} \in [k/2,\, k] &\rightarrow k_\mathrm{n} \in [k\, 2k] \\ k_{n+2} \in [4k,\, 8k] - k_{n+1} \in [2k,\, 4k] &\rightarrow k_\mathrm{n} \in [k\, 2k] \end{aligned}$$

et pour les interaction avec $\overline{\Phi}$:

$$k_{n-1} \in [k/2,\, k] + q \in [0,\, k_0] \rightarrow k_\mathrm{n} \in [k\, 2k]$$
$$k_{n+1} \in [2k,\, 4k] - q \in [0,\, k_0] \rightarrow k_\mathrm{n} \in [k\, 2k]$$

A partir de l'équation "moyennée" d'Hasegawa-Mima , en ce qui concerne les interactions non linéaires :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}^2 \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} &= \sum_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'=0} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}' \left(\boldsymbol{k}'^2 - \boldsymbol{k}^2\right) \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_{k'} = - \sum_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'=0} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}' \left(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}\right) \boldsymbol{q} \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_{k'} \\ &= -A k_n^3 g q \left(1 - g\right) \Phi_{n+1} \Phi_n\end{aligned}$$

A est une constante encore indéterminée. Une procédure identique est appliquée pour l'équation "fluctuante". Choisissons les termes mettant $\overline{\phi}$ en jeu :

$$(1 + k^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = (\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{k}') \cdot \boldsymbol{q} \left[1 - \sum_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}''=0} (\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{k}'^2) \right] \overline{\phi}_q \tilde{\phi}_{k'}$$

$$\begin{aligned}(1 + k_n^2) \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} &= B k_{n+1} q \left(1 + k_{n+1}^2 - q^2\right) \overline{\Phi} \Phi_{n+1} + C k_{n-1} q \left(1 + k_{n-1}^2 - q^2\right) \overline{\Phi} \Phi_{n-1} \\ &= B k_n g q \left(1 + g^2 k_n^2 - q^2\right) \overline{\Phi} \Phi_{n+1} + C k_n g^{-1} q \left(1 + g^{-2} k_n^2 - q^2\right) \overline{\Phi} \Phi_{n-1}\end{aligned}$$

Pour calculer les coefficients indéterminés A, B, C, il est nécessaire de considérer les invariants du système considéré.

Quantités conservées Comme cela a été souligné dans le premier chapitre, l'énergie généralisée et l'enstrophie généralisée sont des invariants des composantes locales de ce système ($\overline{\Phi}$ exclu). C'est donc aussi le cas pour les grandeurs E_n et W_n qui leur correspondent dans le modèle en couche.

$$E_n = \sum_n \left(1 + k_n^2\right) \Phi_n^2 \text{ et } W_n = \sum_n \left(1 + k_n^2\right) k_n^2 \Phi_n^2$$

Cependant, le couplage proposé entre les grandes échelles $\overline{\phi}$ et les petites échelles de fluctuation $\tilde{\phi}$ requiert l'introduction d'une troisième quantité invariante, conservée par les interactions non linéaires dans leur totalité, afin de déterminer les coefficients introduits par cette extension. Il s'agit de l'enstrophie potentielle :

$$Z = \left\langle \left(\nabla^2 \overline{\phi}\right)^2 + \left(\tilde{\phi} - \nabla^2 \tilde{\phi}\right)^2 \right\rangle$$

Dans les deux cas, la conservation s'effectue sur les termes de transferts non linéaires. L'équivalent en variables du modèle en couches donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial t} &= 2q^4 \sum \overline{\Phi}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} + \sum (1+k_n^2)^2 \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \\ &= \sum \left[2q^2 A k_n^3 g^3 \left(1-g^2\right) \Phi_n \Phi_{n+1} \overline{\Phi} + (1+k_n^2) B k_n g q \left(1+g^2 k_n^2 - q^2\right) \overline{\Phi} \Phi_n \Phi_{n+1}\right. \\ &\left. +(1+k_n^2 g^2) C k_n q \left(1+k_n^2-q^2\right) \overline{\Phi} \Phi_n \Phi_{n+1}\right] \\ &\equiv 0\end{aligned}$$

En procédant par ordre de k_n :

$$\begin{aligned}\text{pour } k_n^5 :\ Bqg^3 &= Cqg^2 \\ \text{pour } k_n :\ Bqg\left(1-q^2\right) &= Cqg^2\left(1-q^2\right) \\ \text{pour } k_n^3 :\ -Aq^3 g\left(1-g\right) &= -Bqg\left(g^2+1-q^2\right) - Cqg^2\left(g^{-2}+1-q^2\right)\end{aligned}$$

Il peut être déduit d'après les deux premières lignes que $C = -gB$, ce qui permet d'établir avec la troisième ligne que $A = -Bq\left(g+1\right)$. Pour trouver les coefficients d_n, e_n, et f_n, il suffit d'utiliser la version originale de l'équation "non généralisée" d'Hasegawa-Mima, puis de procéder de manière identique. La méthode étant similaire, les calculs ne sont pas repris dans ce manuscrit mais pourront être trouvés dans la réf. 35 ou en annexes (4.2.3).

Modèle complet En respectant les 3 lois de conservation évoquées et en posant le coefficient $B = \overline{\alpha}$, nous obtenons le système suivant :

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + \overline{\alpha}\frac{q k_n \overline{\Phi}}{1+k_n^2}\left[g\left(1+g^2k_n^2-q^2\right)\Phi_{n+1} - \left(1+g^{-2}k_n^2-q^2\right)\Phi_{n-1}\right] \tag{2.2.6}$$

$$= C\left(\Phi_n, \Phi_n\right) + \gamma_n \Phi_n - \nu_n k_n^2 \Phi_n \tag{2.2.7}$$

$$q^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\Phi}\right) = \overline{\alpha}\sum_n q k_n^3 g\left(g^2-1\right)\Phi_n \Phi_{n+1} - \nu_F q^2 \overline{\Phi}\ , \tag{2.2.8}$$

avec

$$C\left(\Phi_n, \Phi_n\right) \equiv \alpha \frac{k_n^4\left(g^2-1\right)}{1+k_n^2}\left[g^{-7}\Phi_{n-2}\Phi_{n-1} - \left(g^2+1\right)g^{-3}\Phi_{n-1}\Phi_{n+1} + g^3\Phi_{n+1}\Phi_{n+2}\right]$$

où ν_F est le coefficient d'amortissement des flux zonaux, $\nu_n k_n^2$ joue le rôle de la dissipation d'énergie qui a lieu aux petites échelles, tandis γ_n est le coefficient de croissance linéaire lié à l'injection d'énergie telle que présentée figure1.4.5. Plusieurs mécanismes peuvent être associés à ν_F, notamment ceux décrits dans 1.4.2.2. Ce modèle en couches peut donner naissance à plusieurs types de solutions stationnaires selon l'injection et la dissipation choisies. Par exemple, pour les échelles dissipatives, une solution stationnaire peut prendre la forme de $\left|\widetilde{\Phi}_k\right|^2 \propto e^{-\nu k} k^{-3}/(1+k^2)^2$ [36]. Au delà de cet aspect stationnaire, il a été montré dans cette référence qu'une intégration numérique du modèle montre l'apparition

d'oscillations régulières. Il s'agit d'une caractéristique assez classique dans les modèles en couches, mais leur nature spécifique laisse envisager la possibilité de la présence d'oscillations prédateurs-proies, ce qui est la principale justification du travail présenté dans la suite de ce chapitre.

2.3 Modèle à 2 couches de turbulence couplés à une couche de grande échelle

Dans le but d'analyser au mieux les interactions entre les différentes échelles, nous réduisons le système à son expression la plus strictement nécessaire à la conservation d'une dynamique de couplage entre échelles. Deux couches de petites échelles sont conservées, Φ_1 et Φ_2, qui joueront le rôle des micro-fluctuations, couplées à la couche de grande échelle $\overline{\Phi}$. La dynamique entre ces trois échelles pourra être analysée finement à l'aide du système obtenu :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} &= -\lambda_1 \Phi_2 \overline{\Phi} + \gamma \Phi_1 \\
\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} &= \lambda_2 \Phi_1 \overline{\Phi} - \nu k^2 g^2 \Phi_2 \\
\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} &= \overline{\lambda} \Phi_1 \Phi_2 - \nu_F \overline{\Phi}
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Où les λ sont définis comme suit :

$$\lambda_1 = \overline{\alpha} q g k \frac{1 + g^2 k^2 - q^2}{1 + k^2} \ , \quad \lambda_2 = \overline{\alpha} q g k \frac{1 + k^2 - q^2}{1 + g^2 k^2} \quad \text{and} \qquad \overline{\lambda} = \overline{\alpha} \frac{k^3}{q} g (g^2 - 1)$$

Ici, les interactions locales ne jouent donc aucun rôle dans l'évolution du système puisque le nombre de couches est insuffisant pour prendre en compte l'influence de deux voisins proches sur un troisième. Le modèle obtenu peut être considéré comme une généralisation hybride d'un système prédateurs-proies classique (retrouvé en ne conservant que les deux premières équations locales) et d'un système d'interaction à 3 ondes [37] (en ignorant la partie linéaire des membres de droite). L'analogie, illustrée par la figure 2.3.1, peut être effectuée avec un système d'interaction à 4 ondes tel qu'il est décrit par L.Chen et al. [25]. Les $\delta\Phi_+$ et $\delta\Phi_+$ étant équivalents à la même couche dans l'approche du modèle en couches, les informations contenues dans notre système sont donc identiques excepté en ce qui concerne la phase qui est perdue.

2.4 Etude analytique du système prédateurs-proies flux zonaux - ondes de dérives

Les systèmes d'interactions prédateurs-proies les plus classiques peuvent être décrits par les équations de Lotka-Volterra :

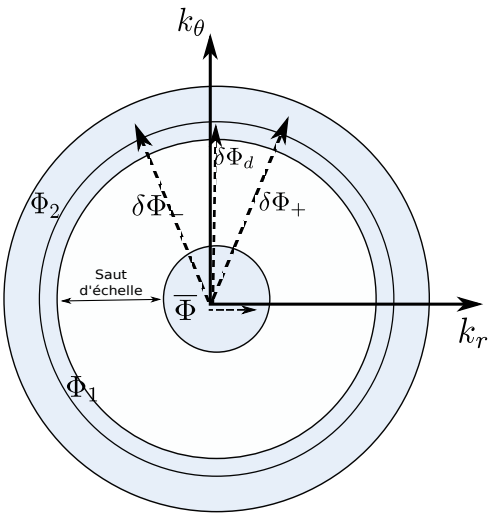


FIGURE 2.3.1: Analogie entre L.Chen et al. [25] et le modèle en couches réduit.

$$\frac{\partial y_1(t)}{\partial t} = -Ay_1(t)\, y_2(t) + \gamma y_1(t)$$
$$\frac{\partial y_2(t)}{\partial t} = By_1(t)\, y_2(t) - \nu y_2(t)$$

Ces équations ont été largement étudiées dans de nombreux domaines scientifiques, et les caractéristiques de leurs solutions sont bien connues [38]. Néanmoins, le système qui nous intéresse est significativement différent en raison de ses termes additionnels qui rendent le problème plus riche et plus complexe. Nous allons donc "tester" quelques outils mathématiques qui permettent de juger de la nature d'un système non linéaire, notamment en ce qui concerne ses points fixes éventuels, leur stabilité, ainsi que de possibles solutions particulières ou approchées qui pourraient mettre en évidence de façon claire la nature "prédateurs-proies" des échanges.

Notons qu'il existe un autre modèle simplifié développé pour les interactions entre flux zonaux et turbulence d'onde de dérive. Il peut se mettre sous la forme suivante [39] :

$$\frac{\partial}{\partial t} < N > = \gamma_L < N > -\gamma_2 < N >^2 + \alpha < N >< U^2 >$$
$$\frac{\partial}{\partial t} < U^2 > = -\gamma_{damp} < U^2 > + \alpha < N >< U^2 >$$

où $< U^2 >$ représente l'énergie des flux zonaux et $< N >$le niveau de fluctuation des ondes de dérive. La notion d'interactions prédateurs-proies est ici conservée, mais la dynamique peut être modifiée.

2.4.1 Recherche et analyse des points fixes

Les points fixes représentent un des premiers critères de classification des systèmes non linéaires. Lorsque ceux-ci existent, trois types de comportement sont recensés : selon les

conditions initiales, le système peut soit converger vers ses points fixes, soit tendre vers des cycles limites ou attracteurs étranges éventuellement liés aux points fixes, soit enfin adopter un comportement divergent. En considérant le système (2.3.1), il existe un triplet de points fixes non triviaux (c'est-à-dire différents de la solution $\Phi_n = \overline{\Phi} = 0$) qui sera indiqué par $\left\{\Phi_1, \Phi_2, \overline{\Phi}\right\} = \left\{F_1, F_2, \overline{F}\right\}$, où

$$\overline{F}^2 = \frac{\gamma\nu k^2 g^2}{\lambda_1\lambda_2}\ , \quad F_1^2 = \frac{\nu_F \nu k^2 g^2}{\overline{\lambda}\lambda_2} \quad \text{et} \quad F_2^2 = \frac{\gamma\nu_F}{\lambda_1\overline{\lambda}}$$

avec pour condition $\mathrm{sgn}(\overline{F}) = \mathrm{sgn}(F_1)\,\mathrm{sgn}(F_2)$. Cependant, dans le contexte du modèle en couches, le signe n'a pas de sens physique puisque aucune information sur la phase n'est prise en compte.
Afin de déterminer si le système non linéaire est susceptible de converger vers les points fixes, procédons par linéarisation autour de ces points fixes dans le but de déterminer leur stabilité :

$$\begin{pmatrix} \partial_t\Phi_1 \\ \partial_t\Phi_2 \\ \partial_t\overline{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\lambda_1\overline{F} & -\lambda_1 F_2 \\ \lambda_2\overline{F} & -\nu k^2 g^2 & \lambda_2 F_1 \\ \overline{\lambda}F_2 & \overline{\lambda}F_1 & -\nu_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\Phi_1 \\ \delta\Phi_2 \\ \delta\overline{\Phi} \end{pmatrix}$$

Il faut alors déterminer les valeurs propres du système matriciel obtenu : la stabilité d'un triplet de points fixes est conditionnée par la négativité de toutes les parties réelles des valeurs propres associées. Pour le point fixe trivial $\left(\delta\Phi_1, \delta\Phi_2, \overline{\delta\Phi}\right) = (0,0,0)$, le déterminant s'exprime comme

$$\begin{vmatrix} \gamma - x & 0 & 0 \\ 0 & -\nu k^2 g^2 - x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_F - x \end{vmatrix} = (\gamma - x)(\nu k^2 g^2 + x)(\nu_F + x)$$

ce qui correspond au triplet de valeurs propres $x = \{\gamma, -\nu k^2 g^2, -\nu_F\}$. Etant donné que γ est défini positif, ce point fixe est instable mis à part si $\gamma = 0$ (ce qui signifie qu'aucune instabilité n'est alimentée). Dans notre cas ($\gamma > 0$), ces points fixes sont explicitement instables. Il est clair que le système s'éloigne du point fixe à un taux exponentiel donné par le taux de croissance linéaire γ de l'instabilité. Pour les autres points fixes, le déterminant devient :

$$\begin{vmatrix} \gamma - x & -\lambda_1\overline{F} & -\lambda_1 F_2 \\ \lambda_2\overline{F} & -\nu k^2 g^2 - x & \lambda_2 F_1 \\ \overline{\lambda}F_2 & \overline{\lambda}F_1 & -\nu_F - x \end{vmatrix} = x^3(-1) + x^2\left(\gamma - \nu k^2 g^2 - \nu_F\right) - 4\gamma\nu k^2 g^2 \nu_F$$

Une analyse rapide de ce résultat permet d'établir que, pour des valeurs positives de ν_F, une seule valeur propre peut avoir une partie réelle négative. Par conséquent, aucun des points fixes du système ne se révèle complètement stable.

2.4.2 Solution analytique de la partie purement non linéaire

La partie droite de (2.3.1) se décompose en termes linéaires et non linéaires. L'action des termes linéaires est directement visualisable : la solution sans les termes non linéaires correspondrait simplement à des exponentielles croissantes (pour la première ligne) et décroissantes (pour les deux autres lignes), dépendantes des paramètres associés respectivement à la croissance et à l'amortissement. C'est donc la partie non linéaire qui provoque la saturation du système, impliquant généralement un comportement oscillatoire couplant dans l'espace de Fourier les k faibles (injection d'énergie) avec les grands k (dissipation d'énergie). La solution de la partie strictement linéaire étant triviale, nous proposons d'étudier analytiquement l'effet plus riche des non-linéarités en considérant le système suivant :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = -\lambda_1 \Phi_2 \overline{\Phi} \tag{2.4.1}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = \lambda_2 \Phi_1 \overline{\Phi} \tag{2.4.2}$$

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} = \overline{\lambda} \Phi_1 \Phi_2 \tag{2.4.3}$$

Comme indiqué précédemment, ce système est similaire à un système d'interaction à trois ondes[37]. Les propriétés mathématiques de ce type de système sont donc bien connues. Nous pouvons procéder comme suit pour trouver une solution. Dans un premier temps, le système est modifié pour être mis sous la forme :

$$d(\Phi_1^2) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} d(\Phi_2^2) = -\frac{\lambda_1}{\overline{\lambda}} d(\overline{\Phi}^2)$$

ce qui peut se résoudre par :

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Phi_1^2 + S_1} \\ \overline{\Phi} &= \sqrt{-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_1}\Phi_1^2 + S_2} \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

On peut alors substituer ces résultats dans l'équation (2.4.1), ce qui mène à un système entièrement intégrable pour t tel que :

$$t = -\frac{1}{\lambda_1} \int_{\Phi_1(0)}^{\Phi_1(t)} \frac{d\Phi_1}{\sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Phi_1^2 + S_1}\sqrt{-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_1}\Phi_1^2 + S_2}}$$

On définit par ailleurs la fonction elliptique sinusoïdale de Jacobi comme suit :

$$sn^{-1}(f,\, k) = \int_0^f \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}$$

En utilisant cette formulation, la solution pour Φ_1 et donc pour Φ_2 et $\overline{\Phi}$ peut s'écrire en termes de fonctions elliptiques de Jacobi sans perdre la nature de la solution (avec $\Phi(0) = 0$). En utilisant les relations trigonométriques entre les fonctions elliptiques de Jacobi

$$\begin{aligned} sn^2 + cn^2 &= 1 \\ k^2 sn^2 + dn^2 &= 1 \end{aligned}$$

la solution du système devient

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\Phi_2(0) sn\left(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\overline{\Phi}(0)t, k\right) \\ \Phi_2(t) &= \Phi_2(0) cn\left(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\overline{\Phi}(0)t, k\right) \\ \overline{\Phi}(t) &= \overline{\Phi}(0) dn\left(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\overline{\Phi}(0)t, k\right) \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'intégrale elliptique complète,

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}$$

avec le module elliptique $k^2 = \dfrac{\overline{\lambda}\Phi_2(0)^2}{\lambda_2\overline{\Phi}(0)^2}$, nous pouvons exprimer la période de Φ_1 et Φ_2 en $4K$, et celle de $\overline{\Phi}$ en $2K$.

La solution analytique obtenue ne représente pas l'état final périodique réel du système complet, termes linéaires inclus. Bien que le comportement périodique soit comparable, la période analytiquement calculée ci-dessus n'est en général pas équivalente à celle observée numériquement dans les résultats présentés plus loin après l'ajout de la partie linéaire du système. Cela montre que les deux composantes linéaire et non linéaire du système sont essentielles pour expliquer la dynamique générale.

2.4.3 Dynamique moyennée du système prédateurs-proies.

Comme cela a déjà été noté, l'intérêt principal des flux zonaux repose dans leur capacité à réduire, voire supprimer la turbulence qui engendre le transport. Dans cette section, nous cherchons donc à établir en quoi les paramètres à notre disposition sont susceptibles de renforcer cette réduction de turbulence, ou au contraire de la limiter. Pour rester dans l'analogie prédateurs-proies avec la démécologie (écologie des populations), il est possible d'imaginer qu'une population de prédateurs pourrait se satisfaire de moins de nourriture (proies) en présence de certaines caractéristiques environnementales, ou au contraire de beaucoup plus de proies pour d'autres paramètres. Dans le but de transposer cette image à notre système, la dynamique à temps court n'est pas considérée, seuls les rapports entre les niveaux moyens des différentes populations sont retenus. Bien que de violentes oscillations puissent se produire, elles ne représentent pas de manière directe la capacité plus ou moins forte des flux zonaux à réduire les niveaux turbulents.

Avec $\gamma = 0.5$, $\nu k^2 g^2 = 0.8$, gardés constants en ne changeant que ν_F, un régime stationnaire constitué de cycles limites est atteint [2.6.3(a)]. Ces cycles observent une période identique dénommée T_{DW} pour les potentiels d'ondes de dérive Φ_1 et Φ_2, et une période T_{ZF} pour les flux zonaux $\overline{\Phi}$. T_{ZF}/T_{DW} est un nombre rationnel, comme l'illustre le cas spécifique purement non linéaire étudié précédemment $\frac{T_{ZF}}{T_{DW}} = \frac{4K}{2K} = 2$. Nous détaillerons plus loin (2.6) le cas pour lequel des valeurs "bien choisies" de γ, $\nu k^2 g^2$ et ν_F mènent à ce comportement.

Pour appliquer cette "technique de moyenne" sur le système (2.3.1), multiplions d'abord chacune de ces équations par Φ_1, Φ_2 et $\overline{\Phi}$ respectivement. En définissant $T_{max} = max(T_{ZF}, T_{DW})$, et en intégrant le système de t à $t + T_{max}$:

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T_{max}} \frac{\partial \Phi_1^2}{\partial t} dt &= -2\lambda_1 \int_t^{T+T_{max}} \Phi_2 \Phi_1 \overline{\Phi} dt + \gamma \int_t^{T+T_{max}} \Phi_1^2 dt \\
\int_t^{t+T_{max}} \frac{\partial \Phi_2^2}{\partial t} dt &= 2\lambda_2 \int_t^{T+T_{max}} \Phi_2 \Phi_1 \overline{\Phi} dt - \nu k^2 g^2 \int_t^{T+T_{max}} \Phi_2^2 dt \\
\int_t^{t+T_{max}} \frac{\partial \overline{\Phi}^2}{\partial t} dt &= 2\overline{\lambda} \int_t^{T+T_{max}} \Phi_2 \Phi_1 \overline{\Phi} dt - \nu_F \int_t^{T+T_{max}} \overline{\Phi}^2 dt
\end{aligned}$$

Avec $t > t_s$ où t_s est le temps à partir duquel le système devient complètement périodique. Par conséquent, la partie gauche du système obtenu est nulle, la période de chaque Φ_n^2 étant un multiple de T_{max} :

$$\begin{aligned}
0 &= -2\lambda_1 < \Phi_2 \Phi_1 \overline{\Phi} > + \gamma < \Phi_1^2 > \\
0 &= 2\lambda_2 < \Phi_2 \Phi_1 \overline{\Phi} > - \nu k^2 g^2 < \Phi_2^2 > \\
0 &= 2\overline{\lambda} < \Phi_2 \Phi_1 \overline{\Phi} > - \nu_F < \overline{\Phi}^2 >
\end{aligned}$$

ce qui peut se réorganiser facilement pour obtenir :

$$\begin{aligned}
< \Phi_1^2 > &= \frac{\lambda_1 \nu_F}{\gamma \overline{\lambda}} < \overline{\Phi}^2 > \\
< \Phi_2^2 > &= \frac{\lambda_2 \nu_F}{\nu k^2 g^2 \overline{\lambda}} < \overline{\Phi}^2 >
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

En utilisant ces expressions, les relations entre les valeurs moyennes d'énergie de la turbulence (petites échelles) et des flux de grande échelle ($\overline{\Phi}$) sont déterminées ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{< \Phi_1^2 > + < \Phi_2^2 >}{< \overline{\Phi}^2 >} &= \frac{\nu_F}{\overline{\lambda}} \left(\frac{\lambda_1}{\gamma} + \frac{\lambda_2}{\nu k^2 g^2} \right) \\
&= \frac{\nu_F q^2}{k^2 (g^2 - 1)} \left(\frac{1 + g^2 k^2 - q^2}{\gamma (1 + k^2)} + \frac{1 + k^2 - q^2}{\nu k^2 g^2 (1 + g^2 k^2)} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Il faut insister sur le fait que ce résultat s'applique à la moyenne temporelle des grandeurs considérées, et n'est en aucun cas identique pour les amplitudes des structures dépendantes du temps. La relation établie pourrait aider à déterminer le meilleur ensemble de paramètres à même de réduire le niveau moyen de turbulence.

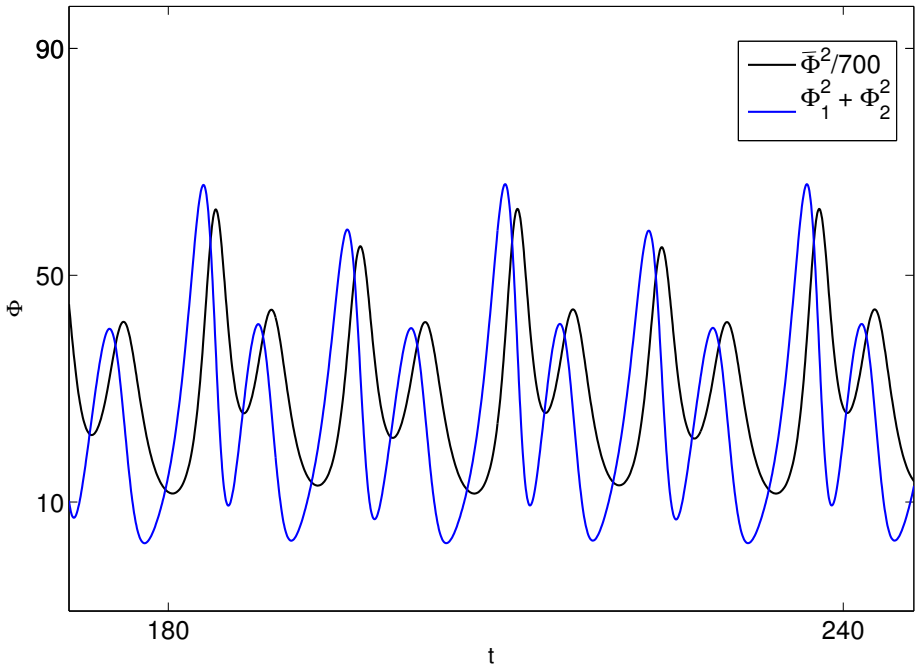


FIGURE 2.4.1: Oscillations prédateurs-proies entre structures de grande échelle (Flux zonaux, en noir) et micro-turbulence (ondes de dérive, en bleu) pour $\nu_F = 0.4$.

En considérant que ν_F est lié à la collisionalité, nous pouvons déduire que les flux zonaux deviennent moins intenses, *en moyenne et par rapport à la micro-turbulence*, quand la collisionalité augmente. Cette relation va bien dans le sens qui aurait pu être attendu. De plus, au vu de la relation, il semble qu'augmenter le taux de croissance des ondes de dérive (γ) ait la même influence qu'une baisse de ν_F, ce qui semble aussi aller dans le sens logique.

2.5 Analyse à deux temps et régime instable

Alors que certains régimes de paramètres permettent aux flux zonaux de transférer l'énergie assez efficacement de Φ_1 à Φ_2 pour que l'enstrophie totale demeure finie, certains autres régimes rendent la couche de $\overline{\Phi}$ incapable de contrebalancer la croissance de Φ_1. Dans ce cas, l'amplitude du système grandit continuellement avec le temps en continuant d'osciller. L'enveloppe de la solution numérique semblant adopter une allure exponentielle, il paraît pertinent de se prêter à une approximation à deux temps du système. En supposant qu'on peut écrire le système sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} &= -\lambda_1 \Phi_2 \overline{\Phi} + \epsilon \gamma \Phi_1 \\
\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} &= \lambda_2 \Phi_1 \overline{\Phi} - \epsilon \nu k^2 g^2 \Phi_2 \\
\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} &= \overline{\lambda} \Phi_1 \Phi_2 - \epsilon \nu_F \overline{\Phi}
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

où ϵ est un paramètre de petitesse tel que : $\epsilon \ll 1$. Essayons de résoudre ce système non linéaire par une analyse multi-échelles, en considérant un temps court τ et un temps long T tels que $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T}$ et en prenant la limite T très grande pour trouver des solutions asymptotiques. La solution analytique peut alors être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= \Phi_1(0) e^{\gamma T} sn\left(-\sqrt{\lambda_2 \overline{\lambda}} \Phi_1(0) e^{\gamma T} \tau + \psi, k\right) \\
\Phi_2(t) &= \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \Phi_1(0) e^{\gamma T} cn\left(-\sqrt{\lambda_2 \overline{\lambda}} \Phi_1(0) e^{\gamma T} \tau + \psi, k\right) \\
\overline{\Phi}(t) &= \sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_1}} \Phi_1(0) e^{\gamma T} dn\left(-\sqrt{\lambda_2 \overline{\lambda}} \Phi_1(0) e^{\gamma T} \tau + \psi, k\right)
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

où ψ est une phase constante en accord avec les conditions initiales. Le module elliptique k peut être développé au premier ordre tel que :

$$k^2 \approx 1 - e^{-2\gamma T} \lambda_1 \frac{1}{\Phi_1^2(0,0)} \left(\frac{\Phi_2^2(0)}{\lambda_2} e^{-2\nu k^2 g^2 T} - \frac{\overline{\Phi}^2(0)}{\overline{\lambda}} e^{-2\nu_F T} \right)$$

Ces solutions approchées montrent une bonne correspondance qualitative avec les solutions numériques pour le cas divergent, comme l'atteste la figure (2.5.1) comparant les deux solutions. Cependant, l'amplitude du cas numérique grandit de manière légèrement plus rapide, alors que la fréquence augmente moins rapidement par rapport à la solution théorique. Le comportement global est sensiblement identique et la différence constatée peut s'expliquer par l'approximation utilisée, forcément imparfaite par définition.

2.6 Exploration numérique des différents régimes selon les coefficients d'amortissement et de croissance linéaire.

2.6.1 Outil numérique

Pour résoudre les équations différentielles de premier ordre amenées par le modèle en couches, la méthode de Runge-Kutta 45 est utilisée. La différence entre les résultats des ordres 4 et 5 permet d'évaluer l'erreur effective et d'adapter le pas de temps afin de

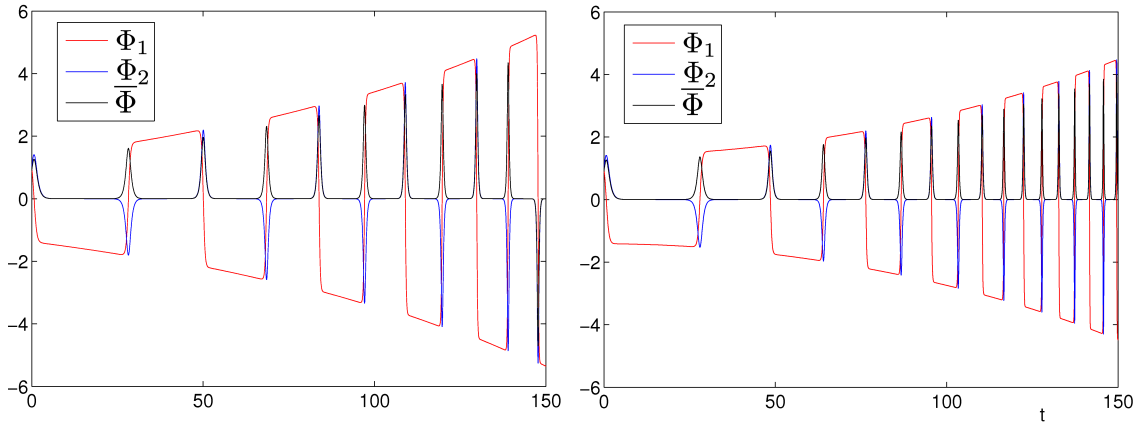


FIGURE 2.5.1: Comportement initial du système dans le régime instable : résultat numérique (à gauche) et solution approchée obtenu via les Eq. 2.5.2 (à droite) pour les paramètre suivants : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\overline{\lambda} = 0.8$ et $\gamma = \nu_F = \nu k^2 g^2 = 0.01$

maintenir cette erreur en dessous d'une valeur absolue ou relative voulue. Dans notre cas, nous choisissons les valeurs par défaut de 10^{-6} pour la tolérance absolue et 10^{-3}pour la tolérance relative.

2.6.2 Influence de ν_F sur la stabilité et les états stationnaires

Malgré la simplification maximale utilisée pour parvenir à notre modèle réduit, les possibilités d'application de méthodes analytiques sont très réduites. Ces méthodes nous ont donné un aperçu du rôle des paramètres principaux mis en jeu, mais l'intervention d'une modélisation numérique est nécessaire pour capturer des effets plus fins qui impliquent un équilibre entre les termes linéaires et non linéaires fortement interdépendants.

En repartant du système initial (2.3.1), nous pouvons dans un premier temps retrouver facilement un comportement de type prédateurs-proies en superposant l'évolution temporelle de l'intensité totale des ondes de dérive $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ et l'intensité des flux zonaux $\overline{\Phi}^2$. Comme le montre la figure 2.4.1, les flux zonaux, dont la réponse est celle de prédateurs, sont étroitement liés à l'évolution de l'amplitude des ondes de dérive, avec un décalage temporel constant pour des paramètres identiques. Pour cette brève étude numérique, les paramètres d'injection/dissipation sont fixés à $\gamma = 0.5$, $\nu k^2 g^2 = 0.8$ et ν_F est choisi comme paramètre variable.

Quatre régimes distincts peuvent apparaître en augmentant progressivement ν_F. D'abord, un régime périodique à très faible ν_F, puis deuxièmement un régime chaotique où la micro-turbulence et les structures de grande échelle restent fortement corrélés, troisièmement un autre régime périodique pour lequel $\frac{T_{ZF}}{T_{DW}}$ est un nombre rationnel, et enfin un quatrième et dernier qui montre un comportement pseudo-périodique divergeant asymptotiquement (étudié précédemment avec l'analyse à deux temps). A partir de $\nu_F = 0.2$, l'évolution devient périodique en ce qui concerne l'état final du système, quelles que soient les conditions initiales. La visualisation de l'espace des phases (figure 2.6.1) indique en effet la présence d'un cycle limite. Ce comportement purement périodique semble avoir

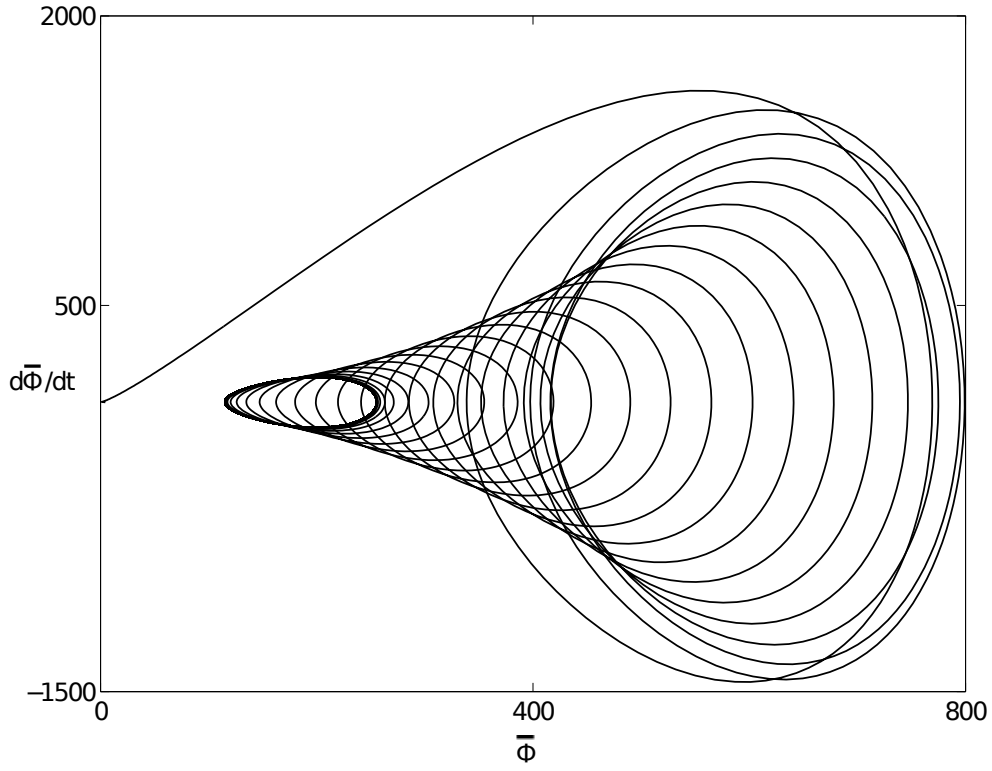


FIGURE 2.6.1: Cycle limite dans l'espace des phases pour $\nu_F = 0.4$

lieu lorsque $\gamma + \nu_F \approx \nu k^2 g^2$ or $\gamma + \nu k^2 g^2 \approx \nu_F$, mais aucune règle précise et générale ne semble pouvoir être établie pour déterminer de manière sûre la transition entre deux types de régimes. Pour ν_F en dessous de 0.2, le comportement du système semble adopter une tendance chaotique. Cependant, la dynamique prédateurs-proies demeure prépondérante, contraignant ainsi le système à se maintenir dans une zone déterminée de l'espace des phases comme l'illustre la présence d'un attracteur étrange visible sur la figure 2.6.2 en 3D.

En nous inspirant entre autres du travail de L.Chen et al. [25], afin d'analyser ces transitions entre régimes de manière plus fine, nous construisons une "carte" unidimensionnelle en prenant un nombre assez grand d'extrema de $\overline{\Phi}$, qu'on appelle Φ_{extr}, pour chaque valeur de ν_F considérée. En utilisant cette technique, nous parvenons à établir la dépendance des périodes caractéristiques du système en fonction de ν_F. Le résultat de cette expérience numérique (2.6.3) met en évidence une division par deux des périodes (period halving) lorsque ν_F est progressivement augmenté jusqu'à $\nu_F = 0.5$, alors qu'on assiste ensuite à un phénomène inverse (doublement de période, "period doubling") quand ν_F dépasse la valeur de 1.3, puis enfin un glissement progressif vers le chaos. Sur la figure 2.6.3(a), apparaît distinctement un intervalle de ν_F pour lequel aucune donnée n'est affichée : il s'agit d'un intervalle pour lequel le système est asymptotiquement instable. Dans ce cas, l'attitude du système est correctement décrite par les solutions analytiques données en (2.5.2), ce qui suggère qu'une fréquence caractéristique est encore bien établie, même s'il est impossible de le confirmer numériquement en raison de l'absence d'état stationnaire.

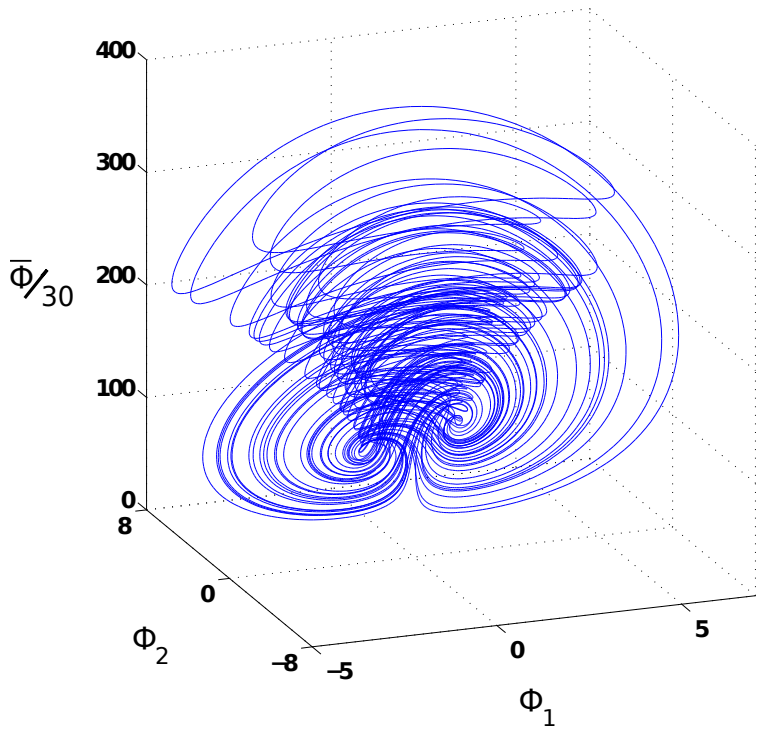


FIGURE 2.6.2: Attracteur étrange dans l'espace des phases 3D en régime chaotique avec $\nu_F = 0.1$

Au-delà de cet intervalle de ν_F, le système retourne à un régime stationnaire périodique suivi par un doublement de période progressif allant jusqu'au chaos. Ce phénomène de doublement est aussi mis en valeur sur la figure 2.6.3(b) où apparaissent les périodes présentes dans le système selon ν_F.

2.6.3 Influence du coefficient de croissance linéaire γ

Dans le but d'étendre la couverture de l'espace des paramètres, nous réalisons le même type d'étude avec le paramètre γ, en gardant les paramètres fixes ($\nu_F = 0.5$ and $\nu k^2 g^2 = 0.8$). Comme pour ν_F, nous identifions une zone d'instabilité qui semble correspondre à l'augmentation de γ au-dessus de ν_F. Les résultats obtenus sont présentés en figure 2.6.4. Ils nous indiquent notamment un point intéressant, à savoir que la hausse de l'injection d'énergie semble forcer le système à passer d'un état chaotique à un état d'oscillations régulières. Ces dernières varient logiquement autour d'une valeur moyenne d'autant plus grande que γ est élevé. L'instabilité prend le pas sur le système lorsque γ devient suffisamment supérieur à ν_F, et le comportement du système devient similaire à celui de la solution analytique approchée donnée dans (2.5.2) et illustrée figure 2.5.1. Nous pouvons supposer l'existence d'un lien entre cette constatation et l'apparition d'oscillations prédateurs-proies quand la puissance injectée est augmentée lors de la transition L-H, tel que l'observent par exemple Estrada et al. [40], Conway et al. [41], Kim and Diamond [42]. Un autre parallèle peut être fait avec le phénomène du "Dimits shift" [43], qui montre

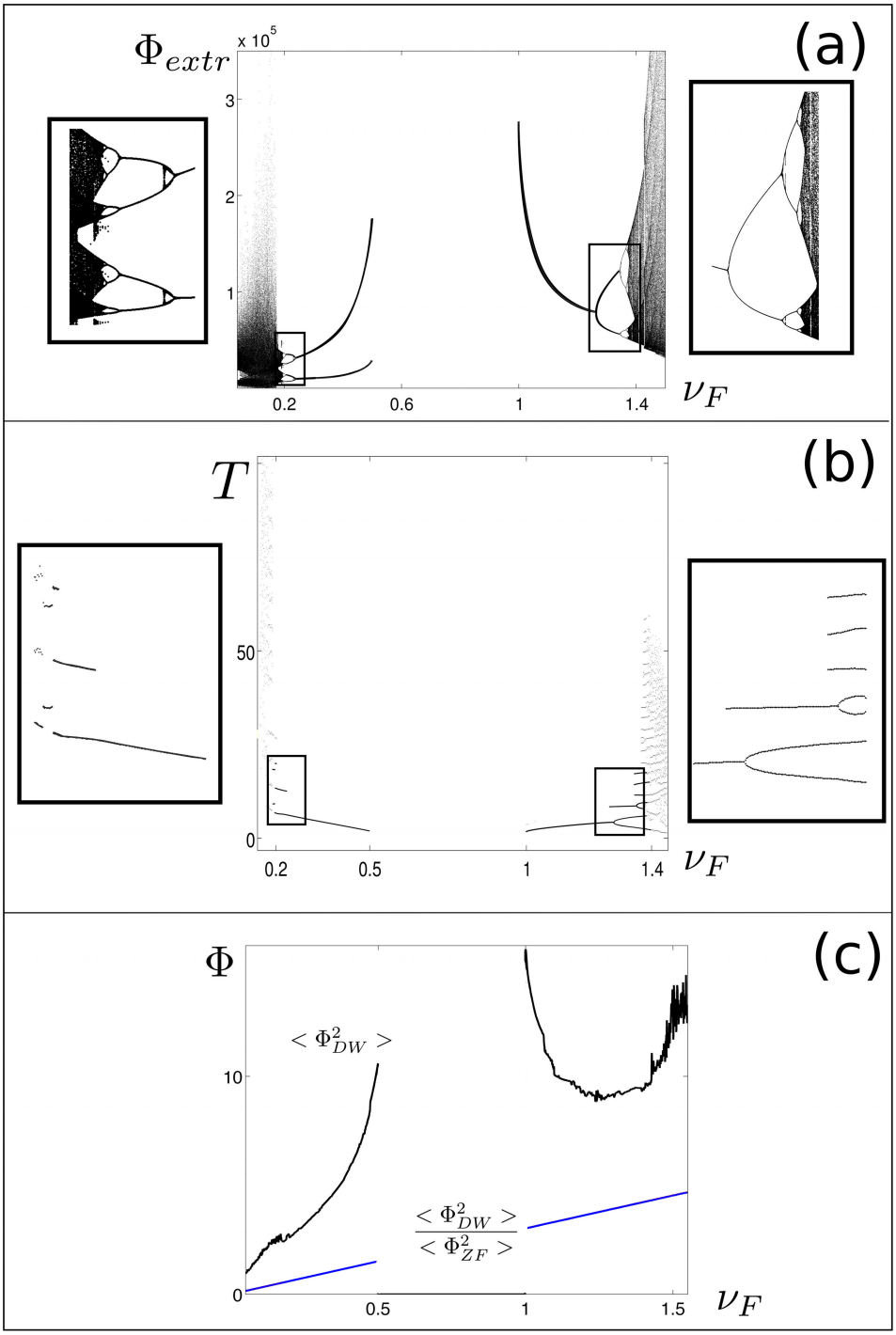


FIGURE 2.6.3: (a) Carte unidimensionelle de $\overline{\Phi}$ de $\nu_F = 0.15$ à $\nu_F = 1.5$ (b) Carte des fréquences $\overline{\Phi}$ de $\nu_F = 0.15$ à $\nu_F = 1.5$ (c) Dynamique moyennée des ondes de dérive et des flux zonaux.

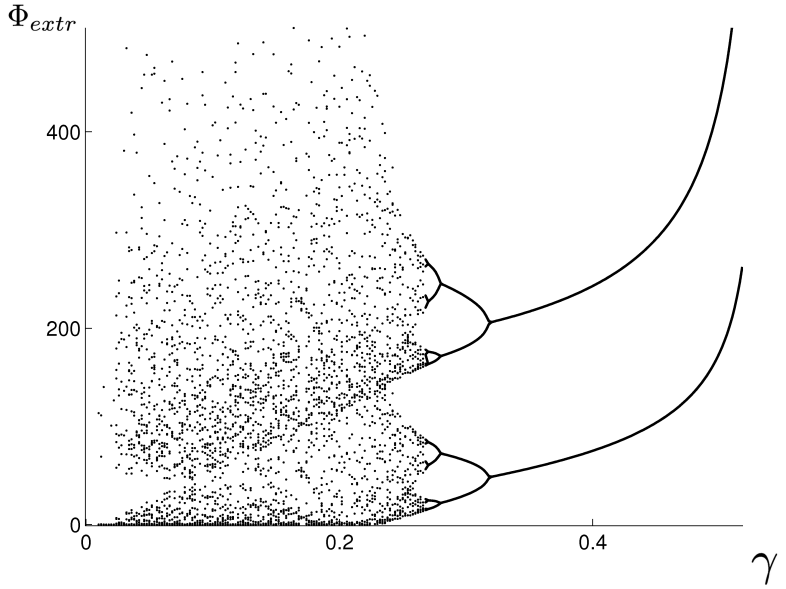


FIGURE 2.6.4: Influence du coefficient de croissance linéaire sur le modèle réduit

la nécessité de dépasser un certain seuil d'énergie injecté pour être en mesure d'exciter des instabilités. Ce phénomène peut donc être considéré comme un décalage du taux de croissance linéaire, mais il peut aussi bien s'expliquer par la rupture d'un équilibre entre l'énergie apportée au système et celle transférée aux flux zonaux (puis dissipée), l'instabilité du système se produisant pour un γ excédant une valeur critique.

2.7 Influence des flux zonaux et des écoulements cisaillés sur la micro-turbulence

L'importance des flux zonaux et de leur interactions avec la turbulence est aujourd'hui assez largement acceptée, même si leur rôle dans la transition L-H reste encore débattu. Le rôle du cisaillement radial de vitesse $dV_{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}/dr$, quant à lui, a été mis en évidence encore plus tôt. Pour une partie importante de la communauté, son implication semble essentielle dans le mécanisme de formation de piédestal inhérent au mode de fort confinement via la réduction de la turbulence et donc du transport turbulent [24][23][22]. Bien que l'impact de ces phénomènes sur le confinement et la transition ait été largement étudié, les références traitant de leur influence sur la forme globale du spectre turbulent restent rares dans la littérature . Pourtant, l'évaluation de l'action de ces grandes structures dans le mécanisme distribuant la turbulence dans l'espace spectral revêt un grand intérêt. En effet, il s'agit de comprendre de quelle manière les flux zonaux en particulier et plus généralement les écoulements cisaillés peuvent limiter le transport turbulent : l'énergie turbulente diminue-t-elle uniformément pour tout k ? Le maximum de l'énergie se situe-t-il au même k quel que soit le cisaillement ?

Malgré l'analyse intéressante permise par la réduction à l'extrême du modèle prédateurs-proies, il est nécessaire d'augmenter de manière conséquente le nombre de couches pour mesurer les influences de différents phénomènes sur un spectre plus réaliste. Nous choisis-

sons donc d'utiliser un modèle à $N = 25$ couches locales, modélisant la micro-turbulence, auxquelles vient se coupler une 26ième couche représentant les grandes échelles.

2.7.1 Mise en place et vérification de la validité du modèle à N+1 couches

Aucun changement fondamental ne doit être apporté aux équations établies en (2.2.6,2.2.8). Cependant, contrairement au choix retenu pour l'étude du système réduit, nous utilisons ici les équations avec des variables complexes. L'introduction des complexes conjugués mène au système

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} = -\overline{\alpha}\frac{q k_n \overline{\Phi}^*}{1+k_n^2}\left[g\left(1+g^2k_n^2-q^2\right)\Phi_{n+1}^* - \left(1+g^{-2}k_n^2-q^2\right)\Phi_{n-1}^*\right] \tag{2.7.1}$$

$$+ C\left(\Phi_n,\Phi_n\right) + F_n(\Phi_n) - D_n(\Phi_n) \tag{2.7.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(q^2\overline{\Phi}\right) = \overline{\alpha}\sum_n q k_n^3 g\left(g^2-1\right)\Phi_n^*\Phi_{n+1}^* - \nu_F q^2\overline{\Phi} \tag{2.7.3}$$

$$C\left(\Phi_n,\Phi_n\right) \equiv \alpha\frac{k_n^4\left(g^2-1\right)}{1+k_n^2}\left[g^{-7}\Phi_{n-2}^*\Phi_{n-1}^* - \left(g^2+1\right)g^{-3}\Phi_{n-1}^*\Phi_{n+1}^* + g^3\Phi_{n+1}^*\Phi_{n+2}^*\right]$$

Injection d'énergie et dissipation Nous choisissons d'utiliser une forme simple de dissipation exprimée telle que $D_n(\Phi_n) = \nu_l k_n^{-6}\Phi_n + \nu_s k_n^4\Phi_n$(prenant modèle sur Ottinger and Carati [35]), où ν_l et ν_s sont les coefficients d'amortissement s'appliquant respectivement aux grandes et petites échelles. En ce qui concerne le forçage, deux solutions basiques s'offrent à nous : en rendre compte par une expression indépendante de la valeur des Φ_n telle que $F = \gamma(n)$, ou en l'exprimant par une règle de proportionnalité telle que $F_n = \gamma_n\Phi_n$. Avec ce dernier type d'injectiond'énergie, le résultat est similaire en modifiant le paramètre γ pour maintenir un équilibre identique entre l'injection et la dissipation d'énergie. Cependant, une faible modification de cet équilibre peut rapidement mener à une instabilité du système (croissance de l'énergie d'une des couches d'injection vers l'infini) ou au contraire à une situation de déclin continu de la turbulence. Il convient de rester particulièrement précautionneux en faisant l'usage de ce type de forçage, ce qui nous fait préférer la première solution.

Conditions limites Pour les deux premières et deux dernières couches locales, il est nécessaire de fixer artificiellement des conditions limites, en raison de l'inexistence des couches qui auraient été numérotées respectivement 0, -1 et $N+1$, $N+2$. Le choix est fait de considérer que $\Phi_{-1} = \Phi_0 = \Phi_{N+1} = \Phi_{N+2} = 0$. En appliquant de la dissipation (détails ci-dessous) aux deux extrémités du spectre, *a priori* les valeurs de ces potentiels restent très faibles : ce n'est donc pas une supposition contre nature d'imposer ces conditions limites. Attention, ici $N+1$ ne fait pas référence aux flux zonaux mais à une couche locale supplémentaire.

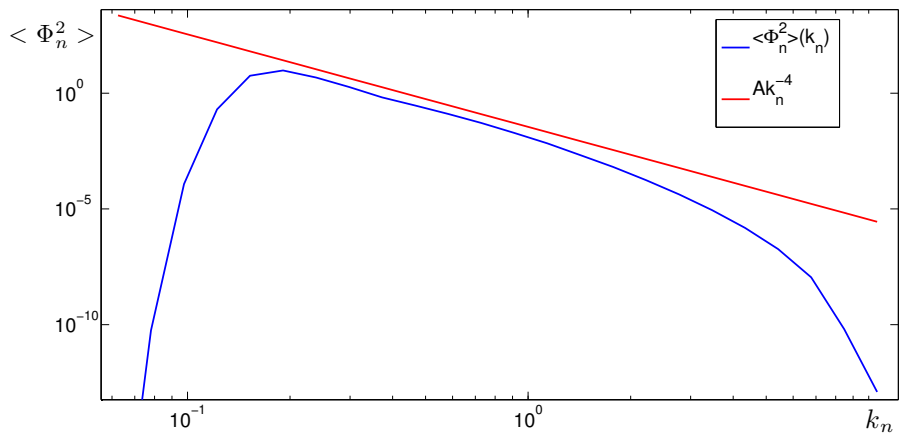


FIGURE 2.7.1: Spectre de $< \Phi_n^2 >$en bleu comparé à une loi de puissance en k_n^{-4}, la pente étant de 4.1 dans l'échelle inertielle.

Echelle spectrale Le "rayon" du modèle en couches est fixé à $g = 1.25$, et le k le plus petit (hors flux zonaux) à $k_0 = 0.05$, ce qui place le d'ordre le plus élevé (*i.e.* $k_{max} = k_0 g^{N-1}$) proche de 10. Le nombre d'onde associé aux flux zonaux est gardé à $q = 0.01$.

Résultats obtenus sans couplage des échelles turbulentes avec les flux de grande échelle Dans le but de calibrer notre modèle, mais aussi pour nous permettre de lui attribuer un certain niveau de confiance, nous nous intéressons dans un premier temps au comportement de la partie relative aux interactions locales entre "couches turbulentes". Le paramètre de couplage est alors fixé à $\overline{\alpha} = 0$, tandis que les coefficients de dissipation sont $\nu_l = 10^{-8}$ et $\nu_s = 10^{-5}$ et les coefficients de forçage $F_5 = F_8 = 3.10^{-4}$et $F_6 = F_7 = 6.10^{-4}$. La répartition des pseudo-énergies Φ_n^2 est représentée sur la figure 2.7.1 par un spectre en échelle *log log* (il s'agit de la valeur des Φ_n^2 moyennées sur un grand intervalle de temps). La cascade présente aux échelles inertielles, qu'on assimile aux couches qui répondent à la condition $8 < n < 16$, suit une loi de puissance en $k_n^{-4.1}$, ce qui est relativement proche la théorie de Kraichnan-Kolmogorov, le premier ayant calculé la possibilité de pente en k_n^{-4}ou $k_n^{-8/3}$. Des résultats similaires et plus détaillés ont déjà été publiés [35] en utilisant un modèle en couches de même type construit sur la base de l'équation d'Hasegawa-Mima. Cependant, l'intérêt de ces observations réside principalement dans la validation de notre code numérique.

2.7.2 Etude numérique de l'influence des structures de grande échelle sur le spectre

Bien que le modèle simplifié étudié en début de chapitre fasse apparaître clairement la présence d'interactions prédateurs-proies, il n'est pas possible de l'utiliser pour jauger le rôle global de ce couplage. En effet, l'absence de couplage direct entre proches voisins n'autorise pas la compétition entre interactions locales et "globales". Au contraire, ce modèle étendu à $N + 1 = 26$ couches permet d'explorer plus de possibilités.

Effets du couplage d'échelles disparates sur le comportement du système L'intensité du couplage entre les échelles de turbulence et les grandes échelles est régie par le paramètre $\overline{\alpha}$ tandis que les interactions locales sont liées au paramètre α qui est fixé à 1. Dans un premier temps, nous cherchons à évaluer l'impact de ce paramètre $\overline{\alpha}$ sur les flux d'enstrophie potentielle. Il s'agit de la quantité qui est conservée par les effets non linéaires du système (c'est-à-dire hors injection et dissipation). Elle s'exprime comme $Z_{turb} = \left(\tilde{\phi} - \nabla^2\tilde{\phi}\right)^2$, et donc $Z_{n,turb} = \left(1 + k_n^2\right)^2 \Phi_n^2$ une fois ramenée au cadre du modèle en couches. Sur la figure 2.7.2 sont représentés les flux pour les quatre valeurs de $\overline{\alpha}$ 0.01, 0.1, 0.2 et 0.3. Dans le but de jauger l'influence de $\overline{\alpha}$, les flux sont séparés en deux parties. La première, en bleu, est la partie du flux assurée par les termes non linéaires en facteur de α, qui représentent les interactions locales dans l'espace des k. La seconde, en rouge, correspond à la partie issue des termes non linéaires en facteur de $\overline{\alpha}$, qui représentent les interactions disparates entre les flux zonaux et la turbulence dans l'espace des k. En noir est finalement tracée la somme des deux premières composantes. A faible $\overline{\alpha}$, le flux d'enstrophie participant à la cascade directe est en majorité de nature locale. L'augmentation de $\overline{\alpha}$ décale progressivement la domination de la composante locale vers les grands k, jusqu'au point où le flux d'enstrophie est majoritairement constitué de sa fraction non locale (voir la représentation graphique correspondant à $\overline{\alpha} = 0.3$). Il faut noter cependant que bien que l'action du flux local se réduise à une portion de l'espace de Fourier de plus en plus restreinte, son intensité s'accroît en fonction de $\overline{\alpha}$, de même que celle du flux d'enstrophie total.

Ajout d'un cisaillement radial moyen Le cisaillement de vitesse étant lié habituellement aux gradients de pression et de densité comme l'indique l'équilibre radial des forces (voir plus loin l'équation (3.1.7)), il est nécessaire de l'implémenter explicitement dans ce modèle spectral. Nous choisissons de l'inclure par un forçage appliqué sur l'équation des flux zonaux (2.7.4) : il s'agira alors d'une valeur moyenne du flot cisaillé, dont les variations seront interprétées en tant que flux zonaux. En effet, ces derniers se distinguent du flot cisaillé moyen en raison de leur dépendance exclusive à l'existence de turbulence. L'équation du modèle en couches correspondant aux grandes échelles rend bien compte de cette différence :

$$q^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\Phi}\right) = \overline{\alpha} \sum_n q k_n^3 g \left(g^2 - 1\right) \Phi_n^* \Phi_{n+1}^* - \nu_F q^2 (\overline{\Phi} - \Phi_{V_E'}) \tag{2.7.4}$$

où $q^2 \Phi_{V_E'} = dV_E/dr$, ce qui correspond à l'état stationnaire de cette équation. Il est intéressant d'analyser le rôle de ce forçage sur le spectre turbulent, et ainsi de simuler une augmentation des gradients de pression/densité qui dépendent eux-mêmes du chauffage dans un tokamak. Sur la figure 2.7.3, est représentée cette "pseudo" énergie turbulente dans l'espace de Fourier pour différentes valeurs de $\Phi_{V_E'}$ allant de 0 (courbe en bleu) à 20 (en rouge). Deux remarques principales se dégagent de cette figure :

- Le spectre s'aplatit fortement lorsque la valeur de $\Phi_{V_E'}$ est augmentée, ce qui se traduit par une diminution conséquente de l'énergie stockée dans (ou proche) des échelles d'injection, tandis que l'énergie de la zone dissipative prend au contraire plus d'ampleur.

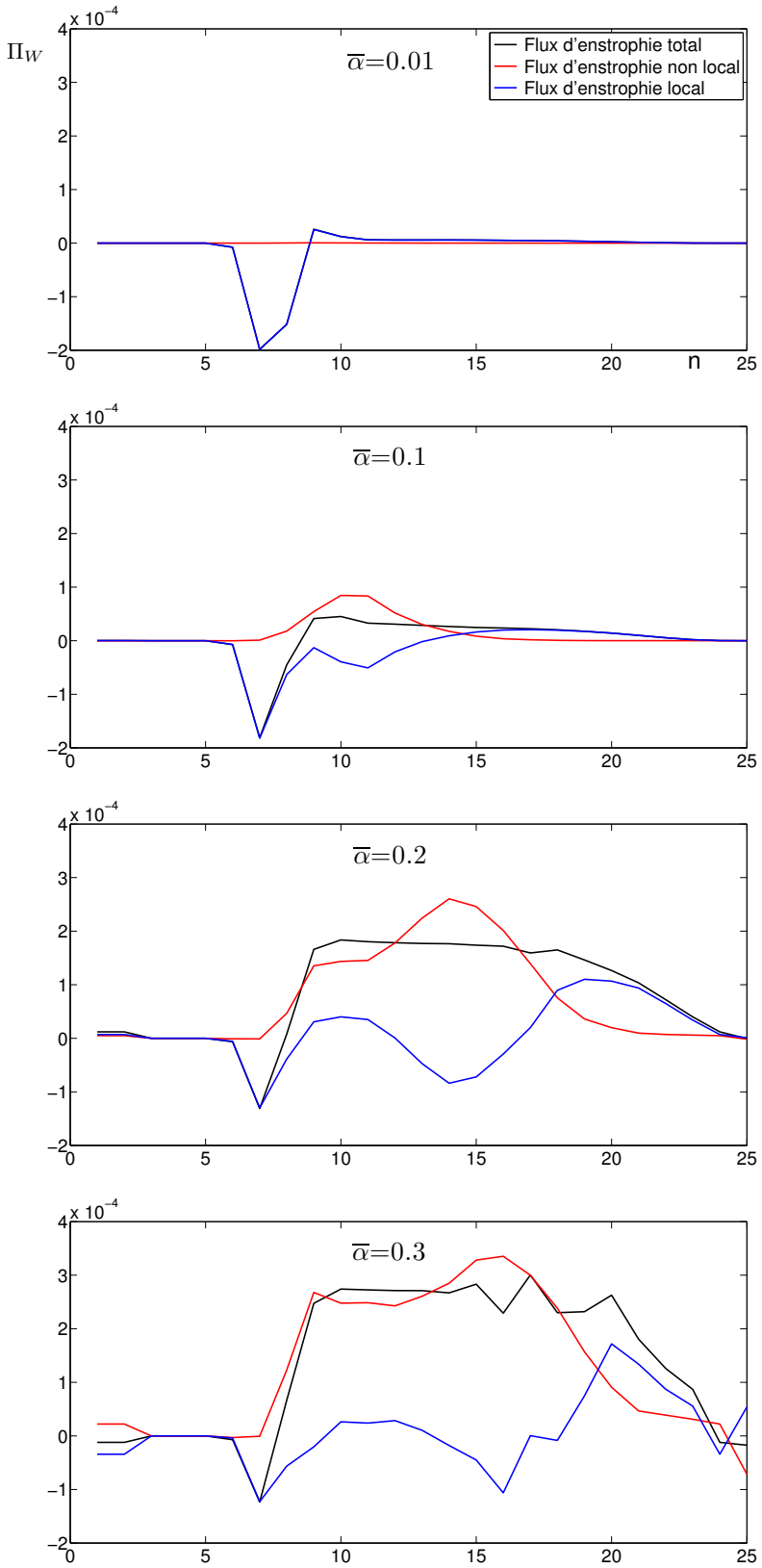


FIGURE 2.7.2: Flux d'enstrophie pour $\overline{\alpha} = 0.01$, 0.1, 0.2 et 0.3 : en rouge les termes d'interactions avec $\overline{\Phi}$, en bleu les termes locaux, et en noir la totalité.

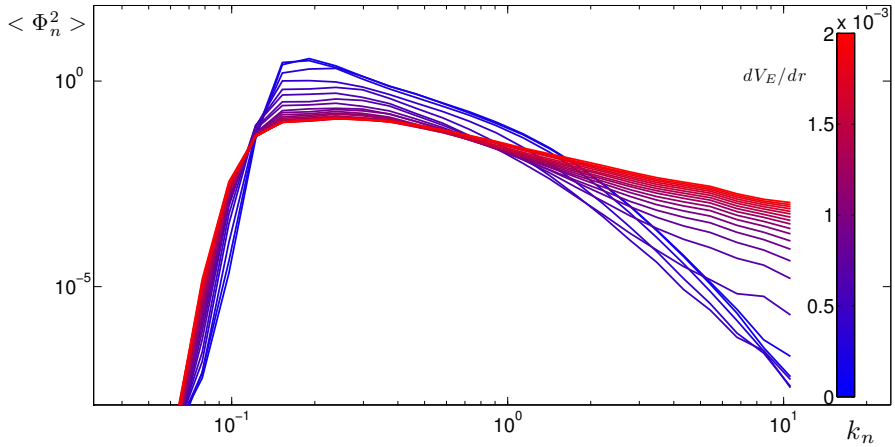


FIGURE 2.7.3: Influence du cisaillement de vitesse moyen sur le spectre turbulent, en *log log*, avec $\overline{\alpha} = 0.2$.

– De manière plus générale, ces résultats peuvent aussi s'interpréter comme une chute de l'énergie turbulente totale. Puisque le spectre est représenté en *log log* : le gain des échelles dissipatives ne compense pas la perte des échelles centrales, comme on peut l'observer sur la figure 2.7.4. Les résultats recueillis semblent, pour la première partie de la courbe en tout cas, suivre la ligne rouge continue qui correspond à l'expression $\sum_{n=1}^{N} |\Phi_n|^2 = 70/\left(1 + (dV_E/dr)^2\right)$. Bien que le forçage $\Phi_{V_E'}$ soit notre paramètre de contrôle, c'est bien la moyenne temporelle $\left|\overline{\Phi}\right|$ qui est placée sur l'axe des abscisses. Ces deux quantités sont en général équivalentes mais ce n'est pas le cas pour une valeur proche de $\Phi_{V_E'} = 0$, valeur pour laquelle $< \left|\overline{\Phi}\right| >$ est proche de 2.

Le second point n'est pas un élément nouveau puisque la réduction de la turbulence par le flot cisaillé a été mise en évidence à de multiples reprises comme cela a été évoqué au chapitre précédent, que ce soit au niveau théorique, numérique ou expérimental. Il s'agit cependant d'un élément qui vient appuyer à nouveau la pertinence des modèles en couches, lorsqu'ils sont utilisés dans un cadre adapté. La réduction de la turbulence sature proche de $dV_E/dr = 6.10^{-4}$, valeur qui correspond à la valeur maximale de l'injection $\delta = 6.10^{-4}$. Il est tentant de faire le rapprochement avec les simulations non linéaires Landau fluides [44, 24], qui mettent en évidence la réduction du transport turbulent lorsque le taux de croissance linéaire maximal des instabilités coïncide avec le taux de cisaillement. Notons cependant que la forme de l'injection d'énergie dans le modèle en couches ne correspond pas à un taux de croissance linéaire. Le redimensionnement du cisaillement $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ se fait dans notre modèle en le multipliant par c_s/ρ_s. En gyrocinétique, l'adimensionnement correspond généralement à $dV_E/dr \rightarrow (c_s/R)dV_E/dr$ ou $dV_E/dr \rightarrow (c_s/Ln)dV_E/dr$. L'équivalence entre notre modèle en couche et les simulations gyrocinétique est donc retrouvée par la relation $(dV_E/dr)_{Gyro} = (R/\rho_s)(dV_E/dr)$.

Le premier point, quant à lui, mérite plus d'attention en raison du manque d'informations le concernant dans la littérature. Ces observations mettent nettement en évidence le transfert qui s'opère entre échelles turbulentes via l'action de structures de grande échelle, qu'on désigne génériquement par "écoulements cisaillés".

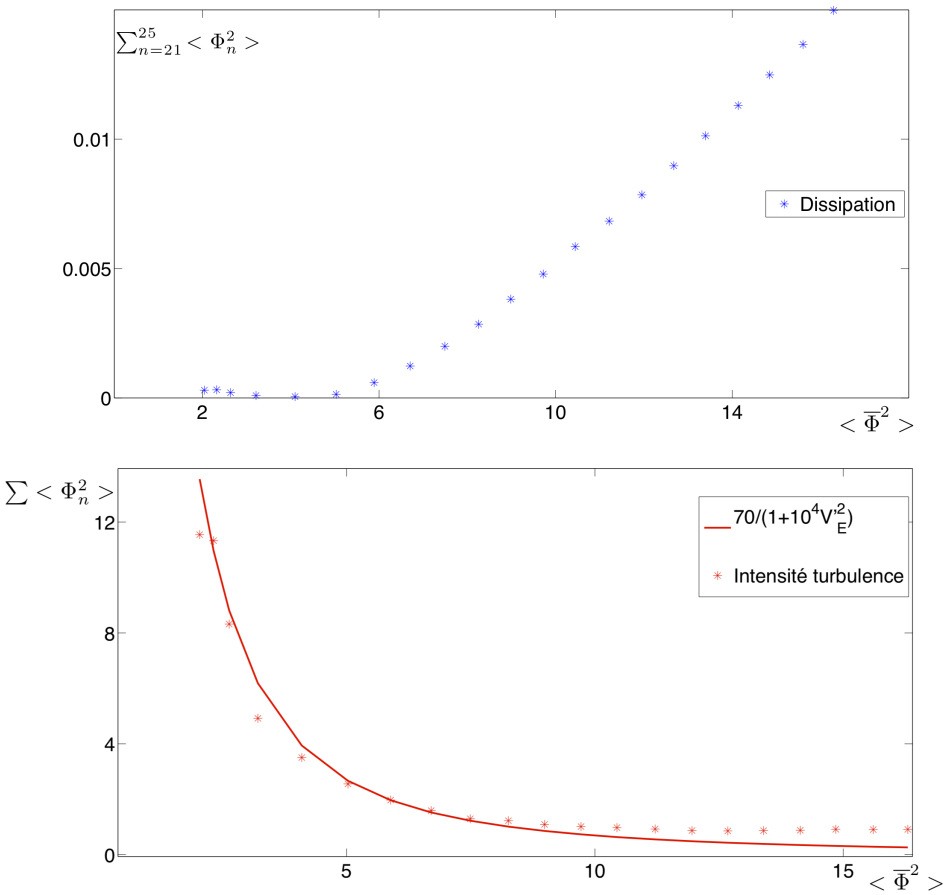


FIGURE 2.7.4: Evolution de la pseudo-énergie totale (en haut) et des échelles dissipatives (en bas) en fonction de $< \overline{\Phi} >$

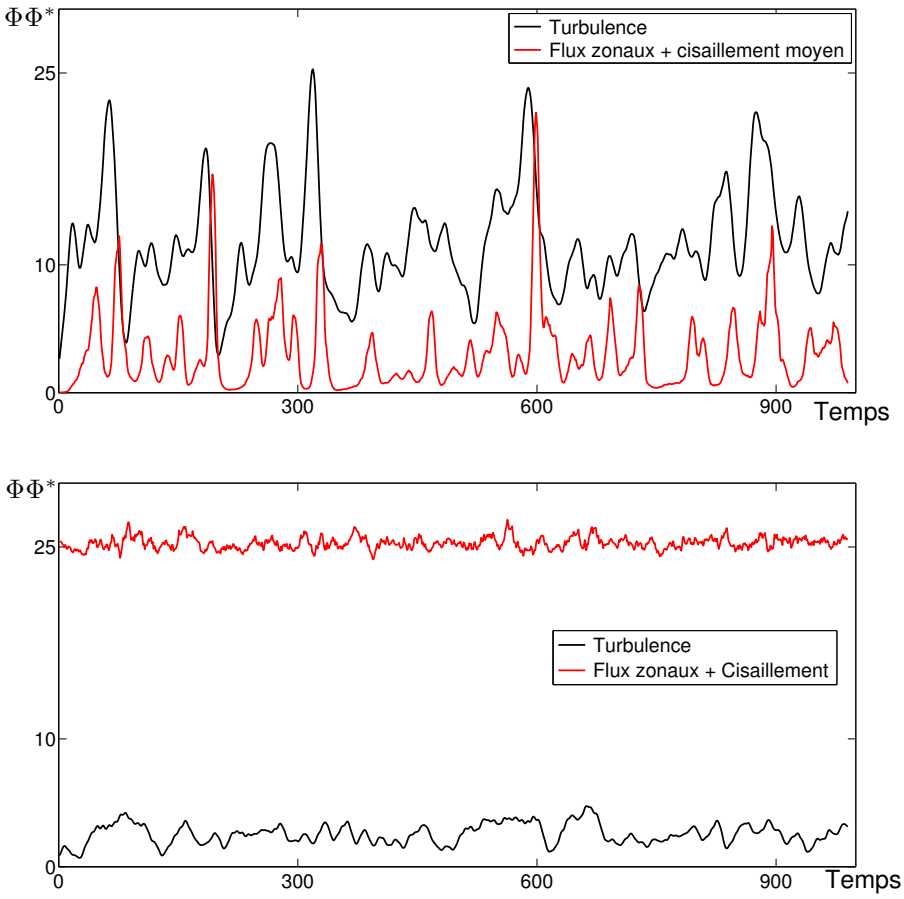


FIGURE 2.7.5: Evolution temporelle de la turbulence, en noir, et des flux zonaux, en rouge. En haut, des interactions prédateurs-proies sont clairement visibles pour $\Phi_{V'_E} = 0$. En bas, pour $\Phi_{V'_E} = 5$, les oscillations des flux zonaux sont amorties de manière importante, voire sont quasi-inexistantes.

En ce qui concerne la dynamique, à faible dV_E/dr, la présence d'interactions prédateurs-proies est prépondérante lorsque que $\Phi_{V'_E} = 1$, sur la figure 2.7.5. Les courbes ont été lissées pour plus de lisibilité. Pour des valeurs plus élevées $\Phi_{V'_E}$ les oscillations des flux zonaux sont réduites de manière conséquente, ce qui semble cohérent avec les comportements respectifs observés pour les modes L (écoulements cisaillés faibles, flux zonaux importants) et H (écoulements cisaillés importants, amplitude des oscillations des flux zonaux faibles). En effet, il s'agit d'une similitude évidente avec la compétition entre cisaillement moyen et flux zonaux étudiée à l'aide de modèles 0D puis 1D [42, 45]. Cette chute de l'amplitude des oscillations, une fois la transition L-H achevée, est aussi confirmée par des observations expérimentales [46].

Influence de $\overline{\alpha}$ sur l'efficacité de la réduction de la turbulence par le cisaillement de vitesse Les paramètres $\overline{\alpha}$ et α ne peuvent être choisis de manière absolue et restent des paramètres libres : ils ne sont pas déterminés dans notre modèle en couches. Il est donc utile de vérifier que le comportement de la turbulence n'est pas excessivement sensible au

régime de ces paramètres. L'étude de cette décroissance réalisée avec plusieurs valeurs de $\overline{\alpha}$ montre l'influence nette de ce paramètre sur le régime de réduction de la turbulence obtenue. Sur la figure 2.7.6 est représentée la variation de l'énergie turbulente selon $\Phi_{V_E'}$ pour les valeurs de $\overline{\alpha}$ suivantes : 0.015, 0.05, 0.1 et 0.2. Une tendance se dégage clairement, montrant un décalage de la décroissance de l'énergie vers des $\Phi_{V_E'}$ plus importants. La valeur correspondant au début du déclin passe ainsi de $< \overline{\Phi} >= 12$ pour $\overline{\alpha} = 0.015$ à $< \overline{\Phi} >= 2$ pour $\overline{\alpha} = 0.2$. Cette observation indique que le cas le plus proche d'une décroissance de type $1/\left(1 + (dV_E/dr)^2\right)$ dès un faible dV_E/dr correspond à un $\overline{\alpha}$ non négligeable par rapport à α. Cependant, il faut conserver cette valeur inférieure à 1 pour garder une zone dissipative et donc un sens physique au modèle en couches étudié.

Densité de probabilité et kurtosis de la turbulence Compte tenu de la différence de forme des fluctuations constatée selon $\Phi_{V_E'}$, la kurtosis des Φ_n peut nous fournir une vision plus générale du phénomène. La kurtosis du potentiel Φ_n est représentée en fonction du nombre d'onde sur la figure 2.7.7, pour trois valeurs de $\Phi_{V_E'}$. La figure fait apparaître une diminution de la kurtosis lorsque le cisaillement imposé est plus fort, quel que soit k. Pour chacunes des valeurs de Φ_{VE}, la kurtosis s'élève vers les petites échelles, et la densité de probabilité passe d'une forme quasi gaussienne (en bas à gauche) à une fonction plus piquée dans les échelles inertielles (en bas à droite). Ce comportement semble être en accord avec l'intermittence habituellement constatée aux petites échelles, tout au moins en ce qui concerne la turbulence fluide. Une brusque augmentation semble avoir lieu également aux grandes échelles, mais ne peut être interprétée comme significative en raison d'une brutale hausse de la dissipation implémentée dans le modèle en couches à ces échelles. A fort flot cisaillé moyen (en rouge), une tendance vers une uniformisation de la kurtosis en fonction de k semble se dessiner.

2.7.3 Eléments de comparaison avec le code gyrocinétique GENE et des observations expérimentales sur Tore Supra

Les travaux publiés par Morel et al. [47] permettent de dresser un parallèle entre le modèle en couches pour les interactions entre échelles disparates et le code gyrocinétique GENE. Dans un premier temps, l'article présente une comparaison entre les "prédictions" du modèle à deux niveaux de turbulence + un niveau de flux zonaux et les simulations gyrocinétiques. L'espace de Fourier est découpé en trois domaines correspondants aux grandes échelles, aux échelles d'injection et aux échelles de dissipation, respectivement équivalentes à $\overline{\Phi}^2$,Φ_1^2 et Φ_2^2. Une forme "prédateurs-proies" gyrocinétique est proposée en utilisant la définition de l'énergie libre. La figure 2.7.8 montre les ratio d'énergie libre dans plusieurs conditions, moyennées sur la durée des simulations gyrocinétiques. La comparaison est directe avec les équations 2.4.5, puisqu'une relation assez clairement linéaire apparaît. Aussi simplifié qu'il soit, le modèle à trois couches est capable de retrouver des tendances globales de modèles aussi complexes qu'une simulation gyrocinétique. Il est bien sûr nécessaire d'analyser ces résultats avec précaution, en les replaçant dans le cadre restreint que ce modèle permet d'explorer.

La variation de la kurtosis en fonction du nombre d'onde k est représentée sur la figure 2.7.9 à partir des données du modèle en couches comparées à des observations expérimen-

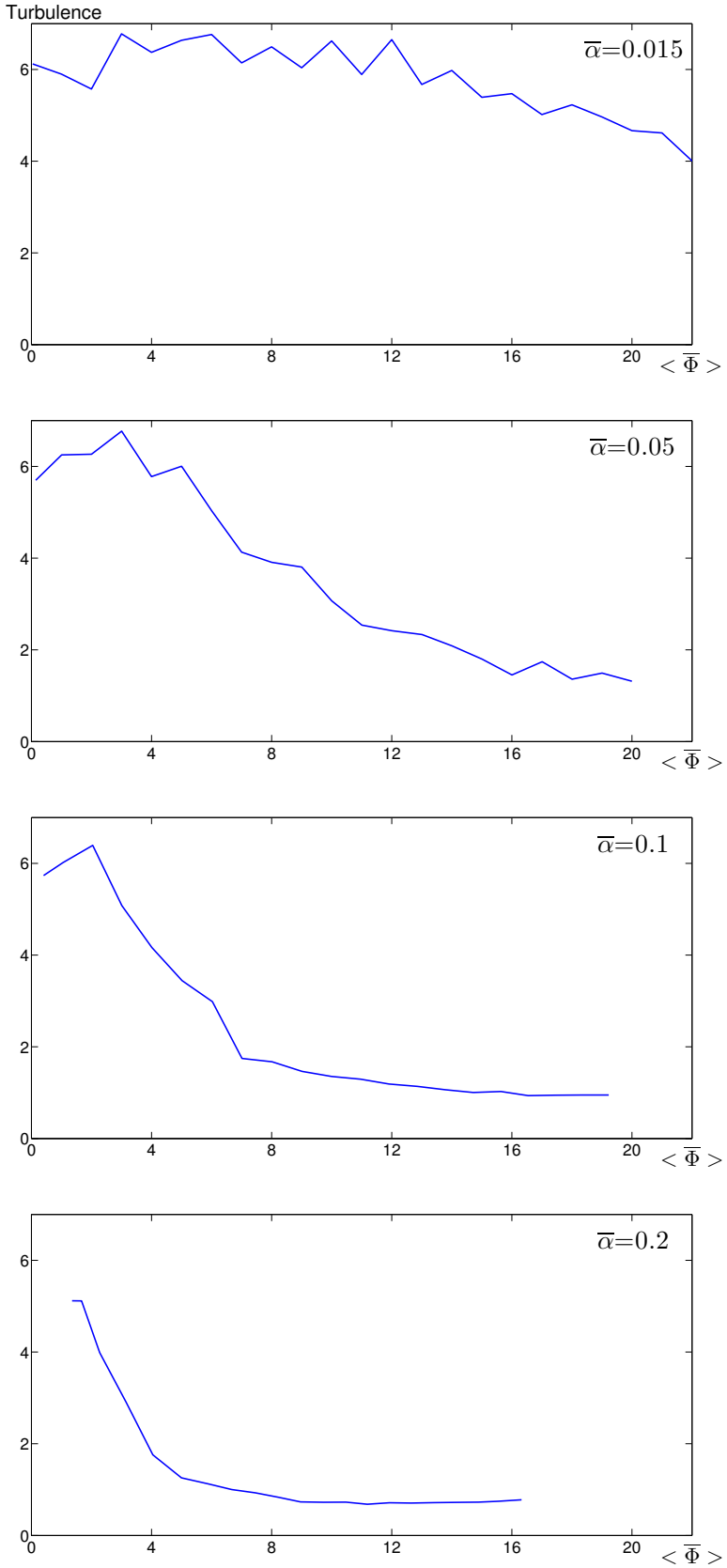


FIGURE 2.7.6: Influence du paramètre $\overline{\alpha}$ sur le profil de décroissance de la pseudo-énergie totale en fonction$< \overline{\Phi} >$

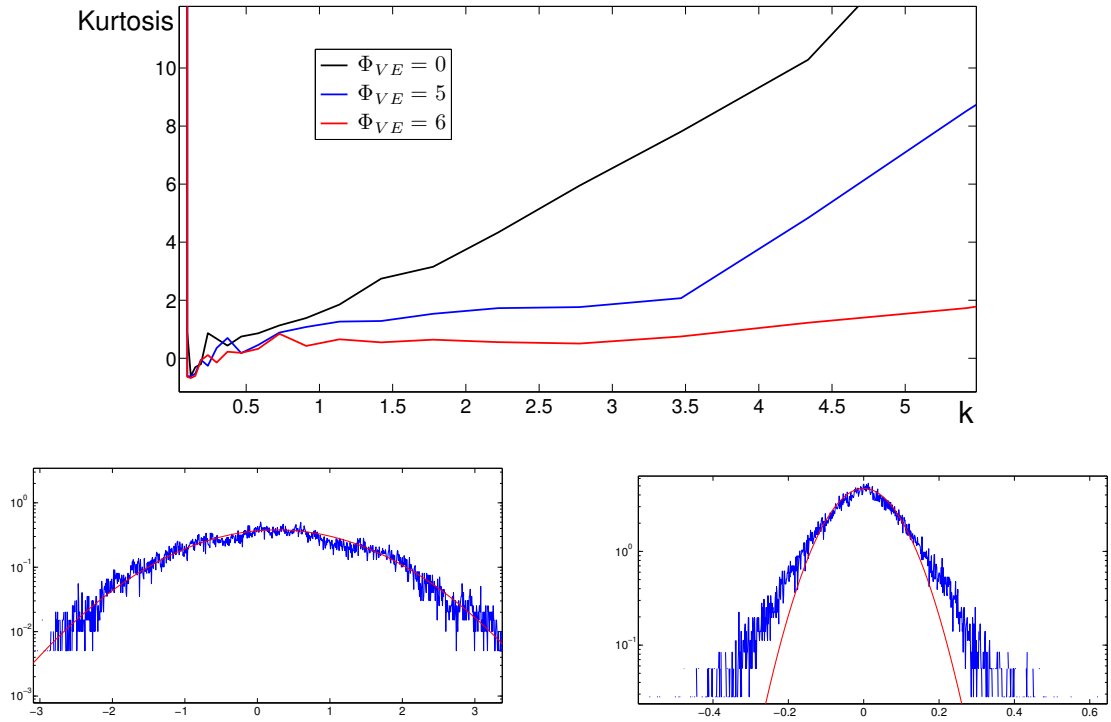


FIGURE 2.7.7: Kurtosis de Φ_n en fonction du nombre d'onde k et pour trois valeurs de potentiel de cisaillement (en haut). Densité de probabilité de $\Phi_8(k = 0.24)$ en bas à gauche, et de $\Phi_{16}(k = 1.4)$ en bas à droite, pour $\Phi_{VE'} = 0$. Les courbes de couleur rouge représentent les fonctions gaussiennes les plus proches.

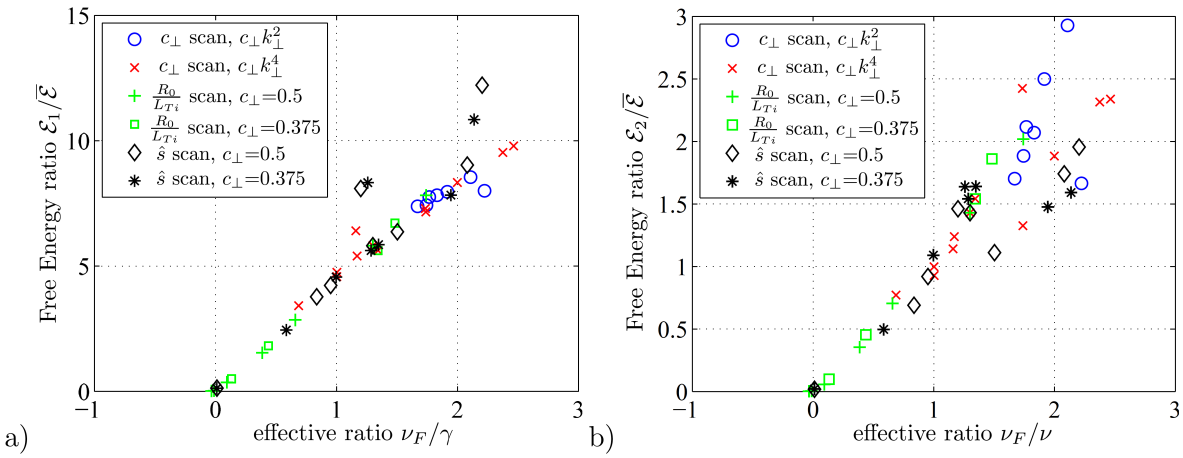


FIGURE 2.7.8: Ratio des domaines d'énergie libre en fonction des ratio de dissipation/injection, pour différents types et paramètres de simulations gyrocinétiques. Une relation de type linéaire semble clairement émerger de ces résultats. Figure extraite de la référence [47]

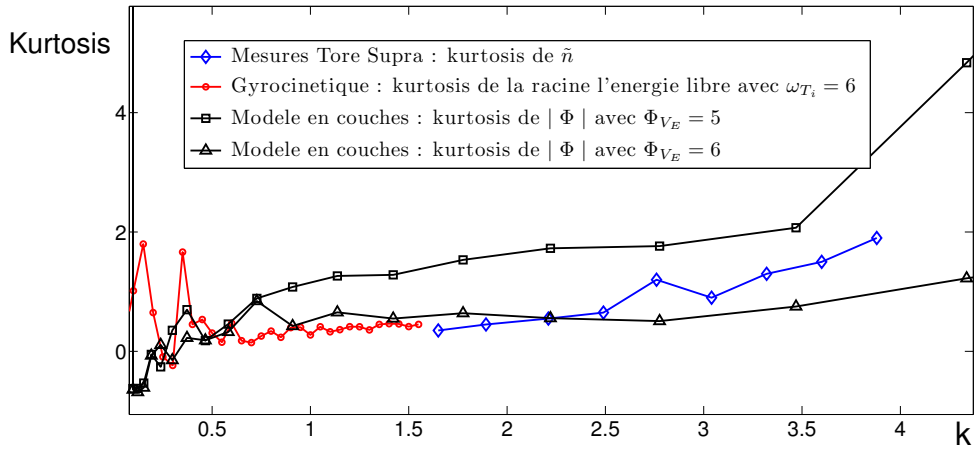


FIGURE 2.7.9: Valeurs des kurtosis des grandeurs fluctuantes en fonction du nombre d'onde. La kurtosis des fluctutations de densité (en bleu) correspond aux données expérimentales acquises sur le tokamak Tore Supra par Hennequin et al. [48]. La courbe rouge représente la kurtosis de la racine de l'énergie libre dans les simulations gyrocinétique GENE [47] en fonction de k_y pour $\omega_{T_i} = 6$.

tales [48] et des résultats provenant de la simulation gyrocinétique introduite dans cette section. Le comportement en dessous de $k = 1$ est assez difficile à déterminer, et la comparaison n'est pas immédiate. En revanche, la tendance au delà de cette valeur semblent concorder pour les trois sources de données, montrant une augmentation continue de la kurtosis en s'éloignant vers les grands k.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré les effets des interactions non-locales impliquant un transfert d'énergie par la turbulence plasma.

Nous avons premièrement étudié les oscillations observées dans les modèles en couches pour les plasmas de fusion à l'aide d'un modèle réduit simple. Nous avons pu identifier ces oscillations comme étant des interactions entre de la turbulence d'onde de dérive et des flux zonaux, ou des structures équivalentes. En considérant l'influence des termes non linéaires uniquement, une solution analytique sous forme de fonction elliptique de Jacobi a pu être trouvée, soulignant les similarités avec un système d'interactions à 3 ondes. Cette solution montre le caractère périodique induit par l'aspect non linéaire du système. L'étude de l'influence des paramètres ν_F, constante d'amortissement des flux zonaux, et γ, taux de croissance des ondes de dérive, a permis de dégager plusieurs caractéristiques :

- Les cycles limites observés numériquement correspondent à une limite purement périodique, et sont liés à des points fixes instables du système.
- Le régime chaotique montre la présence d'un attracteur étrange en tant qu'état final pour un large éventail de paramètres.
- La transition entre ces deux régimes (périodique-chaotique) est régie par un phéno-

mène de "period doubling".

Nous avons aussi pu remarquer que l'augmentation de l'injection d'énergie permet de passer d'un état final chaotique à un état montrant des oscillations régulières, puis enfin à un comportement instable. Une solution analytique approchée a été calculée en considérant une évolution à deux temps, montrant une allure semblable aux oscillations prédateurs-proies se produisant pendant la transition L-H (bien qu'aucun lien ne puisse être prouvé directement).

Dans une seconde partie, nous nous sommes concentrés sur l'aspect plus général des interactions prédateurs-proies, c'est-à-dire non plus à la dynamique précisément mais à l'influence des flux zonaux sur le spectre turbulent. Grâce au modèle à 25 couches, nous avons pu retrouver approximativement la loi de puissance de Kraichnan-Kolmogorov. En ajoutant les interactions avec les grandes échelles (petits k), nous avons clairement déterminé la réduction de l'énergie turbulente induite par le rôle de pompage joué par les flux zonaux. La mise en valeur d'un comportement suivant une loi de type $\dfrac{1}{1+\alpha V_E'^2}$ nous a permis de nous assurer du bon calibrage du modèle, confirmant sa pertinence vis à vis de la littérature existante. Nous avons pu observer une nette augmentation de l'énergie contenue dans les échelles dissipatives lorsque l'intensité des flux zonaux est augmentée en valeur moyenne. Cette constatation met en valeur la capacité importante du cisaillement à transférer l'énergie du spectre turbulent vers les grands k des échelles dissipatives. D'autre part, la réduction de l'amplitude des oscillations avec l'augmentation de V_E' est similaire à la phénoménologie de la transition L-H. La mesure de l'influence de $\overline{\alpha}$ a permis de comprendre précisément la nature locale et non locale des flux d'enstrophie et d'énergie mis en jeu par la réduction de la turbulence due aux flux zonaux. Bien que de nombreux autres effets physiques importants ne soient pas pris en compte, le modèle en couches établi nous a donné la possibilité de déterminer le rôle des structures mises en jeu à deux degrés différents.

3 Modèle de transport radial pour l'étude de la transition L-H

Le succès des futurs tokamaks, ITER le premier, dépend en grande partie de la compréhension et de l'amélioration du mode H, mode de fort confinement magnétique du plasma. Il s'agit vraisemblablement d'une condition nécessaire au succès de la fusion magnétique avec le type de réacteur actuellement utilisé. Le premier mode H a été obtenu sur le tokamak ASDEX, en 1982 [49]. Ce mode de confinement amélioré est caractérisé par la présence d'un piédestal dans les profils radiaux de pression et densité, c'est-à-dire par de forts gradients au bord du tokamak traduisant la présence d'une barrière de transport externe (figure 3.0.1). La transition entre les modes L et H coïncide également avec une forte réduction de la turbulence au niveau du piédestal. En raison de ces caractéristiques, le mode H permet d'augmenter le temps de confinement de manière significative (d'un facteur 2 approximativement), ce qui est crucial pour satisfaire et excéder le critère de Lawson abordé dans le chapitre 1. La méthode standard pour atteindre le mode H consiste à augmenter la puissance injectée au plasma au dessus d'un seuil critique. Sur ASDEX, ce seuil de transition a été défini empiriquement en fonction de la densité électronique n_e (moyennée sur le rayon), du champ magnétique B, et de la surface du plasma S [50] :

$$P_{crit} \propto n_e B S$$

Cette loi suggère donc que le passage au mode H requiert moins de puissance lorsque la densité est abaissée, ce qui est une propriété importante notamment pour les prévisions relatives à ITER. En effet, il est donc moins énergivore d'atteindre le mode H à densité moindre, puis de l'augmenter pour se rapprocher du critère de Lawson (cependant, cette relation n'est plus valide à faible densité). Plusieurs autres lois d'échelle relatives à la puissance critique nécessaire à la transition ont été établies, ou affinées, par rapport à cette formulation. Néanmoins, celle-ci comporte les principaux ingrédients qui déterminent le passage au mode H. D'une manière générale, la capacité des tokamaks à accomplir la transition L-H est améliorée par la présence d'un diverteur, qui permet d'extraire les impuretés nuisant au confinement pendant le fonctionnement de la machine. La modification de la configuration magnétique engendrée par l'ajout d'un diverteur serait aussi susceptible de favoriser l'accès au mode H à moindre puissance [51].

Les modèles numériques les plus poussés au niveau du détail physique, appelés modèles de "premiers principes", sont pour l'instant incapables d'expliquer et de reproduire la transition L-H. Il est donc necessaire de s'appuyer sur des modèles réduits pour comprendre la phénoménologie de la transition L-H : ceci constitue une première étape qui est à l'évidence complémentaire de modèles plus exhaustifs. De nombreux modèles de ce type ont été proposés depuis la découverte de ce régime de confinement. L'un des premiers et plus populaires a été développé et proposé par Hinton and Staebler [52]. Comme ce dernier,

la majorité de ces modèles s'appuient sur la réduction du transport via le cisaillement radial de vitesse $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}$ afin d'obtenir la bifurcation de gradient nécessaire à la transition. D'autres hypothèses se basent sur la stabilisation de certaines instabilités, entrainant là encore la réduction de la turbulence. Un dernier groupe de modèles, se démarquant nettement des deux premiers, met en cause les effets liés à la présence d'un diverteur [53, 54] ou issus des dérives néoclassiques [55]. Ces derniers seront laissés de côté puisque l'objet de notre étude concerne uniquement le rôle de la turbulence dans la transition. Finalement, peu de modèles 1D basés sur le cisaillement de vitesse incluent directement l'évolution de la turbulence (voir par exemple [56], [45]). Dans le cas de Miki et al. [45], les coefficients de transport sont forcés de manière à suivre la dépendance en dV_E/dr établie dans Biglari et al. [18]. En revanche, ce modèle présente déjà l'avantage certain de prendre en compte les oscillations prédateurs-proies via un système à deux prédateurs (flot cisaillé moyen et flux zonaux).

Notre modèle inclut une équation pour l'evolution radiale de la turbulence, ce qui permet de couvrir plusieurs effets physiques supplémentaires par rapport à de nombreux modèles de transition existants. Le taux de croissance de la turbulence y est directement contrôlé par le gradient de pression, et la dépendance du transport aux flots cisaillés est naturellement portée par la turbulence sans forçage additionnel sur le coefficient de transport. Nous nous concentrerons tout d'abord sur la mise en place d'un modèle reduit à trois champs (densité, pression, turbulence) pour en établir les principales caractéristiques. Le comportement du système face à différentes conditions sera étudié, notamment en ce qui concerne les différents types de transitions possibles, et l'influence du spreading sera analysée. Dans un second temps, nous détaillerons la construction d'un modèle plus évolué, impliquant un couplage entre le modèle de transport et le modèle en couches étudié dans le chapitre précédent : la niveau de turbulence agissant sur les coefficients de transport résultera alors des interactions prédateurs/proies du modèle spectral.

3.1 Modèle réduit de transport radial à trois champs

3.1.1 Equations de transport radial

Le modèle doit, dans un premier temps, répondre à l'objectif de ne conserver que les ingrédients strictement nécessaires à la transition L-H, auxquels est ajoutée une équation pour la turbulence qui nous sera indispensable pour déterminer *in fine,* dans le chapitre suivant, la production d'entropie correspondante. Par conséquent, nous retenons en tant que schéma directeur un modèle à 3 champs associant densité, pression et intensité de la turbulence. En ce qui concerne l'évolution de la densité et de la pression (l'équation pour la turbulence sera étudiée dans la sous-partie 3.1.2), le système suivant est utilisé :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_n\right) + S_n(r) \tag{3.1.1}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(Q_P\right) + S_Q(r) \tag{3.1.2}$$

où les flux de particules Γ_n et d'énergie Γ_Q sont exprimés comme suit :

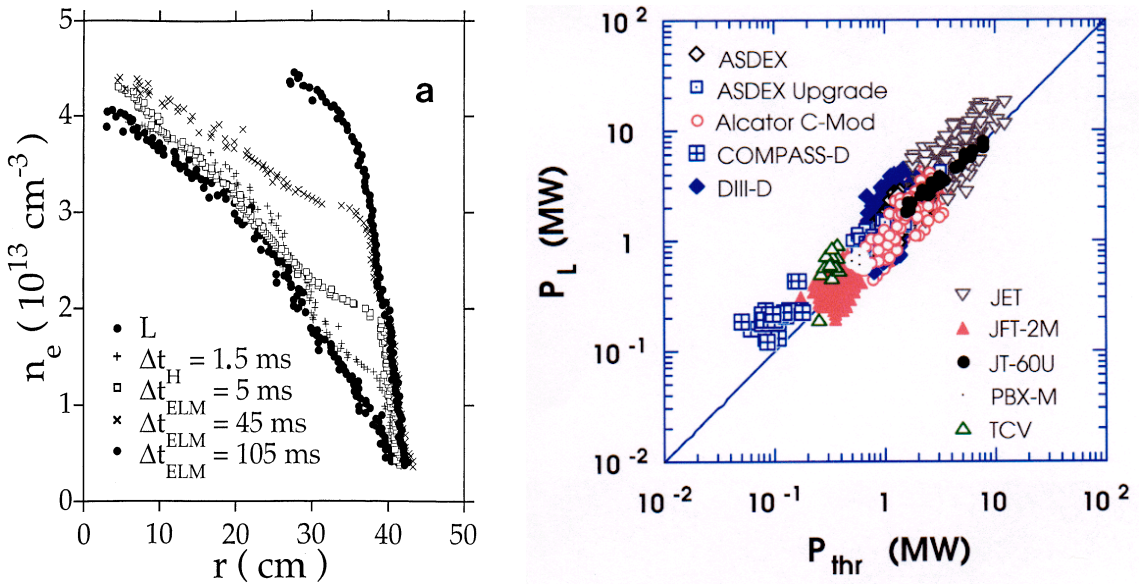


FIGURE 3.0.1: A gauche : profils radiaux de densité électronique mesurés dans le tokamak ASDEX lors des modes L et H. A droite : Comparaison des données expérimentales avec la loi d'échelle retenue par le groupe de travail d'ITER $P_{crit} = 0.45 n_e^{0.75} B R^2$ (extraits de Connor and Wilson [50])

$$\Gamma_n = -\,D(\varepsilon)\frac{\partial n}{\partial r} = -\,(D_{neo} + D_i\varepsilon)\,\frac{\partial n}{\partial r} \tag{3.1.3}$$

$$Q_P = -\,\chi(\varepsilon)\frac{\partial P}{\partial r} = -\,(\chi_{neo} + \chi_i\varepsilon)\,\frac{\partial P}{\partial r} \tag{3.1.4}$$

où les coefficients de diffusion D_{neo}, D_i, χ_{neo}et χ_i sont déterminés comme des constantes sans lien de dépendance croisée. D_{neo} et χ_{neo} représentent les coefficients de diffusion néoclassiques tandis que $D_{turb} = D_i\varepsilon(r)$ et $\chi_{turb} = \chi_i\varepsilon(r)$ sont définis comme les coefficients de transport turbulent, $\varepsilon(r)$ correspondant à l'intensité de la turbulence (proportionnelle à l'énergie turbulente). Ces expressions sont similaires aux coefficients de transport proposés par Zhang and Mahajan [57], article dont nous nous inspirerons aussi en partie pour décrire l'influence de l'écoulement cisaillé de vitesse $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$. Dans la suite de ce chapitre, les valeurs suivantes $D_{neo} = \chi_{neo} = 1,$ and $D_i = \chi_i = 4.0$ sont utilisées en gardant un rapport entre les coefficients similaire à celui habituellement utilisé pour les premiers modèles du même type [52]. $S_n$et S_Q sont les profils radiaux des sources de densité et chauffage.

Sources de particules et d'énergie Le chauffage et l'injection de particules sont modélisés de manière simplifiée mais en conservant des profils pertinents. Encore une fois, l'expression de ces sources est similaire à celle proposée par Hinton and Staebler [52] :

$$\begin{aligned} Q_{source} &= q_1 r_n (1 - r_n^2) \\ \Gamma_{Source} &= \Gamma_1 exp\left(-\lambda\left(n_a(1 - r_n) - g_a\frac{(1 - r_n)^2}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

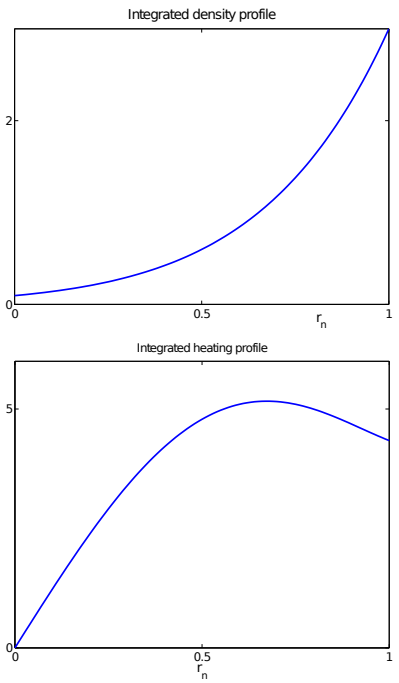


FIGURE 3.1.1: Flux associés aux sources de densité et d'énergie.

où $n_a$et g_a sont respectivement la densité et la valeur absolue du gradient en $r_n = 1$, et $r_n = r/a$ le rayon normalisé. λ est une constante liée au taux d'ionisation et à la vitesse des neutres. $\Gamma_1$et $q_1$sont les paramètres constants quantifiant l'importance de l'injection et du chauffage pour la transition L-H. L'influence de l'aspect des profils eux-mêmes (c'est-à-dire celle des autres paramètres contenus dans les expression des sources) ne sera pas étudiée. Les profils radiaux des flux sont présentés en figure(3.1.1).

3.1.2 Comment établir l'équation modélisant la turbulence ?

Les effets de la turbulence ne peuvent bien sûr être décrits de manière précise et complète par un modèle aussi simplifié. Par conséquent, nous effectuons un raisonnement phénoménologique de manière à rendre compte des mécanismes à l'origine de l'évolution de la turbulence. Le niveau moyen de l'énergie turbulente est sujet à l'influence des éléments suivants :

- le taux de croissance linéaire des instabilités, désigné par $\gamma(\nabla P)$, qui dépend principalement du gradient de température dans le cas de la turbulence ITG, mais est choisi comme lié au gradient de pression dans notre modèle.
- l'amortissement non linéaire, résultant de l' "eddy damping" , supposé quadratique : $-\delta_{NL}\varepsilon(r)^2$
- le caractère non-local de la turbulence, observé aussi bien expérimentalement que numériquement (simulations gyrocinétiques) [58]. Même s'il reste faible, son impact peut être significatif. Cette non-localité faible est modélisée par un terme de propagation turbulente $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon D_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right)$où D_ε est le coefficient de diffusion de la turbulence comme le suggèrent les réf. 59, 60.

– le terme de suppression de la turbulence par le cisaillement de vitesses, dont le rôle est proéminent pour permettre au mécanisme de transition L-H d'apparaître, tout au moins dans un modèle de transport. Le terme de suppression est d'abord supposé adopter une forme générale de type $-\delta(\partial V_E/\partial r)\varepsilon(r)^n$, dont les paramètres indéterminés n et $\delta(\partial V_E/\partial r)$ sont discutés ci-dessous.

L'équation d'évolution temporelle de l'intensité de la turbulence s'écrit donc :

$$\frac{\partial \varepsilon(r)}{\partial t} = \gamma\left(\nabla T\right)\varepsilon(r) - \delta_{NL}\varepsilon(r)^2 - \delta(\omega_s)\varepsilon(r)^n + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon D_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right)$$

où δ est une fonction du cisaillement ω_s dont nous déterminerons la forme par la suite.

Taux de croissance linéaire $\gamma\left(\nabla P\right)$ Le niveau de l'intensité de turbulence, que nous supposons ici principalement excitée par des modes de gradients de température, dépend donc essentiellement du profil radial de température. Ce taux de croissance est généralement lié à une valeur critique du gradient de température au-delà de laquelle des instabilités peuvent émerger. Dans notre modèle, il semble plus opportun de se référer au gradient de pression, ce qui correspond à un comportement équivalent :

$$\gamma\left(\nabla P\right) = \gamma_G\left(\nabla P_{Crit} - \nabla P\right)\Theta\left(\nabla P_{Crit} - \nabla P\right)$$

où la lettre Θ représente ici la fonction de Heaviside.

Influence du flot cisaillé sur la turbulence D'après les références 61, 57, 18, il peut être établi que l'intensité de la turbulence dépend du cisaillement de vitesse comme suit :

$$\frac{\varepsilon_{SF}}{\varepsilon_0} \propto \frac{1}{1 + (\omega_S)^h} \tag{3.1.6}$$

avec $h = 2$ dans la plupart des cas éloignés de la limite de fort cisaillement. ε_{SF} et ε_0 sont respectivement le niveau de turbulence avec et sans cisaillement. Ce résultat s'obtient par exemple en s'appuyant sur l'hypothèse initiale de Zhang qui propose que $D_{turb} = D_i\varepsilon^{(2-3h)/h}$. Notons par ailleurs que le choix de $h = 2$ est en accord avec la forme du coefficient D_{turb} choisie en (3.1.1).

La "fréquence" de cisaillement se lit :

$$\begin{aligned}\omega_S &= \frac{r}{q}\frac{d}{dr}\frac{q}{r}V_E = \frac{r}{q}\frac{d}{dr}\frac{q}{r} + \frac{dV_E}{dr} \\ &\approx \frac{d}{dr}\left(V_E\right)\end{aligned}$$

En utilisant l'équilibre radial des forces

$$V_E = -\frac{E_r}{B} = -\frac{1}{eBn_i}\frac{\partial P}{\partial r} + u_\theta\frac{B_\phi}{B} - u_\phi\frac{B_\theta}{B}$$

ce qui donne approximativement

$$\frac{d}{dr}\left(V_E\right) \approx \frac{1}{eB}\left(\frac{1}{n^2}\frac{dn}{dr}\frac{dP}{dr} - \frac{1}{n}\frac{d^2P}{dr^2}\right) \tag{3.1.7}$$

où B est ici considéré comme un champ magnétique homogène qui ne dépend pas du rayon. Le second terme, étant généralement petit devant le premier, peut être négligé. Dans l'utilisation pratique du modèle de transport, n est aussi utilisé comme une constante dans l'expression de dV_E/dr par nécessité de simplification. Pour rendre compte correctement de la dépendance de la turbulence en $\dfrac{1}{1+\alpha\left(\frac{dV_E}{dr}\right)^2}$, nous nous appuyons sur l'état stationnaire sans spreading turbulent afin de choisir des paramètres pertinents :

$$\gamma\varepsilon - \delta_{NL}\varepsilon^2 - \delta(\omega_s)\varepsilon^n = 0$$

En imposant $n = 2$, $\delta = \delta_{NL}\left(\frac{dV_E}{dr}\right)^2$ est la solution qui satisfait le système

$$\gamma\varepsilon = \varepsilon^2\left(\delta_{NL} + \alpha\left(\frac{dV_E}{dr}\right)^2\delta_{NL}\right)$$

$$\frac{\varepsilon_{SF}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{1+\eta\left(\frac{dV_E}{dr}\right)^2}$$

et mène aux coefficients de diffusion suivants dans un état stationnaire :

$$\chi_{turb} = \chi_i\frac{\gamma}{\delta_{NL}}\frac{1}{1+\eta\left(\frac{dV_E}{dr}\right)^2}$$
$$D_{turb} = D_i\frac{\gamma}{\delta_{NL}}\frac{1}{1+\eta\left(\frac{dV_E}{dr}\right)^2}$$

ce qui est effectivement similaire à (3.1.6). Notons que dans plusieurs références utilisant un champ pour la turbulence, tel que la réf. 62 repris par del Castillo-Negrete et al. [56], ou encore dans un récent modèle incluant des interactions prédateurs-proies [45], cette influence naturelle du cisaillement de vitesse sur la turbulence n'est pas présente de manière totalement cohérente : c'est alors souvent les coefficients de diffusion qui sont forcés artificiellement. Cette analyse phénoménologique porte à croire que l'approche développée ici paraît mieux justifiée au vu de la littérature existante traitant de l'influence des flots cisaillés. Le système peut donc s'écrire sous sa forme complète :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(D_{neo} + D_i\varepsilon\right)\frac{\partial n}{\partial r}\right) + S_n(r) \tag{3.1.8}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\chi_{neo} + \chi_i\varepsilon\right)\frac{\partial P}{\partial r}\right) + S_Q(r) \tag{3.1.9}$$

$$\frac{\partial \varepsilon(r)}{\partial t} = \gamma_G\Theta\left(\nabla P_{Crit} - \nabla P\right)\left(\nabla P_{Crit} - \nabla P\right)\varepsilon(r) - \delta_{NL}\varepsilon(r)^2 \tag{3.1.10}$$

$$- \delta_{NL}\alpha\left(\frac{dV_E}{dr}\right)^2\varepsilon(r)^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon D_\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right) \tag{3.1.11}$$

3.1.3 Etude analytique du système à 3 champs pour la transition L-H

Les profils des sources de particules et de chauffage représentés sur la figure 3.1.1 sont utilisés dans la suite de ce chapitre. Les paramètres suivants sont choisis $\lambda = 11$, $D_{neo} = \chi_{neo} = 1$, $D_i = \chi_i = 4.0$ et le gradient critique est fixé à une valeur proche de zéro $\nabla P_{crit} = 0.01$, ce qui correspond à l'hypothèse que la turbulence se développe même en présence de faibles gradients. Les paramètres Γ_a, Q_a des sources et les autres paramètres peuvent être modifiés afin d'étudier leur impact sur le comportement du système et sur la transition L-H. Nous procédons d'abord à la vérification de la validité de notre modèle sans diffusion radiale de turbulence ni l'influence du gradient de température (γ constant), en nous assurant que les profils de pression/densité et la valeur critique du chauffage obtenus sont bien identiques aux résultats publiés par Hinton and Staebler [52] pour des paramètres similaires.

Bifurcations Afin de visualiser une transition entre deux profils qu'on assimilera aux profils radiaux des modes L et H, puis éventuellement de faire un parallèle avec des observations expérimentales, il est nécessaire de déterminer précisément les conditions de bifurcation dans notre modèle, aussi bien de L vers H que de H vers L. Dans ce but, la méthode la plus directe consiste à rechercher les états stationnaires du système à 3 équations. Des équations (3.1.8), (3.1.9) et (3.1.10), les expressions suivantes peuvent être déduites :

$$\begin{aligned}
\chi_{turb} &= \chi_i\frac{\gamma}{\delta_{NL}}\frac{1}{1+\alpha\left(\frac{dV_E}{dr}\right)^2} \\
\Gamma_n &= \Gamma_{source} \\
Q_n &= Q_{source} \\
\frac{\partial n}{\partial r} &= \frac{\Gamma_{source}}{Q_{source}}\frac{\partial P}{\partial r}
\end{aligned}$$

lorsque $\partial\varepsilon/\partial \mathrm{t} = \partial p/\partial t = \partial n/\partial t = 0$ et où $D_{neo} = \chi_{neo}$ et $D_{turb} = \chi_{turb}$. En utilisant le système ci-dessus, l'égalité $Q_n = Q_{source}$ aboutit successivements aux équations suivantes :

$$-\left(\chi_{neo} + \chi_{turb}\right)\nabla P = Q_{source}$$

$$-\left(\chi_{neo}\left[1+\alpha\left(\nabla P\right)^4\left(\frac{\Gamma_{source}}{Q_{source}}\right)^2\right]+\frac{\gamma}{\delta_{NL}}\right)\nabla P=\left[1+\alpha\left(\nabla P\right)^4\left(\frac{\Gamma_{source}}{Q_{source}}\right)^2\right]Q_{source}$$

A partir de ce résultat, nous pouvons établir une équation polynomiale de degré 5 qui doit être satisfaite par le gradient de pression en chaque r, où Q_{source} et Γ_{source} sont dénommés respectivement q_r et Γ_r :

$$\alpha\chi_{neo}\frac{\Gamma_r^2}{q_r^2}\left(\nabla P\right)^5+\alpha\frac{\Gamma_r^2}{q_r}\left(\nabla P\right)^4-\frac{\gamma_G}{\delta_{NL}}\chi_i\left(\nabla P\right)^2+\left(\chi_{neo}+\frac{\gamma_G}{\delta_{NL}}\chi_i\left(\nabla P\right)_{crit}\right)g_p+q_r=0\,\forall r$$

Cette équation autorise l'accès aux gradients de pression, ce qui est suffisant pour l'étude des profils. Plusieurs types de solutions peuvent être obtenus. En ce qui concerne la recherche d'un comportement de transition, notons que les solutions, sous forme de courbe en S, sont la signature typique d'un possible basculement entre deux modes. Ce cas est illustré par la figure 3.1.2, sur laquelle deux solutions réelles existent pour un ensemble de flux de chaleur des sources. Il est donc certain qu'en augmentant progressivement le chauffage en un r donné, le système bifurquera sur la branche haute au plus tard lorsque cette branche ne représente qu'une unique solution (ici pour une valeur critique $q_c = 4.5$). Il s'agit d'une bifurcation dite forte, la "fonction" $q_r(\nabla P)$ étant multivaluée. En changeant un paramètre, dans notre cas, le flux de la source de particules Γ_r, les solutions ne sont plus multivaluées, la bifurcation est alors dite "douce". Si cette fonction n'est pas monotone, elle peut être classée dans les transitions de phase de premier ordre, tandis que si elle est monotone avec un simple changement de pente, il s'agit d'une transition de phase de deuxième ordre. Les trois types de bifurcations obtenues correspondent à celles énumérées par Connor and Wilson [50].
Afin d'avoir une vue d'ensemble plus générale, nous réalisons un diagramme de bifurcation en faisant varier le paramètre α (qui a un impact similaire à celui de Γ_r sur la forme de la solution). La figure 3.1.3 rend compte du changement de comportement constaté : la forme de la surface de bifurcation en "cusp" est semblable à celle observée par des études expérimentales menées sur JET et DIII-D notamment [63]. Ce modèle ne peut saisir tous les mécanismes de la transition L-H en raison de sa réduction poussée. Il est néanmoins capable de retracer les grandes lignes du phénomène de bifurcation/transition. Une fois connue la possibilité de cette bifurcation, nous pouvons envisager d'utiliser cette caractéristique pour justifier la présence d'un piédestal. En effet, il est alors possible de retrouver (voir figure 3.1.4) le gradient de pression en tout r à l'aide des flux de sources proposés précédemment (équations(3.1.5)) et en fixant artificiellement g_a et n_a. Le gradient de pression est contraint de subir un brusque changement entre $r = 0.95$ et $r = 0.9$. Le point exact de ce changement de gradient, correspondant à l'extrémité interne du piédestal, fera l'objet d'une "expérience numérique" dans la prochaine section, notamment dans le but de discuter de l'applicabilité de la règle dite de Maxwell.

3.1.4 Expériences numériques

Dans cette section, nous cherchons à mettre en évidence le phénomène de transition L-H de manière dynamique. L'attention est en partie portée sur la valeur critique de chauffage nécessaire à la transition entre les deux modes, et sur la dépendance de ce seuil

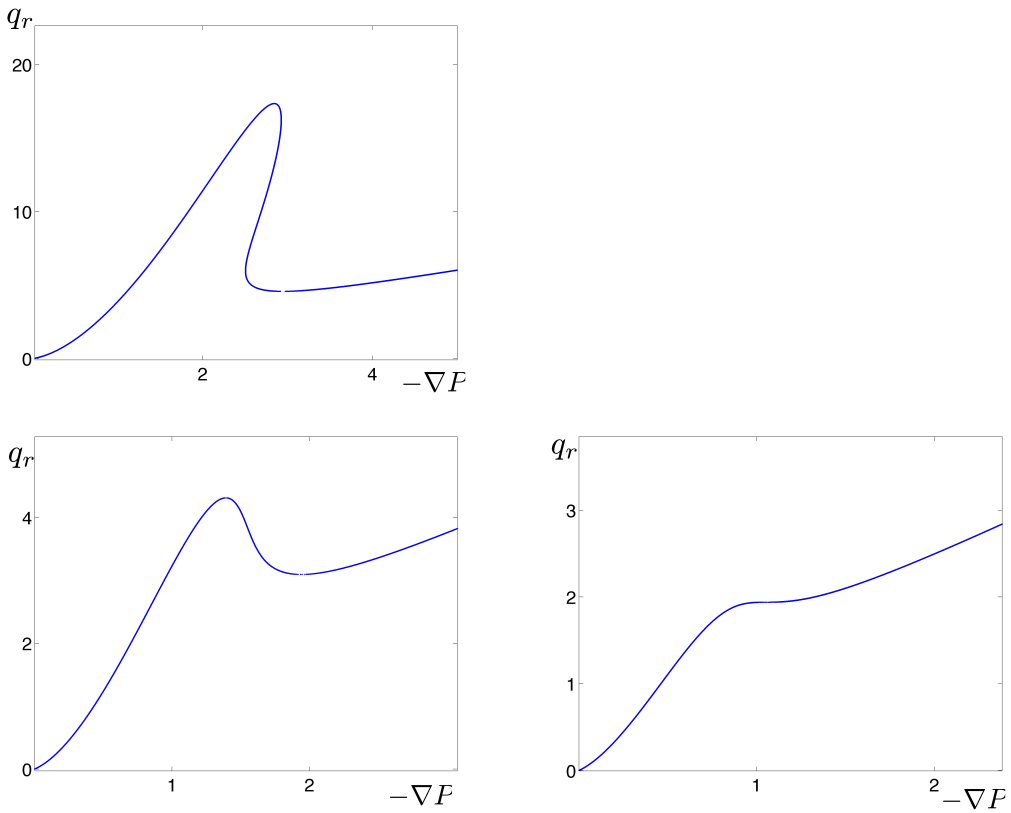


FIGURE 3.1.2: Solution pour le gradient de pression avec $\alpha = 10$: bifurcation "dure" (en haut) avec $\Gamma_r = 0.75$, bifurcation douce (transition de phase de premier ordre, en bas à gauche) avec $\Gamma_r = 0.90$ et encore plus douce (transition de phase de second ordre, en bas à droite) avec $\Gamma_r = 1.1$)

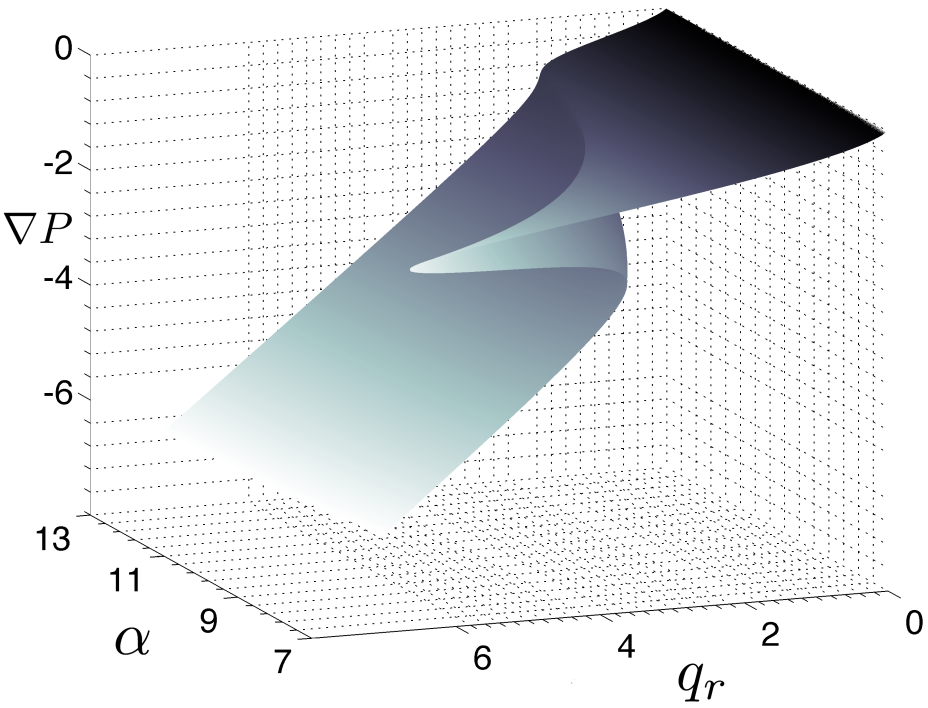


FIGURE 3.1.3: Diagramme de bifurcation

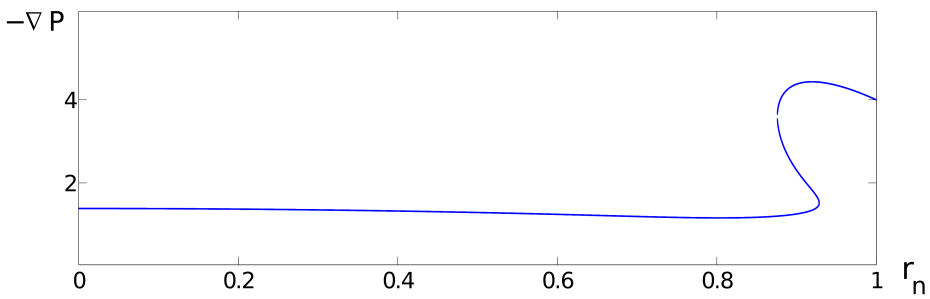


FIGURE 3.1.4: Solution radiale avec $q_a = 4.5$

en fonction de l'intensité de la diffusion radiale de la turbulence. La possibilité d'une hysteresis entre les valeurs critiques de chauffage pour la transition de L vers H et de H vers L est aussi étudiée. La forme des profils, fonctions de la diffusion spatiale de la turbulence, est discutée.

Condition initiales et condition limites En ce qui concerne la pression et la densité, le système est initialisé par des profils correspondant à un gradient constant faible mais non nul. Le profil radial de la turbulence est aussi choisi quasi-plat, mais à un niveau élevé ($\varepsilon = 5$), ce qui a pour intérêt d'éviter d'atteindre artificiellement le mode H lorsque les deux solutions L et H coexistent.

Les conditions aux deux bords sont choisies telles que : $p(r_n = 1) = 0.005$, $n(r_n = 1) = 0.03$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}P(r_n = 0) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}n(r_n = 0) = 0$$

et pour la turbulence

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon(r_n = 1) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon(r_n = 0) = 0$$

Les valeurs des gradients de pression et de densité en $r_n = 0$, et du gradient de turbulence en $r_n = 1$ et $r_n = 0$, sont donc conservées dans leur état initial, c'est-à-dire très proches de 0.

Transition L-H et H-L sans spreading : valeurs critiques de chauffage et hysteresis Nous étudions dans un premier temps l'évolution dynamique du système sans ajout de spreading, dont nous discuterons l'influence dans le paragraphe 3.1.4. Nous nous concentrons ici sur la transition entre les deux modes sans étudier l'impact des conditions initiales. La méthodologie adoptée est la suivante : nous cherchons d'abord à atteindre le mode L (ou H) en veillant à la stabilisation complète du système. La constante q_a est alors progressivement augmentée (ou abaissée) afin de déterminer précisément la valeur critique de transition. Le résultat, présenté schématiquement figure 3.1.5, montre un comportement qui n'est pas en adéquation avec la "règle" de Maxwell, stipulant que la transition entre deux valeurs de flux doit avoir lieu lorsque les deux aires hachurées sont équivalentes. Bien que le système considéré ici soit de forme globale décrite par Malkov and Diamond [64] comme respectant cette règle, plusieurs éléments sont susceptibles de la modifier. Premièrement, il est possible que la relaxation dynamique de la turbulence puisse influer sur la valeur critique de transition. C'est effectivement le cas, mais il apparaît que cette dynamique a plutôt tendance à augmenter la valeur de transition, comportement qui s'éloigne encore plus de la règle de Maxwell. Soulignons aussi que les équations de transport sont traitées dans la réf. [64] de manière cartésienne et non cylindrique. Enfin, une dépendance de la turbulence au gradient de pression est incluse dans notre modèle par l'intermédiaire du coefficient de croissance linéaire, tandis que nous ne prenons pas en compte la dérivée seconde de la pression contrairement à Malkov. Quoi qu'il en soit, le non respect de ce comportement précis ne conduit pas à une remise en cause majeure du processus à l'oeuvre lors de la transition.

Par ailleurs, un phénomène, d'hystéresis apparaît pour les transitions L-H et H-L dans le cas d'une transition forte : le mode H se forme avec un piédestal de largeur non nulle d'emblée au-delà de la valeur critique de q_c, tandis que le retour au mode L, lorsqu'on

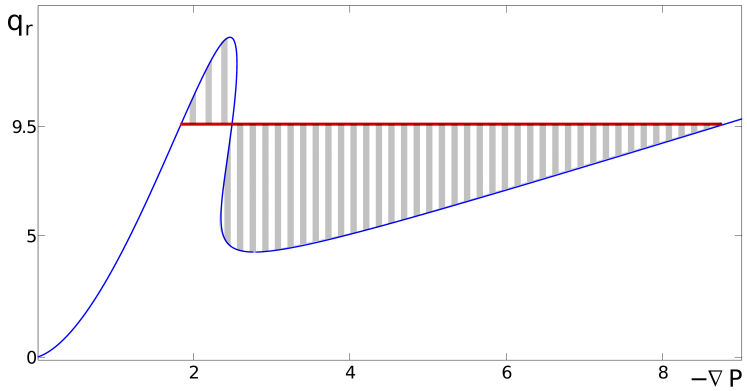


FIGURE 3.1.5: Construction de Maxwell : les surfaces ne sont pas identiques au niveau du piédestal

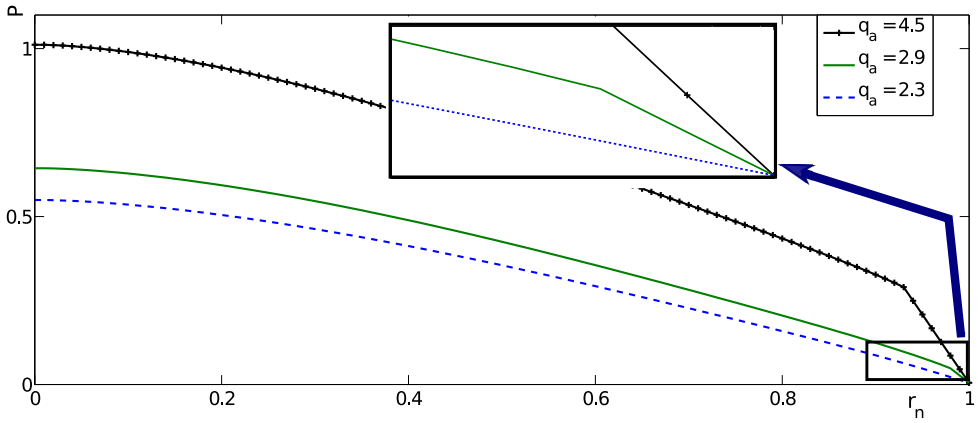


FIGURE 3.1.6: Comparaison des profils radiaux de pression pour trois valeurs de q_a en configuration "transition douce".

abaisse le flux d'énergie, s'effectue progressivement jusqu'à la disparition du piédestal sans discontinuité. Dans le cas d'une transition douce, cette hysteresis n'existe pas, le piédestal se formant progressivement également pour la transition dans le sens L→H (figure 3.1.6).

Influence de la diffusion radiale de la turbulence sur le point de transition et sur la forme des profils Les caractéristiques de la non-localité de la turbulence ont été assez largement abordées ces dernières années. Dans notre cas, le terme de diffusion retenu correspond à la modélisation de structures faiblement non locales [59, 65, 58, 60, 66]. Il faut mentionner toutefois les travaux concernant l'hypothèse de "fractional diffusion" [67, 68, 69], qui nécessite l'introduction d'opérateurs intégro-différentiels . D'autre part, une signature significative du "spreading" sur la transition HL a été notamment observée dans le stellerator TJ-II par Estrada et al. [70], qui constatent qu'une diffusion radiale de la turbulence est vraisemblablement nécessaire pour expliquer la transition brutale et non progressive lors du retour au mode L. D'autres études expérimentales ont confirmé la portée significative de la redistribution spatiale de l'énergie turbulente (voir par exemple la réf. 71). Avec le système réduit, il est aisé d'étudier l'influence de la diffusion sur la

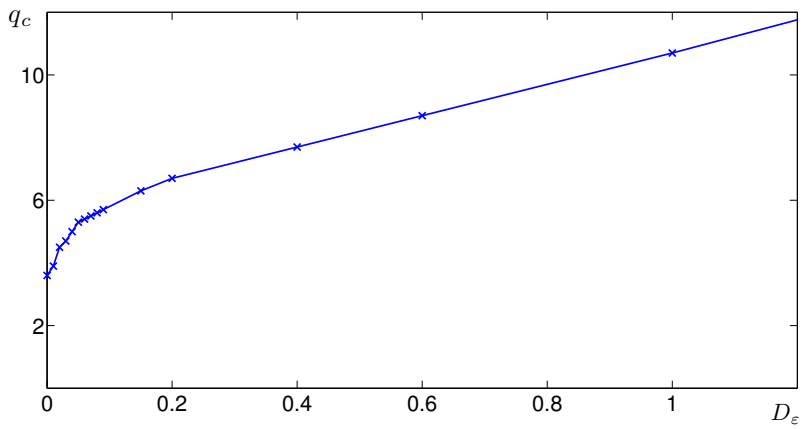


FIGURE 3.1.7: Impact de la diffusion radiale de la turbulence sur la valeur critique de la transition q_c. A grand D_ϵ, la valeur du flux de chaleur nécessaire à la transition semble suivre une évolution linéaire.

valeur critique de la transition ainsi que sur les profils radiaux. La figure 3.1.7 montre qu'un fort taux de diffusion radiale de la turbulence augmente la valeur de q_c requise pour transiter d'un type de profil à l'autre. Pour des valeurs de D_ε inférieures à 0.1, la fonction $q_c(D_\varepsilon)$ semble suivre une loi logarithmique tandis que cette relation devient linéaire pour des valeurs plus élevées de D_ε. Cette constatation met en valeur un second aspect de l'importance du cisaillement radial de vitesses. Au delà du simple fait de réduire le transport par l'intermédiaire de la diminution de la turbulence, ce cisaillement réduit aussi le coefficient de diffusion puisque ce dernier dépend de ε. La transition requiert alors donc moins de puissance, la turbulence restant plus localisée.

Notons aussi que la diffusion spatiale de la turbulence modifie significativement la forme des profils. Sans spreading, la délimitation entre le piédestal et le reste de l'espace est très marqué : un changement brusque de gradient se produit comme le montre la figure 3.1.6. Au contraire, un fort coefficient de spreading donne lieu à des profils adoucis, sans rupture claire (voir figure 3.1.8). La phénoménologie de la transition est la suivante lorsque le coefficient q_a est très légèrement supérieur à la valeur critique q_c. Les profils radiaux se stabilisent d'abord sur une configuration L (en bleu) puis, après un temps de relaxation, transitent vers le mode de type "H" (en rouge). L'élément déclencheur de la transition semble résider dans l'affaiblissement de l'intensité de la turbulence au bord.

Bien que ce modèle fournisse certaines indications sur les élements susceptibles de modifier la dynamique de la transition, il se trouve vite limité par les simplifications appliquées. C'est pour cette raison que nous proposons d'y intégrer les interactions entre flux zonaux et turbulence d'onde de dérive dans la suite de ce chapitre.

3.2 Modèle de transport couplé multi-échelles

A ce stade, nous avons construit deux modèles de nature différente. Le premier, le modèle en couches, rend compte des interactions entre différentes échelles dans l'espace de

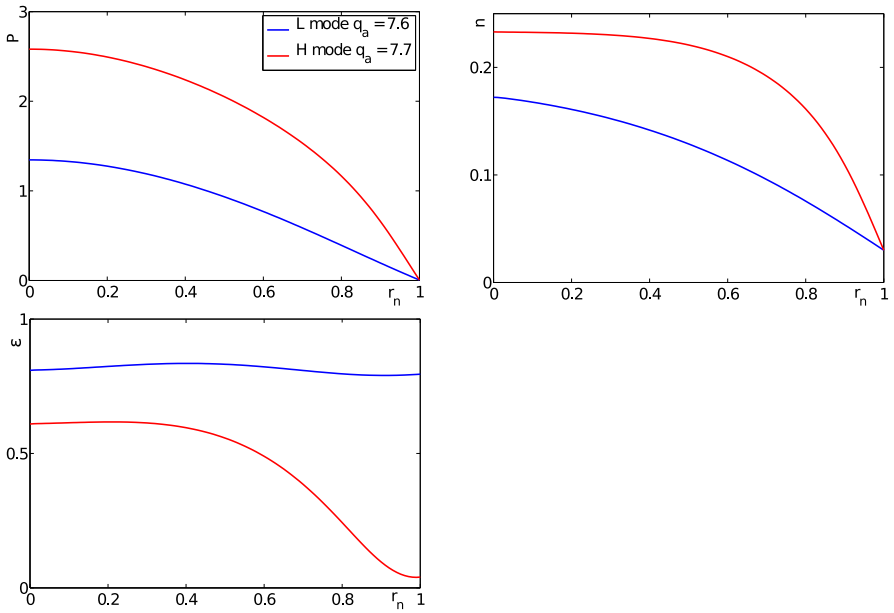


FIGURE 3.1.8: Profils de pression (en haut à gauche), densité (à droite) et turbulence (en bas). En bleu le mode L avec $q_1 \lesssim q_c$ et en rouge le mode H avec $q_1 \gtrsim q_c$. $q_c = 7.6$ et $D_\varepsilon = 0.4$

Fourier. Le second, le modèle de transport présenté dans ce chapitre, permet de reproduire la phénoménologie de la transition L-H dans la direction radiale du tokamak. L'étude de ces deux aspects de la dynamique est assez rapidement limitée par leur cloisonnement à l'intérieur d'un cadre restreint. Nous proposons dans cette section de coupler ces deux plans d'interactions.

3.2.1 Description du modèle

L'objectif est donc de construire un modèle de transport multi-couches : à chaque pas de temps, l'évolution temporelle de la turbulence est calculée à partir d'un modèle en couches pour chaque point du modèle de transport. La partie concernant le transport de particules et de chaleur est gardée intacte, c'est-à-dire identique aux équations 3.1.1 et 3.1.2.
La variable définissant l'intensité de la turbulence est maintenant définie comme suit :

$$\varepsilon(r,\, t) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n(r,\, t)\Phi_n^*(r,\, t)$$

Dans l'équation des flux zonaux, la valeur de V_E' est substituée par son expression issue des profils radiaux $\dfrac{dV_E}{dr} = \eta \nabla P \cdot \nabla n$, ce qui est équivalent à :

$$\Phi_{V_E'} = \frac{\eta}{q^2} \nabla P \cdot \nabla n$$

Etant donné que la normalisation du modèle en couches n'est pas identique à celle du système de transport radial, il convient d'ajuster les paramètres pour obtenir une période d'oscillation cohérente avec l'échelle de temps du transport. Le temps associé au modèle de transport radial correspond à $t_{transport} = t/\tau_{confinement}$ et le temps associé au modèle en couches à $t_{shell} = t\Omega^*$. En choisissant d'uniformiser le modèle sur la base du temps de transport, la normalisation est la suivante : $\dfrac{\partial}{\partial t_{shell}} \rightarrow \Omega_* \tau_c \dfrac{\partial}{\partial t_{transport}}$.

Diffusion radiale de la turbulence De la même manière que dans le modèle simple de transport, il est supposé ici que la turbulence est faiblement non-locale, ce qui entraîne l'ajout d'un terme $D_\varepsilon \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \Phi_n(r,\, t)}{\partial r^2}$, D_ε étant constant et indépendant de n. Au contraire, aucune diffusion n'est appliquée de manière directe sur l'échelle des flux zonaux $\overline{\Phi}$: ceux-ci sont néanmoins sujets au transport de manière indirecte via la turbulence de dérive qui les génère.

Conditions initiales et conditions limites En ce qui concerne la pression et la densité, les conditions initiales et les conditions limites sont identiques à celles présentées plus tôt dans le chapitre paragraphe 3.1.4. Les Φ_n sont initialisés par une distribution uniforme aussi bien dans l'espace de Fourier que dans l'espace réel. En ce qui concerne les conditions aux deux bords, une condition "stabilisante" est appliquée. Il s'agit d'amortir les perturbations violentes qui peuvent avoir lieu et créer des effets de bord indésirables. Ainsi, $\dfrac{\partial \Phi_n(r_n = 0)}{\partial t} = \dfrac{0.1}{\delta r}\left(\Phi_n(r = 0.01) - \Phi_n(r = 0)\right)$, ce qui permet de faire tendre le gradient au bord vers un gradient nul sans l'imposer *de facto.* La même condition est appliquée au bord externe. Cette condition limite introduit un temps de relaxation pour les points situés aux deux extrémités spatiales. Pour les flux zonaux, la condition de conservation des gradients aux limites est imposée de manière stricte : $\dfrac{\partial \overline{\Phi}(r_n = 0)}{\partial r} = \dfrac{\partial \overline{\Phi}(r_n = 1)}{\partial r} = 0$.

Equations du modèle

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(D_{neo} + D_i \varepsilon(r,\, t)\right)\frac{\partial n}{\partial r}\right) + S_n(r) \\
\frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\chi_{neo} + \chi_i \varepsilon(r,\, t)\right)\frac{\partial P}{\partial r}\right) + S_Q(r)
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$q^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\Phi}(r,\, t)\right) = \overline{\alpha}\sum_n q k_n^3 g\left(g^2 - 1\right)\Phi_n^*(r,\, t)\Phi_{n+1}^*(r,\, t) - \nu_F q^2\left(\overline{\Phi}(r,\, t) - \Phi_{V_E'}(r,\, t)\right) \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\partial \Phi_n(r,\, t)}{\partial t} = -\overline{\alpha}\frac{q k_n \overline{\Phi}^*(r,\, t)}{1 + k_n^2}\left[g\left(1 + g^2 k_n^2 - q^2\right)\Phi_{n+1}^*(r,\, t) - \left(1 + g^{-2} k_n^2 - q^2\right)\Phi_{n-1}^*(r,\, t)\right] \tag{3.2.3}$$

$$+ C\left(\Phi_n, \Phi_n\right) + F_n(\Phi_n) - D_n(\Phi_n) + D_\varepsilon \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi_n(r,\, t)}{\partial r^2} \tag{3.2.4}$$

où

$$
\begin{aligned}
C\left(\Phi_n, \Phi_n\right) &\equiv \alpha \frac{k_n^4\left(g^2-1\right)}{1+k_n^2}\Big[g^{-7}\Phi_{n-2}^*(r,\, t)\Phi_{n-1}^*(r,\, t) \\
&\quad - \left(g^2+1\right) g^{-3}\Phi_{n-1}^*(r,\, t)\Phi_{n+1}^*(r,\, t) + g^3\Phi_{n+1}^*(r,\, t)\Phi_{n+2}^*(r,\, t)\Big] \\
\varepsilon(r,\, t) &= 0.05\sum_{n=1}^{N}\Phi_n(r,\, t)\Phi_n^*(r,\, t) \\
D_n(\Phi_n) &= \nu_l k_n^{-6}\Phi_n(r,\, t) + \nu_s k_n^4\Phi_n(r,\, t) \\
\Phi_{V_E'}(r,\, t) &= \frac{\eta}{q^2}\nabla P\cdot\nabla n
\end{aligned}
$$

avec pour l'application numérique$\nu_l = 10^{-8}$ et $\nu_s = 10^{-5}$, $F_5 = F_8 = 3.10^{-4}$et $F_6 = F_7 = 6.10^{-4}$, $D_{neo} = \chi_{neo} = 1$ et $D_i = \chi_i = 4$, $D_\varepsilon = 3.10^{-6}$, $\eta = q^2$ et $N = 25$. Les valeurs des paramètres intrinsèques au modèle (q, k_0, g) sont conservées identiques à celles du chapitre précédent.

Terminologie Dans ce chapitre, les écoulements de grande échelle seront étudiés sous deux formes distinctes. $\Phi_{V_E'}$ correspond au cisaillement moyen, mais le terme flux zonaux désignera la différence $\overline{\Phi} - \Phi_{V_E'}$ tandis que $\overline{\Phi}$ représentera par conséquent la somme des deux grandeurs. En effet, les flux zonaux disparaissent par nature lorsqu'il n'existe plus de turbulence, ce qui n'est pas le cas de $\overline{\Phi}$ dans notre système : la distinction est donc nécessaire.

3.2.2 Observations numériques

Pour reproduire le mécanisme de transition, la source d'énergie est progressivement amplifiée via q_1, en trois étapes : la première consiste à utiliser le paramètre de chauffage $q_1 = 3$, celui-ci est augmenté linéairement jusqu'à 6 durant la seconde étape, puis gardé constant durant la dernière phase. Dans la suite de ce chapitre, le niveau de turbulence est calculé de manière simplifiée selon l'expression $\varepsilon(r) = 0.05\sum_{n=6}^{9}\Phi_n^2$. Les échelles d'injection étant majoritairement responsables du transport et largement dominantes en général, cette simplification n'induit aucune modification dans la dynamique du système. La normalisation entre les deux parties du modèle est choisie telle que $\dfrac{\partial}{\partial t_{shell}} \to 1500\dfrac{\partial}{\partial t_{transport}}$ et la valeur $\eta = q^2$ est utilisée dans la suite de cette section.

3.2.2.1 Transition L-H avec augmentation rapide du chauffage

Dans un premier temps, les deux premiers intervalles sont choisis tels que leur durée soit égale à $\Delta t = 30$, le dernier courant jusqu'à la fin de la simulation. Sur la figure 3.2.1 est représentée l'évolution du cisaillement total $\overline{\Phi}$, de la turbulence $\varepsilon = \sum_n \Phi_n^2$, et de la pression, en fonction du rayon et du temps. Les valeurs de ces grandeurs sont indiquées par une échelle de couleurs. Sur ces trois graphiques, le passage d'un mode L à un mode H est clairement visible :

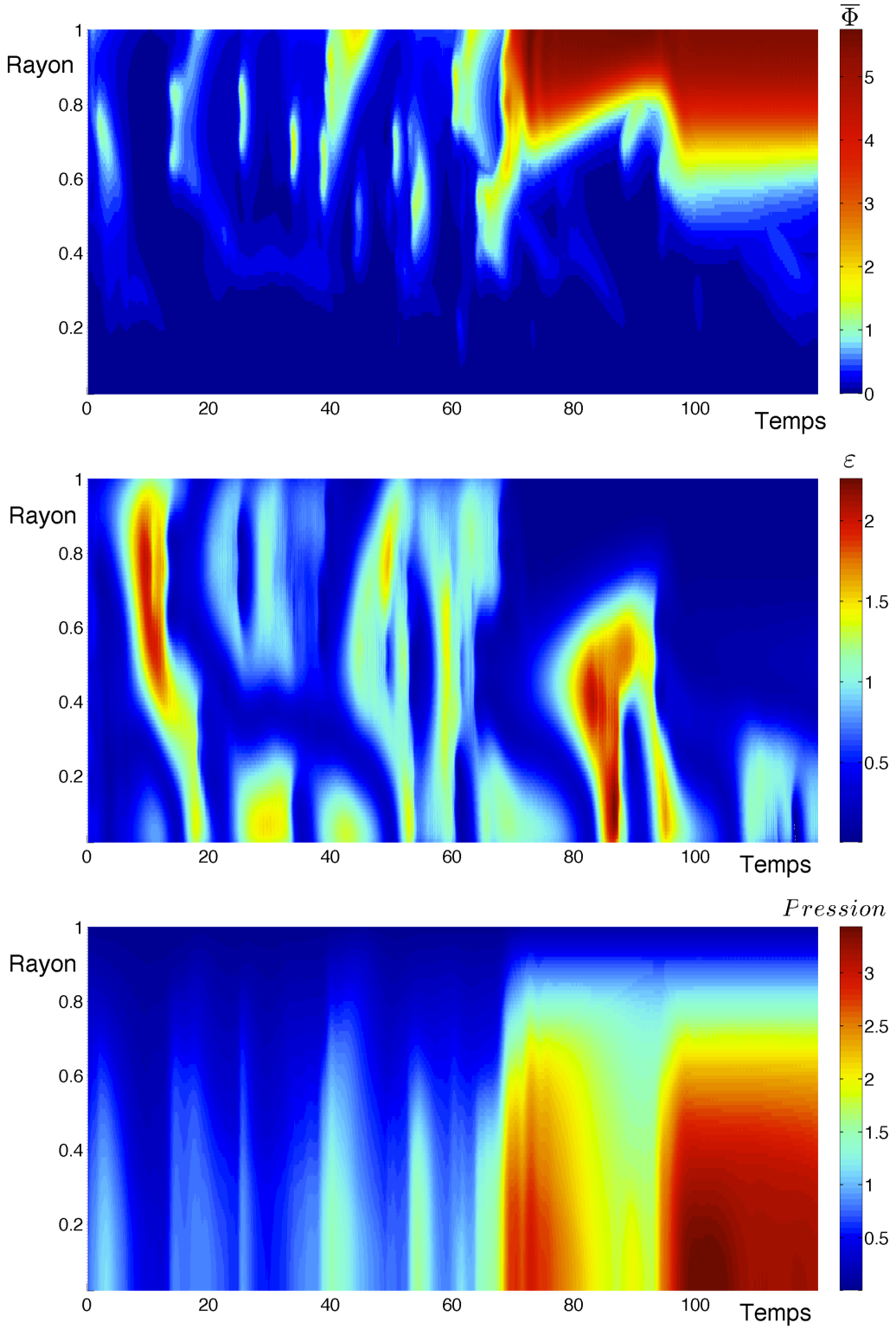


FIGURE 3.2.1: Représentation de la transition L-H "rapide" pour différentes grandeurs : cisaillement total en haut ($\overline{\Phi}$), turbulence au milieu, et pression en bas. Le paramètre de chauffage est fixé à $q = 3$ de $t = 0$ à $t = 30$ puis augmenté linéairement jusqu'à $q_1 = 6$ entre $t = 30$ et $t = 60$.

– une phase de fluctuation du cisaillement et de la turbulence, marquée par un cisaillement faible au bord, et par une turbulence relativement forte. Cette phase est relativement courte et le nombre d'oscillations assez réduit avant d'atteindre le "mode H".
– le passage à un mode de type H caractérisé par un fort cisaillement au bord, associé à une pression qui augmente rapidement (fort gradient), et à une turbulence très faible proche de $r_n = 1$. Ces éléments mettent en évidence la présence du piédestal.

L'apparition du piédestal marquant le passage à un mode H a lieu après un temps de latence court succédant à l'arrivée du système dans un état où $q_1 = 6$: alors que cette valeur est atteinte pour $t = 60$, le piédestal n'apparaît qu'après $t = 65$. Le système nécessite un court délai avant d'entrer dans son état final. L'augmentation du chauffage étant assez brusque, il est ici difficile de déceler l'existence d'une phase intermédiaire, ce qui incite à faire le rapprochement avec une transition de type "classique".

3.2.2.2 Transition L-H avec chauffage progressif

Dans ce paragraphe, une méthode différente de passage au mode H est "expérimentée". Les valeurs de q_1 sont toujours identiques à celle du paragraphe précédent pour chacun des paliers de chauffage, mais la durée de chaque étape est allongée à $\Delta T = 80$, d'où l'intitulé de "chauffage progressif". Cette méthodologie provoque l'apparition d'oscillations plus nombreuses lors de la phase de transition qui est plus longue (q_1 étant augmenté presque trois fois plus lentement que dans le cas précédemment étudié). Contrairement au comportement observé lors de l'augmentation rapide du chauffage qui montre une transition assez brutale, le système présente ici une phase intermédiaire marquée. Celle-ci peut s'apparenter au phénomène de "dithering transition" ou "I Phase", dont les références dans la littérature sont nombreuses au niveau expérimental [72, 40, 46, 41, 73]. Sur la figure 3.2.2 (en haut), l'existence de cette phase transitoire est clairement discernable lors de la phase de chauffage entre $t = 80$ et $t = 160$. Elle se manifeste par l'apparition d'oscillations d'amplitude localement plus élevée que lors de la phase précédente, avant que le système atteigne le mode H en $t = 209$. L'évolution de la pression est visible sur la figure 3.2.3, sur laquelle les trois phases de la transition apparaissent. Le profil radial de la pression peut ainsi adopter différentes configurations dont trois exemples sont représentés sur la figure 3.2.4 (en haut) : les modes associés à chaque phase sont facilement identifiables. L'existence de différents types de profils lors de l'augmentation du chauffage a par exemple été constatée sur le tokamak TCV [74].

Au milieu de la figure 3.2.4, l'intensité de la turbulence (en bleu) et de $\overline{\Phi}$ (en rouge) est tracée en fonction du temps : ces valeurs sont moyennées sur la portion proche du bord de $r_n = 0.8$ à $r_n = 1$. Les trois phases sont là aussi reconnaissables : l'amplitude des oscillations augmente distinctement lors du chauffage. La transition semble être précédée par une période "d'accalmie" trompeuse, qui s'explique par une re-localisation des oscillations vers une zone plus éloignée du bord en $r_n < 0.8$ La transition est, quant à elle, soulignée par une forte amplification du cisaillement, alors que l'amplitude des oscillations est considérablement atténuée pour les deux grandeurs au niveau du piédestal. Le mécanisme oscillatoire à l'oeuvre lors de la phase intermédiaire semble suivre le schéma général reproduit en bas de la figure 3.2.4. Il se compose des étapes suivantes :

1. La turbulence d'onde de dérive croît lorsque le niveau de $\overline{\Phi}$ est faible.

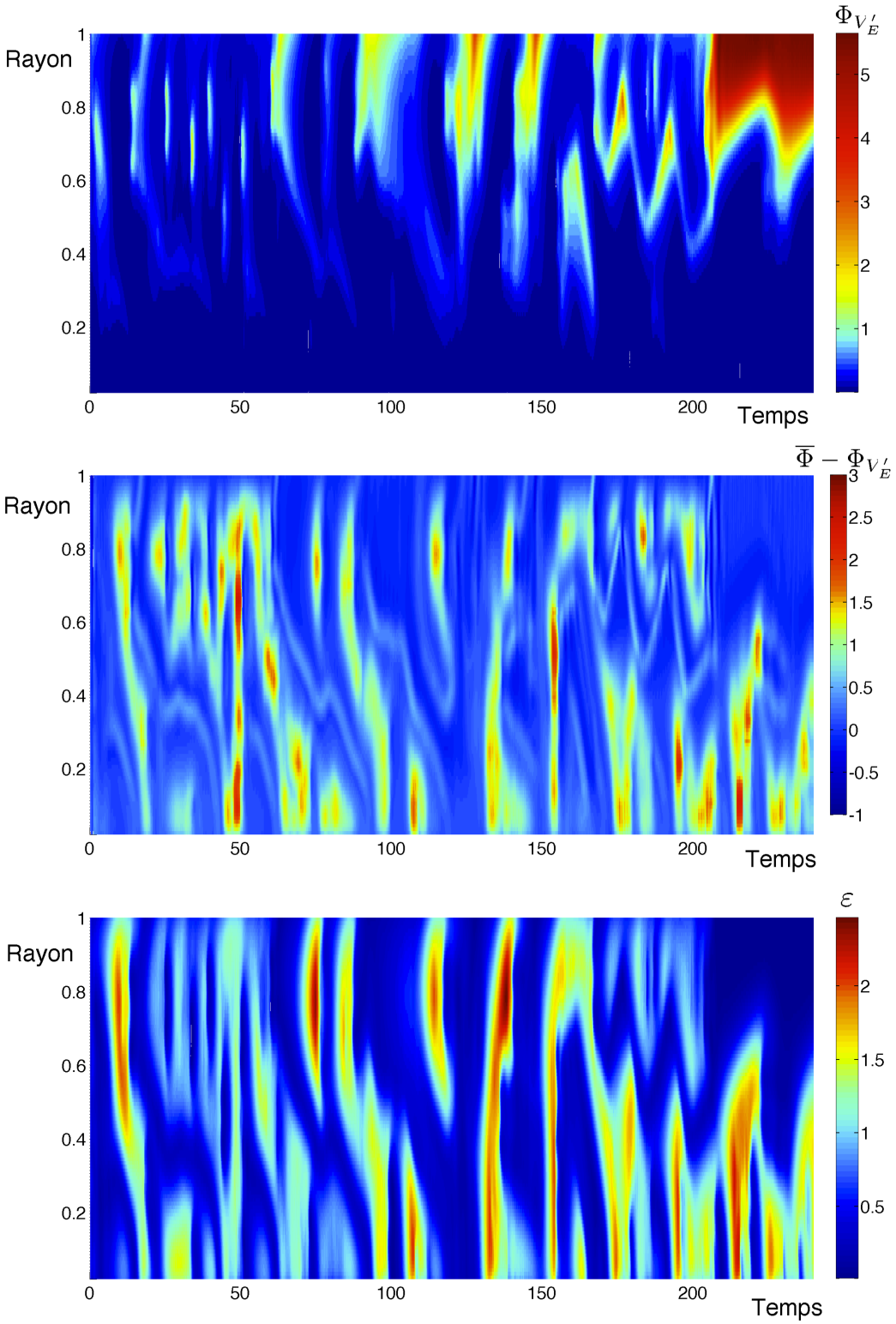


FIGURE 3.2.2: Représentation de la transition L-H "progressive" : le cisaillement $\overline{\Phi}$ (en haut), puis les flux zonaux $(\overline{\Phi} - \Phi_{VE'})$ (au milieu), et enfin turbulence en 2D (en bas). Le paramètre de chauffage est fixé à $q_1 = 3$ de $t = 0$ à $t = 80$ puis augmenté linéairement jusqu'à $q_1 = 6$ entre $t = 80$ et $t = 160$.

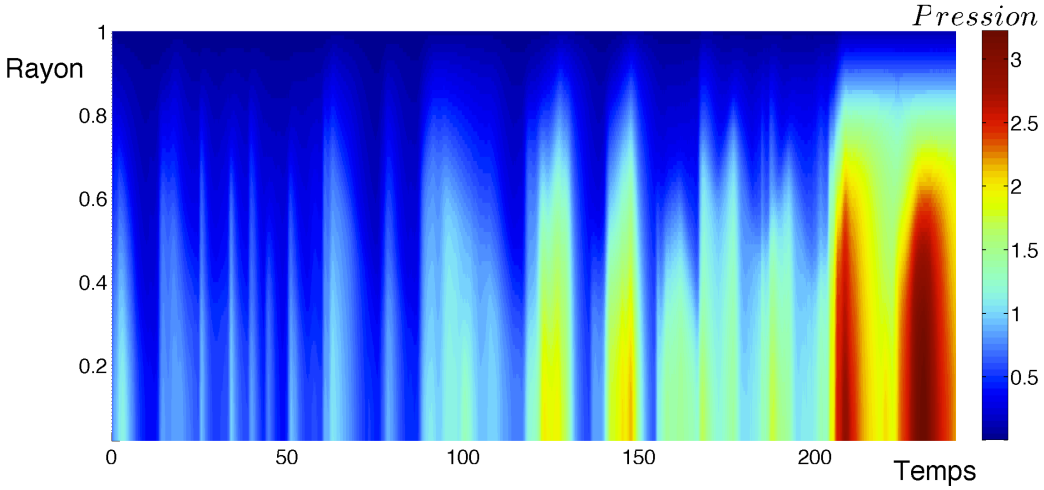


FIGURE 3.2.3: Représentation de la transition L-H "progressive" : évolution du profil radial de la pression.

2. Le niveau de flux zonaux $\overline{\Phi} - \Phi_{V_E'}$ augmente avec un très léger déphasage se "nourrissant" des interactions non linéaires entre les couches turbulentes. A ce stade, le cisaillement issu de l'équilibre radial est encore faible, c'est donc les flux zonaux qui provoquent la diminution immédiate du niveau de turbulence.
3. Le niveau moindre de turbulence permet la formation de gradients de pression et de densité plus abrupts, ce qui mène à la hausse du cisaillement moyen. Il est important de noter que le flot moyen voit son niveau augmenter en raison de la diminution de la turbulence, mais n'est pas à l'origine de cette chute. **Ce n'est pas le flot moyen qui "absorbe" la turbulence, au contraire des flux zonaux,** même s'il contribue à empêcher la turbulence de se développer.

Ce comportement est en partie équivalent aux résultats obtenus avec le modèle proposé par Miki et al. [45]. Dans ce dernier, la distinction est faite d'emblée entre le cisaillement moyen ("mean flow") et les flux zonaux, qui jouent le rôle de deux prédateurs en compétition. A la transition, une montée brutale du cisaillement moyen et une chute de la turbulence sont également observées par Miki. La différence réside principalement dans la présence de flux zonaux après la transition, alors que dans notre cas, l'absence d'oscillations après la transition indique vraisemblablement une disparition quasi-totale des flux zonaux au niveau du piédestal. Le cisaillement est alors uniquement issu de l'équilibre radial et non des interactions non linéaires avec la turbulence alors inexistante dans le piédestal.

Propagation des structures de grande échelle (flux zonaux et cisaillement moyen)
Les mesures expérimentales récentes ont permis de mettre en évidence la propagation des flux zonaux ou des "schémas oscillatoires". Dans le tokamak DIII-D, Schmitz et al. [46] observent une propagation radiale vers l'intérieur du tokamak, lors du cycle limite d'oscillations entre turbulence et flux zonaux. Au contraire, Estrada et al. [70] rapportent une propagation radiale des oscillations majoritairement vers l'extérieur, même si une propagation vers l'intérieur peut aussi apparaître plus rarement après un temps sans oscillations. Les observations numériques basées sur notre modèle ne permettent pas d'établir une

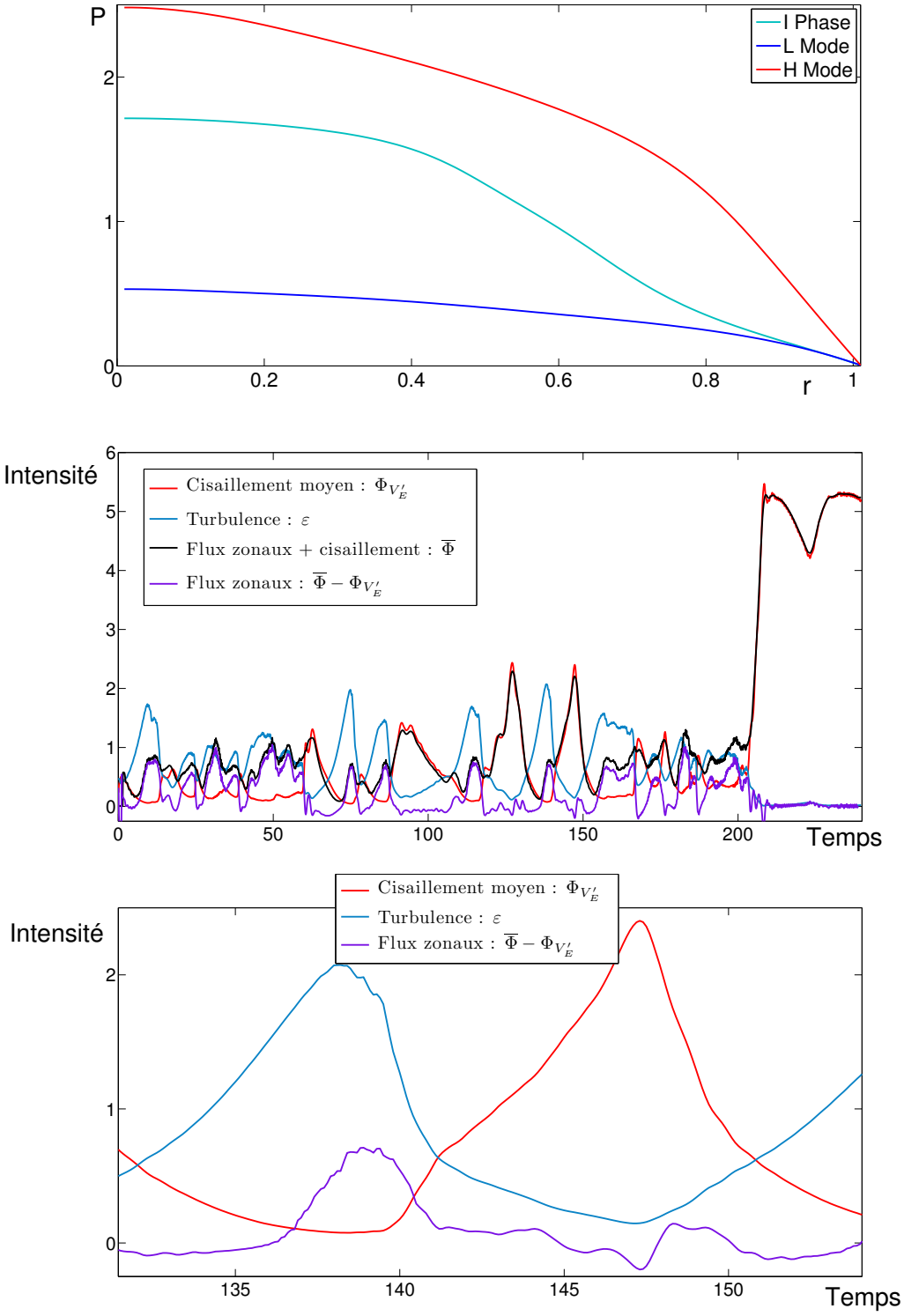


FIGURE 3.2.4: Représentation de la transition L-H "progressive" : exemples de profils radiaux de pression pour chacune des phases (en haut), interactions prédateurs-proies entre la turbulence, le cisaillement moyen $\Phi_{VE'}$, le cisaillement total $\overline{\Phi}$ et les flux zonaux $\Phi_{VE'} - \overline{\Phi}$ (au milieu). Ces grandeurs sont intégrées de $r_{\mathrm{n}} = 0.8$ à $r_{\mathrm{n}} = 1$. En bas, la figure représente un zoom sur une oscillation lors de la phase de chauffage.

tendance "universelle". Lors de la transition courte, la figure 3.2.1 (en haut) montre un déplacement vers l'extérieur juste avant la transition, entre $t = 70$ et $t = 85$. Dans le cas de la transition progressive il est difficile de déceler une tendance de propagation pour les flux zonaux $\overline{\Phi} - \Phi_{VE'}$ uniquement (cisaillement moyen exclu). En ce qui concerne le flot moyen, une propagation vers l'extérieur semble avoir lieu notamment lors des deux dernières oscillations importantes juste avant la transition, visibles sur la figure 3.2.2 (au milieu). La propagation externe semble donc être privilégiée dans le système modélisé.

Mise en évidence du rôle des flux zonaux dans le déclenchement de la transition L-H Dans ce paragraphe, nous choisissons volontairement une valeur a priori sous-critique de chauffage final $q_1 = 4.5$, c'est-à-dire pour laquelle la transition n'est pas immédiate. L'objectif consiste à déterminer si un délai suffisamment long laisse émerger de manière exceptionnelle des oscillations d'une amplitude assez importante pour permettre au système de basculer dans une configuration avec la présence d'un piédestal. Les observations obtenues sont reportées sur la figure 3.2.5. Dans ce cas, la première transition n'a lieu qu'après un délai supérieur à 130 unités de temps consécutives à l'arrivée du chauffage à son maximum ($t_{q_{max}} = 160$), c'est-à-dire après $t = 250$. L'augmentation importante du temps nécessaire à la transition confirme au contraire le rôle crucial des flux zonaux dans l' "allumage" de la transition puisque un évènement d'une amplitude plus grande, et donc plus rare, est nécessaire. Ce mécanisme de déclenchement est souligné assez largement par les observations des transitions L-H rapportées dans la littérature de ces dernières années [75, 40, 76, 77, 41, 46].

Influence de la diffusion radiale de la turbulence sur la réduction de la taille du piédestal et sur la transition H-L Il est instructif d'analyser le comportement du système ultérieurement à la phase de chauffage que nous venons d'observer sous le jour du déclenchement de la transition. Sur la figure 3.2.5, il est clair que la largeur du piédestal est réduite progressivement jusqu'à disparition complète en raison de la propagation progressive de la turbulence vers l'extérieur. Ces deux phénomènes sont complètement synchronisés. A chauffage plus élevé, en reprenant $q = 6$, la suppression de la barrière de transport n'est pas totale, mais subit malgré tout une réduction jusqu'à être confinée sur le bord. Un phénomène similaire a été observé expérimentalement par Estrada et al. [70] sur le tokamak TJ-II, et vient conforter l'hypothèse plaçant la diffusion radiale de la turbulence comme acteur important de la réduction du piédestal et de la transition retour vers le mode L.

Evolution des spectres de l'intensité de la turbulence durant la transition L-H Le modèle de transport multi-couches nous donne l'opportunité de mesurer les spectres de l'intensité de la turbulence lors de la transition, ce qui n'était pas possible avec les modèles de transition existant jusqu'ici. Sur la figure 3.2.6 est représenté le spectre moyenné sur la largeur du piédestal avant et après la transition. Cette figure montre une diminution claire des fluctuations au niveau des échelles d'injection entre le cas correspondant au mode L (en bleu) et H (en rouge). L'augmentation est nette au niveau des échelles d'injection, en raison d'un affaiblissement de la pente. Ces observations confirment les résultats obtenus dans le chapitre précédent, c'est-à-dire le rôle joué par les flux zonaux et les flots cisaillés dans le transfert d'énergie des grands k vers les petits k. A notre connaissance, la seule

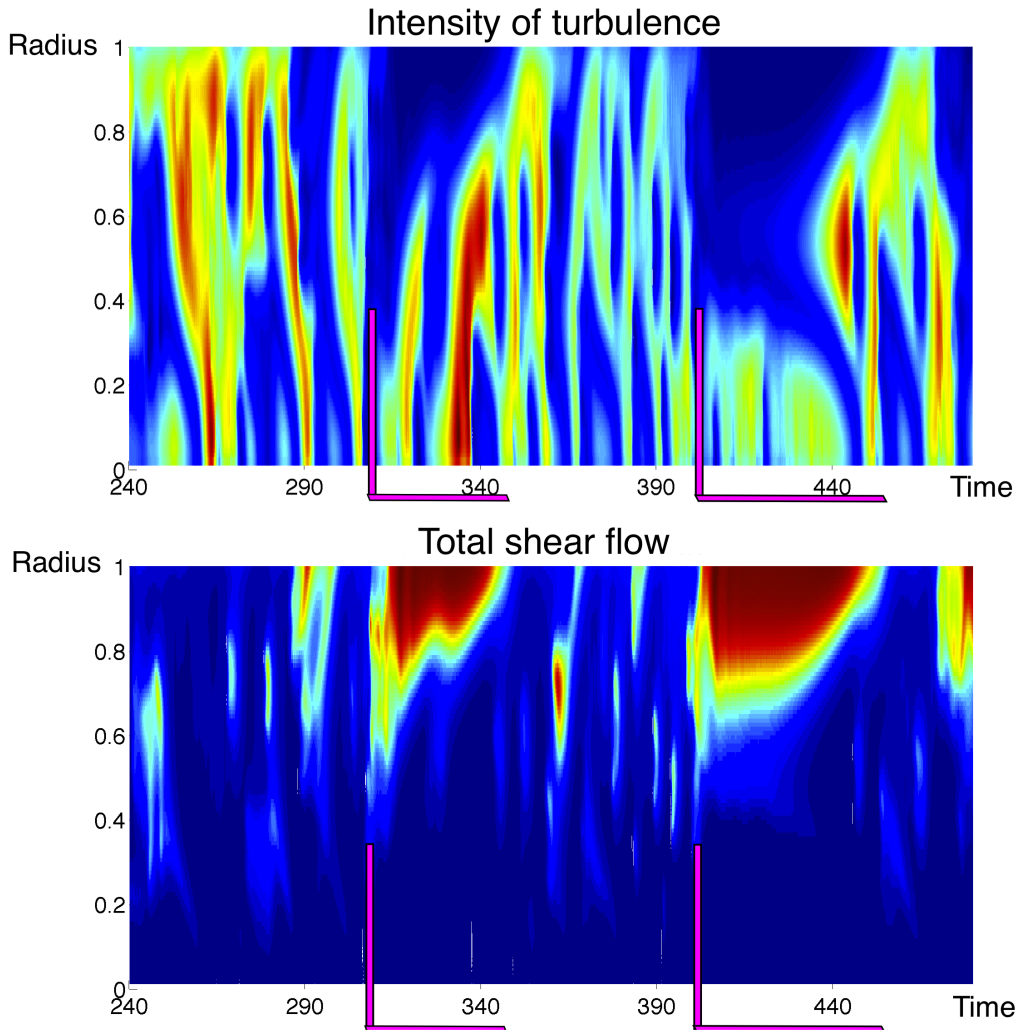


FIGURE 3.2.5: Rôle des flux zonaux et de la diffusion radiale de la turbulence lors des transitions L-H et H-L - Avec $q_1 = 4.5$ la transition se produit lorsqu'une oscillation suffisamment violente permet d'obtenir un cisaillement de vitesse radiale intense. L'injection d'énergie n'étant pas assez intense, la phase de diffusion radiale de la turbulence qui s'ensuit, indiquée par les barres violettes, réduit la largeur du piédestal jusqu'à sa disparition complète.

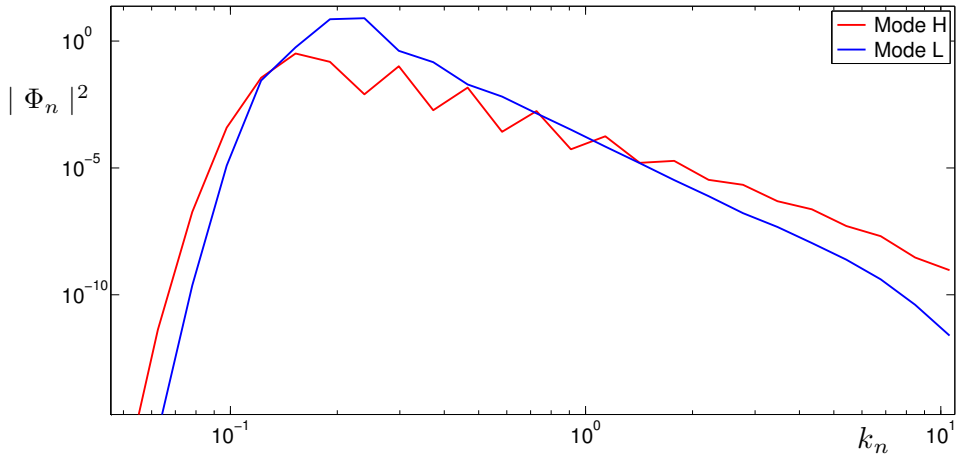


FIGURE 3.2.6: Spectres de l'intensité de la turbulence intégrée de $r_n = 0.8$ à $r_n = 1$. La courbe bleue représente le spectre en k de $\Phi_n\Phi_n^*$moyenné entre les temps $t = 160$ et $t = 180$ (avant la transition). La courbe rouge correspond au même spectre mais moyenné entre les temps $t = 220$ et $t = 240$ (après la transition).

étude expérimentale comportant la comparaison de spectres de fluctuations lors des deux modes est la réf. 78. Les auteurs y soulignent la sélectivité par échelles de la réduction de la turbulence : la pente mesurée en mode H au-delà de $k_\perp\rho_s = 1$ est fortement atténuée. Néanmoins, il n'est pas possible de tirer de conclusion définitive puisque l'étendue spectrale des données est limitée.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit en deux étapes un modèle 1D de transition L-H couplant transport radial et échanges dans l'espace de Fourier, comprenant la cascade locale et les interactions entre échelles disparates.

La première étape, consistant à étudier la transition L-H à partir du transport uniquement, nous a permis de reproduire les comportements typiques de la transition sous ses diverses formes : transition "dure", douce de premier ordre et de second ordre. Il nous a ainsi été possible d'étudier le type de transition dans l'espace des paramètres, nous permettant de faire certaines analogies avec des observations expérimentales concernant plusieurs tokamaks. L'influence de la non-localité de la turbulence sur la transition a pu être également mise en évidence. La forme des profils radiaux de pression/densité affiche clairement une dépendance à l'intensité de la diffusion de la turbulence, mais cette dernière agit surtout sur la valeur critique du chauffage nécessaire pour effectuer la transition.

La seconde partie du chapitre a consisté à associer le modèle en couches au modèle de transport. Le modèle couplé ainsi obtenu unit donc les caractéristiques spectrales de l'équation d'Hasegawa-Mima généralisée, en tant que modèle reduit des ondes de dérive, à l'évolution spatiale (radiale) du transport de particules et de chaleur. Il diffère donc significativement des modèles existants capables de reproduire une transition entre deux

configurations différentes de confinement, ajoutant un niveau supplémentaire de description dans l'espace de Fourier. A chaque point de l'espace discrétisé, nous associons donc un modèle en couches complet déterminant l'intensité de la turbulence qui rétroagit sur le transport de chaleur et de particules. Ce modèle multi-couches nous a permis de mettre en évidence une dynamique riche et réaliste d'échange entre la turbulence et les flux zonaux. Au niveau de la transition, l'existence d'une phase intermédiaire, similaire à celle observée sur de nombreux tokamaks, a été reproduite par notre modèle lors d'un chauffage progressif. Les points communs résident principalement dans l'amplification des flux zonaux précédant la transition vers le mode H. Après la transition, le passage à une configuration de fort cisaillement au bord et de faible turbulence a également été reproduit. Grâce au caractère multi-couches du modèle, nous avons pu constaté l'évolution du spectre de l'énergie turbulente lors de la transition. Cette observation confirme le rôle du cisaillement dans le transfert d'énergie des échelles d'injection vers les échelles de dissipation décrit dans le chapitre précédent, qui se traduit par un aplatissement du spectre.

L'importance de la diffusion radiale turbulente a, là aussi, été mise en avant via le mécanisme de réduction et de suppression du piédestal observé en étudiant le comportement à $q_1 \approx q_c$, hypothèse renforcée par l'existence d'observations similaires dans la littérature. Le rôle de déclencheur joué par les flux zonaux, évoqué lui aussi largement ces dernières années, a aussi été reproduit par notre modèle couplé transport radial / échange spectraux.

Au delà de cet aspect concernant les interactions turbulence/flux zonaux/cisaillement moyen qui révèle une dynamique riche, le modèle établi ouvre aussi la voie à un nouvel angle d'étude de la transition L-H. En effet, nous disposons à présent de la possibilité d'évaluer le taux de dissipation turbulente pour les modes L et H mais également pendant la phase de transition. Cette ouverture nous permettra notamment de faire le rapprochement avec la production d'entropie turbulente, qui sera l'objet du chapitre suivant.

4 Production d'entropie

Dans ce chapitre, nous rappellerons dans un premier temps les grandes lignes de la notion d'entropie sous ses divers aspects. Nous chercherons à faire le lien entre la production d'entropie et les flux de chaleur /particules, néoclassiques et turbulents, puis entre la production d'entropie turbulente et la dissipation d'énergie. A chacune de ces étapes, nous mesurerons la production d'entropie à partir du modèle couplé établi au chapitre précédent. Enfin, nous discuterons du principe de production maximale d'entropie, en nous efforçant de juger de sa pertinence dans la détermination du mode de confinement, à partir des équations de transport de notre modèle.

4.0.3 Entropie : le manque d'information peut-il constituer une information ?

4.0.3.1 L'entropie en thermodynamique

Historiquement, la notion d'entropie, ou plus exactement de variation de l'entropie, fut associée au second principe de la thermodynamique affirmant l'irréversibilité des phénomènes physiques réels, ce qui mène à l'énoncé "entropique" bien connu du principe de Clausius :

"L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter"

ce qui souligne qu'une diminution d'entropie est nécessairement associée à un apport externe de travail. De manière générale, elle est interprétée comme *une grandeur qui caractérise le niveau de désordre d'un système physique*, et tire ses origines du mot grec *"tropos"* signifiant transformation, changement. D'autre part, l'entropie fut définie plus rigoureusement par Clausius sous la forme d'une variation de fonction d'état :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{4.0.1}$$

où dS représente la variation d'entropie dans le système considéré pendant la transformation, δQ la quantité de chaleur échangée, et T la température du système.

4.0.3.2 Théorie de l'information et physique statistique

Dans un cadre plus large, il est possible de définir une entropie équivalente à cette mesure du désordre à l'aide de la théorie de l'information. Il s'agit alors d'information manquante ou perdue, qui s'exprime sous la forme suivante :

$$I = -k_B \sum_i^N P_i \ln(P_i) \tag{4.0.2}$$

Ici, P_i correspond à la probabilité pour le système considéré de se trouver dans une configuration i, et N est le nombre total de configurations possibles. La constante de Boltzmann K permet de donner à I la dimension de l'entropie. A partir de cette grandeur, appelée entropie de Shannon, il devient possible de faire le lien avec l'expression de l'entropie statistique. En effet, en considérant un système à l'équilibre, tous les états du système sont équiprobables : $P_i = 1/N$ et donc $I = k_B \ln(N)$. La même démarche s'applique en considérant un macro-état pour lequel l'énergie interne peut se répartir selon $\Omega(E)$ micro-états accessibles au système. Lorsque tous ces micro-états sont équiprobables, l'information perdue correspond à :

$$I = S = k\ln(\Omega(E))$$

A l'aide de la formule établie pour la physique statistique, la formule de Sackür-Tetrode peut être retrouvée, formalisant ainsi cette quantité de manière thermodynamique pour un gaz parfait :

$$S(V) = Nk_B \ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}Nk_B\left[\frac{5}{3} + \ln\left(c_0 T\right)\right] \tag{4.0.3}$$

avec $c_0 = \dfrac{2\pi k_B}{h^2}$ où k_B est la constante de Boltzmann et h la constante de Planck.
La formule de Sackür-Tetrode nous permet de considérer l'entropie spatiale, mais il est aussi possible de tenir compte de la vitesse des particules en définissant une entropie se rapportant plus explicitement à l'espace des phases. Le moyen le plus simple et direct pour la définir revient à utiliser la fonction de distribution, qui nous permet de définir une densité "d'entropie des vitesses" en un point x :

$$S_v(x) = -\int f(\mathrm{x},\ \mathrm{v})\ln f(x,\, v)dv$$

L'entropie d'un espace déterminé s'écrit donc :

$$S = -\int f(\mathrm{x},\ \mathrm{v})\ln f(x,\, v)dvdx \tag{4.0.4}$$

En s'appuyant sur ces définitions, une réponse partielle peut-être apportée à la question posée en tête de section. L'entropie telle que définie ici apporte effectivement une information valorisable, sinon cruciale. Son maximum étant associé à la notion d'équilibre d'un système isolé, il s'agit donc d'une mesure incontournable pour quantifier les scénarii envisageables d'évolution d'un système fermé. Lorsque la production d'entropie est directement associée aux collisions, cette grandeur revêt donc un intérêt physique. Cependant, il faut rester vigilant quant à la manipulation d'entropies dont la définition reste large, telle que "l'entropie de grille/grain" (*coarse grain entropy* en anglais) que nous allons introduire par la suite. Il est en effet indispensable de s'assurer d'une bonne correspondance avec les grands principes rappelés en ce début de chapitre. Pour que la notion d'entropie conserve son sens physique, la fonction de distribution doit nécessairement rester proche de la distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann, et le système doit de manière plus générale pouvoir être considéré comme à l'équilibre au moins localement.

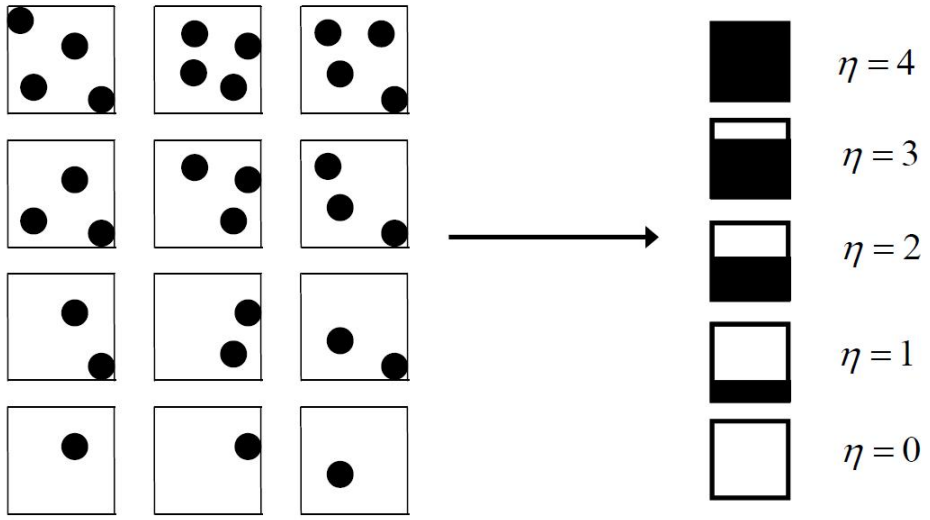


FIGURE 4.0.1: Vision simplifiée du concept d'entropie de grain : à gauche l'information permet de distinguer la position des billes, alors qu'à droite seul le taux de remplissage est connu après granularisation. De l'information a été perdue : l'entropie du système dépend donc du niveau de détail du moyen descriptif retenu.

4.0.3.3 Entropie de grain

L'entropie au sens classique du terme, dans les formules 4.0.3 et 4.0.4, repose sur l'action des collisions. Ainsi, selon cette définition, la production d'entropie dans les plasmas non collisionnels est considérée comme nulle. Cependant, il est possible de définir l'entropie de manière plus large, en fixant une échelle au delà de laquelle l'information est dégradée, perdue, faute de résolution. Tous les phénomènes physiques ayant la capacité de transmettre de l'information à des échelles en deçà de cette limite sont donc susceptibles de produire de l'entropie de grain. Au niveau cinétique, l'augmentation de l'entropie de grain correspond à la ramification de la fonction de distribution dans l'espace des phases, ce qui équivaut à perdre de l'information lorsque des structures créées par f sont trop fines pour être décrites avec le niveau de détail choisi. C'est la raison pour laquelle une modélisation numérique de l'équation de Vlasov (non collisionnelle) montre nécessairement une production d'entropie, contrairement à la constatation théorique, puisque la précision sur le couple position/vitesse ne peut être infini.

4.1 Production d'entropie

De manière générale, la production d'entropie peut s'exprimer sous la forme locale suivante :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sigma_{int} + \nabla \cdot \boldsymbol{J_s} \tag{4.1.1}$$

où σ_{int} est considérée comme la production d'entropie interne à un élément de matière et

où $\boldsymbol{J}_s$ correspond au flux net d'entropie à travers cet élément. La production interne peut s'exprimer comme une fonction de flux et de forces thermodynamiques respectivement dénommées $\boldsymbol{J}_i$ et $\boldsymbol{X}_i$. Ces flux $\boldsymbol{J}_i$ dépendent, selon les relations d'Onsager [79], de ces mêmes forces $\boldsymbol{X}$ selon la relation :

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_k L_{ik} \boldsymbol{X}_k$$

où les L_{ik} sont des coefficients, indépendants des forces et flux thermodynamiques, qui respectent le principe de symétrie d'Onsager $L_{ik} = L_{ki}$. Ces relations sont valides pour décrire la thermodynamique hors équilibre en avançant l'hypothèse d'équilibre local, valable dans la plupart des systèmes dominés par la physique classique. Il s'agit de la supposition qui sera retenue dans la suite de ce chapitre.

De manière plus spécifique, pour un milieu assimilé à un gaz parfait en équilibre local, nous pouvons nous baser sur l'expression de l'entropie établie par la formule de Sackür-Tetrode :

$$S(V) = Nk_B \ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2} Nk_B \left[\frac{5}{3} + \ln\left(c_0 T\right)\right]$$

En définissant $\dfrac{\partial s}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{S(V)}{V}$, où s est l'entropie volumique, l'expression suivante est obtenue facilement :

$$s = -n\ln(n) + \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}n\ln\left(c_0 T\right)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left[\frac{\partial n}{\partial t}\left(\frac{3}{2}\ln\left(c_0 T\right) - \ln\left(n\right)\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial t}\right] \tag{4.1.2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t}\left(\frac{3}{2}\ln\left(c_0 T\right) - \ln\left(n\right)\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial t}$$

Puisque le but est ici d'exprimer la production d'entropie interne, il vient par conservation du flux :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{\Gamma}_n$$
$$\frac{3}{2}\frac{\partial P}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{Q}_p$$

et donc

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{\Gamma}_n \left(\frac{3}{2}\ln\left(c_0 T\right) - \ln\left(n\right)\right) - \frac{1}{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{Q}_p$$

En reformulant cette expression pour la mettre sous la forme de l'équation (4.1.1) :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\boldsymbol{\Gamma}_n\left(\frac{3}{2}\ln\left(c_0T\right)-\ln\left(n\right)\right)-\frac{1}{T}\boldsymbol{Q}_P\right) - \left(\boldsymbol{Q}_P-\frac{3}{2}T\boldsymbol{\Gamma}_n\right)\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T^2}-\boldsymbol{\Gamma}_n\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}n}{n}$$

d'où s'identifie facilement la production interne :

$$\sigma = -\left(\boldsymbol{Q}_P-\frac{3}{2}T\boldsymbol{\Gamma}_n\right)\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T^2}-\boldsymbol{\Gamma}_n\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}n}{n} \tag{4.1.3}$$

et le flux d'entropie :

$$\Gamma_s = -\boldsymbol{\Gamma}_n\left(\frac{3}{2}\ln\left(c_0T\right)-\ln\left(n\right)\right)-\frac{1}{T}\boldsymbol{Q}_P \tag{4.1.4}$$

La production d'entropie volumique est fonction des flux thermodynamiques $\boldsymbol{\Gamma}_n$, $\boldsymbol{Q}_P$ et des gradients des grandeurs qui y sont respectivement associées n, P. Il suffit donc d'intégrer ce résultat sur un volume donné pour parvenir au taux de production interne total du système, ce qui donne dans le cadre de notre modèle :

$$\dot{S}_i = -\int_{r=0}^{r=1}\left[\left(\boldsymbol{Q}_P-\frac{3}{2}T\boldsymbol{\Gamma}_n\right)\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T^2}+\boldsymbol{\Gamma}_n\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}n}{n}\right]rdr \tag{4.1.5}$$

Il s'agit ici d'un cas particulier de l'expression plus générale de la production d'entropie dérivée dans Garbet et al. [80], pour un index adiabatique de 5/3, c'est-à-dire celui d'un gaz parfait monoatomique. La production de cette entropie lors de la transition observée dans notre modèle couplé, en reprenant le cas du chauffage progressif exposé en 3.2.2.2, correspond à la courbe noire de la figure 4.1.1. Son niveau fluctue lors de la phase de pré-transition et de chauffage, puis se stabilise à son niveau minimal en mode de confinement amélioré.

4.1.1 Production d'entropie de grain à partir de l'équation de dérive cinétique

Pour tenir compte des mécanismes à l'oeuvre dans les plasmas, il est pertinent de déterminer la variation d'entropie à partir de l'expression cinétique de l'entropie

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int f\ln(f)dv\right]$$

Toujours sous l'hypothèse d'un champ magnétique homogène, f peut être obtenue à partir de l'équation de dérive cinétique simplifiée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\parallel} f + \boldsymbol{V_E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} f + \frac{q}{m} \boldsymbol{E}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{v_{\parallel}} f = 0$$

En utilisant une fonction de distribution f définie de manière exacte dans un système fermé, la production d'entropie $\partial f / \partial t$ serait nulle : sans collision, la perte d'information est inexistante. Afin de quantifier cette perte d'information qui définit l'entropie, il nous faut donc appliquer un "filtre" sur l'espace des phases. Cette action détermine une échelle limite en dessous de laquelle la résolution n'est plus suffisante pour conserver l'information, provoquant donc une augmentation de l'entropie comme nous l'avons décrit dans la section 4.0.3.3. Pour ce faire, nous pouvons scinder la fonction de distribution en deux parties, moyenne et fluctuante : $f = \overline{f} + \tilde{f}$. L'entropie de grille définie comme

$$\overline{s} = -\int \overline{f} \ln(\overline{f}) dv$$

mesure la perte d'information contenue dans les fluctuations $\tilde{f}$, la partie moyennée n'étant pas à même de les décrire. La variation temporelle de cette grandeur s'exprime donc sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \overline{s}}{\partial t} = -\int \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \left(1 + \ln(\overline{f})\right) dv$$

Nous cherchons à calculer cette variation sous une forme proche de l'expression thermodynamique obtenue à l'équation (4.1.3), c'est-à-dire sous forme de flux associé à des gradients de pression ou de densité. Dans ce but, nous calculons d'abord $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\parallel} \overline{f} + \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} \overline{f} + < \tilde{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} \tilde{f} > + \frac{e}{m} \overline{\boldsymbol{E}}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{v_{\parallel}} \overline{f} + < \frac{e}{m} \tilde{\boldsymbol{E}}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{v_{\parallel}} \tilde{f} > = 0 \tag{4.1.6}$$

L'intégration de cette formule dans l'équation précédente donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{s}}{\partial t} = & \int \left(\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} \overline{f} + \boldsymbol{v}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\parallel} \overline{f}\right) \left(1 + \ln(\overline{f})\right) dv \\
& + \int \left(< \tilde{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} \tilde{f} > + < \frac{e}{m} \tilde{\boldsymbol{E}}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{v_{\parallel}} \tilde{f} > \right) \left(1 + \ln(\overline{f})\right) dv \\
& + \int \left(\frac{e}{m} \overline{\boldsymbol{E}}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{v_{\parallel}} \overline{f} \right) \left(1 + \ln(\overline{f})\right) dv
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial t} &= \int \left(\boldsymbol{\nabla}_\perp \cdot \left[\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{E}} \overline{f} \ln(\overline{f}) \right] + \boldsymbol{\nabla}_\parallel \cdot \left[\boldsymbol{v}_\parallel \overline{f} \ln(\overline{f}) \right] \right) dv \\
&+ \int \boldsymbol{\nabla}_\perp \cdot \left[< \tilde{\boldsymbol{V}}_E \tilde{f} > \left(1 + \ln(\overline{f})\right) \right] dv - \int \left(< \tilde{f} \tilde{\boldsymbol{V}}_E > \cdot \boldsymbol{\nabla}_\perp \ln(\overline{f}) \right) dv \\
&+ \int \left(\nabla_{v_\parallel} \cdot \left[\left(1 + \ln(\overline{f})\right) \frac{e}{m} < \tilde{\boldsymbol{E}}_\parallel \tilde{f} > \right] - < \frac{e}{m} \tilde{\boldsymbol{E}}_\parallel \tilde{f} > \cdot \boldsymbol{\nabla}_{v_\parallel} \ln(\overline{f}) \right) dv \\
&+ \int \boldsymbol{\nabla}_{v_\parallel} \cdot \left(\frac{e}{m} \overline{\boldsymbol{E}}_\parallel \overline{f} \ln(\overline{f}) \right) dv
\end{aligned}
$$

qui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial t} &= \nabla_\perp \cdot \boldsymbol{J}_{s\perp conv} + \boldsymbol{\nabla}_\parallel \cdot \boldsymbol{J}_{s\parallel conv} \\
&+ \nabla_\perp \cdot \boldsymbol{J}_{s\perp fluct} - \int < \tilde{f} \tilde{\boldsymbol{V}}_E > \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla_\perp n + \frac{1}{T} \left[-\frac{3}{2} + \frac{mv^2}{2T} \right] \boldsymbol{\nabla}_\perp T \right) dv \\
&- \int \left(\frac{e}{m} < \tilde{\boldsymbol{E}}_\parallel \tilde{f} > \cdot \frac{m \boldsymbol{v}_\parallel}{T} \right) dv
\end{aligned}
$$

où $\boldsymbol{J}_{s\perp conv} = \int \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{E}} \overline{f} \ln(\overline{f}) dv$ et $\boldsymbol{J}_{s\parallel conv} = \int \boldsymbol{v}_\parallel \overline{f} \ln(\overline{f}) dv$ peuvent être interprétés comme les flux convectifs d'entropie perpendiculaires et parallèles, et $\boldsymbol{J}_{s\perp fluct} = \int < \tilde{\boldsymbol{V}}_E \tilde{f} > \left(1 + \ln(\overline{f})\right) dv$ comme un flux d'entropie turbulent (dû aux fluctuations). Par ailleurs, $\int < \tilde{\boldsymbol{V}}_E \tilde{f} > \frac{mv^2}{2} dv = \boldsymbol{Q}_{P.turb}$ et $\int < \tilde{\boldsymbol{V}}_E \tilde{f} > dv = \boldsymbol{\Gamma}_{n.turb}$. En procédant alors de la même manière que précédemment, par séparation de la production interne et du flux d'entropie (équation 4.1.1), il vient :

$$
\sigma_{\overline{s}} = -\frac{1}{T^2} \left(\boldsymbol{Q}_{P.turb} - \frac{3}{2} T \boldsymbol{\Gamma}_{n.turb} \right) \cdot \nabla T - \frac{1}{n} \boldsymbol{\Gamma}_{n.turb} \cdot \boldsymbol{\nabla} n - < \tilde{E}_\parallel \cdot \tilde{J}_\parallel >
$$

Se limitant à la partie perpendiculaire, la seule conservée en se plaçant dans le contexte modèle radial du chapitre précédent, la production d'entropie totale se lit :

$$
\sigma_{\overline{s}tot} = -\int_{r=0}^{r=1} \left[\frac{1}{T^2} \left(\boldsymbol{Q}_{P.turb} - \frac{3}{2} T \boldsymbol{\Gamma}_{n.turb} \right) \cdot \boldsymbol{\nabla} T + \frac{1}{n} \boldsymbol{\Gamma}_{n.turb} \cdot \boldsymbol{\nabla} n \right] r dr
$$

Cette expression est à rapprocher de celle obtenue par Garbet et al. [81], qui est de forme similaire en ce qui concerne la composante perpendiculaire de la production d'entropie. Le résultat obtenu est aussi identifiable à l'équation établie précédemment (4.1.3) issue de la formule de Sackür-Tétrode, excepté le fait que seuls les flux de nature turbulente sont cette fois-ci pris en compte. Nous pouvons aussi faire le rapprochement avec les travaux de Rosenbluth et al. [82], qui proposent l'expression équivalente dans le cas néo-classique. Comme dans la section précédente, la production d'entropie de grain, due aux flux turbulents, est mesurée via le modèle couplé.

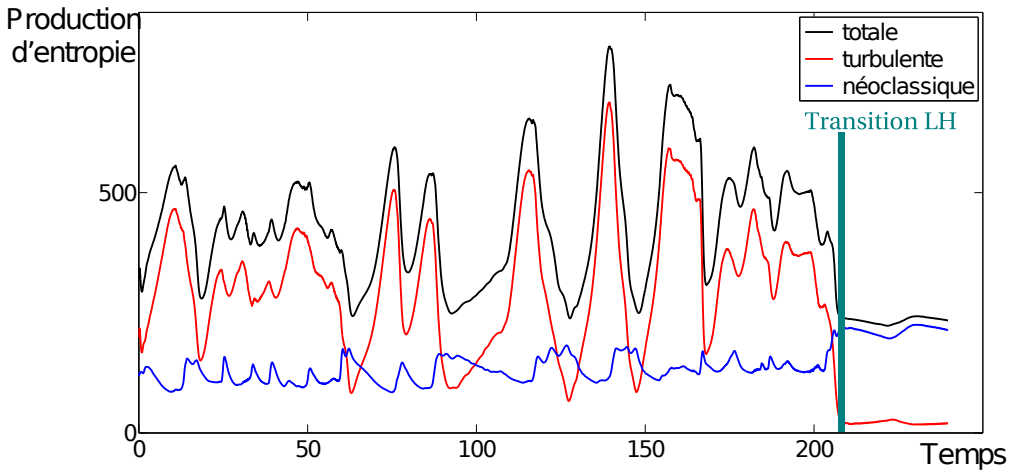


FIGURE 4.1.1: Production d'entropie issue des flux néoclassiques et turbulents lors de la transition L-H

Application numérique Le résultat, exposé sur la courbe rouge de la figure 4.1.1, montre une réduction de la production d'entropie après la transition. Les expressions des flux utilisées sont $\boldsymbol{Q}_{P.turb} = \chi_1 \varepsilon \nabla P$ et $\boldsymbol{\Gamma}_{n.turb} = D_1 \varepsilon \nabla n$. Les flux turbulents passent d'une contribution majoritaire à la production d'entropie, à une valeur quasi nulle en comparaison de l'apport de la partie néoclassique, qui assure alors la plus grande partie de la production d'entropie. Cette constatation peut s'expliquer logiquement par une très forte réduction de la turbulence après la transition, en particulier proche du bord externe. La contribution de cette zone est largement dominante en raison de l'intégration radiale en géométrie cylindrique, mais aussi parce qu'il y règne de forts gradients et de faibles valeurs de densité-température.

Production d'entropie de grain à l'ordre 2 La quantité d'information contenue dans la grille peut être augmentée pour obtenir une version plus détaillée de la production d'entropie de grain. Pour cela, la partie fluctuante $\tilde{f}$ est intégrée dans son expression. Nous proposons alors d'appliquer un développement de Taylor en $\tilde{f}/\overline{f}$ à l'ordre 2. Sous certaines hypothèses, cette démarche mène à l'expression suivante :

$$\sigma_{s2} = \boldsymbol{\Gamma}_{n.turb} \cdot \nabla \varepsilon + \boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon} \cdot \nabla n$$

où ce que nous nommerons flux de turbulence est défini par :

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon} = \left\langle \tilde{V}_E \frac{1}{2} \frac{\tilde{n}^2}{\overline{n}^2} \right\rangle$$

Les détails et hypothèses de cette dérivation sont présentés en annexe4.2.3.

4.1.2 Production d'entropie par dissipation indirecte de l'énergie cinétique turbulente

Nous avons jusqu'ici pris en compte la production d'entropie liée aux flux thermodynamiques, qu'ils soient générés de manière turbulente ou néoclassique. Cependant, il ne s'agit pas du vecteur unique de production d'entropie : celle-ci peut en effet avoir lieu également sous forme de dissipation d'énergie via la turbulence.

En se basant par exemple sur la définition fluide proposée notamment par Ozawa et al. [83], la production d'entropie s'écrit :

$$\dot{S}_{turb} = \int_V \left(-\frac{\boldsymbol{Q}}{T^2} \cdot \nabla T + \frac{\theta}{T} \right) dV$$

où θ représente la fonction de dissipation d'énergie cinétique. Le premier terme de production est lié au transfert thermique, abordé précédemment, tandis que le second représente donc la dissipation visqueuse ou turbulente à laquelle nous nous intéressons dans cette section. Notons qu'aucun transport de matière n'est considéré dans ce cas, d'où l'absence du second terme associé au flux de particules dans les définitions abordées précédemment. Nous nous intéressons à l'introduction du second terme qui correspond à la dissipation d'énergie turbulente dans notre modèle. Cette distinction entre les deux sources de production d'entropie est aussi appliquée dans les modèles de type $k - \varepsilon$ [84]. Dans cette dernière référence, la production d'entropie par dissipation se divise en deux parties : la dissipation "directe" et la dissipation "indirecte", dite aussi turbulente, qui s'exprime de la manière suivante :

$$\sigma_{diss} = \frac{n\tau_{diss}}{T}$$

où τ_{diss} est le taux de dissipation turbulente. Cette dissipation peut être "mesurée", à l'aide du modèle couplé mis en place au chapitre précédent, lors d'une transition entre deux modes de confinement. L'expression de τ_{diss} est alors choisie telle que $\tau_{diss} = \sum_{n_d}^{N} \nu_n \Phi_n \Phi_n^*$ où k_{n_d} correspond à la limite de la zone dissipative. Le terme de production dissipative d'entropie peut aussi être calculé à partir de la formule cinétique de l'entropie, comme le propose Klimontovich [85].

Lors de l'application à notre modèle, nous considérons l'hypothèse que $n_d = 21$, c'est-à-dire que l'entrée dans la zone dissipative s'effectue au delà de $k = 4$ ($k_{21} \approx 4.3$). Contrairement aux autres "formes" de production d'entropie étudiées au début de ce chapitre, la production d'entropie liée à la dissipation d'énergie turbulente subit une forte hausse lors de la transition (figure 4.1.2). Le mécanisme à l'origine de cette variation peut être clairement identifié : le fort cisaillement proche du bord provoque une augmentation du niveau des échelles dissipatives, comme l'illustre la figure 2.7.3. Le facteur n/T varie peu puisque la pression et la densité s'élèvent de manière équivalente lors de l'apparition de la barrière de transport externe. L'interprétation de cette hausse reste délicate. Le système, au-delà d'un certain afflux de puissance, essaye-t-il de parvenir à un comportement turbulent propice à une production d'entropie plus intense, aspirant ainsi à rejoindre l'équilibre plus rapidement, et donc une entropie maximale ? Nous envisagerons cette hypothèse dans la dernière section de ce chapitre.

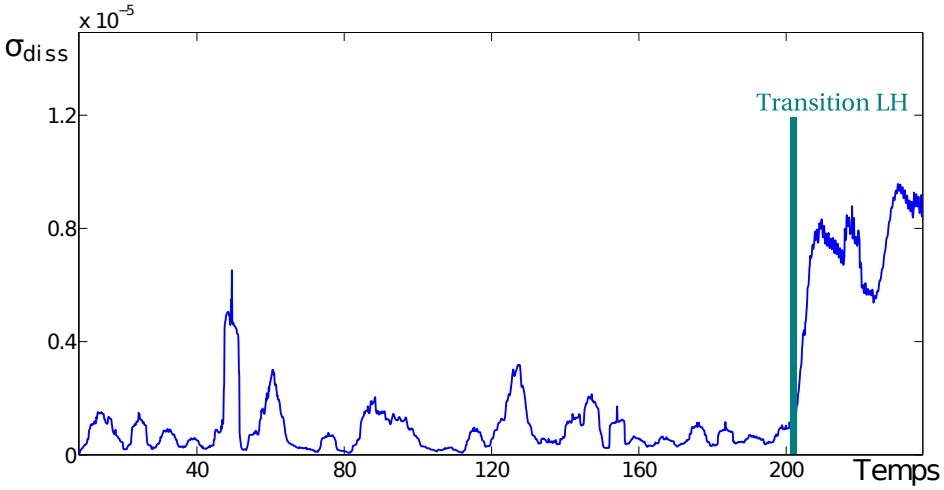


FIGURE 4.1.2: Production d'entropie de nature dissipative lors de la transition L-H

4.2 Principe de production maximale d'entropie (PPME)

Si le principe de production maximale d'entropie a été assez largement exploité, la justification de son utilisation fait encore débat. En effet, plusieurs tentatives ont été menées pour démontrer la validité de ce principe, mais aucune preuve n'est semble-t-il suffisante pour permettre de généraliser son usage. Nous aborderons entre autres les approches qui nous ont semblé les plus marquantes et la distinction indispensable entre le PPME et son apparent antonyme le principe de production minimale d'entropie.

4.2.1 Une des premières utilisations concrètes : le cas du climat terrestre

Le principe de production maximale d'entropie fut pour la première fois utilisé par Paltridge [86], qui obtint un certain succès auprès de sa communauté. Ce dernier l'appliqua au climat terrestre, qui met en jeu des échanges d'énergie entre l'atmosphère, les océans et le soleil. Une vision simplifiée du système étudié par Paltridge est illustrée figure 4.2.1 : à l'état stationnaire (mais hors équilibre), la Terre peut être considérée comme un réservoir chaud de température T_C, tandis que l'espace constitue un réservoir froid de température T_F, le Soleil étant une source d'énergie. Un flux F stationnaire s'établit donc entre ces réservoirs, ce qui permet d'établir une expression simplifiée de la production d'entropie : $\dot{S} = \frac{F}{T_F} - \frac{F}{T_C} = \frac{T_C - T_F}{T_F T_C}$. En complexifiant ce système global avec l'ajout de dix boîtes associées à des systèmes océaniques et atmosphériques de différentes natures, Paltridge établit des conditions d'équilibre et d'échanges énergétiques, chaque système "local" (boîte) étant en outre considéré comme à l'équilibre. Cependant, le système ainsi décrit laisse encore une inconnue et appelle donc à l'introduction d'une contrainte supplémentaire. Dans le but d'obtenir une solution réaliste et cohérente avec les observations, l'auteur définit cette nouvelle contrainte comme la maximisation de ce qui fut identifié

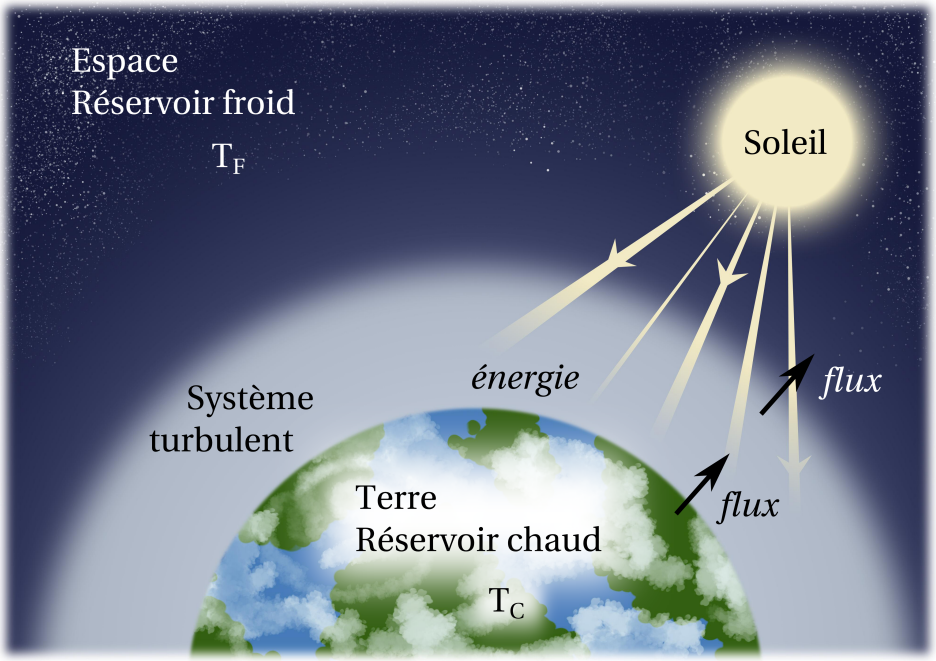


FIGURE 4.2.1: Illustration simplifiée du système étudié par Paltridge

plus tard comme la production d'entropie turbulente. Cette analyse fut confirmée dans la littérature ultérieure, apportant ainsi une certaine crédibilité à la vision de Paltridge. Des méthodes similaires furent employées dans de nombreuses disciplines, de la physique à la biologie en passant par la chimie, avec un succès variable [87, 88, 89, 86, 90, 91].

4.2.2 Formulation et justification du PPME

Intéressons nous ici à l'approche historique de Ziegler [92] qui formule le PPME de cette manière :

> Si une force irréversible X_i (ou un flux $\boldsymbol{J}_i$) est imposé(e) au système, le flux $\boldsymbol{J}_i$ (ou la force X_i), qui y est lié(e) par la relation $\sigma(\boldsymbol{J}_i) = \sum_i X_i \boldsymbol{J}_i$, maximise alors la production d'entropie.

où $\sigma(\boldsymbol{J}_i)$ représente la production d'entropie interne au système.
En s'appuyant sur cette formulation, cet énoncé peut se mettre aisément sous la forme mathématique suivante :

$$\delta_J \left(\sigma(\boldsymbol{J}_k) - \lambda \left(\sigma(\boldsymbol{J}_k) - \sum_i X_i \boldsymbol{J}_i \right) \right) = 0 \tag{4.2.1}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. Ce faisant, Ziegler avait pour objectif d'étendre à une vision thermodynamique le critère de Mises [93], qui s'applique à la théorie de la plasticité des matériaux. Ce principe stipule que le taux de dissipation d'énergie mécanique tend vers son maximum lors d'une déformation plastique, évidemment toujours sous

réserve de respecter les contraintes physiques. Ziegler prend pour base de travail les lois classiques de la thermodynamique hors équilibre global, et **supposant nécessairement un équilibre local**. L'expression proposée en (4.2.1) impose à $\sigma(\boldsymbol{J}_k)$ d'adopter un extremum, mais pas nécessairement un maximum. Il a été démontré [92] que, lorsque la relation entre flux $\boldsymbol{J}_i$ et forces X_i est unique, le seul extremum alors possible est un maximum. Le raisonnement repose sur la nécessité pour la production d'entropie d'être bornée par une valeur maximale, ce qui n'est pas le cas si le seul extremum est un minimum. . Cependant, si plusieurs X_i peuvent satisfaire au même $\boldsymbol{J}_i$, ce qui n'est pas exclu en soi, il n'est pas possible de conclure si l'extremum est un minimum ou un maximum.

Eléments de justification Les points qui suivent ne peuvent être considérés comme des preuves scientifiques formelles, mais viennent étayer le principe de production maximale d'entropie, en raison de leur compatibilité. De nombreuses compatibilités ou équivalences avec certains des principes de la thermodynamique hors équilibre viennent conforter le principe avancé par Ziegler. Il est possible de les lister comme suit en s'appuyant sur les arguments de Martyushev and Seleznev [87] :

- En supposant l'homogénéité de la production d'entropie en fonction des flux, et en linéarisant, ces deux principes deviennent équivalents.
- Dans le cas purement linéaire, le principe d'Onsager découle du principe de Ziegler.

Si le PPME dans la forme proposée par Ziegler ne laisse donc paraître aucune contradiction apparente avec la thermodynamique hors équilibre, il faut souligner qu'il souffre d'un manque d'universalité. D'autres tentatives de démonstration du PPME ont par ailleurs été réalisées en utilisant la physique statistique hors équilibre. Dans leur approche, Filyukov and Karpov [94] se placent dans un système hors équilibre stationnaire régi par des processus aléatoires et sans mémoire, assimilés à des processus de Markov. Sous cette hypothèse, il devient possible de définir une entropie d'évolution $S_E = -\sum_M \ln(P(C_M))P(C_M)$ liée à la probabilité $P(C_M)$ pour une chaîne de Markov d'avoir lieu. Cette dernière correspond à la probabilité de passer d'un état de départ E_d à un état final E_f via une chaîne de Markov spécifique C_M constituée au total de N étapes de transition intermédiaires. Cette probabilité est équivalente au produit de toutes les probabilités intermédiaires : $P(C_M) = P(E_d)\prod_i\prod_j p_{ij}^{n_{ij}}$, p_{ij} étant la probabilité de passer entre deux états intermédiaires E_i à E_j, et n_{ij} le nombre d'apparitions de cette transition dans la totalité de la chaîne. L'application du logarithme sur cette probabilité de chaîne mène à l'expression

$$\begin{aligned}\ln\left(P(C_M)\right) &= \ln\left(P(E_d)\right) + \sum_i\sum_j n_{ij}\ln(p_{ij}) \\ &\approx \sum_i\sum_j n_{ij}\ln(p_{ij}) = N\sum_i\sum_j p_i p_{ij}\ln(p_{ij})\end{aligned}$$

où $\ln\left(P(E_d)\right)$ a été négligé et avec, pour une chaîne suffisamment longue, $n_{ij}/N = p_i p_{ij}$. Cet résultat permet aux auteurs d'introduire la notion d'entropie par étape : $H = -\sum_i\sum_j p_i p_{ij}\ln(p_{ij})$, ce qui implique l'égalité $P(C_M) = \exp(-NH)$. D'après Filyukov, les travaux de Khinchin [95] montrent qu'il est possible de parvenir à l'hypothèse d'équiprobabilité des chaînes.Ceci permet d'affirmer que l'entropie d'évolution S_E est maximale, en

effectuant un parallèle avec la formule 4.0.2. Il peut être objecté à cette méthode qu'elle demeure confinée à un cadre très particulier, bien que la turbulence puisse s'y rattacher en partie importante. L'éventualité d'assimiler cette entropie d'évolution à la production d'entropie n'est pas revendiquée par les auteurs, l'hypothèse du PPME étant d'ailleurs utlérieure à ces travaux.

Les travaux de Dewar [96, 97] reposent sur la notion d'entropie de chemin similaire à celle d'entropie d'évolution. La vision est complétée par une démarche liant l'entropie de chemin à la production d'entropie, et se rapproche donc plus franchement du PPME. Cependant, la nature de certaines hypothèses retenues nécessite de traiter ces travaux avec prudence, même s'ils constituent vraisemblablement la démonstration la plus avancée à ce jour.

Il faut souligner que le principe de production minimale d'entropie énoncé par Prigogine n'est pas forcément à opposer au principe de production maximale d'entropie. En utilisant le formalisme de Jaynes [98, 99], Jones [100] tente de concilier les deux approches. Il en conclut que le principe de Prigogine ne représente qu'un cas particulier d'un principe plus général correspondant à la maximisation de la production d'entropie. Sur un plan de reflexion plus général, les travaux de Klimontovich [85] doivent être mentionnés. Ils visent notamment à déterminer dans quelle mesure l'accession à un état plus turbulent correspond au passage vers un état plus ordonné.

Une utilisation possible pour la physique des plasmas de fusion magnétique ? A priori, il n'existe pas d'argument excluant de manière certaine la possibilité d'appliquer le PPME à la physique du tokamak si elle peut être considérée comme hors équilibre, ce qui est le cas, et quasi-stationnaire, ce qui est possible en excluant les phases de transition entre différents modes. Yoshida et al. [101] s'essayent à l'application pratique du PPME à partir d'un modèle de transport de chaleur simplifié. Le système considéré, à une dimension, impose une température T_0 au bord externe, et définit une température $T_1(P)$ comme condition limite sur le bord interne. $T_1(P)$, qui dépend de la puissance P injectée dans le système, est reliée à T_0 par

$$T_1(P) - T_0 = \eta(P)F$$

où $\eta(P) = \eta_0 + aP$, a étant un paramètre de contrôle et η "l'impédance". F correspond aux flux entrant et sortant, qui sont équivalents en raison de l'hypothèse de quasi-stationnarité nécessaire à la possibilité d'utilisation du PPME. Le flux est supposé de nature diffusive et satisfait à la relation :

$$F = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{\chi}{\Delta r\,(P)} \left(T_1\,(P) - T_0\right)$$

Ce système mène à deux solutions possibles pour la température interne :

$$T_1 = T_D$$
$$T_1 = aF^2 \frac{T_0}{T_D}$$

Sur ces bases, Yoshida montre donc l'existence d'une condition de bifurcation, liée à la maximisation de la production d'entropie, sur la température T_1. L'auteur remarque que

cette solution existe lorsque T_0 excède une valeur critique, ce qui demeure cohérent avec un mécanisme de transition L-H. Même si ce travail reste plus une réflexion sur le PPME qu'une véritable application, il souligne l'intérêt que peut revêtir cette approche liant PMME et transition L-H. C'est dans ce même esprit de réflexion qui nous abordons la fin de ce chapitre.

4.2.3 Le principe de production maximale d'entropie appliqué au modèle 1D

Dans cette dernière section, nous proposons de tester la pertinence du PPME à partir du modèle 1D en utilisant la production d'entropie par dissipation turbulente $\sigma_{diss} = n\tau_{diss}/T$, où $\tau_{diss} = \sum_{n_d}^{N} \nu_n \Phi_n \Phi_n^*$. Les valeurs $n_d = 21$ et $N = 25$ sont à nouveau utilisées pour l'application pratique. Pour rechercher le profil de turbulence maximisant la production d'entropie, nous procédons comme suit :

- la pression et la densité suivent les équations de transport, conditionnées par les sources de particules et de chaleur, qui sont conservées à l'identique :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left((D_{neo} + D_i\varepsilon)\frac{\partial n}{\partial r}\right) + S_n(r) \tag{4.2.2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left((\chi_{neo} + \chi_i\varepsilon)\frac{\partial P}{\partial r}\right) + S_Q(r) \tag{4.2.3}$$

- la turbulence est la grandeur que nous forçons à s'organiser de manière à mener la production d'entropie à son maximum. Cependant, elle est bien sûr contrainte de respecter le modèle de transport ci-dessus. En sus de ce critère, une limite supérieure est imposée à l'intensité de la turbulence définie telle que $\varepsilon(r) < 2\,\forall\, r$. Cette condition est équivalente à un processus de saturation des fluctuations. Hormis ces hypothèses, le profil de la turbulence n'est pas soumis à d'autres contraintes physiques supplémentaires.
- la dissipation ne pouvant être déduite de manière directe depuis la valeur de ε, nous choisissons de faire l'hypothèse que $\tau_{diss} \propto (dV_E/dr)^4$. Cette formulation précise n'est pas justifiée de manière directe, mais correspond à la tendance observée sur la figure 2.7.4.

En pratique nous utilisons une méthode basique : 10^5 profils de la turbulence respectant le critère $\varepsilon(r) < 2\,\forall\, r$ sont testés. Ces profils sont implémentés sous forme de polynômes du 5ème ordre en r, où chacun des coefficients est tiré aléatoirement dans un intervalle déterminé. Parmi un grand nombre de profils testés numériquement, les courbes de couleur rouge sur la figure 4.2.2 correspondent aux profils qui maximisent la production d'entropie, tandis que les courbes de couleur bleue sont celles qui la minimisent. La différence de profils est la plus évidente en ce qui concerne la turbulence : le profil "H" montre clairement une déplétion brusque de la turbulence proche du bord, alors que le profil "L" laisse apparaître une turbulence d'un niveau élevé sur tout le rayon. L'écart du niveau de turbulence entre les deux profils se réduit en se rapprochant du centre, ce qui est révélateur de l'importance de la forme du piédestal dans la production d'entropie par dissipation turbulente. L'évolution de la turbulence dans un tokamak pourrait-elle être gouvernée

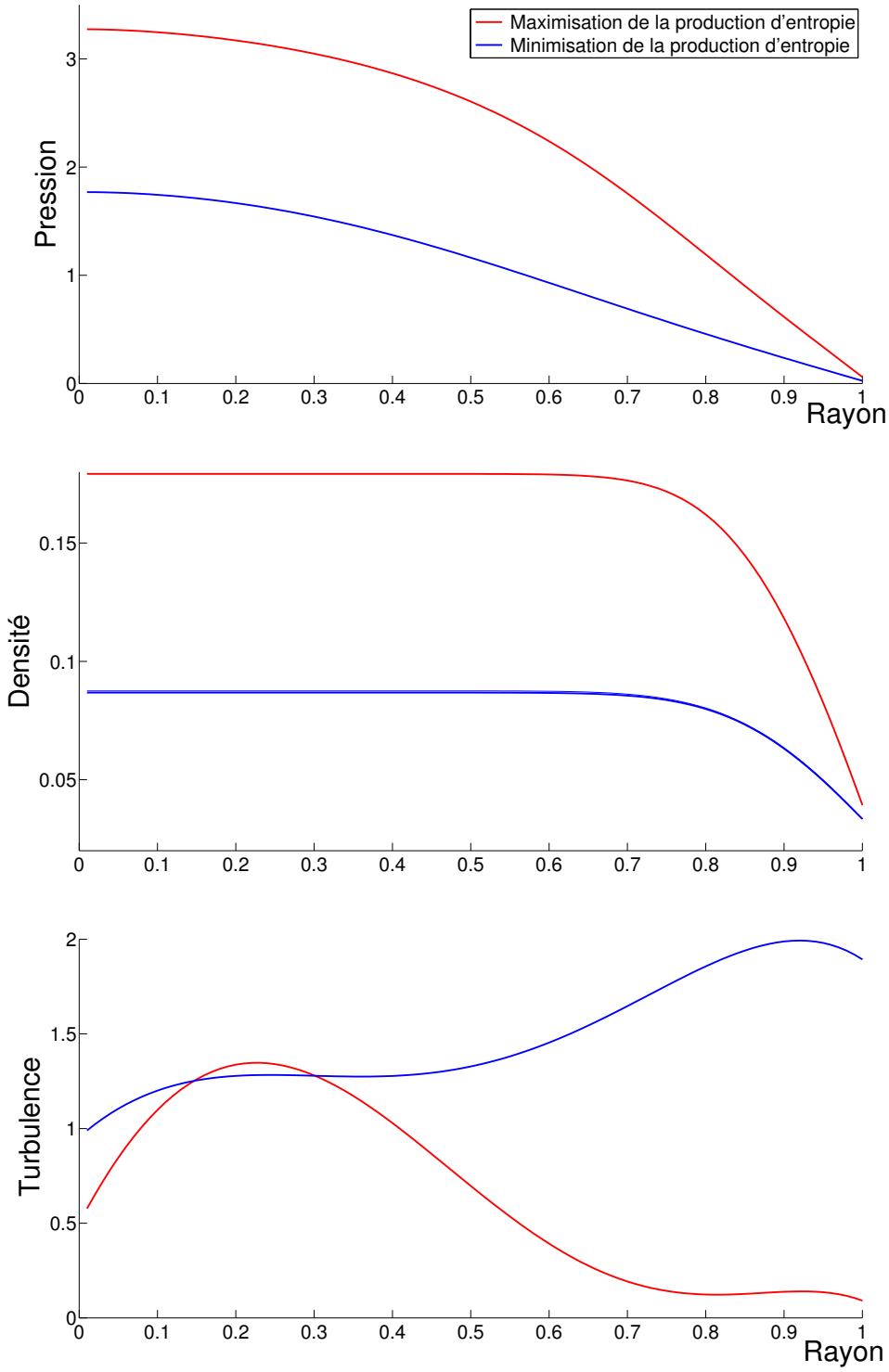


FIGURE 4.2.2: Profils de pression, densité, et turbulence maximisant (en rouge), et minimisant (en bleu) la production d'entropie par dissipation directe d'énergie cinétique turbulente

par un même principe général, décliné dans une version de minimisation de la production d'entropie en mode L et de maximisation de la production d'entropie en mode H ?

Conclusion

Après avoir rappelé les différents aspects de la notion d'entropie, nous avons, dans ce dernier chapitre, défini et mesuré la production d'entropie dans le modèle couplé Fourier/spatial. La formule définissant l'entropie produite dans ce modèle a été calculée à partir de plusieurs hypothèses de départ. D'abord sous sa forme classique, à partir de la définition de Sackür Tetrode, puis sous forme d'entropie de grain à deux ordres différents, et enfin à partir de la dissipation turbulente .

Nous avons mis en évidence la divergence des comportements lors de la transition L-H entre la production d'entropie directement issue des flux et gradients thermodynamiques d'une part, et la production d'entropie liée à la dissipation turbulente d'énergie d'autre part. Nous avons montré que la création de la première forme d'entropie est moindre après le passage au mode H, qu'il s'agisse de la production issue de la totalité des flux ou de la composante liée au transport turbulent. La réduction constatée s'explique vraisemblablement par la chute brutale du niveau de turbulence au niveau du piédestal, provoquant une baisse similaire du transport turbulent, la hausse des gradients n'étant pas suffisante pour la compenser. Au contraire, le second mode de production d'entropie est considérablement plus important après la transition, en raison du cisaillement moyen intense engendré par l'accroissement des gradients au niveau du piédestal.

Enfin, l'applicabilité du principe de production maximale d'entropie a été discutée et mise à l'épreuve en utilisant la configuration 1D choisie depuis le début de notre travail. Ce dernier point ne saurait bien sûr constituer une preuve d'aucune sorte concernant la validité de cet énoncé empirique. Il faut d'ailleurs rappeler qu'il est utilisé ici en prenant en considération la production d'entropie issue d'une unique source. Cependant, nous pouvons jauger l'exemple donné en fin de chapitre comme un élément de concordance, cohérent avec les résultats exposés sur la figure 4.1.2, et qui mérite un approfondissement.

Conclusion et perspectives

La compréhension du comportement de la turbulence est une étape clef sur le chemin de la maîtrise du confinement magnétique dans les tokamaks. C'est notamment la phénoménologie de la transition L-H qui aide à conceptualiser les leviers agissant sur la réduction du transport radial, puisque c'est en atteignant le mode H que le niveau de turbulence est significativement diminué. Le travail présenté contribue à mieux appréhender une partie du mécanisme mis en jeu dans ce phénomène de bifurcation.

Dans un premier temps, les travaux de recherche réalisés ont permis de souligner la pertinence des modèles en couches pour l'étude des interactions entre des structures de différentes échelles spatiales. A l'aide du modèle prédateurs/proies réduit à deux niveaux correspondant à la micro-turbulence d'onde de dérive couplés avec un niveau représentant les flux zonaux, nous avons mis en évidence les caractéristiques dynamiques de ces interactions. L'étude du rôle de ν_F, la fréquence d'amortissement linéaire des flux zonaux, a constitué l'un des axes principaux de cette recherche. Nous avons ainsi pu établir la dépendance en ν_F du ratio entre l'énergie des flux zonaux et celle de la turbulence. Une augmentation de l'amortissement provoque une chute de ce ratio, les flux zonaux étant alors insuffisamment développés pour réduire de manière efficace la turbulence. Ce type de comportement est cohérent avec des simulations gyrocinétiques dont les résultats ont été analysés avec une méthode identique. La mise en évidence de différents régimes d'oscillations est un autre résultat important. Le système non-linéaire peut adopter trois types de comportements après le régime transitoire : des cycles limites périodiques, des oscillations chaotiques, ou une augmentation continue de l'amplitude des oscillations. Nous avons observé que les oscillations chaotiques peuvent s'organiser clairement autour d'un attracteur étrange. D'autre part, nous avons proposé une solution approchée qui semble satisfaisante dans le cas de l'augmentation permanente de l'énergie des trois couches. La transition entre ces différents états n'est pas soumise aux conditions initiales, mais régie par les paramètres du modèle, l'amortissement ν_F et le taux de croissance de l'instabilité γ. Une première analogie prudente avec plusieurs comportements observés pendant la transition L-H peut être suggérée à ce stade : nous retrouvons effectivement la dynamique chaotique du mode L, les cycles limites de la phase intermédiaire.

En étendant le modèle à un nombre substantiel de couches ($N = 25$ pour la turbulence + 1 pour les flux zonaux), nous avons pu observer d'autres effets notables sur le spectre de l'énergie dans l'espace de Fourier. L'extension de ce modèle en couches nous a permis d'introduire la notion de flot cisaillé moyen, et de jauger son impact sur le spectre. Une augmentation forcée du paramètre régulant le cisaillement provoque une réduction caractéristique de la turbulence telle qu'elle est reportée largement dans la littérature. Cette diminution au niveau des échelles d'injection est accompagnée d'une augmentation de l'énergie stockée dans les échelles de dissipation : ce transfert vers les petites échelles

s'effectue donc par l'intermédiaire des structures cisaillées de grande échelle qui dominent alors les transferts dans l'espace de Fourier. L'effet du cisaillement moyen $\Phi_{VE'}$ est similaire à celui du coefficient de couplage non local $\overline{\alpha}$, qui influe significativement sur les flux d'enstrophie (et d'énergie) dans l'espace spectral. Nous avons conclu qu'il module la portée de l'action des flux zonaux sur le spectre turbulent : lorsque ce coefficient se rapproche de la valeur du coefficient de couplage local α, les transferts non-locaux dominent, et inversement.

Le modèle couplé transport radial / espace de Fourier nous a permis de décrire les principales phases de la transition L-H de manière simplifiée. Notons que ce modèle a non seulement la particularité d'offrir une visibilité sur l'évolution du spectre turbulent lors de la transition, mais il permet aussi de retranscrire la réduction de la turbulence par le cisaillement moyen et les flux zonaux sans implémentation artificielle. Lors d'une augmentation progressive de l'injection d'énergie dans le système, une phase d'oscillations de type "cycles limites" est clairement visible, avant le passage dans un mode caractérisé par un fort cisaillement et un fort gradient proche du bord externe. Nous avons décrit la dynamique de compétition et d'échanges entre le flot cisaillé moyen et les flux zonaux qui varient autour de cette moyenne, amplifiant la baisse de la turbulence d'onde de dérive. Le rôle des flux zonaux en tant qu'élément déclencheur de la transition a aussi été mis en avant, notamment dans le cas d'un chauffage sous-critique. L'impact du passage au mode H sur le spectre turbulent a pu être observé, soulignant le rôle du cisaillement dans le transfert d'énergie turbulente depuis les échelles d'injection vers les échelles de dissipation.

D'autre part, la diffusion radiale de la turbulence semble jouer un rôle essentiel dans la dynamique du piédestal. Les observations que nous avons effectuées abondent dans ce sens. D'abord, le modèle de transport seul atteste que la valeur critique de chauffage pour le basculement vers le mode H est en partie régi par le coefficient de propagation de la turbulence. Il révèle aussi un changement de la morphologie du piédestal. Quant au modèle couplé, il montre l'importance de la diffusion radiale de la turbulence sur la dynamique du piédestal : ce phénomène peut ainsi engendrer un retour à un mode de faible confinement par suppression du piédestal, ou une réduction de sa largeur par affaiblissement progressif des gradients de pression et de densité en partant du centre. Il s'agit d'un phénomène dont certaines signatures ont aussi été détectées expérimentalement par le passé.

Dans le dernier chapitre, nous avons abordé la transition L-H sous l'aspect de la production d'entropie. Une expression de la production d'entropie "classique" et de la production d'entropie "de grille" se rapportant aux conditions de notre modèle y est définie. En nous appuyant sur le modèle multi-couches, nous avons détaillé la production d'entropie lors des différentes phases de la transition. Les résultats révèlent une diminution de la production d'entropie issue de la partie turbulente des flux de particules et de chaleur. Cependant, la création d'entropie indirecte issue de la dissipation turbulente s'élève lors du passage au mode H, en raison de l'action des flux zonaux et du cisaillement moyen. En partant de cette forme de production d'entropie, nous avons proposé le rapprochement de l'existence des deux modes de confinement avec l'hypothèse de production maximale (pour le mode H) ouminimale (pour le mode L) d'entropie.

Perspectives

La principale ouverture permise par les travaux présentés dans cette thèse réside dans la mise en place du modèle de transport multi-couches. Comme nous l'avons souligné, il permet de déterminer les spectres de l'énergie turbulente lors d'une transition L-H, ce qui se révèle impossible avec les modèles existants à même de reproduire le mécanisme de transition L-H. Dans un premier temps, il peut être envisagé d'intégrer une injection d'énergie de type ITG plus réaliste en remplacement du forçage utilisé jusqu'ici. L'étude de l'influence du cisaillement $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ pourrait être enrichi dans le futur par des comparaisons avec des données expérimentales recueillies dans des conditions similaires, aussi bien qu'avec des résultats issus de simultations gyrocinétiques. Dans le but d'apporter une dimension plus réaliste, voire prédictive, au modèle multi-couches, le rapprochement avec un code de transport plus complet pourrait être réfléchi. En effet, la simplicité de l'aspect transport de notre modèle permet une approche très intuitive, mais reste un frein à l'éventualité d'une comparaison plus directe avec les conditions expérimentales. Enfin, l'aspect entropique mis en exergue dans le dernier chapitre nécessite sans doute d'être développé sous une approche plus globale, hors du cadre restreint de notre modèle réduit.

Annexes

Annexe A

L'expression de l'entropie de grain cinétique peut être développée jusqu'à l'ordre deux, ce qui signifie que la limite entre information et perte d'information se situe alors à une échelle encore plus petite. Ensuite, on utilise à nouveau la même méthodologie. Cette fois, l'entropie est donc définie par :

$$\begin{aligned}
\overline{s}_2 &= -\left\langle \int (\tilde{f} + \overline{f}) \ln(\tilde{f} + \overline{f}) dv \right\rangle \\
&= -\int \left(\overline{f} \ln(\overline{f}) + \left\langle \tilde{f} \frac{\tilde{f}}{\overline{f}} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \overline{f} \frac{\tilde{f}^2}{\overline{f}^2} \right\rangle \right) dv \\
&= -\int \left(\overline{f} \ln(\overline{f}) + \frac{1}{2} \frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}} \right) dv
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial \overline{s}_2}{\partial t} = -\int \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \left[1 + \ln(\overline{f}) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}} \right) dv$$

L'expression $-\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \left[1 + \ln(\overline{f}) \right]$ a déjà été calculée en section 4.1.1. En ce qui concerne la seconde partie, remarquons que :

$$-\frac{1}{\overline{f}} \left\langle \left(\tilde{f} \frac{\partial}{\partial t} \left(f - \overline{f} \right) \right) \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{1}{\overline{f}} \frac{\partial \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\partial t}$$

Ce qui mène à :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{s}_2}{\partial t} &= -\int \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \left[1 + \ln(\overline{f}) \right] \right) dv - \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}} \right) dv \\
&= -\int \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \left[1 + \ln(\overline{f}) \right] \right) dv - \int \frac{1}{2} \frac{1}{\overline{f}} \frac{\partial \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\partial t} dv + \int \frac{1}{2} \frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}^2} \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} dv \qquad (4.2.4)
\end{aligned}$$

En rappelant l'équation de dérive cinétique :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\parallel \cdot \nabla_\parallel f + V_E \cdot \nabla_\perp f + \frac{q}{m} E_\parallel \nabla_{v_\parallel} f = 0$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} + v_\parallel \cdot \nabla_\parallel \overline{f} + \overline{V}_E \cdot \nabla_\perp \overline{f} + < \tilde{V}_E \cdot \nabla_\perp \tilde{f} > + \frac{e}{m} \overline{E}_\parallel \nabla_{v_\parallel} \overline{f} + < \frac{e}{m} \tilde{E}_\parallel \nabla_{v_\parallel} \tilde{f} > = 0 \quad (4.2.5)$$

les deux termes les plus à droite dans (4.2.4) peuvent être calculés :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{\partial \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\partial t} &= -\left\langle \tilde{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \right) \right\rangle = \\
&= + \left\langle \tilde{f} v_\parallel \cdot \nabla_\parallel \tilde{f} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \tilde{f} \tilde{V}_E \right\rangle \cdot \nabla_\perp \overline{f} + \overline{V}_E \left\langle \tilde{f} \nabla_\perp \tilde{f} \right\rangle + \left\langle \tilde{f} \tilde{V}_E \cdot \nabla_\perp \tilde{f} \right\rangle \\
&\quad + \frac{q}{m} \left\langle \tilde{f} \tilde{E}_\parallel \right\rangle \nabla_{v_\parallel} \overline{f} + \frac{q}{m} \overline{E}_\parallel \left\langle \tilde{f} \nabla_{v_\parallel} \tilde{f} \right\rangle + \frac{q}{m} \left\langle \tilde{E}_\parallel \tilde{f} \nabla_{v_\parallel} \tilde{f} \right\rangle
\end{aligned}$$

ce qui mène à :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{1}{\overline{f}}\frac{\partial \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\partial t} &= +\frac{1}{2}\frac{1}{\overline{f}} v_\parallel \cdot \nabla_\parallel \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\overline{f}} \left\langle \tilde{f} \tilde{V}_E \right\rangle \cdot \nabla_\perp \overline{f} + \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{f}} \overline{V}_E \cdot \nabla_\perp \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle + \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{f}} \left\langle \tilde{V}_E \cdot \nabla_\perp \tilde{f}^2 \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\overline{f}}\frac{q}{m} \left\langle \tilde{f} \tilde{E}_\parallel \right\rangle \nabla_{v_\parallel} \overline{f} + \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{f}}\frac{q}{m} \overline{E}_\parallel \cdot \nabla_{v_\parallel} \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle + \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{f}}\frac{q}{m} \left\langle \tilde{E}_\parallel \cdot \nabla_{v_\parallel} \tilde{f}^2 \right\rangle
\end{aligned}$$

Ensuite, le terme le plus à droite s'écrit :

$$\frac{1}{2}\frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}^2}\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}^2} \left(v_\parallel \cdot \nabla_\parallel \overline{f} + \overline{V}_E \cdot \nabla_\perp \overline{f} + \left\langle \tilde{V}_E \cdot \nabla_\perp \tilde{f} \right\rangle + \frac{e}{m} \overline{E}_\parallel \nabla_{v_\parallel} \overline{f} + \left\langle \frac{e}{m} \tilde{E}_\parallel \nabla_{v_\parallel} \tilde{f} \right\rangle \right)$$

Le premier terme peut toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
-\int \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \left[1 + \ln(\overline{f}) \right] \right) dv &= \int \left(\nabla_\perp \cdot \left[\overline{V}_E \overline{f} \ln(\overline{f}) \right] + \nabla_\parallel \cdot \left[v_\parallel \overline{f} \ln(\overline{f}) \right] \right) dv \\
&\quad + \int \nabla_\perp \cdot \left[< \tilde{V}_E \cdot \tilde{f} > \left(1 + \ln(\overline{f}) \right) \right] dv - \int \left(< \tilde{f} \tilde{V}_E > \cdot \nabla_\perp \ln(\overline{f}) \right) dv \\
&\quad + \int \left(\nabla_{v_\parallel} \cdot \left[\left(1 + \ln(\overline{f}) \right) \frac{e}{m} < \tilde{E}_\parallel \tilde{f} > \right] - \frac{e}{m} < \tilde{E}_\parallel \tilde{f} > \cdot \nabla_{v_\parallel} \ln(\overline{f}) \right) dv
\end{aligned}$$

Uniquement les termes en $\nabla_\perp$ sont retenus. Le calcul aboutit alors aux expressions qui suivent :

$$\dot{s} = (i)\frac{1}{\overline{f}}\left\langle \tilde{f}\tilde{V}_E \right\rangle \cdot \nabla_\perp \overline{f} + (ii)\frac{1}{2}\frac{1}{\overline{f}}\nabla_\perp \left(\overline{V}_E \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle\right) + (iii)\frac{1}{2}\frac{1}{\overline{f}}\nabla_\perp \left\langle \tilde{V}_E \tilde{f}^2 \right\rangle$$
$$- (iv)\frac{1}{2}\frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}^2}\nabla_\perp(\overline{V}_E\overline{f}) - (v)\frac{1}{2}\frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}^2}\nabla_\perp \left\langle \tilde{V}_E \tilde{f} \right\rangle$$
$$+ (vi)\nabla_\perp \cdot \left[< \tilde{V}_E \cdot \tilde{f} > \left(1 + \ln(\overline{f})\right)\right] - (vii) < \tilde{f}\tilde{V}_E > \cdot \nabla_\perp \ln(\overline{f})$$

$$\dot{s} = (ii) + (iv)\nabla_\perp \cdot \left[\frac{\overline{V}_E \left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}}\right] + (i) + (vii)\,0 + (vi)\nabla_\perp \cdot \left[< \tilde{V}_E \cdot \tilde{f} > \left(1 + \ln(\overline{f})\right)\right]$$
$$+ (iii)\frac{1}{\overline{f}}\frac{1}{2}\nabla_\perp \left\langle \tilde{V}_E \tilde{f}^2 \right\rangle - (v)\frac{1}{2}\frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}^2}\nabla_\perp \left\langle \tilde{V}_E \tilde{f} \right\rangle$$

Nous passons ensuite sous forme de production interne σ en passant par la divergence comme nous avions procédé pour l'ordre 0, section 4.1.1, tous les termes de la première ligne $(i)\,(ii)\,(iv)\,(vi)\,(vii)$ sont donc éliminés. Sans oublier d'intégrer le tout par la vitesse, nous obtenons finalement l'expression de la production d'entropie de grain à l'ordre deux :

$$\sigma_2 = \int \left[\frac{1}{2}\left\langle \tilde{V}_E \frac{\tilde{f}^2}{\overline{f}^2} \right\rangle \cdot \nabla_\perp \overline{f} + \frac{1}{2}\left\langle \tilde{V}_E \tilde{f} \right\rangle \cdot \nabla_\perp \frac{\left\langle \tilde{f}^2 \right\rangle}{\overline{f}^2}\right] dv$$

La forme exacte obtenue ne requiert aucune hypothèse préalable sur la forme précise de $\overline{f}$ et $\tilde{f}$. Cependant, étant peu exploitable en l'état à l'aide des modèles simplifiés non cinétiques développés, la nature des fluctuations peut être supposée telle que $\tilde{f} = \frac{\tilde{n}}{\overline{n}}\overline{f}$ et en définissant $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\tilde{n}^2}{\overline{n}^2}$, $\mathbf{\Gamma}_\varepsilon = \left\langle \tilde{V}_E \frac{1}{2}\frac{\tilde{n}^2}{\overline{n}^2} \right\rangle$et $\mathbf{\Gamma}_{n.turb} = \left\langle \tilde{V}_E \tilde{n} \right\rangle$, il vient :

$$\sigma_2 = \mathbf{\Gamma}_{n.turb} \cdot \nabla\varepsilon + \mathbf{\Gamma}_\varepsilon \cdot \nabla n$$

Annexe B

Le terme décrivant les interactions locales dans l'équation (2.2.5) est défini par :

$$C(\Phi_n,\, \Phi_n) = d_n \Phi_{n+1}\Phi_{n+2} + e_n \Phi_{n-1}\Phi_{n+1} + f_n \Phi_{n-1}\Phi_{n-2}$$

et correspond aux interactions non-linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\phi}_p}{\partial t} &= \sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'=0} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' \frac{\left(\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{k}'^2\right)}{1+\mathbf{p}'^2} \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_{k'} \\ &= \alpha \frac{k_n^4}{1+k_n^2}\frac{(g^2-1)}{g^7}\Phi_{n-1}\Phi_{n-2} + \beta \frac{k_n^4}{1+k_n^2}\frac{(g^4-1)}{g^2}\Phi_{n-1}\Phi_{n+1} + \gamma \frac{k_n^4}{1+k_n^2} g^5 \left(g^2-1\right)\Phi_{n+1}\Phi_{n+2}\end{aligned}$$

où les correspondances sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} d_n &= \gamma \frac{k_n^4}{1+k_n^2} g^5 \left(g^2-1\right) \\ e_n &= \beta \frac{k_n^4}{1+k_n^2}\frac{(g^4-1)}{g^2} \\ f_n &= \alpha \frac{k_n^4}{1+k_n^2}\frac{(g^2-1)}{g^7}\end{aligned}$$

Dans le but de déterminer ces coefficients d'interactions entre échelles locales, la conservation de l'énergie et de l'enstrophie potentielle est utilisée. La conservation de l'énergie donne :

$$\frac{dE_n}{dt} = \left(1+k_n^2\right)\Phi_n\left(d_n\Phi_{n+1}\Phi_{n+2} + e_n\Phi_{n-1}\Phi_{n+1} + f_n\Phi_{n-1}\Phi_{n-2}\right) = 0$$

et donc

$$\alpha g^{-3} + \beta g^{-2}\left(g^2+1\right) + \gamma g = 0$$

En multipliant cette fois $\partial\Phi_n/\partial t$ par $\left(1+k_n^2\right)k_n^2\Phi_n^2$ pour utiliser la conservation de l'enstrophie potentielle, le même raisonnement mène à la relation suivante :

$$\alpha g^{-1} + \beta g^{-2}\left(g^2+1\right) + \gamma g^{-1} = 0$$

La soustraction d'une par l'autre de ces deux dernières égalités permet d'aboutir à :

$$\gamma g^2 = \alpha \text{ puis } \beta g = -\alpha$$

Les coefficients ainsi déterminés ont la propriété de conserver l'énergie et l'enstrophie potentielle via les termes d'interactions locales du système d'Hasegawa-Mima. Deux paramètres restent donc indéterminés, l'un correspondant aux interactions locales (α) et l'autre aux interactions non-locales ($\overline{\alpha}$).

Bibliographie

[1] J. D. Lawson, Proceedings of the Physical Society. Section B **70**, 6 (1957), URL http://stacks.iop.org/0370-1301/70/i=1/a=303.

[2] J. Wesson, *Tokamaks*, vol. 149 (Oxford University Press, 2011).

[3] F. Perkins et al, Nuclear Fusion **39**, 2137 (1999), URL http://stacks.iop.org/0029-5515/39/i=12/a=301.

[4] K. Ikeda, Nuclear Fusion **47** (2007).

[5] J. M. Rax, *Physique des tokamaks* (Editions de l'Ecole Polytechnique, 2011).

[6] I. L. Klimontovich, *The statistical theory of non-equilibrium processes in plasma*, vol. 9 (Pergamon, 1967).

[7] D. R. Nicholson and D. R. Nicholson, *Introduction to plasma theory* (Cambridge Univ Press, 1983).

[8] A. Vlasov, Russ. Phys. J. **9**, 25 (1945).

[9] E. Trier, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique X (2010).

[10] W. Horton, Rev. Mod. Phys. **71**, 735 (1999).

[11] A. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids **21**, 87 (1978).

[12] M. Wakatani and A. Hasegawa, Physics of Fluids **27**, 611 (1984).

[13] G. Schubert, Venus **1**, 681 (1983).

[14] O. Onishchenko, O. Pokhotelov, R. Sagdeev, P. K. Shukla, and L. Stenflo, Nonlinear Processes in Geophysics **11**, 241 (2004).

[15] P. H. Diamond, S.-I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm, Plasma Physics and Controlled Fusion **47**, R35 (2005), URL http://stacks.iop.org/0741-3335/47/i=5/a=R01.

[16] R. Howe, J. Christensen-Dalsgaard, F. Hill, R. Komm, R. Larsen, J. Schou, M. Thompson, and J. Toomre, The Astrophysical Journal Letters **533**, L163 (2000).

[17] R. Z. Sagdeev, V. D. Shapiro, and V. I. Shevchenko, JETP Lett. **27**, 340 (1978).

[18] H. Biglari, P. H. Diamond, and P. W. Terry, Phys. Fluids B **2**, 1 (1990).

[19] A. Fujisawa, Nuclear Fusion **49**, 013001 (2009).

[20] Z. Lin, T. S. Hahm, W. W. Lee, W. M. Tang, and P. H. Diamond, Phys. Rev. Lett. **83**, 3645 (1999).

[21] Z.Lin, T. Hahm, W. Lee, W.M.Tang, and R. White, Science **281** (1998).

[22] P. W. Terry, Rev. Mod. Phys. **72**, 109 (2000).

[23] K. Itoh and S.-I. Itoh, Plasma Physics and Controlled Fusion **38**, 1 (1996), URL http://stacks.iop.org/0741-3335/38/i=1/a=001.

[24] K. H. Burrell, Phys. Plasmas **4**, 1499 (1997), URL http://link.aip.org/link/?PHP/4/1499/1.

[25] L.Chen, Z.Lin, and R.White, Physics of Plasmas **7**, 3129 (2010).

[26] S. Champeaux and P. Diamond, Physics Letters A **88**, 214 (2001), ISSN 0375-9601, URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960101005497.

[27] P. Diamond, S. Champeaux, M. Malkov, A. Das, I. Gruzinov, M. Rosenbluth, C. Holland, B. Wecht, A. Smolyakov, F. Hinton, et al., Nuclear Fusion **41**, 1067 (2001), URL http://stacks.iop.org/0029-5515/41/i=8/a=310.

[28] F. L. Hinton and M. N. Rosenbluth, Plasma Physics and Controlled Fusion **41**, A653 (1999).

[29] K. Itoh, S.-I. Itoh, P. Diamond, T. Hahm, A. Fujisawa, G. Tynan, M. Yagi, and Y. Nagashima, Physics of plasmas **13**, 055502 (2006).

[30] E.-j. Kim and P. H. Diamond, Physics of Plasmas (1994-present) **9**, 4530 (2002), URL http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/9/11/10.1063/1.1514641.

[31] V. N. Desnianskii and E. A. Novikov, Journal of Applied Mathematics and Mechanics **38**, 468 (1974), ISSN 0021-8928, URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V3R-4805HFG-2BD/2/2d425eab8b4f167bf18d93c8947af937.

[32] R. Grappin, J. Leorat, and A. Pouquet, Journal de Physique **47**, 1127 (1986).

[33] K. Ohkitani and M. Yamada, Progress of theoretical physics **81**, 329 (1989).

[34] E. Gledzer, in *Soviet Physics Doklady* (1973), vol. 18, p. 216.

[35] J. L. Ottinger and D. Carati, Phys. Rev. E **48**, 2955 (1993).

[36] Ö. D. Gürcan, P. Hennequin, L. Vermare, X. Garbet, and P. H. Diamond, Plasma Physics and Controlled Fusion **52**, 045002 (2010).

[37] D. J. Kaup, A. Reiman, and A. Bers, Rev. Mod. Phys. **51**, 275 (1979).

[38] K. Gopalsamy, The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics **27**, 66 (1985).

[39] P. H. Diamond, S.-I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm, PPCF **47**, R35 (2005).

[40] T. Estrada, T. Happel, C. Hidalgo, E. Ascasibar, and E. Blanco, EPL (Europhysics Letters) **92**, 35001 (2010).

[41] G. D. Conway, C. Angioni, F. Ryter, P. Sauter, and J. Vicente (ASDEX Upgrade Team), Phys. Rev. Lett. **106**, 065001 (2011).

[42] E.-j. Kim and P. H. Diamond, Phys. Rev. Lett. **90**, 185006 (2003), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.185006.

[43] A. M. Dimits, G. Bateman, M. A. Beer, B. I. Cohen, W. Dorland, G. W. Hammett, C. Kim, J. E. Kinsey, M. Kotschenreuther, A. H. Kritz, et al., Phys. Plasmas **7**, 969 (2000).

[44] R. E. Waltz, G. D. Kerbel, J. Milovich, and G. W. Hammett, Physics of Plasmas (1994-present) **2** (1995).

[45] K. Miki, P. H. Diamond, O. D. Gürcan, G. R. Tynan, T. Estrada, L. Schmitz, and G. S. Xu, Physics of Plasmas **19**, 092306 (pages 17) (2012), URL http://link.aip.org/link/?PHP/19/092306/1.

[46] L. Schmitz, L. Zeng, T. L. Rhodes, J. C. Hillesheim, E. J. Doyle, R. J. Groebner, W. A. Peebles, K. H. Burrell, and G. Wang, Phys. Rev. Lett. **108**, 155002 (2012), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.155002.

[47] P. Morel, Ö. D. Gürcan, and V. Berionni, Plasma Physics and Controlled Fusion **56**, 015002 (2014), URL http://stacks.iop.org/0741-3335/56/i=1/a=015002.

[48] P. Hennequin, L. Vermare, Ö. Gürcan, P. Morel, and A. Storelli, 39th European Physical Society Conference 16th Int. Congress on Plasma Physics. Stockolm p. 1069 (2012).

[49] F. Wagner, G. Becker, K. Behringer, D. Campbell, A. Eberhagen, W. Engelhardt, G. Fussmann, O. Gehre, J. Gernhardt, G. v. Gierke, et al., Phys. Rev. Lett. **49**, 1408 (1982), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1408.

[50] J. W. Connor and H. R. Wilson, Plasma Physics and Controlled Fusion **42**, R1 (2000), URL http://stacks.iop.org/0741-3335/42/i=1/a=201.

[51] A. Team, Nuclear Fusion **29**, 1959 (1989).

[52] F. L. Hinton and G. M. Staebler, Phys. Fluids B **5**, 1281 (1993).

[53] S. Saito, T. Kobayashi, M. Sugihara, T. Hirayama, and N. Fujisawa, Nuclear Fusion **25**, 828 (1985), URL http://stacks.iop.org/0029-5515/25/i=7/a=007.

[54] T. Ohkawa, M. S. Chu, F. L. Hinton, C. S. Liu, and Y. C. Lee, Phys. Rev. Lett. **51**, 2101 (1983), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.2101.

[55] F. Hinton, Nuclear Fusion **25**, 1457 (1985), URL http://stacks.iop.org/0029-5515/25/i=10/a=008.

[56] D. del Castillo-Negrete, B. A. Carreras, and V. E. Lynch, Plasma Physics and Controlled Fusion **46**, A105 (????).

[57] Y. Z. Zhang and S. M. Mahajan, Physics of Fluids B : Plasma Physics **4**, 1385 (1992), URL http://link.aip.org/link/?PFB/4/1385/1.

[58] G. Gurcan, L. Vermare, P. Hennequin, V. Berionni, P. Diamond, G. Dif-Pradalier, X. Garbet, P. Ghendrih, V. Grandgirard, C. McDevitt, et al., Nuclear Fusion **53**, 073029 (2013), URL http://stacks.iop.org/0029-5515/53/i=7/a=073029.

[59] Ö. D. Gürcan, P. H. Diamond, T. S. Hahm, and Z. Lin, Phys. Plasmas **12**, 032303 (2005).

[60] T. S. Hahm, P. H. Diamond, Z. Lin, K. Itoh, and S.-I. Itoh, Plasma Physics and Controlled Fusion **46**, A323 (2004), URL http://stacks.iop.org/0741-3335/46/i=5A/a=036.

[61] S.-I. Itoh, K. Itoh, A. Fukuyama, and M. Yagi, Phys. Rev. Lett. **72**, 1200 (1994), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.1200.

[62] P. H. Diamond, V. B. Lebedev, D. E. Newman, and B. A. Carreras, Physics of Plasmas **2**, 3685 (1995), URL http://link.aip.org/link/?PHP/2/3685/1.

[63] O. Kardaun, J. Kardaun, S.-I. Itoh, and K. Itoh, Controlled Fusion and Plasma Physics **22C**, 1975 (1998).

[64] M. A. Malkov and P. H. Diamond, Phys. Plasmas **15** (2008).

[65] Ö. D. Gürcan, P. H. Diamond, and T. S. Hahm, Phys. Plasmas **13**, 052306 (2006).

[66] Ö. Gürcan, P. Diamond, and T. Hahm, Physics of plasmas **14**, 055902 (2007).

[67] R. Sanchez, B. P. Van Milligen, and B. Carreras, Physics of plasmas **12**, 056105 (2005).

[68] D. del Castillo-Negrete, Physics of plasmas **13**, 082308 (2006).

[69] D. del Castillo-Negrete, B. Carreras, and V. Lynch, Physics of plasmas **11**, 3854 (2004).

[70] T. Estrada, C. Hidalgo, and T. Happel, Nuclear Fusion **51**, 032001 (2011), URL http://stacks.iop.org/0029-5515/51/i=3/a=032001.

[71] P. Manz, M. Xu, N. Fedorczak, S. Thakur, and G. Tynan, Physics of Plasmas **19**, 012309 (2012).

[72] G. S. Xu, B. N. Wan, H. Q. Wang, H. Y. Guo, H. L. Zhao, A. D. Liu, V. Naulin, P. H. Diamond, G. R. Tynan, M. Xu, et al., Phys. Rev. Lett. **107**, 125001 (2011), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.125001.

[73] P. Manz, M.Ramisch, and U.Stroth, Physical Review E **82**, 7 (2010).

[74] D. WÃ¡gner, E. Fable, A. Pitzschke, O. Sauter, H. Weisen, and the TCV team, Plasma Physics and Controlled Fusion **54**, 085018 (2012), URL http://stacks.iop.org/0741-3335/54/i=8/a=085018.

[75] G. Tynan, M. Xu, P. Diamond, J. Boedo, I. Cziegler, N. Fedorczak, P. Manz, K. Miki, S. Thakur, L. Schmitz, et al., Nuclear Fusion **53**, 073053 (2013), URL http://stacks.iop.org/0029-5515/53/i=7/a=073053.

[76] L. Shao, G. Xu, S. Liu, S. Zweben, B. Wan, H. Guo, A. Liu, R. Chen, B. Cao, W. Zhang, et al., Plasma Physics and Controlled Fusion **55**, 105006 (2013).

[77] P. Manz, G. Xu, B. Wan, H. Wang, H. Guo, I. Cziegler, N. Fedorczak, C. Holland, S. Müller, S. Thakur, et al., Physics of Plasmas **19**, 072311 (2012).

[78] T. Happel, T. Estrada, E. Blanco, C. Hidalgo, G. Conway, U. Stroth, and T.-I. Team, Physics of Plasmas **18**, 102302 (2011).

[79] L. Onsager, Phys. Rev. **37**, 405 (1931), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.37.405.

[80] X. Garbet, N. Dubuit, E. Asp, Y. Sarazin, C. Bourdelle, P. Ghendrih, and G. T. Hoang, Physics of Plasmas (1994-present) **12**, (2005), URL http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/12/8/10.1063/1.1951667.

[81] X. Garbet, J. Abiteboul, A. Strugarek, Y. Sarazin, G. Dif-Pradalier, P. Ghendrih, V. Grandgirard, C. Bourdelle, G. Latu, and A. Smolyakov, Plasma Physics and Controlled Fusion **54**, 055007 (2012), URL http://stacks.iop.org/0741-3335/54/i=5/a=055007.

[82] M. Rosenbluth, R. Hazeltine, and F. L. Hinton, Physics of Fluids **15**, 116 (1972).

[83] H. Ozawa, S. Shimokawa, and H. Sakuma, Phys. Rev. E **64**, 026303 (2001).

[84] F. Kock and H. Herwig, International journal of heat and mass transfer **47**, 2205 (2004).

[85] Y. L. Klimontovich, Physica B : Condensed Matter **228**, 51 (1996).

[86] G. W. Paltridge, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society **101**, 475 (1975), ISSN 1477-870X, URL http://dx.doi.org/10.1002/qj.49710142906.

[87] L. Martyushev and V. Seleznev, Physics Reports **426**, 1 (2006), ISSN 0370-1573, URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157305004813.

[88] H. Ozawa, A. Ohmura, R. Lorenz, and T. Pujol, Rev. Geophys. **41** (2003).

[89] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, Physics of Plasmas **15**, 032307 (pages 6) (2008), URL http://link.aip.org/link/?PHP/15/032307/1.

[90] J. Kirkaldy, Physical Review A **31**, 3376 (1985).

[91] P. Zupanovic, D. Juretic, and S. Botric, arXiv preprint cond-mat/0409459 (2004).

[92] H. Ziegler, *An introduction to thermomechanics* (North Holland, 1983).

[93] R. von Mises, Göttin. Nachr. Math. Phys. **1**, 582 (1913).

[94] A. Filyukov and V. Karpov, Journal of engineering physics **13**, 416 (1967), ISSN 0022-0841, URL http://dx.doi.org/10.1007/BF00828961.

[95] A. Khinchin, Uspekhi Matematicheskikh Nauk (Russian Mathematical Surveys) **8**, 32 (1953).

[96] R. Dewar, Journal of Physics A : Mathematical and General **36**, 631 (2003), URL http://stacks.iop.org/0305-4470/36/i=3/a=303.

[97] R. C. Dewar, Journal of Physics A : Mathematical and General **38**, L371 (2005), URL http://stacks.iop.org/0305-4470/38/i=21/a=L01.

[98] E. T. Jaynes, Phys. Rev. **106**, 620 (1957), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.620.

[99] E. T. Jaynes, Phys. Rev. **108**, 171 (1957), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.171.

[100] W. Jones, Journal of Physics A : Mathematical and General **16**, 3629 (1983).

[101] M. Yoshida, Y. Kamada, H. Takenaga, Y. Sakamoto, H. Urano, N. Oyama, G. Matsunaga, and the JT-60 Team, Phys. Rev. Lett. **100**, 105002 (2008).