Combinatoire algébrique des permutations et de leurs généralisations

Vincent Vong

UNIVERSITÉ PARIS-EST

ÉCOLE DOCTORALE MSTIC

Thèse de doctorat en

Informatique

Vincent VONG

COMBINATOIRE ALGÉBRIQUE DES PERMUTATIONS ET DE LEURS GÉNÉRALISATIONS

Thèse dirigée par : Jean-Christophe NOVELLI

Soutenue le 8 décembre

Jury :

- Guo-Niu HAN, *rapporteur*
- Matthieu JOSUAT-VERGÈS, *examinateur*
- Jean-Gabriel LUQUE, *examinateur*
- Dominique MANCHON, *rapporteur*
- Cyril NICAUD, *examinateur*
- Jean-Christophe NOVELLI, *directeur*

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Jean-Christophe Novelli d'avoir encadré cette thèse. Il m'a laissé beaucoup de liberté dans mes choix de sujets de recherche, tout en me recadrant lorsque c'était nécessaire, et en étant très disponible, prenant parfois sur son temps personnel. Je lui adresse ma profonde reconnaissance.

J'exprime ma gratitude envers Guo-Niu Han et Dominique Manchon d'avoir accepté de rapporter ce travail. Leurs commentaires et suggestions ont grandement contribué à l'amélioration de ce mémoire. Je suis également heureux que Jean-Gabriel Luque et Cyril Nicaud aient accepté d'être dans mon jury. Je remercie sincèrement Matthieu Josuat-Vergès pour ses pistes de recherche ainsi que sa disponibilité. Je lui dois entre autre ma compréhension de la combinatoire des chemins.

Beaucoup de mes idées ont été inspirées des cours spécialisés de combinatoire algébrique donnés par Jean-Yves Thibon. Je lui suis tributaire d'une grande partie de mon savoir combinatoire.

Je suis également redevable de l'enrichissement apporté par l'intervention d'Alain Lascoux (...) et Philippe Biane aux séances de travail du vendredi matin. Ils ont présenté et posé certains problèmes qui m'ont aiguillé dans mes pistes de recherche.

Au sein de l'équipe combinatoire, beaucoup de "jeunes" passent dans un bureau rempli d'articles. La bonne humeur ambiante générée par les protagonistes (Zakaria, Viviane, Samuele, Rémi, Pierre, Olivier, Nicolas, Jean-Paul, Hayat, Grégory, Assia...) que j'ai "croisé" ou que je croise encore fait de ce lieu un endroit mémorable. Nul doute que sans ces ex/actuels/futurs doctorants, cette pièce sans fenêtre aurait été triste. "Big up" à eux ! Je remercie également les thésards des autres équipes du laboratoire (Jérôme, Manar, Vincent, Younès,...) pour leur bonne humeur et gentillesse.

Une ambiance joviale passe également par une bonne table. Je remercie les clients réguliers du "troisième" (Claire David, Jacques Désarménien, Antoine Meyer, Pierre André Picon, Dominique Revuz,...) qui rendent ce lieu si particulier. Mention spéciale à Marc Zipstein, tant pour ses conseils algorithmiques que culinaires. Un grand merci aux autres membres du LIGM et je m'excuse d'avance de ne pas citer tout le monde.

J'adresse également mes remerciements aux membres des autres équipes de combinatoire que j'ai eu la chance de rencontrer notamment François Bergeron, Christophe Retenauer, Yannick Vargas, Nathan Williams, Jean-Baptiste Priez, Aladin Virmaux,... Je remercie les secrétaires Angélique Combez, Mina Constant, Line Fonterede, Séverine Giboz, Corinne Palescandolo... pour leur patience et leur gentillesse. Je n'oublie pas au passage Sylvie Cach, secrétaire de l'école doctorale, que j'ai sollicité à de nombreuses reprises.

Un grand merci à Viet qui m'a parlé de ce laboratoire sans qui je n'aurai sans doute pas fait de thèse, et à mes amis notamment Alexandre, Arthur, Camille, Charles, Charles, Christophe, Clément, Clovis, Didier, Emilie, Gaëtan, Fanny, Fred, Jehanne, Jules, Julien, Laure, Nina, Tiphaine... pour leur soutien moral.

Je remercie aussi ma famille.

Enfin une mention particulière à Hélène, qui m'a soutenu, encouragé, aidé, et qui me supporte déjà depuis plus deux ans, mais comment fait-elle ? !

Combinatoire algébrique des permutations et de leurs généralisations

Résumé :

Cette thèse se situe au carrefour de la combinatoire et de l'algèbre. Elle se consacre d'une part à traduire des problèmes algébriques en des problèmes combinatoires, et inversement, utilise le formalisme algébrique pour traiter des questions combinatoires.

Après un rappel des notions classiques de combinatoire et d'algèbres de Hopf avec quelques applications, nous abordons l'étude de certaines statistiques définies sur les permutations : les pics, les vallées, les doubles montées et les doubles descentes, qui sont à la base de la bijection de Françon-Viennot, elle-même débouchant sur une étude combinatoire des polynômes orthogonaux. Nous montrons qu'à partir de ces statistiques, il est possible de construire diverses sous-algèbres ou algèbres quotients de **FQSym**, une algèbre dont une base est indexée par les permutations.

Puis, nous étudions deux suites classiques de combinatoire par une démarche non commutative : les polynômes de Gandhi, un raffinement polynomial des nombres de Genocchi, et les nombres d'Euler, une suite recelant de nombreuses propriétés combinatoires. Nous nous attachons à montrer que l'approche non commutative permet, dans la majeure partie des cas, d'obtenir de manière directe des interprétations d'identités combinatoires.

Enfin, inversement, certaines questions de nature algébrique peuvent être abordées d'un point de vue combinatoire. Ainsi, à travers l'étude des algèbres dendriformes, des algèbres tridendriformes, et des quadrialgèbres, nous prouvons des questions de liberté à propos de ces algèbres grâce à la combinatoire des arbres étiquetés.

Mots-clés :

Algèbres de Hopf combinatoires ; statistiques sur les permutations ; pics ; vallées ; doubles montées ; doubles descentes ; polynômes de Gandhi ; nombres d'Euler ; algèbres dendriformes ; algèbres tridendriformes ; quadrialgèbres.

Algebraic combinatorics of permutations and their generalisations

Abstract :

This thesis is at the crossroads between combinatorics and algebra. It studies some algebraic problems from a combinatorial point of view, and conversely, some combinatorial problems have an algebraic approach which enables us to solve them.

In the first part, some classical statistics on permutations are studied : the peaks, the valleys, the double rises, and the double descents. We show that we can build subalgebras and quotients of **FQSym**, an algebra which basis is indexed by permutations.

Then, we study classical combinatorial sequences such as Gandhi polynomials, refinements of Genocchi numbers, and Euler numbers in a noncommutative way. In particular, we see that combinatorial interpretations arise naturally from the noncommutative approach.

Finally, we solve some freeness problems about dendriform algebras, tridendriform algebras and quadrialgebras thanks to combinatorics of some labelled trees.

Keywords :

Combinatorial Hopf algebras ; statistics on permutations ; peaks ; valleys ; double rises ; double descents ; Gandhi polynomials ; Euler numbers ; dendriform algebras ; tridendriform algebras ; quadrialgebras.

Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge
UMR 8049
Cité Descartes, Bâtiment Copernic - 5, bd Descartes
Champs-sur-Marne 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2

Table des matières

Introduction

Avant-propos

Combinatoire des identités algébriques

L'un des aspects de la combinatoire consiste à expliquer de manière simple les identités algébriques. Mais ceci ne se résume pas à comprendre une à une chaque identité en introduisant à chaque fois un nouvel objet combinatoire obtenu par des constructions de plus en plus techniques. Il s'agit le plus souvent de comprendre les objets sous-jacents à une identité, puis de poser un cadre dans lequel d'autres objets ont des interprétations analogues. Ainsi, de nombreuses théories ont été développées et permettent d'obtenir des méthodes systématiques d'interprétation combinatoire, comme par exemple :

— la combinatoire des fractions continues et des polynômes orthogonaux ;
— les composés partitionnels ;
— la théorie des espèces.

La première correspond historiquement à des problèmes d'énumération résolus grâce à des fractions continues. Nous pouvons déjà trouver cette approche chez Touchard ([Tou52]). Puis Flajolet dans [Fla80] montre que les fractions continues s'interprètent bien en termes de combinatoire sur les chemins. Il existe de plus de nombreuses bijections entre les chemins et d'autres classes combinatoires, par exemple la bijection de Françon-Viennot ([FV79]). Et les fractions continues sont aussi reliées à des séries génératrices de moments de polynômes orthogonaux. Ainsi, en mettant bout à bout ces observations, une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux a été développée sous l'impulsion entre autres de Viennot ([Vie83]) et est aujourd'hui très active.

La deuxième, développée par Foata et Schutzenberger ([SF70]), est une interprétation combinatoire des formules exponentielles et pose un cadre rigoureux au principe suivant : "la série génératrice exponentielle d'objets étiquetés est l'exponentielle de la série génératrice exponentielle d'objets connexes". Elle a été appliquée pour obtenir des preuves combinatoires de nombreuses formules comme la formule de Mehler ([Foa78]), une identité faisant intervenir les polynômes d'Hermite. Des identités sur les polynômes eulériens découlent également de cette construction ([SF70]) et des problèmes de linéarisations des polynômes orthogonaux peuvent être résolus par cette approche ([KZ01]). Enfin, elle marque le début des fondations de la théorie des espèces.

En effet, le composé partitionnel est l'interprétation combinatoire des formules exponentielles. Force est de constater que de manière générale, la composition de deux séries exponentielles à coefficients entiers positifs est encore à coefficients entiers positifs. Pour expliquer de manière combinatoire ce phénomène, Joyal pose les fondations de la théorie des espèces ([Joy81]). De nombreux résultats combinatoires se traduisent dans cette théorie : on retrouve par exemple une version "espèce" de l'inversion de Lagrange ([Lab81]), de la théorie des équations différentielles ([LV86]), du pléthysme des fonctions symétriques ([Ber87]) et aussi du composé partitionnel ([DM97]). On pourra trouver une introduction à cette théorie dans [BLL$^+$94].

Des algorithmes à la construction d'algèbres

Un autre aspect de la combinatoire est sa force dans les analyses d'algorithmes. Nous n'abordons malheureusement pas cet aspect dans ce mémoire. Par contre, nous utilisons de nombreux algorithmes classiques provenant de l'informatique théorique, comme la standardisation, un algorithme associant à un mot la permutation ayant les mêmes inversions, le "tassement", qui à un mot associe le mot tassé ayant les mêmes occurrences de lettres en conservant l'ordre relatif entre celles-ci, la bijection entre arbres binaires croissants et permutations, l'algorithme d'insertion d'un mot dans

un arbre binaire de recherche. D'un point de vue historique, la standardisation apparaît déjà dans l'article [Sch61] de Schensted, les arbres binaires de recherche se retrouvent dans [Hib62] de Hibbard, tandis que les arbres binaires croissants remontent au moins aux années 70 ([Bur72], [Fra76]). Les applications de ces algorithmes sont nombreuses, et il est difficile, voire impossible, d'en faire une liste exhaustive. Donnons tout de même quelques exemples : la standardisation est à la base de la réalisation polynomiale de l'algèbre de Malvenuto-Retenauer ([MR95], [DHT02]) algèbre graduée dont une base est indexée par les permutations. Les arbres binaires de recherche sont très utilisés en informatique comme structures de données et permettent de construire la réalisation polynomiale de l'algèbre de Loday-Ronco ([LR98], [HNT05]).

Algèbres de Hopf combinatoires et généralisations

L'approche combinatoire ne se limite pas aux équations fonctionnelles ou à l'analyse d'algorithmes : en effet, de manière générale, la présence d'entiers positifs pour un combinatoriste est synonyme d'interprétation combinatoire. Ainsi, elle intervient également en théorie des représentations. Par exemple, si on veut connaître les dimensions des représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, la formule des équerres nous fournit une méthode de calcul. Mais la théorie des représentations des groupes symétriques est elle-même reliée à la théorie des fonctions symétriques (sym). On trouve d'ailleurs déjà ces liens entre combinatoire, représentations du groupe symétrique et fonctions symétriques dans la théorie de Pólya ([Pól37]), qui étudie des problèmes de symétries relevant de la chimie. Les fonctions symétriques sont donc elles aussi riches en combinatoire : la règle de Littlewood-Richardson en est un autre exemple. Énoncée en 1934 ([LR34]), il a fallu attendre les années 1970 avec Thomas ([Tho74]) et Schützenberger ([Sch77]) reposant sur des travaux de Robinson ([Rob38]), Knuth ([Knu70]) et Schensted ([Sch61]) pour en avoir une preuve complète. Aujourd'hui, il existe de nombreuses preuves et variantes de cette règle, notamment ([LLT$^+$02]) où Lascoux, Leclerc et Thibon retrouvent divers résultats sur les tableaux à partir du monoïde plaxique, ou Viennot ([Vie77]) donnant une interprétation géométrique de la correspondance de Schensted, ou Zelevinsky ([Zel81]) généralisant la règle aux formes gauches...

Mais de nombreuses questions restent en suspens à propos de ces fonctions et de leurs généralisations. Une des approches pour aborder ces problèmes est de passer dans le monde des algèbres de Hopf combinatoires. Il s'agit souvent d'algèbres qui correspondent à des raffinements de sym, comme les fonctions quasi-symétriques dues à Gessel ($QSym$ [Ges84]) indexées par les compositions d'entiers et dont sym est une sous-algèbre, les fonctions symétriques non commutatives introduites par Gelfand, Krob, Lascoux, Leclerc, Retakh, Thibon dans [GKL$^+$95] également indexées par les compositions et qui se projettent naturellement sur sym, l'algèbre de Malvenuto-Retenauer (ou **FQSym** [MR95]) dont une base est indexée par les permutations , l'algèbre de Loday-Ronco ([LR98]) dont une base est indexée par les arbres binaires etc. Dans toutes ces algèbres, la combinatoire est mieux appréhendée que dans sym. Par exemple, on peut trouver dans l'algèbre **FSym** (algèbre de Poirier-Retenauer [PR95], [DHT02]) un analogue de la règle de Littlewood-Richardson, dont découle "la vraie". Certaines de ces algèbres admettent une structure plus fine que celle d'algèbre associative, comme **PBT** qui est également l'algèbre dendriforme libre sur un générateur. Ainsi, la combinatoire a aussi sa place dans le monde des opérades, théorie prenant sa source en topologie algébrique pour étudier les espaces de lacets itérés, introduite par May ([May72]) Boardman et Vogt ([Vog73]), Loday lui donnant une nouvelle impulsion à travers de nouveaux exemples d'algèbres ([Lod96], [LR98], [Lod01], [LV12]). Aujourd'hui, cette théorie a des applications dans de nombreux domaines allant de l'informatique théorique ([HNT05]), à la physique théorique ([MSS07]), en passant par les études de nombreuses algèbres comme les algèbres pré-Lie ([CL01]), les algèbres dendriformes ([LR98]), les algèbres tridendriformes ([LR$^+$04]), les quadrialgèbres ([AL04]), et par des généralisations du théorème de Cartier-Milnor-Moore-Quillen, que l'on peut trouver dans [Lod06], [Cha02], [Ron02]...

Contexte

Dans cette thèse, nous abordons des problèmes combinatoires par des méthodes algébriques, et réciproquement, nous résolvons des problèmes de nature algébrique par une approche combinatoire. Ainsi, la construction de certaines algèbres que nous présentons repose sur des bijections et des statistiques sur des objets. Inversement, en relevant dans une algèbre non commutative

des égalités fonctionnelles sur les séries formelles, le déterminisme algébrique permet d'obtenir automatiquement des interprétations combinatoires.

Nous essayons donc d'exploiter les liens entre algèbre et combinatoire qui sont déjà très nombreux : certaines statistiques comme les positions des descentes sur les permutations sont à la base de constructions d'algèbres qui peuvent avoir des interprétations en terme de théorie des représentations ([Sol76]). Les algèbres de Hopf, une des manières de formaliser la combinatoire, fournit des méthodes de calculs efficaces. Inversement, la description combinatoire des algèbres apporte des informations quant à leur structure. En effet, l'étude des algèbres générales (théorie des opérades) peut en effet se faire à l'aide de réalisations combinatoires, celles-ci apportant des informations quant à la "forme" possible d'une algèbre qui au départ est définie de manière abstraite.

Un outil de calcul : les algèbres de Hopf combinatoires

Tout au long de cette thèse, la plupart des calculs sont effectués dans des algèbres de Hopf combinatoires. Ces dernières fournissent un cadre algébrique pour de nombreuses théories, comme :

— les relèvements non commutatifs de fonctions spéciales ;

— la renormalisation.

Pour la première, le calcul dans les algèbres non commutatives à des fins combinatoires est assez ancien : on trouve des calculs dans des algèbres de mots dans [FS73b], [Fla80] et [Ges80]. Aujourd'hui, à travers les algèbres de Hopf combinatoires, les calculs ont lieu avec d'autres objets combinatoires, et on retrouve des fonctions spéciales ou des identités qui ont leur analogue non commutatif, comme les fonctions symétriques ([GKL$^+$95]), les fonctions de Bessel ([NT06b]), ou encore le théorème de Redfield-Pòlya ([BCLM13]).

La seconde, une théorie utilisée en physique, consiste à donner un sens notamment aux intégrales et aux sommes divergentes, et certains de ses problèmes font intervenir des algèbres de Hopf comme celle de Connes-Kreimer ([CK99]), une algèbre de Hopf combinatoire dont une base est indexée par les arbres enracinés. Depuis, de nombreux travaux ont eu lieu dans ce sens ([BF01], ([Foi02]), et la recherche dans cette théorie est en plein essor. Malheureusement, cet aspect des algèbres de Hopf ne sera pas abordé.

Statistiques sur les permutations et constructions d'algèbres

On retrouve l'étude des *valeurs* de pics, de vallées, de doubles montées et de doubles descentes dès les années soixante-dix chez Foata ([FS73b]), chez Françon ([Fra76]), ce dernier étant motivé par des calculs de complexité en informatique. Grâce à celles-ci, Françon et Viennot construisent une bijection ([FV79]) faisant le lien entre le monde des chemins et des permutations. En exploitant le rapport entre fractions continues et chemins ([Fla80]), Viennot pose les bases de la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux ([Vie83]). Une autre classe de statistiques, provenant de la structure cyclique des permutations comme les excédances (les positions i telles que $\sigma_i > i$) a aussi été étudiée ([SF70], [FZ90], [Han92]). Il est à noter que les valeurs de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes ont également leurs analogues dans d'autres objets combinatoires comme les tableaux de permutations introduits par Steingrimsson et Williams dans [SW07] et qui ont des applications dans la combinatoire d'un modèle physique appelé PASEP et dans la combinatoire des polynômes orthogonaux ([CW07], [CW$^+$11], [JV10]).

Les statistiques définies sur une classe combinatoire munie d'une structure d'algèbre permettent la construction de classes d'équivalence et une question naturelle est alors de se demander si la structure d'algèbre "passe" ou non au quotient ou à la sous-algèbre. Par exemple, grâce aux *positions* des descentes d'une permutation σ (les i tels que $\sigma_i > \sigma_{i+1}$), Solomon définit l'algèbre des descentes ([Sol76]). De même, en s'intéressant aux positions des pics, Stembridge construit l'algèbre des pics ([Ste97]) qui a des applications en théorie des représentations ([BHT04]). Grâce aux valeurs des descentes d'une permutation, on peut retrouver une base de **Sym** définie par Tevlin [HNTT09].

Polynômes de Gandhi et nombres d'Euler

Nous abordons ensuite l'étude de deux suites classiques de combinatoire par l'approche non commutative : les polynômes de Gandhi et les nombres d'Euler. Les premiers, historiquement

définis par la récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_0 & = & 1, \\ C_{n+1}(x) & = & x^2 C_n(x+1) - (x-1)^2 C_n(x), \end{array} \right. \tag{1}$$

sont des raffinements des nombres de Genocchi, proposition conjecturée par Gandhi dans [Gan70]. Celle-ci fut prouvée indépendamment par Carlitz dans [Car71] et Riordan et Stein dans [RS73]. Dumont en donne une interprétation combinatoire dans [D$^+$74] en termes de pistolets surjectifs. Plus tard, ces polynômes ont été généralisés par Dumont et Foata ([DF76]), par la récurrence

$$\left\{ \begin{array}{lcl} DF_1 & = & 1, \\ DF_{n+1}(x,y,z) & = & (x+z)(y+z)DF_n(x,y,z+1) - z^2 DF_n, \end{array} \right. \tag{2}$$

avec une interprétation combinatoire en termes de statistiques sur les pistolets. D'autres interprétations ont pu être trouvées par Han dans [Han96]. Une autre propriété remarquable de ces polynômes est leur symétrie en les trois variables, mais il n'existe pas à ce jour une interprétation combinatoire simple de ce fait. Une généralisation à six paramètres a ensuite été définie par Dumont ([Dum95]). Randrianarivony et Zeng en ont donné les propriétés combinatoires ([Ran94], [Zen96]). Plus récemment, dans [HZ99], Han et Zeng ont proposé un q-analogue pour les polynômes de Gandhi et en ont donné une interprétation combinatoire. Dans le contexte de ces polynômes, l'étude non commutative revient à trouver des relèvements de sa définition dans des algèbres de mots.

Nous étudions dans un deuxième temps la suite des nombres d'Euler. Cette suite apparaît régulièrement en combinatoire : en effet, de nombreuses classes combinatoires, comme les permutations alternantes ([And81]), les permutations de Jacobi ([Vie80]), les arbres binaires non plans décroissants et les permutations d'André ([FS$^+$73a]) sont comptées par cette suite.

Rappelons que la suite des nombres de Genocchi et la suite des nombres d'Euler impairs sont intimement reliées par leur série génératrice exponentielle : la première est la fonction $x\tan(\frac{x}{2})$, tandis que la seconde est la fonction $\tan(x)$. D'un point de vue analytique, il est aisé d'exprimer les nombres de Genocchi en fonction des nombres d'Euler et vice versa. Ainsi, l'approche combinatoire pour chacune de ces suites est similaire. Pourtant, il semble qu'il n'y ait pas encore d'interprétation combinatoire simple expliquant le lien entre leur séries génératrices ([Vie82]).

Combinatoire de $\mathcal{P}$-algèbres particulières

Dans la suite, $\mathcal{P}$ désigne une opérade, c'est-à-dire, de manière informelle, une famille d'applications multilinéaires vérifiant des relations entre elles. Autres que les algèbres de séries formelles, de nombreuses algèbres non associatives peuvent être étudiées sous un angle combinatoire. Par exemple, il est connu que certaines algèbres de Hopf combinatoires sont aussi des algèbres dendriformes ([LR98], [HNT05]), d'autres sont des algèbres tridendriformes ([LR$^+$04], [NT06a]) ou des quadrialgèbres ([AL04]). Ainsi, certains problèmes liés à ces algèbres peuvent être abordés du point de vue combinatoire, comme déterminer la série de Hilbert d'une $\mathcal{P}$-algèbre libre sur un générateur. D'ailleurs cette série fait souvent intervenir des objets connus : celle de l'algèbre dendriforme (respectivement algèbre tridendriforme, *resp.* quadrialgèbre) est égale à la série génératrice de la suite des nombres de Catalan ([LR98]) (*resp.* suite des petits nombres de Schröder [NT06a], *resp.* suite des nombres de graphes connexes sans croisement [FN99] [AL04], [Val08]). D'autres problèmes, comme celui de la liberté d'une algèbre se montre généralement par des méthodes algébriques ([Foi07], [BR10]), la liberté devenant un simple corrolaire d'un théorème de structure général. Or, dans une algèbre de Hopf combinatoire, une des manières de montrer la liberté est d'exhiber une base multiplicative comme c'est le cas pour **FQSym** ([DHT02]). On peut alors se demander s'il est possible d'aborder les problèmes de liberté pour d'autres algèbres par des arguments combinatoires.

Plan du mémoire

La thèse est organisée comme suit : nous commençons par introduire les différents outils nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Ceux-ci sont généralement de nature algorithmique et combinatoire : les objets mis en jeux sont des classes combinatoires, des bijections et des algorithmes sur les mots et les arbres. Mais ils dégagent aussi une saveur algébrique : ils sont à la base des réalisations polynomiales des algèbres de Hopf que nous présentons. À la fin des préliminaires, nous donnons des exemples d'applications : le premier est une généralisation des méthodes présentées pour construire d'autres algèbres, en particulier, nous donnons une version "algèbre de Hopf" du composé partitionnel. Le second montre une des manières d'exploiter ces algèbres à travers un exemple classique de combinatoire, les permutations alternantes.

Nous poursuivons par une étude algébrique d'une des bijections présentées : la bijection de Françon-Viennot. Elle fait intervenir deux types d'objets, les permutations et les histoires de Laguerre. Une des propriétés remarquables de cette application est l'obtention d'une lecture simple sur les histoires des valeurs de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes des permutations. De plus, ces statistiques vérifient une certaine stabilité vis-à-vis du produit de shuffle sur les permutations. Nous nous attachons dès lors à décortiquer leurs propriétés algébriques. Une famille cousine des précédentes statistiques, les positions de pics, vallées, doubles montées, doubles descentes construites à partir des positions des descentes d'une permutation, ont elles aussi des propriétés algébriques intéressantes : elles vérifient une certaine stabilité vis-à-vis d'un autre produit sur les permutations, le produit de convolution. Ainsi, nous exploitons ces propriétés pour construire de nouvelles algèbres.

Mais la construction d'algèbres n'est pas une fin en soi : encore faut-il pouvoir trouver des applications à ces nouveaux objets : nous étudions à l'aide du formalisme non commutatif des problèmes de combinatoire à travers deux exemples classiques : les polynômes de Gandhi et les nombres d'Euler. Ainsi, en relevant dans le monde non commutatif la relation de récurrence de ces polynômes, nous obtenons une manière de construire une des classes combinatoires qui "encodent" ces polynômes, les pistolets surjectifs. Une approche identique est faite pour les nombres d'Euler : nous travaillons dans une algèbre non commutative et montrons que certaines bijections existantes deviennent alors naturelles, ou encore que certaines égalités qui peuvent sembler "mystérieuses" dans le monde des séries formelles classiques ont une explication simple dans le monde non commutatif. Sous cet angle, nous constatons que certaines difficultés de la combinatoire, comme trouver une classe combinatoire adaptée à une identité algébrique ou trouver une statistique naturelle définie sur une classe "disparaissent". Il nous est possible à partir de cette méthode de retrouver quelques résultats classiques concernant ces polynômes ou leurs généralisations, et d'exhiber une nouvelle famille d'interprétations pour le q-analogue des polynômes de Gandhi défini par Han et Zeng.

Enfin, nous abordons une étude combinatoire d'algèbres à travers différents exemples : les algèbres dendriformes, les algèbres tridendriformes et les quadrialgèbres. Nous donnons une méthode purement combinatoire similaire à celle employée dans [HNT05] pour l'algèbre dendriforme pour d'une part déterminer la série de Hilbert d'une $\mathcal{P}$-algèbre libre sur un générateur, et d'autre part, aborder les problèmes de liberté d'une $\mathcal{P}$-algèbre. Ainsi, nous fournissons des preuves combinatoires de la liberté de l'algèbre dendriforme **FQSym** (respectivement algèbre tridendrifome **WQSym**, *resp.* quadrialgèbre des 2-permutations objets combinatoires définis dans [NT14]). Nous retrouvons ainsi les résultats de liberté de **FQSym** obtenus par Foissy dans [Foi07] et ceux obtenus par Burgunder et Ronco dans [BR10] à propos de **WQSym**. Enfin, le cas de la quadrialgèbre des 2-permutations semble à priori être un nouveau résultat et est une conjecture laissée par Aguiar et Loday dans [AL04].

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions essentielles pour la suite de ce mémoire. On commence par présenter dans le paragraphe 1.1 des familles d'objets et de classes combinatoires. Puis, dans le paragraphe 1.2 on rappelle quelques algorithmes et bijections qui sont au cœur de constructions d'algèbres. Nous abordons ensuite dans le paragraphe 1.3 une partie introductive concernant les algèbres de Hopf combinatoires et donnons des exemples. Le paragraphe 1.4 est consacré à la dualité. La méthode par réalisation polynomiale est traitée dans le paragraphe 1.5. Enfin, nous appliquons de deux manières différentes les bases de la théorie présentée dans ce début de chapitre dans les paragraphes 1.6 et 1.7. La première consiste à apporter quelques compléments à propos des algèbres **WQSym** et $\mathbf{WQSym}^*$: en particulier, on présente une interpolation entre deux structures de cogèbres de $\mathbf{WQSym}^*$, un analogue de l'identité de Cauchy pour la dualité entre ces deux algèbres et on montre que le composé partitionnel a son analogue dans ces algèbres. L'interpolation de cogèbre se présente comme un résultat dual d'un changement de base présent dans [Mau13], l'identité de Cauchy comme un raffinement de celle donnée dans [DHNT11]. Par contre, l'analogue algébrique du composé partitionnel, théorie développée dans [SF70], semble être nouveau et fournit une nouvelle construction de $\mathfrak{S}QSym$ (paragraphe 1.6.3.4). La seconde application est une approche algébrique d'un résultat classique de combinatoire dû à André ([And81]), à propos de l'interprétation combinatoire des coefficients de la tangente comme permutations alternantes impaires. On montre que cette interprétation combinatoire de la tangente découle naturellement d'une construction de Hivert, Novelli et Thibon ([HNT08b]).

1.1 Quelques objets classiques de combinatoire

1.1.1 Classes combinatoires

Définition 1.1.1. Soit un ensemble $\mathcal{C} = \sqcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_n$. On dit que $\mathcal{C}$ est une *classe combinatoire* si pour chaque entier n, l'ensemble $\mathcal{C}_n$ est fini. Un élément c de $\mathcal{C}$ est appelé *objet combinatoire*. La sous-partie $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ de *taille* n. Le cardinal d'un ensemble E est noté $|E|$.

Exemple 1. Les permutations, les mots sur un alphabet fini, les entiers sont des classes combinatoires.

Définition 1.1.2. Soit $\mathcal{C}$ une classe combinatoire. Sa *série génératrice ordinaire* (ou *série génératrice*) est la fonction

$$Gf_{\mathcal{C}}(t) := \sum_{n\geq 0} |\mathcal{C}_n| t^n, \tag{1.1}$$

et sa *série génératrice exponentielle* est la fonction

$$Gfe_{\mathcal{C}}(t) := \sum_{n\geq 0} |\mathcal{C}_n| \frac{t^n}{n!}. \tag{1.2}$$

1.1.2 Mots finis

Définition 1.1.3. Soit A un alphabet. Un *mot fini* sur A est une suite finie de lettres de A. On le représente généralement sous la forme $w = a_1 \cdots a_n$. Dans ce cas, n est appelé la longueur ou

taille du mot w (noté $l(w)$), $|w|_B$ désigne le nombre de w_i appartenant à l'ensemble B. Si B est un singleton $\{a\}$, le nombre $|w|_{\{a\}}$ correspond au nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot w. On note $|w|_a := |w|_{\{a\}}$, et A^* l'ensemble des mots sur A.

Exemple 2. Si $A = \{a, b, c, d\}$, et $w = aabaaccddbaa$, alors w est bien dans A^*, et $|w|_b = 2$. La série génératrice des mots sur l'alphabet A est donnée par

$$\sum_{n\geq 0} 4^n t^n = \frac{1}{1-4t}. \tag{1.3}$$

Démonstration. Appliquons la méthode non commutative pour déterminer cette série génératrice. Bien que la preuve soit plus complexe, elle apporte une nouvelle approche dans la recherche des séries génératrices.

On a l'identité classique

$$\frac{1}{1-(a+b+c+d)t} = \sum_{n\geq 0}(a+b+c+d)^n t^n. \tag{1.4}$$

En développant $(a+b+c+d)^n$, on obtient

$$\sum_{n\geq 0}(a+b+c+d)^n t^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{\substack{w\in A^*,\\ l(w)=n}} w t^n, \tag{1.5}$$

le membre droit étant la série des mots sur A filtrés suivant leur taille.

Or substituer les lettres de A par la valeur 1 est un morphisme d'algèbre. En particulier l'identité (1.5) est encore vraie après substitution. Mais le membre droit de (1.5) est projeté sur

$$\sum_{n\geq 0} |\{w \in A^* |\ l(w) = n\}| t^n, \tag{1.6}$$

tandis que le membre gauche est projeté sur

$$\sum_{n\geq 0} 4^n t^n. \tag{1.7}$$

On en déduit que la série génératrice des mots sur A est donnée par

$$\sum_{n\geq 0} 4^n t^n = \frac{1}{1-4t}. \tag{1.8}$$

□

Définition 1.1.4. Soit X un alphabet. Un *monôme* sur X ou *mot commutatif* est une classe d'équivalence de l'ensemble des mots finis pour la relation "avoir les mêmes permutés". Autrement dit, dans le cas des monômes, l'ordre des lettres n'a plus d'importance. Un monôme est donc caractérisé par le nombre d'occurrences de chacune de ses lettres. On note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des monômes sur X.

Exemple 3. Si on considère $X = \{x, y, z\}$, alors x^2yz et $xyxz$ représentent le même monôme. La série génératrice dans ce cas est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)^3}. \tag{1.9}$$

Démonstration. En ordonnant les lettres de X ($x < y < z$), nous remarquons que tout monôme de taille n est associé à un unique mot croissant de taille n, cette correspondance étant bijective. En particulier, ces deux ensembles sont de même cardinal. Or, les mots croissants sont obtenus en prenant le produit

$$\frac{1}{1-xt}\frac{1}{1-yt}\frac{1}{1-zt} = \sum_{n\geq 0}\sum_{\substack{w\in X^*,\\ w\nearrow\\ l(w)=n}} w t^n. \tag{1.10}$$

En spécialisant x, y, z à 1, on retrouve

$$\frac{1}{(1-t)^3} = \sum_{n\geq 0} |\{w \in X^* | l(w) = n,\ w \nearrow\}| t^n. \tag{1.11}$$

Le résultat découle alors de la bijection entre les mots croissants et les monômes. □

1.1.3 Partitions d'ensembles, mots tassés et compositions d'ensembles

Définition 1.1.5. Une *partition* P de l'ensemble E est un ensemble tel que :
— pour tout I appartenant à P, l'ensemble I est non vide ;
— pour tout I et J éléments de P, si $I \neq J$ alors $I \cap J = \emptyset$;
— $\cup_{I \in P} I = E$.
On note $\mathcal{P}(n)$ la classe des partitions de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$, et on pose $\mathcal{P} := \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(n)$. Plus généralement, $\mathcal{P}(E)$ désigne la classe des partitions de l'ensemble E.

Exemple 4. L'ensemble $\{\{1,2\},\{4,6,7\},\{5\},\{3\}\}$ est un élément de $\mathcal{P}(7)$.

La série génératrice exponentielle de $\mathcal{P}$ est égale à

$$f(t) = \exp(\exp(t) - 1). \tag{1.12}$$

Définition 1.1.6. Un *mot tassé* de taille n est un mot $w = w_1 \cdots w_n$ tel que si un entier strictement positif k est une lettre de w, alors les lettres comprises entre 1 et k apparaissent aussi dans w.

L'ensemble des mots tassés de longueur n et la classe combinatoire des mots tassés sont notés respectivement $\mathcal{MT}(n)$ et $\mathcal{MT}$.

Exemple 5. Le mot 1132422 est bien un mot tassé, tandis que 14355 n'en est pas un.

Un mot tassé w peut être vu comme une surjection f de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, k\}$, en considérant que la i^{e} lettre de w est l'image de i par f. Réciproquement, en écrivant une surjection f de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, k\}$ sous la forme $f(1)f(2)\cdots f(n)$, on a bien un mot tassé. La représentation des surjections sous forme de mots tassés est donc une bijection entre ces deux classes.

Définition 1.1.7. Une *composition de l'ensemble* (ou *partition ordonnée de l'ensemble*) $\{1, \cdots, n\}$ est une partition de $\{1, \cdots, n\}$ dans laquelle les blocs ont été ordonnés.

L'ensemble des compositions de $\{1, \cdots, n\}$ est noté $\mathcal{PO}(n)$ et on pose $\mathcal{PO} := \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{PO}(n)$.

Exemple 6. $\{1,2\}\{4,6,7\}\{3\}\{5\}$ est une composition de $\mathcal{PO}(7)$.

De même, une partition ordonnée de $\{1, \cdots, n\}$ peut être vue comme une application surjective f de $\{1, \cdots, n\}$ vers $\{1, \cdots, k\}$: le i^{e} bloc correspond alors à $f^{-1}(i)$. Réciproquement, soit f une surjection de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, k\}$. L'élément $f^{-1}(1)f^{-1}(2)\cdots f^{-1}(k)$ est bien une composition de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$, les deux correspondances entre compositions de $\{1, \cdots, n\}$ et surjections étant réciproques l'une de l'autre.

Remarque 1. L'ensemble des mots tassés de taille n et la classe des compositions de $\{1, \cdots, n\}$ sont tous les deux de même cardinal car ils sont en bijection avec l'ensemble des surjections de $\{1, \cdots, n\}$ dans un ensemble de la forme $\{1, \cdots, k\}$. On explicitera cette correspondance ultérieurement.

Les premiers termes de la suite $(|\mathcal{MT}_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donnés par ([Slo] *A*000670)

$$1,\ 1,\ 3,\ 13,\ 75, \cdots$$

La série génératrice exponentielle de $\mathcal{MT}$ est égale à

$$f(t) = \frac{1}{2 - \exp(t)}. \tag{1.13}$$

1.1.4 Permutations

Définition 1.1.8. Une *permutation* de taille n est un mot de n lettres, où tous les entiers de 1 à n apparaissent une et une seule fois. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de taille n, et $\mathfrak{S}$ désigne $\sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$.

Exemple 7. $\sigma = 4172653$ est une permutation de taille 7.

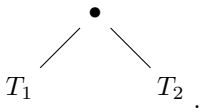
La série génératrice exponentielle de $\mathfrak{S}$ est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{1 - t}. \tag{1.14}$$

1.1.5 Arbres binaires

Définition 1.1.9. Un *arbre binaire* T est :
— soit l'ensemble vide $\emptyset$,
— soit un triplet de la forme $(\bullet, T_1, T_2)$ où T_1 et T_2 sont des arbres binaires.
Les arbres T_1 et T_2 sont appelés respectivement fils gauche et fils droit de T, la taille d'un arbre binaire est donnée par son nombre de nœuds, autrement dit par le nombre de $\bullet$ apparaissant dans T.

On représente généralement un arbre binaire T sous la forme :



On note $\mathcal{BT}$ (*resp.* $\mathcal{BT}_n$) l'ensemble des arbres binaires (*resp.* l'ensemble des arbres binaires de taille n).

Les premiers termes de la suite $(|\mathcal{BT}_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donnés par ([Slo] $A000108$)

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, \cdots,$$

et la série génératrice de $\mathcal{BT}$ est égale à

$$f(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}. \tag{1.15}$$

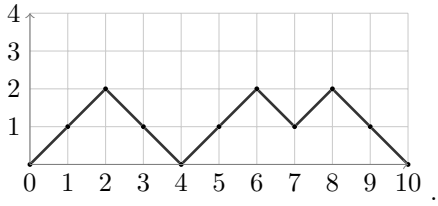
Remarque 2. Cette suite de nombres, communément appelés nombres de Catalan, fait partie des suites classiques de combinatoire. En effet, la littérature à leur sujet est abondante et cette suite compte de nombreuses classes combinatoires. Ainsi, on trouve dans [Sta11] plus de deux cents classes combinatoires comptées par ces nombres.

1.1.6 Chemins

Définition 1.1.10. Un *mot de Dyck* est un mot w sur l'alphabet $\{a,\ b\}$ tel que
— $|w|_a = |w|_b$;
— pour tout préfixe p de w, $|p|_a \geq |p|_b$.
Un *chemin de Dyck* est un chemin dans le plan Oxy, commençant en $(0,0)$, terminant sur l'axe Ox, restant au-dessus de celui-ci, et ayant comme type de pas $(1,1)$ et $(1,-1)$.

Remarque 3. Via la correspondance $a \longleftrightarrow (1,1)$, et $b \longleftrightarrow (1,-1)$, on constate que les mots de Dyck de longueur $2n$ sont en bijection avec les chemins de Dyck de longueur $2n$.

Exemple 8. Le mot $w = aabbaababb$ est représenté graphiquement par le chemin

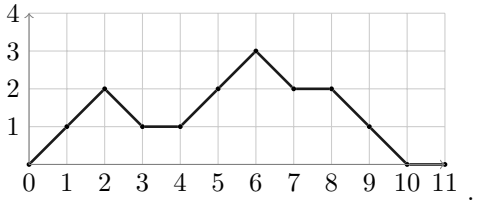


Le nombre de chemins de Dyck de taille $2n$ est exactement le n^{e} nombre de Catalan. Les chemins de Dyck sont donc une des nombreuses interprétations combinatoires de ces nombres. On note respectivement $\mathcal{D}yck$ et $\mathcal{D}yck_n$ la classe des chemins de Dyck et la classe des chemins de Dyck de demi-longueur n.

Définition 1.1.11. Un *mot de Motzkin* est un mot w sur l'alphabet $\{a,\ b,\ c\}$ tel que
— $|w|_a = |w|_b$;
— pour tout préfixe p de w, $|p|_a \geq |p|_b$.
Un *chemin de Motzkin* est un chemin dans le plan Oxy, commençant en $(0,0)$, terminant sur l'axe Ox, restant au-dessus de celui-ci (au sens large), et ayant comme type de pas $(1,1)$, $(1,0)$ et $(1,-1)$.

Remarque 4. Via la correspondance $a \longleftrightarrow (1,1)$, $b \longleftrightarrow (1,1)$, et $c \longleftrightarrow (1,0)$, on en déduit une bijection entre les mots de Motzkin et les chemins de Motzkin. Ainsi, les chemins peuvent être vus comme une représentation graphique des mots de Motzkin.

Exemple 9. Le mot $w = aabcaabcbbc$ est représenté par le chemin



.

La série génératrice des chemins de Motzkin est égale à

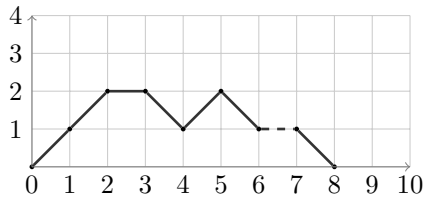
$$f(t) = \frac{1 - t - \sqrt{1 - 2t - 3t^2}}{2t^2}, \tag{1.16}$$

la taille d'un chemin étant donnée par le nombre de pas.

Définition 1.1.12. Un *chemin de Motzkin bicoloré* de taille n est un chemin situé au-dessus de l'axe des abscisses qui commence en $(0,0)$ et qui se termine en $(n,0)$, les pas possibles étant le pas montant $(1,1)$, le pas descendant $(1,-1)$, et les pas horizontaux $(1,0)$ et $\overline{(1,0)}$. L'ensemble des chemins de Motzkin bicolorés de taille n est noté $\mathcal{M}b_n$ et on pose

$$\mathcal{M}b := \sqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}b_n. \tag{1.17}$$

Exemple 10. Voici un chemin de Motzkin bicoloré de taille 8 :



.

Les premiers coefficients de la série génératrice de $\mathcal{M}b$ sont ([Slo] $A000108$)

$$1, 2, 5, 14, 42, \cdots \tag{1.18}$$

Ainsi, le nombre de tels chemins de taille n est le $(n+1)^{\text{e}}$ nombre de Catalan.

1.1.7 Compositions

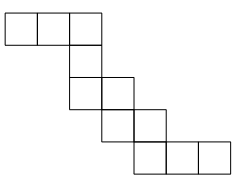
Définition 1.1.13. Une *composition* de l'entier n est un k-uplet $I = (i_1, \cdots, i_k)$ d'entiers strictement positifs, tel que

$$\sum_{j=1}^{k} i_j = n.$$

La notation $I \vDash n$ signifie que I est une composition de n. Une composition admet également une représentation sous forme de diagramme appelé *ruban* construit comme suit :

— si la composition I est égale à (n), le ruban correspondant est une suite de n boîtes ;
— sinon, le ruban de $I = (i_1, \cdots, i_r)$ est construit en plaçant la première boîte du ruban de (i_r) sous la dernière boîte du ruban de $(i_1, \cdots, i_{r-1})$.

Exemple 11. Pour la composition $I = (3,1,2,2,3)$, le ruban correspondant est



.

La série génératrice des compositions d'entiers est égale à

$$f(t) = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^{n-1}t^n = 1 + \frac{t}{1-2t}. \tag{1.19}$$

1.2 Algorithmes et applications classiques de combinatoire

Les algorithmes présentés dans la suite, qui au premier abord semblent être des constructions ensemblistes, recèlent des propriétés algébriques : d'une manière ou d'une autre, nous utiliserons ces applications pour construire des algèbres. Par exemple, grâce au tassement, il est possible de construire **WQSym**. La standardisation fournit une réalisation polynomiale de l'algèbre de Malvenuto-Reutenauer, l'insertion dans un arbre binaire de recherche donne une manière élégante d'obtenir **PBT**, et la construction de la composition des descentes d'une permutation est à la base de la définition de l'algèbre **Sym**.

D'autre part, les bijections permettent dans le cas favorable de simplifier certaines démonstrations. En effet, l'étude des propriétés d'une classe combinatoire peut s'avérer ardue. Différentes stratégies sont alors envisageables. L'une d'entre elles consiste à trouver une bijection avec une autre classe, où la propriété étudiée apparaît comme une évidence. Parfois, il ne s'agit pas d'une bijection, mais d'une surjection, ou d'une application ayant de "bonnes" propriétés. Par exemple, pour étudier les valeurs de pics, vallées, doubles montées, doubles descentes sur les permutations, il est possible de faire appel aux arbres croissants (ou décroissants) ou à la bijection de Françon-Viennot, ces statistiques ayant une représentation simple dans les arbres croissants ou les histoires de Laguerre.

1.2.1 Tassement et standardisation

Soit A un alphabet infini totalement ordonné. L'algorithme de tassement *tas* est une fonction de A^* vers $\mathcal{MT}$, qui associe au mot w le mot tassé $tas(w)$, obtenu en remplaçant la i-ème plus petite lettre de w par l'entier i.

Exemple 12. Pour $A = \{a_1 < \cdots < a_n < \cdots\}$, et $w = a_4a_4a_9a_6a_{18}a_6a_6$, on a $tas(w) = 1132422$.

Définition 1.2.1. Soit A un alphabet infini totalement ordonné. Soit w un mot sur A, et n sa longueur. Le *standardisé* de w (noté $\mathrm{std}(w)$) est la permutation de taille n ayant exactement les mêmes inversions que w. On rappelle qu'une inversion est un couple (i, j), tel que $i < j$ et $w_i > w_j$.

Exemple 13. Le mot $w = abaacba$, a pour standardisé $\mathrm{std}(w) = 1523764$.

Une façon de procéder pour déterminer le standardisé le mot, est l'algorithme suivant :

```
entrée : mot w de longueur n;
sortie : std(w);
initialiser i à 1;
faire
    {
           lire le mot w de gauche à droite;
           trouver la première occurrence de la plus petite lettre
           de w non remplacée;
           la remplacer par i;
           incrémenter i de 1;
    }
tant que i est différent de n (ou de façon équivalente, toutes les lettres
n'ont pas été remplacées).
```

Exemple 14. Dans le cas où $w = abaacba$, on obtient successivement les étapes suivantes :

1. $1baacba$;
2. $1b2acba$;
3. $1b23cba$;
4. $1b23cb4$;

5. $1523cb4$;
6. $1523c64$;
7. 1523764.

1.2.2 Involutions classiques sur les mots

1.2.2.1 La lecture droite-gauche

Soit A un alphabet. La lecture droite-gauche rev est définie par

$$\begin{array}{rccc} rev : & A^* & \longrightarrow & A^* \\ & w = a_1 \cdots a_n & \longmapsto & a_n a_{n-1} \cdots a_1. \end{array}$$

Exemple 15. Pour $w = 4112$, on a $rev(w) = 2114$.

1.2.2.2 Le retournement d'alphabet

Soit A un alphabet totalement ordonné. Nous définissons le retournement d'alphabet ω par

$$\begin{array}{rccc} \omega : & A^* & \longrightarrow & A^* \\ & w = a_1 \cdots a_n & \longmapsto & b_1 \cdots b_n, \end{array}$$

où $b_1 \cdots b_n$ est construit de la façon suivante. Soit $[\alpha_1, \cdots, \alpha_k]$ la liste des lettres de w triée dans l'ordre croissant. Remplaçons chaque lettre $a = \alpha_i$ de w par la lettre α_{k-i}. Le mot obtenu est alors $b_1 \cdots b_n$.

Exemple 16. On prend comme alphabet $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$, et $w = 223316$. Alors $\omega(w) = 332261$.

1.2.3 Bijection de Françon-Viennot

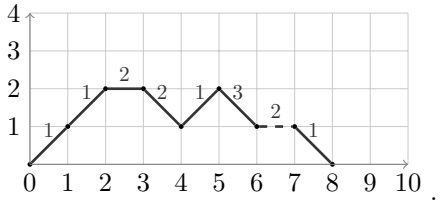
Cette bijection est entre l'ensemble des permutations et une famille de chemins : les histoires de Laguerre. Nous commençons donc par définir ces dernières, puis nous présentons la bijection ainsi qu'une variante. Enfin, nous l'appliquons à l'étude de statistiques sur les permutations.

Définition 1.2.2. Une *histoire de Laguerre* est un chemin à poids construit à l'aide de quatre types de pas, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$, et $\overline{(1,0)}$ tel que :
- le chemin commence en $(0,0)$, est toujours au-dessus de l'axe des abscisses et termine sur celui-ci ;
- tout pas du chemin situé à l'abscisse k a un poids j compris entre 1 et $k+1$.

On note respectivement $\mathcal{HL}$ et $\mathcal{HL}_n$, la classe des histoires de Laguerre et l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur n.

Remarque 5. Le chemin sous-jacent d'une histoire de Laguerre est un chemin de Motzkin bicoloré.

Exemple 17. Le chemin suivant représente une histoire de Laguerre de longueur 8 :



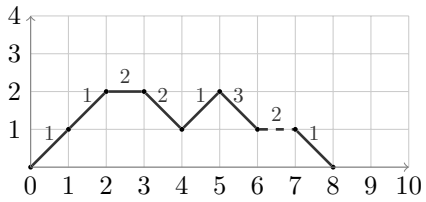
Donnons l'algorithme qui construit à partir d'une histoire de Laguerre de taille $n-1$, une permutation de taille n.
- Entrée : h une histoire de Laguerre de taille $n-1$.
- Sortie : permutation de taille n.
- Initialisation : $w = \infty$.

On lit h de gauche à droite, et chaque pas de h modifie le mot w de la façon suivante : si t est le type du i-ème pas et j son poids, alors le j-ème ∞ est remplacé par :

$$\begin{cases} i & \text{si } t \text{ est un } (1,-1)\,; \\ \infty i \infty & \text{si } t \text{ est un } (1,1)\,; \\ i\infty & \text{si } t \text{ est un } (1,0)\,; \\ \infty i & \text{si } t \text{ est un } \overline{(1,0)}. \end{cases}$$

Enfin, le dernier ∞ est remplacé par n.

Exemple 18. En prenant h égale à l'histoire suivante :



On obtient la suite de mots

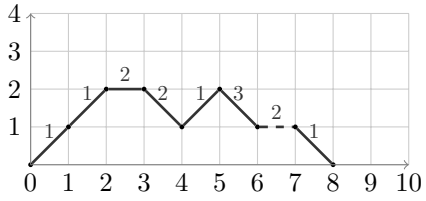
				∞				
			∞	1	∞			
		∞	2	∞	1	∞		
		∞	2	3	∞	1	∞	
		∞	2	3	4	1	∞	
	∞	5	∞	2	3	4	1	∞
	∞	5	∞	2	3	4	1	6
∞	5	∞	7	2	3	4	1	6
8	5	∞	7	2	3	4	1	6
8	5	9	7	2	3	4	1	6

.

Ainsi, on a $FV(h) = 859723416$.

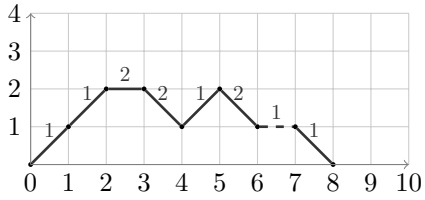
Cette bijection admet quelques variantes qui sont elles aussi utiles dans l'étude des statistiques sur les permutations. Par exemple, déterminons les histoires s'envoyant sur les permutations laissant fixe le dernier point. Soit h une histoire de Laguerre de taille n telle que $FV(h)(n+1) = n+1$. Dans l'algorithme, il est alors nécessaire et suffisant de toujours laisser un ∞ à l'extrémité droite. Or, deux pas à poids donnent une valeur fixe à cette extrémité : les pas $\overline{(1,0)}$ et $(1,-1)$ avec le poids maximal possible. On en déduit que h est un chemin où les poids des pas du type $\overline{(1,0)}$ et $(1,-1)$ sont compris entre 1 et k, où k est l'abscisse du pas correspondant. En particulier, ces pas n'apparaissent pas sur l'axe des abscisses. Réciproquement, l'algorithme appliqué à un tel chemin laisse toujours l'extrémité droite égale à ∞. On en déduit donc que $FV(h)$ laisse fixe $n+1$ si et seulement si h est une histoire de Laguerre de taille n où les poids des pas du type $\overline{(1,0)}$ et $(1,-1)$ sont compris entre 1 et k, où k est l'abscisse du pas correspondant. Ces chemins sont appelés *histoires de Laguerre strictes* de longueur n. On note respectivement $\mathcal{HL}'_n$ et $\mathcal{HL}'$ l'ensemble des histoires de Laguerre strictes de taille n et l'union sur $\mathbb{N}$ de tous ces ensembles, et la bijection résultante entre $\mathcal{HL}'_n$ et $\mathfrak{S}_n$ est notée FV_2.

Exemple 19. Le chemin h



n'est pas dans $\mathcal{HL}'$, car le sixième pas est descendant et est de poids 3, alors qu'il est situé en abscisse 2.

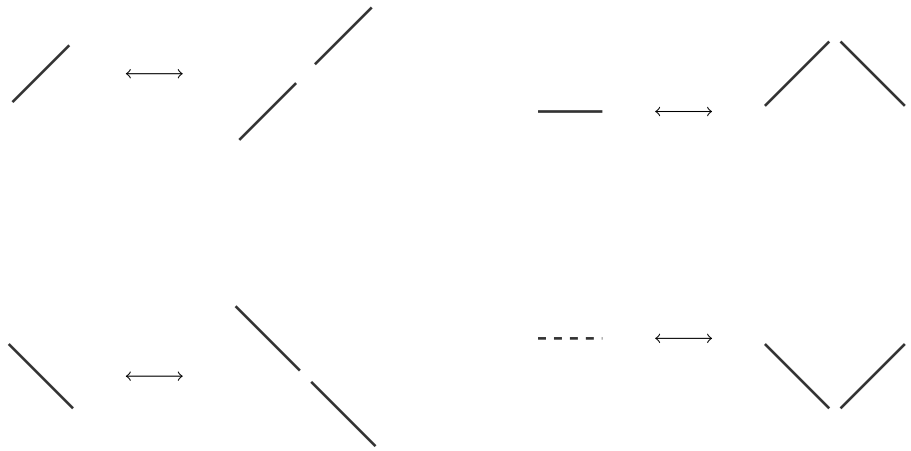
Mais le chemin h



est bien dans $\mathcal{HL}'$.

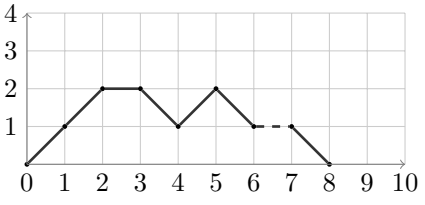
On définit respectivement CM'_n et CM' les ensembles de chemins sous-jacents (sans les poids) aux éléments de $\mathcal{HL}'_n$ et $\mathcal{HL}'$. Il s'agit de sous-classes des chemins de Motzkin bicolorés : en effet, au niveau de l'axe des abscisses, ces chemins ne comportent pas de pas du type $\overline{(1,0)}$.

Il existe une bijection simple entre chemins de Dyck de longueur $2n$ et chemins de CM' de longueur n. En effet, elle repose sur la correspondance suivante entre un type de pas d'un chemin de CM' et deux pas consécutifs d'un chemin de Dyck :



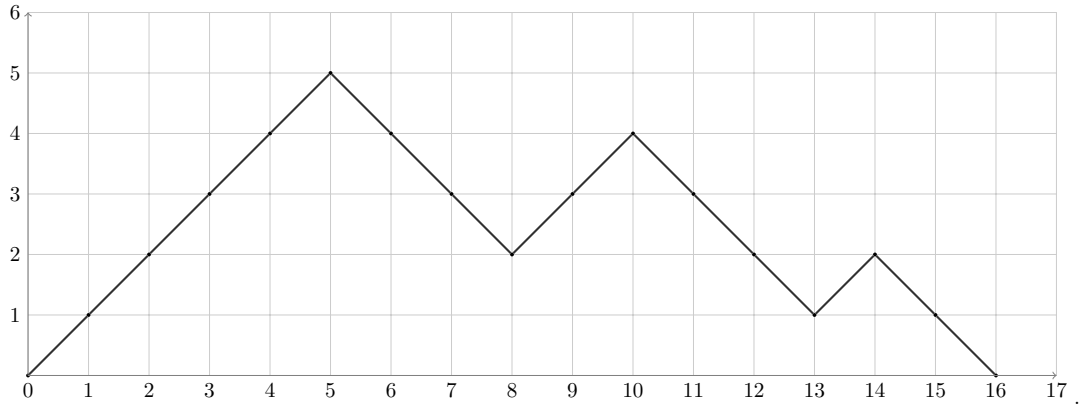
On note cette bijection κ.

Exemple 20. Si h est égal à



,

alors $\kappa(h)$ est égal à



.

Grâce à FV_2 et κ, nous obtenons une manière de projeter les permutations sur les chemins de Dyck. Posons $PVD := \kappa \circ p \circ FV_2^{-1}$, où p est la projection de $\mathcal{HL}'$ dans CM' qui consiste à oublier

les poids d'une histoire. L'application κ ainsi construite est une surjection des permutations dans les chemins de Dyck. Elle sera utilisée ultérieurement pour comprendre une algèbre construite à partir de statistiques sur les permutations.

Utilisons la bijection de Françon-Viennot pour étudier les valeurs de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes des permutations.

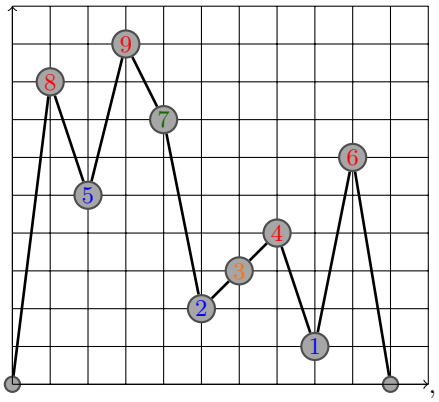
Définition 1.2.3. On dit que σ_i est une valeur de :

$$\begin{array}{lll} \textit{-pic} & \text{si} & \sigma_{i-1} < \sigma_i > \sigma_{i+1}\,; \\ \textit{-vallée} & \text{si} & \sigma_{i-1} > \sigma_i < \sigma_{i+1}\,; \\ \textit{-double montée} & \text{si} & \sigma_{i-1} < \sigma_i < \sigma_{i+1}\,; \\ \textit{-double descente} & \text{si} & \sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}. \end{array}$$

On note $P(\sigma)$ (respectivement $V(\sigma)$, $Dm(\sigma)$, $Dd(\sigma)$) les valeurs de pics (respectivement vallées, double montées, double descentes) de σ. Le *statut* de σ_i désigne la statistique associée à σ_i.

Cette définition est incomplète : pour une permutation σ de taille n, le statut des lettres σ_1 et σ_n n'est pas bien défini. Il est alors nécessaire de se fixer une convention. Généralement, on pose $\sigma_0 = a$ et $\sigma_{n+1} = b$, avec a et b dans $\{0, \infty\}$ (noté par convention $a - b$). Par exemple, la convention $0 - 0$ correspond à $\sigma_0 = 0$ et $\sigma_{n+1} = 0$. Grâce au retournement d'alphabet ω, un problème portant sur les conventions $\infty - \infty$ ou $\infty - 0$ se ramène à un problème portant sur les conventions $0 - 0$ ou $0 - \infty$. Ainsi, il suffit d'étudier les propriétés de ces statistiques pour les conventions $0 - 0$ et $0 - \infty$.

Exemple 21. Pour la convention $0 - 0$ et $\sigma = 859723416$, on a :

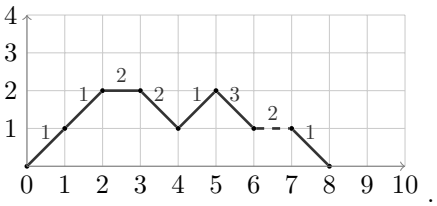


,

et

$$\begin{array}{rc} P(\sigma) = & \{8, 9, 4, 6\} \\ V(\sigma) = & \{5, 2, 1\} \\ Dm(\sigma) = & \{3\} \\ Dd(\sigma) = & \{7\} \end{array} \quad . \tag{1.20}$$

Or, l'histoire $h = FV^{-1}(\sigma)$ est égale à



.

Nous remarquons que la valeur $i < 9$ de σ est :
- un pic si et seulement si le i^{e} pas de h est $(1, -1)$;
- une vallée si et seulement si le i^{e} pas de h est $(1, 1)$;
- une double montée si et seulement si le i^{e} pas de h est $(1, 0)$;
- une double descente si et seulement si le i^{e} pas de h est $(1, 0)$.

Pour la convention $0 - 0$, ce dernier constat est une propriété générale.

Proposition 1.2.4. *Soit σ une permutation de taille n. Alors une valeur $i < n$ est :*

— *un pic si et seulement si le* i^e *pas de* $FV^{-1}(\sigma)$ *est* $(1,-1)$ *;*
— *une vallée si et seulement si le* i^e *pas de* $FV^{-1}(\sigma)$ *est* $(1,1)$ *;*
— *une double montée si et seulement si le* i^e *pas de* $FV^{-1}(\sigma)$ *est* $\underline{(1,0)}$ *;*
— *une double descente si et seulement si le* i^e *pas de* $FV^{-1}(\sigma)$ *est* $\overline{(1,0)}$.

Pour la convention $0-\infty$, il suffit de remplacer dans la proposition précédente $i<n$ par $i\leq n$ et FV par FV_2.

Traduisons cette propriété à travers la projection PVD.

Proposition 1.2.5. *Soit* σ *une permutation de taille* n*. Alors la valeur* $i\leq n$ *de* σ *est :*
— *un pic si et seulement si les* $(2i-1)^e$ *pas et* $2i^e$ *pas de* $PVD(\sigma)$ *sont montants ;*
— *une vallée si et seulement si les* $(2i-1)^e$ *pas et* $2i^e$ *pas de* $PVD(\sigma)$ *sont descendants ;*
— *une double montée si et seulement si le* $(2i-1)^e$ *pas de* $PVD(\sigma)$ *est montant et le* $2i^e$ *pas est descendant ;*
— *une double descente si et seulement si le* $(2i-1)^e$ *pas de* $PVD(\sigma)$ *est descendant et le* $2i^e$ *pas est montant.*

1.2.4 Arbres binaires de recherche

On rappelle la construction de l'arbre binaire de recherche d'un mot w.

1. On lit le mot de droite à gauche ;
2. si l'arbre est vide, on le remplace par la lettre courante. Sinon, on insère la lettre courante dans le fils gauche (droit) si sa valeur est plus petite (strictement plus grande) que la valeur racine.

On note $\mathcal{T}(w)$ l'arbre binaire de recherche de w.

Exemple 22. Si $w=212132382$, alors $\mathcal{T}(w)$ est égal à

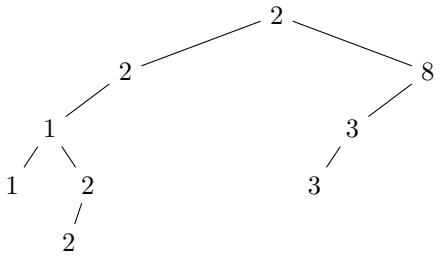


FIGURE 1.1 – Arbre binaire de recherche de $w=212132382$.

1.2.5 Applications entre permutations et arbres

Il existe différentes façons d'étiqueter un arbre binaire. Dans notre cas, on pourra considérer l'étiquetage croissant et décroissant.

Définition 1.2.6. Un *arbre croissant (décroissant)* de taille n est un arbre binaire de taille n tel que :
— les nœuds sont étiquetés par les entiers de 1 à n ;
— deux nœuds différents ont des étiquettes différentes ;
— un fils a une étiquette plus grande (petite) que son père.

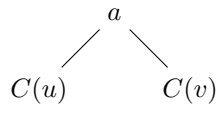
On note $\mathcal{AbC}_n$ ($\mathcal{AbD}_n$) les arbres croissants (décroissants) de taille n, et on pose $\mathcal{AbC}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{AbC}_n$ ($\mathcal{AbD}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{AbD}_n$).

Définition 1.2.7. Soit T un arbre binaire étiqueté. La *lecture infixe* de T est la lecture des étiquettes de l'arbre de T définie de manière récursive de la façon suivante :

1. on lit d'abord dans l'ordre infixe le sous-arbre gauche,
2. puis on lit l'étiquette de la racine,
3. enfin on lit dans l'ordre infixe le sous-arbre droit.

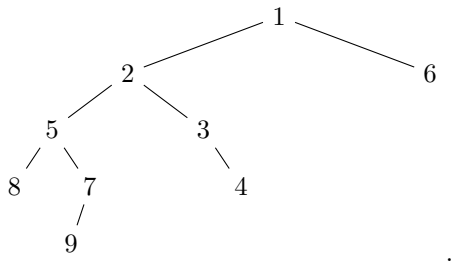
Exemple 23. La lecture infixe de l'arbre de la figure 1.1 est 112222338.

La bijection entre permutations de taille n et $\mathcal{AbC}_n$ est donnée par la lecture infixe des étiquettes d'un arbre croissant. On note $If(T)$ le mot obtenu en lisant T dans l'ordre infixe. Le sens réciproque correspond à l'algorithme récursif suivant. Soit w un mot sans répétition de lettres de taille n. Si $n = 0$, l'arbre croissant correspondant est l'arbre vide. Sinon, $w = uav$, où u et v sont des facteurs de w, et a la lettre minimale de w. L'arbre croissant de w est alors :



où $C(u)$ et $C(v)$ sont respectivement les arbres croissants de u et v. De la même façon, on peut construire l'arbre décroissant d'un mot. Cette fois-ci, on considère la lettre maximale du mot. On note respectivement $C(w)$ et $D(w)$ l'arbre croissant et décroissant de w.

Exemple 24. Si $\sigma = 859723416$, l'arbre $C(\sigma)$ est égal à :



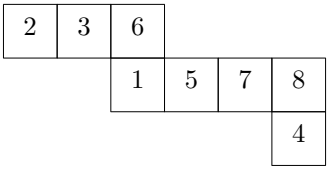
.

Exemple 25. Pour $w = 1132422$, on a $\phi(w) = \{1,2\}\{4,6,7\}\{3\}\{5\}$.

1.2.6 Compositions et permutations

Soit σ une permutation de taille n. Une position i comprise entre 1 et $n-1$ est une *descente* si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. L'ensemble des descentes d'une permutation est noté $\mathrm{des}(\sigma) = \{i_1, \cdots, i_r\}$, et la composition $(i_1, i_2 - i_1, \cdots; n - i_r)$ est la composition des descentes de σ (noté $C(\sigma)$).

Exemple 26. Pour $\sigma = 23615784$, on a $\mathrm{des}(\sigma) = \{3,7\}$ et $C(\sigma) = (3,4,1)$. Ainsi, on peut inscrire σ dans le ruban qui lui est associé :



.

En raffinant la notion de position de descentes, nous obtenons d'autres statistiques.

Définition 1.2.8. Soit σ dans $\mathfrak{S}_n$ et i compris entre 2 et $n-1$. Le *statut* de la position i est :

$$\begin{array}{ll} \text{-un } \textit{pic} & \text{si } \sigma_{i-1} < \sigma_i > \sigma_{i+1}, \\ \text{-une } \textit{vallée} & \text{si } \sigma_{i-1} > \sigma_i < \sigma_{i+1}, \\ \text{-une } \textit{double montée} & \text{si } \sigma_{i-1} < \sigma_i < \sigma_{i+1}, \\ \text{-une } \textit{double descente} & \text{si } \sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}. \end{array} \tag{1.21}$$

Par convention, les positions 1 et n n'ont aucun statut. Constatons que les positions de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes d'une permutation σ ne dépendent que de la forme du ruban de σ.

Il est alors important de différencier la construction de ces quatre statistiques définies par rapport aux valeurs ou aux positions : pour $\mathfrak{S}_n$, la relation "avoir les mêmes ensembles de valeurs de pics, vallées, doubles montées, doubles descentes" définit C_n classes, tandis que la relation "avoir les mêmes ensembles de positions de pics, vallées, doubles montées, doubles descentes" en définit 2^{n-1}. Il se pourrait que la première soit plus fine que la deuxième, mais ce n'est pas le cas. En effet, à cause du nombre de classes, la deuxième relation ne peut pas être plus fine que la première. Et pour la convention $0 - 0$, les permutations 15234 et 13524 ont les mêmes ensembles de valeurs de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes, mais ont des rubans de forme différente. Il en résulte que ces deux relations ne sont pas comparables.

1.3 Algèbres de Hopf combinatoires

Avant de donner toutes les définitions concernant les algèbres de Hopf, rappelons quelques notations classiques d'algèbres linéaires. Si E et F sont deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E,F)$ les applications linéaires de E dans F, $E\otimes F$ le produit tensoriel de E et F. Le corps $\mathbb{K}$ sous-jacent des espaces sera supposé de caractéristique 0. En pratique, il s'agit souvent de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{C}$, ou d'un corps de fractions.

1.3.1 Définitions générales d'algèbres

Définition 1.3.1. Un espace vectoriel E est dit *gradué* s'il est de la forme

$$E=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

L'espace E_n est alors la composante homogène d'indice (ou de taille) n de E. Si les E_n sont de dimension finie, la série de Hilbert de E est la série

$$\mathcal{H}_E(t)=\sum_{n\geq 0} dim(E_n)t^n. \tag{1.22}$$

Remarque 6. Généralement, dans la théorie des espaces vectoriels, seules les combinaisons linéaires finies sont considérées. Dans notre cas, les sommes peuvent être infinies mais sont finies en chaque composante homogène.

Exemple 27. On se donne une classe combinatoire $\mathcal{C}=\sqcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_n$. On peut naturellement lui associer $E=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$, où E_n est de dimension $|\mathcal{C}_n|$. Ainsi, toute base de E_n est indexée par $\mathcal{C}_n$. De plus, les notions de séries de Hilbert et de séries génératrices coïncident. On a bien :

$$\mathcal{H}_E(t)=Gf_{\mathcal{C}}(t)=\sum_{n\geq 0}|\mathcal{C}_n|t^n.$$

Définition 1.3.2. Une *algèbre associative unitaire* est un triplet $(\mathcal{A},m,\mu)$ tel que :
— $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ;
— m appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\mathcal{A})$, et vérifie l'égalité :

$$m\circ(Id\otimes m)=m\circ(m\otimes Id)\ ;$$

— μ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K},\mathcal{A})$, et pour tout a appartenant à $\mathcal{A}$,

$$m\,(a\otimes\mu(1))=m\,(\mu(1)\otimes a)=a.$$

Exemple 28. Soit A un alphabet, on considère le triplet $\mathcal{A}=(\mathbb{K}\langle A\rangle,m,\mu)$ tel que :
— $\mathbb{K}\langle A\rangle$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par éléments de A^* ;
— pour tout mot u et v de A^*, $m\,(u\otimes v)=uv$;
— $\mu(1)=1$ (1 correspondant au mot vide) et $\mu(v)=0$ pour tout mot non vide v.
Alors $\mathcal{A}$ est bien une algèbre associative unitaire.

Exemple 29. Il est possible de définir sur les mots un autre produit : le mélange ou shuffle noté $\sqcup\!\sqcup$. Rappelons sa construction. Soient $w=w_1\cdots w_n$ et $v=v_1\cdots v_m$ deux mots. On a :

$$\begin{array}{rcll} v\sqcup\!\sqcup w & = & v & \text{si } n=0 \\ & = & w & \text{si } m=0 \\ & = & v_1(v_2\cdots v_m\sqcup\!\sqcup w)+w_1(v\sqcup\!\sqcup w_2\cdots w_n) & \text{sinon.}\end{array} \tag{1.23}$$

Exemple 30. Pour $w=ca$ et $u=dd$ on a

$$ca\sqcup\!\sqcup dd=cadd+cdad+cdda+dcad+dcda+ddca. \tag{1.24}$$

Le triplet $\mathcal{A}=(\mathbb{K}\langle A\rangle,m,\mu)$ tel que :
— pour tout mot u et v de A^*, $m\,(u\otimes v)=u\sqcup\!\sqcup v$;
— $\mu(1)=1$ (1 correspondant au mot vide) ;
est bien une algèbre associative unitaire.

Dans un souci de concision, on identifie parfois $v \sqcup\!\sqcup w$ à l'ensemble des mots apparaissant dans l'opération $v \sqcup\!\sqcup w$ si le contexte de cette notation ne laisse pas de doute quant à son sens. Si l'alphabet est $\mathbb{N}$, on définit :

$$v \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, w := v \sqcup\!\sqcup w[\max(v)], \tag{1.25}$$

où $w[\max(v)]$ est le mot obtenu en décalant chaque lettre de w par la lettre maximale de v. De même que pour le $\sqcup\!\sqcup$, il est possible que $v \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, w$ désigne l'ensemble des mots apparaissant dans l'opération $v \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, w$.

Exemple 31. Si $v = 31$, et $w = 11$, alors $w[3] = 44$ et

$$v \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, w = 3144 + 3414 + 3441 + 4314 + 4341 + 4431. \tag{1.26}$$

Exemple 32. Si $(\mathcal{A}, m, \mu)$ est une algèbre alors $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre par

$$(a \otimes a') \cdot (b \otimes b') = m(a \otimes b) \otimes m(a' \otimes b'), \tag{1.27}$$

l'unité étant donnée par $\mu \otimes \mu$.

Définition 1.3.3. Soient $(\mathcal{A}_1, m_1, \mu_1)$ et $(\mathcal{A}_2, m_2, \mu_2)$ deux algèbres. Un élément f de $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ est un *morphisme d'algèbres* si

$$\forall x, y \in \mathcal{A}_1,\ f \circ m_1(x \otimes y) = m_2\left(f(x) \otimes f(y)\right). \tag{1.28}$$

Définition 1.3.4. Une *cogèbre coassociative* est un triplet $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ tel que :
- $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel ;
- Δ est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{C})$ et vérifie l'égalité :

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta\ ;$$

- ϵ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{K})$ et vérifie :
  - $(\epsilon \otimes Id_{\mathcal{C}}) \circ \Delta = Id_{\mathbb{K} \otimes \mathcal{C}}$;
  - $(Id_{\mathcal{C}} \otimes \epsilon) \circ \Delta = Id_{\mathcal{C} \otimes \mathbb{K}}$.

Exemple 33. Soit A un alphabet et $\mathbb{K}\langle A\rangle$ l'espace vectoriel des mots sur A. Définissons un coproduit sur $\mathbb{K}\langle A\rangle$ appelé deshuffle à l'aide d'un procédé appelé dédoublement d'alphabet. Soit B une copie de A. On se place dans $\mathbb{K}\langle A + B\rangle$ en supposant que les lettres de B commutent avec celles de A. Ainsi, tout mot en A et B peut s'identifier aux mots de la forme FG, où F est un mot en A et G un mot en B. Il en résulte que $\mathbb{K}\langle A+B\rangle$ s'identifie à $\mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle B\rangle$. Or, B est une copie de A. Sous ces hypothèses, on peut donc identifier $\mathbb{K}\langle A + B\rangle$ à $\mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle$. Le deshuffle Δ est alors défini comme suit :
- $\Delta(\epsilon) = \epsilon \otimes \epsilon$;
- pour a lettre de A, on a $\Delta(a) = a + a'$, où a' est la copie de a dans B ;
- pour $w = w_1 \cdots w_n$ mot de A^*, on pose $\Delta(w) = \prod_{i=1}^{n} \Delta(w_i) = \prod_{i=1}^{n}(w_i + w_i')$.

En développant le produit $\prod_{i=1}^{n}(w_i + w_i')$, et en réordonnant suivant les règles de commutation, on remarque que l'on a

$$\Delta(w) = \sum_{w \in u \sqcup\!\sqcup v} c_w^{u,v}\, uv, \tag{1.29}$$

où $c_w^{u,v}$ est la multiplicité de w dans le produit $u \sqcup\!\sqcup v$ et où en indice $u \sqcup\!\sqcup v$ désigne l'ensemble des mots qui apparaissent dans le shuffle de u et de v. Munie de ce coproduit, $\mathbb{K}\langle A\rangle$ est bien une cogèbre coassociative. Pour montrer cette propriété, nous utilisons plusieurs alphabets. En effet, d'après la remarque précédente, les produits tensoriels dans notre cas s'identifient à des algèbres sur des mots. Il suffit donc pour vérifier la coassociativité de considérer deux copies d'un même alphabet. De l'associativité de la somme sur les mots résulte alors la coassociativité de ce coproduit. Pour la counité ϵ, il suffit de prendre la projection envoyant le mot vide sur 1 et les autres mots sur 0. Ainsi, $(\mathbb{K}\langle A\rangle, \Delta, \epsilon)$ est bien une cogèbre coassociative counitaire.

Pour $A = \{a, b, c\}$, et $B = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$, $w = bac$, alors on a

$$\begin{array}{rcl} \Delta(w) & = & bac + ba\overline{c} + b\overline{a}c + b\overline{ac} \\ & & +\overline{b}ac + \overline{b}a\overline{c} + \overline{ba}c + \overline{bac} \\ & = & bac + ba\overline{c} + bc\overline{a} + b\overline{ac} \\ & & +ac\overline{b} + a\overline{b}\overline{c} + c\overline{ba} + \overline{bac}. \end{array} \tag{1.30}$$

En identifiant en termes de produits tensoriels :

$$\begin{aligned}\Delta(w) &= bac\otimes 1 + ba\otimes c + bc\otimes a + b\otimes ac \\ &\quad + ac\otimes b + a\otimes bc + c\otimes ba + 1\otimes bac.\end{aligned} \tag{1.31}$$

Définition 1.3.5. Soient $(\mathcal{C}_1, \Delta_1, \epsilon_1)$ et $(\mathcal{C}_2, \Delta_2, \epsilon_2)$ deux cogèbres coassociatives counitaires. Un élément f de $\mathcal{L}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est un *morphisme de cogèbres* si

$$\forall x \in \mathcal{C}_1,\ (\Delta_2 \circ f)(x) = ((f\otimes f)\circ \Delta_1)(x). \tag{1.32}$$

Soient une algèbre associative $(\mathcal{A}, m, \mu)$ et une cogèbre coassociative counitaire $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$. Alors l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre, appelé algèbre de convolution qui est définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{A}),\ f \star g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta. \tag{1.33}$$

Définition 1.3.6. Une *bigèbre associative* est un quintuplet $(\mathcal{B}, m, \Delta, \mu, \epsilon)$ où :
- $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel ;
- $(\mathcal{B}, m, \mu)$ est une algèbre ;
- $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ est une cogèbre ;
- Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres de $\mathcal{B}$;
- ou de manière équivalente au point précédent, m et μ sont des morphismes de cogèbres.

Exemple 34. Soit A un alphabet. Le quintuplet $(\mathbb{K}\langle A\rangle, m, \Delta, \mu, \epsilon)$ où m est le produit de concaténation, où Δ est le deshuffle, μ le mot vide, et ϵ la projection du mot vide sur 1 ayant comme noyau l'espace vectoriel engendré par les mots non vides, est bien une bigèbre.

En prenant $A = \{x\}$, nous retrouvons la bigèbre des polynômes sur une variable $\mathbb{K}[x]$, le coproduit résultant alors de la formule du binôme de Newton :

$$\Delta(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}. \tag{1.34}$$

Définition 1.3.7. Soit $(\mathcal{B}, m, \mu, \Delta, \epsilon)$ une bigèbre. Alors $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ est une algèbre de convolution. On dit que $\mathcal{B}$ est une *algèbre de Hopf* s'il existe une application $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ telle que :

$$\mathcal{S} \star Id_{\mathcal{B}} = Id_{\mathcal{B}} \star \mathcal{S} = \mu \circ \epsilon. \tag{1.35}$$

$\mathcal{S}$ est alors appelée *antipode*.

Exemple 35. Soit $(G, .)$ un groupe. Alors $(\mathbb{K}[G], m, \Delta, \mu, \epsilon, \mathcal{S})$ avec
- pour tout g et g' dans G, $m(g\otimes g') = g.g'$;
- pour tout g dans G, $\Delta(g) = g\otimes g$;
- $\mu(1)$ est l'élément neutre de G ;
- pour tout g dans G, $\epsilon(g) = 1$;
- pour tout g dans G, $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$;

est bien une algèbre de Hopf.

Définition 1.3.8. Une bigèbre $(\mathcal{B}, m, \mu, \Delta, \epsilon)$ est dite *graduée* si :
- $\mathcal{B}$ est graduée $(\mathcal{B} = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n)$;
- pour tous entiers k et l, $m(\mathcal{B}_k \otimes \mathcal{B}_l) \subset \mathcal{B}_{k+l}$;
- pour tout entier n, $\Delta(\mathcal{B}_n) \subset \oplus_{k+l=n}\mathcal{B}_k \otimes \mathcal{B}_l$.

Elle est dite *connexe* si sa composante homogène de degré 0 est isomorphe au coprs de base.

Fait remarquable, l'antipode existe toujours pour les bigèbres graduées connexes. Ces dernières sont donc des cas particuliers d'algèbres de Hopf. La plupart des algèbres que nous présentons sont des bigèbres graduées connexes. Dans notre contexte, une *algèbre de Hopf combinatoire* est une bigèbre graduée connexe où les éléments d'une base sont indexés par une classe combinatoire.

Avant de pouvoir donner de nombreux exemples d'algèbres de Hopf combinatoires, nous rappelons diverses relations d'ordre sur des classes combinatoires qui vont nous intéresser ultérieurement. En effet, la structure de nombreux produits sur des objets combinatoires est reliée à un ordre sur la classe correspondante.

1.3.2 Des ensembles ordonnés dans les classes combinatoires

1.3.2.1 Rappels sur les ensembles ordonnés

Définition 1.3.9. Soit E un ensemble, et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* sur E si elle est :

1. $\forall x,\ x\mathcal{R}x$ (réflexive) ;
2. $x\mathcal{R}y,$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$ (antisymétrique) ;
3. $x\mathcal{R}y,$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$ (transitive).

Le couple $(E, \mathcal{R})$ est alors un ensemble ordonné, ou poset (partial ordered set). Si pour tout x et y dans E on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est totalement ordonné.

Exemple 36. Soit E un ensemble, on rappelle que $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E. Le couple $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est alors un ensemble ordonné.

Exemple 37. Soit E un ensemble, considérons l'ensemble $\mathcal{P}$ des partitions de E. On dit qu'une partition P est *plus fine* qu'une partition P' si tout bloc Π' dans P' est une réunion de blocs de P.

L'ensemble $\mathcal{P}$ muni de la relation "être plus fine que" est bien un ensemble ordonné.

Définition 1.3.10. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soient x et y dans E. *L'intervalle* $[x, y]$ est l'ensemble des éléments z tels que $x \leq z$ et $z \leq y$.

1.3.2.2 Les ordres faibles

L'ensemble des permutations de taille n est naturellement muni de deux structures d'ordre, reliées aux inversions.

Définition 1.3.11. Soit σ une permutation. Une *inversion* de σ est un couple (i, j) avec $i < j$ tel que $\sigma_i > \sigma_j$. Une *coinversion* de σ est une inversion de σ^{-1}. On note respectivement $Inv(\sigma)$ et $CoInv(\sigma)$ l'ensemble des inversions et coinversions de σ.

Exemple 38. Pour $\sigma = 4172653$, on a
— $Inv(\sigma) = \{(1,2),\ (1,4),\ (1,7),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (3,7),\ (5,6),\ (5,7),\ (6,7)\}$;
— $CoInv(\sigma) = \{(1,4),\ (2,4),\ (2,7),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (3,7),\ (5,6),\ (5,7),\ (6,7)\}$.

Ainsi, deux ordres sur les permutations sont donnés par :
— $\sigma \leq_R \tau$ si $CoInv(\sigma) \subset CoInv(\tau)$;
— $\sigma \leq_L \tau$ si $Inv(\sigma) \subset Inv(\tau)$.

Le premier est appelé ordre faible droit, le deuxième ordre faible gauche. Il s'agit bien entendu de deux relations d'ordres sur les permutations.

1.3.2.3 Un ordre sur les mots tassés/ partitions ordonnées d'ensembles

Une généralisation des inversions permet de définir un ordre sur les compositions d'ensembles.

Définition 1.3.12. Soit $P = P_1 \cdots P_r$ une partition ordonnée d'ensemble. Soient i et j deux entiers respectivement dans P_k et P_l. Le couple (i, j) est
— une *demi-inversion* de P si $i < j$, et $k = l$;
— une *inversion* de P si $i < j$ et $k > l$.
Un couple (i, j) qui est une inversion ou une demi-inversion est appelé *pseudo-inversion*. On les note généralement avec leurs coefficients correspondants.

Exemple 39. L'ensemble des pseudo-inversions de $P = \{1,3\}\{2,5\}\{4\}$ est égal à :

$$\{\frac{1}{2}(1,3),\ \frac{1}{2}(2,5),\ (2,3),\ (4,5)\}. \tag{1.36}$$

On définit l'ordre suivant sur les partitions ordonnées d'ensembles :

$P \leq Q$ si et seulement si pour toute pseudo-inversion $a.(i, j)$ de P, la composition Q contient l'inversion $b.(i, j)$, avec $a \leq b$.

A travers la bijection entre mots tassés et compositions d'ensembles, on en déduit un ordre sur les mots tassés.

1.3.2.4 Le treillis de Tamari

Il existe une structure d'ordre sur les arbres binaires, appelée ordre de Tamari. Rappelons sa construction.

Définition 1.3.13. Soit T un arbre binaire, soit a un nœud de T ayant un fils gauche. Une *rotation droite* sur T est l'opération suivante effectuée sur T :

Définition 1.3.14. Soient T et T' deux arbres binaires de tailles n. On dit que T est plus petit que T' pour l'ordre de Tamari s'il existe une suite de rotations droites $r_1 \cdots, r_k$ telle que

$$r_1 \circ \cdots \circ r_k(T) = T'. \tag{1.37}$$

1.3.3 Exemples d'algèbres de Hopf combinatoires

1.3.3.1 Algèbre de Hopf libre et cocommutative sur un alphabet A

Définition 1.3.15. Soit A un alphabet. L'algèbre libre sur A est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel ayant comme base les mots finis sur A, muni du produit de concaténation, et ayant comme unité le mot vide. On note cette algèbre $\mathbb{K}\langle A\rangle$.

Définition 1.3.16. Soit X un alphabet. L'algèbre commutative libre sur X (ou polynômes en X) est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel ayant comme base les monômes sur X, muni du produit de concaténation et ayant comme unité le mot vide. On note cette algèbre $\mathbb{K}[X]$.

Il est possible de compléter $\mathbb{K}\langle A\rangle$ et $\mathbb{K}[X]$, de sorte que l'on puisse considérer des sommes infinies sur ces espaces. Ainsi, les algèbres correspondantes sont respectivement l'algèbre large libre sur A (noté $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$), et l'algèbre des séries formelles en X (noté $\mathbb{K}[\![X]\!]$).

Nous rappelons que $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ est naturellement muni d'une structure de cogèbre dont le coproduit est donné par le deshuffle. Or, concaténation et deshuffle sont compatibles : le deshuffle est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ vers $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Ainsi, $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ est une algèbre de Hopf.

1.3.3.2 L'algèbre de mélanges (ou shuffle) sur les mots

Nous avons vu qu'il y a sur les mots un autre produit m donné par le mélange ou shuffle. Nous avons aussi un autre coproduit Δ donné par la déconcaténation. Pour w un mot, on a :

$$\Delta(w) = \sum_{w=uv} u \otimes v. \tag{1.38}$$

Exemple 40. Pour $w = abbda$, on obtient :

$$\Delta(abbda) = abbda \otimes 1 + abbd \otimes a + abb \otimes da + ab \otimes bda + a \otimes bbda + 1 \otimes abbda. \tag{1.39}$$

Il est possible de montrer que $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ muni de ces deux lois ainsi que de l'unité et counité classiques forme bien une algèbre de Hopf.

1.3.3.3 WQSym

Soit A un alphabet infini totalement ordonné. On se place dans $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Soit u un mot tassé. On pose :

$$\mathbf{M}_u(A) = \sum_{tas(w)=u} w. \tag{1.40}$$

On a alors :

$$\mathbf{M}_u \cdot \mathbf{M}_v = \sum_{\substack{w \in \mathcal{MT} \\ w=w_1w_2 \\ tas(w_1)=u \\ tas(w_2)=v}} \mathbf{M}_w. \tag{1.41}$$

Ainsi, $vect(\mathbf{M}_u)_{u\mathcal{MT}}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$.

Le coproduit est construit grâce au dédoublement d'alphabet : on prend deux alphabets totalement ordonnés A et B, on suppose que les lettres de A commutent avec les lettres de B, et que les lettres de B sont plus grandes que les lettres de A. Par ce procédé, on obtient :

$$\mathbf{M}_u(A+B) = \sum_{u\in v \sqcup\!\sqcup w[\max(v)]} \mathbf{M}_v(A)\mathbf{M}_w(B). \tag{1.42}$$

Exemple 41. On a :

$$\mathbf{M}_{121}\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{12133} + \mathbf{M}_{12122} + \mathbf{M}_{13122} + \mathbf{M}_{12111} + \mathbf{M}_{23211}, \tag{1.43}$$

et

$$\Delta\left(\mathbf{M}_{12321}\right) = \mathbf{M}_{12321}\otimes 1 + \mathbf{M}_{1221}\otimes\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_{11}\otimes\mathbf{M}_{121} + 1\otimes\mathbf{M}_{12321}. \tag{1.44}$$

Pour **WQSym**, l'unité est donnée par le mot vide, et la counité par la projection du mot vide sur 1 et des autres mots sur 0. Comme nous avons une bigèbre graduée connexe, nous en déduisons qu'il s'agit bien d'une algèbre de Hopf.

Remarque 7. Le produit $\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v$ s'exprime également comme une somme des éléments d'un intervalle du poset défini sur les mots tassés dans le paragraphe 1.3.2.3, où l'élément minimal (maximal) est donné par $w = w_1w_2$ avec $tas(w_1) = u$, $tas(w_2) = v$ et les lettres de w_1 sont toutes strictement plus petites (grandes) que les lettres de w_2.

Exemple 42. Pour le produit $\mathbf{M}_{121}\mathbf{M}_{11}$, l'intervalle correspondant est $[12133, 23211]$.

Nous étudierons plus en détails cette algèbre dans les sections 1.5 et 1.6.

1.3.3.4 FQSym

On appelle **FQSym** (voir [DHT02]), le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ engendré par les éléments suivants :

$$\mathbf{G}_\sigma = \sum_{\mathrm{std}(w)=\sigma} w. \tag{1.45}$$

FQSym est aussi une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. En effet, soient σ et τ deux permutations de taille respective n et m. On a le produit suivant :

$$\mathbf{G}_\sigma\mathbf{G}_\tau = \sum_{\substack{\gamma\in\mathfrak{S}_{n+m};\ \gamma=uv\\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbf{G}_\gamma. \tag{1.46}$$

Dans la base des $(\mathbf{G}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$, le coproduit est donné par :

$$\Delta\left(\mathbf{G}_\sigma\right) = \sum_{\sigma\in u\,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v} \mathbf{G}_u\otimes\mathbf{G}_v. \tag{1.47}$$

Exemple 43. Pour $\sigma = 231$ et $\tau = 21$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{231}\mathbf{G}_{21} \quad = \quad & \mathbf{G}_{23154} + \mathbf{G}_{24153} + \mathbf{G}_{25143} + \mathbf{G}_{34152} + \mathbf{G}_{35142}\\ & + \mathbf{G}_{45132} + \mathbf{G}_{34251} + \mathbf{G}_{35241} + \mathbf{G}_{45231} + \mathbf{G}_{45321}.\end{aligned} \tag{1.48}$$

et pour $\sigma = 2314$, on a

$$\Delta\left(\mathbf{G}_{2314}\right) = \mathbf{G}_{2314}\otimes 1 + \mathbf{G}_{231}\otimes\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_{21}\otimes\mathbf{G}_{12} + \mathbf{G}_1\otimes\mathbf{G}_{123} + 1\otimes\mathbf{G}_{2314}. \tag{1.49}$$

Une autre base de **FQSym**, $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ est aussi très utilisée. Rappelons sa définition et les différentes lois exprimées dans cette base :

$$\mathbf{F}_\sigma = \sum_{\mathrm{std}(w)=\sigma^{-1}} w, \tag{1.50}$$

et la loi produit est

$$\mathbf{F}_\sigma\mathbf{F}_\tau = \sum_{\gamma\in\sigma\,\overline{\sqcup\!\sqcup}\,\tau} \mathbf{F}_\gamma. \tag{1.51}$$

Le coproduit, lui, s'exprime ainsi :

$$\Delta\left(\mathbf{F}_\sigma\right) = \sum_{\sigma=uv} \mathbf{F}_{\mathrm{std}(u)}\otimes\mathbf{F}_{\mathrm{std}(v)}. \tag{1.52}$$

Exemple 44. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{231}\mathbf{F}_{21} &= \mathbf{F}_{23154}+\mathbf{F}_{23514}+\mathbf{F}_{23541}+\mathbf{F}_{25341}+\mathbf{F}_{25431}\\ &\quad+\mathbf{F}_{52314}+\mathbf{F}_{52341}+\mathbf{F}_{52431}+\mathbf{F}_{54231}.\end{aligned} \tag{1.53}$$

et

$$\Delta\left(\mathbf{F}_{2314}\right)=\mathbf{F}_{2314}\otimes 1+\mathbf{F}_{231}\otimes\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_{12}\otimes\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_1\otimes\mathbf{F}_{213}+1\otimes\mathbf{F}_{2314}. \tag{1.54}$$

Remarque 8. Il est possible d'interpréter ces deux produits comme des intervalles d'un ordre faible sur les permutations. En effet, pour σ et τ deux permutations de taille respective n et m, on a

$$\sigma \overline{\sqcup} \tau = [\sigma\tau[n], \tau[n]\sigma]_R$$

où $[\sigma\tau[n], \tau[n]\sigma]_R$ est un intervalle de l'ordre faible droit. De même, on a

$$\mathbf{G}_\sigma\mathbf{G}_\tau = \sum_{\gamma\in[\sigma\tau[n],\tau[n]\sigma]_L}\mathbf{G}_\gamma,$$

où $[\sigma\tau[n], \tau[n]\sigma]_L$ désigne un intervalle de l'ordre faible gauche.

On reviendra sur cette algèbres dans les sections 1.4 et 1.5.

1.3.3.5 PBT

À partir d'une permutation, on a vu que l'on pouvait construire un arbre en prenant par exemple l'arbre décroissant. On se place dans **FQSym**, et on regroupe les permutations qui ont la même forme d'arbre. Ainsi, on définit :

$$\mathbf{P}_T = \sum_{\mathrm{dec}(\sigma)\sim T}\mathbf{G}_\sigma,$$

où $\mathrm{dec}(\sigma)\sim T$ signifie que l'arbre décroissant de σ est de forme T. De façon surprenante, la famille $(\mathbf{P}_T)_{T\in\mathcal{BT}}$ engendre également une algèbre dont la loi produit est donnée par :

$$\mathbf{P}_T\mathbf{P}_{T'} = \sum_{T''\in[T_1,T_2]}\mathbf{P}_{T''}$$

où $[T_1, T_2]$ désigne l'intervalle de Tamari avec comme élément minimal T_1, arbre obtenu en greffant sur la feuille vide la plus à gauche de T' l'arbre T, et T_2 élément obtenu en greffant sur la feuille vide la plus à droite de T l'arbre T'.

Remarque 9. Le coproduit ayant une description plus compliquée, nous ne donnerons pas une expression de celui-ci. Il est tout de même possible de le calculer : comme les éléments $\mathbf{P}_T$ sont des sommes de $\mathbf{G}_\sigma$, il suffit donc de calculer le coproduit sur les $\mathbf{G}_\sigma$, puis de regrouper les éléments pour obtenir des $\mathbf{P}_T$.

1.3.3.6 Sym

Pour construire **Sym**, une des façons de procéder est de considérer une statistique classique sur les permutations : les descentes. Dans ce contexte, on rappelle que i est une position de descente de σ si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. On considère les éléments suivants :

$$\mathbf{R}_I = \sum_{C(\sigma)=I}\mathbf{G}_\sigma,$$

où $C(\sigma)$ est la composition des descentes de σ définie dans la sous-section 1.2.6.
Soient $I=(i_1,\cdots,i_r)$ et $J=(j_1,\cdots,j_s)$ deux compositions. On a le produit

$$\mathbf{R}_I\mathbf{R}_J = \mathbf{R}_{IJ}+\mathbf{R}_{I\lhd J}, \tag{1.55}$$

où $IJ=(i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s)$, et $I\lhd J=(i_1,\cdots,i_r+j_1,\cdots,j_s)$.

Le coproduit étant un morphisme d'algèbres, et **Sym** étant libre et engendré par $(\mathbf{R}_n)_{n\geq 1}$, il suffit de déterminer le coproduit sur ces éléments.

On a

$$\Delta(\mathbf{R}_n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{R}_k\otimes\mathbf{R}_{n-k}. \tag{1.56}$$

1.4 Dualité des algèbres de Hopf

1.4.1 Rappels sur la dualité des applications linéaires

Il est à noter que les sommes considérées peuvent être infinies : les bases linéaires seront analytiques, et ne seront pas nécessairement des sommes finies.

Définition 1.4.1. Soit $E = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ un espace vectoriel gradué, où les E_n sont de dimension finie. Le *dual gradué* de E est défini par $E^* := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n^*$, où pour tout entier n, on a $E_n^* := \mathcal{L}(E_n, \mathbb{K})$. Par abus de langage, le dual d'un espace vectoriel gradué désigne toujours son dual gradué. Soit $\mathcal{E} = (e)$ une base de E, on note $\mathcal{E}^* := (e^*)$ la base du dual gradué vérifiant

$$\begin{array}{rcll} e^*(e') & = & 1 & \text{si } e = e', \\ & = & 0 & \text{sinon,} \end{array} \tag{1.57}$$

que l'on peut réécrire à l'aide du symbole de Kronecker comme

$$e^*(e') = \delta_{e,e'}, \tag{1.58}$$

où de façon générale,

$$\begin{array}{rcll} \delta_{a,b} & = & 1 & \text{si } a = b, \\ & = & 0 & \text{sinon.} \end{array} \tag{1.59}$$

Ainsi, par construction du dual gradué, on constate que d'un point de vue **linéaire** ces deux espaces vectoriels sont isomorphes. Par contre, en ajoutant de la structure, comme des produits ou coproduits, il est possible qu'ils soient assez différents.

Définition 1.4.2. Soient E et F deux espaces vectoriels gradués. Soit f une application linéaire de E dans F. Le *dual* ou *conjugué* ou la *transposée* de f (noté f^t) est l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} f^t : & F^* & \longrightarrow & E^* \\ & l & \longmapsto & l \circ f. \end{array}$$

Rappelons la méthode classique de calculs à l'aide du crochet de dualité. Soit E un espace vectoriel. On note : $< l|x >:= l(x)$, où l est une forme linéaire sur E, et x un vecteur de E.

Proposition 1.4.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels gradués. Soit T un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout x dans E, et l dans F^*, on a alors :*

$$< l|T(x) >=< T^t(l)|x > . \tag{1.60}$$

Réciproquement, le seul opérateur A vérifiant pour tout x dans E et l dans F^*

$$< l|T(x) >=< A(l)|x >, \tag{1.61}$$

est la transposée de T.

1.4.2 Exemples de dualité entre algèbres de Hopf

1.4.2.1 Dual de $\mathbb{K}[\![X]\!]$

Pour $E = \mathbb{K}[\![X]\!]$, nous avons vu que $(E, m, \Delta, \mu, \epsilon, \mathcal{S})$ avec pour tous n et m des entiers positifs,

$$\begin{array}{lcl} -m(x^n \otimes x^m) & = & x^{n+m}, \\ -\Delta(x^n) & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}, \\ -\mathcal{S}(x^n) & = & (-x)^n, \\ -\mu(1) & = & 1, \\ -\epsilon(x^n) & = & \delta_{n,0}, \end{array}$$

est bien une algèbre de Hopf. Montrons qu'en transposant les différentes lois, on munit également E^* d'une structure d'algèbre de Hopf. Par linéarité, il suffit de considérer la base canonique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et sa base duale $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout j, n, m trois entiers on a :

$$< l_j|m(x^n \otimes x^m) >= \delta_{j,n+m}. \tag{1.62}$$

Donc,

$$< m^t(l_j)|x^n \otimes x^m >= \delta_{j,n+m}. \tag{1.63}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$m^t(l_j) = \sum_{k=0}^{j} l_k \otimes l_{j-k}. \tag{1.64}$$

De même, transposons le coproduit. On a :

$$\begin{aligned} < l_i \otimes l_j|\Delta(x^n) > &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} < l_i \otimes l_j|x^k \otimes x^{n-k} > \\ &= \binom{n}{i}\delta_{i+j,n}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

On a donc :

$$\Delta^t(l_i \otimes l_j) = \binom{i+j}{i} l_{i+j}. \tag{1.66}$$

Nous avons de plus, $\mu^t = \epsilon$ et $S^t = S$. On peut remarquer que l'on peut identifier E^* à $\mathbb{K}[\![x]\!]$, et que la base duale de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond en fait à $(\frac{x^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, dans cette dernière base on a bien :

$$m\left(\frac{x^i}{i!} \otimes \frac{x^j}{j!}\right) = \binom{i+j}{i}\frac{x^{i+j}}{(i+j)!}, \tag{1.67}$$

et

$$\Delta\left(\frac{x^i}{i!}\right) = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^k}{k!} \otimes \frac{x^{i-k}}{(i-k)!}. \tag{1.68}$$

Cette dualité est également codée à travers l'identité algébrique

$$\exp(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^n. \tag{1.69}$$

Remarque 10. Il existe une théorie manipulant les séries formelles à la fois comme des formes linéaires et des opérateurs sur les séries : le calcul ombral. Cette méthode, formalisée entre autres par Rota et Roman ([RR78]), donne un outil puissant de calcul, simplifiant certaines démonstrations, et expliquant de manière rigoureuse certaines manipulations "douteuses" que l'on effectuait au XIX^{e} siècle. On pourra consulter [KRY09] pour une étude complète, et [Ges03] pour quelques applications.

1.4.2.2 Dual de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$

Soit A un alphabet fini. Nous avons vu que $(\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle, m, \Delta, \mu, \epsilon)$ est une bigèbre graduée connexe où m est la concaténation, Δ le deshuffle, μ une application vérifiant $\mu(1) = \epsilon$ (mot vide), et ϵ l'application vérifiant $\epsilon(w) = \delta_{w,\epsilon}$. Or, dans le cas des bigèbres graduées connexe, l'antipode existe automatiquement. Nous avons donc une algèbre de Hopf. Soit $(w^*)_{w\in A^*}$ la base duale de $(w)_{w\in A^*}$. Déterminons les transposées des différentes lois. Il est clair que μ et ϵ sont duales l'une de l'autre.

Calculons m^t. Soient u, v, w trois mots. On a :

$$< m^t(u^*)|v \otimes w >=< u^*|m(v \otimes w) > . \tag{1.70}$$

Donc :

$$< m^t(u^*)|v \otimes w >=< u^*|vw >= \delta_{u,vw}. \tag{1.71}$$

On en déduit que

$$m^t(u^*) = \sum_{u=vw} v^* \otimes w^*. \tag{1.72}$$

L'opérateur m^t est donc la déconcaténation.

Dualisons le coproduit Δ. Soient u, v, w trois mots. On a :

$$< \Delta^t(u^* \otimes v^*)|w >=< u^* \otimes v^*|\Delta(w) > . \tag{1.73}$$

On a donc :

$$< \Delta^t(u^* \otimes v^*)|w >= \sum_{w \in w_1 \sqcup\!\sqcup w_2} c_w^{w_1,w_2} \delta_{u,w_1} \delta_{v,w_2}. \tag{1.74}$$

où $c_w^{w_1,w_2}$ est la multiplicité de w dans le shuffle de w_1 et w_2, et où l'indice $w_1 \sqcup\!\sqcup w_2$ de la somme désigne de façon abusive l'ensemble des mots apparaissant dans le shuffle. On en déduit alors que

$$\Delta^t(u^* \otimes v^*) = \sum_{w \in u \sqcup\!\sqcup v} c_w^{w_1,w_2} w^*, \tag{1.75}$$

et donc Δ^t est en fait le produit de shuffle sur les mots.

Ainsi, l'algèbre de Hopf duale est l'algèbre des mots munie du produit de shuffle et du coproduit de déconcaténation.

1.4.2.3 Dual de FQSym

Etudions plus en détail la dualité de **FQSym**. En effet, à partir de celle-ci, on retrouve celles de nombreuses sous-algèbres et algèbres quotients. On se donne la base $(\mathbf{G}_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$. Notons (pour l'instant) sa base duale $(\mathbf{G}_\sigma^*)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$. Dualisons le produit. Pour tout γ, σ et τ des permutations, on a :

$$< \mathbf{G}_\gamma^* | m\left(\mathbf{G}_\sigma \otimes \mathbf{G}_\tau\right) >= \sum_{\substack{\nu = uv \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau}} < \mathbf{G}_\gamma^* | \mathbf{G}_\nu > . \tag{1.76}$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcll} < m^t\left(\mathbf{G}_\gamma^*\right) | \mathbf{G}_\sigma \otimes \mathbf{G}_\tau > & = & 1 & \text{si } \gamma = uv, \text{ avec } \mathrm{std}(u) = \sigma \text{ et } \mathrm{std}(v) = \tau \\ & = & 0 & \text{sinon} \end{array} . \tag{1.77}$$

On a donc

$$m^t\left(\mathbf{G}_\gamma^*\right) = \sum_{\gamma = uv} \mathbf{G}^*_{\mathrm{std}(u)} \otimes \mathbf{G}^*_{\mathrm{std}(v)}. \tag{1.78}$$

Transposons le coproduit. Soient σ, τ et γ trois permutations, on a :

$$< \mathbf{G}_\sigma^* \otimes \mathbf{G}_\tau^* | \Delta\left(\mathbf{G}_\gamma\right) >= \sum_{\gamma \in u \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v} < \mathbf{G}_\sigma^* \otimes \mathbf{G}_\tau^* | \mathbf{G}_u \otimes \mathbf{G}_v > . \tag{1.79}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcll} < \Delta^t\left(\mathbf{G}_\sigma^* \otimes \mathbf{G}_\tau^*\right) | \mathbf{G}_\gamma > & = & 1 & \text{si } \gamma \in \sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau \\ & = & 0 & \text{sinon} \end{array} . \tag{1.80}$$

On a donc

$$\Delta^t\left(\mathbf{G}_\sigma^* \otimes \mathbf{G}_\tau^*\right) = \sum_{\gamma \in \sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau} \mathbf{G}_\gamma^*. \tag{1.81}$$

On peut identifier la base $(\mathbf{G}_\sigma^*)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$ à la base des $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$, où $\mathbf{F}_\sigma = \mathbf{G}_{\sigma^{-1}}$. En effet, le produit et le coproduit dans la base $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$ sont exactement les mêmes que ceux de la base $(\mathbf{G}_\sigma^*)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$. Ainsi, le dual de **FQSym** est lui-même, et l'isomorphisme est explicite : on envoie $\mathbf{G}_\sigma$ sur $\mathbf{F}_\sigma$.

On peut à l'aide de bilettres, établir une identité algébrique codant cette dualité. Soient deux alphabets A et B (non commutatifs) totalement ordonnés, tels que les bilettres $\binom{a}{b}$ commutent entre elles. Etant donné un bimot, il existe (au moins) deux façons simples de le trier : on le trie dans l'ordre lexicographique en privilégiant la première ou la deuxième composante.

Exemple 45. Si $w = \binom{cadabaedc}{adccfafdd}$, en triant dans l'ordre lexicographique en privilégiant la première ligne, on obtient

$$w = \binom{aaabccdde}{acdfadcdf}. \tag{1.82}$$

Si on privilégie d'abord la deuxième ligne, on obtient

$$w = \binom{acadacdbe}{aaccdddff}. \tag{1.83}$$

On note $[w] := \binom{acadacdbe}{acdfadcdf}$, le bimot obtenu en gardant en première composante la première ligne du deuxième tri, et en deuxième composante la deuxième ligne du premier tri. En standardisant la deuxième ligne, on obtient $\sigma = 135826479$. En standardisant la première ligne, on a $\tau = 152736849$. On peut constater que $\tau = \sigma^{-1}$. Il s'agit en fait d'un résultat général.

Proposition 1.4.4. *Soit w un bimot sur deux alphabets totalement ordonnés. Soient respectivement $u = \binom{u_1}{u_2}$ et $v = \binom{v_1}{v_2}$ les mots obtenus en ordonnant w par ordre lexicographique en privilégiant la première (deuxième) ligne. On a alors :*

$$\mathrm{std}(v_1) = \mathrm{std}(u_2)^{-1}.$$

Théorème 1.4.5. *Soit A et B deux alphabets totalement ordonné, soit $\overline{A \times B}$ l'alphabet commutatif des bilettres constitué de couples (a, b) avec a dans A et b dans B, alors on a :*

$$\left[\prod_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \frac{1}{1-\binom{a}{b}}\right] = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} \mathbf{G}_\sigma(A)\mathbf{F}_\sigma(B), \tag{1.84}$$

Remarque 11. Pour une étude complète de l'identité précédente, on pourra lire [DHNT11]. Il est possible de généraliser le procédé précédent au niveau de **WQSym**/**WQSym***.

1.5 Réalisation polynomiale

Un des premiers points dans la théorie des algèbres de Hopf combinatoires est de vérifier qu'un sextuplet $\mathcal{A} := (\mathcal{B}, m, \Delta, \mu, \epsilon, \mathcal{S})$ est bien une algèbre de Hopf. Dans une approche classique, on vérifierait une à une toutes les conditions. Par une méthode appelée *réalisation polynomiale*, nous déplaçons le problème : nous cherchons un morphisme ϕ d'algèbres injectif de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans une algèbre de mots. L'image $\phi(\mathcal{A})$ est donc une sous-algèbre de polynômes. Or, les propriétés comme l'associativité du produit, la coassociativité du coproduit sont stables par sous-ensembles. Elles sont donc vérifiées pour $\phi(\mathcal{A})$ qui est isomorphe à $\mathcal{A}$. Elles le sont donc aussi pour $\mathcal{A}$.

1.5.1 Réalisation polynomiale d'algèbres

Soient $\mathcal{A} := (E, m)$ une algèbre et $\mathcal{B}$ une base de E. Considérons une injection linéaire R de $\mathcal{A}$ dans une algèbre de mots sur un alphabet A comme $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ munie du produit de concaténation.

Pour b et c deux éléments de $\mathcal{B}$, nous avons

$$m(b \otimes c) = \sum_{d\in\mathcal{B}} a_{bc}^d d, \tag{1.85}$$

où les a_{bc}^d sont des coefficients à valeurs dans $\mathbb{K}$. Grâce au plongement R, les éléments $R(b)$ et $R(c)$ étant des sommes de mots, le produit $R(b)R(c)$ a un sens dans $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Si on a

$$R(b)R(c) = \sum_{d\in\mathcal{B}} a_{bc}^d R(d), \tag{1.86}$$

pour tous les couples (b, c) de $\mathcal{B}^2$, l'application R est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ vers $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. En effet, d'un côté nous avons

$$R\left(m(b \otimes c)\right) = R\left(\sum_{d\in\mathcal{B}} a_{bc}^d d\right) = \sum_{d\in\mathcal{B}} a_{bc}^d R(d), \tag{1.87}$$

et de l'autre

$$R(b)R(c) = \sum_{d\in\mathcal{B}} a_{bc}^d R(d). \tag{1.88}$$

D'où

$$R(bc) = R(b)R(c). \tag{1.89}$$

Par injectivité de R, l'algèbre $\mathcal{A}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Or, une sous-algèbre d'une algèbre associative est associative donc $\mathcal{A}$ est associative.

Grâce à la réalisation polynomiale R, nous ne montrons pas de manière directe l'associativité de $\mathcal{A}$. Nous la déduisons par isomorphisme à une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Ainsi, le problème "prouver que l'algèbre $\mathcal{A}$ est associative" s'est modifié en "trouver une réalisation polynomiale de $\mathcal{A}$".

Exemple 46. Considérons l'algèbre $\mathcal{A} := (vect(\mathfrak{S}), \star)$, où

$$\sigma \star \tau = \sum_{\substack{\gamma=uv,\\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\mathrm{std}(v)=\tau}} \gamma, \tag{1.90}$$

pour σ et τ deux permutations.

Montrons l'associativité de la loi $\star$ en exhibant une réalisation polynomiale de $\mathcal{A}$.

Soit A un alphabet infini totalement ordonné. Soit σ une permutation, on définit

$$\mathbf{G}_\sigma = \sum_{\substack{w\in A^*\\ \mathrm{std}(w)=\sigma}} w. \tag{1.91}$$

Les $\mathbf{G}_\sigma$ sont alors des éléments de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Pour σ et τ deux permutations de $\mathfrak{S}$, nous observons que

$$\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau = \sum_{\substack{\gamma=uv\\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbf{G}_\gamma. \tag{1.92}$$

En effet, les mots $w = uv$ apparaissant dans le produit sont exactement ceux qui vérifient $\mathrm{std}(u) = \sigma$ et $\mathrm{std}(v) = \tau$. Comme $\mathrm{std}(w) = u'v'$ est la permutation ayant exactement les mêmes inversions que w, u' a les mêmes inversions que u et v' a les mêmes inversions que v. En particulier, $\mathrm{std}(u') = \sigma$ et $\mathrm{std}(v') = \tau$.

Ainsi, l'application

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \\ & \sigma & \longmapsto & \mathbf{G}_\sigma, \end{array} \tag{1.93}$$

est une réalisation polynomiale de $\mathcal{A}$. Celle-ci est appelée **FQSym**.

Exemple 47. Considérons l'algèbre $\mathcal{A} := (vect(\mathcal{MT}), \star')$ où

$$u \star' v = \sum_{\substack{w=w_1w_2\\ tas(w_1)=u,tas(w_2)=v}} w, \tag{1.94}$$

pour tout couple de mots tassés (u, v).

nous allons montrer que l'algèbre $\mathcal{A}$ est associative en lui trouvant une réalisation polynomiale. Soit A un alphabet totalement ordonné. Posons

$$\mathbf{M}_u := \sum_{\substack{w\in A^*\\ tas(w)=u}} w. \tag{1.95}$$

Pour u et v deux mots tassés, nous constatons que

$$\mathbf{M}_u \mathbf{M}_v = \sum_{\substack{w=w_1w_2\\ tas(w_1)=u,tas(w_2)=v}} \mathbf{M}_w. \tag{1.96}$$

En effet, les mots $w = w_1w_2$ du produit $\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v$ sont exactement ceux qui vérifient $tas(w_1) = u$ et $tas(w_2) = v$. Or, le tassé $w' = w'_1w'_2$ est le mot qui substitue chaque lettre de w par des entiers, en conservant leur nombre d'occurrence et leur ordre par rapport aux autres lettres. Donc w_1 et w'_1 ont le même tassé, et il en est de même de w_2 et w'_2. D'où, $tas(w'_1) = u$ et $tas(w'_2) = v$.

Ainsi, l'application

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathcal{MT} & \longrightarrow & \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \\ & u & \longmapsto & \mathbf{M}_u \end{array} \tag{1.97}$$

est une réalisation polynomiale de $\mathcal{A}$. Elle est appelée **WQSym**.

Remarque 12. Il suffit pour une réalisation polynomiale d'algèbre de l'expliciter pour un alphabet. Les réalisations polynomiales de cogèbres nécessitant plusieurs alphabets, d'autres hypothèses sont à ajouter pour les obtenir.

1.5.2 Réalisation polynomiale de cogèbres

Notons $(\star)$ la propriété "être infini et totalement ordonné".

Soient $(\mathcal{C}, \Delta)$ une cogèbre et $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{C}$. Supposons que l'on dispose d'un algorithme P prenant en argument un alphabet A vérifiant la propriété $(\star)$ et produisant une application surjective

$$\begin{array}{rccc} P_A : & A^* & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & w & \longmapsto & P_A(w), \end{array} \tag{1.98}$$

on définit alors un procédé R prenant en argument un alphabet A vérifiant $(\star)$ et construisant

$$\begin{array}{rccc} R_A : & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle \\ & b & \longmapsto & \sum_{\substack{w \in A^* \\ P_A(w)=b}} w, \end{array} \tag{1.99}$$

que l'on étend par linéarité à $\mathcal{C}$. Soient A et B deux alphabets vérifiant $(\star)$. En imposant aux lettres de A d'être plus petites que les lettres de B, l'alphabet $A + B$ vérifie alors la propriété $(\star)$. Ainsi, pour tout élément b de $\mathcal{B}$, la somme $R_{A+B}(b)$ existe dans l'algèbre $\mathbb{K}\langle\langle A + B \rangle\rangle$. Or, nous savons que modulo la commutation entre les lettres de A et de B, l'algèbre $\mathbb{K}\langle\langle A+B \rangle\rangle$ s'identifie naturellement à $\mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle B \rangle\rangle$. Ainsi, $R_{A+B}(b)$ peut être vu comme un élément de $\mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle B \rangle\rangle$, ce qui permet de définir un coproduit sur les éléments de $R_A(\mathcal{C})$ par

$$\Delta' \left(R_A(c) \right) := R_{A+A}(c) \tag{1.100}$$

pour tout c appartenant à $\mathcal{C}$.

Soit b un élément de $\mathcal{B}$. En utilisant les notations de Sweedler, nous avons

$$\Delta(b) = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}. \tag{1.101}$$

Donc la combinaison linéaire

$$\sum_{(b)} R_A(b_{(1)}) \otimes R_B(b_{(2)}) \tag{1.102}$$

existe aussi dans $\mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle B \rangle\rangle$. Si nous avons l'égalité

$$R_{A+B}(b) = \sum_{(b)} R_A(b_{(1)}) \otimes R_B(b_{(2)}) \tag{1.103}$$

pour tous alphabets A et B vérifiant $(\star)$ et b appartenant à $\mathcal{B}$, le procédé R est alors une réalisation polynomiale de la cogèbre $\mathcal{C}$.

Proposition 1.5.1. *Soient $(\mathcal{C}, \Delta)$ une cogèbre munie de la base $\mathcal{B}$, R une réalisation polynomiale de $\mathcal{C}$ construite à partir de l'algorithme P et A un alphabet vérifiant $(\star)$. Alors R_A réalise un isomorphisme de cogèbre entre $\mathcal{C}$ et $R_A(\mathcal{C})$. En particulier, la loi Δ est coassociative.*

Démonstration. On rappelle que le coproduit Δ' sur $R_A(\mathcal{C})$ est donnée par :

$$\Delta' \left(R_A(v) \right) = R_{A+A}(v), \tag{1.104}$$

où v est un élément de $\mathcal{C}$.

L'application P_A étant surjective, pour tout b appartenant à $\mathcal{B}$, la somme $R_A(b)$ est non nulle. Comme un mot w est un terme d'un unique $R_A(b)$, on en déduit l'injectivité de R_A.

Soit b un élément de $\mathcal{B}$. D'une part nous avons :

$$(R_A \otimes R_A)(\Delta(b)) = \sum R_A(b_{(1)}) \otimes R_A(b_{(2)}). \tag{1.105}$$

D'autre part, grâce à l'hypothèse "être une réalisation polynomiale" l'égalité

$$R_{A+A}(b) = \sum_{(b)} R_A(b_{(1)}) \otimes R_A(b_{(2)}) \tag{1.106}$$

est vérifiée. Ainsi,

$$(R_A \otimes R_A)(\Delta(b)) = R_{A+A}(b) = \Delta' \left(R_A(b) \right). \tag{1.107}$$

Par linéarité, l'égalité est vérifiée pour tout élément c de $\mathcal{C}$. Ces deux cogèbres sont donc isomorphes.

Montrons la coassociativité de la réalisation polynomiale. Soit b un élément de $\mathcal{B}$. D'un côté, nous observons que

$$\begin{aligned}(Id \otimes \Delta') \circ \Delta' (R_A(b)) &= (Id \otimes \Delta') (R_{A+A}(b)) \\ &= R_{A+(A+A)}(b) \\ &= R_{A+A+A}(b),\end{aligned} \tag{1.108}$$

de l'autre,

$$\begin{aligned}(\Delta' \otimes Id) \circ \Delta' (R_A(b)) &= (\Delta' \otimes Id) (R_{A+A}(b)) \\ &= R_{(A+A)+A}(b) \\ &= R_{A+A+A}(b),\end{aligned} \tag{1.109}$$

d'où la coassociativité de Δ'. □

Exemple 48. Considérons la cogèbre $\mathcal{C} := (vect(\mathfrak{S}), \Delta)$, où le coproduit d'une permutation σ est défini par :

$$\Delta(\sigma) := \sum_{\sigma \in u \overline{\sqcup\!\sqcup} v} u \otimes v, \tag{1.110}$$

Pour construire **FQSym**, l'algorithme P correspond à la standardisation, P_A est la standardisation des mots sur l'alphabet A et

$$R_A(\sigma) = \mathbf{G}_\sigma(A) = \sum_{\substack{w \in A^* \\ \mathrm{std}(w) = \sigma}} w. \tag{1.111}$$

Pour avoir un coproduit, nous avons vu qu'il faut considérer deux alphabets A et B, prendre leur somme $A + B$ et appliquer la réalisation R avec l'alphabet $A + B$. Or, ceci n'est possible que si $A + B$ est totalement ordonné. Nous considérons alors l'alphabet $A + B$, où tout élément de B est plus grand que tous les éléments de A. Ainsi,

$$\mathbf{G}_\sigma(A + B) = \sum_{\substack{w \in (A+B)^* \\ \mathrm{std}(w) = \sigma}} w \tag{1.112}$$

est un élément de $\mathbb{K}\langle\langle A + B \rangle\rangle$. Or, nous avons identifié $\mathbb{K}\langle\langle A + B \rangle\rangle$ à $\mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle B \rangle\rangle$ et nous constatons que

$$\mathbf{G}_\sigma(A + B) = \sum_{\sigma \in u \overline{\sqcup\!\sqcup} v} \mathbf{G}_u(A) \otimes \mathbf{G}_v(B). \tag{1.113}$$

En effet, soit w un terme de $\mathbf{G}_\sigma(A + B)$. Notons $w_{|A}$(*resp.* $w_{|B}$) le sous-mot de w obtenu en gardant uniquement toutes les lettres de A (*resp.* B). Les lettres de A étant toutes plus petites que les lettres de B, la standardisation a d'abord lieu pour le sous-mot $w_{|A}$ puis pour le sous-mot $w_{|B}$. Ainsi, σ appartient à $\mathrm{std}(w_{|A}) \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \mathrm{std}(w_{|B})$. Réciproquement, soit w un mot tel que σ appartienne à $\mathrm{std}(w_{|A}) \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \mathrm{std}(w_{|B})$. Comme les lettres de A commutent avec celles de B, les mots que l'on peut obtenir sont les mots de $w_{|A} \sqcup\!\sqcup w_{|B}$. Les lettres de B étant plus grandes que celles de A, nous avons :

$$\mathrm{std}(w_{|A} \sqcup\!\sqcup w_{|B}) = \mathrm{std}(w_{|A}) \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \mathrm{std}(w_{|B}). \tag{1.114}$$

La permutation σ appartenant à $\mathrm{std}(w_{|A}) \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \mathrm{std}(w_{|B})$, on en déduit qu'il existe un élément de l'ensemble $w_{|A} \sqcup\!\sqcup w_{|B}$ ayant comme standardisé σ.

Il en résulte que la standardisation permet de construire une réalisation polynomiale de $\mathcal{C}$.

Remarque 13. La propriété $(\star)$ peut être remplacée par des propriétés plus générales. D'ailleurs, nous considérons dans le paragraphe 1.6 une variante des réalisations polynomiales présentée dans ce paragraphe.

1.5.3 Réalisation polynomiale de bigèbres

Soit un triplet $\mathcal{A} := (E, m, \Delta)$ où E est un espace vectoriel, m un produit sur $\mathcal{B}$ et Δ un coproduit sur E et une base $\mathcal{B}$ de E. On suppose que l'on dispose d'un algorithme P permettant la réalisation polynomiale de $\mathcal{A}$ pour sa structure de produit et de coproduit. Soit A un alphabet

sur lequel on construit une réalisation polynomiale de $\mathcal{A}$. Par abus, nous considérons que m et Δ sont des lois sur la réalisation polynomiale. Pour un élément b de $\mathcal{B}$, nous avons :

$$R_A(b) = \sum_{\substack{w\in A^* \\ P_A(w)=b}} w. \tag{1.115}$$

Les lois m et Δ sont respectivement associative et coassociative grâce à la réalisation polynomiale. Pour que $\mathcal{A}$ soit une bigèbre, Il est nécessaire de vérifier que Δ est bien un morphisme d'algèbres entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$. Soient b et b' deux éléments de $\mathcal{B}$. On a :

$$\Delta\left(R(b)R(b')\right) = \sum_d c^d_{b,b'}\Delta\left(R(d)\right). \tag{1.116}$$

Mais

$$\sum_d c^d_{b,b'}\Delta\left(R(d)\right) = \sum_d c^d_{b,b'}R_{A+A}(d) = R_{A+A}(b)R_{A+A}(b'). \tag{1.117}$$

Autrement dit, Δ est bien un morphisme d'algèbres.

Ainsi, en trouvant une réalisation polynomiale pour $\mathcal{A} = (E, m, \Delta)$ qui fonctionne à la fois pour la structure de cogèbre et d'algèbre nous en déduisons qu'il s'agit en fait d'une bigèbre associative et coassociative.

Exemple 49. On reprend les lois des exemples 46 et 48. Ainsi, nous considérons le triplet

$$\mathcal{A} := (vect(\mathfrak{S}), \star, \Delta). \tag{1.118}$$

Nous avons vu qu'à partir de la standardisation, nous obtenons une réalisation polynomiale qui fonctionne à la fois pour la structure de produit et de coproduit. Il en résulte que $\mathcal{A}$ est une bigèbre.

Remarque 14. Dans les axiomes pour les algèbres de Hopf, il faut aussi une unité, une counité, et une antipode. Les deux premières existent car sont présentes pour les algèbres de mots. Concernant l'antipode, la plupart des bigèbres que l'on étudie étant des bigèbres graduées connexes, son existence est elle aussi assurée.

1.6 Compléments sur WQSym et WQSym*

De nombreuses algèbres de Hopf peuvent être vues comme des sous-algèbres, quotients ou généralisations de **WQSym***, le dual de **WQSym** (cf. paragraphes 1.3.3.3 et 1.4). Précédemment, grâce aux réalisations polynomiales nous montrons de manière indirecte qu'une algèbre est bien de Hopf. Inversement, il est possible de construire des algèbres de Hopf à partir des réalisations polynomiales. Ainsi, les composés partitionnels qui sont des classes combinatoires, indexent des bases d'algèbres de Hopf. Pour obtenir ces algèbres, il nous est nécessaire d'exhiber une réalisation polynomiale de **WQSym***. Mais d'abord, rappelons la bijection entre mots tassés et compositions d'ensembles. En effet, elle nous sera utile pour donner des descriptions simples de certaines lois produits ou de coproduits.

1.6.1 Mots tassés et compositions d'ensembles

La bijection entre mots tassés et compositions d'ensembles est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{MT} & \to & \mathcal{PO} \\ & w = w_1\cdots w_i\cdots & \mapsto & \{j \mid w_j = 1\}\cdots\{j \mid w_j = i\}\cdots \end{array} \tag{1.119}$$

Exemple 50. Pour $u = 1132123$, on a $\phi(u) = \{125\}\{46\}\{37\}$.

1.6.2 Réalisation polynomiale de WQSym*

En dualisant les lois de produit et de coproduit de la base $(\mathbf{M}_u)_{u\in\mathcal{MT}}$ de **WQSym**, pour u et v deux mots tassés, on obtient :

$$\mathbf{M}^*_u\mathbf{M}^*_v = \sum_{w\in u\sqcup\!\sqcup v}\mathbf{M}^*_w, \tag{1.120}$$

et

$$\Delta\left(\mathbf{M}_u^*\right) = \sum_{u=vw} \mathbf{M}_{tas(v)}^* \otimes \mathbf{M}_{tas(w)}^*. \tag{1.121}$$

On va maintenant construire une algèbre de séries formelles dans laquelle on peut trouver des éléments ayant les mêmes lois de produit et de coproduit que la famille $(\mathbf{M}_u^*)_{u\in\mathcal{MT}}$.

Soit A un alphabet totalement ordonné, on note $\mathbf{Pf}(A)$ l'alphabet

$$\{B \subset A,\ |B| < \infty\}. \tag{1.122}$$

Autrement dit, les lettres de $\mathbf{Pf}(A)$ sont les parties finies de A. Le *standardisé partitionnel* d'un mot sur $\mathbf{Pf}(A)$ est la composition d'ensemble obtenue par le procédé suivant :

— On ordonne chaque bloc par ordre croissant.
— On initialise i à 1.
— Tant que l'on n'a pas remplacé toutes les lettres :
  — on lit le mot de gauche à droite sans se soucier des accolades, et on remplace la plus petite lettre non remplacée la plus à gauche par i,
  — on incrémente i de 1.
— On retourne la partition ordonnée obtenue.

La partition ordonnée d'ensemble obtenue est appelée standardisé partionnel du mot initial.

Exemple 51. Si $w = \{a\ b\ d\}\{a\ c\}\{d\ e\}$, alors

$$\mathbf{stdP}(w) = \{1,\ 3,\ 5\}\{2,\ 4\}\{6,\ 7\}. \tag{1.123}$$

Pour obtenir une réalisation polynomiale de $\mathbf{WQSym}^*$, l'algorithme $\mathcal{P}$ utilisé est la standardisation partitionnelle qui prend en argument un alphabet de la forme $\mathbf{Pf}(A)$ où A est un alphabet infini totalement ordonné et qui construit

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}_A : & \mathbf{Pf}(A)^* & \longrightarrow & \mathcal{PO} \\ & Q & \longmapsto & \mathbf{stdP}(Q). \end{array} \tag{1.124}$$

Pour toute composition d'ensemble I, nous définissons les sommes suivantes dans $\mathbb{K}\langle\langle\mathbf{Pf}(A)\rangle\rangle$:

$$\Phi_I(A) := R_{\mathbf{Pf}(A)}(I) = \sum_{\substack{J\in\mathbf{Pf}(A)^* \\ \mathbf{stdP}(J)=I}} J, \tag{1.125}$$

et constatons que pour I et I' deux compositions d'ensembles, l'égalité

$$\Phi_I(A)\Phi_{I'}(A) = \sum_{\substack{J=KL \\ \mathbf{stdP}(K)=I \\ \mathbf{stdP}(L)=I'}} \Phi_J(A) \tag{1.126}$$

est vérifiée.

Démonstration. Soient respectivement P et Q un terme de Φ_I et de $\Phi_{I'}$. Notons J le standardisé partitionnel de PQ. La composition J se factorise de façon unique sous la forme KL, avec K de même taille que P et L de même taille que Q. Or, K et P ont dans le même ordre des blocs de même cardinal, et les inversions (en oubliant les accolades) de K et P sont les mêmes. Donc ils ont le même standardisé partitionnel. Le raisonnement précédent fonctionne également pour Q et L. Ainsi, $\mathbf{stdP}(K) = I$ et $\mathbf{stdP}(L) = I'$. Réciproquement, soit R un terme de Φ_J, avec $J = KL$ et $\mathbf{stdP}(K) = I$ et $\mathbf{stdP}(L) = I'$. Donc R se factorise sous la forme $R = R'R"$, avec R' de même taille que K et $R"$ de même taille que L. On constate alors que les blocs ordonnés de R' et K sont de même cardinal. Or, R' et K (sans les accolades) ont les mêmes inversions. Il en découle qu'ils ont le même standardisé partitionnel. Le raisonnement est identique pour $R"$ et L. □

Proposition 1.6.1. *Soient u et v deux mots tassés. Alors*

$$\phi\left(u \,\overline{\sqcup}\, v\right) = \sum_{\substack{P=QR \\ \mathbf{stdP}(Q)=\phi(u),\mathbf{stdP}(R)=\phi(v)}} P. \tag{1.127}$$

Démonstration. Soient respectivement u et v deux mots tassés de longueur n et m, et w un terme de $u \overline{\sqcup\!\sqcup} v$.

Le mot w représente alors une application surjective f où il existe une unique partition $\{A, B\}$ de $\{1, \dots n+m\}$ avec $A = \{a_1 < \cdots < a_n\}$ et $B = \{b_1 < \cdots < b_m\}$ telle que pour tout i compris entre 1 et n, et j compris entre 1 et m, on a :

$$f(a_i) = u_i, \tag{1.128}$$

et

$$f(b_j) = v_j + \max(u). \tag{1.129}$$

Nous savons que la composition d'ensemble $\phi(w)$ est égale à

$$f^{-1}(1)f^{-1}(2)\cdots f^{-1}(\max(w)). \tag{1.130}$$

Or, les lettres de u sont plus petites que les lettres de $v[\max(u)]$. Donc les $\max(u)$ premiers blocs de $\phi(w)$ correspondent aux images réciproques des valeurs de u. Ainsi, l'élément

$$P = f^{-1}(1)\cdots f^{-1}\left(\max(u)\right) \tag{1.131}$$

est une partition ordonnée de A. Comme l'égalité (1.128) est vérifiée pour tout entier i compris entre 1 et n, nous en déduisons que $\mathbf{stdP}(P)$ représente l'application g qui à l'entier i compris entre 1 et n associe u_i. Autrement dit, $\mathbf{stdP}(P) = \phi(u)$. Le raisonnement est similaire pour

$$Q = f^{-1}(\max(u)+1)\cdots f^{-1}(\max(u)+\max(v)) \tag{1.132}$$

avec B.

Réciproquement, soit $P = QR$ une composition d'ensemble telle que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{stdP}(Q) & = & \phi(u), \\ \mathbf{stdP}(R) & = & \phi(v). \end{array} \tag{1.133}$$

L'élément P représente une application surjective g sous la forme :

$$g^{-1}(1)g^{-1}(2)\cdots g^{-1}(k), \tag{1.134}$$

où k est le nombre de blocs de P. Le facteur Q est aussi une partition ordonnée d'un ensemble

$$A = \{a_1 < \cdots < a_n\}. \tag{1.135}$$

Comme $\mathbf{stdP}(Q) = \phi(u)$, pour tout i compris entre 1 et n, on a :

$$g(a_i) = u_i. \tag{1.136}$$

De la même manière, le facteur R est une partition ordonnée $B = \{b_1 < \cdots < b_m\}$ telle que pour i compris entre 1 et m, on a :

$$g(b_i) = v_i + \max(u). \tag{1.137}$$

En représentant g sous la forme $g(1)\cdots g(n+m)$, nous en déduisons que g est un élément de l'ensemble $u \overline{\sqcup\!\sqcup} v$. □

Ainsi, en appliquant la bijection entre compositions d'ensembles et mots tassés, on retrouve la loi produit de la base $(\mathbf{M}^*_u)_{u\in\mathcal{MT}}$.

Les lois de coproduit provenant de réalisations polynomiales se construisent généralement à l'aide du dédoublement d'un alphabet. Or, dans notre contexte, il est possible de dédoubler l'alphabet A ou l'alphabet $\mathbf{Pf}(A)$. Nous allons montrer que dédoubler A est suffisant, l'autre possibilité étant obtenu par une spécialisation de paramètres à définir. Dans les réalisations polynomiales de cogèbres, nous avons identifié $\mathbb{K}\langle\langle A+B\rangle\rangle$ à $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle B\rangle\rangle$ grâce à la commutation des lettres de A avec les lettres de B. Autrement dit, nous avons effectué le quotient de $\mathbb{K}\langle\langle A+B\rangle\rangle$ par l'idéal $\mathcal{I}$ engendré par les relations :

$$ab = ba, \tag{1.138}$$

pour tout couple (a, b) appartenant à $A \times B$, et montré que ce quotient est naturellement isomorphe à $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle B\rangle\rangle$.

Dans notre situation, pour A et B deux alphabets totalement ordonnés, il faudrait pouvoir identifier de manière simple les éléments de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A+B)\rangle\rangle$ à des éléments de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(B)\rangle\rangle$.

Définissons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \{a_1,\cdots,\ a_k\}\{b_1,\cdots,\ b_l\} &= \{b_1,\cdots,\ b_l\}\{a_1,\cdots,\ a_k\}, \\ \{a_1,\cdots,\ a_k,\ b_1,\cdots b_l\} &= t_{k,l}\{a_1,\cdots,a_k\}\{b_1,\cdots,b_l\} \end{aligned} \tag{1.139}$$

pour $k,\ l \geq 1$, $t_{k,l}$ des indéterminées, et $a_1,\cdots,a_k$ et $b_1,\cdots,b_l$ des lettres respectivement de A et B. On pose également :

$$t_{0,n} = t_{n,0} = 1,\ \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \tag{1.140}$$

Proposition 1.6.2. *Soient A et B deux alphabets, l'idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}\langle\langle \boldsymbol{Pf}(A+B)\rangle\rangle$ engendré par les relations* (1.139) *et $\Pi_{\mathcal{I}}$ la projection de $\mathbb{K}\langle\langle \boldsymbol{Pf}(A+B)\rangle\rangle$ sur $\mathbb{K}\langle\langle \boldsymbol{Pf}(A+B)\rangle\rangle/\mathcal{I}$.*

Alors les algèbres $\mathbb{K}\langle\langle \boldsymbol{Pf}(A+B)\rangle\rangle/\mathcal{I}$ et $\mathbb{K}\langle\langle \boldsymbol{Pf}(A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle \boldsymbol{Pf}(B)\rangle\rangle$ sont isomorphes.

Démonstration. Définissons le morphisme d'algèbres Π de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A+B)\rangle\rangle$ vers $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(B)\rangle\rangle$ par :

$$\begin{aligned} \Pi\left(\{a_1,\cdots,a_k\}\right) &= \{a_1\cdots,a_k\}\otimes 1, \\ \Pi\left(\{b_1\cdots,b_l\}\right) &= 1\otimes\{b_1\cdots,b_l\}, \\ \Pi\left(\{a_1,\cdots,a_k,b_1,\cdots,b_l\}\right) &= t_{k,l}\{a_1,\cdots,a_k\}\otimes\{b_1,\cdots,b_l\}, \end{aligned} \tag{1.141}$$

pour $k,\ l \geq 1$, $t_{k,l}$ des indéterminées, $a_1,\cdots,a_k$ et $b_1,\cdots,b_l$ des lettres respectivement de A et de B. Montrons que l'idéal $\mathcal{I}$ est égal au noyau de Π. Constatons que les éléments de la forme

$$\{a_1,\cdots,\ a_k\}\{b_1,\cdots,\ b_l\} - \{b_1,\cdots,\ b_l\}\{a_1,\cdots,\ a_k\} \tag{1.142}$$

et de la forme

$$\{a_1,\cdots,\ a_k,\ b_1,\cdots b_l\} - t_{k,l}\{a_1,\cdots,a_k\}\{b_1,\cdots,b_l\} \tag{1.143}$$

pour $k,\ l \geq 1$, $t_{k,l}$ des indéterminées, et $a_1,\cdots,a_k$ et $b_1,\cdots,b_l$ des lettres respectivement de A et B, sont dans le noyau de Π. Par conséquent, l'idéal engendré par ces éléments, c'est-à-dire $\mathcal{I}$ est inclus dans le noyau de Π.

Réciproquement, soit P un mot sur $\mathbf{Pf}(A+B)$. Montrons par récurrence que sous les règles de réécritures (1.139), il est équivalent à un mot de la forme αQR où Q est un mot sur $\mathbf{Pf}(A)$, R un mot sur $\mathbf{Pf}(B)$ et α un produit d'indéterminées. Pour P de longueur 1, le cas $P = \{a_1,\cdots,a_k,b_1\cdots,b_l\}$ résulte d'une des règles de réécriture. Supposons que l'on ait montré la propriété pour les entiers inférieurs à $n-1$. Soit $P = P_1\cdots P_n$ un mot sur l'alphabet $\mathbf{Pf}(A+B)$. Alors en appliquant la récurrence au mot $P_2\cdots P_n$, nous en déduisons que P est équivalent à un élément de la forme $\alpha P_1 QR$, où α est un produit d'indéterminées, Q un mot sur l'alphabet $\mathbf{Pf}(A)$ et R un mot sur l'alphabet $\mathbf{Pf}(B)$. Si P_1 est un bloc de lettres de A, nous avons la proposition au rang n. Si P_1 est un bloc de lettres de B, le mot se réécrit alors αQP_1R. Sinon, on applique la troisième relation de (1.139), et on fait commuter le bloc de B. Dans tous les cas, la proposition est vérifiée au rang n.

Constatons que Π restreinte à

$$S := vect(PQ,\ P\in\mathbf{Pf}(A)^*,\ Q\in\mathbf{Pf}(B)^*) \tag{1.144}$$

est bijective. En effet, les éléments PQ forment une base de S et sont envoyés sur les $P\otimes Q$ qui forment une base de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(B)\rangle\rangle$. Il en résulte que S est un supplémentaire du noyau de Π.

Soit P un mot de $\mathbf{Pf}(A+B)^*$. Nous avons vu qu'il admet un équivalent sous les relations (1.139) de la forme αQR, avec Q un mot de $\mathbf{Pf}(A)^*$ et R un mot de $\mathbf{Pf}(B)^*$. Donc, $P-\alpha QR$ appartient à $\mathcal{I}$. Or, αQR est dans S. Comme $P = \alpha QR+(P-\alpha QR)$, on en déduit que S et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires. Mais S est aussi supplémentaire au noyau de Π qui contient $\mathcal{I}$. Par conséquent, ce noyau est égal à $\mathcal{I}$. On conclut par passage au quotient

$$\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A+B)\rangle\rangle/\mathcal{I} \approx \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(B)\rangle\rangle. \tag{1.145}$$

□

Soient A et B deux alphabets totalement ordonnés, $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A+B)\rangle\rangle$ engendré par les relations (1.139), $\Pi_{\mathcal{I}}$ la projection de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A+B)\rangle\rangle$ sur $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A+B)\rangle\rangle/\mathcal{I}$ et I un élément de $\mathcal{PO}$. Comme ce quotient est isomorphe à $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(B)\rangle\rangle$, l'élément $\Pi_{\mathcal{I}}(\Phi_I(A+B))$ est bien défini dans $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{Pf}(B)\rangle\rangle$.

Soit I une composition de l'ensemble $\{1,\cdots,n\}$, on note $I_{[i,j]}$ le mot obtenu en restreignant I aux lettres comprises entre i et j.

Exemple 52. Pour $I = \{1,2\}\{4,6,7\}\{3\}\{5\}$, on a $I_{[3,6]} = \{4,6\}\{3\}\{5\}$.

Proposition 1.6.3. *Soit $I = I_1 I_2 \cdots I_k$ un élément de $\mathcal{PO}(n)$, alors le coproduit de Φ_I se décrit comme suit :*

$$\Delta(\Phi_I) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Phi_{I_{[1,i]}} \otimes \Phi_{\boldsymbol{stdP}(I_{[i+1,n]})}, \tag{1.146}$$

où $\omega_i = \prod_{j=1}^{k} t_{|I_j \cap \{1,\cdots,i\}|,\ |I_j| - |I_j \cap \{1,\cdots,i\}|}$.

Démonstration. Soient $I = I_1 \cdots I_k$ appartenant à $\mathcal{PO}(n)$ et J un terme de $\Phi_I(A+B)$. La composition J contient n lettres de $A+B$ réparties dans les J_p. Notons i le nombre de lettres de A apparaissant dans J. Comme les lettres de B sont plus grandes que les lettres de A, lorsque l'on applique la standardisation partitionnelle à J, les lettres correspondant respectivement à un entier $j \leq i$ ($j > i$) seront des lettres de A (de B). En appliquant à J_p les relations (1.139), on obtient :

$$\Pi_{\mathcal{I}}(J_p) = t_{|J_p \cap A|,|J_p \cap B|} J_{p|A} \cdot J_{p|B}, \tag{1.147}$$

où $J_{p|C}$ est la restriction de J_p à l'alphabet C. On en déduit que

$$\Pi_{\mathcal{I}}(J) = \prod_{p=1}^{k} t_{|J_p \cap A|,|J_p \cap B|} J_{p|A} \cdot J_{p|B}. \tag{1.148}$$

Or on a $\mathbf{stdP}(J) = I$, $\mathbf{stdP}(J_{|A}) = I_{|[1,i]}$ et $stdP(J_{|B}) = \mathbf{stdP}(I_{|[i+1,n]})$. Ainsi, $\Pi_{\mathcal{I}}(J)$ est un terme de $\omega_i \Phi_{I|\{1,\cdots,i\}} \cdot \Phi_{\mathbf{stdP}(I_{|\{i+1,\cdots,n\}})}$, où $\omega_i = \prod_{p=1}^{k} t_{|I_p \cap \{1,\cdots,i\}|,|I_p| - |I_p \cap \{1,\cdots,i\}|}$.

Réciproquement, soient un entier i compris entre 1 et n, et $\omega_i P \cdot Q$ un terme de la somme $\omega_i \Phi_{I|\{1,\cdots,i\}} \cdot \Phi_{\mathbf{stdP}(I_{|\{i+1,\cdots,n\}})}$. Les règles de réécriture autorisées sont de permuter un bloc de lettres de A avec un bloc de lettres de B, ou de fusionner un bloc de taille k de lettres de A avec un bloc de taille l de lettres de B avec disparition du coefficient $t_{k,l}$. Nous savons que P est une composition d'un ensemble $\{a_1 < \cdots < a_i\}$ de lettres de A. De même, Q est une composition d'un ensemble $\{b_1 < \cdots < b_{n-i}\}$ de lettres de B. Notons respectivement N_1, N_2 et N le nombre de blocs de P, Q et I. Appliquons alors l'algorithme suivant pour constituer une composition J de l'ensemble $\{a_1,\cdots,a_i,b_1,\cdots,b_{n-i}\}$ de sorte que $\mathbf{stdP}(J) = I$:

- On initialise r à 1, s à 1, k à 1 et le mot J au mot vide.
- Tant que $r < N_1 + 1$ ou $s < N_2 + 1$:
  - Si le k^{e} bloc de I ne contient que des valeurs inférieures à i :
    - $J = JP_r$;
    - $r = r + 1$;
  - Si le k^{e} bloc de I ne contient que des valeurs strictement plus grandes que i :
    - $J = JQ_s$;
    - $s = s + 1$;
  - Sinon :
    - $J = J(P_r \cup Q_s)$;
    - $r = r + 1$;
    - $s = s + 1$;
  - $k = k + 1$;
- retourner J.

Ainsi, $\omega_i P_1 \cdot P_2$ est bien un terme de $\Pi_{\mathcal{I}}(\Phi_I(A+B))$.

□

En appliquant la bijection entre compositions d'ensembles et mots tassés, on obtient une formulation simple de ce coproduit. Soit u un mot tassé de longueur n à k lettres, alors

$$\Delta(N_u) = \sum_{u=vw} \left(\prod_{i=1}^{k} t_{|v|_i,|w|_i} \right) N_{tas(v)} \otimes N_{tas(w)}, \tag{1.149}$$

où $\Phi_{\phi(u)} = N_u$.

Remarque 15. En prenant $t_{k,l} = 1$ pour tous k et l entiers positifs, on retrouve le coproduit de déconcaténation de $(\mathbf{M}_u^*)_{u\in\mathcal{MT}}$ de $\mathbf{WQSym}^*$, c'est-à-dire :

$$\Delta(N_u) = \sum_{u=vw} N_{tas(v)} \otimes N_{tas(w)}. \tag{1.150}$$

Si on spécialise les $t_{k,l} = 0$ pour tous k et l des entiers strictement positifs, on retrouve le cas du dédoublement d'alphabet $\mathbf{Pf}(A)$, et on obtient pour u un mot tassé :

$$\Delta'(N_u) = \sum_{\substack{u=vw \\ V\cap W=\emptyset}} N_{tas(v)} \otimes N_{tas(w)}, \tag{1.151}$$

où V et W sont respectivement les ensembles des lettres de v et de w.

En traduisant cette loi à travers la bijection ϕ, nous constatons que pour toute partition ordonnée I le coproduit est défini par :

$$\Delta'(\Phi_I) = \sum_{I\in J\sqcup\!\sqcup K[|J|]} \Phi_J \otimes \Phi_K, \tag{1.152}$$

où $K[|J|]$ est la composition obtenue en décalant toutes les lettres à l'intérieur des blocs du cardinal de $\cup_i J_i$, et où le shuffle a lieu entre les blocs de J et de $K[|J|]$.

1.6.3 WQSym* coloré et composé partitionnel

Un des aspects de la combinatoire est de donner la raison pour laquelle certaines formules faisant intervenir des séries à coefficients entiers positifs donnent encore des séries à coefficients entiers positifs. Par exemple, si les dérivées successives de f prises en 0 sont des entiers positifs, il en est de même pour

$$g := \exp(f), \tag{1.153}$$

et

$$g := \frac{1}{1-f}. \tag{1.154}$$

Or, certaines séries de ce type ont un relèvement dans d'autres algèbres. On peut alors se demander si les identités admettent elles aussi une généralisation dans ces algèbres. En manipulant une généralisation de $\mathbf{WQSym}^*$, nous retrouvons les explications concernant les identités (1.153) et (1.154), celles-ci ayant déjà une description combinatoire appelées composé partitionnel abélien et composé partitionnel ordonné. De plus, de nouvelles algèbres apparaissent naturellement à travers ces constructions.

Soit Y un ensemble et A un alphabet totalement ordonné. On définit l'alphabet

$$Z(Y,A) := \left\{ \binom{w}{P} |\ w\in Y^*,\ P = P_1\cdots P_{l(w)},\ P_i \in \mathbf{Pf}(A) \right\}, \tag{1.155}$$

l'ensemble

$$\mathcal{H}p(Y) := \left\{ \binom{w}{P} |\ w\in Y^*,\ P = P_1\cdots P_{l(w)} \in \mathcal{PO} \right\}, \tag{1.156}$$

et les éléments $\Phi_{\binom{w}{P}}$ par :

$$\Phi_{\binom{w}{P}} := \sum_{\substack{\binom{w}{J}\in Z(Y,A)^*, \\ \mathbf{stdP}(J)=P}} \binom{w}{J}, \tag{1.157}$$

pour $\binom{w}{P}$ appartenant à $\mathcal{H}p(Y)$.

L'algorithme $\mathcal{P}$ permettant la réalisation polynomiale des $(\Phi_v)_{v\in\mathcal{H}p(Y)}$ prend en argument les alphabets de la forme $Z(Y,A)$, avec A totalement ordonné et construit une application surjective

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}_A : & Z(Y,A) & \longrightarrow & \mathcal{H}p(Y) \\ & \binom{w}{Q} & \longmapsto & \binom{w}{\mathbf{stdP}(Q)}. \end{array} \tag{1.158}$$

Exemple 53. Si $A = \mathbb{N}^*$, $Y = \{2, 5, 7\}$, et $P = \{2, 3\}\{4, 6, 7\}\{5\}\{1\}$, alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 5 \\ \{3,5\} & \{5,7,9\} & \{5\} & \{1\} \end{pmatrix}$$

est un terme de $\Phi_{\binom{w}{P}}$.

Pour plus de lisibilité, on pourra réécrire $\binom{w}{J}$ sous la forme $\left(\begin{smallmatrix} w_1 & \cdots & w_k \\ I_1 & \cdots & I_k \end{smallmatrix}\right)$.

Exemple 54. L'élément

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 5 \\ \{3,5\} & \{5,7,9\} & \{5\} & \{1\} \end{pmatrix}$$

se réécrit $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 7 & 5 \\ 35 & 579 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Constatons que pour tout couple $(\binom{u}{P}, \binom{v}{Q})$ de $\mathcal{H}p(Y)^2$, l'égalité

$$\Phi_{\binom{u}{P}}\Phi_{\binom{v}{Q}} = \sum_{\substack{R=IJ \\ \mathbf{stdP}(I)=P,\ \mathbf{stdP}(J)=Q}} \Phi_{\binom{uv}{R}} \tag{1.159}$$

est vérifiée, les arguments de la preuve de l'équation (1.126) étant encore valides pour cette identité.

Exemple 55. Si $Y = \{y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$, pour u égal à $\left(\begin{smallmatrix} y_3 & y_8 \\ 23 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et v égal à $\left(\begin{smallmatrix} y_6 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, on a :

$$\Phi_u\Phi_v = \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} y_3 & y_8 & y_6 \\ 23 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)} + \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} y_3 & y_8 & y_6 \\ 24 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)} + \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} y_3 & y_8 & y_6 \\ 34 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} + \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} y_3 & y_8 & y_6 \\ 34 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)}. \tag{1.160}$$

On appelle cette algèbre $\mathbf{WQSym}^{*(Y)}$. Désormais, nous supposons que les lettres y de Y ont un poids $\lambda(y)$, entier strictement positif.

Définition 1.6.4. Soit Y un alphabet tel que chaque lettre y de Y ait un poids $\lambda(y)$ entier strictement positif. Soit $w = w_1 \cdots w_k$ mot de Y^*. Une composition d'ensemble $I = I_1 \cdots I_k$ d'un intervalle $[1, \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda(i)]$ est dite *w-compatible*, si pour tout i appartenant à $[1, k]$, on a $|I_i| = \lambda(i)$. L'ensemble $CPO(Y) := \{\binom{w}{I} \in \mathcal{H}p(Y) |\ I\ w\text{-compatible}\}$ est appelé *composé partitionnel ordonné* de Y.

Proposition 1.6.5. *L'ensemble* $\mathfrak{A}(Y) := vect\,(\mathcal{F})$ *avec* $\mathcal{F} = (\Phi_{\binom{w}{P}})_{\binom{w}{P} \in CPO(Y)}$ *est une sous-algèbre de* ***WQSym***$^{*(Y)}$

Démonstration. Soit $(\binom{u}{P}, \binom{v}{Q})$ un couple $CPO(Y)^2$. Nous savons que

$$\Phi_{\binom{u}{P}}\Phi_{\binom{v}{Q}} = \sum_{\substack{R=IJ \\ \mathbf{stdP}(I)=P,\ \mathbf{stdP}(J)=Q}} \Phi_{\binom{uv}{R}}. \tag{1.161}$$

Soit $\Phi_{\binom{uv}{R}}$ un terme de la somme. Comme $R = IJ$, avec $\mathbf{stdP}(I) = P$ et $\mathbf{stdP}(J) = Q$, nous en déduisons que les blocs de I (*resp.* de J) sont de mêmes tailles que les blocs de P (*resp.* Q). Or, le poids de u_i (*resp.* v_j) est la taille du bloc P_i (*resp.* Q_j). On en déduit que $\binom{uv}{R}$ est un élément de $CPO(Y)$. Donc $\mathfrak{A}(Y)$ est bien une sous-algèbre de $\mathbf{WQSym}^{*(Y)}$. □

Ainsi, le couple $\mathcal{A} := (vect(\mathcal{H}p(Y), \star)$ où la loi $\star$ est définie pour tout élément $(\binom{u}{P}, \binom{v}{Q})$ de $\mathcal{H}p(Y)$ par :

$$\binom{u}{P} \star \binom{v}{Q} := \sum_{\substack{R=IJ \\ \mathbf{stdP}(I)=P, \mathbf{stdP}(J)=Q}} \binom{uv}{R} \tag{1.162}$$

est bien une algèbre associative.

1.6.3.1 La projection $\mathfrak{p}$

On considère la relation d'équivalence "avoir les mêmes permutés" (notée $\sim$) sur les éléments de $CPO(Y)$. Autrement dit, $\binom{w_1|w_2\cdots|w_k}{I_1|I_2|\cdots|I_k}$ est équivalent à $\binom{v_1|v_2\cdots|v_k}{J_1|J_2|\cdots|J_k}$ s'il existe une permutation σ de taille k tel que

$$\binom{w_{\sigma(1)}|w_{\sigma(2)}\cdots|w_{\sigma(k)}}{I_{\sigma(1)}|I_{\sigma(2)}\cdots|I_{\sigma(k)}} = \binom{v_1|v_2\cdots|v_k}{J_1|J_2\cdots|J_k}. \tag{1.163}$$

L'ensemble quotient de $CPO(Y)$ par cette relation d'équivalence est appelé *composé partitionnel abélien* de Y.

Proposition 1.6.6. *Soit $\mathcal{I} := vect(\mathcal{F})$ avec*

$$\mathcal{F} = \left\{ \Phi_{\binom{u}{P}} - \Phi_{\binom{v}{Q}} | \ \binom{u}{P} \sim \binom{v}{Q} \right\}. \tag{1.164}$$

Alors $\mathcal{I}$ est un idéal de $CPO(Y)$. En particulier, $CPO(Y)/\mathcal{I}$ définit une algèbre notée $A(Y)$, dont une base est indexée par les composés partitionnels abéliens de Y. La projection de $CPO(Y)/\mathcal{I}$ sur $A(Y)$ est notée $\mathfrak{p}$.

Démonstration. On rappelle que pour un mot w de taille n et σ une permutation de taille n, on définit

$$w.\sigma := w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(n)}. \tag{1.165}$$

Soient $\binom{u}{P}$ et $\binom{v}{Q}$ deux éléments de $CPO(Y)$, σ et τ deux permutations de tailles respectives $n := l(u)$ et $m := l(v)$. Montrons qu'il existe une bijection Ψ entre

$$E := \left\{ \binom{uv}{R} | \ R = IJ, \ \mathbf{stdP}(I) = P, \ \mathbf{stdP}(J) = Q \right\} \tag{1.166}$$

et

$$F := \left\{ \binom{u'v'}{K} | \ K = LM, \ \mathbf{stdP}(L) = P', \ \mathbf{stdP}(M) = Q' \right\} \tag{1.167}$$

où $u' = u.\sigma$, $v' = v.\tau$, $P' = P.\sigma$, $Q' = Q.\sigma$ telle que pour tout S élément de E, $\Psi(S) \sim S$. Un élément de E est caractérisé par une partition $\{E_1, E_2\}$ de $\{1, \cdots, n+m\}$ avec E_1 de taille n. Il en est de même pour F. Ainsi, la bijection Ψ envoie l'élément correspondant à $\{E_1, E_2\}$ de E sur l'élément correspondant à $\{E_1, E_2\}$ de F. L'équivalence entre $\Psi(S)$ et S pour S élément de E résulte alors des équivalences de P avec P' et de Q avec Q'. Ainsi, $\mathcal{I}$ est bien un idéal. Le quotient est alors bien défini. □

1.6.3.2 Deux formules classiques

En effectuant des calculs dans l'algèbre $\mathfrak{A}(Y)$, nous retrouvons des analogues des identités (1.153) et (1.154).

Proposition 1.6.7. *Dans $A(Y)$, on a l'identité*

$$\sum_{\left[\begin{smallmatrix} m \\ I \end{smallmatrix}\right] \in CPA(Y)} \Phi_{\left[\begin{smallmatrix} m \\ I \end{smallmatrix}\right]} = \exp\left(\sum_{y \in Y} \Phi_{\left[\begin{smallmatrix} y \\ \{1,\cdots,\lambda(y)\} \end{smallmatrix}\right]} \right). \tag{1.168}$$

Démonstration. Considérons le calcul suivant dans $\mathfrak{A}(Y)$:

$$\exp\left(\sum_{y \in Y} \Phi_{\binom{y}{\{1,\cdots,\lambda(y)\}}} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\sum_{y \in Y} \Phi_{\binom{y}{\{1,\cdots,\lambda(y)\}}})^n}{n!} \tag{1.169}$$

En développant et en réordonnant, on obtient

$$\exp\left(\sum_{y \in Y} \Phi_{\binom{y}{\{1,\cdots,\lambda(y)\}}} \right) = \sum_{\binom{w}{I} \in CPO(Y)} \frac{\Phi_{\binom{w}{I}}}{l(w)!}, \tag{1.170}$$

où $l(w)$ est la taille du mot w. Comme un $\binom{w}{I}$ a $l(w)!$ permutés, en appliquant $\mathfrak{p}$ à (1.170), on a :

$$\exp\left(\sum_{y\in Y}\Phi_{\left[\begin{smallmatrix} y \\ \{1,\cdots,\lambda(y)\}\end{smallmatrix}\right]}\right) = \sum_{\left[\begin{smallmatrix} m \\ I\end{smallmatrix}\right]\in CPA(Y)} l(m)!\frac{\Phi_{\left[\begin{smallmatrix} m \\ I\end{smallmatrix}\right]}}{l(m)!}. \tag{1.171}$$

On en conclut que

$$\sum_{\left[\begin{smallmatrix} m \\ I\end{smallmatrix}\right]\in CPA(Y)}\Phi_{\left[\begin{smallmatrix} m \\ I\end{smallmatrix}\right]} = \exp\left(\sum_{y\in Y}\Phi_{\left[\begin{smallmatrix} y \\ \{1,\cdots,\lambda(y)\}\end{smallmatrix}\right]}\right). \tag{1.172}$$

□

Proposition 1.6.8. *Dans $\mathfrak{A}(Y)$, on a l'identité algébrique suivante :*

$$\sum_{\binom{w}{I}\in CPO(Y)}\Phi_{\binom{w}{I}} = \frac{1}{1-\sum_{y\in Y}\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} y \\ \{1\cdots\lambda(y)\}\end{smallmatrix}\right)}}. \tag{1.173}$$

Démonstration. On a :

$$\frac{1}{1-\sum_{y\in Y}\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} y \\ \{1\cdots\lambda(y)\}\end{smallmatrix}\right)}} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{y\in Y}\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} y \\ \{1\cdots\lambda(y)\}\end{smallmatrix}\right)}\right)^n. \tag{1.174}$$

En développant et en réordonnant, on obtient :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{y\in Y}\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} y \\ \{1\cdots\lambda(y)\}\end{smallmatrix}\right)}\right)^n = \sum_{\binom{w}{I}\in CPO(Y)}\Phi_{\binom{w}{I}}. \tag{1.175}$$

□

Exemple 56. Retrouvons par cette méthode la série génératrice exponentielle des partitions ordonnées d'ensembles. En effet, en prenant $Y=\mathbb{N}^*$ avec $\lambda(i)=i$, on trouve que $\mathfrak{A}(Y)$ est naturellement isomorphe à $\mathbf{WQSym}^*$. On a donc :

$$\sum_{I\in\mathcal{PO}}\Phi_I = \frac{1}{1-\sum_{n\geq 1}\Phi_{\{1,\cdots,n\}}}. \tag{1.176}$$

En appliquant le morphisme d'algèbres

$$\Pi\left(\Phi_I\right) = \frac{x^{|I|}}{|I|!},$$

on obtient

$$\sum_{n\geq 0}|\mathcal{PO}_n|\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2-\exp(x)}.$$

Exemple 57. De même, $A(\mathbb{N}^*)$ est naturellement indexée par les partitions d'ensembles. On a donc :

$$\sum_{I\in\mathcal{P}}\Phi_I = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\Phi_{\{1,\cdots,n\}}\right).$$

En prenant l'image par Π, on retrouve :

$$\sum_{n\geq 0}|\mathcal{P}(n)|\frac{x^n}{n!} = \exp\left(\exp(x)-1\right),$$

série génératrice exponentielle des nombres de Bell.

1.6.3.3 Structures de cogèbres de $\mathbf{WQSym}^{*(Y)}$

Revenons sur $\mathbf{WQSym}^{*(Y)}$. Il est possible de généraliser les structures de cogèbres de $\mathbf{WQSym}^*$ à $\mathbf{WQSym}^{*(Y)}$. Pour cela, il faut pouvoir identifier les éléments de $\mathbb{K}\langle\langle Z(Y, A+B)\rangle\rangle$ aux éléments de $\mathbb{K}\langle\langle Z(Y,A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle Z(Y,B)\rangle\rangle$. L'algèbre $\mathbb{K}\langle\langle Z(Y,A+B)\rangle\rangle$ étant libre et engendrée par les lettres de $Z(Y, A+B)$, il suffit de définir des règles pour ces lettres. On considère les relations suivantes pour le quotient :

$$\binom{v}{a_1,\cdots,\ a_k}\binom{w}{b_1,\cdots,\ b_l} = \binom{w}{b_1,\cdots,\ b_l}\binom{v}{a_1,\cdots,\ a_k} \tag{1.177}$$

et

$$\binom{u}{a_1\cdots,\ a_k,\ b_1\cdots b_l} = 0, \tag{1.178}$$

pour toutes lettres u, v, w de Y. Les relations (1.177) sont classiques : nous avons toujours utilisé les relations de commutations pour construire les quotients permettant des réalisations polynomiales de cogèbres.

Concernant les relations (1.178), elles sont analogues à la spécialisation des paramètres $t_{k,l}$ à 0 dans les relations (1.139).

Comme dans la réalisation polynomiale de $\mathbf{WQSym}^*$, grâce aux relations (1.177) et (1.178), on obtient une structure de cogèbre sur $\mathbf{WQSym}^{*(Y)}$. Pour tout élément $\binom{u}{I}$ de $\mathcal{H}p(Y)$, on a

$$\Delta\left(\Phi_{\binom{u}{I}}\right) = \sum_{\binom{u}{I}\in\binom{v}{J}\sqcup\binom{w}{K[|J|]}} \Phi_{\binom{v}{J}} \otimes \Phi_{\binom{w}{K}}, \tag{1.179}$$

la preuve étant identique à celle donnée pour le coproduit de $\mathbf{WQSym}^*$.

Constatons que $\mathfrak{A}(Y)$ est stable par ce coproduit car les sous-mots $\binom{w}{Q}$ d'un composé partitionnel $\binom{u}{P}$ sont encore des mots w-compatibles.

Considérer les permutés des sous-mots de $\binom{u}{P}$ est équivalent à considérer les sous-mots des permutés de $\binom{u}{P}$. Ainsi, $\mathfrak{p}$ commute avec Δ. Donc, $A(Y)$ hérite de la structure de cogèbre de $\mathfrak{A}(Y)$.

Nous avons vu qu'une autre cogèbre naturelle de $\mathbf{WQSym}^*$ s'obtient par spécialisation des paramètres $t_{k,l}$ à 1 dans les relations (1.139). Si on veut construire un analogue à cette cogèbre pour $\mathfrak{A}(Y)$, il est nécessaire d'avoir des relations du type :

$$\binom{y}{a_1\cdots,\ a_k,\ b_1\cdots b_l} = \binom{y_{(1)}}{a_1,\cdots,\ a_k}\binom{y_{(2)}}{b_1,\cdots,\ b_l}, \tag{1.180}$$

pour tous k, l des entiers strictement positifs, toute lettre y de poids $k+l$, toutes lettres $a_1,\cdots,a_k$ de A et toutes lettres $b_1,\cdots,b_l$ de B. Mais il faut aussi que la manière de découper y en deux parties $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ respecte la structure de poids et soit coassociative.

Dans la suite, nous supposons que toute lettre y de Y a un poids strictement positif $\lambda(y)$, que le seul mot de poids nul est le mot vide 1, et que $\mathbb{K}\langle\langle Y\rangle\rangle$ est munie d'un coproduit Δ coassociatif défini par

$$\Delta(y) = \sum_{k=0}^{\lambda(y)} y_{(1)} \otimes y_{(2)}, \tag{1.181}$$

où $y_{(1)}$ est un élément de Y de poids k, et $y_{(2)}$ un élément de Y de poids $\lambda(y)-k$.

Sous ces conditions, $\mathfrak{A}(Y)$ est naturellement munie d'une autre structure de cogèbre. En effet, considérons A et B deux alphabets totalement ordonnés, et définissons l'idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}\langle\langle Z(Y,A+B)\rangle\rangle$ engendré par les relations

$$\begin{aligned}\binom{u}{a_1,\cdots,\ a_k}\binom{v}{b_1,\cdots,\ b_l} &= \binom{v}{b_1,\cdots,\ b_l}\binom{u}{a_1,\cdots,\ a_k}\\ \binom{w}{a_1\cdots,\ a_k,\ b_1\cdots b_l} &= \binom{w_{(1)}}{a_1,\cdots,\ a_k}\binom{w_{(2)}}{b_1,\cdots,\ b_l},\end{aligned} \tag{1.182}$$

où u, v, w sont respectivement des lettres de Y de poids k, l, et $k+l$, $w_{(1)}\otimes w_{(2)}\ \ \Delta(y)$, où $w_{(1)}$ est de poids k et $w_{(2)}$ de poids l, et les relations

$$\binom{w}{a_1\cdots a_k, b_1\cdots b_l} = 0, \tag{1.183}$$

pour toute lettre w dont le poids est différent de $k+l$.

Les algèbres $\mathbb{K}\langle\langle Z(Y, A+B)\rangle\rangle/\mathcal{I}$ et $\mathbb{K}\langle\langle Z(Y, A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle Z(Y, B)\rangle\rangle$ sont alors isomorphes, les arguments de la preuve de la proposition 1.6.2 fonctionnant pour prouver cet isomorphisme. Notons $\Pi_{\mathcal{I}}$ la projection quotient de $\mathbb{K}\langle\langle Z(Y, A+B)\rangle\rangle$ sur $\mathbb{K}\langle\langle Z(Y, A)\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle Z(Y, B)\rangle\rangle$. De la même manière que pour $\mathbf{WQSym}^*$ nous constatons que pour tout $\binom{w}{I}$ de $CPO(Y)$ l'égalité

$$\Pi_{\mathcal{I}}\left(\Phi_{\binom{w}{I}}(A+B)\right) = \sum_{k=0}^{\lambda(w)} \Phi_{\binom{w_{(1)}}{I_{[1,k]}}}(A) \otimes \Phi_{\binom{w_{(2)}}{\mathbf{stdP}(I_{[k+1,n]})}}(B) \tag{1.184}$$

est vérifiée.

Ainsi, le couple $\mathcal{C} := (vect(CPO(Y)), \Delta)$ où Δ est défini pour tout $\binom{w}{I}$ appartenant à $CPO(Y)$ par :

$$\Delta\left(\binom{w}{I}\right) = \sum_{k=0}^{\lambda(w)} \binom{w_{(1)}}{I_{[1,k]}} \binom{w_{(2)}}{\mathbf{stdP}(I_{[k+1,\lambda(w)]})} \tag{1.185}$$

est bien une cogèbre coassociative.

Par la projection $\mathfrak{p}$ nous obtenons également une structure de cogèbre sur $A(Y)$, en effet, permuter les blocs de $\binom{w}{I}$ par σ puis appliquer Δ étant équivalent à appliquer Δ à $\binom{u}{I}$ puis à permuter par des restrictions de σ aux deux composantes de chaque terme du coproduit.

Remarque 16. A l'aide de la même réalisation polynomiale, nous avons construit une algèbre et une cogèbre sur $vect(CPO(Y))$. Il en résulte que ces deux lois sont compatibles et que l'on a en fait une algèbre de Hopf.

1.6.3.4 L'algèbre de Hopf commutative $\mathfrak{S}QSym$

Il s'agit d'une algèbre de Hopf dont une base est indexée par les permutations. Pour la définir, quelques rappels concernant la décomposition en cycles d'une permutation sont nécessaires.

Définition 1.6.9. Soit σ une permutation de taille n. On dit que deux entiers i et j sont dans la même σ-orbite s'il existe un entier k tel que $\sigma^k(i) = j$. L'ensemble des σ-orbites forme une partition de $\{1, \cdots, n\}$.

Un *grand cycle* est une permutation σ ayant une seule σ-orbite.

Soient σ une permutation de taille n, $O_1, \cdots, O_k$ les σ-orbites de σ. Une écriture cyclique de σ en cycles disjoints est de la forme :

$$\sigma = \Big(a_1,\ \sigma(a_1),\ \sigma^2(a_1) \cdots, \sigma^{|O_1|-1}(a_1)\Big) \cdots \Big(a_k,\ \sigma(a_k),\ \sigma^2(a_k), \cdots, \sigma^{|O_k|-1}(a_k)\Big) \tag{1.186}$$

où a_i appartient à O_i.

Pour obtenir une écriture unique, on peut prendre les a_i égal au minimum de l'ensemble O_i et trier les cycles dans l'ordre croissant des a_i.

Exemple 58. Pour $\sigma = 796213584$, nous avons :

$$\sigma = (1, 7, 5)(2, 9, 4)(3, 6)(8). \tag{1.187}$$

La loi produit de l'algèbre de Hopf $\mathfrak{S}QSym$ exprimée dans la base $(M_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$, pour σ et τ deux permutations est :

$$M_\sigma M_\tau = \sum_{\gamma\in\sigma\star\tau} M_\gamma, \tag{1.188}$$

où $\sigma \star \tau$ est le multi-ensemble E obtenu ainsi :

- on initialise E au multi-ensemble vide ;
- pour toutes partitions de $\{1, \cdots, |\sigma|+|\tau|\} = A \sqcup B$, où A est de taille $|\sigma|$, et B de taille $|\tau|$;
  - on écrit σ et τ en produits de cycles disjoints, on remplace respectivement les lettres de σ par celles de A, les lettres de τ par celles de B en respectant l'ordre sur les lettres ;
  - on rajoute la permutation obtenue au multi-ensemble E ;
- on retourne le multi-ensemble E.

Il est possible qu'une même permutation apparaisse plusieurs fois. Dans ce cas, on la compte avec sa multiplicité.

Exemple 59. On a :

$$\begin{aligned} M_{(1)(2)}M_{(12)(3)} &= M_{(1)(2)(34)(5)} + M_{(1)(3)(24)(5)} + M_{(1)(4)(23)(5)} \\ &\quad + M_{(1)(5)(23)(4)} + M_{(2)(3)(14)(5)} \\ &\quad + M_{(2)(4)(13)(5)} + M_{(2)(5)(13)(4)} + M_{(3)(4)(12)(5)} \\ &\quad + M_{(3)(5)(12)(4)} + M_{(4)(5)(12)(3)}, \end{aligned} \tag{1.189}$$

et, en regroupant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} M_{(1)(2)}M_{(12)(3)} &= M_{(1)(2)(34)(5)} + M_{(1)(24)(3)(5)} + 2M_{(1)(23)(4)(5)} \\ &\quad + M_{(14)(2)(3)(5)} + 2M_{(13)(2)(4)(5)} + 3M_{(12)(3)(4)(5)}. \end{aligned} \tag{1.190}$$

Le coproduit est donné par :

$$\Delta\left(M_\sigma\right) = \sum_{\sigma = u \bullet v} M_u \otimes M_v, \tag{1.191}$$

où $u \bullet v = uv[|u|]$.

Exemple 60. On a :

$$\Delta\left(M_{132}\right) = M_{132} \otimes 1 + 1 \otimes M_{132}, \tag{1.192}$$

$$\Delta\left(M_{21354}\right) = M_{21354} \otimes 1 + M_{213} \otimes M_{21} + M_{21} \otimes M_{132} + 1 \otimes M_{21354}. \tag{1.193}$$

Montrons que l'on peut également construire cette algèbre à partir du composé partitionnel abélien. Prenons $Y = \sqcup_{n \geq 1}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n |\ \sigma \text{ grand cycle}\}$, où le poids d'un grand cycle est sa taille. Nous savons qu'une base de $\mathfrak{A}(Y)$ est indexée par $CPO(Y)$. Soit un mot $\binom{\sigma_1 \cdots \sigma_k}{P_1 \cdots P_k}$ de $CPO(Y)$. En remplaçant les lettres de σ_i par les lettres de P_i en respectant l'ordre des lettres, nous obtenons une permutation écrite en cycles dont l'ordre des cycles importe. Réciproquement, à partir d'une écriture d'une permutation en cycles disjoints dont l'ordre des cycles importe, en conservant la partition sous-jacente et en standardisant les cycles, nous obtenons un élément de $CPO(Y)$. Donc, une base de $\mathfrak{A}(Y)$ est indexée par les écritures ordonnées des permutations sous forme de cycles à supports disjoints.

Rappelons que la loi produit de $\mathfrak{A}(Y)$ de la base des $(\Phi_{\binom{u}{P}})_{\binom{u}{P} \in CPO(Y)}$ est donnée par :

$$\Phi_{\binom{u}{P}}\Phi_{\binom{v}{Q}} = \sum_{\substack{R = IJ \\ \mathbf{stdP}(I) = P,\ \mathbf{stdP}(J) = Q}} \Phi_{\binom{uv}{R}}, \tag{1.194}$$

pour tout couple $(\binom{u}{P}, \binom{v}{Q})$ de $CPO(Y)^2$. Or, un élément $R = IJ$ avec $\mathbf{stdP}(I) = P$ et $\mathbf{stdP}(Q)$ où R est une partition de l'ensemble $\{1, \cdots, |\cup_i P_i| + |\cup_j Q_j|\}$ est caractérisé par une partition de l'ensemble $\{1, \cdots, |\cup_i P_i| + |\cup_j Q_j|\}$ en deux parts A et B, l'une de cardinal $|\cup_i P_i|$ et l'autre de cardinal $|\cup_i Q_i|$, et réciproquement. Appliquer la projection $\mathfrak{p}$ à $\Phi_{\binom{u}{P}}$ signifie que l'ordre des cycles n'est pas considéré. Ainsi, on retrouve le produit de $\mathfrak{S}QSym$ de la base des $(M_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$, et donc $A(Y)$ correspond en tant qu'algèbre à $\mathfrak{S}QSym$.

Concernant la structure de cogèbre, nous avons vu que dans la base des $(\Phi_{\binom{u}{P}})_{\binom{u}{P} \in CPO(Y)}$ une loi de coproduit pour $\binom{u}{P}$ appartenant à $CPO(Y)$ est donnée par :

$$\Delta(\Phi_{\binom{u}{P}}) = \sum_{\binom{u}{P} \in \binom{v}{Q} \sqcup\!\sqcup \binom{w}{R[|Q|]}} \Phi_{\binom{u}{P}} \otimes \Phi_{\binom{v}{R}}, \tag{1.195}$$

où $R[|Q|]$ signifie que les lettres de R on été décalées de $|\cup_i Q_i|$, et où le shuffle a lieu avec les lettres qui sont de la forme $\binom{a}{F}$, avec a une lettre de Y et F une partie finie de $\mathbb{N}^*$.

Nous savons qu'à travers la projection $\mathfrak{p}$, l'algèbre $A(Y)$ hérite de la structure de cogèbre de $\mathfrak{A}(Y)$. Or, l'ordre des cycles n'importe pas dans $A(Y)$. Donc les éléments de $\binom{v}{Q} \sqcup\!\sqcup \binom{w}{R[|Q|]}$ se réécrivent tous sous la forme $\binom{v}{Q}\binom{w}{R[|Q|]}$. En identifiant ce composé partitionnel abélien à l'écriture en cycles des permutations, nous obtenons :

$$\Delta\left(\Phi_\sigma\right)) = \sum_{\sigma = st[|s|]} \Phi_s \otimes \Phi_t, \tag{1.196}$$

ce qui est exactement le coproduit de la base des $(M_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$ de $\mathfrak{S}QSym$.

Il en résulte que pour $Y = \sqcup_{n \geq 1}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n |\ \sigma \text{ grand cycle}\}$, les algèbres de Hopf $\mathfrak{S}QSym$ et $A(Y)$ sont isomorphes.

Remarque 17. Il est possible de mettre une structure de cogèbre simple sur Y. En effet, soit σ un grand cycle de taille n. Alors, on pose :

$$\Delta(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{|(1,k)} \otimes \mathrm{std}\left(\sigma_{|(k+1,n)}\right), \tag{1.197}$$

où $\sigma_{(i,j)}$ est l'élément obtenu en gardant les lettres de l'intervalle $[i,j]$ dans l'écriture en cycle de σ. Ainsi, en l'étendant aux permutations, pour σ une permutation de taille n, on obtient :

$$\Delta(M_\sigma) = \sum_{k=0}^{n} M_{\sigma_{(1,k)}} \otimes M_{\mathrm{std}(\sigma_{(k+1,n)})}. \tag{1.198}$$

Dans l'article [HNT08a], il est défini un produit sur $\mathfrak{S}QSym^*$ qui correspond à un shuffle sur des cycles. On peut constater qu'en dualisant le coproduit défini en (1.198), on obtient exactement cette loi produit.

1.6.4 Une généralisation de l'identité de Cauchy

De manière analogue à la proposition 1.4.4, il est possible de généraliser la construction et de l'étendre aux mots tassés et aux compositions d'ensembles.

On note $\overline{A \times B} := \{(a,b)|\ a \in A, b \in B\}$, et où les bilettres commutent.

Proposition 1.6.10. *Soit* $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ *un bimot sur un alphabet commutatif* $\overline{A \times B}$. *Soit* v_1 *le mot obtenu en triant* $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ *en privilégiant les lettres de* A, *et* u_2 *celui obtenu en triant puis en regroupant dans un même bloc les lettres ayant la même composante en* A, *alors* $\phi(tas(v_1)) = \boldsymbol{stdP}(u_2)$.

Exemple 61. Considérons le bimot commutatif $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} abaacdae \\ cdaeddaa \end{bmatrix}$, alors $v_1 = aaceddda$, et $u_2 = (aae)(a)(bcd)(a)$. Comme on peut le vérifier, on a :

$$\begin{array}{lcl} tas(v_1) & = & 11243331 \\ \mathbf{stdP}(u_2) & = & \{1,2,8\}\{3\}\{5,6,7\}\{4\}. \end{array} \tag{1.199}$$

Ainsi, $\phi(tas(v_1)) = \mathbf{stdP}(u_2)$.

Montrons la proposition dans le cas général.

Démonstration. Soit $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ un bimot commutatif sur $\overline{A \times B}$. Supposons dans un premier temps que u est une permutation de taille n, et v un mot tassé de taille n et à k lettres. Ainsi, on peut visualiser $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ comme l'application f qui à u_i associe v_i. Trier u dans l'ordre croissant en privilégiant la première ligne nous donne en deuxième ligne $f(1)f(2)\cdots f(n)$.

Si on trie en privilégiant la deuxième ligne, on obtient, en regroupant par bloc dans la première ligne, la partition ordonnée d'ensemble $f^{-1}(1)\cdots f^{-1}(k)$. Or on a $\phi(f) = f^{-1}(1)\cdots f^{-1}(k)$, ce qui établit le résultat dans le cas où u est une permutation et v un mot tassé.

De façon général, soit $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ un bimot commutatif de taille n. Trions $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ en privilégiant la première ligne, et notons $\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$ le bimot obtenu. Ainsi, $\mathrm{std}(u') = 12\cdots n = I_n$, et notons f le mot $tas(v')$. Il est clair que $\begin{bmatrix} u' \\ f \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ donneront les mêmes sorties. Reste à montrer que $\begin{bmatrix} u' \\ f \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} I_n \\ f \end{bmatrix}$ aussi. Comme ces deux mots sont déjà triés en privilégiant leur première ligne, reste à les trier suivant la deuxième. Or dans un même bloc $f^{-1}(i)$ les lettres sont nécessairement croissantes car on trie dans l'ordre lexicographique. Ainsi, la position des lettres de la première ligne est imposée. Notons $\begin{bmatrix} u" \\ 1\cdots 2\cdots k \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \sigma \\ 1\cdots 2\cdots k \end{bmatrix}$ les bimots obtenus en triant respectivement $\begin{bmatrix} u' \\ f \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} I_n \\ f \end{bmatrix}$ en privilégiant la deuxième ligne. En particulier, on a une inversion (i,j)

(avec $i < j$) dans u" et σ si et seulement si la i^{e} lettre de la deuxième ligne est strictement plus grande que la j^{e} lettre de la deuxième ligne, et donc $\text{std}(u") = \sigma$. Comme les deuxièmes lignes sont identiques, les blocs obtenus sont les mêmes.

□

En gardant les notations du paragraphe 1.6.10, étant donné un bimot commutatif $\left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right]$, on note

$$\left\langle \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] \right\rangle := u_2 \otimes v_1.$$

Théorème 1.6.11. *Soit A et B deux alphabets non commutatifs et M l'ensemble des bimots commutatifs sur A et B. Alors on a l'identité suivante :*

$$\left\langle \prod_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \frac{1}{1-\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right]} \right\rangle = \sum_{u\in\mathcal{MT}} N_{\phi(u)}(A) M_u(B). \tag{1.200}$$

Démonstration. En développant, on a

$$\prod_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \frac{1}{1-\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right]} = \sum_{\left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right]\in M} \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right]. \tag{1.201}$$

En appliquant l'opérateur $\langle\rangle$ à la somme, on a donc :

$$\left\langle \sum_{\left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right]\in M} \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] \right\rangle = \sum_{\substack{u_2\in A^*\\ v_1\in B^*\\ \mathbf{stdP}(u_2)=\phi(tas(v_1))}} u_2 \otimes v_1. \tag{1.202}$$

Ainsi, en regroupant par mots tassés identiques on obtient :

$$\sum_{\substack{u_2\in A^*\\ v_1\in B^*\\ \mathbf{stdP}(u_2)=\phi(tas(v_1))}} u_2 \otimes v_1 = \sum_{u\in\mathcal{MT}} N_{\phi(u)}(A) M_u(B). \tag{1.203}$$

□

En regroupant les mots tassés ayant même standardisé, on retrouve l'identité du théorème 1.4.5.

Remarque 18. Il existe une classe combinatoire contenant les mots tassés et les compositions d'ensembles, appelées matrices tassées. La bijection ϕ se traduit alors par la transposition des matrices. D'ailleurs, l'inversion des matrices de permutations correspond également à une transposition de matrice. Il semble qu'il soit possible d'étendre la construction précédente à ces objets.

1.7 Équations fonctionnelles non commutatives

Différentes motivations peuvent être données pour justifier la construction d'algèbres de Hopf combinatoires. L'une d'entre elles est de fournir un cadre pour calculer directement avec des objets combinatoires, et d'obtenir des "relèvements" des identités classiques. L'avantage de cette approche est multiple :

— simplification des démonstrations ;
— généralisation de l'identité de départ dans une algèbre plus générale (ce qui peut être utile si on veut construire des q-analogues) ;
— compréhension à la fois combinatoire et algébrique de l'identité.

Pour illustrer ces propos, on se place dans l'algèbre **FQSym**, et on donne un morphisme le reliant aux séries formelles. Puis à titre d'exemple, on retrouve l'interprétation combinatoire de la tangente et de la sécante en termes de permutations alternantes.

1.7.1 Un morphisme d'algèbres classique

Rappelons le produit de **FQSym** dans la base $(\mathbf{G}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$. On a :

$$\mathbf{G}_\sigma\mathbf{G}_\tau = \sum_{\substack{uv=\gamma \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbf{G}_\gamma. \tag{1.204}$$

Pour σ de taille n et τ de taille m, ce produit comporte $\binom{n+m}{n}$ termes. Donc l'application linéaire

$$\mathbb{E} \ : \ \mathbf{G}_\sigma \ \mapsto \ \tfrac{u^n}{n!} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_\mathfrak{n}) \tag{1.205}$$

est un morphisme d'algèbres de **FQSym** vers $\mathbb{Q}[\![u]\!]$. En effet, pour σ et τ deux permutations de tailles respectives n et m,

$$\mathbf{G}_\sigma\mathbf{G}_\tau = \sum_{\substack{uv=\gamma \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbf{G}_\gamma. \tag{1.206}$$

En appliquant $\mathbb{E}$ à cette égalité, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\sigma\mathbf{G}_\tau\right) = \binom{n+m}{n}\frac{x^{n+m}}{(n+m)!}, \tag{1.207}$$

et on a

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\sigma\right)\mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\tau\right) = \frac{x^n}{n!}\frac{x^m}{m!} = \binom{n+m}{n}\frac{x^{n+m}}{(n+m)!}. \tag{1.208}$$

1.7.2 Une dérivation dans FQSym

On définit également une dérivation sur **FQSym** par $\partial(\mathbf{G}_\sigma) = \mathbf{G}_{\sigma'}$, où σ' est obtenue en supprimant la plus grande lettre de σ si σ n'est pas la permutation vide. La permutation vide quant à elle, est envoyée sur 0. On remarque que $\mathbb{E}\circ\partial = \frac{d}{du}\circ\mathbb{E}$.

Ainsi, on peut mener les calculs dans le monde non commutatif, puis projeter le résultat dans le monde des séries formelles classiques. Pour une étude complète de **FQSym**, on pourra lire [DHT02].

1.7.3 Une application bilinéaire sur FQSym

Pour σ appartenant à $\mathfrak{S}_n$ et τ à $\mathfrak{S}_m$, posons

$$\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) = \sum_{\substack{\gamma=u(n+m+1)v \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbf{G}_\gamma. \tag{1.209}$$

Ainsi, $\partial\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) = \mathbf{G}_\sigma\mathbf{G}_\tau$. Cette application bilinéaire a été définie dans [HNT08b], et a permis de retrouver des résultats classiques, tels que la formule des équerres sur les arbres, ainsi que son q-analogue. Dans la suite, on se repose sur le fait que cette application augmente strictement le degré global, ce qui garantit l'existence et l'unicité des solutions des équations de la forme $\mathbf{X} = X_0 + \mathbf{B}_{\max}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

1.7.4 Une application : les fonctions tangente et sécante

Il est connu depuis au moins André ([And81]) que les coefficients de Taylor de la fonction tangente ont une interprétation combinatoire en termes de permutations alternantes impaires, et ceux de la sécante en termes de permutations alternantes paires. Les preuves classiques reposent souvent sur la construction de la série génératrice de la classe combinatoire correspondante, puis de trouver une équation fonctionnelle vérifiée par celle-ci, et enfin de conclure par des arguments d'unicité de la solution de l'équation fonctionnelle. Grâce à la méthode non commutative, la preuve est plus directe : la fonction tangente admet un analogue non commutatif dont les éléments de la somme sont indexés par les permutations alternantes impaires. Rappelons le théorème que l'on veut redémontrer :

Théorème 1.7.1. *On a les égalités fonctionnelles suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} \tan(X) & = & \sum_{n\in\mathbb{N}} E_{2n+1}\frac{X^{2n+1}}{2n+1!} \\ \sec(X) & = & \sum_{n\in\mathbb{N}} E_{2n}\frac{X^{2n}}{2n!}, \end{array} \tag{1.210}$$

où E_n est le nombre de permutations alternantes (montantes) de taille n.

Définition 1.7.2. Soit σ une permutation de taille n. On dit qu'elle est *alternante* (montante) si $\sigma_1 < \sigma_2 > \cdots > \sigma_{2i-1} < \sigma_{2i} > \cdots \sigma_n$. On note respectivement $\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{A}_1$ l'ensemble des permutations alternantes de taille paire et impaire.

Exemple 62. La permutation $\sigma = 2413$ est alternante de taille 4.

Nous savons que le couple $(\sec, \tan)$ est la solution du système intégral

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_0(t) & = & 1 + \int_0^t Y_0(s)Y_1(s)ds \\ \\ Y_1(t) & = & t + \int_0^t Y_1(s)^2 ds. \end{array} \right. \tag{1.211}$$

Or dans le monde des séries formelles $\mathbb{K}[\![X]\!]$, intégrer par $\int_0^t$ correspond à l'application linéaire L suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{1.212}$$

Ainsi dans $\mathbb{K}[\![X]\!]$, $(\sec, \tan)$ est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_0(X) & = & 1 + B(Y_0, Y_1) \\ Y_1(X) & = & X + B(Y_1, Y_1), \end{array} \right. \tag{1.213}$$

où B est l'application bilinéaire

$$\begin{array}{rccc} B\ : & \mathbb{K}[\![X]\!]^2 & \mapsto & \mathbb{K}[\![X]\!] \\ & (f,g) & \longmapsto & L\,(fg) \end{array} \tag{1.214}$$

Ce système admet un analogue non commutatif dans **FQSym** :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_0 & = & 1 + \mathbf{B}_{\max}(Y_1, Y_0) \\ Y_1 & = & \mathbf{G_1} + \mathbf{B}_{\max}(Y_1, Y_1). \end{array} \right. \tag{1.215}$$

En effet, il suffit de vérifier qu'à travers $\mathbb{E}$, on retrouve le système (1.213).

Proposition 1.7.3. *On a l'identité :*

$$B \circ \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} = \mathbb{E} \circ \mathbf{B}_{\max}. \tag{1.216}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier la propriété sur une base de **FQSym**. Soient σ et τ deux permutations de tailles respectives n et m. On a d'un côté :

$$B\left(\mathbb{E}(\mathbf{G}_\sigma), \mathbb{E}(\mathbf{G}_\tau)\right) = B\left(\frac{x^n}{n!}, \frac{x^m}{m!}\right) = \binom{n+m}{n}\frac{x^{n+m+1}}{(n+m+1)!}, \tag{1.217}$$

et de l'autre :

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{\gamma = u(n+m+1)v \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbf{G}_\gamma\right) \tag{1.218}$$

Par linéarité, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)\right) = \sum_{\substack{\gamma = u(n+m+1)v \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\gamma\right). \tag{1.219}$$

Comme dans cette somme il y a $\binom{n+m}{n}$ termes de taille $n+m+1$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)\right) = \binom{n+m}{n}\frac{x^{n+m+1}}{(n+m+1)!}. \tag{1.220}$$

□

Une solution (Y_0, Y_1) de l'équation (1.215) se projette à travers $\mathbb{E}$ sur une solution de l'équation (1.213). Comme le système (1.213) admet une unique solution qui est le couple $(\sec, \tan)$, on en déduit que

$$(\mathbb{E}(Y_0), \mathbb{E}(Y_1)) = (\sec, \tan). \tag{1.221}$$

Montrons que le système (1.215) admet une unique solution. On commence par prouver que le système admet au plus une solution, puis on exhibe une solution au problème. Enfin, on montre qu'il s'avère que le couple solution trouvé est un analogue non commutatif du couple $(\sec, \tan)$.

Proposition 1.7.4. *Le système* (1.215) *admet au plus une solution.*

Démonstration. Montrons l'unicité de la solution du système (1.215). Soient (Y_0, Y_1) et (Z_0, Z_1) deux solutions de (1.215). Alors :

$$Y_1 - Z_1 = \mathbf{B}_{\max}(Y_1, Y_1) - \mathbf{B}_{\max}(Z_1, Z_1). \tag{1.222}$$

Donc,

$$Y_1 - Z_1 = \mathbf{B}_{\max}(Y_1 - Z_1, Y_1) + \mathbf{B}_{\max}(Z_1, Y_1) - \mathbf{B}_{\max}(Z_1, Z_1). \tag{1.223}$$

On en déduit :

$$Y_1 - Z_1 = \mathbf{B}_{\max}(Y_1 - Z_1, Y_1) + \mathbf{B}_{\max}(Z_1, Y_1 - Z_1). \tag{1.224}$$

Or, l'application bilinéaire $\mathbf{B}_{\max}$ augmente strictement le degré des éléments non nuls. En particulier, cette égalité n'est possible que dans le cas où $Y_1 - Z_1 = 0$. Elle est bien entendu vérifiée pour ce cas. Comme on sait que la deuxième composante est unique, on a pour la première composante :

$$Y_0 - Z_0 = \mathbf{B}_{\max}(Y_1, Y_0 - Z_0). \tag{1.225}$$

Par le même argument concernant les degrés on conclut immédiatement à l'unicité de la solution au problème. Il nous suffit donc d'expliciter une solution. □

Pour l'existence, il est nécessaire de faire un rappel sur les évaluations des arbres binaires complets (la classe combinatoire de ces arbres est notée BTC). Un arbre binaire complet est par définition un arbre qui est soit réduit à une feuille, soit comporte une racine qui a deux fils qui sont eux aussi des arbres binaires complets. Ainsi, dans un ensemble E muni d'une loi interne m, nous pouvons considérer l'évaluation d'un arbre binaire complet T (noté $ev(T)$) où les feuilles sont étiquetées par des éléments de E et les nœuds internes par l'opération m, et où $ev(T)$ est calculée de la façon suivante :

— si T est une feuille étiquetée par e alors $ev(T) = e$,
— si T a comme fils gauche T_1 et comme fils droit T_2 alors $ev(T) = m\,(ev(T_1), ev(T_2))$.

Proposition 1.7.5. *Le couple* (Y_0, Y_1) *où*

$$Y_0 = \sum_{T \in BTC'} ev(T) \tag{1.226}$$

où BTC' *est l'ensemble des arbres binaires complets dont la feuille la plus à droite est étiquetée par* 1*, les autres feuilles par* $\mathbf{G}_1$*, et les nœuds internes par* $\mathbf{B}_{\max}$*, et*

$$Y_1 = \sum_{T \in BTC"} ev(T) \tag{1.227}$$

où $BTC"$ *est l'ensemble des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par* $\mathbf{G}_1$ *et les nœuds internes par* $\mathbf{B}_{\max}$*, est solution de* (1.215)*.*

Démonstration. $\mathbf{B}_{\max}(Y_1, Y_1)$ est l'évaluation de l'ensemble des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par $\mathbf{G_1}$ et les nœuds internes par $\mathbf{B}_{\max}$ tel que la racine n'est pas une feuille. Ainsi, en ajoutant $\mathbf{G}_1$ à $\mathbf{B}_{\max}(Y_1, Y_1)$, on obtient l'évaluation de l'ensemble des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par $\mathbf{G_1}$ et les nœuds internes par $\mathbf{B}_{\max}$, autrement dit Y_1.

De même, $\mathbf{B}_{\max}(Y_1, Y_0)$ est l'évaluation de l'ensemble des arbres binaires complets dont la feuille la plus à droite est étiquetée par 1 et les autres par $\mathbf{G_1}$ et dont les nœuds internes sont étiquetés par $\mathbf{B}_{\max}$, et tel que la racine n'est pas une feuille. On en déduit qu'en ajoutant 1 à $\mathbf{B}_{\max}(Y_0, Y_1)$ on obtient Y_0.

Ainsi, le couple (Y_0, Y_1) est bien solution de (1.215). □

Déterminons les premiers termes de Y_1 :

$$\begin{aligned} Y_1 \;=\; & \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_{132} + \mathbf{G}_{231} + \mathbf{G}_{15243} + \mathbf{G}_{25143} \\ & + \mathbf{G}_{35142} + \mathbf{G}_{45231} + \mathbf{G}_{15342} + \mathbf{G}_{25341} \\ & + \mathbf{G}_{35241} + \mathbf{G}_{45231} + \mathbf{G}_{24351} + \mathbf{G}_{14352} \\ & + \mathbf{G}_{14253} + \mathbf{G}_{13254} + \mathbf{G}_{34251} + \mathbf{G}_{34152} \\ & + \mathbf{G}_{24153} + \mathbf{G}_{23154} + \cdots \end{aligned} \tag{1.228}$$

Nous constatons que tous les termes correspondent à des permutations alternantes de taille impaire. Réciproquement, toutes les permutations alternantes de taille impaire correspondent à des termes. En effet, pour σ et τ deux permutations alternantes de taille impaire, les termes de $\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)$ sont toutes alternantes. En effet, pour $u(|u| + |v| + 1)v$ un indice de cette somme, nous savons que σ termine par une descente car elle est impaire et commence par une montée, il en est donc de même pour u car $\mathrm{std}(u) = \sigma$. Puis, la lettre $(|u| + |v| + 1)$ suit et est plus grande que la dernière lettre de $|u|$ et est plus grande que la première lettre de v. Comme $\mathrm{std}(v) = \tau$ on en déduit que v est aussi alternante. Il en résulte que la permutation $u(|u| + |v| + 1)v$ est alternante. Elle est impaire car u et v le sont. Réciproquement, par récurrence, on en déduit que toutes les permutations alternantes impaires sont obtenues par ce procédé. En effet, pour $n = 1$ la proposition est vérifiée. On suppose que l'on a obtenu toutes les permutations de taille inférieures à $2n - 1$. Soit une permutation $\sigma = u(2n + 1)v$ alternante de taille $2n + 1$. Constatons que $\mathrm{std}(u)$ et $\mathrm{std}(v)$ sont alternantes et impaires. On a donc pu les construire. En considérant $\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_{\mathrm{std}(u)}, \mathbf{G}_{\mathrm{std}(v)})$ nous construisons $\mathbf{G}_\sigma$.

Ainsi,

$$\mathbf{Tan} := Y_1 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_1} \mathbf{G}_\tau. \tag{1.229}$$

est solution de $X = \mathbf{G}_1 + \mathbf{B}_{\max}(X, X)$.

De même, en évaluant Y_0 nous constatons que l'on a :

$$\mathbf{Sec} := Y_0 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_0} \mathbf{G}_\sigma, \tag{1.230}$$

On en conclut que les permutations alternantes sont bien des interprétations combinatoires des fonctions tangente et sécante.

Chapitre 2

Construction d'algèbres combinatoires

Nous considérons dans ce chapitre les deux familles de statistiques sur les permutations définies dans les paragraphes 1.2.3 et 1.2.6 :

— les *valeurs* de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes ;

— les *positions* de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes ;

chacune de ces deux familles étant étudiée de diverses manières et ayant de nombreuses applications. Par exemple, Françon utilise cette première famille dans [Fra79] pour analyser des algorithmes sur des structures de données. Ce dernier et Viennot en exhibant une bijection entre permutations et les histoires de Laguerre établissent un lien fort entre permutations et une classe de chemins ([FV79]). Or, comme l'a montré Flajolet dans [Fla80], les chemins "capturent" la combinatoire des fractions continues. Les fractions continues étant elles-mêmes reliées aux moments des polynômes orthogonaux, les deux articles ([FV79], [Fla80]) posent les bases de la théorie combinatoire de ces polynômes ([Vie83]). À travers d'autres bijections, ces statistiques s'interprètent naturellement dans les tableaux de permutations, objets définis par Steingrimsson et Williams dans [SW07]. Ces mêmes tableaux ont été utilisés par Corteel et Williams dans [CW07] et dans [CW$^+$11] pour décrire la combinatoire de l'ASEP, un modèle de physique statistique, et pour aborder des problèmes combinatoires sur les polynômes d'Askey-Wilson. Une synthèse de la combinatoire des chemins et des tableaux se trouve dans la thèse de Josuat-Vergès ([JV10]).

L'autre famille de statistiques, les positions de pics, de vallées, de doubles montées, et de doubles descentes, apparaissent en théorie des représentations : Solomon dans [Sol76] définit l'algèbre des descentes à partir des positions des descentes, et une manière de construire les fonctions symétriques non commutatives est de considérer cette statistique ([GKL$^+$95]). Citons aussi l'algèbre des pics, définie à partir des positions des pics d'une permutation ([Ste97], [BHT04]). Ainsi, en considérant des statistiques sur les permutations, il est possible de construire de nouvelles algèbres.

Il est alors naturel de se demander si on peut définir de nouvelles algèbres à partir de ces deux familles de statistiques.

Ce chapitre est divisé en deux grandes parties, chacune consacrée à une famille de statistiques.

Dans la première partie (paragraphe 2.1), on construit d'abord différents ensembles quotients de **FQSym** grâce aux valeurs de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes. Puis, on montre que certains de ces ensembles quotients ont des propriétés algébriques : en particulier, ils définissent naturellement des algèbres quotients. Dans la seconde partie (paragraphe 2.2), à l'aide des positions de pics, vallées, doubles montées et doubles descentes, nous obtenons de nouvelles sous-algèbres de **Sym**.

2.1 Ensembles quotients de FQSym

Nous continuons l'étude de quatre statistiques définies sur les permutations dans le paragraphe 1.2.3 :

— les pics,

— les vallées,

— les doubles montées,

— les doubles descentes.

Sauf mention contraire, nous utilisons la convention $0-0$ (cf. définition 1.2.3). Des ensembles quotients des permutations peuvent être construits en considérant des relations d'équivalence telles que "avoir le même ensemble de pics". Pour plus de clarté, fixons des notations. Soit une partition $(A_1, \cdots, A_p)$ de l'ensemble $\{P, V, Dm, Dd\}$. On dit que deux permutations σ et τ sont dans la même classe d'équivalence si pour tout entier i compris entre 1 et p, les ensembles $A_i(\sigma)$ et $A_i(\tau)$ sont égaux. La relation d'équivalence obtenue à partir d'une partition $(A_1, \cdots, A_p)$ est abusivement appelée relation $(A_1, \cdots, A_p)$.

Exemple 63. La relation (P, V, Dm, Dd) se traduit donc par "avoir les mêmes ensembles de pics, de vallées, de doubles montées, et de doubles descentes". Ainsi, pour $n=3$, nous obtenons les cinq classes suivantes : $\{123\}$, $\{132\}$, $\{231\}$, $\{213, 312\}$ et $\{321\}$.

Exemple 64. Ces quatre statistiques formant une partition des lettres d'une permutation, la relation $(P \cup V \cup Dd, Dm)$ signifie donc "avoir le même ensemble de doubles montées". Pour $n = 3$, les classes d'équivalence sont les suivantes : $\{123\}$, $\{213, 312, 321\}$, $\{231\}$, $\{132\}$.

Notons qu'il est possible pour deux permutations d'être équivalentes pour une relation sans l'être pour une autre. Par contre, la relation (P, V, Dm, Dd) est la plus fine de toutes les relations considérées : si deux permutations sont équivalentes pour cette relation, elles le sont pour toute relation $(A_1 \cdots, A_p)$ où A_i appartient à $\{P, V, Dm, Dd\}$.

Exemple 65. Pour les relations des exemples 63 et 64, prenons $\sigma = 13245$ et $\tau = 14532$. Nous avons $(P, V, Dm, Dd)(\sigma) = (\{3, 5\}, \{2\}, \{1, 4\}, \emptyset)$, et $(P, V, Dm, Dd)(\tau) = (\{5\}, \emptyset, \{1, 4\}, \{2, 3\})$. Ainsi, elles sont équivalentes pour $(P \cup V \cup Dd, Dm)$, mais ne le sont pas pour (P, V, Dm, Dd).

Nous avons vu au paragraphe 1.2.3 que la bijection de Françon-Viennot permet de donner des interprétations simples de ces statistiques en termes de types de pas dans des chemins. L'énumération des différents ensembles quotients peut donc être faite à l'aide de cette application : les relations d'équivalence sur les permutations se traduisent alors sur les chemins par des identifications sur les types de pas. En effet, soit h une histoire de Laguerre. Posons :

$$\mathcal{P}o(h, B) := \{i |\ h_i \in B\}, \tag{2.1}$$

où h_i est le i^{e} pas de h sans le poids, et B une partie de $\{(1,1), (1,-1), (1,0), \overline{(1,0)}\}$. On dit aussi que h_i est à l'abscisse i.

Exemple 66. Pour h représenté par la figure 2.1, nous avons $\mathcal{P}o\left(h, \{(1,1), (1,-1)\}\right) = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$.

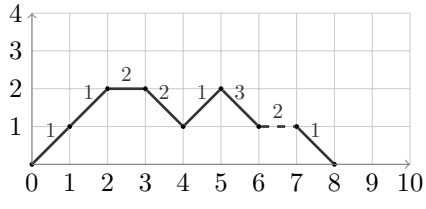


FIGURE 2.1 – Une histoire de Laguerre de longueur 8.

Pour une permutation σ de taille n, en notant $h = FV^{-1}(\sigma)$ nous observons les égalités suivantes, en utilisant les notations du paragraphe 1.2.3

$$\begin{array}{lcl} -P(\sigma) & = & \mathcal{P}o\left(h, \{(1,-1)\}\right) \cup \{n\}\ ; \\ -V(\sigma) & = & \mathcal{P}o\left(h, \{(1,1)\}\right)\ ; \\ -Dd(\sigma) & = & \mathcal{P}o\left(h, \{\overline{(1,0)}\}\right)\ ; \\ -Dm(\sigma) & = & \mathcal{P}o\left(h, \{(1,0)\}\right). \end{array} \tag{2.2}$$

Les relations du type $(A_1, \cdots, A_p)$ peut donc se traduire par des relations simples sur les chemins.

Exemple 67. Pour la relation $(P \cup V, Dm \cup Dd)$, deux permutations σ et τ sont équivalentes si et seulement si on a $P \cup V(\sigma) = P \cup V(\tau)$. En posant $h := FV^{-1}(\sigma)$ et $h' := FV^{-1}(\tau)$, ceci se traduit par :

h et h' sont équivalents si et seulement si $\mathcal{P}o\left(h, \{(1,1), (1,-1)\}\right)$ est égal à $\mathcal{P}o\left(h', \{(1,1), (1,-1)\}\right)$.

2.1.1 Énumération des ensembles quotients

La méthode utilisée est la même pour chacun de ces ensembles quotients : pour une relation d'équivalence $\sim$ sur les permutations, nous la traduisons à travers l'inverse de la bijection de Françon-Viennot et obtenons alors une relation d'équivalence $\sim'$ sur les histoires. Ainsi, le nombre de classes pour $\sim'$ et $\sim$ est le même.

2.1.1.1 L'ensemble quotient par (P, V, Dm, Dd)

Via l'application FV^{-1}, on sait que deux permutations σ et τ de $\mathfrak{S}_n$ sont équivalentes pour la relation (P, V, Dm, Dd) si et seulement si les chemins sans poids de $FV^{-1}(\sigma)$ et $FV^{-1}(\tau)$ sont identiques. Il en découle que cet ensemble quotient est en bijection avec $\mathcal{M}b_{n-1}$. Et il est bien connu que ces éléments sont comptés par le n^{e} nombre de Catalan ([FV79]).

2.1.1.2 L'ensemble quotient par $(P, V, Dm \cup Dd)$

En reformulant cette relation sur les chemins, nous obtenons l'énoncé suivant : deux histoires h et h' sont équivalentes si et seulement si

$$\begin{array}{lcl} -\mathcal{P}o\,(h, \{(1,1)\}) & = & \mathcal{P}o\,(h', \{(1,1)\})\,, \\ -\mathcal{P}o\,(h, \{(1,-1)\}) & = & \mathcal{P}o\,(h', \{(1,-1)\})\,, \\ -\mathcal{P}o\left(h, \{(1,0), \overline{(1,0)}\}\right) & = & \mathcal{P}o\left(h', \{(1,0), \overline{(1,0)}\}\right). \end{array} \tag{2.3}$$

Autrement dit, les abscisses des pas montants sont identiques, et il en est de même pour les abscisses des pas descendants. De plus, on a confondu les pas $\overline{(1,0)}$ et $(1,0)$. Les classes du quotient sont donc en bijection avec les chemins de Motzkin de taille $n-1$.

Exemple 68. La classe d'équivalence de $\sigma = 859723416$ est représentée le chemin de la figure 2.2.

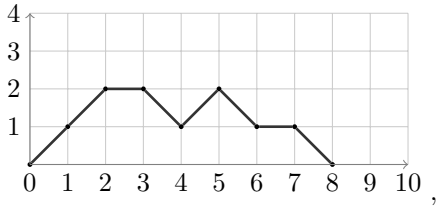


FIGURE 2.2 – Chemin représentant la classe de $\sigma = 859723416$ pour la relation $(P, V, Dm \cup Dd)$.

2.1.1.3 L'ensemble quotient par $(P \cup V, Dm, Dd)$

La relation correspondante pour deux chemins h et h' est alors

$$\begin{array}{lcl} -\mathcal{P}o\left(h, \{\overline{(1,0)}\}\right) & = & \mathcal{P}o\left(h', \{\overline{(1,0)}\}\right), \\ -\mathcal{P}o\,(h, \{(1,0)\}) & = & \mathcal{P}o\,(h', \{(1,0)\})\,. \end{array} \tag{2.4}$$

Ainsi, les pas $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont équivalents. Or, les chemins de Motzkin bicolorés ont toujours autant de pas montants que de pas descendants. Une classe est par conséquent la donnée d'un ensemble $A \subset \{1, \cdots, n-1\}$ de taille paire correspondant aux abscisses des pas montants et descendants des éléments de la classe, et d'une fonction f de $\overline{A}$ vers $\{(1,0), \overline{(1,0)}\}$ construite en associant à l'abscisse d'un pas horizontal sa couleur. Par suite, le nombre de classes est égal à

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1}{2k} 2^{n-1-2k} = \frac{(2+1)^{n-1} + (2-1)^{n-1}}{2} = \frac{3^{n-1}+1}{2}. \tag{2.5}$$

Chaque classe est en particulier représentée par un unique chemin de Motzkin bicoloré montant (au sens large) puis descendant (au sens large).

Exemple 69. L'histoire h représentée par la figure 2.1, est équivalente pour la relation $(P \cup V, Dm, Dd)$ au chemin de la figure 2.3.

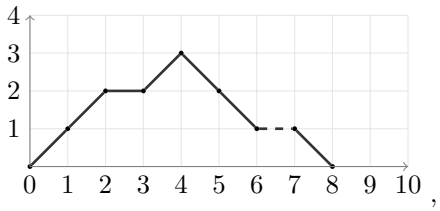


FIGURE 2.3 – Un élément de l'ensemble quotient par $(P \cup V, Dm, Dd)$.

2.1.1.4 Les ensembles quotients par $(P \cup V \cup Dm, Dd)$ ou par $(P \cup V \cup Dd, Dm)$

Échanger les pas $\overline{(1,0)}$ et $(1,0)$ définit une involution sur les histoires de Laguerre. En conjuguant celle-ci par FV, nous obtenons une involution I telle que :

— $P(\sigma) = P(\tau)$;
— $V(\sigma) = V(\tau)$;
— $Dm(\sigma) = Dd(\tau)$;
— $Dd(\sigma) = Dm(\tau)$,

où σ est une permutation de taille n, et $\tau = I(\sigma)$.

Exemple 70. Pour $\sigma = 859723416$ et son image h par FV^{-1}, représentée par la figure 2.1 (cf. exemple 18), en échangeant les pas $\overline{(1,0)}$ et $(1,0)$ de h, on obtient l'histoire h' représentée par la figure 2.4. En appliquant FV à h', on obtient la permutation $\tau = 857924316$. On a bien :

$P(\sigma) = P(\tau) = \{4, 6, 8, 9\}$;

$V(\sigma) = V(\tau) = \{1, 2, 5\}$;

$Dm(\sigma) = Dd(\tau) = \{3\}$;

$Dd(\sigma) = Dm(\tau) = \{7\}$.

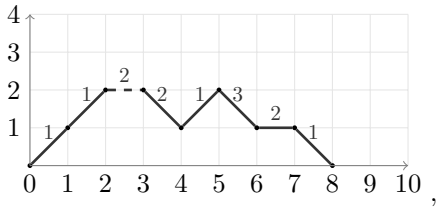


FIGURE 2.4 – Histoire h' obtenue en échangeant les types de pas horizontaux de h

On en déduit que le nombre de classes est le même pour ces deux quotients. Il suffit donc d'étudier la relation $(P \cup V \cup Dm, Dd)$. Deux chemins sont alors équivalents si et seulement si les abscisses des pas de type $\overline{(1,0)}$ sont exactement les mêmes. Une classe est alors représentée de manière fidèle par un sous-ensemble de $\{1, \cdots, n-1\}$. Réciproquement, soit A un sous-ensemble de $\{1, \cdots, n-1\}$. Il représente le chemin horizontal où l'ensemble des abscisses des pas du type $\overline{(1,0)}$ est exactement A. Le nombre de classes est donc égal à 2^{n-1}.

2.1.1.5 Les ensembles quotients par $(P, V \cup Dm \cup Dd)$ ou par $(V, Dd \cup Dm \cup P)$

De même, lire les histoires de Laguerre de la droite vers la gauche définit une involution sur celles-ci. Par conjugaison, nous obtenons une involution J telle que deux permutations ayant :

— les mêmes pics sont envoyées sur deux permutations ayant les mêmes vallées ;
— les mêmes vallées sont envoyées sur deux permutations ayant les mêmes pics ;
— les mêmes doubles montées sont envoyées sur deux permutations ayant les mêmes doubles montées ;
— les mêmes doubles descentes sont envoyées sur deux permutations ayant les mêmes doubles descentes.

En particulier, le nombre de classes coïncide pour ces deux relations. Il suffit alors d'étudier le cas $(P, V \cup Dm \cup Dd)$. Pour cette relation, en termes de chemins, les pas $(1,1)$, $\overline{(1,0)}$, et $(1,0)$ sont considérés comme égaux. Donc, deux chemins sont équivalents si et seulement si l'ensemble des positions de leur pas descendants est le même. Ainsi, la classe d'un chemin h est représentée par

le chemin h' obtenu en remplaçant tous les pas horizontaux $(1,0)$ et $\overline{(1,0)}$ de h par des pas $(1,1)$. Le chemin de h étant au-dessus de l'axe, h' est à fortiori au-dessus de l'axe, et ne contient que des pas montants et descendants. Donc h' est facteur gauche de chemin de Dyck de longueur $n-1$. Ainsi, une classe est représentée de manière unique par un facteur gauche de chemin de Dyck de longueur $n-1$. Réciproquement, soit $C = Ap_iB$ un facteur gauche de taille $n-1$ et terminant en $(n-1,k)$, où p_i est le dernier pas montant de C. Donc B ne contient que des pas descendants. Si $k=0$, le chemin C est lui-même représentant de sa classe. Pour $k>0$, comme C est un facteur gauche de chemin de Dyck terminant en $(n-1,k)$ et que B ne contient que des pas descendants, le chemin A se termine au point $(i-1,k+l(B)-1)$. Donc, en changeant ce i^{e} pas en $(1,0)$, nous obtenons que le chemin $A(1,0)$ termine au point $(i,k+l(B)-1)$. Ainsi, $A(1,0)B$ est toujours positif, et finit en $(n-1,k-1)$ (cf. figure 2.5). Par récurrence, en changeant les k *derniers* pas montants de C en $\overline{(1,0)}$, nous obtenons un chemin de Motzkin bicoloré de taille $n-1$ dont C représente la classe. Le nombre de classes est par conséquent donné par le binomial central $\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$.

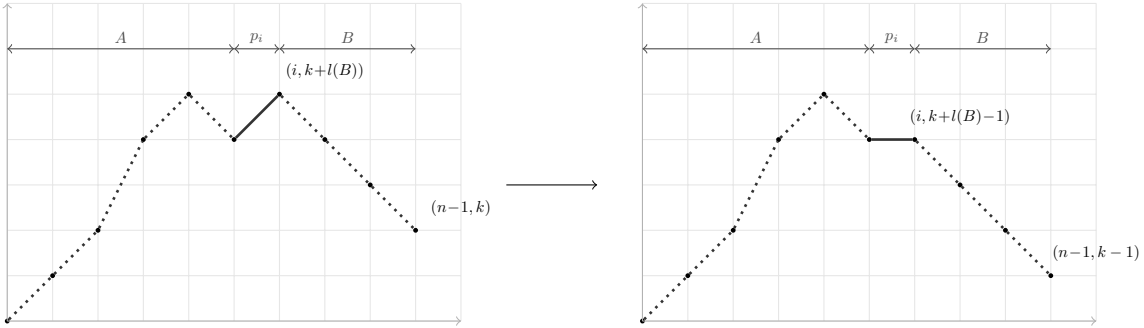


FIGURE 2.5 – Transformation élémentaire sur le chemin C.

2.1.1.6 Les ensembles quotients par (P, Dm, $V \cup Dd$), (P, Dd, $V \cup Dm$), ($P \cup Dd$, V, Dm) ou ($P \cup Dm$, V, Dd)

Grâce aux deux involutions I et J, on en déduit que le quotient par chacune de ces quatre relations donne le même nombre de classes. Il suffit donc d'étudier le cas (P, Dm, $V \cup Dd$). En termes de chemins, les pas de type $\overline{(1,0)}$ et de type $(1,1)$ sont équivalents. Ainsi, en changeant tous les pas $\overline{(1,0)}$ d'un chemin en $(1,1)$, on en déduit qu'une classe est représentée de manière unique par un facteur gauche d'un chemin de Motzkin de longueur $n-1$. Réciproquement, soit un facteur gauche $F = Ap_iB$ de taille $n-1$ et terminant en $(n-1,k)$, où p_i est le dernier pas montant. Si $k=0$, alors F est un chemin de Motzkin. Sinon, le chemin B ne contient que des pas de type $(1,0)$ et $(1,-1)$. Le chemin Ap_i se termine donc au point $(i,b+k)$, où b est le nombre de pas descendant de B. En appliquant la transformation élémentaire donnée dans la figure 2.6, on trouve un chemin positif au point $(n-1,k-1)$. Ainsi, par récurrence, en modifiant les k derniers pas de type $(1,1)$ en $\overline{(1,0)}$ on obtient un chemin de Motzkin bicoloré dont F représente la classe. Il en résulte que le nombre de classes est exactement le nombre de facteurs gauches de chemins de Motzkin de longueur $n-1$, soit le nombre d'animaux dirigés de taille $n-1$ ([Slo]$A005773$).

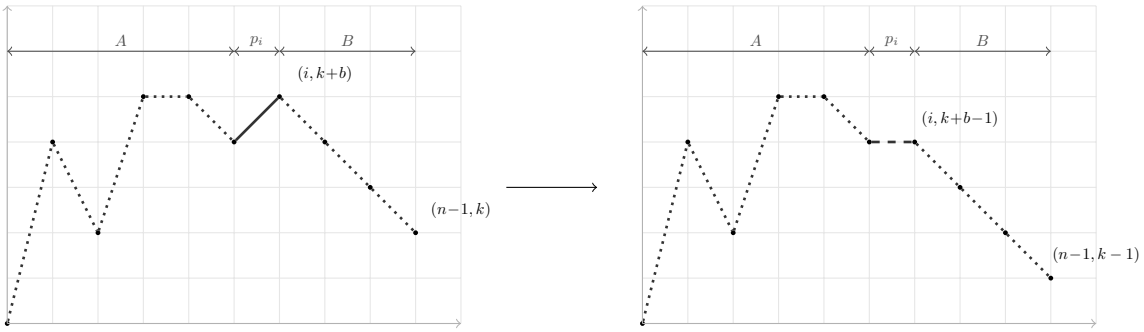


FIGURE 2.6 – Transformation élémentaire sur le chemin F.

2.1.1.7 L'ensemble quotient par $(P \cup V, Dm \cup Dd)$

En termes de chemins, nous avons $(1,1)$ équivalent à $(1,-1)$ et $\overline{(1,0)}$ équivalent à $(1,0)$. Or, ces chemins sont de longueur $n-1$ et ont autant de pas montants que de pas descendants. Une classe est donc caractérisée par un sous-ensemble de cardinal pair de $\{1,\cdots,n-1\}$. Réciproquement, soit $A = \{a_1,\cdots,a_k,\cdots,a_{2k}\}$ un sous-ensemble de taille $2k$. Le chemin ayant aux abscisses a_i avec $i \leq k$ des pas montants, des pas descendants aux abscisses a_i avec $i > k$, et des pas du type $\overline{(1,0)}$ pour les autres abscisses est représenté par A. Ainsi, le nombre de classes est égal au nombre de sous-ensembles de $\{1,\cdots,n-1\}$ de taille paire, soit 2^{n-2}.

2.1.1.8 Les ensembles quotients par $(P \cup Dm, V \cup Dd)$ et $(P \cup Dd, V \cup Dm)$

En utilisant l'involution I, on en déduit que ces deux quotients sont en bijection. Il suffit de traiter le cas $(P \cup Dm,\ V \cup Dd)$. Les pas $(1,-1)$ étant identifiés aux pas $(1,0)$, et les pas $(1,1)$ étant équivalents aux pas $\overline{(1,0)}$, on en déduit qu'une classe est représentée de manière unique par un chemin horizontal, constitué de pas $(1,0)$ et de pas $\overline{(1,0)}$. Réciproquement, deux tels chemins sont dans des classes disjointes. Or, il y a 2^{n-1} chemins de ce type. Le quotient a donc 2^{n-1} classes.

2.1.2 Structure algébrique du quotient par (P, V, Dm, Dd)

Différentes algèbres quotients ou sous-algèbres de **FQSym** se définissent à partir de statistiques. Par exemple, les positions des descentes des permutations permettent de construire la base des rubans $(\mathbf{R}_I)$ de **Sym**. À partir des formes des arbres décroissants, nous obtenons **PBT**. Il est alors naturel de se demander si les ensembles quotients que nous avons construits ont un sens algébrique. Dans la suite, nous nous plaçons dans **FQSym** et nous travaillons dans la base $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ (cf. paragraphe 1.3.3.4). Rappelons que le produit dans cette base est donné par le shuffle décalé. Commençons par étudier la relation (P, V, Dm, Dd) que nous notons $\sim$. En effet, celle-ci étant la plus fine, les propriétés des autres quotients se déduiront des siennes.

2.1.2.1 Résultat principal et schéma de preuve

Le but de la suite est de montrer que le quotient de la famille $(\mathbf{F}_\sigma)$ de **FQSym** par la relation (P, V, Dm, Dd) donne bien une algèbre quotient. Ceci revient à montrer qu'en posant

$$\mathcal{I} := vect\left(\{\mathbf{F}_\sigma - \mathbf{F}_\tau | \sigma \sim \tau\}\right), \tag{2.6}$$

on a

$$\forall\ \sigma \in \mathfrak{S} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{F}_\sigma, & \mathbf{F}_\sigma \cdot \mathcal{I} \subset \mathcal{I} \\ \mathbf{F}_\sigma, & \mathcal{I} \cdot \mathbf{F}_\sigma \subset \mathcal{I} \end{array}. \tag{2.7}$$

Le problème combinatoire équivalent est de trouver pour toutes permutations σ, τ, et s avec $\sigma \sim \tau$, deux bijections ϕ_s et ψ_s telles que :

- ϕ_s : $s \,\overline{\sqcup}\, \sigma \longrightarrow s \,\overline{\sqcup}\, \tau$, avec $\phi_s(w) \sim w$ pour w dans $s \,\overline{\sqcup}\, \sigma$;
- ψ_s : $\sigma \,\overline{\sqcup}\, s \longrightarrow \tau \,\overline{\sqcup}\, s$, avec $\psi_s(w) \sim w$ pour w dans $\sigma \,\overline{\sqcup}\, s$.

Pour trouver ces bijections, on va changer d'objets combinatoires et en choisir de mieux adaptés à ce contexte : les arbres croissants et décroissants. Nous commençons donc par rappeler les analogues des quatre statistiques sur ces objets combinatoires. Puis, nous montrons que le shuffle décalé sur les permutations est naturellement associé à une opération de greffe sur les arbres croissants. Les bijections se construisent alors naturellement à partir de ces deux observations.

2.1.2.2 Un dictionnaire entre permutations et arbres

Nous avons vu que la lecture infixe donne une bijection des arbres binaires croissants vers les permutations. Donnons alors les équivalents des quatre statistiques pour les arbres. Avec la convention $0-0$, pour σ une permutation de taille n, les correspondances sont les suivantes :

La lettre j dans σ est :		le nœud étiqueté par j dans $C(\sigma)$ est :
un pic	$\longleftrightarrow$	une feuille
une vallée	$\longleftrightarrow$	un nœud avec deux fils non vides
une double montée	$\longleftrightarrow$	un nœud avec seulement un fils droit non vide
une double descente	$\longleftrightarrow$	un nœud avec seulement un fils gauche non vide

Démonstration. Grâce à la bijection et parce que ces quatre types de nœuds permet de former une partition de l'ensemble des étiquettes, c'est-à dire $\{1, \cdots, n\}$, il suffit de montrer une des implications : on obtient alors des inclusions blocs à blocs (par exemple les étiquettes des feuilles appartiennent toutes à l'ensemble des pics), de deux partitions du même ensemble. On en déduirait alors qu'il s'agit de la même partition.

Soit N le nœud étiqueté par j dans un arbre croissant T. Si N est une feuille, alors dans la lecture infixe de T, les voisins gauche et droit de j sont nécessairement plus petits que j car T est un arbre croissant. Donc j est un pic. Si le nœud N a deux fils, alors les voisins gauche et droit de j sont plus grands. On a par conséquent une vallée. Si N a exactement un fils droit, alors le voisin gauche de j est plus petit, mais son voisin de droite est plus grand. Donc j est une double montée. Si N a exactement un fils gauche, alors le voisin droit de j est plus petit, mais son voisin de gauche est plus grand. Alors j est une double descente. □

Toujours avec la convention (0-0) mais cette fois les arbres *décroissants*, pour une permutation σ de taille n, la correspondance est alors la suivante pour une valeur j différente de σ_1 et σ_n.

La valeur j est :		le nœud étiqueté par j dans $D(\sigma)$ est :
un pic	$\longleftrightarrow$	un nœud avec deux fils non vides
une vallée	$\longleftrightarrow$	une feuille
une double montée	$\longleftrightarrow$	un nœud avec seulement un fils gauche non vide
une double descente	$\longleftrightarrow$	un nœud avec seulement un fils droit non vide

Pour les valeurs aux bords, le comportement diffère à cause de la convention. Pour ne pas s'encombrer d'exceptions, on ajoute des feuilles étiquetées par 0 à gauche (respectivement à droite) au nœud le plus à gauche (*resp.* à droite) Ainsi, le critère précédent fonctionne aussi pour les valeurs aux bords.

Démonstration. Le schéma de preuve est le même que précédemment. Soit N le nœud étiqueté par j dans T ($j \neq 0$). Si N est une feuille, alors dans la lecture infixe de T les voisins de j sont plus grands. Donc j est une vallée dans σ. Si le nœud N a deux fils, alors les voisins gauche et droit de j sont plus petits. La valeur j est par conséquent un pic dans σ. Si N a exactement un fils droit, alors le voisin gauche de j est plus grand, mais son voisin de droite est plus petit. Donc j est une double montée. Si N a exactement un fils gauche, alors le voisin droit de j est plus grand, mais son voisin de gauche est plus petit. Alors j est une double descente. □

Exemple 71. Pour $\sigma = 859723416$, constatons la traduction des statistiques sur son arbre croissant et décroissant, représentés dans la figure 2.7.

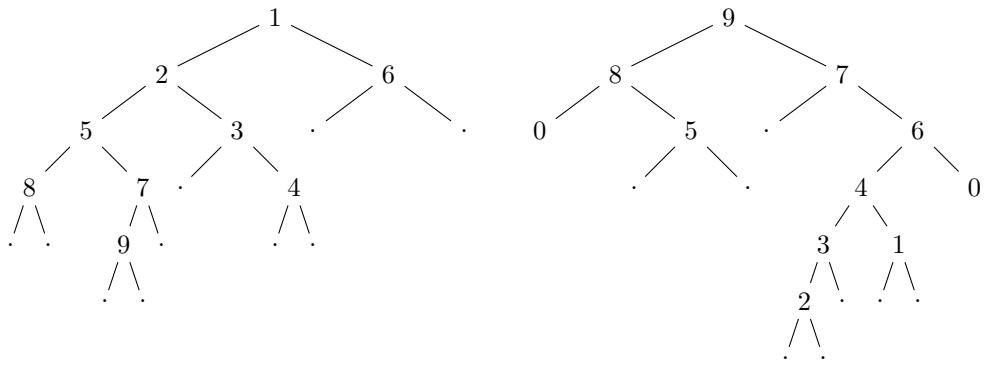


FIGURE 2.7 – Arbre croissant et décroissant de σ.

2.1.2.3 Greffe et shuffle

Rappelons l'opération de greffe sur les arbres. Soient T et T' deux arbres. On sélectionne une feuille l de T. Une *greffe* est alors la substitution de l par l'arbre T' (cf. figure 2.8).

Donnons une description combinatoire des $C(w)$ pour w dans un produit de shuffle.

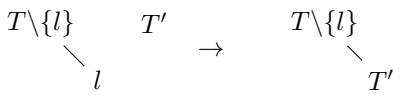


FIGURE 2.8 – Greffe de l'arbre T' sur la feuille l de T.

Proposition 2.1.1. *Soient s et σ deux permutations. Alors w appartient à $s \boxplus \sigma$ si et seulement si $C(w)$ est un arbre obtenu par le procédé suivant :*
- *on écrit $\sigma = f_1 \cdots f_k$, où les f_i sont des facteurs non vides ($k \leq |\sigma|$),*
- *on sélectionne k feuilles vides dans $C(s)$,*
- *on lit $C(s)$ dans l'ordre infixe, et on greffe la i^e feuille vide sélectionnée par $C(f_i[|s|])$.*

Démonstration. Soit T un arbre obtenu par l'algorithme présenté. Cet arbre est encore croissant, car on greffe des arbres croissants (les $C(f_i[|s|])$ dont les lettres sont plus grandes que celles de s. De plus, pour $i \leq k$, les lettres de f_i apparaissent avant les lettres de f_{i+1} dans l'ordre infixe. On en déduit que $\sigma[|s|]$ est un sous-mot de $If(T)$. Mais s est aussi un sous-mot de $If(T)$ car T est construit en greffant des arbres à $C(s)$. Les étiquettes de T étant exactement les lettres d'un élément de $s \boxplus \sigma$, il en découle que $If(T)$ est bien dans $s \boxplus \sigma$. Réciproquement, nous savons que la lecture infixe des arbres croissants est injective. Or, le nombre d'éléments de $s \boxplus \sigma$ est $\binom{|s|+|\sigma|}{|s|}$. Il suffit donc de compter le nombre d'arbres construits par ce procédé. Par convention, on rappelle que $\binom{b}{a} = 0$ si $b < a$. Factoriser en k mots non vides σ revient à prendre un sous-ensemble de taille $k-1$ dans $\{1, \cdots, |\sigma| - 1\}$. L'arbre $C(s)$ ayant $|s| + 1$ feuilles vides, sélectionner k feuilles vides consiste donc à choisir k éléments dans $\{1, \cdots, |s|+1\}$. Ainsi, le nombre d'arbres possibles est donné par la formule :

$$\sum_{k\geq 1} \binom{|\sigma| - 1}{k - 1} \binom{|s| + 1}{k}, \tag{2.8}$$

que l'on peut réécrire :

$$\sum_{k\geq 1} \binom{|\sigma| - 1}{|\sigma| - k} \binom{|s| + 1}{k}. \tag{2.9}$$

Sous cette forme, on reconnaît le coefficient de $x^{|\sigma|}$ dans $(1+x)^{|\sigma|-1}(1+x)^{|s|+1}$. Il s'agit également du coefficient de x^σ dans $(1 + x)^{|\sigma|+|s|}$. Donc,

$$\sum_{k\geq 1} \binom{|\sigma| - 1}{k - 1} \binom{|s| + 1}{k} = \binom{|\sigma| + |s|}{|s|}. \tag{2.10}$$

□

Exemple 72. Pour $s = 3142$, $\sigma = 51342$, et $\tau = 935714862$, τ est bien un élément de $s \boxplus \sigma$. Il est obtenu en factorisant $\sigma[4]$ sous la forme $\sigma[4] = 9.57.86$, et en greffant tous les facteurs comme dans la figure 2.9.

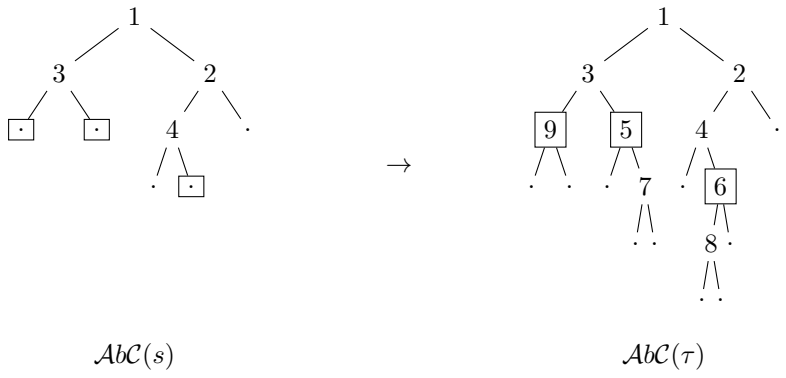


FIGURE 2.9 – $\mathcal{AbC}(\tau)$ obtenu à partir de $\mathcal{AbC}(s)$.

De même, donnons une description combinatoire sur les arbres décroissants d'un produit de shuffle.

Proposition 2.1.2. *Soient s et σ deux permutations. Alors w appartient à $s \overline{\sqcup\!\sqcup} \sigma$ si et seulement si $D(w)$ est un arbre obtenu par le procédé suivant :*
- *on écrit $s = f_1 \cdots f_k$, où les f_i sont des facteurs non vides ($k \leq |s|$),*
- *on sélectionne k feuilles vides dans $D(\sigma[|s|])$,*
- *on lit $D(\sigma[|s|])$ dans l'ordre infixe, et on remplace la i^e feuille vide sélectionnée par $D(f_i)$.*

Démonstration. Il suffit de traduire la proposition 2.1.1 en retournant l'alphabet. □

2.1.2.4 Construction de la bijection ϕ_s

Soient s une permutation, σ et τ deux permutations ayant les mêmes ensembles de statistiques. Montrons qu'il existe une bijection ϕ_s de $s \overline{\sqcup\!\sqcup} \sigma$ vers $s \overline{\sqcup\!\sqcup} \tau$ telle que pour w appartenant à $s \overline{\sqcup\!\sqcup} \sigma$, on a $\phi_s(w) \sim w$, où $\phi_s(w)$. Cette construction sera effectuée sur les arbres décroissants correspondants.

Démonstration. Pour construire ϕ_s, on procède ainsi. Soit w un élément de $s \overline{\sqcup\!\sqcup} \sigma$. Considérons l'arbre décroissant $D(w)$. D'après la proposition 2.1.2, il existe une unique factorisation de la permutation s en produits de $f_1 \cdots f_k$ et un unique ensemble de feuilles vides de $D(\sigma[|s|])$ sélectionnées de taille k, tels que l'arbre $D(w)$ est obtenu en greffant à la i^e feuille sélectionnée l'arbre $D(f_i)$. Notons $\{a_1, \cdots, a_k\}$ cet ensemble de feuilles ordonné par la lecture infixe. Si a_1 ou a_k est une feuille extrémale (feuille la plus à gauche ou la plus à droite de l'arbre), on l'étiquette par 0, pour respecter la correspondance entre types de nœuds et statistiques. On construit l'ensemble de feuilles $\{b_1, \cdots, b_k\}$ de $D(\tau[|s|])$ de la manière suivante : si a_i ($i = 1$ ou k) est étiquetée par 0, alors b_i ($i = 1$ ou k) est la feuille correspondante dans $D(\tau[|s|])$ étiquetée par 0. Sinon, notons p_i le père de a_i et q_i le nœud dans $D(\tau[|s|])$ ayant la même étiquette que p_i. Les permutations σ et τ étant équivalentes, q_i et p_i ont donc les mêmes nombres de fils gauche et droit vides. Ainsi, les fils vides des q_i sont naturellement en bijection avec les fils vides des p_i. Soit b_i la feuille vide associée à a_i à travers cette application. Pour tout b_i dans $\{b_1, \cdots, b_k\}$, greffons l'arbre $D(f_i)$ à la feuille b_i. Notons T l'arbre obtenu à la fin de ce procédé. On pose $\phi_s(w) := If(T)$.

Montrons que T et $D(w)$ ont les mêmes ensembles de statistiques. Soit a un nœud de $D(w)$ étiqueté par j et soit b le nœud correspondant dans T. Si $j \leq |s|$, alors j est l'étiquette d'un nœud appartenant à un $D(f_i)$. Cet arbre n'ayant pas été modifié, le type de nœud correspondant non plus. Ainsi, a et b ont bien les mêmes nombres de fils gauche et droit vides. Sinon, a est dans $D(\sigma[|s|])$. Si a n'est pas un des p_i, alors b n'est pas un des q_i. Dans ce cas, aucune greffe n'a été effectuée sur une feuille vide de a et de b. Donc les nombres de feuilles vides gauche et droit pour a et b n'ont pas été modifiés, et par équivalence de σ et τ, ces nombres sont identiques pour a et b. Si a vaut p_i, alors b vaut q_i. Les greffes étant effectuées dans les mêmes emplacement libres, les nombres de fils gauche et droit vides de a et de b sont encore les mêmes. Ainsi, w et $If(T) = \phi_s(w)$ sont équivalents.

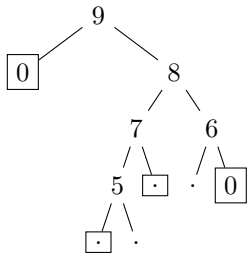
Dans le cadre de cette construction, σ et τ ont des rôles symétriques. La bijection réciproque est donc obtenue en échangeant leurs rôles. □

Exemple 73. Pour $s = 3421$, $\sigma = 51342$, $w = 394572861$ appartenant à $s \overline{\sqcup\!\sqcup} \sigma$ et $\tau = 35214$, la construction de $\phi_s(w)$ est représentée par la figure 2.10.

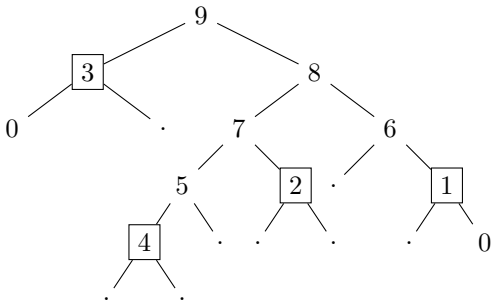
2.1.2.5 Construction de la bijection ψ_s

La construction de ψ_s est similaire à celle de ϕ_s : il suffit de remplacer les arbres décroissants par les arbres croissants. Soient s une permutation, σ et τ deux permutations de taille n ayant les mêmes ensembles de statistiques. Montrons qu'il existe une bijection ψ_s entre $\sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} s$ et $\tau \overline{\sqcup\!\sqcup} s$ telle que $\psi_s(w) \sim w$, pour tout w dans $\sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} s$.

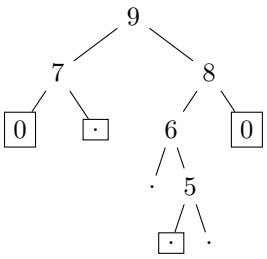
Démonstration. Soit w dans $\sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} s$. D'après la proposition 2.1.1, il existe une unique factorisation de $s[n] = f_1 \cdots f_k$ et un unique ensemble de feuilles vides $\{a_1, \cdots, a_k\}$ de $C(\sigma)$ tels que $C(w)$ est obtenu en greffant les arbres $C(f_i)$ aux feuilles a_i. Notons p_i le père de a_i dans $C(\sigma)$ et q_i le nœud dans $C(\tau)$ ayant la même étiquette que p_i. Les permutations σ et τ étant équivalentes, nous en déduisons que les nombres de fils gauche et droit vides de p_i et de q_i est le même. Nous



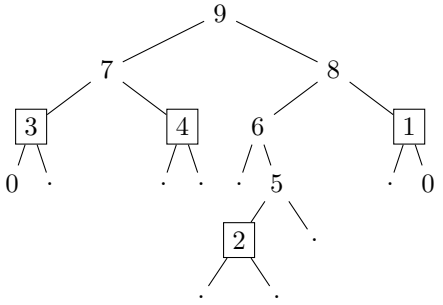
$\mathcal{AbD}(\sigma[4])$ et les feuilles sélectionnées pour construire $\mathcal{AbD}(w)$.



$\mathcal{AbD}(w)$.



$\mathcal{AbD}(\tau)$ et les feuilles sélectionnées pour construire $\mathcal{AbD}(\phi_s(w))$.



$\mathcal{AbD}(\phi_s(w))$.

FIGURE 2.10 – Construction de $\phi_s(w)$.

construisons alors l'ensemble de feuilles vides $\{b_1, \cdots, b_k\}$ associé à l'ensemble $\{a_1, \cdots, a_k\}$ par les mêmes arguments que dans la preuve du paragraphe 2.1.2.4. Et de manière similaire, on en conclut que $If(T) = \psi_s(w)$ et w ont les mêmes ensembles de statistiques.

De même, par échange des rôles de σ et τ, on obtient la bijection réciproque. □

Exemple 74. Si on a $\sigma = 3142$, $\tau = 4213$, $s = 51342$, et $w = 935714862$ dans $\sigma \boxplus s$, alors l'élément $\psi_s(w)$ se construit comme dans la figure 2.11.

Des bijections établies, il en résulte le théorème suivant :

Théorème 2.1.3. *Le quotient de la base* $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ *de* ***FQSym*** *par* (P, V, Dm, Dd) *est bien un quotient d'algèbre.*

2.1.2.6 Description du produit dans le quotient

Parmi les différentes conventions, $0 - \infty$ est celle où le produit s'exprime de manière simple en termes de chemins de Dyck. Il est alors possible d'en déduire une expression pour les autres conventions. **Dans cette partie**, nous considérons le quotient de la base $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ par la relation (P, V, Dm, Dd) avec la convention $0 - \infty$.

Ce quotient est bien défini : les preuves précédentes s'y adaptent en changeant les étiquettes des feuilles aux bords. De plus, il existe une bijection simple entre les classes de ce quotient et les chemins de Dyck grâce à l'application κ définie dans le paragraphe 1.2.3. Il nous suffit donc d'interpréter la loi produit du quotient sur les chemins. Pour cela, on procède en plusieurs étapes :

1. on commence par montrer que les éléments de $\sigma \boxplus \tau$ sont toujours deux à deux non équivalents. En particulier, la projection PVD définie dans le paragraphe 1.2.3 restreinte à cet ensemble est injective.
2. Puis on prouve que les éléments projetés sont nécessairement d'une certaine forme.
3. Enfin, une énumération des deux classes permet de conclure.

Proposition 2.1.4. *Soit* σ *une permutation de taille* n *et* τ *une permutation de taille* m*. Soient* s *et* t *deux permutations dans* $\sigma \boxplus \tau$*. Si* s *et* t *sont équivalents pour la relation* (P, V, Dm, Dd) *et la convention* $0 - \infty$*, alors* $s = t$*.*

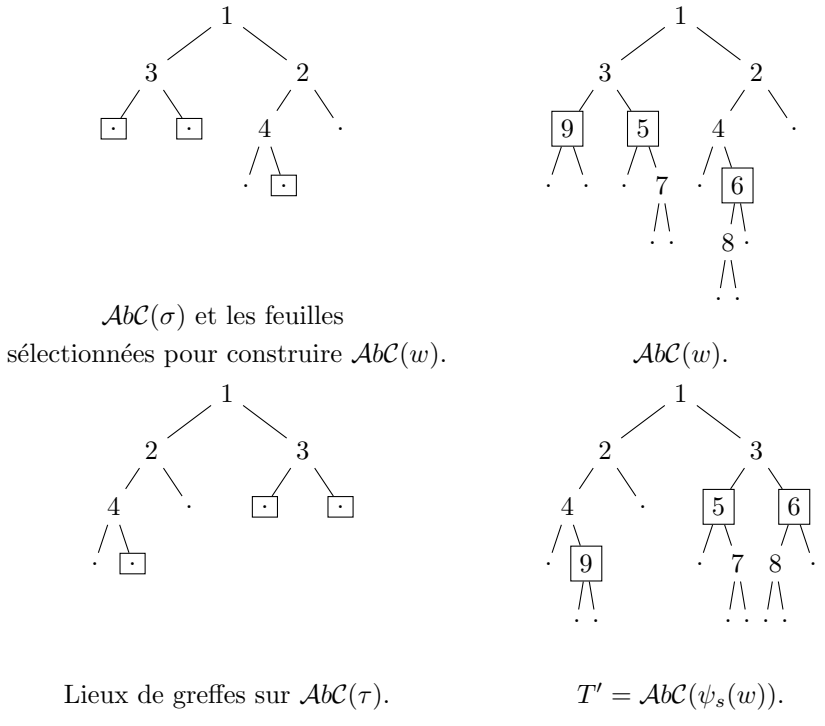


FIGURE 2.11 – Construction de T' avec $\sigma = 3142$, $\tau = 4213$, $s = 51342$, et $w = 935714862$.

Démonstration. Supposons que s et t ne soient pas égales. Considérons la première position i où s_i et t_i diffèrent. Sans perte de généralité, supposons que $s_i < t_i$. Les permutations s et t étant dans $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$, si s_{n+m} et t_{n+m} sont différents, alors la valeur t_{n+m} est située avant la position $n+m$ dans s. Donc l'entier i est strictement plus petit que $n+m$. Les configurations possibles pour s et t sont alors de la forme :

— $s = \cdots a s_i \cdots t_i \cdots$
— $t = \cdots a t_i \cdots s_i \cdots$,

les lettres avant s_i et t_i étant les mêmes, et s_i étant plus petit que t_i, par conséquent s_i provient de σ et t_i de $\tau[n]$. De plus, ces deux permutations appartenant à $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$, on en déduit que les lettres situées entre s_i et t_i dans s sont plus petites que t_i, et que les lettres situées entre t_i et s_i dans t sont plus grandes que s_i. Trois possibilités sont alors envisageables pour la lettre a :

1. si $a < s_i$, il en résulte que le statut de s_i n'est pas le même dans s et t ;
2. si $s_i < a < t_i$, alors le statut de a est différent dans s et t ;
3. si $a > t_i$, alors t_i n'a pas le même statut dans s et t.

Dans tous les cas, ces deux permutations ne sont pas équivalentes. □

Remarque 19. On peut constater que cette preuve ne dépend pas des conventions.

Corollaire 2.1.5. *Soient σ et τ deux permutations. Alors PVD restreinte à $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$ est injective.*

Démonstration. D'après la définition de PVD, deux permutations σ et τ ont la même image par cette fonction si et seulement si elles sont équivalentes pour (P, V, Dm, Dd) dans la convention $0 - \infty$. Or les éléments de $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$ sont deux à deux non équivalents (voir proposition 2.1.4), ce qui implique l'injectivité de la restriction à $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$ de PVD. □

En regardant les éléments de $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$ à l'aide du formalisme sur les arbres croissants, nous savons qu'il s'agit de greffes effectuées sur certaines feuilles de $\mathcal{AbC}(\sigma)$. Nous obtenons ainsi des conditions sur les statistiques des lettres provenant de σ. De même, en prenant les arbres décroissants, on a des conditions sur les lettres de τ. L'application PVD étant constante sur une classe d'équivalence, on en déduit des conditions nécessaires sur la forme des chemins de $PVD(s)$ pour s dans $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$.

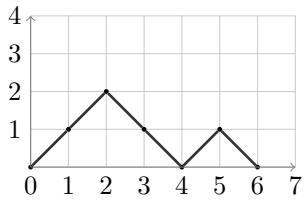
Soient $A = \{(1,1),\ (1,-1)\}$ et d un chemin de Dyck. On note respectivement $\mathcal{C}(d)$ et $\mathcal{D}(d)$ les ensembles

$$\{c \in A^* | l(c) = l(d),\ d_i = (1,1) \Longrightarrow c_i = (1,1)\}, \tag{2.11}$$

et

$$\{c \in A^* | l(c) = l(d),\ d_i = (1,-1) \Longrightarrow c_i = (1,-1)\}. \tag{2.12}$$

Exemple 75. Si le chemin d est égal à



alors, en posant $a := (1,1)$ et $b := (1,-1)$ l'ensemble $\mathcal{C}(d)$ est égal à

$$\{aabbab,\ aabbaa,\ aabaab,\ aabaaa,\ aaabab,\ aaabaa,\ aaaaab,\ aaaaaa\}, \tag{2.13}$$

et $\mathcal{D}(d)$ à

$$\{aabbab,\ aabbbb,\ abbabb,\ abbbbb,\ babbab,\ babbbb,\ bbbbab,\ bbbbbb\}. \tag{2.14}$$

Proposition 2.1.6. *Soient σ et τ deux permutations et s un élément de $\sigma \boxplus \tau$. Alors :*

$$PVD(s) = uv, \tag{2.15}$$

où u et v appartiennent respectivement à $\mathcal{C}(PVD(\sigma))$ et à $\mathcal{D}(PVD(\tau))$.

Démonstration. Soient σ et τ deux permutations de taille respective n et m et s dans $\sigma \boxplus \tau$. En regardant les arbres croissants, on constate que la statistique d'une valeur i de s provenant de σ doit vérifier les conditions suivantes :

- si i est un pic dans σ, alors il n'y a pas de contrainte pour i dans s,
- si i est une vallée dans σ, alors i reste une vallée dans s,
- si i est une double montée ou double descente dans σ, alors i peut rester inchangé dans s, ou devenir une vallée.

De même, en regardant pour une valeur j de s provenant de $\tau[n]$, on a les conditions suivantes :

- si j est un pic dans $\tau[n]$, alors j reste un pic dans s,
- si j est une vallée dans $\tau[n]$, alors il n'y a pas de contrainte sur j dans s,
- si j est une double montée ou double descente dans $\tau[n]$, alors j peut rester inchangé dans s, ou devenir un pic.

Les conditions équivalentes pour les chemins sont alors :

- pour $k \leq 2n$, si $PVD(\sigma)_k$ est montant, alors $PVD(s)_k$ est aussi montant ;
- pour $2n < l \leq (n+m)$, si $PVD(\tau)_{l-2n}$ est descendant, alors $PVD(s)_l$ est aussi descendant.

Ainsi, $PVD(s) = uv$, avec u dans $\mathcal{C}(PVD(\sigma))$ et v dans $\mathcal{D}(PVD(\tau))$. □

Proposition 2.1.7. *Soient c et d deux chemins de Dyck de longueur respective $2n$ et $2m$. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{P}_d(c,d) := \{e \in \mathcal{D}yck | e = uv,\ u \in \mathcal{D}(c),\ v \in \mathcal{D}(d)\}$$

est de cardinal au plus $\binom{n+m}{n}$.

Démonstration. On reprend les notations $a = (1,1)$, et $b = (1,-1)$. Soit e élément de $\mathcal{P}_d(c,d)$. Alors, $e = uv$, où u appartient à $\mathcal{D}(c)$, et v appartient à $\mathcal{D}(d)$. Notons $k = |u|_a - |u|_b$. Le chemin u étant au-dessus de l'axe, k est positif. Le chemin e étant de Dyck, k est aussi égal à $|v|_b - |v|_a$. Comme c est de longueur $2n$, k est au plus égal à n. De même, d étant de longueur $2m$, k est au plus égal à m. D'où :

$$\mathcal{P}_d(c,d) \subset E := \bigsqcup_{k=0}^{\min(n,m)} \{e \in \{a,b\}^* | e = uv,\ u \in \mathcal{D}(c),\ v \in \mathcal{D}(d),\ k = |u|_a - |u|_b = |v|_b - |v|_a\}. \tag{2.16}$$

Or le cardinal de E est :

$$\sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k}\binom{m}{k}. \tag{2.17}$$

En effet, ce qui caractérise u (respectivement v) est l'ensemble des positions où u (*resp.* v) et c (*resp.* d) diffèrent. Mais cet ensemble est au plus de cardinal n (*resp.* m). En réécrivant cette somme, on a

$$\sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k}\binom{m}{m-k} = \sum_{k+l=m} \binom{n}{k}\binom{m}{l}. \tag{2.18}$$

Ainsi, on reconnaît le coefficient de x^m dans le produit $(1+x)^n(1+x)^m$. Il s'agit donc aussi du coefficient de x^m dans $(1+x)^{n+m}$. Il en résulte que E est de cardinal $\binom{n+m}{m}$. □

Proposition 2.1.8. *Soient σ et τ deux permutations. Alors*

$$PVD(\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau) = \mathcal{P}_d\left(PVD(\sigma), PVD(\tau)\right). \tag{2.19}$$

Démonstration. Soient σ une permutation de taille n et τ une permutation de taille m. On sait que PVD restreinte à $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$ est injective (proposition 2.1.4) et que les éléments de $PVD(\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau)$ sont inclus dans $F := \mathcal{P}_d\left(PVD(\sigma), PVD(\tau)\right)$ (proposition 2.1.6). L'ensemble $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$ étant de cardinal $\binom{n+m}{n}$ éléments, par injectivité de PVD, on en déduit que F contient au moins $\binom{n+m}{n}$ éléments. Or, d'après la proposition 2.1.7, il en contient au plus $\binom{n+m}{n}$. D'où :

$$PVD(\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau) = \mathcal{P}_d\left(PVD(\sigma), PVD(\tau)\right). \tag{2.20}$$

□

Corollaire 2.1.9. *Soient c et d deux chemins de Dyck de taille respective $2n$ et $2m$. Alors $\mathcal{P}_d(c,d)$ est de cardinal $\binom{n+m}{n}$.*

Démonstration. Soient c et d deux chemins de Dyck de taille respective $2n$ et $2m$. L'application PVD étant surjective, on sait qu'il existe σ de taille n et τ de taille m telle que $PVD(\sigma) = c$ et $PVD(\tau) = d$. On applique alors la proposition 2.1.8. L'ensemble $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$ étant de cardinal $\binom{n+m}{n}$ et PVD restreinte à $\sigma \,\overline{\sqcup}\, \tau$ étant injective, il en découle que $\mathcal{P}_d(c,d)$ est de cardinal $\binom{n+m}{n}$. □

Théorème 2.1.10. *Soit le quotient de la base $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ de **FQSym** par la relation (P, V, Dm, Dd) avec comme convention $0 - \infty$ et Π le passage au quotient. Une base du quotient est alors donnée par $(\overline{\mathbf{F}}_c)_{c\in\mathcal{D}yck}$, et le produit par :*

$$\overline{\mathbf{F}}_c\overline{\mathbf{F}}_d = \sum_{e\in\mathcal{P}_d(c,d)} \overline{\mathbf{F}}_e. \tag{2.21}$$

Démonstration. Soient c et d deux chemins de Dyck. Par surjectivité de PVD, on en déduit qu'il existe σ et τ tels que $PVD(\sigma) = c$ et $PVD(\tau) = d$. On a :

$$\Pi\left(\mathbf{F}_\sigma\mathbf{F}_\tau\right) = \sum_{s\in\sigma\,\overline{\sqcup}\,\tau} \Pi(\mathbf{F}_s). \tag{2.22}$$

Ainsi,

$$\Pi\left(\mathbf{F}_\sigma\mathbf{F}_\tau\right) = \sum_{s\in\sigma\,\overline{\sqcup}\,\tau} \overline{\mathbf{F}}_{PVD(s)}. \tag{2.23}$$

En appliquant la proposition 2.1.8, on obtient :

$$\Pi\left(\mathbf{F}_\sigma\mathbf{F}_\tau\right) = \sum_{e\in\mathcal{P}_d(c,d)} \overline{\mathbf{F}}_e. \tag{2.24}$$

Or Π est un morphisme d'algèbre. D'où :

$$\overline{\mathbf{F}}_c\overline{\mathbf{F}}_d = \sum_{e\in\mathcal{P}_d(c,d)} \overline{\mathbf{F}}_e. \tag{2.25}$$

□

Remarque 20. À partir de la proposition 2.1.8, il est possible de prouver que le quotient par les quatre statistiques pour la convention $0-\infty$ est bien un quotient d'algèbre. En effet, l'égalité (2.19) montre que l'image de $\sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} \tau$ par PVD est un ensemble construit à partir de $PVD(\sigma)$ et de $PVD(\tau)$. Ainsi, tout ne dépend que des images par PVD, autrement dit des ensembles de quatre statistiques. En particulier, le produit est bien défini dans le quotient.

Remarque 21. Cette application quotient a permis de construire une nouvelle loi associative sur les chemins de Dyck résultant de l'associativité du shuffle. Dans un autre contexte, on aurait pu définir cette loi directement sur les chemins de Dyck. Mais alors l'associativité de celle-ci ne serait pas une conséquence immédiate, propriété déduite ici par quotient.

2.1.2.7 Propriété algébrique du quotient

Nous nous plaçons de nouveau dans la convention $0-0$ et la relation d'équivalence considérée (notée $\sim$) est (P, V, Dm, Dd).

Le quotient étant bien défini, on peut alors se demander si l'algèbre correspondante est libre donc isomorphe à **PBT**. De surcroît, s'agissant d'une projection de **FQSym**, on peut restreindre celle-ci à **PBT**, et regarder s'il y a bien injection, et donc par égalité des dimensions, isomorphisme. Notons :

— **C** l'algèbre quotient **FQSym**/ $\sim$,
— P la projection de **FQSym** dans le quotient,
— $\mathfrak{R}$ l'ensemble des permutations σ évitant le motif 312.

Il s'avère que P restreinte à **PBT** est bien injective. Cette proposition se prouve en montrant qu'une base $\mathcal{B}$ de **PBT** est encore libre dans le quotient. La méthode adoptée est de prouver que la matrice de $\mathcal{B}$ dans une "bonne base" de **C** est triangulaire avec des 1 sur la diagonale (unipotence), et donc inversible. Soit la famille $\mathcal{C} := (P(\mathbf{F}_\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{R}}$, triée par taille croissante et par ordre lexicographique décroissant. Dans un premier temps, on montre que cette famille est bien une base de **C**. Puis, on prouve que la famille $\mathcal{B} := (P(\mathbf{E}_\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{R}}$ est bien triangulaire et unipotente dans la base $\mathcal{C}$.

Proposition 2.1.11. *La famille $\mathcal{C} := (P(\mathbf{F}_\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{R}}$ est bien une base de **C**.*

Démonstration. Cela revient à montrer que deux permutations évitant 312 et dans la même classe pour $\sim$ sont en fait égales. Or, dans la bijection de Françon-Viennot, les permutations évitant 312 sont exactement associées aux chemins pour lesquels les poids des pas sont à 1. Donc deux permutations différentes évitant 312 sont envoyées sur deux chemins différents. Ces derniers étant associés à des permutations non équivalentes pour $\sim$, on en déduit qu'elles ne sont pas équivalentes. Donc $\mathcal{C}$ est bien une base. □

On rappelle la définition des $\mathbf{E}_\sigma$ de **FQSym** :

$$\mathbf{E}_\sigma = \sum_{\tau \geq_R \sigma} \mathbf{F}_\tau, \tag{2.26}$$

où $\geq_R$ est l'ordre faible droit sur les permutations. De plus, $\mathcal{B} := (\mathbf{E}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{R}}$ est une base de **PBT**. Reste à prouver que $P(\mathcal{B})$ est bien libre dans **C**. On a :

$$P(\mathbf{E}_\sigma) = \sum_{\tau\geq_R\sigma} P(\mathbf{F}_\tau) = \sum_{s\in\mathfrak{R}} c_s^{(\sigma)} P(\mathbf{F}_s), \text{ où } \; c_s^{(\sigma)} = |\{\tau \geq_R \sigma | \tau \sim s\}|. \tag{2.27}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que la matrice de $P(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{C}$ est triangulaire avec des coefficients non nuls sur la diagonale. Le lemme suivant permet d'établir cette propriété :

Lemme 2.1.12. *Soit σ dans $\mathfrak{R}$. Si on a $\tau \geq_R \sigma$, alors l'élément τ' de $\mathfrak{R}$ équivalent à τ vérifie $\sigma \leq_{lex} \tau'$.*

Admettons dans un premier temps le lemme 2.1.12. Par contraposition, on en déduit que pour s et σ dans $\mathfrak{R}$, si $s <_{lex} \sigma$, alors $c_s^\sigma = 0$. Comme $\sigma \geq_R \sigma$, on a $c_\sigma^\sigma \geq 1$. Ainsi, la matrice de $P(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{C}$ (où les éléments sont triés par taille croissante et par ordre lexicographique décroissant), est bien triangulaire, avec des coefficients non nuls sur la diagonale. En particulier, P établit bien un isomorphisme entre **PBT** et **C**.

Pour démontrer le lemme 2.1.12, nous allons prouver une de ses généralisations. Mais il nous faut introduire quelques définitions pour l'énoncer.

Définition 2.1.13. On dit qu'un mot w contenant des ∞ est une *permutation gravitationnelle* si :
— en supprimant les ∞ de w, on obtient une permutation σ ;
— w ne contient pas le facteur $\infty\infty$.
L'ensemble des permutations gravitationnelles est noté $G\mathfrak{S}$, et $G\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations gravitationnelles dont la permutation sous-jacente est de taille n.

Exemple 76. Le mot $w = 1\infty432\infty5$ appartient à $G\mathfrak{S}_5$, mais $w = \infty\infty143\infty2$ n'est pas une permutation gravitationnelle.

Cet ensemble a été introduit par Foata et Zeilberger dans [FZ90] à propos d'une autre correspondance entre histoires de Laguerre et permutations, la bijection de Foata-Zeilberger. Il est à noter que $G\mathfrak{S}$ est exactement l'ensemble des mots qui apparaissent dans les étapes intermédiaires de l'algorithme de Françon-Viennot. Réciproquement, pour un mot w de $G\mathfrak{S}$, il est possible de retrouver les étapes précédentes de l'algorithme qui ont permis d'obtenir w. En effet, notons n la plus grande lettre finie de w. Le mot précédant w est obtenu en :
— remplaçant n par ∞ si elle est entre deux lettres finies ;
— en supprimant n si un seul voisin est un ∞ ;
— en supprimant n et un ∞ voisin, si n est entre deux ∞.
Ainsi, en itérant le procédé, on retrouve toutes les étapes permettant d'obtenir w.

Exemple 77. Si $w = 1\infty4362\infty5$, alors l'exécution "à l'envers" de l'algorithme de Françon-Viennot donne :

1. $1\infty43\infty2\infty5$;
2. $1\infty43\infty2\infty$;
3. $1\infty3\infty2\infty$;
4. $1\infty2\infty$;
5. 1∞.

Ainsi, pour les lettres $i \leq n$ de w, on sait exactement quel ∞ a été substitué à chaque étape dans l'algorithme et par quel mot. On peut donc construire le mot $r(w)$, obtenu en remplaçant à chaque étape le premier ∞ par le mot correspondant dans l'exécution associée à w.

Exemple 78. Pour $w = 1\infty4362\infty5$, les constructions de w et $r(w)$ sont données par :

w	$r(w)$	élément à insérer
∞	∞	1∞
1∞	1∞	$\infty2\infty$
$1\infty2\infty$	$1\infty2\infty$	$\infty3\infty$
$1\infty3\infty2\infty$	$1\infty3\infty2\infty$	$\infty4$
$1\infty43\infty2\infty$	$1\infty43\infty2\infty$	$\infty5$
$1\infty43\infty2\infty5$	$1\infty543\infty2\infty$	6
$1\infty4362\infty5$	$16543\infty2\infty$	

. (2.28)

Il est à noter que si w est une permutation, alors $r(w)$ évite 312 et a les mêmes ensembles de statistiques que w. On définit aussi l'élément $s(w)$ obtenu en supprimant les ∞ de w.

Lemme 2.1.14. *Soit σ dans $\mathfrak{S}_n$ évitant* 312*, et w dans $G\mathfrak{S}_n$ contenant au moins un ∞. Si $\sigma \leq_R s(w)$, alors $\sigma\infty \leq_{lex} r(w)$.*

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $\sigma = 1$. Donc w est de trois formes possibles :
— $w = \infty1$;
— $w = 1\infty$;
— $w = \infty1\infty$.
Dans tous les cas, la propriété est bien vérifiée. Supposons-la vraie pour les permutations de taille inférieure à $n-1$. Soient σ dans $\mathfrak{S}_n$ et w dans $G\mathfrak{S}_n$ contenant au moins un ∞ tels que $\sigma \leq_R s(w)$. Notons i la position de 1 dans σ. La permutation σ évitant 312, cela implique que σ est de la forme $a1b$, avec $\sigma^{(i)} := a1$ dans $\mathfrak{S}_i$. Si $i = n$, comme $\sigma \leq_R s(w)$, on en déduit que $s(w)$ se termine également par un 1. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à σ' obtenu en supprimant 1 de σ, et w' obtenu en supprimant 1 de w et éventuellement un ∞ si 1 a ses deux voisins égaux à ∞ dans w. Sinon, $i < n$. Soit alors $w^{(i)}$ la permutation gravitationnelle dans $G\mathfrak{S}_i$ apparaissant dans l'exécution inverse de w. Notons que $\sigma^{(i)}$ évite 312 car il est facteur de σ et $\sigma^{(i)} \leq_R s(w^{(i)})$ car $\sigma \leq_R s(w)$ et les inversions portent sur les valeurs des lettres. Appliquons alors l'hypothèse de

récurrence à $\sigma^{(i)}$ et $w^{(i)}$. Si $\sigma^{(i)}\infty <_{lex} r(w^{(i)})$, en exécutant les algorithmes en parallèle de $i+1$ à n, les ∞ de $r(w)$ sont remplacés par des lettres strictement plus grandes que i. En particulier, à chaque étape, l'inégalité stricte n'est pas modifiée et donc $\sigma <_{lex} r(w)$. Dans le cas contraire, on a $\sigma^{(i)}\infty = r(w^{(i)})$. Les mots $w^{(i)}$ et $r(w^{(i)})$ ayant le même nombre de ∞, on en déduit que $w^{(i)}$ en contient exactement un. Or, $\sigma^{(i)} \leq_R w^{(i)}$ et 1 possède le même statut dans $w^{(i)}$ et $r(w^{(i)})$. Donc $w^{(i)} = f1\infty$. Ainsi, w est égal à $f1\infty w'$. Il suffit alors d'appliquer la récurrence à b et w'. □

Démontrons le lemme 2.1.12 à partir du lemme 2.1.14.

Démonstration. Soit σ évitant 312 et $\tau \geq_R \sigma$. On sait qu'il existe un unique τ' évitant 312 équivalent à τ. Soit a la dernière valeur de τ'. Rajoutons la lettre ∞ à droite de a dans le mot τ et notons w ce mot. Donc $s(w)$ est égal à τ, d'où $s(w) \geq_R \sigma$. En appliquant le lemme 2.1.14 à σ et w, on obtient $\sigma\infty \leq_{lex} r(w)$. Or, nous avons l'égalité $r(w) = \tau'\infty$. Donc, $\sigma \leq_{lex} \tau'$. □

2.1.3 Structure algébrique du quotient par $(P, V, Dm \cup Dd)$

Dans cette partie, $\sim$ désigne la relation d'équivalence $(P, V, Dm \cup Dd)$. La méthode utilisée pour (P, V, Dm, Dd) est applicable à la relation $\sim$: nous construisons d'abord les bijections garantissant la bonne définition du quotient. Puis, nous montrons que cette algèbre est libre par un argument similaire au cas (P, V, Dm, Dd).

2.1.3.1 Un quotient bien défini

Rappelons l'équivalent combinatoire "d'être une algèbre quotient". Soient s, σ et τ trois permutations telles que $\sigma \sim \tau$. Cherchons deux bijections ϕ_s et ψ_s telles que :

— $\phi_s : \quad s \boxplus \sigma \quad \longrightarrow s \boxplus \tau$, avec $\phi_s(w) \sim w$ pour w dans $s \boxplus \sigma$;

— $\psi_s : \quad \sigma \boxplus s \quad \longrightarrow \tau \boxplus s$, avec $\psi_s(w) \sim w$ pour w dans $\sigma \boxplus s$.

De la même façon que dans la partie 2.1.2, nous commençons par traduire cette relation d'équivalence sur les arbres. Ensuite, nous construisons les bijections ϕ_s et ψ_s grâce à des arguments similaires à ceux présents dans les paragraphes 2.1.2.4 et 2.1.2.5.

2.1.3.1.1 Le dictionnaire arbre-statistique Dans notre cas, on identifie les doubles montées avec les doubles descentes. Sur les arbres, cela signifie que les nœuds ayant un seul fils vide sont équivalents. Le dictionnaire se modifie alors légèrement. Ainsi, pour une permutation σ de taille n, on obtient les correspondances suivantes :

la lettre j dans σ est :		le nœud étiqueté par j dans $C(\sigma)$ est :
un pic	$\longleftrightarrow$	une feuille
une vallée	$\longleftrightarrow$	un nœud avec deux fils non vides
une double montée ou double descente	$\longleftrightarrow$	un nœud avec un seul fils non vide

De même, en étiquetant les feuilles vides extrémales par 0, on obtient pour les arbres décroissants les correspondances suivantes :

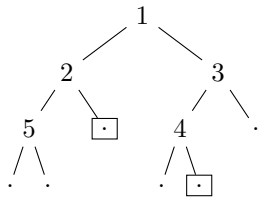
la lettre j dans σ est :		le nœud étiqueté par j dans $D(\sigma)$ est :
un pic	$\longleftrightarrow$	un nœud avec deux fils non vides
une vallée	$\longleftrightarrow$	une feuille
une double montée ou double descente	$\longleftrightarrow$	un nœud avec un seul fils non vide

Reste à adapter les constructions des bijections.

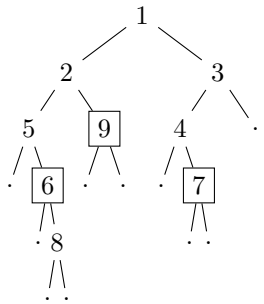
2.1.3.1.2 La bijection ϕ_s En remplaçant "nombres de fils gauche et droit vides" par "nombre de fils vides" dans le procédé présenté dans le paragraphe 2.1.2.4, nous obtenons une manière de construire une bijection ϕ_s aux propriétés demandées.

2.1.3.1.3 La bijection ψ_s De la même manière que ϕ_s, il suffit d'adapter la preuve donnée au paragraphe 2.1.2.5 en remplaçant "nombres de fils gauche et droit vides" par "nombre de fils vides".

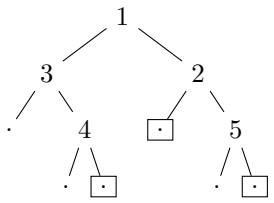
Exemple 79. Pour $\sigma = 52143$, $\tau = 34125$, $s = 1342$, $w = 695281473$, et $w' = 913654872$, nous représentons la construction de $\phi_s(w)$ dans la figure 2.13 et celle de $\psi_s(w')$ dans la figure 2.12.



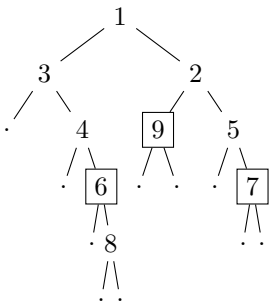
Arbre croissant de σ.



Arbre croissant de w

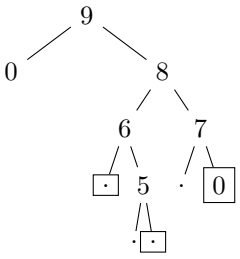


Lieux de greffes pour τ.

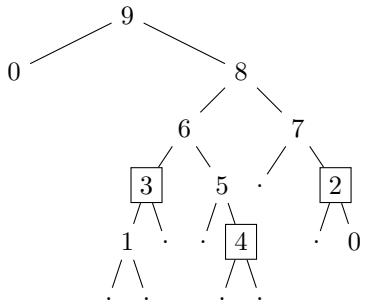


Arbre croissant de $\psi_s(w)$.

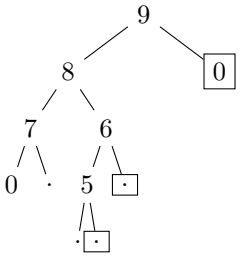
FIGURE 2.12 – Construction de $\psi_s(w)$.



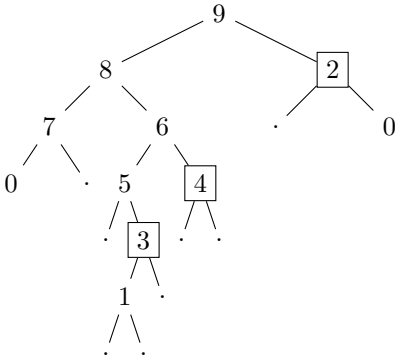
Lieux de greffes sur l'arbre décroissant de $\sigma[4]$.



Arbre décroissant de w'.



Lieux de greffes sur l'arbre décroissant de $\tau[4]$.



Arbre décroissant de $\phi_s(w)$.

FIGURE 2.13 – Construction de $\phi_s(w')$.

2.1.3.2 Une algèbre libre

Appliquons la méthode de la section 2.1.2.7 à notre cas. Posons :
— $\mathbf{C}'$ l'algèbre quotient $\mathbf{FQSym}/\sim$,

— P la projection de **FQSym** dans le quotient,
— $\mathfrak{D}$ l'ensemble des permutations σ évitant le motif 312 et sans double montée,
— $\mathcal{B}'$ la famille $(\mathbf{E}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{D}}$,
— $\mathcal{C}'$ la famille $(P(\mathbf{F}_\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{D}}$.

Grâce à la bijection de Françon-Viennot, nous savons que $\mathcal{C}'$ est une base du quotient. La famille $\mathcal{B}'$ est stable par concaténation décalée. Ainsi, l'algèbre engendrée par $\mathcal{B}'$ a comme suite des dimensions les nombres de Motzkin. Cette algèbre est également libre car engendrée par la famille algébriquement indépendante des $\mathbf{E}_\sigma$ avec σ dans $\mathfrak{D}$ et se terminant par un 1. Il suffit alors de montrer que $P(\mathcal{B}')$ est bien une famille libre du quotient. Pour cela, nous allons prouver que $P(\mathcal{B}')$ est triangulaire dans la base $\mathcal{C}'$. En effet, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.1.15. *Soient σ et τ deux permutations dans $\mathfrak{R}$ et équivalentes pour $(P, V, Dm \cup Dd)$. Si $Dm(\sigma)$ est strictement inclus dans $Dm(\tau)$, alors $\tau <_{lex} \sigma$.*

Démonstration. Soient σ et τ deux permutations vérifiant les hypothèses. Soit k le plus petit entier qui est une double montée dans τ mais une double descente dans σ. L'existence est assurée, car les doubles montées de σ sont strictement incluses dans les doubles montées de τ, et σ et τ sont équivalentes. Or, σ et τ évitent 312. Dans l'algorithme d'insertion à la Françon-Viennot, à l'étape $k-1$ nous avons donc :

$$\sigma_{(k-1)} = \tau_{(k-1)} = u\infty v, \tag{2.29}$$

avec u éventuellement vide, mais sans infini. En passant à l'étape k, nous obtenons :
— $\sigma_{(k)} = u\infty kv$;
— et $\tau_{(k)} = uk\infty v$.

Or, le premier ∞ de $\sigma_{(k)}$ sera uniquement remplacé par des lettres strictement plus grandes que k, d'où l'inégalité $\tau <_{lex} \sigma$. □

Notons :

$$c_s^\sigma := |\{\tau \geq_R \sigma | \tau \sim s\}|, \tag{2.30}$$

où s et σ sont des éléments de $\mathfrak{D}$.

Proposition 2.1.16. *Soient s et σ deux permutations de taille n. Si $c_s^\sigma \geq 1$, alors $s \geq_{lex} \sigma$.*

Démonstration. Comme $c_s^\sigma \geq 1$, il existe donc $\tau \geq_R \sigma$, avec $\tau \sim s$. Or, τ est équivalent pour la relation (P, V, Dm, Dd) à un τ' évitant 312. De plus, $\tau' \geq_{lex} \sigma$ grâce au lemme 2.1.12. Mais s est équivalent à τ pour $(P, V, Dm \cup Dd)$. La relation (P, V, Dm, Dd) étant plus fine que $(P, V, Dm \cup Dd)$, on en déduit que s et τ' sont équivalents pour $(P, V, Dm \cup Dd)$. Or, ils évitent tous les deux 312 et s n'a pas de double montée. Par conséquent, $s \geq_{lex} \tau'$. Par transitivité, nous obtenons $s \geq_{lex} \sigma$. □

En particulier, les coefficients c_s^σ sont nuls si $\sigma >_{lex} s$. Le coefficient c_σ^σ étant supérieur à 1, on en déduit que la famille $P(\mathcal{B})$ est bien libre. En conclusion,

Théorème 2.1.17. *Le quotient de **FQSym** par la relation $(P, V, Dm \cup Dd)$ est une algèbre libre dont la suite des dimensions est donnée par les nombres de Motzkin.*

2.1.4 Les quotients par $(P \cup Dm, V \cup Dd)$ ou par $(P \cup Dd, V \cup Dm)$

L'involution lecture droite-gauche *rev* sur les permutations étant un morphisme d'algèbres pour le produit de shuffle, il suffit de déterminer les résultats algébriques pour l'un des deux quotients.

2.1.4.1 Un quotient bien défini

Nous considérons la relation $(P \cup Dd, V \cup Dm)$ et la notons $\sim$. Adoptons les notations des paragraphes 2.1.2 et 2.1.3 pour celui-ci. Soulignons qu'une variante de ce quotient existe dans [HNTT09] et [NTW10] où des applications ont pu être trouvées.

2.1.4.1.1 Le dictionnaire arbre-statistique Il est donné pour une permutation σ de taille n et son arbre croissant par les correspondances :

La lettre j dans σ est :		le nœud étiqueté par j dans $C(\sigma)$ a :
un pic ou une double descente	$\longleftrightarrow$	un fils droit vide
une vallée ou une double montée	$\longleftrightarrow$	un fils droit étiqueté

De même, en étiquetant les feuilles vides extrémales par 0, on obtient pour l'arbre décroissant de σ les correspondances suivantes :

La lettre j dans σ est :		le nœud étiqueté par j dans $D(\sigma)$ a :
un pic ou une double descente	$\longleftrightarrow$	un fils droit étiqueté
une vallée ou une double montée	$\longleftrightarrow$	un fils droit vide

2.1.4.1.2 La bijection ϕ_s Soient σ et τ deux permutations équivalentes, et s une autre permutation. On cherche une bijection ϕ_s de $s \,\overline{\sqcup}\, \sigma$ vers $s \,\overline{\sqcup}\, \tau$ telle que pour w dans $s \,\overline{\sqcup}\, \sigma$ on ait $w \sim \phi_s(w)$. Pour un arbre binaire de taille fixée, le nombre de feuilles vides est constant. Or, σ et τ étant équivalents, leur ensemble des d'étiquettes des nœuds ayant un fils droit vide est le même. Comme le nombre de feuilles vides est constant, on en déduit que le nombre d'étiquettes ayant un fils gauche vide dans $D(\sigma)$ et $D(\tau)$ est le même. Soit h la bijection obtenue par lecture infixe des arbres en associant la i^{e} étiquette ayant un fils gauche vide dans $D(\sigma)$, à la i^{e} étiquette possédant un fils gauche vide dans $D(\tau)$. La construction de la bijection ϕ_s sur les arbres est alors la suivante : pour w dans $s \,\overline{\sqcup}\, \sigma$ grâce à la proposition 2.1.2, nous savons qu'il existe une unique factorisation de $s = f_1 \cdots f_k$ et un unique ensemble $\{a_1, \cdots, a_k\}$ de feuilles vides ou étiquetées par 0 de $D(\sigma[|s|])$ associés à w. Considérons l'arbre décroissant $D(\tau[|s|])$. Les lieux de greffes vont être choisis selon les règles suivantes :

- une feuille étiquetée par 0 est un lieu de greffe pour τ si et seulement si elle l'a été pour σ ;
- un fils droit vide de père j dans τ est un lieu de greffe si et seulement si le fils droit vide de j l'est dans σ ;
- un fils gauche vide de père j dans τ est un lieu de greffe si et seulement si le fils gauche de $h^{-1}(j)$ l'est dans σ.

Enfin, nous greffons les arbres $D(f_i)$ aux i^{es} feuilles sélectionnées de $D(\tau[s])$ lu dans l'ordre infixe. Notons cet arbre T. Posons $\phi_s(w) := If(T)$. Alors de la même manière que pour les autres relations d'équivalence, on en déduit que ϕ_s vérifie les propriétés demandées.

2.1.4.1.3 La bijection ψ_s La bijection ψ_s se construit de façon analogue à ϕ_s en remplaçant les arbres décroissants par les arbres croissants.

Exemple 80. Pour $\sigma = 25143$, $\tau = 31254$, $s = 3142$, $w = 286514937$, la représentation sous forme d'arbre de $\psi_s(w)$ est donnée dans la figure 2.14.

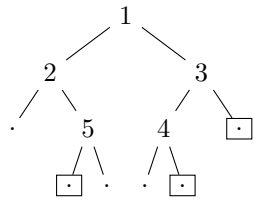
2.1.4.2 Une algèbre libre

Nous savons que les espaces homogènes de $\mathbf{FQSym}/(P \cup Dd, V \cup Dm)$ sont de dimension 2^{n-1}. Dans [HNTT09], les auteurs ont montré que $\mathbf{FQSym}/(P \cup Dd, V \cup Dm)$ avec comme convention $\infty - \infty$ est une algèbre libre. Il suffit alors de montrer que $\mathbf{FQSym}/(P \cup Dd, V \cup Dm)$ avec la convention $0 - 0$ lui est isomorphe ou anti-isomorphe.

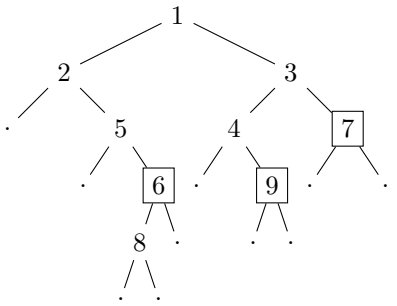
Démonstration. Considérons l'application ω qui consiste à retourner les lettres d'une permutation. Alors une classe pour la relation $(P \cup Dd, V \cup Dm)$ avec la convention $0-0$ est associée à une classe pour la relation $(P \cup Dd, V \cup Dm)$ avec la convention $\infty - \infty$. De plus, ω est un anti-isomorphisme d'algèbre sur **FQSym**. On en déduit que cette application passe au quotient et donc que l'algèbre $\mathbf{FQSym}/(P \cup Dd, V \cup Dm)$ avec comme convention $\infty - \infty$ et l'algèbre $\mathbf{FQSym}/(P \cup Dd, V \cup Dm)$ avec la convention $0 - 0$ sont anti-isomorphes. Et donc cette dernière algèbre est bien libre. □

2.1.5 Les autres cas

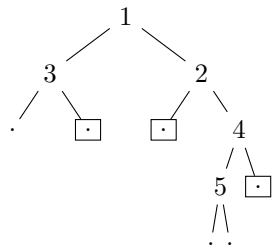
Parmi les autres relations, seule $(P \cup V \cup Dd \cup Dm)$ définit bien un quotient d'algèbre. Pour montrer que le quotient n'est pas défini, il suffit de trouver des exemples pour lesquels il ne peut y avoir de bijection préservant les statistiques voulues.



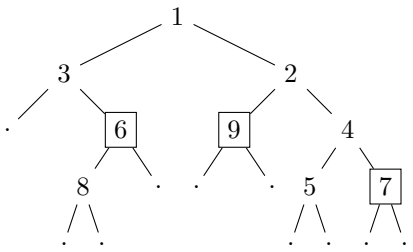
Arbre croissant de σ.



Arbre croissant de w.



Lieux de greffes pour τ.



Arbre croissant de $\psi_s(w)$.

FIGURE 2.14 – Construction de $\psi_s(w)$.

2.1.5.1 Le quotient par $(P \cup V, Dm, Dd)$

Pour la relation $(P \cup V, Dm, Dd)$, les permutations $\sigma = 2746351$ et $\tau = 2756341$ sont bien équivalentes. Le mot $w = 27563481$ est dans $\tau \boxplus 1$ et 4 est une double montée dans w. Or, 4 est une vallée dans tous les éléments de $\sigma \boxplus 1$. On en déduit que w n'est équivalent à aucun élément de $\sigma \boxplus 1$. En particulier, le quotient n'est pas bien défini d'un point de vue algébrique.

2.1.5.2 Les quotients par $(P \cup Dm, V, Dd)$ ou $(V, P \cup Dm \cup Dd)$

Prenons $\sigma = 45312$, $\tau = 53124$ et $w = 645312$. Les permutations σ et τ sont bien équivalentes pour les deux relations, et w est dans $\sigma \boxplus 1$. Or, 4 est une vallée dans w. Mais cette valeur n'est une vallée dans aucun élément de $\tau \boxplus 1$. En particulier, w n'est équivalent (pour les deux relations) à aucun élément de $\sigma \boxplus 1$. Donc le quotient n'est pas bien défini.

Pour les autres relations, à l'aide des involutions I et J et en les appliquant aux cas traités précédemment, nous en déduisons qu'aucune ne définit une algèbre quotient.

2.1.6 Résumé des résultats

quotient par	dimensions	algèbre quotient	algèbre libre
(P, V, Dm, Dd)	C_n	oui	oui
$(P, V, Dm \cup Dd)$	M_{n-1}	oui	oui
$(P, V \cup Dm \cup Dd)$	$\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$	non	non
$(P \cup V \cup Dm, Dd)$	2^{n-1}	non	non
$(P \cup V, Dm, Dd)$	$\frac{3^{n-1}+1}{2}$	non	non
$(P, Dm, V \cup Dd)$	A_{n-1}	non	non
$(P \cup V, Dm \cup Dd)$	2^{n-2}	non	non
$(P \cup Dd, V \cup Dm)$	2^{n-1}	oui	oui
$(P \cup V \cup Dm \cup Dd)$	1	oui	oui

2.1.7 Les autres conventions

Dans tout le travail précédent, la convention fixée était $0-0$. Nous avons vu qu'il est possible grâce aux involutions sur les permutations de ramener l'étude à deux conventions, $0-0$ et $0-\infty$. Les méthodes employées dans ce dernier cas sont globalement les mêmes. En effet, considérons l'injection de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_{n+1}$ consistant à ajouter à la fin d'un mot la lettre $n+1$. On remarque que cette injection préserve les quatre statistiques et ramène donc l'étude au cas $0-0$.

2.1.7.1 Résumé des différents ensembles quotients

Voici l'étude énumérative faite pour les différents quotients dans cette convention :

quotient par	dimensions	algèbre quotient	algèbre libre
(P, V, Dm, Dd)	C_n	oui	oui
$(P,V, Dm \cup Dd)$	M_n	oui	oui
$(P,V \cup Dm \cup Dd)$	$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$	non	non
$(P \cup V \cup Dm, Dd)$	2^{n-2}	non	non
$(P \cup V, Dm, Dd)$	???	non	non
$(P, Dm, V \cup Dd)$	???	non	non
$(P \cup V, Dm \cup Dd)$	2^{n-2}	non	non
$(P \cup V \cup Dd, Dm)$	$2^n - n$	non	non
$(P \cup Dd, V \cup Dm)$	2^{n-1}	oui	oui
$(P \cup V \cup Dm \cup Dd)$	1	oui	oui

2.2 Sous-algèbres dans Sym

Dans cette partie, nous construisons des sous-algèbres de **FQSym** basées sur les positions des pics, vallées, doubles montées et doubles descentes (cf. paragraphe 1.2.6).

2.2.1 Définitions et rappels

On reprend les définitions posées dans le paragraphe 1.2.6 à propos des statistiques sur les positions des lettres d'une permutation.

Il est à noter que le statut de la position i d'une permutation σ ne dépend que de l'ensemble des descentes de σ. En effet, i est :

-un pic si	i est une descente mais pas $i-1$,
-une vallée si	i n'est pas une descente mais $i-1$ l'est,
-une double montée si	i et $i-1$ ne sont pas des descentes,
-une double descente si	i et $i-1$ sont des descentes.

Ainsi, dans le contexte des positions, deux permutations ayant le même ensemble de descentes possèdent les mêmes pics, vallées, doubles montées, et doubles descentes. Ces mêmes statistiques se définissent alors sur les compositions.

Définition 2.2.1. Soit $I = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ une composition de l'entier n. Rappelons que l'ensemble des descentes de I est égal à $\{i_1, i_1+i_2, \cdots, i_1+i_2+\cdots+i_{r-1}\}$ et est noté des(I). Soit i entre 2 et $n-1$. Alors i est :

-un pic si	i est une descente mais pas $i-1$,
-une vallée si	i n'est pas une descente mais $i-1$ l'est,
-une double montée si	i et $i-1$ ne sont pas des descentes,
-une double descente si	i et $i-1$ sont des descentes.

Pour I une composition de l'entier n, on note respectivement $P(I)$, $V(I)$, $Dm(I)$, $Dd(I)$ l'ensemble des pics, vallées, doubles montées, doubles descentes de I.

Il est aussi possible de lire chacune de ces statistiques sur la représentation en ruban d'une composition. Dans ce cas, nous avons les correspondances suivantes pour une position i compris entre 2 et $n-1$:

statut de la position i	condition sur la i^{e} case
pic	coin extérieur
vallée	coin intérieur
double montée	avoir des voisins gauche et droit
double descente	avoir des voisins haut et bas.

Exemple 81. Pour $I = (4, 1, 3, 1, 1, 2)$, on a

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{des}(I) & = & \{4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\}, \\ P(I) & = & \{4,\ 8\}, \\ V(I) & = & \{6,\ 11\}, \\ Dm(I) & = & \{2,\ 3,\ 7\}, \\ Dd(I) & = & \{5,\ 9\}, \end{array} \tag{2.31}$$

statistiques que l'on peut lire aisément dans la représentation en ruban de I (figure 2.15).

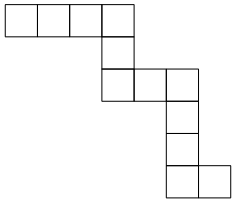


FIGURE 2.15 – Ruban de la composition $I = (4, 1, 3, 1, 1, 2)$.

Proposition 2.2.2. *Soient σ et τ deux permutations. Leur composition de descentes sont identiques si et seulement si elles ont les mêmes pics, vallées, doubles montées, doubles descentes.*

Démonstration. Soient σ et τ deux permutations ayant la même composition de descentes. Les pics, vallées, doubles montées et doubles descentes ne dépendent que des descentes d'une permutation. On en conclut que ces quatre ensembles sont identiques pour σ et τ.

Réciproquement, supposons que σ et τ ont les mêmes pics, vallées, doubles montées, et doubles descentes. Comme ces ensembles forment une partition de $\{2, \cdots, n-1\}$, il en résulte que σ et τ ont la même taille n. De plus, l'ensemble des descentes d'une permutation s contient la réunion de ses pics et de ses doubles descentes. On rajoute à cette réunion l'élément 1 si 2 est une double descente ou une vallée pour obtenir l'ensemble des descentes de s. On en déduit que σ et τ ont bien le même ensemble de descentes. □

Ainsi, les sous-algèbres construites à l'aide de ces statistiques sont également des sous-algèbres de **Sym**. Dans la suite, nous étudions ces statistiques dans **Sym**.

2.2.1.1 La construction de Sym à partir de FQSym

On rappelle que

$$\mathbf{R}_I = \sum_{C(\sigma)=I} \mathbf{G}_\sigma,$$

où $C(\sigma)$ est la composition des descentes de σ.

Pour $I = (i_1, \cdots, i_r)$ et $J = (j_1, \cdots, j_s)$ deux compositions d'entiers, le produit est alors

$$\mathbf{R}_I \mathbf{R}_J = \mathbf{R}_{IJ} + \mathbf{R}_{I \lhd J}, \tag{2.32}$$

où $IJ = (i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s)$, et $I \lhd J = (i_1, \cdots, i_r + j_1, \cdots, j_s)$.

2.2.1.2 Construction de sous-algèbres : méthode

Soit A une algèbre graduée dont une base $(P_c)_{c\in\mathcal{C}}$ est indexée par une classe combinatoire $\mathcal{C}$. Soit f une fonction d'une classe combinatoire $\mathcal{C}$ vers un ensemble E. Si les images inverses de f de tous les singletons sont finies, on peut considérer les éléments $Q_x := \sum_{c\in f^{-1}(x)} P_x$ pour x dans $f(\mathcal{C})$. Posons $V := vect(Q_x)_{x\in f(\mathcal{C})}$. A étant une algèbre, si x et y sont dans $f(\mathcal{C})$, le produit $Q_x Q_y$ est

alors bien défini. Ainsi, on en déduit que V est une sous-algèbre de A si pour tout x et y dans $f(\mathcal{C})$ le produit Q_xQ_y appartient à V.

Pour construire des sous-algèbres il suffit donc de trouver des fonctions f vérifiant les bonnes propriétés.

Exemple 82. En prenant $A = \mathbf{FQSym}$, la base $(\mathbf{G}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ et f l'application associant à une permutation sa composition des descentes, on obtient :
— $V = \mathbf{Sym}$;
— $Q_I = \mathbf{R}_I$.

Dans la suite de ce chapitre, nous notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des compositions d'entiers.

2.2.2 Sous-algèbres : des cas particuliers vers une construction générale

2.2.2.1 L'algèbre des pics

On dit que S est un ensemble de pics s'il existe une permutation σ telle que $P(\sigma) = S$. Notons $\mathcal{PS}$ la classe des ensembles de pics. On définit par

$$\Pi_{S,n} = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n \\ P(I)=S}} \mathbf{G}_\sigma, \tag{2.33}$$

la somme étant nulle si S n'est pas un ensemble de pics. Par la proposition 2.2.2, on a

$$\Pi_{S,n} = \sum_{I\vDash n,\ P(I)=S} \mathbf{R}_I. \tag{2.34}$$

Montrons que $V := vect(\Pi_{S,n})_{S\in\mathcal{PS},\ n\in\mathbb{N}}$ est en fait une sous-algèbre de $\mathbf{Sym}$. Si E est un ensemble, on note $E[n] := \{x+n,\ x\in E\}$. Alors la règle produit dans V est :

$$\begin{aligned}\Pi_{S_1,n}\Pi_{S_2,m} = \ & \Pi_{S_1\cup S_2[n],n+m} + \Pi_{S_1\cup\{n\}\cup S_2[n],n+m} \\ & +\Pi_{S_1\cup\{n+1\}\cup S_2[n],n+m} + \Pi_{S_1\cup\{n\}\cup\{n+1\}\cup S_2[n],n+m}\end{aligned}, \tag{2.35}$$

certains termes pouvant être nuls.

Exemple 83. Pour $S_1 = \{2,\ 4\}$, $n = 6$, $S_2 = \{5,\ 7\}$, $m = 8$, $I = (2,2,2)$ et $J = (1,4,2,1)$, les éléments $\mathbf{R}_I$ et $\mathbf{R}_J$ sont respectivement dans $\Pi_{S_1,n}$ et $\Pi_{S_2,m}$. Nous observons que

$$P(I \lhd J) = S_1 \cup S_2[n] \tag{2.36}$$

et

$$P(IJ) = S_1 \cup \{6\} \cup S_2[n]. \tag{2.37}$$

Ainsi, $\mathbf{R}_{I\lhd J}$ apparaît dans $\Pi_{S_1\cup S_2[n],n+m}$, et $\mathbf{R}_{IJ}$ est un terme de $\Pi_{S_1\cup\{n\}\cup S_2[n],n+m}$.

Réciproquement, soit $K = (2,2,3,1,1,2,2,1)$. Alors on a $P(K) = S_1 \cup S_2[6]$. Or $K = I \lhd J$, avec $I = (2,2,2)$ et $J = (1,1,1,2,2,1)$. Comme $P(I) = S_1$, et $P(J) = S_2$, on en déduit que $\mathbf{R}_K$ apparaît dans le produit $\Pi_{S_1,6}\Pi_{S_2,8}$.

Dans l'exemple 83, on trouve tous les ingrédients d'une preuve de l'égalité (2.35). En effet, on détermine d'abord les ensembles de pics possibles d'un produit, puis on cherche à décomposer un ensemble des pics pour vérifier qu'il est obtenu par produit. La preuve se fait donc en deux temps : on commence par montrer que les termes du produit sont dans un des termes de droite, et réciproquement, un élément dans la somme de droite apparaît dans un produit des éléments de gauche.

Démonstration. Soient deux compositions $I \vDash n$ et $J \vDash m$, telles que $P(I) = S_1$ et $P(J) = S_2$. Alors les termes $\mathbf{R}_I$ et $\mathbf{R}_J$ sont respectivement dans $\Pi_{S_1,n}$ et $\Pi_{S_2,m}$. Comme

$$\mathbf{R}_I\mathbf{R}_J = \mathbf{R}_{IJ} + \mathbf{R}_{I\lhd J}, \tag{2.38}$$

il faut prouver que $\mathbf{R}_{IJ}$ et $\mathbf{R}_{I\lhd J}$ apparaissent dans le membre droit de (2.35). Déterminons $P(IJ)$ et $P(I \lhd J)$ en fonction de I et J. Nous avons

$$\mathrm{des}(IJ) = \mathrm{des}(I) \cup \{n\} \cup \mathrm{des}(J)[n] \tag{2.39}$$

et

$$\mathrm{des}(I \lhd J) = \mathrm{des}(I) \cup \mathrm{des}(J)[n]. \tag{2.40}$$

Comme $P(K) = \{d \in \mathrm{des}(I) | d-1 \notin \mathrm{des}(K)\}$, on en déduit que :

$$\begin{array}{l} P(I) \cup P(J)[n] \subset P(IJ) \subset P(I) \cup \{n,\ n+1\} \cup P(J)[n] \\ P(I) \cup P(J)[n] \subset P(I \lhd J) \subset P(I) \cup \{n,\ n+1\} \cup P(J)[n] \end{array}. \tag{2.41}$$

Ainsi, $\mathbf{R}_{IJ}$ et $\mathbf{R}_{I \lhd J}$ sont bien dans le membre droit de (2.35). Réciproquement, soit $\mathbf{R}_K$ apparaissant dans un des termes de droite de (2.35). Donc K est une composition de $n+m$. Il existe une unique factorisation avec $K = IJ$ ou bien $K = I \lhd J$ telle que $I \vDash n$ et $J \vDash m$. Mais on a :

$$P(I) = P(K) \cap \{1, \cdots, n-1\}, \tag{2.42}$$

et

$$P(J)[n] = P(K) \cap \{n+2, \cdots, n+m\}. \tag{2.43}$$

Comme $P(K) \cap \{1, \cdots, n-1\} = S_1$ et $P(K) \cap \{n+2, \cdots, n+m\} = S_2[n]$, $\mathbf{R}_I$ est donc dans $\Pi_{S_1,n}$, et $\mathbf{R}_J$ dans $\Pi_{S_2,m}$. Ainsi, $\mathbf{R}_K$ est bien dans le produit d'un élément de $\Pi_{S_1,n}$ avec un élément de $\Pi_{S_2,m}$. □

Pour une position i, être un pic est une propriété ne dépendant que de ses voisins immédiats. Ainsi, l'aspect local de cette propriété a été un des points clés de la preuve précédente. En effet, elle assure une certaine stabilité vis-à vis des opérations de concaténation et de $\lhd$ sur les compositions. Nous allons donner une condition suffisante pour la construction d'autres sous-algèbres à partir de "propriétés locales". Mais présentons d'abord une autre sous-algèbre elle aussi basée sur des statistiques.

2.2.2.2 Une algèbre construite grâce aux vallées et aux doubles montées

Dans cette partie, la fonction f désigne l'application

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbf{Pf}(\mathbb{N}) \\ & I & \longmapsto & V \cup Dm(I), \end{array} \tag{2.44}$$

où $\mathbf{Pf}(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Exemple 84. Pour $I = (4,1,3,2)$ on a $H(I) = \{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9\}$ (cf. figure 2.16).

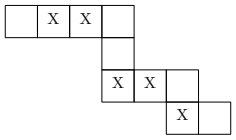


FIGURE 2.16 – Ruban $I = (4,1,3,2)$ et les statistiques considérées.

Définition 2.2.3. Soit S un ensemble. On dit que S est un ensemble $V-Dm$ s'il existe une composition I telle que $H(I) = S$. La classe des ensembles $V-Dm$ est notée $\mathcal{VD}m$.

Soit S un ensemble d'entiers. On pose

$$\Pi_{S,n} = \sum_{I \vDash n,\ V \cup Dm(I) = S} \mathbf{R}_I. \tag{2.45}$$

Notons $E = vect(\Pi_{S,n})_{S \in \mathcal{VD}m,\ n \in \mathbb{N}}$. Montrons que E est une sous-algèbre de **Sym**, dont la loi produit est donnée par :

$$\begin{array}{rl} \Pi_{S_1,n}\Pi_{S_2,m} = & \Pi_{S_1 \cup S_2[n], n+m} + \Pi_{S_1 \cup \{n\} \cup S_2[n], n+m} \\ & + \Pi_{S_1 \cup \{n+1\} \cup S_2[n], n+m} + \Pi_{S_1 \cup \{n\} \cup \{n+1\} \cup S_2[n], n+m} \end{array}. \tag{2.46}$$

Démonstration. Soient I une composition de n et J une composition de m, telles que $H(I) = S_1$ et $H(J) = S_2$. Par construction,

$$\begin{array}{l} H(I) \cup H(J)[n] \subset H(IJ) \subset H \cup \{n,\ n+1\} \cup H(J)[n], \\ H(I) \cup H(J)[n] \subset H(I \lhd J) \subset H(I) \cup \{n,\ n+1\} \cup H(J)[n]. \end{array} \tag{2.47}$$

Ainsi, $\mathbf{R}_{IJ}$ et $\mathbf{R}_{I \lhd J}$ sont des termes du côté droit de (2.45). Réciproquement, soit $\mathbf{R}_K$ apparaissant dans le membre de droite de (2.45). La composition K admet une unique factorisation $K = IJ$ ou bien $K = I \lhd J$, avec $I \vDash n$ et $J \vDash m$. Or, on a :

$$\begin{array}{lcl} H(I) & = & H(K) \cap \{1, \cdots, n-1\}, \text{ et} \\ H(J)[n] & = & H(K) \cap \{n+2, \cdots, n+m\}. \end{array} \tag{2.48}$$

Comme $H(K) \cap \{1, \cdots, n-1\} = S_1$ et $H(K) \cap \{n+2, \cdots, n+m\} = S_2[n]$, il en résulte que $\mathbf{R}_I$ est dans $\Pi_{S_1,n}$ et $\mathbf{R}_J$ dans $\Pi_{S_2,m}$. □

Dans les preuves précédentes, la fonction f vérifiait les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \bullet\ \forall I \vDash n,\ f(I) \subset \{2, \cdots,\ n-1\}, & \\ & -f(I) \cup f(J)[|I|] \subset f(IJ) \subset f(I) \cup \{n,\ n+1\} \cup f(J)[|I|], \\ & -f(I) \cup f(J)[|I|] \subset f(I \lhd J) \subset f(I) \cup \{n,\ n+1\} \cup f(J)[|I|], \\ \bullet\ \text{si } K = IJ, K \vDash n+m,\ I \vDash n,\ \text{alors} & \\ & -f(K) \cap \{2, \cdots, n-1\} = f(I), \\ & -\text{et } f(K) \cap \{n+2, \cdots, n+m\} = f(J)[n], \\ \bullet\ \text{si } K = I \lhd J, K \vDash n+m,\ I \vDash n,\ \text{alors} & \\ & -f(K) \cap \{2, \cdots, n-1\} = f(I), \\ & -\text{et } f(K) \cap \{n+2, \cdots, n+m\} = f(J)[n]. \end{array} \tag{2.49}$$

Démontrons qu'une fonction f vérifiant les conditions (2.49) permet toujours de construire une sous-algèbre de **Sym**.

2.2.2.3 Une construction générale

Théorème 2.2.4. *Soit une fonction f vérifiant les conditions* (2.49)*. Posons :*

$$\Pi_{S,n} = \sum_{f(I)=S,\ I \vDash n} \boldsymbol{R}_I. \tag{2.50}$$

*Alors $V := vect(\Pi_{S,n})_{S \in Im(f),\ n \in \mathbb{N}}$ est une sous-algèbre de **Sym**, et la loi produit est donnée par :*

$$\Pi_{S_1,n}\Pi_{S_2,m} = \sum_{S_1 \cup S_2[n] \subset S \subset S_1 \cup \{n,\ n+1\} \cup S_2[n]} \Pi_{S,n+m}. \tag{2.51}$$

Démonstration. Soient S_1 et S_2 des éléments de $Im(f)$ et soient n et m deux entiers.

On a :

$$\Pi_{S_1,n}\Pi_{S_2,m} = \sum_{\substack{I \vDash n,\ f(I) = S_1 \\ J \vDash m,\ f(J) = S_2}} \mathbf{R}_I \mathbf{R}_J. \tag{2.52}$$

Donc :

$$\Pi_{S_1,n}\Pi_{S_2,m} = \sum_{\substack{I \vDash n,\ f(I) = S_1 \\ J \vDash m,\ f(J) = S_2}} \mathbf{R}_{IJ} + \mathbf{R}_{I \lhd J}. \tag{2.53}$$

Soient $\mathbf{R}_I$ dans $\Pi_{S_1,n}$ et $\mathbf{R}_J$ dans $\Pi_{S_2,m}$. Les ensembles $f(IJ)$ et $f(I \lhd J)$ étant compris entre l'ensemble $f(I) \cup f(J)[|I|]$ et l'ensemble $f(I) \cup \{|I|,\ |I|+1\} \cup f(J)[|I|]$, on en déduit que $\mathbf{R}_{IJ}$ et $\mathbf{R}_{I \lhd J}$ apparaissent dans le membre droit de l'équation (2.51).

Réciproquement, soit $\mathbf{R}_K$ un élément du membre droit de (2.51). K est donc une composition de l'entier $n+m$, et l'ensemble $f(K) \cap \{2, \cdots,\ n-1\}$ est indépendant de K et est égal à S_1. De

même, $f(K) \cap \{n+2, \cdots,\ n+m-1\}$ est indépendant de K et vaut $S_2[n]$. De plus, il existe un unique couple (I, J) avec $I \vDash n$ et $J \vDash m$, tel que $K = IJ$ ou bien $K = I \lhd J$. Comme on a

$$f(K) \cap \{2, \cdots,\ |I|-1\} = f(I) \tag{2.54}$$

et

$$f(K) \cap \{2+|I|, \cdots,\ |J|+|I|-1\} = f(J)[|I|], \tag{2.55}$$

il en résulte que $f(I) = S_1$ et $f(J) = S_2$, et on en conclut que l'équation (2.51) est vérifiée. □

Remarque 22. Il est possible de généraliser le résultat précédent de deux façons. On peut remplacer l'ensemble $\{2, \cdots,\ n-1\}$ par $\{p, \cdots,\ n-q\}$. Dans ce cas, on remplace

$$S_1 \cup S_2[n] \subset S \subset S_1 \cup \{n,\ n+1\} \cup S_2[n] \tag{2.56}$$

par

$$S_1 \cup S_2[n] \subset S \subset S_1 \cup \{n-q+1, \cdots,\ n+p\} \cup S_2[n] \tag{2.57}$$

dans les conditions (2.51).

On peut aussi considérer deux fonctions f et g vérifiant (2.51). Alors on peut définir la famille :

$$\Pi_{S,T,n} = \sum_{f(I)=S,\ g(I)=T,\ I \vDash n} \mathbf{R}_I. \tag{2.58}$$

L'espace vectoriel engendré par la famille sera de nouveau une sous-algèbre de **Sym**, les preuves étant essentiellement les mêmes.

2.2.3 Les différentes sous-algèbres construites à partir de statistiques

Grâce au théorème 2.2.4, on en déduit que les sommes construites à partir des ensembles de pics, vallées, doubles montées, doubles descentes sont bien des sous-algèbres. Étudions leurs propriétés.

2.2.3.1 Une transformation fondamentale sur les compositions

Considérons la transposition ^{t} sur les compositions définie par

$$\begin{array}{rccc} {}^t : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & I & \longmapsto & I^t, \end{array} \tag{2.59}$$

où I^t est la composition des descentes du complémentaire de $\mathrm{des}(I)$.

Exemple 85. La transposée de la composition $I = (4, 1, 3, 2)$ est $(1, 1, 1, 3, 1, 2, 1)$ (*voir* figure 2.17).

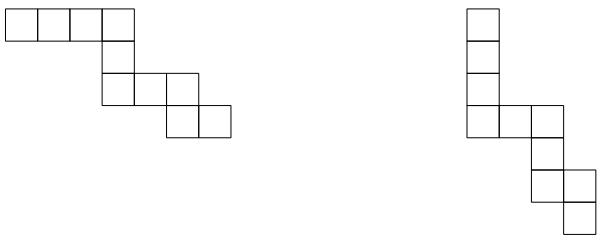


FIGURE 2.17 – Ruban de la composition $(4, 1, 3, 2)$ et sa transposée.

La transposition échangeant montées et descentes d'une composition I, on en déduit qu'il en est de même pour les pics et vallées, et doubles montées et doubles descentes. De plus, on a :

$$\begin{array}{lcl} (IJ)^t & = & I^t \lhd J^t \\ (I \lhd J)^t & = & I^t J^t \end{array}.$$

Ainsi, l'application

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbf{Sym} & \longrightarrow & \mathbf{Sym} \\ & \mathbf{R}_I & \longmapsto & \mathbf{R}_{I^t} \end{array} \tag{2.60}$$

est un isomorphisme d'algèbre. L'algèbre des pics et l'algèbre des vallées sont donc isomorphes.

2.2.3.2 L'algèbre des pics

Pour une étude de l'algèbre des pics, on pourra consulter [BHT04].

2.2.3.3 L'algèbre des doubles descentes

On définit :

$$\Pi_{S,n} = \sum_{Dd(I)=S,\ I\vDash n} \mathbf{R}_I. \tag{2.61}$$

Posons

$$\mathcal{F}_{dd} := (\Pi_{S,n})_{S\subset\{2,\cdots,n-1\},n\in\mathbb{N}}, \tag{2.62}$$

et

$$\mathcal{A}_{dd} := vect(\mathcal{F}_{dd}). \tag{2.63}$$

La fonction Dd vérifiant (2.49), $\mathcal{A}_{dd}$ est alors une algèbre. Elle est appelée algèbre des doubles descentes.

Proposition 2.2.5. *La suite des dimensions des composantes homogènes de $\mathcal{A}_{dd}$ est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_0 et u_1 sont égaux à 1, et où u_n est le nombre de mots binaires sans facteur* 101 *et de longueur $n-2$. On la trouve dans [Slo] au numéro A*005251*.*

Démonstration. Considérons la fonction f_n :

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \{2,\cdots,n-1\} & \to & \{0,1\}^{n-2} \\ & & S\subset\{2,\cdots,n-1\} & \mapsto & \mathbf{1}_S(2)\cdots\mathbf{1}_S(i)\cdots\mathbf{1}_S(n-1) \end{array} \tag{2.64}$$

Exemple 86. Pour $S=\{2,3,5\}\subset\{2,3\cdots,8\}$, on a $f_9(S)=1101000$.

Par construction, f_n est injective. Supposons qu'il existe une composition I de l'entier n telle que $S := Dd(I)$ et $f_n(S)$ contienne le facteur 101 avec 0 en position $i+1$. Alors i n'est pas double descente dans I, mais $i-1$ l'est, donc $i-1$ est une descente. Or $i+1$ est une double descente donc i est aussi une descente. On en déduit alors que i est en fait une double descente, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Réciproquement, soit un mot w de taille $n-2$ ne contenant pas 101. Construisons une composition I de n telle que $f_n^{-1}(w)=Dd(I)$. Posons $S=f_n^{-1}(w)$. On définit P de la façon suivante :

$$P=\begin{cases} \{i\in\{2,\cdots,n-1\}|i\notin S,\ i+1\in S\}\cup\{1\} & \text{si } 2\in S \\ \{i\in\{2,\cdots,n-1\}|i\notin S,\ i+1\in S\} & \text{sinon} \end{cases}, \tag{2.65}$$

et $T = S\sqcup P$. Alors T est l'ensemble de descentes d'une composition $I\vDash n$. Montrons que $Dd(I)=S$. Soit i dans S. Supposons que $i-1$ appartienne à S. Alors i et $i-1$ sont dans T, donc i est une double descente de I. Sinon, $i-1$ n'est pas dans S et par construction de P, $i-1$ est dans P donc dans T. Ainsi, i est encore une double descente de I. Par conséquent $S\subset Dd(I)$. Inversement, soit $i+1$ dans P. Montrons que $i+1$ n'est pas dans $Dd(I)$. On sait que $i+2$ est dans S par construction de P. Or, $f_n(S)$ ne contient pas le facteur 101, il en résulte que i n'est pas dans S. La valeur $i+1$ n'étant pas dans S, i n'appartient donc pas à $T=\mathrm{des}(I)$. En particulier, $i+1$ n'est pas dans $Dd(I)$ et par suite $Dd(I)=S$. □

Montrons que $\mathcal{A}_{dd}$ est libre en donnant une famille génératrice algébriquement indépendante. On rappelle que $\mathbf{R}_{1^n}=\mathbf{R}_{11\cdots1}$. Considérons la famille

$$\mathcal{F}=\mathbf{R}_1\cup\{\mathbf{R}_{1^n},\ n\geq 3\}, \tag{2.66}$$

et notons $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ l'algèbre engendrée par celle-ci. Comme $\Pi_{\{2,\cdots,n-1\},n}=\mathbf{R}_{1^n}$, la famille $\mathcal{F}$ est incluse dans $\mathcal{A}_{dd}$ et donc que $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}\subset\mathcal{A}_{dd}$. L'algèbre $\mathcal{A}_{dd}$ étant engendrée par $(\Pi_{S,n})$, il suffit de prouver que les $\Pi_{S,n}$ sont appartiennent à $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

Démonstration. La récurrence sera double : une première sur la taille de la composante homogène, une autre sur le cardinal des complémentaires des ensembles de doubles descentes. Donnons les

éléments de $\mathcal{F}_{dd}$ pour $n \leq 4$:

$$\begin{array}{l} \Pi_{\emptyset,0} = 1,\ \Pi_{\emptyset,1} = \mathbf{R}_1 \\ \Pi_{\emptyset,2} = \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1^2 \\ \Pi_{\{2\},3} = \mathbf{R}_{111} \\ \Pi_{\emptyset,3} = \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_1^3 - \mathbf{R}_{1^3} \\ \Pi_{\{2,3\},4} = \mathbf{R}_{1^4} \\ \Pi_{\{2\},4} = \mathbf{R}_{112} = \mathbf{R}_{1^3}\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_{1^4} \\ \Pi_{\{3\},4} = \mathbf{R}_{211} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_{1^3} - \mathbf{R}_{1^4} \\ \Pi_{\emptyset,4} = \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_{13} + \mathbf{R}_{31} + \mathbf{R}_{22} + \mathbf{R}_{121} \\ \qquad = \mathbf{R}_1^4 - \mathbf{R}_{1^3}\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1\mathbf{R}_{1^3} + \mathbf{R}_{1^4} \end{array} , \tag{2.67}$$

pour les autres $S \subset \{2,3\}$ et $n \leq 4$, on a $\Pi_{S,n} = 0$. Supposons que pour $m \leq n-1$ on ait $\Pi_{S,m}$ dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Soit $S \subset \{2, \cdots, n-1\}$ et $n \geq 5$. Effectuons une récurrence sur p, le nombre de 0 dans $f_n(S)$. Si $p = 0$, alors $S = \{2, \cdots, n-1\}$. Or $\Pi_{\{2,\cdots,n-1\},n} = R_{1^n}$. Donc $\Pi_{S,n}$ est bien dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Pour $f_n(S)$ contenant le facteur 101, nous savons que S n'est pas un ensemble de doubles descentes, donc $\Pi_{S,n} = 0$. Si $f_n(S)$ ne contient pas 101 et $p = 1$, la taille de $f_n(S)$ étant plus grande que 3, le 0 doit être en position 1 ou $n-2$. On a alors $S = \{3, \cdots, n-1\}$, ou $S = \{2, \cdots, n-2\}$. Comme on a :

$$\begin{array}{l} \Pi_{\{3,\cdots,n-1\},n} = \mathbf{R}_{21^{n-2}} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_{1^{n-1}} - \mathbf{R}_{1^n} \\ \Pi_{\{2,\cdots,n-2\},n} = \mathbf{R}_{1^{n-2}2} = \mathbf{R}_{1^{n-1}}\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_{1^n} \end{array} , \tag{2.68}$$

on en déduit que $\Pi_{S,n}$ est bien dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

Supposons maintenant $p \geq 2$. Si $S = \{3, \cdots, n-2\}$ on a :

$$\begin{array}{ll} \Pi_{S,n} & = \mathbf{R}_{21^{n-4}2} \\ & = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_{1^{n-2}}\mathbf{R}_1 - \Pi_{\{3,\cdots,n-1\},n} - \Pi_{\{2,\cdots,n-2\},n} - \mathbf{R}_{1^n} \\ & = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_{1^{n-2}}\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1\mathbf{R}_{1^{n-1}} - \mathbf{R}_{1^{n-1}}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{1^n} \end{array} . \tag{2.69}$$

Nous constatons alors que pour tout les S sauf le précédent, $f_n(S)$ contient le facteur 00. En effet, $f_n(S)$ ne contient pas 101, $|f_n(S)|_0$ est supérieur ou égal à 2, et S est différent de $\{3, \cdots, n-2\}$. Donc il existe un 0 dans $f_n(S)$ à une position i strictement comprise entre 1 et n–2. Par conséquent, un de ses voisins est aussi un 0. Il en résulte que $f_n(S) = w = w_1 00 w_2$. Notons respectivement m_1 et m_2 la taille de w_1 et de w_2 augmentées de 2, et S_1 et S_2 les ensembles $f_{m_1}^{-1}(w_1)$ et $f_{m_2}^{-1}(w_2)$. Comme w ne contient pas 101, les facteurs w_1 et w_2 de w n'en contiennent pas à fortiori. Donc S_1 et S_2 sont des ensembles de doubles descentes. Les sommes Π_{S_1,m_1} et Π_{S_2,m_2} sont alors non nulles. On a aussi : $S = S_1 \cup S_2[m_1]$. Par récurrence sur n, on sait que Π_{S_1,m_1} et Π_{S_2,m_2} sont dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. La loi produit donne :

$$\begin{array}{ll} \Pi_{S_1,m_1}\Pi_{S_2,m_2} & = \Pi_{S_1 \cup S_2[m_1]} + \Pi_{S_1 \cup S_2[m_1] \cup \{m_1\}} \\ & \quad + \Pi_{S_1 \cup S_2[m_1] \cup \{m_1+1\}} + \Pi_{S_1 \cup S_2[m_1] \cup \{m_1,\ m_1+1\}} \end{array} . \tag{2.70}$$

Donc on a :

$$\begin{array}{ll} \Pi_{S_1 \cup S_2[m_1]} & = \Pi_{S_1,m_1}\Pi_{S_2,m_2} - \Pi_{S_1 \cup S_2[m_1] \cup \{m_1\}} \\ & \quad - \Pi_{S_1 \cup S_2[m_1] \cup \{m_1+1\}} - \Pi_{S_1 \cup S_2[m_1] \cup \{m_1,\ m_1+1\}} \end{array} . \tag{2.71}$$

Par récurrence sur p, on sait que tous les termes du membre droit de (2.71) sont dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Donc $\Pi_{S_1 \cup S_2[m_1]}$ appartient à $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Par récurrence sur n, il en découle que tout élément de $\mathcal{F}_{dd}$ est dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Les deux algèbres $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{A}_{dd}$ sont donc égales. □

Théorème 2.2.6. *L'algèbre des doubles descentes est libre, et est engendrée par la famille*

$$\mathcal{F} = \mathbf{R}_1 \cup \{\mathbf{R}_{1^n},\ n \geq 3\}. \tag{2.72}$$

Corollaire 2.2.7. *La série génératrice des ensembles de doubles descentes est égale à :*

$$f(t) = \frac{1}{1 - t - \frac{t^3}{1-t}}. \tag{2.73}$$

Remarque 23. Grâce à la transposition des compositions, il en résulte des résultats similaires en considérant la fonction $f = Dm$.

2.2.3.4 L'algèbre $\mathcal{A}_{p\cup dd}$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, et S un ensemble fini inclus dans $\{2,\cdots,n-1\}$, on définit :

$$\Pi_{S,n} = \sum_{P\cup Dd(I)=S, I\vDash n} \mathbf{R}_I, \tag{2.74}$$

et notons $\mathcal{A}_{p\cup dd}$ l'algèbre engendrée par la famille $(\Pi_{S,n})$.

Proposition 2.2.8. *Soit n un entier et S un sous-ensemble de $\{2,\cdots,n-1\}$. Alors,*

$$\Pi_{S,n} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_J, \tag{2.75}$$

où J est égale à $C(S[-1])$.

Démonstration. Cherchons les compositions I de n telles que $P\cup Dd(I) = S$. L'ensemble S est nécessairement égal à $\mathrm{des}(I)\backslash\{1\}$. Or, il existe exactement deux compositions I de n telles que $P\cup Dd(I) = S$, la première ayant comme ensemble de descentes S et la seconde $S\cup\{1\}$. Donc :

$$\Pi_{S,n} = \mathbf{R}_{C(S)} + \mathbf{R}_{C(S\cup\{1\})}. \tag{2.76}$$

En factorisant par $\mathbf{R}_1$ à gauche, on obtient

$$\Pi_{S,n} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_J, \tag{2.77}$$

avec la composition J égale à $C(S[-1])$. □

La famille $\mathcal{F} := (1)\cup(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_I)_{I\in\mathcal{C}}$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des compositions d'entiers, est donc une base linéaire de $\mathcal{A}_{p\cup dd}$. Pour toute composition J, posons :

$$\mathbf{S}^J := \sum_{\mathrm{des}(I)\subset\mathrm{des}(J)} \mathbf{R}_I. \tag{2.78}$$

Dans cette base, le produit pour deux compositions I et J est donné par

$$\mathbf{S}^I\mathbf{S}^J = \mathbf{S}^{IJ}. \tag{2.79}$$

La famille $\mathcal{F}' := (\mathbf{S}^{1I})_{I\in\mathcal{C}}$ est alors une autre base de $\mathcal{A}_{dd}$.

Ainsi, des générateurs algébriquement indépendants de $\mathcal{A}_{p\cup dd}$ sont donnés par l'ensemble $\{\mathbf{S}^{1I}|\ I$ ne contient pas de $1\}$.

Remarque 24. Pour une composition I de l'entier n, on a

$$V\cup Dm(I) = \{2,\cdots,n-1\}\backslash P\cup Dd(I). \tag{2.80}$$

Ainsi, en remplaçant la fonction $P\cup Dd$ par $V\cup Dm$, l'algèbre obtenue est la même.

2.2.3.5 L'algèbre $\mathcal{A}_{v\cup dd}$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, et S un ensemble fini inclus dans $\{2,\cdots,n-1\}$, posons :

$$\Pi_{S,n} = \sum_{\substack{I\vDash n\\ V\cup Dd(I)=S}} \mathbf{R}_I, \tag{2.81}$$

et notons $\mathcal{A}_{v\cup dd}$ l'algèbre engendrée par la famille $(\Pi_{S,n})$.

Proposition 2.2.9. *Soit n un entier positif et $S\subset\{2,\cdots,n-1\}$. Alors :*

$$\Pi_{S,n} = \mathbf{R}_J\mathbf{R}_1, \tag{2.82}$$

où J est égale à $C(S[-1])$.

Démonstration. Soit une composition I de l'entier n telle que $V \cup Dd(I) = S$. Pour tout i dans S, la position $i-1$ est une descente de I. Posons $T = \{i-1|\ i \in S\}$. T est alors un sous-ensemble de des(I). Montrons que $T = \text{des}(I)\backslash\{n-1\}$. Les éléments de T étant strictement plus petits que $n-1$, il suffit de prouver que des$(I)\backslash\{n-1\} \subset T$. Prenons i dans des$(I)\backslash\{n-1\}$. Donc $i+1$ est soit une vallée, soit une double descente. Par suite, $i+1$ est dans S et donc i appartient à T. Ainsi, il existe exactement deux compositions I telles que $V \cup Dd(I) = S$, la première ayant comme ensemble de descentes T, la seconde $T \cup \{n-1\}$. On obtient alors :

$$\Pi_{S,n} = \mathbf{R}_{C(T)} + \mathbf{R}_{C(T\cup\{n-1\})}. \tag{2.83}$$

Et en factorisant par la droite par $\mathbf{R}_1$:

$$\Pi_{S,n} = \mathbf{R}_J \mathbf{R}_1, \tag{2.84}$$

avec $J = C(T) = C(S[-1])$. □

Donc une base linéaire de $\mathcal{A}_{v\cup dd}$ est donnée par $(1) \cup (\mathbf{R}_I\mathbf{R}_1)_{I\in\mathcal{C}}$ où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des compositions d'entiers, et l'ensemble $\{\mathbf{S}^{I1}|\ I$ ne contient pas de $1\}$ en est une base algébrique.

Remarque 25. Pour une composition I de l'entier n, nous avons :

$$P \cup Dm(I) = \{2, \cdots, n-1\}\backslash V \cup Dd(I). \tag{2.85}$$

Donc les fonctions $P \cup Dm$ et $V \cup Dd$ définissent les mêmes algèbres.

2.2.3.6 L'algèbre $\mathcal{A}_{P\cup V}$

Pour tout entier positif n et S un ensemble fini inclus dans $\{2, \cdots, n-1\}$, posons :

$$\Pi_{S,n} = \sum_{\substack{I\vDash n \\ P\cup V(I)=S}} \mathbf{R}_I, \tag{2.86}$$

et notons $\mathcal{A}_{P\cup V}$ l'algèbre engendrée par la famille $(\Pi_{S,n})$.

Proposition 2.2.10. *Soit n un entier positif et $S \subset \{2, \cdots, n-1\}$. Alors :*

$$\Pi_{S,n} = \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_{I^t}, \tag{2.87}$$

avec $P \cup V(I) = S$.

Démonstration. Cherchons les compositions I de n telles que $P \cup V(I) = S$. Pour $S = \emptyset$, la composition I ne contient que des doubles montées, ou que des doubles descentes. Dans ce cas,

$$\Pi_{\emptyset,n} = \mathbf{R}_{1^n} + \mathbf{R}_n. \tag{2.88}$$

Sinon, notons dans l'ordre croissant $s_1, \cdots, s_r$ les éléments de S. Seuls deux statuts sont possibles pour la position de s_1 : soit il s'agit d'une vallée, soit il s'agit d'un pic. Or, dans une composition, pics et vallées alternent. Il en découle les deux possibilités suivantes :

— $P(I) = \{a_i \in S|i$ est pair$\}$ et $V(I) = \{a_i \in S|i$ est impair$\}$;
— ou $P(I) = \{a_i \in S|i$ est impair$\}$ et $V(I) = \{a_i \in S|i$ est pair$\}$.

Exemple 87. On représente sur la figure 2.18 les compositions dont l'ensemble $P \cup V$ est égal à l'ensemble $E = \{4, 6, 8, 9\}$.

Mais une composition I est caractérisée par son ensemble de pics P et de vallées V. En effet, rajoutons artificiellement les valeurs 0 et n comme suit :

— si $\min(P) < \min(V)$, alors on ajoute 0 à V. Dans le cas contraire, on le met dans P,
— si $\max(P) > \max(V)$, alors on ajoute n à D. Sinon, on l'ajoute à P.

Soit i une position entre 1 et $n-1$. Plusieurs cas peuvent alors se présenter : si i est dans P ou V, nous savons si i est une descente ou non. Sinon, il existe un unique couple (a, a') dans $P \times V$ tel que l'intervalle ouvert (a, a') ne contienne aucun élément de $P \cup V$. On en déduit que i est une descente si et seulement si $a < a'$. En particulier, P et V déterminent bien une seule composition de descentes. De plus, si nous considérons la composition I' telle que $P(I') = V$ et $V(I') = P$, nous constatons que nous obtenons $I' = I^t$. Ainsi, le problème initial admet exactement deux solutions. Donc :

$$\Pi_{S,n} = \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_{I^t}, \tag{2.89}$$

avec $P \cup V(I) = S$. □

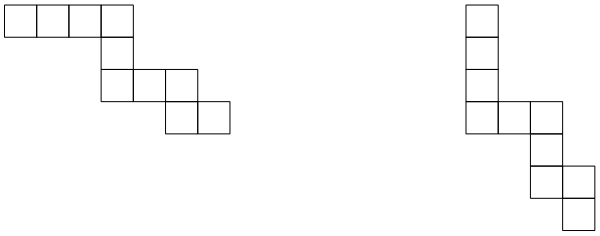


FIGURE 2.18 – Rubans ayant comme ensemble de pics et vallées E.

Donc une base linéaire est donnée par $(1)\cup(\mathbf{R}_I+\mathbf{R}_{I^t})_{I\in\mathcal{C}'}$ où $\mathcal{C}'$ est l'ensemble des compositions d'entiers commençant par 1.

Remarque 26. Connaissant les dimensions des composantes homogènes de l'algèbre $\mathcal{A}_{P\cup V}$, pour montrer si elle est libre, on pourrait, comme précédemment, exhiber une famille algébriquement indépendante engendrant cette algèbre. Si elle existe, le nombre ces générateurs en degré n est nécessairement égal au $(n-1)^{\text{e}}$ nombre de Fibonacci. En effet, si on note f la série de Hilbert de $\mathcal{A}_{P\cup V}$, dans l'hypothèse où elle est libre, il existe une fonction g telle que :

$$f = \frac{1}{1-g}. \tag{2.90}$$

Or,

$$f = 1 + t + \frac{t^2}{1-2t}. \tag{2.91}$$

D'où

$$1 + t + \frac{t^2}{1-2t} = \frac{1}{1-g}. \tag{2.92}$$

Ainsi,

$$\frac{1-t-t^2}{1-2t} = \frac{1}{1-g}. \tag{2.93}$$

Donc, après simplification,

$$g = \frac{t-t^2}{1-t-t^2}. \tag{2.94}$$

Or, il s'agit de la série génératrice des nombres de Fibonacci. Il en résulte que l'on connaît le nombre de générateurs à trouver si cette algèbre est libre.

2.2.4 Récapitulatif

algèbre	ensemble considéré	base linéaire	algèbre libre
Sym	descentes	$(\mathbf{R}_I)$	oui
algèbre de pics	pics	[BHT04]	[BHT04]
$\mathcal{A}_{dd}$	doubles descentes		oui
$\mathcal{A}_{p\cup dd}$	$P\cup Dd$	$(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_I)$	oui
$\mathcal{A}_{v\cup dd}$	$V\cup Dd$	$(\mathbf{R}_I\mathbf{R}_1)$	oui
$\mathcal{A}_{P\cup V}$	$P\cup V$	$(\mathbf{R}_I+\mathbf{R}_{I^t})$	???

(2.95)

Remarque 27. Concernant l'algèbre des pics, il a été montré dans [BHT04] qu'une famille génératrice algébriquement indépendante est donnée par :

$$\mathbf{T}_{2k+1} = \mathbf{R}_{12^k}. \tag{2.96}$$

Ainsi, une base linéaire est donnée par $(\mathbf{T}_I)$ où

$$\mathbf{T}_I = \prod T_i, \tag{2.97}$$

où $I = (i_1, \cdots, i_r)$ est une composition dont toutes les parts sont impaires.

Concernant l'algèbre $\mathcal{A}_{P\cup V}$ on conjecture qu'elle est elle aussi libre.

Chapitre 3

Interprétations combinatoires de calculs algébriques

La suite des nombres de Genocchi et la suite des nombres d'Euler impairs sont reliées à travers leurs séries génératrices exponentielles. En effet, leurs séries génératrices exponentielles sont respectivement $x\tan(\frac{x}{2})$ et $\tan(x)$. Pourtant, il n'existe pas de modèle combinatoire simple expliquant cette relation ([Vie82]). À défaut de pouvoir expliquer ce phénomène, nous abordons l'étude de chacune de ces deux suites par une approche similaire, la démarche non commutative.

La suite des nombres de Genocchi a une généralisation : les polynômes de Gandhi. Introduits par ce dernier, Gandhi conjecturait que la spécialisation de ces polynômes à 1 est bien égale à un nombre de Genocchi. Cette conjecture a été prouvée indépendamment par Carlitz ([Car71]) et Riordan et Stein ([RS73]). Dumont dans [D$^+$74] définit les pistolets surjectifs, une interprétation combinatoire "capturant" bien un des aspects de la combinatoire des polynômes de Gandhi. Puis, ces polynômes ont été généralisés par Dumont et Foata ([DF76]), avec une interprétation combinatoire en termes de statistiques sur les pistolets. Han dans [Han96] à l'aide de pistolets valués trouve d'autres statistiques distribuées sur les pistolets surjectifs suivant les polynômes de Dumont-Foata. Vient ensuite une généralisation de Dumont ([Dum95]) avec six paramètres, dont Randrianarivony et Zeng donnent les propriétés combinatoires respectivement dans [Ran94] et [Zen96]. Plus récemment dans [HZ99], Han et Zeng ont défini un q-analogue de ces polynômes avec leurs propriétés combinatoires.

Concernant la suite des nombres d'Euler, de nombreuses classes combinatoires sont comptées par cette suite, par exemple les permutations alternantes ([And81]), les permutations de Jacobi ([Vie80]), les arbres binaires non plans décroissants et les permutations d'André ([FS$^+$73a]). On lui trouve des applications en topologie ([Arn92]), en théorie des ordres partiels ([Pur93], [HR98]).

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans le paragraphe 3.1, nous utilisons le formalisme des algèbres non commutatives pour étudier les polynômes de Gandhi et leurs généralisations : les polynômes de Dumont-Foata, une famille à six paramètres de Dumont, et un q-analogue de Han et Zeng. Ainsi, nous retrouvons dans un premier temps les interprétations combinatoires déjà connues. Puis, à la lueur du formalisme non commutatif, nous exhibons une famille d'interprétations combinatoires pour le q-analogue des polynômes de Gandhi.

Enfin, dans le paragraphe 3.3 nous revenons sur l'application bilinéaire $\mathbf{B}_{\max}$ de **FQSym** définie dans le paragraphe 1.7. Grâce à celle-ci et à ses variantes, nous unifions dans un cadre algébrique différentes bijections. En particulier, nous retrouvons une bijection de Viennot définie dans [Vie80] entre permutations alternantes et permutations de Jacobi. Pour conclure, nous donnons une nouvelle preuve concernant l'évaluation en -1 des polynômes eulériens.

3.1 Pistolets surjectifs et polynômes de Gandhi non commutatifs

3.1.1 Les polynômes de Gandhi

La suite des polynômes de Gandhi $(C_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1(x) & = & 1 \\ C_{n+1}(x) & = & \Delta(C_n(x)\cdot x^2) \quad \text{si } n\geq 1, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où pour toute fonction f, on a $\Delta(f)(x) = f(x+1)-f(x)$. L'opérateur Δ est appelé différence finie.

Exemple 88. Pour $n = 2, 3$, on a :

$$\begin{array}{lcl} C_2 & = & 2x+1, \\ C_3 & = & 6x^2+8x+3. \end{array} \tag{3.2}$$

Remarque 28. Une des difficultés de la combinatoire est de trouver une classe adaptée à une suite de polynômes à coefficients entiers positifs ou à une suite d'entiers. La méthode non commutative dans les cas favorables permet d'en obtenir une de manière aisée : la difficulté est déplacée, on cherche une algèbre dans laquelle la suite admet un analogue qui se projette naturellement sur elle. Si l'algèbre est bien choisie, l'interprétation combinatoire découlera alors de celle-ci.

Pour trouver une interprétation combinatoire des polynômes de Gandhi, nous considérons l'algèbre $\mathbb{K}\langle A\rangle$, avec $A = \{a_i, \text{ pour } i\in\mathbb{N}^*\}\cup\{a_\infty\}$.

Dans notre cas, il existe une projection naturelle Π de $\mathbb{K}\langle A\rangle$ sur $\mathbb{K}[x]$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} \Pi(a_\infty) & = & x, & \\ \Pi(a_i) & = & 1, & \text{pour } i\in\mathbb{N}^*, \\ \Pi(w_1\cdots w_n) & = & \Pi(w_1)\cdots\Pi(w_n). & \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Un analogue non commutatif d'un polynôme P de $\mathbb{K}[x]$ sera alors un élément $\mathbf{P}$ de $\mathbb{K}\langle A\rangle$ tel que :

$$\Pi(\mathbf{P}) = P. \tag{3.4}$$

De même, pour L un opérateur linéaire défini sur $\mathbb{K}[x]$, on dit que $\mathbf{L}$ est un analogue non commutatif de L, si $\Pi\circ\mathbf{L}$ est égal à $L\circ\Pi$. Comme les polynômes de Gandhi sont obtenus à l'aide de l'opérateur Δ, une façon d'obtenir des polynômes de Gandhi non commutatifs est de les construire à partir d'analogues non commutatifs de Δ. Ainsi, pour tout entier i, on définit l'opérateur $\mathbf{T}_i$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathbf{T}_i(a_\infty) & = & a_\infty + a_i, & \\ \mathbf{T}_i(a_j) & = & a_j & \text{pour } j \text{ dans } \mathbb{N}^*, \end{array}\right.$$

et étendus aux mots par morphisme d'algèbres. Pour tout entier positif i, on a en effet

$$T\circ\Pi = \Pi\circ\mathbf{T}_i, \tag{3.5}$$

où $T(f)(x) = f(x+1)$. Puis on pose :

$$\mathbf{\Delta}_i = \mathbf{T}_i - Id_{\mathbb{K}\langle A\rangle}. \tag{3.6}$$

Exemple 89. Pour $w = a_2a_2a_\infty a_4a_\infty a_\infty$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Delta}_6(w) & = & a_2a_2a_6a_4a_\infty a_\infty + a_2a_2a_\infty a_4a_6a_\infty + a_2a_2a_\infty a_4a_\infty a_6 \\ & & + a_2a_2a_6a_4a_6a_\infty + a_2a_2a_\infty a_4a_6a_6 + a_2a_2a_6a_4a_\infty a_6 + a_2a_2a_6a_4a_6a_6. \end{array} \tag{3.7}$$

Pour un mot w, les termes apparaissant dans $\mathbf{\Delta}_i(w)$ sont exactement ceux obtenus en remplaçant au moins un a_∞ de w par a_i. On définit alors les polynômes de Gandhi non commutatifs par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{C}_1 & = & 1, \\ \mathbf{C}_{n+1} & = & \mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{C}_n a_\infty a_\infty) \quad \text{si } n>1. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Exemple 90. En particulier, pour $n = 2, 3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_2 &= a_2a_2 + a_2a_\infty + a_\infty a_2,\\
\mathbf{C}_3 &= a_2a_2a_4a_4 + a_2a_2a_\infty a_4 + a_2a_2a_4a_\infty + a_2a_4a_4a_4 + a_2a_\infty a_4a_4\\
&\quad + a_2a_4a_\infty a_4 + a_2a_4a_4a_\infty + a_2a_4a_\infty a_\infty + a_2a_\infty a_4a_\infty\\
&\quad + a_2a_\infty a_\infty a_4 + a_4a_2a_4a_4 + a_\infty a_2a_4a_4 + a_4a_2a_\infty a_4\\
&\quad + a_4a_2a_4a_\infty + a_4a_2a_\infty a_\infty + a_\infty a_2a_4a_\infty + a_\infty a_2a_\infty a_4.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Les polynômes $\mathbf{C}_n$ sont des sommes de mots dont tous les coefficients sont égaux à 1. Ainsi, en les caractérisant, nous en déduisons une interprétation combinatoire en termes de mots vérifiant une propriété. Plusieurs constats peuvent alors être faits pour les éléments de $\mathbf{C}_n$:

— ils sont de longueur $2n-2$;
— leurs indices sont pairs ou égaux à ∞ ;
— tous les entiers de $\{2, 4, \cdots, 2n-2\}$ apparaissent en indice ;
— la position de leurs lettres est toujours inférieure à l'indice de celles-ci.

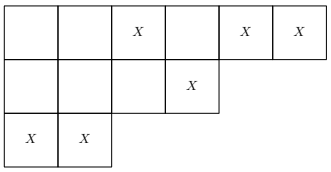
Ces mots ne sont pas sans rappeler les pistolets surjectifs, classe combinatoire introduite par Dumont dans ([D+74]) pour étudier les polynômes de Gandhi.

Définition 3.1.1. Un *pistolet surjectif* p de taille $2n$ est une application surjective de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ sur $\{2, 4, \ldots, 2n\}$ telle que pour tout i dans $\{1, \ldots, 2n\}$, $p(i) \geq i$.

L'ensemble des pistolets surjectifs de taille $2n$ est noté $\mathcal{P}_{2n}$. On représente un élément p de $\mathcal{P}_{2n}$ sous la forme d'un mot w de longueur $2n$, où la i-ième lettre de w est la valeur $p(i)$.

Exemple 91. Le mot $w = 226466$ représente le pistolet surjectif de taille 6 associant 1 à 2, 2 à 2, 3 à 6, 4 à 4, 5 à 6 et 6 à 6.

L'appellation pistolet provient d'une représentation de ces mots sous la forme



Représentation graphique du pistolet surjectif $p = 226466$.

Explicitons alors le lien entre $\mathcal{P}_{2n}$ et les mots présents dans $\mathbf{C}_n$. Soit $\mathcal{I}$ le plongement des pistolets surjectifs vers les mots définis de la manière suivante. Pour $p = p_1 \cdots p_{2n}$ un pistolet de taille $2n$, le mot correspondant $w = \mathcal{I}(p)$ est obtenu par :

— suppression des deux dernières lettres de p ;
— substitution de p_i par a_{p_i} si $p_i < 2n$;
— substitution de p_i par a_∞ sinon.

Exemple 92. Pour $p = 22646688$, on a

$$\mathcal{I}(p) = a_2a_2a_6a_4a_6a_6. \tag{3.10}$$

Si $p = 22$, alors $\mathcal{I}(p) = \epsilon$, le mot vide, et pour $p = 28648688$, on obtient

$$\mathcal{I}(p) = a_2a_\infty a_6a_4a_\infty a_6. \tag{3.11}$$

L'application $\mathcal{I}$ est injective : à partir d'un mot image $w = w_1 \cdots w_{2n}$, on reconstitue le pistolet correspondant en appliquant successivement les procédés suivants :

1. lire les indices de w,
2. remplacer les ∞ par la lettre $2n+2$,
3. rajouter deux fois la lettre $2n+2$ au bout du mot.

On note $\mathbf{p}$ le mot $\mathcal{I}(p)$. Reste à prouver que tout terme d'un $\mathbf{C}_n$ est associé à un pistolet surjectif.

Proposition 3.1.2. *Soit $n \geq 1$. Alors :*

$$\boldsymbol{C}_n = \sum_{p \in \mathcal{P}_{2n}} \mathbf{p} \tag{3.12}$$

Démonstration. Par récurrence sur n. La proposition est bien vérifiée au rang $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie au rang $n \geq 1$. Par définition de $\mathbf{C}_n$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}_{n+1} & = & \mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{C}_n a_\infty a_\infty) \\ & = & \mathbf{\Delta}_{2n}(\sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} \mathbf{p}\ a_\infty a_\infty) \\ & = & \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} \mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty). \end{array} \tag{3.13}$$

Soit p dans $\mathcal{P}_{2n}$. Alors les éléments de $\mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty)$ sont des mots associés à des pistolets surjectifs de longueur $2n+2$. En effet, il s'agit de mots $w = w_1 \cdots w_{2n}$, tels que :

— $w_i = a_{p(i)}$ si $p(i) < 2n$,

— $w_i = a_{2n}$ ou a_∞ sinon,

avec au moins un des w_i égaux à a_{2n}. Ces mots correspondent donc à des éléments p' de $\mathcal{P}_{2n+2}$ tels que :

— $p'(i) = p(i)$ si $p(i) < 2n$,

— $p'(i) = 2n$ ou $2n+2$, si $p(i) = 2n$.

Réciproquement, pour un pistolet surjectif p' de la forme précédente, le mot $\mathbf{p'}$ est bien un terme de $\mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty)$. Pour p dans $\mathcal{P}_{2n}$, notons alors

$$\mathcal{D}_p := \left\{ p' \in \mathcal{P}_{2n+2} \mid \begin{array}{ll} p'(i) = p(i) & \text{si } i < 2n+1 \text{ et } p(i) < 2n, \\ p'(i) = 2n \text{ ou } 2n+2 & \text{sinon} \end{array} \right\}, \tag{3.14}$$

il s'agit donc des pistolets en bijection avec les mots de $\mathbf{\Delta}(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty)$.

De plus,

$$\mathcal{P}_{2n+2} = \sqcup_{p\in\mathcal{P}_{2n}} \mathcal{D}_p. \tag{3.15}$$

En effet, soit p' dans $\mathcal{P}_{2n+2}$. En supprimant les deux dernières lettres, et en remplaçant les $2n+2$ par des $2n$, on obtient un pistolet surjectif p de taille $2n$ tel que $p' \in \mathcal{D}_p$. D'où :

$$\mathcal{P}_{2n+2} = \cup_{p\in\mathcal{P}_{2n}} \mathcal{D}_p. \tag{3.16}$$

Si p et p' sont deux pistolets surjectifs différents de taille $2n$, il existe un i tel que $p(i) \neq p'(i)$. Par symétrie, on peut supposer que $p(i) < p'(i) \leq 2n$. Alors pour tout q dans $\mathcal{D}_p$,

$$q(i) = p(i), \tag{3.17}$$

et pour q' dans $\mathcal{D}_{p'}$,

$$q'(i) \geq p'(i). \tag{3.18}$$

En particulier, $q(i) < q'(i)$. Il en résulte que $\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_{p'}$ est vide. Par suite,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}_{n+1} & = & \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} \mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty) \\ & = & \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} \sum_{p'\in\mathcal{D}_p} \mathbf{p'} \\ & = & \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n+2}} \mathbf{p}. \end{array} \tag{3.19}$$

□

Corollaire 3.1.3. *[D+74] Soit $n \geq 1$. Alors :*

$$C_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} x^{\max(p)}, \tag{3.20}$$

où $\max(p)$ *est le nombre de maximum de p plus petit que* $2n-2$. *On rappelle que dans ce contexte, un maximum est une position i pour laquelle pour tout j dans $\{1, \cdots, 2n\}$, $p(i)$ est supérieur ou égal à $p(j)$.*

Démonstration. Nous savons que

$$\Pi(\mathbf{C}_n) = C_n. \tag{3.21}$$

Or, $\Pi(w)$ compte les occurrences de la lettre a_∞ dans un mot w apparaissant dans $\mathbf{C}_n$. Mais il s'agit aussi du nombre de positions i inférieures à $2n-2$, où $p(i)$ est maximal, où p est le pistolet correspondant à w. Par suite,

$$C_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} x^{\max(p)}. \tag{3.22}$$

□

3.1.2 Les polynômes de Dumont-Foata

Dumont et Foata ont défini dans [DF76] une généralisation des polynômes de Gandhi et montrent que ces polynômes comptent diverses statistiques sur les pistolets surjectifs. Puis, Han trouve une autre statistique apparaissant naturellement dans ces polynômes, sa méthode permettant de retrouver les statistiques de Dumont et Foata ([Han96]). Montrons qu'avec l'approche non commutative, il est aussi possible de retrouver ces résultats.

Définition 3.1.4. Les polynômes de Dumont-Foata sont définis par récurrence :

$$\begin{cases} DF_1(x,y,z) &= 1 \\ DF_{n+1}(x,y,z) &= DF_n(x+1,y,z)(x+z)(x+y) - DF_n(x,y,z)x^2, \text{ si } n \geq 1. \end{cases} \tag{3.23}$$

Comme $DF_n(1,1,1) = \#\mathcal{P}_{2n}$, les variables x, y et z comptent des statistiques sur les pistolets surjectifs.

Exemple 93. Pour $n = 2, 3$, on a :

$$\begin{aligned} DF_2 &= xy + yz + zx, \\ DF_3 &= x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 \\ &\quad + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Remarque 29. Ces polynômes étant un raffinement des polynômes de Gandhi, pour trouver les statistiques correspondant à y et z, une des approches est de chercher une généralisation des $(\mathbf{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se projetant sur les $(DF_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.1.5. On définit les polynômes de Dumont-Foata non commutatifs par :

$$\begin{cases} \mathcal{DF}_1 &= 1 \\ \mathcal{DF}_{n+1} &= \mathbf{T}_{2n}(\mathcal{DF}_n)(a_\infty + za_{2n})(a_\infty + ya_{2n}) - \mathcal{DF}_n a_\infty a_\infty, \quad \text{si } n \geq 1. \end{cases} \tag{3.25}$$

Exemple 94. Pour $n = 2, 3$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{DF}_2 &= yz \cdot a_2a_2 + z \cdot a_2a_\infty + y \cdot a_\infty a_2, \\ \mathcal{DF}_3 &= y^2z^2 \cdot a_2a_2a_4a_4 + y^2z \cdot a_2a_2a_\infty a_4 + yz^2 \cdot a_2a_2a_4a_\infty \\ &\quad + yz^2 \cdot a_2a_4a_4a_4 + yz^2 \cdot a_2a_\infty a_4a_4 + yz \cdot a_2a_4a_\infty a_4 + z^2 \cdot a_2a_4a_4a_\infty \\ &\quad + z \cdot a_2a_4a_\infty a_\infty + z^2 \cdot a_2a_\infty a_4a_\infty + yz \cdot a_2a_\infty a_\infty a_4 \\ &\quad + y^2z \cdot a_4a_2a_4a_4 + y^2z \cdot a_\infty a_2a_4a_4 + y^2 \cdot a_4a_2a_\infty a_4 + yz \cdot a_4a_2a_4a_\infty \\ &\quad + y \cdot a_4a_2a_\infty a_\infty + yz \cdot a_\infty a_2a_4a_\infty + y^2 \cdot a_\infty a_2a_\infty a_4. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Remarque 30. Un des obstacles dans la recherche de statistiques sur une classe combinatoire est de trouver la répartition des paramètres sur les objets. Dans notre contexte, la connaissance des polynômes DF_n seuls donne quelques conditions pour "attacher" un monôme à un pistolet surjectif, mais le problème n'étant pas assez contraint, déterminer les bonnes statistiques peut alors s'avérer compliqué. Grâce au formalisme non commutatif, cette étape n'a pas lieu. En effet, nous constatons que le coefficient d'un mot de $\mathcal{DF}_n$ est un monôme en y et z. Nous savons donc associer à un pistolet ses statistiques en y et z. Il reste alors à poser une "bonne" définition pour ces dernières. Nous savons que les mots de $\mathcal{DF}_n$ sont de longueur $2n$–2. Ainsi, pour les mots de $\mathcal{DF}_{n+1}$, le paramètre y (*resp.* z) est incrémenté de 1 si a_{2n} est en position $2n$ (*resp.* $2n$–1). Nous retrouvons alors les points fixes introduits par Dumont et Foata, et les points surfixes définis par Han.

Définition 3.1.6. Soit p un pistolet surjectif de taille $2n$. Une position i est :
— un *point fixe* si $p(i) = i$,
— un *point surfixe* si $p(i) = i + 1$,
Si p est de taille $2n$, on note $\mathrm{fix}(p)$ (*resp.* $\mathrm{surfix}(p)$) le nombre de points fixes (*resp.* surfixes) de p plus petit que $2n-2$.

Exemple 95. Pour $p = 42468688$, les positions 2 et 6 sont des points fixes, 3 est un point surfixe. On a donc : $\mathrm{fix}(p) = 2$, $\mathrm{surfix}(p) = 1$.

Théorème 3.1.7. *([Han96]) Les polynômes de Dumont-Foata admettent comme interprétation combinatoire*

$$DF_n(x,y,z) = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} x^{\max(p)} y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)}. \tag{3.27}$$

Dans la suite, nous allons montrer que le théorème 3.1.7 découle de la définition des $(\mathcal{DF}_n)_{n\geq 1}$, un analogue non commutatif de la suite $(DF_n)_{n\geq 1}$.

Proposition 3.1.8. *Soit $n \geq 1$. Alors on a :*

$$\mathcal{DF}_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}. \tag{3.28}$$

Démonstration. Par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour les entiers $n \geq 1$. Par définition de $\mathcal{DF}_{n+1}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{DF}_{n+1} &= \mathbf{T}_{2n}(\mathcal{DF}_n)(a_\infty + z a_{2n})(a_\infty + y a_{2n}) - \mathcal{DF}_n a_\infty a_\infty \\ &= \mathbf{\Delta}_{2n}(\mathcal{DF}_n) a_\infty a_\infty + z\mathbf{T}_{2n}(\mathcal{DF}_n) a_{2n} a_\infty \\ &\quad + y\mathbf{T}_{2n}(\mathcal{DF}_n) a_\infty a_{2n} + yz\mathbf{T}_{2n}(\mathcal{DF}_n) a_{2n} a_{2n}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Par hypothèse de récurrence et linéarité des opérateurs :

$$\begin{aligned}\mathcal{DF}_{n+1} &= \textstyle\sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} \left(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{p}) a_\infty a_\infty + y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)+1} \mathbf{T}_{2n}(\mathbf{p}) a_{2n} a_\infty \right) \\ &\quad + \textstyle\sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} \left(y^{\mathrm{fix}(p)+1} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{T}_{2n}(\mathbf{p}) a_\infty a_{2n} + y^{\mathrm{fix}(p)+1} z^{\mathrm{surfix}(p)+1} \mathbf{T}_{2n}(\mathbf{p}) a_{2n} a_{2n} \right).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Étudions alors chacun de ces quatre termes pour p dans $\mathcal{P}_{2n}$.

— les pistolets surjectifs p' correspondant aux $\mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{p}) a_\infty a_\infty$ sont les éléments p' de $\mathcal{D}_p$ tels que $p'(2n-1) = p'(2n) = 2n+2$. Comme ces éléments ont exactement les mêmes points fixes et surfixes que p, il vient :

$$\mathbf{\Delta}_{2n}(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}) a_\infty a_\infty = \sum_{\substack{p'\in\mathcal{D}_p,\\ p'(2n-1)=2n+2,\\ p'(2n)=2n+2}} y^{\mathrm{fix}(p')} z^{\mathrm{surfix}(p')} \mathbf{p}'. \tag{3.31}$$

— les pistolets surjectifs p' associés aux mots de $\mathbf{T}_{2n}(\mathbf{p}) a_\infty a_{2n}$ sont les éléments p' dans $\mathcal{D}_p$ tels que $p'(2n-1) = 2n$, et $p'(2n) = 2n+2$. Dans ce cas, les éléments p' ont exactement un point fixe de plus que p. Donc :

$$y\mathbf{T}_{2n}(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}) a_\infty a_{2n} = \sum_{\substack{p'\in\mathcal{D}_p,\\ p'(2n-1)=2n+2,\\ p'(2n)=2n}} y^{\mathrm{fix}(p')} z^{\mathrm{surfix}(p')} \mathbf{p}'. \tag{3.32}$$

— Les pistolets surjectifs p' associés aux mots apparaissant dans $\mathbf{T}_{2n}(\mathbf{p}) a_{2n} a_\infty$ sont dans $\mathcal{D}_p$, et vérifient $p'(2n-1) = 2n$ et $p'(2n) = 2n+2$. Ils ont alors un point surfixe de plus que p. D'où :

$$z\mathbf{T}_{2n}(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}) a_{2n} a_\infty = \sum_{\substack{p'\in\mathcal{D}_p,\\ p'(2n-1)=2n,\\ p'(2n)=2n+2}} y^{\mathrm{fix}(p')} z^{\mathrm{surfix}(p')} \mathbf{p}'. \tag{3.33}$$

— Les pistolets surjectifs p' associés aux mots apparaissant dans $\mathbf{T}_{2n}(\mathbf{p}) a_{2n} a_{2n}$ sont dans $\mathcal{D}_p$, et vérifient $p'(2n-1) = 2n$ et $p'(2n) = 2n$. Ils ont donc un point fixe et un point surfixe de plus que p. Il en résulte que

$$yz\mathbf{T}_{2n}(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}) a_{2n} a_{2n} = \sum_{\substack{p'\in\mathcal{D}_p,\\ p'(2n-1)=2n,\\ p'(2n)=2n}} y^{\mathrm{fix}(p')} z^{\mathrm{surfix}(p')} \mathbf{p}'. \tag{3.34}$$

En sommant les équations (3.31), (3.32), (3.33), (3.34), on obtient :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{p'\in\mathcal{D}_p} y^{\mathrm{fix}(p')} z^{\mathrm{surfix}(p')} \mathbf{p}' &= \mathbf{\Delta}_{2n}(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}) a_\infty a_\infty + y\mathbf{T}_{2n}(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}) a_\infty a_{2n} \\ &\quad + z\mathbf{T}_{2n}(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}) a_{2n} a_\infty + yz\mathbf{T}_{2n}(y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}) a_{2n} a_{2n}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Par hypothèse de récurrence, par l'égalité précédente et l'égalité entre les ensembles $\mathcal{P}_{2n+2}$ et $\sqcup_{p\in\mathcal{P}_{2n}}\mathcal{D}_p$, on en déduit que :

$$\mathcal{DF}_{n+1} = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n+2}} y^{\mathrm{fix}(p)} z^{\mathrm{surfix}(p)} \mathbf{p}. \tag{3.36}$$

□

Le nombre de a_∞ dans $\mathbf{p}$ étant égal à $\max(p)$, on retrouve le théorème 3.1.7 en appliquant Π à l'identité (3.28).

Historiquement, cette interprétation combinatoire de Han n'est pas la première. En effet, Dumont et Foata dans [DF76] proposent une autre interprétation à l'aide d'une autre statistique.

Définition 3.1.9. Une *saillance* est une position i telle que pour $j<i$, on a $p(j)<p(i)$, et $p(i)$ n'est pas une valeur maximale.

Le nombre de saillances d'un élément p de $\mathcal{P}_{2n}$ est noté $\mathrm{sai}(p)$.

Théorème 3.1.10. *([DF76]) Soit $n\geq 1$. Alors :*

$$DF_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} x^{\max(p)} y^{\mathrm{sai}(p)} z^{\mathrm{fix}(p)}. \tag{3.37}$$

Constatons que le relèvement non commutatif $(\mathcal{DF}_n)_{n\geq 1}$ ne se projette pas naturellement sur cette interprétation. Montrons que l'on peut tout de même modifier ces polynômes à l'aide d'opérateurs de symétries pour retrouver le théorème 3.1.10.

Définition 3.1.11. Soit i un entier, et $w=w_1\cdots w_n$ un mot. Soit j (s'il existe) le premier entier tel que $w_j=a_\infty$ ou a_i. La symétrie S_i sur $\mathbb{K}\langle A\rangle$ est définie comme suit :

$$S_i(w) = \begin{cases} w_1\cdots w_{j-1}w_{n-1}w_{j+1}\cdots w_{n-2}w_j w_n & \text{si } j \text{ existe,}\\ w & \text{sinon.}\end{cases} \tag{3.38}$$

Exemple 96. Pour $w=a_2a_6a_4a_\infty a_\infty a_6$, on a $S_6(w)=a_2a_\infty a_4a_\infty a_6a_6$.

Définition 3.1.12. Les seconds polynômes de Dumont-Foata non commutatifs sont définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{DF}'_1 &= 1\\ \mathcal{DF}'_{n+1} &= S_{2n}\left(\mathbf{T}_{2n}(\mathcal{DF}'_n)(a_\infty+ya_{2n})(a_\infty+za_{2n})\right) - \mathcal{DF}'_n a_\infty a_\infty, \text{ si } n\geq 1.\end{cases} \tag{3.39}$$

Exemple 97. Pour $n=2,3$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{DF}'_2 &= yz\cdot a_2a_2 + y\cdot a_2a_\infty + z\cdot a_\infty a_2\\
\mathcal{DF}'_3 &= y^2z^2\cdot a_2a_2a_4a_4 + yz^2\cdot a_2a_2a_\infty a_4 + y^2z\cdot a_2a_2a_4a_\infty\\
&\quad + y^2z\cdot a_2a_4a_4a_4 + yz\cdot a_2a_\infty a_4a_4 + y^2z\cdot a_2a_4a_\infty a_4 + y^2\cdot a_2a_4a_4a_\infty\\
&\quad + y^2\cdot a_2a_4a_\infty a_\infty + y\cdot a_2a_\infty a_4a_\infty + yz\cdot a_2a_\infty a_\infty a_4\\
&\quad + yz^2\cdot a_4a_2a_4a_4 + z^2\cdot a_\infty a_2a_4a_4 + yz^2\cdot a_4a_2a_\infty a_4 + yz\cdot a_4a_2a_4a_\infty\\
&\quad + yz\cdot a_4a_2a_\infty a_\infty + z\cdot a_\infty a_2a_4a_\infty + z^2\cdot a_\infty a_2a_\infty a_4.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Proposition 3.1.13. *Soit $n\geq 1$, on a alors :*

$$\mathcal{DF}'_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} y^{\mathrm{sai}(p)} z^{\mathrm{fix}(p)} \mathbf{p}. \tag{3.41}$$

Démonstration. Par récurrence sur n. La proposition est vraie pour $n=1$. Supposons qu'elle est vraie pour $n\geq 1$. Par définition des polynômes $\mathcal{DF}'_n$,

$$\mathcal{DF}'_{n+1} = S_{2n}\left(\mathbf{T}_{2n}(\mathcal{DF}'_n)(a_\infty+ya_{2n})(a_\infty+za_{2n})\right) - \mathcal{DF}'_n a_\infty a_\infty. \tag{3.42}$$

La lettre a_{2n} n'étant pas présente dans les mots de $\mathcal{DF}'_n a_\infty a_\infty$, ce dernier est donc invariant par S_{2n}. Ainsi :

$$\mathcal{DF}'_{n+1} = S_{2n}\left(\mathbf{T}_{2n}(\mathcal{DF}'_n)(a_\infty+ya_{2n})(a_\infty+za_{2n}) - \mathcal{DF}'_n a_\infty a_\infty\right). \tag{3.43}$$

Par linéarité, on en déduit qu'il suffit de se fixer un pistolet surjectif p de taille $2n$. Posons

$$H(\mathbf{p}) := S_{2n}\left(y^{\mathrm{sai}(p)}z^{\mathrm{fix}(p)}\mathbf{T}_{2n}(\mathbf{p})(a_\infty + ya_{2n})(a_\infty + za_{2n}) - y^{\mathrm{sai}(p)}z^{\mathrm{fix}(p)}\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty\right). \tag{3.44}$$

Si $\mathbf{p} = ua_\infty v$, avec u sans a_∞ et de taille i, alors :

$$H(\mathbf{p}) \quad = \quad y^{\mathrm{sai}(p)}z^{\mathrm{fix}(p)}u(a_\infty + ya_{2n})\mathbf{T}_{2n}(va_\infty)(a_\infty + za_{2n}) - y^{\mathrm{sai}(p)}z^{\mathrm{fix}(p)}\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty. \tag{3.45}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}) \quad = \quad & y^{\mathrm{sai}(p)}z^{\mathrm{fix}(p)}u\big(a_\infty\mathbf{\Delta}_{2n}(va_\infty)a_\infty + ya_{2n}\mathbf{T}_{2n}(va_\infty)a_\infty \\ & +\ za_\infty\mathbf{T}_{2n}(va_\infty)a_{2n} + yza_{2n}\mathbf{T}_{2n}(va_\infty)a_{2n}\big) \end{aligned} \tag{3.46}$$

Les quatre termes de la somme correspondent en fait à une partition de $\mathcal{D}_p$ en quatre ensembles, suivant que la valeur de w_{i+1} et de w_{2n} valent a_{2n} ou a_{2n+2}. De plus, u ne contenant pas de a_∞, toutes les lettres de u sont strictement plus petites que la lettre w_{i+1}. En particulier, un nouveau facteur y apparaît si et seulement si $i+1$ est une saillance. De même, un nouveau facteur en z apparaît si et seulement si $2n$ est point fixe. Par suite :

$$H(\mathbf{p}) = \sum_{p'\in\mathcal{D}_p} y^{\mathrm{sai}(p')}z^{\mathrm{fix}(p')}\mathbf{p}'. \tag{3.47}$$

Si $\mathbf{p}$ n'a pas de a_∞, il ne contient pas de a_{2n}, il en découle que

$$H(\mathbf{p}) = y^{\mathrm{sai}(p)}z^{\mathrm{fix}(p)}\mathbf{p}\,(y\cdot a_{2n}a_\infty + z\cdot a_{2n}a_\infty + yz\cdot a_{2n}a_{2n})\,. \tag{3.48}$$

En particulier,

$$H(\mathbf{p}) = \sum_{p'\in\mathcal{D}_p} y^{\mathrm{sai}(p')}z^{\mathrm{fix}(p')}\mathbf{p}'. \tag{3.49}$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, les constats précédents et l'égalité $\sqcup_{p\in\mathcal{P}_{2n}}\mathcal{D}_p = \mathcal{P}_{2n+2}$, on en déduit la proposition. □

En appliquant Π à (3.41), nous retrouvons le théorème 3.1.10.

3.1.3 Une généralisation à six paramètres

Dans [Dum95], Dumont propose une généralisation à six paramètres et quelques conjectures la concernant. Indépendamment, Zeng dans [Zen96] et Randrianarivony dans [Ran94] prouvent ces conjectures. Dans cette section, on retrouve la relation de récurrence vérifiée par cette famille de polynômes.

Définition 3.1.14. Soit p un pistolet surjectif de taille $2n$. Alors la position i est :
- un *point fixe double* si $p(i) = i$ et s'il existe $j \neq i$ où $p(j) = i$,
- un *point fixe non doublé* si $p(i) = i$ et i n'est pas double,
- un *point surfixe doublé* si $p(i) = i+1$ et s'il existe $j \neq i$ où $p(j) = i+1$,
- un *point surfixe non doublé* si $p(i) = i+1$ et i n'est pas double,
- un *maximal pair* si i est pair et $p(i) = 2n$,
- un *maximal impair* si i est impair et $p(i) = 2n$.

On note respectivement par $\mathrm{dfix}(p)$, $\mathrm{ndfix}(p)$, $\mathrm{dsurfix}(p)$, $\mathrm{ndsurfix}(p)$, $\mathrm{emax}(p)$ et $\mathrm{omax}(p)$ le nombre de points fixes doubles, points fixes non doublés, points surfixes doublés, points surfixes non doublés, points maximaux pairs, points maximaux impairs plus petits que $2n-2$.

Exemple 98. Si $p = 24846888$, alors nous avons :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{dfix}(p) = 1 & \mathrm{ndfix}(p) = 1 & \mathrm{dsurfix}(p) = 0 \\ \mathrm{ndsurfix}(p) = 1 & \mathrm{emax}(p) = 1 & \mathrm{omax}(p) = 1. \end{array}$$

Définition 3.1.15. Soit n un entier positif. Les polynômes de Dumont sont définis par :

$$\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} x^{\mathrm{emax}(p)}y^{\mathrm{dfix}(p)}z^{\mathrm{dsurfix}(p)}\overline{x}^{\mathrm{omax}(p)}\overline{y}^{\mathrm{ndfix}(p)}\overline{z}^{\mathrm{ndsurfix}(p)}. \tag{3.50}$$

Zeng et Randrianarivony ont montré que (Γ_n) vérifient la relation de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_1 & = & 1 \\ \Gamma_{n+1}(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) & = & \Gamma_n(x+1,y,z,\overline{x}+1,\overline{y},\overline{z})(z+\overline{x})(y+x) \\ & & -\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})\left(\overline{x}\,(y-\overline{y})+(z-\overline{z})\,x+\overline{x}x\right). \end{array} \tag{3.51}$$

De nouveau, on peut utiliser le formalisme non commutatif pour retrouver cette récurrence. Dans ce cas, on se donne un alphabet légèrement différent : on prendra $A = \{a_i,\ i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{a_\infty,\ b_\infty\}$. La projection Π envoie a_i sur 1, a_∞ et b_∞ respectivement sur x et $\overline{x}$, et on étend $\mathbf{T}_i$ en envoyant b_∞ sur $(b_\infty + a_i)$. De même, on modifie légèrement l'application i : un maximum impair correspondra à b_∞.

Exemple 99. Pour $p = 24846888$, on a $\mathbf{p}$ égal à $a_2a_4b_\infty a_4a_6a_\infty$.

Définissons f_{2n}, une application sur les mots par :

$$f_{2n}(w) = \mathbf{T}_{2n}(w)(b_\infty + za_{2n})(a_\infty + ya_{2n}) - w\left((y-\overline{y})\,a_\infty a_{2n} + (z-\overline{z})b_\infty a_{2n} + b_\infty a_\infty\right). \tag{3.52}$$

Définition 3.1.16. Un analogue non commutatif de $(\mathbf{\Gamma}_n)_{n\geq 1}$ est alors défini par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{\Gamma}_1 & = & 1 \\ \mathbf{\Gamma}_{n+1} & = & f_{2n}\left(\mathbf{\Gamma}_n\right) \quad \text{si } n \geq 1. \end{array} \right. \tag{3.53}$$

Exemple 100. Pour $n = 2, 3$ on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Gamma}_2 & = & yz\cdot a_2a_2 + \overline{z}\cdot a_2a_\infty + \overline{y}\cdot a_\infty a_2, \\ \mathbf{\Gamma}_3 & = & y^2z^2\cdot a_2a_2a_4a_4 + y\overline{y}z\cdot a_2a_2a_\infty a_4 + yz\overline{z}\cdot a_2a_2a_4a_\infty \\ & & + yz\overline{z}\cdot a_2a_4a_4a_4 + yz\overline{z}\cdot a_2a_\infty a_4a_4 + y\overline{z}\cdot a_2a_4a_\infty a_4 + yz\overline{z}\cdot a_2a_4a_4a_\infty \\ & & + \overline{y}\overline{z}\cdot a_2a_4a_\infty a_\infty + \overline{y}^2\cdot a_2a_\infty a_4a_\infty + \overline{y}\overline{z}\cdot a_2a_\infty a_\infty a_4 \\ & & + y\overline{y}z\cdot a_4a_2a_4a_4 + y\overline{y}z\cdot a_\infty a_2a_4a_4 + y\overline{y}\cdot a_4a_2a_\infty a_4 + \overline{y}z\cdot a_4a_2a_4a_\infty \\ & & + \overline{y}\cdot a_4a_2a_\infty a_\infty + \overline{y}\overline{z}\cdot a_\infty a_2a_4a_\infty + \overline{y}^2\cdot a_\infty a_2a_\infty a_4. \end{array} \tag{3.54}$$

Proposition 3.1.17. *Pour $n \geq 1$,*

$$\mathbf{\Gamma}_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} y^{\mathrm{dfix}(p)}\overline{y}^{\mathrm{ndfix}(p)}z^{\mathrm{dsurfix}(p)}\overline{z}^{\mathrm{ndsurfix}(p)}\mathbf{p}. \tag{3.55}$$

Démonstration. Par récurrence sur n. La proposition est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour $n \geq 1$. En utilisant l'égalité $\mathbf{T}_{2n} = Id + \mathit{\Delta}_{2n}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f_{2n}(w) = & & \mathbf{\Delta}_{2n}(w)b_\infty a_\infty + \overline{y}wb_\infty a_{2n} + \overline{z}wa_{2n}a_\infty \\ & & + y\mathbf{\Delta}_{2n}(w)b_\infty a_{2n} + z\mathbf{\Delta}_{2n}(w)a_{2n}b_\infty + yz\mathbf{\Delta}_{2n}(w)a_{2n}a_{2n}. \end{array} \tag{3.56}$$

De nouveau, par linéarité de f_{2n}, il suffit de restreindre l'étude à un pistolet p de taille $2n$. En utilisant l'inverse de i, on en déduit que les six termes de $f_{2n}(\mathbf{p})$ correspondent à une partition $\mathcal{D}_p$ en six ensembles (éventuellement vides), suivant que les positions $2n-1$ et $2n$ soient des points surfixes (non) doublés ou non, des points fixes (non) doublés ou non. Si $\mathbf{p}'$ est dans $f_{2n}(\mathbf{p})$, son coefficient est de la forme $y^a\overline{y}^b z^c\overline{z}^d$, avec a, b, c, d égaux à 1 ou 0, suivant que $2n$ soit un point fixe double ou non, un point fixe non doublé ou non, et que $2n-1$ soit un point surfixe doublé ou non, un point surfixe non doublé ou non. D'où :

$$f_{2n}\left(y^{\mathrm{dfix}(p)}\overline{y}^{\mathrm{ndfix}(p)}z^{\mathrm{dsurfix}(p)}\overline{z}^{\mathrm{ndsurfix}(p)}\mathbf{p}\right) = \sum_{p'\in\mathcal{D}_p} y^{\mathrm{dfix}(p')}\overline{y}^{\mathrm{ndfix}(p')}z^{\mathrm{dsurfix}(p')}\overline{z}^{\mathrm{ndsurfix}(p')}\mathbf{p}'. \tag{3.57}$$

Par les mêmes arguments que précédemment, on en déduit l'identité (3.55). □

De nouveau, en appliquant Π à (3.55), on retrouve la relation de récurrence vérifiée par la famille de polynômes à six paramètres. En effet, pour un pistolet surjectif p donné, le nombre d'occurrences de a_∞ (*resp.* b_∞) dans $\mathbf{p}$ est égal à $\mathrm{emax}(p)$ (*resp.* $\mathrm{omax}(p)$).

Dans les généralisations précédentes des polynômes de Gandhi, on ajoutait un nouveau paramètre dans la relation de récurrence. Une autre façon intéressante d'obtenir un raffinement, est de considérer des q-analogues. Les polynômes de Gandhi étant définis grâce à la différence finie, il est naturel de remplacer cet opérateur par un de ses q-analogues. Ainsi, dans [HZ99], Han et Zeng donnent un q-analogue de $(C_n)_{n\geq 1}$ et en trouvent une interprétation combinatoire. Dans la section suivante, grâce à la méthode non commutative, d'autres interprétations combinatoires de ce q-analogue sont obtenues.

3.2 Un q-analogue des polynômes de Gandhi

Dans cette section, l'alphabet considéré est $A = \{a_i,\ i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{a_\infty\}$, et la projection Π envoie a_i sur 1, a_∞ sur x.

3.2.1 Un q-analogue de l'opérateur de différence finie

On définit Δ_q le q-analogue de l'opérateur de différence finie par :

$$\Delta_q(f)(x) = \frac{f(xq+1) - f(x)}{1 + (q-1)x}. \tag{3.58}$$

Exemple 101. Pour $f(x) = x^n$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_q(f)(x) &= \tfrac{(xq+1)^n - x^n}{1+(q-1)x} = \tfrac{(1+qx-x)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1+qx)^k x^{n-1-k}\right)}{1+(q-1)x}, \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+qx)^k x^{n-1-k}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

En développant $(1+qx)^k$ puis en regroupant par puissances de x, on obtient :

$$\Delta_q(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}q^{k-i}\right)x^{n-1-i}. \tag{3.60}$$

3.2.2 La q-projection et les q-polynômes de Gandhi

Définition 3.2.1. On définit les q-polynômes de Gandhi par

$$\begin{cases} C_1(x,q) &= 1, \\ C_{n+1}(x,q) &= \Delta_q(C_n x^2) \quad \text{si } n \geq 1. \end{cases} \tag{3.61}$$

Exemple 102. Pour $n = 2, 3$, on a :

$$\begin{aligned} C_2 &= (q+1)\,x + 1, \\ C_3 &= \left(q^3 + 2q^2 + 2q + 1\right)x^2 + \left(2q^2 + 4q + 2\right)x + q + 2. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Les polynômes de Gandhi non commutatifs étant déjà construits, obtenir une interprétation combinatoire de C_n revient à trouver une q-version Π_q de Π. Autrement dit, on cherche Π_q vérifiant $\Pi_q(\mathbf{C}_n) = C_n$. Par linéarité et récurrence, le problème se réduit à déterminer une application linéaire Π_q telle que pour tout pistolet surjectif p, on ait

$$\Pi_q \circ \mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{p}a_\infty a_\infty) = \Delta_q\left(\Pi_q(\mathbf{p})x^2\right). \tag{3.63}$$

Il suffit donc de définir Π_q sur les mots w de la forme $\mathbf{p}$ ou de la forme $\mathbf{p}a_\infty a_\infty$. Pour un pistolet surjectif p, nous avons vu que $\mathbf{\Delta}_{2n}(\mathbf{p}a_\infty a_\infty)$ est naturellement en bijection avec $\mathcal{D}_p$. Ainsi, nous déterminons d'abord Π_q sur cet ensemble, puis celle-ci est étendue par réunion à $\mathcal{P}_{2n}$. On cherche donc Π_q et une statistique stat sur les pistolets surjectifs tels que :

$$\begin{aligned} \Pi_q(\mathbf{p}) &= q^{\mathrm{stat}(p)}\Pi(\mathbf{p}), \\ \Pi_q(\mathbf{p}a_\infty a_\infty) &= q^{\mathrm{stat}(p)}\Pi(\mathbf{p})x^2. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Pour trouver stat, on raisonne par analyse et synthèse : les équations (3.63) et (3.64) imposent à stat des conditions. Mais à ce stade, les contraintes ne sont pas suffisantes pour aboutir à une solution. Pour en exhiber une, notre méthode consiste à rajouter des hypothèses raisonnables ajoutant de la structure au problème. Ainsi, dans la construction des polynômes de Gandhi non commutatifs, à l'étape n, seules les lettres a_{2n} et a_∞ interviennent dans la relation de récurrence. On peut donc essayer de chercher une statistique sous la forme particulière :

$$\mathrm{stat}(p) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{stat}(p, 2i). \tag{3.65}$$

Exemple 103. Dans le cas particulier $n = 2$, on a $C_2 = (q+1)x+1$. Les répartitions des paramètres q et x sur les pistolets de taille 4 sont donc

	x	1
1	2444	2244
q	4244	

ou

	x	1
1	4244	2244
q	2444	

.

Le premier cas sera relié aux inversions spéciales, et le second aux non-inversions spéciales. Il est à noter que les inversions spéciales ont été introduites dans un autre contexte par Novelli, Thibon et Williams dans [NTW10], statistique très proche de celle de Han et Zeng ([HZ99]).

Remarque 31. À la différence du cas classique, la "rigidité" des polynômes non commutatifs n'a pas été suffisante pour aboutir à une unique solution. Pour trouver stat, il a fallu "deviner" comment répartir le paramètre q dans une classe de la forme $\mathcal{D}_p$.

Définition 3.2.2. Par convention, pour $j > i$, on considère que $a_j > a_i$. Soit w un mot de taille $2n$ contenant les lettres $a_2, \cdots, a_{2n-2}$. Soient $j_2, \cdots, j_{2n-2}$ les positions des dernières occurrences de $a_2, \ldots, a_{2n-2}$. Une *inversion spéciale* de w est une paire (i, j) avec $i < j$ telle que j est un des j_k et $w_i > w_j$. On note $\mathrm{sinv}(w, a_j)$ le nombre d'inversions spéciales de w relatives à la lettre a_j, et par $\mathrm{sinv}(w)$ le nombre d'inversions spéciales de w.

Abusivement, pour un pistolet p, on confond les valeurs $\mathrm{sinv}(p, 2i)$ et $\mathrm{sinv}(\mathbf{p}, a_{2i})$. Il en est de même pour $\mathrm{sinv}(p)$ et $\mathrm{sinv}(\mathbf{p})$.

Exemple 104. Si $w = a_2 a_\infty a_6 a_4 a_6$, on a $\mathrm{sinv}(w, a_2) = 0$, $\mathrm{sinv}(w, a_4) = 2$, $\mathrm{sinv}(w, a_6) = 1$, et $\mathrm{sinv}(w) = 3$.

Définition 3.2.3. Soit p un pistolet surjectif. On pose :

$$\begin{array}{lcccl} \Pi_q(\mathbf{p}) & = & q^{\mathrm{sinv}(p)}\Pi(\mathbf{p}) & = & q^{\mathrm{sinv}(p)}x^{\mathrm{max}(p)}, \\ \Pi_q(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty) & = & q^{\mathrm{sinv}(p)}\Pi(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty) & = & q^{\mathrm{sinv}(p)}x^{\mathrm{max}(p)+2}. \end{array} \tag{3.66}$$

Théorème 3.2.4. *Pour* stat = sinv*, on a :*

$$\Pi_q(\boldsymbol{C}_n) = C_n. \tag{3.67}$$

Prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2.5. *Soit p un pistolet surjectif de taille $2n$, et l le nombre de a_∞ dans $w = \mathbf{p}\ a_\infty a_\infty$. On a alors $\Pi(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty) = x^l$. De plus, les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$\Delta_q(\Pi(w)) = \sum_{i=0}^{l-1} \left(\sum_{k=i}^{l-1} \binom{k}{i} q^{k-i} \right) x^{l-1-i}, \tag{3.68}$$

et

$$\Pi\left(\sum_{p' \in \mathcal{D}_p} q^{\mathrm{sinv}(\mathbf{p}', a_{2n})} \mathbf{p}' \right) = \sum_{i=0}^{l-1} \left(\sum_{k=i}^{l-1} \binom{k}{i} q^{k-i} \right) x^{l-1-i}. \tag{3.69}$$

Démonstration. Partons du membre gauche de (3.69). Commençons par regrouper les éléments de $\mathcal{D}_p$ suivant leur nombre d'occurrences de a_∞ et de $\mathrm{sinv}(.\ , a_{2n})$. Pour $\mathbf{p}'$ dont $l-i-1$ lettres sont égales à a_∞, la valeur de $\mathrm{sinv}(\mathbf{p}', a_{2n})$ est entre 0 et $l-i-1$. Donc,

$$\sum_{p' \in \mathcal{D}_p} q^{\mathrm{sinv}(\mathbf{p}', a_{2n})} \mathbf{p}' = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{k=i}^{l-1} \sum_{\substack{p' \in \mathcal{D}_p \\ |\mathbf{p}'|_{a_\infty} = l-1-i \\ \mathrm{sinv}(\mathbf{p}', a_{2n}) = k-i}} q^{k-i} \mathbf{p}', \tag{3.70}$$

où $|\mathbf{p}'|_{a_\infty}$ est le nombre de a_∞ dans $\mathbf{p}'$.

Déterminons le cardinal d'une classe. Deux pistolets surjectifs p' et p" sont dans la même classe si et seulement si :

$$|\mathbf{p}'|_{a_\infty} = |\mathbf{p}"|_{a_\infty} = k, \tag{3.71}$$

et

$$\mathrm{sinv}(\mathbf{p}', a_{2n}) = \mathrm{sinv}(\mathbf{p}", a_{2n}) = j. \tag{3.72}$$

Or, dans $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}$" seule la lettre a_∞ est plus grande que a_{2n}. En posant

$$E := \{n_1, \cdots, n_l\}, \tag{3.73}$$

l'ensemble des positions des a_∞ dans w, on en déduit que la position de la dernière occurrence de a_{2n} dans $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}$" est la même et est égale à n_{j+l-k}, car $l-k$ est le nombre d'occurrences de a_{2n} dans $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}$".

Pour les éléments $\mathbf{p}'$ tels que :

$$|p'|_{a_\infty} = l - i - 1, \tag{3.74}$$

et

$$\mathrm{sinv}(\mathbf{p}', a_{2n}) = k - i, \tag{3.75}$$

il en résulte que la position de la dernière occurrence de a_{2n} est $n_{l+k-i-(l-i-1)} = n_{k+1}$. À gauche de la position n_{k+1}, nous avons $k-i$ lettres exactement égales à a_∞ car

$$\mathrm{sinv}(\mathbf{p}', a_{2n}) = k - i, \tag{3.76}$$

et les i autres lettres égales à a_{2n}. Il en résulte que cette classe contient exactement $\binom{k}{i}$ éléments. En appliquant Π à (3.70), on obtient (3.69). □

La démonstration du théorème 3.2.4 en découle alors.

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le théorème est vrai. On le suppose vrai au rang n. On a donc :

$$C_n = \sum_{p \in \mathcal{P}_{2n}} q^{\mathrm{sinv}(p)} \Pi(\mathbf{p}). \tag{3.77}$$

D'où :

$$C_n x^2 = \sum_{p \in \mathcal{P}_{2n}} q^{\mathrm{sinv}(p)} \Pi(\mathbf{p} a_\infty a_\infty). \tag{3.78}$$

En appliquant Δ_q, on obtient :

$$C_{n+1} = \sum_{p \in \mathcal{P}_{2n}} q^{\mathrm{sinv}(p)} \sum_{p' \in \mathcal{D}_p} q^{\mathrm{sinv}(p', a_{2n})} \Pi(\mathbf{p}'). \tag{3.79}$$

Comme $\mathrm{sinv}(p') = \mathrm{sinv}(p) + \mathrm{sinv}(p', 2n)$, on en déduit

$$C_{n+1} = \sum_{p \in \mathcal{P}_{2n}} \sum_{p' \in \mathcal{D}_p} q^{\mathrm{sinv}(p')} \Pi(\mathbf{p}'). \tag{3.80}$$

De plus, $\sqcup_{p \in \mathcal{P}_{2n}} \mathcal{D}_p = \mathcal{P}_{2n+2}$, et $\Pi_q(\mathbf{p}') = q^{\mathrm{sinv}(p)} \Pi(\mathbf{p})$. On en conclut que

$$C_{n+1} = \sum_{p \in \mathcal{P}_{2n+2}} q^{\mathrm{sinv}(p')} \Pi(\mathbf{p}') = \Pi_q(\mathbf{C}_{n+1}). \tag{3.81}$$

□

Dans [HZ99], Han et Zeng ont défini une autre généralisation des q-analogues des polynômes de Gandhi :

$$D_{n+1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \Delta_q(D_n(x)x^2) + (y-1)D_n(x)x & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \tag{3.82}$$

et donnent une interprétation combinatoire de ces polynômes. Nous allons de nouveau aborder cette famille de polynômes, et ainsi exhiber une nouvelle interprétation de ce q-analogue.

Définition 3.2.6. Soit w un mot sur l'alphabet $\{a_1, \cdots, a_n\}$. Une *non-inversion spéciale* est un couple (i, j) tel que $i < j \leq k$, et $w_i < w_j$, où $w_i = a_k$, et i est la position de la première occurrence de a_k. Le nombre de non-inversions spéciales de w est noté $\mathrm{snv}(w)$ et $\mathrm{snv}(w, a_k)$ est le nombre de non-inversions spéciales de la forme (i, j), où w_i est la première occurrence de a_k.

Exemple 105. Pour $w = a_4 a_2 a_6 a_4 a_\infty a_6$, on a $\mathrm{snv}(w, a_2) = 0$, $\mathrm{snv}(w, a_4) = 1$, $\mathrm{snv}(w, a_6) = 1$, et $\mathrm{snv}(w) = 2$.

De la même façon que dans le théorème 3.2.4, on a :

Théorème 3.2.7.

$$\Pi'_q\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} y^{\mathrm{ndfix}(p)}\mathbf{p}\right) = D_n(x), \tag{3.83}$$

où $\Pi'_q(\mathbf{p}) = q^{\mathrm{snv}(p)}\Pi(\mathbf{p})$.

Remarque 32. Notons quelques analogies avec la statistique des inversions spéciales. En effet, celles-ci se définissent à partir de la dernière occurrence d'une valeur, tandis que les non-inversions spéciales sont construites à partir de la première occurrence d'une valeur. Mais un mot "grandissant" par la droite, pour avoir une analogie totale, il faut "tronquer" ces non-inversions. Ainsi, la démonstration sera similaire : on montre un lemme reliant les non-inversions spéciales relatives à la dernière lettre permettant de simplifier la démonstration par récurrence, puis on montre le théorème.

Lemme 3.2.8. *Soit p un pistolet surjectif de taille $2n$, et l le nombre de a_∞ dans $w = \mathbf{p}\ a_\infty a_\infty$. On a alors $\Pi(\mathbf{p}\ a_\infty a_\infty) = x^l$.De plus, on a les égalités suivantes :*

$$\Delta_q(\Pi(w)) = \sum_{i=0}^{l-1}\left(\sum_{k=i}^{l-1}\binom{k}{i}q^{k-i}\right)x^{l-1-i}, \tag{3.84}$$

et :

$$\Pi\left(\sum_{p'\in\mathcal{D}_p} q^{\mathrm{snv}(\mathbf{p}',a_{2n})}\mathbf{p}'\right) = \sum_{i=0}^{l-1}\left(\sum_{k=i}^{l-1}\binom{k}{i}q^{k-i}\right)x^{l-1-i}. \tag{3.85}$$

Démonstration. Partons du membre gauche de (3.85). Regroupons les pistolets par même nombre de maximum, et même nombre de non-inversions spéciales.

Pour le mot $w = \mathbf{p}a_\infty a_\infty$ possédant l lettres égales à a_∞, les éléments de $\mathcal{D}_p$ en ont au plus $l-1$. De plus, si un élément p' possède k maximum, alors la valeur $\mathrm{snv}(p', a_{2n})$ est comprise entre 0 et k. Ainsi, en indexant différemment, on obtient :

$$\sum_{p'\in\mathcal{D}_p} q^{\mathrm{snv}(\mathbf{p}',a_{2n})}\mathbf{p}' = \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{k=i}^{l-1}\sum_{\substack{p'\in\mathcal{D}_p\\ |\mathbf{p}'|_{a_\infty}=l-1-i\\ \mathrm{snv}(\mathbf{p}',a_{2n})=k-i}} q^{k-i}\mathbf{p}'. \tag{3.86}$$

Considérons une classe où r est le nombre de maximum, et j la valeur de $\mathrm{snv}(.,a_{2n})$ de cette classe. Posons :

$$E := \{n_1, \cdots, n_l\}, \tag{3.87}$$

l'ensemble des positions des a_∞ dans w.

La seule lettre plus grande que a_{2n} étant a_∞, ces conditions imposent que la position de la première occurrence de a_{2n} pour la classe correspondante est n_{r-j+1}, car à sa droite il y a $l-r$ lettres égales à a_{2n} et j lettres égales à a_∞. En prenant $r=l-i-1$ et $j=k-i$, nous obtenons que la position de cette première occurrence est $n_{l-i-1-(k-i)+1} = n_{l-k}$. Ainsi, un élément d'une classe est la donnée d'un sous-ensemble de cardinal $k-i$ de $\{n_{l-k+1}, \cdots, n_l\}$ correspondant aux positions des a_∞. Il en résulte que cette classe contient exactement $\binom{k}{i}$ éléments. En appliquant Π à (3.86), on retrouve bien (3.85). □

La preuve du théorème 3.2.7 s'en suit :

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le théorème 3.2.7 est vrai. On le suppose vrai au rang n. Ainsi, on a :

$$\Pi'_q\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} y^{\mathrm{ndfix}(p)}\mathbf{p}\right) = D_n(x). \tag{3.88}$$

Or,

$$D_{n+1}(x) = \Delta_q(D_n(x)x^2) + (y-1)D_n(x)x. \tag{3.89}$$

Si on se place dans le monde non commutatif, on peut constater que

$$(y-1)D_n(x)x = (y-1)\Pi_q\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} y^{\mathrm{ndfix}(p)}\mathbf{p}a_\infty a_{2n}\right). \tag{3.90}$$

De plus, par linéarité de Π, on a

$$\Delta_q(D_n(x)x^2) = \Delta_q\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} q^{\mathrm{snv}(p)}y^{\mathrm{ndfix}(p)}\Pi\left(\mathbf{p}a_\infty a_\infty\right)\right). \tag{3.91}$$

Par linéarité de Δ_q, on obtient

$$\Delta_q(D_n(x)x^2) = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} q^{\mathrm{snv}(p)}y^{\mathrm{ndfix}(p)}\Delta_q\left(\Pi\left(\mathbf{p}a_\infty a_\infty\right)\right). \tag{3.92}$$

En appliquant le lemme 3.2.8, on a donc

$$\Delta_q(D_n(x)x^2) = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} q^{\mathrm{snv}(p)}y^{\mathrm{ndfix}(p)}\sum_{p'\in\mathcal{D}_p} q^{\mathrm{snv}(p',a_{2n})}\Pi\left(p'\right). \tag{3.93}$$

D'où,

$$\Delta_q(D_n(x)x^2) = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}}\sum_{p'\in\mathcal{D}_p} q^{\mathrm{snv}(p',a_{2n})}q^{\mathrm{snv}(p)}y^{\mathrm{ndfix}(p)}\Pi\left(p'\right). \tag{3.94}$$

On remarque que $\mathrm{snv}(p') = \mathrm{snv}(p) + \mathrm{snv}(p', a_{2n})$. De plus, il existe un seul cas où les points fixes non doublés augmentent de 1, celui présenté dans (3.90). Ainsi, en sommant (3.90) et (3.94), on en déduit que

$$D_{n+1}(x) = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n+2}} \Pi_q\left(y^{\mathrm{ndfix}(p)}\mathbf{p}\right). \tag{3.95}$$

□

Remarque 33. En spécialisant y à 1, on retrouve une autre interprétation combinatoire du q-analogue des polynômes de Gandhi. Soulignons que dans les preuves précédentes, pour le passage de n à n+1 dans la récurrence, seules les inversions ou non-inversions spéciales relatives à la dernière valeur ont été nécessaires. Ainsi, on pourrait définir des statistiques faisant intervenir les deux. Par exemple, pour un pistolet surjectif p de taille $2n$, en considérant

$$\mathrm{stat}(p) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \mathrm{sinv}(p, 4i+2) + \mathrm{snv}(p, 4i), \tag{3.96}$$

nous obtenons encore une interprétation combinatoire de ces q-analogues.

Remarque 34. Rappelons les statistiques définies par Han et Zeng pour ce problème.

Définition 3.2.9. Soit p dans $\mathcal{P}_{2n}$. Notons respectivement $k_1, k_2, \cdots, k_n$ les positions des premières occurrences de $2, 4, \cdots, 2n$. Pour i dans $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ on définit

$$\mathrm{dinv}(p, i) = |\{j | i < j, p(i) > p(j)\}|, \tag{3.97}$$

qui est le nombre d'inversions à droite relatives à i de p. On pose

$$\mathrm{den}(p) := \sum_{j=1}^{n} \left(k_j + dinv(p, k_j)\right). \tag{3.98}$$

Alors pour $n \geq 1$,

$$C_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_{2n}} x^{\max(p)}y^{\mathrm{ndfix}(p)}q^{n^2-\mathrm{den}(p)}. \tag{3.99}$$

Leur définition étant assez proche des nôtres, on peut alors se demander s'il existe une bijection simple envoyant la statistique den sur snv, bijection à priori encore non trouvée.

Nous avons relevé dans une algèbre combinatoire une suite de polynômes définis à l'aide d'un opérateur linéaire. En posant :

$$L(P)(x) := \Delta\left(P(x)x^2\right), \tag{3.100}$$

Nous constatons que la série

$$A(t) := \sum_{n\geq 0} C_n t^n \tag{3.101}$$

est l'unique solution de l'équation fonctionnelle

$$Y = 1 + tL(Y). \tag{3.102}$$

Ainsi, nous obtenons une solution de cette équation dans l'algèbre des séries formelles, sans interprétation combinatoire. Or, le travail précédemment effectué permet d'obtenir un analogue non commutatif $\mathbb{L}$ tel que :

$$\mathbb{A}(t) = \sum_{n\geq 0} \mathbf{C}_n t^n \tag{3.103}$$

soit l'unique solution de

$$Y = 1 + t\mathbb{L}(Y). \tag{3.104}$$

A la différence de L, l'opérateur $\mathbb{L}$ fournit une méthode pour construire les objets combinatoires que sont les pistolets surjectifs. Ainsi, on pourrait se donner un autre relèvement $\mathbb{L}'$ de L qui serait à la base d'une autre classe combinatoire. Dans les cas favorables, une bijection découlerait des propriétés de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$.

Dans la prochaine partie, nous allons appliquer ce procédé à des familles d'objets comptés par les nombres d'Euler. L'algèbre considérée est **FQSym**, et les opérateurs de "construction" sont $\mathbf{B}_{\max}$ et des variantes. Nous commençons par quelques rappels sur des propriétés de $\mathbf{B}_{\max}$, puis nous donnons des exemples de bijections provenant d'équations fonctionnelles combinatoires. Enfin, nous démontrons quelques résultats classiques de la théorie des polynômes eulériens du point de vue des algèbres non commutatives.

3.3 Combinatoire de l'application $\mathbf{B}_{\max}$

3.3.1 À propos du théorème du point fixe de Picard

Théorème 3.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit f une application contractante de E dans E. Alors il existe un unique x tel que $f(x) = x$. De plus, pour tout x_0 dans E, la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.*

Il existe diverses généralisations de ce théorème et ses conséquences sont multiples : unicité des solutions du problème de Cauchy-Lipschitz, théorème d'inversion locale, méthode d'approximation de solutions... D'ailleurs, les équations vérifiées par **Tan** et **Sec** sont des cas particuliers de ce théorème. En effet, rappelons la structure métrique de **FQSym**. Soit P un élément de **FQSym**

$$P = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} a_\sigma \mathbf{G}_\sigma, \tag{3.105}$$

sa valuation $v(P)$ est la longueur des permutations de plus petite taille telle que a_σ soit non nulle. Par convention, 0 est de valuation ∞.

Exemple 106. Pour $P = 2\mathbf{G}_{312} - \mathbf{G}_{321} + \mathbf{G}_{1423}$, on a $v(P) = 3$.

La distance de deux éléments de P et Q dans **FQSym** est alors définie par

$$d(P, Q) = 2^{-v(P-Q)}. \tag{3.106}$$

Il est aisé de vérifier qu'en autorisant des combinaisons linéaires infinies de permutations avec un nombre fini de termes en chaque degré, nous obtenons le complété de **FQSym** pour la distance ultramétrique d. Enfin, l'application bilinéaire $\mathbf{B}_{\max}$ augmentant strictement le degré global, on en déduit qu'elle est contractante. En effet, de façon générale,

Proposition 3.3.2. *Soit* $\mathbf{B}$ *une application bilinéaire de* $\boldsymbol{FQSym}^2$ *dans* ***FQSym****, telle que*

$$v\left(\mathbf{B}(P,Q)\right) > v(P) + v(Q). \tag{3.107}$$

Alors l'application quadratique $X \longmapsto \mathbf{B}(X,X)$ *est contractante.*

Démonstration. Soient P et Q dans **FQSym**. Alors on a :

$$\mathbf{B}(P,P) - \mathbf{B}(Q,Q) = \mathbf{B}(P-Q,P) + \mathbf{B}(Q,P-Q). \tag{3.108}$$

En passant à la valuation, on en déduit que

$$v\left(\mathbf{B}(P,P) - \mathbf{B}(Q,Q)\right) \geq v(P-Q) + 1, \tag{3.109}$$

ce qui se traduit par être contractante avec comme coefficient $\frac{1}{2}$. □

Supposons que l'on cherche la solution d'une équation de la forme

$$X = X_0 + \mathbf{B}(X,X), \tag{3.110}$$

avec $\mathbf{B}$ vérifiant les conditions de la proposition précédente. On peut l'expliciter à l'aide des arbres binaires complets. Posons

$$X = \sum_{T \in BTC} ev(T). \tag{3.111}$$

où $ev(T)$ peut être calculer de la façon suivante :
— si T est une feuille, alors $ev(T) = X_0$,
— T a comme fils gauche T_1 et comme fils droit T_2 alors $ev(T) = \mathbf{B}\left(ev(T_1), ev(T_2)\right)$.
Par calcul, on constate que X est solution de (3.110).

Exemple 107. En prenant,

$$X = \mathbf{G}_1 + \mathbf{B}_{\max}(X,X), \tag{3.112}$$

et en appliquant le résultat précédent, il en vient que les permutations apparaissant dans X sont exactement les permutations dont l'arbre décroissant est complet, soit les permutations alternantes impaires. Ainsi, on retrouve que **Tan** est solution de (3.112).

3.3.2 Propriétés de $\mathbf{B}_{\max}$

Cette application possède quelques propriétés simples mais fondamentales : celles-ci vont permettre d'obtenir des interprétations combinatoires de certaines équations fonctionnelles que l'on présentera dans le paragraphe 3.4.

Proposition 3.3.3. *Soient* σ, τ, σ', τ' *quatre permutations telles que :*

$$\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) = \mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_{\sigma'}, \mathbf{G}_{\tau'}).$$

Alors $\sigma = \sigma'$ *et* $\tau = \tau'$. *De plus, si* $\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) \neq \mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_{\sigma'}, \mathbf{G}_{\tau'})$, *alors les ensembles correspondant à chacune de ces sommes sont disjoints.*

Démonstration. En effet, d'une part les éléments de $\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)$ sont tous différents par construction, et d'autre part, si on prend un autre couple $(\mathbf{G}_{\sigma'}, \mathbf{G}_{\tau'})$, les termes de la somme $\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_{\sigma'}, \mathbf{G}_{\tau'})$ n'ont pas le même standardisé que ceux de $\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)$. □

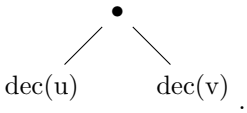
Proposition 3.3.4. *Soit* $\mathbf{B}_{\max}$ *restreinte à* $\mathbf{PBT} \otimes \mathbf{PBT}$. *Alors l'image est incluse dans* **PBT**. *De plus, on a :*

$$\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_{T'}) = \mathbf{P}_{\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ T' & & T \end{smallmatrix}}. \tag{3.113}$$

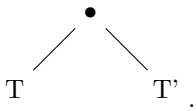
Démonstration. Soient T et T' deux arbres binaires, σ et τ deux permutations telles que $\mathrm{dec}(\sigma)$ est de forme T et que $\mathrm{dec}(\tau)$ est de forme T'. Alors,

$$\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) = \sum_{\substack{\gamma = u(n+m+1)v \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbf{G}_\gamma. \tag{3.114}$$

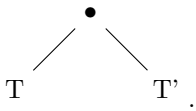
Comme $\gamma = u(n+m+1)v$ avec $\mathrm{std}(u) = \sigma$ et $\mathrm{std}(v) = \tau$, il en résulte que $\mathrm{dec}(\gamma)$ est de la forme



Or, $\mathrm{std}(u) = \sigma$, et $\mathrm{std}(v) = \tau$, on en déduit que $\mathrm{dec}(u)$ est de forme T, et que $\mathrm{dec}(v)$ est de forme T'. Ainsi, $\mathrm{dec}(\gamma)$ est de la forme



Réciproquement, soit γ ayant comme arbre décroissant



Donc γ est de la forme $u(n+m+1)v$, avec $\mathrm{dec}(u) \sim T$, et $\mathrm{dec}(v) \sim T'$. D'où, $\mathrm{std}(u) = \sigma$ (respectivement $\mathrm{std}(v) = \tau$) avec $\mathrm{dec}(\sigma) \sim T$ (*resp.* $\mathrm{dec}(\tau) \sim T'$). Par suite, $\mathbf{G}_\gamma$ est un terme de $\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_{T'})$. □

Dans la suite, nous utilisons les propositions 3.3.3 et 3.3.4 sans nécessairement les mentionner. La première nous assure dans les cas que nous présentons la non multiplicité des coefficients d'une solution d'une équation fonctionnelle, et de la seconde on visualise les solutions en termes d'arbres étiquetés. Nous allons voir dans le paragraphe suivant des équations fonctionnelles construites à partir de l'application $\mathbf{B}_{\max}$ et qui s'interprètent naturellement comme des classes combinatoires comptées par les nombres d'Euler.

3.4 Combinatoire des nombres d'Euler

La suite des nombres d'Euler, donnée par 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, $\cdots$ est la suite des cardinaux de nombreux objets combinatoires : les permutations alternantes, les permutations de Jacobi, les arbres binaires non plans décroissants. Dans cette partie, on va utiliser l'application bilinéaire $\mathbf{B}_{\max}$ ainsi que ses variantes, pour obtenir des équations fonctionnelles vérifiées par chacune des classes combinatoires, et montrer que ces équations fonctionnelles construites dans **FQSym** permettent d'obtenir des bijections entre ces objets. En effet, les récurrences régissant ces équations sont similaires. Donnons quelques exemples pour illustrer ce propos.

3.4.1 Permutations alternantes et de Jacobi

Considérons le système

$$\begin{cases} X_0 = & 1 + \mathbf{B}_{\min}(\omega(X_1), X_0), \\ X_1 = & \mathbf{B}_{\min}(\omega(X_0), X_0), \end{cases} \tag{3.115}$$

où

$$\mathbf{B}_{\min}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) = \sum_{\substack{\gamma = u1v \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau}} \mathbf{G}_\gamma, \tag{3.116}$$

et où ω est le retournement d'alphabet sur les permutations. Nous obtenons alors le couple solution $(\mathbf{Sec}', \mathbf{Tan})$, où

$$\mathbf{Sec}' = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_0{}'} \mathbf{G}_\sigma, \tag{3.117}$$

avec $\mathfrak{A}_0{}'$ étant l'ensemble des permutations alternantes paires commençant par une descente ($\sigma_1 > \sigma_2 < \cdots < \sigma_{2i+1} > \cdots$). Ce procédé donne une autre méthode pour construire les permutations alternantes impaires montantes et paires descendantes.

Définition 3.4.1. Une permutation σ est de *Jacobi* si :
— σ est la permutation vide,
— ou bien $\sigma = u1v$, avec $l(v)$ paire, std(u) et std(v) étant de Jacobi.
Notons respectivement $\mathfrak{J}_0$ et $\mathfrak{J}_1$ les ensembles de permutations de Jacobi de longueur paire et impaire.

Cette classe a été définie par Viennot dans [Vie80] pour obtenir une interprétation combinatoire naturelle des fonctions elliptiques. Posons

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Jac_1} & := & \sum_{\sigma\in\mathfrak{J}_0} \mathbf{G}_\sigma, \\ \mathbf{Jac_0} & := & \sum_{\sigma\in\mathfrak{J}_1} \mathbf{G}_\sigma, \end{array} \tag{3.118}$$

et cherchons une équation fonctionnelle dans **FQSym** vérifiée par le couple $(\mathbf{Jac_1}, \mathbf{Jac_0})$. Grâce à leur construction récursive, il vient que ce dernier est solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 = & 1 + \mathbf{B}_{\min}(X_1, X_0), \\ X_1 = & \mathbf{B}_{\min}(X_0, X_0). \end{array} \right. \tag{3.119}$$

En comparant les systèmes (3.115) et (3.119), nous constatons que leur définition est assez proche. Ainsi, à travers le morphisme $\mathbb{E}$, ils se projettent tous les deux sur la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_0(t) & = & 1 + \int_0^s y_1(s)y_0(s)ds, \\ \\ y_1(t) & = & t + \int_0^s y_0(s)y_0(s)ds, \end{array} \right. \tag{3.120}$$

c'est-à-dire $(\sec, \tan)$. En particulier, il existe une bijection entre ces deux classes. Mais au niveau des séries formelles, celle-ci n'est pas explicite. Cependant, en gardant leur équation fonctionnelle non commutative, la bijection vient d'elle-même. En effet, cherchons une bijection θ des permutations de Jacobi paires (*resp.* impaires) vers les permutations alternantes paires descendantes (*resp.* montantes) préservant les structures données par les équations fonctionnelles. Ainsi, pour σ dans $\mathfrak{J}_0 \cup \mathfrak{J}_1$ et τ dans $\mathfrak{J}_0$, on aimerait avoir :

$$\theta\left(\mathbf{B}_{\min}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)\right) = \mathbf{B}_{\min}\left(\omega(\mathbf{G}_{\theta(\sigma)}), \mathbf{G}_{\theta(\tau)}\right). \tag{3.121}$$

De plus, dans la construction d'un terme de $\mathbf{B}_{\min}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)$ ou de $\mathbf{B}_{\min}(\omega(\mathbf{G}_\sigma), \mathbf{G}_\tau)$ trois paramètres sont à prendre en compte : les deux permutations σ et τ, mais aussi une partition $\{A, B\}$ de $\{2, \cdots, |\sigma| + |\tau| + 1\}$ avec $|A| = |\sigma|$. Une "bonne" bijection étant une qui préserve le maximum de structure, on aimerait que le terme de $\mathbf{B}_{\min}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau)$ construit à partir de la partition $\{A, B\}$ soit envoyé par θ sur l'élément de $\mathbf{B}_{\min}(\omega(\mathbf{G}_{\theta(\sigma)}), \mathbf{G}_{\theta(\tau)})$ construit à partir de la même partition. Il existe alors une unique bijection vérifiant les propriétés demandées :

$$\begin{array}{rcl} \theta(\epsilon) & = & \epsilon, \\ \theta(umv) & = & \omega(\theta(u))m\theta(v), \end{array} \tag{3.122}$$

où umv est un mot sans répétition de lettres, avec m comme lettre minimale. L'image des permutations de Jacobi par θ sont alors les permutations alternantes.

Remarque 35. La bijection θ est en fait celle de Viennot dans [Vie80].

3.4.2 Arbres binaires non plans décroissants et permutations alternantes

Donnons-en une définition récursive :
— l'ensemble vide est un arbre binaire non plan décroissant,
— $(N, \{T_1, T_2\})$ est un arbre binaire non plan décroissant si N est plus grand que tous les nœuds de T_1 et de T_2, et T_1 et T_2 sont des arbres non plan décroissants.
Quitte à ordonner les fils, nous pouvons supposer qu'il s'agit d'arbres binaires décroissants dans lesquels l'arbre droit contient la valeur minimale. De façon surprenante, le nombre d'arbres binaires non plan décroissants étiquetés par $\{1, \cdots, n\}$ est le n^{e} nombre d'Euler. Donnons une équation fonctionnelle dans **FQSym** correspondant à cette classe :

$$X = 1 + \mathbf{G}_1 + \mathbf{B}_{\max,\succ}(X, X), \tag{3.123}$$

où

$$\mathbf{B}_{\max,\succ}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) = \sum_{\substack{\gamma = u(n+m+1)v \\ \mathrm{std}(u)=\sigma,\ \mathrm{std}(v)=\tau \\ \min \in v}} \mathbf{G}_\gamma, \tag{3.124}$$

avec comme convention

$$\mathbf{B}_{\max,\succ}(\mathbf{G}_\sigma, 1) = 0, \tag{3.125}$$

pour tout σ dans $\mathfrak{S}$.

En exprimant en fonction de la partie paire X_0 et impaire X_1 de X, nous obtenons le système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & 1 + \mathbf{B}_{\max,\succ}(X_0, X_1) + \mathbf{B}_{\max,\succ}(X_1, X_0) \\ X_1 & = & \mathbf{G}_1 + \mathbf{B}_{\max,\succ}(X_0, X_0) + \mathbf{B}_{\max,\succ}(X_1, X_1) \end{array} \right. . \tag{3.126}$$

Cherchons une équation fonctionnelle sur les permutations alternantes qui soit "proche" de ce système. Dans les permutations apparaissant dans $\mathbf{B}_{\max,\succ}$, la valeur 1 est toujours à droite de la valeur maximale. Ainsi, au lieu de regarder toutes les permutations alternantes montantes ou descendantes, nous allons considérer l'ensemble $\mathcal{A}$ (*resp.* $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$) des permutations alternantes (*resp.* paires et impaires) telles que la valeur 1 est située après la valeur maximale.

Proposition 3.4.2. *Soient les projections* $\Pi^\uparrow$ *et* $\Pi^\downarrow$ *sur les permutations par :*

$$\begin{array}{rccll} \Pi^\uparrow : & \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{S} & \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma & si\ \sigma_1 < \sigma_2, \\ & & & \omega(\sigma) & si\ \sigma_1 > \sigma_2. \end{array} \tag{3.127}$$

Et

$$\begin{array}{rccll} \Pi^\downarrow : & \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{S} & \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma & si\ \sigma_1 > \sigma_2, \\ & & & \omega(\sigma) & si\ \sigma_1 < \sigma_2. \end{array} \tag{3.128}$$

Par convention, la permutation 1 *est laissée fixe par ces deux transformations. Alors* $\Pi^\uparrow$ *(*resp. $\Pi^\downarrow$*) restreinte à* $\mathcal{A}$ *est injective et a pour image l'ensemble des permutations alternantes montantes (*resp. *descendantes).*

Démonstration. Soit σ dans $\mathcal{A}$. Pour σ commençant par une descente, nous avons $\Pi^\uparrow(\sigma) = \omega(\sigma)$. Comme la lettre 1 est située après la lettre $|\sigma|$, nous en déduisons que dans $\omega(\sigma)$ la lettre 1 est située avant la lettre $|\sigma|$. Ainsi, $\omega(\sigma)$ est une permutation alternante montante telle que la valeur 1 est située avant la lettre $|\sigma|$. Pour σ commençant par une montée, la permutation est laissée fixe. La bijection réciproque consiste donc à retourner les permutations alternantes montantes dont la valeur 1 est située avant la valeur maximale.

Le raisonnement est similaire pour $\Pi^\downarrow$. □

Déterminons alors une équation fonctionnelle vérifiée par le couple $(\mathcal{S}ec, \mathcal{T}an)$ où :

$$\mathcal{S}ec := \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_0} \mathbf{G}_\sigma, \tag{3.129}$$

et

$$\mathcal{T}an := \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_1} \mathbf{G}_\sigma. \tag{3.130}$$

En donnant une définition inductive de ces permutations :

— la permutation vide et 1 sont dans $\mathcal{A}$;

— pour σ dans $\mathcal{A}$, avec $\sigma = unv$, la lettre n étant maximale, on sait que la lettre minimale est dans v. Le mot v correspond toujours à une permutation alternante montante. Pour n en position paire, u est une permutation alternante montante impaire, et pour n impair, u est une permutation alternante descendante paire.

Nous obtenons, en la traduisant dans **FQSym**, le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & 1 + \mathbf{B}_{\max,\succ}\left(\Pi^{\downarrow}(X_0), \Pi^{\uparrow}(X_1)\right) + \mathbf{B}_{\max,\succ}\left(\Pi^{\uparrow}(X_1), \Pi^{\uparrow}(X_0)\right) \\ X_1 & = & \mathbf{G}_1 + \mathbf{B}_{\max,\succ}\left(\Pi^{\downarrow}(X_0), \Pi^{\uparrow}(X_0)\right) + \mathbf{B}_{\max,\succ}\left(\Pi^{\uparrow}(X_1), \Pi^{\uparrow}(X_1)\right) \end{array} \right. . \tag{3.131}$$

En comparant (3.126) et (3.131), nous cherchons une bijection préservant la structure de ces deux équations. En menant un raisonnement similaire au cas des permutations de Jacobi et alternantes descendantes, nous aboutissons à une unique bijection.

Remarque 36. La difficulté réside alors dans une bonne définition des objets. En effet, nous avons arbitrairement choisi une représentation des arbres binaires décroissants en tant que permutations particulières. Ainsi, les deux familles d'objets ont des représentants dans une même classe, ici, les permutations. Mais une autre construction des arbres binaires décroissants non plans ou des permutations alternantes pourraient aboutir à une autre bijection préservant cette autre structure.

3.4.3 Polynômes eulériens et nombres d'Euler

Soit σ dans $\mathfrak{S}_n$. La position $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ est une *descente* si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. On notera $des(\sigma)$ le nombre de descentes de σ. On rappelle (cf. [NT12]) que les polynômes eulériens (non commutatifs) sont définis par

$$\mathbf{E}_n(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{des(\sigma)} \mathbf{G}_\sigma. \tag{3.132}$$

Ainsi, $\mathbf{E}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_n(t)$ est la série génératrice des polynômes eulériens non commutatifs.

Considérons l'application bilinéaire

$$\mathbf{C}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, 1) & \text{si } \mathbf{G}_\tau = 1, \\ t\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau) & \text{sinon.} \end{array} \right. \tag{3.133}$$

Remarquons que $\mathbf{E}$ vérifie

$$\mathbf{E} = 1 + \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbf{E}). \tag{3.134}$$

Ainsi, en ré-exprimant l'équation en fonction de $\mathbf{B}_{\max}$, on obtient que $\mathbf{E}$ est solution de

$$\mathbf{E} = 1 + t\mathbf{B}_{\max}(\mathbf{E}, \mathbf{E} - 1) + \mathbf{B}_{\max}(\mathbf{E}, 1). \tag{3.135}$$

En dérivant, $\mathbf{E}$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial \mathbf{E} & = & t\mathbf{E}(\mathbf{E} - 1) + \mathbf{E}, \\ \mathbf{E}_0 & = & 1. \end{array} \right. \tag{3.136}$$

Maintenant, en prenant l'image par $\mathbb{E}$, on retrouve l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_u X & = & tX(X - 1) + X, \\ X(0) & = & 1. \end{array} \right. \tag{3.137}$$

La série génératrice exponentielle des polynômes eulériens commutatifs vérifie donc (3.137). Or la fonction

$$f \ : \ u \ \mapsto \ \frac{t-1}{t - e^{u(t-1)}} \ . \tag{3.138}$$

est la solution de (3.137). Ainsi, nous en déduisons la série génératrice exponentielle des polynômes eulériens.

Dans [SF70], Foata et Schutzenberger introduisent un autre paramètre y, et considèrent la fonction suivante :

$$g \ : \ u \ \mapsto \ \frac{t-1}{t - e^{u(t-1)}} e^{(y-1)u}. \tag{3.139}$$

Ils montrent que le paramètre y correspond à une certaine statistique sur les permutations, les saillances qui ne sont pas des descentes. On va s'attacher à remontrer les propriétés associées à g grâce au formalisme non commutatif.

On a donc $g(u) = f(u)e^{(y-1)u}$. Montrons que f et g vérifient le système d'équations intégrales

$$\left\{ \begin{array}{rl} g(u) = & 1 + t\int_0^u f(s)(g(s) - 1)ds + \quad y\int_0^u g(s)ds, \\ f(u) = & 1 + t\int_0^u f(s)(f(s) - 1)ds + \quad \int_0^u f(s)ds. \end{array} \right. \tag{3.140}$$

En dérivant, on constate que f et g vérifient le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1, \\ g(0) & = & 1, \\ f' & = & tf(f-1)+yf, \\ g' & = & tg(f-1)+g. \end{array}\right. \tag{3.141}$$

Ainsi, en intégrant, on retrouve (3.140). Donnons un relèvement non commutatif de ce système intégral :

$$\left\{\begin{array}{lll} G = & 1+t\mathbf{B}_{\max}(G,F-1)+ & y\mathbf{B}_{\max}(G,1), \\ F = & 1+t\mathbf{B}_{\max}(F,F-1)+ & \mathbf{B}_{\max}(F,1). \end{array}\right. \tag{3.142}$$

Par un simple calcul, on obtient que

$$G=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} t^{\mathrm{des}(\sigma)}y^{\mathrm{saim}(\sigma)}\mathbf{G}_\sigma, \tag{3.143}$$

où $\mathrm{saim}(\sigma)$ est le nombre de saillances de σ qui sont des montées. Considérons f et g écrites comme une série génératrice exponentielle :

$$f(u)=\sum_{n\geq 0}\mathrm{A}_n(t)\frac{u^n}{n!}, \tag{3.144}$$

et

$$g(u)=\sum_{n\geq 0}\mathrm{B}_n(t,y)\frac{u^n}{n!}. \tag{3.145}$$

Comme f et g dépendent des paramètres y et t, on peut donc spécialiser y à 0, et t à –1. Par définition, on a alors :

$$f(u)=\sum_{n\geq 0}\mathrm{A}_n(-1)\frac{u^n}{n!}, \tag{3.146}$$

et

$$g(u)=\sum_{n\geq 0}\mathrm{B}_n(-1,0)\frac{u^n}{n!}. \tag{3.147}$$

Grâce au système (3.142), montrons que

Proposition 3.4.3. *Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{A}_{2n+2}(-1) & = & 0, \\ \mathrm{A}_{2n+1}(-1) & = & (-1)^n E_{2n+1}, \end{array}\right. \tag{3.148}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{B}_{2n}(-1,0) & = & (-1)^n E_{2n}, \\ \mathrm{B}_{2n+1}(-1,0) & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.149}$$

Démonstration. Comme on spécialise y à 0 et t à -1, regardons le système obtenu en remplaçant ces paramètres par les valeurs correspondantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} G & = & 1-\mathbf{B}_{\max}(G,F-1) \\ F & = & 1-\mathbf{B}_{\max}(F,F-1)+\mathbf{B}_{\max}(F,1) \end{array}\right. . \tag{3.150}$$

On obtient que

$$F=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}(-1)^{\mathrm{des}(\sigma)}\mathbf{G}_\sigma, \tag{3.151}$$

ce qui ne nous apprend rien. Mais en modifiant légèrement l'équation (3.150) par

$$\left\{\begin{array}{lcl} G & = & 1-\mathbf{B}_{\max}(G,F-1) \\ F & = & 1-\mathbf{B}_{\max}(F,F-1)+\mathbf{B}_{\max}(1,F) \end{array}\right. , \tag{3.152}$$

on obtient un système ayant clairement la même image que (3.142) à travers $\mathbb{E}$. Ainsi,

$$F-1=-\mathbf{B}_{\max}(F-1+1,F-1)+\mathbf{B}_{\max}(1,F), \tag{3.153}$$

par bilinéarité

$$F - 1 = -\mathbf{B}_{\max}(F-1, F-1) - \mathbf{B}_{\max}(1, F) + \mathbf{B}_{\max}(1,1) + \mathbf{B}_{\max}(1, F). \tag{3.154}$$

Donc

$$F - 1 = \mathbf{G}_1 - \mathbf{B}_{\max}(F-1, F-1). \tag{3.155}$$

On en déduit que

$$F - 1 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_1} (-1)^{\frac{|\sigma|-1}{2}} \mathbf{G}_\sigma, \tag{3.156}$$

et

$$G = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_0} (-1)^{\frac{|\sigma|}{2}} \mathbf{G}_\sigma, \tag{3.157}$$

où $\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{A}_1$ sont respectivement les ensembles des permutations alternantes paires et impaires.

Ainsi, à travers le morphisme $\mathbb{E}$, on en déduit le résultat annoncé. □

Chapitre 4

Combinatoire de structures dendriformes

La théorie des opérades est l'étude des algèbres générales : il s'agit d'espaces vectoriels munis d'applications multilinéaires. Elle a été introduite par May ([May72]) Boardman et Vogt ([Vog73]) pour étudier les espaces de lacets itérés. Elle fut remise au goût du jour par Loday ([Lod96], [LR98], [Lod01], [LV12]), et est aujourd'hui un sujet de recherche actif : elle est présente à la fois en physique, en algèbre et en combinatoire ([MSS07]).

Ce chapitre n'aborde pas de façon générale la théorie des opérades. Il est consacré à l'étude de trois types d'algèbres : les algèbres dendriformes, tridendriformes, et les quadrialgèbres. Les algèbres dendriformes ont été introduites par Loday et Ronco dans [LR98] et on trouve des applications de cette algèbre en informatique ([HNT05]) et en renormalisation ([BF03]). Les algèbres tridendriformes, une généralisation des algèbres dendriformes, ont été entre autres étudiées par Loday et Ronco ([LR$^+$04]), Novelli et Thibon ([NT06a]) et Burgunder-Ronco dans [BR10]. Enfin, les quadrialgèbres, une autre manière de généraliser les algèbres dendriformes, on été introduites par Aguiar et Loday dans [AL04].

Dans notre contexte, $\mathcal{P}$ est une opérade, c'est-à-dire, de manière informelle, une famille d'applications multilinéaires vérifiant des relations. L'objectif est de donner à travers des exemples de $\mathcal{P}$-algèbres, ici les algèbres dendriformes, les algèbres tridendriformes et les quadrialèbres, une méthode pour étudier une $\mathcal{P}$-algèbre de manière générale à l'aide de la combinatoire. En particulier, le problème posé est de trouver la série de Hilbert d'une $\mathcal{P}$-algèbre libre sur un générateur, puis d'en déduire une méthode pour prouver qu'une $\mathcal{P}$-algèbre est libre. Ainsi, nous commençons d'abord par poser dans le paragraphe 4.1 les définitions générales qui nous sont utiles dans la suite de ce chapitre, puis nous étudions le cas de l'algèbre dendriforme dans les paragraphes 4.2 et 4.3. Enfin, nous résolvons des questions similaires pour les quadrialgèbres et les algèbres tridendriformes respectivement dans les paragraphes 4.4 et 4.5.

Notons que la plupart des résultats que nous montrons ont déjà été prouvés :

- la preuve présentée concernant la liberté de l'algèbre **PBT** se trouve dans [HNT05] ;
- Foissy prouve la liberté de **FQSym** dans [Foi07] ;
- la série de Hilbert de l'algèbre tridendriforme libre sur un générateur se trouve dans [NT06a] ;
- Burgunder et Ronco ont démontré que **WQSym** est une algèbre tridendriforme libre ([BR10]) ;
- Valette dans [Val08] par des méthodes purement algébriques détermine la série de Hilbert de la quadrialgèbre libre sur un générateur.

Par contre, la preuve de la liberté de la quadrialgèbre des 2-permutations semble être nouvelle. De plus, la méthode de preuve présentée est généralement différente des démonstrations existantes.

4.1 $\mathcal{P}$-algèbres et arbres d'évaluation

Définition 4.1.1. Une *$\mathcal{P}$-algèbre* est un couple $\mathcal{A} = (A, \mathcal{P})$ où $A = \oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$, où A_0 est isomorphe à $\mathbb{K}$, A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué et $\mathcal{P}$ est un ensemble fini d'applications bilinéaires définies sur A et à valeurs dans A tel que pour tout B appartenant à $\mathcal{P}$, tout y_n vecteur de A_n et tout y_m vecteur de A_m, l'élément $B(y_n, y_m)$ appartient à A_{n+m}, et l'élément de A_0 identifié à $1_{\mathbb{K}}$ est élément neutre pour chacune de ces lois B. On note $A^+ := \oplus_{n\geq 1} A_n$.

Remarque 37. La définition donnée des $\mathcal{P}$-algèbres est plus restrictive que sa véritable définition que l'on peut trouver dans [LV12].

Définition 4.1.2. Soit une $\mathcal{P}$-algèbre $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$. *L'espace des arbres d'évaluation (ou d'expression)* sur $\mathcal{A}$ noté $\mathcal{ET}(\mathcal{A})$ est l'espace vectoriel engendré de manière libre par la classe combinatoire des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par les éléments d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}^+$ et les nœuds internes par des éléments de $\mathcal{P}$. On note cette classe $BTC(\mathcal{P}, \mathcal{B})$.

Exemple 108. Pour l'algèbre $\mathcal{A} = (A, \{\times, \circledast, \odot\})$, et a, a', b, b', et c des éléments de $\mathcal{A}$, l'arbre représenté dans la figure 4.1 est un élément de $\mathcal{ET}(\mathcal{A})$.

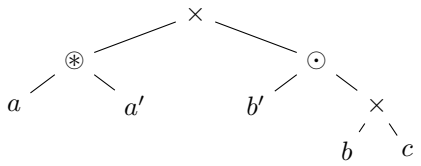


FIGURE 4.1 – Un arbre d'évaluation de l'algèbre $\mathcal{A}$.

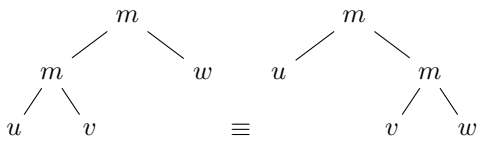
Définition 4.1.3. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ une $\mathcal{P}$-algèbre. La fonction ev est l'application linéaire de $\mathcal{ET}(\mathcal{A})$ vers $\mathcal{A}$ définie sur les arbres par :

$$\begin{array}{lcl} ev(\emptyset) & = & 1_{\mathbb{K}} \\ ev((x, \emptyset, \emptyset)) & = & x \\ ev((B, T_1, T_2)) & = & B(ev(T_1), ev(T_2)). \end{array} \tag{4.1}$$

Exemple 109. Pour $\mathcal{A} = (\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle, m)$, algèbre associative des mots sur A munie du produit de concaténation, l'espace vectoriel $\mathcal{ET}(\mathcal{A})$ est engendré par $BTC(\{m\}, A^*)$. Déterminons le noyau K de l'application ev et un supplémentaire S isomorphe à $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Comme la loi m est associative, pour tous mots u, v, w de A^*, nous avons :

$$m(m(u \otimes v) \otimes w) = m(u \otimes m(v \otimes w)). \tag{4.2}$$

Autrement dit,



où $\equiv$ signifie que les deux membres ont la même évaluation. Ainsi, pour déterminer un quotient, nous considérons des arbres n'ayant pas de m en fils droit. Alors tout mot $w = a_1 \cdots a_n$ admet comme antécédent par ev un arbre $T(w)$ construit de la manière suivante :

— Si $w = a_1$, alors $T(w) = (a_1, \emptyset, \emptyset)$;
— sinon, $T(w) = (m, T(w_1 \cdots w_{n-1}), w_n)$.

Autrement dit, tout arbre de $BTC(\{m\}, A^*)$ est équivalent pour la relation "avoir même évaluation" à un peigne gauche où les feuilles sont des lettres de A. Or, la famille des peignes gauches étiquetés par des lettres de A (noté $\mathcal{P}g(\{m\}, A)$) s'envoie bijectivement sur les mots en A par la fonction évaluation, qui correspond à la lecture infixe des feuilles. Un supplémentaire S est alors donné par $vect(\mathcal{P}g(m, A))$, et le noyau est engendré par

$$\{S - T |\ S \in \mathcal{P}g(m, A),\ T \in BTC(\{m\}, A^*),\ T \equiv S\}. \tag{4.3}$$

Pour une algèbre associative libre graduée $(\mathcal{A}, m)$, il existe donc une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ telle que l'application ev est un isomorphisme de $vect(\mathcal{P}g(m, \mathcal{F}))$ vers $\mathcal{A}$.

Réciproquement, soit $(\mathcal{A}, m)$ une algèbre associative graduée telle qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ pour laquelle l'application ev réalise un isomorphisme entre $vect(\mathcal{P}g(m, \mathcal{F}))$ et $\mathcal{A}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est libre et engendrée par $\mathcal{F}$. Nous savons que l'antécédent par ev d'un élément f de $\mathcal{F}$ est la feuille étiquetée par f. Un produit d'éléments $\prod f_i$ de $\mathcal{F}$ a comme antécédent un peigne gauche dont les feuilles sont étiquetées par les f_i lues dans l'ordre infixe. Ainsi, un polynôme en

les éléments de $\mathcal{F}$ a comme antécédent une combinaison linéaire en les éléments de $\mathcal{P}g(m, \mathcal{F})$. Considérons alors un polynôme P en des éléments de $\mathcal{F}$ égal à 0. Par image inverse de ev, nous obtenons une combinaison linéaire de $\mathcal{P}g(m, \mathcal{F})$ nulle. Cette famille étant libre, on en déduit que tous les coefficients sont nuls. Or, l'application ev est injective. Il en résulte que P est le polynôme nul. Donc la famille $\mathcal{F}$ est algébriquement indépendante. Comme ev est surjective, la famille $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{A}$.

Remarque 38. Ainsi, nous constatons qu'il est possible de traduire un problème algébrique (trouver une famille algébriquement indépendante et génératrice) en un problème d'algèbre linéaire sur des familles d'arbres. Constatons qu'il n'y a pas unicité pour le type de famille d'arbres. En effet, dans le cas des algèbres associatives, nous aurions pu prendre des peignes droits au lieu des peignes gauches.

Si une famille $\mathcal{F}$ algébriquement indépendante engendre une algèbre $\mathcal{A}$, par récurrence, il est toujours possible de la choisir homogène. Autrement dit, tout élément f de $\mathcal{F}$ appartient à un $\mathcal{A}_n$.

Dans la théorie des $\mathcal{P}$-algèbres, un des premiers points est de déterminer la série de Hilbert (série génératrice des dimensions des composantes homogènes) d'une $\mathcal{P}$-algèbre libre sur un générateur de degré un. Dans le cas des algèbres associatives, celle-ci est la série $\frac{1}{1-t}$, qui est aussi la série génératrice des peignes gauches où les feuilles sont étiquetées par le générateur de degré un, et les nœuds internes par la loi produit. Ainsi, pour une algèbre associative $\mathcal{A}$, si sa série de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ ne peut pas s'écrire pas sous la forme $\frac{1}{1-f(t)}$ avec f à coefficients entiers positifs, on en déduit qu'elle n'est pas libre.

Constatons que pour toute algèbre associative graduée, l'application ev restreinte à la famille des peignes gauches est toujours surjective. Les formes d'arbres à considérer dépendent donc uniquement des relations entre opérateurs. En effet, l'associativité se traduit sur les arbres par "deux arbres sont équivalents si et seulement s'il existe une suite de rotations passant de l'un à l'autre". Or, un arbre peut toujours se ramener au peigne gauche en appliquant toutes les rotations gauches possibles. D'où le choix de prendre comme représentants ces types d'arbres.

Dans la suite, nous constaterons que les formes d'arbres à considérer dépendent du type d'algèbres.

4.2 Un exemple fondamental : l'algèbre dendriforme PBT

Introduit par Loday et Ronco ([LR98]), cette algèbre possède de nombreuses propriétés : il s'agit d'une algèbre de Hopf contenant **Sym**, et incluse dans **FQSym**. De plus, elle est aussiest une réalisation combinatoire des algèbres dendriformes, remarque utile pour une approche combinatoire de problèmes portant sur les $\mathcal{P}$-algèbres.

On cherche dans la suite à déterminer la série de Hilbert de l'algèbre dendriforme libre sur un générateur. Nous appliquons la méthode présentée dans [Nov14]. La démonstration s'effectue en deux temps : on commence par trouver un majorant terme à terme de la série de Hilbert, puis à l'aide d'une réalisation de cette algèbre, on montre que le majorant est aussi un minorant.

4.2.1 Définitions générales

Définition 4.2.1. Une *algèbre dendriforme* $(\mathcal{A}, \succ, \prec)$ est un espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni de deux applications bilinéaires $\succ$ et $\prec$ vérifiant pour tous a, b, c éléments de $\mathcal{A}$ les relations :

$$\begin{cases} (a \prec b) \prec c &= a \prec (b \prec + \succ c) \\ a \succ (b \succ c) &= (a \prec + \succ b) \succ c \\ (a \succ b) \prec c &= a \succ (b \prec c) \end{cases} \tag{4.4}$$

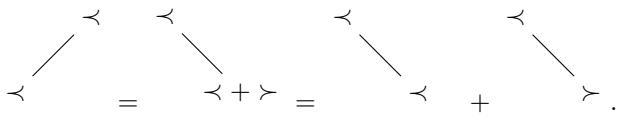
Remarque 39. L'égalité d'une relation étant vérifiée par tous les éléments de l'algèbre, il est pratique de considérer les relations en omettant les entrées. Par exemple,

$$(a \prec b) \prec c = a \prec (b \prec + \succ c)\,,$$

devient

$$(\prec) \prec = \prec (\prec + \succ).$$

On peut également représenter ceci en termes d'arbres d'évaluation :



(4.5)

Exemple 110. L'algèbre **FQSym** (cf. le paragraphe 1.3.3.4) admet naturellement une structure dendriforme. En effet, dans la base des $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$, le produit est donné par le shuffle décalé. Découpons ce produit en deux parties. Soient σ et τ deux permutations de tailles respectives n et m. Posons :

$$\mathbf{F}_\sigma \prec \mathbf{F}_\tau := \sum_{\substack{\gamma\in\sigma\,\overline{\sqcup\!\sqcup}\,\tau\\ \gamma_{n+m}=\sigma_n}} \mathbf{F}_\gamma \tag{4.6}$$

et

$$\mathbf{F}_\sigma \succ \mathbf{F}_\tau := \sum_{\substack{\gamma\in\sigma\,\overline{\sqcup\!\sqcup}\,\tau\\ \gamma_{n+m}=\tau_m[n]}} \mathbf{F}_\gamma. \tag{4.7}$$

Nous constatons que $\overline{\sqcup\!\sqcup} = \prec + \succ$.

Vérifions chacune des trois relations dendriformes. Les applications étant bilinéaires, il suffit de le vérifier pour les éléments de la base $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ Soient σ, τ, ν trois permutations de tailles respectives n, m, r. Considérons $(\sigma \prec \tau) \prec \nu$. Alors la dernière lettre de tous ces termes est la dernière lettre de σ. On a donc

$$(\sigma \prec \tau) \prec \nu = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \nu)\sigma_n, \tag{4.8}$$

ce qui se réécrit aussi $\sigma \prec (\tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \nu)$.

Pour $(\sigma \succ \tau) \succ \nu$, on obtient

$$\sigma \succ (\tau \succ \nu) = (\sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \nu_1 \cdots \nu_{r-1})\nu_r[n+m], \tag{4.9}$$

ce qui se réécrit $(\sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau) \succ \nu$. De même,

$$(\sigma \succ \tau) \prec \nu = (\sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau_1 \cdots \tau_{m-1} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \nu)\tau_m[n] = \sigma \succ (\tau \prec \nu). \tag{4.10}$$

Ainsi, $(\mathbf{FQSym}, \prec, \succ)$ est bien une algèbre dendriforme.

Soit $(A, \prec, \succ)$ l'algèbre dendriforme libre sur un générateur x de degré un. On représente les éléments comme des combinaisons linéaires d'arbres binaires complets, où les feuilles sont étiquetées par x et les nœuds internes par les opérateurs $\prec$ ou $\succ$. Or, grâce aux relations (4.4), il est possible de se restreindre à une sous-famille d'arbres.

Exemple 111. La figure 4.2 représente un élément de l'algèbre dendriforme libre.

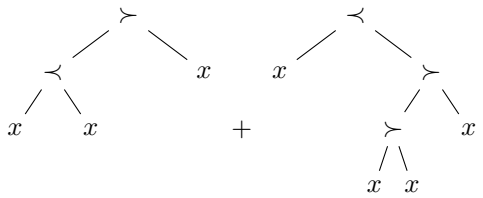
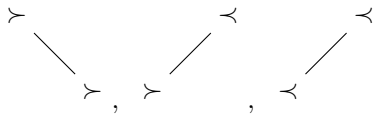


FIGURE 4.2 – Un élément de l'algèbre dendriforme libre sur le générateur x.

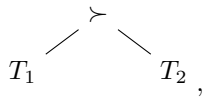
4.2.2 Une famille d'arbres "canoniques"

Proposition 4.2.2. *Tout élément de A est combinaison linéaire d'arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par x, les nœuds internes par $\succ$ ou $\prec$, et évitant les motifs suivants :*

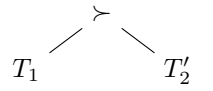


(4.11)

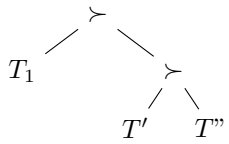
Démonstration. Par récurrence sur la taille des arbres (nombre de feuilles). Pour $n = 1$, c'est évident. Pour $n = 2$, ceci résulte des relations (4.4). Supposons la proposition vraie pour les arbres de taille inférieure à $n \geq 3$. Soit T un arbre à $n+1$ feuilles. Si T est de la forme :



on applique l'hypothèse de récurrence sur T_2. On obtient une combinaison linéaire d'arbres B de la forme



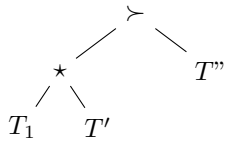
où T_2' évite les motifs (4.11). Mais il se pourrait que T_2' ait une racine étiquetée par $\succ$, et on aurait un arbre de la forme



avec T" n'ayant pas une racine étiquetée $\succ$ et évitant les motifs (4.11). En appliquant l'égalité

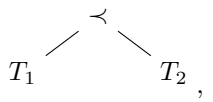
$$\succ (\succ) = (\prec + \succ) \succ, \tag{4.12}$$

on obtient un arbre de la forme

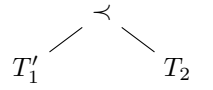


avec $\star = \prec + \succ$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au membre gauche pour conclure.

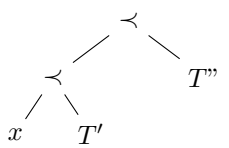
Si T est de la forme



on applique l'hypothèse de récurrence à T_1. On obtient alors une combinaison linéaire d'arbres B de la forme



où T_1' est un arbre évitant (4.11). Mais T_1' n'est pas nécessairement réduit à une feuille. Si T_1' a sa racine étiquetée par $\prec$, l'arbre B est de la forme

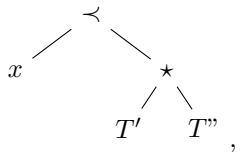


.

En appliquant la relation

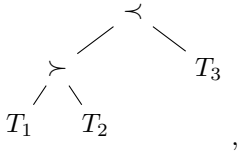
$$(\prec) \prec = \prec (\star)$$

où $\star = \prec + \succ$, on obtient



il reste à appliquer la récurrence au sous-arbre droit.

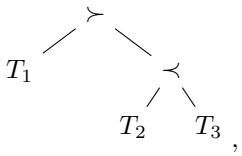
Si B est de la forme



en appliquant l'égalité

$$(\succ) \prec = \succ (\prec)$$

à l'arbre B, on obtient



ce qui ramène l'étude au cas où l'étiquette de la racine est $\succ$, et achève donc la démonstration. □

On note $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, E)$ l'ensemble des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par les éléments de E, les nœuds internes par $\prec$ et $\succ$ et évitant les motifs (4.11).

Proposition 4.2.3. *Soit $(A, \succ, \prec)$ l'algèbre dendriforme libre sur un générateur x de degré un. Alors* $\dim(A_n)$ *est inférieur ou égal à C_n pour tout $n \geq 0$ où C_n est le n^e nombre de Catalan.*

Démonstration. Les éléments de A étant tous combinaisons linéaires d'arbres évitant les motifs (4.11), la série de Hilbert de A est majorée terme à terme par la série génératrice de $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \{x\})$ que l'on note F. Déterminons F, le paramètre t comptant le nombre de feuilles. On note $F_\succ$ (*resp.* $F_\prec$) la série génératrice du sous-ensemble de $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \{x\})$ dont la racine est étiquetée par $\succ$ (*resp.* $\prec$). Ainsi, on a le système :

$$\begin{cases} F &= 1 + t + F_\succ + F_\prec, \\ F_\succ &= (t + F_\prec)(F - 1), \\ F_\prec &= t(F - 1). \end{cases} \tag{4.13}$$

En le résolvant, on obtient que F est solution de l'équation

$$X = 1 + tX^2. \tag{4.14}$$

La série F est donc égale à $\sum_{n\geq 0} C_n t^n$, où C_n est le n^{e} nombre de Catalan. Ainsi, pour $n \geq 0$,

$$\dim(A_n) \leq C_n. \tag{4.15}$$

□

Proposition 4.2.4. *La sous-algèbre dendriforme de* ***FQSym*** *engendrée par* $\mathbf{F}_1$ *est* ***PBT****. Par conséquent,* $\dim(A_n) \geq C_n$ *pour* $n \geq 0$.

Démonstration. Nous avons vu que **FQSym** est une algèbre dendriforme. Ainsi, l'application

$$\begin{array}{rlcl} ev: & A & \longrightarrow & \mathbf{FQSym} \\ & 1 & \longmapsto & 1 = \mathbf{F}_\emptyset \\ & x & \longmapsto & \mathbf{F}_1 \\ & (\prec, T_1, T_2) & \longmapsto & ev(T_1) \prec ev(T_2) \\ & (\succ, T_1, T_2) & \longmapsto & ev(T_1) \succ ev(T_2) \end{array} \tag{4.16}$$

est un morphisme d'algèbres dendriformes. Déterminons son image. Nous savons que tout arbre de $BTC(\{\prec,\succ\},\{x\})$ est combinaison linéaire d'arbres appartenant à l'ensemble $\mathcal{TD}(\{\prec,\succ\},\{x\})$. Ainsi, il suffit de calculer l'image de $\mathcal{TD}(\{\prec,\succ\},\{x\})$ par ev, et d'en déterminer une base.

Rappelons la définition de la base $(\mathbf{P}_T)_{T\in\mathcal{BT}}$ de **PBT** (cf. le paragraphe 1.3.3.5) :

$$\mathbf{P}_T = \sum_{\mathcal{T}(\sigma)=T} \mathbf{F}_\sigma, \tag{4.17}$$

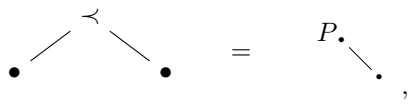
où $\mathcal{T}(\sigma)$ (cf. § 1.2.4) est la forme de l'arbre binaire de recherche de σ obtenue en lisant σ de droite à gauche.

Montrons par récurrence que l'application ev restreinte à $\mathcal{TD}(\{\prec,\succ\},\{x\})$ a pour image la base $(\mathbf{P}_T)$ de **PBT**, et est surjective.

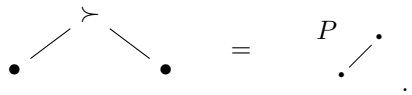
Pour $n=0$, l'arbre vide est bien envoyé sur l'arbre vide.

Pour $n=1$, l'arbre à une feuille est envoyé sur $\mathbf{F}_1 = \mathbf{P}_\bullet$.

Pour $n=2$, on a :



et



On suppose par récurrence qu'évaluer un arbre de $\mathcal{TD}(\{\prec,\succ\},\{x\})$ ayant k feuilles avec $k \leq n$–1 donne un élément de la forme P_T avec T ayant k nœuds, et qu'il s'agit d'une surjection.

Soit $T=(\bullet,T_1,T_2)$ un arbre binaire ayant n nœuds. Si T_1 est l'ensemble vide, alors :

$$\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_\bullet \prec \mathbf{P}_{T_2}. \tag{4.18}$$

En effet, Soit $\mathbf{F}_\sigma$ un terme de $\mathbf{P}_T$. Nécessairement, σ se termine par 1 car T_1 est vide et T_2 est l'arbre binaire de recherche de $\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}$. Donc, $\mathbf{F}_\sigma$ est un terme de $\mathbf{P}_\bullet \prec \mathbf{P}_{T_2}$.

Réciproquement, soit $\mathbf{F}_\sigma$ un terme de $\mathbf{P}_\bullet \prec \mathbf{P}_{T_2}$. L'opérateur $\prec$ entraîne que σ se termine par un 1, et que l'arbre droit a comme arbre binaire de recherche T_2. Donc $\mathbf{F}_\sigma$ est un terme de $\mathbf{P}_T$. Les termes des sommes n'ayant pas de multiplicité, on en déduit que

$$\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_\bullet \prec \mathbf{P}_{T_2}. \tag{4.19}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à T_2, il existe B appartenant à $\mathcal{TD}(\{\prec,\succ\},\{x\})$ à $n-1$ feuilles tel que

$$ev(B) = \mathbf{P}_{T_2}. \tag{4.20}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}_T = ev\left((\prec,x,B)\right). \tag{4.21}$$

Si T_2 est l'arbre vide, alors :

$$\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_{T_1} \succ \mathbf{P}_\bullet. \tag{4.22}$$

En effet, soit $\mathbf{F}_\sigma$ un terme de $\mathbf{P}_T$. Comme T_2 est l'arbre vide, σ se termine par n, et la permutation $\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}$ a comme arbre binaire de recherche T_1. Donc $\mathbf{F}_\sigma$ est un terme de $\mathbf{P}_{T_1} \succ \mathbf{P}_\bullet$. Réciproquement, soit $\mathbf{F}_\sigma$ un terme de $\mathbf{P}_{T_1} \succ \mathbf{P}_\bullet$. Alors, nécessairement, σ se termine par n et l'arbre binaire de recherche de $\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}$ est T_1. Donc $\mathbf{F}_\sigma$ est un terme de $\mathbf{P}_T$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à T_1, on en déduit qu'il existe un arbre A ayant $n-1$ feuilles tel que $ev(A) = \mathbf{P}_{T_1}$. On a donc :

$$ev\left((\succ,A,x)\right) = \mathbf{P}_T. \tag{4.23}$$

Sinon, T_1 et T_2 ne sont pas vides. Notons k le nombre de nœuds de T_1. Montrons que :

$$\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_{T_1} \succ \mathbf{F}_1 \prec \mathbf{P}_{T_2}. \tag{4.24}$$

Soit $\mathbf{F}_\sigma$ un terme de $\mathbf{P}_T$. L'arbre T_1 étant de taille k, on en déduit que σ se termine nécessairement par $k+1$. Le sous-mot u de σ constitué de lettres plus petite que k a comme arbre binaire de recherche T_1. De même, le sous-mot $v[k+1]$ constitué de lettres strictement plus grande que $k+1$ a comme arbre binaire de recherche T_2. Ainsi, $\mathbf{F}_u$ ($\mathbf{F}_v$) est un terme de $\mathbf{P}_{T_1}$ ($\mathbf{P}_{T_2}$). Donc, $\mathbf{F}_\sigma$ est un terme de $\mathbf{P}_{T_1} \succ \mathbf{F}_1 \prec \mathbf{P}_{T_2}$.

Réciproquement, soit $\mathbf{F}_\sigma$ un terme de $\mathbf{P}_{T_1} \succ \mathbf{F}_1 \prec \mathbf{P}_{T_2}$. Alors σ se termine par $k+1$, et le sous-mot u de σ constitué des lettres inférieures à k a comme arbre binaire de recherche T_1. De même, le sous-mot $v[k+1]$ constitué des lettres strictement plus grandes que $k+1$ a comme arbre binaire de recherche T_2. Donc $\mathbf{F}_\sigma$ est un terme de $\mathbf{P}_T$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathbf{P}_{T_1}$ et $\mathbf{P}_{T_2}$, il existe un couple (A, B) appartenant à $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \{x\})$ où A (*resp.* B) a k (*resp.* $n-k-1$) feuilles tel que :

$$\begin{array}{rcl} ev(A) & = & \mathbf{P}_{T_1} \\ ev(B) & = & \mathbf{P}_{T_2}. \end{array} \tag{4.25}$$

Ainsi, on a :

$$ev\left((\succ, A, (\prec, x, B))\right) = \mathbf{P}_T. \tag{4.26}$$

L'application ev est donc bien une surjection de $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \{x\})$ sur la base $(\mathbf{P}_T)_{T \in \mathcal{BT}}$ de **PBT**. Il en résulte que **PBT** est une algèbre dendriforme sur un générateur, et que $\dim(A_n) \geq C_n$. □

Soit $(A, \succ, \prec)$ une algèbre dendriforme libre sur un générateur de degré un. Grâce à la proposition 4.2.3, nous savons que pour tout $n \geq 0$:

$$\dim(A_n) \leq C_n, \tag{4.27}$$

et grâce à la proposition 4.2.4, on a :

$$\dim(A_n) \geq C_n. \tag{4.28}$$

Ainsi, la série de Hilbert de l'algèbre dendriforme libre sur un générateur de degré un est la série $F = \sum_{n \geq 0} C_n t^n$. Comme **PBT** est une algèbre dendriforme sur un générateur ayant comme série de Hilbert F, on en déduit qu'elle est libre.

Comme on pourra constater dans les prochaines sections, ce schéma de preuve pour déterminer la série de Hilbert d'une $\mathcal{P}$-algèbre sur un générateur est généralisable à d'autres situations :

— on commence par trouver une série génératrice majorante grâce aux règles de réécriture,
— puis on trouve une réalisation combinatoire de l'algèbre en question,
— on évalue les arbres à motifs interdits dans cette algèbre pour avoir la minoration,
— et enfin, on conclut.

4.3 Étude de l'algèbre dendriforme FQSym

Nous avons vu dans l'exemple 110 que **FQSym** est une algèbre dendriforme. Mais nous ignorons si elle est libre ou non en tant qu'algèbre dendriforme. Le travail effectué sur la structure des arbres de l'algèbre dendriforme libre sur un générateur nous sera d'une grande utilité.

Proposition 4.3.1. *Soit $\mathcal{A} = (A, \succ, \prec)$ une algèbre dendriforme. L'algèbre $\mathcal{A}$ est libre et engendrée par une famille homogène $\mathcal{F}$ si et seulement si l'application ev restreinte à $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \mathcal{F})$ a pour image une base de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Supposons que l'algèbre $\mathcal{A}$ est libre et engendrée par la famille $\mathcal{F}$. Comme l'algèbre est dendriforme, nous savons que toute évaluation d'un arbre de $\mathcal{ET}(\mathcal{A})$ est une combinaison linéaire de $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est une base homogène de $\mathcal{A}$. Or, $\mathcal{A}$ est engendrée par $\mathcal{F}$. Donc les éléments de $\mathcal{B}$ sont des évaluations de combinaisons linéaires d'arbres de $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \mathcal{F})$. Ainsi, les évaluations des arbres de $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \mathcal{F})$ forment une famille génératrice (pour la structure d'espace vectoriel) de $\mathcal{A}$. Or, $\mathcal{A}$ est libre sur $\mathcal{F}$. Les évaluations des arbres de $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \mathcal{F})$ forment donc une famille libre et donc une base de $\mathcal{A}$.

Réciproquement, la famille $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{A}$ car l'application ev restreinte à $\mathcal{TD}(\{\prec, \succ\}, \mathcal{F})$ a pour image une partie génératrice de $\mathcal{A}$. Cette application étant injective, on en déduit l'indépendance de la famille. □

Pour montrer que **FQSym** est une algèbre dendriforme libre, nous cherchons une famille $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{TD}(\{\prec,\succ\},\mathcal{F})$ a pour image une base de **FQSym**. Le schéma de preuve pour trouver la famille $\mathcal{F}$ est de trouver un ordre sur les permutations tel que les lois $\prec$ et $\succ$ se réduisent à des lois de type "concaténation", ceci permettant de définir une notion de factorisation sur les permutations reliée aux motifs interdits des arbres de $\mathcal{TD}(\{\prec,\succ\},\mathcal{F})$.

L'ordre considéré sur les permutations est l'ordre lexicographique.

Proposition 4.3.2. *Soient respectivement I et J un sous-ensemble de $\mathfrak{S}_n$ et un sous-ensemble de $\mathfrak{S}_m$ ayant comme minimum σ et τ. Alors le minimum de*
- *$I \succ J$ est $\sigma\tau[n]$;*
- *$I \prec J$ est $\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}\tau[n]\sigma_n$.*

Démonstration. les lettres de $\tau[n]$ étant toutes plus grandes que les lettres de σ, il s'agit des dispositions des lettres les plus petites possibles sous les hypothèses données.

□

Définition 4.3.3. Soient respectivement σ et τ une permutation de taille n et une de taille m. On définit les produits réduits suivants :
- $\sigma \prec' \tau = \sigma\tau[n]$;
- $\sigma \succ' \tau = \sigma_1\cdots\sigma_{n-1}\tau[n]\sigma_n$.

Exemple 112. Pour $\sigma = 31452$ et $\tau = 2431$, on a :

$$\sigma \prec' \tau = 314579862, \tag{4.29}$$

et

$$\sigma \succ' \tau = 314527986. \tag{4.30}$$

Proposition 4.3.4. *Soit un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}$. Les évaluations des arbres de l'ensemble $\mathcal{TD}(\{\succ,\prec\},\mathcal{F})$ forment une base de **FQSym** si et seulement si les évaluations des arbres de $\mathcal{TD}(\{\succ',\prec'\},\mathcal{F})$ forment une base de **FQSym**.*

Démonstration. Constatons que l'on a de manière générale :

$$ev\left((\star,T_1,T_2)\right) = \min\left(ev(T_1)\right) \star' \min\left(T_2\right) + \sum_{\tau>\min(ev(T_1))\star'\min(T_2)} \alpha_\tau \mathbf{F}_\tau. \tag{4.31}$$

Donc,

$$ev\left((\star,T_1,T_2)\right) = ev\left((\star',T_1',T_2')\right) + \sum_{\tau>\min(ev(T_1))\star'\min(T_2)} \alpha_\tau \mathbf{F}_\tau, \tag{4.32}$$

où $\star$ appartient à $\{\prec,\succ\}$ et où T_1' (T_2') est obtenu en remplaçant les étiquettes égales à $\star$ de T_1 (T_2) par $\star'$. Donc, en ordonnant les permutations par ordre lexicographique, la matrice de passage d'une famille à l'autre est inversible car triangulaire (grâce à l'ordre) et avec des 1 sur la diagonale. D'où le résultat annoncé. □

Définition 4.3.5. Soit E un sous-ensemble de $\{\prec',\succ'\}$. On dit qu'une permutation σ est *E-connexe* si pour toute loi $\star$ de E

$$(\sigma = u\star v) \Longrightarrow (u = \sigma \text{ ou } v = \sigma). \tag{4.33}$$

On dit qu'une permutation est *indécomposable* si elle est $\{\prec',\succ'\}$-connexe.

Exemple 113. La permutation 3412 est indécomposable, 2341 est $\{\succ'\}$-connexe, mais elle n'est pas $\{\prec'\}$-connexe.

Proposition 4.3.6. *Soit σ une permutation. Alors :*
- *σ est indécomposable ;*
- *ou bien $\sigma = u \succ' v$, avec v $\{\succ'\}$-connexe ;*
- *ou bien $\sigma = u \prec' v$, avec u indécomposable. Chacun de ces cas s'excluent mutuellement, et les permutations u et v sont uniques si elle existent.*

Démonstration. Soient u, u',v, v' quatre permutations de tailles respectives n, n', m, m'. Supposons que l'on ait :

- $u \succ' v = u' \prec' v'$, où v est $\{\succ'\}$-connexe, et u' indécomposable. Si $m > m'$, autrement dit $n < n'$ alors u' aurait comme préfixe strict u qui est une permutation. Donc u' serait une permutation de la forme $u \succ w$ et ne serait donc pas indécomposable. Si $n \geq n'$, en comparant les dernières valeurs, on a

$$v'[n] > n \geq n' \geq u_{n'}, \tag{4.34}$$

  ce qui est absurde.
- Si $u \succ' v = u' \succ' v'$, autrement dit,

$$uv[n] = u'v'[n']. \tag{4.35}$$

  La $\{\succ'\}$ connexité de v (*resp.* v') est contredite si $n < n'$ (*resp.* $n > n'$). Il en résulte que nécessairement, $u = u'$ et $v = v'$.
- Si $u \prec' v = u' \prec' v'$, et $n > n'$, alors l'indécomposabilité de u est contredite, car on aurait $u = u' \prec \alpha$, où $u = u_1 \cdots u_{n'-1}\alpha[n']u_{n'}$. Par symétrie, on en déduit le résultat pour $n < n'$.

Ainsi, pour une permutation σ, soit elle se factorise de manière unique sous l'une des formes proposées, soit elle est indécomposable. □

On note $\mathcal{I}p$ l'ensemble des permutations indécomposables.

Proposition 4.3.7. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} ev: & \mathcal{TD}\left(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p\right) & \longrightarrow & \mathfrak{S} \\ & T & \mapsto & ev(T) \end{array} \tag{4.36}$$

est bijective.

Démonstration. Montrons la surjectivité par récurrence sur la taille de la permutation. Pour $n = 1$, on a bien

$$ev\left((1, \emptyset, \emptyset)\right) = 1. \tag{4.37}$$

On suppose que l'application ev est surjective pour les permutations de taille $k \leq n-1$. Soit σ une permutation de taille n. Si elle est indécomposable, alors $T = (\sigma, \emptyset, \emptyset)$ appartient à $\mathcal{TD}\left(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p\right)$. Or,

$$ev(T) = \sigma, \tag{4.38}$$

et σ a un antécédent par ev. Sinon, σ se factorise sous l'une des forme de la proposition 4.3.6.

Si $\sigma = u \succ' v$ avec v $\{\succ'\}$-connexe, par hypothèse de récurrence, il existe T_1 et T_2 deux arbres de $\mathcal{TD}\left(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p\right)$ tels que

$$ev(T_1) = u, \tag{4.39}$$

et

$$ev(T_2) = v. \tag{4.40}$$

Or, v étant $\{\succ'\}$-connexe, la racine de T_2 n'est donc pas étiquetée par $\succ'$. Donc l'arbre T égal à $(\succ', T_1, T_2)$ est un élément de $\mathcal{TD}\left(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p\right)$. Et on a :

$$ev(T) = \sigma. \tag{4.41}$$

Si $\sigma = u \prec' v$ avec u indécomposable, par hypothèse de récurrence, il existe T_1 et T_2 deux arbres de $\mathcal{TD}\left(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p\right)$ tels que

$$ev(T_1) = u, \tag{4.42}$$

et

$$ev(T_2) = v. \tag{4.43}$$

Or, u étant indécomposable, T_1 est réduit à une feuille. Donc l'arbre $T = (\succ', T_1, T_2)$ est un élément de $\mathcal{TD}\left(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p\right)$. Et on a :

$$ev(T) = \sigma. \tag{4.44}$$

Donc, l'application ev est bien surjective.

Montrons par récurrence l'injectivité. La permutation $\sigma = 1$ a bien un unique antécédent. On suppose que toute permutation σ de taille $k \leq n-1$ admet au plus un antécédent par ev, que

les permutations $\{\succ'\}$-connexes ont comme antécédent un arbre dont la racine n'est pas étiquetée par $\succ'$, et que les permutations indécomposable on comme antécédent des feuilles.

Soit σ une permutation de taille n, Si elle est indécomposable, elle admet un unique antécédent, qui est une feuille étiquetée par elle. Sinon, il existe $T = (\star, T_1, T_2)$ élément de $\mathcal{TD}(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p)$ tel que

$$ev(T) = \sigma. \tag{4.45}$$

Si $\star = \succ'$, alors la racine de T_2 n'est pas étiquetée par $\succ'$, donc

$$v := ev(T_2) \tag{4.46}$$

est $\succ'$-connexe. Ainsi, en posant $u := ev(T_1)$, on obtient

$$\sigma = u \succ' v, \tag{4.47}$$

avec v' $\{\succ'\}$-connexe. Or, cette factorisation de σ est unique d'après la proposition 4.3.6. L'arbre T_1 est donc le seul élément de $\mathcal{TD}(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p)$ ayant comme évaluation u, et T_2 est l'unique arbre ayant comme évaluation v, et $\star = \succ'$.

De même, si $\star = \prec'$, alors T_1 est réduit à une feuille et

$$u := ev(T_1) \tag{4.48}$$

est indécomposable. En posant $v := ev(T_2)$, on a :

$$\sigma = u \prec' v, \tag{4.49}$$

avec u indécomposable. Or, cette décomposition est unique. Nécessairement, l'arbre T_1 est l'unique élément de $\mathcal{TD}(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p)$ tel que $ev(T_1) = u$, T_2 est l'unique arbre tel que $ev(T_2) = v$, et $\star = \prec'$. D'où l'injectivité de l'application ev. □

Proposition 4.3.8. *Les évaluations de $\mathcal{TD}(\{\succ, \prec\}, \mathcal{I}p)$ forment une base de **FQSym**. En particulier, l'algèbre dendriforme **FQSym** est libre et une partie génératrice est donnée par $(\mathbf{F}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{I}p}$.*

Démonstration. Grâce à la proposition 4.3.4, il suffit d'évaluer les arbres de $\mathcal{TD}(\{\succ', \prec'\}, \mathcal{I}p)$ Or, d'après la proposition 4.3.7 est bijective. Donc, on en déduit que ces évaluations d'arbres donnent bien une base de **FQSym**. En conclusion, l'algèbre **FQSym** est une algèbre dendriforme libre, et les générateurs sont donnés par les permutations indécomposables. □

Remarque 40. Le schéma de preuve pour montrer qu'une $\mathcal{P}$-algèbre est libre suit la même logique pour les prochains exemples :

— on cherche une bonne famille d'arbres ;
— on établit un ordre sur nos objets ;
— on définit de nouvelles lois produits vérifiant une compatiblité avec cet ordre ;
— les problèmes de liberté sur les lois réduites et sur les anciennes lois sont équivalents ;
— un théorème de factorisation découle de la définition de ces lois réduites ;
— ce théorème est une preuve combinatoire de la liberté de l'algèbre de départ.

Concernant la suite, la difficulté ne réside pas dans la méthode utilisée, mais dans la technicité des preuves : en effet, nous considérerons plus de lois et l'ordre sous-jacent aux objets peut être plus complexe.

4.4 Les 2-permutations et les quadrialgèbres

Introduites par Aguiar et Loday dans [AL04], les quadrialgèbres apparaissent naturellement lorsque l'on s'intéresse à un couple d'opérateurs de Baxter commutant entre eux. Elles sont aussi une généralisation des algèbres dendriformes et de nombreux exemples de telles algèbres sont donnés dans [AL04]. À la fin de l'article [AL04], une formule explicite pour la série de Hilbert de la quadrialgèbre libre sur un générateur, la "Koszulité" de cette algèbre et une réalisation combinatoire sont proposées en conjectures. Valette dans [Val08] a pu démontrer deux d'entre elles, grâce à la dualité de Koszul et à des résultats généraux concernant les produits de Manin sur les opérades. Ainsi, il donne une preuve totalement algébrique de l'égalité entre la série de Hilbert de la quadrialgèbre libre sur un générateur et la série génératrice des graphes connexes

étiquetés sans croisement. La réalisation donnée est celle d'un découpage du shuffle décalé sur les permutations en quatre opérations. Cependant, la liberté de la quadrialgèbre engendrée par la permutation 12 restait encore à prouver ([AL04]).

Dans la suite, on donne une preuve combinatoire pour obtenir la série de Hilbert de la quadrialgèbre libre sur un générateur puis on montre que les 2-permutations sont naturellement munies d'une structure de quadrialgèbre libre, et qui entraîne donc le caractère libre de la quadrialgèbre engendrée par 12.

4.4.1 Définitions générales

Soit V est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, muni de quatre applications bilinéaires $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]$. On pose : $\star = \prec + \succ$. On dit que $(V, \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right])$ est une quadrialgèbre si les applications bilinéaires vérifient les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
(\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\star\\ \star\end{smallmatrix}\right]) & (\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\star\\ \prec\end{smallmatrix}\right]) & (\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \star\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\star\\ \succ\end{smallmatrix}\right]) \\
(\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \star\end{smallmatrix}\right]) & (\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]) & (\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \star\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]) \\
(\left[\begin{smallmatrix}\star\\ \prec\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \star\end{smallmatrix}\right]) & (\left[\begin{smallmatrix}\star\\ \succ\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]) & (\left[\begin{smallmatrix}\star\\ \star\end{smallmatrix}\right])\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right](\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right])
\end{array} . \tag{4.50}$$

Définition 4.4.1. Une 2-*permutation* est un mot de longueur $2n$ où les lettres de 1 à n sont répétées exactement deux fois. La taille d'une 2-permutation est sa valeur maximale. On note $\mathfrak{S}^{(2)}$ l'ensemble des 2-permutations.

Exemple 114. 123321 est une 2-permutation de longueur 6.

Remarque 41. cette classe combinatoire a été définie dans [NT14] dans un contexte de généralisation de constructions algébriques.

Soient $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_m$ deux 2-permutations . Rappelons les différentes lois :

$$\begin{array}{lll}
u_1 \cdots u_n \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right] v_1 \cdots v_m &=& v_1(u \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v_2 \cdots v_{m-1})v_m \\
u_1 \cdots u_n \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right] v_1 \cdots v_m &=& v_1(u_1 \cdots u_{n-1} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v_2 \cdots v_m)u_n \\
u_1 \cdots u_n \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right] v_1 \cdots v_m &=& u_1(u_2 \cdots u_n \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v_1 \cdots v_{m-1})v_m \\
u_1 \cdots u_n \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right] v_1 \cdots v_m &=& u_1(u_2 \cdots u_{n-1} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v)u_n
\end{array} . \tag{4.51}$$

Il est possible de vérifier que $(\mathfrak{S}^{(2)}, \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right])$ est bien une quadrialgèbre. Nous allons simplement vérifier l'une des relations, le principe étant le même pour les autres relations.

Soient u, v, w trois 2-permutations non vides, de longueurs respectives $2n$, $2m$, $2r$. Alors :

$$\begin{array}{lll}
(u\left[\begin{smallmatrix}\star\\ \prec\end{smallmatrix}\right]v)\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]w &=& ((u_1 \cdots u_{2n-1} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v)u_{2n}) \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right] w \\
&=& w_1[n+m]\,(u_1 \cdots u_{2n-1} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, w_2 \cdots w_{2r})\, u_{2n},
\end{array} \tag{4.52}$$

et

$$\begin{array}{lll}
u\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right](v\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \star\end{smallmatrix}\right]w) &=& u\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right] (w_1[m]\,(v \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, w_2 \cdots w_{2r})) \\
&=& w_1[m+n]\,(u_1 \cdots u_{2n-1} \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, v \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, w_2 \cdots w_{2r})\, u_{2n}
\end{array} . \tag{4.53}$$

Ainsi, les égalités de chacune des ces lois consistent à se fixer les lettres de début et fin, suivant qu'elles proviennent du premier, deuxième, ou troisième mot. D'où neuf relations.

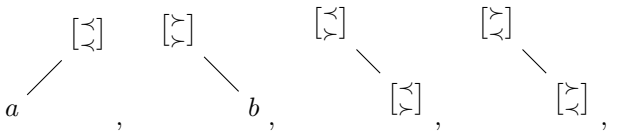
On peut donc considérer la quadrialgèbre engendrée par la 2-permutation 11. Pour montrer qu'elle est libre, on va procéder de la façon suivante :

1. donner des arbres d'évaluations "canoniques",
2. calculer la série génératrice de ces arbres, et obtenir ainsi un majorant des dimensions des composantes homogènes,
3. montrer que les évaluations de ces arbres dans les 2-permutations forment une famille libre, et avoir une minoration des dimensions des composantes homogènes,
4. constater qu'il s'agit des mêmes nombres et conclure.

4.4.2 Une famille d'arbres "canoniques"

4.4.2.1 Série génératrice d'une famille d'arbres

Considérons les arbres binaires complets évitant les motifs suivants :



(4.54)

où $a \in \{[\prec\prec], [\prec\succ], [\succ\prec], [\succ\succ]\}$, et $b \in \{[\prec\succ], [\succ\prec], [\succ\succ]\}$ et notons l'ensemble de ces arbres $\mathcal{T}q$. Soit $F(t)$ la série génératrice de $\mathcal{T}q$. On notera F_a la série des arbres qui commencent par la racine a. Ainsi, on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} F & = & t + F_{[\prec\prec]} + F_{[\prec\succ]} + F_{[\succ\prec]} + F_{[\succ\succ]}, \\ F_{[\prec\prec]} & = & tF, \\ F_{[\succ\succ]} & = & F(t + F_{[\prec\prec]}), \\ F_{[\succ\prec]} & = & F(F - F_{[\succ\prec]}), \\ F_{[\prec\succ]} & = & F(F - F_{[\prec\succ]}). \end{cases} \tag{4.55}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} F_{[\prec\prec]} & = & tF, \\ F_{[\succ\succ]} & = & tF(F+1), \\ F_{[\succ\prec]} & = & \frac{F^2}{1+F}, \\ F_{[\prec\succ]} & = & \frac{F^2}{1+F}. \end{cases} \tag{4.56}$$

La série F vérifie alors l'équation :

$$F = t + tF + tF(F+1) + \frac{2F^2}{1+F}. \tag{4.57}$$

En arrangeant l'expression, on a :

$$t(F+1)^3 + F^2 - F = 0. \tag{4.58}$$

Que l'on peut réécrire :

$$t(F+1)^3 + (F+1)^2 - 3(F+1) + 2 = 0. \tag{4.59}$$

Or, d'après [FN99], l'équation fonctionnelle vérifiée par les graphes connexes sans croisement est

$$C^3 + C^2 - 3tC + 2t^2 = 0. \tag{4.60}$$

Les deux équations sont identiques au changement de variable près

$$D = \frac{C - t}{t}. \tag{4.61}$$

On a donc :

$$C = t(1 + D). \tag{4.62}$$

Ainsi, on obtient :

$$t^3(1+D)^3 + t^2(1+D)^2 - 3t^2(1+D) + 2t^2 = 0. \tag{4.63}$$

Et donc,

$$t(1+D)^3 + (1+D)^2 - 3D - 1 = 0. \tag{4.64}$$

Ainsi, D et F vérifient la même équation. Or cette équation admet une unique solution à coefficients entiers positifs. D et F sont donc égales. Ainsi le nombre d'arbres à n feuilles qui évitent les motifs (4.54) est exactement le nombre de graphes connexes étiquetés à $n+1$ sommets sans croisement.

4.4.2.2 Quadrialgèbre libre sur un générateur

On représente les éléments de la quadrialgèbre $\mathcal{Q}$ libre sur un générateur x par les éléments de $\mathcal{ET}(\mathcal{A})$ modulo les relations (4.51), Ainsi, les éléments sont des combinaisons linéaires d'arbres binaires complets, dont les nœuds internes sont étiquetés par des éléments de $\{\left[\begin{smallmatrix}\succ\\\prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\\succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\\succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\\prec\end{smallmatrix}\right]\}$ et les feuilles par x.

Exemple 115. La figure 4.3 représente un élément de $\mathcal{Q}$.

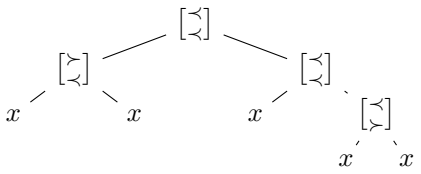
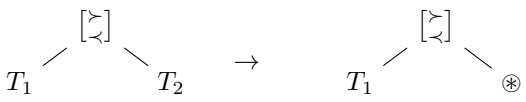


FIGURE 4.3 – Une représentation sous forme d'arbre d'un élément de $\mathcal{Q}$.

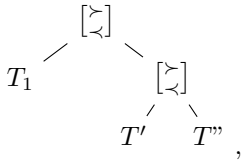
Proposition 4.4.2. *Soit T un arbre binaire complet dont les nœuds internes sont étiquetés par $\{\left[\begin{smallmatrix}\prec\\\prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\\succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\\prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\\succ\end{smallmatrix}\right]\}$. Alors, sous les relations* (4.51)*, T est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{T}q$.*

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de feuilles. Pour $n = 1,\ 2$ il n'y a pas de problème. Le cas $n = 3$ résulte des relations (4.51). On suppose que pour $n > 3$, tout arbre ayant au plus $n-1$ feuilles est une combinaison linéaire d'arbres évitant (4.54). Soit un arbre T ayant n feuilles. Notons T_1 le sous-arbre gauche et T_2 le sous-arbre droit. Quatre possibilités se profilent, suivant l'étiquette de la racine.

- Si la racine est étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\\prec\end{smallmatrix}\right]$:



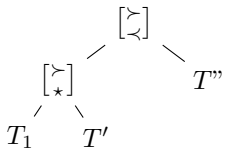
Appliquons l'hypothèse de récurrence sur T_2. Ainsi, $\circledast$ est une combinaison linéaire d'arbres évitant les motifs (4.54). Il se pourrait tout de même que certains de ces arbres T soient de la forme :



la racine de T" n'étant pas étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\\prec\end{smallmatrix}\right]$. En effet, le sous-arbre droit de T évite les motifs par hypothèse de récurrence. On applique alors la règle de réécriture

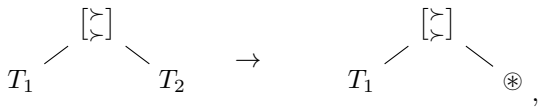
$$(\begin{bmatrix}\succ\\\star\end{bmatrix})\begin{bmatrix}\prec\\\succ\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\succ\\\succ\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}\prec\\\succ\end{bmatrix}), \tag{4.65}$$

on obtient



Enfin, en appliquant l'hypothèse de récurrence au sous-arbre gauche, il en découle que les arbres dont la racine est étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\\prec\end{smallmatrix}\right]$ se réécrivent bien en une combinaison linéaire d'arbres évitant les motifs (4.54).

- Le raisonnement est identique si la racine de l'arbre initial est étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]$.
- Si la racine est étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]$, de la même façon, en appliquant les règles de réécriture au sous-arbres droit, on a



où $\circledast$ est une combinaison linéaire d'arbres évitant les motifs (4.54). Par linéarité suivant les nœuds, nous obtenons une combinaison linéaire d'arbres T' dont l'étiquette de la racine est $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]$, et dont le fils droit appartient à $\mathcal{T}q$. Il y a alors plusieurs possibilités concernant l'étiquette racine du fils droit T'. S'il s'agit d'un élément b de $\{\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]\}$, en appliquant la relation correspondante au niveau de la racine de T',

$$(\begin{bmatrix}\succ\\ \star\end{bmatrix})\begin{bmatrix}\prec\\ \succ\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\succ\\ \succ\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}\prec\\ \succ\end{bmatrix}) \tag{4.66}$$

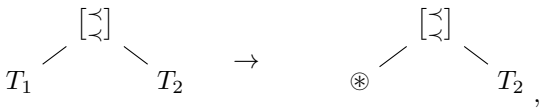
ou

$$(\begin{bmatrix}\star\\ \succ\end{bmatrix})\begin{bmatrix}\succ\\ \prec\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\succ\\ \succ\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}\succ\\ \prec\end{bmatrix}), \tag{4.67}$$

on se ramène au cas où la racine de T' est étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]$ ou $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]$. Si la racine de T' est étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]$, on applique la relation

$$(\begin{bmatrix}\star\\ \star\end{bmatrix})\begin{bmatrix}\succ\\ \succ\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\succ\\ \succ\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}\succ\\ \succ\end{bmatrix}), \tag{4.68}$$

comme le fils droit de T' (noté T'_d) évite les motifs (4.54), la racine du fils droit de T'_d n'est pas étiquetée par un élément de $\{\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]\}$. Et donc les motifs à éviter ne peuvent pas apparaître dans le sous-arbre droit. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-arbre gauche.
- Si la racine est étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]$, on applique l'hypothèse de récurrence au sous-arbre droit :



avec $\circledast$ une combinaison linéaire d'arbres évitant les motifs (4.54). Par linéarité, nous obtenons une combinaison linéaires d'arbres T' dont la racine est étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]$ et dont le sous-arbre gauche T'_g appartient à $\mathcal{T}q$. Si la racine de T'_g est étiquetée par un élément de $\{\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]\}$, en appliquant l'une des relations correspondantes à l'arbre T' (dont la racine était étiqueté par $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]$)

$$(\begin{bmatrix}\prec\\ \succ\end{bmatrix})\begin{bmatrix}\prec\\ \prec\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\prec\\ \succ\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}\star\\ \prec\end{bmatrix}) \tag{4.69}$$

ou

$$(\begin{bmatrix}\succ\\ \prec\end{bmatrix})\begin{bmatrix}\prec\\ \prec\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\succ\\ \prec\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}\prec\\ \star\end{bmatrix}) \tag{4.70}$$

ou

$$(\begin{bmatrix}\succ\\ \succ\end{bmatrix})\begin{bmatrix}\prec\\ \prec\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\succ\\ \succ\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}\prec\\ \prec\end{bmatrix}) \tag{4.71}$$

on se ramène à l'un des cas où la racine de l'arbre T' n'est pas étiquetée par $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]$. Si la racine de T'_g est $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]$, on sait que son sous-arbre gauche est réduit à une feuille, et donc en appliquant

$$(\begin{bmatrix}\prec\\ \prec\end{bmatrix})\begin{bmatrix}\prec\\ \prec\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\prec\\ \prec\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}\star\\ \star\end{bmatrix}) \tag{4.72}$$

à l'arbre T', le fils gauche de l'arbre T' est une feuille. Ainsi, il n'y a pas le motif interdit dans le sous-arbre gauche. Il reste alors à appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-arbre droit.

□

En montrant que tout élément de $\mathcal{Q}$ s'écrit comme combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{T}q$ dont les feuilles ont été étiquetées par x, on en déduit que la série de Hilbert de $\mathcal{Q}$ est majorée terme à terme par la série génératrice de $\mathcal{T}q$. Il reste dès lors à déterminer la minoration. Comme on a une réalisation combinatoire grâce aux 2-permutations, il suffit d'évaluer ces arbres avec comme feuille 11, et de montrer que ces évaluations forment une famille libre. Une méthode simple mais fondamentale pour montrer qu'une famille de vecteurs est libre, est de montrer qu'elle est échelonnée. Ainsi, en trouvant un bon ordre sur les 2-permutations, nous déterminons des lois réduites pour une manipulation plus simple des 2-permutations. On considère l'ordre lexicographique sur les 2-permutations.

4.4.3 Quadrialgèbre des 2-permutations

4.4.3.1 Un théorème de pseudo-factorisation sur les 2-permutations

Proposition 4.4.3. *Soient I et J deux ensembles de 2-permutations ayant comme minimaux respectifs $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_{2n}$ et $\tau = \tau_1 \cdots \tau_{2m}$. Alors le minimum de :*
- *$I\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]J$ est $\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{2n-1}\tau[n]\sigma_{2n}$;*
- *$I\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]J$ est $\sigma\tau[n]$;*
- *$I\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]J$ est $\tau_1[n]\sigma_1 \cdots \sigma_{2n-1}\tau_2[n] \cdots \tau_{2m}[n]\sigma_{2n}$;*
- *$I\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]J$ est $\tau_1[n]\sigma\tau_2[n] \cdots \tau_{2m}[n]$.*

Démonstration. Il s'agit pour chacun des cas de la disposition des lettres pour obtenir la plus petite 2-permutation possible. □

Découlant de la précédente proposition, on définit quatre produits de types concaténation :
- $\sigma\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_{2n-1}\tau[n]\sigma_{2n}$,
- $\sigma\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_{2n}\tau[n]$,
- $\sigma\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'\tau = \tau_1[n]\sigma\tau_2[n] \cdots \tau_{2m}[n]$,
- $\sigma\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\tau = \tau_1[n]\sigma\tau_2[n] \cdots \tau_{2m}[n]$.

Et pour chaque produit, vient une notion de connexité.

Définition 4.4.4. Soit E un sous-ensemble de $\{\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\}$. On dit qu'une 2-permutation σ est *E-connexe*, si pour chaque loi $\star$ de E on a :

$$(\sigma = u \star v) \Rightarrow (u = \sigma \text{ ou } v = \sigma).$$

On dit que σ est *indécomposable* si elle est $\{\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\}$-connexe.

Exemple 116. 21332441 est $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'$-connexe, mais pas $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'$-connexe.

Grâce à ces différentes notions de connexité, il vient aussi un théorème de factorisation :

Théorème 4.4.5. *Soit σ une 2-permutation. Alors :*
- *σ est indécomposable ;*
- *ou bien $\sigma = u\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'v$, avec u indécomposable ;*
- *ou bien $\sigma = u\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'v$, avec v $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'$-connexe ;*
- *ou bien $\sigma = u\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'v$, avec v $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'$-connexe ;*
- *ou bien $\sigma = u\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'v$, avec v $\{\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\}$-connexe.*

Chacun de ces cas s'excluent mutuellement, u et v étant unique s'ils existent.

Démonstration. Montrons l'unicité d'une telle décomposition sous réserve d'existence. Dans la suite, u, v, u', v' sont des 2-permutations de tailles respectives $2n$, $2m$, $2n'$, $2m'$, et on pose $\overline{v} = v[n]$, $\overline{v'} = v'[n']$.

- Si on a $u\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'v = u'\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'v'$, avec u indécomposable et v' $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'$-connexe :
  - si $n' < n$, l'indécomposabilité de u est contredite, car elle ne serait pas $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'$-connexe ;

— si $n' \geq n$, on a :

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 \cdots u_{2n-1} & \overline{v_1} \cdots & & \overline{v}_{2m} & u_{2n} \\ = & u'_1 \cdots u'_{2n'-1} & u'_{2n'} \cdots \overline{v'_1} \cdots & & \overline{v}_{2m'-1} & \overline{v'}_{2m'} \end{array} \tag{4.73}$$

u_{2n} est une lettre qui apparaît avant la position $2n-1$, dans la première écriture, mais dans la deuxième, comme elle est égale à $\overline{v'}_{2m'}$, elle doit apparaître après la position $2n'$, ce qui est absurde.

- Si on a $u\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]' v = u'\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]' v'$ avec u' indécomposable et v' $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'$-connexe :

— si $n \geq n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots u_{2n-1} & \cdots & \overline{v}_1 \cdots \overline{v}_{2m} & u_{2n} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'} & \overline{v'}_2 \cdots & \cdots\cdots \overline{v'}_{2m'} & u'_{2n'} \end{array}, \tag{4.74}$$

l'indécomposabilité de u est contredite, car elle ne serait pas $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'$-connexe ;

— si $n < n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots u_{2n-1} & \overline{v}_1 \cdots & \overline{v}_{2m} & u_{2n} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'-1} & \cdots\cdots \overline{v'}_2 \cdots & \overline{v'}_{2m'} & u'_{2n'} \end{array} \tag{4.75}$$

il y a contradiction en comparant la deuxième occurrence de $u_1 = \overline{v'}_1$.

- Si on a $u\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]' v = u'\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]' v'$ avec u' indécomposable et v' $\{\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\}$-connexe :

— si $n \geq n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots u_{2n-1} & \cdots & \overline{v}_1 \cdots \overline{v}_{2m} & u_{2n} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'} & \overline{v'}_2 \cdots & \cdots\cdots \overline{v'}_{2m'} & u'_{2n'} \end{array}, \tag{4.76}$$

l'indécomposabilité de u est contredite, car elle ne serait pas $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'$-connexe ;

— si $n < n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots u_{2n-1} & \overline{v}_1 \cdots & \overline{v}_{2m} & u_{2n} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'-1} & \cdots\cdots \overline{v'}_2 \cdots & \overline{v'}_{2m'} & u'_{2n'} \end{array} \tag{4.77}$$

il y a contradiction en comparant la deuxième occurrence de $u_1 = \overline{v'}_1$.

- Si on a $u\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]' v = u'\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]' v'$ avec v $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'$-connexe, et v' $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'$-connexe :

— si $n \geq n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots & \cdots u_{2n} & \overline{v}_1 \cdots & \overline{v}_{2m} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'-1} & \overline{v'}_2 \cdots & \cdots\cdots \overline{v'}_{2m'} & u'_{2n'} \end{array}, \tag{4.78}$$

il y a contradiction en comparant la position de la première occurrence de $u'_{2n} = \overline{v}_{2m}$.

— si $n < n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots u_{2n-1} u_{2n} & \overline{v}_1 \cdots & \cdots \overline{v}_{2m-1} & \overline{v}_{2m} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'-1} & \cdots\cdots \overline{v'}_2 \cdots & \cdots \overline{v'}_{2m'} & u'_{2n'} \end{array} \tag{4.79}$$

il y a contradiction en comparant la position de la deuxième occurrence de $u_1 = \overline{v'}_1$.

- Si on a $u\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]' v = u'\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]' v'$ avec v $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'$-connexe, et v' $\{\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\}$-connexe :

— si $n \geq n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots & \cdots u_{2n} & \overline{v}_1 \cdots & \overline{v}_{2m} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'-1} u'_{2n'} & \overline{v'}_2 \cdots & \cdots\cdots & \overline{v'}_{2m'} \end{array}, \tag{4.80}$$

v' ne serait alors pas $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'$-connexe,

— si $n < n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots u_{2n} & \overline{v}_1 \cdots & & \cdots \overline{v}_{2m} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'-1} & \cdots u'_{2n'} \cdots \overline{v'}_2 \cdots & & \cdots \overline{v'}_{2m'} \end{array} \tag{4.81}$$

il y a contradiction en comparant la position de la deuxième occurrence de $u_1 = \overline{v'}_1$.

- Si on a $u\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]' v = u'\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]' v'$ avec v $\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'$-connexe, et v' $\{\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]',\ \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\}$-connexe :

— si $n \geq n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & \overline{v_1} u_1 u_2 \cdots & \cdots u_{2n-1} & \overline{v}_2 \cdots \overline{v_2 m} & u_{2n} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'-1} u'_{2n'} & \overline{v'}_2 \cdots & \cdots\cdots & \overline{v'}_{2m'} \end{array}, \tag{4.82}$$

v' ne serait alors pas $\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'$-connexe,

— si $n < n'$,

$$\begin{array}{rcccc} & u_1 u_2 \cdots u_{2n} & \overline{v}_1 \cdots & & \cdots \overline{v}_{2m} \\ = & \overline{v'}_1 u'_1 \cdots u'_{2n'-1} & \cdots u'_{2n'} \cdots \overline{v'}_2 \cdots & & \cdots \overline{v'}_{2m'} \end{array} \tag{4.83}$$

il y a contradiction en comparant la position de la deuxième occurrence de $u_1 = \overline{v'}_1$.

Concernant les égalités du type $u \circledast v = u' \circledast v'$ avec $\circledast$ dans $\{\left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]', \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]', \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]', \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]'\}$, l'unicité provient des conditions imposées aux facteurs. Dans l'hypothèse où σ ne serait pas factorisable sous l'une des formes, on en déduit alors qu'il est indécomposable, et on a ainsi toutes les possibilités, chacune s'excluant mutuellement. □

Remarque 42. Notons $\mathcal{T}'_B$ l'ensemble des arbres binaires complets évitant les motifs (4.54), où les étiquettes $\star$ de $\{\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]\}$ ont été remplacées par leur homologue $\star'$, dont les feuilles sont étiquetées par des 2-permutations indécomposables, et les nœuds internes étiquetés par des éléments de $\{\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right]', \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right]', \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right]', \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]'\}$.

De la même manière que dans le paragraphe 4.3.7, grâce au théorème de factorisation 4.4.5, l'évaluation fournit une bijection entre $\mathcal{T}'_B$ et l'ensemble des 2-permutations.

4.4.3.2 Propriétés algébriques de la quadrialgèbre des 2-permutations

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des 2-permutations indécomposables. On considère $\mathcal{T}_B$ l'ensemble des arbres binaires complets qui évitent les motifs (4.54), dont les nœuds internes sont étiquetés par des éléments de $\{\left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\prec\\ \succ\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \prec\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\succ\\ \succ\end{smallmatrix}\right]\}$, et les feuilles par des éléments de $\mathcal{P}$.

Théorème 4.4.6. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{T}_B & \longrightarrow & \mathfrak{S}^{(2)} \\ & T & \mapsto & \min \circ\, ev(T), \end{array} \tag{4.84}$$

où min *correspond à prendre le minimum (pour l'ordre lexicographique) des* 2*-permutations de* $ev(T)$*, est bijective.*

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathcal{T}'_B$ défini dans la remarque 42. On définit l'application $\mathcal{G}$ de $\mathcal{T}_B$ vers $\mathcal{T}'_B$ qui consiste à substituer toutes les étiquettes $\star$ des nœuds internes par leur homologue $\star'$. L'application $\mathcal{G}$ est clairement bijective. L'application ev est une fonction bijective de $\mathcal{T}'_B$ vers $\mathfrak{S}^{(2)}$ d'après la remarque 42. Donc la composée $ev \circ \mathcal{G}$ est bijective. Montrons que :

$$ev \circ \mathcal{G} = \mathcal{F}, \tag{4.85}$$

par récurrence sur le nombre de feuilles des arbres. Pour les feuilles étiquetées par les permutations indécomposables, la proposition est vraie. Supposons qu'il y ait égalité pour tout arbre de $\mathcal{T}_B$ ayant au plus à $n-1$ feuilles. Soit $T = (\star, T_1, T_2)$ un arbre de $\mathcal{T}_B$ ayant n feuilles. En appliquant l'hypothèse de récurrence à T_1 et T_2, nous savons que

$$ev \circ \mathcal{G}(T_1) = \mathcal{F}(T_1), \tag{4.86}$$

et

$$ev \circ \mathcal{G}(T_2) = \mathcal{F}(T_2). \tag{4.87}$$

Or, d'après la proposition 4.4.3, nous avons :

$$\min\left(ev(T)\right) = ev\left((\star', \mathcal{F}(T_1), \mathcal{F}(T_2))\right) = ev\left((\star', \mathcal{G}(T_1), \mathcal{G}(T_2))\right). \tag{4.88}$$

On a donc :

$$\min\left(ev\left(T\right)\right) = ev \circ \mathcal{G}(T). \tag{4.89}$$

□

Corollaire 4.4.7. *La quadrialgèbre engendrée par* 11 *est libre, et par bijection, la quadrialgèbre engendrée par* 12 *aussi.*

Démonstration. Grâce au théorème 4.4.6, on en déduit que l'image de la restriction de $\mathcal{F}$ aux arbres dont les feuilles sont étiqueté par 11 forme une famille libre car l'image de $\mathcal{F}$ est une base. En particulier, on en déduit que la série de Hilbert de la quadrialgèbre libre sur un générateur est minorée terme à terme par la série de Hilbert des arbres évitant les motifs (4.54). Or, elle est majorée terme à terme par cette série grâce à la proposition 4.4.2. Donc il s'agit bien de la même série. □

Corollaire 4.4.8. *La quadrialgèbre des* 2*-permutations est libre, et engendrée par* $\mathcal{P}$*.*

Démonstration. Notons $\mathcal{O}$ la série de Hilbert de la quadrialgèbre libre sur un générateur, et $\mathcal{P}$ la série génératrice des éléments indécomposables. Comme $\mathcal{O}$ est aussi la série génératrice des arbres évitant (4.54), on en déduit que $\mathcal{O} \circ \mathcal{P}$ est à la fois la série génératrice de la quadrialgèbre libre dont les générateurs sont donnés par $\mathcal{P}$, et aussi la série génératrice $\mathcal{T}_B$. Mais cette classe est en bijection avec $\mathfrak{S}^{(2)}$. Donc

$$\mathcal{O} \circ \mathcal{P}(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2n!}{2^n} t^n.$$

On en déduit que si la quadrialgèbre des 2-permutations est engendrée par les éléments indécomposables, elle est alors est libre. Or grâce à la bijection (4.4.6), on sait qu'il est possible d'obtenir toutes les 2-permutations en évaluant les arbres $\mathcal{T}_B$: en effet, toute 2-permutation est l'élément minimal d'une évaluation d'un arbre de $\mathcal{T}_B$. Donc, en triant dans l'ordre lexicographique, la matrice des évaluations des arbres de $\mathcal{T}_B$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Ainsi, par combinaison linéaire d'arbres, on peut obtenir toutes les permutations. Et donc la quadrialgèbre des 2-permutations est libre. □

Après avoir traité le cas des quadrialgèbres, nous montrons que la méthode appliquée jusqu'à maintenant s'adapte également au cas des algèbres tridendriformes.

4.5 Partitions ordonnées et algèbres tridendriformes

4.5.1 Définitions générales

Définition 4.5.1. Une *algèbre tridendriforme* est un espace vectoriel V muni de trois opérations bilinéaires, $\bullet$, $\succ$, $\prec$ dont les lois vérifient les relations :

$$\begin{array}{lll} (\prec) \prec = \prec (\odot), & (\succ) \prec = \succ (\prec) & (\odot) \succ = \succ (\succ) \\ (\succ) \bullet = \succ (\bullet), & (\prec) \bullet = \bullet(\succ) & (\bullet) \prec = \bullet(\prec) \\ (\bullet) \bullet = \bullet(\bullet) & & \end{array} . \tag{4.90}$$

où $\odot = \prec + \bullet + \succ$.

D'après [NT06a], la série génératrice d'une algèbre tridendriforme libre sur un générateur vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$2tF^2 - (1+t)F + 1 = 0. \tag{4.91}$$

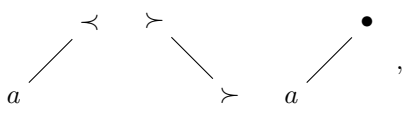
Il est à noter que cette génératrice commence par 1 et non par t. La série qui nous intéresse est en fait $G = F - 1$, qui vérifie donc l'équation :

$$2tG^2 + (3t-1)G + t = 0. \tag{4.92}$$

4.5.2 Une famille d'arbres "canoniques"

Nous identifions $\mathcal{T}rid$ l'algèbre tridendriforme libre sur un générateur x à l'espace vectoriel engendré par l'ensemble BC_T des arbres binaires complets dont les nœuds internes sont étiquetés par des éléments de $\{\prec, \succ, \bullet\}$ et les feuilles par x, et modulo les relations 4.90.

Considérons les arbres de BC_T qui évitent les motifs suivants :



, (4.93)

où $a \in \{\prec, \succ, \bullet\}$. En notant G_a la série génératrice des arbres qui évitent (4.93) dont la racine est étiquetée par a, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} G &= t + G_\succ + G_\bullet + G_\prec \\ G_\prec &= tG \\ G_\bullet &= tG \\ G_\succ &= G(G - G_\succ) \end{cases} \tag{4.94}$$

Ainsi,

$$G_{\succ} = \frac{G^2}{1+G}, \tag{4.95}$$

et donc

$$G = t + 2tG + \frac{G^2}{1+G}, \tag{4.96}$$

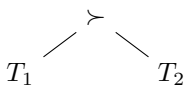
et

$$2tG^2 + (3t-1)G + t = 0. \tag{4.97}$$

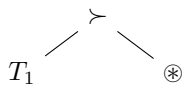
Ainsi, G vérifie bien l'équation (4.92). Comme cette équation admet une unique série solution à coefficients entiers positifs, on en déduit que les coefficients de G sont bien les petits nombres de Schroeder. Reste à montrer que

Proposition 4.5.2. *Sous les règles de réécriture* (4.90)*, tout arbre de BC_T est combinaison linéaire d'arbres de BC_T évitant les motifs* (4.93)*.*

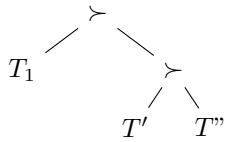
Démonstration. Par récurrence sur n, le nombre de feuilles. Pour $n \leq 2$, cela résulte des règles de réécriture. Soit T un arbre ayant $n+1$ feuilles. S'il est de la forme



En appliquant l'hypothèse de récurrence à T_2, on obtient



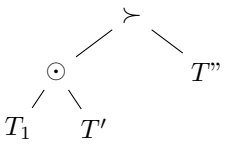
où $\circledast$ est une combinaison linéaire d'arbres évitant (4.93). Mais il se pourrait que l'on ait des arbres sous la forme



avec T" n'ayant pas comme racine $\succ$, et évitant les motifs (4.93). On utilise alors la règle

$$(\odot)\ \succ = \succ\ (\succ). \tag{4.98}$$

Ainsi, on a



.

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-arbre gauche. Si la racine est étiquetée par $\prec$ ou $\bullet$, on applique d'abord l'hypothèse de récurrence au sous-arbre gauche. Puis, on utilise les règles de réécriture s'il y a un des motifs interdits dans le sous-arbre gauche. Grâce à l'hypothèse de récurrence, il suffit de l'appliquer une seule fois. Enfin, il est possible que la racine ait changé et soit remplacée par $\succ$, cas qui a déjà été traité. Sinon, on applique l'hypothèse de récurrence aux sous-arbres droits. □

4.5.3 L'algèbre tridendriforme WQSym

4.5.3.1 Définitions de la structure tridendriforme de WQSym

Considérons la base $(\mathbf{M}_u)_{u\in\mathcal{MT}}$ de **WQSym** (cf. §1.3.3.3). Les trois lois suivantes

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{M}_u \prec \mathbf{M}_v & = & \sum_{\substack{w=w_1w_2 \\ tas(w_1)=u,\ tas(w_2)=v \\ max(w_1)>max(w_2)}} \mathbf{M}_w \\ \mathbf{M}_u \succ \mathbf{M}_v & = & \sum_{\substack{w=w_1w_2 \\ tas(w_1)=u,\ tas(w_2)=v \\ max(w_1)<max(w_2)}} \mathbf{M}_w \\ \mathbf{M}_u \bullet \mathbf{M}_v & = & \sum_{\substack{w=w_1w_2 \\ tas(w_1)=u,\ tas(w_2)=v \\ max(w_1)=max(w_2)}} \mathbf{M}_w \end{array}, \tag{4.99}$$

munissent **WQSym** d'une structure d'algèbre tridendriforme. En effet, pour trois mots tassés u, v, w, chacune des sept relations correspond à indiquer la position des maxima d'un produit de trois mots.

En traduisant ces lois sur les compositions d'ensembles, on obtient trois lois dont la somme donne le shuffle augmenté décalé sur les compositions d'ensembles. Donnons-en la construction. Soient $P = P_1 \cdots P_r$ et $Q = Q_1 \cdots Q_s$ deux partitions d'ensembles ordonnées. On note

$$\begin{array}{rcl} P' & = & P_1 \cdots P_{r-1}, \\ Q' & = & Q_1 \cdots Q_{s-1}. \end{array} \tag{4.100}$$

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P \uplus Q = P & \text{si } s = 0 \\ P \uplus Q = Q & \text{si } r = 0 \\ P \uplus Q = (P \uplus Q')Q_s + (P' \uplus Q)P_r + (P' \uplus Q)(P_r \sqcup Q_s) & \text{sinon.} \end{array} \right. \tag{4.101}$$

Le shuffle augmenté décalé de P et Q est défini par :

$$P \overline{\uplus} Q := P \uplus Q[|P|] = P \uplus \overline{Q}, \tag{4.102}$$

où $|P| = \sum_i |P_i|$ et $Q[|P|]$ est obtenue en décalant toutes les valeurs à l'intérieur des blocs de $|P|$.

Exemple 117. Si $P = \{1,3\}\{2,4\}$ et $Q = \{1,2\}$ alors :

$$\begin{array}{rcl} P \overline{\uplus} Q & = & \{5,6\}\{1,3\}\{2,4\} + \{1,3\}\{5,6\}\{2,4\} + \{1,3,5,6\}\{2,4\} \\ & & +\{1,3\}\{2,4\}\{5,6\} + \{1,3\}\{2,4,5,6\}. \end{array} \tag{4.103}$$

Les trois lois $\succ$, $\prec$ et $\bullet$ ont ainsi leurs analogues sur les partitions ordonnées d'ensembles. En effet, à travers la bijection et en gardant les même notation, on a :

$$\begin{array}{rcl} P \succ Q & = & (P \uplus Q'[|P|])Q_s[|P|], \\ P \prec Q & = & (P' \uplus Q[|P|])P_r, \\ P \bullet Q & = & (P' \uplus Q'[|P|])(P_r \cup Q_s[|P|]). \end{array} \tag{4.104}$$

Dorénavant, nous travaillons directement sur les partitions ordonnées. Puis à l'aide de la bijection entre compositions d'ensembles et mots tassés définie dans le paragraphe 1.6.1, nous déterminons les propriétés algébriques de **WQSym**.

La méthode adoptée est similaire à celle qui a été utilisée pour le paragraphe 4.4.3 : on cherche un théorème de pseudo-factorisation qui est essentiellement équivalent à la liberté d'une algèbre.

4.5.3.2 Un théorème de pseudo-factorisation sur les compositions d'ensembles

Définition 4.5.3. Soit $P = P_1 \cdots P_r$ une partition ordonnée d'ensemble. Un *presque préfixe* de P est un élément Π de la forme $P_1 \cdots P_i P'$, où P' est un sous-ensemble de P_r. On dit qu'elle est *indécomposable* si :

le seul presque préfixe de P qui soit une partition d'ensemble ordonnée d'un ensemble de la forme $\{1, \cdots, k\}$ est P lui-même.

Exemple 118. La partition $P = \{1,3\}\{4,5\}\{2,6\}$ **n'est pas** indécomposable, car il contient le presque préfixe $\{1,3\}\{2\}$, mais $Q = \{2,3\}\{1,4,6\}\{5\}$ l'est.

Définition 4.5.4. Une partition ordonnée d'ensemble Π est dite connexe si $\Pi = PQ[|P|]$ alors P ou Q est vide.

Exemple 119. $P = \{1,3\}\{4,5\}\{2,6\}$ est connexe.

Remarque 43. De par leur définition, il est clair qu'un élément indécomposable est toujours connexe. Par contre, on a pu constater que la réciproque est fausse.

Notons $\mathcal{POI}$ la classe des compositions d'ensembles indécomposables, et $\mathcal{M}$, celle des arbres binaires complets évitant les motifs (4.93), dont les feuilles sont étiquetées par des éléments de $\mathcal{POI}$, et dont les nœuds internes sont étiquetés par des éléments de $\{\prec, \succ, \bullet\}$. Dans la suite, on montre que les éléments de $\mathcal{POI}$ forment une famille trialgébriquement indépendant et génératrice de **WQSym**. Pour cela, on établit une bijection entre $\mathcal{PO}$ et $\mathcal{M}$. Le théorème de pseudo-factorisation suivant nous sera utile par la suite :

Théorème 4.5.5. *Soit P est une partition ordonnée d'ensemble décomposable. Alors il existe un unique couple (Q, R), $Q = Q_1 \cdots Q_k$ et $R = R_1 \cdots R_l$ (notons $\overline{R} = R[|Q|]$) tel que :*

$$\begin{array}{rrcll} & P & = & QR[|Q|] & \text{où } R \text{ est connexe,} \\ \text{ou bien} & P & = & Q_1 \cdots Q_{k-1} R[|Q|] Q_k & \text{où } Q \text{ est indécomposable,} \\ \text{ou bien} & P & = & Q_1 \cdots Q_{k-1} \overline{R_1} \cdots \overline{R_{l-1}} (Q_k \cup \overline{R_l}) & \text{où } Q \text{ est indécomposable,} \end{array}$$

ces cas s'excluant mutuellement, Q et R étant uniques s'ils existent.

Démonstration. Soit P une partition ordonnée d'ensemble de n décomposable. Si P n'est pas connexe, alors il existe Q et R tels que :

$$P = Q\overline{R}. \tag{4.105}$$

Si on choisit un préfixe Q le plus grand possible, alors R est nécessairement connexe. Sinon, on pourrait encore factoriser R, ce qui contredirait la maximalité de Q.

Si P est connexe, comme P est décomposable, il existe Q un presque préfixe (non préfixe) strict de P qui soit une partition d'ensemble ordonnée de $\{1, \cdots, k\}$, avec $k < n$. Quitte à le modifier, on peut le prendre avec k le plus petit possible. Dans ce cas, Q est nécessairement indécomposable. Sinon, Q admettrait un presque préfixe strict S non préfixe qui soit une partition ordonnée d'ensemble de la forme $\{1, \cdots, k\}$. Or un presque préfixe de Q est également un presque préfixe de P. Ceci contredirait la minimalité de Q. Ainsi, suivant que $Q_k = P_r$ ou non, on obtient la factorisation sous la forme 2 ou 3. L'unicité de ces factorisations est assurée par les arguments de maximalité et minimalité. Supposons que l'on ait factorisé P sous la forme 1 et 2 :

$$\begin{array}{rcl} P & = & Q_1 \cdots Q_k \overline{R} \\ P & = & Q'_1 \cdots Q'_{k'-1} \overline{R'_1} \cdots \overline{R'_{l'}} Q'_{k'}. \end{array} \tag{4.106}$$

Si $k' - 1 \geq k$, alors :

$$\begin{array}{rcl} P & = & Q_1 \cdots Q_k \overline{R}_1 \cdots \\ P & = & Q'_1 \cdots Q'_k \cdots Q'_{k'-1} \cdots \end{array} \tag{4.107}$$

Comme $Q_1 \cdots Q_k$ est une partition ordonnée, on contredit alors le fait que Q' soit indécomposable. Si $k' \leq k$, on en déduit que $R'_1 \cdots R'_l = \cdots Q_k \overline{R_1} \cdots \overline{R_{l-1}}$. Comme les lettres dans Q_k et les blocs à sa gauche sont plus petites que les lettres de $\overline{R}$, on en déduit que R' n'est pas connexe. Des raisonnements analogues permettent de conclure dans les autres cas. □

Définition 4.5.6. Soient $P = P_1 \cdots P_r$ et $Q = Q_1 \cdots Q_s$ deux compositions d'ensembles. On définit les produits suivants :

— $P \prec' Q := P_1 \cdots P_{r-1} \overline{Q_1 \cdots Q_s} P_r$;
— $P \bullet' Q := P_1 \cdots P_{r-1} \overline{Q_1 \cdots Q_{s-1}} \left(P_r \cup \overline{Q_s}\right)$;
— $P \succ' Q := P\overline{Q}$.

Exemple 120. Pour $P = \{1,3,4\}\{2\}\{5\}$ et $Q = \{3\}\{1\}\{2,4\}$, on a :

— $P \prec' Q = \{1,3,4\}\{2\}\{8\}\{6\}\{7,9\}\{5\}$;
— $P \bullet' Q = \{1,3,4\}\{2\}\{8\}\{6\}\{5,7,9\}$;
— $P \succ' Q = \{1,3,4\}\{2\}\{5\}\{8\}\{6\}\{7,9\}$.

Proposition 4.5.7. *Notons $\mathcal{T}_{pr}$ l'ensemble des arbres binaires complets dont les feuilles sont des partitions ordonnées indécomposables, les nœuds internes étiquetés par des éléments de $\{\prec', \bullet', \succ'\}$ et évitant les motifs* (4.93)*, en remplaçant $\star$ par $\star'$ pour $\star$ élément de $\{\prec, \bullet, \succ\}$. L'application*

$$\begin{array}{rccc} ev: & \mathcal{T}_{pr} & \longrightarrow & \mathcal{PO} \\ & T & \longmapsto & ev(T) \end{array} \tag{4.108}$$

est une bijection.

Démonstration. Soit P une composition d'ensemble. Si P est connexe, par définition, il n'y a pas de couple (Q, R) de $\mathcal{PO}^2$ tel que $P = Q \succ' R$. Autrement dit, P n'est pas obtenue par évaluation d'un arbre dont la racine est étiquetée par $\succ'$.

Montrons que ev est bijective par récurrence sur la taille de la composition. Pour $n = 0$, l'ensemble vide a pour image l'ensemble vide. Pour $n = 1$, la feuille $(\{1\}, \emptyset, \emptyset)$ a bien pour image $\{1\}$. Supposons par récurrence que ev est bien bijective sur les compositions d'ensembles de cardinal au plus $n-1$. Soit P une composition d'ensemble de taille n. Nous savons, grâce au théorème 4.5.5, que soit P est indécomposable, soit il existe un unique couple (Q, R) de compositions d'ensembles tel que $P = Q \succ' R$, où R est connexe, soit $P = Q \prec' R$, où Q indécomposable, soit $P = Q \bullet' R$, où Q est indécomposable.

Si P est indécomposable, elle est alors l'évaluation d'une feuille étiquetée par P.

Supposons $P = Q \succ' R$, avec R connexe. Par hypothèse de récurrence, il existe des uniques arbres T_1 et T_2 de $\mathcal{T}_{pr}$ tels que $ev(T_1) = Q$ et $ev(T_2) = R$. Ainsi, P est l'évaluation de l'arbre T égal à $(\succ', T_1, T_2)$. Comme R est connexe, on sait que l'étiquette de la racine de T_2 n'est pas $\succ'$. Donc T appartient à $\mathcal{T}_{pr}$.

Supposons $P = Q \prec' R$, où Q est indécomposable. Par hypothèse de récurrence, il existe un unique couple (T_1, T_2) d'arbres de $\mathcal{T}_{pr}^2$ tel que $ev(T_1) = Q$ et $ev(T_2) = R$. Donc l'évaluation de

$$T = (\prec', T_1, T_2) \tag{4.109}$$

est bien égale à P. Or, Q est indécomposable. Donc T_1 est la feuille étiquetée par Q. L'arbre T est bien un élément de $\mathcal{T}_{pr}$.

Si $P = Q \bullet' R$, où Q est indécomposable. Par hypothèse de récurrence, il existe un unique couple (T_1, T_2) d'arbres de $\mathcal{T}_{pr}^2$ tel que

$$\begin{array}{rcl} ev(T_1) & = & Q \\ ev(T_2) & = & R. \end{array} \tag{4.110}$$

Donc l'évaluation de $T = (\bullet', T_1, T_2)$ est bien égale à P. Or, Q est indécomposable. Donc T_1 est la feuille étiquetée par Q. L'arbre T appartient bien à $\mathcal{T}_{pr}$.

Donc, l'application ev est bien bijective. □

De manière analogue au paragraphe 4.4.3, nous obtenons un théorème de pseudo-factorisation. A la différence des permutations, nous n'avons pas encore d'ordre pour lequel les produits réduits fournissent un moyen pour calculer le minimum d'un produit de deux ensembles. Il reste alors à trouver un bon ordre.

4.5.3.3 Un bon ordre

Définition 4.5.8. Soit $P_1 \cdots P_r$ une composition d'ensemble. On note $\lceil P_1 \cdots P_r \rceil$ la permutation obtenue grâce à l'algorithme suivant :

— on trie l'intérieur de chaque bloc P_i par ordre croissant ;

— on enlève les accolades.

Exemple 121. Pour la composition $\{1,3,4\}\{2,6\}\{5\}$, on obtient

$$\lceil \{1,3,4\}\{2,6\}\{5\} \rceil = 134265. \tag{4.111}$$

Définition 4.5.9. Soient $P = P_1 \cdots P_r$ et $Q = Q_1 \cdots Q_s$ deux partitions ordonnées. On dit que $P \precsim Q$ (P est plus petit que Q pour l'ordre $\precsim$) si et seulement si :

— $r > s$;

— sinon $r = s$ et $|P_r| < |Q_s|$;

— sinon $r = s$, $|P_r| = |Q_s|$ et $\lceil P_1 \cdots P_r \rceil <_{lex} \lceil Q_1 \cdots Q_s \rceil$;

— sinon $r = s$, $|P_r| = |Q_s|$ et $\lceil P_1 \cdots P_r \rceil = \lceil Q_1 \cdots Q_s \rceil$ et $(|P_r|, \cdots, |P_1|) \leq_{lex} (|Q_s|, \cdots, |Q_1|)$,

Exemple 122. Si $P = \{3\}\{1\}\{2,\ 4,\ 5\} = 3|12|45$ (notation allégé) $Q = 3|24|15$, $R = 3|1|245$, et $S = 123|45$ alors on a $P \precsim Q \precsim R \precsim S$.

Proposition 4.5.10. *La relation $\precsim$ est un ordre total sur les partitions ordonnées.*

Démonstration. La réflexivité est évidente. La transitivité résulte de la construction de cette relation à partir de plusieurs ordres différents. Supposons que l'on ait $P \precsim Q$ et $Q \precsim P$. Alors nécessairement, toutes les inégalités intervenant dans la définition de $\precsim$ deviennent des égalités. Ainsi, P et Q ont le même nombre de blocs, et il y a autant d'éléments dans chaque blocs. De plus, on a $\lceil P \rceil = \lceil Q \rceil$, donc les valeurs sous-jacentes à P et Q sont disposées dans le même ordre. Comme on a :

$$(|P_r|, \cdots, |P_1|) = (|Q_s|, \cdots, |Q_1|), \tag{4.112}$$

l'ordre des blocs est le même pour les deux compositions donc $P = Q$. Enfin, l'ordre est total car toutes les comparaisons effectuées sont basées sur des ordres totaux. □

Proposition 4.5.11. *Soient $P = P_1 \cdots P_r$ et $Q = Q_1 \cdots Q_s$ deux compositions d'ensembles. Alors :*

— *le minimum de l'ensemble $P \prec Q$ est l'élément $U = P_1 \cdots P_{r-1}\overline{Q}P_r$,*
— *le minimum de l'ensemble $P \bullet Q$ est $V = P_1 \cdots P_{r-1}\overline{Q_1} \cdots \overline{Q_{s-1}}(P_r \cup \overline{Q_s})$,*
— *le minimum de l'ensemble $P \succ Q$ est $W = P\overline{Q}$.*

Démonstration. On garde les notations de la proposition 4.5.11.

Soit $M = M_1 \cdots M_k$ le minimum de $P \prec Q$. Les éléments de cet ensemble ont au plus $r + s$ blocs. Or, U en a exactement $r + s$. Par minimalité de M, nous avons $k = r + s$. L'élément M étant obtenu par le produit $P \prec Q$, nous avons $M_{r+s} = P_r$. Par minimalité de M, on a

$$\lceil M \rceil \leq_{lex} \lceil U \rceil. \tag{4.113}$$

Les lettres de P étant plus petite que les lettres de $Q[|P|]$, pour minimiser l'ordre lexicographique, on place d'abord les blocs de P possibles, puis les blocs de $Q[|P|]$, puis le dernier bloc de P, imposé par le produit $\prec$. Ainsi, $\lceil U \rceil$. est la plus petite permutation dans l'ordre lexicographique que l'on peut obtenir à partir des éléments de $P \prec Q$. Donc on a $\lceil M \rceil = \lceil U \rceil$. Ce qui impose à M d'être de la forme $P_1 \cdots P_{r-1}Q_1 \cdots Q_sP_r$. Donc M et U sont égaux.

Soit $M = M_1 \cdots M_k$ le minimum de $P \bullet Q$. Le dernier bloc de P fusionnant avec le dernier bloc de Q, les éléments de $P \bullet Q$ ont au plus $r+s-1$ blocs. Or, V en a bien ce nombre. Par minimalité de M, on a $k = r+s-1$. Tous les éléments de $P \bullet Q$ ont leur dernier bloc égal à $P_r \cup \overline{Q_s}$, ainsi, ce test n'est pas pertinent pour déterminer le minimum. Par minimalité de M, on a $\lceil M \rceil \leq_{lex} \lceil V \rceil$. Or, $\lceil V \rceil$ est la plus petite permutation pour l'ordre lexicographique que l'on peut obtenir à partir des éléments de $P \bullet Q$. Ainsi, M est en fait égal à V.

Soit $M = M_1 \cdots M_k$ le minimum de $P \succ Q$. Le nombre maximum de blocs étant $r+s$ et étant atteint pour W, on en déduit que $k = r+s$. Le dernier bloc des éléments de $P \succ Q$ étant $\overline{Q_s}$, ce critère ne donne aucune condition sur le minimum. Par minimalité de M, on a $\lceil M \rceil \leq_{lex} \lceil W \rceil$. Comme $\lceil W \rceil$ est la permutation minimale que l'on peut obtenir à partir des éléments de $P \succ Q$, il en résulte que M est égal à W. □

Proposition 4.5.12. *Soient I et J deux ensembles de partitions ordonnées admettant comme plus petit élément pour l'ordre $\precsim$ respectivement $P = P_1 \cdots P_r$ et $Q = Q_1 \cdots Q_s$. Alors :*

— *$I \prec J$ est un ensemble admettant comme minimum $U = P_1 \cdots P_{r-1}\overline{Q}P_r$,*
— *$I \bullet J$, est un ensemble admettant comme minimum $V = P_1 \cdots P_{r-1}\overline{Q_1} \cdots \overline{Q_{s-1}}(P_r \cup \overline{Q_s})$,*
— *$I \succ J$ est un ensemble admettant comme minimum $W = P\overline{Q}$.*

Exemple 123. Si on prend $I = \{3|12|45,\ 3|24|15,\ 3|1|245,\ 123|45\}$, le plus petit élément de $I \prec I$ est bien $3|12|8|67|9A|45$, où A vaut dix.

Démonstration. On garde les notations de la proposition 4.5.12.

Soit $M = M_1 \cdots M_k$ le minimum de $I \prec J$. Le nombre de blocs maximal pour un élément de $I \prec J$ est $r+s$ car P, élément minimal de I a r blocs, et Q l'élément minimal de J en a s. On remarque que U élément de $I \prec J$ possède effectivement $r+s$ blocs. M étant le minimum de $I \prec J$, nécessairement, $k = r+s$. Par définition de M, il existe $P' = P'_1 \cdots P'_r$ élément de I et $Q'_1 \cdots Q'_s$

élément de J tel que M appartient à $P' \prec Q'$ et à fortiori, par minimalité de M dans $I \prec J$ et grâce à la proposition 4.5.11, il en résulte que

$$M = P'_1 \cdots P'_{r-1} \overline{Q'_1} \cdots \overline{Q'_s} P'_r. \tag{4.114}$$

Par minimalité de P dans l'ensemble I, on a $|P_r| \leq |P'_r|$. Et par minimalité de M dans l'ensemble $I \prec J$ et en le comparant à U, on en déduit que $|P'_r| = |P_r|$. On est dans la configuration suivante :

$$\begin{array}{rcl} M & = & P'_1 \cdots P'_{r-1} \overline{Q'_1} \cdots \overline{Q'_s} P'_r, \\ U & = & P_1 \cdots P_{r-1} \overline{Q_1} \cdots \overline{Q_s} P_r. \end{array} \tag{4.115}$$

Par minimalité de P et Q, on en déduit que les valeurs de M sont placées dans le même ordre que les valeurs de U. Enfin, la minimalité de P et Q impose la taille de chaque bloc de M. Il en résulte que $M = U$.

Soit $M = M_1 \cdots M_k$ le minimum de l'ensemble $I \bullet J$. Comme $M \precsim V$, la composition M a donc au moins $r+s-1$ blocs. Or, les éléments de $I \bullet J$ en ont au plus $r+s-1$ grâce à la minimalité de P et Q. Donc, $k = r+s-1$. Or, M est un élément de $I \bullet J$. Il existe donc P' élément de I et Q' élément de J tel que M est un élément de $P' \bullet Q'$. Par minimalité de M dans $I \bullet J$, M est à fortiori minimal dans $P' \bullet Q'$. Grâce à la proposition 4.5.11, nous en déduisons la forme de M. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} M & = & P'_1 \cdots P'_{r-1} \overline{Q'_1} \cdots \overline{Q'_{s-1}(\overline{Q'_s} \cup P'_r)}, \\ V & = & P_1 \cdots P_{r-1} \overline{Q_1} \cdots \overline{Q_{s-1}(\overline{Q_s} \cup P_r)}. \end{array} \tag{4.116}$$

Par minimalité de P, Q et M, on en déduit que $|\overline{Q'_s} \cup P'_r| = |\overline{Q_s} \cup P_r|$. Par le même argument, il en résulte que M et V ont leurs valeurs dans le même ordre. Enfin, la taille de chacun des blocs est également déterminée grâce à la minimalité de P, Q et M. Donc, $M = V$.

Constatons que les arguments des démonstrations pour déterminer le minimum de $I \prec J$ et de $I \bullet J$ sont encore valables pour déterminer le minimum de $I \succ J$. Il en résulte que le minimum de $I \succ J$ est égal à W. □

4.5.3.4 Propriétés algébriques de WQSym

Soit $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par les compositions d'ensembles indécomposables, dont les nœuds internes sont étiquetés par les éléments de $\{\prec, \succ, \bullet\}$, et évitant les motifs (4.93).

Théorème 4.5.13. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{P,T} : & \mathcal{T}_P & \longrightarrow & \mathcal{PO} \\ & T & \longrightarrow & \min_{\precsim}(ev(T)), \end{array} \tag{4.117}$$

où $\min_{\precsim}$ *consiste à prendre le minimum pour l'ordre* $\precsim$ *d'un ensemble est bijective.*

Démonstration. Considérons l'application $\mathcal{G}$ de $\mathcal{T}_P$ vers $\mathcal{T}_{pr}$ (ensemble défini dans la proposition 4.5.7) qui consiste à remplacer tout élément $\star$ de $\{\prec, \bullet, \succ\}$ par son homologue $\star'$. L'application $\mathcal{G}$ est bijective, et on a

$$\Phi_{P,T} = ev \circ \mathcal{G}. \tag{4.118}$$

Montrons cette égalité par récurrence. Soit f une feuille de $\mathcal{T}_P$ étiquetée par P. Alors

$$\Phi_{P,T}(f) = \min_{\precsim} \circ ev(f) = P, \tag{4.119}$$

car l'évaluation d'une feuille donne un seul élément. Et,

$$ev \circ \mathcal{G}(f) = ev(f) = P, \tag{4.120}$$

car les feuilles ne sont pas réétiquetées par $\mathcal{G}$.

Supposons qu'il y a bien égalité entre ces deux fonctions pour des arbres ayant au plus $n-1$ feuilles. Soit $T = (\star, T_1, T_2)$ un élément de $\mathcal{T}_P$. On a :

$$\min_{\precsim}(ev(T)) = ev\left((\star', \Phi_{P,T}(T_1), \Phi_{P,T}(T_2))\right), \tag{4.121}$$

grâce à la proposition 4.5.12. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\min_{\precsim}(ev(T)) = ev\left((\star', ev\circ\mathcal{G}(T_1), ev\circ\mathcal{G}(T_2))\right), \tag{4.122}$$

d'où

$$\min_{\precsim}(ev(T)) = ev\circ\mathcal{G}(T). \tag{4.123}$$

Nous savons, grâce à la proposition 4.5.7 que l'application ev est une bijection de $\mathcal{T}_{pr}$ vers les partitions ordonnées. Ainsi, $ev\circ\mathcal{G} = \Phi_{P,T}$ est bijective. □

Théorème 4.5.14. *L'algèbre tridendriforme* **WQSym** *est libre, et une base algébrique est donnée par la famille* $(\mathbf{M}_u)_{\phi(u)\in\mathcal{PO}I}$.

Démonstration. Soit l'ensemble $\mathcal{A}$ des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par $\mathbf{M}_u$ où $\phi(u)$ est indécomposable, et les nœuds internes sont étiquetés par des éléments de l'ensemble $\{\prec, \succ, \bullet\}$ et évitant les motifs (4.93).

La famille $(ev(T))_{T\in\mathcal{A}}$ forme une base de **WQSym**. En effet, grâce à la bijection $\Phi_{P,T}$, nous savons que pour tout mot tassé u, il existe un unique arbre T de $\mathcal{A}$ tel que

$$\mathbf{M}_u + \sum_{\phi(u)<\phi(v)} \alpha_v \mathbf{M}_v. \tag{4.124}$$

où $<$ est l'ordre stricte sous-jacent à $\precsim$. Or, cette famille forme une base de **WQSym** car elle est triangulaire avec des 1 sur la diagonale dans la base $(\mathbf{M}_u)_{u\in\mathcal{MT}}$ ordonnée par ordre croissant pour l'ordre $\precsim$. Il en résulte que **WQSym** est engendré par les éléments indécomposables. Or, une algèbre libre engendrée par les éléments indécomposables a comme série de Hilbert $\mathcal{O}\circ\mathcal{I}(t)$ où $\mathcal{O}$ est la série de Hilbert de l'algèbre tridendriforme libre sur un générateur de degré un, et $\mathcal{I}$ est la série génératrice des éléments indécomposables. Grâce à la bijection $\Phi_{P,T}$ nous savons que cette série est aussi la série génératrice des mots tassés. Il en résulte que **WQSym** est libre et une famille génératrice est donnée par les mots tassés qui sont associés par la bijection ϕ aux indécomposables. □

Bibliographie

[AL04] M. Aguiar and J.-L. Loday. Quadri-algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 191(3) :205–221, 2004.

[And81] D. André. Sur les permutations alternées. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 167–184, 1881.

[Arn92] V. I. Arnol'd. The calculus of snakes and the combinatorics of bernoulli, euler and springer numbers of coxeter groups. *Russian Mathematical Surveys*, 47(1) :1–51, 1992.

[BCLM13] J.-P. Bultel, A. Chouria, J.-G. Luque, and O. Mallet. Redfield-pólya theorem in wsym. *DMTCS Proceedings*, (01) :563–574, 2013.

[Ber87] F. Bergeron. Une combinatoire du pléthysme. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 46(2) :291–305, 1987.

[BF01] C. Brouder and A. Frabetti. Renormalization of qed with planar binary trees. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 19(4) :715–741, 2001.

[BF03] C. Brouder and A. Frabetti. Qed hopf algebras on planar binary trees. *Journal of Algebra*, 267(1) :298–322, 2003.

[BHT04] N. Bergeron, F. Hivert, and J.-Y. Thibon. The peak algebra and the hecke-clifford algebras at q=0. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 107(1) :1–19, 2004.

[BLL+94] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, Université du Québec à Montréal. Département de mathématiques et d'informatique, and Université du Québec à Montréal. Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique. *Théorie des especes et combinatoire des structures arborescentes*. Montréal : Dép. de mathématiques et d'informatique, Université du Québec à Montréal, 1994.

[BR10] E. Burgunder and M. Ronco. Tridendriform structure on combinatorial hopf algebras. *Journal of Algebra*, 324(10) :2860–2883, 2010.

[Bur72] W. H Burge. An analysis of a tree sorting method and some properties of a set of trees. In *Proceedings of the First USA-Japan Computer Conference, AFIPS and IPSJ*, pages 372–379, 1972.

[Car71] L. Carlitz. A conjecture concerning Genocchi numbers. *Norske Vid. Selsk. Skr. (Trondheim)*, (9) :4, 1971.

[Cha02] F. Chapoton. Un théorème de cartier–milnor–moore–quillen pour les bigèbres dendriformes et les algèbres braces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 168(1) :1–18, 2002.

[CK99] A. Connes and D. Kreimer. Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry. In *Quantum field theory : perspective and prospective*, pages 59–109. Springer, 1999.

[CL01] F. Chapoton and M. Livernet. Pre-lie algebras and the rooted trees operad. *International Mathematics Research Notices*, 2001(8) :395–408, 2001.

[CW07] S. Corteel and L. K Williams. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process. *Advances in applied mathematics*, 39(3) :293–310, 2007.

[CW+11] S. Corteel, L. K Williams, et al. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process and askey-wilson polynomials. *Duke Mathematical Journal*, 159(3) :385–415, 2011.

[D+74] D. Dumont et al. Interprétations combinatoires des nombres de genocchi. *Duke Mathematical Journal*, 41(2) :305–318, 1974.

[DF76] D. Dumont and D. Foata. Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 104 :433–451, 1976.

[DHNT11] G. Duchamp, F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. Noncommutative symmetric functions vii : free quasi-symmetric functions revisited. *Annals of combinatorics*, 15(4) :655–673, 2011.

[DHT02] G. Duchamp, F. Hivert, and J.-Y. Thibon. Noncommutative Symmetric Functions VI : Free Quasi-Symmetric Functions and Related Algebras. *International Journal of Algebra and Computation*, 12(5) :671–717, 2002.

[DM97] A. Dress and T. Müller. Decomposable functors and the exponential principle. *advances in mathematics*, 129(2) :188–221, 1997.

[Dum95] D. Dumont. Conjectures sur des symétries ternaires liées aux nombres de Genocchi. *Discrete Math.*, 139(1-3) :469–472, 1995.

[Fla80] P. Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Mathematics*, 32(2) :125–161, 1980.

[FN99] P. Flajolet and M. Noy. Analytic combinatorics of non-crossing configurations. *Discrete Mathematics*, 204(1) :203–229, 1999.

[Foa78] D. Foata. A combinatorial proof of the mehler formula. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 24(3) :367–376, 1978.

[Foi02] L. Foissy. Les algebres de hopf des arbres enracinés décorés, i. *Bulletin des sciences mathematiques*, 126(3) :193–239, 2002.

[Foi07] L. Foissy. Bidendriform bialgebras, trees, and free quasi-symmetric functions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 209(2) :439–459, 2007.

[Fra76] J. Françon. Arbres binaires de recherche : propriétés combinatoires et applications. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications-Informatique Théorique et Applications*, 10(R3) :35–50, 1976.

[Fra79] J. Françon. *Combinatoire des structures de données*. Institut de Recherche Mathematique Avancée, 1979.

[FS+73a] D. Foata, M.-P. Schützenberger, et al. Nombres d'euler et permutations alternantes. In *A survey of combinatorial theory (Proc. Internat. Sympos., Colorado State Univ., Fort Collins, Colo., 1971)*, pages 173–187, 1973.

[FS73b] D. Foata and V. Strehl. Euler numbers and variations of permutations. *Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie 1973*, pages 119–131, 1973.

[FV79] J. Françon and G. Viennot. Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et double descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi. *Discrete Mathematics*, 28(1) :21 – 35, 1979.

[FZ90] D. Foata and D. Zeilberger. Denert's permutation statistic is indeed euler-mahonian. *Studies in applied mathematics*, 83(1) :31–59, 1990.

[Gan70] J.M. Gandhi. A conjectured representation of Genocchi numbers. *Am. Math. Mon.*, 77 :505–506, 1970.

[Ges80] I. Gessel. A noncommutative generalization and q-analog of the lagrange inversion formula. *Transactions of the American Mathematical Society*, 257(2) :455–482, 1980.

[Ges84] I. M Gessel. Multipartite p-partitions and inner products of skew schur functions. *Contemp. Math*, 34(289-301) :101, 1984.

[Ges03] I. Gessel. Applications of the classical umbral calculus. *Algebra Universalis*, 49(4) :397–434, 2003.

[GKL+95] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh, and J.-Y. Thibon. Noncommutative Symmetric Functions. *Advances in Mathematics* , 112 :218–348, 1995.

[Han92] Guo-Niu Han. *Calcul denertien*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Département de mathématique, 1992.

[Han96] G.-N. Han. Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi. *Eur. J. Comb.*, 17(4) :397–407, 1996.

[Hib62] Thomas N. Hibbard. Some combinatorial properties of certain trees with applications to searching and sorting. *J. ACM*, 9(1) :13–28, January 1962.

[HNT05] F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. The algebra of binary search trees. *Theor. Comput. Sci.*, 339(1) :129–165, 2005.

[HNT08a] F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. Commutative combinatorial hopf algebras. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 28(1) :65–95, 2008.

[HNT08b] F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. Trees, functional equations, and combinatorial hopf algebras. *European Journal of Combinatorics*, 29(7) :1682–1695, 2008.

[HNTT09] F. Hivert, J.-C. Novelli, L. Tevlin, and J.-Y. Thibon. Permutation statistics related to a class of noncommutative symmetric functions and generalizations of the Genocchi numbers. *Selecta Mathematica*, 15 :105–119, 2009.

[HR98] G. Hetyei and E. Reiner. Permutation trees and variation statistics. *European Journal of Combinatorics*, 19(7) :847–866, 1998.

[HZ99] G.-N. Han and J. Zeng. q-polynômes de Gandhi et statistique de Denert. *Discrete Math.*, 205(1-3) :119–143, 1999.

[Joy81] A. Joyal. Une théorie combinatoire des séries formelles. *Advances in mathematics*, 42(1) :1–82, 1981.

[JV10] M. Josuat-Vergès. *Énumération de tableaux et de chemins, moments de polynômes orthogonaux*. PhD thesis, Paris 11, 2010.

[Knu70] D. Knuth. Permutations, matrices, and generalized young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, 34(3) :709–727, 1970.

[KRY09] J. PS. Kung, G.-C. Rota, and C. H. Yan. *Combinatorics : the Rota way*. Cambridge University Press, 2009.

[KZ01] D. Kim and J. Zeng. A combinatorial formula for the linearization coefficients of general sheffer polynomials. *European Journal of Combinatorics*, 22(3) :313–332, 2001.

[Lab81] G. Labelle. Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de lagrange. *Advances in Mathematics*, 42(3) :217–247, 1981.

[LLT+02] A. Lascoux, B. Leclerc, J.-Y. Thibon, et al. The plactic monoid. *Algebraic Combinatoric on Words*, 2002.

[Lod96] J.-L. Loday. La renaissance des opérades. *ASTERISQUE-SOCIETE MATHEMATIQUE DE FRANCE*, 237 :47–74, 1996.

[Lod01] J.-L. Loday. Dialgebras. *Lect. Notes Math.*, 1763 :7–66, 2001.

[Lod06] J.-L. Loday. Generalized bialgebras and triples of operads. *arXiv preprint math/0611885*, 2006.

[LR34] D. E Littlewood and A. R Richardson. Group characters and algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, pages 99–141, 1934.

[LR98] J.-L. Loday and M.-O. Ronco. Hopf Algebra of the Planar Binary Trees. *Advances in Mathematics*, 139(2) :293 – 309, 1998.

[LR+04] J.-L. Loday, M. Ronco, et al. Trialgebras and families of polytopes. *Contemporary Mathematics AMS*, 346 :369–398, 2004.

[LV86] P. Leroux and G. X. Viennot. *Combinatorial resolution of systems of differential equations, I. Ordinary differential equations*. Springer, 1986.

[LV12] J.-L. Loday and B. Vallette. *Algebraic operads*, volume 346. Springer, 2012.

[Mau13] Rémi Maurice. Algèbres de hopf combinatoires. 2013.

[May72] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer Berlin Heidelberg New York, 1972.

[MR95] C. Malvenuto and C. Reutenauer. Duality between quasi-symmetrical functions and the Solomon descent algebra. *Journal of Algebra*, 177(3) :967–982, 1995.

[MSS07] M. Markl, S. Shnider, and J. D Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*. Number 96. American Mathematical Soc., 2007.

[Nov14] J.-C. Novelli. m-dendriform algebras. *arXiv preprint arXiv :1406.1616*, 2014.

[NT06a] J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon. Polynomial realizations of some trialgebras. *arXiv preprint math/0605061*, 2006.

[NT06b] Jean-Christophe Novelli and Jean-Yves Thibon. Noncommutative bessel symmetric functions. *arXiv preprint math/0602043*, 2006.

[NT12] J.-C Novelli and J.-Y Thibon. Non commutative symmetric functions and an amazing matrix. *Advances in Applied Mathematics*, 48(3) :528–534, 2012.

[NT14] J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon. Hopf algebras of m-permutations,(m+ 1)-ary trees, and m-parking functions. *arXiv preprint arXiv :1403.5962*, 2014.

[NTW10] J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon, and L.K. Williams. Combinatorial hopf algebras, noncommutative hall–littlewood functions, and permutation tableaux. *Advances in Mathematics*, 224(4) :311 – 1348, 2010.

[Pól37] G. Pólya. Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen. *Acta mathematica*, 68(1) :145–254, 1937.

[PR95] S. Poirier and C. Reutenauer. Algèbres de Hopf de tableaux. *Ann. Sci. Math. Québec, 19 :79-90*, 1995.

[Pur93] M. Purtill. André permutations, lexicographic shellability and the cd-index of a convex polytope. *Transactions of the American Mathematical Society*, 338(1) :77–104, 1993.

[Ran94] A. Randrianarivony. Polynômes de Dumont-Foata généralisés. *Sémin. Lothar. Comb.*, 32 :12, 1994.

[Rob38] G.de B. Robinson. On the representations of the symmetric group. *American Journal of Mathematics*, pages 745–760, 1938.

[Ron02] M. Ronco. Eulerian idempotents and milnor–moore theorem for certain non-cocommutative hopf algebras. *Journal of Algebra*, 254(1) :152–172, 2002.

[RR78] S. M Roman and G.-C. Rota. The umbral calculus. *Advances in Mathematics*, 27(2) :95–188, 1978.

[RS73] J. Riordan and P.R. Stein. Proof of a conjecture on genocchi numbers. *Discrete Math.*, 5(4) :381–388, 1973.

[Sch61] Craige Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math*, 13(2) :179–191, 1961.

[Sch77] M.-P. Schützenberger. *La correspondance de Robinson*. Springer, 1977.

[SF70] M.-P. Schützenberger and D. Foata. Théorie géométrique des polynômes eulériens. *Springer Lecture Notes (SLN)*, 138, 1970.

[Slo] N. J. A. Sloane. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. http ://www.research.att.com/ njas/sequences/.

[Sol76] L. Solomon. A mackey formula in the group ring of a coxeter group. *Journal of Algebra*, 41(2) :255–264, 1976.

[Sta11] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics*, volume 1. Cambridge university press, 2011.

[Ste97] J. Stembridge. Enriched P-partitions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 349(2) :763–788, 1997.

[SW07] E. Steingrímsson and L. K Williams. Permutation tableaux and permutation patterns. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(2) :211–234, 2007.

[Tho74] Glanffrwd Powell Thomas. Baxter algebras and schur functions. *Thesis at Swansea Univ.*, 1974.

[Tou52] J. Touchard. Sur un problème de configurations et sur les fractions continues. *Canad. J. Math*, 4(2) :25, 1952.

[Val08] B. Vallette. Manin products, Koszul duality, Loday algebras and Deligne conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 620 :105–164, 2008.

[Vie77] G. Viennot. Une forme géométrique de la correspondance de robinson-schensted. In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, pages 29–58. Springer, 1977.

[Vie80] G. Viennot. Une interpretation combinatoire des coefficients des développements en série entiere des fonctions elliptiques de jacobi. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 29(2) :121–133, 1980.

[Vie82] G. Viennot. Interprétations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi. *Sémin. Théor. Nombres, Univ. Bordeaux I*, 1981-1982 :94, 1982.

[Vie83] G. Viennot. *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*. Departement de Mathématiques et d'Informatique, Université du Québec à Montréal, 1983.

[Vog73] R. M Vogt. Homotopy limits and colimits. *Mathematische Zeitschrift*, 134(1) :11–52, 1973.

[Zel81] A. Zelevinsky. A generalization of the littlewood-richardson rule and the robinson-schensted-knuth correspondence. *Journal of Algebra*, 69(1) :82–94, 1981.

[Zen96] J. Zeng. Sur quelques propriétés de symétrie des nombres de Genocchi. *Discrete Math.*, 153(1-3) :319–333, 1996.