



HAL
open science

Algèbres de Hopf combinatoires

Rémi Maurice

► **To cite this version:**

Rémi Maurice. Algèbres de Hopf combinatoires. Informatique et langage [cs.CL]. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1196 . tel-01338011

HAL Id: tel-01338011

<https://pastel.hal.science/tel-01338011v1>

Submitted on 27 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

pour l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

(spécialité informatique)

*au titre de l'École doctorale de Mathématiques et des Sciences et Techniques
de l'Information et de la Communication*

soutenue le 9 décembre 2013

par RÉMI MAURICE

Algèbres de Hopf combinatoires

Composition du jury :

| | |
|--------------------------|-----------------------|
| Florent HIVERT, | examineur |
| Jean-Gabriel LUQUE, | examineur |
| Dominique MANCHON, | rapporteur |
| Jean-Christophe NOVELLI, | examineur |
| Frédéric PATRAS, | rapporteur |
| Jean-Yves THIBON, | directeur de thèse |
| Frédéric TOUMAZET, | co-directeur de thèse |

Remerciements

Avant tout, je remercie Jean-Yves Thibon et Frédéric Toumazet pour m'avoir soutenu pendant tout ce travail, et pour la grande liberté qu'ils m'ont accordée.

Je voudrais ensuite remercier Dominique Manchon et Frédéric Patras d'avoir accepté de rapporter ce travail. En particulier, je les remercie pour leurs corrections et suggestions qui ont amélioré ce manuscrit.

Je remercie également Florent Hivert, Jean-Gabriel Luque et Jean-Christophe Novelli d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie tous les membres de l'équipe de combinatoire du laboratoire, ainsi que les doctorants, les anciens doctorants que j'ai rencontrés que je ne cite pas dans un souci de concision (la liste est assez longue), ou juste pour être certain de ne pas en oublier.

Je remercie les personnes qui ont travaillé avec moi pour l'enseignement, et tout particulièrement Claire David et Marc Zipstein pour leur grande générosité et leurs précieux conseils. Enfin, je souhaite remercier les membres administratifs et gestionnaires de mon laboratoire et de mon école doctorale.

Je remercie enfin pour leur soutien mes parents et mon frère.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 1 |
| I Préliminaires | 5 |
| 1 Classes et objets combinatoires | 5 |
| 1.1 Mots | 5 |
| 1.2 Permutations | 7 |
| 1.3 Mots tassées | 10 |
| 1.4 Fonctions de parking | 11 |
| 1.5 Partitions d'un ensemble | 13 |
| 1.6 Matrices | 15 |
| 2 Algèbres de Hopf combinatoires | 18 |
| 2.1 Espaces vectoriels combinatoires | 18 |
| 2.2 Algèbres combinatoires | 19 |
| 2.3 Cogèbres combinatoires | 21 |
| 2.4 Algèbres de Hopf combinatoires | 24 |
| 2.5 Réalisations polynomiales | 26 |
| 3 Exemples d'algèbres de Hopf combinatoires | 27 |
| 3.1 sur des mots | 27 |
| 3.2 Sur des partitions | 40 |
| II Permutations de blocs uniformes | 47 |
| 1 Permutations de blocs uniformes | 47 |
| 1.1 Définitions | 47 |
| 1.2 Représentation graphique | 49 |
| 1.3 Décomposition via les partitions et permutations | 51 |
| 2 Algèbre de Hopf combinatoire | 54 |
| 2.1 Définitions | 54 |
| 2.2 Réalisation polynomiale | 57 |
| 2.3 Propriétés algébriques | 62 |

| | | |
|------------|--|------------|
| III | Matrices carrées tassées | 67 |
| 1 | k -matrices tassées | 67 |
| | 1.1 Définitions | 67 |
| | 1.2 Énumérations | 70 |
| 2 | Structures algébriques | 72 |
| 3 | Propriétés algébriques | 76 |
| | 3.1 Bases multiplicatives et liberté | 76 |
| | 3.2 Éléments primitifs | 80 |
| | 3.3 Structure de bigèbre bidendriforme | 81 |
| 4 | Liens avec d'autres algèbres connues | 86 |
| | 4.1 Algèbre de Hopf des permutations colorées | 87 |
| | 4.2 Algèbre de Hopf des permutations de blocs uniformes | 87 |
| | 4.3 Algèbre des fonctions quasi-symétriques matricielles | 89 |
| | 4.4 Diagramme des plongements | 91 |
| IV | Matrices à signes alternants | 93 |
| 1 | Définitions | 94 |
| | 1.1 Matrices à signes alternants et objets équivalents | 94 |
| | 1.2 Statistiques | 96 |
| 2 | Algèbres de Hopf combinatoires | 97 |
| | 2.1 ASM | 97 |
| 3 | Études de statistiques | 100 |
| | 3.1 Interprétations algébriques | 100 |
| | 3.2 Algèbres quotients | 104 |
| V | Outil informatique | 109 |
| 1 | État de l'art de Sage | 110 |
| 2 | Après | 113 |
| 3 | Conclusion | 119 |

Table des figures

| | | |
|-------|---|----|
| I.1 | Treillis des partitions en taille 3. | 14 |
| I.2 | Diagrammes commutatifs exprimant l'associativité et l'unité d'une algèbre. | 20 |
| I.3 | Diagrammes commutatifs exprimant les axiomes d'un morphisme d'algèbres. | 20 |
| I.4 | Diagrammes commutatifs exprimant la co-associativité et la co-unité d'une cogèbre. | 22 |
| I.5 | Diagrammes commutatifs exprimant les axiomes d'un morphisme de cogèbres. | 22 |
| I.6 | Diagramme de Hasse sur les mots tassés. | 32 |
| II.1 | diagramme d'une permutation de blocs uniforme | 49 |
| II.2 | composée de deux permutations de blocs uniformes | 50 |
| II.3 | produit de convolution de deux permutations de blocs uniformes | 51 |
| III.1 | condition d'échanges de la i^e et $i + 1^e$ colonne d'une k -matrice tassée selon \rightarrow | 76 |
| III.2 | diagramme de Hasse d'un intervalle pour \leq_M sur les k -matrices tassées | 77 |
| III.3 | Condition de fusion de la i^e et $(i + 1)^e$ ligne d'une matrice tassée (pas nécessairement carrée) selon \rightarrow | 89 |
| III.4 | diagramme de Hasse d'un intervalle pour \leq_{MQ} sur les matrices tassées (non nécessairement carrées) | 90 |
| III.5 | diagramme des différents liens avec \mathbf{PMN}_k et \mathbf{PML}_k | 92 |
| IV.1 | correspondance entre les sommets des configurations du modèle à six sommets et les coefficients des matrices à signes alternants. | 95 |
| IV.2 | correspondance entre les sommets des configurations du modèle à six sommets et les chemins osculateurs. | 95 |

| | |
|---|----|
| IV.3 diagramme de Hasse d'un intervalle pour \leq_M sur les matrices à signes alternants | 99 |
|---|----|

Introduction

Avant-propos

La principale activité en combinatoire algébrique est l'étude de problèmes classiques de combinatoire comme le dénombrement, l'énumération, la génération aléatoire. Cette étude s'appuie sur des méthodes propres à l'algèbre. D'un autre côté, l'étude de structures algébriques utilise des moyens informatiques et des techniques propres à la combinatoire. Ce lien entre algèbre et combinatoire se manifeste dans les constructions algébriques dans lesquelles les structures combinatoires sont mises en jeu.

Un très grand nombre de structures algébriques sont aujourd'hui connues ; chacune d'entre elles possède des caractéristiques permettant de décrire plus ou moins précisément certaines propriétés combinatoires. Il est ainsi naturel de construire des structures algébriques sur divers objets combinatoires.

Contexte

L'une de ces structures qui semblent prometteuses, et celle qui renferme le plus d'informations, est la structure d'algèbre de Hopf. Ces structures se révèlent centrales en combinatoire algébrique [25]. Des références classiques sur le sujet sont [49], [1] et [11]. Des règles de composition et de décomposition sur les objets combinatoires données par des algorithmes combinatoires définissent, lorsqu'elles vérifient un certain nombre de relations de compatibilité, une structure d'algèbre de Hopf combinatoire. Toutes ces structures algébriques s'agencent, la plupart du temps, dans des diagrammes dont les flèches sont des injections ou des surjections. Ces morphismes, souvent donnés par l'intermédiaire d'algorithmes combinatoires mettent en évidence certains liens entre différents objets combinatoires.

Établir des propriétés ou les justifier à partir de ces structures peut s'avérer délicat, et les réalisations polynomiales peuvent apporter des simplifications. L'idée d'une réalisation polynomiale est d'encoder les objets combinatoires par des polynômes de sorte que le produit décrivant l'algèbre de Hopf combinatoire devienne le produit ordinaire des polynômes, et le coproduit est donné par un doublement d'alphabets.

La notion heuristique d’algèbre de Hopf combinatoire contient les algèbres de Hopf graduées dont les bases sont indexées par des objets combinatoires. L’algèbre de Hopf des fonctions symétriques **Sym** est le prototype même de cette notion. Ses éléments sont des fonctions symétriques [36] et ses bases sont indexées par les partitions d’entiers. Pour certaines bases de **Sym**, le produit et le coproduit se calculent par l’intermédiaire d’opérations élémentaires sur ces objets. Dans ces dernières années, un grand nombre d’algèbres de Hopf combinatoires furent introduites et étudiées [17], [37], [35], [12], [20], [40, 42], [44] et [21].

Détail et contribution

Ce travail de recherche repose sur la construction de structures algébriques sur des objets combinatoires. Le premier chapitre de cette thèse rappelle les notations et les définitions fondamentales pour la lecture de cette thèse. Nous exposons dans la partie 1 différentes notions sur les objets combinatoires comme les mots, les permutations, les mots tassés, les fonctions de parking et les matrices. Dans la partie suivante, nous rappelons les définitions des structures algébriques. Nous donnons une définition heuristique des algèbres de Hopf combinatoires et expliquons la notion de réalisations polynomiales. La dernière partie de ce premier chapitre est consacrée à différentes algèbres de Hopf dont les bases sont indexées par les objets combinatoires précédemment vues. Nous exposons l’algèbre de Hopf **FQSym** dont les bases sont indexées par les permutations, **WQSym** dont les bases sont indexées par les mots tassés, **PQSym** dont les bases sont indexées par les fonctions de parking, **WSym** dont les bases sont indexées par les partitions d’ensembles et **MQSym** dont les bases sont indexées par les matrices tassées.

Le second chapitre de cette thèse est consacré à l’étude d’une première algèbre de Hopf **UBP** qui généralise celle des permutations de Malvenuto et Reutenauer. Cette algèbre de Hopf **UBP** est indexée par les permutations de blocs uniformes, c’est-à-dire les bijections entre deux partitions d’un ensemble de même taille envoyant un sous-ensemble sur un sous-ensemble de même taille. Nous introduisons dans la première partie les permutations de blocs uniformes en les regardant à la fois sous la forme d’un diagramme et ensuite via la décomposition en une partition d’un ensemble et une permutation. La seconde partie est consacrée à l’étude de l’algèbre de Hopf **UBP**. Nous reformulons les règles du produit et du coproduit en utilisant la description des permutations de blocs uniformes via une partition d’un ensemble et une permutation. Ceci nous permet d’obtenir une description explicite du dual de **UBP**, de recouvrer l’autodualité de **UBP** plus simplement, le morphisme de dualité étant similaire à celui dans **FQSym**. Cette description

permet d'obtenir une réalisation polynomiale en termes de polynômes non-commutatifs en une infinité de bi-lettres. Dans chaque bi-mot correspondant à une permutation de blocs uniforme, l'un de ces mots renseignera sur la partition et l'autre sur la permutation. Et enfin, ceci permet de relier **UBP** à **WQSym** ainsi que leur dual. En ne considérant que la partition d'ensembles correspondante à une permutation de blocs uniforme, nous pouvons associer à chaque permutation de blocs uniforme une partition d'ensemble ordonnée par la valeur minimale contenue dans un bloc, autrement dit un mot tassé.

Le troisième chapitre étudie une deuxième généralisation de **FQSym** en interprétant les permutations comme des matrices. Nous définissons et étudions dans la première partie les k -matrices tassées carrées. Nous énumérons cette classe combinatoire selon plusieurs graduations, la taille de la matrice et le nombre de coefficients non nuls dans la matrice. Nous introduisons dans la section suivante des familles de structures d'algèbres de Hopf sur les k -matrices tassées carrées, la première **PMN** dont la graduation est donnée par la taille de la matrice, la seconde **PML** dont la graduation est donnée par le nombre de coefficients non nuls dans la matrice et la dernière **PM** bigraduée. Les différentes propriétés sur **FQSym** restent vérifiées dans l'algèbre de Hopf des k -matrices tassées. Ainsi, nous montrons dans la partie 3 qu'elles sont libres, colibres, autoduales et admettent une structure biden-driforme. Nous terminons avec la partie 4 où nous résumons les algèbres de Hopf combinatoires qui gravitent autour de l'algèbre de Hopf combinatoire indexée par les k -matrices tassées. Ainsi, l'algèbre de Hopf combinatoire des permutations k -colorées s'injectent dans **PML_k** et **PMN_k**, l'algèbre de Hopf combinatoire des permutations de blocs uniformes est une sous-algèbre de Hopf combinatoire de **PMN₁** et enfin l'algèbre duale de **PML₁** est une sous-algèbre de **MQSym** et expérimentalement, ce n'est pas une sous-algèbre de Hopf combinatoire.

Le chapitre IV traite des matrices à signes alternants. La structure algébrique définie sur l'algèbre de Hopf **ASM** dont les bases sont indexées par les matrices à signes alternants apparaissent comme une sous-algèbre de Hopf de celle des k -matrices tassées. Dans la première partie, nous introduisons la définition des matrices à signes alternants et de certaines statistiques qui apparaissent avec divers objets en bijection avec ces matrices. La structure algébrique que nous pouvons définir sur ces matrices, et qui étend naturellement la définition de l'algèbre de Hopf sur les permutations, est étudiée dans la partie 2. Les propriétés comme la liberté, la dendriformité découle de celles de l'algèbre de Hopf sur les matrices tassées. Nous terminons ce chapitre en étudiant d'un point de vue algébrique les différentes statistiques et montrons

que le quotient de **ASM** par les différentes relations consistant à regrouper les matrices à signes alternants selon la valeur de leurs statistiques est une algèbre commutative et non libre.

L'exploration informatique et la vérification informatique sont nécessaires à la recherche. Dans ce dernier chapitre, nous présentons sur le logiciel **Sage** les outils que nous pouvons utiliser lorsque nous voulons manipuler des structures algébriques comme les algèbres de Hopf combinatoires. Dans la première partie, nous expliquons comment implémenter et utiliser les algèbres de Hopf combinatoires. Dans la partie suivante, nous expliquons les améliorations que nous apportons afin de pouvoir effectuer une recherche dans de meilleures conditions. Cette amélioration passe, par exemple, sur la visualisation des différents changements de bases et sur une gestion plus fine de la dualité.

Chapitre I

Préliminaires

Ce chapitre est dédié aux définitions des objets combinatoires et des algèbres de Hopf et a pour but de fixer les notations qui sont nécessaires pour la suite de ce travail. Dans la section 1, nous détaillons les différents objets combinatoires de bases et nous précisons des algorithmes permettant d'associer et de dissocier ces objets. Dans la section 2, nous rappelons le vocabulaire des structures algébriques que nous rencontrons et présentons une définition des algèbres de Hopf combinatoires que nous utiliserons pour le reste de ce mémoire. Enfin, quelques exemples d'algèbres de Hopf sont données dans la section 3.

1 Classes et objets combinatoires

Cette section est consacrée aux définitions des objets combinatoires considérés dans ce mémoire. Nous y introduisons à la fois les notations ainsi que différents algorithmes liés aux structures algébriques qui leur seront associées.

1.1 Mots

Généralités

Soit A un alphabet. Les éléments de A sont appelés les *lettres*. Nous appelons *mot* toute suite finie de lettres. La *longueur* d'un mot w , noté $|w|$, est la longueur de la suite finie définissant w . Nous notons ε le mot vide (*i.e.*, l'unique mot de longueur 0). L'ensemble des mots sur l'alphabet A est noté A^* .

Nous appelons *sous-mot* d'un mot $w := w_1w_2 \dots w_n$ tout mot de la forme $w_{i_1} \dots w_{i_k}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Étant donné un sous-ensemble B de

l'alphabet A et un mot w sur A , la restriction de w à l'alphabet B est le sous-mot de w , noté $w|_B$, dans lequel les lettres qui ne sont pas dans B ont été supprimées. Par exemple,

$$bacdaacbd|_{\{a,d\}} = adaad. \quad (\text{I.1})$$

Nous appelons *préfixe* (resp. *suffixe*) d'un mot $w := w_1w_2 \dots w_n$ tout mot de la forme $w_1w_2 \dots w_i$ (resp. $w_iw_{i+1} \dots w_n$). Par exemple, sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$, le mot $w := bacdaacbd$ est de longueur 9, les mots $bacd$ et cbd sont respectivement un préfixe et un suffixe de w .

Soit A un alphabet totalement ordonné. Nous allons noter $<$ la relation d'ordre sur les lettres de A , que nous prolongeons sur les mots de A^* en considérant l'ordre lexicographique. Nous dirons que (i, j) est une *inversion* d'un mot w sur A si $i < j$ et $w_i > w_j$. Par exemple, sur l'alphabet $\{a < b < c < d\}$, l'ensemble des inversions du mot $bacdcdbd$ est $\{(1, 2), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$.

Outils algébriques

La *concaténation* de deux mots u et v est le mot, noté $u \cdot v$, obtenu en écrivant les lettres de v à la suite de celles de u . S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons uv la concaténation des mots u et v .

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique 0. Nous notons $\mathbb{K}\langle A \rangle$ l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles de mots sur A à coefficients dans \mathbb{K} . La concaténation munit $\mathbb{K}\langle A \rangle$ d'une structure d'algèbre non commutative appelée *algèbre (associative) libre* sur A .

Le *produit de mélange* de deux mots u et v est la somme formelle notée $u \sqcup v$. Elle est définie récursivement par

$$\begin{cases} \varepsilon \sqcup u = u \sqcup \varepsilon = u \\ au \sqcup bv = a \cdot (u \sqcup bv) + b \cdot (au \sqcup v), \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

où a et b sont deux lettres et u et v sont deux mots. Par exemple,

$$\begin{aligned} ab \sqcup ac &= a \cdot (bac, abc, acb) + a \cdot (abc, acb, cab) \\ &= 2abc + 2acb + abac + acab. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

L'espace vectoriel $\mathbb{K}\langle A \rangle$, muni du produit de mélange, est une algèbre commutative.

1.2 Permutations

Généralités

Une *permutation* de taille n est une bijection de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ sur lui-même. Nous notons \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de taille n et \mathfrak{S} l'ensemble de toutes les permutations. Étant donné deux permutations σ et τ de même taille, nous notons $\sigma\tau$ la *composée* des permutations σ et τ . Muni de cette loi, l'ensemble \mathfrak{S}_n forme un groupe. Nous représentons une permutation σ de taille n comme un mot dont la i^{e} lettre est l'image de i par σ . Ainsi, la *taille* d'une permutation σ est la longueur du mot correspondant et est notée $|\sigma|$. Par exemple, la permutation qui envoie 1 sur 3, 2 sur 1, 3 sur 2 et 4 sur 4 est notée 3124 et est de longueur 4.

Le *standardisé* d'un mot w de taille n sur un alphabet totalement ordonné $A := \{a < b < \dots\}$ est l'unique permutation, notée $\text{std}(w)$, de taille n ayant exactement les mêmes inversions que w . Autrement dit, le standardisé de w est l'unique permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\sigma_i < \sigma_j \iff w_i \leq w_j. \tag{I.4}$$

Par exemple, considérons le mot $w := dcabaadb$ sur l'alphabet $\{a < b < c < d\}$. Le standardisé du mot w est la permutation 76142385. Nous pouvons la calculer de la manière suivante. Pour chaque lettre x de l'alphabet, nous réétiquetons de la gauche vers la droite la i^{e} occurrence de x dans w par x_i . Le résultat est un mot u sur l'alphabet $\{a_1 < a_2 < \dots < b_1 < b_2 < \dots\}$. Si $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ sont les lettres apparaissant dans u , le standardisé est l'image de u par l'homomorphisme $y_i \rightarrow i$. Ce mot, vu comme une permutation, est la standardisée de w . Reprenons l'exemple précédent du mot w . La deuxième ligne est le mot u dont l'alphabet est $\{a_1 < a_2 < a_3 < b_1 < b_2 < c_1 < d_1 < d_2\}$ et la dernière est le standardisé de w .

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| d | c | a | b | a | a | d | b |
| d_1 | c_1 | a_1 | b_1 | a_2 | a_3 | d_2 | b_2 |
| 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 5 |

(I.5)

Outils algébriques

Nous appelons respectivement opérateurs *over* et *under*, notés respectivement $/$ et \backslash , de deux permutations σ et τ les permutations définies par

$$\sigma / \tau = \sigma \cdot \tau [|\sigma|] \qquad \sigma \backslash \tau = \tau [|\sigma|] \cdot \sigma, \tag{I.6}$$

où $\alpha[k]$ est le mot obtenu à partir de la permutation α en ajoutant à chacune de ses lettres l'entier k et le produit \cdot désigne la concaténation des mots.

Le *produit de mélange décalé* de deux permutations σ et τ , noté $\sigma \bar{\sqcup} \tau$, est le produit de mélange du mot σ par le mot $\tau[|\sigma|]$. Par exemple,

$$\begin{aligned} 231 \bar{\sqcup} 21 &:= 231 \sqcup 54 \\ &= 23154 + 23514 + 25314 + 52314 + 23541 + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Remarquons que si σ_1 et σ_2 sont deux permutations et σ'_1 (resp. σ'_2) est une permutation obtenue à partir de σ_1 (resp. σ_2) en échangeant certaines lettres, alors le produit $\sigma'_1 \bar{\sqcup} \sigma'_2$ s'obtient à partir de $\sigma_1 \bar{\sqcup} \sigma_2$ en échangeant les mêmes lettres que celles échangées dans σ_1 ainsi que celles échangées dans σ_2 après décalage. Par exemple, pour les permutations

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= 312 & \sigma'_1 &:= 231 \\ \sigma_2 &:= 21 & \sigma'_2 &:= 21, \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_1 \bar{\sqcup} \sigma_2 &= 31254 + 31524 + 35124 + 53124 + 31542 + \dots \\ \sigma'_1 \bar{\sqcup} \sigma'_2 &= 23154 + 23514 + 25314 + 52314 + 23541 + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

L'échange de lettres dans un mot correspondant à la multiplication à gauche par une permutation, nous avons par conséquent, en écrivant σ'_1 (resp. σ'_2) comme le produit $\tau_1 \sigma_1$ (resp. $\tau_2 \sigma_2$) :

$$(\tau_1 \sigma_1) \bar{\sqcup} (\tau_2 \sigma_2) = (\tau_1 / \tau_2) \circ (\sigma_1 \bar{\sqcup} \sigma_2), \quad (\text{I.10})$$

où \circ est la composition des permutations étendue par linéarité. Reprenons l'exemple précédent et illustrons l'équation (I.10) en considérant les permutations σ_1 et σ_2 définies dans (I.8) et les permutations

$$\tau_1 := 312 \quad \tau_2 := 12. \quad (\text{I.11})$$

Nous avons pour le membre de droite :

$$\begin{aligned} (\tau_1 / \tau_2) \circ (\sigma_1 \bar{\sqcup} \sigma_2) &:= 31245 \circ (312 \bar{\sqcup} 21) \\ &= 31245 \circ (31254 + 31524 + 35124 + 53124 + \dots) \\ &= 23154 + 23514 + 25314 + 52314 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

qui est le produit $\tau_1 \sigma_1 \bar{\sqcup} \tau_2 \sigma_2$ donné par (I.9).

Le *produit de convolution* de deux permutations σ et τ de tailles respectives m et n est la somme formelle notée $\sigma * \tau$ des permutations α de taille $m + n$ telle que le standardisé du préfixe (resp. suffixe) de longueur m (resp. n) de α soit la permutation σ (resp. τ). C'est-à-dire :

$$\sigma * \tau := \sum_{\substack{u \cdot v \in \mathfrak{S}_{m+n} \\ \text{std}(u)=\sigma, \text{std}(v)=\tau}} uv. \quad (\text{I.13})$$

Par exemple,

$$231 * 21 = 23154 + 24153 + 25143 + 34152 + 35142 + \dots. \quad (\text{I.14})$$

Par un argument similaire à celui du produit de mélange décalé, nous remarquons que :

$$(\sigma_1 \tau_1) * (\sigma_2 \tau_2) = (\sigma_1 * \sigma_2) \circ (\tau_1 / \tau_2), \quad (\text{I.15})$$

où \circ est la composition des permutations étendue par linéarité. Nous verrons au paragraphe 3.1 comment le déduire directement à partir de l'équation (I.10). Par exemple, nous illustrons l'équation (I.15) avec les permutations

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 := 312 & \tau_1 := 312 & \sigma_1 \tau_1 = 231 \\ \sigma_2 := 21 & \tau_2 := 12 & \sigma_2 \tau_2 = 21. \end{array}$$

Nous avons pour le membre de droite :

$$\begin{aligned} (\sigma_1 * \sigma_2) \circ (\tau_1 / \tau_2) &:= (312 * 21) \circ 31245 \\ &= (31254 + 41253 + 51243 + 41352 + \dots) \circ 31245 \\ &= (23154 + 24153 + 25143 + 34152 + \dots), \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

qui est le produit $231 * 21$ donné par (I.14).

Le *coproduit de démélange* d'une permutation σ est la somme formelle, notée $\Delta_{\square}(\sigma)$, définie par :

$$\Delta_{\square}(\sigma) := \sum_{0 \leq i \leq |\sigma|} \sigma_{\{1, \dots, i\}} \otimes \text{std}(\sigma_{\{i+1, \dots, |\sigma|\}}). \quad (\text{I.17})$$

Par exemple,

$$\Delta_{\square}(2341) = \varepsilon \otimes 2341 + 1 \otimes 123 + 21 \otimes 12 + 231 \otimes 1 + 2341 \otimes \varepsilon. \quad (\text{I.18})$$

Le *coproduit de déconvolution* d'une permutation σ est la somme formelle, notée $\Delta_*(\sigma)$, définie par :

$$\Delta_*(\sigma) := \sum_{0 \leq i \leq |\sigma|} \text{std}(\sigma_1 \cdots \sigma_i) \otimes \text{std}(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{|\sigma|}). \quad (\text{I.19})$$

Par exemple,

$$\Delta_*(2341) = \varepsilon \otimes 2341 + 1 \otimes 231 + 12 \otimes 21 + 123 \otimes 1 + 2341 \otimes \varepsilon. \quad (\text{I.20})$$

1.3 Mots tassés

Généralités

Soit $A := \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ un alphabet infini totalement ordonné. Le *mot tassé* $\text{pack}(w)$ associé au mot $w \in A^*$ est le mot u obtenu par le procédé suivant. Si $b_1 < \cdots < b_r$ est l'ensemble des lettres apparaissant dans w , u est l'image par l'homomorphisme $b_i \rightarrow a_i$. Par exemple, sur l'alphabet $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\text{pack}(51735514) = 41524413 \quad \text{pack}(772335) = 441223. \quad (\text{I.21})$$

Un mot w est dit *tassé* si $\text{pack}(w)$ est égal à w . La *taille* d'un mot tassé est sa longueur. Tous les mots tassés seront, à présent, écrits sur l'alphabet $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous notons \mathcal{PW}_n l'ensemble des mots tassés de taille n et \mathcal{PW} l'ensemble de tous les mots tassés. Par exemple, il y a un mot tassé de taille 1, trois de taille 2 et treize de taille 3 :

$$\begin{aligned} &1, 11, 12, 21, 111, 112, 121, 122, 123, \\ &132, 211, 212, 213, 221, 231, 312, 321. \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Les mots tassés codent les surjections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, m\}$ et en ce sens, généralisent les permutations.

Outils algébriques

Le *produit de mélange décalé* de deux mots tassés w_1 et w_2 , noté $w_1 \bar{\sqcup} w_2$, est le produit de mélange du mot w_1 par le mot $w_2[\max(w_1)]$ où nous rappelons que $\alpha[k]$ est le mot obtenu à partir du mot tassé α en ajoutant à chacune de ses lettres l'entier k . Par exemple,

$$\begin{aligned} 11 \bar{\sqcup} 21 &:= 11 \sqcup 32 \\ &= 1132 + 1312 + 3112 + 1321 + 3121 + 3211. \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Le *produit de convolution* de deux mots tassés w_1 et w_2 de tailles respectives n_1 et n_2 est la somme formelle, notée $w_1 * w_2$, des mots tassés w de taille $n_1 + n_2$ tel que le tassage du préfixe (resp. suffixe) de longueur n_1 (resp. n_2) de w soit le mot tassé w_1 (resp. w_2). C'est-à-dire :

$$w_1 * w_2 := \sum_{\substack{u \cdot v \in \mathcal{PW}_{n_1+n_2} \\ \text{pack}(u)=w_1, \text{pack}(v)=w_2}} uv \quad (\text{I.24})$$

Par exemple,

$$11 * 21 = 1121 + 1132 + 2221 + 2231 + 3321. \quad (\text{I.25})$$

Le *coproduit de démélange* d'un mot tassé w est la somme formelle, notée $\Delta_{\square}(w)$, définie par :

$$\Delta_{\square}(w) := \sum_{0 \leq i \leq \max(w)} w_{\{1, \dots, i\}} \otimes \text{pack}(w_{\{i+1, \dots, \max(w)\}}). \quad (\text{I.26})$$

Par exemple,

$$\Delta_{\square}(322312) = \varepsilon \otimes 322312 + 1 \otimes 21121 + 2212 \otimes 11 + 322312 \otimes \varepsilon. \quad (\text{I.27})$$

Le *coproduit de déconvolution* d'un mot tassé w est la somme formelle, notée $\Delta_*(w)$, définie par :

$$\Delta_*(w) := \sum_{0 \leq i \leq |w|} \text{pack}(w_1 \cdots w_i) \otimes \text{pack}(w_{i+1} \cdots w_{|w|}). \quad (\text{I.28})$$

Par exemple,

$$\Delta_*(2231) = \varepsilon \otimes 2231 + 1 \otimes 231 + 11 \otimes 21 + 112 \otimes 1 + 2231 \otimes \varepsilon. \quad (\text{I.29})$$

1.4 Fonctions de parking

Généralités

Une *fonction de parking* de taille n est un mot $f := f_1 f_2 \dots f_n$ sur l'alphabet $\{1, \dots, n\}$ dont le réarrangement croissant (*i.e.*, le réordonnement du mot par ordre croissant des lettres) $f^\uparrow = f'_1 f'_2 \dots f'_n$ satisfait $f'_i \leq i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous notons \mathcal{PF}_n l'ensemble des fonctions de parking de

taille n et \mathcal{PF} l'ensemble de toutes les fonctions de parking. Par exemple, il y a une fonction de parking de taille 1, trois de taille 2 et seize de taille 3 :

$$\begin{aligned} &1, 11, 12, 21, 111, 112, 121, 211, 113, 131, 311, \\ &122, 212, 221, 123, 132, 213, 231, 312, 321. \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

La fonction de parking $\text{park}(w)$ associée à un mot w sur l'alphabet $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est le mot u obtenu par le procédé récursif suivant. Étant donné un mot $w := w_1 w_2 \dots w_n$ sur l'alphabet $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous définissons l'entier :

$$d(w) := \min \{i; \#\{w_j \leq i\} < i\}. \quad (\text{I.31})$$

Si $d(w) = n + 1$, alors w est une fonction de parking et l'algorithme termine en retournant w . Sinon, on définit w' comme le mot obtenu en décrémentant toutes les lettres de w plus grandes que $d(w)$. Alors $\text{park}(w) := \text{park}(w')$. Puisque w' est strictement inférieur à w pour l'ordre lexicographique, l'algorithme se termine et retourne une fonction de parking.

Nous illustrons l'exécution de cet algorithme. Sur chaque ligne, il y a un mot w et la valeur $d(w)$ et ligne suivante contient le mot w' défini par l'algorithme.

| w | $d(w)$ |
|-------------------------|--------|
| 4 10 13 10 8 1 4 1 13 5 | 3 |
| 3 9 12 9 7 1 3 1 12 4 | 6 |
| 3 8 11 8 6 1 3 1 11 4 | 7 |
| 3 7 10 7 6 1 3 1 10 4 | 9 |
| 3 7 9 7 6 1 3 1 9 4 | 11 |

(I.32)

Outils algébriques

Le *produit de mélange décalé* de deux fonctions de parking f_1 et f_2 est noté $f_1 \bar{\sqcup} f_2$ et est le produit de mélange du mot f_1 par le mot $f_2[[f_1]]$. Par exemple,

$$\begin{aligned} 11 \bar{\sqcup} 21 &:= 11 \sqcup 43 \\ &= 1143 + 1413 + 4113 + 1431 + 4131 + 4311. \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

Le *produit de convolution* de deux fonctions de parking f_1 et f_2 de tailles respectives n_1 et n_2 est la somme formelle, notée $f_1 * f_2$, des fonctions de parking f de taille $n_1 + n_2$ telle que la parkisée du préfixe (resp. suffixe) de

longueur n_1 (resp. n_2) de f soit la fonction de parking f_1 (resp. f_2). C'est-à-dire :

$$f_1 * f_2 := \sum_{\substack{u \cdot v \in \mathcal{PF}_{n_1+n_2} \\ \text{park}(u)=f_1, \text{park}(v)=f_2}} uv. \quad (\text{I.34})$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} 11 * 21 = & 1121 + 1131 + 1132 + 1141 + 1142 \\ & + 1143 + 2221 + 2231 + 2241 + 3321. \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Le *coproduit de démixage* d'une fonction de parking f est la somme formelle, noté $\Delta_{\square}(f)$, définie par :

$$\Delta_{\square}(f) := \sum_{0 \leq i \leq \max(w)} w_{\{1, \dots, i\}} \otimes \text{park}(w_{\{i+1, \dots, \max(w)\}}). \quad (\text{I.36})$$

Par exemple,

$$\Delta_{\square}(611441) = \varepsilon \otimes 611441 + 111 \otimes 311 + 11441 \otimes 1 + 611441 \otimes \varepsilon. \quad (\text{I.37})$$

Le *coproduit de déconvolution* d'une fonction de parking f est la somme formelle, notée $\Delta_*(f)$, définie par :

$$\Delta_*(w) := \sum_{0 \leq i \leq |f|} \text{park}(f_1 \cdots f_i) \otimes \text{park}(f_{i+1} \cdots f_{|f|}). \quad (\text{I.38})$$

Par exemple,

$$\Delta_*(2141) = \varepsilon \otimes 2141 + 1 \otimes 131 + 21 \otimes 21 + 213 \otimes 1 + 2141 \otimes \varepsilon. \quad (\text{I.39})$$

1.5 Partitions d'un ensemble

Généralités

Une *partition d'un ensemble* E (fini) est une collection de sous-ensembles $\mathcal{B} := \{B_1, \dots, B_k\}$ deux à deux disjoints non vide dont l'union est E . Les sous-ensembles B_i sont appelés les *blocs* de la partition de E . La *taille* de la partition est le cardinal de l'ensemble E . Dans toute la suite, nous allons nous restreindre au cas où E est l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Ainsi, \mathcal{B} est une partition de E si et seulement si

$$B_1 \cup \cdots \cup B_k = \{1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad B_i \cap B_j = \emptyset. \quad (\text{I.40})$$

Nous notons \mathcal{P}_n la collection des partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et \mathcal{P} l'ensemble de toutes les partitions. Par exemple, il y a cinq partitions de taille 3 :

$$\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}. \quad (\text{I.41})$$

Le *type* d'une partition \mathcal{B} de taille n est la partition de l'entier n formée des cardinaux des blocs de \mathcal{B} (et donc ordonnés par ordre décroissant). Par exemple, le type de la partition $\{\{1, 7\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 8\}\}$ est la partition $(3, 2, 2, 1)$.

Il existe donc deux notions de partition, l'une relative à un entier, l'autre relative à un ensemble. Afin de ne pas alourdir la terminologie, nous parlerons indifféremment de celles-ci sous le terme de partition, le contexte imposant laquelle est à considérer.

Étant donné deux partitions $\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_k\}$ et $\mathcal{B} := \{B_1, \dots, B_l\}$, nous dirons que \mathcal{A} est plus fine que \mathcal{B} , et nous notons $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, si et seulement si tout bloc de \mathcal{B} est une union de blocs de \mathcal{A} . Autrement dit, \mathcal{A} est plus fine que \mathcal{B} lorsque

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, \exists H \subset \{1, \dots, k\}, B_i = \bigcup_{j \in H} A_j. \quad (\text{I.42})$$

Dans l'exemple de la figure I.1, nous illustrons le treillis des partitions en taille 3.

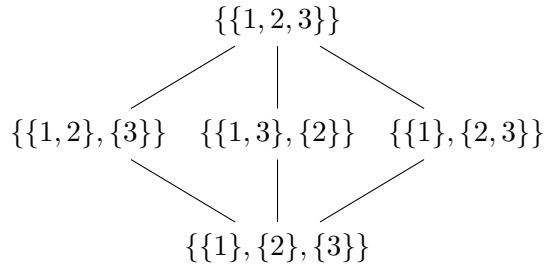


FIGURE I.1 – Treillis des partitions en taille 3.

Le *standardisé* d'une collection \mathcal{E} d'ensembles d'entiers distincts est la partition notée $\text{std}(\mathcal{E})$ et obtenue en renumérotant chaque entier a apparaissant dans \mathcal{E} par 1 auquel nous ajoutons le nombre d'entiers dans \mathcal{E} plus petits que a (au sens strict). Par exemple,

$$\text{std}(\{\{1, 6\}, \{3, 5, 12\}, \{9, 13\}\}) = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{5, 7\}\}. \quad (\text{I.43})$$

Outils algébriques

La *concaténation* de deux partitions \mathcal{A} et \mathcal{B} est la partition notée \mathcal{AB} et obtenue en ajoutant la taille de \mathcal{A} aux entiers contenus dans \mathcal{B} et en "concaténant" le résultat à \mathcal{A} , c'est-à-dire, en faisant l'union des deux ensembles. Par exemple,

$$\{\{1, 3\}, \{2\}\}\{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 7\}, \{5, 6, 8\}\}. \quad (\text{I.44})$$

La *restriction* de la partition \mathcal{C} de l'ensemble E à un sous-ensemble H de E est notée $\mathcal{C}|_H$ et est définie par

$$\mathcal{C}|_H := \text{std}(\{B \in \mathcal{C}; B \subset H\}). \quad (\text{I.45})$$

Un *point d'arrêt* d'une partition \mathcal{C} est un entier i tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq |\mathcal{C}| \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}|_{\{1, \dots, i\}} \mathcal{C}|_{\{i+1, \dots, n\}} \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

Nous notons $B(\mathcal{C})$ l'ensemble des points d'arrêt d'une partition \mathcal{C} . Par exemple, pour $\mathcal{C} = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}, \{5\}, \{6, 8\}, \{7\}\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}|_{\{1, \dots, 3\}} &= \{\{1\}\} & \mathcal{C}|_{\{4, \dots, 8\}} &= \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\} \\ \mathcal{C}|_{\{1, \dots, 4\}} &= \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\} & \mathcal{C}|_{\{5, \dots, 8\}} &= \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\} \\ \mathcal{C}|_{\{1, \dots, 5\}} &= \{\{1, 3, 4\}, \{2\}, \{5\}\} & \mathcal{C}|_{\{6, \dots, 8\}} &= \{\{1, 3\}, \{2\}\} \\ \mathcal{C}|_{\{1, \dots, 6\}} &= \{\{1, 3, 4\}, \{2\}, \{5\}\} & \mathcal{C}|_{\{7, \dots, 8\}} &= \{\{1\}\}. \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

D'où,

$$B(\mathcal{C}) = \{0, 4, 5, 8\}. \quad (\text{I.48})$$

1.6 Matrices

Généralités

Dans tout ce mémoire, la transposée d'une matrice M sera notée M^T .

Étant donné une matrice A de taille $\ell \times c$ et un entier positif n , nous notons \circ et \bullet les opérateurs définis par :

$$\begin{aligned} A \circ n &:= \left[A \middle| \mathfrak{Z}_\ell^n \right], & n \circ A &:= \left[\mathfrak{Z}_\ell^n \middle| A \right], \\ A \bullet n &:= \left[\frac{A}{\mathfrak{Z}_n^c} \right] & n \bullet A &:= \left[\frac{\mathfrak{Z}_n^c}{A} \right], \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

où les quatre matrices précédentes désignent des matrices blocs lignes et colonnes, et les \mathfrak{Z}_ℓ^c des matrices nulles de taille $\ell \times c$.

Outils algébriques

Étant donné A_1 et A_2 deux matrices de tailles respectives $\ell_1 \times c_1$ et $\ell_2 \times c_2$, nous posons :

$$A_1 / A_2 := \left[\frac{A_1 \middle| \mathfrak{Z}_{\ell_1}^{c_2}}{\mathfrak{Z}_{\ell_2}^{c_1} \middle| A_2} \right] \quad \text{et} \quad A_1 \setminus A_2 := \left[\frac{\mathfrak{Z}_{\ell_1}^{c_2} \middle| A_1}{A_2 \middle| \mathfrak{Z}_{\ell_2}^{c_1}} \right]. \quad (\text{I.50})$$

Nous appelons respectivement $/$ et \setminus les opérateurs *over* et *under*. Remarquons que ces deux opérateurs sont associatifs.

Le *produit de mélange en colonne* (resp. *en ligne*) de deux matrices A_1 et A_2 ayant le même nombre de lignes (resp. colonnes), noté $A_1 \sqcup A_2$ (resp. $A_1 * A_2$), est le produit de mélange des mots dont les lettres sont les colonnes (resp. lignes) respectives de A_1 et A_2 . Par exemple, sur les matrices à coefficients entiers,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.51})$$

et

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.52})$$

Le *produit de mélange décalé en colonne* (resp. *en ligne*) de deux matrices A_1 et A_2 de tailles respectives $\ell_1 \times c_1$ et $\ell_2 \times c_2$, noté $A_1 \bar{\sqcup} A_2$ (resp. $A_1 \bar{*} A_2$), est le produit de mélange de la matrice $A_1 \bullet \ell_2$ (resp. $A_1 \circ c_2$) par la matrice $\ell_1 \bullet A_2$ (resp. $c_1 \circ A_2$). Par exemple, sur les matrices à coefficients

entiers,

$$\begin{aligned}
[1 \ 1 \ 1] \sqcup [2] &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{I.53}$$

et

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \bar{*} [3] &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} * [0 \ 0 \ 0 \ 3] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{I.54}$$

Le *produit de mélange augmenté*¹ en colonne de deux matrices A_1 et A_2 de tailles respectives $\ell_1 \times c_1$ et $\ell_2 \times c_2$ est la somme formelle, notée $A_1 \sqcup A_2$. Il est défini de la manière suivante. Soit c un entier compris entre $\max(c_1, c_2)$ et $c_1 + c_2$. On insère des colonnes de 0 à l'intérieur des matrices A_1 et A_2 de manière à obtenir deux matrices A'_1 et A'_2 ayant c colonnes et tels que tout indice dans A'_1 d'une colonne de 0 ayant été insérée dans A_1 ne soit pas un indice dans A'_2 d'une colonne de 0 ayant été insérée dans A_2 . Soit A la matrice obtenue en collant A'_1 au dessus de A'_2 . Alors, $A_1 \sqcup A_2$ est la somme formelle des matrices A .

De la même manière, nous définissons le *produit de mélange augmenté en ligne* de deux matrices A_1 et A_2 comme la somme formelle, notée $A_1 \bar{*} A_2$, de la transposée des matrices apparaissant dans $A_1^T \sqcup A_2^T$. Par exemple,

$$[1 \ 1] \sqcup [2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{I.55}$$

et

$$[1] \bar{*} [2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{I.56}$$

1. Dans la littérature, ce produit est aussi appelé un *quasi-shuffle* au sens de Hoffman [23], un *stuffle* ou un *battage contractant*

2 Algèbres de Hopf combinatoires

Dans tout ce mémoire, \mathbb{K} désigne un corps de caractéristique 0 et nous notons $1_{\mathbb{K}}$ l'élément neutre de \mathbb{K} . Toutes les structures algébriques considérées sont définies sur le corps \mathbb{K} . Le but de ce paragraphe est de fixer le cadre et les notations des structures algébriques que nous allons rencontrer. Le terme "combinatoire" n'est pas standard et ce terme suppose implicitement que les bases sont indexées par des "objets combinatoires".

2.1 Espaces vectoriels combinatoires

Dans tout ce paragraphe, nous illustrerons les différentes définitions des structures algébriques avec des diagrammes commutatifs et utiliserons les espaces vectoriels suivants comme point de départ à nos premiers exemples :

1. l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes commutatifs en n variables ;
2. l'espace vectoriel $\mathbb{K}[G]$ de base les éléments d'un groupe multiplicatif G .

Un *espace vectoriel gradué* est un espace vectoriel V qui se décompose en une somme directe de sous-espaces vectoriels :

$$V := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n. \quad (\text{I.57})$$

Le *degré* d'un élément $v \in V$ est le minimum des entiers n tel que v appartienne à $V_0 \oplus \dots \oplus V_n$. Les espaces vectoriels V_n sont appelés les *composantes homogènes* de degré n de V . Un élément $v \in V$ est dit *homogène* si v est élément d'une composante homogène. Un *espace vectoriel gradué connexe* est un espace vectoriel gradué dans lequel la composante homogène de degré 0 est de dimension un.

Un *espace vectoriel combinatoire* est un espace vectoriel gradué dans lequel chaque composante homogène est de dimension finie. Le *dual gradué* d'un espace vectoriel combinatoire est la somme directe des duals des composantes homogènes. La *série de Hilbert* d'un espace vectoriel combinatoire V est la série formelle

$$\mathcal{H}_V := \sum_{n \geq 0} \dim(V_n) t^n. \quad (\text{I.58})$$

Le *produit tensoriel* de deux espaces vectoriels U et V est un couple $(U \otimes V, \rho)$ où $U \otimes V$ est un espace vectoriel et $\rho: U \times V \rightarrow U \otimes V$ est une application bilinéaire telle que pour toute application bilinéaire $g: U \times V \rightarrow W$, il existe

une application linéaire $h: U \otimes V \rightarrow W$ vérifiant $g = h \circ \rho$. Une base de l'espace vectoriel $U \otimes V$ est donnée par les éléments $u \otimes v$, appelés *tenseurs purs*, où u (resp. v) parcourt les éléments de la base de U (resp. V). Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels gradués (resp. combinatoires) U et V est encore gradué (resp. combinatoire). La composante homogène de degré n de $U \otimes V$ est

$$(U \otimes V)_n = \bigoplus_{i+j=n} U_i \otimes V_j. \quad (\text{I.59})$$

Nous noterons $\tau: C \otimes C \rightarrow C \otimes C$ l'application linéaire définie sur les tenseurs purs par $\tau(x \otimes y) := y \otimes x$.

Par exemple, les espaces vectoriels $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathbb{K}[G]$ sont gradués. Le degré du premier espace vectoriel est le degré classique des polynômes. Le dernier n'a qu'une seule composante homogène, tous les éléments de $\mathbb{K}[G]$ sont de degré 0. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est combinatoire, car, pour tout $m \geq 0$, la composante homogène de degré m est de dimension $\binom{m+n}{m}$, tandis que $\mathbb{K}[G]$ l'est si et seulement si G est un groupe fini.

2.2 Algèbres combinatoires

Une *algèbre* est un triplet (A, μ, η) où A est un espace vectoriel, $\mu: A \times A \rightarrow A$ est une application bilinéaire appelée *produit* et $\eta: \mathbb{K} \rightarrow A$ une application linéaire appelée *unité* satisfaisant les deux axiomes suivants :

associativité

$$\mu \circ (\mu \otimes Id_A) = \mu \circ (Id_A \otimes \mu); \quad (\text{I.60})$$

unité

$$\mu \circ (Id_A \otimes \eta) = \mu \circ (\eta \otimes Id_A) \quad (\text{I.61})$$

qui correspond à l'isomorphisme canonique $\mathbb{K} \otimes A \rightarrow A$.

Le produit d'une algèbre peut être vu, par définition du produit tensoriel, comme une application linéaire $\mu: A \otimes A \rightarrow A$, ce que nous ferons dans tout ce mémoire. Nous illustrons dans la figure I.2 les deux axiomes (I.60) et (I.61) à l'aide de diagrammes commutatifs.

Une *sous-algèbre* de (A, μ_A, η_A) est un sous-espace vectoriel B de A tel que :

$$\mu_A(B \otimes B) \subset B, \quad \eta_A(\mathbb{K}) \subset B. \quad (\text{I.62})$$

Un *idéal* de A est un sous-espace vectoriel V de A tel que :

$$\mu_A(A \otimes Id_A + Id_A \otimes A) \subset V. \quad (\text{I.63})$$

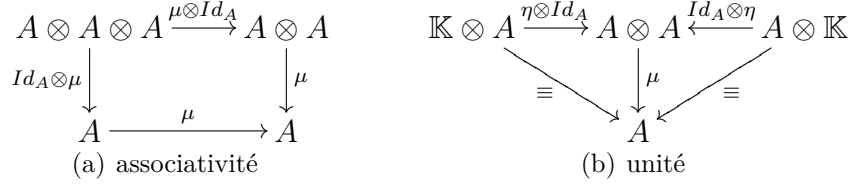


FIGURE I.2 – Diagrammes commutatifs exprimant les axiomes d’une algèbre.

Un *morphisme d’algèbres* $\phi: A \rightarrow B$ est une application linéaire entre deux algèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) satisfaisant les deux axiomes suivants :

$$\mu_B \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu_A \quad \text{et} \quad \phi \circ \eta_A = \eta_B. \quad (\text{I.64})$$

Nous illustrons dans la figure I.3 les deux axiomes de l’équation (I.64) à l’aide de diagrammes commutatifs.

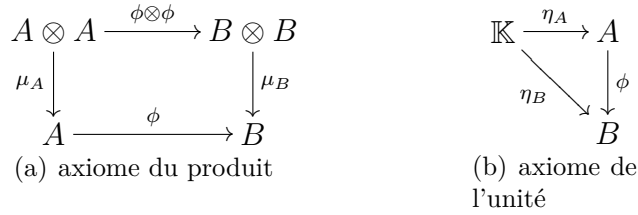


FIGURE I.3 – Diagrammes commutatifs exprimant les axiomes d’un morphisme d’algèbres.

Une algèbre (A, μ_A, η_A) est *commutative* si

$$\mu_A \circ \tau = \mu_A. \quad (\text{I.65})$$

Une *algèbre graduée* (resp. *algèbre combinatoire*) (A, μ_A, η_A) est une algèbre dont l’espace vectoriel sous-jacent est gradué (resp. combinatoire) et

$$\forall i, j \geq 0, \mu_A(A_i \otimes A_j) \subset A_{i+j}. \quad (\text{I.66})$$

Le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux algèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) est naturellement muni d’une structure d’algèbre. Le produit $\mu_{A \otimes B}$ est défini par

$$\mu_{A \otimes B} \left((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2) \right) := \mu_A(a_1 \otimes a_2) \otimes \mu_B(b_1 \otimes b_2) \quad (\text{I.67})$$

et l'unité est donnée par

$$\eta_{A \otimes B} := \eta_A \otimes \eta_B, \quad (\text{I.68})$$

où $(f \otimes g)(x \otimes y) := f(x) \otimes g(y)$. Remarquons, d'après (I.59), que le produit tensoriel de deux algèbres graduées (resp. combinatoires) est encore gradué (resp. combinatoire).

Par exemple, les deux espaces vectoriels $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathbb{K}[G]$ sont munis d'une structure d'algèbres graduées.

L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est une algèbre commutative. Le produit est le produit classique des polynômes et l'unité est l'application linéaire dont l'image de $1_{\mathbb{K}}$ est le polynôme 1. Cette algèbre est graduée, puisque le produit d'un monôme homogène de degré i et d'un monôme homogène de degré j est un monôme de degré $i + j$. Ainsi, elle est combinatoire.

L'espace vectoriel $\mathbb{K}[G]$ est une algèbre. Le produit de G est étendu par linéarité à $\mathbb{K}[G]$ et l'unité est l'application linéaire dont l'image de $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre de G . En particulier, l'algèbre $\mathbb{K}[G]$ est commutative si et seulement si G est un groupe abélien. Puisque $\mathbb{K}[G]$ n'a qu'une seule composante homogène, $\mathbb{K}[G]$ est une algèbre graduée. Elle est combinatoire si et seulement si G est un groupe fini.

2.3 Cogèbres combinatoires

Une *cogèbre* est un triplet (C, Δ, ε) où C est un espace vectoriel, $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon: C \rightarrow \mathbb{K}$ sont des applications linéaires appelées respectivement *coproduit* et *co-unité* satisfaisant les deux axiomes suivants :

co-associativité

$$(\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta = (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta \quad (\text{I.69})$$

co-unité

$$(Id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = Id_C \otimes 1 \quad \text{et} \quad (\varepsilon \otimes Id_C) \circ \Delta = 1 \otimes Id_C. \quad (\text{I.70})$$

Nous illustrons dans la figure I.4 les deux conditions (I.69) et (I.70) à l'aide de diagrammes commutatifs.

Une *sous-cogèbre* de $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ est un sous-espace vectoriel D de C tel que :

$$\Delta_C(D) \subset D \otimes D. \quad (\text{I.71})$$

Un *co-idéal* de C est un sous-espace vectoriel V de C tel que :

$$\Delta_C(V) \subset (V \otimes C + C \otimes V) \quad \text{et} \quad \varepsilon_C(V) = (0) \quad (\text{I.72})$$

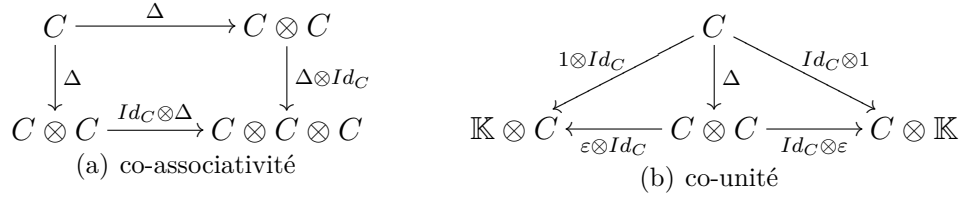


FIGURE I.4 – Diagrammes commutatifs exprimant les axiomes d’une cogèbre.

Un *morphisme de cogèbres* $\phi: C \rightarrow D$ est une application linéaire entre deux cogèbres $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ satisfaisant les deux axiomes suivants :

$$\Delta_D \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_C \quad \text{et} \quad \varepsilon_D \circ \phi = \varepsilon_C. \quad (\text{I.73})$$

Nous illustrons dans la figure I.5 les deux axiomes de l’équation (I.73) à l’aide de diagrammes commutatifs.

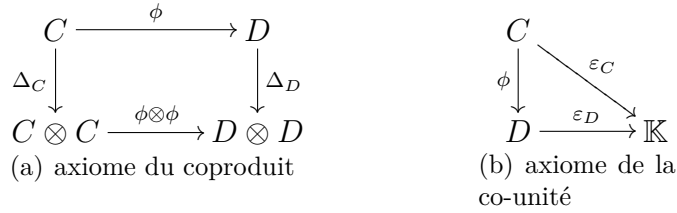


FIGURE I.5 – Diagrammes commutatifs exprimant les axiomes d’un morphisme de cogèbres.

Une cogèbre $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ est *co-commutative* si

$$\tau \circ \Delta_C = \Delta_C. \quad (\text{I.74})$$

Une *cogèbre graduée* (resp. *cogèbre combinatoire*) $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ est une cogèbre dont l’espace vectoriel sous-jacent est gradué (resp. combinatoire) et

$$\forall n \geq 0, \quad \Delta_C(C_n) = \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes C_j. \quad (\text{I.75})$$

Le produit tensoriel $C \otimes D$ de deux cogèbres $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ est naturellement muni d’une structure de cogèbre. Le coproduit $\Delta_{C \otimes D}$ est défini par :

$$\Delta_{C \otimes D} := (Id_C \otimes \tau \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \quad (\text{I.76})$$

et la co-unité est donnée par :

$$\varepsilon_{C \otimes_D}(x \otimes y) := \varepsilon_C(x) \varepsilon_D(y). \quad (\text{I.77})$$

Remarquons, d'après (I.59), que le produit tensoriel de deux cogèbres graduées (resp. combinatoires) est encore gradué (resp. combinatoire).

Par exemple, les deux espaces vectoriels $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathbb{K}[G]$ sont munis d'une structure de cogèbres graduées co-commutative.

Nous allons nous contenter de regarder l'espace vectoriel des polynômes en une variable $\mathbb{K}[X]$ afin de ne pas alourdir les définitions. Nous verrons dans la section suivante le cas à n variables en utilisant la structure algébrique de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est une cogèbre en définissant linéairement le coproduit par

$$\Delta(X^k) := \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \otimes X^{k-i} \quad (\text{I.78})$$

et la co-unité par $\varepsilon(X^n) := \delta_{n,0}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, valant 1 si $i = j$ et 0 sinon. De plus, c'est une cogèbre combinatoire puisque le coproduit est clairement gradué et elle est co-commutative par la symétrie des coefficients binomiaux. Remarquons que nous aurions pu aussi définir le coproduit de la manière suivante

$$\Delta(X^k) := \sum_{i=0}^k X^i \otimes X^{k-i}. \quad (\text{I.79})$$

Nous avons fait le choix de (I.78) pour que le coproduit soit un morphisme d'algèbres.

L'espace vectoriel $\mathbb{K}[G]$ est une cogèbre en définissant linéairement le coproduit, pour tout $g \in G$, par

$$\Delta(g) := g \otimes g \quad (\text{I.80})$$

et la co-unité par

$$\varepsilon(g) := 1. \quad (\text{I.81})$$

Puisque $\mathbb{K}[G]$ n'a qu'une seule composante homogène, $\mathbb{K}[G]$ est une cogèbre trivialement graduée et elle est combinatoire si et seulement si G est un groupe fini. La cogèbre $\mathbb{K}[G]$ est clairement co-commutative.

2.4 Algèbres de Hopf combinatoires

Une *bigèbre* est un quintuplet $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ tel que :

1. (B, μ, η) est une algèbre ;
2. (B, Δ, ε) est une cogèbre ;
3. Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.

Une *sous-bigèbre* de $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est à la fois une sous-algèbre de (B, μ, η) et une sous-cogèbre de (B, Δ, ε) . Un *bi-idéal* de B est à la fois un idéal de (B, μ, η) et un co-idéal de (B, Δ, ε) . Un *morphisme de bigèbres* est à la fois un morphisme d'algèbres et de cogèbres. Une bigèbre B est *commutative* (resp. *co-commutative*) si (B, μ, η) (resp. (B, Δ, ε)) l'est. Une bigèbre B est graduée (resp. combinatoire) si l'algèbre (B, μ, η) et la cogèbre (B, Δ, ε) sont graduées (resp. combinatoire).

Le *dual gradué* d'une bigèbre combinatoire $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est la bigèbre combinatoire $(B^*, \mu^*, \eta^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$, où B^* est le dual gradué de l'espace vectoriel B . Le produit μ^* dual du coproduit Δ et le coproduit Δ^* dual du produit μ sont définis par

$$\langle \mu^*(x \otimes y), z \rangle = \langle x \otimes y, \Delta(z) \rangle, \quad (\text{I.82})$$

$$\langle \Delta^*(x), y \otimes z \rangle = \langle x, \mu(y \otimes z) \rangle, \quad (\text{I.83})$$

où $\langle x, y \rangle$ est le *crochet de dualité*. Une bigèbre combinatoire B est *autoduale* si son dual est isomorphe en tant que bigèbre à B . Dans la suite de ce mémoire, nous parlerons simplement de dual pour le dual gradué.

Soit (C, Δ, ε) une cogèbre et (A, μ, η) une algèbre. L'espace vectoriel $\text{Hom}(C, A)$ est muni d'une structure d'algèbre. Le produit est défini, pour tout $f \in \text{Hom}(C, A)$ et $g \in \text{Hom}(C, A)$, par

$$f * g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta, \quad (\text{I.84})$$

et l'unité est donné par l'application $x \rightarrow \eta \circ \varepsilon(x)$. L'associativité du produit μ et la co-associativité du coproduit Δ assure l'associativité du produit $*$. L'algèbre $(\text{Hom}(C, A), *, \eta \circ \varepsilon)$ est appelée l'*algèbre de convolution*.

Soit $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. On dira que H est une *algèbre de Hopf* si Id_H possède un inverse dans l'algèbre de convolution $(\text{Hom}(H, H), *, \eta \circ \varepsilon)$. L'unique inverse de Id_H est appelé *antipode* de H et est noté S . Autrement dit, H est une algèbre de Hopf s'il existe une application linéaire $S: H \rightarrow H$ telle que :

$$S * Id_H = Id_H * S = \eta \circ \varepsilon. \quad (\text{I.85})$$

Notons que si S existe, S est unique. Une *algèbre de Hopf graduée* (resp. *algèbre de Hopf combinatoire*) est une algèbre de Hopf telle que la bigèbre soit graduée (resp. combinatoire).

L'observation suivante est cruciale et permet d'avoir une condition suffisante pour qu'une bigèbre combinatoire soit une algèbre de Hopf combinatoire. Une bigèbre combinatoire dont la composante homogène de degré 0 est de dimension 1 est une algèbre de Hopf combinatoire. En effet, dans ce cas, l'antipode S se calcule composante homogène par composante homogène de la manière suivante. Considérons une bigèbre combinatoire $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ dont la composante homogène de degré 0 de H est de dimension 1. Soit u le vecteur de base de H_0 . Par définition, le coproduit est un morphisme d'algèbres. Puisque la bigèbre est graduée, alors $\eta \circ \varepsilon(u) = 1$ et donc $S(u) = 1$. Soit maintenant v un vecteur de base d'une composante homogène de degré n strictement positif. Alors $\eta \circ \varepsilon(v) = 0$ et

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \circ (S \otimes Id) \circ (\Delta)(v) \\ &= \sum_{i=0}^n \mu(S(v_i) \otimes v_{n-i}), \end{aligned} \tag{I.86}$$

où nous avons $\Delta(v) = \sum_{i=0}^n v_i \otimes v_{n-i}$ où les v_j sont des éléments homogènes de degré j . Pour $i = n$ dans la somme de (I.86), v_0 étant homogène de degré 0, v_0 est un multiple scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ de $\eta(1_K)$ et donc $\mu(S(v_n) \otimes v_0) = \lambda \eta(1_{\mathbb{K}}) S(v_n)$. L'équation (I.86) permet, par récurrence, de calculer l'antipode des éléments de base des composantes homogènes de degré n , connaissant l'antipode sur tous les éléments de base des composantes homogènes de degré strictement plus petit que n .

Remarquons que dans (I.86), nous utilisons le produit $S * Id$ (voir (I.85)) afin de calculer l'antipode, il est possible d'utiliser $Id * S$ en remplaçant $S \otimes Id$ par $Id \otimes S$ dans (I.86).

Par exemple, les espaces vectoriels $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathbb{K}[G]$ sont des algèbres de Hopf graduées.

L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est une bigèbre. Nous avons déjà vu que $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est une algèbre et c'est une cogèbre en définissant le coproduit sur les générateurs algébriques X_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$ par

$$\Delta(X_i) := 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1 \tag{I.87}$$

et la co-unité par $\varepsilon(X_i) := 1$. La bigèbre graduée $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ étant connexe, c'est une algèbre de Hopf combinatoire. En effet, en introduisant un second

jeu de variables $\{Y_i\}$ et en identifiant les $X^m \otimes X^n$ à $X^m Y^n$, le coproduit devient $\Delta(f) = f(X + Y)$ et toutes les propriétés (co-associativité, compatibilité) deviennent évidentes. L'antipode S est donné par l'application linéaire envoyant X_i sur $-X_i$.

L'espace vectoriel $\mathbb{K}[G]$ est une algèbre et une cogèbre graduée. C'est en fait une bigèbre puisque, pour tout $g, h \in G$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta(g) \Delta(h) &= (g \otimes g) (h \otimes h) \\ &= (gh \otimes gh) \\ &= \Delta(gh). \end{aligned} \tag{I.88}$$

Or, pour tout $g \in G$, nous avons :

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{K}} &= S * Id_{\mathbb{K}[G]}(g) \\ &= S(g) g. \end{aligned} \tag{I.89}$$

L'application linéaire $S: \mathbb{K}[G] \rightarrow \mathbb{K}[G]$ définie linéairement, pour tout $g \in G$, par $S(g) := g^{-1}$ est l'antipode de $\mathbb{K}[G]$. Ainsi, $\mathbb{K}[G]$ est une algèbre de Hopf.

2.5 Réalisations polynomiales

L'idée d'une réalisation polynomiale est d'interpréter les objets combinatoires par des polynômes et l'espace vectoriel combinatoire associé comme un espace sur un certain espace de polynômes en des variables commutatives ou non-commutatives. Le produit de l'algèbre combinatoire est alors hérité du produit des polynômes et le coproduit de la cogèbre combinatoire est défini par manipulation d'alphabets. Les différents axiomes d'une bigèbre combinatoire tels que l'associativité, la co-associativité et la compatibilité entre le produit et le coproduit en découlent immédiatement. L'ingrédient principal d'une réalisation polynomiale est alors une relation d'équivalence sur les mots ou les monômes.

Soit \mathcal{A} une algèbre. Une *réalisation polynomiale* de \mathcal{A} est une application linéaire $r_A: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}\langle A \rangle$ telle que, pour tout alphabet dénombrable A , r_A soit un morphisme d'algèbres injectif. Autrement dit, chaque objet est codé par un polynôme en une infinité de variables et le produit est donné par le produit usuel des polynômes.

Soit \mathcal{C} une cogèbre. Une *réalisation polynomiale* de \mathcal{C} est une application linéaire $r_A: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}\langle A \rangle$ telle que pour tout alphabet B isomorphe à A ,

définissant la somme $A + B$ comme l'union disjointe de A et B , munie éventuellement d'une relation supplémentaire, les lettres de A et B commutant mutuellement et identifiant $r_A r_B$ avec $r_A \otimes r_B$, nous avons :

$$r_A \otimes r_B \circ \Delta(x) = r_{A+B}(x) \quad (\text{I.90})$$

pour tout élément $x \in \mathcal{C}$. Autrement dit, chaque objet est codé par un polynôme en une infinité de variables et le coproduit se déduit par un doublement d'alphabets.

3 Exemples d'algèbres de Hopf combinatoires

3.1 sur des mots

FQSym

L'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer [37] est l'algèbre de Hopf dont les bases sont indexées par les permutations. Elle est étudiée dans [3] où les auteurs donnent explicitement l'antipode, calculent les éléments primitifs et exploitent l'ordre faible sur le groupe symétrique pour en déduire quelques propriétés. Dans [15], les auteurs définissent l'algèbre de Hopf **FQSym** (pour Free Quasi-Symmetric Functions) et montrent qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Malvenuto-Reutenauer. Dans [14], les auteurs définissent différentes bases grâce à l'identité de Cauchy qui relie les bases à leur duale.

Soit $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les permutations de taille n et

$$\mathbb{K}\mathfrak{S} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\mathfrak{S}_n. \quad (\text{I.91})$$

Nous munissons $\mathbb{K}\mathfrak{S}$ du produit $\bar{\square}$ et du coproduit Δ_* que nous étendons par linéarité à $\mathbb{K}\mathfrak{S}$. L'espace vectoriel $\mathbb{K}\mathfrak{S}$ muni du produit et du coproduit est une algèbre de Hopf combinatoire.

Soit A un alphabet infini totalement ordonné. Nous posons, étant donnée une permutation σ :

$$\mathbf{F}_\sigma(A) := \sum_{w \in A^*; \text{std}(w) = \sigma^{-1}} w. \quad (\text{I.92})$$

Par exemple, en restreignant A aux cinq premiers entiers, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{3142}(A) = & 2312 + 2412 + 2512 + 2413 + 2513 + 2514 + 3413 + 3513 \\ & + 3514 + 4514 + 3423 + 3523 + 3524 + 4524 + 4534. \end{aligned} \quad (\text{I.93})$$

L'algèbre **FQSym** est l'espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{F}_\sigma ; \sigma \in \mathfrak{S}\}$, appelée la base *fondamentale* muni du produit usuel des polynômes. Ces polynômes engendrent une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle A \rangle$ isomorphe à celle de Malvenuto-Reutenauer. Le produit, dans la base fondamentale, s'écrit donc :

$$\mathbf{F}_{\sigma_1} \cdot \mathbf{F}_{\sigma_2} := \sum_{\sigma \in \sigma_1 \sqcup \sigma_2} \mathbf{F}_\sigma, \quad (\text{I.94})$$

où σ_1 et σ_2 sont deux permutations. Par exemple,

$$\mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{1243} + \mathbf{F}_{1423} + \mathbf{F}_{4123} + \mathbf{F}_{1432} + \mathbf{F}_{4132} + \mathbf{F}_{4312}. \quad (\text{I.95})$$

Le coproduit dans la base fondamentale s'obtient par un doublement d'alphabet. Considérons l'alphabet A comme une somme de deux alphabets A' et A'' totalement ordonnés et commutant mutuellement tels que toutes les lettres de A' soient plus petites que celles de A'' . Par un calcul direct, nous trouvons que :

$$\mathbf{F}_\sigma(A' + A'') = \sum_{i=0}^{|\sigma|} \mathbf{F}_{\text{std}(\sigma_1 \dots \sigma_i)}(A') \mathbf{F}_{\text{std}(\sigma_{i+1} \dots \sigma_{|\sigma|})}(A''). \quad (\text{I.96})$$

En identifiant $P(A')Q(A'')$ à $P \otimes Q$ et en posant $\Delta(\mathbf{F}_\sigma) = \mathbf{F}_\sigma(A' + A'')$, nous retrouvons bien le coproduit Δ_* , puisque :

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{F}_\sigma) &= \mathbf{F}_\sigma(A' + A'') \\ &= \sum_{i=0}^{|\sigma|} \mathbf{F}_{\text{std}(\sigma_1 \dots \sigma_i)} \otimes \mathbf{F}_{\text{std}(\sigma_{i+1} \dots \sigma_{|\sigma|})} \\ &= \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta_*(\sigma)} \mathbf{F}_{\sigma_1} \otimes \mathbf{F}_{\sigma_2}. \end{aligned} \quad (\text{I.97})$$

Par exemple, écrivant les lettres de A' (resp. A'') en bleu (resp. rouge), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{3142}(A' + A'') &= \sum_{a < b < c < d} \mathbf{bdac} + \sum_{a, a < b < c} \mathbf{acab} + \sum_{a < b, a < b} \mathbf{bbaa} \\ &\quad + \sum_{a < b \leq c, a} \mathbf{baac} + \sum_{a < b \leq c < d} \mathbf{bdac} \\ &= \mathbf{F}_{3142}(A'') + \mathbf{F}_1(A') \mathbf{F}_{132}(A'') + \mathbf{F}_{21}(A') \mathbf{F}_{21}(A'') \\ &\quad + \mathbf{F}_{213}(A') \mathbf{F}_1(A'') + \mathbf{F}_{3142}(A'). \end{aligned} \quad (\text{I.98})$$

Notons $\{\mathbf{G}_\sigma\}$ la base duale de la base $\{\mathbf{F}_\sigma\}$. Le produit \cdot et le coproduit Δ , sur la base des \mathbf{G} , sont donnés par

$$\mathbf{G}_{\sigma_1} \cdot \mathbf{G}_{\sigma_2} := \sum_{\sigma \in \sigma_1 * \sigma_2} \mathbf{G}_\sigma \quad (\text{I.99})$$

$$\Delta(\mathbf{G}_\sigma) := \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta_{\square}(\sigma)} \mathbf{G}_{\sigma_1} \otimes \mathbf{G}_{\sigma_2}, \quad (\text{I.100})$$

où σ , σ_1 et σ_2 sont des permutations. Par exemple,

$$\mathbf{G}_{12} \cdot \mathbf{G}_{21} = \mathbf{G}_{1243} + \mathbf{G}_{1342} + \mathbf{G}_{1432} + \mathbf{G}_{2341} + \mathbf{G}_{2431} + \mathbf{G}_{3421}, \quad (\text{I.101})$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{G}_{3142}) = & 1 \otimes \mathbf{G}_{3142} + \mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_{132} + \mathbf{G}_{12} \otimes \mathbf{G}_{12} \\ & + \mathbf{G}_{312} \otimes \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_{3142} \otimes 1. \end{aligned} \quad (\text{I.102})$$

L'algèbre de Hopf **FQSym** est auto-duale, l'application linéaire envoyant \mathbf{F}_σ sur $\mathbf{G}_{\sigma^{-1}}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf de **FQSym** vers son dual **FQSym**^{*}.

WQSym

L'algèbre des fonctions quasi-symétriques mots **WQSym** (pour Word Quasi-Symmetric Functions) est définie comme l'algèbre des invariants des polynômes non commutatifs par l'action quasi-symétrisante de Hivert [19]. Dans [41], les auteurs étudient **WQSym** en se basant sur les propriétés algébriques de **PQSym**, qui fait l'objet du paragraphe 3.1. Une structure de treillis sur les mots tassés, introduite dans [29] sous le nom de pseudo-permutoèdre, permet de construire de nouvelles bases.

Soit A un alphabet infini totalement ordonné. Nous posons, étant donné un mot tassé u :

$$\mathbf{M}_u(A) := \sum_{w \in A^* ; \text{pack}(w)=u} w. \quad (\text{I.103})$$

Par exemple, en restreignant A aux cinq premiers entiers, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{31321}(A) = & 31321 + 41421 + 51521 + 41431 + 51531 \\ & + 51541 + 42432 + 52532 + 52542 + 53543. \end{aligned} \quad (\text{I.104})$$

La famille $\{\mathbf{M}_w ; w \in \mathcal{PW}\}$, appelée *fonctions quasi-symétriques monomiales*, engendrent une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle A \rangle$ appelée **WQSym**. Par un calcul direct, le produit dans la base monomiale s'écrit :

$$\mathbf{M}_{w_1}(A) \cdot \mathbf{M}_{w_2}(A) = \sum_{w \in w_1 * w_2} \mathbf{M}_w(A), \quad (\text{I.105})$$

où w_1 et w_2 sont deux mots tassés. Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11}(A) \cdot \mathbf{M}_{21}(A) = & \mathbf{M}_{1121}(A) + \mathbf{M}_{1132}(A) + \mathbf{M}_{2221}(A) \\ & + \mathbf{M}_{2231}(A) + \mathbf{M}_{3321}(A). \end{aligned} \quad (\text{I.106})$$

Le coproduit dans la base fondamentale est défini par doublement d'alphabet. De la même manière que pour la réalisation polynomiale \mathbf{FQSym} , nous considérons l'alphabet A comme une somme de deux alphabets A' et A'' totalement ordonnés et commutant mutuellement tels que toutes les lettres de A' soient plus petites que celles de A'' . Par un calcul direct, nous trouvons :

$$\mathbf{M}_u(A' + A'') = \sum_{i=0}^{\max(u)} \mathbf{M}_{\text{pack}(u_{\{1, \dots, i\}})}(A') \mathbf{M}_{\text{pack}(u_{\{i+1, \dots, \max(u)\})}}(A''). \quad (\text{I.107})$$

En identifiant $P(A')Q(A'')$ à $P \otimes Q$ et en posant $\Delta(\mathbf{M}_u) = \mathbf{M}_u(A' + A'')$, nous retrouvons le coproduit Δ_{\square} :

$$\Delta(\mathbf{M}_w) := \sum_{(w_1, w_2) \in \Delta_{\square}(w)} \mathbf{M}_{w_1} \otimes \mathbf{M}_{w_2}, \quad (\text{I.108})$$

où w est un mot tassé. Par exemple, écrivant les lettres de A' (resp. A'') en bleu (resp. rouge), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{322312}(A' + A'') = & \sum_{a < b < c} \text{cbbcab} + \sum_{a, a < b} \text{baabaa} + \sum_{a < b, a} \text{abbaab} \\ & + \sum_{a < b < c} \text{cbbcab} \\ = & \mathbf{M}_{322312}(A'') + \mathbf{M}_1(A') \mathbf{M}_{21121}(A'') \\ & + \mathbf{M}_{2212}(A') \mathbf{M}_{11}(A'') + \mathbf{M}_{322312}(A'). \end{aligned} \quad (\text{I.109})$$

L'algèbre de Hopf \mathbf{FQSym}^* est une sous-algèbre de Hopf de \mathbf{WQSym} . Reprenons la réalisation polynomiale (I.92) exprimée dans la base duale de la base fondamentale. Considérons une permutation σ . Nous avons :

$$\mathbf{G}_{\sigma}(A) := \sum_{w \in A^*; \text{std}(w) = \sigma} w. \quad (\text{I.110})$$

Dans le polynôme $\mathbf{G}_{\sigma}(A)$, nous pouvons regrouper tous les mots qui ont le même tassé. Reprenons l'exemple (I.93) et exprimons le dans la base duale,

en se restreignant aux quatre premières lettres de l'alphabet. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{3142}(A) &= baba + baca + bada + caca + cada + dada + cacb + cadb \\
&\quad + dadb + dadc + cbc b + cbdb + dbdb + dbdc + dc dc \\
&= (baba + caca + dada + cbc b + dc dc) + (baca + bada \\
&\quad + cada + cbdb + dbdb) + (cacb + dadb + dadc + dbdc) + cadb \\
&= \mathbf{M}_{2121}(A) + \mathbf{M}_{2131}(A) + \mathbf{M}_{3132}(A) + \mathbf{M}_{3142}(A).
\end{aligned} \tag{I.111}$$

L'application linéaire $\iota: \mathbf{FQSym}^* \rightarrow \mathbf{WQSym}$ définie, pour toute permutation σ , par

$$\iota(\mathbf{G}_\sigma) := \sum_{w \in \mathcal{PW}; \text{std}(w)=\sigma} \mathbf{M}_w \tag{I.112}$$

est un morphisme injectif d'algèbres de Hopf combinatoires.

Le dual \mathbf{WQSym}^* de \mathbf{WQSym} est l'espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{M}_w^*; w \in \mathcal{PW}\}$ où $\{\mathbf{M}_w^*\}$ est la base duale de la base $\{\mathbf{M}_w\}$. Le produit et coproduit dans \mathbf{WQSym}^* sont définis par

$$\mathbf{M}_{w_1}^* \cdot \mathbf{M}_{w_2}^* := \sum_{w \in w_1 \bar{\sqcup} w_2} \mathbf{M}_w^* \tag{I.113}$$

$$\Delta(\mathbf{M}_w^*) := \sum_{(w_1, w_2) \in \Delta_*(w)} \mathbf{M}_{w_1}^* \otimes \mathbf{M}_{w_2}^*, \tag{I.114}$$

où w , w_1 et w_2 sont des mots tassés. Par exemple,

$$\mathbf{M}_{11}^* \cdot \mathbf{M}_{21}^* = \mathbf{M}_{1132}^* + \mathbf{M}_{1312}^* + \mathbf{M}_{3112}^* + \mathbf{M}_{1321}^* + \mathbf{M}_{3121}^* + \mathbf{M}_{3211}^*, \tag{I.115}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{M}_{2231}^*) &= 1 \otimes \mathbf{M}_{2231}^* + \mathbf{M}_1^* \otimes \mathbf{M}_{231}^* + \mathbf{M}_{11}^* \otimes \mathbf{M}_{21}^* \\
&\quad + \mathbf{M}_{112}^* \otimes \mathbf{M}_1^* + \mathbf{M}_{2231}^* \otimes 1.
\end{aligned} \tag{I.116}$$

L'application linéaire ι induit un morphisme dual $\pi: \mathbf{WQSym}^* \rightarrow \mathbf{FQSym}$ défini, pour tout mot tassé u , par :

$$\pi(\mathbf{M}_u^*) := \mathbf{F}_{\text{std}(u)}. \tag{I.117}$$

Il s'agit d'un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf combinatoires.

Nous introduisons une nouvelle base de \mathbf{WQSym}^* et nous explicitons sa base duale. L'introduction de ces bases sera motivée au paragraphe 2.3.

Dans [6], les auteurs introduisent une relation d'ordre sur les compositions d'ensembles. Nous la reformulons en terme de relation sur les mots tassés. Étant donné un mot tassé u et un entier $1 \leq i < \max(u)$, nous notons $f(u, i)$ le mot tassé v défini par

$$v_j := \begin{cases} u_j - 1 & \text{si } u_j > i \\ u_j & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{I.118})$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} f(121, 1) &= 111 & f(3122, 2) &= 2122 \\ f(11122344, 2) &= 11122233 & f(42315, 1) &= 31214. \end{aligned}$$

Nous étendons cette définition aux images itérées par f en posant, étant donné un mot tassé u et un sous-ensemble $I = \{i_1 > i_2 > \dots > i_k\}$ de $\{1, \dots, \max(u)\}$:

$$f(u, I) := \begin{cases} u & \text{si } I = \emptyset \\ f(\dots f(u, i_1), \dots, i_k) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{I.119})$$

Nous considérons la relation sur les mots tassés de même taille définie par la relation de couverture, notée \rightarrow , suivante. Étant donnés deux mots tassés u et v :

$$u \rightarrow v \iff \begin{cases} \text{std}(u) = \text{std}(v) \\ \text{il existe } i \text{ tel que } u = f(v, i). \end{cases} \quad (\text{I.120})$$

Nous notons \preceq la fermeture réflexive et transitive de \rightarrow . Dans l'exemple de la figure I.6, nous illustrons le diagramme de Hasse associé aux mots tassés de taille 3. Remarquons que :

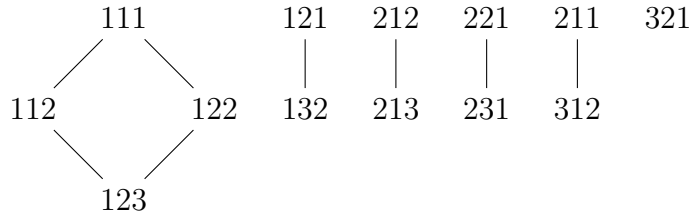


FIGURE I.6 – Diagramme de Hasse sur les mots tassés.

$$\begin{cases} v \preceq u \\ v_i < v_j \end{cases} \implies u_i < u_j, \quad (\text{I.121})$$

où u et v sont deux mots tassés.

La relation

$$\mathbf{M}_u^* := \sum_{w \succeq u} \widetilde{\mathbf{M}}_w^* \quad (\text{I.122})$$

permet, par triangularité, de définir l'élément $\widetilde{\mathbf{M}}_u^*$. La famille $\{\widetilde{\mathbf{M}}_u^*; u \in \mathcal{PW}\}$ est donc une base de \mathbf{WQSym}^* . Par exemple,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{M}}_{111}^* &= \mathbf{M}_{111}^* - \mathbf{M}_{112}^* - \mathbf{M}_{122}^* + \mathbf{M}_{123}^*, \\ \widetilde{\mathbf{M}}_{234561}^* &= \mathbf{M}_{234561}^*, \\ \widetilde{\mathbf{M}}_{244123}^* &= \mathbf{M}_{244123}^* - \mathbf{M}_{255134}^* - \mathbf{M}_{245123}^* + \mathbf{M}_{256134}^*. \end{aligned} \quad (\text{I.123})$$

Nous décrivons le produit et le coproduit dans cette nouvelle base.

Proposition 3.1. *Le produit dans la base $\widetilde{\mathbf{M}}_w^*$ est :*

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{w_1}^* \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_{w_2}^* = \sum_{w \in w_1 \sqcup w_2} \widetilde{\mathbf{M}}_w^*, \quad (\text{I.124})$$

où w_1 et w_2 sont deux mots tassés.

La relation (I.122) est un changement de bases entre \mathbf{M}^* et $\widetilde{\mathbf{M}}^*$. Ainsi, la règle du produit sur l'une de ces bases contraint l'autre. Afin de s'affranchir de l'inversion de Möbius, et par souci de concision, nous démontrons la proposition 3.1 en démontrant que la règle (I.124) du produit sur la base $\widetilde{\mathbf{M}}^*$ implique celle (I.113) sur la base $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Démonstration. Supposons vraie la règle (I.124) du produit dans la base $\widetilde{\mathbf{M}}_w^*$ et montrons qu'alors la règle (I.113) pour le produit dans la base \mathbf{M}_w^* est vérifiée. Considérons deux mots tassés w_1 et w_2 .

Soit u un mot tassé tel que

$$\exists u_1 \succeq w_1, \exists u_2 \succeq w_2 \quad \text{et} \quad u \in u_1 \sqcup u_2. \quad (\text{I.125})$$

Il existe donc deux ensembles I_1 et I_2 tels que

$$f(u_1, I_1) = w_1 \quad f(u_2, I_2) = w_2. \quad (\text{I.126})$$

Définissons l'ensemble I comme l'union de I_1 et de l'ensemble obtenu en ajoutant l'entier $\max(u_1)$ à chaque valeur de I_2 . Le mot tassé $w := f(u, I)$ apparaît dans le produit $w_1 \sqcup w_2$. Nous venons de voir que si $\widetilde{\mathbf{M}}_u^*$ est un terme apparaissant dans le membre de gauche de (I.113), alors il existe un

mot tassé w tel que w est dans le produit $w_1 \sqcup w_2$ et $w \preceq u$. Autrement dit, $\widetilde{\mathbf{M}}_u^*$ apparaît dans le membre de droite de (I.113).

Réciproquement, soit u un mot tassé tel que

$$\exists w \in w_1 \sqcup w_2 \quad \text{et} \quad u \succeq w. \quad (\text{I.127})$$

Définissons

$$u_1 := u|_{\{1, \dots, i\}} \quad u_2 := u|_{\{i+1, \dots, \max(u)\}} \quad (\text{I.128})$$

pour un certain entier i de sorte que la longueur de u_1 (resp. u_2) soit la même que celle de w_1 (resp. w_2), un tel entier i existe d'après (I.121). Puisque $u \succeq w$, il existe un sous-ensemble I de $\{1, \dots, \max(w)\}$ tel que $f(u, I) = w$. Nous pouvons couper l'ensemble I en les ensembles I_1 et I_2 définis par

$$I_1 := \{i \in I; i < \max(u_1)\} \quad I_2 := \{i \in I; i > \max(u_1)\}, \quad (\text{I.129})$$

car, d'après (I.121), $\max(u_1)$ n'est pas un élément de I . Nous avons donc

$$\begin{cases} \text{std}(u_1) = \text{std}(w_1) \\ f(u_1, I_1) = w_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{std}(u_2) = \text{std}(w_2) \\ f(u_2, I_2) = w_2 \end{cases} \quad (\text{I.130})$$

Nous venons de voir que si $\widetilde{\mathbf{M}}_u^*$ est un terme apparaissant dans le membre de droite de (I.113), alors il existe deux mots tassés u_1 et u_2 tels que $u_1 \succeq w_1$, $u_2 \succeq w_2$. De plus, par définition de u_1 et u_2 , $\widetilde{\mathbf{M}}_u^*$ apparaît dans le produit $\widetilde{\mathbf{M}}_{u_1}^* \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_{u_2}^*$. Autrement dit, $\widetilde{\mathbf{M}}_u^*$ apparaît dans le membre de gauche de (I.113).

Puisque les membres de droite et de gauche de (I.113) sont sans multiplicité, nous en déduisons la règle du produit (I.113). \square

Par exemple,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{M}}_{11}^* \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_1^* &= (\mathbf{M}_{11}^* - \mathbf{M}_{12}^*) \cdot \mathbf{M}_1^* \\ &= \mathbf{M}_{112}^* - \mathbf{M}_{123}^* + \mathbf{M}_{121}^* - \mathbf{M}_{132}^* + \mathbf{M}_{211}^* - \mathbf{M}_{312}^* \\ &= \widetilde{\mathbf{M}}_{112}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_{121}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_{211}^*. \end{aligned} \quad (\text{I.131})$$

Proposition 3.2. *Le coproduit dans la base $\widetilde{\mathbf{M}}_w^*$ est :*

$$\Delta(\widetilde{\mathbf{M}}_w^*) = \sum_{\substack{w=w_1 \cdot w_2 \\ w_1 \cap w_2 = \emptyset}} \widetilde{\mathbf{M}}_{\text{pack}(w_1)}^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{\text{pack}(w_2)}^*, \quad (\text{I.132})$$

où w est un mot tassé.

Comme pour le produit, la règle du coproduit sur l'une des bases $\widetilde{\mathbf{M}}^*$ ou \mathbf{M}^* contraint l'autre. Afin de s'affranchir de l'inversion de Möbius, et par souci de concision, nous démontrons la proposition 3.2 en démontrant que la règle (I.132) du coproduit sur la base $\widetilde{\mathbf{M}}^*$ implique celle (I.114) sur la base \mathbf{M}^* .

Démonstration. Supposons vraie la règle (I.132) du coproduit dans la base $\widetilde{\mathbf{M}}_w^*$ et montrons qu'alors la règle (I.114) pour le coproduit dans la base \mathbf{M}_w^* est vérifiée. Considérons un mot tassé w .

Soit u' et v' deux mots tassés tels que :

$$\exists w' \succeq w, \begin{cases} u \cap v = \emptyset \\ u' = \text{pack}(u) \\ v' = \text{pack}(v) \end{cases}, \quad (\text{I.133})$$

où nous avons posé $u := w'_1 \cdots w'_{|u'|}$ et $v := w'_{|u'|+1} \cdots w'_{|w|}$. Puisque $w' \succeq w$, il existe I tel que $f(w', I) = w$. Posons :

$$I_u := \{i \in I; i \in u, i+1 \in u\} \quad I_v := \{i \in I; i \in v, i+1 \in v\}. \quad (\text{I.134})$$

Notons J_u (resp. J_v) l'ensemble des images des entiers contenus dans I_u (resp. I_v) par le même changement d'alphabets que celui définissant le morphisme $u \rightarrow \text{pack}(u)$ (resp. $v \rightarrow \text{pack}(v)$). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} f(\text{pack}(u), J_u) &= \text{pack}(w_1 \cdots w_{|u'|}) \\ f(\text{pack}(v), J_v) &= \text{pack}(w_{|u'|+1} \cdots w_{|w|}). \end{aligned} \quad (\text{I.135})$$

Nous venons de voir que si $\widetilde{\mathbf{M}}_{u'}^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{v'}^*$ est un terme apparaissant dans le membre de gauche de (I.114), alors nous avons :

$$u' \succeq \text{pack}(w_1 \cdots w_{|u'|}) \quad \text{et} \quad v' \succeq \text{pack}(w_{|u'|+1} \cdots w_{|w|}). \quad (\text{I.136})$$

Le terme $\widetilde{\mathbf{M}}_{u'}^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{v'}^*$ apparaît donc dans le membre de droite de (I.114).

Réciproquement, soit u' et v' deux mots tassés tels que :

$$u' \succeq \text{pack}(w_1 \cdots w_{|u'|}) \quad v' \succeq \text{pack}(w_{|u'|+1} \cdots w_{|w|}). \quad (\text{I.137})$$

Il existe donc deux ensembles $I_{u'}$ et $I_{v'}$ tels que :

$$\begin{aligned} f(u', I_{u'}) &= \text{pack}(w_1 \cdots w_{|u'|}) \\ f(v', I_{v'}) &= \text{pack}(w_{|u'|+1} \cdots w_{|w|}). \end{aligned} \quad (\text{I.138})$$

Soit w' le mot tassé tel que :

$$\begin{cases} w' \in u' * v' \\ w'_1 \cdots w'_{|u'|} \cap w'_{|u'|+1} \cdots w'_{|w|} = \emptyset \\ \text{std}(w) = \text{std}(w') \end{cases} \quad . \quad (\text{I.139})$$

Notons $J_{u'}$ (resp. $J_{v'}$) l'ensemble des images réciproques des entiers contenus dans $I_{u'}$ (resp. $I_{v'}$) par le même changement d'alphabets que celui définissant le morphisme $w'_1 \cdots w'_{|u'|} \rightarrow u'$ (resp. $w'_{|u'|+1} \cdots w'_{|w|} \rightarrow v'$). Par construction, nous avons $f(w', J_{u'} \cup J_{v'}) = w$. Nous venons de voir que si $\widetilde{\mathbf{M}}_{u'}^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{v'}^*$ est un terme apparaissant dans le membre de droite de (I.114), alors il existe un mot tassé $w' \succeq w$ tel que

$$\begin{cases} w'_1 \cdots w'_{|u'|} \cap w'_{|u'|+1} \cdots w'_{|w|} = \emptyset \\ \text{pack}(w'_1 \cdots w'_{|u'|}) = u' \\ \text{pack}(w'_{|u'|+1} \cdots w'_{|w|}) = v' \end{cases} \quad . \quad (\text{I.140})$$

Autrement dit, le terme $\widetilde{\mathbf{M}}_{u'}^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{v'}^*$ apparaît dans le membre de gauche de (I.114).

Puisque les deux membres de l'équation (I.114) sont sans multiplicité, nous avons égalité. \square

Par exemple,

$$\begin{aligned} \Delta(\widetilde{\mathbf{M}}_{111}^*) &= \Delta(\mathbf{M}_{111}^* - \mathbf{M}_{112}^* - \mathbf{M}_{122}^* + \mathbf{M}_{123}^*) \\ &= 1 \otimes (\mathbf{M}_{111}^* - \mathbf{M}_{112}^* - \mathbf{M}_{122}^* + \mathbf{M}_{123}^*) \\ &\quad + \mathbf{M}_1^* \otimes (\mathbf{M}_{11}^* - \mathbf{M}_{12}^* - \mathbf{M}_{11}^* + \mathbf{M}_{12}^*) \\ &\quad + (\mathbf{M}_{11}^* - \mathbf{M}_{12}^*) \otimes (\mathbf{M}_1^* - \mathbf{M}_1^*) \\ &\quad + (\mathbf{M}_{111}^* - \mathbf{M}_{112}^* - \mathbf{M}_{122}^* + \mathbf{M}_{123}^*) \otimes 1 \\ &= 1 \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{111}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_{111}^* \otimes 1 \end{aligned} \quad (\text{I.141})$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta(\widetilde{\mathbf{M}}_{21413}^*) &= \Delta(\mathbf{M}_{21413}^* - \mathbf{M}_{31524}^*) \\
&= 1 \otimes (\mathbf{M}_{21413}^* - \mathbf{M}_{31524}^*) + \mathbf{M}_1^* \otimes (\mathbf{M}_{1312}^* - \mathbf{M}_{1423}^*) \\
&\quad + \mathbf{M}_{21}^* \otimes (\mathbf{M}_{312}^* - \mathbf{M}_{312}^*) + \mathbf{M}_{213}^* \otimes (\mathbf{M}_{12}^* - \mathbf{M}_{12}^*) \\
&\quad + (\mathbf{M}_{2131}^* - \mathbf{M}_{3142}^*) \otimes \mathbf{M}_1^* + (\mathbf{M}_{21413}^* - \mathbf{M}_{31524}^*) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{21413}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_1^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{1312}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_{2131}^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_1^* + \widetilde{\mathbf{M}}_{21413}^* \otimes 1.
\end{aligned} \tag{I.142}$$

Nous notons $\widetilde{\mathbf{M}}_w$ la base duale de $\widetilde{\mathbf{M}}_w^*$. La famille $\{\widetilde{\mathbf{M}}_w; w \in \mathcal{PW}\}$ est donc, par définition, une base de \mathbf{WQSym} . En dualisant la relation (I.122), la relation

$$\widetilde{\mathbf{M}}_w = \sum_{u \preceq w} \mathbf{M}_u \tag{I.143}$$

exprime le changement de bases entre les bases \mathbf{M}_w et $\widetilde{\mathbf{M}}_w$. Par exemple,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{M}}_{123} &= \mathbf{M}_{123} + \mathbf{M}_{112} + \mathbf{M}_{122} + \mathbf{M}_{111}, \\
\widetilde{\mathbf{M}}_{223214} &= \mathbf{M}_{223214} + \mathbf{M}_{223213}, \\
\widetilde{\mathbf{M}}_{245123} &= \mathbf{M}_{245123} + \mathbf{M}_{234122} + \mathbf{M}_{244123} + \mathbf{M}_{233122}.
\end{aligned} \tag{I.144}$$

Le produit et coproduit de \mathbf{WQSym} s'écrivent, dans la base $\widetilde{\mathbf{M}}_w$:

$$\widetilde{\mathbf{M}}_u \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_v = \sum_{\substack{w \in u*v \\ w_1 \cdots w_m \cap w_{m+1} \cdots w_{m+n} = \emptyset}} \widetilde{\mathbf{M}}_w, \tag{I.145}$$

$$\Delta(\widetilde{\mathbf{M}}_u) = \sum_{(w_1, w_2) \in \Delta_{\square}(u)} \widetilde{\mathbf{M}}_{w_1} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{w_2}, \tag{I.146}$$

où u et v sont deux mots tassés de tailles respectives m et n . Par exemple,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{M}}_{11} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_{12} &= \mathbf{M}_{11} \cdot (\mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{12}) \\
&= \mathbf{M}_{1111} + \mathbf{M}_{1112} + \mathbf{M}_{2211} + \mathbf{M}_{1112} \\
&\quad + \mathbf{M}_{1123} + \mathbf{M}_{2212} + \mathbf{M}_{2213} + \mathbf{M}_{3312} \\
&= \widetilde{\mathbf{M}}_{1123} + \widetilde{\mathbf{M}}_{2213} + \widetilde{\mathbf{M}}_{3312}
\end{aligned} \tag{I.147}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta(\widetilde{\mathbf{M}}_{2131}) &= \Delta(\mathbf{M}_{2131} + \mathbf{M}_{2121}) \\
&= 1 \otimes (\mathbf{M}_{2131} + \mathbf{M}_{2121}) + \mathbf{M}_{11} \otimes (\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{11}) \\
&\quad + \mathbf{M}_{211} \otimes \mathbf{M}_1 + (\mathbf{M}_{2131} + \mathbf{M}_{2121}) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{2131} + \widetilde{\mathbf{M}}_{11} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{12} + \widetilde{\mathbf{M}}_{211} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_1 + \widetilde{\mathbf{M}}_{2131} \otimes 1.
\end{aligned} \tag{I.148}$$

Reprenons l'application linéaire $\iota: \mathbf{FQSym}^* \rightarrow \mathbf{WQSym}$ définie par l'équation (I.112). Exprimée dans la base $\widetilde{\mathbf{M}}$, l'application ι s'écrit :

$$\iota(\mathbf{G}_\sigma) = \widetilde{\mathbf{M}}_\sigma \tag{I.149}$$

et son application duale $\pi: \mathbf{WQSym}^* \rightarrow \mathbf{FQSym}$ définie par l'équation (I.117) s'écrit :

$$\pi(\widetilde{\mathbf{M}}_u^*) = \begin{cases} \mathbf{F}_u & \text{si } u \in \mathfrak{S} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{I.150}$$

PQSym

L'algèbre de Hopf **PQSym** (pour Parking QuasiSymmetric Functions) est introduite et étudiée dans [40]. Dans [42], les auteurs obtiennent de nouvelles algèbres de Hopf comme quotient et sous-algèbre de **PQSym**.

Soit $\mathbb{K}\mathcal{PF}_n$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les fonctions de parking de taille n et

$$\mathbf{PQSym} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\mathcal{PF}_n. \tag{I.151}$$

Nous notons $\{\mathbf{F}_f; f \in \mathcal{PF}\}$ la base de **PQSym**, appelée *la base fondamentale*. Nous munissons **PQSym** du produit \cdot et du coproduit Δ définis par

$$\mathbf{F}_{f_1} \cdot \mathbf{F}_{f_2} := \sum_{f \in f_1 \sqcup f_2} \mathbf{F}_f \tag{I.152}$$

$$\Delta(\mathbf{F}_f) := \sum_{(f_1, f_2) \in \Delta_*(f)} \mathbf{F}_{f_1} \otimes \mathbf{F}_{f_2}, \tag{I.153}$$

où f , f_1 et f_2 sont des fonctions de parking. Le produit et le coproduit sont étendus linéairement à **PQSym**. Par exemple,

$$\mathbf{F}_{11} \cdot \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{1143} + \mathbf{F}_{1413} + \mathbf{F}_{4113} + \mathbf{F}_{1431} + \mathbf{F}_{4131} + \mathbf{F}_{4311}, \tag{I.154}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{F}_{2141}) &= 1 \otimes \mathbf{F}_{2141} + \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_{131} + \mathbf{F}_{21} \otimes \mathbf{F}_{21} \\
&\quad + \mathbf{F}_{213} \otimes \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{2141} \otimes 1.
\end{aligned} \tag{I.155}$$

L'espace vectoriel \mathbf{PQSym} muni du produit \cdot et du coproduit Δ est une algèbre de Hopf combinatoire.

Le dual \mathbf{PQSym}^* de \mathbf{PQSym} est l'espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{G}_f; f \in \mathcal{PF}\}$ où \mathbf{G}_f est le dual de \mathbf{F}_f . Le produit et le coproduit dans \mathbf{PQSym}^* sont définis par

$$\mathbf{G}_{f_1} \cdot \mathbf{G}_{f_2} := \sum_{f \in f_1 * f_2} \mathbf{G}_f \quad (\text{I.156})$$

$$\Delta(\mathbf{G}_f) := \sum_{(f_1, f_2) \in \Delta_{\square}(f)} \mathbf{G}_{f_1} \otimes \mathbf{G}_{f_2}, \quad (\text{I.157})$$

où f, f_1 et f_2 sont des fonctions de parking. Le produit et le coproduit sont étendus linéairement à \mathbf{PQSym}^* . Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{11} \cdot \mathbf{G}_{21} = & \mathbf{G}_{1121} + \mathbf{G}_{1131} + \mathbf{G}_{1132} + \mathbf{G}_{1141} + \mathbf{G}_{1142} \\ & + \mathbf{G}_{1143} + \mathbf{G}_{2221} + \mathbf{G}_{2231} + \mathbf{G}_{2241} + \mathbf{G}_{3321} \end{aligned} \quad (\text{I.158})$$

et

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{G}_{611441}) = & 1 \otimes \mathbf{G}_{611441} + \mathbf{G}_{111} \otimes \mathbf{G}_{311} + \mathbf{G}_{11441} \otimes \mathbf{G}_1 \\ & + \mathbf{G}_{611441} \otimes 1. \end{aligned} \quad (\text{I.159})$$

Soit A un alphabet infini totalement ordonné. Nous posons, étant donnée une fonction de parking f :

$$\mathbf{G}_f(A) := \sum_{w \in A^*; \text{park}(w)=f} w. \quad (\text{I.160})$$

Par exemple, en restreignant A aux sept premiers entiers,

$$\mathbf{G}_{413351}(A) = 413351 + 514461 + 524462 + 615571 + 625572 + 635573. \quad (\text{I.161})$$

Ces polynômes engendrent une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle A \rangle$ isomorphe à \mathbf{PQSym}^* . Le coproduit dans la base fondamentale peut aussi être défini directement par doublement d'alphabet. Considérons l'alphabet A comme une somme de deux alphabets A' et A'' totalement ordonnés et commutant mutuellement tels que toutes les lettres de A' soit plus petites que celles de A'' . Nous trouvons alors que :

$$\mathbf{G}_f(A' + A'') = \sum_{i=0}^{\max(f)} \mathbf{G}_{\text{park}(f_{\{1, \dots, i\}})}(A') \mathbf{G}_{\text{park}(f_{\{i+1, \dots, \max(f)\})}}(A''). \quad (\text{I.162})$$

En identifiant $P(A')Q(A'')$ à $P \otimes Q$ et en posant $\Delta(\mathbf{G}_f) = \mathbf{G}_f(A' + A'')$, on retrouve bien le coproduit défini dans (I.157). Reprenons l'exemple (I.159) et écrivons les lettres de A' (resp. A'') en bleu (resp. rouge).

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{611441}(A' + A'') &= \sum_{a < b < c} caabba + \sum_{a, a < b} baaaaa + \sum_{a < b, a} aaabba \\
&\quad + \sum_{a < b < c} caabba \\
&= \mathbf{G}_{611441}(A'') + \mathbf{G}_{1111}(A') \mathbf{G}_{311}(A'') \\
&\quad + \mathbf{G}_{11441}(A') \mathbf{G}_1(A') + \mathbf{G}_{611441}(A'),
\end{aligned} \tag{I.163}$$

qui est bien le coproduit calculé dans (I.159).

3.2 Sur des partitions ...

... ordonnées : WQSym

Nous avons déjà vu au paragraphe 3.1 que **WQSym** était une algèbre de Hopf graduée dont les bases sont indexées par les mots tassés. Les mots tassés s'identifient naturellement aux partitions d'ensembles ordonnées, que nous appellerons compositions d'ensembles comme dans [6]. Dans ce même article, les auteurs démontrent que **WQSym**, qu'ils notent **NCQSym**, est libre et colibre.

Étant donné un mot tassé w , nous noterons $\text{osp}(w)$ la composition d'ensembles associée à w et définie de la manière suivante. Pour chaque entier i contenu dans le mot w , le i^{e} bloc de la composition est l'ensemble des indices de i dans w . Par exemple :

$$\begin{aligned}
\text{osp}(11111) &= [\{1, 2, 3, 4, 5\}], & \text{osp}(12 \cdots n) &= [\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}], \\
\text{osp}(2121) &= [\{2, 4\}, \{1, 3\}], & \text{osp}(31321) &= [\{2, 5\}, \{4\}, \{1, 3\}].
\end{aligned} \tag{I.164}$$

Nous notons $\text{usp}(w)$ la partition d'ensembles associée à w consistant à oublier l'ordre des partitions dans $\text{osp}(w)$. Elle peut être définie plus généralement sur un mot quelconque w défini sur un alphabet A par

$$\text{usp}(w) := \bigcup_{a \in A} \{ \{i; w_i = a\} \}. \tag{I.165}$$

Par exemple,

$$\text{usp}(121212) = \{ \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\} \} \quad \text{usp}(12 \cdots n) = \{ \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\} \}. \tag{I.166}$$

... non ordonnées : **WSym**

L'algèbre des fonctions symétriques mots **WSym** (pour Word Symmetric Functions), est définie dans [46], où elle est appelée l'algèbre des fonctions symétriques en des variables non commutatives *NCSym*. Les auteurs démontrent dans [6] que l'algèbre de Hopf *NCSym* est libre et colibre. Différentes bases ainsi que les changements de base dans **WSym** ont récemment été étudiées et utilisées dans [10].

Dans tout ce paragraphe, nous utiliserons les notations de [46] et appellerons cette algèbre **WSym**.

Soit $\mathbb{K}\mathcal{P}_n$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les partitions de taille n et

$$\mathbf{WSym} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\mathcal{P}_n. \quad (\text{I.167})$$

Nous notons $\{\mathbf{p}_\pi; \pi \in \mathcal{P}\}$ la base de **WSym**, appelée la base des *fonctions sommes des puissances en des variables non commutatives*. Nous munissons **WSym** du produit \cdot et du coproduit Δ définis par

$$\mathbf{p}_{\pi_1} \cdot \mathbf{p}_{\pi_2} := \mathbf{p}_{\pi_1 \times \pi_2} \quad (\text{I.168})$$

$$\Delta(\mathbf{p}_\pi) := \sum_{\substack{\pi = A \cup B \\ A \cap B = \emptyset}} \mathbf{p}_{\text{std}(A)} \otimes \mathbf{p}_{\text{std}(B)}, \quad (\text{I.169})$$

où π , π_1 et π_2 sont des partitions. Le produit et le coproduit sont étendus linéairement à **WSym**. Par exemple,

$$\mathbf{p}_{\{\{1,3\},\{2\}\}} \cdot \mathbf{p}_{\{\{1,4\},\{2,3,5\}\}} = \mathbf{p}_{\{\{1,3\},\{2\},\{4,7\},\{5,6,8\}\}}, \quad (\text{I.170})$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{p}_\pi) = & 1 \otimes \mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_{\{\{1\}\}} \otimes \left(\mathbf{p}_{\{\{1,2\},\{3\}\}} + \mathbf{p}_{\{\{1,3\},\{2\}\}} \right) \\ & + \mathbf{p}_{\{\{1,2\}\}} \otimes \mathbf{p}_{\{\{1\},\{2\}\}} + \mathbf{p}_{\{\{1\},\{2\}\}} \otimes \mathbf{p}_{\{\{1,2\}\}} \\ & + \left(\mathbf{p}_{\{\{1,3\},\{2\}\}} + \mathbf{p}_{\{\{1,2\},\{3\}\}} \right) \otimes \mathbf{p}_{\{\{1\}\}} + \mathbf{p}_\pi \otimes 1, \end{aligned} \quad (\text{I.171})$$

où nous avons posé $\pi := \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$. Remarquons que cette algèbre de Hopf **WSym** n'est pas commutative mais est co-commutative. Par ailleurs, le coproduit peut contenir des multiplicités comme nous le montre l'exemple suivant :

$$\Delta(\mathbf{p}_{\{\{1,4\},\{2,3\}\}}) = 1 \otimes \mathbf{p}_{\{\{1,4\},\{2,3\}\}} + 2 \mathbf{p}_{\{1,2\}} \otimes \mathbf{p}_{\{1,2\}} + \mathbf{p}_{\{1,4\},\{2,3\}} \otimes 1. \quad (\text{I.172})$$

Soit A un alphabet infini non commutatif. Étant donnée une partition π , nous dirons qu'un mot $w \in A^*$ est π -compatible, et le notons $w \vdash \pi$, si

$$\forall E \in \pi, \forall i, j \in E, w_i = w_j. \quad (\text{I.173})$$

En d'autres termes, la longueur du mot w est la taille de la partition π et si i et j sont dans le même bloc dans π , alors les i^{e} et j^{e} lettres de w sont les mêmes. Nous posons alors,

$$\mathbf{p}_\pi(A) := \sum_{w \vdash \pi} w. \quad (\text{I.174})$$

Par exemple, en restreignant A aux trois premières lettres de l'alphabet,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\{\{1\}\}} &= a + b + c, \\ \mathbf{p}_{\{\{1,2\}\}} &= aa + bb + cc, \quad \mathbf{p}_{\{\{1,2,3\}\}} = aaa + bbb + ccc, \\ \mathbf{p}_{\{\{1\},\{2\}\}} &= aa + ab + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc, \\ \mathbf{p}_{\{\{1,3\},\{2\}\}} &= aaa + aba + aca + bab + bbb + bcb + cac + cbc + ccc. \end{aligned} \quad (\text{I.175})$$

Ces polynômes engendrent une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle A \rangle$ isomorphe à **WSym**. Le coproduit dans la base \mathbf{p} peut aussi être défini directement par doublement d'alphabet. Considérons l'alphabet A comme une somme de deux alphabets A' et A'' non commutatifs et commutant mutuellement. En identifiant $P(A')Q(A'')$ à $P \otimes Q$, le coproduit se calcule en posant $\Delta(\mathbf{p}_\pi) = \mathbf{p}_\pi(A' + A'')$. Reprenons l'exemple (I.172) et écrivons les lettres A' (resp. A'') en bleu (resp. rouge).

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\{\{1,4\},\{2,3\}\}}(A' + A'') &= \sum_{a,b} abba + \sum_{a,a} aaaa + \sum_{a,a} aaaa + \sum_{a,b} abba \\ &= \mathbf{p}_{\{\{1,4\},\{2,3\}\}}(A') + 2\mathbf{p}_{\{1,2\}}(A')\mathbf{p}_{\{1,2\}}(A'') \\ &\quad + \mathbf{p}_{\{1,4\},\{2,3\}}(A''), \end{aligned} \quad (\text{I.176})$$

qui est bien le coproduit calculé dans (I.172).

L'algèbre de Hopf **WSym** est une sous-algèbre de Hopf de **WQSym**.

Proposition 3.3. *L'application linéaire $\iota: \mathbf{WSym} \rightarrow \mathbf{WQSym}$ définie, pour toute partition π , par*

$$\iota(\mathbf{p}_\pi) := \sum_{\text{usp}(u)=\pi} \widetilde{\mathbf{M}}_u, \quad (\text{I.177})$$

où $\text{usp}(u)$ est la partition (non ordonnée) obtenue en oubliant l'ordre des parts de la partition ordonnée associée au mot tassé u , est un morphisme injectif d'algèbres de Hopf.

Démonstration. Nous démontrons dans un premier temps que ι est un morphisme d'algèbres. Il s'agit d'établir l'égalité suivante :

$$\iota(\mathbf{p}_{\pi_1}) \cdot \iota(\mathbf{p}_{\pi_2}) = \iota(\mathbf{p}_{\pi_1} \cdot \mathbf{p}_{\pi_2}), \quad (\text{I.178})$$

pour toute partition π_1 et π_2 . Puisque, exprimée dans la base $\widetilde{\mathbf{M}}$, les deux membres de (I.178) sont sans multiplicité, il suffit de montrer l'égalité des ensembles sous-jacents.

Considérons deux partitions π_1 et π_2 . Il est clair que, pour tout mot w sur un alphabet totalement ordonné, les deux partitions $\text{usp}(w)$ et $\text{usp}(\text{pack}(w))$ sont les mêmes. Par conséquent, pour tous les mots w_1 et w_2 vérifiant respectivement $\text{usp}(w_1) = \pi_1$ et $\text{usp}(w_2) = \pi_2$ et pour tout mot w apparaissant dans $w_1 * w_2$ tel que le préfixe de w de longueur $|\pi_1|$ ne partage aucune lettre commune avec le suffixe de w de longueur $|\pi_2|$, nous avons $\text{usp}(w) = \pi_1 \times \pi_2$. Nous venons de voir que si $\widetilde{\mathbf{M}}_w$ apparaît dans $\iota(\mathbf{p}_{\pi_1}) \cdot \iota(\mathbf{p}_{\pi_2})$, alors il apparaît dans $\iota(\mathbf{p}_{\pi_1 \times \pi_2})$.

En outre, étant donnée une partition π , le nombre de mots tassés u tels que $\text{usp}(u) = \pi$ est exactement la factorielle du nombre de blocs dans la partition π . Puisque, étant donnés deux mots tassés w_1 et w_2 , le nombre de termes apparaissant dans $\widetilde{\mathbf{M}}_{w_1} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_{w_2}$ est $\binom{m_1+m_2}{m_1}$ où m_1 (resp. m_2) est la lettre maximale dans w_1 (resp. w_2) et c'est aussi le nombre de blocs dans la partition $\text{usp}(w_1)$ (resp. $\text{usp}(w_2)$), ceci montre que le nombre d'éléments $\widetilde{\mathbf{M}}_w$ apparaissant dans les membres de gauche et de droite de (I.178) est le même ($\binom{m_1+m_2}{m_1} m_1! m_2! = (m_1 + m_2)!$).

Par conséquent, ι est un morphisme d'algèbres.

Nous démontrons dans un second temps que ι est un morphisme de co-gèbres. Il s'agit d'établir l'égalité suivante :

$$\Delta(\iota(\mathbf{p}_\pi)) = \iota \otimes \iota(\Delta(\mathbf{p}_\pi)). \quad (\text{I.179})$$

Considérons une partition π . Soit u_1 et u_2 deux mots tassés tels que :

$$\exists u, \begin{cases} \text{usp}(u) = \pi \\ u \in u_1 \sqcup u_2. \end{cases} \quad (\text{I.180})$$

Soit ϕ_1 (resp. ϕ_2) l'application qui à l'entier i associe la position de la i^{e} lettre de u_1 (resp. u_2) dans u . Par définition du produit de mélange décalé, l'union disjointe de $\phi_1(\text{usp}(u_1))$ et $\phi_2(\text{usp}(u_2))$ est une partition de l'ensemble $\{1, \dots, |u|\}$. Par définition de u , ϕ_1 et ϕ_2 , cette partition est $\text{usp}(u) = \pi$. De plus, puisque ϕ_1 et ϕ_2 sont croissantes, par définition du produit de mélange décalé, cela suffit pour voir que $\text{std}(\phi_1(\text{usp}(u_1)))$ (resp. $\phi_2(\text{usp}(u_2))$) est la

partition $\text{usp}(u_1)$ (resp. $\text{usp}(u_2)$). Nous venons de voir que si $\widetilde{\mathbf{M}}_{u_1} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{u_2}$ est un terme apparaissant dans le membre de gauche de (I.179), alors, il existe deux ensembles A_1 et A_2 tels que l'union disjointe est la partition π et $\text{std}(A_1)$ (resp. $\text{std}(A_2)$) est la partition $\text{usp}(u_1)$ (resp $\text{usp}(u_2)$). Autrement dit, le terme $\widetilde{\mathbf{M}}_{u_1} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{u_2}$ apparaît dans le membre de droite de (I.179).

Remarquons que, si u et u' vérifient (I.180), l'ensemble $\phi_1(\text{usp}(u_1))$ (resp. $\phi_2(\text{usp}(u_2))$) construit à partir de u est différent de celui construit à partir de u' . Ce qui démontre que la multiplicité de $\widetilde{\mathbf{M}}_{u_1} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{u_2}$ dans le membre de droite de (I.179) est au moins la même que celle dans le membre de gauche. En outre, étant donnée une partition π contenant n blocs, nous avons déjà vu que le nombre de mots tassés u tels que $\text{usp}(u) = \pi$ était $n!$. Puisque pour chaque tel mot tassé u , le nombre de tuple apparaissant dans le coproduit de dé mélange est le nombre de lettres distinctes contenues dans u augmenté de un, le nombre de termes $\widetilde{\mathbf{M}}_{u_1} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{u_2}$ dans le membre de gauche de (I.179) comptés avec multiplicité est $(n+1)!$. D'un autre côté, pour chaque couple (A_1, A_2) d'ensembles dont l'union disjointe est π , il y a $n_1!n_2!$ termes $\widetilde{\mathbf{M}}_{u_1} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{u_2}$ dans $\iota \otimes \iota(\mathbf{p}_{\text{std}(A_1)} \otimes \mathbf{p}_{\text{std}(A_2)})$ où n_1 (resp. n_2). Ainsi, le nombre de termes $\widetilde{\mathbf{M}}_{u_1} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{u_2}$ dans le membre de droite de (I.179) comptés avec multiplicité est la somme

$$\sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1} n_1! n_2!. \quad (\text{I.181})$$

Ceci démontre que le nombre d'éléments $\widetilde{\mathbf{M}}_{u_1} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{u_2}$ dans le membre de gauche et de droite de (I.179) comptés avec multiplicité est le même.

Par conséquent, ι est un morphisme de cogèbres.

L'injectivité de ι est claire, puisque usp partitionne l'ensemble des mots tassés. \square

Par exemple,

$$\begin{aligned} \iota(\mathbf{p}_{\{\{1,3,4\},\{2\}\}}) \cdot \iota(\mathbf{p}_{\{\{1,2\}\}}) &= (\widetilde{\mathbf{M}}_{1211} + \widetilde{\mathbf{M}}_{2122}) \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_{11} \\ &= \widetilde{\mathbf{M}}_{121133} + \widetilde{\mathbf{M}}_{131122} + \widetilde{\mathbf{M}}_{232211} + \widetilde{\mathbf{M}}_{212233} \\ &\quad + \widetilde{\mathbf{M}}_{313322} + \widetilde{\mathbf{M}}_{323311} \\ &= \iota(\mathbf{p}_{\{\{1,3,4\},\{2\},\{5,6\}\}}) \end{aligned} \quad (\text{I.182})$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta(\iota(\mathbf{p}_{\{\{1,3,4\},\{2\}\}})) &= \Delta(\widetilde{\mathbf{M}}_{1211} + \widetilde{\mathbf{M}}_{2122}) \\
&= 1 \otimes (\widetilde{\mathbf{M}}_{1211} + \widetilde{\mathbf{M}}_{2122}) + \widetilde{\mathbf{M}}_{111} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_1 \\
&\quad + \widetilde{\mathbf{M}}_1 \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{111} + (\widetilde{\mathbf{M}}_{1211} + \widetilde{\mathbf{M}}_{2122}) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \iota(\mathbf{p}_{\{\{1,3,4\},\{2\}\}}) + \iota(\mathbf{p}_{\{\{1\}\}}) \otimes \iota(\mathbf{p}_{\{\{1,2,3\}\}}) \\
&\quad + \iota(\mathbf{p}_{\{\{1\}\}}) \otimes \iota(\mathbf{p}_{\{\{1,2,3\}\}}) + 1 \otimes \mathbf{p}_{\{\{1,3,4\},\{2\}\}}.
\end{aligned} \tag{I.183}$$

Chapitre II

Permutations de blocs uniformes

Dans ce chapitre, nous étudions l'algèbre de Hopf combinatoire, que nous avons noté **UBP** dans [38], dont les bases sont indexées par les permutations de blocs uniformes. Cette algèbre de Hopf est introduite et étudiée par Aguiar et Orellana [2] qui utilisent l'interprétation des permutations de blocs uniformes en terme de graphes pour définir la structure algébrique de **UBP**.

Dans un premier temps, nous rappelons les définitions des permutations de blocs uniformes et la structure d'algèbre de Hopf introduite par Aguiar et Orellana. Dans un second temps, nous utilisons l'algèbre de Hopf combinatoire **WSym** introduite au paragraphe 3.2 ainsi que l'algèbre **FQSym** introduite au paragraphe 3.1 pour reformuler les règles du produit et du coproduit en utilisant une description des permutations de blocs uniformes via une partition d'un ensemble et une permutation. Ceci nous permet d'obtenir une description explicite du dual de **UBP**, d'obtenir une réalisation polynomiale et enfin, de relier **UBP** à **WQSym** ainsi que leur dual.

1 Permutations de blocs uniformes

1.1 Définitions

Une *permutation de blocs uniforme* de taille n est une bijection entre deux partitions de $\{1, \dots, n\}$ dans laquelle chaque bloc et son image ont même cardinalité. Nous notons \mathcal{UBP}_n l'ensemble des permutations de blocs uniformes de taille n et \mathcal{UBP} l'ensemble de toutes les permutations de blocs uniformes. Nous représentons une permutation de blocs uniforme sous la forme d'un

vecteur à deux lignes de la manière suivante. Étant données $\{A_1, \dots, A_k\}$ et $\{B_1, \dots, B_k\}$ deux partitions, la permutation de blocs uniforme pour laquelle l'image de A_i est B_i est notée

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ \hline B_1 & B_2 & \cdots & B_k \end{array} \right). \quad (\text{II.1})$$

Par exemple, il y a une permutation de blocs uniforme de taille 1, trois de taille 2 :

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 12 \\ 12 \end{array} \right) \quad (\text{II.2})$$

et il y en a seize de taille 3, les six permutations ainsi que :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} 12 & 3 \\ \hline 12 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 12 & 3 \\ \hline 13 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 12 & 3 \\ \hline 23 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 13 & 2 \\ \hline 12 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 13 & 2 \\ \hline 13 & 2 \end{array} \right), \\ & \left(\begin{array}{c|c} 13 & 2 \\ \hline 23 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 23 \\ \hline 3 & 12 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 23 \\ \hline 2 & 13 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 23 \\ \hline 1 & 23 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 123 \\ 123 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Étant donnée une partition $\{A_1, \dots, A_k\}$, nous allons noter $Id_{\{A_1, \dots, A_k\}}$ la permutation de blocs uniforme dont l'image de A_i est A_i . Par exemple, parmi les seize permutations de blocs uniformes de taille 3,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 12 & 3 \\ \hline 12 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 13 & 2 \\ \hline 13 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 23 \\ \hline 1 & 23 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 123 \\ 123 \end{array} \right). \quad (\text{II.4})$$

sont les permutations de blocs uniformes de la forme $Id_{\{A_1, \dots, A_k\}}$.

Le *type* d'une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est le type de la partition \mathcal{A} (c.f. paragraphe 1.5). Remarquons qu'une permutation de taille n est en particulier une permutation de blocs uniforme dont le type est 1^n .

Pour obtenir une permutation de blocs uniforme de type λ , il suffit de choisir deux partitions \mathcal{A} et \mathcal{B} de type λ , puis de choisir pour chaque part i de λ , une bijection entre les blocs de cardinal i de \mathcal{A} avec ceux de \mathcal{B} . Ainsi, le nombre ubp_n de permutations de blocs uniformes de taille n est

$$ubp_n := \sum_{\lambda=1^{m_1} \dots n^{m_n}} u(\lambda)^2 m_1! \cdots m_n! \quad (\text{II.5})$$

où $u(\lambda)$ est le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$ de type λ .

La *concaténation* de deux permutations de blocs uniformes f et g est la permutation de blocs uniforme, notée $f \times g$, obtenue en ajoutant $|f|$ la taille de f à toutes les valeurs contenues dans g et en concaténant le résultat à f . Par exemple,

$$\left(\begin{array}{c|c} 13 & 2 \\ \hline 23 & 1 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c|c} 16 & 2 & 34 & 5 \\ \hline 46 & 2 & 15 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 13 & 2 & 49 & 5 & 67 & 8 \\ \hline 23 & 1 & 79 & 5 & 48 & 6 \end{array} \right). \quad (\text{II.6})$$

1.2 Représentation graphique

Étant donnée une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ de taille n , le graphe représentant f consiste en la copie de deux lignes contenant chacune n sommets étiquetés de 1 à n . Les composantes connexes de la première (resp. deuxième) ligne correspondent aux blocs de la partition \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}). Les arêtes entre les deux lignes correspondent à l'image des blocs. Par exemple, la permutation de blocs uniforme

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 14 & 2 & 367 & 58 \\ \hline 13 & 4 & 258 & 67 \end{array} \right) \quad (\text{II.7})$$

correspond aux graphes de la figure II.1. Remarquons que cette représentation graphique n'est pas unique.

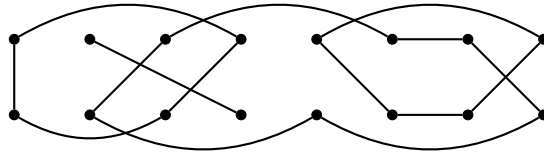


FIGURE II.1 – diagramme d'une permutation de blocs uniforme

tion graphique n'est pas unique.

La composée $g \circ f$ de deux permutations de blocs uniformes f et g est obtenue en collant le bas du graphe représentant f au haut du graphe représentant g . Le résultat est un graphe représentant une permutation de blocs uniforme. Dans l'exemple de la figure II.2, nous illustrons la composition $g \circ f$ pour les permutations de blocs uniformes

$$f := \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 14 & 2 & 36 & 5 & 7 & 8 \\ \hline 13 & 4 & 25 & 7 & 8 & 6 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad g := \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 24 & 3 & 58 & 67 \\ \hline 2 & 15 & 4 & 37 & 68 \end{array} \right). \quad (\text{II.8})$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons gf la composée $g \circ f$. Remarquons que lorsque f (resp. g) est une permutation, le produit gf revient à faire agir f^{-1} (resp. g) sur le domaine (resp. codomaine) de g (resp. f) :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ \hline B_1 & B_2 & \cdots & B_k \end{array} \right) \circ \sigma = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \sigma^{-1}(A_1) & \sigma^{-1}(A_2) & \cdots & \sigma^{-1}(A_k) \\ \hline B_1 & B_2 & \cdots & B_k \end{array} \right), \quad (\text{II.9})$$

$$\sigma \circ \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ \hline B_1 & B_2 & \cdots & B_k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ \hline \sigma(B_1) & \sigma(B_2) & \cdots & \sigma(B_k) \end{array} \right), \quad (\text{II.10})$$

où $\tau(S)$ est l'ensemble des images par la permutation τ des entiers contenus dans l'ensemble S . En fait, la composée $gf: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ de deux permutations de blocs uniformes $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ et $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ peut se définir de la manière suivante. Les blocs C_i de \mathcal{C} sont les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ qui sont minimaux pour les deux propriétés

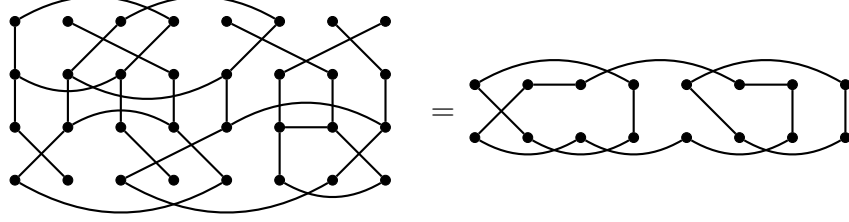


FIGURE II.2 – composée de deux permutations de blocs uniformes

- (1) C_i est une union de blocs de \mathcal{A} ,
- (2) $f(C_i)$ est une union de blocs B_j de \mathcal{B} .

L'image de C_i est alors l'union des images $g(B_j)$. Par exemple, reprenons les deux permutations de blocs uniformes (II.8). La partition minimale \mathcal{C} vérifiant les deux propriétés ci-dessus est $\{\{1, 4\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{5, 8\}\}$ et

$$gf = \left(\begin{array}{c|cc} 14 & 2367 & 58 \\ \hline 24 & 1357 & 68 \end{array} \right). \quad (\text{II.11})$$

Le *produit de convolution* de deux permutations de blocs uniformes f et g de tailles respectives m et n , noté $f * g$, est la somme formelle

$$f * g := \sum_{\sigma \in 12 \cdots m * 12 \cdots n} \sigma \circ (f \times g) \quad (\text{II.12})$$

Dans l'exemple de la figure II.3, nous illustrons le produit de convolution pour les permutations de blocs uniformes

$$f := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad g := \left(\begin{array}{c} 12 \\ \hline 12 \end{array} \right). \quad (\text{II.13})$$

Un *point d'arrêt* d'une permutation de blocs de uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un point d'arrêt de la partition \mathcal{B} (voir page 15). Autrement dit, i est un point d'arrêt de f s'il est possible de séparer les i premiers sommets et les $n - i$ derniers sommets dans la ligne du bas sans intersecter d'arêtes joignant des sommets de la ligne du bas dans le diagramme représentant f . Pour chaque tel point i , nous pouvons considérer le sous-graphe g_1 dont les sommets sont constitués des i premiers sommets sur la ligne du bas ainsi que ceux du haut qui y sont reliés et le sous-graphe g_2 obtenu en effaçant le graphe g_1 . Le *coproduit de démélange* de f , noté $\Delta_{\square}(f)$, est alors la somme formelle sur des couples (f_1, f_2) de permutations de blocs uniformes dont le diagramme

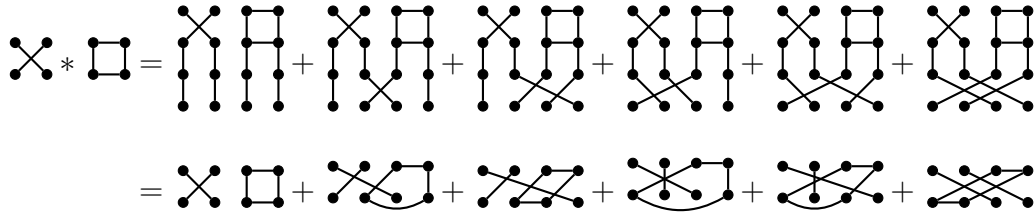
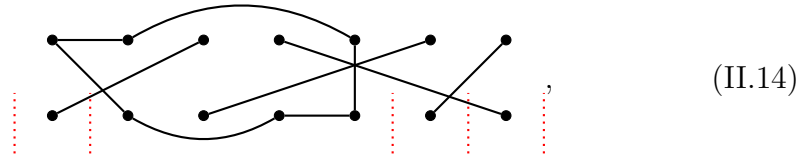


FIGURE II.3 – produit de convolution de deux permutations de blocs uniformes

est le réalignement vertical des sommets respectifs de g_1 et g_2 . Par exemple, considérons la permutation de blocs uniforme f dont le diagramme est



(II.14)

où les traits en pointillés signalent les points d'arrêt de f . Ainsi, les points d'arrêt de f sont 0, 1, 5, 6 et 7. Le coproduit de démélange de f est alors

$$\begin{aligned} \Delta_{\square}(f) = & 1 \otimes \text{[diagram]} + \text{[diagram]} \otimes \text{[diagram]} + \text{[diagram]} \otimes \text{[diagram]} \\ & + \text{[diagram]} \otimes \text{[diagram]} + \text{[diagram]} \otimes 1. \end{aligned}$$

(II.15)

1.3 Décomposition via les partitions et permutations

La donnée d'une permutation et d'une partition est suffisante pour décrire une permutation de blocs uniforme. Étant donnée une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, il existe une permutation σ telle que les blocs de \mathcal{B} sont les images par σ des blocs de \mathcal{A} . Inversement, si σ est une permutation de taille n et \mathcal{A} est une partition de taille n , on peut définir la permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \sigma(\mathcal{A})$. Ainsi, n'importe quelle permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ peut s'écrire sous la forme

$$f = \sigma \circ Id_{\mathcal{A}} \tag{II.16}$$

$$f = Id_{\mathcal{B}} \circ \sigma \tag{II.17}$$

pour une certaine permutation σ . La première égalité exprime le fait que nous pouvons regrouper les images σ_i dont les indices sont dans le même

bloc dans \mathcal{A} ; la seconde exprime le fait que nous pouvons regrouper les images σ_i dont les valeurs sont dans le même bloc dans \mathcal{B} . Par exemple,

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 13 & 2 & 458 & 67 \\ \hline 27 & 3 & 146 & 58 \end{array} \right) = 23714586 \circ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 13 & 2 & 458 & 67 \\ \hline 13 & 2 & 458 & 67 \end{array} \right) \quad (\text{II.18})$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} 146 & 27 & 3 & 58 \\ \hline 146 & 27 & 3 & 58 \end{array} \right) \circ 23714586. \quad (\text{II.19})$$

Faisons deux remarques concernant ces décompositions (II.16) et (II.17). La première est que ces décompositions ne sont pas uniques puisque plusieurs permutations peuvent satisfaire (II.16) et (II.17). Plus précisément, soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une permutation de blocs uniforme. Si τ est une permutation échangeant les valeurs à l'intérieur de chaque bloc de la partition \mathcal{B} , alors

$$\tau \circ f = f, \quad (\text{II.20})$$

d'après (II.10). La seconde est que, étant donnée une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, l'ensemble des permutations σ telles que $f = \sigma \circ Id_{\mathcal{A}}$ est égal à celui des permutations τ telles que $f = Id_{\mathcal{B}} \circ \tau$ d'après (II.9) et (II.10).

Étant donnée une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, nous allons noter ξ_f la permutation minimale pour l'ordre lexicographique satisfaisant (II.16).

Le produit de convolution des permutations de blocs uniformes peut se réécrire en utilisant la décomposition (II.16). Soit $f := \sigma \circ Id_{\mathcal{A}}$ et $g := \tau \circ Id_{\mathcal{B}}$ deux permutations de blocs uniformes. Le produit de convolution $f * g$ est alors la somme

$$f * g = \sum_{\alpha \in \sigma * \tau} \alpha \circ Id_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}. \quad (\text{II.21})$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right) * \left(\begin{array}{c} 12 \\ \hline 12 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 34 \\ \hline 2 & 1 & 34 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 34 \\ \hline 3 & 1 & 24 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 34 \\ \hline 4 & 1 & 23 \end{array} \right) \\ &+ \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 34 \\ \hline 3 & 2 & 14 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 34 \\ \hline 4 & 2 & 13 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 34 \\ \hline 4 & 3 & 12 \end{array} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

qui sont bien les permutations de blocs uniformes décrites dans la figure II.3. Remarquons que ce produit ne dépend pas du choix de la permutation définissant f et g . Nous pouvons caractériser toutes les permutations σ (resp. τ) telles que $f = \sigma \circ Id_{\mathcal{A}}$ (resp. $g = \tau \circ Id_{\mathcal{B}}$). Si α (resp. β) est une permutation échangeant les valeurs à l'intérieur de chaque bloc de la partition \mathcal{A}

(resp. \mathcal{B}), alors la permutation σ (resp. τ) est de la forme $\xi_f \alpha$ (resp. $\xi_g \beta$). D'après (I.15), nous avons alors

$$\begin{aligned} \left((\xi_f \alpha) \circ Id_{\mathcal{A}} \right) * \left((\xi_g \beta) \circ Id_{\mathcal{B}} \right) &= \left((\xi_f \alpha) * (\xi_g \beta) \right) \circ Id_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \\ &= \left((\xi_f * \xi_g) (\alpha / \beta) \right) \circ Id_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \quad (\text{II.23}) \\ &= (\xi_f * \xi_g) \circ Id_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}, \end{aligned}$$

par l'associativité de la composition des permutations de blocs uniformes.

Le coproduit de démélange des permutations de blocs uniformes peut se réécrire en utilisant la décomposition (II.17). Étant donnée une permutation de blocs uniforme $f := Id_{\mathcal{B}} \circ \sigma$, le coproduit $\Delta_{\square}(f)$ de f est la somme formelle

$$\Delta_{\square}(f) := \sum_{i \in \mathcal{B}(\mathcal{B})} f_{|\{1, \dots, i\}} \otimes f_{|\{i+1, \dots, n\}} \quad (\text{II.24})$$

où nous définissons, lorsque $j \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$

$$\begin{aligned} f_{|\{1, \dots, j\}} &:= Id_{\mathcal{B}_{|\{1, \dots, j\}}} \circ \sigma_{|\{1, \dots, j\}} \\ f_{|\{j+1, \dots, n\}} &:= Id_{\mathcal{B}_{|\{j+1, \dots, n\}}} \circ \text{std}(\sigma_{|\{j+1, \dots, n\}}). \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Nous rappelons que $\mathcal{B}(\mathcal{B})$ est l'ensemble des points d'arrêt de \mathcal{B} (c.f. paragraphe 1.5). Par exemple, reprenons la permutation de blocs uniforme f de (II.14),

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 125 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 245 & 1 & 7 & 3 & 6 \end{array} \right) = Id_{\{\{1\}, \{2,4,5\}, \{3\}, \{6\}, \{7\}\}} \circ 2417536. \quad (\text{II.26})$$

Alors,

$$\begin{aligned} f_{|\{1, \dots, 1\}} &= Id_{\{\{1\}\}} \circ 1 & f_{|\{2, \dots, 7\}} &= Id_{\{\{1,3,4\}, \{2\}, \{5\}, \{6\}\}} \circ 136425 \\ f_{|\{1, \dots, 5\}} &= Id_{\{\{1\}, \{2,4,5\}, \{3\}\}} \circ 24153 & f_{|\{6, \dots, 7\}} &= Id_{\{\{1\}, \{2\}\}} \circ 21 \\ f_{|\{1, \dots, 6\}} &= Id_{\{\{1\}, \{2,4,5\}, \{3\}, \{6\}\}} \circ 241536 & f_{|\{7, \dots, 7\}} &= Id_{\{\{1\}\}} \circ 1. \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Le coproduit de f est donc la somme

$$\begin{aligned} \Delta_{\square}(f) &= () \otimes f + \binom{1}{1} \otimes \left(\begin{array}{c|c|c} 124 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 134 & 6 & 2 & 5 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 124 & 3 & 5 \\ \hline 245 & 1 & 3 \end{array} \right) \otimes \binom{1}{2} \binom{2}{1} \\ &+ \left(\begin{array}{c|c|c} 124 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 245 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right) \otimes \binom{1}{1} + f \otimes (), \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

qui est bien la somme calculée dans (II.15).

2 Algèbre de Hopf combinatoire

2.1 Définitions

Soit $\mathbb{K}\mathcal{UBP}_n$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les permutations de blocs uniformes de taille n et

$$\mathbf{UBP} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\mathcal{UBP}_n. \quad (\text{II.29})$$

Nous notons $\{\mathbf{G}_f; f \in \mathcal{UBP}\}$ la base de \mathbf{UBP} . Nous munissons \mathbf{UBP} du produit \cdot et du coproduit Δ définis par

$$\mathbf{G}_f \cdot \mathbf{G}_g := \sum_{h \in f * g} \mathbf{G}_h \quad (\text{II.30})$$

$$\Delta(\mathbf{G}_f) := \sum_{(g_1, g_2) \in \Delta_{\square}(f)} \mathbf{G}_{g_1} \otimes \mathbf{G}_{g_2}, \quad (\text{II.31})$$

où f et g sont deux permutations de blocs uniformes. Le produit et le coproduit sont étendus linéairement à \mathbf{UBP} . Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}} &= \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 2 & 1 & 34 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 3 & 1 & 24 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 4 & 1 & 23 \end{pmatrix}} \\ &+ \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 3 & 2 & 14 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 4 & 3 & 12 \end{pmatrix}}, \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{aligned} \Delta\left(\mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 23 & 4 & 1 \end{pmatrix}}\right) &= 1 \otimes \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 23 & 4 & 1 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \otimes \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}} \\ &+ \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 23 & 1 \end{pmatrix}} \otimes \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 23 & 4 & 1 \end{pmatrix}} \otimes 1. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

L'espace vectoriel \mathbf{UBP} muni du produit \cdot et du coproduit Δ est une algèbre de Hopf combinatoire.

La suite des dimensions de \mathbf{UBP} forme la suite [A023998](#) de [48] et les premiers termes sont

$$1, 1, 3, 16, 131, 1496, 22482, 426833, 9934563, 277006192, 9085194458. \quad (\text{II.34})$$

Il est prouvé dans [2] que \mathbf{UBP} est une algèbre de Hopf auto-duale. Nous allons expliciter le dual et montrer l'auto-dualité directement. Notons \mathbf{F} la base duale de \mathbf{G} . Par définition, la famille $\{\mathbf{F}_f; f \in \mathcal{UBP}\}$ est donc une base de \mathbf{UBP}^* , algèbre duale de \mathbf{UBP} . Explicitons le produit et le coproduit dans

la base \mathbf{F} . Soit $f := Id_{\mathcal{A}} \circ \xi_f$ et $g := Id_{\mathcal{B}} \circ \xi_g$ deux permutations de blocs uniformes. Par dualité, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{F}_g &= \sum_{h \in \mathcal{UBP}} \langle \mathbf{F}_f \otimes \mathbf{F}_g, \Delta(\mathbf{G}_h) \rangle \mathbf{F}_h \\ &= \sum_{\substack{h \in \mathcal{UBP}; \exists i, \\ h_{\{1, \dots, i\}} = f \\ h_{\{i+1, \dots, n\}} = g}} \mathbf{F}_h \\ &= \sum_{\sigma \in \xi_f \overline{\sqcup} \xi_g} \mathbf{F}_{Id_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \circ \sigma}. \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Le *produit de mélange* de deux permutations de blocs uniformes $f := Id_{\mathcal{A}} \circ \xi_f$ et $g := Id_{\mathcal{B}} \circ \xi_g$ est la somme formelle, notée $f \overline{\sqcup} g$:

$$f \overline{\sqcup} g := \sum_{\sigma \in \xi_f \overline{\sqcup} \xi_g} Id_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \circ \sigma. \quad (\text{II.36})$$

Le produit de mélange est bien défini. Par un raisonnement similaire au produit de convolution et par l'équation (I.10), ce produit ne dépend pas des permutations représentant les opérandes. Ainsi

$$\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{F}_g := \sum_{h \in f \overline{\sqcup} g} \mathbf{F}_h. \quad (\text{II.37})$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}} &= \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 2 & 1 & 34 \end{pmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 34 & 1 \end{pmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 34 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \\ &+ \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 & 23 & 4 \\ 2 & 34 & 1 \end{pmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 34 & 2 & 1 \end{pmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 34 & 2 & 1 \end{pmatrix}}. \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Considérons une permutation de blocs uniforme $f := \xi_f \circ Id_{\mathcal{A}}$ de taille n . Par dualité, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{F}_f) &= \sum_{g, h \in \mathcal{UBP}} \langle \mathbf{F}_f, \mathbf{G}_g \cdot \mathbf{G}_h \rangle \mathbf{F}_g \otimes \mathbf{F}_h \\ &= \sum_{g, h \in \mathcal{UBP}; f \in g * h} \mathbf{F}_g \otimes \mathbf{F}_h \\ &= \sum_{i \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} \sum_{\substack{(\sigma, \tau) \in \Delta_*(\xi_f) \\ |\sigma| = i}} \mathbf{F}_{\sigma \circ Id_{\mathcal{A}_{\{1, \dots, i\}}}} \otimes \mathbf{F}_{\tau \circ Id_{\mathcal{A}_{\{i+1, \dots, n\}}}}. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Le *coproduit de déconvolution* de f est la somme formelle, notée $\Delta_*(f)$:

$$\Delta_*(f) := \sum_{i \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} f_1 \cdots f_i \otimes f_{i+1} \cdots f_n, \quad (\text{II.40})$$

où nous définissons, lorsque $j \in B(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} f_1 \cdots f_j &:= \text{std}(\sigma_1 \cdots \sigma_j) \circ \text{Id}_{\mathcal{A}_{\{1, \dots, j\}}} \\ f_{j+1} \cdots f_n &:= \text{std}(\sigma_{j+1} \cdots \sigma_n) \circ \text{Id}_{\mathcal{A}_{\{j+1, \dots, n\}}}. \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Le coproduit de déconvolution est bien défini. Il ne dépend pas du choix de la permutation représentant f . Ainsi

$$\Delta(\mathbf{F}_f) := \sum_{(g,h) \in \Delta_*(f)} \mathbf{F}_g \otimes \mathbf{F}_h. \quad (\text{II.42})$$

Par exemple,

$$\Delta \mathbf{F} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 24 & 3 \\ \hline 1 & 23 & 4 \end{array} \right) = 1 \otimes \mathbf{F} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 24 & 3 \\ \hline 1 & 23 & 4 \end{array} \right) + \mathbf{F} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \end{array} \right) \otimes \mathbf{F} \left(\begin{array}{c|c} 13 & 2 \\ \hline 12 & 3 \end{array} \right) + \mathbf{F} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 24 & 3 \\ \hline 1 & 23 & 4 \end{array} \right) \otimes 1 \quad (\text{II.43})$$

L'algèbre de Hopf **UBP** est auto-duale.

Proposition 2.1. *L'application linéaire $\phi: \mathbf{UBP} \rightarrow \mathbf{UBP}^*$ définie, pour toute permutation de blocs uniformes f , par*

$$\phi(\mathbf{F}_f) := \mathbf{G}_{f^{-1}} \quad (\text{II.44})$$

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

Démonstration. Montrons dans un premier temps que ϕ est un morphisme d'algèbres. Considérons deux permutations de blocs uniformes $f_1 := \text{Id}_{\mathcal{A}_1} \circ \xi_{f_1}$ et $f_2 := \text{Id}_{\mathcal{A}_2} \circ \xi_{f_2}$. Par un calcul direct, nous avons :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{F}_{f_1} \cdot \mathbf{F}_{f_2}) &= \sum_{\sigma \in \xi_{f_1} \overline{\sqcup} \xi_{f_2}} \phi(\mathbf{F}_{\text{Id}_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} \circ \sigma}) \\ &= \sum_{\sigma \in \xi_{f_1} \overline{\sqcup} \xi_{f_2}} \mathbf{G}_{\sigma^{-1} \circ \text{Id}_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}} \\ &= \sum_{\sigma \in \xi_{f_1}^{-1} * \xi_{f_2}^{-1}} \mathbf{G}_{\sigma \circ \text{Id}_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}} \\ &= \mathbf{G}_{f_1^{-1}} \cdot \mathbf{G}_{f_2^{-1}}, \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

où nous avons utilisé successivement la définition du produit de mélange de deux permutations de blocs uniformes (II.36), la définition de ϕ , la dualité dans **FQSym** (voir paragraphe 3.1) et la définition du produit de convolution de deux permutations de blocs uniformes (II.21). Ceci démontre que ϕ est un morphisme d'algèbres.

Montrons maintenant que ϕ est un morphisme de cogèbres. Considérons une permutation de blocs uniforme $f := \xi_f \circ Id_{\mathcal{A}}$ de taille n . Nous allons commencer par un calcul préliminaire. Reprenons les définitions (II.41). Soit $i \in B(\mathcal{A})$. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} (f_1 \cdots f_i)^{-1} &= Id_{\mathcal{A}_{\{1, \dots, i\}}} \circ \text{std}(\sigma_1 \cdots \sigma_i)^{-1} \\ &= Id_{\mathcal{A}_{\{1, \dots, i\}}} \circ (\sigma^{-1})_{\{1, \dots, i\}} \\ &= (f^{-1})_{\{1, \dots, i\}} \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

où la dernière égalité découle de la définition (II.25). De la même manière, nous montrons que

$$(f_{i+1} \cdots f_n)^{-1} = (f^{-1})_{\{i+1, \dots, n\}}. \quad (\text{II.47})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \phi \otimes \phi \circ \Delta(\mathbf{F}_f) &= \sum_{i \in B(\mathcal{A})} \phi(\mathbf{F}_{f_1 \cdots f_i}) \otimes \phi(\mathbf{F}_{f_{i+1} \cdots f_n}) \\ &= \sum_{i \in B(\mathcal{A})} \mathbf{G}_{(f_1 \cdots f_i)^{-1}} \otimes \mathbf{G}_{(f_{i+1} \cdots f_n)^{-1}} \\ &= \sum_{i \in B(\mathcal{A})} \mathbf{G}_{(f^{-1})_{\{1, \dots, i\}}} \otimes \mathbf{G}_{(f^{-1})_{\{i+1, \dots, n\}}} \\ &= \Delta(\mathbf{G}_{f^{-1}}), \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

où nous avons utilisé successivement la définition du coproduit de déconvolution (II.42) et (II.40), la définition de ϕ , les équations (II.46) et (II.47) et la définition du coproduit de démélange d'une permutation de blocs uniforme (II.31) et (II.24). Ce qui démontre que ϕ est un morphisme de cogèbres.

Il est clair que ϕ est un isomorphisme, puisque l'image d'une base est une base. \square

2.2 Réalisation polynomiale

Soit $B := \{b_i; i \geq 0\}$ un alphabet et $C := \{c_i; i \geq 0\}$ un alphabet totalement ordonné. Considérons l'alphabet $A := \left\{ \binom{b_i}{c_j}; i, j \geq 0 \right\}$ de bi-

lettres muni des deux relations

- pour tout i et k , $\binom{b_i}{c_j} \preceq \binom{b_k}{c_l}$ si et seulement si $c_j \leq c_l$;
- pour tout j et l , $\binom{b_i}{c_j} \equiv \binom{b_k}{c_l}$ si et seulement si $b_i = b_k$.

Le produit de deux bi-mots est la concaténation

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_2 \\ v_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.49})$$

Nous étendons la définition de la standardisation aux bi-mots. Le *standardisé* d'un bi-mot $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est la permutation $\text{std}(v)$. Par exemple,

$$\text{std} \left(\begin{pmatrix} b_1 b_1 b_3 b_1 b_2 \\ c_2 c_3 c_2 c_1 c_6 \end{pmatrix} \right) = 24315. \quad (\text{II.50})$$

Étant donnée une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, nous disons qu'un bi-mot w est f -compatible, et le notons $w \vdash f$, lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\text{std}(w) = \xi_f$
2. si i et j sont dans le même bloc dans \mathcal{A} , alors les bi-lettres w_i et w_j satisfont $w_i \equiv w_j$

où nous rappelons que ξ_f désigne la permutation minimale parmi les σ satisfaisant $f = \sigma \circ \text{Id}_{\mathcal{A}}$ (c.f. paragraphe 1.3). La condition 2 exprime la compatibilité entre un mot et une partition définie par (I.173) dans le paragraphe 3.2. Plus précisément, les conditions 1 et 2 se réécrivent, étant donnée une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, en

$$w := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \vdash f \iff \begin{cases} \text{std}(v) = \xi_f \\ u \vdash \mathcal{A}. \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

Nous définissons ainsi le polynôme

$$\mathbf{G}_f(A) := \sum_{w; w \vdash f} w. \quad (\text{II.52})$$

Par exemple, considérons la permutation de blocs uniforme $f := \left(\begin{array}{c|cc} 13 & 256 & 4 \\ \hline 15 & 234 & 6 \end{array} \right)$. La permutation $\sigma := 125634$ est la permutation minimale associée à f et nous avons :

$$\mathbf{G}_f(A) = \sum_{\substack{i,j,k \\ \text{std}(c_1 c_2 \dots c_6) = \sigma}} \begin{pmatrix} b_i b_j b_i b_k b_j b_j \\ c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.53})$$

Théorème 2.2. *Les polynômes $\mathbf{G}_f(A)$ engendrent une sous-algèbre de $\mathbb{K}\langle A \rangle$ isomorphe à \mathbf{UBP} . Autrement dit, pour toutes permutations de blocs uniformes f et g , nous avons :*

$$\mathbf{G}_f(A) \cdot \mathbf{G}_g(A) = \sum_{h \in f * g} \mathbf{G}_h(A) \quad (\text{II.54})$$

et la famille $\{\mathbf{G}_f(A); f \in \mathbf{UBP}\}$ est libre. De plus, le coproduit se déduit d'un doublement d'alphabet. Soit A' un alphabet isomorphe à A et tel que toute bi-lettre de A' soit plus petite que celle de A . Définissons l'alphabet $A + A'$ comme l'union disjointe de A et A' munie des relations \preceq et \equiv . Les bi-lettres de A et A' commutent entre elles. En identifiant $P(A)Q(A')$ à $P \otimes Q$, nous avons :

$$\Delta(\mathbf{G}_f) = \mathbf{G}_f(A + A'). \quad (\text{II.55})$$

Nous allons démontrer ce théorème en le décomposant en trois lemmes.

Lemme 2.3. *Étant données deux permutations de blocs uniformes f et g , nous avons :*

$$\mathbf{G}_f(A) \cdot \mathbf{G}_g(A) = \sum_{h \in f * g} \mathbf{G}_h(A). \quad (\text{II.56})$$

Démonstration. Soit $f := \xi_f \circ Id_{\mathcal{A}}$ et $g := \xi_g \circ Id_{\mathcal{B}}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_f(A) \cdot \mathbf{G}_g(A) &= \sum_{w; w \vdash f} w \cdot \sum_{w; w \vdash g} w \\ &= \sum_{\substack{u_1 \in B^*, v_1 \in C^* \\ u_1 \vdash \mathcal{A} \\ \text{std}(v_1) = \xi_f}} \binom{u_1}{v_1} \sum_{\substack{u_2 \in B^*, v_2 \in C^* \\ u_2 \vdash \mathcal{B} \\ \text{std}(v_2) = \xi_g}} \binom{u_2}{v_2} \\ &= \sum_{\sigma \in \xi_f * \xi_g} \sum_{\substack{u \in B^*, v \in C^* \\ u \vdash \mathcal{A} \times \mathcal{B} \\ \text{std}(v) = \sigma}} \binom{u}{v}. \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

Mais, étant données deux décompositions $f = \sigma \circ Id_{\mathcal{A}}$ (resp. $g = \tau \circ Id_{\mathcal{B}}$), si σ (resp. τ) est la permutation minimale associée à f (resp. g), alors chaque permutation ν dans le produit $\sigma * \tau$ est la permutation minimale associée à $\nu \circ Id_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$. \square

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) &= \sum_{\substack{b_1, b_2 \in B \\ c_1, c_2 \in C}} \binom{b_1 b_2}{c_1 c_2} \\
&= \sum_{\substack{b_1, b_2 \in B \\ c_1, c_2 \in C; c_1 \leq c_2}} \binom{b_1 b_2}{c_1 c_2} + \sum_{\substack{b_1, b_2 \in B \\ c_1, c_2 \in C; c_1 > c_2}} \binom{b_1 b_2}{c_1 c_2} \quad (\text{II.58}) \\
&= \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & | & 2 \\ 1 & | & 2 \end{smallmatrix}\right)}(A) + \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & | & 2 \\ 2 & | & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 \\ 12 \end{smallmatrix}\right)}(A) \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) &= \sum_{\substack{b_1, b_2 \\ \text{std}(v_1)=12 \\ \text{std}(v_2)=1}} \binom{b_1 b_1 b_2}{v_1 v_2} \\
&= \sum_{\substack{b_1, b_2 \\ c_1 \leq c_2 \leq c_3}} \binom{b_1 b_1 b_2}{c_1 c_2 c_3} + \sum_{\substack{b_1, b_2 \\ c_1 \leq c_3 < c_2}} \binom{b_1 b_1 b_2}{c_1 c_2 c_3} \quad (\text{II.59}) \\
&\quad + \sum_{\substack{b_1, b_2 \\ c_3 < c_1 \leq c_2}} \binom{b_1 b_1 b_2}{c_1 c_2 c_3} \\
&= \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 & | & 3 \\ 12 & | & 3 \end{smallmatrix}\right)}(A) + \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 & | & 3 \\ 13 & | & 2 \end{smallmatrix}\right)}(A) + \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 & | & 3 \\ 23 & | & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A).
\end{aligned}$$

Lemme 2.4. *Étant donnée une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et les conditions du théorème 2.2, nous avons :*

$$\mathbf{G}_f(A + A') = \Delta(\mathbf{G}_f). \quad (\text{II.60})$$

Démonstration. Nous allons noter σ la permutation minimale associée à f .

Soit w un bi-mot apparaissant dans le membre de gauche de (II.60) et soit $w|_A := \binom{u_1 u_2 \cdots u_i}{v_1 v_2 \cdots v_i}$ un sous-mot de w . Alors

$$u_1 \cdots u_i \vdash \text{std}(\mathcal{A}_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(i)\}}) \quad \text{et} \quad \text{std}(v_1 \cdots v_i) = \sigma_{\{1, \dots, i\}}. \quad (\text{II.61})$$

La partition $\mathcal{C} := \text{std}(\mathcal{A}_{\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \dots, \sigma^{-1}(i)\}})$ et la permutation $\tau := \sigma_{\{1, \dots, i\}}$ définissent une permutation de blocs uniforme $g := \tau \circ Id_{\mathcal{C}}$ dont la permutation minimale est τ . Ainsi, le bi-mot $\binom{u_1 u_2 \cdots u_i}{v_1 v_2 \cdots v_i}$ est un terme apparaissant dans $\mathbf{G}_g(A)$. De même, le bi-mot $w|_{A'}$ défini sur l'alphabet A'

apparaît dans $\mathbf{G}_h(A')$ pour une certaine permutation de blocs uniforme h . Par construction, $\mathbf{G}_g \otimes \mathbf{G}_h$ est un terme apparaissant dans $\Delta(\mathbf{G}_f)$.

Réciproquement, soit $P \otimes Q$ un terme apparaissant dans $\Delta(\mathbf{G}_f)$ et soit w le bi-mot $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ apparaissant dans $P(A) \sqcup Q(A')$ et tel que le standardisé de w soit σ . Le mot u est \mathcal{A} -compatible. Par conséquent, le bi-mot w apparaît dans $\mathbf{G}_f(A + A')$. \square

Par exemple, écrivons les bi-lettres de A (resp. A') en bleu (resp. rouge),

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 13 & | & 24 \\ 13 & | & 24 \end{smallmatrix}\right)}(A + A') &= \sum_{\substack{b_1, b_2 \\ c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4}} \begin{pmatrix} b_1 b_2 b_1 b_2 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{b_1, b_2 \\ c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4}} \begin{pmatrix} b_1 b_2 b_1 b_2 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 13 & | & 24 \\ 13 & | & 24 \end{smallmatrix}\right)}(A') + \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 13 & | & 24 \\ 13 & | & 24 \end{smallmatrix}\right)}(A). \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

Posons $\tau = 2431$ et reprenons l'exemple (II.33),

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 13 & | & 2 & | & 4 \\ 23 & | & 4 & | & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A + A') &= \sum_{\substack{b_1, b_2, b_3 \\ \text{std}(c_1 c_2 c_3 c_4) = \tau}} \begin{pmatrix} b_1 b_2 b_1 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{b_1, b_2, b_3 \\ \text{std}(c_1 c_2 c_3 c_4) = \tau}} \begin{pmatrix} b_1 b_2 b_1 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{\substack{b_1, b_2, b_3 \\ \text{std}(c_1 c_2 c_3 c_4) = \tau}} \begin{pmatrix} b_1 b_2 b_1 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{b_1, b_2, b_3 \\ \text{std}(c_1 c_2 c_3 c_4) = \tau}} \begin{pmatrix} b_1 b_2 b_1 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 13 & | & 2 & | & 4 \\ 23 & | & 4 & | & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A') + \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) \cdot \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 13 & | & 2 \\ 12 & | & 3 \end{smallmatrix}\right)}(A') \\ &+ \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 & | & 3 \\ 23 & | & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) \cdot \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}(A') + \mathbf{G}_{\left(\begin{smallmatrix} 13 & | & 2 & | & 4 \\ 23 & | & 4 & | & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A). \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Lemme 2.5. *La famille $\{\mathbf{G}_f(\mathcal{A}) ; f \in \mathcal{UBP}\}$ est indépendante.*

Démonstration. Rappelons que l'opérateur usp (voir la définition (I.165) au paragraphe 3.2) associe à tout mot w une partition qui enregistre la position des lettres identiques dans w . Nous définissons sur l'ensemble des bi-mots la relation suivante. Étant donnés deux bi-mots $w_1, w_2 \in A^*$, $w_1 := \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

et $w_2 := \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$, nous dirons que :

$$w_1 \trianglelefteq w_2 \iff \begin{cases} \text{usp}(u_1) \preceq \text{usp}(u_2) \\ \text{std}(v_1) = \text{std}(v_2) \end{cases}. \quad (\text{II.64})$$

Soit f une permutation de blocs uniforme et w_f un bi-mot f -compatible maximal pour la relation \leq . Nous définissons

$$\tilde{\mathbf{G}}_f(A) := \sum_{\substack{w \in A^* \\ \text{std}(w) = \xi_f \\ \text{usp}(w_f) = \text{usp}(w)}} w. \quad (\text{II.65})$$

La famille $\{\tilde{\mathbf{G}}_f(A)\}_f$ est indépendante puisque n'importe quel bi-mot $w = \binom{u}{v}$ apparaissant dans $\tilde{\mathbf{G}}_f(A)$ permet de reconstruire f :

$$f = \text{std}(v) \circ Id_{\text{usp}(u)}. \quad (\text{II.66})$$

Cependant

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_f(A) &= \sum_{w \in A^*; w \leq w_f} w \\ &= \sum_{\mathcal{B}; \mathcal{B} \leq \text{usp}(w_f)} \sum_{\substack{w \in A^* \\ \text{usp}(w) = \mathcal{B} \\ \text{std}(w) = \xi_f}} w. \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

La partition \mathcal{B} et la permutation ξ_f définissent la permutation de blocs uniforme $g := \xi_f \circ Id_{\mathcal{B}}$. Nous avons donc

$$\tilde{\mathbf{G}}_g(A) = \sum_{\substack{w \in A^* \\ \text{usp}(w) = \mathcal{B} \\ \text{std}(w) = \xi_f}} w. \quad (\text{II.68})$$

Ainsi

$$\mathbf{G}_f(A) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \leq \text{usp}(w_f) \\ g = \xi_f \circ Id_{\mathcal{B}}}} \tilde{\mathbf{G}}_g(A). \quad (\text{II.69})$$

Puisque la famille $\{\tilde{\mathbf{G}}_g(A); g \in \mathcal{UBP}\}$ est indépendante, il en est de même de la famille $\{\mathbf{G}_f(A); f \in \mathcal{UBP}\}$. \square

2.3 Propriétés algébriques

Soit ψ l'application qui, à une permutation de blocs uniforme $f = Id_{\mathcal{A}} \circ \sigma$ de taille n associe le mot u de longueur n construit de la manière suivante. La i^{e} lettre u_i de u est le minimum des lettres σ_j qui sont dans le même bloc dans \mathcal{A} que σ_i . Par exemple,

$$\begin{aligned} \psi(Id_{\{\{1,2\}\}} \circ 12) &= 11 & \psi(Id_{\{\{1\},\{2,3\}\}} \circ 231) &= 221 \\ \psi(Id_{\{\{1,2\},\{3,4\}\}} \circ 1324) &= 1313 & \psi(Id_{\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}} \circ 2341) &= 2141. \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

La définition de ψ ne dépend pas de la permutation σ représentant la permutation de blocs uniformes f car toute autre permutation proviendrait de σ par des échanges de lettres qui sont dans le même bloc dans \mathcal{A} .

Il n'est pas difficile de voir que l'image par ψ d'une permutation de blocs uniforme est une fonction de parking puisque chaque lettre de la permutation est remplacée par une lettre qui lui est plus petite. L'application ψ induit donc une application linéaire de l'espace vectoriel \mathbf{UBP}^* engendré par les permutations de blocs uniformes vers celui engendré par les fonctions de parking \mathbf{PQSym} :

$$\Psi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{UBP}^* & \longrightarrow & \mathbf{PQSym} \\ \mathbf{F}_f & \longmapsto & \mathbf{F}_{\psi(f)}. \end{array} \quad (\text{II.71})$$

Par exemple, reprenant les exemples (II.70) :

$$\begin{aligned} \Psi_1\left(\mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}}\right) &= \mathbf{F}_{11} & \Psi_1\left(\mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 23 & 1 \end{pmatrix}}\right) &= \mathbf{F}_{221} \\ \Psi_1\left(\mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 12 & 34 \end{pmatrix}}\right) &= \mathbf{F}_{1313} & \Psi_1\left(\mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 13 & 4 \end{pmatrix}}\right) &= \mathbf{F}_{2141}. \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

Proposition 2.6. *Soit f et g deux permutations de blocs uniformes. Alors, nous avons :*

$$\Psi_1(\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{F}_g) = \Psi_1(\mathbf{F}_f) \cdot \Psi_1(\mathbf{F}_g). \quad (\text{II.73})$$

Démonstration. Soit \mathbf{F}_w un terme apparaissant dans le membre de gauche de (II.73) et h une permutation de blocs uniforme contenue dans $f \sqcup g$ de sorte que $\mathbf{F}_w = \Psi_1(\mathbf{F}_h)$. La i^{e} lettre de w est obtenue à partir d'une permutation σ et d'un bloc E de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ contenant σ_i . Cependant, si la lettre w_i est inférieure ou égale à la taille de \mathcal{A} , alors E est contenu dans \mathcal{A} . Ainsi, le sous-mot de w dont les lettres sont inférieures ou égales à la taille de \mathcal{A} est $\Psi_1(\mathbf{F}_f)$. De même, la fonction de parking $\Psi_1(\mathbf{F}_g)$ est la parkisée du sous-mot de w dont les lettres sont strictement supérieures à la taille de \mathcal{A} . Par conséquent, nous venons de voir que chaque terme dans le membre de gauche de (II.73) est dans le membre de droite.

Puisque le nombre de termes de chaque côté de (II.73) est la même et que le membre de gauche et le membre de droite sont sans multiplicité, nous avons égalité. \square

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\Psi_1\left(\mathbf{F}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 & | & 3 \\ 13 & | & 2 \end{smallmatrix}\right)} \cdot \mathbf{F}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & | & 2 \\ 1 & | & 2 \end{smallmatrix}\right)}\right) &= \mathbf{F}_{11244} + \mathbf{F}_{11424} + \mathbf{F}_{14124} + \mathbf{F}_{41124} + \mathbf{F}_{11442} \\
&\quad + \mathbf{F}_{14142} + \mathbf{F}_{41142} + \mathbf{F}_{14412} + \mathbf{F}_{41412} + \mathbf{F}_{44112} \\
&= \mathbf{F}_{112} \cdot \mathbf{F}_{11} \\
&= \Psi_1\left(\mathbf{F}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 & | & 3 \\ 13 & | & 2 \end{smallmatrix}\right)}\right) \cdot \Psi_1\left(\mathbf{F}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & | & 2 \\ 1 & | & 2 \end{smallmatrix}\right)}\right).
\end{aligned} \tag{II.74}$$

L'application Ψ_1 ne peut pas être un morphisme de cogèbres. Le coproduit de déconvolution d'une permutation de blocs uniforme $f = Id_{\mathcal{A}} \circ \sigma$ ne scindent pas de blocs de la partition \mathcal{A} . Donc, on ne peut pas déconcaténer son image $\psi(f)$ par ψ en un préfixe et suffixe qui contiennent une même lettre. D'où l'introduction d'une nouvelle base $\widetilde{\mathbf{M}}$ de \mathbf{WQSym}^* (c.f. paragraphe 3.1). Soit l'application linéaire $\Psi: \mathbf{UBP}^* \rightarrow \mathbf{WQSym}^*$ définie, pour toute permutation de blocs uniforme f , par

$$\Psi(\mathbf{F}_f) := \widetilde{\mathbf{M}}_{\text{pack}(\psi(f))}^*. \tag{II.75}$$

Par exemple, reprenant les exemples (II.70) :

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\mathbf{F}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 \\ 12 \end{smallmatrix}\right)}\right) &= \widetilde{\mathbf{M}}_{11}^* & \Psi\left(\mathbf{F}_{\left(\begin{smallmatrix} 12 & | & 3 \\ 23 & | & 1 \end{smallmatrix}\right)}\right) &= \widetilde{\mathbf{M}}_{221}^* \\
\Psi\left(\mathbf{F}_{\left(\begin{smallmatrix} 13 & | & 24 \\ 12 & | & 34 \end{smallmatrix}\right)}\right) &= \widetilde{\mathbf{M}}_{1212}^* & \Psi\left(\mathbf{F}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & | & 24 & | & 3 \\ 2 & | & 13 & | & 4 \end{smallmatrix}\right)}\right) &= \widetilde{\mathbf{M}}_{2131}^*.
\end{aligned} \tag{II.76}$$

Proposition 2.7. *L'application linéaire Ψ est un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf de \mathbf{UBP}^* vers \mathbf{WQSym}^* .*

Démonstration. Le fait que Ψ soit un morphisme d'algèbres se démontre exactement comme la proposition 2.6.

Montrons que Ψ est un morphisme de cogèbres. Autrement dit,

$$\Psi \otimes \Psi \circ \Delta(\mathbf{F}_f) = \Delta \circ \Psi(\mathbf{F}_f). \tag{II.77}$$

Considérons une permutation de blocs uniforme $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ de taille n . Notons w le mot $\psi(f)$ et écrivons w en la concaténation $u \cdot v$. Les ensembles de lettres dans u et v sont disjoints si et seulement si la longueur $|u|$ de u est dans $\mathbf{B}(\mathcal{A})$. De plus, par définition de w , nous avons :

$$\Psi\left(\mathbf{F}_{f_1 \cdots f_{|u|}}\right) = \widetilde{\mathbf{M}}_{\text{pack}(u)}^* \quad \Psi\left(\mathbf{F}_{f_{|u|+1} \cdots f_n}\right) = \widetilde{\mathbf{M}}_{\text{pack}(v)}^*. \tag{II.78}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta(\Psi(\mathbf{F}_f)) &= \sum_{\substack{u'v'=\text{pack}(w) \\ u' \cap v' = \emptyset}} \widetilde{\mathbf{M}}_{\text{pack}(u')}^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{\text{pack}(v')}^* \\
&= \sum_{i \in \mathcal{B}\mathcal{A}} \Psi(\mathbf{F}_{f_1 \dots f_i}) \otimes \Psi(\mathbf{F}_{f_{i+1} \dots f_n}) \\
&= \Psi \otimes \Psi \circ \Delta(\mathbf{F}_f).
\end{aligned} \tag{II.79}$$

Enfin, montrons que Ψ est surjective. Considérons un mot tassé w . Rappelons (c.f. (I.165)) que usp est un opérateur qui à un mot associe une partition. Alors, l'image, pour la permutation de blocs uniforme $f = \text{std}(w) \circ \text{Id}_{\text{usp}(w)}$, par Ψ de \mathbf{F}_f est $\widetilde{\mathbf{M}}_w^*$. \square

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}} \cdot \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}\right) &= \Psi\left(\mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 12 & | & 3 \\ 12 & | & 3 \end{pmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 13 & | & 2 \\ 12 & | & 3 \end{pmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 & | & 23 \\ 3 & | & 12 \end{pmatrix}}\right) \\
&= \widetilde{\mathbf{M}}_{112}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_{121}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_{211}^* \\
&= \widetilde{\mathbf{M}}_{11}^* \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_1^* \\
&= \Psi\left(\mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}}\right) \cdot \Psi\left(\mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}\right).
\end{aligned} \tag{II.80}$$

Posons $f := \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 24 & 3 \\ 4 & 12 & 3 \end{array}\right)$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\Psi \otimes \Psi \circ \Delta(\mathbf{F}_f) &= \Psi \otimes \Psi \left(1 \otimes \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \otimes \mathbf{F}_{\begin{pmatrix} 13 & | & 2 \\ 12 & | & 3 \end{pmatrix}} + \mathbf{F}_f \otimes 1 \right) \\
&= 1 \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{3121}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_1^* \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{121}^* + \widetilde{\mathbf{M}}_{3121}^* \otimes 1 \\
&= \Delta(\widetilde{\mathbf{M}}_{3121}^*) \\
&= \Delta(\Psi(\mathbf{F}_f)).
\end{aligned} \tag{II.81}$$

L'application Ψ induit une application duale.

Proposition 2.8. *L'application linéaire $\Phi: \mathbf{WQSym} \rightarrow \mathbf{UBP}$ définie, pour tout mot tassé w , par*

$$\Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_w) := \sum_{f: \text{pack}(\psi(f))=w} \mathbf{G}_f \tag{II.82}$$

est un morphisme injectif d'algèbres de Hopf.

Démonstration. L'application Φ est le dual de Ψ , puisque

$$\Psi(\mathbf{F}_f)(\widetilde{\mathbf{M}}_w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{pack}(\psi(f)) = w \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

Par conséquent, pour toute permutation de blocs uniforme f telle que le tassé de $\psi(f)$ soit w , $\mathbf{F}_f \circ \Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_w)$ doit valoir 1 et sinon 0. \square

Par exemple,

$$\begin{aligned} \Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_{121} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_1) &= \Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_{1213} + \widetilde{\mathbf{M}}_{1312} + \widetilde{\mathbf{M}}_{2321}) \\ &= \left(\mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 4 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 13 & 2 & 4 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 14 & 2 & 3 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 12 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \right) \\ &\quad + \left(\mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 13 & 4 & 2 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 14 & 3 & 2 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 23 & 4 & 1 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 24 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \right), \\ &= \left(\mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}} \right) \cdot \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\ &= \Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_{121}) \cdot \Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_1) \end{aligned} \quad (\text{II.84})$$

$$\begin{aligned} \Phi \otimes \Phi(\Delta(\widetilde{\mathbf{M}}_{2131})) &= \Phi \otimes \Phi(1 \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{2131} + \widetilde{\mathbf{M}}_{11} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_{12} + \widetilde{\mathbf{M}}_{211} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}_1 + \widetilde{\mathbf{M}}_{2131} \otimes 1) \\ &= 1 \otimes \left(\mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 13 & 4 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 14 & 3 \end{pmatrix}} \right) \\ &\quad + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}} \otimes \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} + \left(\mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}} \right) \otimes \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\ &\quad + \left(\mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 13 & 4 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 14 & 3 \end{pmatrix}} \right) \otimes 1 \\ &= \Delta \left(\mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 13 & 4 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}} + \mathbf{G}_{\begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 14 & 3 \end{pmatrix}} \right) \\ &= \Delta(\Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_{2131})). \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$

Chapitre III

Matrices carrées tassées

Dans ce chapitre, nous étudions une famille d'algèbres de Hopf combinatoires dont les bases sont indexées par des matrices carrées ne contenant ni ligne ni colonne complète de zéro. Deux graduations sur ces objets sont explorées, la taille et le nombre de coefficients non nuls des matrices. Ceci nous amène à considérer deux algèbres de Hopf graduées **PMN** et **PML**, ainsi qu'une bigraduée **PM**. Ce travail, ainsi que l'étude des matrices à signes alternants qui fait l'objet du chapitre **IV** a été réalisé avec Hayat Cheballah et Samuele Giraud.

Dans un premier temps, nous introduisons les matrices carrées tassées et les énumérons selon leur graduation. Nous définissons, dans un second temps, les algèbres de Hopf et étudions leurs propriétés algébriques. Elles sont libres, colibres, autoduales et admettent une structure bidendriforme. Nous terminons en reliant ces algèbres de Hopf avec d'autres algèbres bien connues.

1 k -matrices tassées

1.1 Définitions

Soit $k \geq 1$ un entier. Une k -matrice tassée de taille n est une matrice carrée de taille n à coefficients dans l'alphabet $A_k := \{0, 1, \dots, k\}$ et telle que chaque ligne et chaque colonne contient au moins une valeur non nulle. Nous noterons $\mathcal{PM}_{k,n,\ell}$ l'ensemble des k -matrices tassées de taille n avec exactement ℓ coefficients non nuls. Remarquons que ℓ vaut au moins la taille de la k -matrice tassée. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{PM}_{k,n,n}$ est l'ensemble \mathfrak{S}_n

des permutations de taille n et $\mathcal{PM}_{1,2,3}$ est l'ensemble des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.1})$$

Nous noterons aussi $\mathcal{PM}_{k,n,-}$ l'ensemble de toutes les k -matrices tassées de taille n . Par exemple, les sept 1-matrices tassées de taille 2 sont

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.2})$$

Et enfin, nous noterons $\mathcal{PM}_{k,-,\ell}$ l'ensemble de toutes les k -matrices tassées avec exactement ℓ coefficients non nuls et \mathcal{PM}_k l'ensemble de toutes les k -matrices tassées. Par exemple, les dix 1-matrices tassées de $\mathcal{PM}_{1,-,3}$ sont

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.3})$$

Les opérateurs $/$ et \setminus définis au paragraphe 1.6 sont stables sur l'ensemble des matrices tassées. C'est-à-dire, étant données deux k -matrices tassées M_1 et M_2 de tailles respectives n_1 et n_2 , les matrices M_1/M_2 et $M_1 \setminus M_2$ sont des k -matrices tassées de taille $n_1 + n_2$. De même, les produits de mélange décalés en colonne et en ligne sont stables sur l'ensemble des matrices tassées.

Étant donnée une matrice M à coefficient dans l'alphabet A_k , la *compression* de M est la matrice $\text{cp}(M)$ obtenue en supprimant les lignes et colonnes complètes de zéro. Soit M une k -matrice tassée. Le tuple (M_1, \dots, M_r) est une *décomposition en colonne* de M , si les matrices $\text{cp}(M_i)$ sont des matrices carrées pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et

$$M = [M_1 | \dots | M_r]. \quad (\text{III.4})$$

Si tel est le cas, nous noterons cette décomposition en colonne $M = M_1 \circ \dots \circ M_r$. De même, le tuple (M_1, \dots, M_r) est une *décomposition en ligne* de M , si les matrices $\text{cp}(M_i)$ sont des matrices carrées pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \dots \\ M_r \end{bmatrix}. \quad (\text{III.5})$$

Si tel est le cas, nous noterons cette décomposition en ligne $M = M_1 \bullet \cdots \bullet M_r$. Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.6})$$

Ces deux décompositions ont la propriété suivante.

Lemme 1.1. *Soit M une matrice tassée carrée et (M_1, M_2) une décomposition en colonne (resp. ligne) de M . Alors, pour tout i , il existe ε_i (resp. ε'_i) dans $\{1, 2\}$ tel que la i -ème ligne (resp. colonne) de M_{ε_i} (resp. $M_{\varepsilon'_i}$) est identiquement nulle.*

Démonstration. Nous allons prouver le lemme uniquement lorsque (M_1, M_2) est une décomposition en colonne de M . La démonstration lorsque (M_1, M_2) est une décomposition en ligne est analogue.

Notons n la taille de M et notons n_1 (resp. n_2) le nombre de colonnes de M_1 (resp. M_2). Ainsi, puisque M est une matrice carrée de taille n , $n = n_1 + n_2$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un entier i tel que les i -ème lignes de M_1 et M_2 ne soient pas identiquement nulles. Par définition de M_1 et M_2 , puisque $\text{cp}(M_1)$ et $\text{cp}(M_2)$ sont des matrices carrées, il y a n_1 lignes non identiquement nulles dans M_1 et n_2 lignes non identiquement nulles dans M_2 . Cela implique, puisque M est obtenue en collant la matrice M_2 à droite de M_1 , qu'il ne peut y avoir plus de $n_1 + n_2$ lignes non identiquement nulles dans M . Comme il existe un entier i tel que les i -ème lignes de M_1 et M_2 ne soient pas identiquement nulles, le nombre de lignes non identiquement nulles dans M est strictement inférieur à $n_1 + n_2$. Ce qui est absurde par définition de M qui contient exactement n lignes non identiquement nulles. \square

Le lemme 1.1 nous donne une condition suffisante pour nous assurer qu'une paire (M_1, M_2) de matrices ne peut être une décomposition en colonne (resp. ligne) d'une matrice M . Cependant, ce lemme ne donne pas de condition nécessaire. En effet,

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (M_1, M_2) := \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \quad (\text{III.7})$$

Même s'il n'y a pas de coefficients non nuls sur la même ligne dans M_1 et M_2 , (M_1, M_2) n'est pas une décomposition en colonne de M .

1.2 Énumérations

Le nombre de k -matrices tassées est donné par la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Pour tout $k \geq 1$, $n \geq 0$ et $\ell \geq 0$, le nombre $\#\mathcal{PM}_{k,n,\ell}$ de k -matrices tassées de taille n avec exactement ℓ coefficients non nuls est*

$$\#\mathcal{PM}_{k,n,\ell} = \sum_{0 \leq i,j \leq n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{ij}{\ell} k^\ell. \quad (\text{III.8})$$

Démonstration. Notons $\mathcal{M}_{k,n,\ell}$ l'ensemble des matrices carrées de taille n avec exactement ℓ coefficients non nuls dans A_k et notons $N_r(M)$ (resp. $N_c(M)$) l'ensemble des indices des lignes (resp. colonnes) nulles de $M \in \mathcal{M}_{k,n,\ell}$.

Pour tous sous-ensembles R et C de $\{1, \dots, n\}$, définissons l'ensemble

$$\mathcal{S}(R, C) := \{M \in \mathcal{M}_{k,n,\ell}; N_r(M) = R \text{ et } N_c(M) = C\}. \quad (\text{III.9})$$

Puisque le cardinal de $\mathcal{PM}_{k,n,\ell}$ est le même que celui de $\mathcal{S}(\emptyset, \emptyset)$, nous devons calculer $\#\mathcal{S}(\emptyset, \emptyset)$ afin de prouver l'équation (III.8).

Considérons la relation \leq définie sur l'ensemble des couples (R, C) de sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ par

$$(R_1, C_1) \leq (R_2, C_2) \quad \text{si et seulement si} \quad R_1 \subseteq R_2 \text{ et } C_1 \subseteq C_2. \quad (\text{III.10})$$

Nous avons, en posant $r := \#R$ et $c := \#C$,

$$\sum_{(R,C) \leq (R',C')} \#\mathcal{S}(R', C') = \binom{(n-r)(n-c)}{\ell} k^\ell \quad (\text{III.11})$$

puisque (III.11) est le nombre de matrices M dans $\mathcal{M}_{k,n,\ell}$ telles que $R \subseteq N_r(M)$ et $C \subseteq N_c(M)$. Ainsi, par l'inversion de Möbius sur le treillis booléen, nous obtenons

$$\#\mathcal{S}(\emptyset, \emptyset) = \sum_{(\emptyset, \emptyset) \leq (R,C)} (-1)^{r+c} \binom{(n-r)(n-c)}{\ell} k^\ell, \quad (\text{III.12})$$

où $r = \#R$ et $c = \#C$. L'équation (III.8) en découle. \square

La table III.1.1 montre les premières valeurs de $\#\mathcal{PM}_{k,n,\ell}$. L'énumération dans le cas $k = 1$ est la suite [A055599](#) de [48].

(a) Nombre de 1-matrices tassées.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|----|----|----|----|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | 2 | 4 | 1 | | | | | |
| 3 | | | | 6 | 45 | 90 | 78 | 36 | 9 | 1 |

(b) Nombre de 2-matrices tassées.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|----|-----|------|------|------|------|-----|
| 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | | 2 | | | | | | | | |
| 2 | | | 8 | 32 | 16 | | | | | |
| 3 | | | | 48 | 720 | 2880 | 4992 | 4608 | 2304 | 512 |

TABLE III.1.1 – Nombre de k -matrices tassées de taille n (valeurs verticales) avec exactement ℓ coefficients non nuls (valeurs horizontales).

Remarquons que pour tout entier $n \geq 0$, puisque

$$\mathcal{PM}_{k,n,-} = \bigoplus_{n \leq \ell \leq n^2} \mathcal{PM}_{k,n,\ell}, \quad (\text{III.13})$$

l'ensemble $\mathcal{PM}_{k,n,-}$ est fini. Ainsi, par la proposition 1.2, nous obtenons :

$$\#\mathcal{PM}_{k,n,-} = \sum_{0 \leq i,j \leq n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} (k+1)^{ij}. \quad (\text{III.14})$$

Les suites $(\#\mathcal{PM}_{1,n,-})_{n \geq 0}$ et $(\#\mathcal{PM}_{2,n,-})_{n \geq 0}$ commencent respectivement avec

$$1, 1, 7, 265, 41503, 24997921, 57366997447 \quad (\text{III.15})$$

et

$$1, 2, 56, 16064, 39156608, 813732073472, 147662286695991296. \quad (\text{III.16})$$

La première est la suite **A048291** de [48].

De même, puisque pour tout $\ell \geq 0$,

$$\mathcal{PM}_{k,-,\ell} = \bigoplus_{\lceil \sqrt{\ell} \rceil \leq n \leq \ell} \mathcal{PM}_{k,n,\ell}, \quad (\text{III.17})$$

l'ensemble $\mathcal{PM}_{k,-,\ell}$ est fini. Ainsi, par la proposition 1.2, nous obtenons :

$$\#\mathcal{PM}_{k,-,\ell} = \sum_{0 \leq i, j \leq n \leq \ell} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{ij}{\ell} k^\ell. \quad (\text{III.18})$$

Les suites $(\#\mathcal{PM}_{1,-,\ell})_{\ell \geq 0}$ et $(\#\mathcal{PM}_{2,-,\ell})_{\ell \geq 0}$ commencent respectivement avec

$$1, 1, 2, 10, 70, 642, 7246, 97052, 1503700 \quad (\text{III.19})$$

et

$$1, 2, 8, 80, 1120, 20544, 463744, 12422656, 384947200. \quad (\text{III.20})$$

La première est la suite [A104602](#) de [48].

2 Structures algébriques

Soit, pour tout $k \geq 1$, le \mathbb{K} -espace vectoriel bigradué

$$\mathbf{PM}_k := \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{\ell \geq 0} \mathbb{K}(\mathcal{PM}_{k,n,\ell}) \quad (\text{III.21})$$

engendré par l'ensemble de toutes les k -matrices tassées. Nous allons noter $\{\mathbf{F}_M; M \in \mathcal{PM}_k\}$ la base de \mathbf{PM}_k , que nous appellerons la *base fondamentale*. Nous munissons \mathbf{PM}_k du produit \cdot et du coproduit Δ définis par

$$\mathbf{F}_M \cdot \mathbf{F}_N := \sum_{O \in M \boxplus N} \mathbf{F}_O \quad (\text{III.22})$$

$$\Delta(\mathbf{F}_M) := \sum_{M=M_1 \circ M_2} \mathbf{F}_{\text{cp}(M_1)} \otimes \mathbf{F}_{\text{cp}(M_2)}. \quad (\text{III.23})$$

où M et N sont deux k -matrices tassées. Le produit et le coproduit sont étendus linéairement à \mathbf{PM}_k . Par exemple, dans \mathbf{PM}_1 nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} &= \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \\ &+ \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

et

$$\Delta \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \otimes \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{F}_{[1]} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes 1. \quad (\text{III.25})$$

Remarquons que, par définition, le produit et le coproduit de \mathbf{PM}_k sont sans multiplicité.

Théorème 2.1. *L'espace vectoriel \mathbf{PM}_k muni du produit \cdot et du coproduit Δ est une algèbre de Hopf combinatoire bigraduée.*

Démonstration. Il est clair que le produit de \mathbf{PM}_k respecte la bigraduation. De plus, le lemme 1.1 implique que le coproduit est aussi bigradué. Puisqu'il n'y a qu'une matrice tassée de taille 0, \mathbf{PM}_k est connexe. De plus, puisque pour tout n et pour tout $\ell \geq 0$, les ensembles $\mathcal{PM}_{k,n,\ell}$ sont finis, chaque composante homogène de \mathbf{PM}_k est de dimension finie.

L'associativité de \cdot découle de l'associativité du produit de mélange décalé sur les mots définis sur un alphabet totalement ordonné. En effet, une matrice tassée peut être vue comme un mot dont les lettres sont les colonnes de la matrice. La coassociativité de Δ provient du fait que $(M_1 \circ M_2) \circ M_3$ est une décomposition en colonne d'une matrice tassée si et seulement si $M_1 \circ (M_2 \circ M_3)$ en est une.

Il reste à montrer que Δ est un morphisme d'algèbres. Soit M_1 et M_2 deux matrices tassées. Le fait que (L, R) soit une décomposition en colonne d'une certaine matrice M apparaissant dans le produit de M_1 et M_2 si et seulement si L (resp. R) apparaît dans le produit de L_1 et L_2 (resp. R_1 et R_2) où (L_1, R_1) (resp. (L_2, R_2)) est une décomposition en colonne de M_1 (resp. M_2) montre que Δ est un morphisme d'algèbres. \square

L'antipode S de \mathbf{PM}_k s'écrit sur la base fondamentale pour toute k -matrice tassée M :

$$S(\mathbf{F}_M) = \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ M = M_1 \circ \dots \circ M_\ell \\ M_i \neq \emptyset, i \in [\ell]}} (-1)^\ell \mathbf{F}_{\text{cp}(M_1)} \cdot \dots \cdot \mathbf{F}_{\text{cp}(M_\ell)}. \quad (\text{III.26})$$

Par exemple, dans \mathbf{PM}_1 , nous avons

$$\begin{aligned} S \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= -\mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{[1]} \cdot \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Remarquons, puisque toute k -matrice tassée est aussi une $k + 1$ -matrice tassée, que l'espace vectoriel \mathbf{PM}_k est inclus dans \mathbf{PM}_{k+1} . Ainsi, par le théorème 2.1,

$$\mathbf{PM}_1 \hookrightarrow \mathbf{PM}_2 \hookrightarrow \dots \quad (\text{III.28})$$

est une suite croissante infinie d'algèbres de Hopf combinatoires pour l'inclusion. Les premières dimensions de \mathbf{PM}_1 et \mathbf{PM}_2 sont données dans la table III.1.1.

Posons

$$\mathbf{PMN}_k := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}(\mathcal{PM}_{k,n,-}) \quad \text{et} \quad \mathbf{PML}_k := \bigoplus_{\ell \geq 0} \mathbb{K}(\mathcal{PM}_{k,-,\ell}) \quad (\text{III.29})$$

les espaces vectoriels des k -matrices tassées graduées respectivement par la taille et par le nombre de coefficients non nuls des matrices. Par le théorème 2.1 et puisque chaque composante homogène de ces espaces vectoriels est de dimension finie (c.f. paragraphe 1.2), \mathbf{PMN}_k et \mathbf{PML}_k sont des algèbres de Hopf combinatoires. De plus,

$$\mathbf{PMN}_1 \hookrightarrow \mathbf{PMN}_2 \hookrightarrow \dots \quad \text{et} \quad \mathbf{PML}_1 \hookrightarrow \mathbf{PML}_2 \hookrightarrow \dots \quad (\text{III.30})$$

sont des suites croissantes infinies d'algèbres de Hopf combinatoires pour l'inclusion. Les premières dimensions de \mathbf{PMN}_1 et \mathbf{PMN}_2 sont données par (III.15) et (III.16), et celles de \mathbf{PML}_1 et \mathbf{PML}_2 sont données par (III.19) et (III.20).

Nous allons noter \mathbf{PM}_k^* l'espace vectoriel bigradué dual de \mathbf{PM}_k et noter $\{\mathbf{G}_M\}$ la base duale de la base $\{\mathbf{F}_M\}$. Par définition, la famille $\{\mathbf{G}_M; M \in \mathcal{PM}_k\}$ est une base de \mathbf{PM}_k^* . Explicitons le produit et le coproduit dans la base \mathbf{G} . Soit M_1 et M_2 deux k -matrices tassées de tailles respectives n_1 et n_2 . Par dualité, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{M_1} \cdot \mathbf{G}_{M_2} &= \sum_{M \in \mathcal{PM}_k} \langle \mathbf{G}_{M_1} \otimes \mathbf{G}_{M_2}, \Delta(\mathbf{F}_M) \rangle \mathbf{G}_M \\ &= \sum_{M \in \mathcal{PM}_k} \sum_{N_1 \circ N_2 = M} \langle \mathbf{G}_{M_1} \otimes \mathbf{G}_{M_2}, \mathbf{F}_{\text{cp}(N_1)} \otimes \mathbf{F}_{\text{cp}(N_2)} \rangle \mathbf{G}_M \\ &= \sum_{\substack{M = N_1 \circ N_2 \\ \text{cp}(N_1) = M_1 \\ \text{cp}(N_2) = M_2}} \mathbf{G}_M. \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Remarquons que le produit de mélange décalé en ligne, défini dans le paragraphe 1.6, est stable sur l'ensemble des k -matrices tassées. Ainsi, nous obtenons l'expression suivante pour le produit dans \mathbf{PM}_k^* :

$$\mathbf{G}_{M_1} \cdot \mathbf{G}_{M_2} = \sum_{M \in M_1 * M_2} \mathbf{G}_M. \quad (\text{III.32})$$

Par exemple, dans \mathbf{PM}_1^* , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &+ \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

Soit maintenant M une k -matrice tassée. Par dualité, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{G}_M) &= \sum_{M_1, M_2} \langle \mathbf{G}_M, \mathbf{F}_{M_1} \cdot \mathbf{F}_{M_2} \rangle \mathbf{G}_{M_1} \otimes \mathbf{G}_{M_2} \\ &= \sum_{M_1, M_2} \sum_{N \in M_1 \bar{\cup} M_2} \langle \mathbf{G}_M, \mathbf{F}_N \rangle \mathbf{G}_{M_1} \otimes \mathbf{G}_{M_2} \\ &= \sum_{M_1, M_2; M \in M_1 \bar{\cup} M_2} \mathbf{G}_{M_1} \otimes \mathbf{G}_{M_2}. \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Ainsi, nous obtenons l'expression suivante pour le coproduit de \mathbf{PM}_k^* :

$$\Delta(\mathbf{G}_M) = \sum_{M = M_1 \circ M_2} \mathbf{G}_{\text{cp}(M_1)} \otimes \mathbf{G}_{\text{cp}(M_2)}. \quad (\text{III.35})$$

Par exemple, dans \mathbf{PM}_1^* , nous avons

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= 1 \otimes \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &+ \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{G}_{[1]} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes 1. \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

L'algèbre de Hopf \mathbf{PM}_k est auto-duale.

Proposition 2.2. *L'application linéaire $\phi: \mathbf{PM}_k \rightarrow \mathbf{PM}_k^*$ définie, pour toute k -matrice tassée M , par*

$$\phi(\mathbf{F}_M) := \mathbf{G}_{M^T} \quad (\text{III.37})$$

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

Démonstration. Le produit et le coproduit de \mathbf{PM}_k dans la base fondamentale manipulent les colonnes des matrices tandis que le produit et le coproduit de \mathbf{PM}_k^* dans la base adjointe de la base fondamentale manipulent les lignes. Puisque la transposée d'une matrice échange ses lignes et ses colonnes, ϕ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf. \square

Puisque la transposée de toute k -matrice tassée de $\mathcal{PM}_{k,n,\ell}$ appartient aussi à $\mathcal{PM}_{k,n,\ell}$, la proposition 2.2 implique que \mathbf{PMN}_k et \mathbf{PML}_k sont auto-duales pour l'isomorphisme ϕ .

3 Propriétés algébriques

3.1 Bases multiplicatives et liberté

Nous munissons l'ensemble \mathcal{PM}_k de la relation binaire \rightarrow définie de la manière suivante. Si M_1 et M_2 sont deux k -matrices tassées de taille n , nous avons $M_1 \rightarrow M_2$ s'il existe un entier $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que, en notant s le nombre de 0 à la fin de la i^{e} colonne de M_1 et en notant p le nombre de 0 au début de la $i+1^{\text{e}}$ colonne de M_1 , nous avons $s+p \geq n$ et M_2 est obtenue à partir de M_1 en échangeant sa i^{e} et $i+1^{\text{e}}$ colonne. La figure III.1 illustre cette relation binaire.

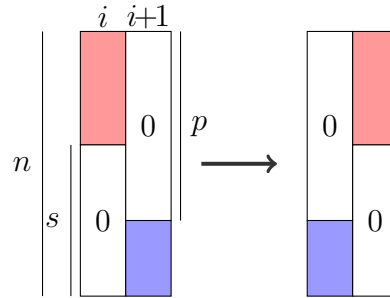


FIGURE III.1 – condition d'échanges de la i^{e} et $i+1^{\text{e}}$ colonne d'une k -matrice tassée par rapport à la relation \rightarrow . Les régions colorées contiennent n'importe quels coefficients dans A_k et les régions blanches ne contiennent que des 0.

Nous munissons l'ensemble \mathcal{PM}_k de la relation d'ordre partielle \leq_M définie comme la fermeture réflexive et transitive de \rightarrow . La figure III.2 illustre un intervalle de cet ordre partiel.

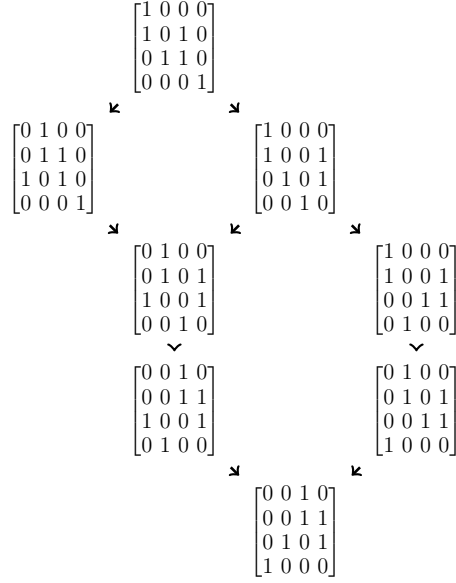


FIGURE III.2 – diagramme de Hasse d’un intervalle pour \leq_M sur les k -matrices tassées

Remarquons qu’en regardant une permutation σ de \mathfrak{S}_n comme la matrice d’une permutation, le poset $(\mathcal{PM}_{k,n,-}, \leq_M)$ restreint aux matrices d’une permutation est l’ordre gauche sur les permutations [18].

Lemme 3.1. *Soit M , A et B trois k -matrices tassées. Alors,*

1. $A/B \leq_M M$ si et seulement s’il existe deux k -matrices tassées A' et B' telles que $A \leq_M A'$, $B \leq_M B'$, et $M \in A' \sqcup B'$;
2. $M \leq_M A \setminus B$ si et seulement s’il existe deux k -matrices tassées A' et B' telles que $A' \leq_M A$, $B' \leq_M B$, et $M \in A' \sqcup B'$.

Démonstration. Supposons que $A/B \leq_M M$. Par définition de l’ordre \leq_M , M peut être obtenue à partir de A/B en échangeant les colonnes provenant de A afin d’obtenir une matrice A' satisfaisant $A \leq_M A'$, en échangeant les colonnes provenant de B afin d’obtenir une matrice B' satisfaisant $B \leq_M B'$, et ensuite, en échangeant les colonnes provenant de A' et de B' ensemble. Ainsi, $M \in A' \sqcup B'$.

Réciproquement, supposons que $A \leq_M A'$, $B \leq_M B'$, et $M \in A' \sqcup B'$. Alors, par définition du produit de mélange décalé et de l’opérateur over, $A'/B' \leq_M M$. Ceci implique $A/B \leq_M M$.

Le point 2 se démontre par des arguments similaires. □

En imitant les définitions des bases dans l'algèbre des fonctions symétriques, pour toutes k -matrices tassées M , les éléments \mathbf{E}_M et les éléments \mathbf{H}_M sont définis respectivement par

$$\mathbf{E}_M := \sum_{M \leq_{\mathfrak{M}} M'} \mathbf{F}_{M'} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_M := \sum_{M' \leq_{\mathfrak{M}} M} \mathbf{F}_{M'} \quad (\text{III.38})$$

et sont appelés respectivement la *base élémentaire* et la *base homogène*. Par triangularité, ces deux familles sont des bases de \mathbf{PM}_k . Par exemple, dans \mathbf{PM}_1 , nous avons

$$\mathbf{E}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}, \quad (\text{III.39})$$

et

$$\mathbf{H}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} = \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}. \quad (\text{III.40})$$

Proposition 3.2. *Les éléments apparaissant dans le produit de \mathbf{PM}_k , exprimés dans la base fondamentale, forment un intervalle pour l'ordre partiel $\leq_{\mathfrak{M}}$. Plus précisément, pour toutes k -matrices tassées M_1 et M_2 ,*

$$\mathbf{F}_{M_1} \cdot \mathbf{F}_{M_2} = \sum_{M_1 / M_2 \leq_{\mathfrak{M}} M \leq_{\mathfrak{M}} M_1 \setminus M_2} \mathbf{F}_M. \quad (\text{III.41})$$

Démonstration. Par définition du produit de \mathbf{PM}_k , les membres de gauche et de droite de (III.41) sont sans multiplicité. Il suffit donc de montrer l'égalité (III.41) sur les ensembles sous-jacents. Ce qui est une conséquence du lemme 3.1 qui montre que les ensembles $M_1 \sqsupset M_2$ et $[M_1 / M_2, M_1 \setminus M_2]$ sont égaux. \square

Proposition 3.3. *Le produit de \mathbf{PM}_k satisfait, pour toutes k -matrices tassées M_1 et M_2 ,*

$$\mathbf{E}_{M_1} \cdot \mathbf{E}_{M_2} = \mathbf{E}_{M_1 / M_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{M_1} \cdot \mathbf{H}_{M_2} = \mathbf{H}_{M_1 \setminus M_2}. \quad (\text{III.42})$$

Démonstration. Nous allons prouver la règle du produit pour la base élémentaire en exprimant $\mathbf{E}_{M_1} \cdot \mathbf{E}_{M_2}$ et \mathbf{E}_{M_1 / M_2} sur la base fondamentale.

Sur la base fondamentale, $\mathbf{E}_{M_1} \cdot \mathbf{E}_{M_2}$ est sans multiplicité puisque tout élément \mathbf{F}_N , où N est une k -matrice tassée, apparaissant dans $\mathbf{E}_{M_1} \cdot \mathbf{E}_{M_2}$ est

obtenu en décalant et mélangeant deux matrices N_1 et N_2 telles que $M_1 \leq_M N_1$ et $M_2 \leq_M N_2$. De plus, par définition de la base élémentaire \mathbf{E}_{M_1/M_2} est sans multiplicité sur la base fondamentale. Ainsi, il suffit de prouver que les ensembles

$$\{N \in N_1 \sqcup N_2; M_1 \leq_M N_1 \text{ et } M_2 \leq_M N_2\} \quad (\text{III.43})$$

et

$$\{N \in \mathcal{PM}_k; M_1/M_2 \leq_M N\} \quad (\text{III.44})$$

sont égaux. Ce qui est exactement le point 1 du lemme 3.1.

La preuve pour la base homogènes est analogue. \square

Étant donnée une k -matrice tassée M de taille strictement positive, nous dirons que M est *connexe* (resp. *anti-connexe*) si, pour toutes k -matrices tassées M_1 et M_2 , $M = M_1/M_2$ (resp. $M = M_1 \setminus M_2$) implique $M_1 = M$ ou $M_2 = M$.

Théorème 3.4. *L'algèbre de Hopf \mathbf{PM}_k est librement engendrée en tant qu'algèbre par les éléments \mathbf{E}_M (resp. \mathbf{H}_M) où les M sont des k -matrices tassées connexes (resp. anti-connexes).*

Démonstration. Puisque toute k -matrice tassée M peut être écrite comme

$$M = M_1 / \dots / M_r, \quad (\text{III.45})$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, les matrices M_i sont des k -matrices tassées connexes, nous avons, par la proposition 3.3 :

$$\mathbf{E}_M = \mathbf{E}_{M_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_{M_r}. \quad (\text{III.46})$$

Ceci montre que \mathbf{E}_M , où M est une k -matrice tassée connexe, engendre \mathbf{PM}_k en tant qu'algèbre. De plus, l'unicité de la factorisation (III.45) montre que cette famille est libre.

La preuve pour la base homogène est analogue. \square

Le théorème 3.4 implique aussi que \mathbf{PMN}_k et \mathbf{PML}_k sont librement engendrés par la base \mathbf{E}_M (resp. \mathbf{H}_M) où M sont des k -matrices tassées connexes (resp. anti-connexes). Par conséquent, les séries $\mathcal{G}_{k,n}(t)$ et $\mathcal{G}_{k,\ell}(t)$ des générateurs algébriques de \mathbf{PMN}_k et \mathbf{PML}_k satisfont respectivement

$$\mathcal{G}_{k,n}(t) = 1 - \frac{1}{\mathcal{H}_{k,n}(t)} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{k,\ell}(t) = 1 - \frac{1}{\mathcal{H}_{k,\ell}(t)}. \quad (\text{III.47})$$

Les premières dimensions des générateurs algébriques de \mathbf{PMN}_1 et \mathbf{PMN}_2 sont respectivement

$$0, 1, 6, 252, 40944, 24912120, 57316485000 \quad (\text{III.48})$$

et

$$0, 2, 52, 15848, 39089872, 813573857696, 147659027604370240. \quad (\text{III.49})$$

Les premières dimensions des générateurs algébriques de \mathbf{PML}_1 et \mathbf{PML}_2 sont respectivement

$$0, 1, 1, 7, 51, 497, 5865, 81305, 1293333 \quad (\text{III.50})$$

et

$$0, 2, 4, 56, 816, 15904, 375360, 10407040, 331093248. \quad (\text{III.51})$$

3.2 Éléments primitifs

Pour toute k -matrice tassée M , nous définissons

$$\mathbf{W}^M := \mathbf{G}_{M_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{G}_{M_r} \quad (\text{III.52})$$

où les k -matrices tassées M_i sont connexes et $M = M_1 / \dots / M_r$. Alors, nous avons

$$\mathbf{W}^M = \mathbf{G}_M + \sum_{M' \in R} \mathbf{G}_{M'} \quad (\text{III.53})$$

où toutes les matrices M' de R satisfont $M^T \leq_M M'^T$ puisque le produit dans \mathbf{PM}_k^* consiste à décaler et mélanger les lignes des matrices. Donc, par triangularité, la famille \mathbf{W}^M forme une base de \mathbf{PM}_k^* . De plus, pour toute k -matrice tassée M_1 et M_2 , le produit de \mathbf{PM}_k^* s'exprime comme

$$\mathbf{W}^{M_1} \cdot \mathbf{W}^{M_2} = \mathbf{W}^{M_1/M_2}. \quad (\text{III.54})$$

Notons \mathbf{V}_M , où M est une k -matrice tassée, la base duale de \mathbf{W}^M .

Proposition 3.5. *Les éléments \mathbf{V}_M , où les M sont des k -matrices tassées connexes, forment une base de l'espace vectoriel des éléments primitifs de \mathbf{PM}_k .*

Démonstration. Puisque \mathbf{W}^M est indécomposable, par dualité, \mathbf{V}_M est primitif. De plus, soit X un élément primitif de \mathbf{PM}_k . Alors X s'écrit comme

$$X = \sum_{M \in \mathcal{PM}_k} c_M \mathbf{V}_M. \quad (\text{III.55})$$

Soit M une k -matrice tassée non connexe et $M = M_1 / M_2$ une factorisation non triviale. Alors, par dualité, le coefficient de $\mathbf{V}_{M_1} \otimes \mathbf{V}_{M_2}$ dans $\Delta(X)$ est c_M . Puisque X est primitif, $c_M = 0$, montrant que X est une somme de \mathbf{V}_M où M est une k -matrice tassée connexe. \square

Par la proposition 3.5, les \mathbf{V}_M , où M est une k -matrice tassée connexe, engendrent l'algèbre de Lie des éléments primitifs de \mathbf{PM}_k . Les premières dimensions de l'algèbre de Lie des éléments primitifs de \mathbf{PMN}_1 , \mathbf{PMN}_2 , \mathbf{PML}_1 et \mathbf{PML}_2 sont données respectivement par (III.48), (III.49), (III.50) et (III.51).

3.3 Structure de bigèbre bidendriforme

Structure d'algèbre dendriforme

Une algèbre (\mathcal{A}, \cdot) admet une *structure d'algèbre dendriforme* [34, 16] si son produit peut être scindé en deux opérations

$$\cdot = \prec + \succ, \quad (\text{III.56})$$

où $\prec, \succ : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ sont des applications linéaires non dégénérées telles que, en notant \mathcal{A}^+ l'idéal augmenté de \mathcal{A} , pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}^+$, les relations suivantes soient satisfaites :

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \cdot z), \quad (\text{III.57})$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z), \quad (\text{III.58})$$

$$(x \cdot y) \succ z = x \succ (y \succ z). \quad (\text{III.59})$$

Pour toute matrice M de taille strictement positive, nous notons $\text{last}_c(M)$ sa dernière colonne. Nous munissons \mathbf{PM}_k^+ des deux opérations \prec et \succ définies, pour toutes k -matrices tassées M_1 et M_2 de tailles respectives n_1 et n_2 strictement positives, par

$$\mathbf{F}_{M_1} \prec \mathbf{F}_{M_2} := \sum_{\substack{M \in M_1 \boxplus M_2 \\ \text{last}_c(M) = \text{last}_c(M_1 \circ n_2)}} \mathbf{F}_M \quad (\text{III.60})$$

et

$$\mathbf{F}_{M_1} \succ \mathbf{F}_{M_2} := \sum_{\substack{M \in M_1 \boxplus M_2 \\ \text{last}_c(M) = \text{last}_c(n_1 \circ M_2)}} \mathbf{F}_M. \quad (\text{III.61})$$

Autrement dit, les matrices apparaissant dans l'opération \prec (resp. opération \succ) dans la base fondamentale impliquant M_1 et M_2 sont les matrices M obtenues en décalant et mélangeant les colonnes de M_1 et M_2 dans lesquelles la dernière colonne provient de M_1 (resp. M_2). Ces deux opérations sont étendues linéairement à \mathbf{PM}_k^+ . Par exemple,

$$\mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \prec \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad (\text{III.62})$$

et

$$\mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \succ \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} + \mathbf{F}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}. \quad (\text{III.63})$$

Puisque la dernière colonne de n'importe quelle matrice apparaissant dans le mélange décalé de deux matrices provient d'une des deux opérands, pour toutes k -matrices tassées M_1 et M_2 de tailles strictement positives, nous avons :

$$\mathbf{F}_{M_1} \cdot \mathbf{F}_{M_2} = \mathbf{F}_{M_1} \prec \mathbf{F}_{M_2} + \mathbf{F}_{M_1} \succ \mathbf{F}_{M_2}. \quad (\text{III.64})$$

Proposition 3.6. *L'algèbre \mathbf{PM}_k admet une structure dendriforme pour les opérations \prec et \succ .*

Démonstration. Nous allons prouver que (III.57), (III.58) et (III.59) sont vérifiées. Considérons trois k -matrices tassées M_1 , M_2 et M_3 .

Soit M une matrice tassée telle que l'élément \mathbf{F}_M apparaisse dans le produit $(\mathbf{F}_{M_1} \succ \mathbf{F}_{M_2}) \prec \mathbf{F}_{M_3}$. Alors, M est obtenue en décalant et mélangeant les colonnes de M_1 , M_2 et M_3 de sorte que la dernière colonne de M provienne de M_2 . La même propriété décrit toutes les matrices M' apparaissant dans $\mathbf{F}_{M_1} \succ (\mathbf{F}_{M_2} \prec \mathbf{F}_{M_3})$. Ce qui démontre (III.58).

Soit M une matrice tassée telle que l'élément \mathbf{F}_M apparaisse dans le produit $(\mathbf{F}_{M_1} \prec \mathbf{F}_{M_2}) \prec \mathbf{F}_{M_3}$. Alors, M est obtenue en décalant et mélangeant les colonnes de M_1 , M_2 et M_3 de sorte que la dernière colonne de M provienne de M_1 . La même propriété décrit toutes les matrices M' apparaissant dans $\mathbf{F}_{M_1} \prec (\mathbf{F}_{M_2} \cdot \mathbf{F}_{M_3})$. Ce qui démontre (III.57) par (III.64).

Par un argument similaire, nous pouvons prouver que (III.59) est satisfaite. \square

Structure de cogèbre dendriforme

En dualisant la notion de structure d'algèbre dendriforme, nous obtenons la notion de *structure de cogèbre dendriforme* [16]. Une cogèbre (\mathcal{C}, Δ) admet une structure de cogèbre dendriforme si son coproduit peut être scindé en

$$\Delta = 1 \otimes Id + \Delta_{\prec} + \Delta_{\succ} + Id \otimes 1, \quad (\text{III.65})$$

où $\Delta_{\prec}, \Delta_{\succ} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ sont des applications linéaires non dégénérées telles que les relations suivantes soient satisfaites :

$$(\Delta_{\prec} \otimes Id) \circ \Delta_{\prec} = (Id \otimes \bar{\Delta}) \circ \Delta_{\prec}, \quad (\text{III.66})$$

$$(\Delta_{\succ} \otimes Id) \circ \Delta_{\prec} = (Id \otimes \Delta_{\prec}) \circ \Delta_{\succ}, \quad (\text{III.67})$$

$$(\bar{\Delta} \otimes Id) \circ \Delta_{\succ} = (Id \otimes \Delta_{\succ}) \circ \Delta_{\succ}, \quad (\text{III.68})$$

où $\bar{\Delta} := \Delta_{\prec} + \Delta_{\succ}$.

Pour toute matrice M de taille strictement positive, nous notons $\text{last}_r(M)$ sa dernière ligne. Nous munissons \mathbf{PM}_k des deux opérateurs Δ_{\prec} et Δ_{\succ} définis, pour toute k -matrice tassée M de taille strictement positive, par

$$\Delta_{\prec}(\mathbf{F}_M) := \sum_{\substack{M=L \bullet R \\ \text{last}_r(L \bullet R) = \text{last}_r(M)}} \mathbf{F}_{\text{cp}(L)} \otimes \mathbf{F}_{\text{cp}(R)} \quad (\text{III.69})$$

et

$$\Delta_{\succ}(\mathbf{F}_M) := \sum_{\substack{M=L \bullet R \\ \text{last}_r(\ell \bullet R) = \text{last}_r(M)}} \mathbf{F}_{\text{cp}(L)} \otimes \mathbf{F}_{\text{cp}(R)}, \quad (\text{III.70})$$

où r (resp. ℓ) est le nombre de colonnes de R (resp. L). Autrement dit, les couples de matrices apparaissant dans l'opérateur Δ_{\prec} (resp. Δ_{\succ}) dans la base fondamentale sont les couples (L, R) de k -matrices tassées tels que la dernière ligne de L (resp. R) provient de la dernière ligne de M . Ces deux opérateurs sont étendus linéairement à \mathbf{PM}_k^+ . Par exemple,

$$\Delta_{\prec} \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{F}_{[1]} \quad (\text{III.71})$$

et

$$\Delta_{\succ} \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{[1]} \otimes \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.72})$$

Puisque par le lemme 1.1, si (L, R) est une décomposition en colonne non triviale d'une k -matrice tassée M , la dernière ligne de L ou la dernière ligne de R est identiquement nulle. Si c'est la dernière ligne de L qui est identiquement nulle, alors $\mathbf{F}_{\text{cp}(L)} \otimes \mathbf{F}_{\text{cp}(R)}$ apparaît dans $\Delta_{\succ}(\mathbf{F}_M)$. Sinon, $\mathbf{F}_{\text{cp}(L)} \otimes \mathbf{F}_{\text{cp}(R)}$ apparaît dans $\Delta_{\prec}(\mathbf{F}_M)$. Pour toute k -matrice tassée M de taille strictement positive, nous avons donc :

$$\Delta(\mathbf{F}_M) = 1 \otimes \mathbf{F}_M + \Delta_{\prec}(\mathbf{F}_M) + \Delta_{\succ}(\mathbf{F}_M) + \mathbf{F}_M \otimes 1. \quad (\text{III.73})$$

Proposition 3.7. *La cogèbre \mathbf{PM}_k admet une structure de cogèbre dendriforme pour les opérations Δ_{\prec} et Δ_{\succ} .*

Démonstration. Nous allons prouver que (III.66), (III.67) et (III.68) sont vérifiées. Considérons une k -matrice tassée M .

Soit trois matrices tassées M_1, M_2 et M_3 telles que $\mathbf{F}_{M_1} \otimes \mathbf{F}_{M_2} \otimes \mathbf{F}_{M_3}$ apparaissent dans $(\Delta_{\succ} \otimes Id) \circ \Delta_{\prec}(\mathbf{F}_M)$. Alors, M_1, M_2 et M_3 sont obtenues par une décomposition en colonne de M et la dernière ligne de M_2 provient de la dernière ligne de M . La même propriété décrit tous les tenseurs $\mathbf{F}_{M'_1} \otimes \mathbf{F}_{M'_2} \otimes \mathbf{F}_{M'_3}$ apparaissant dans $(Id \otimes \Delta_{\prec}) \circ \Delta_{\succ}(\mathbf{F}_M)$, ce qui démontre (III.67).

Soit trois matrices tassées M_1, M_2 et M_3 telles que $\mathbf{F}_{M_1} \otimes \mathbf{F}_{M_2} \otimes \mathbf{F}_{M_3}$ apparaissent dans $(\Delta_{\prec} \otimes Id) \circ \Delta_{\prec}(\mathbf{F}_M)$. Alors, M_1, M_2 et M_3 sont obtenues par une décomposition en colonne de M et la dernière ligne de M_1 provient de la dernière ligne de M . La même propriété décrit tous les tenseurs $\mathbf{F}_{M'_1} \otimes \mathbf{F}_{M'_2} \otimes \mathbf{F}_{M'_3}$ apparaissant dans $(Id \otimes \bar{\Delta}) \circ \Delta_{\prec}(\mathbf{F}_M)$, ce qui démontre (III.66) par (III.73).

Par un argument similaire, nous pouvons prouver que (III.68) est satisfaite. \square

Structure de bigèbre bidendriforme

Une bigèbre $(\mathcal{B}, \cdot, \Delta)$ admet une *structure de bigèbre bidendriforme* [16] si \mathcal{B} admet à la fois une structure d'algèbre dendriforme $(\mathcal{B}, \prec, \succ)$ et de cogèbre dendriforme $(\mathcal{B}, \Delta_{\prec}, \Delta_{\succ})$ avec les relations entre (\prec, \succ) et $(\Delta_{\prec}, \Delta_{\succ})$ suivantes :

$$\Delta_{\succ}(a \prec b) = (\bar{\Delta}(a) + 1 \otimes a) \tilde{\succ} \bar{\Delta}_{\prec}(b) - 1 \otimes a \prec b, \quad (\text{III.74})$$

$$\Delta_{\succ}(a \succ b) = \Delta(a) \tilde{\succ} \bar{\Delta}_{\prec}(b) - 1 \otimes a \succ b, \quad (\text{III.75})$$

$$\Delta_{\prec}(a \prec b) = (\bar{\Delta}(a) + 1 \otimes a) \tilde{\prec} \bar{\Delta}_{\succ}(b), \quad (\text{III.76})$$

$$\Delta_{\prec}(a \succ b) = \Delta(a) \tilde{\prec} \bar{\Delta}_{\succ}(b), \quad (\text{III.77})$$

où nous avons posé :

$$\bar{\Delta}_{\prec} := \Delta_{\prec}(b) + b \otimes 1 \quad \text{et} \quad \bar{\Delta}_{\succ} := \Delta_{\succ}(b) + 1 \otimes b \quad (\text{III.78})$$

et

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes y_1) \tilde{\succ} (x_2 \otimes y_2) &:= \begin{cases} x_1 \cdot x_2 \otimes y_1 \succ y_2 & \text{si } y_1 \in \mathcal{B}^+ \text{ et } y_2 \in \mathcal{B}^+ \\ x_1 \cdot x_2 \otimes y_1 \cdot y_2 & \text{sinon} \end{cases} \\ (x_1 \otimes y_1) \tilde{\prec} (x_2 \otimes y_2) &:= \begin{cases} x_1 \cdot x_2 \otimes y_1 \prec y_2 & \text{si } y_1 \in \mathcal{B}^+ \text{ et } y_2 \in \mathcal{B}^+ \\ x_1 \cdot x_2 \otimes y_1 \cdot y_2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

Théorème 3.8. *L'algèbre de Hopf \mathbf{PM}_k admet une structure d'algèbre bi-dendriforme pour les produits \prec et \succ et les coproduits Δ_{\prec} et Δ_{\succ} .*

Démonstration. D'après les propositions 3.6 et 3.7, \mathbf{PM}_k admet une structure d'algèbre dendriforme et de cogèbre dendriforme.

Il reste à montrer les relations (III.74), (III.75), (III.76) et (III.77). Pour ce faire, nous allons montrer les identités suivantes :

$$\Delta(\mathbf{F}_{M_1} \prec \mathbf{F}_{M_2}) = (1 \otimes \mathbf{F}_{M_1} + \bar{\Delta}(\mathbf{F}_{M_1})) \tilde{\prec} \Delta(\mathbf{F}_{M_2}) + \mathbf{F}_{M_1} \prec \mathbf{F}_{M_2} \otimes 1 \quad (\text{III.80})$$

$$\Delta(\mathbf{F}_{M_1} \succ \mathbf{F}_{M_2}) = \Delta(\mathbf{F}_{M_1}) \tilde{\succ} (1 \otimes \mathbf{F}_{M_2} + \bar{\Delta}(\mathbf{F}_{M_2})) + \mathbf{F}_{M_1} \succ \mathbf{F}_{M_2} \otimes 1. \quad (\text{III.81})$$

Montrons (III.80). Un élément $\mathbf{F}_N \otimes 1$ apparaît dans le membre de gauche de (III.80) si et seulement si \mathbf{F}_N apparaît dans $\mathbf{F}_{M_1} \prec \mathbf{F}_{M_2}$. Un élément $\mathbf{F}_{N_1} \otimes \mathbf{F}_{N_2}$, où la matrice N_2 est de taille strictement positive, apparaît dans le membre de gauche de (III.80) si et seulement si la dernière colonne de N_2 provient de M_1 . La même propriété décrit tous les tenseurs $\mathbf{F}_{N_1} \otimes \mathbf{F}_{N_2}$ apparaissant dans $(1 \otimes \mathbf{F}_{M_1} + \bar{\Delta}(\mathbf{F}_{M_1})) \tilde{\prec} \Delta(\mathbf{F}_{M_2})$. Ce qui démontre (III.80).

Par un argument similaire, ou alors, par un calcul direct, en utilisant (III.80), le fait que le produit se scinde (III.64) en les deux opérations \succ et \prec et le fait que le coproduit est un morphisme d'algèbres, nous pouvons démontrer (III.81).

Montrons (III.74). Les éléments $\mathbf{F}_{N_1} \otimes \mathbf{F}_{N_2}$ apparaissant dans le membre de droite de (III.74) sont les éléments de (III.80) tels que la dernière ligne

de N_2 provienne, en un certains sens, de la dernière ligne de M_2 . Ces éléments sont exactement ceux apparaissant dans le membre droite de (III.74).

Les autres relations (III.75), (III.76) et (III.77) se déduisent par les mêmes arguments. Ce qui démontre le théorème. \square

Le théorème 3.8 implique aussi que \mathbf{PMN}_k et \mathbf{PML}_k admettent une structure de bigèbre bidendriforme.

Un élément x d'une algèbre de Hopf combinatoire admettant une structure de bigèbre bidendriforme est *totalemment primitif* si

$$\Delta_{\prec}(x) = 0 = \Delta_{\succ}(x). \quad (\text{III.82})$$

Selon [16], la série génératrice $\mathcal{T}_{k,n}(t)$ et $\mathcal{T}_{k,\ell}(t)$ des éléments totalement primitifs de \mathbf{PMN}_k et \mathbf{PML}_k vérifient respectivement

$$\mathcal{T}_{k,n}(t) = \frac{\mathcal{H}_{k,n}(t) - 1}{\mathcal{H}_{k,n}(t)^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_{k,\ell}(t) = \frac{\mathcal{H}_{k,\ell}(t) - 1}{\mathcal{H}_{k,\ell}(t)^2}. \quad (\text{III.83})$$

Les premières dimensions des éléments totalement primitifs de \mathbf{PMN}_1 et \mathbf{PMN}_2 sont respectivement

$$0, 1, 5, 240, 40404, 24827208, 57266105928 \quad (\text{III.84})$$

et

$$0, 2, 48, 15640, 39023776, 813415850016, 147655768992433664. \quad (\text{III.85})$$

Les premières dimensions des éléments totalement primitifs de \mathbf{PML}_1 et \mathbf{PML}_2 sont respectivement

$$0, 1, 0, 5, 36, 381, 4720, 67867, 1109434 \quad (\text{III.86})$$

et

$$0, 2, 0, 40, 576, 12192, 302080, 8686976, 284015104. \quad (\text{III.87})$$

4 Liens avec d'autres algèbres connues

Dans cette section, nous listons certaines algèbres de Hopf en décrivant leur liens avec \mathbf{PM}_k .

4.1 Algèbre de Hopf des permutations colorées

Rappelons qu'une k -permutation colorée est un couple (σ, c) où σ est une permutation de taille n et c est un mot de longueur n sur l'alphabet $\{1, \dots, k\}$.

Dans [43], les auteurs munissent les espaces vectoriels $\mathbf{FQSym}^{(k)}$ engendrés par l'ensemble des k -permutations colorées d'une structure d'algèbre de Hopf. La famille $\{\mathbf{F}_{(\sigma, c)}; \sigma \in \mathfrak{S}, c \in \{1, \dots, k\}^*, |\sigma| = |c|\}$ forme la base fondamentale de $\mathbf{FQSym}^{(k)}$. Ces algèbres de Hopf généralisent celle de \mathbf{FQSym} .

Proposition 4.1. *L'application linéaire $\alpha_k : \mathbf{FQSym}^{(k)} \rightarrow \mathbf{PMN}_k$ définie, pour toute k -permutation colorée (σ, c) , par*

$$\alpha_k(\mathbf{F}_{(\sigma, c)}) := \mathbf{F}_{M^{(\sigma, c)}} \quad (\text{III.88})$$

où $M^{(\sigma, c)}$ est la k -matrice tassée satisfaisant

$$M_{ij}^{(\sigma, c)} := \begin{cases} c_j & \text{si } \sigma_j = i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{III.89})$$

est un morphisme injectif d'algèbre de Hopf.

En particulier, la proposition 4.1 montre que \mathbf{PMN}_1 contient \mathbf{FQSym} . Remarquons que l'application α_k est encore bien définie sur \mathbf{PML}_k au lieu de \mathbf{PMN}_k .

4.2 Algèbre de Hopf des permutations de blocs uniformes

L'algèbre de Hopf \mathbf{UBP} et son dual \mathbf{UBP}^* font l'objet du chapitre II. Tout comme les permutations, nous pouvons interpréter matriciellement les permutations de blocs uniformes ainsi que la structure algébrique associée.

Proposition 4.2. *L'application linéaire $\beta : \mathbf{UBP}^* \rightarrow \mathbf{PMN}_1$ définie, pour toute permutation de blocs uniforme $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, par*

$$\beta(\mathbf{G}_f) := \mathbf{F}_{M^f} \quad (\text{III.90})$$

où M^f est la 1-matrice tassée satisfaisant

$$M_{ij}^f := \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } A \in \mathcal{A} \text{ tel que } j \in A \text{ et } i \in f(A), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.91})$$

est un morphisme injectif d'algèbre de Hopf.

Par exemple, avec la permutation de blocs uniforme

$$f := \left(\begin{array}{c|c|c} 145 & 2 & 36 \\ \hline 256 & 1 & 34 \end{array} \right), \quad (\text{III.92})$$

nous avons

$$\beta(\mathbf{G}_f) = \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.93})$$

Corollaire 4.3. *L'algèbre de Hopf \mathbf{UBP}^* est une algèbre de Hopf libre, co-libre et auto-duale, admettant une structure de bigèbre bidendriforme.*

Démonstration. Par la proposition 4.2 et la définition du produit sur la base fondamentale de \mathbf{UBP}^* , nous pouvons voir \mathbf{UBP}^* comme une sous-algèbre de \mathbf{PMN}_1 restreinte aux éléments \mathbf{F}_M où les matrices M sont des 1-matrices tassées telles qu'il existe une permutation de blocs uniforme f satisfaisant $M^f = M$. Ceci montre que \mathbf{UBP}^* hérite de la structure de bigèbre bidendriforme de \mathbf{PMN}_1 (voir le théorème 3.8) Puisque \mathbf{UBP}^* admet une structure d'algèbre bidendriforme, par [16], elle est libre, co-libre et auto-duale. \square

En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la section 3.1, nous pouvons construire des bases multiplicatives de \mathbf{UBP}^* en posant, pour toute permutation de blocs uniforme f ,

$$\mathbf{E}_{M^f}^* := \sum_{M^f \leq_{\mathfrak{M}} M^{f'}} \mathbf{F}_{M^{f'}} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{M^f}^* := \sum_{M^{f'} \leq_{\mathfrak{M}} M^f} \mathbf{F}_{M^{f'}}. \quad (\text{III.94})$$

Ceci donne une autre façon de prouver la liberté de \mathbf{UBP}^* en utilisant les mêmes arguments que ceux du théorème 3.4. Par conséquent, \mathbf{UBP}^* est librement engendré par les éléments \mathbf{E}_{M^f} (resp. \mathbf{H}_{M^f}) où les permutations de blocs uniformes f sont telles que les matrices M^f sont connexes (resp. anti-connexes). Les premières dimensions des générateurs algébriques de \mathbf{UBP}^* sont

$$0, 1, 2, 11, 98, 1202, 19052, 375692, 8981392, 255253291, 8488918198. \quad (\text{III.95})$$

Les premières dimensions des éléments totalement primitifs sont

$$0, 1, 1, 7, 72, 962, 16135, 330624, 8117752, 235133003, 7929041828. \quad (\text{III.96})$$

De plus, puisque pour toute permutation de blocs uniforme f , il existe une permutation de blocs uniforme f^{-1} telle que la transposée de M^f soit $M^{f^{-1}}$, par la proposition 2.2, l'application linéaire $\phi: \mathbf{UBP}^* \rightarrow \mathbf{UBP}$ définie pour toute permutation de blocs uniforme f par

$$\phi(\mathbf{G}_{M^f}) := \mathbf{F}_{M^f T} \quad (\text{III.97})$$

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

4.3 Algèbre des fonctions quasi-symétriques matricielles

Munissons l'ensemble des matrices qui indexent \mathbf{MQSym} d'une relation \rightarrow définie de la manière suivante. Si M_1 et M_2 sont deux telles matrices telles que M_1 a n lignes et m colonnes, nous avons $M_1 \rightarrow M_2$ s'il existe un indice $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que, notant s le nombre de 0 à la fin de la i^{e} ligne de M_1 et en notant p le nombre de 0 au début de la $(i+1)^{\text{e}}$ ligne de M_1 , nous avons $s+p \geq m$ et M_2 est obtenue à partir de M_1 en fusionnant sa i^{e} et $(i+1)^{\text{e}}$ ligne. La figure III.3 illustre cette relation binaire.

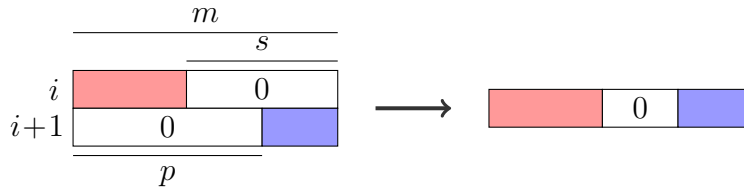


FIGURE III.3 – Condition de fusion de la i^{e} et $(i+1)^{\text{e}}$ ligne d'une matrice tassée (pas nécessairement carrée) par rapport à la relation \rightarrow . Les régions colorées contiennent n'importe quels coefficients dans A_k et les régions blanches ne contiennent que des 0.

Nous munissons l'ensemble des matrices indexant \mathbf{MQSym} de la relation d'ordre partiel \leq_{MQ} définie comme la fermeture réflexive et transitive de \rightarrow . La figure III.4 illustre un intervalle de cet ordre partiel.

Lemme 4.4. *Soit A et B deux k -matrices tassées. Alors,*

$$\{C' : C \leq_{\text{MQ}} C', C \in A * B\} = \{C' \in A' \underline{\underline{B}} B' : A \leq_{\text{MQ}} A', B \leq_{\text{MQ}} B'\}, \quad (\text{III.98})$$

où nous rappelons que $*$ est le produit de mélange en ligne des k -matrices tassées et $\underline{\underline{}}$ est le produit de mélange augmenté des matrices.

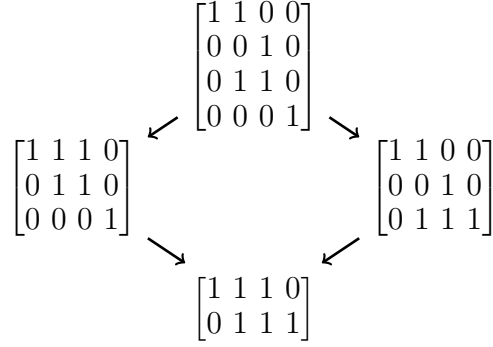


FIGURE III.4 – diagramme de Hasse d'un intervalle pour \leq_{MQ} sur les matrices tassées (non nécessairement carrées)

Démonstration. Soit C' une matrice telle que $C \leq_{\text{MQ}} C'$ et $C \in A * B$. Par définition de l'ordre \leq_{MQ} et du produit $*$, C' peut être obtenu à partir de C en fusionnant des lignes provenant de A , des lignes provenant de B , ou des lignes provenant de A et B . Notons A' (resp. B') la matrice obtenue à partir de A (resp. B) en fusionnant certaines de ses lignes. Alors, nous avons $A \leq_{\text{MQ}} A'$ et $B \leq_{\text{MQ}} B'$ et, par définition du produit de mélange augmenté, $C' \in A' \sqcup B'$.

Réciproquement, soit C' une matrice telle que $C' \in A' \sqcup B'$ où A' et B' sont des matrices satisfaisant $A \leq_{\text{MQ}} A'$ et $B \leq_{\text{MQ}} B'$. Alors, par définition du produit de mélange augmenté des matrices, C' peut être obtenue à partir d'une matrice C dans $A * B$ en fusionnant des lignes provenant de A , des lignes provenant de B ou des lignes provenant de A et B . Par conséquent, $C \leq_{\text{MQ}} C'$. \square

Proposition 4.5. *L'application linéaire $\gamma: \text{PML}_1^* \rightarrow \text{MQSym}$ définie, pour toute 1-matrice tassée M , par*

$$\gamma(\mathbf{G}_M) := \sum_{M \leq_{\text{MQ}} M'} \mathbf{MS}_{M'}, \quad (\text{III.99})$$

est un morphisme injectif d'algèbres de Hopf.

Démonstration. Soit M_1 et M_2 deux 1-matrices tassées. Par définition de γ , $\gamma(\mathbf{G}_{M_1} \cdot \mathbf{G}_{M_2})$, exprimé sur la base des quasi-multimots de MQSym , est sans multiplicité. De plus, puisque le produit de mélange augmenté est sans multiplicité, il en est de même de $\gamma(\mathbf{G}_{M_1}) \cdot \gamma(\mathbf{G}_{M_2})$. Le lemme 4.4 implique que les ensembles sous-jacents de $\gamma(\mathbf{G}_{M_1} \cdot \mathbf{G}_{M_2})$ et $\gamma(\mathbf{G}_{M_1}) \cdot \gamma(\mathbf{G}_{M_2})$ sont égaux. Par conséquent, γ est un morphisme d'algèbres.

L'injectivité de γ découle par triangularité. \square

Par exemple,

$$\gamma \mathbf{G} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.100})$$

Remarquons que γ n'est pas un morphisme d'algèbres de Hopf puisque γ ne peut être un morphisme de cogèbres. En effet, nous avons

$$\Delta \circ \gamma \mathbf{G} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \otimes \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes 1, \quad (\text{III.101})$$

tandis que

$$(\gamma \otimes \gamma) \circ \Delta \mathbf{G} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \otimes \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{MS} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes 1. \quad (\text{III.102})$$

4.4 Diagramme des plongements

Le diagramme de la figure III.5 résume les relations entre les différentes algèbres de Hopf connues à \mathbf{PM}_k , plus précisément à ces simples graduations \mathbf{PMN}_k et \mathbf{PML}_k . Les flèches pleines sont des morphismes d'algèbres de Hopf et la flèche en pointillée est un morphisme d'algèbres. L'algèbre de Hopf \mathbf{ASM} fait l'objet du paragraphe 1.

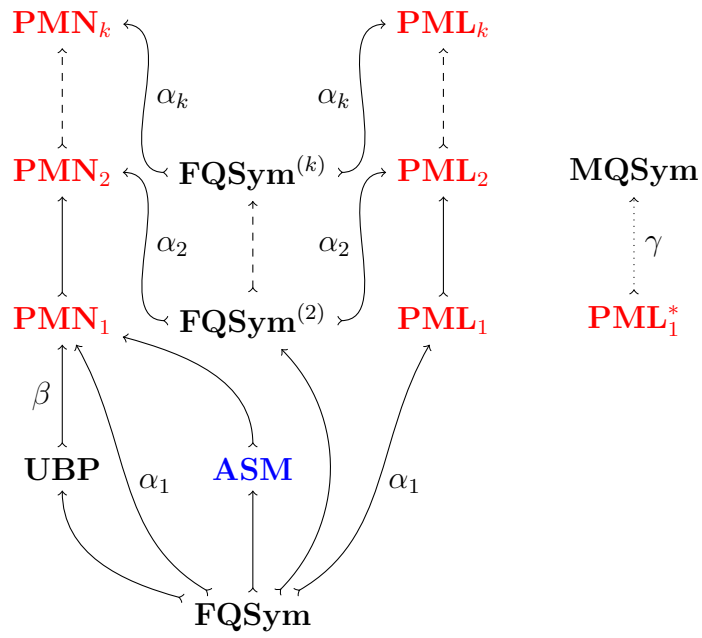


FIGURE III.5 – diagramme des différents liens avec PMN_k et PML_k

Chapitre IV

Matrices à signes alternants

La suite combinatoire 1, 2, 7, 49, 429, ... est apparue en 1982 dans l'(ex-)conjecture des matrices à signes alternants résolue en 1996 par Zeilberger dans [52], et continue encore à être omniprésente dans des domaines plus vastes, tels que la physique théorique.

Le nombre de matrices carrées de taille n dont les coefficients sont soit 0, 1 ou -1 , dont les sommes sur les lignes et sur les colonnes font toutes 1, et telles que dans chaque ligne et chaque colonne les coefficients non nuls alternent en signe est

$$\prod_{0 \leq k < n} \frac{(3n+1)!}{(n+k)!} \quad (\text{IV.1})$$

et a été conjecturée par Mills, Robbins et Rumsey dans [39]. Dans cet article, la plupart de leur conjecture concerne une généralisation naturelle des permutations, *les matrices à signes alternants*. Cette généralisation fut introduite par Robbins et Rumsey dans [45] dans leur étude sur le calcul des λ -déterminant. Ce λ -déterminant généralise le calcul du déterminant donné par Dodgson [13] en 1866 au moyen de *la formule de condensation de Dodgson*.

Dans [30], l'auteur redémontre cette formule d'énumération en utilisant un modèle qui provient de la physique statistique, le modèle des six sommets avec certaines conditions aux bords. Celle-ci se réduit au calcul du déterminant d'Izergin Korepin [24, 26]. Le calcul de déterminants est devenu une méthode systématique et a été largement développée par Krattenthaler [27, 28].

Ces objets apparaissent aussi en combinatoire algébrique, particulièrement développée par Lascoux et Schützenberger [32, 31]. Ces derniers ont introduit la complétion de l'ordre de Bruhat [33] sur l'ordre du treillis distributif du groupe symétrique. Les éléments de ce nouveau treillis sont en

bijection avec les matrices à signes alternants.

Dans ce chapitre nous définissons, dans un premier temps, une structure d'algèbre de Hopf combinatoire sur les matrices à signes alternants et en étudions les propriétés. Ensuite, nous nous intéressons à certaines statistiques issues du modèle des six sommets et en étudions le comportement vis à vis de la structure algébrique.

1 Définitions

1.1 Matrices à signes alternants et objets équivalents

Une *matrice à signes alternants* [39] de taille n est une matrice carrée M de taille n , $M := (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

- chacun de ses coefficients $m_{i,j}$ vaut 0, 1 ou -1 , et
- chaque ligne contient au moins un coefficient non nul et les coefficients non nuls alternent en signes, le premier et le dernier valant 1.

Par exemple, les sept matrices à signes alternants de taille 3 sont

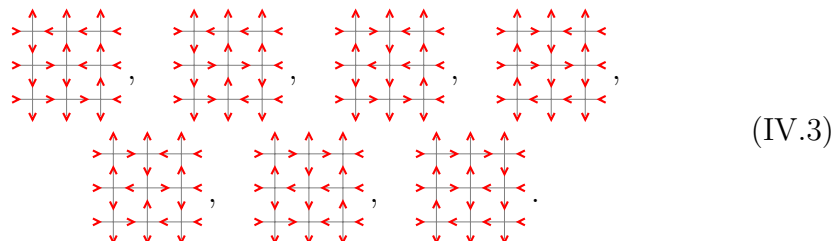
$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Remarquons que la matrice d'une permutation est une matrice à signes alternants.

Modèle à six sommets

Le *modèle à six sommets* (voir par exemple [4] pour plus d'information) de taille n est une grille carrée de taille $n \times n$ avec les conditions d'orientations suivantes sur les arêtes. Parmi les quatre arêtes incidentes à chaque sommet, deux doivent être entrantes et deux doivent être sortantes. Parmi les arêtes au bord, les côtés droit et gauche sont entrantes et les côtés haut et bas sont

sortantes. Par exemple, les sept configurations de taille 3 sont



La bijection [30] entre les configurations du modèle à six sommets de taille n et les matrices à signes alternants de même taille consiste à remplacer chaque sommet de la configuration par 0, 1, ou -1 selon le dictionnaire décrit dans la figure IV.1.

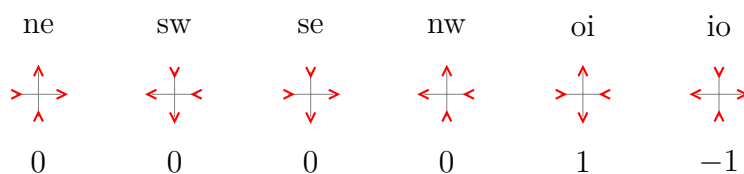


FIGURE IV.1 – correspondance entre les sommets des configurations du modèle à six sommets et les coefficients des matrices à signes alternants.

Chemins osculateurs

Nous pouvons associer un ensemble de *chemins osculateurs* (voir [8, 9, 5] pour plus de détails) à toutes les configurations du modèle à six sommets en associant à chaque sommet de la configuration des chemins selon le dictionnaire décrit dans la figure IV.2. Nous obtenons alors des chemins connectant les sommets du bord gauche à ceux du bord haut. Ces chemins ne peuvent pas se croiser mais ils peuvent partager un même sommet. Par exemple,

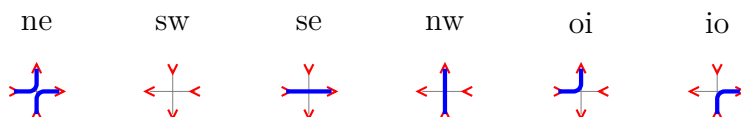
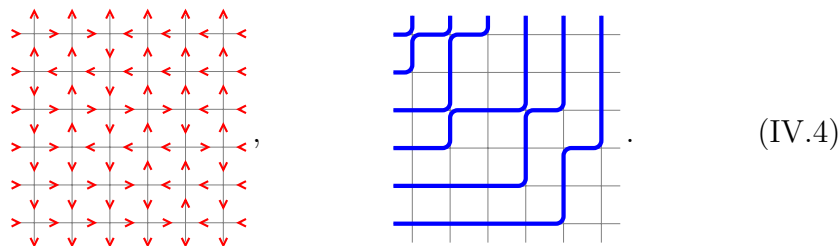


FIGURE IV.2 – correspondance entre les sommets des configurations du modèle à six sommets et les chemins osculateurs.



1.2 Statistiques

Nous allons maintenant introduire les statistiques que nous allons étudier. Ces statistiques apparaissent naturellement dans le modèle à six sommets et décrivent l'orientation des arêtes dans une configuration (voir la figure IV.1). Notons $ne(\delta)$ (resp. $sw(\delta)$, $se(\delta)$, $nw(\delta)$, $oi(\delta)$, $io(\delta)$) le nombre de sommets ne (resp. sw, se, nw, oi, io) dans la configuration du modèle à six sommets en bijection avec la matrice à signes alternants δ . Posons $\mathfrak{Z} := \{se, nw, sw, ne\}$ l'ensemble des statistiques comptant les quatre configurations de 0 et $\mathfrak{N} := \{io, oi\}$ celui comptant les configurations non nulles.

Ces statistiques partagent certaines symétries.

Proposition 1.1. *Pour toute matrice à signe alternants δ de taille n , nous avons*

$$se(\delta) = nw(\delta), \quad ne(\delta) = sw(\delta), \quad oi(\delta) = io(\delta) + n. \quad (\text{IV.5})$$

Démonstration. Considérons une matrice à signes alternants δ de taille n .

Il est facile de voir que, sur l'ensemble des chemins osculateurs associé à δ , tout chemin osculateur relie le i^{e} sommet du bord gauche au i^{e} sommet du bord haut de la grille pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi, le nombre de pas verticaux et le nombre de pas horizontaux dans chaque chemin sont les mêmes. Ce qui démontre la première identité.

Considérons maintenant la matrice à signes alternants δ' où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la i^{e} colonne de δ' est la $n - i + 1^{\text{e}}$ colonne de δ . Alors, dans la configuration du modèle à six sommets en bijection avec δ' , toutes les configurations ne (resp. sw) proviennent de configuration nw (resp. se) de la configuration du modèle à six sommets associée à δ . Ce qui démontre la seconde identité.

Sur chaque ligne de δ , le premier et dernier coefficient non nul est 1. De plus, les coefficients non nuls alternent en signe. Ce qui démontre la troisième identité. \square

2 Algèbres de Hopf combinatoires

2.1 ASM

Soit δ une matrice à signes alternants. Notons M^δ la matrice satisfaisant

$$M_{ij}^\delta := \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_{ij} \in \{1, -1\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Par exemple, avec la matrice à signes alternants δ , nous obtenons

$$\delta := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.7})$$

Il est clair que M^δ est une 1-matrice tassée de même taille que δ . Par ailleurs, puisque les coefficients 1 et -1 alternent dans une matrice à signes alternants, étant donné une 1-matrice tassée M , il y a au plus une matrice à signes alternants δ telle que $M^\delta = M$.

Soit $\mathbb{K}\text{ASM}_n$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les matrices à signes alternants de taille n et

$$\mathbf{ASM} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\text{ASM}_n. \quad (\text{IV.8})$$

D'après ce qui a été dit précédemment, \mathbf{ASM} est un sous-espace vectoriel de \mathbf{PM}_1 . Nous allons noter $\{\mathbf{F}_{M^\delta}; \delta \in \mathbf{ASM}\}$ la base de \mathbf{ASM} .

Théorème 2.1. *L'espace vectoriel \mathbf{ASM} , muni du produit et du coproduit de \mathbf{PM}_1 , forme une algèbre de Hopf bigraduée, libre, co-libre et auto-duale, admettant une structure de bigèbre bidendriforme.*

Démonstration. Il est clair que \mathbf{ASM} est stable pour le produit de \mathbf{PM}_1 , \mathbf{ASM} est donc une sous-algèbre de \mathbf{PM}_1 .

Pour toute matrice à signes alternants δ , si (L, R) est une décomposition en colonne de M^δ , avec L (resp. R) ayant n_L (resp. n_R) colonnes, il est clair qu'en ne considérant que les n_L premières (resp. n_R dernières) colonnes de δ , chacune de ces matrices est à coefficients dans $\{0, 1, -1\}$, chaque colonne contient au moins un coefficient non nul et les coefficients non nuls alternent en signes, le premier et le dernier valant 1, et il en est de même de chaque ligne non identiquement nulle par le lemme 1.1. Par conséquent, toutes matrices

apparaissant dans le coproduit d'une matrice à signes alternants sont des matrices à signes alternants.

En fait, ceci montre que **ASM** hérite de la structure de bigèbre bidendriforme de \mathbf{PM}_1 (voir le théorème 3.8).

Enfin, puisque **ASM** admet une structure de bigèbre bidendriforme, par [16], **ASM** est libre, co-libre et auto-duale. \square

Par exemple,

$$\mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{F}_{[1]} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

et

$$\Delta \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \otimes \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{F}_{[1]} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes 1. \quad (\text{IV.10})$$

À partir de maintenant, nous verrons **ASM** comme une algèbre de Hopf simplement graduée, où le degré d'un élément de la base est la taille de la matrice à signes alternants indexant la base. La suite des dimensions de **ASM** forme la suite **A005130** de [48] et les premiers termes sont

$$1, 1, 2, 7, 42, 429, 7436, 218348, 10850216, 911835460, 129534272700. \quad (\text{IV.11})$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la section 3.1, nous pouvons construire des bases multiplicatives de **ASM** en posant, pour toute matrice à signes alternants δ ,

$$\mathbf{E}_{M^\delta} := \sum_{M^{\delta'} \leq_M M^\delta} \mathbf{F}_{M^{\delta'}} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{M^\delta} := \sum_{M^{\delta'} \leq_M M^\delta} \mathbf{F}_{M^{\delta'}}. \quad (\text{IV.12})$$

La figure IV.3 illustre l'exemple d'un intervalle de la relation d'ordre \leq_M sur les matrices à signes alternants. Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

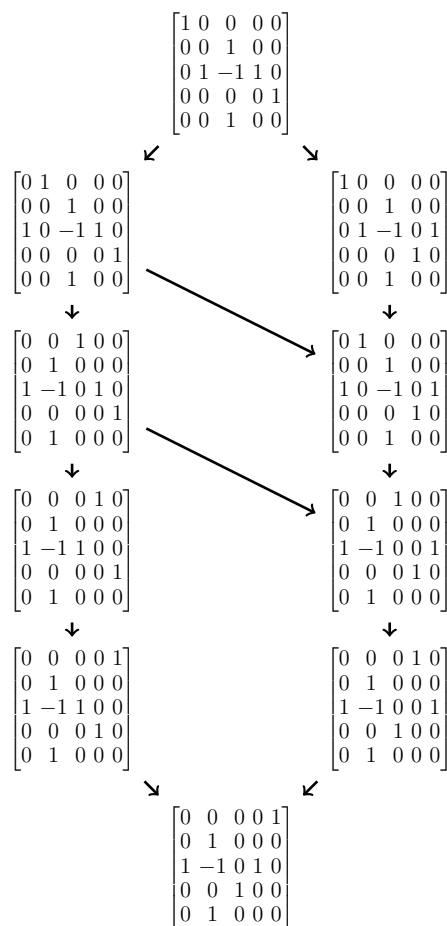


FIGURE IV.3 – diagramme de Hasse d’un intervalle pour \leq_M sur les matrices à signes alternants

et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Ceci donne une autre façon de prouver la liberté de **ASM** en utilisant les mêmes arguments que ceux du théorème 3.4. Par conséquent, **ASM** est librement engendré par les éléments \mathbf{E}_{M^δ} (resp. \mathbf{H}_{M^δ}) où les matrices à signes al-

ternants δ sont telles que les matrices M^δ sont connexes (resp. anti-connexes). Les premières dimensions des générateurs algébriques de **ASM** sont

$$0, 1, 1, 4, 29, 343, 6536, 202890, 10403135, 889855638, 127697994191. \quad (\text{IV.15})$$

Les premières dimensions des éléments totalement primitifs sont

$$0, 1, 0, 2, 20, 277, 5776, 188900, 9980698, 868571406, 125895356788. \quad (\text{IV.16})$$

De plus, puisque la transposée d'une matrice à signes alternants est aussi une matrice à signes alternants, par la proposition 2.2, l'application linéaire $\phi: \mathbf{ASM} \rightarrow \mathbf{ASM}^*$ définie, pour toute matrice à signes alternants δ , par

$$\phi(\mathbf{F}_{M^\delta}) := \mathbf{F}_{M^{\delta T}} \quad (\text{IV.17})$$

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

3 Etudes de statistiques

Nous considérons certaines statistiques définies sur les matrices à signes alternants et en donnons une interprétation algébrique en utilisant l'algèbre **ASM**. Ensuite, nous étudions les quotients de **ASM** par les relations définies via ces statistiques.

3.1 Interprétations algébriques

Commençons par rappeler les notations suivantes dans l'algèbre $\mathbb{K}(q)$ des fractions rationnelles en q . Les q -entiers, les q -factorielles et les q -binomiaux sont définis respectivement par

$$[n]_q := 1 + q + \cdots + q^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (\text{IV.18})$$

$$[0]_q! := 1, \quad [n]_q! := [1]_q [2]_q \cdots [n]_q, \quad n \geq 1, \quad (\text{IV.19})$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2 \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[n_1]_q! [n_2]_q!}, \quad n_1, n_2 \geq 0, n = n_1 + n_2. \quad (\text{IV.20})$$

Proposition 3.1. *L'application linéaire $\phi_s: \mathbf{ASM} \rightarrow \mathbb{K}(q)$ définie, pour toute configuration $s \in \mathfrak{N}$ et toute matrice à signes alternants δ de taille n , par*

$$\phi_s(\mathbf{F}_{M^\delta}) := \frac{q^{s(\delta)}}{n!} \quad (\text{IV.21})$$

est un morphisme d'algèbres.

Démonstration. Puisque le produit de mélange décalé de deux matrices de tailles n_1 et n_2 n'ajoute ni ne retire aucun coefficient non nul, cette proposition découle immédiatement du nombre de matrices contenues dans le produit. \square

Nous montrons, sur les configurations du modèle à six sommets, le produit (IV.9) dans **ASM**, où les sommets en gras décrivent ceux de configuration io.

$$\mathbf{F} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \cdot \mathbf{F} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} = \mathbf{F} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} + \mathbf{F} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} + \mathbf{F} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} + \mathbf{F} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} + \mathbf{F} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad (\text{IV.22})$$

Proposition 3.2. *L'application linéaire $\phi_s: \mathbf{ASM} \rightarrow \mathbb{K}(q)$ définie, pour toute statistique $s \in \mathfrak{Z}$ et toute matrice à signes alternants δ de taille n par*

$$\phi_s(\mathbf{F}_{M^\delta}) := \frac{q^{s(\delta)}}{[n]_q!} \quad (\text{IV.23})$$

est un morphisme d'algèbres.

Démonstration. Nous prouvons ici le cas où s est la statistique nw ; les autres cas sont analogues. Remarquons que le produit de mélange décalé de deux matrices à signes alternants n'ajoute ni ne supprime aucun sommet de configuration nw dans les matrices elles mêmes. Il suffit donc de montrer que ϕ_{nw} est un morphisme d'algèbres pour les matrices à signes alternants sans configuration nw.

Soit δ_1 et δ_2 deux matrices à signes alternants de tailles respectives n_1 et n_2 , strictement positives. Utilisant la structure dendriforme de **ASM** (voir le théorème 2.1), nous pouvons prouver par induction sur $n_1 + n_2$ que

$$\phi_{\text{nw}}(\mathbf{F}_{M^{\delta_1}} \cdot \mathbf{F}_{M^{\delta_2}}) = \frac{q^{n_1}}{[n]_q!} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ n_1, n_2-1 \end{array} \right]_q + \frac{1}{[n]_q!} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ n_1-1, n_2 \end{array} \right]_q. \quad (\text{IV.24})$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (IV.24) prend en compte les matrices ayant une dernière colonne provenant de M^{δ_2} (où n_1 configurations nw sont créées) et le second terme prend en compte celles ayant une dernière colonne provenant de M^{δ_1} (où aucune configuration nw n'est créée).

En utilisant une relation de récurrence bien connue sur les coefficients q -binomiaux, nous déduisons

$$\phi_{\text{nw}}(\mathbf{F}_{M^{\delta_1}} \cdot \mathbf{F}_{M^{\delta_2}}) = \frac{1}{[n]_q!} \begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2 \end{bmatrix}_q = \phi_{\text{nw}}(\mathbf{F}_{M^{\delta_1}}) \cdot \phi_{\text{nw}}(\mathbf{F}_{M^{\delta_2}}). \quad (\text{IV.25})$$

□

Nous allons revenir sur la preuve de l'équation (IV.25) et en donner une plus combinatoire. Soit M_1 et M_2 deux matrices à signes alternants de tailles respectives n_1 et n_2 et montrons

$$\phi_{\text{nw}}(\mathbf{F}_{M_1} \cdot \mathbf{F}_{M_2}) = \frac{1}{[n_1 + n_2]_q!} \begin{bmatrix} n_1 + n_2 \\ n_1, n_2 \end{bmatrix}_q. \quad (\text{IV.26})$$

Soit M une matrice apparaissant dans le produit de mélange décalé en colonnes de M_1 et M_2 . Notons $\overline{M_1}$ (resp. $\overline{M_2}$) les n_1 premières (resp. n_2 dernières) lignes de M et notons $\{k_1 < k_2 < \dots < k_{n_2}\}$ les indices des colonnes non identiquement nulles de $\overline{M_2}$.

Il est clair que les colonnes identiquement nulles de $\overline{M_2}$ n'ont pas de configurations nw, que les configurations nw des colonnes non identiquement nulles de $\overline{M_2}$ sont celles de M_2 , que les configurations nw des colonnes non identiquement nulles de $\overline{M_1}$ sont celles de M_1 . Il ne reste plus qu'à comptabiliser les configurations nw des colonnes identiquement nulles de $\overline{M_1}$, qui sont aux indices $\{k_1, k_2, \dots, k_{n_2}\}$.

Nous allons calculer explicitement, pour tout $1 \leq j \leq n_2$, le nombre de configurations nw dans la k_j^{e} colonne de $\overline{M_1}$. Soit $1 \leq j \leq n_2$. Le nombre de colonnes non identiquement nulles parmi les k_j premières colonnes de $\overline{M_1}$ est $k_j - j$. Cependant, étant donnée une matrice à signes alternants A , dans le modèle des six sommets, le nombre de lignes, entre les k^{e} et $(k+1)^{\text{e}}$ colonnes de A dans lesquelles les flèches horizontales sont orientées vers l'ouest est k . Ainsi, puisque les flèches verticales dans la k_j^{e} colonne de $\overline{M_1}$ sont toutes orientées vers le nord, il y a exactement $k_j - j$ configurations nw dans la k_j^{e} colonne de $\overline{M_1}$.

Ainsi, le nombre de configurations nw dans M est donné par

$$\text{nw}(M) = \text{nw}(M_1) + \text{nw}(M_2) + \sum_{1 \leq j \leq n_2} k_j - j. \quad (\text{IV.27})$$

Nous en déduisons que, pour toutes matrices à signes alternants M_1 et M_2

de tailles respectives n_1 et n_2 ,

$$\begin{aligned}
 \phi_{\text{nw}}(\mathbf{F}_{M_1} \cdot \mathbf{F}_{M_2}) &= \sum_{M \in M_1 \sqcup M_2} \phi_{\text{nw}}(\mathbf{F}_M) \\
 &= \frac{q^{\text{nw}(M_1) + \text{nw}(M_2)}}{[n_1 + n_2]_q!} \sum_{\{k_1, \dots, k_{n_2}\} \subset \{1, \dots, n_1 + n_2\}} q^{(k_1 - 1) + \dots + (k_{n_2} - n_2)} \\
 &= \frac{q^{\text{nw}(M_1) + \text{nw}(M_2)}}{[n_1 + n_2]_q!} \begin{bmatrix} n_1 + n_2 \\ n_1, n_2 \end{bmatrix}_q.
 \end{aligned}
 \tag{IV.28}$$

Nous montrons, sur les configurations du modèle à six sommets, le produit (IV.9) dans **ASM**, où les sommets en gras décrivent ceux de configuration nw.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} + \mathbf{F} + \mathbf{F} + \mathbf{F}
 \tag{IV.29}$$

Par des arguments similaires, les propositions précédentes restent valides dans le dual de **ASM**. Par conséquent,

Proposition 3.3. *Les applications linéaires $\psi_s, \psi_{s'}: \mathbf{ASM}^* \rightarrow \mathbb{K}(q)$ définies, pour toutes configurations $s \in \mathfrak{N}$, $s' \in \mathfrak{Z}$, et toute matrice à signes alternants δ de taille n , par*

$$\psi_s(\mathbf{G}_{M^\delta}) := \frac{q^{s(\delta)}}{n!} \quad \text{et} \quad \psi_{s'}(\mathbf{G}_{M^\delta}) := \frac{q^{s'(\delta)}}{[n]_q!}
 \tag{IV.30}$$

sont des morphismes d'algèbres.

Nous montrons, sur les configurations du modèle à six sommets, le produit (IV.9) dans **ASM**, où les sommets représentés par des carrés décrivent ceux de configuration io et ceux représentés par des cercles décrivent ceux de configuration nw.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G} + \mathbf{G} + \mathbf{G} + \mathbf{G}
 \tag{IV.31}$$

3.2 Algèbres quotients

Soit $S \subseteq \mathfrak{J} \cup \mathfrak{N}$ un ensemble de statistiques et \sim_S une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices à signes alternants définie, pour toutes matrices à signes alternants δ_1 et δ_2 de même taille, par

$$\delta_1 \sim_S \delta_2 \iff \forall s \in S, s(\delta_1) = s(\delta_2). \quad (\text{IV.32})$$

Nous notons I_S l'idéal associé engendré par la famille

$$\{\mathbf{F}_{M^{\delta_1}} - \mathbf{F}_{M^{\delta_2}} ; \delta_1 \sim_S \delta_2\}. \quad (\text{IV.33})$$

Commençons par étudier la statistique $\text{io} \in \mathfrak{N}$. Les deux classes d'équivalence pour \sim_{io} en taille 3 sont

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{IV.34})$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puisque, par la proposition 3.1, ϕ_{io} est un morphisme d'algèbres et le noyau de ϕ_{io} est I_{io} , le quotient $\mathbf{ASM}/I_{\text{io}}$ est une algèbre. De plus, l'algèbre $\mathbb{K}(q)$ étant commutative, le noyau de ϕ_{io} contient les commutateurs. Par conséquent, l'algèbre $\mathbf{ASM}/I_{\text{io}}$ est commutative. Remarquons cependant que $\mathbf{ASM}/I_{\text{io}}$ n'hérite pas de la structure de cogèbre de \mathbf{ASM} puisque même si

$$x := \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

est un élément de I_{io} , nous avons

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{F}_{[1]} + x \otimes 1 \quad (\text{IV.36})$$

qui n'est pas un élément de $I_{\text{io}} \otimes \mathbf{ASM} + \mathbf{ASM} \otimes I_{\text{io}}$. Par conséquent, I_{io} n'est pas un co-idéal de \mathbf{ASM} . Par un argument classique de série génératrice, nous montrons que l'algèbre n'est pas libre.

Proposition 3.4. *La dimension A_n^{io} de la n^{e} composante graduée de $\mathbf{ASM}/I_{\text{io}}$ est $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .*

Démonstration. Soit δ une matrice à signes alternants de taille n ayant un nombre maximal de configurations io (*i.e.*, un nombre maximal de -1). Alors, il est facile de voir que

$$\text{io}(\delta) = \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} i & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}-1} i + \frac{n-1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV.37})$$

Puisque pour tout $k \in \{0, \dots, \text{io}(\delta)\}$, il existe une matrice à signes alternants ayant k configurations io, ceci démontre la proposition. \square

La suite A_n^{io} est la suite **A033638** de [48]. Les premiers termes sont

$$1, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13, 17, 21. \quad (\text{IV.38})$$

Utilisant les symétries entre les statistiques io et oi données par la proposition 1.1, les relations d'équivalence \sim_{oi} et \sim_{io} sont les mêmes. Par conséquent, les algèbres $\mathbf{ASM}/I_{\text{oi}}$ et $\mathbf{ASM}/I_{\text{io}}$ sont identiques.

Étudions maintenant la statistique $\text{se} \in \mathfrak{3}$. Les quatre classes d'équivalence pour \sim_{se} en taille 3 sont

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{IV.39})$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, nous montrons que le quotient $\mathbf{ASM}/I_{\text{se}}$ est une algèbre commutative. Remarquons cependant que $\mathbf{ASM}/I_{\text{se}}$ n'hérite pas de la structure de cogèbre de \mathbf{ASM} puisque même si

$$x := \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

est un élément de I_{se} , nous avons

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + \mathbf{F}_{[1]} \otimes \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{F}_{[1]} + x \otimes 1 \quad (\text{IV.41})$$

qui n'est pas un élément de $I_{\text{se}} \otimes \mathbf{ASM} + \mathbf{ASM} \otimes I_{\text{se}}$. Par conséquent, I_{se} n'est pas un co-idéal de \mathbf{ASM} . Par un argument classique de série génératrice, nous montrons que l'algèbre n'est pas libre.

Proposition 3.5. *La dimension A_n^{se} de la n^{e} composante graduée de $\mathbf{ASM}/I_{\text{se}}$ est $\binom{n}{2} + 1$.*

Démonstration. Commençons par montrer qu'il y a au moins $\binom{n}{2} + 1$ classes d'équivalence pour \sim_{se} sur l'ensemble des matrices à signes alternants de taille n . Pour ce faire, nous allons considérer le procédé qui, à la matrice d'une permutation M_1 de taille n associe la matrice d'une permutation M_2 telle que $\text{se}(M_2) = \text{se}(M_1) + 1$. Si M_1 n'est pas la matrice Id_n de la permutation $12 \cdots n$, alors il existe un plus grand entier positif k tel que $M_1 = Id_k / M'_1$ et M'_1 n'est pas la matrice de taille 0. Considérons la matrice $M_2 := Id_k / M'_2$ où M'_2 est la matrice obtenue en échangeant la $i - 1^{\text{e}}$ et la i^{e} colonnes de M'_1 de sorte que i est l'indice dans M'_1 de la colonne contenant 1 sur sa première ligne. Commençant avec la matrice M_1 de taille n de la forme $1 \setminus \cdots \setminus 1$, nous pouvons appliquer itérativement le procédé précédent $\binom{n}{2}$ fois. Puisque chaque itération augmente de 1 le nombre de configurations se , toutes les $\binom{n}{2} + 1$ matrices de permutation sont dans différentes classes d'équivalence pour \sim_{se} .

Montrons qu'il y a au plus $\binom{n}{2} + 1$ classes d'équivalence pour \sim_{se} sur l'ensemble des matrices à signes alternants de taille n . Chaque coefficient d'une matrice à signes alternants δ de taille n donne lieu à une configuration entre les six possibles. Ainsi, nous avons

$$n^2 = \text{nw}(\delta) + \text{ne}(\delta) + \text{sw}(\delta) + \text{se}(\delta) + \text{io}(\delta) + \text{oi}(\delta). \quad (\text{IV.42})$$

En utilisant les symétries données par la proposition 1.1, (IV.42) devient

$$n^2 = 2 \text{sw}(\delta) + 2 \text{se}(\delta) + 2 \text{io}(\delta) + n \quad (\text{IV.43})$$

et nous déduisons que le nombre maximal de configurations se d'une matrice à signes alternants est $\binom{n}{2}$. Ce qui achève la démonstration. \square

Par exemple, les sept classes d'équivalence pour \sim_{se} sur l'ensemble des matrices à signes alternants de taille 4 ont pour représentant les matrices

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

La suite A_n^{se} est la suite [A152947](#) de [48]. Les premiers termes sont

$$1, 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56. \quad (\text{IV.45})$$

Utilisant les symétries entre les statistiques se et nw données par la proposition 1.1, les relations d'équivalence \sim_{nw} et \sim_{se} sont les mêmes. Par conséquent, les algèbres $\mathbf{ASM}/_{I_{nw}}$ et $\mathbf{ASM}/_{I_{se}}$ sont identiques.

Remarquons que l'application linéaire $\theta: \mathbf{ASM}/_{I_{se}} \rightarrow \mathbf{ASM}/_{I_{sw}}$ définie, pour toute matrice à signes alternants δ , par

$$\theta\left(\pi_{se}(\mathbf{F}_{M^\delta})\right) := \pi_{sw}\left(\mathbf{F}_{M^{\overleftarrow{\delta}}}\right), \quad (\text{IV.46})$$

où π_{se} (resp. π_{sw}) est la projection canonique de \mathbf{ASM} vers $\mathbf{ASM}/_{I_{se}}$ (resp. $\mathbf{ASM}/_{I_{sw}}$) et $\overleftarrow{\delta}$ est la matrice à signes alternants dans laquelle, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la i^e colonne est la $n - i + 1^e$ colonne de δ , est un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbf{ASM}/_{I_{se}}$ et $\mathbf{ASM}/_{I_{sw}}$.

Terminons cette étude avec l'ensemble des statistiques $\{io, se\}$. Les cinq classes d'équivalence pour $\sim_{io,se}$ sur l'ensemble des matrices à signes alternants de taille 3 sont

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

Montrons maintenant que $\mathbf{ASM}/I_{\text{io,se}}$ est une algèbre. Considérons l'application linéaire $\psi: \mathbf{ASM} \rightarrow \mathbb{K}(q, t)$ définie, pour toute matrice à signes alternants δ de taille n , par

$$\psi(\mathbf{F}_{M^\delta}) := \frac{q^{\text{io}(\delta)} t^{\text{se}(\delta)}}{n! [n]_t!}. \quad (\text{IV.48})$$

Les propositions 3.1 et 3.2 impliquent, puisque l'algèbre $\mathbb{K}(q, t)$ est commutative, que ψ est un morphisme d'algèbres. Puisque le noyau de ψ est $I_{\text{io,se}}$, $\mathbf{ASM}/I_{\text{io,se}}$ est une algèbre. Remarquons que $\mathbf{ASM}/I_{\text{io,se}}$ est commutative par le même argument que précédemment. Cependant, $\mathbf{ASM}/I_{\text{io,se}}$ n'hérite pas d'une structure de cogèbre de \mathbf{ASM} parce que même si

$$x := \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.49})$$

est un élément de $I_{\text{io,se}}$, nous avons

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{F}_{[1]} + x \otimes 1 \quad (\text{IV.50})$$

qui n'est pas un élément de $I_{\text{io,se}} \otimes \mathbf{ASM} + \mathbf{ASM} \otimes I_{\text{io,se}}$. Par conséquent, $I_{\text{io,se}}$ n'est pas un co-idéal de \mathbf{ASM} . Par un argument classique de série génératrice, nous montrons que l'algèbre n'est pas libre.

Par l'exploration informatique, les premiers termes de la suite des dimensions de l'algèbre $\mathbf{ASM}/I_{\text{io,se}}$ sont

$$1, 1, 2, 5, 13, 31, 66, 127, \quad (\text{IV.51})$$

et semble être la suite [A116701](#) de [48].

Utilisant les symétries de la proposition 1.1, toutes les algèbres \mathbf{ASM}/I_S , où S contient deux statistiques non symétriques, sont égales à $\mathbf{ASM}/I_{\text{io,se}}$.

Enfin, utilisant les mêmes arguments que précédemment, nous pouvons prouver que, pour tout $S \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{N}$, \mathbf{ASM}/I_S est une algèbre commutative isomorphe à $\mathbf{ASM}/I_{\text{io}}$, $\mathbf{ASM}/I_{\text{se}}$, ou $\mathbf{ASM}/I_{\text{io,se}}$.

Chapitre V

Outil informatique

L'exploration informatique a été l'un des piliers fondamentaux de cette thèse. L'implémentation et l'amélioration des structures algébriques sont différents buts que nous nous sommes fixés.

Il y a eu plusieurs tentatives d'implémentation des algèbres de Hopf combinatoires dans différents systèmes de calcul formel [47, 7, 51, 50]. Toutefois, l'implémentation de ces structures nécessite de nombreuses fonctionnalités spécifiques au logiciel ou au langage utilisé. Si les éléments d'une algèbre sont, en général, des combinaisons linéaires (en mémoire) de certains éléments de base, une algèbre de Hopf est un objet que nous voulons implémenter avec des comportements différents, avec différentes bases explicites.

Développer un cadre général et complet pour les algèbres de Hopf combinatoires est l'un des objectifs du projet `*-combinat` [47, 22]. Le nouveau design de `Sage-combinat` a été modélisé dans ce but. La plupart des familles d'objets combinatoires de base sont déjà implémentées (permutations, partitions, vecteurs d'entiers, ...). `Sage`, dont le langage est basé sur Python, fournit une hiérarchie de classes abstraites (les catégories) pour modéliser les structures algébriques avancées, ainsi que les morphismes les reliant (le modèle de coercion). Le choix de la plateforme `Sage` est particulièrement motivé par la disponibilité des caractéristiques suivantes : produits tensoriels, applications linéaires, ensemble des combinaisons linéaires indexées par n importe quoi, matrices indexées par n importe quoi, algèbres abstraites avec plusieurs réalisations.

Plusieurs projets différents visent à améliorer `Sage` avec des algèbres de Hopf. Les fonctions symétriques offrent un bel exemple sous une forme relativement finale (J. Bandlow, M. Hansen, A. Schilling, N. M. Thiéry, M. Zabrocki). Ces algèbres abstraites ont, dans la version 5.6 de `Sage`, cinq bases

différentes implémentées (monômes, Schur, sommes de puissance, homogènes, élémentaires) avec les changements de bases pour chaque paire d'entre elles. D'un autre côté, J. Bandlow, C. Berg et F. Saliola, N. M. Thiéry sont en train de développer une implémentation de la paire **NCSF**/*QSym*.

Dans ce chapitre, nous expliquons l'implémentation des algèbres de Hopf combinatoires et illustrons les différents outils fournis par celle-ci. Ce chapitre est illustré avec des exemples de calculs qui sont présentés tels qu'ils apparaissent dans la console de **Sage**, et a été généré automatiquement avec le paquet SageTeX. Nous nous autoriserons, dans certains cas, à réorganiser le texte issu de la console pour en faciliter sa lisibilité.

Nous ne prétendons pas avoir un code efficace et complet. Nous voulons le rendre présentable et lisible, nous nous permettons donc d'omettre des tests et des imports. Ce projet est toujours en cours de développement.

1 État de l'art de Sage

Le but de cette partie est de présenter ce qui est accessible dans le cadre des algèbres de Hopf combinatoires et d'expliquer comment implémenter, étape par étape, une algèbre de Hopf. Nous nous focalisons et illustrons les différents outils sur l'exemple de l'algèbre de Hopf **FQSym**.

```
sage: FQSym = FreeQuasiSymmetricFunctions(ZZ)
```

```
sage: FQSym
```

```
Hopf algebras of FQSym over Integer Ring
```

```
sage: FQSym.category()
```

```
Category of graded hopf algebras with basis over Integer Ring with
realizations
```

Pour obtenir ce résultat, voici le bout de code :

```
class FreeQuasiSymmetricFunctions(UniqueRepresentation, Parent):
2
    def __init__(self, ring):
4        Parent.__init__(self,
            base=ring,
6            category=GradedHopfAlgebrasWithBasis(ring).WithRealizations())

8    def _repr_(self):
        return "Hopf algebras of FQSym over %s" %(self.base_ring())
```

Nous commençons par définir un conteneur (`Parent`, ligne 1) dans lequel nous déclarons que la classe `FreeQuasiSymmetricFunctions` est une algèbre de Hopf dans laquelle plusieurs bases (ligne 6) peuvent cohabiter.

La première base que nous manipulons est la base fondamentale de **FQ-Sym**.

```
sage: FQSym = FreeQuasiSymmetricFunctions(ZZ)
sage: F = FQSym.Fundamental()
sage: F
Hopf algebras of FQSym over Integer Ring on the Fundamental basis
sage: F([1, 2]) * F([2, 1])
F1243 + F1423 + F1432 + F4123 + F4132 + F4312
sage: F([5, 2, 1, 3, 4]).coproduct()
1 ⊗ F52134 + F1 ⊗ F2134 + F21 ⊗ F123 + F321 ⊗ F12 + F4213 ⊗ F1 + F52134 ⊗ 1
```

Ce résultat est obtenu en ajoutant, dans le corps de la classe précédente, une méthode `a_realization` ainsi que la classe suivante, définissant la base fondamentale :

```
class Fundamental(CombinatorialFreeModule, BindableClass):
2
    def __init__(self, FQSym):
4        R = FQSym.base_ring()
        CombinatorialFreeModule.__init__(self,
6            R, Permutations(),
            category=[FQSym.Realizations(),
8            GradedHopfAlgebrasWithBasis(R).Realizations(),
            GradedHopfAlgebrasWithBasis(R)])
10
    def _repr_(self):
12        return "%s on the %s basis" %(self.realization_of(), self._realization_name())
14
    def product_on_basis(self, sigma1, sigma2):
        D = dict([])
16        for w in Word(sigma1).shifted_shuffle(Word(sigma2)):
            D[Permutation(w)] = self.base_ring()(1)
18        return self._from_dict(D)
20
    def coproduct_on_basis(self, sigma):
        return self.tensor_square().sum(
22            tensor((self(to_standard(sigma[:i])),
                self(to_standard(sigma[i:])))
24            for i in xrange(sigma.size() + 1))
```


Pour définir le produit et le coproduit de cette algèbre de Hopf, il suffit de le faire sur les éléments de la base (lignes 14 et 20). Ceux-ci sont automatiquement étendus par linéarité via les catégories de N. M. Thiéry. La définition naturelle du produit dans l'algèbre tensorielle est également induite par les catégories.

```
sage: F = FreeQuasiSymmetricFunctions(ZZ).Fundamental()
sage: (F([1, 2]) - F([2, 1])) * F([1])
F123 + F132 - F213 - F231 + F312 - F321
sage: (F([1, 2, 3]) - F([1, 3, 2])).coproduct()
1 ⊗ F123 - 1 ⊗ F132 + F1 ⊗ F12 - F1 ⊗ F21 + F123 ⊗ 1 - F132 ⊗ 1
sage: (F([1, 2])**2).coproduct() == (F([1, 2]).coproduct())**2
True
```

Manipulons une seconde base en définissant la base élémentaire \mathbf{E} reliée à la base fondamentale par :

$$\mathbf{E}_\sigma := \sum_{\tau \geq \sigma} \mathbf{F}_\tau, \quad (\text{V.1})$$

où la relation est l'ordre droit sur les permutations. Par triangularité, l'équation (V.1) définit un isomorphisme entre les bases fondamentale et élémentaire.

```
sage: F = FreeQuasiSymmetricFunctions(ZZ).Fundamental()
sage: E = FreeQuasiSymmetricFunctions(ZZ).Elementary()
sage: phi = E.module_morphism(on_basis=lambda sigma:
....:     F.sum(map(F, sigma.permutohedron_greater()))),
....:     codomain=F, triangular="lower", unitriangular=True)
sage: phi.register_as_coercion()
sage: (~phi).register_as_coercion()
```

Après avoir instancié les bases \mathbf{E} et \mathbf{F} , nous définissons l'application linéaire phi envoyant \mathbf{E}_σ sur la somme définie dans (V.1) et enregistrons à la fois cette application ainsi que son inverse. Ceci nous permet d'interpréter indifféremment des expressions dans la base fondamentale et dans la base élémentaire (mécanisme des coercions).

```
sage: F(E([1, 2, 3]))
F123 + F132 + F213 + F231 + F312 + F321
sage: E(F([1, 2, 3]))
E123 - E132 - E213 + E321
```

Le produit et le coproduit sont alors calculés, utilisant le système des coercions, à partir de ceux dans la base fondamentale.

```
sage: E([1, 2]) * E([2, 1])
E1243
sage: E([3, 1, 4, 2]).coproduct()
1 ⊗ E3142 + E1 ⊗ E132 + E1 ⊗ E312 + E12 ⊗ E12 + E21 ⊗ E21 + E213 ⊗ E1 +
E231 ⊗ E1 + E3142 ⊗ 1
```

2 Après

L'un des buts que nous nous sommes fixés est la construction à la volée des bases (réalisations en **Sage**) qui seraient définies par dualité ou par isomorphisme. Nous montrons, dans cette première partie, manuellement, les différents outils introduits. L'idée par la suite est d'automatiser au maximum ces mécanismes et de factoriser le code.

Les algèbres de Hopf que nous avons rencontrées sont graduées et les composantes homogènes sont de dimension finie. Une conséquence est l'utilisation plus approfondie des applications linéaires graduées car alors nous pouvons visualiser la matrice de la restriction d'une telle application à une composante homogène, nous pouvons inverser un tel morphisme car cela revient à inverser pour chaque graduation une matrice, et nous pouvons dualiser un tel morphisme car cela revient à transposer pour chaque graduation une matrice.

Dans toute cette partie, afin de faciliter la lecture, le mot `cat` désignera la catégorie `GradedHopfAlgebrasWithBasis(ring).WithFiniteComponent()`. Commençons par illustrer la manipulation des applications linéaires et l'apport matriciel. Pour cela, reprenons les bases fondamentale et élémentaire définies dans la partie précédente et définissons le changement de base entre celles-ci.

```
sage: F = FreeQuasiSymmetricFunctions(ZZ).Fundamental()
```

```
sage: E = FreeQuasiSymmetricFunctions(ZZ).Elementary()
sage: phi = E.module_morphism(on_basis=lambda sigma:
....:     F.sum(map(F, sigma.permutohedron_greater()))),
....:     codomain=F, category=cat)
sage: phi
Generic morphism:
  From: Hopf algebras of FQSym on the Elementary basis
  To:   Hopf algebras of FQSym on the Fundamental basis
```

Ce changement de bases est triangulaire

```
sage: phi.matrix_for_graded_component(3)
      | [1, 2, 3] [1, 3, 2] [2, 1, 3] [2, 3, 1] [3, 1, 2] [3, 2, 1]
-----|-----
[1, 2, 3] | 1      .      .      .      .      .
[1, 3, 2] | 1      1      .      .      .      .
[2, 1, 3] | 1      .      1      .      .      .
[2, 3, 1] | 1      .      1      1      .      .
[3, 1, 2] | 1      1      .      .      1      .
[3, 2, 1] | 1      1      1      1      1      1
```

et inversible

```
sage: psi = phi.inverse()
sage: psi
Generic morphism:
  From: Hopf algebras of FQSym on the Fundamental basis
  To:   Hopf algebras of FQSym on the Elementary basis
sage: psi.matrix_for_graded_component(3)
      | [1, 2, 3] [1, 3, 2] [2, 1, 3] [2, 3, 1] [3, 1, 2] [3, 2, 1]
-----|-----
[1, 2, 3] | 1      .      .      .      .      .
[1, 3, 2] | -1     1      .      .      .      .
[2, 1, 3] | -1     .      1      .      .      .
[2, 3, 1] | .      .     -1     1      .      .
[3, 1, 2] | .     -1     .      .      1      .
[3, 2, 1] | 1      .      .     -1    -1     1
```

Pour obtenir ce résultat, nous avons défini la notion (axiomes en Sage) de composante homogène de dimension finie pour des modules gradués et implémenté différentes méthodes liées aux morphismes entre ces modules. Cette programmation permet, à toutes les structures algébriques ayant cette propriété, de bénéficier de ces outils. D'un point de vue utilisateur, cet apport est transparent, il suffit juste de modifier la catégorie définissant la structure abstraite **FQSym** et celle des différentes bases pour pouvoir l'utiliser.

Cette étape étant franchie, il s'agit dans un second temps de gérer la dualité. Définissons la base des **G** duale de **F**. Pour le moment, nous ne voulons pas définir le produit et le coproduit dans la base des **G** à partir de celle des **F** par dualité, nous allons donc les définir utilisant l'isomorphisme $\mathbf{F}_\sigma \rightarrow \mathbf{G}_{\sigma^{-1}}$. En fait, programmer ces règles par dualité ne pose aucun problème algorithmique, la difficulté réside dans l'intégration du code dans le système des catégories.

```
sage: G = F.graded_dual()
sage: G([3, 1, 2]) * G([1, 2])
G31245 + G41235 + G41325 + G42315 + G51234 + G51324 + G51423 + G52314 +
G52413 + G53412
sage: G([5, 2, 1, 3, 4]).coproduct()
1 ⊗ G52134 + G1 ⊗ G4123 + G21 ⊗ G312 + G213 ⊗ G21 + G2134 ⊗ G1 + G52134 ⊗ 1
```

Le changement de base ϕ envoyant \mathbf{E}_σ sur une certaine somme de \mathbf{F}_τ induit un changement de base dans le dual. Autrement dit, le dual ${}^t\phi$ de ϕ est un changement de base envoyant \mathbf{G}_σ sur une certaine somme de \mathbf{E}_τ^* .

```
sage: Ed = E.graded_dual()
sage: psi = phi.transpose()
Generic morphism:
From: Hopf algebras of FQSym on the dual basis to Fundamental basis
To: Hopf algebras of FQSym on the dual basis to Elementary basis
sage: psi.matrix_for_graded_component(3)
```

| | [1, 2, 3] | [1, 3, 2] | [2, 1, 3] | [2, 3, 1] | [3, 1, 2] | [3, 2, 1] |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| [1, 2, 3] | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| [1, 3, 2] | . | 1 | . | . | 1 | 1 |
| [2, 1, 3] | . | . | 1 | 1 | . | 1 |
| [2, 3, 1] | . | . | . | 1 | . | 1 |
| [3, 1, 2] | . | . | . | . | 1 | 1 |
| [3, 2, 1] | . | . | . | . | . | 1 |

```
sage: psi.register_as_coercion()
```

```
sage: (psi.inverse()).register_as_coercion()
```

Le produit et le coproduit sont alors calculés, utilisant le système des coercions, à partir de ceux dans la base \mathbf{G} .

```
sage: Ed([1, 2]) * Ed([1, 2])
```

$$6\mathbf{E}^*_{1234} + 2\mathbf{E}^*_{1243} + 2\mathbf{E}^*_{1324} + \mathbf{E}^*_{1342} + \mathbf{E}^*_{1423} + 2\mathbf{E}^*_{2134} + \mathbf{E}^*_{2143} + \mathbf{E}^*_{2314} + \mathbf{E}^*_{2413} + \mathbf{E}^*_{3124} + \mathbf{E}^*_{3142} + \mathbf{E}^*_{3412}$$

```
sage: Ed([2, 1, 4, 3, 5]).coproduct()
```

$$1 \otimes \mathbf{E}^*_{21435} + \mathbf{E}^*_{21} \otimes \mathbf{E}^*_{213} + \mathbf{E}^*_{2143} \otimes \mathbf{E}^*_1 + \mathbf{E}^*_{21435} \otimes 1$$

Pour obtenir les résultats précédents, il a fallu implémenter la classe abstraite \mathbf{FQSym} dans laquelle les quatre bases \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{E} et \mathbf{E}^* sont définies. Le code de ces trois dernières bases est assez proche et n'apporte pas énormément d'informations aux bases.

```
class Base(CombinatorialFreeModule, BindableClass):
2
    def __init__(self, FQSym):
4        CombinatorialFreeModule.__init__(self,
            FQSym.base_ring(), Permutations(),
6            category=[FQSym.Realizations(),
            cat.Realizations(), cat])
8
    def _repr_(self):
10        return "%s on the %s basis" %(self.realization_of(), self._realization_name())
12
    def graded_dual(self):
        pass # retourne la bonne base
```

Dans l'idéal, et nous adoptons le point de vue d'un chercheur, car il est bien entendu que pour des raisons d'efficacité, toutes les bases devraient être implémentées, seule la base fondamentale est nécessaire puisqu'elle suffit à

définir les autres bases. La base \mathbf{G} est isomorphe et duale de la base \mathbf{F} , la base \mathbf{E} est isomorphe à la base \mathbf{F} et la base \mathbf{E}^* est duale de la base \mathbf{E} .

Nous allons expérimenter cette démarche et manipuler toutes les bases à partir d'une seule. Commençons par implémenter l'algèbre abstraite \mathbf{FQSym} et la base fondamentale.

```

class FreeQuasiSymmetricFunctions(UniqueRepresentation, Parent):
2
    def __init__(self, R):
4        Parent.__init__(self,
            base=R, category=cat.WithRealizations())
6
    def _repr_(self):
8        return "Hopf algebras of FQSym over %s" %(self.base_ring())

10    def graded_dual(self):
        return self
12
    def a_realization(self):
14        return self.Fundamental()

16    class Fundamental(CombinatorialFreeModule, BindableClass):

18        def __init__(self, FQSym):
            R = FQSym.base_ring()
20            CombinatorialFreeModule.__init__(self,
                FQSym.base_ring(), Permutations(),
22                category=[FQSym.Realizations(),
                    cat.Realizations()])
24            self._side_duality = False

26        def _repr_(self):
            return "%s on the %s basis" %(self.realization_of(), self._realization_name())
28

        def one_basis(self):
30            return Permutation([])

32        def product_on_basis(self, sigma1, sigma2):
            D = dict([])
34            for w in Word(sigma1).shifted_shuffle(Word(sigma2)):
                D[Permutation(w)] = self.base_ring()(1)
36            return self._from_dict(D)

38        def coproduct_on_basis(self, sigma):
            return self.tensor_square().sum(
40                tensor((self(to_standard(sigma[:i])),
                    self(to_standard(sigma[i:])))
42                for i in xrange(sigma.size() + 1))

```

Avec ces quelques lignes définissant l'algèbre **FQSym** et la base fondamentale **F**, nous allons pouvoir construire, manipuler les cinq bases suivantes. La base **G** est la base duale de **F**, les bases élémentaire et homogène sont isomorphes à la base fondamentale et les bases **E*** et **H*** sont respectivement duales des bases élémentaire et homogène.

Par dualité, le produit et le coproduit dans la base **G** sont bien définis et correspondent respectivement au produit de convolution des permutations et au coproduit de démixage des permutations.

```
sage: F = FreeQuasiSymmetricFunctions(ZZ).Fundamental()
sage: G = F.constructed_by_duality()
sage: G([1, 2]) * G([2, 1])
F*1243 + F*1342 + F*1432 + F*2341 + F*2431 + F*3421
sage: G([4, 3, 1, 2]).coproduct()
1 ⊗ F*4312 + F*1 ⊗ F*321 + F*12 ⊗ F*21 + F*312 ⊗ F*1 + F*4312 ⊗ 1
```

La base élémentaire est isomorphe à la base fondamentale. Rappelons que la base élémentaire s'exprime sur la base fondamentale comme une somme sur l'ordre faible droit (V.1). Cet isomorphisme permet d'effectuer le produit et le coproduit dans cette base à partir de ceux définis dans la base fondamentale.

```
sage: phi = F.module_morphism(on_basis=lambda sigma:
.....:     F.sum(map(F, sigma.permutohedron_greater()))),
.....:     codomain=F, category=cat)
sage: E = F.constructed_by_isomorphism(phi, "E")
sage: E([1, 2]) * E([2, 1])
E1243
sage: E([2, 3, 4, 1]).coproduct()
1 ⊗ E2341 + 3E1 ⊗ E231 + 3E12 ⊗ E21 + E123 ⊗ E1 + E2341 ⊗ 1
```

Puis, instancions la base duale de **E**. Le produit et le coproduit dans la base **E*** sont bien définis et se calculent par dualité à partir de ceux dans la base élémentaire.

```
sage: Ed = E.constructed_by_duality()
sage: Ed([1, 2]) * Ed([1, 2])
```

$$2\mathbf{E}^*_{1243} + \mathbf{E}^*_{1324} + 2\mathbf{E}^*_{1423} + \mathbf{E}^*_{1432} + \mathbf{E}^*_{2143} + \mathbf{E}^*_{2413} + \mathbf{E}^*_{2431}$$

```
sage: Ed([1, 4, 2, 3]).coproduct()
```

$$1 \otimes \mathbf{E}^*_{1423} + \mathbf{E}^*_1 \otimes \mathbf{E}^*_{312} + \mathbf{E}^*_{1423} \otimes 1$$

Terminons avec la base homogène et sa duale.

```
sage: psi = F.module_morphism(on_basis=lambda sigma:
```

```
....:     F.sum(map(F, sigma.permutohedron_smaller())),
```

```
....:     codomain=F, category=cat)
```

```
sage: H = F.constructed_by_isomorphism(psi, "H")
```

```
sage: Hd = H.constructed_by_duality()
```

```
sage: Hd([1, 2]) * Hd([1, 2])
```

$$\mathbf{H}^*_{1234} + 2\mathbf{H}^*_{1324} + \mathbf{H}^*_{1342} + \mathbf{H}^*_{1423} + \mathbf{H}^*_{2314} + \mathbf{H}^*_{2413} + \mathbf{H}^*_{3124} + \mathbf{H}^*_{3142} + 2\mathbf{H}^*_{3412}$$

3 Conclusion

Cette démarche de modélisation des algèbres de Hopf combinatoire s'inscrit dans un projet à long terme. Un outil comme **Maple** permet l'implémentation rapide d'une algèbre avec une base dont les éléments seront tous considérés comme des expressions (comprendre ici la notion d'expression dans le langage **Maple**). Ainsi, la plupart des logiciels de calcul formel ne garde pas la sémantique des objets manipulés. Tout étant expression, les objets manipulés ne contiennent pas l'information de leur provenance. C'est alors au programmeur de tout faire à la main et de regarder lui-même les objets pour organiser leur traitement. Dans **Maple**, il serait ainsi nécessaire de programmer tous les morphismes (`from_F_to_E`, `from_E_to_F`, `from_F_to_G`, ...) et d'appeler les bons morphismes au bon moment une fois la sémantique de l'expression reconnue à l'écran par l'utilisateur.

Sage a la prétention d'inclure de la sémantique dans les objets manipulés. Une combinaison de fonctions élémentaires connaissant ainsi sa provenance et ses caractéristiques peut ainsi récupérer les informations nécessaires à sa propre manipulation. Cette combinaison linéaire devine ainsi comment elle doit être multipliée et comment un coproduit, s'il existe quelque part, peut lui être appliqué. Cette modélisation a un coût pour le programmeur et cette tâche consistant à "Apprendre des mathématiques à l'ordinateur" dépasse de loin un travail dit d'ingénierie. L'excursion présentée plus haut est une étape

sur ce but à longue échéance que le projet *-combinat s'est donné. Mutualisant les efforts entre chercheurs, car la tâche reste très lourde, nous apportons des éléments de réponses aux questions : comment enrichir les fonctionnalités de **Sage** lorsque l'on manipule des structures algébriques aussi riches que les algèbres graduées connexes dont chaque composante est de dimension finie, quelle algorithmique générique peut-on implémenter sur de telles structures, comment apprendre la notion de dualité dans les algèbres de Hopf au logiciel **Sage**, au final, comment inclure de l'information mathématique dans la machine de manière à pouvoir bénéficier de méthodes génériques sur les objets ainsi construits ?

Même si la prise en main de **Sage** et des catégories est difficile, le gain peut potentiellement être immense. Le potentiel de visualisation de données semble être prometteur, l'exploration informatique s'en verra, probablement, grandement facilitée une fois les choses un peu stabilisées.

Index

| | |
|------------------------------------|--------------|
| A | |
| algèbre | |
| associative libre..... | 6 |
| B | |
| base | |
| élémentaire..... | 78 |
| des quasi-multimots..... | 90 |
| homogène..... | 78 |
| base fondamentale..... | 72 |
| C | |
| chemins osculateurs..... | 95 |
| composée | |
| de permutations..... | 7 |
| de permutations de blocs uniformes | |
| 49 | |
| composition | |
| d'un ensemble..... | 40 |
| compression..... | 68 |
| concaténation | |
| de mots..... | 6 |
| de partitions d'un ensemble... 15 | |
| de permutations de blocs uniformes | |
| 48 | |
| coproduit | |
| de déconvolution.. 10, 11, 13, 55, | |
| 64 | |
| de démixage..... | 9, 11, 13 |
| D | |
| décomposition | |
| en colonne..... | 68 |
| en ligne..... | 68 |
| F | |
| fonction de parking..... | 11 |
| L | |
| longueur | |
| d'un mot..... | 5 |
| d'une permutation..... | 7 |
| M | |
| matrice | |
| à signes alternants..... | 94 |
| tassée..... | 67 |
| modèle à six sommets..... | 94 |
| mot | |
| tassé..... | 10 |
| vide..... | 5 |
| O | |
| opérateur | |
| over..... | 7 |
| under..... | 7 |
| P | |
| parkisée | |
| d'un mot..... | 12 |
| partition | |
| d'un ensemble..... | 13, 41, 51 |
| d'un entier..... | 14 |
| permutation..... | 2, 7, 47, 51 |
| colorée..... | 87 |
| de blocs uniforme..... | 47 |
| point d'arrêt | |
| d'une partition d'un ensemble | 15 |
| préfixe..... | 6 |
| produit | |

| | |
|-----------------------------|---------------|
| de convolution | 9, 11, 12, 50 |
| de mélange | 55 |
| de mots | 6 |
| en colonne | 16 |
| en ligne | 16, 75 |
| de mélange augmenté | |
| en colonne | 17 |
| en ligne | 17 |
| de mélange décalé | 8, 10, 12 |
| en colonne | 16, 68 |
| en ligne | 68 |

R

| | |
|-----------------------------------|-------|
| réalisation polynomiale | 3, 47 |
|-----------------------------------|-------|

S

| | |
|-------------------------------|----|
| sous-mot | 5 |
| standardisé | |
| d'un bi-mot | 58 |
| d'un mot | 7 |
| d'une partition d'un ensemble | 14 |
| standardisée | |
| d'un mot | 9 |
| suffixe | 6 |

T

| | |
|---------------------------------|-----|
| tassage | |
| d'un mot | 11 |
| type | |
| d'une partition d'un ensemble | 14, |
| 48 | |
| d'une permutation de blocs uni- | |
| forme | 48 |

Bibliographie

- [1] E. Abe. *Hopf algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
- [2] M. Aguiar and R. C. Orellana. The Hopf algebra of uniform block permutations. *J. Algebraic Combin.*, 28(1) :115–138, 2008.
- [3] M. Aguiar and F. Sottile. Structure of the malvenuto-reutenauer hopf algebra of permutations. *Adv. Math.*, 191(2) :225–275, 2005.
- [4] R.-J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 2008.
- [5] R. E. Behrend. Osculating paths and oscillating tableaux. *Elec. J. of Comb.*, 15(1), 2008.
- [6] N. Bergeron and M. Zabrocki. The hopf algebras of symmetric functions and quasisymmetric functions in non-commutative variables are free and cofree. 2005.
- [7] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust. The Magma algebra system I : The user language. *J. Symbolic Comput.*, 1997.
- [8] M. Bousquet-Mélou and L. Habsieger. Sur les matrices à signes alternants. *Discrete Math.*, 139 :57–72, 1995.
- [9] D. M. Bressoud. *Proofs and Confirmations, The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [10] J.-P. Bultel, A. Chouria, J.-G. Luque, and O. Mallet. Word symmetric functions and the Redfield-Pólya theorem. In *FPSAC PROCEEDINGS 2013 ACTES SFCA 2013 Paris, France*, page 593, 2013.
- [11] P. Cartier. A primer of hopf algebras. *IHES*, 2006.
- [12] A. Connes and D. Kreimer. Hopf algebras, renormalization and non-commutative geometry. *Comm. Math. Phys.*, pages 203–242, 1998.
- [13] C. L. Dodgson. Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values. *Proceedings of the Royal Society of London*, 15 :150–155, 1866.

- [14] G. Duchamp, F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. Noncommutative Symmetric Functions VII : Free Quasi-Symmetric Functions and revisited. *Annals of combinatorics*, 2008.
- [15] G. Duchamp, F. Hivert, and J.-Y. Thibon. Noncommutative Symmetric Functions VI : Free Quasi-Symmetric Functions and Related Algebras. *International journal of Algebra and Computation*, 12 :671–717, 2002.
- [16] L. Foissy. Bidendriform bialgebras, trees, and free quasi-symmetric functions. *J. Pure Appl. Algebra*, 209(2) :439–459, 2007.
- [17] I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh, and J.-Y. Thibon. Noncommutative symmetric functions I. *Adv. Math.*, 112, 1995.
- [18] G. Th. Guilbaud and P. Rosenstiehl. Analyse algébrique d’un scrutin. *Mathématiques et sciences humaines*, tome 4 :9–33, 1963.
- [19] F. Hivert. *Combinatoire des fonctions quasi-symétriques*. PhD thesis, Université de Marne la Vallée, 1999.
- [20] F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. An analogue of the plactic monoid for binary search trees. *Comptes-Rendus Mathématique*, 335(7) :577–580, 2002.
- [21] F. Hivert, J.C. Novelli, and J.Y. Thibon. Commutative combinatorial hopf algebras. *journal of Algebraic Combinatorics*, 28(1) :65–95, 2008.
- [22] F. Hivert and N. M. Thiéry. MuPAD-Combinat, an open-source package for research in algebraic combinatorics. *Sém. Lothar. Combin.*, 51 :Art. B51z, 70 pp. (electronic), 2004. <http://mupad-combinat.sf.net/>.
- [23] M. E. Hoffman. Quasi-shuffle products. *J. Alg. Comb.*, 11, 2000.
- [24] A. G. Izergin. Partition function of a six-vertex model in a finite volume. In *Soviet Physics Doklady*, volume 32, 1987.
- [25] S. A. Joni and G.-C. Rota. Coalgebras and bialgebras in combinatorics. *Studies in Appl. Math.*, 61 :93–139, 1979.
- [26] V. Korepin. Calculation of norms of Bethe wave functions. *Comm. Math. Phys.*, 86(3) :319–418, 1982.
- [27] C. Krattenthaler. Generating functions for plane partitions of a given shape. *manuscripta mathematica*, 69, 1990.
- [28] C. Krattenthaler. Determinant identities and a generalization of the number of the totally symmetric self-complementary plane partitions. *Elect. J. Combin.*, 1997.
- [29] D. Krob, M. Lapaty, J.-C. Novelli, H. D. Phan, and Schwer S. Pseudo-Permutations I : first combinatorial and lattice properties. In *FPSAC PROCEEDINGS 2004 ACTES SFCA 2004 Vancouver, Canada*, 2001.

- [30] G. Kuperberg. Another proof of the alternating-sign matrix conjecture. *Internat. Math. Res. Notices*, 3 :139–150, 1996.
- [31] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger. Le monoïde plaxique. In *Non-commutative structures in algebra and geometric combinatorics (Naples, 1978)*, volume 109 of *Quad. “Ricerca Sci.”*, pages 129–156. CNR, Rome, 1981.
- [32] A. Lascoux and M.P. Schützenberger. Keys and standard bases. *Inst. Math. and Appl.*, 19, 1990.
- [33] A. Lascoux and M.P. Schützenberger. Treillis et bases des groupes de Coxeter. *Electr. J. Combin.*, 3(2) :35pp, 1996.
- [34] J.-L. Loday. Dialgebras. *Lect. Notes Math.*, 1763 :7–66, 2001.
- [35] J.-L. Loday and M. Ronco. Hopf Algebra of the Planar Binary Trees. *Advances in Mathematics*, 139 :293–309, 1998.
- [36] I. G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. 1995.
- [37] C. Malvenuto and C. Reutenauer. Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra. *J. Algebra*, 177(3) :967–982, 1995.
- [38] R. Maurice. *Adv. in App. Math.*, 51 :285–308, 2013.
- [39] W.H. Mills, D.P. Robbins, and H. Jr. Rumsey. Alternating sign matrices and descending plane partitions. *J. Combin. Th. Ser. A.*, 34 :340–359, 1983.
- [40] J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon. A Hopf Algebra of Parking Functions. In *FPSAC PROCEEDINGS 2004 ACTES SFCA 2004 Vancouver, Canada*, page 215, 2004.
- [41] J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon. Polynomial realizations of some trialgebras. In *FPSAC PROCEEDINGS 2006 ACTES SFCA 2006 San Diego, California*, page 243, 2006.
- [42] J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon. Hopf algebras and dendriform structures arising from parking functions. *Fundamenta Mathematicae*, 193 :189–241, 2007.
- [43] J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon. Free quasi-symmetric functions and descent algebras for wreath products, and noncommutative multi-symmetric functions. *Discrete Math.*, 310(24) :3584–3606, 2010.
- [44] J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon, and N. M. Thiéry. Hopf algebras of graphs. *Math. Acad. Sci. Paris*, 2004.
- [45] D.P. Robbins and H. Jr. Rumsey. Determinants and alternating sign matrices. *Adv. in Math.*, 62(2) :169–184, 1986.

- [46] M. H. Rosas and B. E. Sagan. Symmetric functions in noncommuting variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2003.
- [47] The Sage-Combinat community. *Sage-Combinat : enhancing Sage as a toolbox for computer exploration in algebraic combinatorics*, 2013. <http://combinat.sagemath.org>.
- [48] N. J. A. Sloane. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [49] M. E Sweedler. *Hopf algebras*. 1969.
- [50] The MuPAD Group, Benno Fuchssteiner et al. *MuPAD User's Manual - MuPAD Version 1.2.2*. John Wiley and sons, Chichester, New York, first edition, march 1996. includes a CD for Apple Macintosh and UNIX.
- [51] S. Veigneau. ACE, an Algebraic Combinatorics Environment for the computer algebra system MAPLE : User's Reference Manual, Version 3.0. Report 98–11, IGM, 1998.
- [52] D. Zeilberger. Proof of the alternating sign matrix conjecture. *Electron. J. Combin*, 3(2) :R13, 1996.