



HAL
open science

Modélisation et simulation numérique robuste de l'endommagement ductile

Yi Zhang

► **To cite this version:**

Yi Zhang. Modélisation et simulation numérique robuste de l'endommagement ductile. Matériaux. Université Paris sciences et lettres, 2016. Français. NNT : 2016PSLEM003 . tel-01354272

HAL Id: tel-01354272

<https://pastel.hal.science/tel-01354272>

Submitted on 18 Aug 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à MINES ParisTech

Modélisation et simulation numérique robuste de l'endommagement ductile

Ecole doctorale n°432

SCIENCES DES METIERS DE L'INGENIEUR

Spécialité : SCIENCES ET GENIE DES MATERIEAUX

Soutenue par **Yi ZHANG**
le 26 janvier 2016

Dirigée par **Jacques BESSON**
Eric Lorentz



COMPOSITION DU JURY :

M. Ahmed BENALLAL
ENS Cachan
Président

M. Nicolas MOES
Ecole Centrale de Nantes
Rapporteur

M. Sylvain DRAPIER
Mines Saint-Etienne
Rapporteur

M. Ron PEERLINGS
TU Eindhoven
Membre du jury

M. Eric LORENTZ
EDF R&D
Membre du jury

M. Jacques BESSON
Mines ParisTech
Membre du jury

Thèse de doctorat en Mécanique et Matériaux

Modélisation et simulation robuste de l'endommagement ductile

Yi ZHANG

Directeur de thèse : Jacques BESSON

Co-directeur de thèse : Eric LORENTZ

Présentée et soutenue publiquement le 26 janvier 2016

Composition du Jury :

M. Ahmed BENALLAL	Directeur de Recherche, Directeur du LMT, Cachan	Président
M. Sylvain DRAPIER	Professeur, Directeur du MPE, Mines Saint-Etienne	Rapporteur
M. Nicolas MOES	Professeur du GeM, Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
M. Ron PEERLINGS	Professeur, Materials Technology Institute, TU Eindhoven	Examineur
M. Eric LORENTZ	HDR, Expert senior d'EDF R&D	Co-directeur
M. Jacques BESSON	Directeur de Recherche, Directeur du CdM, Mines Paris	Directeur

RESUME

Cette thèse a pour objectif de développer une modélisation robuste pour l'endommagement ductile. En raison de l'adoucissement et du niveau de déformation élevé, les principales difficultés pratiques dans la simulation de l'endommagement ductile sont la dépendance au maillage et le verrouillage volumique. Dans ce travail, on choisit tout d'abord le cadre de grandes déformations en se basant sur un formalisme logarithmique. Puis, partant de la loi de Gurson-Tvergaard-Needleman transcrite en grandes déformations, on adopte une formulation non locale à gradient d'une variable interne qui permet de contrôler la localisation du dommage et traiter ainsi la dépendance au maillage. Ensuite, le modèle non local est couplé avec des éléments finis mixtes pour limiter le verrouillage volumique relatif à l'incompressibilité plastique. On aboutit ainsi à la construction d'un cadre de modélisation de l'endommagement ductile, indépendant du maillage et exonéré du verrouillage volumique. Les propriétés mathématiques et la performance numérique du modèle sont étudiées avec attention. Enfin, après une identification des paramètres sur un acier nucléaire, on réalise des simulations sur des éprouvettes (AE, CT, SENT) et sur une tuyauterie de réelle dimension afin de les confronter à des résultats d'essais.

MOTS CLES : endommagement ductile, modèle GTN, grandes déformation, verrouillage volumique, éléments mixtes, localisation de déformation, dépendance au maillage, régularisation non-locale, simulation, essais

TITLE : Ductile damage modeling and numerical simulation

ABSTRACT

The major goal of this dissertation is to develop a robust model for ductile damage simulation. Because of the softening behavior and the significantly large deformation in ductile damage, two principle difficulties should be dealt with carefully: mesh-dependency and volumetric locking. In this thesis, we adopt a logarithmic finite strain framework in which the Gurson-Tvergaard-Needleman constitutive law is reformulated. Then a non-local formulation with regularization of hardening variable is applied so as to solve mesh dependency and strain localization problem. In addition, the non-local model is combined with mixed "displacement-pressure-volume variation" elements to avoid volumetric locking. Thereby we establish a mesh-independent and locking-free finite strain framework for ductile damage modelling. Attention is paid to mathematical properties and numerical performance of the model. Finally, after an identification work of a nuclear steel, we carry out simulations on normalized specimens (NT, CT, SENT) as well as an industrial tube in order to compare with experimental results.

KEYWORDS: ductile damage, GTN model, finite strain, volumetric locking, mixed finite element, strain localization, mesh-dependency, non-local regularization, simulation, experiment

Pour les sciences, la gloire et l'humanité

Avant propos

J'ai eu la chance d'être encadré tout au long de cette thèse par Jacques Besson et Eric Lorentz, experts en mécanique des matériaux, Je tiens à leur exprimer toute ma gratitude pour leur encadrement rigoureux, dynamique et attentif, tant sur le plan scientifique et technique que le plan humain. Je les remercie pour leur confiance et leur bonne humeur constantes au cours de ces trois années. Ainsi, les périodes de doutes et difficultés n'ont jamais été sources de stress. Je les remercie aussi pour leur disponibilité et leur patience permanentes. Nos discussions se sont toujours révélées concises, efficaces et instructives. Je dois leur dire que travailler avec eux a été un réel plaisir.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à tous les membres du jury. Je remercie Messieurs Sylvain Drapier et Nicolas Moës, les rapporteurs qui ont accepté la lourde tâche de relire avec attention et intérêt le manuscrit et qui ont su m'apporter de précieux conseils et des remarques constructives. Je remercie également Monsieur Ron Peerlings de m'avoir fait l'honneur de prendre part au jury. Et enfin, je remercie Monsieur Ahmed Benallal qui a accepté de présider le jury.

Cette thèse est aussi le fruit de mes études, effectuées en Chine et en France. Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance à l'Université de Nangjing, à l'École Polytechnique et à l'École des Mines ParisTech. Ces formations m'ont apporté de délicieuses nourritures intellectuelles et culturelles en sciences et en techniques. Je voudrais aussi remercier l'ANRT et EDF qui ont financé cette thèse CIFRE, et tout particulièrement EDF qui m'a offert l'opportunité de réaliser des stages et d'effectuer cette thèse.

Je remercie ensuite vivement Andreea, Baptiste, Chau, David, Dominique, Eric, François, Graham, Mustapha, Robin ainsi que tous les autres collègues du bâtiment I, qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse. En outre, nos centres d'intérêt partagés, à l'instar du cinéma, des repas, du sport, des voyages... ont égayé et enrichi ces trois années. Que nos chemins se croisent à nouveau ou pas, je leur souhaite à toutes et tous bonne continuation.

Rédiger cette thèse en français a constitué un défi non seulement scientifique, mais aussi linguistique. Je voudrais ainsi remercier mes professeurs de français, Florent Gusdof, Josephine Solinas et particulièrement Laurence Diop-Lascroux qui m'a beaucoup aidé dans la relecture.

Je tiens à remercier ma famille d'accueil de Villeneuve sur Lot et celle de mon parrain qui m'ont toujours accueilli avec gentillesse et m'ont accompagné dans la découverte de culture française.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Jing, mon amie qui m'a soutenu durant ces trois années et à mes parents pour leur amour et leur confiance inconditionnels.

Sommaire

Notation	13
Introduction générale.....	15
Première Partie – Endommagement ductile	19
Chapitre 1 – L’état de l’art de l’endommagement ductile	19
1.1 A propos de l’endommagement.....	19
1.2 Modélisation de la rupture ductile par des méthodes énergétiques	23
1.3 Modélisation de la rupture ductile par zone cohésive (CZM)	29
1.4 Modélisation phénoménologiques de la rupture ductile.....	31
1.5 Modélisation de la rupture ductile par évolution de cavités	35
1.6 Extensions du modèle GTN à basse triaxialité	41
1.7 Conclusion du chapitre et choix du modèle.....	45
Chapitre 2 – Mécanique continue de l’endommagement ductile avec le modèle GTN	47
2.1 Formulation énergétique.....	47
2.2 Formalisme de grandes déformations.....	53
2.3 Traitement de l’incompressibilité.....	56
2.4 Modèle GTN en grandes déformations	65
2.5 Conclusion du chapitre	79
Deuxième partie – Régularisation non locale	80
Chapitre 3 – Formulations non-locales	80
3.1 Dépendance au maillage.....	80
3.2 Régularisation par cinématique enrichie	82
3.3 Régularisation par un opérateur spatial non-local	83
3.4 Régularisation par une énergie enrichie	88
3.5 Formulations régularisées appliquées aux modèles de l’endommagement ductile	90
3.6 Conclusion du chapitre	93
Chapitre 4 – Régularisation à gradient de la variable d’écroutissage	96
4.1 Formulation continue.....	96
4.2 Formulation numérique	97
4.3 Application à l’endommagement avec le modèle GTN	107
4.4 Conclusion du chapitre	116
Troisième partie – Validation physique et numérique	118

Chapitre 5 – Validation sur éprouvette.....	118
5.1 Eprouvtes disponibles et démarches expérimentales.....	119
5.2 Observations fractographique.....	120
5.3 Etudes paramétriques.....	122
5.4 Identification des paramètres.....	124
5.5 Retour d’expérience numérique.....	129
5.6 Conclusion du chapitre	131
Chapitre 6 – Conclusion	132
6.1 Synthèse des travaux	132
6.2 Discussions et perspectives	133
6.3 L’avenir de la modélisation en mécanique de la rupture : précision et efficacité 137	
Références	139
Annexe	146
A1. Résolution analytique du problème d’une sphère plastique sous pression....	146
A2. Calcul de la déformation logarithmique et ses dérivées	151
A3. Analyses d’erreur du modèle GTN.....	152
A4. Termes dans la matrice tangente de la loi GTN.....	154
A5. Géométries et maillages des éprouvettes.....	155
A6. Images des champs	157

Notation

\cdot	Produit scalaire
$:$	Contraction tensorielle
X	Scalaire
\underline{X}	Vecteur
\mathbf{X}	Tenseur d'ordre 2
\mathbb{X}	Tenseur d'ordre élevé (plus que 2)
\dot{X}	Taux d'évolution par rapport au temps
X_{nl}	Variable non-locale
ΔX	L'incrément de X à un pas de temps
∇X	Gradient de X
$\nabla^2 X$	Laplacien de X
$\mathbf{X}^-, \mathbf{X}^-$	Variables du pas précédant
$\mathbf{X}^+, \mathbf{X}^+$	Variables du pas suivant
X_g, \mathbf{X}_g	Variables aux points Gauss
$\text{tr}\mathbf{X}$	Trace du tenseur \mathbf{X}
\mathbf{X}_D	Partie déviatorique du tenseur \mathbf{X} , $\mathbf{X}_D = \mathbf{X} - 1/3(\text{tr}\mathbf{X})\mathbf{I}$
X_H	Partie hydrostatique du tenseur \mathbf{X} , $X_H = 1/3\text{tr}\mathbf{X}$
$A(p)$	Force thermodynamique lié à la déformation plastique cumulée
\mathbf{C}	Tenseur Cauchy-Green
c	Paramètre non-local
\mathbf{D}	Taux de déformation Eulérienne
\mathbf{E}	Tenseur de déformation logarithmique
\mathbf{E}^e	Partie élastique de la déformation logarithmique
\mathbf{E}^p	Partie plastique de la déformation logarithmique
\mathbf{F}	Gradient de transformation
F	Fonction seuil
f	Porosité, fraction de cavités dans le matériau
f_c	Porosité de coalescence
f^*	Porosité effective
\dot{f}_{cr}	Taux de variation de porosité due à la croissance de cavités
\dot{f}_g	Taux de variation de porosité due à la germination
f_N, p_N, s_N	Paramètres de germination
\mathbb{H}	Matrice de rigidité élastique
J	Jacobien, déterminant du gradient de transformation
\mathcal{L}	Lagrangien du système
\mathcal{P}_i	Puissance interne
q_1, q_2	Paramètres du modèle GTN
r	Paramètre de pénalisation dans le modèle non-local

\mathbf{T}	Tenseur des contraintes conjugué au tenseur de déformation logarithmique
T_*	Une mesure effective du tenseur des contraintes \mathbf{T} dans le modèle GTN
δ	Coefficient d'accélération lié à la coalescence du modèle GTN
$\tilde{\lambda}, \lambda$	Multiplicateurs de Lagrange
μ	Module de cisaillement
\mathbf{v}	$\mathbf{v} = \partial T_* / \partial \mathbf{T}$
Ω_0	Volume dans la configuration initiale
Φ	Energie libre de Helmholtz
Φ^e	Partie élastique de l'énergie libre
Φ^p	Partie plastique de l'énergie libre
Ψ	Potentiel de dissipation
ρ_0	Masse volumique dans la configuration initiale
σ_0	Limite d'élasticité
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes Cauchy
σ_*	Une mesure effective du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans le modèle GTN

Introduction générale

Cadre de l'étude

Cette thèse est réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la REcherche) entre le Centre des Matériaux (CdM) de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris et le département Analyses Mécaniques et Acoustique (AMA) d'EDF R&D, en collaboration avec des travaux de recherche complémentaires menés à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA).

Elle s'inscrit dans le cadre du projet ANODE60 (Analyses des NOcivités et DEfauts) du département AMA et tire profit des résultats expérimentaux obtenus dans le projet européen STYLE (Structural integrity for lifetime management). Tous deux traitent de l'endommagement et la rupture des matériaux métalliques du nucléaire. Le premier a vocation à mettre au point des méthodologies d'analyse en mécanique de la rupture. Le second s'intéresse plus particulièrement aux soudures bimétalliques de l'EPR (European Pressurized water Reactor), aux tuyauteries du circuit primaire des centrales à eau pressurisée et aux soudures des tuyauteries des centrales AGR (Advanced gas-cooled reactor) du parc britannique

Les développements numériques de ce travail de thèse sont implantés dans le logiciel d'éléments finis *Code_Aster* (Analyse des Structures et Thermo-mécanique pour des Études et des Recherches), code de calcul de mécanique des solides développé sous Assurance de la Qualité avec lequel sont réalisées la plupart des études de mécanique à EDF. Les pré et post-traitements sont réalisés au moyen de la plateforme open-source Salome-Meca. Enfin, les essais de rupture sur les éprouvettes et sur la tuyauterie primaire de grande dimension ont été exécutés au sein du département Matériaux et Mécanique des Composants (MMC) d'EDF R&D.

Contexte industriel

Les structures exposées à des chargements sévères ou répétés finissent par se dégrader. Prédire le développement de l'endommagement sous chargements accidentels hypothétiques constitue ainsi un enjeu majeur pour garantir la sûreté d'un équipement. Plus largement, la maîtrise des phénomènes d'endommagement est également un objectif des phases de conception et dimensionnement, lorsqu'il s'agit d'assurer un compromis technico-économique entre la résistance d'une structure aux sollicitations de fonctionnement et l'augmentation de son efficacité. En intégrant ensuite les effets du vieillissement (température, corrosion, irradiation, ...), ces contraintes auront un impact direct sur la durée de fonctionnement des équipements.

Au sein d'Electricité de France, la maintenance du parc nucléaire est guidée par deux préoccupations essentielles : avant tout la sûreté, puis la disponibilité des centrales de production. L'observation de défauts sur certains composants, même sans incidence en fonctionnement normal de la centrale, nécessite d'analyser et prédire leur comportement en situations accidentelles hypothétiques, afin de prévenir toute aggravation. Ces prédictions, fondées sur des méthodes analytiques conservatives, peuvent être renforcées par des analyses mécaniques plus fines. Ces études avancées reposent généralement sur des méthodes numériques par éléments finis en mécanique de la rupture, validées par un programme

expérimental adapté. En effet, la simulation numérique est devenue incontournable pour prédire le comportement des structures, en particulier dans les situations industrielles pour lesquelles l'expérimentation à échelle réelle n'est plus envisageable. C'est le cas pour certains composants majeurs des centrales nucléaires de production d'électricité, tels que la cuve du réacteur ou encore le générateur de vapeur, pour lesquels la taille, les conditions de fonctionnement (pression, température) ou le vieillissement sont difficilement reproductibles expérimentalement de manière intégrale, non seulement pour des questions de coût mais aussi de représentativité.

Motivé par la volonté de garantir le bon fonctionnement des centrales nucléaires durant toute leur durée d'exploitation, le projet ANODE60 a pour objectif de développer et industrialiser des méthodes numériques avancées afin de démontrer la tenue mécanique des différents composants. En ce qui concerne l'endommagement ductile susceptible d'être observé dans certains composants métalliques, la modélisation et la simulation numérique sont particulièrement difficiles en raison du niveau de déformation élevé et de la perte de résistance mécanique des matériaux. La modélisation par éléments finis de l'ensemble des phénomènes impliqués se heurte encore à plusieurs verrous, en dépit des nombreux travaux menés sur ce sujet par le passé, et n'a pas encore atteint un niveau de maturité tel qu'on puisse envisager sa mise en œuvre industrielle. S'inscrivant dans ce contexte, cette thèse est réalisée afin de fournir une modélisation de l'endommagement ductile robuste (donner des résultats), fiable (reproductibilité des résultats et pertinence physique) et performante (en termes de temps calcul et de moyens informatiques requis).

Contexte scientifique

Par définition, l'endommagement ductile est caractérisé par un niveau de déformation plastique important. Par conséquent, la modélisation s'appuie nécessairement sur une cinématique de grandes déformations. Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature ; ils conduisent à des résultats proches lorsque l'écroutissage est isotrope [Simo et Miehe, 1992]. Par conséquent, tant que le matériau autorise une telle description isotrope, ce sont davantage des critères mathématiques et numériques qui guideront le choix du modèle. Dans la simulation élastoplastique en grandes déformations, l'écoulement plastique quasi-incompressible dicte l'essentiel du changement de volume au point matériel, entraînant des oscillations sur les champs des contraintes qui perturbent considérablement la convergence du calcul. En régime ductile, on pourra d'ailleurs remarquer que ce changement de volume n'est pas nul, contrairement au cas de la plasticité classique. Néanmoins, la même pathologie apparaît. Ce problème numérique bien connu, souvent appelé verrouillage volumique, nécessite des traitements spécifiques.

Dans la méthodologie de simulation de la rupture ductile, le choix d'un modèle de comportement est une première étape importante qui doit veiller à équilibrer représentativité physique, d'une part, et applicabilité numérique et industrielle, d'autre part.

Une première catégorie d'approches, dite globales ou énergétiques, consiste à analyser le taux de variation d'énergie dans une zone étendue autour de la fissure. Ces approches globales introduisent un nombre réduit de paramètres, ce qui explique qu'elles sont abondamment employées dans le cadre d'applications industrielles. Toutefois, elles ne sont pas complètement satisfaisantes car elles dépendent de la géométrie de la structure et ne s'appuient pas sur les

informations physiques qui reflètent la dégradation locale des matériaux.

En effet, l'analyse micrographique des métaux fait apparaître différents stades d'endommagement : chronologiquement, la germination de cavités (apparition d'une porosité), la croissance des cavités et enfin leur coalescence. Différents modèles, d'inspiration microphysique ([Gurson, 1977; Tvergaard et Needleman, 1984], [Rousselier, 1987]) ou purement phénoménologique ([Lemaitre, 1985]; [Brünig, 2003]), sont d'ores et déjà disponibles dans la littérature ; il conviendra de procéder à un compromis entre représentativité et applicabilité. Tous ces modèles d'endommagement ont néanmoins une caractéristique commune : l'adoucissement ou écrouissage négatif. Sans traitement particulier, cette propriété conduit à un problème mathématiquement mal posé et aberrant sur le plan physique puisque l'énergie dissipée à rupture est difficilement déterminable [Benallal et al., 1993]. En pratique, cela se traduit par des résultats dépendant pathologiquement de la discrétisation spatiale. La modélisation des phénomènes doit être enrichie par un couplage des réponses entre points matériels voisins ; on parle alors de modélisations non locales [Forest, 2009; Jirásek, 2007; Lorentz, 1999; Peerlings et al., 1996; Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987].

La compatibilité des grandes déformations avec la modélisation non locale du comportement doit elle aussi être examinée avec soin, les travaux dans ce domaine restant rares. En particulier, des instabilités d'origine géométrique peuvent apparaître, même en l'absence d'endommagement. Au finale, la modélisation de l'endommagement ductile est donc la combinaison d'une loi de comportement, d'un formalisme de grandes déformations avec traitement du verrouillage et d'une méthode de régularisation non locale, sans qu'on puisse escompter a priori un découplage de l'une de ces composantes par rapport aux autres.

Objectif et démarche

Dans ce contexte, l'objectif de cette thèse est de développer une modélisation robuste de l'endommagement ductile, en choisissant un formalisme de grandes déformations et une loi de comportement appropriée. Une attention particulière est portée aux remèdes au verrouillage volumique et à la localisation pathologique des déformations.

La structure de ce manuscrit s'organise comme suit. Le chapitre 1 commence par une introduction sur l'état de la recherche sur l'endommagement et de rupture, illustrée par quelques exemples dans l'industrie. Trois catégories différentes de modèles d'endommagement ductile sont ensuite présentées synthétiquement avec leurs atouts et leurs limitations. A l'issue de cette étude bibliographique, le modèle GTN est retenu pour la suite du travail.

Dans le chapitre 2, un élément mixte permet d'éliminer efficacement le verrouillage volumique mais soulève de nouveaux problèmes d'instabilité. Le modèle GTN est ensuite transcrit en grandes déformations via un formalisme logarithmique. Se basant sur un schéma numérique explicite pour la porosité, un algorithme robuste d'intégration de la loi de comportement est décrit en détail. Y sont abordées en particulier des questions comme le traitement des point cassés ou encore le critère de convergence.

Les chapitres 3 à 4 sont consacrés à la régularisation non-locale qui vise à pallier le problème de localisation pathologique de la déformation. Au chapitre 3, après avoir illustré la

problématique par des simulations locales, différentes approches non-locales sont présentées et comparées. La méthode de régularisation à gradient de la déformation plastique cumulée est enfin choisie dans le cadre de ce travail.

Au chapitre 4, la méthode de régularisation choisie est appliquée au modèle GTN, en combinaison avec l'élément mixte déjà évoqué. On développe ainsi un élément fini à cinq variables nodales qui traite à la fois le verrouillage volumique et la dépendance au maillage. L'implantation numérique est présentée en détails de sorte que les lecteurs intéressés pourront se l'approprier avec peu de difficulté. L'effet de la régularisation et le coût en temps de calcul sont également examinés, révélant une performance acceptable pour cet élément à cinq champs.

Le chapitre 5 consiste à appliquer le modèle développé à la simulation des éprouvettes du projet STYLE. Les démarches expérimentales sont présentées ainsi que les faciès de rupture des éprouvettes. On propose ensuite une démarche d'identification des paramètres qui tire profit des différentes caractéristiques des éprouvettes disponibles. Une partie des éprouvettes est mise de côté durant la phase de calibration de sorte à permettre des simulations « en aveugle » qui valideront la pertinence des choix méthodologiques réalisés.

Enfin, le chapitre 6 synthétise le travail principal de cette thèse et propose quelques pistes de recherche pour le futur.

Première Partie – Endommagement ductile

Chapitre 1 – L'état de l'art de l'endommagement ductile

1.1 A propos de l'endommagement

1.1.1 Courte histoire de la mécanique de la rupture avant Griffith

Le dictionnaire Larousse définit la rupture comme un état à partir duquel un objet se sépare en parties disjointes. Rien n'est éternel. La rupture existe toujours dans la nature et joue un rôle essentiel sur l'évolution de la terre : la séparation des continents forme la morphologie géographique de notre planète ; la division des cellules engendre la grande variété des êtres vivants.

L'espèce humaine découvre la rupture dès l'Age de Pierre, lorsque les hommes préhistoriques se mettent à fabriquer des outils et des armes. Au cours du temps, elle continue à observer ce phénomène avec les matériaux utilisés pour construire des monuments, des maisons ou encore des bateaux. Sous la dynastie Song (10-13^e siècle) en Chine, la fissuration est utilisée lors de la fabrication des porcelaines, cf. Figure 1, après leur cuisson, pendant la phase de refroidissement en raison des différents coefficients de dilatation thermique dans les couches du matériau. Les artisans contrôlent la vitesse de refroidissement afin d'obtenir des motifs de fissures variés. A l'époque, ce procédé très empirique pour créer des fissures décoratives n'existe que chez les artisans.



Figure 1 : Gauche : Fissuration dans une œuvre porcelaine de Geyao du 12^e siècle. Droite : rupture dans le cargo American de la deuxième guerre mondiale

Dans le monde occidental, le grand artiste et ingénieur Leonard de Vinci est considéré, dès les années 1500, comme le précurseur dans l'étude du phénomène de la rupture sur la résistance d'une corde. Dans ses notes, il illustra ses tests de tension pour montrer la proportionnalité inverse entre la longueur des fils en fer et leur résistance [Razvan, 2009]. D'autres grands noms tels Galilée (17^e siècle) et Coulomb (18^e siècle) ont également contribué à la recherche en mécanique de rupture. Galilée a publié 'Discours sur deux nouvelles sciences', premier ouvrage traitant sérieusement de résistance mécanique. Il étudia l'influence de la section sur la résistance statique des tiges, démontrant que la charge de rupture était proportionnelle à l'aire de la section droite, et s'intéressa aussi, à la résistance en flexion de divers types de poutres [Charmet, 2005]. Coulomb étudia la propagation de fissure dans les pierres sous compression [Razvan, 2009].

Plus tard, l'essor de l'industrie requiert de plus en plus d'exigence quant aux matériaux. Les structures exposées aux sollicitations mécaniques ou thermiques risquent d'être endommagées et finissent par rompre. Par exemple, les cargos américains 'liberty ship' pendant la deuxième guerre mondiale ont connus des problèmes plus ou moins graves de fissuration affectant tantôt le pont, tantôt la coque, cf. Figure 1. D'après [Razvan, 2009], la perte économique entraînée par la rupture peut atteindre, dans les années 1990, en Europe et aux Etats-Unis, une centaine de milliards d'euros par an et de nombreux accidents mortels sont à déplorer. C'est pourquoi, la rupture n'a jamais cessé d'être étudiée afin de garantir la sûreté des équipements.

Les besoins industriels du 20^e siècle ont contribué au développement de la mécanique de rupture. A la fin du 19^e, des scientifiques avaient obtenu des solutions analytiques pour définir la tension autour d'un trou dans une plaque infinie. Au début du 20^e, [Griffith, 1921] a effectué une recherche significative sur la rupture à travers des analyses énergétiques de structure. Il a défini un critère de propagation s'appuyant sur la variation d'énergie potentielle par une variation de surface de fissure. Ses études fondamentales, complétées ultérieurement par [Irwin, 1957], [Williams, 1956], [Paris et al., 1961], [Rice et al., 1973; Rice, 1968], [Hutchinson, 1968], [Francfort et Marigo, 1998], et beaucoup d'autres ingénieurs mécaniciens, forment une base théorique de la mécanique de rupture.

Aujourd'hui, grâce au développement des outils informatiques et mathématiques, la mécanique de la rupture, est devenue une discipline suffisamment mature pour être appliquée à l'industrie de pointe dans la construction, l'aéronautique et l'énergie.

1.1.2 Caractéristiques de la rupture ductile

L'un des mots clés du titre de cette thèse est 'ductile'. En effet, selon la déformation subie par le matériau (mais ce n'est pas le seul critère), on distingue la rupture fragile et la rupture ductile. Dans cette section, un travail bibliographique sera réalisé sur les méthodes de modélisation de la rupture, notamment la rupture ductile.

Du point de vue macroscopique, la rupture ductile est caractérisée, lors de la sollicitation, par une déformation plastique importante, tandis que la déformation en rupture fragile reste souvent élastique ou ne présente qu'une faible plasticité, cf. Figure 2.

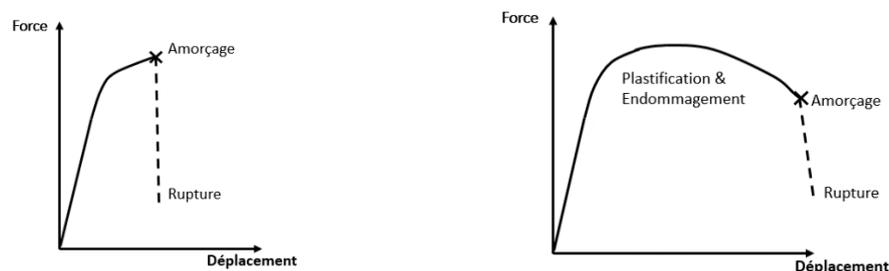


Figure 2 : Courbes de chargement de la rupture fragile (gauche) et de la rupture ductile (droite)

Parmi les matériaux courants, à température ambiante, on trouve les céramiques, les verres, les composites, les bétons dans la catégorie fragile et les polymères et les métaux dans la catégorie ductile. Toutefois, cette classification n'est pas absolue car la capacité d'un matériau à se déformer dépend de la température : la ductilité d'un matériau est généralement plus élevée à haute température et peut fortement chuter à basse température (Figure 3). L'exemple du Titanic qui a heurté un iceberg dans l'Atlantique illustre ce phénomène ; la fissure a traversé sa coque en quelques minutes [Gannon, 1995] surtout à cause d'une chute de ductilité de l'acier à basse

température.

Par ailleurs, d'autres facteurs environnementaux telles la corrosion chimique et l'irradiation pourront diminuer la ductilité du matériau.

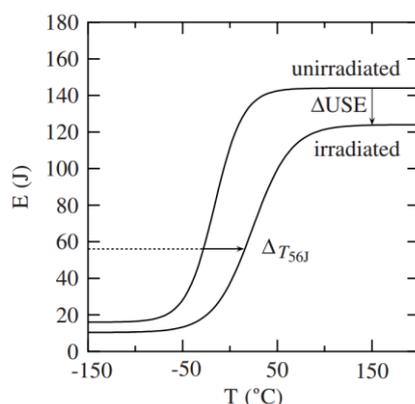


Figure 3 : L'énergie nécessaire à la rupture des essais Charpy [Bouchet et al., 2005]

Du point de vue microscopique, la rupture fragile se caractérise le plus souvent, au moins dans les matériaux à structure cristalline, par une rupture transgranulaire, c'est-à-dire se produisant à l'intérieur des grains (monocristaux). Il en résulte, à l'examen micrographique, un faciès de rupture 'brillant' : la surface de rupture est constituée de petites facettes planes ou 'marches d'escalier' réfléchissant la lumière [Leblond, 1998].

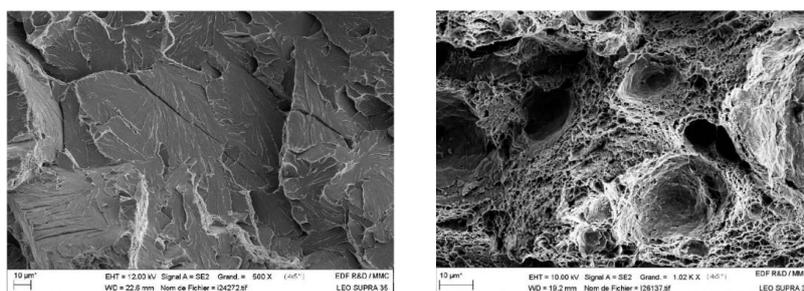


Figure 4 : Faciès de rupture à l'échelle microscopique. Gauche : rupture fragile ; droite : rupture ductile
Le mécanisme de la rupture ductile est identifié depuis longtemps, au moins dans les métaux et alliages, et comprend trois étapes :

- La germination : décohesion de la matrice métallique autour d'inclusions (sulfures, carbures...) ou rupture de ces inclusions, conduisant à la formation de microcavités, voir la Figure 5.

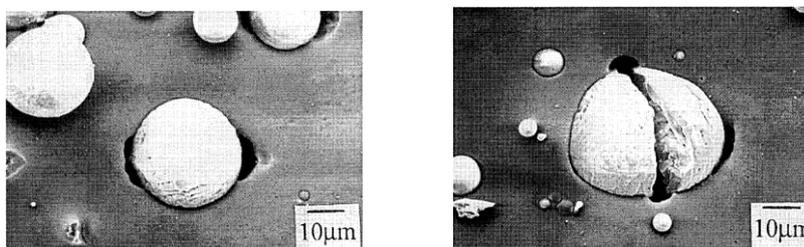


Figure 5 : Germination des cavités dans l'aluminium 6061 avec l'inclusion Al_2O_3 sous chargement horizontal. Gauche : décohesion d'inclusion. Droite : rupture d'inclusion [Kanetake et al., 1995]

- croissance : grossissement de ces cavités par écoulement plastique de la matrice, sous l'effet des contraintes de traction.

- coalescence : les cavités se joignent et forment une fissure macroscopique, menant potentiellement à la ruine de la structure.

Ces deux derniers mécanismes sont représentés par l'évolution des trous dans une plaque dans la Figure 6.

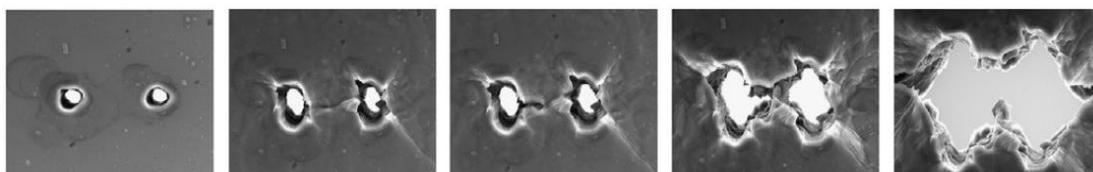


Figure 6 : Croissance et coalescence des cavités représentées par des trous dans une plaque [Weck et al., 2008]

1.1.3 L'endommagement ductile dans l'industrie

Dans les industries où les métaux sont largement utilisés, il est important d'étudier la rupture ductile pour assurer la sécurité et trouver un compromis technico-économique comme l'illustrent les exemples ci-dessous.

L'aluminium est souvent utilisé pour fabriquer les cadres des voitures et l'étape du test de crash se révèle indispensable pour définir l'épaisseur et la géométrie de la structure. L'image gauche de la Figure 7 montre une expérience sur la partie 'B-Pillar' [SIMULIA, 2008].

Pendant le transport du gaz ou du pétrole, des fissures peuvent s'amorcer après accumulation d'endommagement puis se propager dans les tuyaux, entraînant des pollutions environnementales et de fortes pertes économiques, en raison des sollicitations mécaniques et de la corrosion. Il est donc nécessaire de réaliser des études de résistance afin de mieux estimer la durée de vie de ces équipements.

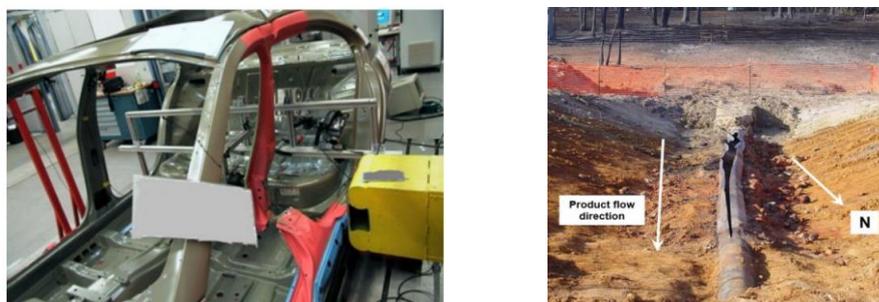


Figure 7 : Gauche : Essais de compression sur le B-Pillar d'une voiture [SIMULIA, 2008]. Droite : Un tuyau fissuré

Dans le domaine du nucléaire, l'endommagement ductile est également une préoccupation, compte tenu de l'ampleur des sollicitations thermo-mécaniques sur différents composants. Si les approches réglementaires sont généralement à même de guider le dimensionnement initial des structures, des études plus fines d'amorçage et de propagation peuvent venir compléter la démonstration de sûreté en cours de vie. On peut citer par exemple l'estimation du risque de propagation d'un défaut hypothétique – de trop petite taille pour être détecté par les opérations de contrôle non destructif – dans des pièces épaisses ou encore l'analyse des mécanismes de propagation de fissures dans des plaques soumises à un gradient de pression et de température. Le projet ANODE 60 à EDF R&D conduit certains des travaux de recherche sur cette thématique dont la présente thèse.

On trouve principalement deux types de modèles de la rupture ductile dans la littérature : les modèles relevant de l'approche énergétique (dite souvent 'globale') et les modèles

d'endommagement examinant le comportement à l'échelle des points matériels (classés dans l'approche dite 'locale'). Parmi ces derniers, on peut encore introduire une distinction supplémentaire selon qu'ils proviennent de constructions phénoménologiques ou d'analyses micro-mécaniques. Dans les sections suivantes, on présente des modèles dans chacune de ces catégories, avec leurs forces et leurs limites.

1.2 Modélisation de la rupture ductile par des méthodes énergétiques

1.2.1 L'intégrale de Rice

Parmi les modèles énergétiques, l'approche de l'intégrale de Rice (ou intégrale J) est la plus répandue et la plus utilisée dans les études industrielles [Le Delliou, 2012]. Elle caractérise le taux de restitution d'énergie d'une structure contenant une fissure lors de l'avancée de cette dernière. Une revue synthétique sur la méthode de l'intégrale de Rice se trouve dans [Hutchinson, 1983]. On présente ici les principes du modèle.

[Rice, 1968] définit une intégrale de contour définie le long d'une courbe quelconque Γ :

$$J = \int_{\Gamma} \omega dy - \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} ds \quad (1-1)$$

où $\omega = \int_0^{\epsilon} \underline{\sigma} : d\epsilon$ est la densité d'énergie de déformation, \underline{u} est le déplacement, s l'abscisse curviligne le long de Γ et \underline{n} la normale à Γ . x est la direction suivant la propagation de fissure et y son orthogonal.

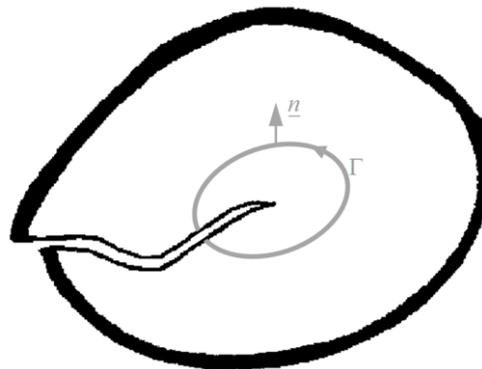


Figure 8 : Schéma de l'intégrale de Rice sur un contour

[Rice, 1968] a introduit et démontré les propriétés suivantes :

- J est nulle sur tout contour fermé n'entourant pas une singularité ;
- Pour tout contour fermé qui entoure une pointe de fissure en élasticité, J prend une valeur finie indépendante du contour choisi.

Le critère de propagation de fissure défini par Rice repose sur cette intégrale : il est considéré que la fissure commence à se propager si J atteint une valeur critique J_c .

$$J = J_c \quad (1-2)$$

La valeur de J_c peut être obtenue par des essais expérimentaux sur les éprouvettes normalisées (SENB, CT etc.), des exemples d'études sur J_c se trouvent dans [Eisele et Roos, 1991].

[Rice, 1968] a démontré la relation suivante entre J et les facteurs d'intensité de trois modes :

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (1-3)$$

Par ailleurs, il a aussi constaté que son intégrale peut être interprétée comme le taux de restitution d'énergie correspondant à une avancée virtuelle infinitésimale de la fissure :

$$J = -\frac{\partial P}{B \partial a} \quad (1-4)$$

où P est l'énergie potentielle de la structure, a la longueur de la fissure et B l'épaisseur de la structure.

À l'époque, faute d'outil informatique suffisamment puissant, le calcul de J par (1-1) n'était pratique.

Afin de simplifier l'application de l'intégrale de Rice, dans le travail de [Rice et al., 1973], les auteurs ont obtenu une approximation de J pour des éprouvettes sollicitées en flexion comportant des défauts profonds :

$$J = \eta \frac{A_s}{Bb} \quad (1-5)$$

avec A_s l'aire sous la courbe force-ouverture, B l'épaisseur de l'éprouvette, b la taille du ligament non fissuré. Le coefficient η a pour objectif de tenir compte de la composante de traction présente sur les éprouvettes CT [Merkle et Corten, 1974].

L'intégrale de Rice s'appuie sur l'hypothèse du calcul de la densité d'énergie de déformation par $\omega = \int_0^\epsilon \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}$ sans tenir compte d'une éventuelle irréversibilité du comportement. Elle ne s'applique donc en toute rigueur qu'aux lois élastiques (linéaire ou non linéaire). Spécifiquement, pour une loi élastique non-linéaire de type « loi linéaire puis loi puissance », souvent utilisée dans les études analytiques, qui s'écrit :

$$\epsilon = \frac{\alpha \sigma_0}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (1-6)$$

σ et ϵ sont la contrainte et la déformation uniaxiale, E le module d'Young et σ_0 la limite d'élasticité. α est un coefficient dépendant du matériau.

[Hutchinson, 1968] et [Rice et Rosengren, 1968] ont déduit le tenseur des contraintes (le fameux $\boldsymbol{\sigma}_{\text{HRR}}$ noté selon les initiales des auteurs) au voisinage du front de fissure :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{HRR}} = \sigma_0 \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\theta, n) \quad (1-7)$$

où I_n et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ sont des variables qui dépendent de l'exposant de l'écroûissage n . Avec cette expression, une fois la valeur de J_c déterminée par des méthodes expérimentales (par exemple (1-5)), il est possible de déduire les contraintes et les autres grandeurs au voisinage du front de fissure.

Afin d'étendre le domaine d'application de l'approche de l'intégrale de Rice vers des lois élastoplastiques, on trouve des extensions empiriques dans les normes ASTM (citées dans [Le Delliou, 2012]) qui consistent à partitionner l'intégrale de Rice en une composante élastique et une composante plastique. D'autres extensions vers l'élastoplasticité seront présentées dans les paragraphes 1.2.3 et 1.2.4.

1.2.2 Modèle à deux paramètres $J - Q$

Malgré sa simplicité, on constate souvent que l'intégrale de Rice ne peut pas correctement caractériser l'avancement de fissure car elle n'est pas un critère intrinsèque au matériau. Plusieurs auteurs, comme [Brocks et Yuan, 1989; Sumpter, 1993; Thomason, 1990], ont montré que la valeur J_c dépendait de la géométrie et de la triaxialité du chargement. La Figure 9 illustre cette dépendance en rupture fragile, qui existe également en rupture ductile.

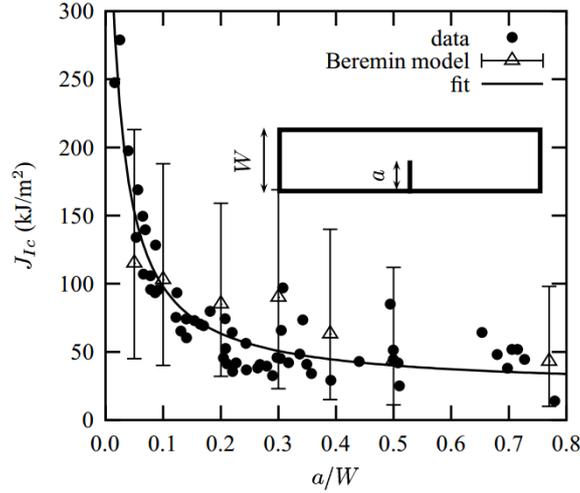


Figure 9 : Valeurs critiques de l'intégrale de Rice, obtenue avec l'éprouvette SENB (travail de [Bauvineau, 1996; Sumpter, 1993] cité dans [Besson et Berdin, 2004])

Les effets de géométrie sont liés au degré de confinement de la zone plastique et le paramètre J ne peut à lui seul rendre compte de ces effets en cas de plasticité étendue. Une piste d'amélioration a consisté à introduire un deuxième paramètre afin de prendre en compte ces effets. O'Dowd et Shih [O'dowd et Shih, 1991; O'Dowd et Shih, 1992] ont proposé une approche à deux paramètres $J - Q$, où Q est un paramètre adimensionnel qui vise à rendre compte de la triaxialité. La valeur de Q est définie par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{REF}} + Q\sigma_0\mathbf{I} \quad (1-8)$$

Ici, \mathbf{I} est le tenseur d'identité, σ_0 la limite d'élasticité. $\boldsymbol{\sigma}_{\text{REF}}$ est un tenseur des contraintes de référence qui peut être par exemple le tenseur des contraintes défini par (1-7). Des analyses basées sur des lois élastiques linéaires ou élastiques non-linéaires comme en (1-6) ont été proposées dans [O'Dowd, 1995] pour estimer la valeur de Q .

Pour appliquer cette approche à deux paramètres $J - Q$, il faut d'abord réaliser une série d'essais expérimentaux qui détermineront la courbe $J_c(Q)$ du matériau. Un exemple de cette courbe est tiré du travail [Sumpter, 1993] cf. la Figure 10. Par ailleurs, afin de réduire le nombre d'essais, [O'Dowd, 1995] donne une expression $J_c(Q)$ pour les matériaux admettant la loi de puissance (1-6) :

$$J_c = J_{Ic} \left(1 - \frac{Q}{\sigma_c/\sigma_0 - a_0(n)} \right)^{n+1} \quad (1-9)$$

où $a_0(n)$ est une fonction de l'exposant de l'écrouissage n . J_{Ic} est la valeur critique mesurée avec une géométrie telle que $Q = 0$ et σ_c est un autre paramètre à déterminer par un deuxième essai de rupture.

Une fois la courbe $J_c(Q)$ obtenue, on définit alors le critère de rupture : si le calcul conduit à un point (J, Q) au-dessus de cette courbe, la fissure se propage.

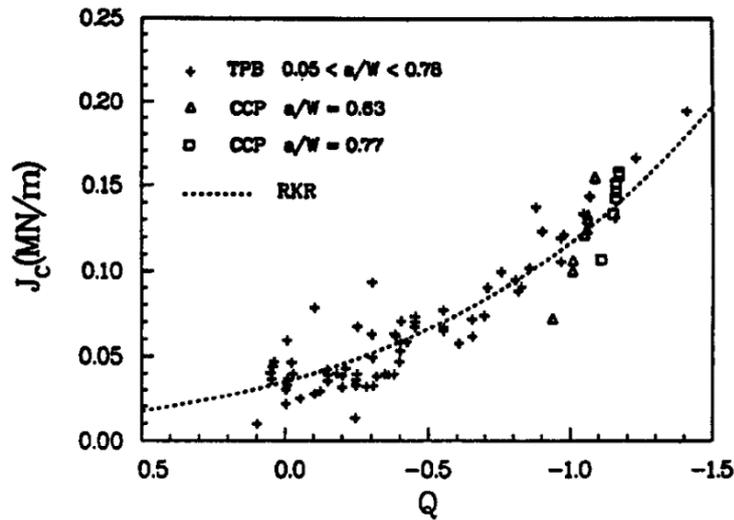


Figure 10 : Courbe $J_c(Q)$ pour l'acier A36 à -50° [Sumpster, 1993].

Cette approche à deux paramètres souffre a priori de la même limitation que l'intégrale de Rice, à savoir l'hypothèse d'un chargement monotone proportionnel. De plus, n'ayant pas pris explicitement en compte la dissipation plastique, elle n'est pas adaptée pour prédire correctement la déchirure ductile. Cependant, certains travaux, comme [Henry et Luxmoore, 1997] montrent que Q permet d'expliquer l'influence de la géométrie et de la triaxialité sur le module de déchirure ou sur le classement des courbes de résistance à la déchirure en fonction du type d'éprouvette. Cette approche est notamment utilisée pour expliquer l'effet « petit défaut » (défaut peu profond) et l'effet des chargements biaxés.

1.2.3 L'intégrale G_{TP}

Une extension de l'intégrale de Rice vers les lois élastoplastiques est réalisée par [Debruyne, 2000]. Sous l'hypothèse qu'on approche le fond de fissure par une entaille, il définit un paramètre énergétique de rupture adapté aux matériaux élastoplastiques en régime ductile fondé sur le taux de restitution de l'énergie mécanique totale (énergie élastique, énergie bloquée, énergie dissipée plastiquement) restituée par le solide dans une propagation virtuelle de l'entaille. Sur le plan numérique, ce paramètre s'exprime sous la forme d'une intégrale de domaine en utilisant une méthode de dérivation par rapport à un domaine. Ce paramètre, noté G_{TP} , est présenté pour une classe générale de chargement et de matériaux dont l'état mécanique est décrit par des variables internes. Dans le cas où le matériau est élastique et soumis à un chargement proportionnel, ce paramètre se réduit à l'intégrale J de Rice. Pour les matériaux élastoplastique à écrouissage linéaire, l'expression de G_{TP} s'écrit :

$$G_{TP} = \int_{\Omega_0} (-\omega \text{div} \underline{\theta} + (\underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon}) : \nabla \underline{\theta}) d\Omega + \int_{\Omega_0} (\underline{\sigma} \nabla \epsilon^p \underline{\theta} - (\sigma_0 - A(p)) \nabla p \cdot \underline{\theta}) d\Omega \quad (1-10)$$

où ω est la densité d'énergie totale, de même définition que (1-1) ; p est la déformation plastique cumulée et $A(p)$ la force thermodynamique associée ; ϵ^p est le tenseur de déformation plastique cumulée et $\underline{\theta}$ est le champ qui définit la variation de domaine (i.e.

l'avancée virtuelle de l'entaille).

Cette approche prend en compte la dissipation d'énergie en faisant intervenir les variables internes plastiques dans l'intégrale. Il est noté que la fissure doit être représentée par une entaille d'une faible épaisseur h , car sinon l'intégrale de G_{TP} sur un domaine fissuré avec $h=0$ produisent des résultats aberrants [Debruyne, 2000]. Mais les résultats montrent néanmoins que le taux d'énergie dissipée ne dépend pratiquement plus de l'épaisseur de l'entaille si cette dernière est assez petite (mais non nulle) par rapport à la zone d'élaboration de l'endommagement.

Cette approche pose également des difficultés quant à son utilisation comme critère de rupture, car il comporte des termes intégrant la déformation plastique au cours de l'histoire du chargement, qui représentent « l'accumulation plastique » et qui ne font que croître. En particulier dans le cas d'une charge suivie d'une décharge, G_{TP} peut croître au cours de la décharge, s'il y a replastification en fond d'entaille [Debruyne, 2000]. L'inconvénient de la croissance du paramètre en cas de décharge n'est cependant pas lié à la définition intrinsèque de ce paramètre, mais à la nature de la loi élastoplastique que l'on considère au voisinage du défaut.

1.2.4 Approche G_{fr}

Une autre approche consiste à étendre l'intégrale de Rice avec des lois élastoplastique est présentée dans les travaux de [Marie et Chapuliot, 1998; Marie et Chapuliot, 2000].

En cas de plasticité confinée, le critère proposé se base également sur une intégrale le long d'un contour curviligne. Mais ce dernier doit être positionné entre l'ancienne zone plastique et la nouvelle zone plastique après la propagation de fissure, cf. Figure 11.

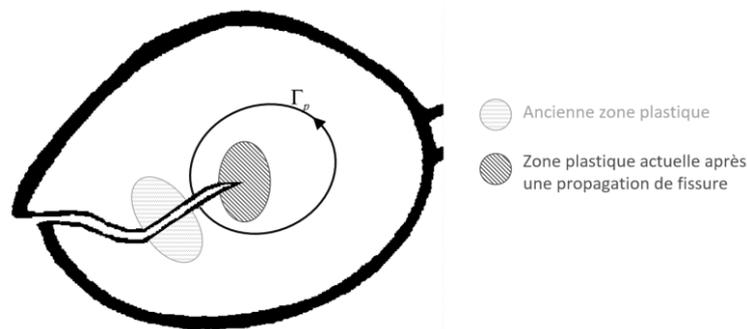


Figure 11: Schéma du contour de l'intégrale pour l'approche G_{fr} en cas de plasticité confinée

Il est montré que l'intégrale définie sur cette catégorie de contours est aussi indépendant du chemin, noté :

$$G_I = \int_{\Gamma_p} w dy - \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad (1-11)$$

On peut considérer donc une valeur critique G_{Ic} , obtenue par des méthodes expérimentales, comme le critère de rupture.

Ce concept proposé n'est en théorie valable qu'en plasticité confinée avec une extension de fissure discrète menant la pointe de fissure hors de la zone de décharge. Malheureusement, cette situation n'existe que très rarement en déchirure ductile. Par conséquent, dans le cas de la plasticité étendue, Les auteurs ont introduit le taux d'énergie de rupture G_{fr} qui est la dérivée

de l'énergie dissipée par rupture par rapport à l'avancée de la fissure :

$$G_{fr} = \frac{\partial \Psi_{rupt}}{\partial a} \quad (1-12)$$

Reposant sur le travail de [Turner, 1990] qui montre l'existence du potentiel plastique et de la dissipation de rupture dans la propagation de fissure, les auteurs de [Marie et Chapuliot, 2000] admettent l'hypothèse que G_{fr} soit un paramètre intrinsèque du matériau. (1-12) s'écrit donc :

$$\Psi_{rupt} = aG_{fr} \quad (1-13)$$

En outre, G_I peut être décomposée en deux parties : un composant élastique G_{el} et une component de rupture $\bar{a}G_{fr}$ où \bar{a} est une longueur normalisée donc sans dimension. G_{el} est calculé de la même manière que la partie élastique dans l'intégrale de Rice (ou directement par l'expression (1-3)), et G_{fr} est un paramètre du matériau à identifier avec la courbe $J - \Delta a$ ou la courbe force-avancée de fissure obtenues par l'expérience.

Par conséquent la fissure propage si la condition suivante est vérifiée :

$$G_I = G_{el} + \bar{a}G_{fr} \quad (1-14)$$

Dans l'implantation numérique, la procédure pour simuler l'amorçage et la propagation de fissure est aussi synthétisée par les mêmes auteurs :

1. L'amorçage de fissure repose sur le critère de Rice, à savoir $J_R = J_c$
2. Relâcher des nœuds pour étendre la fissure d'une distance \bar{a} tout en gardant le chargement en déplacement.
3. Calculer G_{el} dans cette nouvelle configuration.
4. Augmenter le chargement jusqu'à ce que la condition (1-14) soit vérifiée.
5. Répéter l'étape 2.

Avec cette approche G_{fr} , [Marie et Chapuliot, 2000] a réussi à simuler des éprouvettes CT ainsi qu'un tuyau fissuré. Dans ces simulations, il apparaît que G_{fr} est suffisamment indépendant de la géométrie.

Une étude plus récente par [Acharyya et al., 2008] a proposé une modification de cette approche en divisant l'ouverture de fissure en deux parties : une partie due à la déformation et une autre partie due à la propagation de fissure. Dans ce travail, G_{fr} est obtenue à base de la courbe $J'_{M,pl} - \Delta a$ issue de l'expérience, où $J'_{M,pl}$ est une version modifiée de l'intégrale Ernst [Ernst, 1983]. Il est montré que la valeur de G_{fr} reste suffisamment constante dans un intervalle admissible. Une valeur moyenne a été choisie afin de réaliser des simulations à comparer avec l'expérience, ce qui donne une bonne cohérence. [Dhar et al., 2008] a combiné cette approche avec le modèle cohésif et montré que G_{fr} peut dépendre de la longueur de fissure. Il a introduit la fonction $G_{fr}(\Delta a)$ qui tend vers une valeur constante lors d'une grande propagation de fissure. L'emploi de $G_{fr}(\Delta a)$ donne de meilleurs résultats que G_{fr} constant. Plus récemment, [Matheron et al., 2012] a utilisé cette méthode pour étudier la propagation de fissure dans l'éprouvette CT à différentes températures.

1.2.5 Bilan des approches globales

Grâce à leur simplicité par rapport aux modèles d'endommagement (présentés dans la section suivante), toutes ces approches à base de l'intégrale de Rice sont largement utilisées dans les applications industrielles. Elles permettent de réaliser une étude rapide, même analytiquement sans calcul numérique dans certaines circonstances.

Néanmoins, n'ayant pas (ou peu) tenu compte des mécanismes physiques à l'origine de la rupture ductile, ces approches énergétiques souffrent de diverses limitations :

- elles ne peuvent traiter que des fissures préexistantes et ne peuvent être appliquées pour modéliser l'amorçage des fissures. Toutes les analyses de ces modèles s'appuient sur une fissure ou une entaille préalablement définie.
- les critères correspondants ne sont pas intrinsèques au matériau. C'est au moins le cas de l'intégrale de Rice. La méthode à deux paramètres semble pallier ce problème mais introduit un nouveau paramètre qui n'est pas facile à déterminer. Pour le paramètre G_{TP} , il faudrait plus de comparaisons essais-simulations pour vérifier le caractère intrinsèque.
- elles ne sont valables qu'avec un chargement monotone.
- elles peuvent difficilement être appliquées à des géométries complexes telles que des zones soudées, par exemple.
- l'hypothèse de Griffith qui stipule que l'énergie dissipée par fissuration est proportionnelle à la surface fissurée n'est probablement plus réaliste, car en rupture ductile, on ne peut pas clairement distinguer ce qui relève de la plasticité et ce qui relève de la rupture.

1.3 Modélisation de la rupture ductile par zone cohésive (CZM)

Le modèle à zone cohésive est un modèle phénoménologique qui ne prétend pas représenter finement le processus physique réel de rupture. Il permet une représentation simplifiée de la zone active en pointe de fissure adaptée à une grande variété de problèmes dans les domaines fragiles et ductiles. Cette approche a d'abord été introduite par [Dugdale, 1960] et [Barenblatt, 1962] afin de caractériser les champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure dans les solides élastiques linéaires. Les travaux fondateurs sur l'application des zones cohésives aux matériaux métalliques ont été réalisés par [Needleman, 1990; Tvergaard et Hutchinson, 1992, 1994].

L'utilisation de CZM nécessite idéalement une connaissance préalable du chemin de la fissure, perçue comme une discontinuité du champ de déplacement. Une loi cohésive fournit alors une relation entre le saut de déplacement et le vecteur des contraintes exercées. Des éléments finis spécifiques (éléments d'interface, cf. [Lorentz, 2008]) assurent la discrétisation spatiale du chemin de fissuration. Pour la rupture ductile, une loi typique est illustrée dans la Figure 12.

Cette loi trapézoïdale comprend 4 paramètres, représentés sur la figure. L'aire sous la courbe de la loi est notée G_c , représentant le coût énergétique de la fissuration. Avec cette loi trapézoïdale, on peut en déduire : $G_c = \frac{\sigma_c}{2} (\delta_c + \delta_p - \delta_e)$. Initialement proposée par [Tvergaard et Hutchinson, 1992], cette loi a été largement employée dans les études de rupture ductile [Yang et al., 1999].

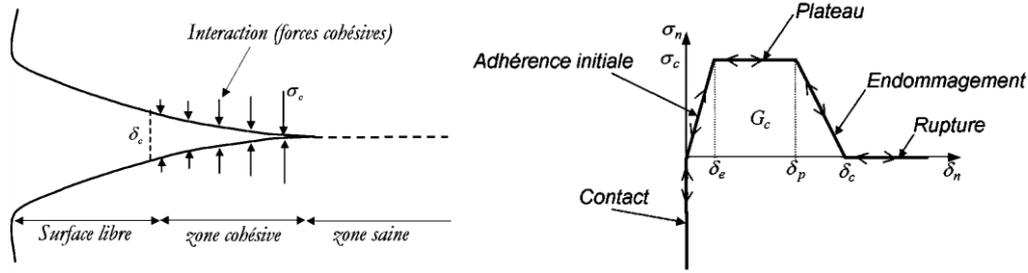


Figure 12 : Une loi cohésive pour la rupture ductile [LAVERNE, 2011]

Le critère de rupture avec la méthode CZM repose sur l'énergie de fissuration ou simplement sur le déplacement normal. L'élément est considéré fissuré si :

$$G = \int_0^{\delta} \sigma(\delta) d\delta = G_c \quad \text{ou} \quad \delta = \delta_c \quad (1-15)$$

La loi de comportement d'une zone cohésive est considérée comme une propriété matériau. Plusieurs lois pour la rupture ductile peuvent être trouvées dans la littérature, dont l'une des plus utilisées est celle proposée par Scheider et Brooks, cf.

Figure 13. Elle a été maintes fois utilisée dans les travaux de [Cornec et al., 2003; Scheider et Brooks, 2003, 2006].

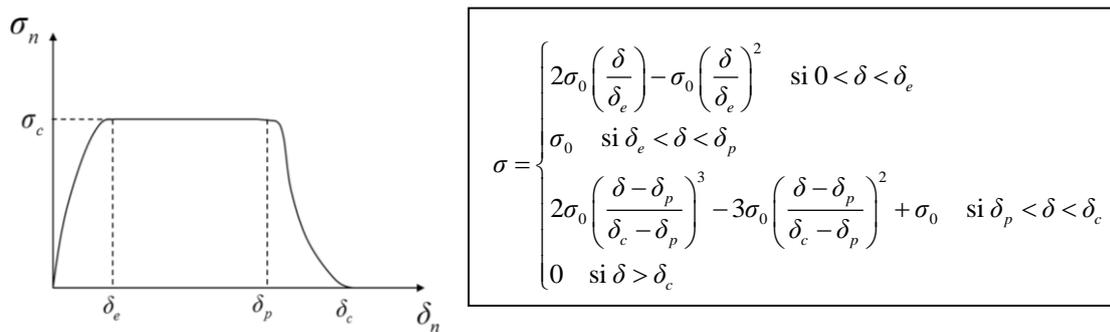


Figure 13 : Loi cohésive proposée par Scheider et Brooks [Scheider et Brooks, 2003]

L'avantage premier qui a poussé à l'utilisation des modèles de zone cohésive est, par rapport aux autres modèles locaux, le petit nombre de paramètres à identifier grâce à la représentation simple de la zone d'élaboration de la rupture en avant de la fissure. Dans la pratique, les rapports de δ_e et δ_p sur δ_c sont souvent fixés et il ne reste donc que deux paramètres à identifier : (σ_c, δ_c) ou (σ_c, G_c) . Sur le plan de la terminologie, on pourrait considérer que le modèle à zone cohésive est un modèle énergétique, mais avec une zone d'intérêt locale (la zone d'élaboration de la rupture).

Néanmoins, un inconvénient majeur des modèles à zone cohésive est la nécessité de connaître le trajet de fissure. Ceci implique qu'ils ne peuvent pas prédire la direction de la propagation. Un remède consiste à envisager tous les trajets de fissure possibles entre les éléments du maillage. Mais d'après [Scheider et Brooks, 2003], cela introduit également une dépendance importante du trajet vis-à-vis du maillage et une surestimation des zones fissurées.

Un deuxième problème se pose quant à la pente initiale de ces lois. D'un point de vue numérique, cela peut conduire à des difficultés de convergence et à des oscillations dans la réponse globale de la structure. Certaines formulations aux éléments finis, comme celle proposée par Lorentz [Lorentz, 2008] basée sur un formalisme de lagrangien augmenté, autorisent une pente initiale infinie et permettent ainsi de s'affranchir de ces faiblesses.

Le choix d'une loi cohésive étant potentiellement délicat, certains auteurs ont combiné ce type de modèles avec des lois (volumiques) plus physiques, par exemple avec la loi de GTN (présenté dans le paragraphe 1.5.2) [Hutter et al., 2014; Pardoen et Hutchinson, 2003; Xia et Shih, 1995; Xia et al., 1995]. Cependant, le CZM est incapable de décrire le caractère diffus de l'endommagement ductile (rencontré par exemple dans des barreaux entaillés) puisque l'endommagement est confiné dans une seule couche d'éléments cohésifs [Besson, 2010].

1.4 Modélisation phénoménologiques de la rupture ductile

1.4.1 Modèle de Lemaitre

Pour caractériser la dégradation des propriétés mécaniques du matériau lors de l'endommagement, [Lemaitre, 1985] introduit une variable thermodynamique D dont la valeur est comprise entre 0 et 1. En supposant une densité homogène de microcavités ou microfissures dans la structure endommagée, il définit un tenseur des contraintes effectives par :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D} \quad (1-16)$$

Pour un matériau élastoplastique avec un écrouissage isotrope, la fonction seuil du matériau endommagé s'écrit :

$$f_L(\boldsymbol{\sigma}, D) = \tilde{\sigma}_{\text{eq}} + A(p) - \sigma_0 \quad (1-17)$$

En définissant un potentiel de dissipation par l'endommagement,

$$\mathcal{D}^{\text{endo}} = \frac{S}{(s+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{S} \right)^{s+1} \quad (1-18)$$

on obtient l'évolution de la variable d'endommagement :

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \dot{p} \quad (1-19)$$

où s et S sont des paramètres du modèles à identifier. Y est la force thermodynamique liée à la variable d'endommagement dont l'expression pour un matériau à élasticité isotrope est :

$$Y = -\frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{2E(1-D)^2} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_{\text{H}}}{\sigma_{\text{eq}}} \right)^2 \right] \quad (1-20)$$

La variable D représente le niveau d'endommagement du matériau. La rupture se produit lorsque :

$$D = D_c \quad (1-21)$$

où D_c est considéré comme un paramètre du matériau à recalculer. On trouve des détails de l'identification des paramètres de ce modèle dans [Lemaitre et Desmorat, 2005; Lemaitre et Dufailly, 1987].

Afin de tenir compte de la fermeture de la fissure et de distinguer l'endommagement entraîné par la traction et par la compression, Lemaitre a proposé de séparer le tenseur des contraintes en une partie de traction et une partie de compression en fonction de la signe des contraintes principales [Lemaitre, 1992]. Pour la partie de traction, la contrainte effective est définie comme (1-16) ; mais pour la partie de compression, la définition de celle-ci fait intervenir un coefficient h :

$$\tilde{\sigma}_{comp} = \frac{\sigma_{comp}}{1-hD} \quad (1-22)$$

Plus récemment, [Allahverdizadeh et al., 2014] a étudié la transférabilité du modèle de Lemaitre et a constaté que la précision du modèle Lemaitre dépend de la géométrie de la structure et de la triaxialité du chargement. Mais au global, le modèle peut prédire correctement le déplacement au moment de rupture dans toutes les éprouvettes étudiées par [Allahverdizadeh et al., 2014].

Des extensions du modèle pour les matériaux à endommagement anisotrope ont été réalisées dans [Lemaitre et al., 2000; Niazi et al., 2010], où la variable d'endommagement est un tenseur d'ordre 2.

1.4.2 Modèle avec une fonction dépendant du trajet de chargement

Le modèle de rupture employé dans les travaux de [Bai et Wierzbicki, 2008; Bao et Wierzbicki, 2004; Basu et Benzerga, 2015; Benzerga et al., 2012; Papisidero et al., 2015; Wierzbicki et al., 2005] repose sur un critère phénoménologique qui consiste à définir une variable d'endommagement par l'intégrale d'une fonction de l'état du chargement sur le chemin de la déformation plastique cumulée : la rupture a lieu si

$$D(\epsilon_{eq}, \eta, \zeta) = \int_0^{\epsilon_{eq}} g(\eta, \zeta) d\epsilon_{eq} = D_c \quad (1-23)$$

Ici, $\eta = \sigma_H / \sigma_{eq}$ est la triaxialité et $\zeta = 27 \det \boldsymbol{\sigma} / 2(\sigma_{eq})^3$ le paramètre de Lode et D_c est paramètre de matériau et $g(\eta, \zeta)$ une fonction à déterminer.

Pour un chargement proportionnel, la triaxialité et le paramètre de Lode ne dépendent pas de l'histoire du chargement. On a donc :

$$\epsilon_{eq}^f = \frac{D_c}{g(\eta, \zeta)} \quad (1-24)$$

avec ϵ_{eq}^f la déformation plastique cumulée à la rupture.

Pour un chargement quelconque, [Bai et Wierzbicki, 2008; Bao et Wierzbicki, 2004; Wierzbicki et al., 2005] ont proposé d'introduire les valeurs moyennes de η et ζ au long du chargement jusqu'à la rupture :

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{\epsilon_{eq}^f} \int_0^{\epsilon_{eq}^f} \eta d\epsilon_{eq} \quad ; \quad \langle \zeta \rangle = \frac{1}{\epsilon_{eq}^f} \int_0^{\epsilon_{eq}^f} \zeta d\epsilon_{eq} \quad (1-25)$$

et ils ont supposé :

$$\epsilon_{eq}^f = \frac{D_c}{g(\langle \eta \rangle, \langle \zeta \rangle)} \quad (1-26)$$

La fonction $g(\eta, \zeta)$ peut être déterminée comme proposé dans [Bai et Wierzbicki, 2008; Bao et Wierzbicki, 2004; Basu et Benzerga, 2015; Papisidero et al., 2015; Wierzbicki et al., 2005], par l'intermédiaire d'essais complétés par des simulations numériques. Par exemple, [Bao et Wierzbicki, 2004] a réalisé une série d'essais sur des éprouvettes cylindriques sans ou avec entaille, des plaques trouées, et des éprouvettes du type Arcan afin d'étudier la rupture ductile aux différentes triaxialités. En complément des essais, les auteurs ont ensuite effectué des

simulations s'appuyant sur la loi élastoplastique de von Mises pour obtenir la réponse globale (force – déplacement) des éprouvettes. La relation $\epsilon_{eq}^f - \langle \eta \rangle$ se déduit ainsi par les résultats de simulation. On donne à la Figure 14 un exemple de courbe $\epsilon_{eq}^f - \langle \eta \rangle$ pour l'aluminium 2024-T351 identifiée par [Bao et Wierzbicki, 2004].

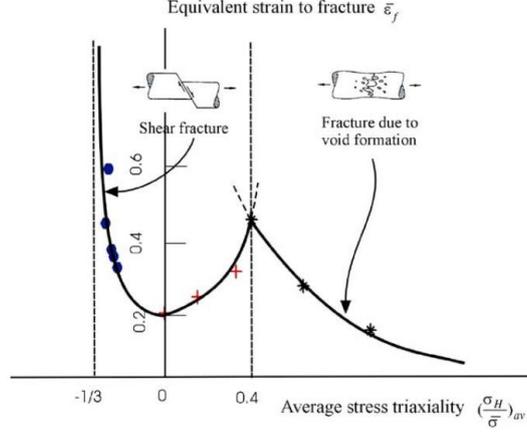


Figure 14: La déformation plastique cumulée à la rupture ϵ_{eq}^f en fonction de la triaxialité moyenne $\langle \eta \rangle$ [Bao et Wierzbicki, 2004]

Dans le travail de [Bai et Wierzbicki, 2008], les auteurs ont introduit la dépendance au paramètre de Lode et proposent la relation suivante :

$$\epsilon_{eq}^f(\langle \eta \rangle, \langle \zeta \rangle) = \left[\frac{1}{2}(\epsilon_{eq}^{f(+)} + \epsilon_{eq}^{f(-)}) - \epsilon_{eq}^{f(0)} \right] \langle \zeta \rangle^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_{eq}^{f(+)} - \epsilon_{eq}^{f(-)}) \langle \zeta \rangle + \epsilon_{eq}^{f(0)} \quad (1-27)$$

où $\epsilon_{eq}^{f(+)}$, $\epsilon_{eq}^{f(-)}$ et $\epsilon_{eq}^{f(0)}$ sont des fonctions de $\langle \eta \rangle$ et elles correspondent respectivement aux cas $\langle \zeta \rangle = 1, -1, 0$.

On se réfère aux travaux [Papasidero et al., 2015] et [Basu et Benzerga, 2015; Benzerga et al., 2012] pour d'autres formes de la fonction $\epsilon_{eq}^f(\langle \eta \rangle, \langle \zeta \rangle)$.

Une fois la relation entre ϵ_{eq}^f et (η, ζ) établie, on pourra employer le critère de rupture reposant sur la déformation équivalente :

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_{eq}^f \quad (1-28)$$

Le modèle présenté ci-dessus dans ce paragraphe ne demande pas beaucoup d'implémentation. En effet, la variable d'endommagement n'intervenant pas dans la fonction seuil, le modèle utilise la même loi de comportement qu'en régime élastoplastique. Le travail numérique consiste à ajouter le critère de rupture (1-28) comme post-traitement numérique. Mais l'identification de l'expression ϵ_{eq}^f nécessite de nombreux essais expérimentaux.

Par ailleurs, [Xue et Wierzbicki, 2009] a couplé l'évolution de l'endommagement et l'évolution de la plasticité en faisant intervenir une fonction $w(D)$ dans la fonction seuil :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_M, D) = \sigma_{eq} - w(D)\sigma_M \quad (1-29)$$

où $w(D) = 1 - D^\beta$ et $\sigma_M = \sigma_0(1 + \epsilon_{eq}/\epsilon_0)$ avec β un paramètre du matériau à identifier, σ_0 la limite d'élasticité et ϵ_0 une déformation de référence. Avec ce modèle, [Xue et Wierzbicki, 2009] a réussi à prédire la fissuration plate et la fissuration inclinée dans les éprouvettes CT.

1.4.3 Modèle de Brünig

Un autre modèle purement phénoménologique introduit par [Brünig, 2003] couple l'élastoplasticité avec l'endommagement. Cette modélisation [Brünig, 2003] est réalisée en grandes déformations dans le cadre du formalisme logarithmique (cf. le paragraphe 2.2.2). Le travail original s'effectue avec un matériau anisotrope en faisant intervenir un tenseur de la variable de l'endommagement \mathbf{A}^{da} dans l'énergie libre de Helmholtz. Il est facile d'en déduire le modèle en cas d'isotropie avec une variable scalaire de l'endommagement a^{da} . Par ailleurs, comme dans le modèle de Lemaitre, la variable d'endommagement (scalaire ou tenseur) intervient en tant que variable interne tout comme la déformation plastique. L'écoulement plastique et l'évolution de la variable d'endommagement dérivent d'une loi de normalité, même si le potentiel qui caractérise l'écoulement n'est pas associé à la fonction seuil. Plus précisément, la fonction seuil de l'endommagement s'écrit différemment dans les différents intervalles de triaxialité [Brünig et al., 2011] :

$$f^{da} = T_H + \hat{\beta} \frac{1}{\sqrt{3}} T_{eq} - T_c = 0 \quad \text{avec} \quad \hat{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{3} \leq \eta \leq 0 \\ 0 & \text{si } \eta \geq \eta_T \\ \beta & \text{si } 0 \leq \eta \leq \eta_T \end{cases} \quad (1-30)$$

où \mathbf{T} est le tenseur des contraintes défini dans la formulation logarithmique en grandes déformations ; T_c désigne un seuil de contrainte d'endommagement à identifier ; $\eta = T_H / T_{eq}$ est la triaxialité et η_T est un paramètre à identifier qui correspond à la triaxialité lors de la transition entre la traction et la sollicitation mixte. La valeur de η_T proposée par [Brünig et al., 2011] est $1/\sqrt{3}$. Enfin, le paramètre β est une fonction de la triaxialité. Une des formes proposées par Brünig pour β est :

$$\beta = 1 - (d\eta)^m \quad (1-31)$$

où d et m sont des paramètres supplémentaire du matériau. Leur valeurs identifiées dans [Brünig et al., 2011] sont $d = 1,732$ et $m = 1,18$.

La Figure 15 présente la valeur de $\hat{\beta}$ dans chaque intervalle de triaxialité.

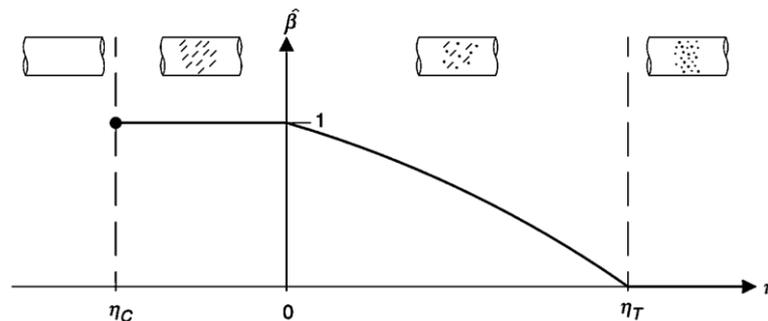


Figure 15 : Le paramètre d'endommagement $\hat{\beta}$ en fonction de la triaxialité dans le modèle de Brünig [Brünig et al., 2011]

Quant au critère de rupture, Brünig a proposé d'utiliser l'expression comme suit pour un matériau anisotrope :

$$f^{rup} = A_H^{da} + \widehat{\beta} \frac{1}{\sqrt{3}} A_{eq}^{da} - \mu_c = 0 \quad (1-32)$$

où A_H^{da} est la partie hydrostatique du tenseur de l'endommagement \mathbf{A}^{da} , et μ_c un seuil de l'endommagement à identifier (0,035 proposé dans [Brünig et al., 2011]).

On peut aussi en déduire le critère de rupture pour un matériau isotrope :

$$f^{rup} = a^{da} - \mu_c = 0 \quad (1-33)$$

Une discussion détaillée sur l'identification des paramètres ainsi qu'une comparaison simulation – expérience peuvent être trouvée dans les études récentes [Brünig et al., 2008; Brünig et al., 2014].

1.4.4 Bilan des modèles phénoménologiques

Dans cette section, on a présenté trois modélisations phénoménologiques pour l'endommagement ductile : le modèle de Lemaitre, le modèle avec une fonction dépendant du trajet de chargement et le modèle de Brünig. En général, ces modèles phénoménologiques introduisent un critère artificiel de rupture s'appuyant sur une variable d'endommagement qui tient peu compte du micro-mécanisme de la rupture ductile.

Le modèle de Lemaitre et le modèle de Brünig s'appuient sur un cadre thermodynamique en introduisant un variable interne d'endommagement. Il est possible de distinguer, dans les deux modèles, l'énergie de dissipation plastique et l'énergie de dissipation d'endommagement. La variable d'endommagement étant un tenseur, le modèle de Brünig s'applique directement aux matériaux anisotropes. On trouve également des extensions anisotropes du modèle de Lemaitre. Sur le plan numérique, ces deux modèles souffrent tous les deux d'une dépendance au maillage et d'un verrouillage volumique en grandes déformations.

1.5 Modélisation de la rupture ductile par évolution de cavités

1.5.1 Modèle de Rice et Tracey

Une première contribution importante a été apportée par [Rice et Tracey, 1969], qui ont étudié, par analyse limite approchée, la croissance d'une cavité initialement sphérique située dans un milieu rigide parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises et soumise à un chargement uniforme à l'infini. Partant des résultats des calculs numériques, les auteurs ont fourni l'expression de la vitesse de dilatation de la sphère :

$$\frac{\dot{R}}{R\dot{p}} = 0,588 \sinh\left(\frac{3\sigma_H}{2\sigma_0}\right) + 0,08v_L \cosh\left(\frac{3\sigma_H}{2\sigma_0}\right) \quad (1-34)$$

où $\dot{\epsilon}_{eq}$ est le taux de la déformation plastique, σ_H la partie hydrostatique du tenseur des contraintes, σ_0 la limite d'élasticité et $v_L = -3\epsilon_2/(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ la variable de Lode avec ϵ_i les déformations principales $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$.

En cas de triaxialité élevée avec une déformation axiale, (1-34) conduit à l'expression suivante, plus souvent utilisée dans la littérature :

$$\frac{\dot{R}}{R\dot{p}} = 0,283 \exp\left(\frac{3\sigma_H}{2\sigma_0}\right) \quad (1-35)$$

Le critère de rupture est défini par la taille de la cavité normalisé par le rayon initial $\bar{R} = R/R_0$:

$$\bar{R} = \bar{R}_c \quad (1-36)$$

La valeur de \bar{R}_c est à déterminer par des essais.

Dans la pratique, l'extension du modèle de Rice et Tracey à une loi élastoplastique avec écrouissage consiste simplement à remplacer σ_0 dans (1-35) par la contrainte équivalente de von Mises courante σ_{eq} .

Le résultat majeur du modèle de Rice et Tracey [Rice et Tracey, 1969] a été de mettre en évidence l'importance déterminante, sur la croissance des vides, de la triaxialité (σ_m/σ_{eq}). Son inconvénient principal était de ne pas déboucher sur un modèle de comportement pour un matériau poreux quelconque, l'hypothèse d'un milieu infini entraînant automatiquement la nullité de la fraction de cavités.

Ce critère a servi de base pour la conception de quelques modèles plus adaptés dont le modèle de Gurson et ses variantes qui ont fait leur preuve dans la littérature.

1.5.2 Modèle de GTN (Gurson-Tvergaard-Needleman)

Une seconde contribution dans les années 1970, d'importance fondamentale, est due à Gurson [Gurson, 1977], élève de Rice. S'inspirant du modèle Rice et Tracey, il a réalisé une analyse limite approchée d'une sphère creuse (volume représentatif élémentaire typique d'un milieu poreux) plastique, obéissant au critère de von Mises et soumise à un chargement quelconque.

Un grand avantage du modèle de Gurson est que la fraction des cavités peut alors prendre des valeurs entre 0 et 1, contrairement à la porosité nulle du modèle Rice et Tracey. L'analyse de Gurson a débouché sur un modèle de comportement macroscopique complet pour les matériaux ductiles poreux. Elle comprend quatre éléments issus du passage micro-macro [Leblond, 1998] : E1 – un critère de plasticité où apparaissent la contrainte effective macroscopique et la porosité ; Gurson a proposé une fonction seuil qui couple l'écrouissage plastique et l'évolution d'une nouvelle variable – la porosité f – symbolisant la fraction des cavités dans la matière. Cette fonction seuil s'écrit :

$$G(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_f, f) = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_f} \right)^2 + 2 \cosh \left(\frac{3\sigma_H}{2\sigma_f} \right) - (1 + f^2) \leq 0 \quad (1-37)$$

où σ_f est la contrainte d'écoulement courante, liée à la loi d'écrouissage. On retrouve la fonction seuil de von Mises pour un matériau sain ($f = 0$).

D'après (1-37), le domaine d'élasticité de la loi diminue avec la croissance de la porosité, cf. Figure 16.

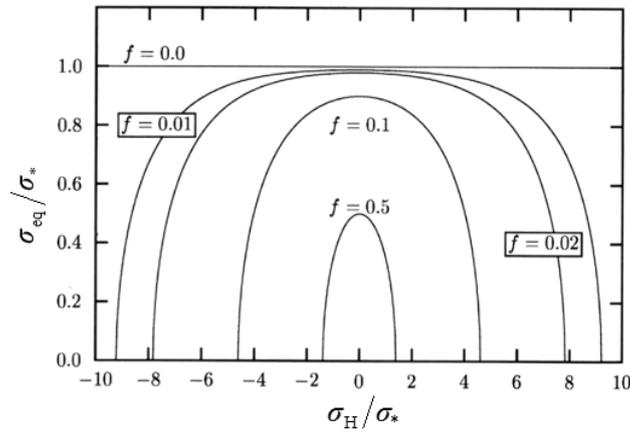


Figure 16 : Domaine d'élasticité de la loi Gurson en fonction de la porosité

E2 – une loi d'écoulement plastique macroscopique associée par normalité au critère ;
On démontrera rigoureusement ce passage micro-macro de l'écoulement plastique dans le paragraphe 2.4.1 par l'homogénéisation.

E3 – une loi d'évolution de la porosité, déduite de l'incompressibilité approchée (l'élasticité étant négligée) de la matrice du matériau ;

Ceci consiste à définir le taux de variation de la porosité dû à la croissance de cavité, en utilisant le caractère isochore de la déformation plastique du matériau de base [Gurson, 1977] :

$$f = 1 - \frac{V_b}{V} \Leftrightarrow \dot{f} = \frac{V_b}{V} \cdot \frac{\dot{V}}{V} = (1-f) \text{tr} \dot{\epsilon}^p \quad (1-38)$$

Ici V_b est le volume de la matière de base et V est le volume total dans la configuration déformée.

E4 – une description des effets d'écrouissage, tenant compte de la croissance des vides.

Pour un matériau de plasticité parfaite, $\sigma_f = \sigma_0$. Les effets d'écrouissage sont introduits de manière purement heuristique et non par un authentique passage 'micro-macro' [Leblond, 1998]. Dans la pratique, il suffit de redéfinir la contrainte effective, par exemple pour un matériau avec l'écrouissage isotrope :

$$\sigma_f = \sigma_0 - A(p) \quad (1-39)$$

où $A(p)$ est la force thermodynamique liée à la déformation plastique cumulée p .

L'analyse de Gurson, bien que séduisante, ne traite que de la croissance des cavités dans la matière. Or les deux autres mécanismes de la rupture ductile, à savoir la coalescence et la germination, doivent aussi être pris en compte dans le modèle afin d'avoir une meilleure cohérence avec les expériences [Chu et Needleman, 1980; Tvergaard, 1982; Tvergaard et Needleman, 1984].

Coalescence

Pour introduire l'effet de l'interaction entre les cavités, [Tvergaard, 1982; Tvergaard et Needleman, 1984] ont introduit une modification sur la fonction seuil de Gurson :

$$G(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_*, f^*) = \left(\frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_f} \right)^2 + 2q_1 f^* \cosh \left(\frac{3q_2 \sigma_H}{2\sigma_f} \right) - 1 - (q_1 f^*)^2 \leq 0 \quad (1-40)$$

où q_1 et q_2 sont deux nouveaux paramètres à identifier et f^* la porosité effective définie comme suit :

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (1-41)$$

avec f_c la porosité de coalescence à laquelle nous considérons que les cavités commencent à coalescer, et δ un coefficient à identifier qui détermine la vitesse de coalescence.

Germination

Dans l'hypothèse où la germination ne dépend que du niveau de la déformation plastique, [Chu et Needleman, 1980] ont proposé d'ajouter un nouveau terme dans le taux de variation de la porosité :

$$\dot{f} = \dot{f}_g + \dot{f}_n = (1 - f)\text{tr}\dot{\epsilon}^p + B_n \dot{p} \quad (1-42)$$

où B_n est une fonction positive de la déformation plastique cumulée. Une telle modélisation ne respecte clairement pas la conservation de volume car la relation (1-38) n'est plus vérifiée. Mais physiquement, cette augmentation du taux de porosité dans (1-42) peut être considérée comme la perte de matière lors de la décohésion des inclusions.

Une forme gaussienne couramment utilisée pour \dot{f}_n est donnée par [Chu et Needleman, 1980] :

$$\dot{f}_n = B(p)\dot{p} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{p - p_N}{s_N}\right)^2\right] \dot{p} \quad (1-43)$$

où f_N est la fraction des inclusions ou autrement dit, la contribution de la germination à l'évolution de la porosité. p_N est la déformation plastique cumulée à laquelle le taux de la germination atteint son maximum. s_N est la déviation standard des déformations de germination. On se réfère au paragraphe 2.4.4 pour plus de détails sur le calcul de (1-43).

D'autres modèles de germination plus complexes distinguant la décohésion et la fracture des inclusions sont aussi proposés plus tard dans les travaux de [Besson et Guillemer-Neel, 2003; Grange et al., 2000].

Rupture

Avec ce modèle, la rupture a lieu quand la porosité (effective) f (ou f^*) atteint sa valeur maximale :

$$f^* = f_r \text{ ou } f = \frac{f_r - f_c}{\delta} + f_c \quad (1-44)$$

où $f_r = 1/q_1$ définit la porosité effective à la rupture. Dans ce cas, l'équation (1-40) implique la nullité des contraintes : $\sigma = \mathbf{0}$. C'est-à-dire que le matériau n'a plus de résistance.

Pour résumer, les relations (1-40) – (1-44) constituent le modèle le plus connu pour la rupture ductile à l'échelle locale, baptisé modèle GTN dans la littérature et qui est intégré dans de nombreux codes d'éléments finis et utilisé pour des calculs pratiques de structures sujettes à rupture ductile.

Contrainte effective

[Besson, 2010; Besson et al., 2001] introduisent une contrainte effective σ_* en fonction du tenseur des contraintes et de la porosité. Dans le cas du modèle GTN, la fonction seuil s'écrit à présent :

$$\begin{cases} F(\sigma_*, A) = \sigma_* + A(p) - \sigma_0 \leq 0 \\ G(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_*, f^*) = \left(\frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_*}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2 \sigma_{\text{H}}}{2\sigma_*}\right) - 1 - (q_1 f^*)^2 \stackrel{\text{def } \sigma_*}{=} 0 \end{cases} \quad (1-45)$$

Il est constaté que le domaine d'élasticité défini par la relation (1-45) est équivalent à celui défini par (1-37) et (1-39). La fonction seuil exprimée avec la contrainte effective σ_* permet une écriture unifiée de certaines lois (par exemple la loi de Rousselier, cf. paragraphe suivant). Par ailleurs, cette forme unifiée facilitera l'écriture de la formulation non-local que l'on présentera dans le Chapitre 4. Dans la suite de ce travail, on adopte désormais la relation (1-45) comme la loi GTN.

1.5.3 Modèle de Rousselier

Un autre modèle reposant sur l'évolution de cavités est proposé par [Rousselier, 1987]. Il a considéré la porosité f comme une variable interne dans le cadre des matériaux standard généralisés (abordé dans le paragraphe 2.1.1) et lui associe une force thermodynamique ainsi qu'une énergie de dissipation d'endommagement.

Similaire à celle de GTN, la fonction seuil du modèle de Rousselier fait intervenir la porosité f et la contrainte courante σ_f liée à l'écoulement :

$$\frac{\sigma_{\text{eq}}}{(1-f)} + \sigma_1 f D_r \exp\left(\frac{\sigma_{\text{H}}}{(1-f)\sigma_1}\right) - \sigma_f \leq 0 \quad (1-46)$$

où D_r et σ_1 sont les paramètres à identifier dans ce modèle.

En combinant la loi de normalité et l'expression (1-38), on obtient le taux de porosité en fonction du taux de déformation plastique cumulée :

$$\dot{f} = 3(1-f)\dot{\epsilon}_{\text{H}}^p = 3(1-f) \frac{\partial R}{\partial \sigma_{\text{H}}} = \dot{p} f D_r \exp\left(\frac{\sigma_{\text{H}}}{(1-f)\sigma_1}\right) \quad (1-47)$$

Cette relation ressemble beaucoup à celle du modèle Rice et Tracey. [Besson et al., 2001] a aussi réécrit la loi de Rousselier avec la contrainte effective σ_* :

$$\begin{cases} F(\sigma_*, A) = \sigma_* + A(p) - \sigma_0 \leq 0 \\ R(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_*, f) = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{(1-f)\sigma_*} + \frac{\sigma_1}{\sigma_*} f D_r \exp\left(\frac{\sigma_{\text{H}}}{(1-f)\sigma_1}\right) - 1 \stackrel{\text{def } \sigma_*}{=} 0 \end{cases} \quad (1-48)$$

Le modèle de Rousselier est censé s'écrire dans le cadre de matériaux standard généralisés. Cependant, [Lorentz et al., 2008] a montré que la fonction seuil du modèle Rousselier n'est pas convexe par rapport à la force thermodynamique associée à la porosité, l'une des hypothèses structurantes du cadre standard généralisé.

On trace le domaine d'élasticité pour la fonction seuil du modèle Rousselier et du modèle GTN dans la Figure 17. Deux remarques méritent une attention particulière. D'abord, lors d'une compression $\sigma_{\text{H}} < 0$, la partie hydrostatique de la déformation plastique reste positive et ainsi la porosité continue à augmenter. Puis sur le point $\sigma_{\text{eq}} = 0$, la fonction seuil n'est plus dérivable, il faut utiliser la notion plus générale de sous-différentiel (il n'y a plus de dérivée unique mais tout un cône de directions d'écoulement admissibles). On trouve plus de détails sur le traitement de ce point singulier dans [Lorentz et al., 2008], où l'analyse montre qu'il peut y avoir une évolution de la déformation déviatorique lorsque $\sigma_{\text{eq}} = 0$. Par conséquent, comparé au modèle

de Gurson, les contraintes et les déformations sont moins contraintes dans le modèle de Rousselier pour cet état de sollicitation.

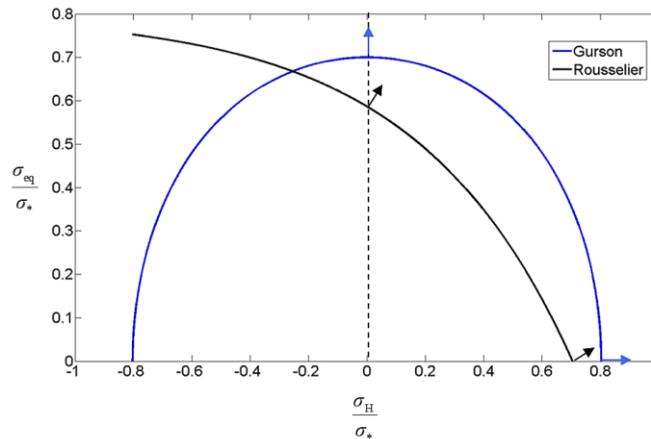


Figure 17 : Domaine d'élasticité avec les flèches symbolisant la direction de l'évolution de la déformation plastique. Lois Gurson : $f = 0,2, q_1 = 1,5, q_2 = 1$. Lois Rousselier : $f = 0,2, D = 2, \sigma_1/\sigma_* = 2/3$.

Tout comme le modèle de Gurson, Rousselier n'a considéré que le mécanisme de croissance des cavités. Les extensions (coalescence, germination) présentées dans le paragraphe précédent sont également valables pour la loi de Rousselier. Néanmoins cette loi est plus rarement implémentée dans les codes de calcul industriels que le modèle GTN, ce qui freine son développement.

1.5.4 Bilan des modèles par évolution des cavités

Par rapport aux modèles énergétiques (section 1.2) ou modèles phénoménologiques (section 1.4), les modèles d'évolution des cavités permettent d'avoir des résultats de simulations plus cohérents avec les essais car ils décrivent finement les différents phénomènes physiques en jeu dans la rupture ductile.

Trois modèles s'appuyant sur l'évolution des cavités ont été abordés dans cette section. Le modèle de [Rice et Tracey, 1969] est le premier qui analyse rigoureusement le comportement d'une cavité sphérique dans un milieu infini, mais il ne permet pas de décrire macroscopiquement les matériau poreux. Inspiré par le travail de [Rice et Tracey, 1969], [Gurson, 1977] et [Rousselier, 1987] ont proposé chacun une loi élastoplastique couplée avec l'évolution de la porosité, une nouvelle variable introduite de manière différente dans les deux lois pour représenter la fraction des cavités dans le matériau. Il faut noter que dans le modèle de Gurson, la porosité intervient dans la fonction seuil comme fonction de la déformation plastique, alors qu'elle est considérée comme une variable d'état indépendante dans le modèle de Rousselier (à l'instar des modèles d'endommagement phénoménologiques). Outre certaines propriétés mathématiques, l'avantage principal du modèle de Gurson réside dans ses extensions qui lui permettent de représenter les différents phénomènes physiques de la rupture ductile. Des extensions réalisées par [Chu et Needleman, 1980; Tvergaard, 1982; Tvergaard et Needleman, 1984] ont intégré, de manière phénoménologique, la coalescence et la germination dans le modèle de Gurson. Ils ont ainsi constitué ce qu'on appelle le modèle GTN. Parallèlement, l'intérêt qu'a suscité ce modèle a aussi conduit à identifier certains inconvénients ou défauts ; des extensions et des améliorations ont ainsi été proposées, sur lesquelles nous revenons maintenant.

1.6 Extensions du modèle GTN à basse triaxialité

L'un des inconvénients majeurs du modèle GTN concerne le fait qu'il sous-estime l'endommagement sous cisaillement ou, plus généralement, sous chargement à basse triaxialité [Li et al., 2011]. En effet, les analyses de [Gurson, 1977] reposent sur l'hypothèse que les cavités restent sphériques au long du chargement, qu'on sous-entend donc implicitement hydrostatique (puisqu'isotrope). Se basant sur le travail de Gurson, [Gologanu et al., 1993] a proposé de prendre en compte le changement de la forme des cavités, au moins dans le cas le plus simple de cavités ellipsoïdales axisymétriques. Cependant, ses analyses sont restreintes à l'hypothèse d'un chargement axisymétrique et ne reproduisent pas correctement l'endommagement en cas de cisaillement.

Afin d'améliorer la performance du modèle GTN en dehors d'un chargement à triaxialité élevée, certaines extensions tiennent compte de la rotation des cavités en plus du changement de leurs formes tandis que d'autres associent phénoménologiquement l'évolution de l'endommagement à la partie déviatorique du cisaillement. Le principe de toutes ces améliorations est de faire intervenir le troisième invariant ou le paramètre Lode dans l'évolution de la porosité. Dans cette section, nous décrivons ces extensions qui intègrent l'effet du cisaillement dans le modèle GTN.

1.6.1 Extension de Nahshon et Hutchinson

[Nahshon et Hutchinson, 2008] ont introduit l'influence du cisaillement avec un terme supplémentaire \dot{f}_s dans l'évolution de la porosité du modèle GTN. Le taux de porosité s'écrit :

$$\dot{f} = \dot{f}_g + \dot{f}_s = (1-f)\text{tr}\dot{\epsilon}^p + kf\omega(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\boldsymbol{\sigma}_D : \dot{\epsilon}^p}{\sigma_{\text{eq}}} \quad (1-49)$$

où k est une constante entre 0 et 3, ω est un paramètre dépendant du tenseur de contraintes :

$$\omega(\boldsymbol{\sigma}) = 1 - \left(\frac{27J_3(\boldsymbol{\sigma}_D)}{2\sigma_{\text{eq}}^3} \right)^2 \quad (1-50)$$

avec $J_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}_D)$ le troisième invariant des contraintes.

Avec cette modification, la porosité f n'est plus directement liée à la variation plastique du volume, perdant donc son sens physique à un certain niveau. On peut la considérer simplement comme une variable d'endommagement. Avec les expressions (1-49) et (1-50), on constate que pour un chargement axisymétrique, $\omega = 0$, on retrouve la même évolution \dot{f} que le modèle GTN sans germination ; pour un cisaillement pur, $\omega = 1$, la partie due au terme supplémentaire dans \dot{f} est proportionnelle au taux de cisaillement $\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^p$.

Cette extension du modèle GTN a démontré sa capacité à modéliser la rupture ductile à basse triaxialité. Toutefois, elle introduit également une influence non négligeable en cas de triaxialité élevée [Nielsen et Tvergaard, 2009] où le modèle GTN original a déjà prouvé sa pertinence. Afin de limiter cette influence, [Nielsen et Tvergaard, 2009] ont apporté une légère modification à l'expression (1-49) :

$$\dot{f} = (1-f)\text{tr}\dot{\epsilon}^p + kf\omega(\boldsymbol{\sigma})\Omega(\eta) \frac{\boldsymbol{\sigma}_D : \dot{\epsilon}^p}{\sigma_{\text{eq}}} \quad (1-51)$$

avec $\Omega(\eta)$ une fonction de la triaxialité $\eta = \sigma_H / \sigma_{\text{eq}}$ qui définit des intervalles pour l'utilisation de \dot{f}_s :

$$\Omega(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta > T_2 \\ 1 - 2\eta & \text{si } T_1 \leq \eta \leq T_2 \\ 1 & \text{si } \eta < T_1 \end{cases} \quad (1-52)$$

Les valeurs proposées de T_1 et T_2 sont 0 et 0,5 dans [Nielsen et Tvergaard, 2009].

1.6.2 Extension de Xue

L'idée sous-jacente du modèle de [Xue, 2008] revient au même principe que celle du modèle précédent : introduire le taux de cisaillement dans l'évolution de l'endommagement. Partant d'une analyse d'une plaque trouée sous cisaillement, Xue a proposé une nouvelle variable d'endommagement D dont l'évolution dépend d'une part de la porosité, et d'autre part du cisaillement.

$$\dot{D} = \delta_D (q_1 \dot{f} + \dot{D}_s) \quad (1-53)$$

δ_D est un coefficient défini par :

$$\delta_D = \begin{cases} 1 & \text{si } D \leq q_1 f_c \\ \delta = \frac{1/q_1 - f_c}{f - f_c} & \text{si } q_1 f_c < D \leq 1 \end{cases} \quad (1-54)$$

et \dot{D}_s est l'évolution de l'endommagement due au cisaillement :

$$\dot{D}_s = q_3 f^{q_4} g(\theta_L) \epsilon_{\text{eq}}^p \dot{\epsilon}_{\text{eq}}^p \quad (1-55)$$

Ici θ_L est l'angle Lode $\theta_L = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$ et $g(\theta_L)$ est une fonction qui vérifie

$g(0) = 0, g(1) = 1$. Un choix donné par [Xue, 2008] est :

$$g(\theta_L) = 1 - \frac{6}{\pi} |\theta_L| \quad (1-56)$$

De plus, d'après la solution analytique de la plaque trouée, les valeurs de q_3 et q_4 sont $q_3 = 6/\sqrt{\pi}, q_4 = 1/2$ en 2D et $q_3 = 3(6/\pi)^{1/3} \approx 1.86, q_4 = 1/3$ en 3D. Dans la pratique, Xue suggère d'identifier la valeur de q_3 par des essais expérimentaux.

On trouve une comparaison entre le modèle GTN et son extension proposée par [Xue, 2008] dans la Figure 18.

Comme pour le modèle du paragraphe précédent, on constate que sous chargement axisymétrique, $g(\theta_L) = 0$ et on retrouve donc le modèle GTN ; sous cisaillement pur, $g(\theta_L) = 1$, la partie due au terme supplémentaire dans \dot{D} est proportionnelle au taux de cisaillement $\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^p$.

Sur le plan numérique, deux approches d'implémentation ont été proposées selon le rôle de la variable D . On peut la considérer soit comme une variable interne qui influencera l'intégration de la loi de comportement, soit comme un indicateur de l'endommagement qui dépend de la porosité et des contraintes.

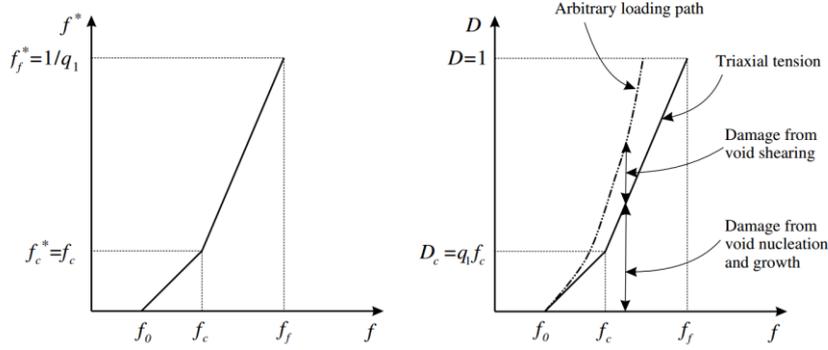


Figure 18 : Comparaison entre le modèle de GTN (gauche) et son extension proposée par Xue (droite)[Xue, 2008]

1.6.3 Extension microstructurale

[Kailasam et Castañeda, 1998] ont réalisé des analyses sur le comportement des cavités ellipsoïdales dans un composite et montré par homogénéisation au second ordre que la forme et l'orientation des cavités qui évoluent avec la déformation jouent un rôle important dans le comportement macroscopique du matériau. Afin de prendre en compte ces phénomènes microscopiques, ils ont introduit de nouvelles variables décrivant microscopiquement la déformation et la rotation des cavités. Le modèle de [Kailasam et Castañeda, 1998] a été formalisé et complété plus tard par [Danas et Castañeda, 2009]. S'inspirant de ce dernier travail, [Cao et al., 2015] ont effectué récemment une application au modèle GTN et développé un modèle capable de simuler l'endommagement à basse triaxialité, en apportant une modification ad hoc à la loi de GTN :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_*, f^*) = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{\text{eq}}}{\sigma_f} \right)^2 + 2q_1 f^* \cosh \left(\frac{3q_2 \tilde{\sigma}_H}{2\sigma_f} \right) - 1 - (q_1 f^*)^2 \leq 0 \quad (1-57)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_{\text{eq}} (1 - \alpha f) + 2\alpha f (\boldsymbol{\sigma} : ((\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \mathbb{Q}) : \boldsymbol{\sigma})} \\ \tilde{\sigma}_H = \frac{\boldsymbol{\sigma} : (\frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbb{Q}) : \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{3 \left| \boldsymbol{\sigma} : (\frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbb{Q}) : \boldsymbol{\sigma} \right|}} \end{cases} \quad (1-58)$$

Ici, \mathbb{Q} est un tenseur d'ordre quatre dont les composants sont des fonctions des longueurs des trois demi-axes a_1, a_2, a_3 et des directions des trois axes $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$, cf. la Figure 19. L'expression de \mathbb{Q} dans l'espace à la base de $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ se trouve dans l'annexe de [Cao et al., 2015].

La forme et la rotation des cavités dépendent aussi de la déformation. On définit d'abord :

$$w_1 = \frac{a_3}{a_1}, \quad w_2 = \frac{a_3}{a_2} \quad (1-59)$$

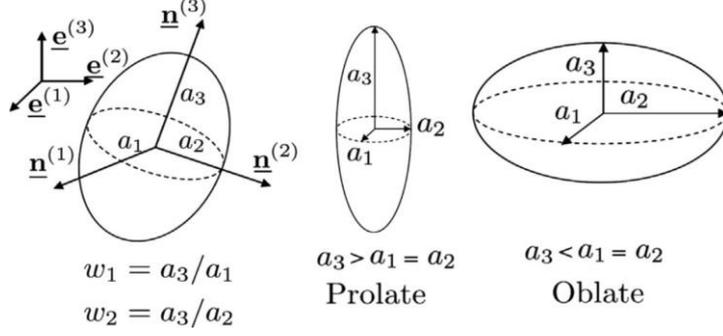


Figure 19: Schémas représentatifs des ellipses [Cao et al., 2015]

L'évolution de ces variables décrit la rotation et le changement de la forme des cavités. D'après [Cao et al., 2015], on a :

$$\begin{aligned} \dot{w}_k &= w_k \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_k}{a_k} \right) = w_k (\underline{n}_3 \cdot \dot{\epsilon}_m \cdot \underline{n}_3 - \underline{n}_k \cdot \dot{\epsilon}_m \cdot \underline{n}_k) = w_k (\underline{n}_3 \otimes \underline{n}_3 - \underline{n}_k \otimes \underline{n}_k) : \dot{\epsilon}_m \\ &= w_k (\underline{n}_3 \otimes \underline{n}_3 - \underline{n}_k \otimes \underline{n}_k) : \mathbb{A} : \dot{\epsilon}^p \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1-60)$$

où $\dot{\epsilon}_m$ est le taux de la déformation microscopique de la cavité, $\dot{\epsilon}^p$ le taux déformation plastique macroscopique, et \mathbb{A} un tenseur d'ordre quatre qui permet un passage micro-macro $\dot{\epsilon}_m = \mathbb{A} : \dot{\epsilon}^p$.

Dans les travaux cité ci-dessus, l'expression de \mathbb{A} s'écrit :

$$\mathbb{A} = \frac{1}{f} \left(\mathbb{I} - \frac{9}{4} (\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{3}{2} (\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \frac{3f}{1-f} \mathbb{Q} \right) \quad (1-61)$$

D'après [Cao et al., 2015], l'évolution de l'orientation des cavités est :

$$\dot{\underline{n}}_i = \boldsymbol{\omega} + (1-f) \mathbb{P} : \mathbb{A} : \dot{\epsilon}^p + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^3 \frac{w_i^2 + w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} [(\underline{n}_i \otimes \underline{n}_j + \underline{n}_j \otimes \underline{n}_i) : \mathbb{A} : \dot{\epsilon}^p] \underline{n}_i \otimes \underline{n}_j \quad (1-62)$$

avec $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \dot{u} - \nabla^T \dot{u})$ la rotation macroscopique et \mathbb{P} un tenseur d'ordre quatre dont les composantes sont des fonctions des longueurs des trois demi-axes et des directions des trois axes. Son expression dans l'espace à la base de $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ se trouve aussi dans l'annexe de [Cao et al., 2015].

Contrairement aux deux extensions précédentes, l'évolution de la porosité dans ce modèle garde la même expression que dans le modèle GTN (1-38). L'effet de cisaillement est introduit implicitement par la fonction seuil modifiée (1-57) en raison de la prise en compte de l'anisotropie dans le tenseur des contraintes. D'après les simulations dans [Cao et al., 2015], ce modèle conduit à des résultats physiquement pertinents sous chargement hydrostatique et sous cisaillement. Les auteurs ont aussi montré des différences de comportement à la rupture en cas d'ellipsoïdes prolates ou oblates. Mais dans cette méthode, les expressions issues de l'homogénéisation au second ordre semblent très lourdes. Sa performance numérique reste aussi à comparer avec les deux modèles précédents qui sont plus pragmatiques.

1.6.4 Bilan des extensions du modèle GTN

Dans cette section, trois extensions du modèle GTN ont été présentées qui ont pour objectif d'améliorer la performance du modèle à basse triaxialité. [Nahshon et Hutchinson, 2008] et [Xue, 2008] ont introduit dans l'évolution de l'endommagement une partie supplémentaire due

au cisaillement, représentée par une fonction du troisième invariant du tenseur des contraintes dans le premier travail et par une fonction de l'angle Lode dans le deuxième. Un troisième travail par [Cao et al., 2015] consiste à prendre en compte la déformation et la rotation des cavités à l'échelle microscopique, puis à passer à l'échelle macroscopique par une homogénéisation au second ordre. Ces trois modèles ont le potentiel pour mieux simuler l'endommagement à basse triaxialité. En outre, un autre travail de [Longere et al., 2012] qui n'est pas présenté ici consiste à translater le domaine d'élasticité de GTN de sorte que la porosité s'évolue à basse triaxialité.

1.7 Conclusion du chapitre et choix du modèle

Dans ce premier chapitre de thèse, on s'est concentré sur les différents modèles pour décrire l'endommagement ductile, divisés en trois catégories : modélisation par des méthodes énergétiques (approche globale), modélisation phénoménologique (approche locale) et modélisation basée sur l'évolution des cavités microscopiques (approche locale également). Une synthèse est présentée dans le Tableau 1. Les caractéristiques communes se trouvent sous la rubrique de la modélisation et celles propres à chaque modèle sont aussi listées dans le tableau, + désignant les avantages et – correspondant aux inconvénients.

Grâce au développement de la puissance de calcul des ordinateurs et aux avancées algorithmiques, le temps de calcul n'est plus autant une contrainte majeure dans une étude avancée. Les modèles locaux peuvent donc progressivement trouver une place dans des stratégies de modélisation industrielles. Dans la suite du travail, on choisira de se baser sur le modèle GTN en raison de ses nombreux avantages. En revanche, ses extensions à basse triaxialité ne seront pas prises en compte. On rappelle que l'objectif principal de cette thèse est de traiter les difficultés existantes dans la modélisation locale de l'endommagement ductile (notamment verrouillage volumique et dépendance aux maillages) et de construire un cadre de simulation robuste. Le modèle GTN, internationalement reconnu et diffusé, bénéficie d'une large base de publications qui permettront de mesurer les avancées obtenues dans ce travail de thèse. En outre, une fois le cadre de la modélisation établi, il sera possible d'y intégrer les extensions du modèle GTN si cela devait s'avérer nécessaire pour la gamme d'études envisagée.

Tableau 1 : Récapitulatif des modèles de rupture ductile : forces et limitations

<p>Modélisation énergétique</p> <p>+ simple avec peu de paramètres + faible sensibilité aux maillages + largement utilisée dans l'ingénierie pour des études rapides</p> <p>- domaine de validité restreint au chargement monotone - incapable de prédire l'initiation de fissure - application difficile aux géométries complexe</p>	<p>L'intégrale de Rice</p>	<p>+ un seul paramètre, facile à utiliser + identification directe par le dépouillement d'essais - application difficile aux lois dissipatives - faible transférabilité entre différentes géométries</p>
	<p>Deux paramètres</p>	<p>+ prise en compte de l'effet de la géométrie et de la triaxialité - application difficile aux lois dissipatives - difficile à identifier la courbe $J_c(Q)$, nécessitant une base d'essais importante</p>
	<p>Approche G_{TP}</p>	<p>+ prise en compte de la dissipation + compatible avec de nombreuses lois de comportement - non conservation de masse lors de la propagation de fissure (modélisation par une entaille) - non pertinente en présence de décharges</p>
	<p>Approche G_{fr}</p>	<p>+ prise en compte de la dissipation + validation par des essais - mise en œuvre difficile - méthode peu diffusée</p>
<p>Modélisation par CZM</p>	<p>CZM</p>	<p>+ peu de paramètres à identifier + faible sensibilité aux maillages + prédiction de l'amorçage et de la propagation + validation par des essais - nécessite la connaissance préalable du trajet de fissure - représentation limitée du comportement dissipatif</p>
<p>Modélisation phénoménologique</p> <p>+ représentation simple de la fissure ou de l'endommagement + prédiction de l'amorçage et de la propagation + validation par des essais</p> <p>-faible interprétation physique - dépendance aux maillages</p>	<p>Lemaitre</p>	<p>+ méthode largement diffusée +dissipation plastique et dissipation d'endommagement séparées - expressions différentes en compression et en traction</p>
	<p>Modèle avec fonction du trajet de chargement</p>	<p>+ mise en œuvre facile - nécessité d'une base d'essais importante</p>
	<p>Brünig</p>	<p>+ découplage entre endommagement et plasticité, implémentation numérique relativement simple + conçu en grandes déformations pour l'anisotropie - fonction seuil et écoulement non associés - de nombreux paramètres non physiques à identifier - dépendance aux maillages</p>
<p>Modélisation par l'évolution des cavités</p> <p>+ description fine des phénomènes physique avec introduction de la variable porosité + à base de solutions analytiques + validation par des essais</p> <p>- dépendance aux maillages</p>	<p>Rice et Tracey</p>	<p>+ facile à appliquer - hypothèse milieu infini, incapable de décrire les matériaux poreux - ne prend pas en compte l'effet de l'endommagement sur la mécanique</p>
	<p>GTN</p>	<p>+ interprétation physique pertinente + quasi-matériaux standard généralisés (voir 2.4.2) + méthode internationalement diffusée - résolution relativement difficile - performance pauvre à basse triaxialité mais de nombreuses extensions pour y remédier (section 1.6)</p>
	<p>Rousselier</p>	<p>+ séparation de dissipation par l'endommagement et celle par la plastification - fonction seuil non dérivable si $\sigma_{eq} = 0$, nécessitant un traitement spécial - fonction seuil non convexe par rapport à la force thermodynamique associée à la porosité - méthode modérément diffusée</p>

Chapitre 2 – Mécanique continue de l'endommagement ductile avec le modèle GTN

Ce chapitre vise à formuler et résoudre les équations du modèle GTN dans un cadre de grandes déformations. La section 2.1 introduira d'abord la notion et les propriétés des matériaux standard généralisés, un cadre théorique pour les lois élastoplastiques dont l'écoulement plastique est associé à la fonction seuil. La section 2.2 présentera, puis comparera deux formulations de grandes déformations. La section 2.3 illustrera le verrouillage volumique, problème numérique lié à la quasi-incompressibilité de déformation plastique en grandes déformations avec différents exemples de simulation. Des solutions seront ensuite proposées parmi lesquelles l'élément mixte sera choisi pour la suite de ce travail. La section 2.4 portera sur la réécriture du modèle GTN en grandes déformations qui s'inscrit dans le cadre des matériaux standard généralisés avec un schéma d'intégration temporelle explicite pour la porosité. Enfin, l'algorithme de résolution sera détaillé.

2.1 Formulation énergétique

2.1.1 Matériaux standard généralisés

Un formalisme basé sur l'analyse thermodynamique des processus irréversibles permet de construire de manière systématique une classe de modèles élastoplastiques, nommée matériaux standard généralisés. Ce cadre théorique qui date des années 1970 repose sur les hypothèses suivantes [Halphen et Nguyen, 1975] :

H1 – L'énergie libre $\Phi(\epsilon^e, \alpha)$ est une fonction strictement convexe des variables internes.

H2 – L'énergie libre peut être séparée en deux parties dont l'une ne dépend que de la déformation élastique et l'autre que des autres variables internes, soit $\Phi = \Phi^e(\epsilon^e) + \Phi^\alpha(\alpha)$. Par ailleurs, l'énergie Φ^e est une fonction quadratique et l'énergie Φ^α une fonction strictement convexe des variables internes.

On écrit le second principe sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem, qui impose la positivité de la puissance dissipée :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon} - \dot{\Phi}(\epsilon^e, \alpha) \\ &= (\boldsymbol{\sigma} - \partial_{\epsilon^e} \Phi) : \dot{\epsilon} + \partial_{\epsilon^e} \Phi : \dot{\epsilon}^p - \partial_\alpha \Phi \dot{\alpha} \geq 0 \end{aligned} \quad (2-1)$$

A partir de cette inégalité, on peut déduire un tenseur des contraintes conjugué par rapport au tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\epsilon^e} \Phi \quad (2-2)$$

Selon la cinématique choisie, la définition du tenseur de déformation varie et par conséquent, le tenseur des contraintes revêt différentes formes, voir les paragraphes 2.2.1 et 2.2.2.

On peut définir les forces thermodynamiques associées aux variables internes :

$$A_i = -\partial_{\alpha_i} \Phi \quad (2-3)$$

L'expression de la puissance dissipée devient :

$$\mathcal{D}(t) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + A_i \dot{\alpha}_i \quad (2-4)$$

H3 – La loi de normalité associée: il existe un potentiel $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ convexe, semi-continu

inférieurement¹, tel que, dans le processus thermodynamique réel, la vitesse associée à la force appartient au sous-gradient² de $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$, soit

$$\dot{\epsilon}^p \in \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \Psi^* \text{ et } \dot{\alpha}_i \in \partial_{A_i} \Psi^* \quad (2-5)$$

Le potentiel $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ est en fait la transformation de Legendre du potentiel de dissipation Ψ , qui résulte de la maximisation de l'énergie dissipée sous la contrainte d'une fonction seuil $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0$ (appelée le principe de dissipation maximale). On explicitera l'expression de Ψ et Ψ^* dans le paragraphe suivant.

Il est aussi montré dans [Halphen et Nguyen, 1975] que la loi de normalité peut s'écrire sous une autre forme équivalente (propriété directe de la transformée de Legendre – Fenchel) :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\epsilon^p} \Psi \text{ et } A_i \in \partial_{\dot{\alpha}_i} \Psi \quad (2-6)$$

On verra que Ψ^* est une fonction indicatrice (pour des lois sans viscosité) :

$$\Psi^* = I_C(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \in C \\ +\infty & \text{si } (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \notin C \end{cases} \quad (2-7)$$

où C est un domaine défini par une fonction seuil $\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0\}$.

Avec cette définition du potentiel $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$, la loi de normalité s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad \dot{\alpha}_i = \lambda \frac{\partial F}{\partial A_i}; \quad \lambda F = 0, \lambda \geq 0, F \leq 0 \quad (2-8)$$

La loi de normalité est aussi connue comme l'hypothèse de la maximisation de la puissance de dissipation, ce qui définit le potentiel de dissipation:

$$\Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sup_{\substack{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \\ F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0}} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + A_i \dot{\alpha}_i) = \sup_{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \lambda \geq 0)} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + A_i \dot{\alpha}_i - \lambda F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) \quad (2-9)$$

En effet, il n'est pas difficile de constater que la maximisation donne également la relation (2-8) dans les cas où $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ est dérivable par rapport à $\boldsymbol{\sigma}$ et A_i .

H4 – La fonction $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ est convexe de la variable $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$.

Un matériau est classé dans le cadre des matériaux standards généralisés s'il existe une suite de variables internes vérifiant l'hypothèse H3. En outre, sous les hypothèses H1-H4, la solution du problème d'évolution en contrainte et variables internes est unique. On trouve la démonstration dans [Halphen et Nguyen, 1975].

De nombreux modèles élastoplastiques peuvent s'écrire dans ce cadre théorique. Quant à la modélisation d'endommagement ductile, la catégorie de modèles faisant intervenir une nouvelle variable dans la loi de comportement, à l'instar la porosité du modèle Gurson ou Rousselier, désassocie l'écoulement plastique de la fonction seuil. Sur le plan numérique néanmoins, on verra, en utilisant un schéma explicite pour la porosité (elle devient donc un paramètre à chaque pas temps) que ces modèles pourront aussi profiter des propriétés mathématiques et numériques du cadre standard généralisé.

¹ S.C.I : pour tout réel α , l'ensemble de sous-niveaux $\{x \in X \mid \mathcal{D}^*(x) \leq \alpha\}$ est fermé

² Sous-gradient : le sous-gradient de la fonction f en point x_0 est l'ensemble des nombres réels g qui vérifie $f(x) - f(x_0) \geq g(x - x_0)$

2.1.2 Dissipation d'énergie

Ici on écrira les expressions du potentiel de dissipation et sa transformation de Legendre dans un cadre général avec une fonction seuil donnée. Puis à base de la loi de normalité, on en déduira l'évolution des variables internes. Enfin, on appliquera ces formulations à la loi de von Mises comme exemple.

Potentiel de dissipation et sa transformation de Legendre

On construit l'écoulement plastique partant de l'hypothèse de maximisation de dissipation d'énergie.

La fonction seuil est de la forme :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, A) = N(\boldsymbol{\sigma}) + A - \sigma_0 \quad (2-10)$$

où $N(\boldsymbol{\sigma})$ est une fonction positive, continue et convexe, homogène de degré 1, et $N(\mathbf{0}) = 0$.

Sans perte de généralité, on suppose qu'il n'y a qu'une seule variable interne α avec la force associée A . Le problème à résoudre devient :

$$\Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) = \sup_{\substack{(\boldsymbol{\sigma}, A) \\ F \leq 0}} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + A\dot{\alpha}) \quad (2-11)$$

avec $\Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha})$ le potentiel de dissipation.

Par la continuité de $F(\boldsymbol{\sigma}, A)$, il n'est pas difficile de montrer que :

$$\Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) = \sup_{\substack{(\boldsymbol{\sigma}, A) \\ F \leq 0}} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + A\dot{\alpha}) = \sup_{\substack{(\boldsymbol{\sigma}, A) \\ F < 0}} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + A\dot{\alpha}) \quad (2-12)$$

Dans le cas $F(\boldsymbol{\sigma}, A) = N(\boldsymbol{\sigma}) + A - \sigma_0 < 0$, on a $\sigma_0 - A > N(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0$, $\sigma_0 - A$ est donc strictement positif.

On définit $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}/(\sigma_0 - A)$, et on a $N(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) < 1$. Le potentiel de dissipation devient donc :

$$\begin{aligned} \Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) &= \sup_{\substack{(\boldsymbol{\sigma}, A) \\ F \leq 0}} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + A\dot{\alpha}) = \sup_{\substack{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, A) \\ N(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) < 1; A < \sigma_0}} [(\sigma_0 - A)(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\epsilon}^p) + A\dot{\alpha}] \\ &= \sigma_0 \sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ N(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) < 1}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\epsilon}^p + \sup_{\substack{A \\ A < \sigma_0}} A(\dot{\alpha} - \sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ N(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) < 1}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\epsilon}^p) \\ &= \sigma_0 \Pi + \sup_{\substack{A \\ A < \sigma_0}} A(\dot{\alpha} - \Pi) \end{aligned} \quad (2-13)$$

où $\Pi(\dot{\epsilon}^p) = \sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ N(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) < 1}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\epsilon}^p = \sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ N(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \leq 1}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\epsilon}^p \geq 0$ ¹.

Dans la relation (2-13), $\dot{\alpha}$ doit être supérieur ou égal à Π , sinon Ψ tend vers l'infini. Deux cas sont distingués :

$$\text{Cas 1 : si } \dot{\alpha} = \Pi, \text{ on a } A < \sigma_0 \text{ et } \Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) = \sigma_0 \dot{\alpha}. \quad (2-14)$$

$$\text{Cas 2 : si } \dot{\alpha} > \Pi, \text{ on a } A \text{ tend vers } \sigma_0 \text{ et } \Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) = \sigma_0 \dot{\alpha}.$$

On regroupe tous les cas :

$$\Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) = \sigma_0 \dot{\alpha} + I_{(0, +\infty)}(\dot{\alpha} - \Pi(\dot{\epsilon}^p)) \quad (2-15)$$

¹ On montre cette équivalence par l'homogénéité de $N(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$. S'il existe un $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M$ au bord du domaine qui réalise la maximisation, à savoir $\exists \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M$ tel que $N(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M) = 1$ et $\Pi(\dot{\epsilon}^p) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M : \dot{\epsilon}^p$. On peut toujours construire une série de réels $\{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_n \rightarrow 1$, $N(\lambda_n \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M) = \lambda_n < 1$, $\lim_{\lambda_n \rightarrow 1} \lambda_n \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M : \dot{\epsilon}^p = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M : \dot{\epsilon}^p \square$

où I est la fonction indicatrice.

Maintenant que l'expression de Ψ est connue, on voudrait également exprimer sa transformation de Legendre $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A)$. Il est noté que la maximisation de (2-11) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A) &= \sup_{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \lambda \geq 0)} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + A \dot{\lambda} - \lambda F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) \\ &= \sup_{(\boldsymbol{\sigma}, A)} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + A \dot{\lambda} - I_C(\boldsymbol{\sigma}, A)) = I_C^*(\boldsymbol{\sigma}, A)\end{aligned}\quad (2-16)$$

où C est le domaine défini par une fonction seuil, à savoir $\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) | F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0\}$. $I_C(\boldsymbol{\sigma}, A)$ étant fonction convexe, on en déduit facilement :

$$\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A) = I_C^{**}(\boldsymbol{\sigma}, A) = I_C(\boldsymbol{\sigma}, A) \quad (2-17)$$

Écoulement plastique

D'après la loi de normalité associée (2-5), on écrira l'évolution de la déformation plastique et de la variable interne.

On introduit la propriété suivante du sous-différentiel :

$$(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\lambda}) \in \partial \Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A) \Leftrightarrow \Psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\lambda}) + \Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + A \dot{\lambda} \quad (2-18)$$

Se basant sur les expressions de $\Psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\lambda})$ et $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A)$ dans (2-15) et (2-17), on a :

- Si $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) > 0$, $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A)$ vaut l'infini, aucun $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\lambda})$ ne peut donc satisfaire (2-18), on a $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\lambda}) \in \partial \Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A) = \emptyset$.
- Si $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0$, $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A)$ vaut zéro, on a $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + A \dot{\lambda} = \Psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\lambda}) = \sigma_0 \dot{\lambda} + I_{[0, +\infty)}(\dot{\lambda} - \Pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p))$ et on en déduit que $\partial \Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, A)$ est l'ensemble de $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\lambda})$ tel que :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} \geq \Pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \\ \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = (\sigma_0 - A) \dot{\lambda} \end{cases} \quad (2-19)$$

On rappelle que $\Pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \sup_{\mathbf{d} : N(\mathbf{d}) \leq 1} \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$.

Afin de préciser les relations de (2-19), on distingue deux cas :

- Cas 1 : $A < \sigma_0$, on déduit :

$$\begin{cases} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(\sigma_0 - A)} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq \sup_{\mathbf{d} : N(\mathbf{d}) \leq 1} \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \\ \dot{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(\sigma_0 - A)} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \end{cases} \quad (2-20)$$

La première relation de (2-20) n'est rien d'autre que le principe du travail plastique maximal. Ce principe conduit à la propriété suivante :

Si $\boldsymbol{\sigma}$ est à l'intérieur du domaine $S = \{\mathbf{s} | N(\mathbf{s}) \leq 1\}$, eg. $N(\boldsymbol{\sigma}) < 1$, la vitesse de déformation plastique $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ vaut zéro. Si $\boldsymbol{\sigma}$ se situe au bord du domaine S , $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ appartient au cône (noté $C_{\boldsymbol{\sigma}}$) des normales extérieures en $\boldsymbol{\sigma}$, voir la Figure 20. En particulier, si $\boldsymbol{\sigma}$ est un point non anguleux du bord, on a $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \partial N(\boldsymbol{\sigma}) / \partial \boldsymbol{\sigma}$.

On trouve une démonstration de cette propriété dans [Marigo, 2012].

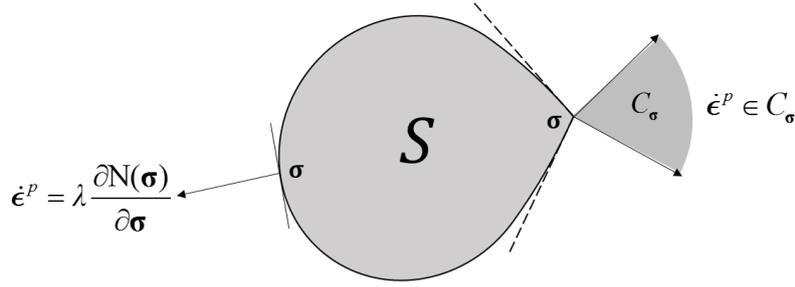


Figure 20 : Directions possibles de $\dot{\epsilon}^p$ sur un point anguleux et sur un point non anguleux.

- Cas 2 : $A = \sigma_0$, on a alors $N(\sigma) = 0$ et on en déduit :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} \geq \sup_{\substack{\mathbf{d} \\ N(\mathbf{d}) \leq 1}} \mathbf{d} : \dot{\epsilon}^p \\ \sigma : \dot{\epsilon}^p = 0 \end{cases} \quad (2-21)$$

Normalement, dans la plupart des modèles, A a une valeur négative. Ainsi, on est toujours dans le Cas 1 de (2-20). Mais on verra dans le Chapitre 4 que dans les modèles non-locaux, le Cas 2 devra aussi être pris en compte.

Application à la loi von Mises

Si l'on applique toutes ces formulations à la plasticité de von Mises, dont la fonction seuil est

$$F(\sigma, A) = \sigma_{\text{eq}} + A - \sigma_0, \text{ avec } \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{\text{D}} : \sigma_{\text{D}}}, \text{ on a :}$$

$$\Pi(\dot{\epsilon}^p) = \sup_{N(\tilde{\sigma})=1} \tilde{\sigma} : \dot{\epsilon}^p = \sup_{N(\sigma)=\sigma_{\text{eq}}} \frac{\sigma}{\sigma_{\text{eq}}} : \dot{\epsilon}^p = \sup_{\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{\text{D}} : \sigma_{\text{D}}}} \left(\frac{\sigma_{\text{D}}}{\sigma_{\text{eq}}} : \dot{\epsilon}^p + 3\sigma_{\text{H}} \dot{\epsilon}_{\text{H}}^p \right) \quad (2-22)$$

Pour que Π ne tende pas vers l'infini, on a d'abord $\dot{\epsilon}_{\text{H}}^p = 0$ sinon Π tend vers l'infini. Puis, la maximisation de Π exige que σ_{D} et $\dot{\epsilon}_{\text{D}}^p$ soit colinéaire : $\sigma_{\text{D}} = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sqrt{3/2(\dot{\epsilon}_{\text{D}}^p : \dot{\epsilon}_{\text{D}}^p)}} \dot{\epsilon}_{\text{D}}^p$.

Finalement, $\Pi(\dot{\epsilon}^p) = \sqrt{2/3(\dot{\epsilon}_{\text{D}}^p : \dot{\epsilon}_{\text{D}}^p)} + I_0(\dot{\epsilon}_{\text{H}}^p)$ et le potentiel de dissipation s'écrit :

$$\Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) = \sigma_0 \dot{\alpha} + I_{[0, +\infty)} \left(\dot{\alpha} - \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_{\text{D}}^p : \dot{\epsilon}_{\text{D}}^p)} \right) + I_0(\dot{\epsilon}_{\text{H}}^p) \quad (2-23)$$

D'après (2-17), on a :

$$\Psi^*(\sigma, A) = I_C(\sigma, A) \text{ avec } C = \{(\sigma, A) | \sigma_{\text{eq}} + A - \sigma_0 \leq 0\} \quad (2-24)$$

L'écoulement plastique s'écrit donc dans les différent cas d'après (2-20) et (2-21) :

Si $\sigma_{\text{eq}} + A - \sigma_0 < 0$, alors $\dot{\epsilon}^p = \mathbf{0}$; $\dot{\alpha} = 0$,

Si $\sigma_{\text{eq}} + A - \sigma_0 = 0$, alors $\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \lambda \frac{\sigma_{\text{D}}}{\sigma_{\text{eq}}}$; $\dot{\alpha} = \lambda$,

Si $A - \sigma_0 = 0$, alors $\sigma_{\text{D}} = 0$; $\dot{\epsilon}_{\text{H}}^p = 0$; $\dot{\alpha} \geq \sup_{\substack{\mathbf{d} \\ N(\mathbf{d}) \leq 1}} \mathbf{d} : \dot{\epsilon}^p$.

2.1.3 Formulation énergétique globale

Dans le cadre de la théorie des matériaux standard généralisés, le problème mécanique à l'échelle d'une structure peut être formulé par la minimisation d'une énergie globale. Pour ce faire, on définit un Lagrangien avec la formulation globale de l'énergie libre et l'énergie de dissipation :

$$\mathcal{L}(\epsilon^e, \mathbf{a}) = \mathcal{L}(\epsilon, \epsilon^p, \mathbf{a}) = \int_{\Omega_0} [\Phi(\epsilon(\underline{u}), \epsilon^p, \mathbf{a}) + \Psi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\mathbf{a}})] d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{u}) \quad (2-25)$$

où $W_{\text{ext}}(\underline{u})$ correspond au potentiel des efforts extérieurs.

Sur le plan numérique, le Lagrangien s'écrit comme suit après une discrétisation en temps :

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \epsilon^p, \mathbf{a}) = \int_{\Omega_0} \left[\Phi(\epsilon(\underline{u}), \epsilon^p, \mathbf{a}) + \Delta t \Psi \left(\frac{\epsilon^p - \epsilon^{p-}}{\Delta t}, \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}^-}{\Delta t} \right) \right] d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{u}) \quad (2-26)$$

Ce Lagrangien dépend des champs \mathbf{a}^- , état mécanique de la structure au début du pas de temps $[t^-, t]$ d'un incrément $\Delta t = t - t^-$. Dans le paragraphe précédent, on a vu que l'énergie de dissipation est une fonction positivement homogène de degré 1. (2-26) devient donc :

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \epsilon^p, \mathbf{a}) = \int_{\Omega_0} [\Phi(\epsilon(\underline{u}), \epsilon^p, \mathbf{a}) + \Psi(\epsilon^p - \epsilon^{p-}, \mathbf{a} - \mathbf{a}^-)] d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{u}) \quad (2-27)$$

L'état mécanique de la structure à l'instant t se dérive ensuite par la minimisation du Lagrangien (2-27) :

$$(\underline{u}, \epsilon^p, \mathbf{a}) = \arg \min \mathcal{L}(\underline{u}, \epsilon^p, \mathbf{a}) \quad (2-28)$$

En effet, la minimisation par rapport au déplacement \underline{u} revient au principe des puissances virtuelles et donne donc l'équation de l'équilibre :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \underline{F} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2-29)$$

Ensuite, la minimisation par rapport à la déformation plastique ϵ^p et aux variables internes \mathbf{a} conduit à la loi de normalité :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\Delta \epsilon^p} \Psi \text{ et } A_i \in \partial_{\Delta a_i} \Psi \quad (2-30)$$

Par conséquent, à chaque pas de temps, la minimisation du Lagrangien (2-27) regroupe l'équation de l'équilibre et loi d'évolution (l'écoulement normal des variables internes). Cette formulation introduit une énergie globale (incrémentale) permettant une représentation efficace de l'ensemble du problème.

2.1.4 Bilan des variables inconnues et des équations d'un modèle mécanique

En s'inscrivant dans la théorie des matériaux standard généralisés, on a déduit les différentes équations du système dans cette section. Ici, on regroupe les équations à résoudre dans un problème mécanique quelconque, ainsi que les théorèmes ou les hypothèses à base desquels elles sont dérivées.

A chaque instant, les inconnues du problème sont le déplacement \underline{u} , la déformation totale ϵ , la déformation élastique ϵ^e , la déformation plastique ϵ^p , les variables internes \mathbf{a} , ses forces thermodynamiques \mathbf{A} et la variable du taux d'évolution λ .

Tableau 2 : Bilan des équations sur un point matériel d'un modèle mécanique

Relations	Equations	Nombre d'équations scalaires
Principe de puissance virtuelle → Equation d'équilibre	$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = -\rho \underline{F}$ dans Ω $\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}$ sur $\partial\Omega$	3
Inégalité de Clausius-Duhem → Définition des contraintes et des forces thermodynamiques	$\boldsymbol{\sigma} = \rho \partial_{\boldsymbol{\epsilon}^e} \Phi$	9
	$A_i = -\rho \partial_{\alpha_i} \Phi$	n
Hypothèse de la loi de normalité ou de la maximisation de dissipation → Evolution de la déformation plastique et des variables internes	$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$	9
	$\dot{\alpha}_i = \lambda \frac{\partial F}{\partial A_i}$	n
Choix de la fonction seuil → Critère de plasticité/endommagement	$\lambda F(\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{A}) = 0$ $\lambda \geq 0, F \leq 0$	1
Choix de la cinématique → Définition de la déformation totale	$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\underline{u})$	9
Choix de la décomposition de la déformation	$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \boldsymbol{\epsilon}^p)$	9

On peut vérifier que le nombre total d'équations est bien égal à celui des inconnues. Parmi ces relations dans le Tableau 2, les trois premières relations ont été abordées dans les paragraphes précédents de cette section et la quatrième relation concernant le critère de plasticité ou de l'endommagement correspond au contenu principal du Chapitre 1. Il reste à préciser les deux dernières relations pour établir un modèle mécanique complet.

En petites déformations, les formulations suivantes sont bien connues :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \approx \frac{1}{2} (\nabla^T \underline{u} + \nabla \underline{u}) \\ \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \end{cases} \quad (2-31)$$

En grandes déformation, on présente deux formulations de la littérature dans la section suivante.

2.2 Formalisme de grandes déformations

Lorsque de grandes déformations apparaissent dans un solide, il n'est plus possible de confondre les configurations initiale et déformée. Une attention particulière doit alors être portée à la cinématique et aux choix des mesures des déformations et des contraintes. Il faut décider comment introduire la part élastique du comportement puis comment écrire l'écoulement plastique, deux choix phénoménologiques. Pour ce faire, on examine ici deux formulations de grandes déformations qui se distinguent par la décomposition cinématique, toutes deux s'insérant dans le formalisme des matériaux standard généralisés.

2.2.1 Formulation multiplicative

Ce paragraphe a pour objet de présenter succinctement la formulation des grandes déformations

plastiques développée par [Simo et Miehe, 1992]. L'idée première consiste à introduire un état intermédiaire virtuel de contraintes nulles (la Figure 21), ce qui permet d'écrire le tenseur gradient de la transformation \mathbf{F} comme le produit des parties plastique et élastique.

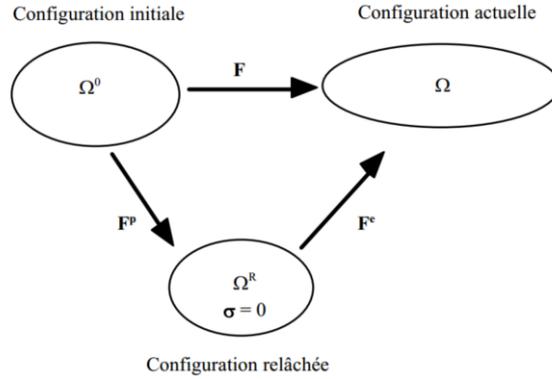


Figure 21 : Schéma représentatif de l'état intermédiaire de contraintes nulles

Notons la configuration initiale $\Omega_0(\underline{X})$ et la configuration actuelle $\Omega(\underline{x})$. Par la décomposition multiplicative de \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2-32)$$

Les mesures de déformation élastique et plastique définies dans cette formulation s'écrivent :

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT}, \quad \mathbf{G}^p = (\mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p)^{-1}, \quad \mathbf{B}^e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}^p \cdot \mathbf{F}^T \quad (2-33)$$

Il faut bien noter que \mathbf{B}^e et \mathbf{G}^p sont définis dans deux configurations différentes : \mathbf{B}^e est la déformation élastique dans la configuration actuelle Ω et \mathbf{G}^p mesure la déformation plastique dans la configuration initiale Ω_0 .

L'hypothèse de décomposition de l'énergie nous permet d'écrire l'énergie libre Φ avec :

$$\Phi = \Phi^e(\mathbf{B}^e) + \Phi^p(p) \quad (2-34)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem, ou la positivité de la puissance de dissipation, est donc exprimée par :

$$\mathcal{D}(t) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \dot{\Phi} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial \mathbf{B}^e} \right) : \dot{\mathbf{B}}^e - \frac{\partial \Phi^p}{\partial p} \dot{p} \geq 0 \quad (2-35)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes de Kirchhoff, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^T)$ le taux de déformation eulérienne.

Tenant compte de la symétrie de \mathbf{B}^e et $\frac{\partial \Phi^e}{\partial \mathbf{B}^e}$, on combine les équations (2-33) et (2-35) :

$$\left(\boldsymbol{\tau} - 2 \frac{\partial \Phi^e}{\partial \mathbf{B}^e} \cdot \mathbf{B}^e \right) : \mathbf{D} - \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial \mathbf{B}^e} \cdot \mathbf{B}^e \right) : (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{G}}^p \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{B}^{e-1}) - \frac{\partial \Phi^p}{\partial p} \dot{p} \geq 0 \quad (2-36)$$

Cette inégalité vérifiée pour toute déformation \mathbf{D} permet donc de définir le tenseur de Kirchhoff de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial \Phi^e}{\partial \mathbf{B}^e} \cdot \mathbf{B}^e \quad (2-37)$$

On peut également définir la puissance de dissipation :

$$\mathcal{D}(t) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{G}}^p \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{B}^{e-1}) + A \dot{p} \geq 0 \quad (2-38)$$

Ici $A = -\partial\Phi^p/\partial p$ correspond à la force thermodynamique associée à p .

Grace à la loi de normalité (2-5), on en déduit l'écoulement de \mathbf{G}^p et p :

$$\dot{\mathbf{G}}^p = -2\lambda\mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{B}^e \cdot \mathbf{F}^{T^{-1}}; \quad \dot{p} = \lambda \frac{\partial F}{\partial A}; \quad \lambda F = 0, F \leq 0, \text{ et } \lambda \geq 0 \quad (2-39)$$

où F est la fonction seuil qui définit le potentiel dans (2-7).

2.2.2 Formulation logarithmique

Dans cette formulation, on suppose une décomposition additive du tenseur des déformations, qui amène à une extension des théories linéaires aux théories non-linéaire sans modifier la loi d'écoulement plastique. [Miche et al., 2002] ont développé une formulation des lois constitutives dans un espace logarithmique.

Les tenseurs de déformation peuvent se définir dans un espace logarithmique tel que :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C}, \quad \mathbf{E}^p = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p) = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G}^p \quad (2-40)$$

Le tenseur de déformation s'écrit :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p \quad (2-41)$$

On définit aussi un tenseur Lagrangien de contraintes, conjugué du tenseur de déformation logarithmique \mathbf{E} :

$$\mathcal{P}_i = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2-42)$$

On remarque que \mathbf{T} est aussi symétrique.

Comme dans la formulation multiplicative présentée dans le paragraphe précédent, on décompose l'énergie libre en deux parties : $\Phi^e(\mathbf{E}^e)$ et $\Phi^p(p)$.

$$\Phi = \Phi(\mathbf{E}^e, p) = \Phi^e(\mathbf{E}^e) + \Phi^p(p) \quad (2-43)$$

où p est la variable d'écrouissage et $\mathbf{E}^e = \mathbf{E} - \mathbf{E}^p$ d'après (2-41).

De même, avec les contraintes et les déformations définies dans l'espace logarithmique, on écrit l'inégalité Clausius-Duhem dans la configuration initiale :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) &= \dot{\Psi}(\dot{\mathbf{E}}^p, \dot{p}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \dot{\Phi}(\mathbf{E}^e, p) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} (\mathbf{T} - \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi) : \dot{\mathbf{E}} + \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi : \dot{\mathbf{E}}^p - \partial_p \Phi \dot{p} d\Omega \geq 0 \end{aligned} \quad (2-44)$$

où Ω_0 le volume initial.

Vu que l'inégalité (2-44) doit être vérifiée pour tout, on obtient:

$$\mathbf{T} = \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi \quad (2-45)$$

Les deux derniers termes du (2-44) définissent donc la puissance de dissipation :

$$\mathcal{D}(t) = \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi : \dot{\mathbf{E}}^p - \partial_p \Phi \dot{p} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + A \dot{p} \quad (2-46)$$

$A = -\partial_p \Phi$ est la force thermodynamique associée à p .

Par la loi de normalité, on obtient :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}}; \quad \dot{p} = \lambda \frac{\partial F}{\partial A}; \quad F \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda F = 0 \quad (2-47)$$

2.2.3 Bilans et choix des formulations en grandes déformations

Certains auteurs affirment que la formulation multiplicative, introduisant une configuration intermédiaire relâchée, correspond davantage à une description physique pour les cristallines [Asaro, 1983]. En réalité, cette configuration n'est que virtuelle car elle ne respecte pas en général les équations de compatibilité cinématique. Ces deux formulations sont donc construites pour des propriétés mathématiques selon différentes manières d'introduire la partie élastique de la déformation.

Ces deux formalismes en grandes déformations sont résumés dans le tableau. On ajoute également la formulation HPP pour les comparer. La formulation logarithmique ressemble beaucoup à la formulation traditionnelle dans l'hypothèse de petites déformations (HPP). Cette propriété nous permettra de réduire le travail de programmation car une partie de code peut être partagée entre la formulation HPP et la formulation logarithmique de grandes déformations. De plus, avec cette deuxième formulation, la matrice de rigidité est symétrique, ce qui économise aussi le temps de calcul.

Tableau 3 : Deux formulations en grandes déformations comparée avec la formulation HPP

Formulation multiplicative	Formulation additive	Petites déformations
$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$	$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$	$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$
$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p ; \mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT}$	$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$
$\Phi = \Phi^e(\mathbf{B}^e) + \Phi^p(p)$	$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial \Phi^e}{\partial \mathbf{B}^e} \cdot \mathbf{B}^e ; A = -\frac{\partial \Phi^p}{\partial p}$	$\Phi = \Phi^{el}(\mathbf{E}^e) + \Phi^{pl}(p)$	$\Phi = \Phi^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Phi^{pl}(p)$
$\dot{\mathbf{G}}^p = -2\lambda \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{B}^e \cdot \mathbf{F}^{T-1}$	$\mathbf{T} = \frac{\partial \Phi^{el}}{\partial \mathbf{E}^e} ; A = \frac{\partial \Phi^p}{\partial p}$	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} ; A = \frac{\partial \Phi^p}{\partial p}$
$\dot{p} = \lambda \frac{\partial F}{\partial A}$	$\dot{\mathbf{E}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} ; \dot{p} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial A}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} ; \dot{p} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial A}$
$F \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda F = 0$	$F \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda F = 0$	$f \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda f = 0$

2.3 Traitement de l'incompressibilité

En grandes déformations, si l'on travaille avec les éléments finis isoparamétriques standard, des oscillations sur les contraintes pourront être observées, notamment lors d'une sollicitation dont la partie flexion est importante. Ce problème numérique bien connu, appelé verrouillage volumique est lié à l'incapacité de l'élément standard à trouver une solution de déplacement cohérente avec le changement de volume. Des solutions pour traiter ce problème ont été développées dans les années 1990, à l'instar d'éléments à sous-intégration, l'élément à l'intégration sélective, la méthode de B-bar et F-bar [de Souza Neto et al., 2005] ou encore l'élément mixte. Parmi toutes ces approches, l'élément mixte est populaire car il est robuste et générique [Akhrass et al., 2014]. Cette méthode se fonde sur des formulations variationnelles de type Hu-Washizu [Washizu, 1955] qui introduisent la pression P et la variation de volume θ comme inconnues principales en complément du déplacement.

2.3.1 Problématiques, aspects numériques et mathématiques

En grandes déformations, la loi élastoplastique employée impose un comportement quasi-incompressible de sorte que :

$$\det \mathbf{F} \approx 1 \quad (2-48)$$

Avec les éléments finis standard, si la variable nodale (le déplacement) est interpolée avec des fonctions linéaires (P1) ou quadratiques (P2), l'espace de solution est trop pauvre pour décrire de façon satisfaisante l'équilibre ainsi que la quasi-incompressibilité. Cela se traduit par de fortes oscillations de la pression dans les éléments.

En cas d'endommagement ductile, contrairement au cas de la plasticité classique, les modèles (Rousselier, GTN) possèdent des lois compressibles en raison de l'évolution de la porosité. Néanmoins, la même pathologie apparaît, à savoir un blocage numérique des éléments finis qui perturbe considérablement leur convergence. Une des raisons est que la porosité initiale est très faible de sorte que la compressibilité plastique est très limitée durant une grande partie de la sollicitation. Dans ce cas, on se retrouve dans le cas (2-48). En outre, au lieu de (2-48), le champ de déplacement doit vérifier la contrainte suivante tout au long du chargement :

$$\det \mathbf{F} \approx \frac{1-f_0}{1-f} \quad (2-49)$$

On illustre le problème du verrouillage par un simple exemple dans la Figure 22 avec des éléments triangulaires linéaires. On considère d'abord un comportement plastique en négligeant l'élasticité. Tous les éléments sont incompressibles ainsi la cinématique doit-elle vérifier $\det \mathbf{F} = 1$, autrement dit, la surface de chaque élément doit rester constante. Par conséquent, le point P ne peut se déplacer que verticalement dans l'élément I et qu'horizontalement dans l'élément II, obligeant ainsi un déplacement nul du point P. C'est pourquoi, ce problème a été initialement nommé 'verrouillage'. Dans ce cas, l'équation d'équilibre pourra ne pas être satisfaite, d'où les oscillations sur le champ des contraintes. Quant aux lois de l'endommagement ductiles s'appuyant sur l'évolution de la porosité, on considère un matériau dont la porosité initiale $f_0 = 0$ et l'élasticité est également négligée. La cinématique de tous

les éléments doit donc vérifier $\det \mathbf{F} = \frac{1}{1-f}$. Si l'on suppose que la porosité dans l'élément I et l'élément II sont $f_I = 0$, $f_{II} = 0,5$, le point P ne peut que se déplacer au point O tel que la surface de l'élément I reste inchangée et celle de l'élément II double. Ceci impose également la cinématique de l'élément III dont la porosité f_{III} doit être 0,5. Aussi sera-t-il difficile, voire impossible de vérifier l'équation de l'équilibre dans tous ces éléments.

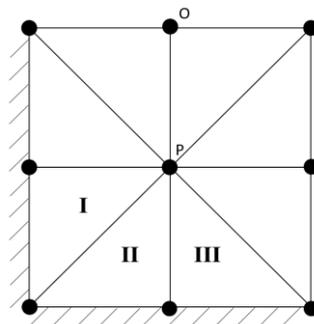
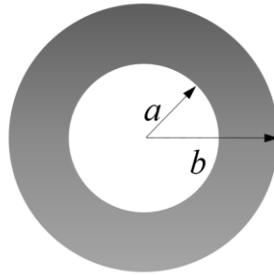


Figure 22 : Éléments subits du verrouillage

Dans la suite de ce paragraphe, pour comparer la performance des différents éléments au regard du verrouillage, on considère un test numérique sur une structure complète qui consiste en une sphère creuse sous pression interne. Sa géométrie et les caractéristiques du matériau sont présentés dans le Problème 1. Les rayons intérieur et extérieur initiaux sont a_0 et b_0 . Le matériau de la sphère est isotrope et plastique parfait. La valeur du coefficient de Poisson est

choisie de sorte que le matériau est quasi-incompressible.



$a_0 = 0,8 \text{ mm}; b_0 = 1 \text{ mm};$
 $E = 28,85 \text{ MPa}; \nu = 0,499; \sigma_0 = 6 \text{ MPa}$
 Plastique parfait

Problème 1 : Sphère creuse sous pression interne : géométrie et caractéristiques du matériau

Dans le régime de grandes déformations, on peut obtenir la solution analytique en appliquant la formulation logarithmique à la loi de von Mises (voir l'annexe pour les analyses détaillées). D'après le résultat analytique, on obtient la trace des contraintes, fonction du rayon de la sphère.

$$\text{tr}\sigma = K - K \sqrt{1 - \frac{\sigma_0}{K} \ln \frac{r}{b}} \quad (2-50)$$

Des simulations numériques sont aussi réalisées avec quatre éléments standard : tétraèdre linéaire, tétraèdre quadratique, hexaèdre linéaire et hexaèdre quadratique. La solution analytique et la solution numérique sont confrontées dans la Figure 23. Pour chaque simulation, on trace la partie hydrostatique des contraintes sur chaque point Gauss en fonction de sa distance à l'origine dans la configuration déformée. D'après les graphes dans la Figure 23, on peut remarquer que l'élément quadratique se comporte mieux que l'élément linéaire (il faut noter que l'ordonnée n'est pas à la même échelle dans les deux cas), et que l'élément hexaèdre donne des résultats plus réguliers que l'élément tétraèdre. Mais aucun de ces éléments standard ne parvient à simuler correctement ce problème en grandes déformations car des oscillations pathologiques de la trace des contraintes sont observées autour de la solution analytique.

Dans cet exemple, la sollicitation sur la sphère incite souvent le problème de verrouillage dans la simulation. De plus, le matériau est presque incompressible car $\nu \approx 0,5$. C'est donc un exemple extrême pour révéler le verrouillage en grandes déformations. On peut toujours trouver de nombreux autres exemples de cette problématique.

Un traitement direct pour remédier au problème du verrouillage est d'enrichir l'espace de solution en augmentant l'ordre d'interpolation du déplacement. Mais cette approche n'est pas pratique car elle nécessite de nouvelles bases d'éléments (P3 ou plus) non implantées dans la plupart des codes éléments finis. De surcroît, le calcul avec les éléments d'ordres élevés sera beaucoup plus coûteux en temps. Dans la pratique, des méthodes plus faciles à mettre en œuvre ont été proposées comme l'élément à sous-intégration, l'élément à l'intégration sélective ou l'élément mixte. On les examinera et comparera dans les paragraphes suivants.

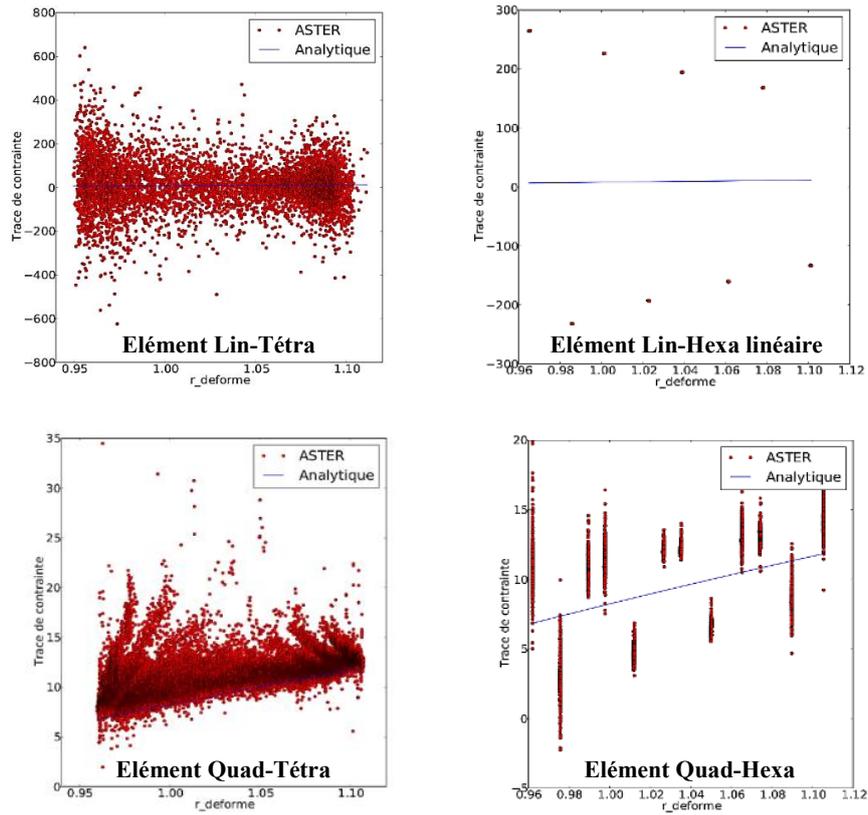


Figure 23 : Trace des contraintes en fonction du rayon de la sphère

2.3.2 Sous-intégration

La méthode de sous-intégration consiste à réduire le nombre de points d'intégration dans un élément, dont la rigidité est ainsi diminuée. La Figure 24 montre l'élément quadratique à 9 points de Gauss (intégration complète) et l'élément quadratique à 4 points de Gauss (sous-intégration).

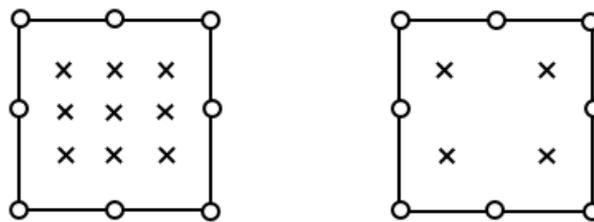


Figure 24 : Gauche : Élément à l'intégration complète, droite : élément à sous-intégration

La même simulation de la sphère est effectuée avec l'élément à sous-intégration, voir le résultat dans la Figure 25. On constate que, par rapport à l'élément standard, cette approche ne fait qu'atténuer le verrouillage car on observe toujours les oscillations sur les champs des contraintes.

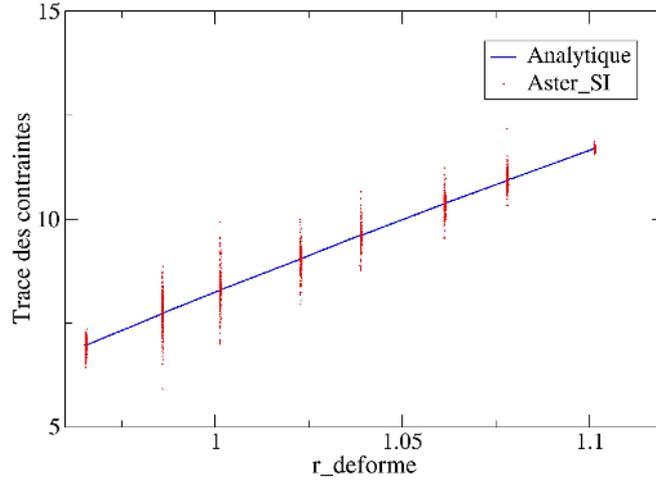


Figure 25 : Trace des contraintes en fonction du rayon de la sphère. Élément quadratique sous-intégration
 Par ailleurs, l'élément à sous-intégration pourrait introduire des modes parasites dans la simulation. La Figure 26 montre que, sur de tels modes, les coordonnées du centre restent inchangées. La théorie classique des éléments finis ne permet pas de différencier état déformé et non déformé d'un élément dans un tel cas. Ces modes, pouvant rendre les calculs irréalisables, sont appelés modes à énergie nulle ou 'hourglassing' d'après la forme d'élément, à savoir le dernier mode dans la Figure 26.

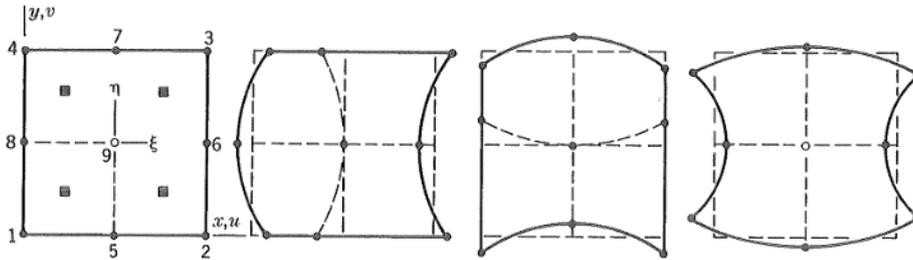


Figure 26 : Modes parasites 'zero energy' pour l'élément quadratique à sous-intégration [Reddy et al., 1988]

2.3.3 Intégration sélective

Cette intégration est basée sur la décomposition de déformation de l'élément en une partie déviatorique et une partie hydrostatique. En vue de traiter le verrouillage, dû à la dilatation pure, l'intégration sélective consiste alors à sous-intégrer la contribution hydrostatique de chaque grandeur et à utiliser l'intégration exacte pour calculer les termes déviatoriques.

Sur le point d'intégration central, la déformation hydrostatique est calculée sous la forme :

$$\langle E_H \rangle = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} E_H d\Omega_0 \quad (2-51)$$

et la déformation corrigée est donc :

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_D + \langle E_H \rangle \mathbf{I} \quad (2-52)$$

où \mathbf{E}_D est la partie déviatorique du tenseur de déformations.

On a aussi :

$$\delta \hat{\mathbf{E}} = \delta \mathbf{E}_D + \langle \delta E_H \rangle \mathbf{I} = \delta \mathbf{E} + (\langle \delta E_H \rangle - \delta E_H) \mathbf{I} = \delta \mathbf{E} + \frac{1}{3} (\langle \delta \mathbf{E} \rangle - \delta \mathbf{E}) : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2-53)$$

La tenseur conjugué de $\hat{\mathbf{E}}$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{E}}}(\hat{\mathbf{E}}) \quad (2-54)$$

Le Lagrangien à minimiser de l'élément avec l'intégration sélective est :

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \theta, P) = \int_{\Omega_0} \Phi(\hat{\mathbf{E}}) d\Omega_0 - W_{ext}(\underline{u}) \quad (2-55)$$

On pourra déduire les forces intérieures par le premier ordre de la variation du Lagrangien :

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{T}} : \delta \hat{\mathbf{E}} d\Omega_0 - \delta W_{ext} \quad (2-56)$$

Un schéma simplifié d'un élément à l'intégration sélective est présenté dans la Figure 27.

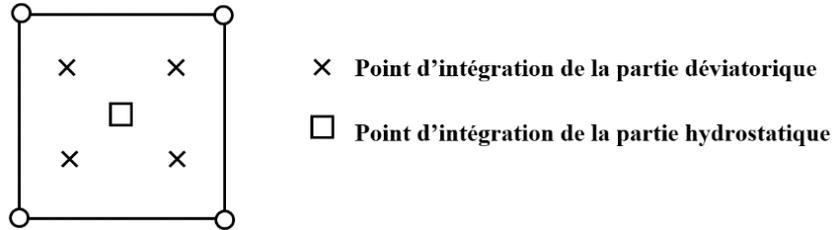


Figure 27 : Élément linéaire à l'intégration sélective

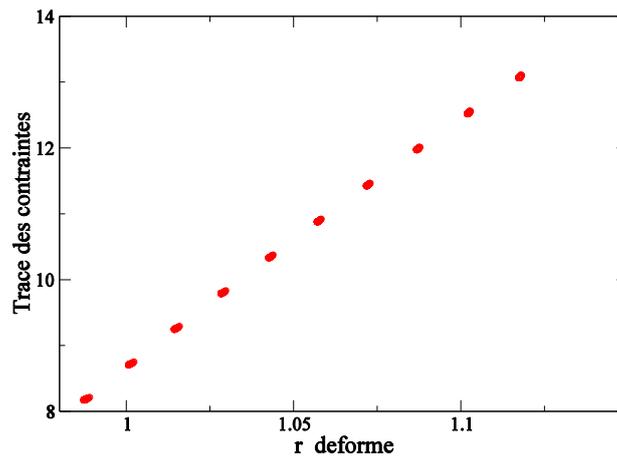


Figure 28 : Trace des contraintes en fonction du rayon de la sphère. Élément linéaire à l'intégration sélective

Des simulations sont, à nouveau réalisées, sur la sphère du Problème 1. La trace des contraintes aux points Gauss en fonction du rayon est présentée dans la Figure 28. On constate que la méthode à l'intégration sélective élimine le problème du verrouillage volumique. Néanmoins, elle ne peut s'appliquer qu'aux éléments linéaires. L'élément quadratique à l'intégration sélective conduit à des difficultés de convergence car il ne respecte pas la condition LBB que l'on abordera dans le paragraphe suivant.

2.3.4 Éléments mixtes

Les éléments mixtes, reposant sur la formulation enrichie de Hu-Washizu [Washizu, 1955], introduisent la variation de volume θ et la pression P comme des variables nodales en plus du déplacement. On se réfère aussi au récent travail de [Akhrass et al., 2014] pour sa formulation et ses applications.

Dans ces éléments, on définit un tenseur enrichi du gradient de la transformation \mathbf{F} tel que :

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\exp \theta}{J} \right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad (2-57)$$

Avec la formulation logarithmique, le tenseur enrichi des déformations s'écrit donc :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \mathbf{E} + \frac{1}{3} (\theta - \ln J) \mathbf{I} \quad (2-58)$$

En tenant compte de la relation $J = \det(\mathbf{F}) = \exp[\text{Tr}(\mathbf{E})]$, on a :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_D + \frac{\theta}{3} \mathbf{I} \quad (2-59)$$

Ainsi, pour contrôler la variation du volume, on impose la relation faible :

$$\theta \approx \ln J \quad (2-60)$$

Le Lagrangien de cette formulation enrichie s'écrit avec un terme supplémentaire pour contrôler la variation de volume :

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \theta, P) = \int_{\Omega_0} [\Phi(\mathbf{E}) + P(\ln J - \theta)] d\Omega_0 - W_{ext}(\underline{u}) \quad (2-61)$$

où Φ désigne la densité d'énergie potentielle volumique dans la configuration de référence et W_{ext} le potentiel des efforts extérieurs. \underline{u} est le vecteur de déplacement et P un multiplicateur de Lagrange qui peut être interprété comme la pression. La variation du Lagrangien permet de déterminer le point-selle correspondant à la solution du problème. La condition d'optimalité est

$$\delta \mathcal{L} = 0, \quad \forall \delta \underline{u}, \delta \theta, \delta P \quad (2-62)$$

On déduit de l'expression (2-59) la variation de \mathbf{E} :

$$\delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{E} + \frac{1}{3} (\delta \theta \mathbf{I} - \text{Tr}(\delta \mathbf{E}) \mathbf{I}) \quad (2-63)$$

(2-62) devient donc :

$$\begin{cases} \delta \mathcal{L}^e = \int_{\Omega_0} [(\tilde{\mathbf{T}}_D + P \mathbf{I}) : \delta \mathbf{E} - \delta W_{ext}] d\Omega = 0 \\ \delta \mathcal{L}^\theta = \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{3} (\text{Tr} \tilde{\mathbf{T}}) - P \right) \delta \theta d\Omega = 0 \\ \delta \mathcal{L}^P = \int_{\Omega_0} (\ln J - \theta) \delta P d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2-64)$$

Dans cette expression, le tenseur de contraintes $\tilde{\mathbf{T}}$ résulte de la loi de comportement exprimée avec le tenseur de déformation \mathbf{E} , à savoir : $\tilde{\mathbf{T}} = \partial_{\mathbf{E}} \Phi^{el}(\mathbf{E})$.

Dans la pratique, les champs de $(\underline{u}, \theta, P)$ sont interpolés de façon P2/P1/P1 ou P2/P1/P2 dont on sait qu'ils violent la condition LBB, où P1 symbolise l'interpolation linéaire et P2 quadratique, cf. Figure 29.

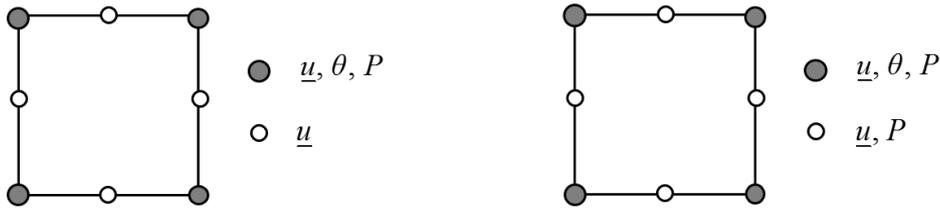


Figure 29 : Eléments mixtes. Gauche : P2/P1/P1 ; droite : P2/P1/P2

Avec ces deux éléments mixtes, on a refait la même simulation numérique présentée dans la section précédente. La partie hydrostatique des contraintes sur chaque point de Gauss est tracée

en fonction du rayon dans la Figure 30. On observe que les contraintes sont régulières avec l'éléments P2/P1/P1 et l'éléments P2/P1/P2.

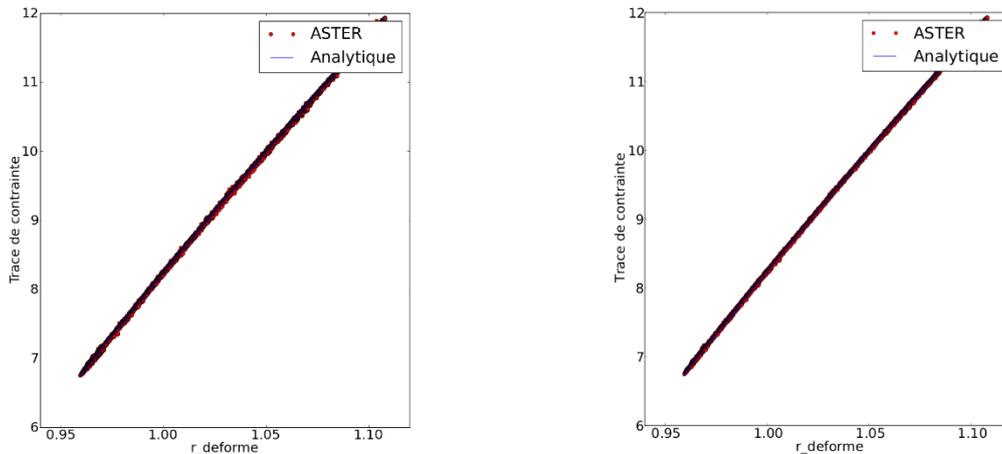


Figure 30 : Trace des contraintes en fonction du rayon de la sphère. Gauche : élément P2/P1/P1 ; droite : élément P2/P1/P2

On examine maintenant les valeurs de la pression (multiplicateur de Lagrange P) pour les éléments (P2,P1,P1) et (P2,P1,P2), cf Figure 31. Une importante oscillation du multiplicateur lagrangien apparaît dans le cas de P2/P1/P2 tandis que la répartition obtenue avec les éléments P2/P1/P1 est régulière.

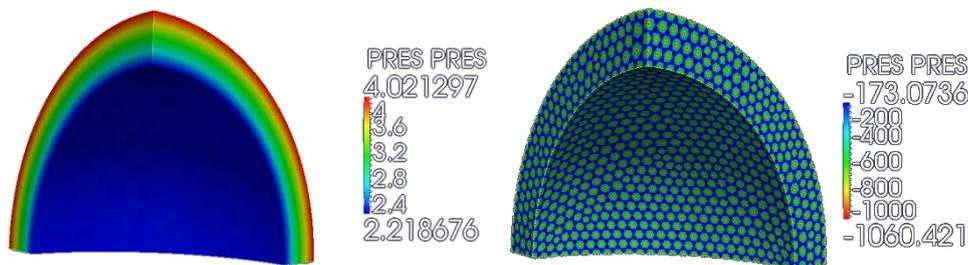
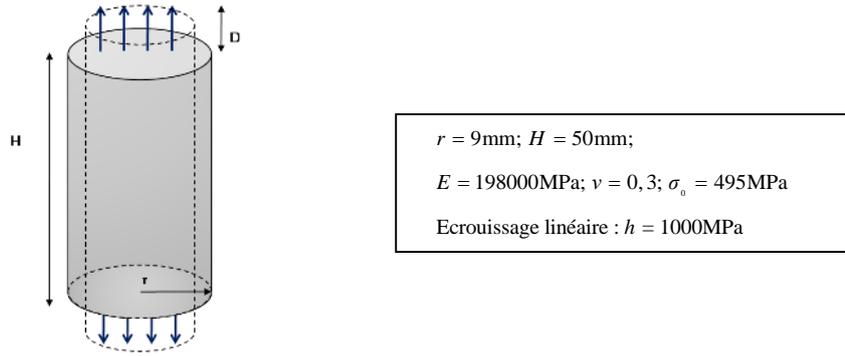


Figure 31 : Répartition aux nœuds de pression. Gauche : élément P2/P1/P1 ; droite : élément P2/P1/P2

Cette oscillation en pression s'explique par l'absence de respect de la condition LBB par les éléments P2/P1/P2. A ce stade, l'élément P2/P1/P1 qui a résolu le problème du verrouillage sans oscillation de pression semblerait le bon élément pour simuler les grandes déformations. Néanmoins, après avoir simulé une traction simple sur un cylindre dont la géométrie et les caractéristiques du matériau sont définies dans Problème 2, on a constaté que des bandes de localisation pouvaient apparaître, même à un niveau de plastification faible, cf. Figure 32, comme ce qui avait déjà été observé avec la cinématique de grandes déformations de Simo-Miehe dans [Lorentz, Besson, Cano ; 2008]. Ainsi, on observe des bandes de localisation de déformation en bas du cylindre quand la déformation plastique cumulée n'atteint que 20%, tandis que la résolution analytique de ce problème devrait être homogène. On constate aussi que cette instabilité, posant des difficultés de convergence, est observée dans la simulation 3D et la simulation 2D à symétrie axiale. En revanche, dans une simulation en déformations planes avec le même maillage que la Figure 32, elle n'apparaît plus pour une raison encore mal comprise. Toutefois, on propose d'expliquer ces problèmes d'un point de vue mathématique ci-après.



Problème 2 : Traction simple sur un cylindre

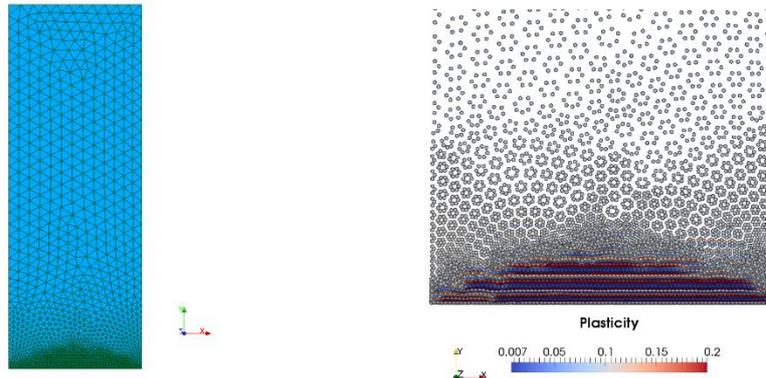


Figure 32 : Maillage du cylindre (gauche) et bandes de localisation sur le champ de la déformation plastique cumulée (droite) dans la simulation l'élément P2/P1/P1

Cette localisation anormale de la déformation pourrait résulter de la perte d'ellipticité de l'opérateur tangent du problème, ce qui ne garantit plus le caractère bien posé de ce dernier. En effet, si l'on note $w = (\delta u, \delta \theta) \in W, x = \delta P \in X$, l'équation (2-64) revient au problème plus général :

Trouver $(w, x) \in W \times X$, tel que pour tout $(v, y) \in W \times X$:

$$\begin{cases} a(w, v) + b(v, x) = \langle f, w \rangle \\ b(w, y) = \langle g, y \rangle \end{cases} \quad (2-65)$$

Deux conditions doivent être vérifiées afin de garantir l'unicité de solution [Ern et Guermond, 2013]:

Condition 1 : Coercivité de l'opérateur $a(\cdot, \cdot)$

$$\exists \alpha > 0, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_W^2, \quad \forall v \in \{v \mid b(v, y) = 0, \forall y \in X\} \quad (2-66)$$

Condition 2 : LBB condition

$$\exists \beta > 0, \inf_{y \in X} \sup_{v \in W} \frac{b(v, y)}{\|v\|_W \|y\|_X} \geq \beta \quad (2-67)$$

En vertu de ce théorème, on pourra déduire une explication qualitative pour les problèmes avec les deux éléments mixtes : l'espace de la pression X est trop riche avec l'élément P2/P1/P2 si bien qu'il ne respecte pas la condition LBB, tandis que l'élément P2/P1/P1 possède un espace de pression X trop pauvre de sorte que l'opérateur a perd sa coercivité dans l'espace contraint. Des problèmes similaires sont aussi évoqués dans le travail de [Lorentz et al., 2008] et [Auricchio et al., 2013]. Mais la question reste partiellement ouverte et aucune solution effective n'a été proposée.

2.3.5 Bilan des traitements de l'incompressibilité

Dans cette section, on a abordé le verrouillage volumique et les traitements pour y remédier. Ce problème numérique, bien connu dans la simulation des comportements incompressibles et quasi-incompressibles, résulte du faible nombre de degrés de liberté par rapport au nombre des contraintes du système dans l'espace discrétisé. Certains auteurs ont d'ailleurs proposé un taux de contrainte défini par $r = \frac{\text{nombre de DDL}}{\text{nombre des équations sur la pression}}$, et constaté que si $r < 2$, le verrouillage sera attendu [Hughes, 2012]. Cependant, ceci n'est qu'un indicateur peu précis, notamment pour les éléments mixtes. [Chapelle et Bathe, 1993] ont montré que certains éléments vérifiant $r \geq 2$ ne respectent pas la condition LBB et exhibent le verrouillage. Ils ont proposé des tests numériques pour mieux prédire la présence ou non du verrouillage dans un élément, complétés plus tard par [Bathe, 2001].

Dans cette étude, on a proposé un test de simulation sur une sphère creuse, dont la solution a été aussi obtenue en grandes déformations, cf. l'annexe A1. Trois familles de traitement du problème de verrouillage volumique ont été examinées. L'élément à sous-intégration a partiellement limité le problème mais le résultat n'était toujours pas satisfaisant. De plus, il pourrait introduire des modes parasites à énergie nulle. La méthode avec l'intégration sélective élimine le problème du verrouillage volumique mais il ne peut s'appliquer qu'à l'élément linéaire. Enfin, l'élément mixte a consisté à introduire deux variables nodales supplémentaires : le gonflement et la pression. Selon l'ordre d'interpolation de cette dernière, on a examiné deux types d'éléments mixtes : P2/P1/P2 et P2/P1/P1. Ils sont tous deux très efficaces pour éliminer le verrouillage, au moins sur le test de la sphère. Mais l'élément P2/P1/P2 a présenté une oscillation sur le champ de pression et l'élément P2/P1/P1 a conduit à des bandes de localisations anormales de la déformation plastique. L'origine de cette première observation était la non-vérification de la condition LBB par l'élément P2/P1/P2, connue et démontrée dans [Brezzi et Fortin, 1991] pour l'équation de Stokes. La raison des localisations avec l'élément P2/P1/P1 reste encore ouverte. On a présumé que l'espace de la pression était trop pauvre dans ce cas et conduisait à un opérateur $a(\cdot, \cdot)$ non coercitif, source d'un problème mal posé.

Il n'existe pas d'élément totalement satisfaisant pour le traitement du verrouillage, mais ceci n'empêche pas de continuer les études sur la loi de GTN et sa formulation non-locale. Par ailleurs, on verra surtout que la régularisation non-locale limitera l'instabilité de l'élément P2/P1/P1.

2.4 Modèle GTN en grandes déformations

Le modèle choisi dans cette thèse est celui de GTN qui s'appuie sur des analyses micromécaniques ; c'est sans doute le plus utilisé pour modéliser l'endommagement ductile. Cette section consiste à reformuler et résoudre les équations de GTN sur la base de la cinématique de grandes déformations logarithmiques introduite au § 2.2.2.

Dans cette section, on commence par réécrire le modèle en grandes déformations logarithmiques. Malgré des lois d'écoulement a priori non associées dans le modèle GTN usuel, on constatera qu'en introduisant le tenseur des contraintes \mathbf{T} dual de la déformation logarithmique, le modèle pourra aussi s'inscrire dans le formalisme des matériaux standard généralisés. On abordera ensuite la modélisation des différentes étapes dans l'évolution de la porosité. En outre, pour résoudre toutes les équations de la loi de comportement, un algorithme

qui conduit à deux équations scalaires sera détaillé. On montrera explicitement l'existence et l'unicité de la solution au problème d'intégration locale avec cet algorithme.

2.4.1 Homogénéisation

On examine ici la question de la définition de la déformation plastique cumulée macroscopique dans le contexte des lois d'endommagement ductile d'inspiration microscopique.

On appelle Ω_0^m et Ω^m le domaine de matière du VER dans ses configurations initiale et déformée, et Ω_0 et Ω les domaines initial et déformé complet, incluant la cavité. On appelle respectivement $\partial\Omega_0^m$, $\partial\Omega^m$, $\partial\Omega_0$, et $\partial\Omega$ les bords de chacun de ces domaines. Les porosités initiale et courante correspondent aux ratios suivants :

$$f_0 = \frac{|\Omega_0| - |\Omega_0^m|}{|\Omega_0|} \quad ; \quad f = \frac{|\Omega| - |\Omega^m|}{|\Omega|} \quad (2-68)$$

On introduit également les moyennes par rapport à chacun de ces domaines :

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_0^m &= \frac{1}{|\Omega_0^m|} \int_{\Omega_0^m} \cdot d\Omega_0^m \quad ; \quad \langle \cdot \rangle^m = \frac{1}{|\Omega^m|} \int_{\Omega^m} \cdot d\Omega^m \\ \langle \cdot \rangle_0 &= \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} \cdot d\Omega_0 \quad ; \quad \langle \cdot \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (2-69)$$

Le champ de contrainte microscopique $\boldsymbol{\sigma}$, défini sur le domaine de matière, peut être prolongé par 0 dans la cavité, tandis que le champ de vitesse microscopique \mathbf{v} peut, quant à lui, être prolongé par un relèvement ; il y a donc un taux de déformation \mathbf{d} non nul dans la cavité. Dans le cas d'un schéma d'homogénéisation à vitesse imposée au bord, le taux de déformation macroscopique \mathbf{D} et la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ vérifient :

$$\forall x \in \partial\Omega \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \quad ; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2-70)$$

Pour un schéma d'homogénéisation à contrainte imposée au bord, les définitions sont les suivantes :

$$\forall x \in \partial\Omega \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \quad ; \quad \mathbf{D} = \langle \mathbf{d} \rangle \quad (2-71)$$

Relation de Hill

Dans le cadre d'un schéma d'homogénéisation à vitesse imposée au bord, on montre aisément la relation de Hill qui résulte du principe des puissances virtuelles :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} d\Omega = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \quad (2-72)$$

Et dans le cas d'un schéma d'homogénéisation à contrainte imposée au bord, la relation de Hill prend la même forme :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{d} d\Omega = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \quad (2-73)$$

Comme la contrainte est nulle dans la cavité, on peut encore exprimer la moyenne sur tout le VER en fonction de la moyenne sur la matière et de la porosité :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^m} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} d\Omega^m = \frac{|\Omega^m|}{|\Omega|} \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle^m = (1-f) \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle^m \quad (2-74)$$

Au final, la relation de Hill prend la forme suivante :

$$(1-f) \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle^m = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \quad (2-75)$$

Matériau rigide plastique

L'obtention par homogénéisation de critères de plasticité en régime ductile s'appuie sur une hypothèse de matériau plastique rigide dans lequel l'élasticité est négligée. Dans ce cas, le matériau de la matrice est incompressible. En particulier, le Jacobien de la transformation est égal à l'identité dans la matière, ce qui conduit à l'égalité des moyennes $\langle \bullet \rangle_0 = \langle \bullet \rangle$. Par conséquent, la relation de Hill est préservée dans la configuration de référence :

$$(1-f)\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle_0^m = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \quad (2-76)$$

Ecrouisseage isotrope

On suppose ici que le matériau rigide plastique présente un écrouissage isotrope, régi par une loi d'écoulement standard généralisée. Quant au critère de plasticité, il s'appuie ici sur une semi-norme des contraintes $n(\boldsymbol{\sigma})$, par exemple la contrainte équivalente de von Mises :

$$f(\sigma, A) = \sigma_{\text{eq}} + A - \sigma_0 \quad (2-77)$$

où σ_0 désigne le seuil de plasticité initial. Les équations d'écoulement sont associées à cette fonction seuil :

$$\mathbf{d} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \dot{p} = \lambda \quad (2-78)$$

$$\lambda \geq 0 \quad ; \quad f(\boldsymbol{\sigma}, A) \leq 0 \quad ; \quad \lambda f(\boldsymbol{\sigma}, A) = 0 \quad (2-79)$$

On introduit maintenant l'énergie consommée par plasticité qui cumule l'énergie bloquée et l'énergie dissipée :

$$\Phi_{pl}(p) = \Phi_{bl}(p) + \sigma_0 p \quad (2-80)$$

Comme la semi-norme des contraintes est une fonction positivement homogène de degré 1, on peut appliquer l'identité d'Euler et montrer l'égalité suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \lambda \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{p} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{p} n(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{p}(\sigma_0 - A) = \frac{d}{dt} [\Phi_{pl}(p)] \quad (2-81)$$

En introduisant maintenant cette relation dans (2-76), on établit un lien entre la puissance macroscopique et l'énergie bloquée microscopique :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = (1-f) \frac{d}{dt} \langle \Phi_{pl}(p) \rangle_0^m \quad (2-82)$$

Déformation plastique cumulée macroscopique

On peut choisir de définir la déformation plastique cumulée macroscopique P comme la valeur qui correspond à l'énergie plastique moyenne, à savoir :

$$\Phi_{pl}(P) = \langle \Phi_{pl}(p) \rangle_0^m \quad (2-83)$$

Le caractère croissant de Φ_{pl} assure que P est bien compris entre les valeurs extrêmes du champ de déformation plastique cumulée microscopique. En plasticité parfaite, par exemple, on aurait ainsi $P = \langle p \rangle_0$.

On peut également définir les contraintes d'écoulement microscopique et macroscopique par dérivation du potentiel plastique :

$$\sigma^f = \Phi_{pl}'(p) = \sigma_0 - A(p) \quad ; \quad \Sigma^f = \Phi_{pl}'(P) = \sigma_0 - A(P) \quad (2-84)$$

Là aussi, la décroissance de la fonction A (écrouissage positif) assure que la contrainte d'écoulement macroscopique est comprise entre les valeurs extrêmes du champ de contrainte d'écoulement microscopique.

En reportant les définitions (2-83) et (2-84) dans (2-82), on en déduit finalement la loi d'écoulement de la déformation plastique cumulée macroscopique, exprimée en fonction de la contrainte de Cauchy :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = (1-f) \boldsymbol{\Sigma}^f \dot{P} \quad (2-85)$$

Cette forme correspond à la loi d'écoulement généralement introduite avec le modèle de Gurson à écrouissage isotrope. On rappelle que cette expression est obtenue sous l'hypothèse d'un comportement rigide plastique à écrouissage isotrope de type standard généralisé et moyennant les définitions (2-83) et (2-84) de la déformation plastique cumulée macroscopique et de la contrainte d'écoulement macroscopique.

A l'échelle macroscopique, on introduit également une fonction des contraintes $N(\boldsymbol{\Sigma}, f)$ positivement homogène de degré 1 qui contrôle la contrainte dans le seuil de plasticité ; cette fonction dépend aussi de la porosité courante. Cette expression peut découler de l'homogénéisation en plasticité parfaite ou s'en inspirer. Compte tenu des choix faits par ailleurs en matière de contrainte d'écoulement dans la partie précédente, la partie de la fonction seuil liée à l'écrouissage s'appuiera sur la déformation plastique cumulée macroscopique P et la force thermodynamique qui lui est associée. On adopte ainsi la fonction seuil suivante :

$$F(\boldsymbol{\Sigma}, A) = N(\boldsymbol{\Sigma}) + A - \sigma_0 \quad (2-86)$$

Pour la déformation plastique (égale à la déformation totale), on adopte une règle d'écoulement normale associée, munie de la condition de cohérence traditionnelle :

$$\mathbf{D} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \quad \text{et} \quad \lambda \geq 0 ; F \leq 0 ; \lambda F = 0 \quad (2-87)$$

On peut alors appliquer le même raisonnement qu'en (2-81) pour construire la loi d'écoulement de la déformation plastique cumulée :

$$(1-f) \boldsymbol{\Sigma}^f \dot{P} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = \lambda \boldsymbol{\Sigma}^f \Rightarrow \dot{P} = \frac{\lambda}{1-f} \quad (2-88)$$

Visiblement, la loi d'écoulement n'est pas associée au seuil de plasticité à cause du dénominateur $1-f$.

En outre, le Jacobien macroscopique qui mesure le changement de volume macroscopique lié à la variation de volume de la cavité prend la forme suivante :

$$J = \frac{|\Omega^c|}{|\Omega_0^c|} = \left(\frac{1-f_0}{|\Omega_0|} \right) \left(\frac{|\Omega|}{1-f} \right) = \frac{1-f_0}{1-f} \quad (2-89)$$

2.4.2 Transcription de la loi et de l'écoulement dans la formulation logarithmique

On voudrait maintenant réécrire les expressions (2-86) – (2-88) avec le tenseur \mathbf{T} . En introduisant le second tenseur des contraintes macroscopique Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , on obtient d'abord la relation suivante par définition :

$$\mathcal{P}_i = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} d\Omega \quad (2-90)$$

qui s'écrit localement :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = \frac{1}{J} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{J} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2-91)$$

On en déduit donc :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{T} : \frac{2\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} \right) \cdot \mathbf{F}^T = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T} : \mathbf{P}) \cdot \mathbf{F}^T \quad (2-92)$$

$$\text{où } \mathbf{P} = \frac{2\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \ln \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}}.$$

$\ln \mathbf{C}$ est une fonction tenseur isotrope de \mathbf{C} ([de Souza Neto et al., 2011]). On en profite pour calculer sa dérivée présente dans l'Annexe A2.

En général, $\mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{J} \mathbf{N}(\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T} : \mathbf{P}) \cdot \mathbf{F}^T)$ n'a pas de lien directe avec $\mathbf{N}(\mathbf{T})$. Mais dans le cas d'une sollicitation radiale, on peut montrer que $\mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{N}(\mathbf{T})/J$. En effet, la matrice symétrique $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ est diagonalisable. On note \mathcal{C} le repère dont les bases sont les vecteurs propres de \mathbf{C} . Dans ce repère, \mathbf{C}^c est diagonal et par conséquent, le tenseur de contrainte \mathbf{T}^c l'est aussi du fait du chargement radial. De plus, par décomposition polaire, $\mathbf{F}^c = \mathbf{R}^c \cdot \mathbf{U}^c$ où \mathbf{R}^c est une matrice orthogonale et $\mathbf{U}^c = (\mathbf{C}^c)^{1/2}$ est aussi une matrice diagonale. Le tenseur de dérivée \mathbf{P}^c s'écrit :

$$\mathbf{P}^c = \sum_{i=1}^{\text{ndim}} \frac{1}{\lambda_i^c} \underline{e}_i^c \otimes \underline{e}_i^c + \sum_{i=1}^{\text{ndim}} \sum_{j \neq i}^{\text{ndim}} \frac{1}{2} \frac{\ln \lambda_i^c - \ln \lambda_j^c}{\lambda_i^c - \lambda_j^c} \underline{e}_i^c \otimes \underline{e}_j^c \otimes (\underline{e}_i^c \otimes \underline{e}_j^c + \underline{e}_j^c \otimes \underline{e}_i^c) \quad (2-93)$$

Pour un matériau isotrope, $\mathbf{N}(\cdot)$ est une fonction scalaire isotrope qui vérifie :

$$\mathbf{N}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T) = \mathbf{N}(\mathbf{U}) \quad , \text{ pour toute matrice orthogonale } \mathbf{R} \quad (2-94)$$

Tenant compte de toutes ces relations, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}^c) &= \mathbf{N}\left(\frac{1}{J} \mathbf{F}^c \cdot (\mathbf{T}^c : \mathbf{P}^c) \cdot \mathbf{F}^{cT}\right) = \frac{1}{J} \mathbf{N}(\mathbf{R}^c \cdot \mathbf{U}^c \cdot (\mathbf{T}^c : \mathbf{P}^c) \cdot \mathbf{U}^{cT} \cdot \mathbf{R}^{cT}) \\ &= \frac{1}{J} \mathbf{N}(\mathbf{U}^c \cdot (\mathbf{T}^c : \mathbf{P}^c) \cdot \mathbf{U}^{cT}) = \frac{1}{J} \mathbf{N}(\mathbf{T}^c) \end{aligned} \quad (2-95)$$

Grâce à l'isotropie de l'opérateur $\mathbf{N}(\cdot)$, sa valeur ne change pas avec le référentiel. On en donc déduit :

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}^c) = \frac{1}{J} \mathbf{N}(\mathbf{T}^c) = \frac{1}{J} \mathbf{N}(\mathbf{T}) \quad (2-96)$$

Il faut noter que (2-96) n'est vrai qu'en cas d'un chargement radial. Dans ce sens, \mathbf{T} s'interprète comme la contrainte de Kirchhoff. On choisit donc d'écrire la fonction seuil avec \mathbf{T} est dans la suite du travail sous la forme :

$$F(\mathbf{T}, A) = \mathbf{N}\left(\frac{\mathbf{T}}{J}\right) + A - \sigma_0 = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{T})}{J} + A - \sigma_0 \quad (2-97)$$

[Miehe et al., 2002] a aussi fait des choix similaires dans leurs écritures de la fonction seuil de von Mises à la configuration initiale.

D'après (2-88) et (2-91), on obtient :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = J \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \quad ; \quad \dot{p} = \frac{\lambda}{1-f} \quad ; \quad \lambda \geq 0 \quad ; \quad F \leq 0 \quad ; \quad \lambda F = 0 \quad (2-98)$$

Après un changement de variable $\hat{\lambda} = \lambda J$, l'écoulement plastique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = \hat{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \\ \dot{p} = \frac{\hat{\lambda}}{J(1-f)} \approx \frac{\hat{\lambda}}{1-f_0} \approx \hat{\lambda} \end{cases} \quad (2-99)$$

Dans la fonction seuil (2-97), on voit qu'un J (changement de volume) intervient dans le passage de σ_* à T_* en raison des différentes configurations référentielles. De surcroît, dans l'équation (2-99)₂, on a utilisé les approximations $J \approx (1-f_0)/(1-f) \approx 1/(1-f)$. La première néglige le changement de volume élastique, la seconde suppose une faible porosité initiale.

(2-99) montre qu'en écrivant le modèle GTN avec la formulation logarithmique de grandes déformations, l'écoulement plastique devient associé à la fonction seuil. Mais cette dernière dépend désormais non seulement des contraintes et de la force thermodynamique, mais aussi du changement de volume (Jacobien J). On peut dire que cette écriture reste sous format du cadre de matériaux standard généralisés.

2.4.3 GTN dans le cadre grandes déformations choisi

Pour le modèle de GTN, comme indiqué dans le paragraphe 1.5.2, on écrit les équations de la loi sous forme (1-45). La fonction $N(\mathbf{T})$ est donc T^* définie par la relation (2-100)₂. On rassemble à présent toutes les équations du modèle exprimées avec le tenseur des contraintes \mathbf{T} en grandes déformations. Pour une écriture plus conventionnelle, on remplace $\hat{\lambda}$ de (2-99) par λ .

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbb{H} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \\ G(\mathbf{T}, T_*, f) = \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_*}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*}\right) - 1 - (q_1 f^*)^2 \stackrel{\text{def } T_*}{=} 0 \\ F(T_*, p) = \frac{T_*}{J} + A(p) - \sigma_0 \leq 0 \\ \lambda \geq 0 \quad ; \quad F \leq 0 \quad ; \quad \lambda F = 0 \\ \dot{\mathbf{E}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \\ \dot{p} = \lambda \end{cases} \quad (2-100)$$

On observe que l'évolution de la déformation plastique $\dot{\mathbf{E}}^p$ et l'évolution de la variable interne \dot{p} respectent la loi de normalité avec cette écriture des équations.

Le mécanisme de l'endommagement ductile contient trois phases de l'évolution de cavités avant la rupture : nucléation, croissance et coalescence.

Croissance

L'évolution de la porosité due à la croissance se déduit du caractère isochore de la déformation plastique microscopique, une relation exacte en l'absence de déformation élastique microscopique et que l'on étend en pratique pour obtenir :

$$\dot{f}_g = (1-f) \text{tr} \dot{\mathbf{E}}^p \quad (2-101)$$

Dans le modèle présenté ci-dessus, la croissance de cavités par l'équation n'a pas été prise en considération. Pour le compléter, des termes supplémentaires dans l'expression de la porosité sont proposés afin de modéliser la germination et la coalescence.

Germination

Une modélisation qui tient compte de la nucléation consiste à ajouter un nouveau terme dans l'équation de l'évolution de la porosité, qui est :

$$\dot{f}_n = B(p)\dot{p} = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{p-p_N}{s_N}\right)^2\right] \dot{p} \quad (2-102)$$

Ici, f_N, p_N, s_N sont des paramètres de la germination.

L'évolution de la porosité s'écrit maintenant :

$$\dot{f} = \dot{f}_g + \dot{f}_n \quad (2-103)$$

En fait, \dot{f}_g ne prend des valeurs non négligeables que dans un intervalle qui dépend de s_N , voir la courbe gauche de la Figure 33. Dans un calcul numérique, l'incrément de la déformation plastique cumulée Δp peut être grand au point que la déformation plastique du pas actuel p_i et du pas suivant p_{i+1} sont de part et d'autre du pic de la fonction. Le cas échéant, le calcul ne « voit » pas l'évolution importante de f_n et introduit une erreur. Afin d'éviter ce problème, on prend une forme intégrale de (2-102), ce qui donne l'équation :

$$f_n = \frac{f_0}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{p_n - p}{\sqrt{2\pi}} + \operatorname{erf} \frac{p}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (2-104)$$

qui est tracée dans la Figure 33.

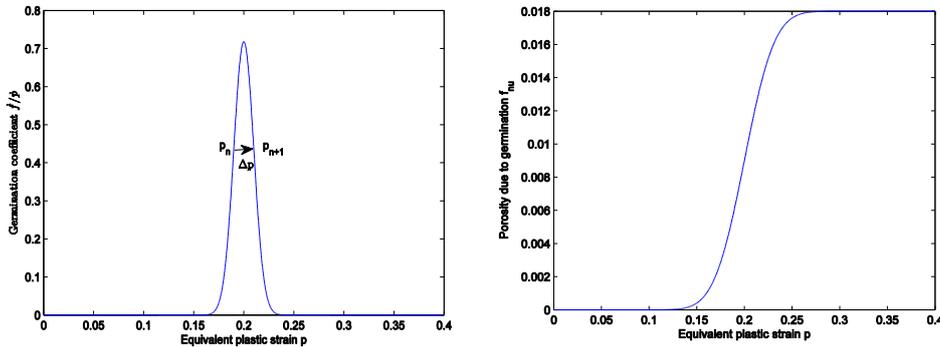


Figure 33 : \dot{f}_n et f_n en fonction de la déformation plastique cumulée

Coalescence

En ce qui concerne la coalescence, le modèle le plus souvent utilisé est celui proposé par Tvergaard et Needleman : une nouvelle porosité effective f^* est définie en modélisant la coalescence par une 'accélération' de croissance des cavités.

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (2-105)$$

Ici f_c est la porosité de coalescence pour laquelle nous considérons que les cavités commencent à coalescer et δ est un paramètre déterminant la vitesse de coalescence.

Dans le cadre de notre travail, nous proposons aussi un modèle de coalescence en ajoutant un terme supplémentaire dans le critère de GTN (2-100)₂ :

$$G(\mathbf{T}, T_*, f) = \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_*} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*} \right) + 2q_1 f^* - (1 + q_1 f^*)^{(2+P_{\text{coa}}(f^*-f_c))} \stackrel{\text{def } T_*}{=} 0 \quad (2-106)$$

Ici, P_{coa} est un paramètre de coalescence qui accélère l'évolution de porosité. Si $P_{\text{coa}} = 0$, l'équation (2-106) se réduit à la même forme que (2-100)₂.

2.4.4 Équations discrétisées (porosité explicite)

On regroupe ici les équations du modèle GTN après une discrétisation en temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = \mathbf{T}^e - \mathbb{H} : \Delta \mathbf{E}^p \\ G(\mathbf{T}, T_*, f) = \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_*} \right)^2 + 2q_1 f^* \cosh \left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*} \right) - 1 - (q_1 f^*)^2 \stackrel{\text{def } T_*}{=} 0 \\ F(T_*, p) = F(T_*, p^- + \Delta p) = \frac{T_*}{J} + A(p^- + \Delta p) - \sigma_0 = 0 \\ \lambda \geq 0 \quad ; \quad F \leq 0 \quad ; \quad \lambda F = 0 \\ \Delta \mathbf{E}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\lambda}{J} \frac{dT_*}{d\mathbf{T}} \\ \Delta p = \lambda \end{array} \right. \quad (2-107)$$

où \mathbf{T}^e est un tenseur d'essai. Il est défini par :

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{T}^- + \mathbb{H} : \Delta \mathbf{E} \quad (2-108)$$

Grâce à la convexité de la fonction G , ce système d'équations admet une solution unique.

Dans notre travail, la valeur de la porosité f sera calculée explicitement et pourra donc être considérée comme un paramètre à chaque pas. Elle est mise à jour à la fin du pas de calcul. En tenant compte de la germination (2-102) et la coalescence (2-105) des cavités, l'évolution de la porosité peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta f_g = (1 - f^- + \Delta f) \Delta \text{Tr} \mathbf{E}^p \\ f = f_g^- + \Delta f_g + f_n \\ f^* = \begin{cases} f & \text{if } f \leq f_c \\ f_c + \delta f & \text{if } f > f_c \end{cases} \end{array} \right. \quad (2-109)$$

2.4.5 Implantation numérique, existence et unicité de solution

En sachant qu'un schéma explicite est employé pour la discrétisation temporelle de la porosité f , sa valeur est donc une constante durant un pas de temps et sera mise à jour à la fin du pas selon (2-109). Nous nous concentrons donc sur la résolution de (2-107).

On obtient la relation suivante par le dérivé de (2-107)₂ :

$$\begin{aligned} \frac{dT_*}{d\mathbf{T}} &= - \left(\frac{\partial G}{\partial T_*} \right)^{-1} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{T}} \right) \\ &= \left[\frac{2T_{\text{eq}}^2}{T_*^3} + \frac{3q_1 q_2 f T_H}{T_*^2} \sinh \left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*} \right) \right]^{-1} \left[\frac{3\mathbf{T}_D}{T_*^2} + \frac{q_1 q_2 f}{T_*} \sinh \left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*} \right) \mathbf{I} \right] \end{aligned} \quad (2-110)$$

Une nouvelle variable est définie afin de simplifier les notations:

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\lambda}{J} \left(\frac{\partial G}{\partial T_*} \right)^{-1} = \frac{\lambda}{J} \left[\frac{2T_{\text{eq}}^2}{T_*^3} + \frac{3q_1 q_2 f T_H}{T_*^2} \sinh \left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*} \right) \right]^{-1} \quad (2-111)$$

Le tenseur de la déformation plastique (2-107)₄ peut être décomposé en deux parties :

$$\begin{cases} \Delta E_H^p = \eta \frac{q_1 q_2 f}{T_*} \sinh\left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*}\right) \\ \Delta E_{eq}^p = \eta \frac{2T_{eq}}{T_*^2} \end{cases} \quad (2-112)$$

où $E_H^p = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{E}^p$ est la partie hydrostatique et $E_{eq}^p = \sqrt{2/3(\mathbf{E}_D^p : \mathbf{E}_D^p)}$ avec \mathbf{E}_D^p la partie déviatorique de la déformation plastique.

Pour le tenseur des contraintes, (2-107)₁ peut également être réécrit en deux parties similaires :

$$\begin{cases} T_H = T_H^e - 3K \Delta E_H^p \\ T_{eq} = T_{eq}^e - 3\mu \Delta E_{eq}^p \end{cases} \quad (2-113)$$

où $T_H = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T}$ et $T_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{T}_D : \mathbf{T}_D}$.

En combinant (2-112) et (2-113), on peut avoir :

$$\begin{cases} (T_H^e - T_H) / 3K = \eta \frac{q_1 q_2 f}{T_*} \sinh\left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*}\right) \\ T_{eq} = T_{eq}^e \left(1 + \frac{6\mu\eta}{T_*^2}\right)^{-1} \end{cases} \quad (2-114)$$

On peut ensuite obtenir une relation entre T_{eq} and T_H en éliminant η dans (2-114) :

$$T_{eq} = T_{eq}^e \left[1 + \frac{2\mu(T_H^e - T_H)}{Kq_1 q_2 f T_* \sinh(3q_2 T_H / 2T_*)}\right]^{-1} = T_{eq}^e \left[1 + \frac{2\mu(T_H^e - T_H)}{T_* \mathcal{K}}\right]^{-1} \quad (2-115)$$

où $\mathcal{K} \left(\frac{T_H}{T_*}\right) \stackrel{\text{def}}{=} Kq_1 q_2 f \sinh\left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*}\right)$.

A ce stade, (2-107) se réduit finalement à trois équations scalaires avec xxx comme inconnues :

$$\begin{cases} G(T_H, T_*) = \frac{(T_{eq}^e)^2}{\left[T_* + \frac{2\mu(T_H^e - T_H)}{\mathcal{K}}\right]^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*}\right) - 1 - (q_1 f)^2 = 0 \\ \Delta p = \lambda = -\eta \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_*}\right) = \frac{(T_H^e - T_H)}{3\mathcal{K}} \left[\frac{2(T_{eq}^e)^2}{\left[T_* + \frac{2\mu(T_H^e - T_H)}{\mathcal{K}}\right]^2} + \frac{3\mathcal{K} T_H}{K T_*} \right] \\ T_* = J[-A(p^- + \Delta p) + \sigma_0 - l - (a - p^- - \Delta p)r] \end{cases} \quad (2-116)$$

En remplaçant T_* dans (2-116)_{1,2} par l'expression (2-116)₃, on obtient deux équations couplées de Δp et T_H :

$$\begin{cases} G(T_H, \Delta p) = 0 \\ \lambda(T_H, \Delta p) - \Delta p = 0 \end{cases} \quad (2-117)$$

Mais il ne paraît pas possible de résoudre ces deux équations explicitement à cause de leur non-linéarité. Des méthodes itératives comme la méthode de Newton, la méthode sécante ou la méthode du point fixe seront nécessaires. Se donnant une valeur de Δp^n à la nième itération,

on peut déduire une valeur correspondante de T_H^n d'après (2-117)₁. L'itération est faite sur la valeur de Δp jusqu'au moment où l'équation (2-117)₂ sera vérifiée.

Afin d'avoir une convergence rapide avec les méthodes itérative, il est conseillé de déterminer les intervalles admissibles pour les variables d'itération Δp et T_H .

Grâce à la valeur non négative de λ , un intervalle pour T_H sera facilement déduit selon (2-111) et (2-114)₁ :

$$\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \eta \geq 0 \Leftrightarrow (T_H - T_H^e)T_H \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{if } T_H^e \geq 0, & 0 \leq T_H \leq T_H^e \\ \text{if } T_H^e < 0, & T_H^e \leq T_H \leq 0 \end{cases} \quad (2-118)$$

Ensuite, (2-107)₂ donne la relation suivante :

$$T_* \leq T_*^e, \text{ with } G(\mathbf{T}^e, T_*^e) = 0 \quad (2-119)$$

Par conséquent, l'intervalle admissible pour Δp est :

$$0 \leq \Delta p \leq \arg_{T_*=T_*^e} [F(T_*, \Delta p) = 0] \quad (2-120)$$

où T_*^{-1} est la fonction inverse de $T_*(\Delta p)$ dans (2-116)₃.

Il faut aussi noter qu'avec une Δp fixée, la fonction $G(T_H) = G(T_H, \Delta p)$ possède les propriétés suivantes :

- $G(T_H^e) > 0, G(0) < 0$
- $G(T_H)$ est monotone, croissante si $T_H^e \geq 0$, décroissante si $T_H^e < 0$

Ces propriétés conduisent au fait que $G(T_H) = 0$ admet une solution unique dans le domaine admissible défini par (2-118). De plus, $G(T_H, \Delta p) = 0$ garantit une bijection de T_H à Δp , on peut donc conclure que (2-117) possède une unique paire de solution $(T_H, \Delta p)$.

2.4.6 Traitement des points cassés

Quand la porosité d'un point Gauss atteint la valeur de rupture ($f_r = (1/q_1 - f_c)/\delta + f_c$ dans le modèle GTN), ce point est considéré 'cassé'. Dans ce cas-là, la contrainte est nécessairement nulle (domaine d'élasticité réduit au seul tenseur de contrainte nul) et on propose que l'évolution de la variable d'écroissage s'arrête sur ce point :

$$\text{si } f = f_r, \text{ alors } \begin{cases} \mathbf{T} = 0 \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \quad (2-121)$$

D'ailleurs, ce point perd sa résistance et la matrice tangente devient nulle aussi. Mais dans la pratique, pour que la matrice tangente de la structure reste factorisable, on attribue au point cassé une rigidité artificielle ($\partial \mathbf{T} / \partial \mathbf{E} = \xi \mathbb{H}$, avec $\xi \leq 10^{-5}$ par exemple).

2.4.7 Estimation d'erreur et comparaison implicite/explicite

Dans l'algorithme présenté, un schéma explicite est adopté pour la porosité. Ce choix présente deux avantages. Tout d'abord, le paquet d'équations (2-107) se réduit à deux équations scalaires (2-117), pour lesquelles on a proposé une méthode de résolution robuste. Ensuite, en cas de porosité incluse dans le schéma de discrétisation implicite, le calcul risque d'osciller entre l'état cassé et l'état sain quand la porosité est proche de sa valeur de rupture, car les forces intérieures et la matrice tangente sont calculées différemment. Alors que ce n'est le cas pour le

schéma explicite avec le traitement (2-121).

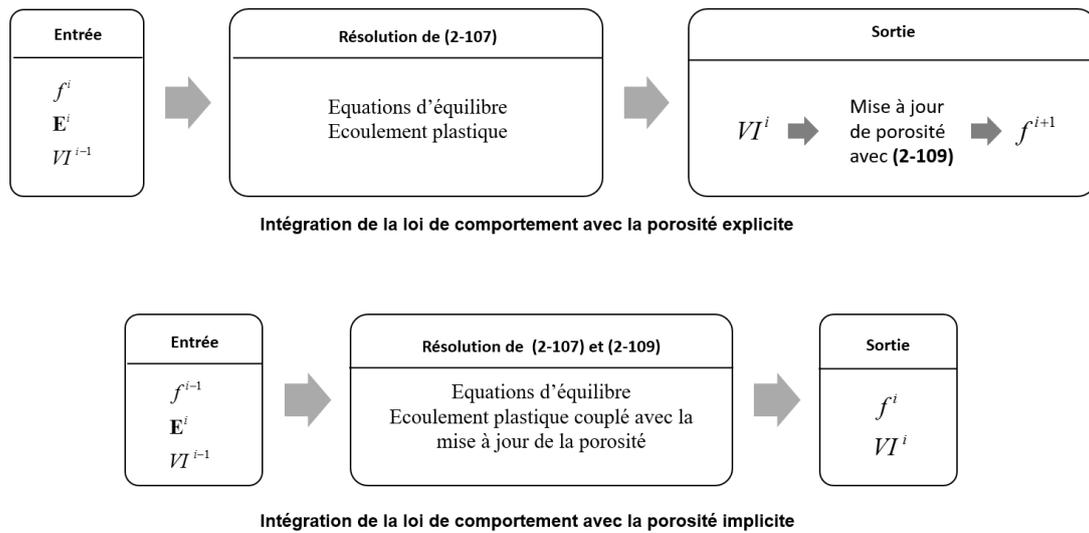


Figure 34 : Processus de l'intégration de la loi à un pas de temps avec différents schémas de la porosité
 Cependant, il faut aussi admettre que dans certains cas, le schéma explicite peut rencontrer des problèmes de convergence car la porosité n'est pas exacte à chaque pas de temps. Dans le processus de l'intégration montrée dans la Figure 34, si par exemple la porosité f^i accumule déjà des erreurs importantes, le calcul peut ne plus jamais converger à ce pas de temps même avec le découpage. C'est pourquoi quelques solutions sont proposées afin de remédier à cette lacune.

La solution la plus simple est d'utiliser des pas très fins pour que la porosité calculée à chaque pas soit proche de la solution exacte. Mais cela pourra beaucoup augmenter le temps de calcul. La Figure 35 montre l'évolution de la porosité en fonction de la déformation plastique cumulée sur un point matériel sous traction uniaxiale. On constate que la solution commence à converger quand le pas de temps est suffisamment fin.

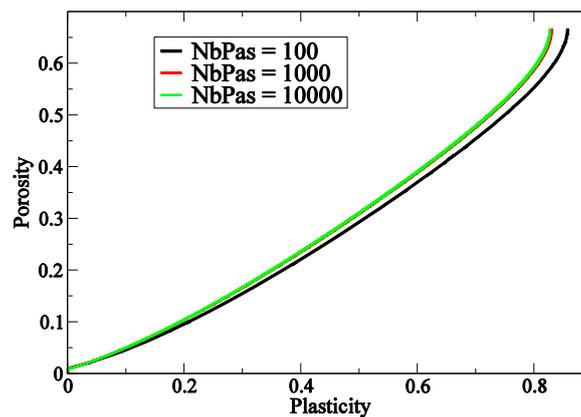


Figure 35 : Evolution de la porosité sur un point matériel avec différents nombres de pas
 Une deuxième solution est de contrôler l'incrément d'une grandeur par exemple la porosité. C'est-à-dire que si l'incrément de la porosité d'un pas dépasse un seuil préalablement choisi, un découpage de temps sera effectué.

Afin de mieux définir les seuils, on a réalisé une analyse d'erreur du modèle sous une sollicitation purement hydrostatique. Les détails sont présentés en Annexe. A partir de cette analyse, on constate que la grandeur à contrôler est $\Delta f / f$, notamment au début de l'évolution de la porosité. Des résultats de simulation sont montrés dans la Figure 36 en utilisant différents

seuils d'incrément. Il est constaté qu'en limitant l'incrément de la porosité par $\Delta f / f \leq 0,01$, on obtient un résultat suffisamment précis et le nombre du pas temps a aussi été beaucoup réduit.

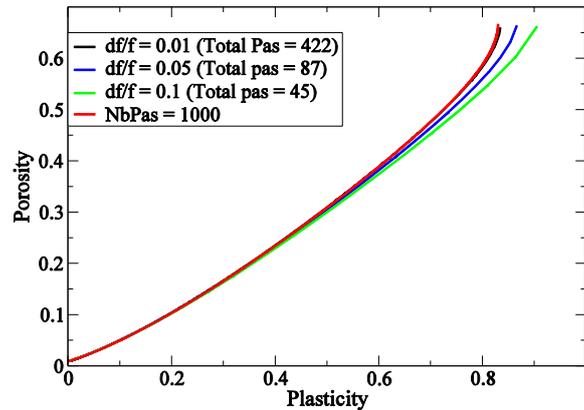


Figure 36 : Evolution de la porosité d'un point matériel avec différents incréments de $\Delta f / f$

On compare respectivement les résultats de simulation obtenus par le schéma explicite avec ceux obtenus par le schéma implicite. Cette dernière simulation est réalisée avec ZêBuLon, logiciel d'éléments finis co-développés par le Centre des Matériaux (Mines ParisTech), l'Onera, et par la société NW Numerics.

D'abord, les évolutions de la porosité et de la contrainte axiale sont comparées dans Figure 37 sur un point matériel. Puis des simulations sont aussi faites sur une éprouvette AE, dont la géométrie et les caractéristiques du matériau sont définies dans le Problème 3. La réponse globale est comparée selon les deux schémas de discrétisation, cf. Figure 38. On constate que les résultats sont très proches dans toutes les comparaisons.

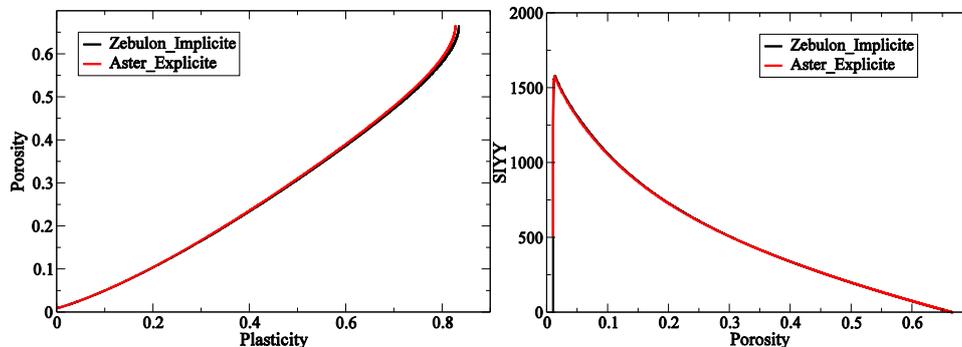
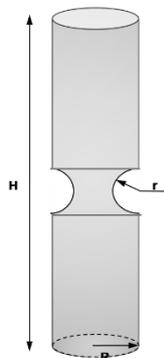


Figure 37 : Comparaison implicite-explicite. Evolution de la porosité et de la contrainte d'un point matériel



$$\begin{aligned}
 & r = 4 \text{ mm} ; R = 9 \text{ mm} ; H = 50 \text{ mm} ; \\
 & E = 190000 \text{ MPa} ; \nu = 0,3 ; \\
 & R(p) = 488 + 57 \times (1 - e^{-8613p}) + 239 \times (1 - e^{-10p}) \\
 & f_0 = 2 \times 10^{-4} ; f_c = 5 \times 10^{-2} ; f_N = 0 \\
 & q_1 = 1,5 ; q_2 = 1 ; \delta = 1
 \end{aligned}$$

Problème 3 : Traction sur une éprouvette AE4

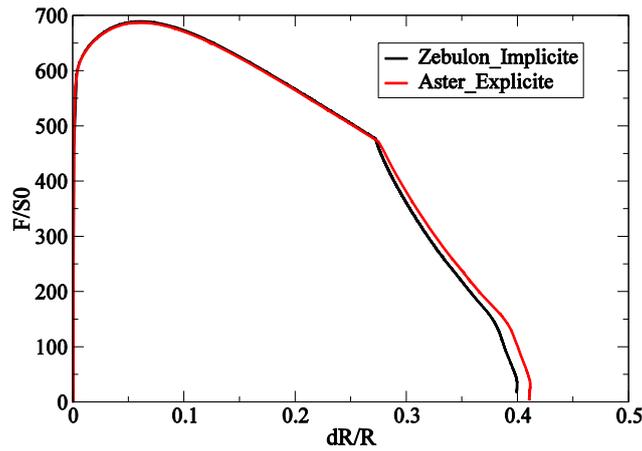


Figure 38 : Réponses globales de l'AE4 obtenues par les deux méthodes de discrétisation de la porosité

2.4.8 Etude Paramétrique sur un point matériel

Dans ce paragraphe, on étudie le rôle des paramètres du modèle GTN par des calculs sur un point matériel sous traction uniaxiale. On trace les résultats de simulation en faisant varier les valeurs de q_1 , q_2 , δ , P_{coa} , voir la Figure 39. La courbe rouge dans les Figure 39 et Figure 40 représente un résultat de référence dont les paramètres du modèle sont :

$$f_0 = 0,0002, f_c = 0,05, q_1 = 1,5, q_2 = 1,0, \delta = 1,0, P_{coa} = 0.$$

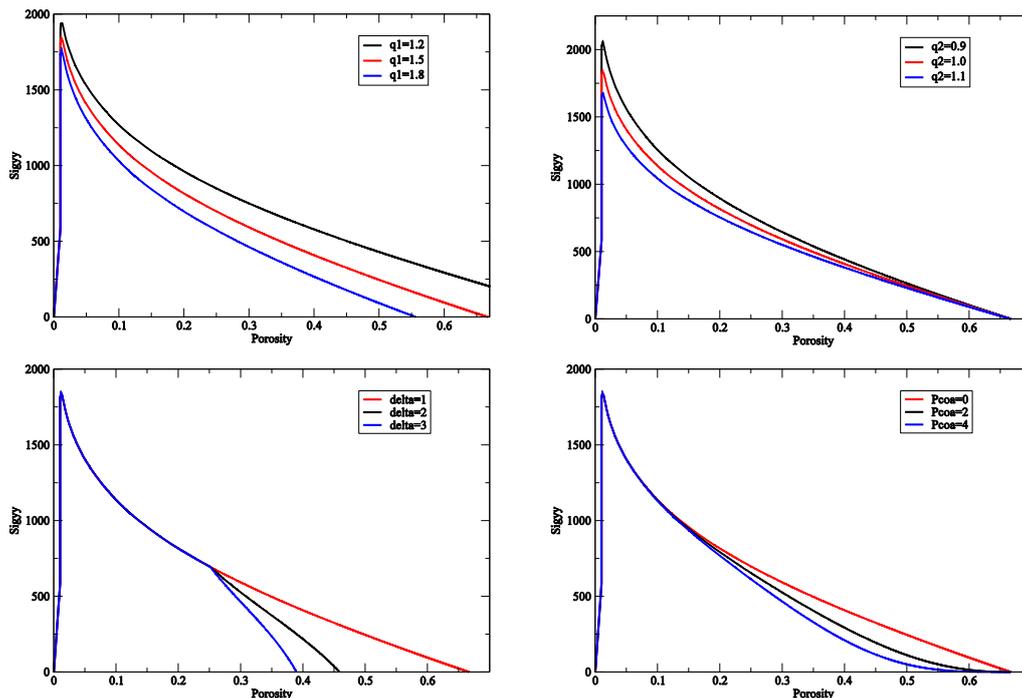


Figure 39 : Etude paramétrique du modèle GTN sur un point matériel

On peut voir que sur un seul point matériel, la contrainte maximale diminue avec q_1 , q_2 . Sa valeur maximale une fois atteinte, la contrainte diminue plus vite si δ , ou P_{coa} augmente car ces deux paramètres accélèrent l'évolution de la porosité. En comparant les deux modèles de coalescence, on peut voir qu'avec le modèle de Tvergaard-Needleman, la contrainte diminue très rapidement avec une chute brutale à partir de la porosité de coalescence choisie préalablement. Avec notre modèle, la contrainte diminue continûment de manière plus modérée, ce qui pourrait favoriser la convergence du calcul. Dans la pratique, nous pouvons aussi combiner les deux modèles de coalescence selon notre besoin.

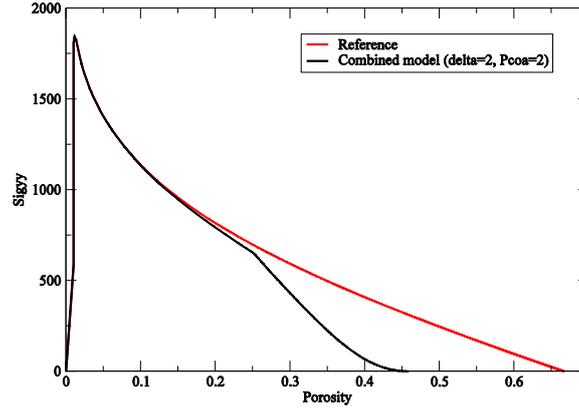


Figure 40 : Combinaison de deux modèles de coalescence : $\delta=2, P_{coa}=2$

2.4.9 Interprétations de dissipation d'énergie

Une puissance de dissipation a été définie dans le paragraphe 2.2.2 avec l'expression (2-46) rappelée ici :

$$\mathcal{D}(t) = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + A\dot{p} \quad (2-122)$$

Dans la modélisation de l'endommagement ductile, cette énergie contient à la fois la dissipation plastique et la dissipation d'endommagement. Il semble difficile de séparer explicitement ces deux parties dans le modèle GTN car il couple l'évolution de la porosité et l'écoulement plastique.

Sans tenir compte de la germination, la croissance de porosité ne dépend que de la partie hydrostatique de la déformation plastique. En vertu de cette relation, on peut choisir de définir la dissipation d'endommagement par la partie due au chargement hydrostatique, qui est donc :

$$\mathcal{D}^{endo} = T_H \mathbf{I} : \dot{\mathbf{E}}_H^p \mathbf{I} = 3T_H \dot{E}_H^p \quad (2-123)$$

La dissipation plastique est définie par :

$$\mathcal{D}^{plas} = \mathcal{D} - \mathcal{D}^{endo} = T_{eq} \dot{E}_{eq}^p + A\dot{p} \quad (2-124)$$

En reportant l'expression (2-112) dans (2-123), on a :

$$\mathcal{D}^{endo} = \frac{\frac{3\dot{p}q_1q_2f^*T_H}{JT_*} \sinh\left(\frac{3q_2T_H}{2T_*}\right)}{\frac{2T_{eq}^2}{T_*^3} + \frac{3q_1q_2f^*T_H}{T_*^2} \sinh\left(\frac{3q_2T_H}{2T_*}\right)} = \dot{p} \frac{T_*}{J} \frac{1}{1 + \frac{2D^2}{3q_1q_2Sf^* \sinh\left(\frac{1}{2}S\right)}} \quad (2-125)$$

$$\text{Ici } S = \frac{\text{tr}\mathbf{T}}{T_*} = \frac{3T_H}{T_*}, \quad D = \frac{T_{eq}}{T_*}.$$

En cas d'une sollicitation purement hydrostatique, $D = 0$, on a :

$$\mathcal{D}^{endo} = \frac{T_*}{J} \dot{p} = \frac{A(p) + \sigma_0}{J} \dot{p} \quad (2-126)$$

Si l'on suppose encore un matériau plastique parfait, en utilisant les relations présentées dans l'Annexe A2, on a :

$$\mathcal{D}^{endo} = \frac{2}{3}(1-f_0)\sigma_0 \text{arccosh}\left(\frac{1+q_1^2f^{*2}}{2q_1f^*}\right) \dot{f} \quad (2-127)$$

Par une intégrale de (2-127) par rapport à, on peut en déduire l'énergie dissipée au cours de l'endommagement. L'expression est donnée comme :

$$\int \mathcal{D}^{endo} dt = \frac{2}{3}(1-f_0)\sigma_0 \left[\frac{1}{\delta} B(f^*) + (1-\frac{1}{\delta})B(f_c) - B(f_0) + \frac{1}{\delta} f^* + (1-\frac{1}{\delta})f_c - f_0 \right] \quad (2-128)$$

où $B(f) = f \operatorname{arccosh}\left(\frac{1+q_1^2 f^2}{2q_1 f}\right)$, avec $B(0)=0$, $B(1/q_1)=0$.

En supposant que $f_0 \ll f_c \ll 1/q_1$, on a $B(f_0) \sim 0$, $B(f_c) < 1/q_1$. Lors de la rupture, l'énergie dissipée totale de l'endommagement s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}^{endo} dt &= \frac{2}{3}(1-f_0)\sigma_0 \left[(1-\frac{1}{\delta})B(f_c) - B(f_0) + \frac{1}{\delta q_1} + (1-\frac{1}{\delta})f_c - f_0 \right] \\ &\approx \frac{2}{3}(1-f_0)\sigma_0 \left[B(f_c) + f_c + \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{q_1} - B(f_c) - f_c \right) \right] \end{aligned} \quad (2-129)$$

On peut donc conclure que, pour un matériau plastique parfait sous chargement purement hydrostatique, l'énergie dissipée due à l'endommagement croît avec f_c , diminue avec q_1 et δ . Cette conclusion est cohérente avec ce qui a été observé dans la Figure 39.

A ce stade, il est difficile d'en dire plus que ces analyses dans l'hypothèse de matériau plastique parfait sous chargement hydrostatique. Cette décomposition pourrait être examinée dans des travaux futurs pour faire le lien avec les approches énergétiques ou encore les modèles à zone cohésive.

2.5 Conclusion du chapitre

L'objectif principal de ce chapitre a consisté à transcrire la loi de GTN en grandes déformations logarithmiques et à construire un algorithme robuste de sa résolution. Deux formulations de grandes déformations ont d'abord été présentées dans le formalisme des matériaux standard généralisés : formulation multiplicative et formulation (logarithmique) additive. Cette dernière a été choisie dans cette étude, notamment pour sa plus grande simplicité numérique. On a aussi étudié le problème du verrouillage volumique ainsi que de possibles remèdes : éléments finis sous-intégrés, éléments finis à intégration sélective et éléments finis mixtes. L'élément mixte P2/P1/P1, bien qu'apparemment le plus prometteur, a lui aussi rencontré des difficultés de convergence du fait de la présence d'instabilités plastiques (purement numériques).

La loi de GTN a ensuite été reformulée en grandes déformations. En traitant la porosité de manière explicite lors de l'intégration de la plasticité, on a ensuite proposé une méthode de résolution robuste qui se solde par deux équations scalaires en T_H et Δp . L'existence et l'unicité de la solution du problème d'intégration locale ont également été démontrées. Les résultats de simulations menées avec l'algorithme présenté dans cette étude et un algorithme qui traite simultanément toutes les équations de manière implicite (y compris l'évolution de la porosité) ont été confrontées : l'écart entre ces deux approches paraît faible si l'incrément relatif de porosité est contrôlé à chaque pas de temps. On a aussi réalisé une étude paramétrique sur un point matériel afin d'identifier le rôle de chaque paramètre du modèle. Enfin, on a proposé une définition du taux d'énergie dissipée par endommagement en partant de l'hypothèse qu'elle est due à la partie hydrostatique des contraintes. Une expression analytique de la dissipation a été obtenue dans le cas d'un matériau plastique parfait sous chargement purement hydrostatique, dont l'interprétation est en bon accord avec les observations dans les tests numériques.

Deuxième partie – Régularisation non locale

Chapitre 3 – Formulations non-locales

Un problème commun dans la simulation de la rupture fragile ou ductile avec les modèles locaux est la dépendance au maillage, exhibée dans les résultats de simulation par des bandes de localisation non physiques pathologiquement dépendantes de la manière de mailler la structure. Afin d’y remédier, des solutions sont proposées parmi lesquelles on trouve le modèle CZM et les formulations non-locales¹. La première approche semble efficace dans la rupture fragile, mais comme déjà évoqué dans la section 1.3, elle a un effet restreint dans le régime ductile fortement dissipatif. Les formulations non locales, ayant pour objectif de régulariser les champs mécaniques, apparaissent prometteuses pour traiter le problème.

Dans ce chapitre, on présentera d’abord des exemples illustrant la problématique de la dépendance au maillage, dont l’origine mathématique et physique sera interprétée. Ensuite, les modèles non-locaux seront revus et comparés en détaillant le principe de régularisation ainsi que leurs avantages et inconvénients. Enfin, on choisira la formulation non-locale à adopter et la variable à régulariser dans ce travail.

3.1 Dépendance au maillage

3.1.1 Observation numérique

Lorsqu’un matériau ductile subit une sollicitation jusqu’à la ruine, une accumulation importante de déformation plastique dans une zone de faible épaisseur au voisinage de la rupture s’observe dans les essais expérimentaux. La taille de cette zone, appelée couramment bande de localisation de déformation, dépend des propriétés du matériau, de la géométrie de la structure et de la nature du chargement.

Néanmoins, la simulation numérique par éléments finis, avec les modèles locaux dont GTN, exhibe une forte dépendance au maillage : l’endommagement tend à se localiser dans une bande formée par une seule couche d’éléments, quelle que soit sa taille. En outre, l’orientation de la bande d’endommagement dépend aussi de celle donnée au maillage. Si l’on raffine infiniment le maillage, l’épaisseur de la localisation tendra vers zéro, conduisant à une énergie dissipée nulle, totalement irréaliste. Ce problème, bien connu aujourd’hui, existe dans toutes les simulations avec des modèles d’endommagement locaux, fragiles et ductiles. Afin de l’illustrer dans le cadre l’endommagement ductile, on a simulé la traction de l’éprouvette AE (cf. Problème 3) avec le modèle GTN sur trois maillages dont la taille et l’orientation des mailles ont été différemment attribuées. Les résultats présentés dans la Figure 41 confirment le phénomène de la dépendance pathologique au maillage. Par ailleurs, on obtient de différentes courbes force-déplacement avec les deux maillages. Ceci implique une variation de l’énergie

¹ Dans les années 1990, le terme ‘non-local’ ne désigne que l’approche de régularisation par la convolution (cf. paragraphe 3.3.1). Au cours du temps, de plus en plus d’auteurs adoptent ce terme pour toutes les méthodes de régularisation, lui donnant un sens plus général. On fait ce choix dans le travail présent.

dissipée selon le maillage (sans espoir de convergence), qui n'est pas satisfaisant.

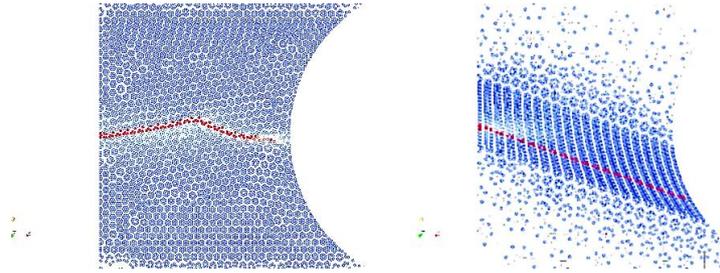


Figure 41 : Champs de la porosité issus des simulations du Problème 3 avec différents maillages

3.1.2 Interprétation intuitive et mathématique

Dans ce paragraphe, on essaiera d'abord de comprendre ce problème, puis dans la section suivante, on étudiera des méthodes de régularisation pour le résoudre.

Le problème de la dépendance au maillage provient de la loi adoucissante dans ces modèles locaux. Pour comprendre cette origine, on donne ici une explication intuitive en représentant les éléments par des ressorts de dimension un, cf. Figure 42 en s'inspirant du travail de [Lorentz, 1999] en cas de rupture fragile. Chaque ressort possède une loi ductile identique montrée à droite de la figure. Avant le point S , la relation contrainte-déformation est durcissante ($d\sigma/d\epsilon > 0$) et après le point S , elle devient adoucissante ($d\sigma/d\epsilon < 0$). En appliquant une traction à déplacement imposé sur le bout de l'ensemble des ressorts, on a $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n$ à l'équilibre. Si ces ressorts sont parfaitement homogènes, tous suivent la courbe de $\sigma - \epsilon$ jusqu'au point S simultanément. En fait, pour des raisons de micro-hétérogénéités du matériau, la frontière du domaine d'élasticité est atteinte dans l'un des ressorts avant les autres, par exemple R_1 . Dans ce cas, R_1 adopte un comportement dissipatif - il s'endommage - tel que la charge σ_1 qu'il supporte diminue. Par l'équilibre, la contrainte diminue aussi dans les autres ressorts ($R_2 - R_n$) qui n'avaient pas encore atteint le point S . Ces ressorts sont nécessairement dans un régime de déchargement en raison de l'équilibre. Cela implique que le comportement de R_1 est au point B tandis que celui des autres ressorts au point A. Si l'on augmente le chargement en déplacement, R_1 continue à s'endommager (au point D) et $R_2 - R_n$ continue à se décharger (au point C) pour assurer l'équilibre et la minimisation de l'énergie. A terme, toute la déformation de la structure s'est localisée dans le ressort endommagé, d'où la localisation pathologique.

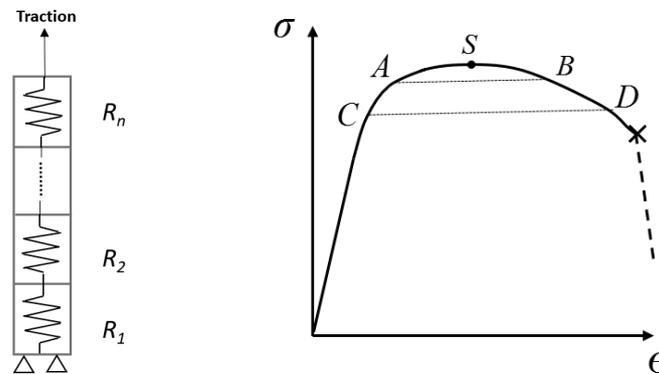


Figure 42 : Schéma des éléments représentés par des ressorts avec leur loi de comportement

D'un point de vue mathématique plus rigoureux, pour que la résolution d'un modèle local soit un problème bien posé, une condition nécessaire est l'ellipticité de l'opérateur tangent du comportement $\mathbb{C} = d\sigma/d\epsilon$:

$$\forall \underline{n} \in R^3 \quad \det(\underline{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \underline{n}) > 0 \quad \text{à chaque point de structure} \quad (3-1)$$

On trouve une synthèse des analyses sur l'ellipticité dans le travail de [Benallal et al., 1993] et des applications sur des lois élastoplastiques avec ou sans endommagement dans [Doghri et Billardon, 1995]. La condition d'ellipticité garantit qu'il n'existe pas de solutions pour lesquelles le taux de déformation $\dot{\epsilon}$ admettrait une discontinuité spatiale. Si cette condition n'était pas vérifiée, les déformations tendraient à se localiser dans une petite bande du maillage et il serait impossible d'espérer converger vers une solution plus précise en raffinant le maillage. D'un point de vue physique, ce phénomène de localisation s'explique par un manque d'information sur l'échelle dans la modélisation. En effet, la construction d'une loi de comportement macroscopique dans les modèles locaux s'appuie sur l'hypothèse que les champs mécaniques macroscopiques sont considérés comme faiblement variables en dessous d'une échelle minimale caractérisant le Volume Élémentaire Représentatif (VER). Cette hypothèse n'est plus respectée si des bandes de localisation se développent en dessous de cette échelle. Il faut donc, pour rester dans l'esprit du milieu continu, introduire une notion de longueur caractéristique correspondant à l'échelle de VER.

Pour ce faire, des modèles régularisants, dit 'non-locaux', ont été construits depuis une trentaine d'années sous des angles d'approches variés selon les auteurs : certains se fondent sur une analyse microstructurale pour introduire, de manière régularisante, de nouveaux degrés de liberté décrivant l'interaction entre un point matériel et ses voisins ; d'autres introduisent directement une variable non locale de façon phénoménologique pour remplacer la variable locale dans les équations du système. De nombreuses extensions ont été aussi effectuées afin de mieux prendre en compte les observations physiques (eg. régularisation à deux échelles [Besson, 2013]) ou avoir des propriétés mathématiques favorables (eg. méthode à gradient 'over-implicite' [Di Luzio et Bažant, 2005; Poh et Swaddiwudhipong, 2009]).

Des auteurs distinguent les modèles non-locaux en fonction de la manière de régulariser (convolution, gradient ou thick level set) tandis que d'autres les classent en fonction de la variable à régulariser (cinématique ou interne). Dans le travail de [Lorentz et Andrieux, 2003], les auteurs différencient les modèles d'un point de vue de minimisation énergétique (partielle ou globale).

Dans cette thèse, on classe les modèles non-locaux selon leur motivation initiale d'introduire la variable non-locale en trois catégories de modèles non-locaux : régularisation par cinématique enrichie, régularisation par un opérateur spatial et régularisation par une énergie enrichie. Ce classement, comme tous les autres, n'est pas absolu car dans la pratique, les propriétés des modèles non locaux (notamment avec leurs extensions) se recouvrent et on peut même trouver une équivalence entre certains modèles.

3.2 Régularisation par cinématique enrichie

Cette catégorie de méthodes de régularisation, appelée aussi 'micromorphique', consiste à enrichir la cinématique du milieu continu macroscopique classique par des degrés de liberté supplémentaires décrivant la cinématique à l'échelle de la microstructure. Les premières contributions de cette méthode par [Eringen et Suhubi, 1964], Cosserat ([Cosserat et Cosserat, 1909]) introduisent un tenseur de microrotations à chaque point matériel. Avec les extensions de cette théorie, la cinématique enrichie pourra, aujourd'hui, être aussi la déformation plastique, les variables internes ou même la température [Forest et al., 2011]. Forest a établi un cadre général pour ces modèles micromorphique dans [Forest, 2009], où l'on trouvera également

leurs applications en élastoplasticité, élasto-viscoplasticité et rupture fragile. Une fois la cinématique enrichie, le champ supplémentaire ainsi que son premier gradient sont pris en compte dans l'énergie libre en ajoutant un potentiel micromorphique, qui relie la variable micro à sa contrepartie macro, introduisant ainsi un effet de voisinage entre points matériels voisins par un terme du gradient de la variable micro. Pour un matériau isotrope sous condition isothermique, si la variable microscopique est l'une des variables internes, l'énergie libre totale peut s'écrire :

$$\rho\Phi(\epsilon^e, \underline{\alpha}, \alpha_\chi, \underline{\nabla}\alpha_\chi) = \rho\Phi(\epsilon^e, \underline{\alpha}) + \frac{1}{2}H_m(\alpha_M - \alpha_m)^2 + \frac{1}{2}A_m(\underline{\nabla}\alpha_m)^2 \quad (3-2)$$

où $\underline{\alpha}$ correspond aux variables internes macroscopiques, y compris α_M . $\Phi(\epsilon^e, \underline{\alpha})$ est l'énergie libre sans tenir compte de la variable micromorphique α_m . H_m et A_m sont deux paramètres micromorphiques. Cette définition de l'énergie libre conduit à la définition d'un tenseur des déformations généralisées, auquel s'associe par dualité un tenseur des contraintes généralisées : il faut alors une nouvelle équation d'équilibre micromorphique en plus de l'équilibre macroscopique :

$$\text{div}(A_m \underline{\nabla}\alpha_m) = -H_m(\alpha_M - \alpha_m) \Leftrightarrow \alpha_m - \frac{A_m}{H_m} \Delta\alpha_m = \alpha_M \quad (3-3)$$

d'où l'introduction d'une longueur caractéristique $l_c = \sqrt{A_m/H_m}$. De plus, si l'on considère la variable micromorphique α_m comme variable non-locale, la relation (3-3) est équivalente à celle de la formulation à gradient implicite qui sera présentée dans la section suivante. Mais d'après [Forest, 2009], ce n'est qu'une seule application de la théorie micromorphique dans le cas plus simple (iso-thermique, matériau isotrope et potentielle micromorphique).

3.3 Régularisation par un opérateur spatial non-local

Le principe de cette catégorie de méthodes signifie introduire dans les modèles une longueur caractéristique, en dessous de laquelle l'interaction à distance entre les points doit être prise en considération. Pour ce faire, on fait intervenir un opérateur de régularisation spatiale, noté \mathcal{R} qui empêche la localisation de la variable dans une zone de faible taille. Cet opérateur s'applique à une variable mécanique v (scalaire ou tenseur) tel que :

$$v_{nl} = \mathcal{R}(v) \quad (3-4)$$

où v_{nl} est la variable non-locale.

L'opérateur \mathcal{R} varie selon les différentes techniques de régularisation. De nombreux travaux ont employé l'opérateur de convolution [Jackiewicz et Kuna, 2003; Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987] ou l'opérateur de gradient [Geers et al., 1998; Peerlings et al., 1996]. Une autre technique récente de [Moës et al., 2011] s'appuie sur une fonction de level set afin de régulariser le champ d'endommagement.

3.3.1 Régularisation par convolution

L'idée sous-jacente de la régularisation par convolution consiste à prendre en compte un effet de voisinage spatial pour décrire le comportement d'un point matériel : il y a interaction à distance entre les points de la structure. L'opérateur de régularisation est défini comme le produit de convolution entre une fonction de pondération w et la variable locale v , ce qui conduit à la variable non-locale :

$$v_{nl}(\underline{x}) = \frac{\int_{\Omega_c} w(\|\underline{x} - \underline{y}\|) v(\underline{y}) d\Omega(\underline{y})}{\int_{\Omega_c} w(\|\underline{x} - \underline{y}\|) d\Omega(\underline{y})} \quad (3-5)$$

où $w(\cdot)$ est une fonction paire dont la valeur maximale est $w(0) = 1$. Ω est la zone d'interaction contenant les points \underline{y} autour du point \underline{x} , et $\|\underline{x} - \underline{y}\|$ la distance entre deux points.

Cette méthode a été d'abord introduite par [Kröner, 1967] puis [Eringen et Edelen, 1972] dans le cadre de l'élasticité non-locale. [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987] l'ont développée ensuite dans le cadre de la rupture fragile. Plus tard, elle a été également employée pour la rupture ductile [Andrade et al., 2014; Jackiewicz et Kuna, 2003; Tvergaard et Needleman, 1995].

La forme gaussienne est la plus courante dans les études précédentes, proposée initialement dans [Eringen et Edelen, 1972] :

$$w(r) = \exp\left(-\frac{\|r\|^2}{2l^2}\right) \quad (3-6)$$

où l est une longueur caractéristique définissant la distance d'influence de la régularisation. Une autre forme quadratique de la fonction de pondération utilisée dans [Andrade et al., 2014] est :

$$w(r) = \left\langle 1 - \frac{\|r\|^2}{2l^2} \right\rangle^2 \quad (3-7)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la partie positive. Cette technique de régularisation par convolution a été appliquée avec le modèle de GTN [Enakoutsa et al., 2007; Jackiewicz et Kuna, 2003] et aussi celui de Lemaitre [Andrade et al., 2011]. Elle permet, d'après les travaux cités, de réduire significativement la dépendance au maillage.

En dépit de sa popularité, cette méthode rencontre certaines difficultés d'ordre algorithmique dont la principale réside dans le calcul même de la variable non-locale. En effet, pour calculer v_{nl} , l'expression (3-5) nécessite une transmission d'informations entre les points Gauss des éléments voisins, et l'autonomie de la phase d'intégration de la loi d'un élément à l'autre est donc perdue. De plus, la matrice tangente de la structure, dont la symétrie n'est plus garantie, devient également plus compliquée à construire à cause du couplage entre éléments.

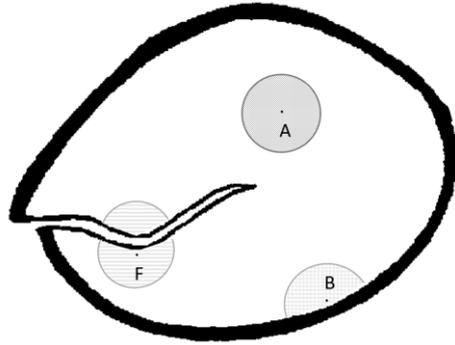


Figure 43 : Les zones d'interaction des points A (cas normal), B (près du bord), F (près de la fissure)

En outre, sur le plan numérique, les points dans la zone d'interaction sont cherchés l'un après l'autre selon leur distance avec le point d'origine cf. Figure 43 ; ce qui très coûteux en temps en cas de structure complexe, notamment en 3D. Une astuce consiste à diviser la structure en petits cubes de taille appropriée pour que la recherche des points ne reste que dans certains cubes [Jirásek, 2007]. Cette technique informatique, nommée 'octatree', permet de gagner en

temps de calcul au prix d'une consommation de mémoire plus importante. Un autre souci concerne l'intégrale de (3-5) sur une partie fissurée ou concave du domaine, comme une fissure ou l'entaille (eg. point F dans la Figure 43). La zone de régularisation dans ces endroits peut déborder d'une partie de la structure à une autre, alors de telles interactions entre les points matériels ne portent plus de sens physique. Pour un point au voisinage du bord de la structure (eg. point B dans la Figure 43), la contribution de la zone d'interaction est plus petite que celle d'un point suffisamment loin du bord, ce qui entraîne donc une surévaluation artificielle des grandeurs à ce point. Pour pallier ce défaut de l'effet de bord, plusieurs solutions ont été proposées, dont l'idée essentielle repose sur la détection des points à proximité du bord et la modification de leur fonction de pondération w . On renvoie au travail récent de [Grassl et al., 2014] pour une comparaison détaillée. Ces modifications, introduisant souvent des paramètres supplémentaires dans la fonction de pondération w , nécessitent encore des justifications sur leur efficacité et sur leur interprétation physique.

3.3.2 Régularisation à gradient

La régularisation par gradient reprend la même idée que la précédente à travers des gradients d'ordre supérieur des déformations et des variables internes. Selon la manière d'introduire la variable non-locale, on peut diviser les modèles par la régularisation à gradient en deux variétés : les modèles à gradient explicite et les modèles à gradient implicite.

La définition de la variable non-locale s'écrit :

$$v_{nl} = v + c\nabla^2 v \text{ (explicite)} \quad (3-8)$$

ou

$$v_{nl} - c\nabla^2 v_{nl} = v \text{ (implicite)} \quad (3-9)$$

avec la condition limite au bord :

$$\nabla v_{nl} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (3-10)$$

Ici c est un paramètre définissant la longueur caractéristique du modèle.

Ces deux variétés peuvent être toutes dérivées de la méthode à la convolution [Peerlings et al., 1996]. On écrit le développement de Taylor de $v(\underline{y})$ par rapport au point \underline{x} :

$$v(\underline{y}) = v(\underline{x}) + \nabla v \cdot (\underline{y} - \underline{x}) + \frac{1}{2} \nabla^2 v (\underline{y} - \underline{x})^2 + \dots \quad (3-11)$$

En remportant (3-11) dans (3-5), on obtient donc :

$$v_{nl} = v + c\nabla^2 v + c^2 \nabla^4 v + \dots \quad (3-12)$$

Les termes impairs s'annulent car la fonction de pondération w est une fonction paire. (3-12) se réduit à l'expression à gradient explicite (3-8) si l'on néglige les termes d'ordre supérieur à deux.

En appliquant un opérateur Laplacien ∇^2 aux deux côtés de (3-12) et en combinant le résultat avec (3-12), on peut déduire l'expression à gradient implicite (3-9). Plus rigoureusement, [Peerlings et al., 2001] a démontré par ailleurs, une équivalence exacte entre la régularisation à convolution (3-5) et la régularisation à gradient implicite (3-9) en choisissant la fonction de

Green comme fonction de pondération pour cette dernière, à savoir : $w(r) = \frac{1}{4\pi c \|r\|} \exp\left(-\frac{\|r\|}{\sqrt{c}}\right)$.

Par rapport aux modèles à gradient explicite, les modèles à gradient implicite bénéficient de nombreux avantages [Askes et Sluys, 2002; Engelen et al., 2003]. Ils n'imposent des conditions

limites que sur le bord de la structure tandis que les conditions sur les frontières élastiques-plastiques doivent aussi être traitées délicatement dans les modèles à gradient explicite. Au niveau de l'implantation, les modèles à gradient implicite paraissent aussi plus attractifs car l'interpolation des champs est d'ordre moins élevé. De plus, il est aussi constaté que le gradient explicite manifeste des instabilités avec des lois durcissantes ou adoucissantes [Askes et Sluys, 2002]. La régularisation à gradient implicite est donc généralement adoptée dans la plupart des travaux.

La méthode de régularisation à gradient implicite a été d'abord proposée dans le cadre de la rupture fragile par [Peerlings et al., 1996], puis [Engelen et al., 2003] l'ont appliquée aux lois élastoplastiques endommageables. Cette méthode de régularisation a été également adoptée dans la modélisation de l'endommagement ductile avec le modèle de Lemaitre [de Sá et al., 2006] et le modèle GTN [Hutter et al., 2013; Reusch et al., 2003a, b; Samal et al., 2009] [Linse et al., 2012]. On trouve aussi une extension non-locale pour le modèle Rousselier dans le travail de [Samal et al., 2008].

Comparée avec la méthode de régularisation par convolution du paragraphe précédent, la régularisation à gradient implicite possède une formulation mathématiquement 'locale', qui facilite significativement l'implémentation numérique car l'échange élémentaire n'est plus nécessaire.

La régularisation à convolution et à gradient implicite sont toutes des techniques pragmatiques dont l'efficacité numérique a été prouvée par de nombreux travaux cités ci-dessus. Dans [Lorentz et Andrieux, 2003], les auteurs ont examiné les propriétés mathématiques des modèles, et ont constaté que l'opérateur de régularisation \mathcal{R} , que ce soit convolution ou gradient implicite, n'est pas coercitif, ce qui n'assurerait plus l'existence de solution (si l'on introduit la variable non locale partout en lieu et place de la variable locale). Similairement, par des analyse spectrales, les auteurs de [Di Luzio et Bažant, 2005] ont abouti à la conclusion que ces opérateurs ne sont plus régularisant avec certaines lois. Des variables non-locales augmentées (dites over non-local en anglais) ont été donc proposées afin d'améliorer les modèles [Di Luzio et Bažant, 2005; Lorentz et Andrieux, 2003; Poh et Swaddiwudhipong, 2009] :

$$v_{nl} = m\mathcal{R}(v) + (1 - m)v \quad \text{avec } m > 1 \quad (3-13)$$

3.3.3 Régularisation par Thick-Level-Set (TLS)

La méthode 'level set' (surfaces de niveau en français) est une technique numérique de suivi d'une interface entre un mobile déformable et le milieu dans lequel il se déplace. L'idée consiste à remplacer une courbe plane fermée par une surface fixe. Dans le cadre de la modélisation de la rupture, Moës et al. applique cette technique afin de suivre la frontière entre la zone endommagée et la zone saine [Moës et al., 2011] [Moës et al., 2014].

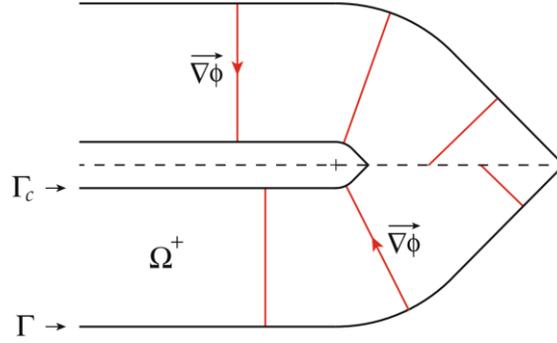


Figure 44 : Zone de régularisation dans les modèles TLS [Moës et al., 2014]. Γ_c : frontière des zones fissurées – endommagées ; Γ : frontière des zones endommagées – saines.

L'idée originelle est de contrôler explicitement le gradient de la variable d'endommagement dans la zone endommagée en ajoutant une équation supplémentaire :

$$\|\nabla D\| = f(D) \quad (3-14)$$

Il n'est pas numériquement pratique de trouver le gradient de l'endommagement à chaque point. La technique de level set s'emploie ainsi en introduisant une variable interne ϕ et une longueur caractéristique l_c :

$$D(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \leq 0 \\ 1 & \text{si } \phi \geq l_c \\ D(\phi(\underline{x})) \in \mathcal{C}^1(0, l_c) & \end{cases} \quad (3-15)$$

Dans les travaux [Cazes et Moës, 2015; Gómez et al., 2015; Moës et al., 2011; Moës et al., 2014], la fonction $\phi(\underline{x})$ est choisie comme distance minimale du point \underline{x} au contour Γ , cf. la

Figure 44. En reportant (3-15) dans (3-14) et en choisissant $f(D) = \frac{dD}{d\phi}$, on obtient :

$$\frac{dD}{d\phi} \|\nabla \phi\| = f(D) \Leftrightarrow \|\nabla \phi\| = 1 \quad (3-16)$$

qui est une fonction fondamentale de la technique level set.

Avec l'introduction de la fonction level set (3-15), l'endommagement D n'est plus une variable libre car elle dépend désormais la fonction $\phi(\underline{x})$. En effet, les relations (3-15) et (3-16) permettent de contrôler l'épaisseur de l'endommagement (maximum l_c) et en même temps, le

gradient d'endommagement dans cette épaisseur, à savoir $\|\nabla D\| = f(D) = \frac{dD}{d\phi}$ qui peut être une

fonction linéaire, une fonction de puissance ou encore d'autre forme plus complexe selon les besoins [Moës et al., 2014]. On peut donc considérer la fonction level set (3-15) comme opérateur régularisant. De ce fait, l'approche est classée dans la catégorie de cette section.

Cette technique de régularisation TLS permet d'écrire toutes les équations du système sous forme variationnelle sans perdre la dualité entre les variables internes et leurs forces thermodynamiques associées. On renvoie à [Moës et al., 2011; Moës et al., 2014] pour plus de détails et on trouvera également les conditions aux limites sur les frontières Γ et Γ_c . De plus, dans le travail [Moës et al., 2014], au lieu de mettre la fonction level set dans la structure, Moës et al. définissent la zone saine par $\|\nabla \phi\| < 1$ où l'on n'applique pas la régularisation non-locale (3-15) et (3-16) afin de gagner du temps de calcul.

Des exemples en rupture fragile en 1D et 2D se trouvent dans les travaux cités. L'adaptation du

modèle aux lois ductiles n'est pas encore réalisée.

3.4 Régularisation par une énergie enrichie

Au lieu d'une régularisation directe sur le champ de la variable, présentée dans la section précédente, cette approche consiste à enrichir l'énergie libre afin de prendre en compte l'interaction entre les points. Toutes les équations de cette approche résultent d'une analyse variationnelle dans le cadre des matériaux standards généralisés, garantissant de bonnes propriétés mathématiques et numériques.

Inspiré par les travaux de [Lorentz, 1999; Lorentz et Benallal, 2005; Lorentz et Godard, 2011], on détaille ici le principe de cette méthode en grande déformation dans la configuration initiale avec la formulation logarithmique. L'interaction à l'échelle microscopique est prise en compte phénoménologiquement par un nouveau terme dans l'énergie libre souvent sous forme d'un gradient dont le traitement mathématique a été abondamment étudié dans de nombreux travaux. L'énergie libre enrichie s'écrit ainsi :

$$\Phi_{nl}(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \Phi(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{2}c(\nabla \boldsymbol{\alpha}_R)^2 \quad (3-17)$$

avec le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}^e$ la déformation élastique, $\boldsymbol{\alpha}$ l'ensemble des variables internes dont $\boldsymbol{\alpha}_R$ (tenseur ou scalaire) est celle à régulariser, c le paramètre non-local.

Sans perte de généralité, toutes les composantes de $\boldsymbol{\alpha}$ sont supposées scalaires pour une simplification de l'écriture. La formulation avec une variable interne tensorielle sera similaire. Avec la nouvelle expression de l'énergie libre (3-17), la puissance dissipée s'écrit par l'inégalité de Clausius-Duhem dans le cadre des matériaux standard généralisés :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{nl}(t) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} d\Omega - \int_{\Omega_0} \dot{\Phi}_{nl}(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0} \left[(\mathbf{T} - \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi) : \dot{\mathbf{E}} + \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi : \dot{\mathbf{E}}^p - \dot{\boldsymbol{\alpha}} \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Phi - c \nabla \boldsymbol{\alpha}_R \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\alpha}}_R \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0} \left[(\mathbf{T} - \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi) : \dot{\mathbf{E}} + \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi : \dot{\mathbf{E}}^p - \dot{\boldsymbol{\alpha}} \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Phi + c \dot{\boldsymbol{\alpha}}_R \nabla^2 \boldsymbol{\alpha}_R \right] d\Omega \geq 0 \end{aligned} \quad (3-18)$$

Le passage de la deuxième ligne à la troisième dans (3-18) s'appuie sur le principe variationnel (cf. [Sicsic et al., 2014]) qui conduit aussi à une condition limite supplémentaire : $\nabla \boldsymbol{\alpha}_R \cdot \underline{n} = 0$ sur $\partial\Omega_0$.

La positivité de (3-18) reste vraie pour tout $\dot{\mathbf{E}}$, on en déduit donc :

$$\mathbf{T} = \partial_{\mathbf{E}^e} \Phi \quad (3-19)$$

Cette expression reste identique à celle de la formulation locale (2-45).

On définit également les forces thermodynamiques associées aux variables internes :

$$A_i = -\partial_{\alpha_i} \Phi \quad \text{pour tout } i \neq R \quad (3-20)$$

et pour la variable interne régularisée, sa force thermodynamique est définie par :

$$[A_R]_{nl} = -\dot{\boldsymbol{\alpha}}_R \partial_{\boldsymbol{\alpha}_R} \Phi + c \nabla^2 \boldsymbol{\alpha}_R = A_R + c \nabla^2 \boldsymbol{\alpha}_R \quad (3-21)$$

L'énergie dissipée(3-18) devient donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{nl} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} d\Omega - \int_{\Omega_0} \dot{\Phi}_{nl}(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}) d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + \sum_{i \neq R} \dot{\alpha}_i A_i + \dot{\alpha}_R [A_R]_{nl} \right] d\Omega \geq 0
\end{aligned} \tag{3-22}$$

La dualité entre les variables et les forces thermodynamiques est ainsi gardée.

Les forces thermodynamiques interviennent ensuite dans la fonction seuil de sorte que :

$$F(\mathbf{T}, A_{i \neq R}, [A_R]_{nl}) \leq 0 \tag{3-23}$$

d'où l'effet non-local. En effet, on comprend intuitivement comment apparaît une échelle propre aux bandes de localisation : dans les zones de localisation où le terme Laplacien $\nabla^2 \alpha_R$ est négatif, le seuil est augmenté si bien que α_R évolue moins, quant au voisinage de ces zones où le terme Laplacien $\nabla^2 \alpha_R$ est positif, le seuil est abaissé de sorte que α_R s'y développe quand même un peu, pour conduire finalement à un étalement des zones localisées, cf. Figure 45.

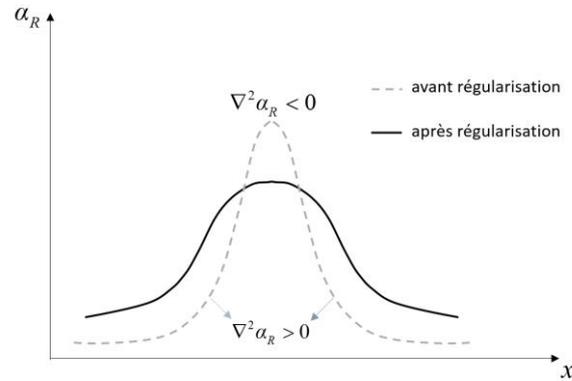


Figure 45 : Schéma représentatif de l'effet de la régularisation

Cette approche par l'énergie enrichie, parfaitement encadrée dans la théorie des matériaux standard généralisés, possède des propriétés mathématiques favorables au calcul numérique, dont la robustesse a été prouvée dans [Lorentz et Godard, 2011] par des calculs en 2D et 3D pour la rupture fragile et dans [Miehe, 2014] pour des lois élastoplastiques en grandes déformations. De plus, la condition supplémentaire imposée aux bords sur la variable α_R résulte elle aussi de l'interprétation variationnelle. Néanmoins, comme le traitement de la condition de cohérence implique dorénavant un terme non local (en Laplacien), elle nécessite, d'une part, une formulation spécifique – sur la base d'un Lagrangien augmenté – pour conserver le caractère local de l'intégration de la loi de comportement, et d'autre part, un traitement algorithmique plus complet (eg. points de singularité, cf. le paragraphe 4.2.4) car la plage de valeur de la force thermodynamique non locale est plus étendue que pour sa contrepartie locale. C'est sans doute la raison pour laquelle cette approche attire moins l'attention que les méthodes par convolution ou à gradient implicite. Par ailleurs, la variable dont on pénalise le gradient dans l'énergie libre doit être a priori une variable interne (au risque sinon de perdre les propriétés des matériaux standard généralisés), ce qui limite (un peu) le choix de la variable à régulariser.

La méthode 'phase-field' appliquée à la modélisation de rupture est aussi foncièrement une régularisation par l'énergie enrichie. On cite ici [Francfort et Marigo, 1998] pour son application en rupture fragile et [Ambati et al., 2015] en rupture ductile.

3.5 Formulations régularisées appliquées aux modèles de l'endommagement ductile

Les formulations non locales présentées ci-dessus ont été appliquée à la modélisation de la rupture fragile dans de nombreux travaux. En revanche, leur application à l'endommagement ductile reste moins étudiée. Cette section est dédiée à synthétiser les quelques travaux dans la littérature concernant la modélisation de l'endommagement ductile avec formulations non-locales. Un récapitulatif des travaux présenté ci-dessous est donné dans le Tableau 4.

Théoriquement, les formulations non-locales sont compatibles avec tous les modèles non énergétiques de l'endommagement ductile présentés dans les sections 1.4 et 1.5.

On trouve d'abord le modèle de Lemaitre régularisé par l'intégrale de convolution dans [Andrade et al., 2011] et régularisé à gradient implicite dans [de Sá et al., 2006]. Ce premier travail, à base du modèle de Lemaitre (paragraphe 1.4.1), a été formulé en grandes déformations avec le formalisme multiplicatif (paragraphe 2.2.1) en liaison avec la formulation non locale de type de convolution. Des simulations numériques sur une barre cylindrique et sur une éprouvette AE ont été réalisées pour montre une faible sensibilité au maillage du modèle. Dans le travail de [de Sá et al., 2006], en appliquant la formulation non-locale à gradient implicite au modèle de Lemaitre, l'auteur a simulé la traction d'une éprouvette AE, l'étirement d'une plaque circulaire, l'inversion externe des tuyaux et le découpage d'une tôle. Les résultats de simulation montrent que leur modèle, possédant une bonne indépendance au maillage, est capable de retrouver les résultats obtenus par les essais.

La régularisation non-locale du modèle de Rousselier a été effectuée par [Samal et al., 2008] avec le gradient implicite et par [Lorentz et al., 2008] avec une cinématique à second gradient. [Samal et al., 2008] ont simulé des éprouvettes CT et SENB et sont parvenus à retrouver les courbe expérimentales force-déplacement et $J - \Delta a$. Par ailleurs, ils ont aussi montré que le paramètre non local de leur modèle était transférable entre différentes géométries, tout comme les autres paramètres du modèle Rousselier. Le travail de [Lorentz et al., 2008] a été réalisé dans le cadre de grandes déformations avec le formalisme multiplicatif. Les auteurs ont également pris en compte le traitement du verrouillage volumique par l'intermédiaire de l'élément mixte P2/P1/P2, mais sans examiner les oscillations du champ de pression. Quant à la régularisation non-locale, les auteurs ont enrichi l'énergie par le gradient du changement de volume, directement lié à la porosité.

En ce qui concerne le modèle avec une fonction dépendant du trajet de chargement (cf. paragraphe 1.4.2), on trouve aussi une application de la régularisation non-locale dans [Feld-Payet et al., 2011]. La fonction d'endommagement utilisée dans le modèle ductile est simplement la déformation plastique cumulée. Le modèle dans ce travail, combinant la formulation à gradient implicite et l'élément mixte en petites déformations, possède le même objectif que le modèle développé dans le travail présent (cf. Chapitre 4), à savoir traiter la dépendance au maillage et le verrouillage volumique. Mais nous n'avons pas adopté le même modèle de l'endommagement, ni la stratégie de régularisation ou la formulation cinématique.

Enfin, la régularisation non-locale du modèle GTN a été d'abord étudiée par [Gologanu et al., 1997], [Reusch et al., 2003b], [Jackiewicz et Kuna, 2003] et puis par [Enakoutsa et al., 2007], [Huespe et al., 2012], [Linse et al., 2012], [Huetter et al., 2013]. L'un des premiers travaux non-locaux sur le modèle GTN concerne le travail de Gologanu, Leblond, Perrin et Devaux [Gologanu et al., 1997], qui ont proposé d'intégrer un gradient du taux de déformation (donc gradient de deuxième ordre de la vitesse) dans l'équation d'équilibre. Cette méthode,

cinématiquement enrichi, peut être classée dans la première catégorie de la section 3.2. Elle présente une complexité plus grande de l'implémentation numérique à cause du gradient d'un tenseur. [Reusch et al., 2003b] a choisi une expression réduite de l'énergie libre en négligeant le potentiel plastique, et l'a enrichie par le gradient de la porosité afin de remédier au problème de dépendance au maillage. La simulation de la traction sur une plaque avec un défaut montre l'efficacité de la régularisation dans le travail. [Jackiewicz et Kuna, 2003] a également choisi de régulariser la porosité dans son travail, mais de manière plus directe par la méthode de convolution. Le modèle a été utilisé pour réaliser des simulations sur les éprouvettes AE, CT et une tuyauterie, dont les résultats paraissent conformes à ceux des essais. [Enakoutsa et al., 2007] a fait le choix d'un traitement explicite de la porosité (comme ici) et a montré rigoureusement la convexité de la fonction seuil du modèle GTN afin de l'associer à la théorie des matériaux standard généralisés. Mais l'algorithme de résolution de [Enakoutsa et al., 2007] demeurait différent de celui présenté dans ce travail (paragraphe 2.4.5). Quant au traitement de la dépendance au maillage, [Enakoutsa et al., 2007] a utilisé la régularisation de convolution par rapport au taux de la porosité, ou par rapport au taux du logarithme de la porosité. La régularisation de ce dernier semblait offrir une meilleure cohérence avec l'expérience car elle ne subissait pas de régularisation excessive. Le travail de [Huespe et al., 2012] consiste à atténuer la localisation pathologique des champs par une fonction de lissage sur une bande de taille fixée. Cette méthode de régularisation, appelée bande finie, n'a pas été présentée en détails dans cette thèse. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [Huespe et al., 2012] ou [Huespe et al., 2009]. Dans le travail de [Linse et al., 2012], les auteurs se basent sur cinématique hypo-élastique avec un formalisme logarithmique ; ils régularisent la trace de la déformation plastique par la méthode à gradient implicite. Ils ont réalisé plusieurs simulations numériques sur l'éprouvette CT et sont parvenus à la conclusion que le résultat de la simulation était indépendant du maillage si la taille de maille était inférieure à un quart de la racine du paramètre non-local. Le travail a également mentionné la difficulté concernant les éléments très distordus pendant l'accumulation de plasticité au niveau de l'entaille. [Huetter et al., 2013] a ensuite amélioré le modèle présenté dans [Linse et al., 2012], notamment pour avoir une longue propagation de fissure par un traitement spécial de la contribution des points cassés. Avec son modèle, [Huetter et al., 2013] a réussi à retrouver la courbe expérimentale $J - \Delta a$ d'une éprouvette CT en acier A508. Plus récemment, [Hutter et al., 2014] a combiné le modèle de GTN non-local avec le modèle à zone cohésive pour étudier la transition ductile-fragile. [Linse et al., 2014] ont identifié, par des essais de 'small punch test', les paramètres de son modèle GTN non local avec lequel la ténacité d'une éprouvette CT dans un intervalle de température a été correctement prédite.

Tableau 4 : Récapitulatif des travaux concernant l'application de la régularisation non-locale aux modèles d'endommagement ductile

Modèle ductile	Article	Formalisme cinématique	Traitement verrouillage volumique	Méthode régularisation non-locale	Variable régularisée	Comparaison simulation-essais
Lemaitre	[de Sá et al., 2006]	Grandes déformations, formalisme multiplicatif	Non	Gradient implicite	Variable d'endommagement	AE, étirement de plaque circulaire, inversion de tube découpage de tôle
	[Andrade et al., 2011]	Grandes déformations, formalisme hyper-élasto-plastique	Non	Convolution	Variable d'endommagement	Non
Modèle avec fonction du trajet de chargement	[Feld-Payet et al., 2011]	Petites déformation	Elément mixte	Gradient implicite	Variable d'endommagement	Non
Rousselier	[Samal et al., 2008]	Non spécifié	Non	Gradient implicite	Porosité	CT, SENB
	[Lorentz et al., 2008]	Grandes déformations, formalisme multiplicatif	Elément mixte	Energie enrichie	Changement de volume	Non
GTN	[Enakoutsu et Leblond, 2009; Gologanu et al., 1997]	Grandes déformations, formalisme hypo-élastique	Non	Cinématique Enrichie	Taux de déformation	TA (eprouvette de traction axisymétrique)
	[Reusch et al., 2003b]	Petites déformations	Non	Energie enrichie	Porosité	Non
	[Jackiewicz et Kuna, 2003]	Non spécifié	Non	Convolution	Porosité	AE, CT, tuyauterie
	[Enakoutsu et al., 2007]	Grandes déformations, formalisme hypo-élastique	Non	Convolution	Taux de porosité/ Logarithme de porosité	AE
	[Huespe et al., 2012]	Grandes déformations, formalisme logarithmique	F-Bar	Bande finie	Déplacement	Non
	[Huetter et al., 2013; Linse et al., 2012]. [Hutter et al., 2014; Linse et al., 2014]	Grandes déformations, formalisme hypo-élastique	Non	Gradient implicite	Trace de déformation plastique	CT

3.6 Conclusion du chapitre

3.6.1 Bilan de modèles non-locaux et choix du modèle

Les modèles micromorphiques à cinématique enrichie permettent de décrire finement les caractéristiques de la microstructure mais au prix d'une certaine complexité (équation d'équilibre et conditions aux limites supplémentaires) et d'un coût de calcul non négligeable. Leur interprétation physique nécessite aussi une vérification expérimentale plus fine et leur performance reste à prouver par des calculs sur des structures complexes.

Les modèles avec l'opérateur à convolution et l'opérateur à gradient implicite sont confondus si l'on choisit une fonction de pondération spéciale pour ces premiers [Peerlings et al., 2001]. La régularisation à convolution bénéficie donc d'une flexibilité de la fonction de pondération mais au prix d'une programmation plus lourde. En outre, l'intégrale de la convolution aux bords et aux endroits convexes doit être traitée séparément, ce qui augmente encore le coût de calcul. La régularisation à gradient implicite, malgré son effet non-local, possède une formulation mathématiquement 'locale', facilitant l'implémentation numérique par rapport à la régularisation à convolution. Une seule condition supplémentaire est imposée mais la justification reste encore à étudier. Grâce à sa simplicité numérique et son efficacité régularisante, les modèles avec l'opérateur régularisant à gradient (notamment implicite) sont les plus souvent utilisés dans la littérature. D'abondants travaux ont montré sa bonne performance avec des lois de comportement variées, soit en rupture fragile ou en rupture ductile. Cependant, les auteurs de [Lorentz et Andrieux, 2003] montrent que ni l'opérateur à convolution ni l'opérateur à gradient n'est coercitif par rapport à la variable à régulariser, ce qui peut conduire à l'absence de solutions [Polizzotto, 2001] ou l'incapacité à régulariser certaines lois [Di Luzio et Bažant, 2005]. Des améliorations avec un opérateur mixte ont été proposées [Di Luzio et Bažant, 2005; Lorentz et Andrieux, 2003; Poh et Swaddiwudhipong, 2009], mais qui semblent essentiellement motivées par des besoins numériques.

La méthode TLS est une technique récente reposant sur le principe de contrôler explicitement le gradient d'une variable par une fonction level set [Moës et al., 2011; Moës et al., 2014], qui peut être considérée comme un opérateur régularisant. Se mettant dans un cadre thermodynamique, les équations de cette méthode résultent d'une formulation variationnelle qui assure la dualité entre les variables et les forces thermodynamiques. Une caractéristique avantageuse de cette méthode est le contrôle explicite de la largeur de la bande de localisation tandis que dans les autres approches, l'obtention de la largeur de la bande nécessite des analyses supplémentaires. Cependant, avec la nouvelle variable interne ϕ , les formulations et conditions aux limites (cf. [Moës et al., 2014]) dans cette approche ne sont plus habituelles et de nouveaux algorithmes devront être implémentés dans le code éléments finis.

La méthode de régularisation par l'énergie enrichie associée à l'énergie libre un nouveau terme en gradient d'une variable interne. Elle s'insère parfaitement dans la théorie des matériaux standard généralisés et toutes ses équations proviennent de la minimisation d'une énergie globale unifiée, garantissant automatiquement les bonnes propriétés mathématiques, notamment l'existence et l'unicité de la solution à l'échelle de l'intégration de la loi de comportement. L'équation d'équilibre est usuelle comme dans les modèles locaux mais un terme en Laplacien de la variable interne régularisée intervient dans sa force thermodynamique associée et donc dans la fonction seuil. Par comparaison avec la méthode à gradient implicite, cette approche possède de meilleures propriétés mathématiques au prix d'un travail de programmation un peu plus lourd et d'un choix plus limité de la variable régularisée.

Dans le travail présent, la robustesse étant l'un des objectifs essentiels, on choisit d'employer l'approche à l'énergie enrichie en raison de ses caractéristiques :

- mathématiques assurant la robustesse prouvée dans [Lorentz et Godard, 2011] en cas de rupture fragile
- numériques s'appuyant sur des algorithmes usuels
- physiques permettant de modéliser l'interaction entre les points par un seul terme

3.6.2 Choix de la variable à régulariser

L'effet non-local dépend non seulement de l'opérateur de régularisation, mais aussi de la loi du matériau et du choix de la variable à régulariser. Pour les lois de rupture fragile, il est courant de choisir à régulariser soit la variable d'endommagement [Lorentz et Benallal, 2005; Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987], soit la déformation plastique cumulée [Geers et al., 1998; Peerlings et al., 1996].

Dans le cadre de la modélisation de la rupture ductile, on le choix – délicat – entre déformation plastique et endommagement (porosité). Pour les modèles phénoménologiques (élastoplastiques endommageables, eg. Lemaitre et ses variantes), on trouve la régularisation de la variable d'endommagement dans les travaux [Mediavilla et al., 2006a] [de Sá et al., 2006] ou de la déformation plastique cumulée dans [Geers, 2004]. Dans les travaux concernant le modèle Rousselier, les auteurs des travaux [Samal et al., 2008; Seidenfuss et al., 2011] ont choisi à régulariser directement la porosité tandis que [Bargellini et al., 2009; Lorentz et al., 2008] ont régularisé la variation de volume qui est en réalité directement liée à la porosité.

S'agissant du modèle GTN, les choix sont plus variés d'un auteur à l'autre. [Reusch et al., 2003b] a régularisé la porosité et [Samal et al., 2009] a choisi le taux de croissance de la porosité. Dans le travail de Hütter [Hütter et al., 2013], la régularisation de la trace de déformation plastique a été mise en œuvre. Les auteurs ont tous démontré une efficacité régularisante avec leurs modèles. Récemment, [Andrade et al., 2014] ont réalisé un excellent travail afin de comparer l'effet non-local de la régularisation de différentes variables par la méthode à convolution pour le modèle de Lemaitre le modèle GTN. Sa conclusion essentielle est que la variable d'endommagement (ou porosité) serait la meilleure à régulariser dans les deux modèles. En outre, d'après le même travail, malgré une bonne performance à haute triaxialité, il apparaît que la régularisation de la variable d'écrouissage ne donne pas de résultat satisfait à triaxialité modérée (éprouvette déformation plane) et à basse triaxialité (éprouvette de cisaillement) dans le cadre du modèle GTN. Néanmoins, après vérification, ces conclusions semblent un peu arbitraires car la régularité des champs d'endommagement a été considérée comme le critère major de chaque modèle. Le champs de la déformation plastique n'a pas été examiné, ou au moins n'a pas été montré dans ce travail. Par ailleurs, l'effet (soi-disant) non régularisant de la variable d'écrouissage dans le modèle GTN n'est pas forcément liée au choix de la variable, puisque le modèle lui-même est connu pour ses difficultés à faible triaxialité [Nahshon et Hutchinson, 2008; Xue, 2008].

Dans le travail présent avec le modèle GTN, on choisit de régulariser la variable d'écrouissage plastique p . En effet, l'évolution de la déformation plastique et l'évolution de la porosité (due à la croissance et à la germination) dépendent toutes les deux de cette variable. Il est donc raisonnable d'espérer que la régularisation de p pourra éliminer la localisation pathologique de la déformation et de l'endommagement. Par ailleurs, la variable d'écrouissage p est une variable interne dans tous les modèles d'endommagement, ce qui est parfaitement compatible

avec la méthode de régularisation que l'on a choisie, à savoir l'approche par l'énergie enrichie. Enfin, dans le paragraphe 2.3.4, on a observé des oscillations anormales au champ de la déformation plastique cumulée avec l'élément mixte P2/P1/P1, la régularisation la variable d'écroutissage apparait aussi un choix naturel afin de traiter ce problème.

Chapitre 4 – Régularisation à gradient de la variable d'écoulement

Dans ce chapitre, la méthode de régularisation à gradient de variable d'écrouissage sera présentée dans le régime de grandes déformations. Sur le plan numérique, la méthode de décomposition-coordination sera employée afin de réduire la non-linéarité dans l'intégration de la loi de comportement ; elle se solde par la recherche du point-selle d'un Lagrangien augmenté. Le modèle sera d'abord implanté avec l'élément fini standard dont on montrera qu'il continue à présenter un verrouillage numérique. Puis on passera à l'élément fini mixte présenté dans le paragraphe 2.3.4. Ce cadre de modélisation qui traite à la fois les problèmes de localisation et le verrouillage volumique sera appliqué à la plasticité de von Mises et à l'endommagement de GTN.

4.1 Formulation continue

En suivant les choix exposés au chapitre précédent, on adopte une régularisation basée sur l'introduction du gradient de la déformation plastique cumulée. Ceci consiste à représenter l'interaction des points voisins par un terme de gradient au carré de la variable d'écrouissage dans l'énergie libre (2-43) .

$$\Phi_{nl} = \Phi^e(\mathbf{E}^e) + \Phi^p(p) + \frac{c}{2} \nabla p \cdot \nabla p \quad (4-1)$$

L'expression de l'énergie dissipée devient aussi non-locale et doit donc être considérée à l'échelle de la structure dans son ensemble :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{nl} &= \int_{\Omega_0} \dot{\Psi}_{nl} d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \dot{\Phi}_{nl}(\mathbf{E}^e, p) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} (\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + A\dot{p} - c \nabla p \cdot \nabla \dot{p}) d\Omega \geq 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

On remarque que l'inégalité de Clausius-Duhem peut très bien ne pas être vérifiée localement en raison de l'introduction du gradient. C'est prévisible puisqu'on ne peut plus isoler un point matériel suite aux interactions via le gradient de la variable d'écrouissage. Seule l'inégalité sous la forme intégrale (4-2) reste pertinente.

En utilisant le même passage dans (3-18), les analyses variationnelles conduisent à :

$$\mathcal{D}_{nl} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\Psi}_{nl} d\Omega = \int_{\Omega_0} [\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + (A + c \nabla^2 p) \dot{p}] d\Omega = \int_{\Omega_0} [\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + A_{nl} \dot{p}] d\Omega \quad (4-3)$$

avec la condition limite de Neumann $\partial p / \partial n = \nabla p \cdot \underline{n} = 0$ sur $\partial\Omega_0$.

où $A_{nl} = A + c \nabla^2 p$ est défini comme la force non-locale liée à la déformation plastique cumulée.

Dans ce contexte, on part toujours du principe de la maximisation de l'énergie de dissipation (cadre standard généralisé). Ainsi, l'écoulement plastique prend la même forme que (2-47) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \\ \dot{p} = \lambda \frac{\partial F}{\partial A_{nl}} = \lambda, \quad \lambda F = 0, \quad \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (4-4)$$

où F est la fonction seuil, dont la forme est obtenue simplement en remplaçant A par A_{nl} dans la fonction seuil habituelle puisque on garde le même potentiel de dissipation qu'en local :

$$F = N(\mathbf{T}) + A_{nl} - \sigma_0 = N(\mathbf{T}) + A - \sigma_0 + c\nabla^2 p \quad (4-5)$$

$N(\mathbf{T})$ est une fonction de \mathbf{T} et éventuellement de J comme dans le modèle GTN.

4.2 Formulation numérique

Dans cette section, on détaillera l'implémentation du modèle non-local avec l'élément standard et l'élément mixte. Un traitement aux points de singularité ($N(\mathbf{T}) = 0$) sera également abordé. Enfin, une application à la loi de von Mises sera présentée.

4.2.1 Traitement de non-localité

Le terme du Laplacien dans l'équation (4-5) complique l'intégration de la loi de comportement, ce qui est déjà fortement non-linéaire. Pour séparer les problématiques non locale et non linéaire, on emploie une méthode de décomposition-coordination [Fortin, Glowinski ; 1983], avec laquelle l'énergie libre non-locale s'écrit :

$$\Phi_{nl} = \Phi^e(\mathbf{E}^e) + \Phi^p(p) + \frac{c}{2}(\nabla a \cdot \nabla a) + l(a - p) + \frac{r}{2}(a - p)^2 \quad (4-6)$$

En effet, on introduit deux variables distinctes pour représenter la déformation plastique cumulée : l'une destinée à l'échelle locale (p), l'autre à l'échelle de la structure (a). Etant entendu que ces deux variables sont égales (elles décrivent le même phénomène), on introduit aussi un multiplicateur de Lagrange l pour imposer cette contrainte égalité.

En reprenant la formulation énergétique du paragraphe 2.1.3, le Lagrangien augmenté s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{E}, a, l) &= \int_{\Omega_0} \left[\Phi_{nl}(\mathbf{E}^e, p, a, l) + \Delta t \Psi \left(\frac{\mathbf{E}^p - \mathbf{E}^{p-}}{\Delta t}, \frac{p - p^-}{\Delta t} \right) \right] d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{u}) \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E}^e : \mathbb{H} : \mathbf{E}^e + \int A(p) dp + \frac{c}{2} (\nabla a)^2 + \frac{r}{2} (a - p)^2 + l(a - p) + \Psi(\Delta \mathbf{E}^p, \Delta p) \right] d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{u}) \end{aligned} \quad (4-7)$$

Sur la plan numérique, la variable p sera échantillonnée aux points d'intégration tandis que a sera discrétisée par des fonctions de forme. Le terme de gradient est ainsi transféré aux nœuds et il est beaucoup plus facile de le calculer dans un espace discrétisé.

On a aussi la nouvelle forme de la force associée à la variable d'érouissage :

$$A_{nl} = A + l + r(a - p) \quad (4-8)$$

et la fonction seuil non-locale :

$$F(N(\mathbf{T}), p) = N(\mathbf{T}) + A(p) - \sigma_0 + l + r(a - p) \leq 0 \quad (4-9)$$

Le paramètre r est souvent choisi entre $[10\sigma_0, E]$, il ne peut être ni trop petit ni trop grand. Une étude sur le rôle de r sera réalisée dans le paragraphe 4.3.6.

4.2.2 Implantation directe : élément fini standard

Dans ce paragraphe, l'implantation du modèle non local avec l'élément standard sera détaillée. On écrit d'abord la formulation continue puis la formulation discrétisée. Les calculs des forces intérieures et la matrice de rigidité seront présentés. Le lecteur essentiellement intéressé par les résultats finaux pourra directement se référer au Tableau 5 (paragraphe 4.3.3) pour la procédure d'implémentation avec la loi de GTN.

Le point selle du Lagrangien (4-7) s'obtient par :

$$\min_{\mathbf{E}} \min_a \max_l \left[\min_{\epsilon^p} \min_p \mathcal{L}(\mathbf{E}, a, l, \mathbf{E}^p, p) \right] \quad (4-10)$$

L'optimisation par rapport aux variables (\mathbf{E}, a, l) se réalise aux nœuds. La minimisation par rapport aux variables internes (\mathbf{E}^p, p) n'est rien d'autre que la loi de normalité, traitée au niveau des points Gauss.

Une fois la loi de comportement intégrée aux points Gauss, eg. $\delta \mathcal{L}^{\mathbf{E}^p} = 0$; $\delta \mathcal{L}^p = 0$, on écrit les équations nodales en dérivant (4-7) :

$$\begin{cases} \delta \mathcal{L}^u = \int_{\Omega_0} \mathbf{T} : \delta \mathbf{E} d\Omega = 0 \\ \delta \mathcal{L}^a = \int_{\Omega_0} [-c \nabla^2 a + l + r(a - p)] \delta a d\Omega = 0 \\ \delta \mathcal{L}^l = \int_{\Omega_0} (a - p) \delta l d\Omega = 0 \end{cases} \quad (4-11)$$

Afin d'utiliser la méthode Newton-Raphson pour résoudre (4-11), la matrice de rigidité est nécessaire.

On écrit donc la dérivée seconde du Lagrangien :

$$\begin{cases} \delta^2 \mathcal{L}^u = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a} \delta a + \delta \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial l} \delta l + \mathbf{T} : \delta^2 \mathbf{E} d\Omega_0 \\ \delta^2 \mathcal{L}^a = \int_{\Omega_0} \delta a \left(-r \frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}} \right) : \delta \mathbf{E} + \delta a \left(r - r \frac{\partial p}{\partial a} \right) \delta a + \delta a \left(1 - r \frac{\partial p}{\partial l} \right) \delta l + c (\delta \nabla a)^2 d\Omega_0 \\ \delta^2 \mathcal{L}^l = \int_{\Omega_0} \delta l \left(-\frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}} \right) : \delta \mathbf{E} + \delta l \left(1 - \frac{\partial p}{\partial a} \right) \delta a + \delta l \left(-\frac{\partial p}{\partial l} \right) \delta l d\Omega_0 \end{cases} \quad (4-12)$$

soit sous forme matricielle :

$$\delta^2 \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta a \\ \delta l \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta a \\ \delta l \end{bmatrix} + c \delta \nabla a \cdot \delta \nabla a + \mathbf{T} : \delta^2 \mathbf{E} \quad (4-13)$$

avec

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial l} \\ -r \frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}} & r - r \frac{\partial p}{\partial a} & 1 - r \frac{\partial p}{\partial l} \\ -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}} & 1 - \frac{\partial p}{\partial a} & -\frac{\partial p}{\partial l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial l} \\ \mathbf{SYM} & r - r \frac{\partial p}{\partial a} & 1 - r \frac{\partial p}{\partial l} \\ \mathbf{SYM} & \mathbf{SYM} & -\frac{\partial p}{\partial l} \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est la matrice tangente qui sera calculé après l'intégration de la loi de comportement. Issue de la dérivée seconde du Lagrangien, cette matrice est symétrique de par le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} \quad \forall x, y \in \{\mathbf{E}, a, l\} \quad (4-15)$$

Les termes du $\mathbf{\Pi}$ seront détaillés dans le paragraphe 4.2.5 pour la loi de von Mises et dans le paragraphe 4.3.1 pour la loi de GTN où sa symétrie sera vérifiée. Cette symétrie pourra simplifier le travail de programmation à certain niveau.

Pout exprimer le dernière terme de (4-13), on écrit d'abord les dérivées suivantes :

$$\begin{cases} \delta \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} & ; \quad \delta^2 \mathbf{C} = 2 \delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} \\ \delta \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} : (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \frac{2 \partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} : (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) = \mathbb{P} : (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) \end{cases} \quad (4-16)$$

Les dérivées du tenseur \mathbf{E} s'expriment par :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \delta^2 \mathbf{E} &= \delta \mathbf{C} : \mathbf{T} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} + \mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} : \delta^2 \mathbf{C} \\ &= (\delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{T} : \mathbb{L} : (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) + \delta \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{T} : \mathbb{P}) \cdot \delta \mathbf{F} \end{aligned} \quad (4-17)$$

Ici $\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}}$ est un tenseur d'ordre 4 et $\mathbb{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4 \partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}$ un tenseur d'ordre 6. Leurs expressions sont détaillées en Annexe A2.

A présent, on veut transcrire ces formulations dans l'élément fini. Les variables nodales s'écrivent :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}) &= \mathbf{N}^u(\underline{x}) \cdot \underline{U}; & \mathbf{F}(\underline{x}) &= \mathbb{B}^u(\underline{x}) \cdot \underline{U} + \mathbf{I} \\ a(\underline{x}) &= \underline{N}^a(\underline{x}) \cdot \underline{A}; & \underline{\nabla} a(\underline{x}) &= \mathbf{B}^a(\underline{x}) \cdot \underline{A} \\ l(\underline{x}) &= \underline{N}^l(\underline{x}) \cdot \underline{L} \end{aligned} \quad (4-18)$$

où $\mathbf{N}^u(\underline{x})$, $\underline{N}^a(\underline{x})$ et $\underline{N}^l(\underline{x})$ sont des fonctions de forme polynomiales. $\mathbb{B}^u(\underline{x})$, $\mathbf{B}^a(\underline{x})$ sont les dérivées de $\mathbf{N}^u(\underline{x})$, $\underline{N}^a(\underline{x})$ respectivement. $\underline{U} \in \mathbf{R}^{n \cdot ndim}$, $\underline{A} \in \mathbf{R}^n$, $\underline{L} \in \mathbf{R}^n$ sont des variables écrites sous forme vectorielle avec n le nombre des nœuds et $ndim$ la dimension du problème.

Dans ce travail, $\mathbf{N}^u(\underline{x})$ est une fonction quadratique tandis que $\underline{N}^a(\underline{x})$ et $\underline{N}^l(\underline{x})$ sont linéaires. Un exemple d'un élément triangle est montré dans Figure 46.

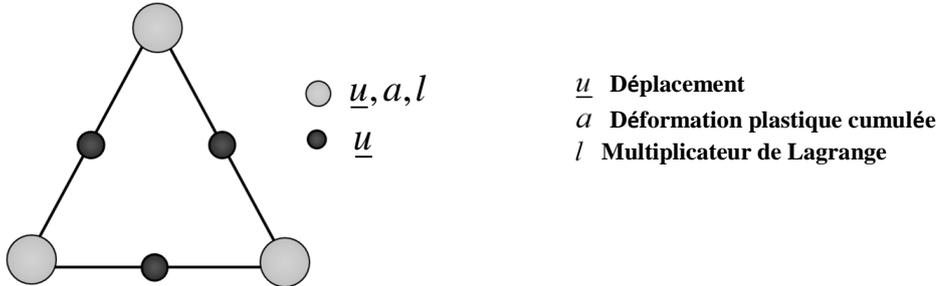


Figure 46: Non-local model implémenté avec l'élément standard

Avec toutes ces notations, (4-11), (4-13) et (4-17) s'écrit finalement comme les résidus dans l'espace discrétisé sur un élément fini :

$$\begin{cases} \delta \mathcal{L}^u = \sum_g w_g \mathbf{T}_g : \delta \mathbf{E} = \sum_g w_g \mathbf{T}_g : \mathbb{P}_g : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u) \cdot \delta \underline{U} \\ \delta \mathcal{L}^a = \sum_g w_g [r(\underline{N}_g^a \cdot \underline{A} - \alpha_g) + \underline{N}_g^l \underline{L}] \underline{N}_g^a \cdot \delta \underline{A} + w_g c \mathbf{B}_g^a \cdot \underline{A} \cdot \mathbf{B}_g^a \cdot \delta \underline{A} \\ \delta \mathcal{L}^l = \sum_g w_g (\underline{N}_g^a \cdot \underline{A} - \alpha_g) \underline{N}_g^l \cdot \delta \underline{L} \end{cases} \quad (4-19)$$

Les forces intérieures s'écrivent donc :

$$\begin{cases} F_{\text{int}}^u = \sum_g w_g \mathbf{T}_g : \mathbb{P}_g : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u) \\ F_{\text{int}}^a = \sum_g w_g \left[(r(\underline{N}_g^a \cdot \underline{A} - \alpha_g) + \underline{N}_g^l \cdot \underline{L}) \underline{N}_g^a + c \mathbf{B}_g^a \cdot \underline{A} \cdot \mathbf{B}_g^a \right] \\ F_{\text{int}}^l = \sum_g w_g (\underline{N}_g^a \cdot \underline{A} - \alpha_g) \underline{N}_g^l \cdot \delta \underline{L} \end{cases} \quad (4-20)$$

Concernant la matrice tangente, on écrit d'abord :

$$\begin{cases} \delta \mathbf{E} = \mathbb{P} : (\mathbf{F}^T \cdot \mathbb{B}^u) \cdot \delta \underline{U} \\ \mathbf{T} : \delta^2 \mathbf{E} = (\delta \underline{U}^T \cdot \mathbb{B}_g^{uT} \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{T} : \mathbb{L} : (\mathbf{F}^T \cdot \mathbb{B}_g^u \cdot \delta \underline{U}) + (\delta \underline{U}^T \cdot \mathbb{B}_g^{uT}) \cdot (\mathbf{T}_g : \mathbb{P}_g) \cdot (\mathbb{B}_g^u \cdot \delta \underline{U}) \end{cases} \quad (4-21)$$

puis (4-13) est exprimée dans l'espace discrétisé par :

$$\delta^2 \mathcal{L} = \sum_g w_g \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{Q}_g^T \cdot \mathbf{\Pi}_g \cdot \mathbf{Q}_g \cdot \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix} + c w_g \delta \underline{A}^T \cdot (\mathbf{B}_g^a)^T \cdot \mathbf{B}_g^a \cdot \delta \underline{A} \quad (4-22)$$

$$+ w_g (\delta \underline{U}^T \cdot \mathbb{B}_g^{uT} \cdot \mathbf{F}_g) : (\mathbf{T}_g : \mathbb{L}_g) : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u \cdot \delta \underline{U}) + w_g (\delta \underline{U}^T \cdot \mathbb{B}_g^{uT}) \cdot (\mathbf{T}_g : \mathbb{P}_g) \cdot (\mathbb{B}_g^u \cdot \delta \underline{U})$$

où la matrice \mathbf{Q}_g est définie par :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta a \\ \delta l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_g : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u) & 0 & 0 \\ 0 & \underline{N}_g^a & 0 \\ 0 & 0 & \underline{N}_g^l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_g \cdot \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix}$$

Si on note :

$$\mathbf{M}^1 = \mathbf{Q}_g^T \cdot \mathbf{\Pi}_g \cdot \mathbf{Q}_g$$

$$\mathbf{M}^2 = \left[(\mathbb{B}_g^{uT} \cdot \mathbf{F}_g) : (\mathbf{T}_g : \mathbb{L}_g) : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u) + \mathbb{B}_g^{uT} \cdot (\mathbf{T}_g : \mathbb{P}_g) \cdot \mathbb{B}_g^u \right] \underline{e}_U \otimes \underline{e}_U + c (\mathbf{B}_g^a)^T \cdot \mathbf{B}_g^a \underline{e}_a \otimes \underline{e}_a$$

alors (4-22) devient :

$$\delta^2 \mathcal{L} = \sum_g w_g \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix}^T \cdot (\mathbf{M}^1 + \mathbf{M}^2) \cdot \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

Finalement, on obtient la matrice de rigidité d'un élément :

$$\mathbf{M} = \sum_g w_g (\mathbf{M}^1 + \mathbf{M}^2) \quad (4-24)$$

Même si chaque terme de la matrice de rigidité n'est pas explicité, cette écriture permet de profiter des opérations matricielles dans l'implémentation numérique, un gain en temps de programmation et en temps de calcul.

4.2.3 Prise en compte de l'incompressibilité : élément fini à 5 champs

Dans ce paragraphe, le modèle non-local est appliqué à l'élément mixte qui traite le verrouillage volumique. De même, le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux résultats finaux pourra se référer au Tableau 5 (paragraphe 4.3.3) pour la procédure d'implémentation avec la loi de GTN.

Le Lagrangien du système s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{E}, \theta, P, a, l) &= \int_{\Omega_0} [\Phi_{nl}(\tilde{\mathbf{E}}, a, l) + \Psi(\dot{p}) + P(\theta - \text{tr}\mathbf{E})] d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^e : \mathbb{H} : \tilde{\mathbf{E}}^e + \frac{1}{2} \int A(p) dp + \frac{c}{2} (\nabla a)^2 + \frac{r}{2} (a-p)^2 + l(a-p) + P(\text{tr}\mathbf{E} - \theta) + \Psi \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{4-25}$$

On définit aussi le tenseur des contraintes :

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbb{H} : (\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}^p) \tag{4-26}$$

Pour obtenir le point selle du Lagrangien, on écrit son dérivée :

$$\begin{cases}
\delta \mathcal{L}^u = \int_{\Omega_0} (\tilde{\mathbf{T}}_D + P\mathbf{I}) : \delta \mathbf{E} d\Omega = 0 \\
\delta \mathcal{L}^\theta = \int_{\Omega_0} (\frac{1}{3} \text{tr} \tilde{\mathbf{T}} - P) \delta \theta d\Omega = 0 \\
\delta \mathcal{L}^P = \int_{\Omega_0} (\text{Tr} \mathbf{E} - \theta) \delta P d\Omega = 0 \\
\delta \mathcal{L}^a = \int_{\Omega_0} c \nabla a \cdot \delta \nabla a + [l + r(a-p)] \delta a d\Omega = 0 \\
\delta \mathcal{L}^l = \int_{\Omega_0} (a-p) \delta l d\Omega = 0
\end{cases} \tag{4-27}$$

et la matrice tangente s'obtient par le dérivée seconde du Lagrangien :

$$\delta^2 \mathcal{L} = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta \theta \\ \delta P \\ \delta a \\ \delta l \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{Y} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta \theta \\ \delta P \\ \delta a \\ \delta l \end{bmatrix} + (\mathbf{T}_D + P\mathbf{I}) : \delta^2 \mathbf{E} + c (\delta \nabla a)^2 d\Omega \tag{4-28}$$

avec la matrice symétrique \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_D}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} : (\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) & \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_D}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} : \frac{\mathbf{I}}{3} & \mathbf{I} & \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_D}{\partial a} & \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_D}{\partial l} \\ \text{SYM} & \frac{1}{9} \mathbf{I} : \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} : \mathbf{I} & -1 & \frac{1}{3} \mathbf{I} : \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial a} & \frac{1}{3} \mathbf{I} : \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial l} \\ \text{SYM} & \text{SYM} & 0 & 0 & 0 \\ \text{SYM} & \text{SYM} & \text{SYM} & r - r \frac{\partial p}{\partial a} & 1 - r \frac{\partial p}{\partial l} \\ \text{SYM} & \text{SYM} & \text{SYM} & \text{SYM} & -\frac{\partial p}{\partial l} \end{bmatrix} \tag{4-29}$$

\mathbf{Y} est symétrique par le même argument que (4-15)

Dans l'espace discrétisé, en outre de la discrétisation de \underline{u}, a, l par (4-18), on a aussi :

$$\begin{cases} \theta(\underline{x}) = \underline{N}^\theta(\underline{x}) \cdot \underline{\Theta} \\ P(\underline{x}) = \underline{N}^P(\underline{x}) \cdot \underline{P} \end{cases} \tag{4-30}$$

avec des fonctions linéaires \underline{N}^θ et \underline{N}^P .

Avec l'interpolation P2/P1/P1P1P1 pour les cinq variables $(\underline{U}, \underline{\Theta}, \underline{P}, \underline{A}, \underline{L})$, on présente aussi des exemples d'élément en 2D dans la Figure 47.

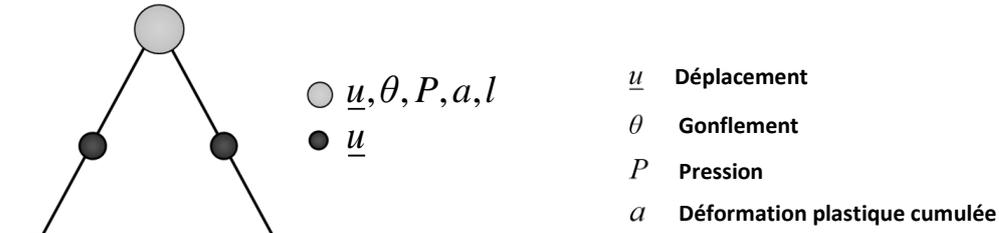


Figure 47: Élément à cinq champs : modèle non-local implémenté dans l'élément mixte

Pour l'implémentation numérique, on réécrit (4-27) dans l'espace discrétisé qui donne les résidus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \mathcal{L}^u = \sum_g w_g (\tilde{\mathbf{T}}_g^D + P_g \mathbf{I}) : \mathbb{P}_g : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u) \cdot \delta \underline{U} \\ \delta \mathcal{L}^\theta = \sum_g w_g \left(\frac{1}{3} \text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_g - P_g \right) \underline{N}_g^\theta \cdot \delta \underline{\Theta} \\ \delta \mathcal{L}^P = \sum_g w_g (\text{tr} \mathbf{E} - \underline{N}_g^a \cdot \underline{\Theta}) \underline{N}_g^P \cdot \delta \underline{P} \\ \delta \mathcal{L}^a = \sum_g w_g [r(\underline{N}_g^a \cdot \underline{A} - p_g) + \underline{N}_g^l \underline{L}] \underline{N}_g^a \cdot \delta \underline{A} + w_g c \mathbf{B}_g^a \cdot \underline{A} \cdot \mathbf{B}_g^a \cdot \delta \underline{A} \\ \delta \mathcal{L}^l = \sum_g w_g (\underline{N}_g^a \cdot \underline{A} - p_g) \underline{N}_g^l \cdot \delta \underline{L} \end{array} \right. \quad (4-31)$$

Les forces intérieures sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\text{int}}^u = \sum_g w_g (\tilde{\mathbf{T}}_g^D + P_g \mathbf{I}) : \mathbb{P}_g : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u) \\ F_{\text{int}}^\theta = \sum_g w_g \left(\frac{1}{3} \text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_g - P_g \right) \underline{N}_g^\theta \\ F_{\text{int}}^P = \sum_g w_g (\text{tr} \mathbf{E} - \underline{N}_g^a \cdot \underline{\Theta}) \underline{N}_g^P \\ F_{\text{int}}^a = \sum_g w_g \left[(r(\underline{N}_g^a \cdot \underline{A} - p_g) + \underline{N}_g^l \cdot \underline{L}) \underline{N}_g^a + c \mathbf{B}_g^a \cdot \underline{A} \cdot \mathbf{B}_g^a \right] \\ F_{\text{int}}^l = \sum_g w_g (\underline{N}_g^a \cdot \underline{A} - p_g) \underline{N}_g^l \end{array} \right. \quad (4-32)$$

Afin de calculer la matrice de rigidité, on écrit (4-28) dans l'espace discrétisé :

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{L} = & \sum_e \sum_g w_g \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{\Theta} \\ \delta \underline{P} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{S}_g^T \cdot \mathbf{Y}_g \cdot \mathbf{S}_g \cdot \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{\Theta} \\ \delta \underline{P} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix} + c \delta \underline{A}^T \cdot (\mathbf{B}_g^a)^T \cdot \mathbf{B}_g^a \cdot \delta \underline{A} \\ & + w_g (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u \cdot \delta \underline{U})^T : ((\mathbf{T}_D + P \mathbf{I})_g : \mathbb{L}_g) : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u \cdot \delta \underline{U}) \\ & + w_g (\delta \underline{U}^T \cdot \mathbb{B}_g^{uT}) \cdot [(\mathbf{T}_D + P \mathbf{I})_g : \mathbb{P}_g] \cdot (\mathbb{B}_g^u \cdot \delta \underline{U}) \end{aligned} \quad (4-33)$$

où la matrice \mathbf{S} est définie avec :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta \theta \\ \delta P \\ \delta a \\ \delta l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_g : (\mathbf{F}^T \cdot \mathbb{B}_g^u) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{N}^\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{N}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{N}^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{N}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{\Theta} \\ \delta \underline{P} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_g \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{\Theta} \\ \delta \underline{P} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

Similaire au paragraphe précédent, on définit :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m^1 &= \mathbf{S}_g^T \cdot \mathbf{Y}_g \cdot \mathbf{S}_g \\ \mathbf{M}_m^2 &= [(\mathbf{F}_g \mathbb{B}_g^{uT}) : (\mathbf{T}_D + \mathbf{P}\mathbf{I})_g : \mathbb{L}_g : (\mathbf{F}_g^T \cdot \mathbb{B}_g^u) + \mathbb{B}_g^{uT} \cdot [(\mathbf{T}_D + \mathbf{P}\mathbf{I})_g : \mathbb{P}_g] \cdot \mathbb{B}_g^u] \underline{e}_U \otimes \underline{e}_U \\ &\quad + c(\mathbf{B}_g^a)^T \cdot \mathbf{B}_g^a \underline{e}_a \otimes \underline{e}_a \end{aligned}$$

L'indice 'm' signifie 'mixte' de l'élément mixte pour être distingué de l'élément standard du paragraphe précédent.

alors (4-33) devient :

$$\delta^2 \mathcal{L} = \sum_g w_g \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{\Theta} \\ \delta \underline{P} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix}^T \cdot (\mathbf{M}_m^1 + \mathbf{M}_m^2) \cdot \begin{bmatrix} \delta \underline{U} \\ \delta \underline{\Theta} \\ \delta \underline{P} \\ \delta \underline{A} \\ \delta \underline{L} \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

Finalement, on obtient la matrice de rigidité d'un élément :

$$\mathbf{M}_m = \sum_g w_g (\mathbf{M}_m^1 + \mathbf{M}_m^2) \quad (4-36)$$

4.2.4 Intégration de la loi de comportement et point de singularité

Au niveau de point Gauss, il n'est pas nécessaire de distinguer l'élément standard et l'élément mixte dans ce paragraphe car ils partagent les mêmes équations. On peut donc confondre les tenseurs (\mathbf{T}, \mathbf{E}) et $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{E}})$ dans ce paragraphe.

En cas de plastification, l'intégration de la loi de comportement s'effectue par la résolution des du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbb{H} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \\ \dot{\mathbf{E}}^p = \dot{p} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \\ F(\mathbf{T}, p) = N(\mathbf{T}) + A(p) - \sigma_0 + l + r(a - p) = 0 \end{cases} \quad (4-37)$$

Après la discrétisation temporelle, ces équations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{T}^e - 2\mu \Delta \mathbf{E}^p \\ \Delta \mathbf{E}^p = \frac{\partial N}{\partial \mathbf{T}} \Delta p \\ F(\mathbf{T}, p) = N(\mathbf{T}) + A(p^- + \Delta p) - r(p^- + \Delta p) - \sigma_0 + (ra + l) = 0 \end{cases} \quad (4-38)$$

où \mathbf{T}^e est la prédiction élastique définie par :

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{T}^- + \mathbb{H} \Delta \mathbf{E} \quad (4-39)$$

Les deux premières équations restent identiques à celles du modèle local. Dans la troisième équation, le terme supplémentaire $l + r(a - p)$ est linéaire par rapport à Δp . De ce fait, la

résolution de ces équations au niveau des points Gauss reste donc très similaire à celle dans le modèle local, même si l'expression de la matrice tangente est plus longue car plus de variables sont impliquées. On trouvera des détails de la résolution à la section 4.2.5 pour la loi de von Mises et à la section 4.3.1 pour la loi de GTN.

A incrément de déformation généralisée $(\Delta \mathbf{E}, \Delta a, \Delta l)$ donnée, (4-38) admet toujours une solution unique. En effet, on le réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{T}^e - 2\mu\Delta p \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{T}} \\ \mathbf{N}(\mathbf{T}) + A(p^- + \Delta p) - r(p^- + \Delta p) - \sigma_0 + (ra + l) = 0 \end{cases} \quad (4-40)$$

S'appuyant sur ces deux équations, on peut tracer les valeurs de $\mathbf{N}(\mathbf{T})$ en fonction de Δp . La première équation dans (4-40) donne $\mathbf{N}_1(\mathbf{T}) = \mathbf{N}\left(\mathbf{T}^e - 2\mu\Delta p \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{T}}\right)$ représenté par la courbe rouge dans la Figure 48. La valeur de $\mathbf{N}_1(\mathbf{T})$ décroît avec Δp . Selon la deuxième équation, $\mathbf{N}_2(\mathbf{T})$ croît avec Δp . La solution de (4-40) est donc l'intersection de ces deux courbes. Trois cas sont distingués dans cette résolution suivant la valeur du terme Laplacien. Aux endroits où le Laplacien est négatif (courbe 1 dans la figure), la solution obtenue est plus petite que la solution locale. C'est le cas inverse pour les endroits ayant Laplacien positif (courbe 2,3 dans la figure).

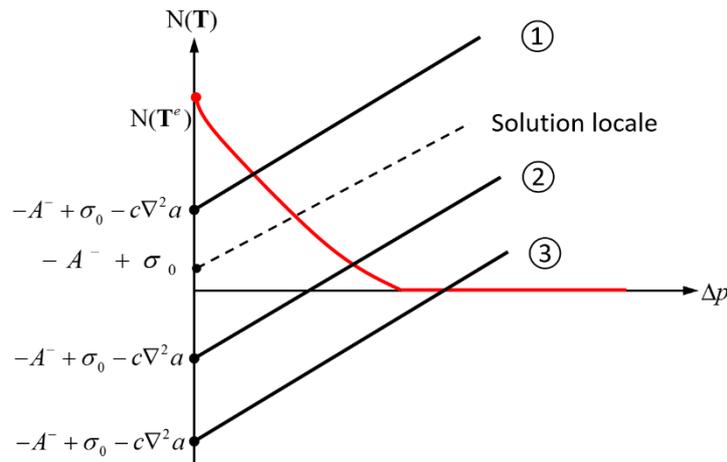


Figure 48 : Schémas des deux équations dans (4-40). La première équation est représentée par la courbe rouge et la deuxième équation par les noires selon la valeur du terme Laplacien.

On prête attention aux endroits où le terme Laplacien est si grand qu'aucun $\mathbf{N}(\mathbf{T})$ strictement positif vérifie les deux équations de (4-40) (cas 3 dans la Figure 48). Dans ce cas-là :

$$\begin{cases} \mathbf{N}(\mathbf{T}) = 0 \\ A_{nl} = A + r(a - p) + l = \sigma_0 \end{cases} \quad (4-41)$$

Les valeurs de \mathbf{T} dans ce cas sont appelées *points singuliers* car $\mathbf{N}(\mathbf{T})$ n'est plus dérivable et (4-38)₂ n'est plus satisfait. Néanmoins avec (4-41) on retrouve en fait le Cas 2 de (2-21) dans le paragraphe 2.1.2, ce qui assure aussi la solution unique sous condition de l'inégalité

$$\Delta p > \sup \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} : \Delta \mathbf{E}^p.$$

On peut rencontrer ces points singuliers dans les calculs sur des géométries où la déformation se localise intensément (par exemple éprouvette CT), ou parfois dans des itérations intermédiaires du calcul. Le traitement séparé de ces points améliore la convergence du calcul.

On détaillera la résolution de (4-41) dans les paragraphes suivants pour la loi de von Mises et la loi de GTN.

4.2.5 Critère de convergence

Le critère de convergence globale repose sur les forces intérieures \underline{F}_{int} , soit (4-20) ou (4-32). On peut contrôler la norme de \underline{F}_{int} . Par exemple, tous ses composants doivent être inférieurs à une certaine valeur :

$$\text{Pour chaque élément, } \max(\underline{F}_{int}) = \max(F_{int}^u, F_{int}^\theta, F_{int}^P, F_{int}^a, F_{int}^l) \leq h\varepsilon \quad (4-42)$$

où ε est la tolérance et h la taille de maille.

Cependant, il est constaté les composants n'ont pas la même unité : F_{int}^u , F_{int}^θ et F_{int}^a ressemblent à des contraintes ; F_{int}^P et F_{int}^l sont comme des déformations. Si un même critère s'applique sur tous ces composants, il pourrait être beaucoup trop sévère pour les composants 'contraintes' et le coût en temps du calcul deviendrait beaucoup plus important que nécessaire. Ainsi, la stratégie est de normaliser ces composants avant d'utiliser un même critère. On peut normaliser les composants 'contraintes' avec la limite élastique σ_0 et les composants 'déformations' avec σ_0/E . Le nouveau critère s'écrit :

$$\text{Pour chaque élément, } \max(\underline{F}_{int}^{norm}) = \max\left(\frac{F_{int}^u}{\sigma_0}, \frac{F_{int}^\theta}{\sigma_0}, \frac{F_{int}^P}{\sigma_0/E}, \frac{F_{int}^a}{\sigma_0}, \frac{F_{int}^l}{\sigma_0/E}\right) \leq h\varepsilon \quad (4-43)$$

(4-42) ou (4-43) ne sont que des critères sur la structure globale. Pour certaines lois, il est aussi nécessaire de définir un critère au niveau des points Gauss lors de l'intégration de la loi de comportement. Un exemple est la loi de GTN dans laquelle un schéma explicite est employé pour la discrétisation de la porosité, nécessitant donc un critère sur l'incrément de la grandeur ($\Delta f/f \leq \varepsilon_f$ par exemple). Plus d'analyses pourront être trouvées dans le paragraphe 2.4.7. Le calcul converge lorsque tous ces critères sur la structure et aux points Gauss sont vérifiés.

4.2.6 Exemple : application à la plasticité de von Mises

Dans les paragraphes ci-dessus, on a formulé un cadre mathématique et numérique de la modélisation avec régularisation à gradient de la variable d'érouissage. Avant de se concentrer sur le modèle GTN, on voudrait d'abord appliquer ce cadre à la loi de von Mises pour montrer sa capacité à traiter le verrouillage volumique.

Avec la loi de von Mises, $N(\mathbf{T})$ est égal à T_{eq} dans (4-38) :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_D = \mathbf{T}_D^e - 2\mu\Delta\mathbf{E}^p \\ \Delta\mathbf{E}^p = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{T}_D}{T_{eq}} \Delta p \\ F(\mathbf{T}, p) = (\mathbf{T}^e - 2\mu\Delta\mathbf{E}^p)_{eq} + A(p^- + \Delta p) - r(p^- + \Delta p) - \sigma_0 + (ra + l) = 0 \end{cases} \quad (4-44)$$

La résolution de (4-44) commence par la dernière équation, la seule non linéaire. Puis on obtient l'évolution des contraintes et des déformations à chaque pas de temps :

$$\begin{cases} (r + 3\mu)\Delta p - A(p^- + \Delta p) = \mathbf{T}_{eq}^e - \sigma_0 + (ra + l) \\ \Delta \mathbf{E}^p = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{T}_D^e}{T_{eq}^e} \Delta p \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^e - \mathbb{H} : \Delta \mathbf{E}^p \end{cases} \quad (4-45)$$

En outre, pour calculer les matrices de rigidité $\mathbf{\Pi}$ et \mathbf{Y} , les dérivées suivantes sont également nécessaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}} = \frac{3\mu}{\gamma} \frac{\mathbf{T}_D^e}{T_{eq}^e} \\ \frac{\partial p}{\partial a} = \frac{r}{\gamma} \\ \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{\gamma} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{H} - \frac{6\mu^2 \Delta p}{T_{eq}^e} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - \frac{9\mu^2}{(T_{eq}^e)^2} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\Delta p}{T_{eq}^e} \right) \mathbf{T}_D^e \otimes \mathbf{T}_D^e \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a} = -\frac{3\mu r}{\gamma} \frac{\mathbf{T}_D^e}{T_{eq}^e} \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial l} = -\frac{3\mu}{\gamma} \frac{\mathbf{T}_D^e}{T_{eq}^e} \end{cases} \quad (4-46)$$

où $\gamma = A' + r + 3\mu$.

Avec ces relations, la symétrie des matrices de rigidité $\mathbf{\Pi}$ et \mathbf{Y} est évidente en reportant (4-46) dans (4-14) et (4-29).

Points de singularité :

Aux points de singularité abordés dans le paragraphe 4.2.4, les équations de von Mises à résoudre sont :

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{T}_D^e - 2\mu \Delta \mathbf{E}^p \\ F(\mathbf{T}, p) = -A(p^- + \Delta p) + r(p^- + \Delta p) + \sigma_0 - (ra + l) = 0 \\ \mathbf{T} = \mathbb{H} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \end{cases} \quad (4-47)$$

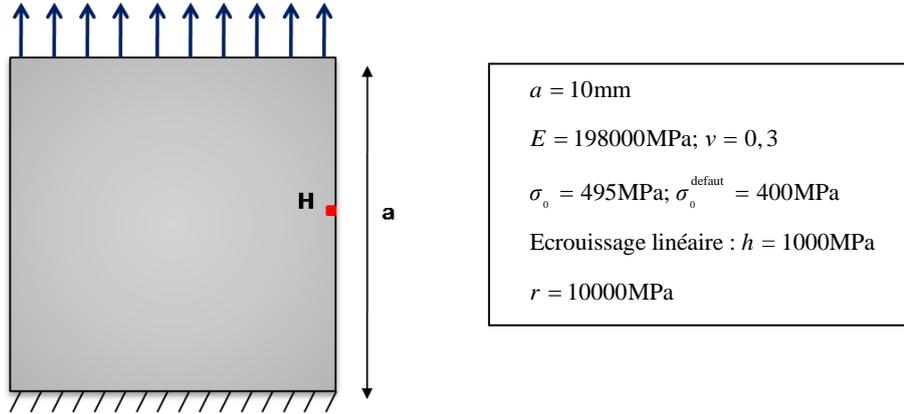
On obtient :

$$\begin{cases} r\Delta p - A(p^- + \Delta p) = \mathbf{T}_{eq}^e - \sigma_0 + (ra + l) \\ \Delta \mathbf{E}^p = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{T}_D^e}{2\mu} \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^e - \mathbb{H} : \Delta \mathbf{E}^p \end{cases} \quad (4-48)$$

Et les dérivées sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial p}{\partial a} = \frac{r}{h+r} \\ \frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{1}{h+r} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{K} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4-49)$$

On montre ici un exemple de simulation avec cette loi de von Mises non-locale. Il consiste à simuler une plaque carrée possédant un défaut au milieu de son côté droit (cf. Problème 4). La limite d'élasticité du défaut est plus petite qu'aux autres endroits. La localisation de déformation aura donc lieu autour du défaut avant de se propager au cours de la sollicitation. La Figure 49 illustre la bande de localisation dans cette plaque avec différente valeur du paramètre non local c . Il est observé que la largeur de la bande augmente avec c .



Problème 4 : Une plaque carrée avec un défaut dont la limite d'élasticité est inférieure aux autres points

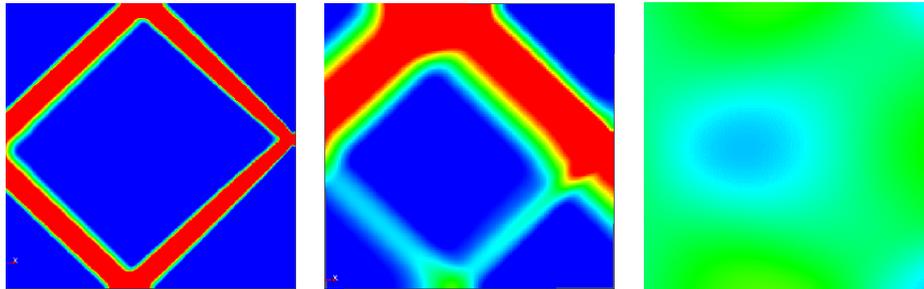


Figure 49 : Bande de localisation dans la plaque avec un défaut. De gauche à droite : $c=1$ N, 10 N, 100 N. Par ailleurs, on a aussi simulé la traction sur le cylindre du Problème 2 avec l'élément à cinq champs. Les oscillations observées dans la Figure 32 n'apparaissent plus, et ce même si $c = 0$.

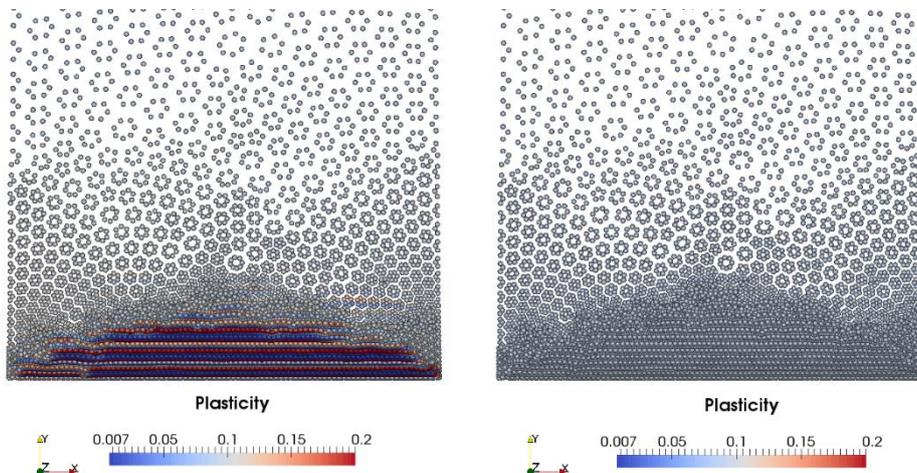


Figure 50 : Simulation de la traction sur un cylindre : l'instabilité de la déformation plastique est éliminée par l'élément à cinq champs. Gauche : élément mixte P2/P1/P1. Droite : Élément à cinq champs.

4.3 Application à l'endommagement avec le modèle GTN

Dans cette section, le modèle non local à gradient de la variable d'écrouissage sera appliqué à l'endommagement avec la loi GTN. On détaillera d'abord la résolution des équations aux points de Gauss, ainsi que les termes de dérivée nécessaires pour calculer les matrices tangentes (4-13) et (4-29). Le traitement du point singulier sera aussi abordé. Puis à partir des résultats de simulation sur éprouvette AE, on s'intéressera à l'efficacité de la régularisation du modèle et au rôle du paramètre non local c . Une estimation empirique entre la largeur de la bande de localisation et la valeur de c sera donnée. Enfin, on étudiera l'influence du paramètre de

pénalisation r en vue de guider le choix de la valeur à lui attribuer.

4.3.1 Loi de GTN non locale

On rassemble ici les équations à résoudre du modèle GTN en cas d'évolution d'endommagement :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbb{H} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \\ G(\mathbf{T}, T_*, f) = \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_*}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2 T_H}{2T_*}\right) - 1 - (q_1 f^*)^2 \stackrel{\text{def } T_*}{=} 0 \\ F(T_*, p) = \frac{T_*}{J} + A_{nl} - \sigma_0 = \frac{T_*}{J} + A(p) - \sigma_0 + r(a - p) + l = 0 \\ \lambda \geq 0 \quad ; \quad F \leq 0 \quad ; \quad \lambda F = 0 \\ \Delta \mathbf{E}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\lambda}{J} \frac{\partial T_*}{\partial \mathbf{T}} \\ \Delta p = \lambda \end{cases} \quad (4-50)$$

Ces équations sont très similaires à celles de (2-100), sauf que A est remplacé par A_{nl} . On adopte le même algorithme que celui du paragraphe 2.4.5 pour résoudre les équations. Il reste à calculer la matrice tangente issue de la loi.

On note $\mathbf{v} = \frac{dT_*}{d\mathbf{T}}$, dont l'expression est déjà donnée par (2-110). Le différentiel de \mathbf{T} s'écrit :

$$\delta \mathbf{T} = \mathbb{H} : \delta \mathbf{E} - \frac{1}{J} (\delta \Delta p \mathbb{H} : \mathbf{v} + \Delta p \mathbb{H} : \delta \mathbf{v}) \quad (4-51)$$

Puis d'après (4-50)₃, on obtient:

$$\delta \Delta p = \frac{\left(\frac{\delta T_*}{J} + \delta l + r \delta a\right)}{r + A'} = \frac{1}{r + A'} \left(\frac{\mathbf{v} : \delta \mathbf{T}}{J} + \delta l + r \delta a\right) \quad (4-52)$$

où $A' = \frac{dA}{dp}$.

Par la définition de \mathbf{v} , on a:

$$\delta \mathbf{v} = \frac{dT_*}{d\mathbf{T} d\mathbf{T}} : \delta \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{T}} : \delta \mathbf{T} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial T_*} \otimes \mathbf{v}\right) : \delta \mathbf{T} = \mathbb{N} : \delta \mathbf{T} \quad (4-53)$$

Ici $\mathbb{N} = \frac{dT_*}{d\mathbf{T} d\mathbf{T}}$ est un tenseur symétrique d'ordre 4, dont l'expression, assez lourde est présentée dans l'annexe A4.

En combinant (4-51) – (4-53) et éliminant $\delta \mathbf{v}$, Δp , on obtient:

$$\mathbb{M} : \delta \mathbf{T} = \delta \mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{r + A'} (\delta l + r \delta a) \quad (4-54)$$

où $\mathbb{M} = \left[\mathbb{H}^{-1} + \frac{1}{J^2 (r + A')} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \frac{\Delta p}{J} \mathbb{N} \right]$ est un tenseur symétrique d'ordre 4.

Par conséquent

$$\delta \mathbf{T} = \mathbb{M}^{-1} : \left[\delta \mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{J (r + A')} (\delta l + r \delta a) \right] \quad (4-55)$$

On déduit facilement les dérivées de p par rapport à (\mathbf{E}, a, l) en remportant (4-55) dans (4-52).

$$\delta\Delta p = \frac{1}{r+A'} \left[\frac{\mathbf{v}:\mathbb{M}^{-1}:\delta\mathbf{E}}{J} + \left(1 - \frac{\mathbf{v}:\mathbb{M}^{-1}:\mathbf{v}}{J^2(r+A')}\right) (\delta l + r\delta a) \right] \quad (4-56)$$

Avec ces relations, la symétrie des matrices de rigidité $\mathbf{\Pi}$ et \mathbf{Y} se montre facilement en remportant (4-55) et (4-56) dans (4-14) et (4-29).

4.3.2 Point singulier : $T^* = 0$

Pour la loi GTN, on s'intéresse au cas où le Laplacien est grand et entraîne $T^* = 0$ (cas 3 dans la Figure 48). Par définition de T^* , on a aussi $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Par conséquent, les équations à résoudre au point singulier sont :

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbb{H} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \\ F(T^*, p) = A(p) - \sigma_0 + (ra + l) = 0 \end{cases} \quad (4-57)$$

Il est donc facile de déduire que :

$$\begin{cases} \Delta p = \frac{1}{A'+r} [-\sigma_0 - (A'+r)p^- + (ra + \lambda)] \\ \Delta\mathbf{E}^p = \mathbf{E} - \mathbf{E}^p \end{cases} \quad (4-58)$$

Les dérivées sont donc :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \\ \Delta\dot{p} = \frac{1}{A'+r} (r\dot{a} + \dot{\lambda}) \end{cases} \quad (4-59)$$

4.3.3 Résumé : algorithme d'un pas de calcul

A présent que la formulation élémentaire et l'intégration de la loi aux points de Gauss sont présentées, on rassemble dans le Tableau 5 les étapes d'un pas de calcul dans un élément (standard ou mixte) avec la loi GTN.

Afin de simplifier l'écriture, on unifie les notations des variable aux nœuds par $\underline{\text{DDL}}$, c'est-à-dire : $\underline{\text{DDL}} = (\underline{U}, \underline{A}, \underline{L})$ pour l'élément standard et $\underline{\text{DDL}} = (\underline{U}, \underline{\Theta}, \underline{P}, \underline{A}, \underline{L})$ pour l'élément mixte.

Tableau 5 : Procédure détaillée d'un pas de calcul dans un élément avec la loi GTN

Variables d'entrée :	
Variables internes : f, p^-, \mathbf{T}^-	Variable nodales : $\underline{\text{DDL}}^-, \Delta \underline{\text{DDL}}^-$
Calcul élémentaire :	
1) Mettre à jour les variables aux nœuds : $\underline{\text{DDL}} = \underline{\text{DDL}}^- + \Delta \underline{\text{DDL}}^-$	
2) Calculer les variables pour l'intégration de la loi de comportement pour les points Gauss	
- a_g, l_g avec les fonctions de forme	
- Tenseurs des déformations	
\mathbf{E} (élément standard) ou $\tilde{\mathbf{E}}$ (élément mixte) (2-40)(2-59)	
Pour chaque PG	
((\mathbf{T}, \mathbf{E}) et ($\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{E}}$) sont confondus dans l'intégration de la loi de comportement)	
a) Calculer les contraintes d'essai \mathbf{T}^e, T_*^e	(2-108)
	(2-119)
b) Si $F(T_*^e, A^-) \leq 0$, régime élastique, $\mathbf{E}^p = 0, \mathbf{T} = \mathbf{T}^e$, aller à	(4-50) ₃
c) Si $F(T_*^e, A^-) > 0$, Evolution d'endommagement	
i) Pour $\Delta p \in [0, \arg F(T_*, \Delta p) = 0]$ $T_* = T_*^e$	
(1) Calculer T_H, T_*, λ	(2-117)
(2) Si $ \lambda - \Delta p \leq \epsilon_g$, aller à iii).	
Sinon mettre à jour $\Delta p = \Delta p - \left(1 - \left(\frac{d\lambda}{d\Delta p}\right)\right)^{-1} (\Delta p - \lambda)$, recalculer (1).	
Si $ \lambda - \Delta p \leq \epsilon_g$ n'est toujours pas vérifié et que $ \lambda - \Delta p $ devient stable et qu'il n'y a pas de solution pour $\Delta p \in [0, \arg F(T_*, \Delta p) = 0]$, c'est un point de singularité, aller à ii)	
ii) Point de singularité : calculer \mathbf{E}^p, \mathbf{T} et les dérivées de \mathbf{T} et Δp	(4-58) (4-59)
iii) Cas normal : calculer \mathbf{E}^p, \mathbf{T} et les dérivées de \mathbf{T} et Δp	(2-112)(2-114)(4-55)
d) Rassembler les variables sortant de l'intégration de la loi : \mathbf{T}, p, f^+ et les dérivées de \mathbf{T} et Δp	
3) Calculer les forces intérieures \mathbf{F}_{int} et la matrice de rigidité \mathbf{M}	(4-20)(4-24) (4-32)(4-36)
4) Si le critère de convergence n'est pas vérifié, calculer les nouveaux DDLs avec la méthode de Newton-Raphson :	(4-43)
$\Delta(\underline{\text{DDL}}) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\text{int}}$ Recommence par 1)	
Résultat du calcul de ce pas de temps	
Variables internes : f^+, p, \mathbf{T}	Variables nodales : $\underline{\text{DDL}}, \Delta(\underline{\text{DDL}})$

4.3.4 Effet de régularisation

Dans ce paragraphe, on montre l'efficacité de la régularisation du modèle non-local en s'appuyant sur des simulations d'éprouvettes AE (Problème 3) : le résultat ne dépend ni de l'orientation ni de la taille du maillage.

Dans la Figure 51, un maillage intentionnellement orienté vers le haut est utilisé pour la simulation d'une éprouvette AE. On observe que la fissure obtenue par le modèle sans régularisation suit l'orientation du maillage tandis que le modèle non local prédit la bonne direction de fissure.

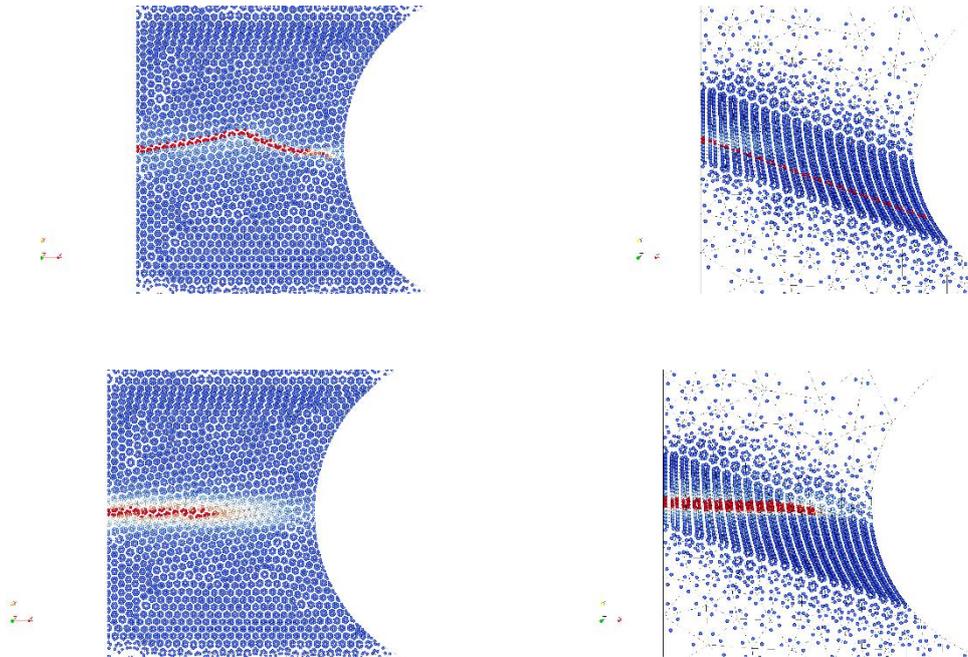


Figure 51 : Simulation avec deux maillages intentionnellement orientés. En haut : modèle local, en bas : modèle non local ($C=4N$)

Puis des simulations ont été effectuées avec différentes tailles de maille. La Figure 52 présente les champs de la porosité et les réponses globales issues des simulations. On s'aperçoit que, quand la taille de maille est suffisamment petite, à savoir $120\ \mu\text{m}$ ici, le résultat de simulation commence à converger : les courbes force – déplacement commencent à se superposer et la zone d'endommagement reste inchangée.

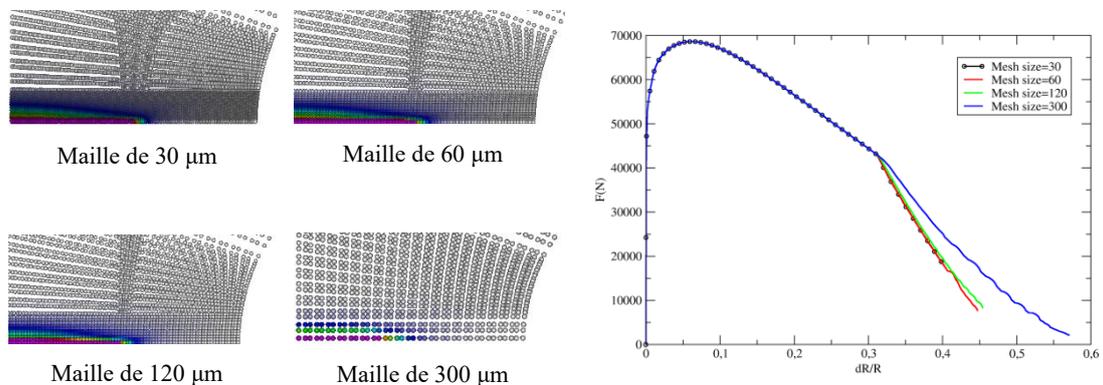


Figure 52 : La courbe force-réduction du rayon sur une éprouvette AE. Modèle non-local avec différentes tailles de maille

Les simulations sur éprouvette CT (voir l'annexe A5 pour la géométrie) avec différentes tailles de maille montrent aussi que les résultats ne sont pas pathologiquement sensibles aux maillages, cf. la Figure 53.

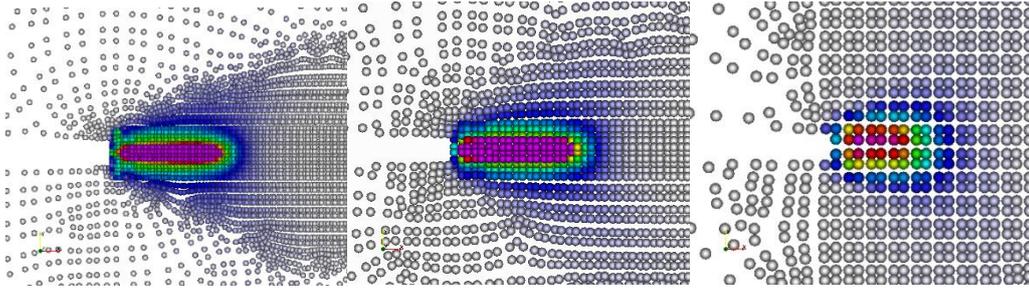


Figure 53 : Champs de la porosité au voisinage de l'entaille de l'éprouvette CT. Taille de maille : 30 μm (gauche), 60 μm (milieu), 120 μm (droite)

4.3.5 Largeur de la bande localisation

Le paramètre c introduit dans le modèle non-local pourra contrôler la largeur de la bande de localisation de déformation. Pour le montrer, on réalise des simulations sur éprouvette AE en fixant tous les autres paramètres et en faisant varier seulement la valeur de c .

Les Figure 54 et Figure 55 présentent respectivement la répartition de la porosité et de la déformation plastique cumulée. On observe que le paramètre c peut effectivement contrôler la largeur de la bande de la déformation ainsi que celle de la porosité.

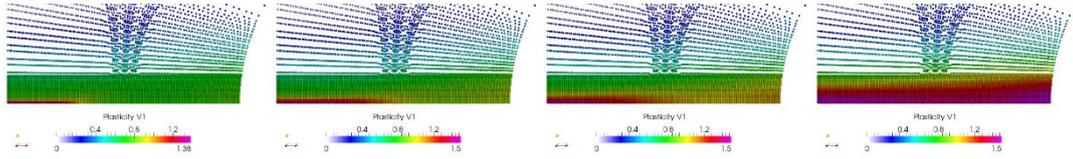


Figure 54 : Distribution de la variable d'écroutissage, de gauche à droite : $c=1$, $c=10$, $c=25$, $c=100$

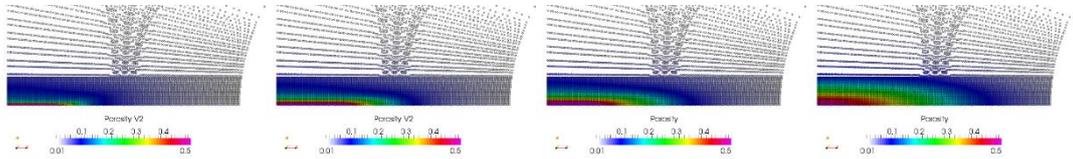


Figure 55 : Distribution de la porosité, de gauche à droite : $c=1$, $c=10$, $c=25$, $c=100$

La valeur de c sera choisie pour que la bande de localisation corresponde à la longueur caractéristique du matériau, par exemple la distance moyenne entre deux cavités voisines. Cependant la relation entre la valeur de c et la bande de localisation n'est pas immédiate.

Pour obtenir une telle relation, on part d'abord de la loi de comportement non-locale pour avoir une estimation préliminaire.

On note $l_d^2 = c/\sigma_0$, et $\underline{x}_d = \underline{x}/l_d$. L'équation (4-5) peut être réécrite sous une forme adimensionnelle :

$$\nabla_{\underline{x}_d}^2 p + \frac{N(\mathbf{T})}{\sigma_0} + \frac{A(p)}{\sigma_0} - 1 = 0 \quad (4-60)$$

Comme p , $N(\mathbf{T})/\sigma_0$ et $A(p)/\sigma_0$ sont tous d'ordre $O(1)$, on peut raisonnablement penser que la largeur de la bande de localisation l_b est d'ordre l_d . C'est-à-dire :

$$l_b = O(l_d) = O\left(\sqrt{\frac{c}{\sigma_0}}\right) \quad (4-61)$$

En vue d'avoir une estimation quantitative de la largeur de la bande, des essais de simulation

ont été fait sur l'éprouvette AE en faisant varier c et σ_0 . On trace le profil de la déformation plastique cumulée (normalisée par sa valeur maximale) sur la colonne de points Gauss au centre de l'AE, voir Figure 56. Dans cette figure, la colonne étudiée est encadrée par un rectangle rouge. L'abscisse des courbes est la coordonnée Y des points de Gauss dans la configuration initiale. L'ordonnée est la déformation plastique cumulée normalisée entre $(0,85 p_{max}, p_{max})$, intervalle d'intérêt où le gradient de déformation est le plus important. On peut observer que la zone influencée par la diffusion s'élargit avec c et diminue avec σ_0 .

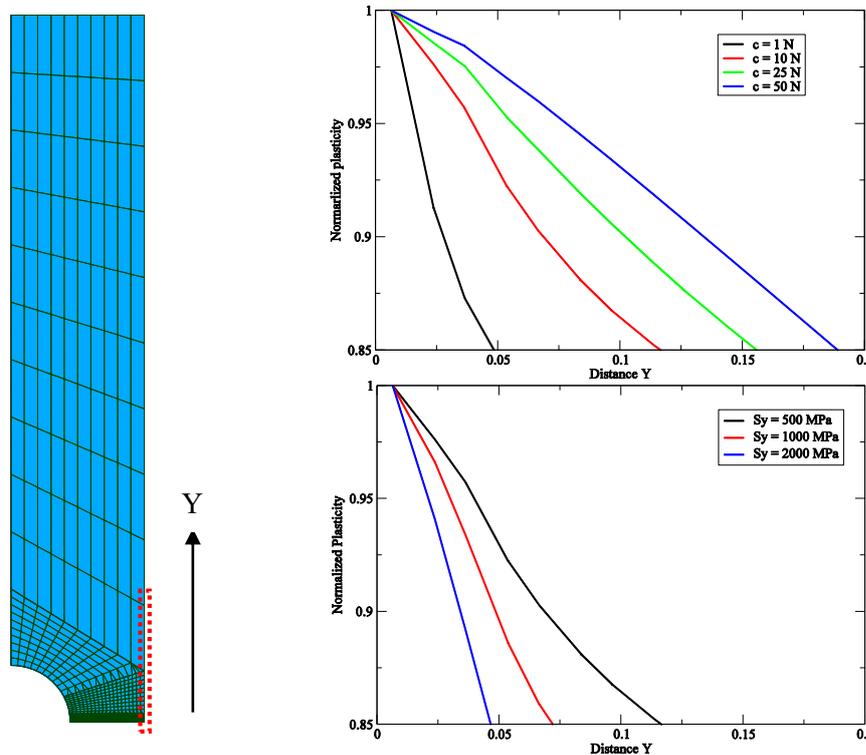


Figure 56 : Profil de la déformation plastique cumulée (normalisée par sa valeur maximale). En haut : avec différents c , en bas : avec différents σ_0

Puis les profils de la porosité sont également tracés dans la Figure 58. Si on définit la largeur de la bande de localisation par la distance entre la iso-ligne de $f = f_r = (1/q_1 - f_c)/\delta + f_c \approx 0,36$ et celle de $f = 2f_c = 0,1$, voir la Figure 57, on trouve la différente largeur de bande avec chaque valeur de c , voir la Figure 59.

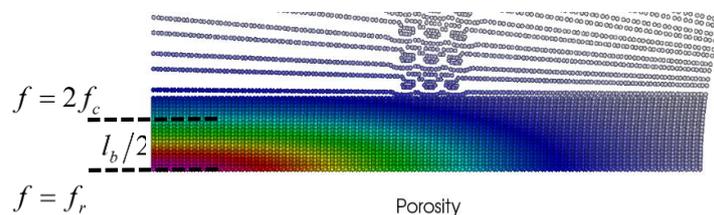


Figure 57 : Définition de la largeur d'une bande

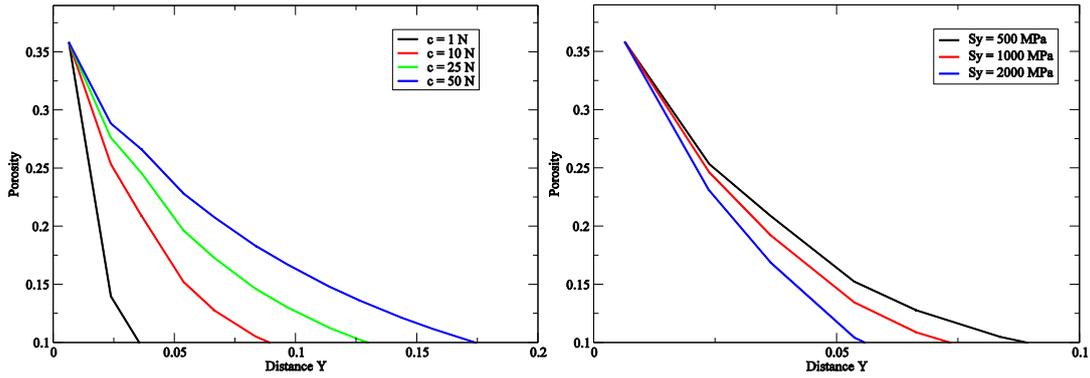


Figure 58 : Profil de la porosité. A gauche : avec différents c , à droite : avec différents σ_0

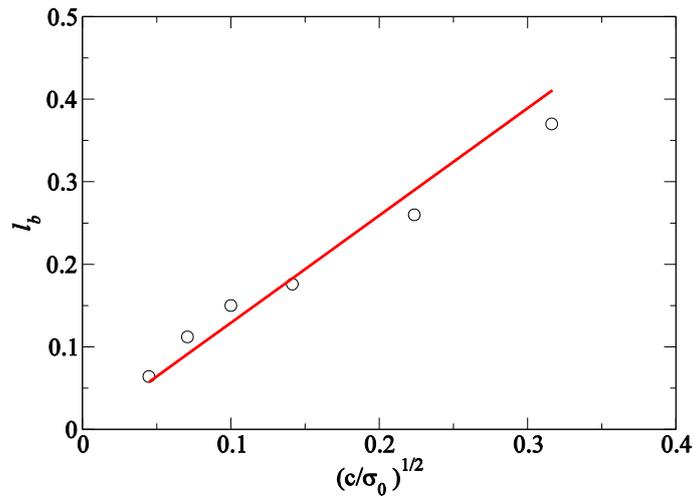


Figure 59 : Largeur de bande en fonction de c et de $\sqrt{c/\sigma_0}$

On voit que la largeur de bande est presque proportionnelle à $\sqrt{c/\sigma_0}$, correspondant à l'estimation de (4-61). D'après Figure 58, on se donne une formule empirique pour estimer la largeur de bande :

$$l_b \approx \frac{3}{2} \sqrt{\frac{c}{\sigma_0}} \quad (4-62)$$

Il faut savoir que la relation (4-62) n'est qu'une approximation grossière. Mais une fois la longueur intrinsèque du matériau est connue, elle permet d'estimer la valeur de c ou au moins son ordre lors de l'identification des paramètres.

4.3.6 Paramètre de pénalisation

La méthode décomposition-coordination définit la variable d'écroutissage à la fois aux nœuds et aux points Gauss, notés a et p respectivement dans ce travail. Une fois les équations du système résolues, on souhaite que la variable d'écroutissage au point Gauss p soit suffisamment proche de celle obtenue via l'interpolation nodale a . Pour ce faire, la contrainte d'égalité entre ces deux variables est d'abord imposée de manière faible par le terme $\lambda(a-p)$ dans le Lagrangien. L'équation (4-11)₃ ou (4-31)₅ assure $(a-p) \in O^\lambda$, où O^λ est l'espace orthogonal de l'espace de λ . Comme λ est interpolé linéairement, O^λ est suffisamment riche pour que plusieurs solutions existent pour p à a donné. En vue de renforcer le lien entre ces deux

variables, on ajoute dans le Lagrangien le terme de pénalisation $r(a - p)^2/2$ qui force p à être le plus proche possible de a . La valeur de r ne peut pas être très petite car sinon le terme de pénalisation n'a plus d'effet. Par exemple, dans la simulation de l'éprouvette AE (Problème 3), on a remarqué de légères oscillations au point Gauss sur champs de p si la valeur de r n'est pas suffisamment grande, cf. Figure 60.

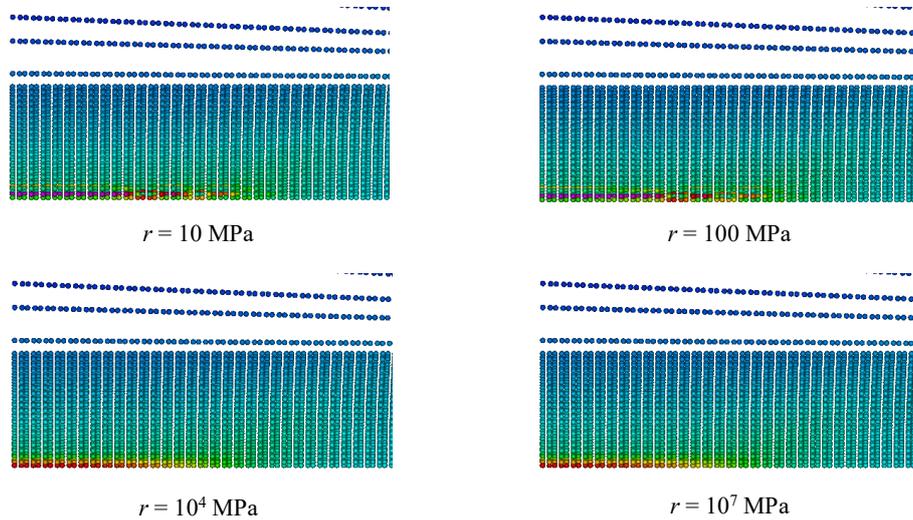


Figure 60 : Simulation de l'éprouvette AE avec différentes valeurs de r

Théoriquement, si la valeur de r est suffisamment grande, le terme de pénalisation n'influence pas la solution des équations à maillage suffisamment fin, cf. Figure 60. Cependant, à cause de la forte non-linéarité du problème, une très grande valeur de r posera généralement des problèmes de convergence du calcul. Par conséquent, on conseille de choisir r dans la plage $[10\sigma_0, E]$ où σ_0 est la limite d'élasticité et E la module d'Young. Dans cet intervalle, le terme de pénalisation est estimé du même ordre de grandeur que les autres termes énergétiques dans le Lagrangien (4-7).

4.3.7 Etudes sur le temps de calcul

Ayant cinq variables aux nœuds sommets, le modèle non-local combiné avec l'élément mixte semble très couteux en temps de calcul. Dans ce paragraphe, on se basera sur la simulation de l'éprouvette AE pour comparer la performance des trois modélisations : modèle local avec élément sous-intégré (L_S), modèle non-local avec l'élément sous-intégré (NL_S), modèle non-locale avec l'élément mixte (NL_M). Pour rappel, leurs schémas sont présentés dans la Figure 61.

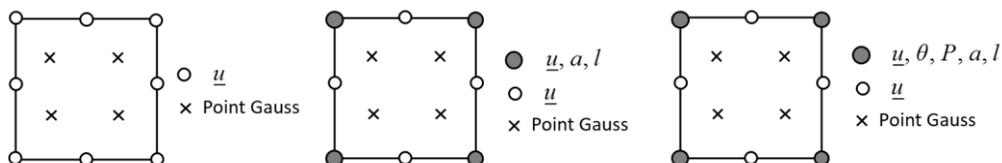


Figure 61 : Les éléments de différentes modélisations, de gauche à droite : L_S, NL_S, NL_M

On se réfère au Problème 3 pour la géométrie de l'AE et ses paramètres matériau (la porosité est légèrement différente ici, $f_0 = 1 \times 10^{-4}$). Les simulations ont été réalisées sur le maillage quadrangulaire de la Figure 56, mais avec trois tailles de maille différentes dans la zone d'intérêt : 60 μm , 120 μm , 300 μm . Le déplacement final en haut de l'éprouvette est imposé à

1,6 mm, la montée en charge est discrétisée en 800 incréments. On rassemble dans le Tableau 6 le temps de calcul consommé en utilisant les trois modélisations. Tous les calculs ont été effectués avec un seul processeur cadencé à 2,5 GHz.

Tableau 6 Coût en temps de calcul (éprouvette AE) en fonction de la modélisation et du maillage.

Maillage Modélisation	300 μm (624 mailles, 1535 nœuds)	120 μm (960 mailles, 2431 nœuds)	60 μm (1170 mailles, 3041 nœuds)
L_S	334s	597s	830s
NL_S	653s	808s	1478s
NL_M	1035s	1570s	2238s

Il est constaté que la proportion du temps de calcul entre ces trois modélisations est approximativement 1 :2 :3. La différence entre la modélisation à cinq champs et la modélisation locale avec élément sous-intégré reste raisonnable (3 fois plus longue). En outre, cette différence, venant principalement du calcul des résidus (dimension DDL) et de la matrice tangente (dimension DDL*DDL) pourrait être d'autant plus petite dans une simulation de 3D en raison d'une différence moins élevée du degré de liberté, cf. Tableau 7.

Tableau 7 : Nombre de degré de liberté en fonction de la modélisation et de l'élément

Élément Modélisation	Triangle (2D)	Quadrangle (2D)	Tétraèdre (3D) ¹	Hexaèdre (3D)
L_S	4	6	4,6	12
NL_S	5	8	5,05	14
NL_M	6	10	5,5	16

4.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, le résultat principal concerne la formulation non locale de la loi GTN, un travail central de cette thèse. En introduisant une régularisation via le gradient de la déformation plastique cumulée, on définit une nouvelle expression de la force thermodynamique associée à l'érouissage. La régularisation a été mise en œuvre pour la loi von Mises à titre d'illustration, puis appliquée à la loi GTN. Afin de faciliter le traitement numérique de la non-localité, on a employé la méthode dite de 'décomposition-coordination'. L'algorithme d'intégration de la loi GTN non-locale est très similaire à celui de la loi GTN locale, abordé dans le paragraphe 2.4.4. Toutefois, un nouveau cas de figure peut apparaître pour lequel $N(\mathbf{T}) = 0$: son traitement a été explicite. Puis on a développé l'implémentation élémentaire avec l'élément standard et l'élément mixte, en détaillant les forces intérieures et les matrices tangentes locales à l'élément (i.e. préalables à l'étape d'assemblage). Le Tableau 5 résume l'ensemble de l'algorithme.

En outre, on a étudié le rôle du paramètre non-local c et du paramètre de pénalisation r . Le premier permet de contrôler la bande de localisation dont la largeur a été estimée par $l_b = 3/2\sqrt{c/\sigma_0}$. La valeur de r n'influence pas le résultat des simulations si elle est suffisamment grande. On recommande de la choisir dans l'intervalle $[10\sigma_0, E]$. Enfin, à l'aide

¹ Le nombre de degré de liberté par élément tétraèdre est estimé par un maillage suffisamment fin d'un cube.

de simulations sur éprouvette AE, on a réalisé une comparaison du coût en temps écoulé des différentes modélisations, conduisant à une conclusion quantitative : la proportion du temps de calcul entre la modélisation locale, la modélisation non-locale, et la modélisation non-locale avec l'élément mixte est dans un rapport 1 :2 :3. Le coût de cette dernière modélisation nous semble raisonnable dans la mesure où elle répond aux deux problèmes majeurs de la simulation de l'endommagement ductile, à savoir le verrouillage volumique et la dépendance aux maillages. Dans le chapitre suivant, cette modélisation à cinq champs sera appliquée pour simuler différentes configurations expérimentales.

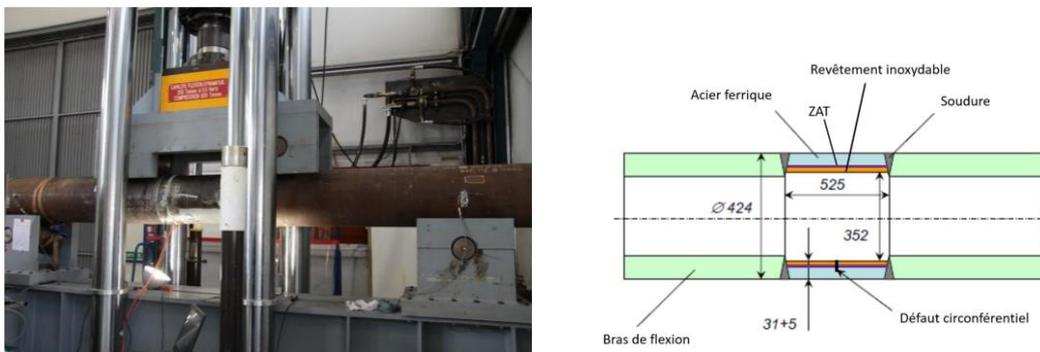
Troisième partie – Validation physique et numérique

Chapitre 5 – Validation sur éprouvette

Dans le cadre du projet européen STYLE (2010-2013) sur la transférabilité des propriétés mesurées sur éprouvettes aux composants industriels, un essai de flexion 4 points sur structure fissurée en acier de type 20 MnMoNi 5-5 a été réalisé sur la presse de 5000 kN du Département MMC. La structure étudiée est une tuyauterie revêtue représentative de la ligne d'expansion d'un pressuriseur des réacteurs PWR allemands, voir la Figure 62. Le dépôt du revêtement en paroi interne de la tuyauterie, engendre une zone affectée thermiquement (ZAT) de quelques millimètres où le comportement du matériau pourrait être considérablement modifié.

La distance entre les appuis supérieurs est de 1400 mm et de 4000 mm pour appuis les inférieurs. La maquette fournie ne possédant pas des dimensions suffisantes (525 mm de longueur), des bras de flexion ont donc été soudés au tronçon central (Figure 62).

Cet essai, réalisé à température ambiante, a notamment conduit à l'amorçage et à la propagation significative (radiale puis circonférentielle) par déchirure ductile d'un défaut débouchant en peau interne.



% masse	C	S	P	Si	Mn	Cr	Ni	Mo	V	Cu	Al
Spéc.	≥ 0,17 ≤ 0,23	≤ 0,008	≤ 0,012	≥ 0,15 ≤ 0,30	≥ 1,20 ≤ 1,50	≤ 0,20	≥ 0,50 ≤ 0,80	≥ 0,40 ≤ 0,55	≤ 0,02	≤ 0,12	≥ 0,010 ≤ 0,040
Areva	0,20	0,004	0,009	0,26	1,38	0,02	0,78	0,48	≤ 0,01	0,07	0,016
MU-3	0,19	0,003	0,006	0,26	1,63	0,10	0,93	0,51	/	0,13	0,020

Figure 62 : Essai de flexion sur une tuyauterie dans le cadre du projet STYLE et la composition du métal de base mesurée par Areva et EDF

Dans le cadre du projet EDF R&D ANODE 60, il a été décidé de modéliser numériquement cet essai de déchirure ductile. L'étude numérique s'appuiera sur les résultats expérimentaux obtenus dans le cadre du projet STYLE. De plus, des essais complémentaires sur éprouvettes sont nécessaires afin d'identifier les paramètres de la loi de comportement employée (GTN). Les éprouvettes utilisées dans cette étude sont prélevées sur la tuyauterie, cf. Figure 63. Dans ce chapitre, trois types d'éprouvettes seront étudiés en vue de déterminer les paramètres du

modèle. Ce sont des AE (épreuve axisymétrique entaillée, NT en anglais), des CT (épreuve compacte) et des SENT (Epreuve fissurée en tension). La section 5.1 présentera les géométries de ces trois types d'éprouvettes. Ensuite, on examinera les faciès de rupture des éprouvettes dans la section 5.2. Dans la section 5.3, on effectuera des études paramétriques en s'appuyant sur des simulations de l'éprouvette AE. Puis à partir des résultats expérimentaux des trois types d'éprouvettes, l'identification de paramètres sera réalisée dans la section 5.4, où les différentes étapes de l'identification seront également détaillées. A la fin, on portera notre attention sur quelques observations dans la simulation qui ouvrent des pistes pour le futur.

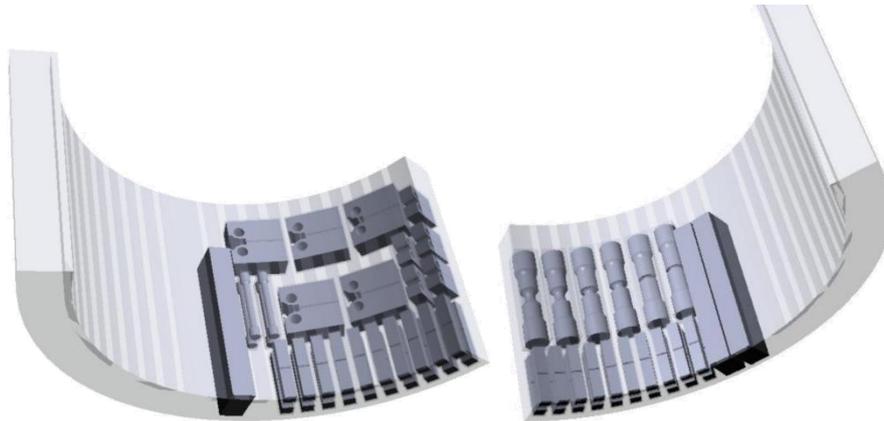


Figure 63 : Plan de prélèvement et localisation des éprouvettes dans la tuyauterie

5.1 Eprouvettes disponibles et démarches expérimentales

5.1.1 Eprouvette axisymétrique entaillée (AE)

Trois types d'éprouvettes AE, notés AE2, AE4, AE10 selon la taille de l'entaille, sont étudiés dans le cadre du projet. Leurs paramètres géométriques sont donnés dans la Figure A 1 de l'annexe A5.

Les essais sur éprouvettes AE2, AE4 et AE10 ont été effectués à température ambiante sur 6 éprouvettes prélevées dans le sens axial et présentant 3 taux de triaxialité des contraintes différents. Pour l'ensemble des essais, le pilotage a été réalisé en contraction diamétrale à raison de 6 $\mu\text{m/s}$. Les grandeurs observées lors des essais sont la force et la contraction diamétrale. La contraction diamétrale est mesurée pour tous les essais à l'aide d'un extensomètre diamétral qui sert aussi au pilotage de la machine. Cette grandeur est aussi mesurée de manière optique avec un extensomètre vidéo ou de la stéréo corrélation.

5.1.2 Eprouvette compacte (CT)

La géométrie de l'éprouvette CT est présentée dans la Figure A 2 de l'annexe A5.

Les essais de ténacité sur éprouvettes CT avec entailles latérales sont réalisés à température ambiante sur 2 tailles d'éprouvettes différentes (CT12.5 et CT20). Les éprouvettes CT sont prélevées dans le sens axial avec une propagation dans le sens circonférentiel. Les éprouvettes CT12.5 sont, elles aussi, prélevées dans le sens axial mais avec une propagation radiale. Ces essais de ténacité sont effectués avec la méthode des déchargements partiels. Cette méthode permet d'obtenir une estimation de la propagation de la déchirure ductile de l'éprouvette au cours de l'essai. En effet, les décharges partielles de la force permettent de calculer l'évolution de la complaisance élastique et d'arriver à une estimation de l'avancée de fissure. De plus, ces

essais sont aussi interrompus, c'est-à-dire qu'on ne va pas jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Cet aspect est très important et permet d'avoir une avancée de fissure mesurée et non calculée. Cette mesure est possible avec l'observation du faciès après la rupture finale de l'éprouvette dans le domaine fragile. Afin de distinguer plus aisément les différentes zones du faciès, un marquage thermique est effectué avant de plonger l'éprouvette dans l'azote liquide pour la rompre dans le domaine fragile. A l'aide de plusieurs éprouvettes, et en visant différentes propagations, il est possible d'obtenir une ténacité pour différentes avancées de fissure.

5.1.3 Eprouvette de traction (SENT)

La Figure A 3 de l'annexe A5 présente la géométrie de l'éprouvette de SENT.

Les essais de ténacité sur SENT avec entailles latérales sont réalisés sur deux tailles d'éprouvettes (SENT30 et SENT20). Comme pour les CT, les SENT sont aussi prélevées dans le sens axial de la tuyauterie avec une propagation dans le sens circonférentiel. Les éprouvettes sont sollicitées afin de provoquer une déchirure ductile mais elles possèdent un état de contrainte plus proche de l'essai sur la maquette MU-3. En effet, l'éprouvette SENT est assez représentative de la paroi subissant la traction lors d'un essai de flexion sur tube présentant une fissure circonférentielle en peau.

La largeur des éprouvettes SENT est de 30 mm et l'épaisseur du tube sans le revêtement étant de 31 mm, les éprouvettes ont donc été prélevées dans une zone où la ZAT (issue du revêtement) est présente. A la suite des deux premiers essais de ténacité, il a été constaté que le front de fissure par déchirure ductile n'était pas symétrique et possédait une avancée nettement plus prononcée du côté de la ZAT. Il a été décidé d'enlever la ZAT de l'éprouvette SENT restante en passant la largeur de 30 mm à 20 mm.

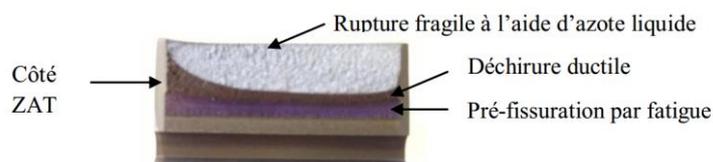


Figure 64 : Influence de la ZAT sur le faciès de rupture d'une SENT [ROIRAND et al., 2014]

5.2 Observations fractographique

Cette section fait état des observations fractographiques des faciès de rupture des différentes éprouvettes rompues afin d'observer leurs modes de rupture. Toutes les images présentées ci-dessous ont été obtenues à l'occasion du stage de Quentin Roirand [MOINEREAU et al., 2014; ROIRAND et al.], qui consistait à analyser la déchirure ductile d'une maquette de tuyauterie au sein du projet STYLE (voir la Figure 62).

5.2.1 Faciès des éprouvettes AE

Dans tous ces essais réalisés sur les AE de différentes entailles, la fissuration a toujours démarré au centre des éprouvettes. Une déviation de la fissure a été observée lors de sa propagation, appelée souvent 'cup cone' du fait de la forme du profil de la fissure. On montre les faciès des éprouvettes AE2, AE4 et AE10 dans la Figure 65. Toutes les observations confirment un endommagement ductile des éprouvettes, parfaitement mis en évidence par la présence de cavités caractéristiques. On peut observer la coalescence des cavités dans les images microscopique à fort grossissement. Par ailleurs, on constate que la taille des cavités à la coalescence est de l'ordre de quelques dizaines de microns. L'examen des éprouvettes

axisymétriques entaillées AE2, AE4 et AE10 ne montre pas d'effet visible de la triaxialité sur les faciès de rupture. Les faciès des éprouvettes sont très similaires malgré les différentes tailles d'entaille. Ceux-ci présentent de grosses cavités (entre 10 et 30 μm) séparées par de très fines cupules ($< 1 \mu\text{m}$). Le modèle GTN employé par la suite suppose que la rupture est entièrement contrôlée par la germination, croissance et coalescence des grosses cavités.

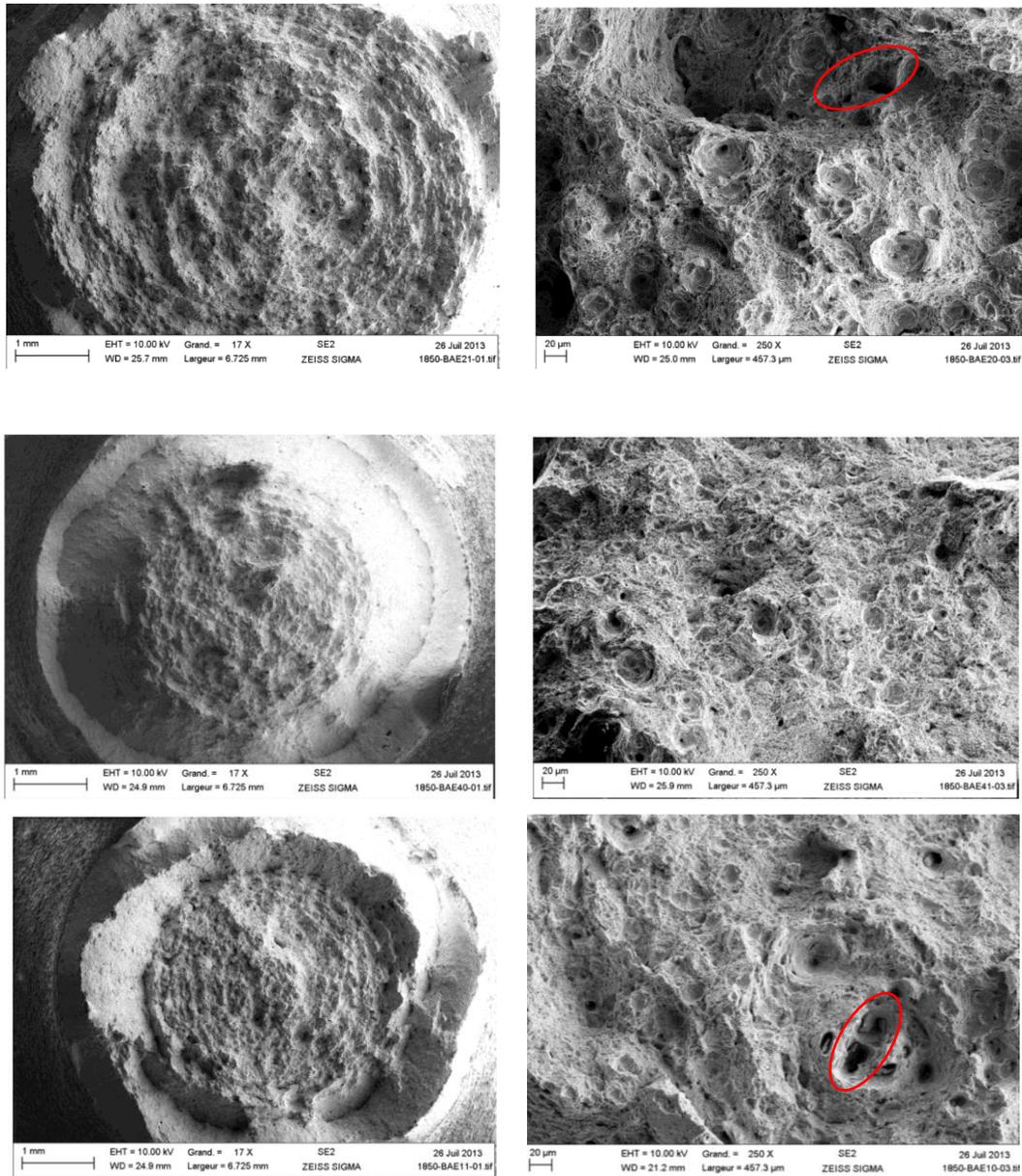


Figure 65 : Faciès des éprouvettes AE2 (en haut), AE4 (au milieu), AE10 (en bas) à l'échelle 1 mm et 20 μm

5.2.2 Faciès des éprouvettes CT et SENT

L'examen des éprouvettes CT et SENT dans la Figure 66 confirme aussi le caractère ductile du matériau, avec la présence de cavités de plusieurs dizaines de microns, du même ordre que celle des cavités observées sur les faciès des AE. Les différentes triaxialités entre éprouvettes CT et éprouvettes SENT ne sont pas perceptibles car aucune différence significative n'est à noter entre les faciès de rupture des éprouvettes CT et SENT.

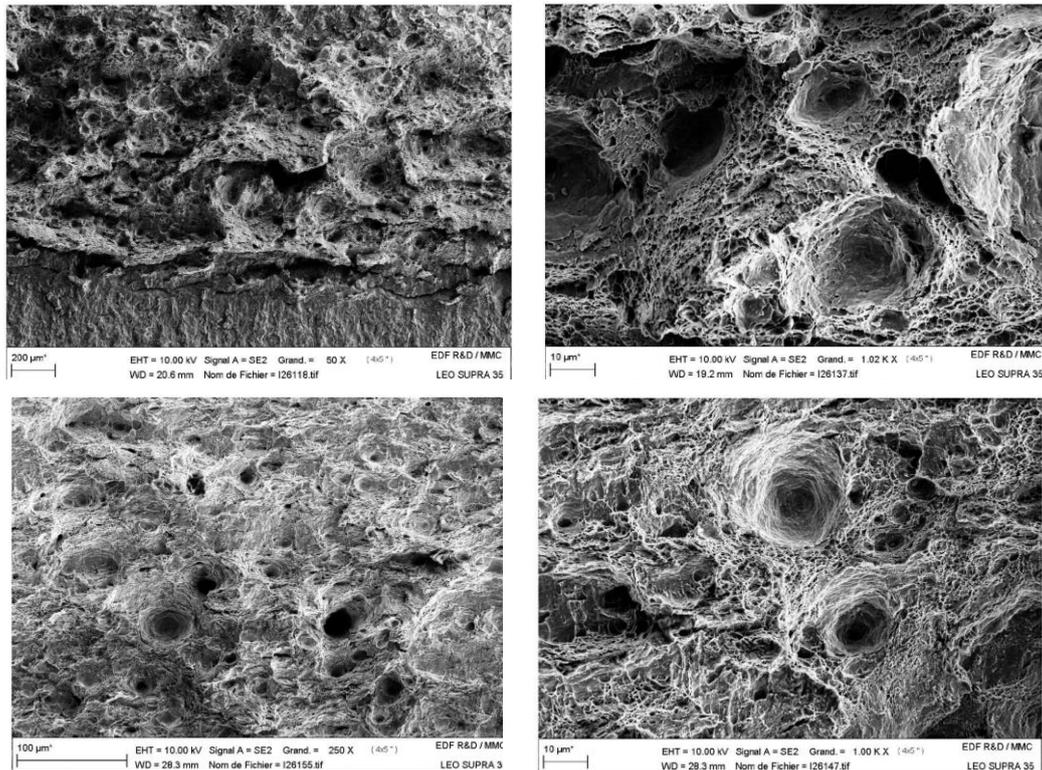


Figure 66 : Faciès des éprouvettes CT (en haut), et SENT (en bas) à l'échelle 100 μm et 10 μm

5.3 Etudes paramétriques

Cette section consiste à étudier et analyser le rôle des différents paramètres du modèle GTN non-local sur la base de simulations d'éprouvettes AE (géométrie définie dans l'annexe A5). À chaque étude, on ne fait varier qu'un seul paramètre. En l'absence d'indications contraires, les paramètres prennent les valeurs suivantes par défaut :

$$E = 190000 \text{ MPa}; \nu = 0,3; R(p) = 488 + 57 \times (1 - e^{-8613p}) + 239 \times (1 - e^{-10p}) \text{ MPa}$$

$$f_0 = 2 \times 10^{-4}; f_c = 5 \times 10^{-2};$$

$$f_N = 0;$$

$$q_1 = 1,5; q_2 = 1; \delta = 1; c = 1 \text{ N}; r = 5000 \text{ MPa}$$

5.3.1 Rôles de q_1 et q_2

Les paramètres étudiés dans ce paragraphe sont q_1 et q_2 , dont l'effet est illustré dans les courbes de la Figure 67. On peut voir que les valeurs de q_1 et q_2 ont notamment une influence sur le moment où la fissure s'amorce : plus les valeurs de q_1 ou q_2 sont grandes, plus la fissure apparaît tôt.

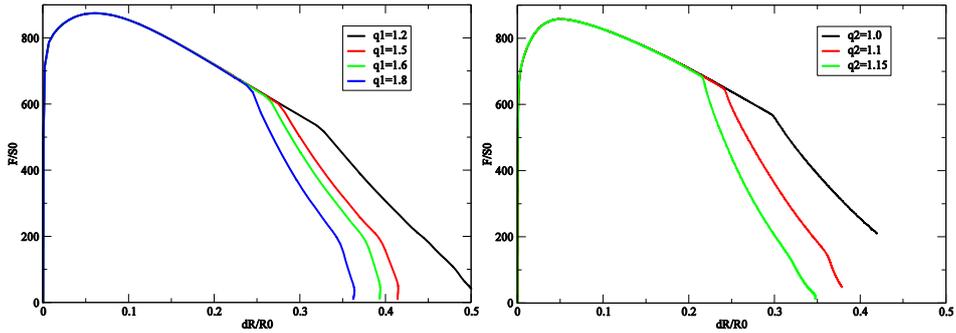


Figure 67 : Force-Réduction du rayon avec différentes valeurs de q_1, q_2

5.3.2 Rôles de δ et c

On fait varier les valeurs de δ et c dans les simulations ; les réponses globales correspondantes sont présentées dans la Figure 68.

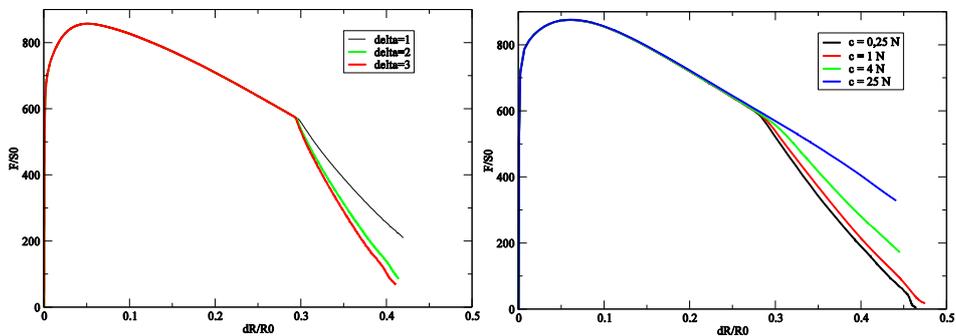


Figure 68 : Force-Réduction du rayon avec différentes valeurs de δ et c

D'après la figure ci-dessus, δ et c déterminent la vitesse de propagation de fissure, ce qui est représenté par la pente de courbe après l'amorçage dans la figure. L'augmentation de δ augmente la propagation de fissure tandis que l'augmentation de c ralentit la propagation.

Remarque

Dans la Figure 68, on a vu que la valeur de δ ne jouait que sur la vitesse de propagation. Ceci est vrai sous certaine valeur f_c , la porosité de coalescence. Si on prend une petite valeur $f_c = 0,001$, δ pourra également avoir une influence sur le point d'amorçage, cf. Figure 69.

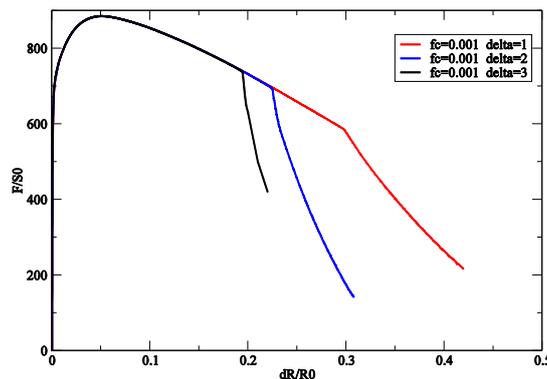


Figure 69 : Force-Réduction du rayon, $f_c = 0,001, \delta = 1, 2, 3$

5.3.3 Rôle du terme de germination

Dans toutes les études effectuées ci-dessus, la germination n'a pas été prise en compte car $f_N = 0$. Ici on s'intéresse à l'effet de du terme de germination. On fixe $f_N = 0,018, s_N = 0,5$. Les

résultats de simulations sont montrés dans la Figure 70.

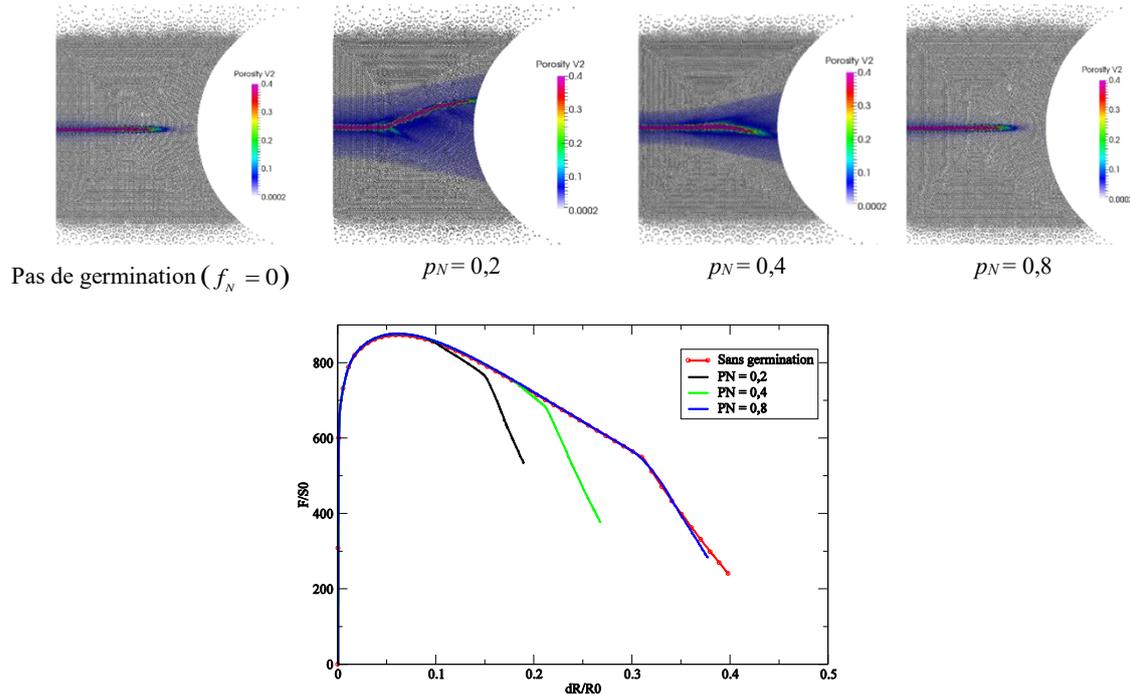


Figure 70 : Profil de fissure dans l'éprouvette AE avec différent p_N

Une première observation intéressante est qu'on ne capture pas les cup-cones sans le terme de germination. Dans la section 5.2, on a constaté que les cup-cones sont souvent observés dans les essais de traction sur les éprouvettes AE. Ce changement de direction de fissure est lié à l'augmentation du cisaillement au cours de la propagation de fissure. Le terme de germination dans le modèle GTN renforce le lien entre le cisaillement et la porosité, sinon l'évolution de cette dernière ne dépend que de la dilatation volumique. C'est pour ça qu'il est plus facile de retrouver les cup-cones si le terme de germination est activé. Cependant, le terme de germination ne suffit pas à modéliser l'endommagement dû au cisaillement ; en effet, le modèle GTN est réputé inadapté pour bien représenter le comportement à basse triaxialité. Plusieurs travaux consistent à remédier à cette lacune en faisant intervenir dans la fonction seuil le troisième invariant du tenseur des contraintes (cf. la section 1.6)

Ensuite, la Figure 70 montre que plus la valeur de p_N est petite, plus le cup-cone apparaît tôt. Si p_N devient suffisamment grand, l'incrément de la porosité dû à la germination est négligeable devant celui dû à la croissance des cavités. Le terme de germination n'a quasiment plus d'effet dans la simulation : on n'a plus de cup-cone et la réponse globale coïncide avec celle sans germination.

5.4 Identification des paramètres

5.4.1 Démarches d'identification

Le modèle non-local de GTN introduit onze paramètres (dont deux fonctions) qui pourront être divisés en trois groupes : les paramètres élastoplastiques, les paramètres d'endommagement et le paramètre non local. Ils sont rassemblés dans le Tableau 8.

Tableau 8 : Paramètres du modèle GTN non-local

Paramètres élastoplastiques	E	Module d'Young
	ν	Coefficient de Poisson
	σ_y	Limite de contrainte
	$A(p)$	Écrouissage
Paramètres non-local	c	Paramètre non-local
Paramètres d'endommagement	f_0	Porosité initiale
	q_1, q_2	Paramètres Gurson
	f_c	Porosité de coalescence
	δ	Coefficient d'accélération
	$B_N(p)$	Paramètres de germination

Il faut noter que dans cette étude, au lieu de chercher à retrouver le profil exact de la fissure, on se contente d'identifier ces paramètres en s'appuyant sur les courbes force-déplacement issues des essais expérimentaux.

Les étapes suivantes permettent d'identifier ces paramètres :

E1 : Les paramètres élastoplastiques sont identifiés par les essais de traction sur AE.

On a constaté que le comportement de l'AE avant la rupture est très similaire avec la loi de von Mises et la loi GTN. On choisit ici une loi d'écrouissage sous la forme $A(p) = A_1 \times (1 - e^{-B_1 p}) + A_2 \times (1 - e^{-B_2 p})$. Une méthode inverse est utilisée afin de recalculer la courbe force-déplacement de simulation sur celle des essais.

E2 : Estimer l'ordre de c à l'aide de (4-62).

Cette formule permet de déterminer l'ordre de grandeur de la valeur de c .

E3 : La porosité initiale est déterminée par observation microscopique ou analyse chimique.

Certains auteurs [Cao et al., 2015; Xue et al., 2013] considèrent la porosité comme un paramètre à ajuster avec les simulations numériques.

[Lassance et al., 2007] a analysé les images microscopiques d'un alliage d'aluminium, qui conduisent à $f_0^{alu} = 2 \times 10^{-3}$. Il est bien connu que les inclusions dans les aciers modernes sont plus petites que celles dans les alliages d'aluminium.

Dans cette thèse, on estime la valeur de f_0 à partir de la composition chimique du matériau avec la formule Franklin ([Franklin, 1969]) :

$$f_0 = 0,054(\%S - \frac{0,001}{\%Mn}) \quad (5-1)$$

Pour le matériau étudié, cette formule permet d'obtenir une porosité initiale d'ordre 10^{-4} cohérente avec celle observée au microscope. On fixe $f_0 = 2 \times 10^{-4}$ dans le travail d'identification, une valeur raisonnable pour les aciers modernes. [Besson et al., 2001], [Huespe et al., 2012] et [Linse et al., 2014] ont adopté le même ordre de grandeur pour la porosité initiale.

E4 : Les valeurs de q_1 et f_c sont fixées empiriquement.

Les paragraphes 2.4.8 a montré que q_1 et q_2 ont une influence très similaire. On fixe ici $q_1 = 1,5$, valeur fréquemment utilisée dans les études avec le modèle GTN [Li et al., 2011; Linse et al., 2014].

La porosité de coalescence est fixée à $f_c = 0,05$, une valeur également utilisée dans [Linse et al., 2012] [Huetter et al., 2013]. Les auteurs de [Besson et al., 2001] ont choisi une valeur plus petite (0,005), moins réaliste pour les aciers modernes. Par ailleurs, il est à noter que les calculs de type ‘unit cell’ ([Koplik et Needleman, 1988]) indiquent des porosités à coalescence de quelques pourcents.

E5 : Le terme de germination est désactivé dans ce travail d’identification.

Il a été constaté dans le paragraphe 5.3.3 que le terme de germination pouvait renforcer la dépendance de la porosité au cisaillement et entraîner donc le ‘cup-cone’. Mais pour l’instant, on se contente de recalculer les résultats de simulation avec la courbe force – déplacement des éprouvettes et on ne cherche pas à retrouver le trajet exact de la fissure. De plus, le paramètre p_N influençant le moment de l’amorçage de manière similaire à q_2 (cf. Figure 67 et Figure 70), on choisit de ne recalculer que ce dernier. Par conséquent, le terme de germination n’est pas pris en compte dans le travail d’identification.

E6 : Les autres paramètres d’endommagement, à savoir q_2 et δ , sont recalculés sur la courbe force – déplacement de l’éprouvette AE par la méthode inverse.

On a observé que les paramètres d’endommagement exercent peu d’influence lors de la phase d’écrouissage. Ainsi, en ajustant la valeur de q_2 et δ , on cherche surtout à retrouver le point de fissuration (rupture de pente) et la phase de propagation de fissure.

E7 : Une fois ces paramètres identifiés, on ajuste plus finement les valeurs de c et δ à partir des essais sur éprouvettes CT.

5.4.2 Résultats d’identification

Dans ce paragraphe on présente les résultats de l’identification sur les trois types d’éprouvette présentés dans 5.1. Pour un compromis entre la précision du calcul et le coût en temps, les zones d’intérêt de ces éprouvettes sont discrétisées avec des mailles d’environ 100 μm , ce qui est inférieur à la longueur caractéristique du matériau (souvent quelques centaines de microns). Les éprouvettes CT et SENT sont simulées en 3D en raison de leurs entailles latérales, tandis que les éprouvettes AE sont traitées en 2D à symétrie axiale. Les maillages sont présentés dans l’annexe A5.

En suivant les démarches du paragraphe précédent, l’identification s’effectue à partir de la réponse globale d’une éprouvette AE4 et une éprouvette CT20, cf. Figure 71. Les paramètres plastiques sont d’abord identifiés sur une éprouvette AE4 par la méthode inverse (module ADAO dans Salomé-Méca). On obtient : $R(p) = 488 + 57 \times (1 - e^{-8613p}) + 239 \times (1 - e^{-10p})$.

Puis la valeur de q_2 est ajustée tel que l’on retrouve le point d’amorçage de la fissure ‘A’ sur la figure. On trouve $q_2 = 1,07$.

Enfin, c et δ sont recalculés à partir de la phase de ‘propagation de fissure’ des courbes force-déplacement des AE4 et CT20. Les valeurs obtenues sont : $\delta = 3$, $c = 1 \text{ N}$.

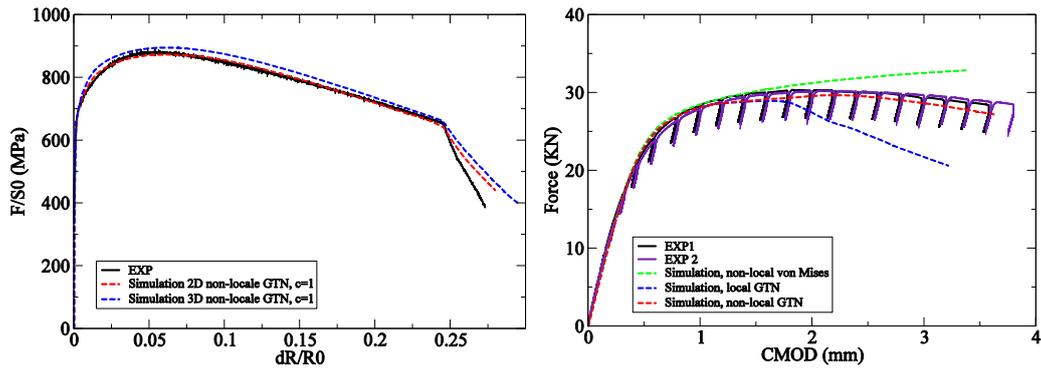


Figure 71 : Résultat d'identification des paramètres sur l'AE4 et la CT20

5.4.3 Prédiction sur les éprouvettes

Les paramètres identifiés sont utilisés afin de simuler les éprouvettes AE2, AE10, CT12.5, SENT20 et SENT30. Les comparaisons simulation-expériences de la courbe force – déplacement sont présentées dans les Figure 72, Figure 73 et Figure 74. On trouve une bonne cohérence dans toutes les comparaisons. Le modèle prédit correctement le point de l'amorçage de fissure sur l'éprouvette AE2 et AE10. En ce qui concerne l'éprouvette de ténacité comme CT12.5, SENT 20 et SENT 30, on n'a pas pu obtenir, dans la simulation, des fissures aussi longues que les essais à cause des éléments trop déformés dans la zone fissurée. Mais dans l'intervalle de chargement simulé, le modèle retrouve bien la courbe force-ouverture de ces éprouvettes. Ces résultats de simulations montrent la transférabilité des paramètres du modèle entre ces éprouvettes.

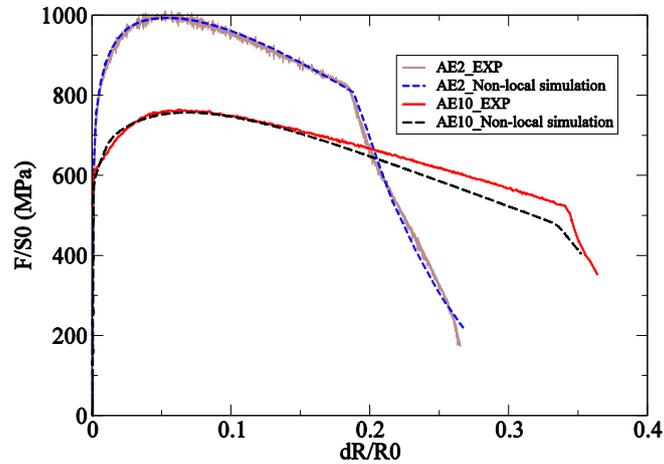


Figure 72 : Comparaison entre la simulation et l'expérience : AE2 et AE10.

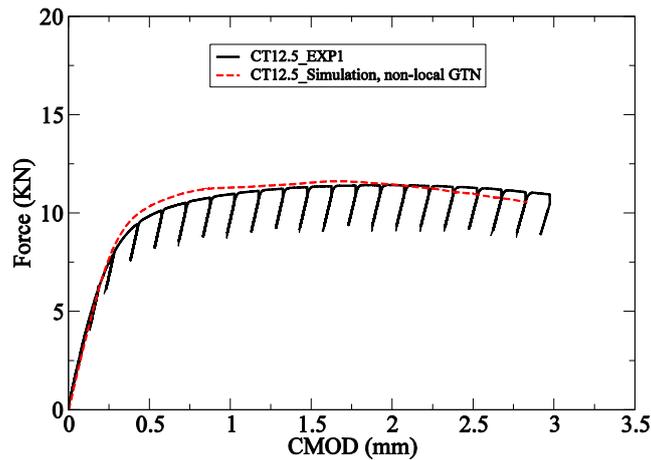


Figure 73 : Comparaison entre la simulation et l'expérience : CT12.5

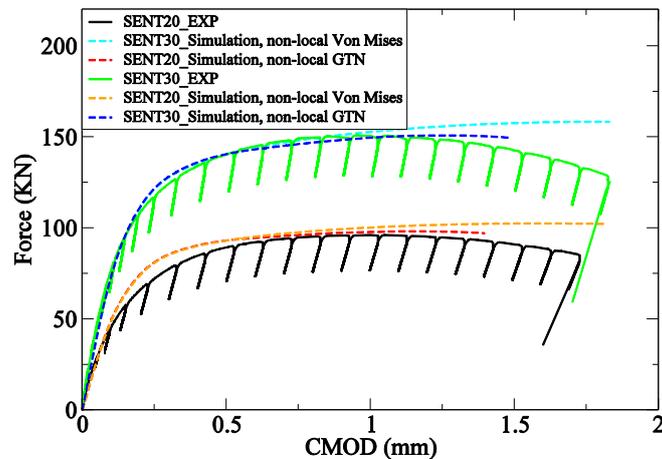


Figure 74 : Comparaison entre la simulation et l'expérience : SENT20 et SENT30

Par ailleurs, on a également tracé la relation entre la longueur de la propagation de fissure Δa et l'ouverture pour les simulations et les essais sur les éprouvettes CT et SENT. Dans la simulation, la longueur de fissure est représentée soit par les points dont la porosité est supérieure à $2f_c$ à savoir 0,1, soit par les points qui sont complètement cassés, c'est-à-dire $f = f_r$. On constate que le modèle prédit correctement la propagation de fissure des éprouvettes CT et SENT20. Ainsi, la courbe $J - \Delta a$ issue de la simulation, bien qu'elle ne soit pas calculée ici, devrait aussi être conforme à celle de l'expérience sur ces éprouvettes. Quant à l'éprouvette SENT30, la simulation sous-estime la propagation de fissure par rapport à l'essai, cf. Figure 76. Ceci pourrait s'expliquer par la non prise en compte dans la simulation des propriétés de la zone affectée thermiquement (ZAT), dans laquelle la fissure se propage plus rapidement que dans le métal de base comme illustré dans la Figure 64.

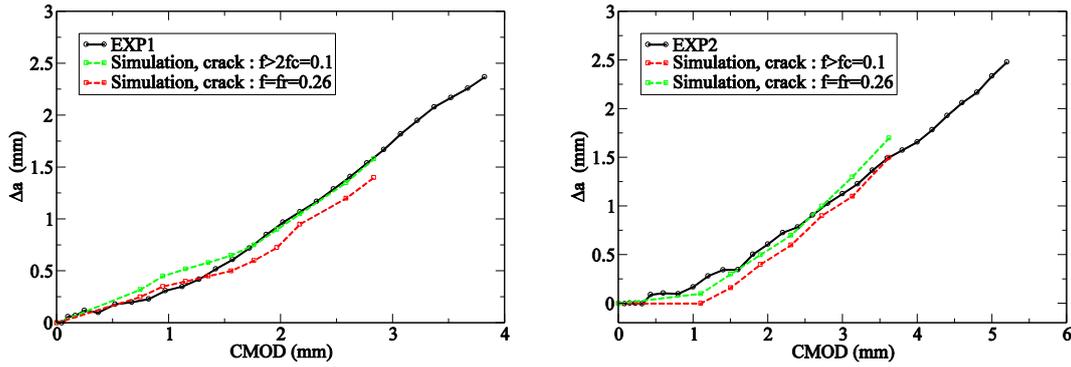


Figure 75: Comparaison de la propagation de la fissure entre la simulation et l'expérience : CT12.5 et CT20

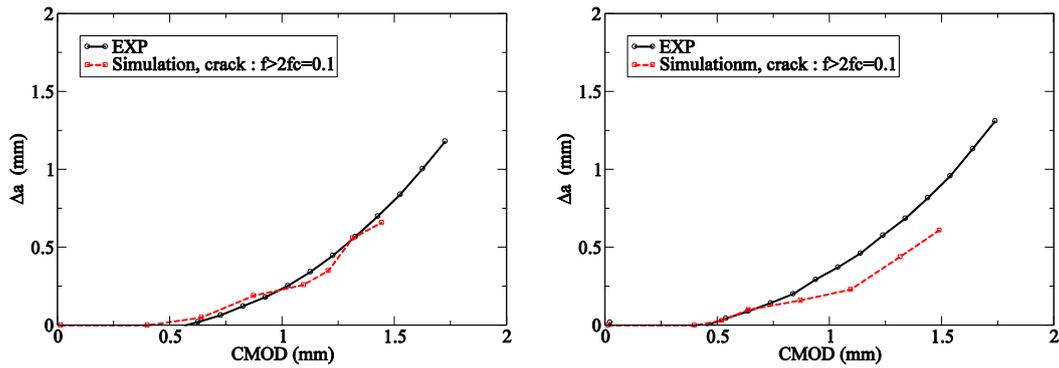
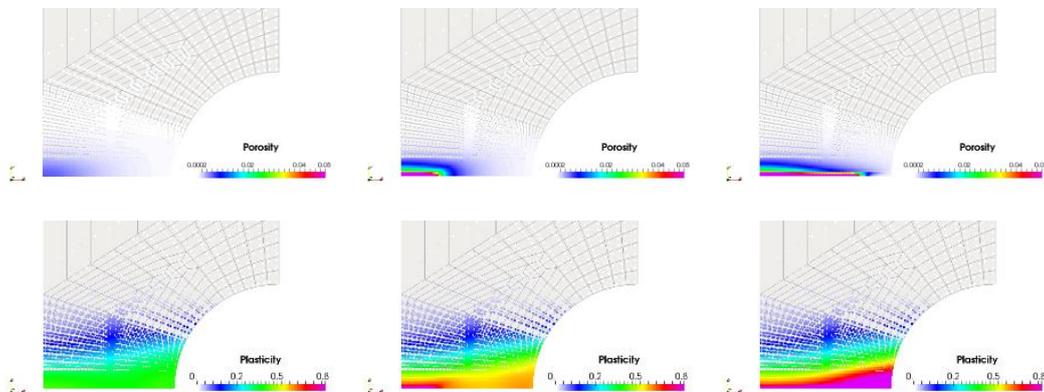


Figure 76 : Comparaison de la propagation de la fissure entre la simulation et l'expérience : SENT20 et SENT30

5.5 Retour d'expérience numérique

5.5.1 Observation des champs

On examine ici les champs de la déformation plastique cumulée, de la porosité et des contraintes dans l'éprouvette présentées ci-dessus. Les champs sur l'éprouvette AE4 par une modélisation 2D sont présentés dans la Figure 78. De nombreuses images issues des résultats de simulation en 2D et 3D de toutes les éprouvettes (AE, CT, SENT) se trouvent dans l'Annexe A5. Les champs sont affichés aux points de Gauss (sans lissage ni autres post-traitements).



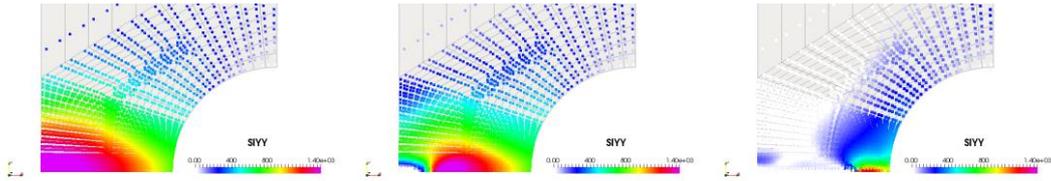


Figure 77 : Champs de la porosité, de la déformation plastique cumulée et de la contrainte de traction sur l'éprouvette AE4 en 2D. De gauche à droite, le déplacement imposé en haut de l'éprouvette : 0,8 mm, 1,02 mm, 1,4 mm

Dans les éprouvettes AE, l'amorçage de la fissure a toujours lieu au centre, en cohérence avec l'observation expérimentale. En outre, comme déjà montré par la courbe force – déplacement dans la Figure 71, les simulations en 2D à symétrie axiale et en 3D sur l'éprouvette AE4 sont très proches.

5.5.2 Apparition du verrouillage

Pour mesurer la nécessité ou non d'utiliser la modélisation à cinq champs, on simule aussi les éprouvettes avec la modélisation non locale se basant sur l'élément standard. On observe que le verrouillage volumique n'apparaît pas dans toute des simulations.

Même en l'absence d'éléments mixtes, l'éprouvette AE ne présente pas de verrouillage. On pourra donc simuler ces éprouvettes avec les éléments standards pour économiser du temps calcul. En revanche, pour l'éprouvette CT, on retrouve le verrouillage qui se traduit par des oscillations des contraintes, cf. Figure 78. En effet, après émoussement de la pointe de fissure par déformation plastique, l'entaille de l'éprouvette devient très courbée et la configuration s'apparente par conséquent à de la flexion pour laquelle se manifeste très souvent le verrouillage. Quant à l'AE, comme la déformation se concentre plutôt au milieu de l'éprouvette où il n'y pas de courbure, la performance des éléments quadratiques en déplacement est suffisamment bonne pour limiter le verrouillage.

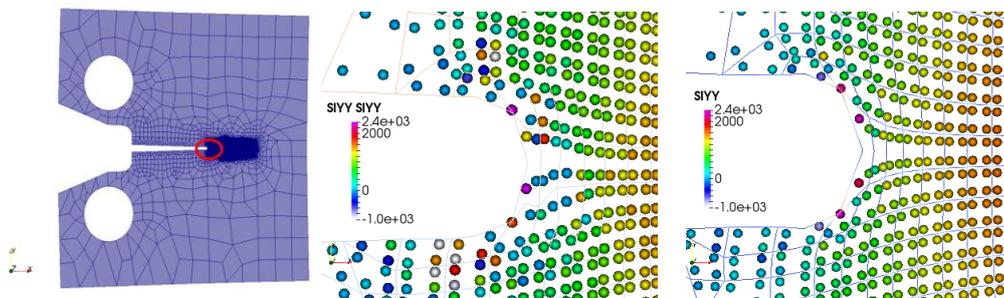


Figure 78 : Champs des contraintes au voisinage de l'entaille de l'éprouvette CT. Gauche : maillage ; milieu : modèle non-local + élément standard ; droite : modèle non-local + élément mixte

Hütter a constaté dans son travail récent [Hutter et al., 2014] que lors d'une simulation avec une faible porosité initiale, le modèle GTN prédit un amorçage de fissure en des points distincts et relativement espacés, tandis que pour une porosité initiale plus élevée, le modèle conduit à une zone d'endommagement continue.

En ce qui nous concerne, nous imputons cela au verrouillage volumique. En effet, au début de l'évolution de l'endommagement, la loi GTN ressemble d'autant plus à la loi élastoplastique de von Mises, et donc quasi-incompressible, que la porosité initiale est petite. De plus, la faible porosité initiale aboutit à une accumulation importante de déformation à l'entaille, qui devient par conséquent très courbée et favorise le verrouillage. Nous observons d'ailleurs cette distribution d'endommagement discutable dans nos simulations avec l'élément standard. Mais

en utilisant l'élément mixte, le champ de l'endommagement reste continu, y compris pour de faibles porosités initiales.

5.6 Conclusion du chapitre

Le modèle non local avec élément mixte, qui repose sur cinq champs nodaux, a été appliqué avec succès aux simulations des éprouvettes normalisées AE, CT et SENT. Les résultats expérimentaux sont issus des éprouvettes prélevées dans une tuyauterie analysée dans le cadre du projet européen 'STYLE' afin d'étudier les propriétés de l'endommagement ductile, ainsi que la transférabilité du modèle. Les faciès de rupture ont été examinés à l'échelle microscopique. On a trouvés une fractographie similaire pour les différentes éprouvettes : des cavités de taille 10 – 40 μm dispersées dans une matrice de très fines cupules ($\sim 1 \mu\text{m}$). Ensuite, pour préparer l'identification des paramètres du modèle GTN non-local, une étude paramétrique a été réalisée à l'aide de simulations sur éprouvette AE4. Bien que les paramètres du modèle soient nombreux (une dizaine), leur influence sur les résultats de simulation est assez différenciée pour faciliter le travail d'identification. On constate ainsi que q_1 et q_2 influencent le moment où la fissure s'amorce tandis que δ et c influencent la vitesse de propagation dans l'éprouvette. Puis on a proposé une procédure d'identification s'appuyant sur les courbes force – déplacement des éprouvettes AE4 et CT20. En utilisant les valeurs identifiées sur ces deux familles d'éprouvette, on trouve ensuite une bonne cohérence avec les résultats d'essais des autres éprouvettes : AE2, AE10, CT12.5, SENT20 et SENT30. Pour conclure ce chapitre, on a fourni les champs issus des simulations 2D et 3D de chaque éprouvette, à savoir la déformation plastique cumulée, la porosité et la contrainte transversale. On a observé en particulier que les simulations d'éprouvettes AE sont peu sensibles au problème de verrouillage, contrairement aux éprouvettes CT.

Chapitre 6 – Conclusion

6.1 Synthèse des travaux

Cette étude, qui porte sur l'endommagement ductile des matériaux métalliques, a pour objectif de construire une modélisation robuste du phénomène de rupture par la méthode des éléments finis. En raison de l'adoucissement et du niveau de déformation élevé, les principales difficultés pratiques en sont la dépendance au maillage et le verrouillage volumique. En effet, lors de la simulation de la rupture ductile avec des modèles d'endommagement locaux, le résultat dépend pathologiquement de la manière de mailler la structure car ces modèles ne prennent pas en compte les interactions entre les points matériels et conduisent à une localisation pathologique de la déformation et de l'endommagement. Par ailleurs, un autre problème numérique, généralement baptisé verrouillage volumique (volumetric locking), se traduit par de fortes oscillations sur le champ des contraintes lors d'une déformation suffisamment importante ($\geq 10\%$) de la structure. Dans ce travail, ces deux verrous ont été examinés avec attention et des solutions ont été proposées.

Pour asseoir les démarches de modélisation, on a tout d'abord réalisé un travail bibliographique sur les modèles existants pour l'endommagement ductile, synthétisant leurs principes, leurs atouts et leurs limites. La loi de comportement dite Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) a été choisie comme base de cette étude pour sa description raisonnablement fine de la physique et de sa large diffusion internationale. Cette loi, transcrite en grandes déformations, a été implantée dans *Code_Aster* en s'appuyant sur un schéma numérique explicite pour la porosité et implicite pour la plasticité qui permet d'insérer la loi dans la théorie des matériaux standard généralisés. On a détaillé l'algorithme de résolution qui garantit l'existence et l'unicité de la solution à l'échelle du point d'intégration. Par ailleurs, à l'aide des simulations sur un point matériel et sur une éprouvette AE, les résultats obtenus avec l'algorithme présenté ont été confrontés à ceux obtenus avec un autre algorithme dans lequel toutes les équations d'évolution sont discrétisées de manière implicite. Il s'avère que les différences sont mineures si l'incrément de porosité est contrôlé à chaque pas de temps.

En parallèle, on met en évidence la première difficulté majeure dans cette étude, à savoir le verrouillage volumique, par des simulations sur une sphère creuse. On a listé des remèdes variés comme la sous-intégration, l'intégration sélective ou l'usage d'un élément fini mixte. Cette dernière approche, introduisant la pression et le gonflement comme variables nodales supplémentaires, est considérée comme la plus robuste et générique. On a étudié deux types d'éléments mixtes qui se distinguent par leur degré d'interpolation de la pression nodale (P2 ou P1). Ils sont tous deux capables d'éliminer les oscillations des contraintes, mais souffrent chacun d'un autre problème. Le premier élément (P2) exhibe des oscillations inacceptables sur le champ de la pression, tandis que le deuxième (P1) présente une instabilité de la déformation plastique. Ceci s'explique mathématiquement par le non respect des conditions nécessaires à la bonne convergence spatiale de la solution, à savoir la condition LBB et la coercivité. Sans solution totalement satisfaisante pour le verrouillage volumique, on est parti du principe que la formulation non-locale avec laquelle le champ de la déformation plastique serait régularisé permettrait de traiter à la fois la dépendance aux maillages et l'instabilité observée avec l'élément à pression P1.

Après une synthèse de quelques formulations non-locales présentées dans la littérature, on s'est

basé sur une formulation dans laquelle l'énergie est enrichie par le gradient de la déformation plastique cumulée, dont la performance a été prouvée en rupture fragile dans les travaux ([Lorentz et Benallal, 2005] [Lorentz et Godard, 2011]). Toutefois, le couplage d'une loi ductile avec cette formulation non-locale a nécessité quelques ajustements en raison de la complexité de la loi GTN. En pratique, on a employé un Lagrangien augmenté, issu de la méthode numérique dite de 'coordination-décomposition' [Fortin & Glowinski, 1983], afin de confiner la non-linéarité du problème à l'étape d'intégration de la loi de comportement et de gagner en coercivité de la fonctionnelle énergie. Une attention particulière a été portée aux points singuliers du critère de plasticité, où l'évolution de la plasticité n'est due qu'au terme non-local (contrainte effective nulle). Le traitement de ces points singuliers, rarement abordé dans la littérature, respecte également le principe de dissipation maximale.

Par ailleurs, le problème de verrouillage est traité en implantant le modèle non-local dans l'élément mixte (déplacement / pression / gonflement) P2/P1/P1. Ce dernier a en effet limité le verrouillage et, de manière encourageante, l'instabilité observée sur la plasticité. Ce résultat est obtenu même pour un paramètre non-local c nul, pour autant qu'une valeur raisonnable pour le paramètre r est choisie. Par conséquent, la combinaison du modèle non-local à gradient de la déformation plastique cumulée et de l'élément mixte forme un élément à cinq champs, capable de traiter à la fois le verrouillage volumique et la dépendance aux maillages dans la modélisation de l'endommagement ductile (et même celle de la plasticité de von Mises)

Après cette construction de la modélisation de l'endommagement ductile, on a effectué une étude paramétrique à l'aide des simulations sur éprouvette AE4. La relation entre la largeur observée de la bande de localisation et le paramètre non-local du modèle a été établie et exprimée par une formule empirique, qui permet une estimation de la valeur du paramètre si l'on connaît une longueur caractéristique du matériau.

Enfin, après l'identification des paramètres sur un acier utilisé dans le domaine nucléaire, on a réalisé des simulations sur des éprouvettes (AE, CT, SENT) qui sont confrontées à des résultats d'essais. On trouve une bonne concordance entre la simulation et l'expérience sur toutes les éprouvettes. La robustesse et la fiabilité du modèle ont ainsi été démontrées par ces simulations en 2D et 3D, conduisant également à quelques pistes d'amélioration pour la suite de l'étude.

6.2 Discussions et perspectives

6.2.1 Simulation de la tuyauterie étudiée dans le projet STYLE

L'essai sur la tuyauterie a été réalisé à EDF R&D dans le cadre du projet européen STYLE pour fournir un cadre de validation aux modèles de rupture ductile. Il s'agit d'un tuyau d'une quarantaine de centimètres de diamètre et d'épaisseur légèrement supérieure à 3 cm. Les données géométriques sont fournies dans la Figure 62. Une fissure non traversante est introduite le long du plan de symétrie ; elle débouche en peau intérieure (Figure 79). Le chargement consiste en une flexion quatre points symétriques comme montré dans la Figure 62.

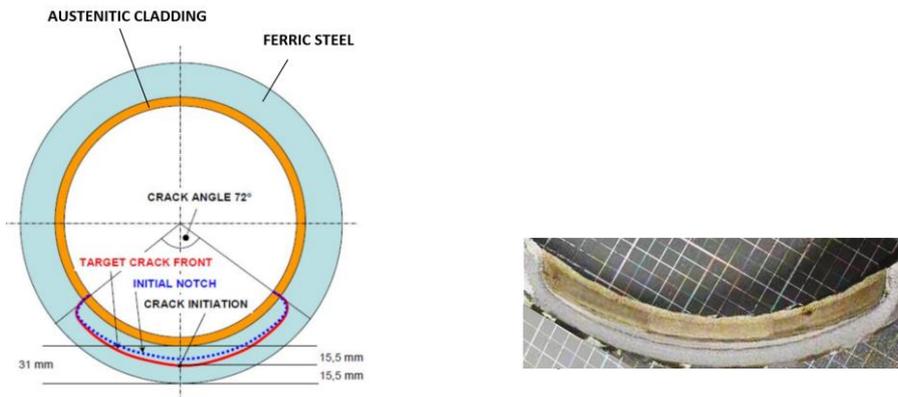


Figure 79 : Profil de la fissure dans la tuyauterie

La Figure 80 synthétise le comportement de la maquette MU-3 pendant l'essai. L'expertise du faciès de rupture et les dépouillements réalisés dans le cadre du stage de [ROIRAND et al., 2014] permettent de proposer un scénario pour la rupture de la maquette (cf. Figure 80):

- Début de la plastification de la maquette vers 2500 kN (A) ;
- Ouverture parallèle des bords du défaut - Amorçage de la déchirure ductile à 3700 kN (B)
- Effort maximum de 4100 kN et début de la striction (C) ;
- Propagation radiale du défaut par déchirure ductile entre (B) et (D) ;
- Traversée du défaut au centre, percement du ligament (D) ;
- Propagation circonférentielle du défaut par déchirure ductile avec des zones de rupture par clivage près du revêtement entre (D) et (E) ;
- Ouverture maximum de 15 mm (E) ;
- Phase de propagation brutale, en rupture par clivage, en fin d'essai avec des zones de déchirure ductile en forme de rivières entre (E) et (F) ;
- Fin de l'instabilité (F) ;
- Arrêt de l'essai en relevant le vérin entre (F) et (G)

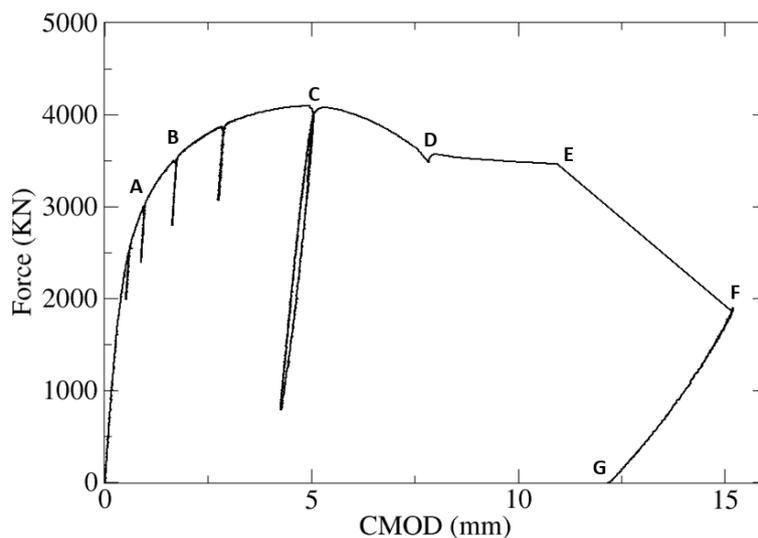


Figure 80 : Réponse globale de la tuyauterie issue de l'essai ([ROIRAND et al., 2014])

Quant à la simulation, seul un quart de la structure est modélisé en tenant compte des symétries. Afin d'appliquer le modèle non-local, la taille de maille est raffinée au niveau de la zone de

fissuration, voir la Figure 81. Le maillage contient au final 155 003 éléments quadratiques dont 77 971 éléments pour le domaine au voisinage de la fissure. La taille des éléments dans ce domaine est de 120 μm , même ordre que la longueur caractéristique ($\sim 80 \mu\text{m}$) du modèle non-local avec les paramètres identifiés dans le paragraphe 5.4.2, ce qui reste encore très grossier mais permet de se faire une première idée de la faisabilité de la simulation.

Les matériaux modélisés sont :

- le métal de base en acier ferritique 20MnMoNi55
- le revêtement en acier inoxydable
- l'acier des bras de flexion

A ce stade, on n'a pas pris en compte la zone affectée thermiquement.

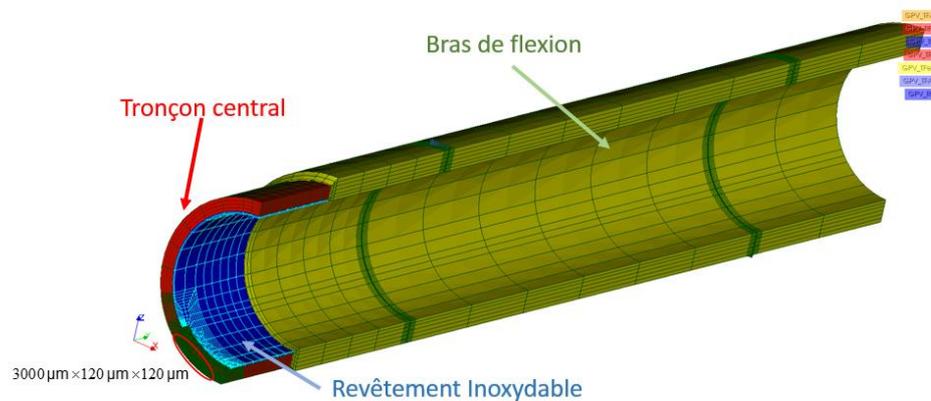


Figure 81 : Maillage de la tuyauterie de STYLE

Dans un premier temps, on a effectué une simulation avec la loi élastoplastique de von Mises. La réponse globale de la structure par cette analyse sans endommagement s'écarte significativement de l'essai pour une ouverture de fissure voisine de 3 mm (l'amorçage avait été détecté pour une force d'ordre de 3500 KN correspondant à une ouverture d'environ 1,5 mm).

Malheureusement, on rencontre encore souvent des problèmes de convergence du calcul lors de l'utilisation de la loi GTN. En effet, une fois que la propagation radiale s'amorce, plusieurs mailles perdent leur rigidité et peuvent être très distordues, perturbant grandement la convergence. Ce problème sera abordé plus en détail dans le paragraphe suivant. Faute d'un traitement spécifique pour les éléments cassés, on n'a pas réussi à reproduire la fissure traversante à ce stade.

6.2.2 Représentation de la fissure

Le modèle non-local présenté dans cette étude exhibe généralement une convergence très robuste que ce soit avec l'élément standard ou l'élément mixte, jusqu'à ce que les premiers points Gauss soient complètement endommagés (cassés). Puis dans la phase de la propagation de fissure, la robustesse du calcul est perturbée par les éléments contenant ces points cassés car ils subissent des déformations (distorsions) très importantes.

En effet, la fissure est représentée dans ce travail par les points de Gauss dont la porosité atteint la valeur maximale $f = f_r$. Sur ces points, la contrainte devient nulle d'après la loi de comportement GTN. D'un côté, c'est un avantage car ceci ne nécessite pas de traitement spécial

sur le champ des contraintes. D'un autre côté, les points cassés n'ont plus de rigidité et l'élément qui les contient peut alors être très distordu, cf. Figure 82 . Plus particulièrement, le calcul risque de rencontrer le problème de 'zero energy' abordé dans le paragraphe 2.3.2 en raison du faible nombre de points de Gauss effectifs. Bien que ce problème n'apparaisse qu'aux points cassés dans les zones très endommagées, avec donc peu d'impact sur la réponse globale, il pourrait causer des difficultés de convergence localisées. On a d'abord essayé d'ajouter plus de points Gauss dans un élément, mais cela n'a fait que retarder la distorsion. Un autre moyen consiste à arrêter l'évolution des champs au moment $f = f_{critique} < f_r$, comme dans le travail de [Huespe et al., 2012], dans lequel les points ne perdent pas complètement leur rigidité et l'élément ne sera plus distordu, mais au prix d'une contrainte résiduelle artificielle. D'autres solutions pourraient passer par l'adoption d'une loi cohésive, le remaillage dans la zone fissurée [Mediavilla et al., 2006b], l'érosion des éléments cassés [Li et al., 2011] ou encore l'insertion d'une discontinuité représentant la fissure [Broumand et Khoei, 2013].

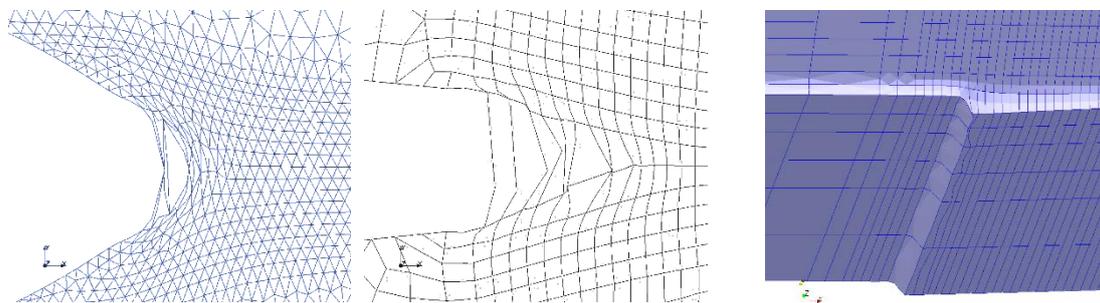


Figure 82 : Eléments contenant les points cassés deviennent très distordus

6.2.3 Le traitement du verrouillage volumique

Il nous paraît utile de continuer à explorer les questions relatives au verrouillage volumique. Comme discuté dans le paragraphe 2.3.4, l'élément mixte P2/P1/P1 entraîne une instabilité de déformation plastique dans certaines circonstances, qui pourrait s'expliquer par un espace de discrétisation trop pauvre pour la pression. Dans ce travail, même si ce problème est efficacement résolu par la modélisation finale réunissant la formulation non-locale et l'élément mixte, c'est une réponse sans doute trop riche pour les problèmes de plasticité sans endommagement. On a d'ailleurs remarqué que l'instabilité disparaissait même pour une valeur nulle du paramètre non-local. On pourrait donc supposer que l'effet de stabilisation vient probablement de la méthode 'décomposition-coordination' et non pas d'un effet secondaire lié à la régularisation. Avec cette méthode, l'espace de discrétisation a été enrichi par des champs nodaux supplémentaires, ce qui semble conduire à une coercivité de l'opérateur à nouveau vérifiée. Il sera intéressant de vérifier plus rigoureusement cette conjecture par des analyses mathématiques complémentaires.

Dans cette étude, on a aussi remarqué que le problème du verrouillage volumique survient souvent aux endroits courbés qui subissent une déformation élevée (sphère creuse, entaille de CT). Etant donné que les éléments mixtes nécessitent un coût de calcul supplémentaire par rapport à l'élément standard, des analyses mathématiques et numériques sur l'apparition du problème en fonction des géométries et des éléments pourraient donc être pertinentes pour décider au préalable de l'utilisation des éléments mixtes.

6.2.4 Rupture ductile à basse triaxialité

Notre étude s'est appuyée sur le modèle GTN d'origine, avec pour objectif la construction d'un cadre simple de modélisation de l'endommagement ductile. Il n'est pas difficile d'y intégrer des versions plus récentes du modèle GTN qui améliorent sa représentativité à basse triaxialité (cf. la section 1.6) car ces extensions sont toutes introduites au niveau de la loi de comportement elle-même.

Avec le choix d'une discrétisation explicite de la porosité, cette dernière n'intervient dans l'intégration de la loi que comme un paramètre. L'implantation numérique de l'extension Nahshon&Hutchinson ou de l'extension Xue devient d'autant plus facile qu'il suffit d'ajouter le terme à l'origine du cisaillement dans la variable d'endommagement (f ou D) à la fin de chaque pas de temps. Les démarches pour résoudre les équations du système et l'expression de la matrice tangente ne seront pas impactées. Quant à l'extension à une représentation de la microstructure dans laquelle la forme et la rotation des cavités sont prises en compte, on estime la charge de travail plus importante en raison de la modification plus profonde de la loi GTN, nécessitant une reformulation des équations et de la matrice tangente.

A basse triaxialité, outre la germination due aux inclusions principales dans la matrice (MnS ou CaS dans l'acier), on observe souvent une germination complémentaire due à une seconde population d'inclusions, beaucoup plus petites (carbure de fer dans l'acier) [Besson, 2013]. En raison des différences de tailles de ces deux populations d'inclusions, on pourra introduire deux longueurs caractéristiques dans le modèle non-local correspondant respectivement aux deux échelles de germination.

6.2.5 Validations expérimentales complémentaires

Les résultats de simulations dans cette étude ont été confrontés aux essais expérimentaux avec une très bonne concordance sur la courbe de force – déplacement. Outre cette réponse globale, la validation du modèle nécessite davantage d'essais en examinant le trajet et la vitesse de la propagation de fissure, ainsi que le champ de la déformation et la fraction des cavités par l'intermédiaire d'une caméra rapide, de la corrélation d'images, ou encore par la caractérisation des matériaux par le synchrotron aux rayons X (cf. [Morgeneyer et al., 2014]) ou d'autres moyens expérimentaux avancés. Ceci permettra de mieux identifier les paramètres du modèle et de mieux définir son domaine de validité.

6.3 L'avenir de la modélisation en mécanique de la rupture : précision et efficacité

Malgré son développement durant un siècle, la mécanique de la rupture reste encore une discipline jeune à explorer. Dans cette thèse, nous avons traité certaines difficultés dans la modélisation de l'endommagement ductile et construit un modèle robuste fournissant des résultats pertinents. Mais ce n'est qu'un petit pas dans l'étude de la mécanique de la rupture. Au niveau de la modélisation et de la simulation numérique dans cette discipline, les difficultés résident principalement dans les facteurs suivants.

La modélisation des mécanismes de la rupture demeure toujours simplifiée ou à un certain niveau phénoménologique. Avec le développement des sciences des matériaux à l'échelle atomique, on pourra proposer une théorie permettant de décrire plus rigoureusement la plastification et l'endommagement des matériaux. Cette tâche sera d'autant plus délicate que

l'on cherchera à prendre en compte d'autres éléments comme le soudage, la corrosion, l'irradiation, la diffusion d'hydrogène ou encore le couplage électromagnétique. Depuis cette dernière décennie, de nombreuses études sont menées sur le couplage multiphysique, conduisant à des modèles de plus en plus réalistes et précis afin de représenter une structure dans son environnement complexe.

Une fois les modèles établis, leur traitement numérique restera un problème de taille. La plupart des phénomènes physiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Les outils mathématiques robustes pour les résoudre à l'échelle de la structure restent encore limités. On peut citer la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis comme les plus matures à ce stade. Cette dernière, aussi utilisée dans le cadre de cette thèse, est la plus répandue en mécanique des solides et donc en mécanique de la rupture. Elle est parfois de mise en œuvre délicate, dans le cas de grandes structures, étant donné la nécessité de mailler les pièces régulièrement avec des tétraèdres ou des hexaèdres. Des méthodes alternatives ont été proposées récemment, par exemple HHO (Hybrid High-Order, [Di Pietro et Ern, 2015]) et VEM (Virtual Element method, [Beirão da Veiga et al., 2013]), qui permettent de mailler une structure avec des polygones quelconques. En outre, comme la méthode des éléments finis résout toujours les équations dans un espace discrétisé, elle peut aussi être limitée par son instabilité et sa mauvaise précision, notamment dans un problème fortement non linéaire. Or l'amélioration de la précision repose en général sur l'enrichissement des éléments, augmentant ainsi leur coût calcul. Des infrastructures informatiques puissantes deviennent par conséquent indispensables.

En effet, l'outil informatique et son adéquation à l'algorithme de résolution choisi joueront un rôle essentiel dans la performance des études de mécanique de la rupture. Deux pistes existent pour améliorer les performances de l'algorithme : le calcul parallèle et la réduction de modèles. La première s'appuie donc pleinement sur l'évolution continue des performances des processeurs (le processeur d'un smartphone d'aujourd'hui est aussi puissant que celui d'un super computer d'il y a trente ans), à condition de savoir tirer profit des nouvelles architectures parallèles. La seconde vise, quant à elle, à limiter le nombre de calculs à réaliser en synthétisant une partie de la réponse de la structure et pose alors la question de la représentativité du résultat obtenu. De plus, si le développement de l'ordinateur quantique arrive à son terme, les outils informatiques pour les calculs scientifiques prendront alors un essor révolutionnaire.

Au final, en tant que science interdisciplinaire, la modélisation de la mécanique de la rupture dépendra du développement de la physique, des mathématiques appliquées et de l'informatique. Et ce pour gagner tant en précision qu'en performance. On avance pas à pas. Il y a 60 ans, on ne savait étudier la résistance des matériaux qu'à la main avec des analyses élastiques linéaires ; il y a 40 ans, on se contentait de faire des calculs éléments finis sur des structures très simples ; il y a 20 ans, l'application des modèles complexes décrivant finement les mécanismes microscopiques était encore loin d'être praticable. À l'heure actuelle, on a réussi à simuler et prédire la rupture dans des petites structures et on a commencé à analyser le phénomène dans les pièces industrielles de grande taille. Dans un avenir proche, il ne sera pas audacieux de mettre en œuvre dans la conception de nouveaux avions et de centrales nucléaires, la modélisation à base physique de la rupture autorisant une description fine de l'endommagement.

Références

- Acharyya, S., Dhar, S., Chattopadhyay, J.**, 2008. Evaluation of critical fracture energy parameter G_{fr} and assessment of its transferrability. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 253-274.
- Akhrass, D.A., Bruchon, J., Drapier, S., Fayolle, S.**, 2014. Integrating a logarithmic-strain based hyperelastic formulation into a three-field mixed finite element formulation to deal with incompressibility in finite-strain elastoplasticity *Finite Elements in Analysis and Design* 86, 61-70.
- Allahverdizadeh, N., Manes, A., Giglio, M., Gilioli, A.**, 2014. Geometry transferability of Lemaitre's continuum damage mechanics model in the plane stress specimens, in: Sandera, P. (Ed.), *Materials Structure & Micromechanics of Fracture VII*. Trans Tech Publications Ltd, Stafa-Zurich, pp. 266-270.
- Ambati, M., Gerasimov, T., De Lorenzis, L.**, 2015. Phase-field modeling of ductile fracture. *Computational Mechanics*, 1-24.
- Andrade, F.X., de Sá, J.C., Pires, F.A.**, 2011. A ductile damage nonlocal model of integral-type at finite strains: formulation and numerical issues. *International Journal of Damage Mechanics*, 1056789510386850.
- Andrade, F.X.C., de Sa, J., Pires, F.M.A.**, 2014. Assessment and comparison of non-local integral models for ductile damage. *International Journal of Damage Mechanics* 23, 261-296.
- Asaro, R.J.**, 1983. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in applied mechanics* 23, 115.
- Askes, H., Sluys, L.J.**, 2002. Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *European Journal of Mechanics a-Solids* 21, 379-390.
- Auricchio, F., Beirão da Veiga, L.c., Lovadina, C., Reali, A., Taylor, R., Wriggers, P.**, 2013. Approximation of incompressible large deformation elastic problems: some unresolved issues. *Computational Mechanics* 52, 1153-1167.
- Bai, Y.L., Wierzbicki, T.**, 2008. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *International Journal of Plasticity* 24, 1071-1096.
- Bao, Y.B., Wierzbicki, T.**, 2004. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences* 46, 81-98.
- Barenblatt, G.I.**, 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in applied mechanics* 7, 55-129.
- Bargellini, R., Besson, J., Lorentz, E., Michel-Ponnelle, S.**, 2009. A non-local finite element based on volumetric strain gradient: Application to ductile fracture. *Computational Materials Science* 45, 762-767.
- Basu, S., Benzerga, A.A.**, 2015. On the path-dependence of the fracture locus in ductile materials: Experiments. *International Journal of Solids and Structures* 71, 79-90.
- Bathe, K.-J.**, 2001. The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers & structures* 79, 243-252.
- Bauvineau, L.**, 1996. Approche locale de la rupture ductile: application à un acier carbone-manganèse.
- Beirão da Veiga, L., Brezzi, F., Cangiani, A., Manzini, G., Marini, L., Russo, A.**, 2013. Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23, 199-214.
- Benallal, A., Billardon, R., Geymonat, G.**, 1993. Bifurcation and localization in rate-independent materials. Some general considerations. Springer.
- Benzerga, A.A., Surovik, D., Keralavarma, S.M.**, 2012. On the path-dependence of the fracture locus in ductile materials – Analysis. *International Journal of Plasticity* 37, 157-170.
- Besson, J.**, 2010. Continuum Models of Ductile Fracture: A Review. *International Journal of Damage Mechanics* 19, 3-52.
- Besson, J.**, 2013. A Two Length Scale Non-Local Model to Describe Ductile Rupture at Low Stress Triaxiality. The third international conference on computational modeling of fracture and failure of materials and structures.
- Besson, J., Berdin, C.**, 2004. Local Approach to Fracture. Presses des MINES.
- Besson, J., Guillemer-Neel, C.**, 2003. An extension of the Green and Gurson models to kinematic hardening. *Mechanics of materials* 35, 1-18.
- Besson, J., Steglich, D., Brocks, W.**, 2001. Modeling of crack growth in round bars and plane strain specimens. *International Journal of Solids and Structures* 38, 8259-8284.
- Bouchet, C., Tanguy, B., Besson, J., Bugat, S.**, 2005. Prediction of the effects of neutron irradiation on the Charpy ductile to brittle transition curve of an A508 pressure vessel steel. *Computational materials science* 32, 294-300.
- Brezzi, F., Fortin, M.**, 1991. Mixed and hybrid finite element methods.
- Brocks, W., Yuan, H.**, 1989. Numerical investigations on the significance of J for large stable crack

- growth. *Engineering Fracture Mechanics* 32, 459-468.
- Broumand, P., Khoei, A.R.**, 2013. The extended finite element method for large deformation ductile fracture problems with a non-local damage-plasticity model. *Engineering Fracture Mechanics* 112-113, 97-125.
- Brüning, M.**, 2003. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics. *International Journal of Plasticity* 19, 1679-1713.
- Brüning, M., Albrecht, D., Gerke, S.**, 2011. Modeling of ductile damage and fracture behavior based on different micromechanisms. *International Journal of Damage Mechanics* 20, 558-577.
- Brüning, M., Chyra, O., Albrecht, D., Driemeier, L., Alves, M.**, 2008. A ductile damage criterion at various stress triaxialities. *International Journal of Plasticity* 24, 1731-1755.
- Brüning, M., Gerke, S., Brenner, D.**, 2014. New 2D-Experiments and Numerical Simulations on Stress-state-dependence of Ductile Damage and Failure. *Procedia Materials Science* 3, 177-182.
- Cao, T.S., Maziere, M., Danas, K., Besson, J.**, 2015. A model for ductile damage prediction at low stress triaxialities incorporating void shape change and void rotation. *International Journal of Solids and Structures* 63, 240-263.
- Cazes, F., Moës, N.**, 2015. Comparison of a phase - field model and of a thick level set model for brittle and quasi - brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- Chapelle, D., Bathe, K.-J.**, 1993. The inf-sup test. *Computers & structures* 47, 537-545.
- Charmet, J.-C.**, 2005. *Mécanique du solide et des matériaux Elasticité-Plasticité-Rupture*. ESPCI-Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique, 113-144.
- Chu, C., Needleman, A.**, 1980. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *Journal of Engineering Materials and Technology* 102, 249-256.
- Cornec, A., Scheider, I., Schwalbe, K.-H.**, 2003. On the practical application of the cohesive model. *Engineering Fracture Mechanics* 70, 1963-1987.
- Cosserat, E., Cosserat, F.**, 1909. *Théorie des corps déformables*. Paris.
- Danas, K., Castañeda, P.P.**, 2009. A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I-Theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 28, 387-401.
- de Sá, J.C., Areias, P., Zheng, C.**, 2006. Damage modelling in metal forming problems using an implicit non-local gradient model. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195, 6646-6660.
- de Souza Neto, E.A., Peric, D., Owen, D.R.J.**, 2011. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons.
- de Souza Neto, E.A., Pires, F.M.A., Owen, D.R.J.**, 2005. F-bar-based linear triangles and tetrahedra for finite strain analysis of nearly incompressible solids. Part I: formulation and benchmarking. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62, 353-383.
- Debruyne, G.**, 2000. Proposition d'un paramètre énergétique de rupture pour les matériaux dissipatifs. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics* 328, 785-791.
- Dhar, S., Marie, S., Chapuliot, S.**, 2008. Determination of critical fracture energy, G_{fr} , from crack tip stretch. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 85, 313-321.
- Di Luzio, G., Bažant, Z.P.**, 2005. Spectral analysis of localization in nonlocal and over-nonlocal materials with softening plasticity or damage. *International journal of solids and structures* 42, 6071-6100.
- Di Pietro, D.A., Ern, A.**, 2015. A hybrid high-order locking-free method for linear elasticity on general meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 283, 1-21.
- Doghri, I., Billardon, R.**, 1995. INVESTIGATION OF LOCALIZATION DUE TO DAMAGE IN ELASTOPLASTIC MATERIALS. *Mechanics of Materials* 19, 129-149.
- Dugdale, D.**, 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8, 100-104.
- Eisele, U., Roos, E.**, 1991. Evaluation of different fracture-mechanical J-integral initiation values with regard to their usability in the safety assessment of components. *Nuclear Engineering and Design* 130, 237-247.
- Enakoutsa, K., Leblond, J.-B.**, 2009. Numerical implementation and assessment of the GLPD micromorphic model of ductile rupture. *EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS A-SOLIDS* 28, 445-460.
- Enakoutsa, K., Leblond, J.B., Perrin, G.**, 2007. Numerical implementation and assessment of a phenomenological nonlocal model of ductile rupture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196, 1946-1957.
- Engelen, R.A., Geers, M.G., Baaijens, F.P.**, 2003. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International journal of Plasticity* 19, 403-433.
- Eringen, A.C., Edelen, D.**, 1972. On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science* 10, 233-248.

- Eringen, A.C., Suhubi, E.**, 1964. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I. *International Journal of Engineering Science* 2, 189-203.
- Ern, A., Guermont, J.-L.**, 2013. *Theory and practice of finite elements*. Springer Science & Business Media.
- Ernst, H.A.**, 1983. Material resistance and instability beyond J-controlled crack growth. *ASTM STP* 803, 191-213.
- Feld-Payet, S., Besson, J., Feyel, F.**, 2011. Finite element analysis of damage in ductile structures using a nonlocal model combined with a three-field formulation. *International Journal of Damage Mechanics* 20, 655-680.
- Forest, S.**, 2009. Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage. *Journal of Engineering Mechanics*.
- Forest, S., Ammar, K., Appolaire, B.**, 2011. Micromorphic vs. phase-field approaches for gradient viscoplasticity and phase transformations, *Advances in extended and multifield theories for continua*. Springer, pp. 69-88.
- Francfort, G.A., Marigo, J.-J.**, 1998. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46, 1319-1342.
- Franklin, A.**, 1969. Comparison between a quantitative microscope and chemical methods for assessment of non-metallic inclusions. *J Iron Steel Inst* 207, 181-186.
- Gannon, R.**, 1995. What really sank the Titanic. *Popular Science* 246, 49-55.
- Geers, M.**, 2004. Finite strain logarithmic hyperelasto-plasticity with softening: a strongly non-local implicit gradient framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193, 3377-3401.
- Geers, M.G.D., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., Peerlings, R.H.J.**, 1998. Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 160, 133-153.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., Perrin, G., Devaux, J.**, 1997. *Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals*. Springer.
- Gologanu, M., Leblond, J.B., Devaux, J.**, 1993. APPROXIMATE MODELS FOR DUCTILE METALS CONTAINING NONSPHERICAL VOIDS - CASE OF AXISYMMETRICAL PROLATE ELLIPSOIDAL CAVITIES. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41, 1723-1754.
- Gómez, A.P., Moës, N., Stolz, C.**, 2015. Comparison between thick level set (TLS) and cohesive zone models. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 2, 1-22.
- Grange, M., Besson, J., Andrieu, E.**, 2000. An anisotropic Gurson type model to represent the ductile rupture of hydrided Zircaloy-4 sheets. *International Journal of Fracture* 105, 273-293.
- Grassl, P., Xenos, D., Jirásek, M., Horák, M.**, 2014. Evaluation of nonlocal approaches for modelling fracture near nonconvex boundaries. *International Journal of Solids and Structures* 51, 3239-3251.
- Griffith, A.A.**, 1921. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 163-198.
- Gurson, A.L.**, 1977. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology* 99, 2-15.
- Halphen, B., Nguyen, Q.**, 1975. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de Mécanique* 14, 39-63.
- Henry, B.S., Luxmoore, A.R.**, 1997. The stress triaxiality constraint and the Q-value as a ductile fracture parameter. *Engineering Fracture Mechanics* 57, 375-390.
- Huespe, A.E., Needleman, A., Oliver, J., Sánchez, P.J.**, 2009. A finite thickness band method for ductile fracture analysis. *International Journal of Plasticity* 25, 2349-2365.
- Huespe, A.E., Needleman, A., Oliver, J., Sánchez, P.J.**, 2012. A finite strain, finite band method for modeling ductile fracture. *International Journal of Plasticity* 28, 53-69.
- Huetter, G., Linse, T., Muehlich, U., Kuna, M.**, 2013. Simulation of ductile crack initiation and propagation by means of a non-local Gurson-model. *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES* 50, 662-671.
- Hughes, T.J.**, 2012. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation.
- Hutchinson, J.**, 1968. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16, 337-342.
- Hutchinson, J.W.**, 1983. Fundamentals of the Phenomenological Theory of Nonlinear Fracture Mechanics. *Journal of Applied Mechanics* 50, 1042-1051.
- Hutter, G., Linse, T., Muehlich, U., Kuna, M.**, 2013. Simulation of ductile crack initiation and propagation by means of a non-local Gurson-model. *International Journal of Solids and Structures* 50, 662-671.

- Hutter, G., Linse, T., Roth, S., Muhlich, U., Kuna, M.,** 2014. A modeling approach for the complete ductile-brittle transition region: cohesive zone in combination with a non-local Gurson-model. *International Journal of Fracture* 185, 129-153.
- Irwin, G.,** 1957. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *J. Appl. Mech.*
- Jackiewicz, J., Kuna, M.,** 2003. Non-local regularization for FE simulation of damage in ductile materials. *Computational Materials Science* 28, 684-695.
- Jirásek, M.,** 2007. Nonlocal damage mechanics. *Revue européenne de génie civil* 11, 993-1021.
- Kailasam, M., Castañeda, P.P.,** 1998. A general constitutive theory for linear and nonlinear particulate media with microstructure evolution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46, 427-465.
- Kanetake, N., Nomura, M., Choh, T.,** 1995. Continuous observation of microstructural degradation during tensile loading of particle reinforced aluminium matrix composites. *Materials science and technology* 11, 1246-1252.
- Koplik, J., Needleman, A.,** 1988. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures* 24, 835-853.
- Kröner, E.,** 1967. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures* 3, 731-742.
- Lassance, D., Fabregue, D., Delannay, F., Pardoën, T.,** 2007. Micromechanics of room and high temperature fracture in 6xxx Al alloys. *Progress in materials science* 52, 62-129.
- LAVERNE, J.,** 2011. A mixed interface finite element for cohesive zone models Date: 16/12/08. *Int. J. Solids Struct* 38, 1135-1148.
- Le Delliou, P.,** 2012. Etat de l'art sur les modèles en déchirure ductile. Note interne EDF R&D H-T24-2011-03089-FR.
- Leblond, J.B.,** 1998. Brittle fracture and ductile fracture. *Comptes Rendus Acad. Sci. Ser. II-B* 326, 243-250.
- Lemaitre, J.,** 1985. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology* 107, 83-89.
- Lemaitre, J.,** 1992. A course on damage mechanics.
- Lemaitre, J., Desmorat, R.,** 2005. Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures. Springer Science & Business Media.
- Lemaitre, J., Desmorat, R., Sauzay, M.,** 2000. Anisotropic damage law of evolution. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 19, 187-208.
- Lemaitre, J., Dufailly, J.,** 1987. Damage measurements. *Engineering Fracture Mechanics* 28, 643-661.
- Li, H., Fu, M.W., Lu, J., Yang, H.,** 2011. Ductile fracture: Experiments and computations. *International Journal of Plasticity* 27, 147-180.
- Linse, T., Huetter, G., Kuna, M.,** 2012. Simulation of crack propagation using a gradient-enriched ductile damage model based on dilatational strain. *ENGINEERING FRACTURE MECHANICS* 95, 13-28.
- Linse, T., Kuna, M., Viehrig, H.W.,** 2014. Quantification of brittle-ductile failure behavior of ferritic reactor pressure vessel steels using the Small-Punch-Test and micromechanical damage models. *Materials Science and Engineering: A* 614, 136-147.
- Longere, P., Geffroy, A.G., Leble, B., Dragon, A.,** 2012. Modeling the Transition between Dense Metal and Damaged (Microporous) Metal Viscoplasticity. *International Journal of Damage Mechanics* 21, 1020-1063.
- Lorentz, E.,** 1999. Lois de comportement à gradients de variables internes: construction, formulation variationnelle et mise en oeuvre numérique. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- Lorentz, E.,** 2008. A mixed interface finite element for cohesive zone models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198, 302-317.
- Lorentz, E., Andrieux, S.,** 2003. Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures* 40, 2905-2936.
- Lorentz, E., Benallal, A.,** 2005. Gradient constitutive relations: numerical aspects and application to gradient damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194, 5191-5220.
- Lorentz, E., Besson, J., Cano, V.,** 2008. Numerical simulation of ductile fracture with the Rousselier constitutive law. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197, 1965-1982.
- Lorentz, E., Godard, V.,** 2011. Gradient damage models: Toward full-scale computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200, 1927-1944.
- Marie, S., Chapuliot, S.,** 1998. Ductile tearing simulation based on a local energetic criterion. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 21, 215-227.
- Marie, S., Chapuliot, S.,** 2000. Ductile crack growth simulation from near crack tip dissipated energy. *Nuclear Engineering and Design* 196, 293-305.

- Marigo, J.-J.**, 2012. Plasticité et Rupture. 45 - 48.
- Matheron, P., Chapuliot, S., Nicolas, L., Koundy, V., Caroli, C.**, 2012. Characterization of PWR vessel steel tearing under severe accident condition temperatures. *Nuclear Engineering and Design* 242, 124-133.
- Mediavilla, J., Peerlings, R., Geers, M.**, 2006a. A nonlocal triaxiality-dependent ductile damage model for finite strain plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 4617-4634.
- Mediavilla, J., Peerlings, R.H.J., Geers, M.G.D.**, 2006b. An integrated continuous-discontinuous approach towards damage engineering in sheet metal forming processes. *Engineering Fracture Mechanics* 73, 895-916.
- Merkle, J.G., Corten, H.T.**, 1974. A J Integral Analysis for the Compact Specimen, Considering Axial Force as Well as Bending Effects. *Journal of Pressure Vessel Technology* 96, 286-292.
- Miehe, C.**, 2014. Variational gradient plasticity at finite strains. Part I: Mixed potentials for the evolution and update problems of gradient-extended dissipative solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 268, 677-703.
- Miehe, C., Apel, N., Lambrecht, M.**, 2002. Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191, 5383-5425.
- Moës, N., Stolz, C., Bernard, P.E., Chevaugeon, N.**, 2011. A level set based model for damage growth: the thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86, 358-380.
- Moës, N., Stolz, C., Chevaugeon, N.**, 2014. Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set model. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 1, 1-21.
- MOINEREAU, D., DELLIOU, P.L., VINCENT, W., SONNEFRAUD, C., ROIRAND, Q., COSSANGE, C.**, 2014. Déchirure ductile et transférabilité des propriétés de ténacité entre éprouvettes et structures. Synthèse des travaux menés dans le cadre des actions STYLE et CoMaDiS. Document interne EDF H-T24-2014-00277-FR.
- Morgeneyer, T.F., Taillandier-Thomas, T., Helfen, L., Baumbach, T., Sinclair, I., Roux, S., Hild, F.**, 2014. In situ 3-D observation of early strain localization during failure of thin Al alloy (2198) sheet. *Acta Materialia* 69, 78-91.
- Nahshon, K., Hutchinson, J.W.**, 2008. Modification of the Gurson Model for shear failure. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 27, 1-17.
- Needleman, A.**, 1990. An analysis of tensile decohesion along an interface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38, 289-324.
- Niazi, M., Wisselink, H., Meinders, T., Horn, C.**, 2010. Implementation of an anisotropic damage material model using general second order damage tensor. *Steel Research International* 81, 1396-1399.
- Nielsen, K.L., Tvergaard, V.**, 2009. Effect of a shear modified Gurson model on damage development in a FSW tensile specimen. *International Journal of Solids and Structures* 46, 587-601.
- O'dowd, N., Shih, C.F.**, 1991. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter—I. Structure of fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39, 989-1015.
- O'Dowd, N.P.**, 1995. Applications of two parameter approaches in elastic-plastic fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics* 52, 445-465.
- O'Dowd, N.P., Shih, C.F.**, 1992. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter—II. Fracture applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 939-963.
- Papasidero, J., Doquet, V., Mohr, D.**, 2015. Ductile fracture of aluminum 2024-T351 under proportional and non-proportional multi-axial loading: Bao–Wierzbicki results revisited. *International Journal of Solids and Structures* 69–70, 459-474.
- Pardoen, T., Hutchinson, J.W.**, 2003. Micromechanics-based model for trends in toughness of ductile metals. *Acta Materialia* 51, 133-148.
- Paris, P.C., Gomez, M.P., Anderson, W.E.**, 1961. A rational analytic theory of fatigue. *The trend in engineering* 13, 9-14.
- Peerlings, R., de Borst, R., Brekelmans, W., de Vree, J.**, 1996. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for numerical methods in engineering* 39, 3391-3403.
- Peerlings, R., Geers, M., De Borst, R., Brekelmans, W.**, 2001. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures* 38, 7723-7746.
- Pijaudier-Cabot, G., Bazant, Z.P.**, 1987. Nonlocal damage theory. *Journal of engineering mechanics* 113, 1512-1533.
- Poh, L., Swaddiwudhipong, S.**, 2009. Gradient-enhanced softening material models. *International Journal of Plasticity* 25, 2094-2121.
- Polizzotto, C.**, 2001. Nonlocal elasticity and related variational principles. *International Journal of Solids and Structures* 38, 7359-7380.
- Razvan, R.**, 2009. Some remarks on the history of fracture mechanics. *World Scientific and Engineering*

Acad and Soc, Athens.

- Reddy, J.N., Krishnamoorthy, C.S., Seetharamu, K.N.**, 1988. Finite Element Analysis for Engineering Design. Springer-Verlag.
- Reusch, F., Svendsen, B., Klingbeil, D.**, 2003a. Local and non-local Gurson-based ductile damage and failure modelling at large deformation. EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS A-SOLIDS 22, 779-792.
- Reusch, F., Svendsen, B., Klingbeil, D.**, 2003b. A non-local extension of Gurson-based ductile damage modeling. COMPUTATIONAL MATERIALS SCIENCE 26, 219-229.
- Rice, #160, R., J., PARIS, #160, C., P., MERKLE, #160, G., J.**, 1973. Some further results of J-integral analysis and estimates. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA, ETATS-UNIS.
- Rice, J., Rosengren, G.**, 1968. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 16, 1-12.
- Rice, J.R.**, 1968. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. Journal of Applied Mechanics 35, 379-386.
- Rice, J.R., Tracey, D.M.**, 1969. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 17, 201-217.
- ROIRAND, Q., MOINEREAU, D., DELLIOU, P.L., SONNEFRAUD, C., VINCENT, W., COSSANGE, C.**, 2014. Analyse de la déchirure ductile d'une tuyauterie en acier ferritique soumise à un essai de flexion 4 points. Document interne EDF H-T24-2014-00107-FR.
- Rousselier, G.**, 1987. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. Nuclear Engineering and Design 105, 97-111.
- Samal, M.K., Seidenfuss, M., Roos, E., Dutta, B.K., Kushwaha, H.S.**, 2008. Finite element formulation of a new nonlocal damage model. Finite Elements in Analysis and Design 44, 358-371.
- Samal, M.K., Seidenfuss, M., Roos, E., Dutta, B.K., Kushwaha, H.S.**, 2009. A mesh-independent Gurson-Tvergaard-Needleman damage model and its application in simulating ductile fracture behaviour. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science 223, 283-292.
- Scheider, I., Brocks, W.**, 2003. Simulation of cup-cone fracture using the cohesive model. Engineering Fracture Mechanics 70, 1943-1961.
- Scheider, I., Brocks, W.**, 2006. Cohesive elements for thin-walled structures. Computational Materials Science 37, 101-109.
- Seidenfuss, M., Samal, M.K., Roos, E.**, 2011. On critical assessment of the use of local and nonlocal damage models for prediction of ductile crack growth and crack path in various loading and boundary conditions. INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES 48, 3365-3381.
- Siesic, P., Marigo, J.-J., Maurini, C.**, 2014. Initiation of a periodic array of cracks in the thermal shock problem: a gradient damage modeling. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 63, 256-284.
- Simo, J., Miehe, C.**, 1992. Associative coupled thermoplasticity at finite strains: formulation, numerical analysis and implementation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 98, 41-104.
- SIMULIA**, 2008. Prediction of B-Pillar Failure in Automobile Bodies. Abaqus technology brief TB-08-BPF-1.
- Sumpter, J.D.**, 1993. An experimental investigation of the T stress approach. ASTM SPECIAL TECHNICAL PUBLICATION 1171, 492-492.
- Thomason, P.F.**, 1990. An assessment of the validity of J-controlled crack growth, and the stability of cracks in incremental-plastic/elastic solids. International Journal of Fracture 44, 259-281.
- Turner, C.**, 1990. A Re-assessment of Ductile Tearing Resistance. II. Energy Dissipation Rate and Associated R-Curves on Normalised Axes.(Retroactive Coverage). ECF 8: Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures. 2, 951-968.
- Tvergaard, V.**, 1982. On localization in ductile materials containing spherical voids. International Journal of Fracture 18, 237-252.
- Tvergaard, V., Hutchinson, J.W.**, 1992. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 40, 1377-1397.
- Tvergaard, V., Hutchinson, J.W.**, 1994. Effect of T-stress on mode I crack growth resistance in a ductile solid. International Journal of Solids and Structures 31, 823-833.
- Tvergaard, V., Needleman, A.**, 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. Acta Metallurgica 32, 157-169.
- Tvergaard, V., Needleman, A.**, 1995. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. International Journal of Solids and Structures 32, 1063-1077.
- Washizu, K.**, 1955. On the variational principles of elasticity and plasticity. M.I.T. Aeroelastic and Structures Research Laboratory, [Cambridge].

- Weck, A., Wilkinson, D.S., Maire, E., Toda, H.,** 2008. Visualization by X-ray tomography of void growth and coalescence leading to fracture in model materials. *Acta Materialia* 56, 2919-2928.
- Wierzbicki, T., Bao, Y., Lee, Y.-W., Bai, Y.,** 2005. Calibration and evaluation of seven fracture models. *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 719-743.
- Williams, M.,** 1956. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics* 24, 109-114.
- Xia, L., Shih, C.F.,** 1995. Ductile crack growth-I. A numerical study using computational cells with microstructurally-based length scales. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43, 233-259.
- Xia, L., Shih, C.F., Hutchinson, J.W.,** 1995. A computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43, 389-413.
- Xue, L.,** 2008. Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 3343-3366.
- Xue, L., Wierzbicki, T.,** 2009. Numerical simulation of fracture mode transition in ductile plates. *International Journal of Solids and Structures* 46, 1423-1435.
- Xue, Z., Faleskog, J., Hutchinson, J.W.,** 2013. Tension-torsion fracture experiments – Part II: Simulations with the extended Gurson model and a ductile fracture criterion based on plastic strain. *International Journal of Solids and Structures* 50, 4258-4269.
- Yang, Q.D., Thouless, M.D., Ward, S.M.,** 1999. Numerical simulations of adhesively-bonded beams failing with extensive plastic deformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47, 1337-1353.

Annexe

A1. Résolution analytique du problème d'une sphère plastique sous pression

Pour estimer la convergence des éléments finis mixtes, il est intéressant de disposer d'une référence analytique, si possible pour un problème pour lequel un blocage numérique est susceptible de se produire. Par rapport à cette dernière condition, il n'est pas certain que des solutions manufacturées soient adaptées. On se propose donc plutôt d'établir ici la réponse d'une sphère élastoplastique soumise à une pression interne, en grandes déformations. Notons que ce problème admet une solution simple en petites déformations ainsi qu'en élastoplasticité rigide (i.e. sans changement de volume élastique). Mais dans le cas général étudié ici, la résolution est plus délicate, si bien qu'on n'exprimera la solution qu'au moment particulier où la charge critique est atteinte (toute la sphère est en régime plastique).

Description et mise en équation du problème

On considère une sphère de rayons intérieurs et extérieurs (initiaux) A et B . Le matériau est élastoplastique sans écrouissage (plasticité parfaite). L'écoulement plastique est normal et associé au critère de von Mises, de limite d'élasticité σ^y . Enfin, l'élasticité est isotrope avec K et μ les modules de compressibilité et de cisaillement. La sphère est soumise à une pression intérieure P ; sa surface extérieure est libre d'effort.

Compte tenu de la symétrie sphérique de la géométrie et du chargement, on cherche une solution qui présente les mêmes propriétés d'invariance, ce qui exclut la recherche de solutions bifurquées. La solution recherchée ne dépend donc que de la distance au centre, notée R dans la configuration initiale et r dans la configuration déformée. Le déplacement est purement radial : $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u(r)\mathbf{e}_r$, où $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_f)$ est la base orthonormée associée à un système de coordonnées sphériques (notons qu'elle reste d'ailleurs inchangée dans la transformation). Quant au tenseur de contrainte, il s'exprime de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r)(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_f \otimes \mathbf{e}_f) \quad (\text{A-1})$$

On sera amené à travailler tantôt dans la configuration de référence, tantôt dans la configuration déformée. Pour ce qui concerne le déplacement, son expression dans la configuration de référence, à savoir $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = U(R)\mathbf{e}_r$. On peut remarquer que, par définition, on a les relations :

$$r = R + U(R) \quad ; \quad u(r) = U(R) \quad (\text{A-2})$$

On en déduit la formule suivante pour les dérivées :

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{u'}{1-u'} \quad (\text{A-3})$$

où, pour alléger les notations, l'apostrophe dénote la dérivée par rapport à r .

La cinématique s'appuie dans un premier temps sur le gradient de la transformation :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \left(1 + \frac{\partial U}{\partial R}\right)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(1 + \frac{U}{R}\right)(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_f \otimes \mathbf{e}_f) \quad (\text{A-4})$$

On constate en particulier que \mathbf{F} admet des directions propres constantes au cours de la transformation. La déformation logarithmique admet alors simplement comme expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \ln\left(1 + \frac{\partial U}{\partial R}\right)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \ln\left(1 + \frac{U}{R}\right)(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_f \otimes \mathbf{e}_f) \quad (\text{A-5})$$

En outre, dans ce cas particulier, le taux de déformation $\dot{\mathbf{E}}$ coïncide avec le taux de déformation eulérien \mathbf{D} , si bien que le tenseur de contrainte \mathbf{T} est égal au tenseur de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, une situation favorable pour exhiber une solution analytique. Dans la configuration déformée, la déformation $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{X})$ s'exprime encore :

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = -\ln(1-u')\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + [\ln r - \ln(r-u)](\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \quad (\text{A-6})$$

Il est aussi utile pour la suite d'exprimer le Jacobien de la transformation et son logarithme dans la configuration déformée :

$$j = \frac{1}{1-u'} \left(\frac{r}{r-u} \right)^2 ; \quad g = \ln j = -\ln(1-u') + 2\ln r - 2\ln(r-u) = \text{tr} \mathbf{e} \quad (\text{A-7})$$

Les équations d'équilibre peuvent être elles aussi exprimées dans la configuration déformée, en fonction du tenseur de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau} = j\boldsymbol{\sigma}$:

$$\text{div}_x \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{j} \right) = 0 \Leftrightarrow \tau' - \tau g' = \frac{2s}{r} \quad (\text{A-8})$$

Où on note $\tau = \tau_{rr}$ la composante radiale des contraintes et $s = \tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}$ l'écart entre les composantes de contrainte. On a également les conditions aux limites :

$$\tau(b) = 0 ; \quad \tau(a) = j(a)P \quad (\text{A-9})$$

où a et b sont les rayons intérieurs et extérieurs de la sphère déformée. Compte tenu de la symétrie sphérique, il est équivalent d'imposer une pression intérieure ou un déplacement radial sur la peau intérieure. On préférera piloter le calcul en déplacement, si bien que la seconde condition aux limites dans (A-9) sera remplacée par :

$$u(a) = U^{imp} \quad (\text{A-10})$$

Il reste enfin à préciser les relations de comportement. Concernant la partie hydrostatique, le comportement est purement élastique :

$$\text{tr} \boldsymbol{\tau} = 3K \text{tr} \mathbf{e} \Leftrightarrow 3\tau + 2s = 3K g \quad (\text{A-11})$$

Pour la partie déviatorique, on a les relations classiques de la plasticité de von Mises :

$$\tau_{eq} \leq \sigma_0 ; \quad \dot{p} \geq 0 ; \quad \dot{p}(\tau_{eq} - \sigma_0) = 0 \quad (\text{A-12})$$

$$\mathbf{e}^D = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\tau}^D + \mathbf{e}^p ; \quad \dot{\mathbf{e}}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} \quad (\text{A-13})$$

En matière de réponse de la structure, on s'attend à un scénario dans lequel la zone plastique se développe progressivement de l'intérieur vers l'extérieur de la sphère. Lorsqu'elle atteint la paroi extérieure, tous les points de la sphère sont en régime plastique, soit :

$$\tau_{eq} = \sigma_0 \Leftrightarrow s = \sigma_0 \quad (\text{A-14})$$

En outre, au moment où la paroi externe est atteinte, la déformation plastique y est encore nulle, du fait du caractère progressif de la propagation (continuité en temps). L'équation (A-13) s'y réduit donc à :

$$\mathbf{e}^D(b) = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\tau}^D(b) \Leftrightarrow \frac{s(b)}{2\mu} = \ln \left(\frac{1-u'}{r-u} \right) \Big|_b + \ln b \quad (\text{A-15})$$

Résolution du problème

Pour l'instant critique considéré, lorsque la zone plastique débouche sur la paroi externe, l'une des deux composantes de contrainte est connue en tout point via (A-14). La relation d'équilibre

(A-8) ainsi que la partie sphérique du comportement (A-11) permettent alors de déterminer entièrement le champ de contrainte, ainsi que le Jacobien de la transformation. En fait, contrairement au cas des petites déformations, ces deux équations sont couplées ; elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \tau' - \tau g' = \frac{2\sigma_0}{r} \\ g = \frac{\tau}{K} + \frac{2\sigma_0}{3K} \end{cases} \quad (\text{A-16})$$

On normalisera le problème en introduisant $\bar{\tau} = \tau/K$ et $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0/K$. En substituant g par son expression dans la première équation de (A-16), on obtient :

$$\left(\bar{\tau} - \frac{\bar{\tau}^2}{2} \right)' = \frac{2\bar{\sigma}_0}{r} \quad (\text{A-17})$$

Cette équation s'intègre aisément, la constante d'intégration étant fixée par la condition aux limites (A-9) :

$$\bar{\tau} - \frac{\bar{\tau}^2}{2} = 2\bar{\sigma}_0 \ln \frac{r}{b} \quad (\text{A-18})$$

On peut ainsi en déduire le champ de contrainte $\bar{\tau}(r)$, le choix de la racine étant fixé par le fait qu'il s'agit d'une contrainte de compression (donc négative), ainsi que le champ de changement de volume $g(r)$:

$$\bar{\tau}(r) = 1 - \sqrt{1 - 4\bar{\sigma}_0 \ln \frac{r}{b}} \quad ; \quad g(r) = \frac{2\bar{\sigma}_0}{3} + 1 - \sqrt{1 - 4\bar{\sigma}_0 \ln \frac{r}{b}} \quad (\text{A-19})$$

A ce stade, tous deux restent paramétrés par le rayon extérieur déformé b (inconnu).

Par ailleurs, la relation cinématique (A-7) s'écrit encore après quelques manipulations :

$$\left[(r-u)^3 \right]' = \frac{3r^2}{\exp g} \quad (\text{A-20})$$

En prenant en compte la définition $b - u(b) = B$, on en déduit par intégration :

$$(r-u)^3 = B^3 - \int_r^b \frac{3\rho^2 d\rho}{\exp g(\rho)} \quad (\text{A-21})$$

La primitive dans (A-21) devra a priori être calculée numériquement.

On peut aussi s'appuyer sur la relation (A-20) pour exprimer simplement le rayon déformé b .

En effet, en $r = b$, le changement de volume vaut :

$$g(b) = \frac{2\bar{\sigma}_0}{3} \quad (\text{A-22})$$

Quant à l'équation (A-20), elle s'écrit en $r = b$:

$$1 - u'(b) = \left(\frac{b}{B} \right)^2 \exp \left(-\frac{2\bar{\sigma}_0}{3} \right) \quad (\text{A-23})$$

La condition de continuité (A-15) permet alors de fixer le rayon de la sphère déformée, car elle s'exprime encore :

$$1 - u'(b) = \left(\frac{b}{B} \right)^{-1} \exp \left(\frac{\sigma_0}{2\mu} \right) \quad (\text{A-24})$$

On déduit donc de (A-23) et (A-24) le rayon extérieur déformé :

$$\frac{b}{B} = \exp \left[\frac{\sigma_0}{3} \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{2}{3K} \right) \right] \quad (\text{A-25})$$

La connaissance de la déformation et de la contrainte permet de déterminer à son tour le champ de déformation plastique cumulée p . En effet, son évolution est gouvernée par l'équation tensorielle (A-13). Plus précisément, il s'avère que la direction τ^D / τ_{eq} est constante, ce qui permet d'intégrer simplement la déformation plastique :

$$\mathbf{e}^p = p \left(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \frac{1}{2} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{2} \mathbf{e}_f \otimes \mathbf{e}_f \right) \quad (\text{A-26})$$

Puis en substituant cette expression dans la première équation de (A-13), on en déduit :

$$p(r) = \frac{2}{3} (e_{\theta\theta} - e_{rr}) - \frac{\sigma^y}{3\mu} = \frac{2}{3} \left[\ln r - \frac{\sigma^y}{2\mu} + \ln \frac{1-u'}{r-u} \right] \quad (\text{A-27})$$

où l'expression du champ de déplacement est dorénavant connue d'après (A-21).

Finalement, la condition aux limites intérieure permet de déterminer le niveau de chargement critique pour lequel la zone plastique atteint la paroi extérieure. En effet, le rayon intérieur déformé (donc le déplacement intérieur) est donné de manière implicite par la relation (A-21) exprimée justement en $r = a$:

$$\int_a^b \frac{3\rho^2 d\rho}{\exp g(\rho)} = B^3 - A^3 \quad (\text{A-28})$$

Calibrage du problème

On cherche à déterminer ici un jeu de paramètres à même de solliciter les grandes déformations et le caractère quasi-incompressible. Pour cela, on peut commencer par s'inspirer des résultats dans le cas incompressible, i.e. $K = +\infty$. Ils sont résumés ci-dessous :

$$g = 0 \quad ; \quad \left(\frac{r}{R} \right)^3 = 1 + \left[\left(\frac{b}{B} \right)^3 - 1 \right] \left(\frac{B}{R} \right)^3 \quad (\text{A-29})$$

$$\frac{b}{B} = \exp \frac{\sigma_0}{6\mu} \quad (\text{A-30})$$

$$\tau(r) = 2\sigma_0 \ln \frac{r}{b} \quad (\text{A-31})$$

L'équation (A-29) nous indique que les déformations sont d'autant plus importantes que l'on se rapproche de la paroi interne. Deux paramètres vont jouer, le premier portant sur les données du matériau, le second sur la géométrie de la sphère :

$$\eta = \frac{\sigma_0}{6\mu} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{A}{B} \quad (\text{A-32})$$

La déformation en peau extérieure est conditionnée par le ratio matériau η :

$$\frac{b-B}{B} = e^\eta - 1 \quad (\text{A-33})$$

Typiquement, une valeur de η supérieure à 0.1 conduit à une déformation en peau externe supérieure à 10 %. Les grandes déformations sont alors généralisées.

Pour ce qui suit, on adoptera une sphère de rayon extérieur unité et de rayon intérieur 0.8. Le

ratio K/σ_0 est fixé à 10^3 tandis que le module de cisaillement est choisi plus souple, avec $\mu/\sigma_0 = 10$. Les déformations resteront donc modérées en peau extérieure. Pour illustrer, on compare la solution analytique avec les résultats d'une simulation axisymétrique menée avec un maillage réglé quadrangulaire assez fin. Les éléments finis sont quadratiques et dotés de quatre points d'intégration ; ils sont réputés de bonne qualité pour traiter les problèmes quasi-incompressibles. On y observe effectivement le bon comportement de ce type d'élément. En revanche, l'usage d'éléments finis linéaires, quadratiques triangulaires ou quadratiques quadrangulaires à neuf points d'intégration conduisent à de mauvais résultats (et même excessivement mauvais pour les éléments linéaires). Le problème révèle donc bien un éventuel blocage numérique relatif à l'incompressibilité. On dispose donc là d'une référence qui va maintenant permettre d'estimer précisément la qualité de convergence de différentes familles d'éléments finis, en raffinant progressivement les maillages.

A2. Calcul de la déformation logarithmique et ses dérivées

La déformation logarithmique est définie par : $\mathbf{E} = 1/2 \ln(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = 1/2 \ln \mathbf{C}$.

Le calcul de déformation logarithmique ne peut se faire que dans le repère propre de \mathbf{C} , noté \mathcal{C} .

Il faut d'abord déterminer les trois valeurs propres λ_i et vecteurs propres \underline{V}_i . On a ainsi:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^c \cdot \mathbf{R}^T \quad (\text{A-34})$$

où \mathbf{C}^c est une matrice diagonale dont les composants non nuls sont λ_i , \mathbf{R} une matrice orthogonale composée par les vecteurs \underline{V}_i . En vertu de l'isotropie de la fonction logarithmique, on obtient :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^c \cdot \mathbf{R}^T) = \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot (\ln \mathbf{C}^c) \cdot \mathbf{R}^T \quad (\text{A-35})$$

Afin de calculer la matrice de rigidité de l'élément fini lors de l'utilisation de la méthode Newton – Raphson, il faut connaître les dérivées de la déformation logarithmique.

On rappelle que dans l'expression (4-17), $\mathbb{P} = 2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}}$ et $\mathbf{T} : \mathbb{L} = \mathbf{T} : \frac{4 \partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}$ sont des tenseurs d'ordre 4. Ici, on donne directement les expressions de \mathbb{P} et $\mathbf{T} : \mathbb{L}$, le lecteur intéressé peut se reporter à [de Souza Neto et al., 2011] pour les dérivées des fonctions isotropes dans un cadre plus général.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \underline{V}_i \otimes \underline{V}_i \otimes \mathbf{W}_{ii} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \theta_{ij} \underline{V}_i \otimes \underline{V}_j \otimes \mathbf{W}_{ij} \\ \mathbf{T} : \mathbb{L} = \sum_{i=1}^3 \frac{-2}{\lambda_i^2} (\mathbf{T} : \underline{V}_i \otimes \underline{V}_i) \mathbf{W}_{ii} \otimes \mathbf{W}_{ii} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \sum_{\substack{k \neq j \\ k \neq i}}^3 2\alpha (\mathbf{T} : \underline{V}_i \otimes \underline{V}_j) \mathbf{W}_{ii} \otimes \mathbf{W}_{ij} \\ \quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 4\beta_{ij} [(\mathbf{T} : \underline{V}_i \otimes \underline{V}_j) (\mathbf{W}_{ij} \otimes \mathbf{W}_{jj} + \mathbf{W}_{jj} \otimes \mathbf{W}_{ij}) + (\mathbf{T} : \underline{V}_j \otimes \underline{V}_i) (\mathbf{W}_{ij} \otimes \mathbf{W}_{ij})] \end{array} \right. \quad (\text{A-36})$$

où $\mathbf{W}_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{V}_i \otimes \underline{V}_j + \underline{V}_j \otimes \underline{V}_i)$ et θ_{ij} , β_{ij} et α sont définis par :

Si toutes les valeurs propres sont différentes :

$$\theta_{ij} = \frac{\ln \lambda_i - \ln \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} ; \quad \beta_{ij} = \frac{\theta_{ij} - \frac{1}{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} ; \quad \alpha = \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \sum_{\substack{k \neq j \\ k \neq i}}^3 \frac{\ln \lambda_i}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)}$$

Si deux valeurs propres sont identiques, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$:

$$\theta_{12} = \theta_{21} = \frac{1}{\lambda_1} ; \quad \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{1-2}{4 \lambda_1^2} ;$$

$$\theta_{ij} = \frac{\ln \lambda_i - \ln \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} ; \quad \beta_{ij} = \frac{\theta_{ij} - \frac{1}{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \quad \text{pour } i=3, j \in \{1,2\} \quad \text{ou } j=3, i \in \{1,2\}$$

$$\alpha = \beta_{31} = \beta_{32}$$

Si toutes les valeurs propres sont égales :

$$\theta_{ij} = \frac{1}{\lambda_i} ; \quad \beta_{ij} = \frac{1-2}{4 \lambda_i^2} ; \quad \alpha = \frac{1-2}{4 \lambda_i^2} \quad \text{pour } i, j \in \{1,2,3\}$$

A3. Analyses d'erreur du modèle GTN

On définit une nouvelle variable $e = \text{tr}E$. Dans ce paragraphe, on note $\dot{x} = \frac{dx}{de}$.

Comme $J = \exp(\text{tr}E) = \exp(e)$, on a donc $\dot{J} = J$. La valeur de q_2 est proche de 1. Dans analyse, elle est fixée à 1.

S'il n'y a pas cisaillement, les équations (2-100), (2-101) se réduisent à :

$$\begin{cases} T_H = \frac{2T_*}{3} \text{arccosh}\left(\frac{1+q_1^2 f^2}{2q_1 f}\right) \\ T^* = JR(p) \\ \dot{T}_H = 3K(1 - \dot{E}_H^p) \\ \dot{E}_H^p = \frac{\dot{p}}{3J} \frac{\partial T_*}{\partial T_H} = \frac{\dot{p}}{3J} \frac{T_*}{T_H} \\ \dot{f} = 3(1-f)\dot{E}_H^p \end{cases} \quad (\text{A-37})$$

Sachant que $\frac{d \text{arccosh}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, on peut déduire $\dot{T}_H, \dot{p}, \dot{f}$ à partir de (A-37) :

$$\begin{cases} \dot{T}_H = JRS + JR'S\dot{p} - \frac{2JR}{3f}\dot{f} \\ \dot{p} = JS\left(1 - \frac{\dot{T}_H}{3K}\right) \\ \dot{f} = \frac{3(1-f)}{JS}\dot{p} \end{cases} \quad (\text{A-38})$$

où $S = \frac{\text{tr}\mathbf{T}}{T_*} = \frac{3T_H}{T_*}$. On obtient finalement :

$$\dot{f} = \frac{(1-f)\left(1 - \frac{JRS}{3K}\right)}{1 + \frac{R'(JS)^2}{3K} - \frac{2RJ(1-f)}{3Kf}} \quad (\text{A-39})$$

On suppose un comportement plastique parfaitement ($R'=0, R=\sigma_0$) pour simplifier les analyses. On a alors :

$$\dot{f} = \frac{(1-f)(1 - Jr_0 S)}{1 - \frac{2r_0 J(1-f)}{f}} = g(f, e) \quad (\text{A-40})$$

où on définit $r_0 = \frac{\sigma_0}{3K}$, qui est d'ordre 10^{-3} pour les métaux.

Dans l'expression (A-40), on constate que la condition suivante doit être vérifiée pour que la porosité s'évolute ($\dot{f} > 0$) :

$$1 - \frac{2r_0 J(1-f)}{f} > 0 \Rightarrow f > \frac{2r_0 J}{1+2r_0} \quad (\text{A-41})$$

Une remarque intéressante est que le modèle devra s'imposer une porosité initiale f_0 supérieure à une certaine valeur, à savoir $f_0 > \frac{2r_0 J_0}{1+2r_0} \approx 2r_0$. Si cette condition n'est pas vérifiée, le modèle

GTN n'est plus pertinent sous un chargement purement hydrostatique. f_0 est donc supposée au même ordre de $2r_0 \sim 2 \times 10^{-3}$.

En outre, d'après (A-37)₁, on constate que $S \in \left[0, \frac{2}{3} \operatorname{arccosh} \left(\frac{1 + q_1^2 f_0^2}{2q_1 f_0} \right) \right]$

L'estimation de l'erreur de f revient donc à évaluer l'erreur de l'équation $\dot{f} = g(f, e)$.

Par le développement de Taylor autour de (\hat{f}, \hat{e}) , la linéarisation de $g(f, e)$ donne :

$$\dot{f} = \hat{g} + \left(\hat{g} \cdot \frac{\partial \hat{g}}{\partial f} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial e} \right) (e - \hat{e}) \quad (\text{A-42})$$

où $\hat{g} = g(\hat{f}, \hat{e})$, $\frac{\partial \hat{g}}{\partial f} = \frac{\partial g}{\partial f}(\hat{f}, \hat{e})$, $\frac{\partial \hat{g}}{\partial e} = \frac{\partial g}{\partial e}(\hat{f}, \hat{e})$.

D'après (A-42), la discrétisation temporelle avec un schéma explicite conduit à une erreur :

$$\varepsilon_f = \frac{T}{2} \left(\hat{g} \cdot \frac{\partial \hat{g}}{\partial f} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial e} \right) \Delta e \quad (\text{A-43})$$

où

$$\begin{cases} \hat{g} = \frac{3(1-f)f(1-Jr_0S)}{f-2r_0J(1-f)} \\ \frac{\partial \hat{g}}{\partial f} = \frac{-f(1-r_0JS)}{f-2r_0J(1-f)} - \frac{2r_0J(1-f)(1-r_0JS)}{(f-2r_0(1-f))^2} \\ \frac{\partial \hat{g}}{\partial e} = \frac{-r_0Sf(1-f)}{f-2r_0J(1-f)} + \frac{2r_0f(1-f)^2(1-r_0JS)}{[f-2r_0J(1-f)]^2} \end{cases} \quad (\text{A-44})$$

On va ensuite appliquer (A-43) aux deux cas d'extrémité dans l'évolution de la porosité : le début ($\hat{f} \sim f_0$) et la fin ($\hat{f} \sim f_r$).

Cas 1 : $\hat{f} = f_0 \sim 2r_0$, $S_0 \sim 10$, $J_0 \approx 1$

$$\hat{g}_0 \approx \frac{f_0}{f_0 - 2r_0}$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial f} \approx -\frac{f_0}{f_0 - 2r_0} - \frac{2r_0}{(f_0 - 2r_0)^2} \approx -\frac{2r_0}{(f_0 - 2r_0)^2}$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial e} \approx 0$$

$$\varepsilon_f = \frac{T}{2} \left(\hat{g} \cdot \frac{\partial \hat{g}}{\partial f} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial e} \right) \Delta e \approx \frac{T}{2} \left(\hat{g} \cdot \frac{\partial \hat{g}}{\partial f} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial e} \right) \frac{\Delta f}{\hat{g}} = -\frac{T}{2} \frac{\frac{2r_0}{f_0}}{\left(1 - \frac{2r_0}{f_0}\right)^2} \frac{\Delta f}{f_0} = O\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)$$

Cas 2 : $\hat{f} = f_r \gg r_0$, $S_r \approx 0$, $J_r \approx \frac{1-f_0}{1-f_r}$

$$\hat{g}_r \approx 1 - f_r ; \quad \frac{\partial \hat{g}}{\partial f} \approx -1 ; \quad \frac{\partial \hat{g}}{\partial e} \approx 0$$

$$\varepsilon_f = \frac{T}{2} \left(\hat{g} \cdot \frac{\partial \hat{g}}{\partial f} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial e} \right) \Delta e \approx \frac{T}{2} \left(\hat{g} \cdot \frac{\partial \hat{g}}{\partial f} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial e} \right) \frac{\Delta f}{\hat{g}} = -\frac{T}{2} (1 - f_r) \Delta f = O(\Delta f)$$

A4. Termes dans la matrice tangente de la loi GTN

Ici on écrit l'expression de \mathbb{N} , tenseur d'ordre 4, dans la matrice tangente de la loi GTN.

$$\mathbb{N} = \frac{d\Gamma^*}{d\mathbf{T}d\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{T}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial T_*} \otimes \mathbf{v} \right) \quad (\text{A-45})$$

On rappelle que \mathbf{v} est défini comme $\mathbf{v} = \frac{d\Gamma^*}{d\mathbf{T}}$ dans l'expression (2-110).

$$\mathbf{v} = \left[\frac{2T_{\text{eq}}^2}{T_*^3} + \frac{3q_1q_2fT_{\text{H}}}{T_*^2} \sinh\left(\frac{3q_2T_{\text{H}}}{2T_*}\right) \right]^{-1} \left[\frac{3\mathbf{T}_{\text{D}}}{T_*^2} + \frac{q_1q_2f}{T_*} \sinh\left(\frac{3q_2T_{\text{H}}}{2T_*}\right) \mathbf{I} \right] \quad (\text{A-46})$$

Afin de simplifier l'écriture, on note :

$$s_h = q_1q_2f \sinh\left(\frac{3q_2T_{\text{H}}}{2T_*}\right), \quad c_h = q_1q_2f \cosh\left(\frac{3q_2T_{\text{H}}}{2T_*}\right), \quad Q = \frac{2T_{\text{eq}}^2}{T_*^3} + \frac{3q_1q_2fT_{\text{H}}}{T_*^2} \sinh\left(\frac{3q_2T_{\text{H}}}{2T_*}\right)$$

En dérivant (A-46), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{1}{Q} \left[\frac{3\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\right)}{T_*} + \frac{q_2c_h}{2T_*} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] - \mathbf{v} \otimes \left[\frac{\mathbf{v}}{T_*} + \frac{1}{QT_*^2} \left(3\mathbf{T}_{\text{D}} + \frac{3q_2T_{\text{H}}c_h}{2} \mathbf{I} \right) \right] \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial T_*} = -\frac{1}{QT_*^2} \left(3\mathbf{T}_{\text{D}} + \frac{3q_2T_{\text{H}}c_h}{2} \mathbf{I} \right) + \frac{1}{QT_*^3} \left(QT_*^2 + 2T_{\text{eq}}^2 + \frac{9q_2c_h}{2} T_{\text{H}}^2 \right) \mathbf{v} \end{cases} \quad (\text{A-47})$$

En remportant (A-47) dans (A-45)

$$\begin{aligned} \mathbb{N} = \frac{1}{QT_*} \left[3\mathbb{I} + \left(\frac{q_2c_h}{2} - 1 \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] + \frac{1}{QT_*^3} \left(2T_{\text{eq}}^2 + \frac{9q_2c_h}{2} T_{\text{H}}^2 \right) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ - \frac{3}{QT_*^2} \left[\left(\mathbf{T}_{\text{D}} + \frac{q_2T_{\text{H}}c_h}{2} \mathbf{I} \right) \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \left(\mathbf{T}_{\text{D}} + \frac{q_2T_{\text{H}}c_h}{2} \mathbf{I} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-48})$$

La symétrie du tenseur \mathbb{N} est évidente.

A5. Géométries et maillages des éprouvettes

Eprouvette AE

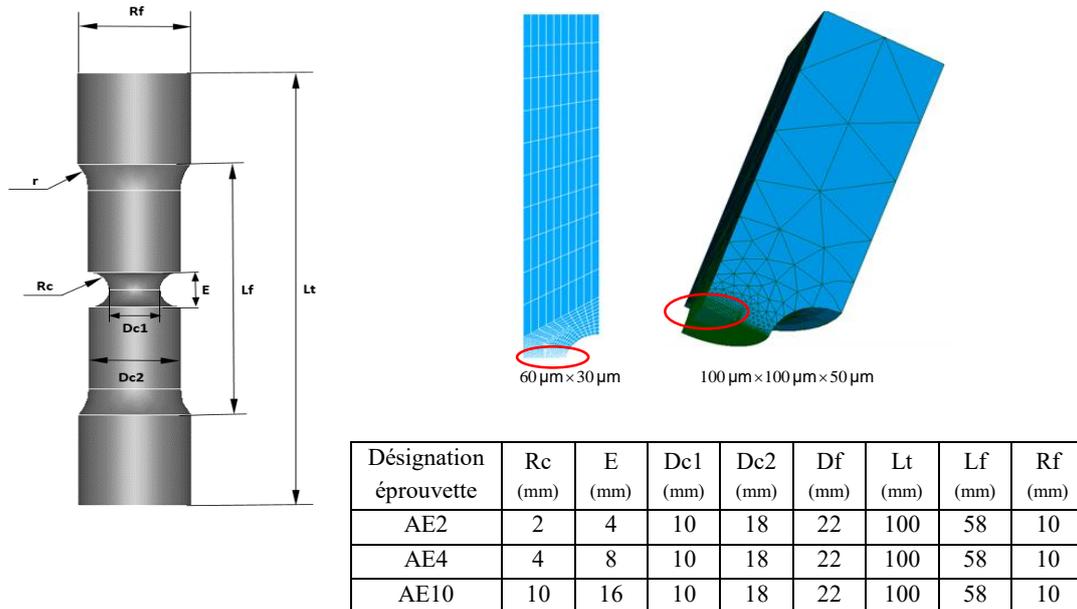


Figure A 1 : Géométrie et maillages des éprouvettes AE

Eprouvette CT

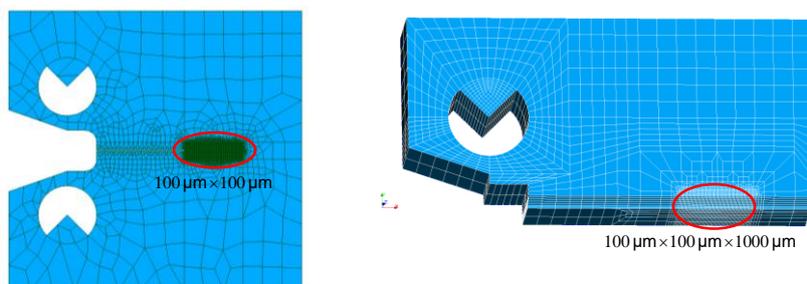
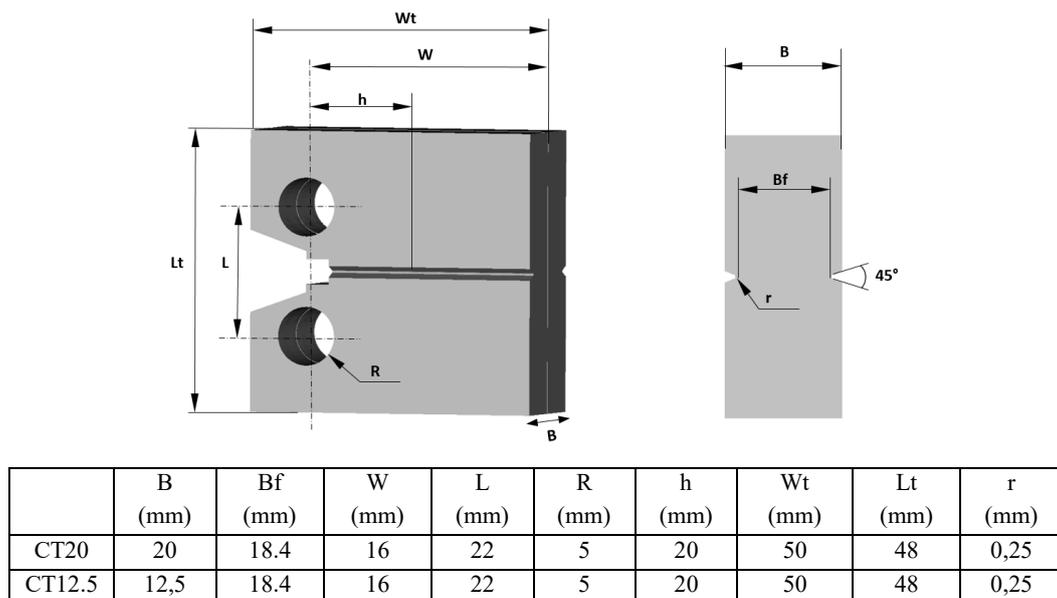
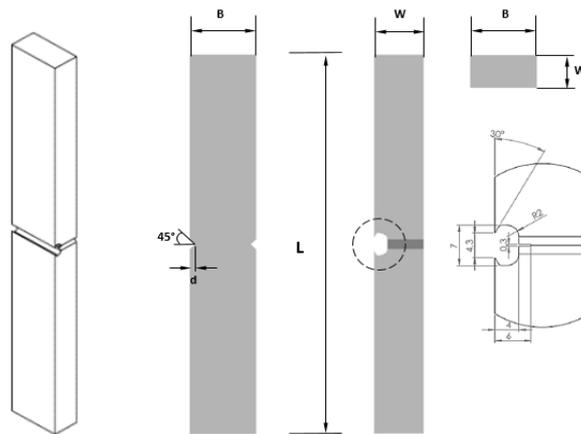


Figure A 2 : Géométrie et maillages des éprouvettes CT

Eprouvette SENT



	L (mm)	B (mm)	W (mm)	d (mm)	R2 (mm)
SENT20	230	20	15	1,5	2
SENT30	230	30	15	1,5	2

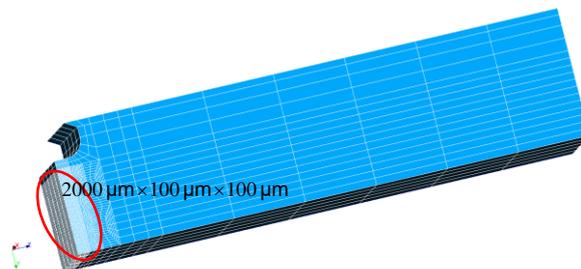


Figure A 3 : Géométrie et maillages des éprouvettes SENT

A6. Images des champs

Simulation de l'éprouvette AE4 en 2D et 3D

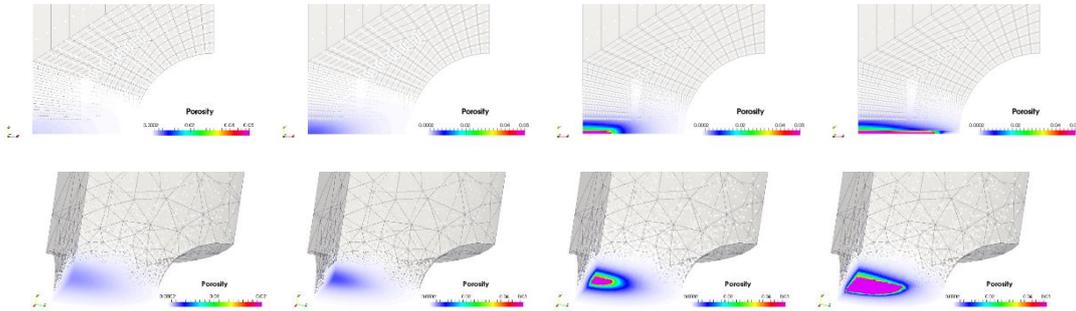


Figure A 4 : Champs de la porosité en 2D et 3D. De gauche à droite, le déplacement imposé en haut de l'éprouvette : 0,6 mm, 0,8 mm, 1,02 mm, 1,4 mm

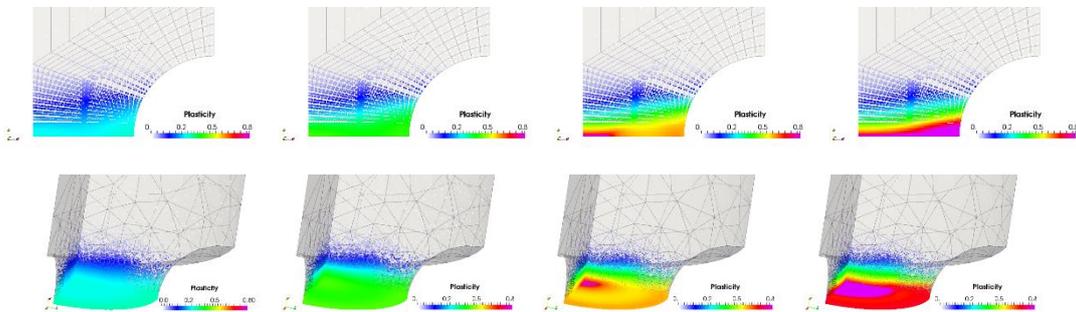


Figure A 5 : Champs de la déformation plastique cumulée en 2D et 3D. De gauche à droite, le déplacement imposé en haut de l'éprouvette : 0,6 mm, 0,8 mm, 1,02 mm, 1,4 mm

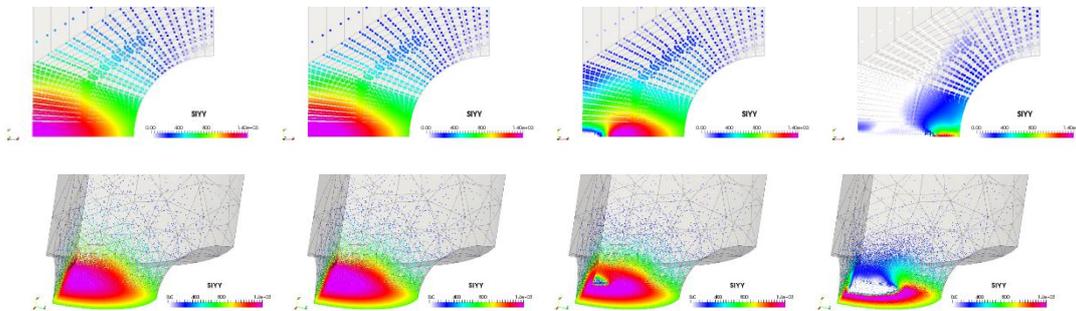


Figure A 6 : Champs de la contrainte σ_{yy} en 2D et 3D. De gauche à droite, le déplacement imposé en haut de l'éprouvette : 0,6 mm, 0,8 mm, 1,02 mm, 1,4 mm

Simulation de CT en 2D et 3D

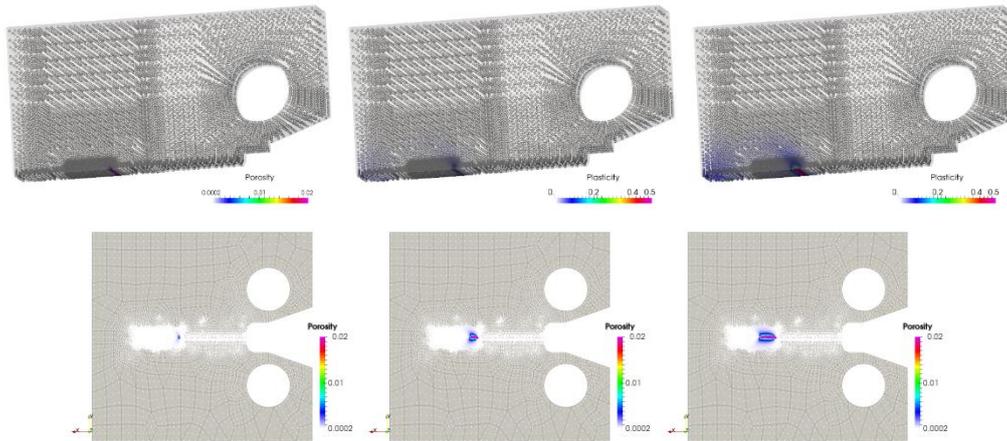


Figure A 7 : Champs de la porosité en 2D et 3D. De gauche à droite, le déplacement imposé à la goupille : 0,6 mm, 1,2mm, 1,8 mm

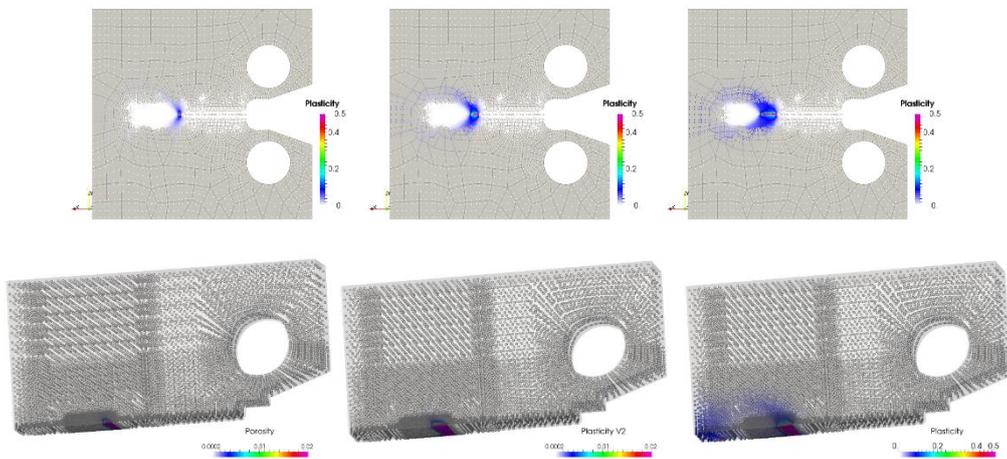


Figure A 8 : Champs de la déformation plastique cumulée en 2D et 3D. De gauche à droite, le déplacement imposé à la goupille : 0,6 mm, 1,2mm, 1,8 mm

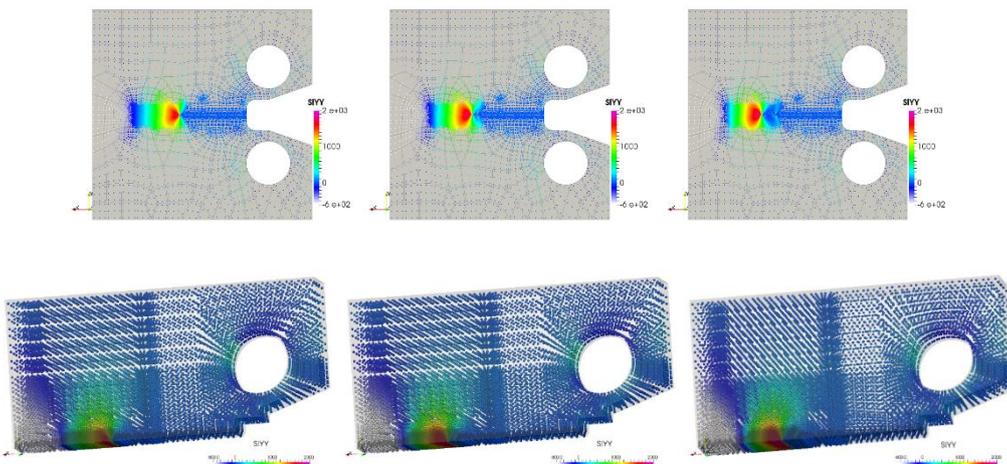


Figure A 9 : Champs de la contrainte σ_{yy} en 2D et 3D. De gauche à droite, le déplacement imposé à la goupille : 0,6 mm, 1,2mm, 1,8 mm

Simulation de SENT en 3D

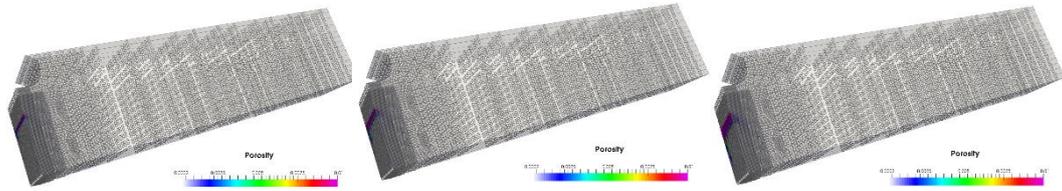


Figure A 10 : Champs de la porosité. De gauche à droite, le déplacement imposé au bord : 0,3 mm, 0,45 mm, 0,66 mm

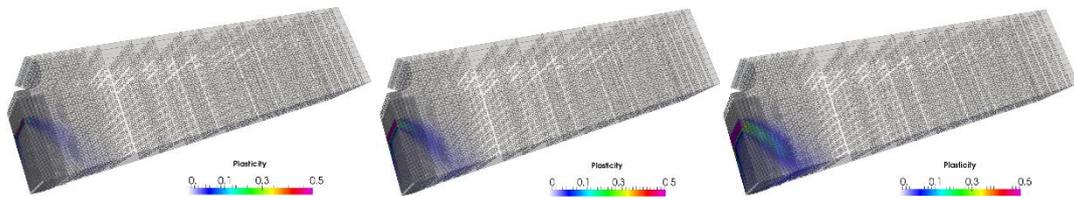


Figure A 11 : Champs de la déformation plastique cumulée. De gauche à droite, le déplacement imposé au bord : 0,3 mm, 0,45 mm, 0,66 mm

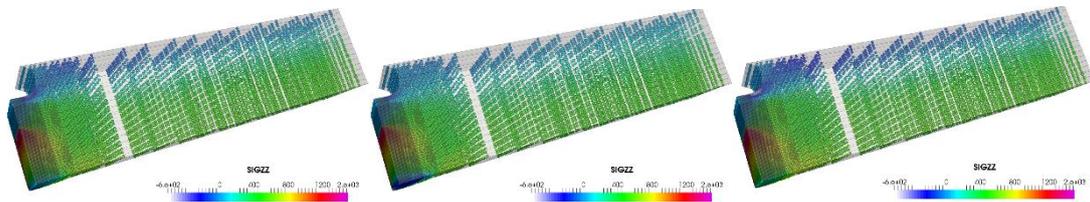


Figure A 12 : Champs de la contrainte de traction. De gauche à droite, le déplacement imposé au bord : 0,3 mm, 0,45 mm, 0,66 mm

Résumé

Cette thèse a pour objectif de développer une modélisation robuste pour l'endommagement ductile. En raison de l'adoucissement et du niveau de déformation élevé, les principales difficultés pratiques dans la simulation de l'endommagement ductile sont la dépendance au maillage et le verrouillage volumique. Dans ce travail, on choisit tout d'abord le cadre de grandes déformations en se basant sur un formalisme logarithmique. Puis, partant de la loi de Gurson-Tvergaard-Needleman transcrite en grandes déformations, on adopte une formulation non locale à gradient d'une variable interne qui permet de contrôler la localisation du dommage et traiter ainsi la dépendance au maillage. Ensuite, le modèle non local est couplé avec des éléments finis mixtes pour limiter le verrouillage volumique relatif à l'incompressibilité plastique. On aboutit ainsi à la construction d'un cadre de modélisation de l'endommagement ductile, indépendant du maillage et exonéré du verrouillage volumique. Les propriétés mathématiques et la performance numérique du modèle sont étudiées avec attention. Enfin, après une identification des paramètres sur un acier nucléaire, on réalise des simulations sur des éprouvettes (AE, CT, SENT) et sur une tuyauterie de réelle dimension afin de les confronter à des résultats d'essais.

Mots Clés

Endommagement ductile, modèle GTN, grandes déformation, verrouillage volumique, éléments mixtes, localisation de déformation, dépendance au maillage, régularisation non-locale, simulation, essais

Abstract

The major goal of this dissertation is to develop a robust model for ductile damage simulation. Because of the softening behavior and the significantly large deformation in ductile damage, two principle difficulties should be dealt with carefully: mesh-dependency and volumetric locking. In this thesis, we adopt a logarithmic finite strain framework in which the Gurson-Tvergaard-Needleman constitutive law is reformulated. Then a non-local formulation with regularization of hardening variable is applied so as to solve mesh dependency and strain localization problem. In addition, the non-local model is combined with mixed "displacement-pressure-volume variation" elements to avoid volumetric locking. Thereby we establish a mesh-independent and locking-free finite strain framework for ductile damage modelling. Attention is paid to mathematical properties and numerical performance of the model. Finally, after an identification work of a nuclear steel, we carry out simulations on normalized specimens (NT, CT, SENT) as well as an industrial tube in order to compare with experimental results.

Keywords

Ductile damage, GTN model, finite strain, volumetric locking, mixed finite element, strain localization, mesh-dependency, non-local regularization, simulation, experiment

Numéro national de thèse :
8610-4200126439