



**HAL**  
open science

# Modélisation et étude mathématique de réseaux de câbles électriques

Geoffrey Beck

► **To cite this version:**

Geoffrey Beck. Modélisation et étude mathématique de réseaux de câbles électriques. Modélisation et simulation. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT: 2016SACL006. tel-01421740

**HAL Id: tel-01421740**

**<https://pastel.hal.science/tel-01421740>**

Submitted on 22 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement inscripteur* : ENSTA ParisTech

*Laboratoire d'accueil* : POEMS (UMR 7231 CNRS-INRIA-ENSTA)

# THÈSE DE DOCTORAT ÈS MATHÉMATIQUES

*Spécialité* : Mathématiques Appliquées

**Geoffrey BECK**

Modélisation et étude mathématique de réseaux de câbles  
électriques

*Thèse soutenue le 31 Mars 2016 à l'ENSTA ParisTech*

*Après avis des rapporteurs* : GRIGORI PANASENKO (Université Jean Monnet de St. Etienne)  
CLAIR POIGNARD (INRIA Bordeaux)

*Jury de soutenance* : JEAN-FRÉDÉRIC GERBEAU (INRIA Rocquencourt) Examineur  
MARIA DOLORES GOMEZ (Université de Santiago  
PEDREIRA de Compostela ) Examineur  
SEBASTIEN IMPERIALE (INRIA Saclay) Co-directeur de thèse  
PATRICK JOLY (INRIA Saclay) Directeur de thèse  
MICHEL SORINE (INRIA Rocquencourt) Invité  
MARIUS TUCSNAK (Université de Bordeaux) Président du jury





---

---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Partie I Outils et résultats préliminaires sur les champs de vecteurs</b>	<b>13</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Champs de vecteurs définis sur un domaine borné de <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>17</b>
1.1 Préliminaires	18
1.1.1 Descriptions des fonctions poids considérées	18
1.1.2 Prise en compte de domaines non simplement connexes	19
1.2 Décompositions de Helmholtz	21
1.2.1 Théorème de Hodge-Weyl dans des domaines non simplement connexes	21
1.2.2 Décompositions de Helmholtz à poids	23
1.3 Espaces des fonctions harmoniques	24
1.3.1 Le lemme de conjugaison (cas scalaire)	29
1.3.2 Le lemme de conjugaison (cas matriciel)	34
1.3.3 Solutions des problèmes div-rot sans source	35
1.4 Analyse des problèmes de type div-rot	36
1.5 Inégalités de Poincaré-Friedrichs	37
1.5.1 Inégalités de Poincaré usuelles	37
1.5.2 Inégalités de Poincaré-Friedrichs	38
1.6 Démonstration des divers résultats du chapitre	39
1.6.1 Existence (et unicité) de la solution des problèmes div-rot (théorème 1.4.1)	39
1.6.2 Démonstration des inégalités de Poincaré-Friedrichs (théorèmes 1.5.1 et 1.5.2)	40
1.7 Problèmes div-curl à frontières libres	41
<b>2 Champs de vecteurs définis sur un domaine non borné de <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>45</b>
2.1 Préliminaires	45
2.1.1 Description de la géométrie considérée	45
2.1.2 Descriptions des fonctions poids considérées	49
2.2 Champs 3D dans un domaine borné	49
2.2.1 Les espaces harmoniques	49
2.2.2 Décompositions de Helmholtz à poids de champs 3D	51
2.2.3 Existence de solutions aux problèmes Div-curl	52
2.2.4 Démonstrations des divers résultats de la section	52
2.3 Présentation des problèmes Div-curl posés sur des domaines non bornés	55
2.4 Espaces harmoniques dans un domaine non borné	57
2.5 Analyses des problèmes Div-curl dans les cylindres semi-infinis	61
2.5.1 Définition de bases de fonctions pour la séparation des variables	62
2.5.2 Structure des solutions dans les cylindres semi-infinis via la séparation des variables	63
2.5.3 Conditions transparentes	66

2.6	Problèmes réduits sur un domaine borné avec des conditions transparentes . . . . .	68
2.6.1	Problèmes avec conditions aux bords de type tangentielle réduits au domaine de calcul . .	68
2.6.2	Problèmes avec conditions aux bords de type normale réduits au domaine de calcul . . . .	70
2.7	Décompositions des solutions des problèmes Div-curl (décomposition en profils) . . . . .	73

**Partie II Mathematical modeling of multi-conductors cables 75**

**3 Electromagnetic waves in multi-conductors cables 77**

3.1	Description of the geometry . . . . .	77
3.1.1	First description : a tube of variable cross-section . . . . .	78
3.1.2	Second description : a reference section and a continus group of mapping . . . . .	79
3.2	Dielectric materials' characteristics . . . . .	80
3.3	Maxwell's equation in "thin" cables . . . . .	81
3.4	A scaling to work in the reference geometry . . . . .	83
3.5	Motivation and introduction to asymptotic analysis . . . . .	84
3.5.1	Formal asymptotic expansions . . . . .	84
3.5.2	The expected 1D model . . . . .	86
3.5.3	Error estimates . . . . .	86
3.6	A remark on cables without inner-wire . . . . .	87

**4 Limit telegrapher model 89**

4.1	Derivation of the generalize telegrapher's model in frequency domain . . . . .	89
4.1.1	Identification of the limit terms : transverse polarization . . . . .	90
4.1.2	Establishment of the telegrapher's equation in the frequency domain . . . . .	92
4.2	Derivation of the generalized telegrapher's model in time domain . . . . .	99
4.2.1	High frequency behavior . . . . .	100
4.2.2	The "memory kernels" $\mathbf{K}_e$ and $\mathbf{K}_m$ in time domain . . . . .	102
4.2.3	Generalized telegrapher's model in time domain . . . . .	106
4.3	Properties of the generalized telegrapher's model. . . . .	107
4.3.1	Well-posedness of the limit model . . . . .	108
4.3.2	Propagation velocities . . . . .	109
4.3.3	A remark on undetectable defects. . . . .	113
4.4	Application case : concentric composite coaxial cables . . . . .	114
4.4.1	The annulus case . . . . .	114
4.4.2	The general case . . . . .	115

**5 Higher order telegrapher models 121**

5.1	Previous chapter results summary . . . . .	121
5.1.1	Mathematical framework and related assumptions . . . . .	121
5.1.2	Asymptotic analysis Anstatz . . . . .	122
5.1.3	Some results about the limit model . . . . .	123
5.2	Formal derivation of the first order correctors . . . . .	124
5.2.1	First order transversal fields . . . . .	124
5.2.2	First order telegrapher's equation . . . . .	125
5.2.3	First order longitudinal fields . . . . .	129
5.3	First order corrector in time domain . . . . .	132
5.3.1	The harmonic potentials in time domain . . . . .	132
5.3.2	The electrostatic and magneto-static potentials . . . . .	135
5.4	Formal derivation of the second order correctors . . . . .	136
5.4.1	Identification of order 2 : the transversal fields . . . . .	136
5.4.2	Second order telegrapher's equation . . . . .	137
5.4.3	Second order longitudinal fields . . . . .	142
5.5	Second order effective telegrapher's model . . . . .	144
5.5.1	Study of the improved effective telegrapher model . . . . .	145
5.5.2	Error between the effective model and the asymptotic model . . . . .	150
5.5.3	Second order effective model in time domain . . . . .	153
5.6	Concentric composite coaxial cable case . . . . .	153

<b>6</b>	<b>Error estimates between the telegrapher's models and the Maxwell's theory</b>	<b>155</b>
6.1	Introduction . . . . .	155
6.1.1	The general approach . . . . .	156
6.1.2	The outline of the chapter . . . . .	157
6.1.3	Some assumptions and notations . . . . .	159
6.2	Estimates for scaled Maxwell's equations . . . . .	160
6.2.1	Estimates for scaled Maxwell's equations . . . . .	161
6.2.2	Estimation of the rotational . . . . .	161
6.2.3	Estimation of the $x_3$ -derivative of the electromagnetic fields . . . . .	162
6.2.4	Estimation of the divergence of the electromagnetic fields . . . . .	162
6.2.5	Estimation of the longitudinal fields . . . . .	163
6.2.6	Definition of the electrical potentials and currents . . . . .	164
6.3	Definition and stability analysis of the truncated and effective telegrapher model . . . . .	166
6.3.1	Definition of the ("truncated" asymptotic) approximation model . . . . .	166
6.3.2	Stability of the ("truncated" asymptotic) approximation model . . . . .	168
6.3.3	Error estimates between the effective and the truncated model . . . . .	169
6.4	Truncature error estimates . . . . .	169
6.4.1	Estimation at order $O(\delta^P)$ : convergence results for $P > 0$ . . . . .	172
6.4.2	Estimation of the longitudinal fields . . . . .	172
6.4.3	Estimation of the error on the residual by the use Poincaré-Friedrichs inequalities . . . . .	173
6.4.4	Error estimate on the electrical potentials and currents . . . . .	175
6.5	Collecting all the results to prove and improve the main theorem . . . . .	180
6.5.1	Truncature error estimates for the limit order . . . . .	180
6.5.2	Truncature error estimation for orders $p = 1, 2$ . . . . .	181
6.5.3	Error estimates in time domain . . . . .	182
6.6	Two generalizations . . . . .	184
6.6.1	The non cylindrical case . . . . .	184
6.6.2	Higher orders case . . . . .	185

**Partie III Modélisation de la résistance d'un câble par la considération de l'effet de peau** **187**

<b>7</b>	<b>A la recherche de la resistance perdue</b>	<b>189</b>
7.1	Le discours de la méthode asymptotique . . . . .	190
7.1.1	Description de la géométrie considérée . . . . .	190
7.1.2	Analyse dimensionnelle . . . . .	193
7.1.3	Couche mince où a lieu l'effet de peau . . . . .	197
7.1.4	A la recherche de la conjecture asymptotique . . . . .	198
7.2	Du coté des résultats escomptés . . . . .	199
7.2.1	A l'ombre des conditions aux limites de type GIBC en fleurs . . . . .	199
7.2.2	La resistance retrouvée . . . . .	202
7.2.3	L'estimation d'erreur disparue . . . . .	202
7.3	Estimation a priori et décroissance exponentielle dans les conducteurs . . . . .	202
7.3.1	Domaine de Laplace à la place du domaine temporel . . . . .	202
7.3.2	Estimations d'énergies a priori . . . . .	204
7.3.3	Décroissance exponentielle dans les conducteurs . . . . .	204
7.3.4	Estimations dans le domaine temporel . . . . .	207
7.4	De l'étude des champs intérieurs aux GIBC . . . . .	207
7.4.1	Une remarque préliminaire issue des champs extérieurs . . . . .	208
7.4.2	Expression des champs intérieurs dans les coordonnées locales . . . . .	208
7.4.3	Obtention des GIBC . . . . .	212
7.4.4	Remarque concernant le cas non cylindrique . . . . .	212
7.4.5	A la recherche du temps perdu . . . . .	213
7.5	Vers le modèle des télégraphistes incorporant l'effet de peau . . . . .	214
7.5.1	Champs électromagnétiques limites et modèle des télégraphistes limite . . . . .	215
7.5.2	Champs électromagnétiques et modèle des télégraphistes à l'ordre 1 . . . . .	216
7.5.3	Champs électromagnétiques et modèle à l'ordre 2 . . . . .	220
7.6	Un amour de modèle effectif . . . . .	224

7.6.1	Positivité des matrices effectives . . . . .	225
7.6.2	Le Temps retrouvé . . . . .	226

**Partie IV Modeling electrical Networks 231**

<b>8</b>	<b>Modeling a junction between coaxial cables when there are nos losses and when the electromagnetic waves velocity is constant</b>	<b>233</b>
8.1	Modelling a coaxial cables junction problem . . . . .	234
8.1.1	Geometry of the problem . . . . .	234
8.1.2	According to Maxwell's theory . . . . .	236
8.2	The 1D model . . . . .	237
8.2.1	The quantum limit graph . . . . .	237
8.2.2	Signification of the effective terms $C$ , $L$ , $\mathcal{C}$ and $\mathcal{L}$ . . . . .	239
8.3	The matched asymptotics method . . . . .	245
8.3.1	Asymptotic expansions assumptions . . . . .	245
8.3.2	How to determine the fields $\mathbf{E}_J^p$ , $\mathbf{H}_J^p$ , $\mathbf{E}_l^p$ and $\mathbf{H}_l^p$ . . . . .	246
8.4	Study of the limit electromagnetic fields . . . . .	248
8.5	Study of the first order electromagnetic fields . . . . .	250
8.5.1	The first order electromagnetic far-fields . . . . .	250
8.5.2	The first order electromagnetic near-fields . . . . .	251
8.5.3	Application of the matching principle . . . . .	255
8.6	Toward the effective model . . . . .	256
8.6.1	An error estimate between the effective model and the asymptotic expansion . . . . .	257
8.6.2	Approximation of the electromagnetic fields in the junction . . . . .	258
<b>9</b>	<b>Modeling a junction between multi-conductors cables in a very general case</b>	<b>261</b>
9.1	Modelling a coaxial cables junction problem . . . . .	261
9.1.1	Problem's geometry . . . . .	261
9.1.2	Topological Features . . . . .	264
9.1.3	Maxwell's equations . . . . .	265
9.2	The matched asymptotics method . . . . .	265
9.2.1	Junction and overlap parts . . . . .	265
9.2.2	"Normalized" geometries . . . . .	266
9.2.3	Asymptotic expansions assumptions (and matching principle) . . . . .	268
9.2.4	The 1D improved model . . . . .	269
9.3	Div-curl problem in waveguides with $L$ bored cylindrical ends . . . . .	272
9.3.1	The harmonic spaces . . . . .	273
9.3.2	Links between this constants, the potentials $V_{q,l}$ and currents $I_{q,l}$ . . . . .	276
9.4	Application to the interior fields . . . . .	279
9.4.1	Order 0 . . . . .	280
9.4.2	Order 1 - interior Kirchhoff's laws . . . . .	280
9.5	Developpement of the wanted model . . . . .	286
9.5.1	Determine completely all the first order interior electrical potentials and currents . . . . .	286
9.5.2	The effective model . . . . .	288
9.5.3	The error between the effective model and the asymptotic one . . . . .	290

**Partie V Annexes 293**

<b>10</b>	<b>Formulaire sur les opérateurs différentiels, les espaces et les formules de Green</b>	<b>295</b>
10.1	Diverses relations algébriques reliées aux opérateurs différentiels 2D . . . . .	295
10.2	Diverses relations algébriques reliées aux opérateurs différentiels 3D . . . . .	296
10.3	Espaces fonctionnels et diverses formules de Green . . . . .	296
10.4	Opérateurs curvilignes et dans une couche mince . . . . .	299

<b>11 Topologie algébrique, notion de "trou" et "d'anse"</b>	<b>301</b>
11.1 Simple connexité et notion de "trous" . . . . .	302
11.1.1 Homotopie . . . . .	302
11.1.2 Notions de "trous" et de "cavités" . . . . .	303
11.2 Cas de la dimension 2, théorie des capacités . . . . .	304
11.2.1 Capacité . . . . .	305
11.2.2 Inductance . . . . .	307
11.2.3 Transformation conforme (par morceaux) . . . . .	308
11.3 Le cas des volumes . . . . .	309
11.3.1 Capacité et inductance . . . . .	312
11.3.2 Le cas des domaines non-bornés . . . . .	312
11.4 L'art d'aimer . . . . .	313
<b>12 Transformation de Laplace et dérivées fractionnaires</b>	<b>315</b>
12.1 Transformée de Laplace à valeur dans un espace de Hilbert . . . . .	315
12.1.1 Définition de la transformée de Laplace . . . . .	315
12.1.2 Payley-Wiener : une certaine équivalence entre le domaine de Laplace et le domaine temporel	316
12.1.3 Inversion de la transformée de Laplace . . . . .	317
12.1.4 La transformée de Fourier comme "trace" de la transformée de Laplace sur le domaine fréquentiel . . . . .	317
12.2 D'une estimation dans le domaine de Laplace à une équivalente dans le domaine temporel . . . . .	317
12.3 Problèmes avec intégrateurs et dérivées fractionnaires . . . . .	322
12.3.1 Calcul infinitésimal fractionnaire . . . . .	323
12.3.2 Symbole des intégrateurs et dérivées fractionnaires . . . . .	324
12.3.3 Positivité de la dissipation associée aux opérateurs fractionnaires . . . . .	324
<b>13 Notion de dérivée de forme</b>	<b>327</b>
13.1 Déformation d'un domaine et vitesse de déformation . . . . .	327
13.1.1 Description lagrangienne . . . . .	327
13.1.2 Description eulérienne . . . . .	328
13.1.3 Equivalence entre les deux descriptions . . . . .	328
13.2 Dérivées de forme . . . . .	329
13.2.1 Définition de la dérivée eulérienne de forme . . . . .	329
13.2.2 Les théorèmes de transports de Reynolds . . . . .	330
13.2.3 Compléments concernant le gradient de forme . . . . .	330
13.3 Dérivation eulérienne de forme de solutions d'EDPs . . . . .	331
13.3.1 Problèmes aux frontières libres de type Dirichlet . . . . .	331
13.3.2 Problèmes aux frontières libres de type Neumann . . . . .	331
<b>Conclusion</b>	<b>333</b>
<b>La perspective Nevsky</b>	<b>343</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>344</b>



---

# REMERCIEMENTS

---

Mon premier remerciement est dédié aux courageux(es) lecteurs(rices) qui ont décidé de s'engouffrer dans cet épais bordel mathématique. Grâce à vous, ces longs mois d'accouchement ne sont pas vains.

Je remercie ensuite ceux sans qui cette thèse n'aurait pu naître. Merci à Patrick Joly. Tu as accepté d'accorder ta confiance à un farfrelu qui, lors du premier entretien, t'a sûrement davantage donné de raisons de l'envoyer en asile qu'à POEMS. Ton humour et tes étourderies te rendent accessible, car sinon, étant donné ta vivacité mathématique, nous peinerions en ta présence. Je remercie ensuite Sébastien Impériale. C'est certainement à ton contact que j'ai commencé à m'éloigner des incessantes et futiles "généralisations" qui inondent mon esprit et à rendre moins ésotérique ma prose mathématique. Etant donné que, systématiquement, nous pensons l'opposé, ton point de vue a enrichi le mien. J'espère qu'à l'avenir, malheureusement les voies de l'embauche en recherche sont impénétrables, nous travaillerons ensemble. Merci pour la relecture du chapitre sur les estimations d'erreurs. Nous nous sommes bien amusés, même si tu as bien dû finir par tolérer mon incapacité à communiquer avec un ordinateur, surtout quand ce dernier comprend davantage le C++ que les vers. Grâce à vous, j'ai pu goûter aux délices insatiables de la recherche. Maintenant je veux une nouvelle part de dessert.

Je remercie mes rapporteurs M. Panassenko et M. Poignard tant pour la force d'âme dont ils ont fait preuve que pour la finesse de leurs lectures et relectures. Je suis très heureux et honoré que vous vous soyez occupés de cette fastidieuse et ingrate tâche. M. Panassenko, je regrette tant que les déboires au centre des visas ne m'ont pas donné l'occasion d'enfin fouler le pas de Moscou. J'espère qu'à l'avenir nous aurons le temps de mettre en commun nos études sur les jonctions. Merci à tous mes membres du jury et plus particulièrement à Marius Tucsnak qui est en partie responsable de mon obstination à vouloir travailler dans le domaine des EDP et à Michel Sorrine qui a depuis le début suivi l'avancé des travaux et y a participé de multiples manières. Tes questions ont stimulé une étude approfondie de la matrice LC et tes remarques m'ont permis de comprendre la physique des modèles. Je remercie aussi tous les participants de l'ANR SODDA.

Merci à tous les membres de l'UMA. Les permanents sont toujours très accessibles et amicaux. Un grand merci à tous et plus particulièrement à Patrick, Laurent, Marc, Jean-François, Sonia, Marie-Christine pour vos conseils et conversations. Merci à Frédéric pour les cours de systèmes dynamiques qui sont, pour les chargés de TD, extrêmement bien préparés, sans exclure les prises de liberté adaptables aux élèves grâce à des exercices riches en différentes résolutions ainsi que dans le choix des exercices supplémentaires. Francesco qui aime répéter à quel point il aime les mathématiques et à quel point il peut être em... alors que tout va bien. Anne-Sophie, tu fais preuve d'une très grande humanité, toujours à l'écoute et dispensatrice de bons conseils. Nul doute qu'avec ton sens des responsabilités POEMS est en de très bonnes mains. Christophe et Maurice, car ils pourraient être vexés tant ils sont fusionnels. Que vous êtes chaleureux! Vous mettez tout le monde à l'aise. Vos rires résonnent dans le laboratoire et sont contagieux. Enfin je remercie le très illustre Pr. Perez pour être lui-même, érudit, drôle, bon vivant, oenophile... et pour tous les moments que j'ai eu la chance de passer en sa compagnie - et plus particulièrement les soirées marseillaises avec le Pr. Duval, la bouillabaisse et V.I. Arnold - pour ses discours scientifiques, historiques, philosophiques, littéraires et culinaires. Merci pour le vin. Merci aux super-secrétaires Corinne, Sylvie-Anne, Hélène et surtout Myriam (avec qui nous nous sommes battus contre le parti communiste soviétique) pour nous soulager quand les tâches administratives dépassent l'entendement bien faible du mathématicien.

Merci à tous les doctorants et post-doctorants, anciens et récents, qui ont partagé avec moi quelques précieux instants de répit lors de pause-café ou de conférences. Simon, mon co-bureau depuis le début. Aliénor et Delphine pour les livres. Maxence, M. Terrine de Lapin, Brochet et Champignons. Pierre-Louis, pour les discussions musicales. Valentin, rappelle-toi le Canum. Rémi, petit souvenir d'une partie de Go à partir des



poèmes de Roubaud. Antoine T., merci pour ton amicalité. Nicolas S., pour les digestifs. Bérangère, pour avoir répondu à mes questions concernant les développements asymptotiques raccordés. Maintenant, il nous faut marier Kirchhoff et les milieux périodiques. Camille, un (très) grand merci pour ta (très) grande gentillesse. Antoine B., tu as une soif de découvertes en tout genre (qui doit se poursuivre dans la voie du free-jazz). Zouhair, tous les jours où tu étais présent à l'ENSTA, tu es venu me saluer avec un grand sourire. Guillaume, je suis très vraiment très heureux de t'avoir rencontré. Alicia, continue à tant te passionner pour les sciences (et la Russie, le jazz, le baroque, la poésie...). Maryna, j'ai été proprement impressionné par tes progrès en français, au début j'ai peiné à te suivre en anglais tant le débit de conversion était élevé et bientôt je ne te suivrai plus même dans ma langue maternelle. Bien entendu, tous ces progrès n'auraient pas eu lieu sans ton intarissable envie de communiquer et bonté. « Pour qui sont ces serpents qui sifflent sur vos têtes ? ». Aurore, j'ai pris un grand plaisir à converser avec toi quasiment tous les midis où tu étais là. Hélas, tu es partie bien trop tôt. Bonne chance pour l'agrégation. Merci à toi Jaco, nous avons beaucoup ri et débattu. Malheureusement, ensemble le temps passait bien trop vite sur le lieu de travail. Heureusement qu'en compensation, nous nous sommes épaulés lors de nombreuses nocturnes mathématiques. Olivier, moi je vote Jaco car le serpent est son prophète. Bientôt les louves boiront à ton charisme. Et je dois aussi remercier Félix, Grégoire, Athéna, Nicolas K. et Pablo. Pour finir, ceux qui auront en héritage le bureau 1J1846, bonne descente. J'ai partagé avec vous tous d'agréables moments, surtout durant les psaumes et conférences. D'ailleurs voici un feuillet écrit le dernier jour de Waves.

Souvenir de douces saveurs salicylés,  
De jasmin, de couscous et de blanches nuitées.  
Dans la ville au blanc port, aux moeurs arabités,  
Mes pensées s'évaporent, nimbes de narguilé.

Elles air à la suite du palla lycénidé  
De la Néréide au parfum nocuité.  
Elle laisse indolemment, tel une divinité,  
Flâner ses vaporeux cheveux hespéridés.

Ses bleus yeux caressent l'éclat de Séléne  
Qui des astres inertiels célèbre l'hyménée.  
Et l'éclat du ciel dore l'onde de cristal.

N'oublie durant ton voyage qu'elle fut assené  
Son pourpre sang ruissèle sur le marbre veiné.  
D'avoir refusé fut à la reine fatal.

*Didon embrasse l'aurore glacé avant d'expirer dans les flots de ma fumée*

★

Merci à ma famille, composée de ma mère et de mon petit frère. La partie la plus importante, la banquet, de la soutenance est maintenant entre vos mains. Heureusement que vous m'en déchargez pour me consacrer au seul spectacle. Il sera sans nul doute excellent. Par rapport au travail que vous fournissez à la ferme je me sens un peu comme Platonov. Un jour peut-être je pourrais vous rendre tout ce que vous m'avez apporté. Merci aux gens rencontrés à Paris. Flo, mon colocataire préféré. Ce fut un grand plaisir de partager la vie de tous les jours avec toi. Jimena, merci de toujours ramener avec toi une partie de ton soleil. Phil le cataphile qui m'a initié. (Merci aussi à Gilles Thomas pour 1J 1846). Rémy, nos conversations philosophiques ne font que débiter. Merci aussi à Marisya, Flora, Elodie, Addy, Agathe. Merci Lukas pour le dîner de Poznan et ton hospitalité, mon coeur s'est troublé et a eu la réminiscence de nos partages Nancéiens. Merci à ceux avec qui j'ai partagé des années dorées à Nancy (Roxanne, Carlos, Alimou, Anne-Laure, Claire, la bande Turinaze, la bande Boudonville, les colocations à Commanderie...). Le jour du départ vous m'avez fait pleurer. « Et l'on revient, parlant du beau jour qu'on regrette. Qui s'est passé vite... et de flamme discrète. ».

Enfin une petite note plus intime pour des amis particuliers qui certainement se reconnaîtront à l'événement cité. La première lettre que j'eus reçu, du moins dont je me souviens, fut de toi. Tu y disais que tu faisais un glacier et que quand tu rentrerais de vacances, nous jouerions aux Schtroumpfs. Nous nous sommes raconté des histoires de longues nuits avant que l'on nous rappelle qu'il existe aussi un monde extérieur à la petite enfance. Tout a commencé par une connivence musicale, elle a bien duré sept ans, mais nous avons surtout "capitalisé" sur nos profondes connaissances de l'intellect de l'autre. Nous n'avons jamais peur de nous blesser par un excès

de sincérité, car nous savons que nous ne nous jugeons absolument pas. Nous avons tant de choses à nous dire et curieusement nous nous voyons extrêmement peu. Pourtant, nous évoluons de manière complémentaire. La neige et son long manteau suspendait l'espace et le temps dans une sempiternelle nostalgie contemplative. Engouffrés et protégés dans son manteau, nous pouvions nous confier l'un à l'autre tout le collège, le lycée et bien après. Dire que nous partagions aussi cette immonde musique. La première charmante demoiselle qui m'ait choisi en roi pour l'épiphanie. Est-ce notre première communication télépathique ? Nous avons bien heureusement fait des progrès dans ce domaine, car nous nous voyons toujours trop peu. Mais à chaque fois que je te vois, tu ressens si bien mes émotions, que mes rêves retrouvent leur fougue. Un ange étrange est soudainement apparu la première semaine du lycée et a bercé mes jeunes songeries avant de trop souvent se volatiliser. À cette époque, le théâtre ne nous avait pas encore appris à canaliser nos passions. J'avoue avoir encore beaucoup de progrès à faire pour cela. « Admettons, Hedda, qu'un homme, au petit matin, après une nuit de beuveries et d'égarements... ». Mother of invention. Zappa, Frank Zappa, Zappa Frank, Frank Vincent Za pas (j'ai groové). Une imposante racaille : « Eh mam'zelle ! Pardon, veuillez m'excuser monsieur. Au regard de votre look (atour) je présume que vous intéressez à l'art. Je vous amène dans une rue glauque. » Mon frère de galère, je n'ai pas regretté. Une rue tout de même moins glauque que ton esprit. Pourtant, sur d'autres sujets tu es la pureté et la bonté même avec un halo apaisant. Tu as, une fin d'après-midi, été mon guide esthétique et alors j'ai levé les yeux. À cette époque, trop souvent baissé vers les splendeurs de la ville que du doigt et en souriant, « telle la fée au chapeau de clarté » tu me montrais. Le hasard nous a fait nous retrouver. Le peut-il encore ? Un jour, j'ai reçu de toi une magnifique planche de BD que seul ton immense talent pouvait mettre en forme. Toutes les marques d'amitiés que tu y témoignais m'avaient profondément bouleversé et comblé de félicité. Elle avait la saveur du fruit mûri de nos débats tant littéraires que philosophiques dont je ne me lasse jamais. Après des heures bloquées dans la neige qui en gerbe d'un enfer glacé tombait densément sur la route Nancy-Strasbourg. Un exquis fondant au chocolat, dont tu m'as enseigné la douce saveur, m'attendait tout juste cuit. Quelle charmante attention, comme toutes celles que tu as eues à mon égard les week-ends où j'étais chez toi. J'ai trouvé le repos post-concours en nous baladant au jardin botanique. Et violemment la porte de la voiture se ferma... à clef, avec, bien entendu, sinon ce ne serait pas assez romanesque, les clefs à l'intérieur de cette dernière. Nos portables, évidemment, déchargés, ton frère injoignable... quel drame. Oh non, quelle joie, quelle chance, quelle grâce. Depuis nous n'avons cessé de nous confier nos petits plaisirs et drames et surtout nos phantasmes et frustrations. Quel soulagement se fut de nous rencontrer. Cet accroc a finalement catalysé une de mes plus riches rencontres. Je ne te comprends pas ! C'est comme du Piazzolla. Alors, mon ami je compatis. Comment te sens-tu ? Stan Getz. La même chose. Et maintenant ? Garcia-Fons. Évidemment. Quoi ? Jazz. Certainement. Ton amitié m'est aussi nécessaire que What goes around. Nous pouvons pendant un an s'aventurer loin de l'autre. Et le jour des retrouvailles, nul besoin d'effusions. C'est comme si la veille nous nous étions vus, comme si nous vivions ensemble. Partageons à jamais, du moins avant que tu t'endormes dans ta house, nos violentes passions musicales. Et ressers-moi un Mingus bien tourné. Marcel L'Herbier, la confiture de lait coulait à flot et bien entendu, nous avons succombé. Les étoiles brisées fondent en poussière de lune, mais ne parviennent à saturer de leurs germes noircis le passage ondulé de ta chevelure d'aurore rosée. Juste avant ton départ, tu as chanté un hommage aux moments que nous avons passés à Boudonville à cueillir les trésors en chacun de nous. Mes yeux humectés de perles ont imposé silence. L'écho de cette chanson m'a heureusement hanté jusqu'à ton retour. Hélas, ce n'était que pour quelques années. « Je suis sûr, moi, que le jour du départ sera la veille des larmes. » Le soleil, ce jour-là, nous a octroyé des grâces que la saison ne pouvait pas même nous laisser espérer. Le marais du poitevin était gorgé de lumière et nos discussions, en contrepoint, ne pouvaient plus se terminer. Elles furent riches et je ne suis pas encore parvenu à puiser toute ta science. Mais j'ai déjà bien abusé de tes compétences de bricoleur et de correcteur d'anglais. Nous avons actualisé nos âmes. La sourate des génies est toujours au-dessus de mon lit pour me transmettre un peu du repos apaisant qui rayonne de toi. Beuh, nous noyons dans le stupre notre spleen dès le premier jour, mais savons lors de débordements que l'épaule de l'autre est suffisamment solide (et le frigo rempli de légumes alsaciens). Nous n'arrêtons nos incessants rires ou nos quelques pleurs seulement pour nous brûler les lèvres à l'ambrosie. Ah Paolo... Doppeladler. Par contre un jour il nous faudra nous souvenir qu'en France les gens comprennent les blagues en français et que du coup il n'est pas urbain de se comporter comme en Tchèque. L'éclair brûlant dans l'infinie pluie a transporté le temps bien ailleurs que dans nos yeux. Depuis, disons que nous nous sommes souvent compris sans même nous parler. Partageant de similaires angoisses, la confiance nous fut naturelle dès la scène d'exposition et le prologue a débuté bien avant la première parole. L'intuition nous porte. La pièce sera longue. Je propose de Viollet-le-duciser les pays de l'est en adjoignant le Château La Roca, en ne choisissant que la partie historique qui nous intéresse. Un peu d'éclectisme ne fait pas de mal à la réalité. Les vacances avec toi sont toujours géniales. Un jour, tu t'es plus senti chez toi chez moi que chez toi et que moi chez moi. Et cela chez tous les mois. Miaouh, rrrhh, kssss. Tant finalement que je ne conçois plus un espace sans le partager avec toi. La porte de ma cuisine t'est toujours grande ouverte. Bien sûr les bons moments ne doivent pas être balayés devant les soucis. Je ne les oublie pas. « Mais Geoffrey, tes messages ressemblent à des adieux or moi je compte bien te revoir. Ne crois pas te débarrasser de moi comme ça. Prends soin de toi alias tâta... »

La carte, c'est pour les faibles. Les courses, c'est pour les faibles. La baguette, c'est pour les faibles. S'orienter grâce au soleil, c'est pour les faibles. Pourtant, nous ne nous sommes ni perdus dans la lande, ni dans le grand dédale (à noter que cette page est rédigée en mars)... et nous avons enfin trouvé 1J1846. Ensemble, nous ne donnons jamais le même sens, autre que peut-être à cette amitié qui tout juste commence. Elle va perdurer... même si tu es ultra weak et que je suis un violent.

★★

Je remercie avec vénération ces forçats de l'absolu qui ont ramené d'insondables abîmes les célestes feux divins. Je me suis consumé à vos ardentes grandes oeuvres. Il serait déraisonnable de nommer tout mon panthéon, mais voici une matrice qui, en plus d'avoir supporté mes troubles pendant la thèse, a porté mon existence.

Mingus	Galliano	Sun Ra	Dave Holland	Brahem
Monteverdi	Prokofiev	Stravinsky	Piazzola	Bartok
Kandinsky	Chagall	Schiele	Delaunay	Denis
Lang	Tarkovsky	Reitz	Resnais	Dreyer
Stendhal	Tolstoi	Ovide	Gogol	Wittgenstein
Mallarmé	Char	Valérie	Musset	Baudelaire

Sans oublier ceux qui trônent au sommet de ce cosmos. Thought waves-heat waves-all vibrations-all paths lead to Coltrane. Thank you John. His way... it is so lovely... it is gracious. Merci à William Christie et l'ensemble Les arts florissants pour rappeler la maxime pascalienne de la misère et de la grandeur de l'homme. Son coeur est fait de cristal que la musique ancienne peut briser ou élever aux cieus tant la rhétorique des passions qu'elle convoque est volcanique. Les charmes de vos interprétations sont de véritables bénédictions. Le parchemin des anges enfin déchiffré. Dostoïevski n'a pas seulement réussi à faire transparaître l'exact psyché d'un personnage, mais de toute une société avec tout autant de possédés que de perdus dans leur dédale intérieur. Il est pour moi le grand phare qui éclaire l'existence humaine. Dompteur de folie. Nerval enfin

C'était bien lui, ce fou, cet insensé sublime...  
Cet Icare oublié qui remontait les cieus,  
Ce Phaéton perdu sous la foudre des dieux,  
Ce bel Atys meurtri que Cybèle ranime!

\*\*\*

Je tiens aussi à rendre hommage à deux femmes à qui je n'ai pas eu le temps de témoigner mon estime, ma reconnaissance et mon amour. L'une s'est battue avec acharnement contre la mort, la seconde contre un adversaire pas moins obstiné et fourbe, la vie. La fortune n'a guère dédaigné déplacer sa roue pour toi et pourtant tu as réussi à bâtir sur d'angoissantes ruines de généreux palais. Tu culpabilises tant de ne pas avoir construit ce à quoi tu aspirais alors que ton chemin est immense. Ne paie plus les erreurs des autres et ne regrette plus les tiennes qui, somme toute, sont bien maigres et négligeables. Tu mérites tant de t'aimer toi-même. Je te dois beaucoup et contrairement à ce que tu imagines, je n'ai rien à te reprocher et t'aime sincèrement même si je ne le témoigne guère. Je prie pour qu'à l'avenir tu sois heureuse et débarrassée de tes démons.

Voici trois ans qu'est morte ma grand'mère,  
La bonne femme, - et, quand on l'enterra,  
Parents, amis, tout le monde pleura  
D'une douleur bien vraie et bien amère.

Moi seul j'errais dans la maison, surpris  
Plus que chagrin; et, comme j'étais proche  
De son cercueil, - quelqu'un me fit reproche  
De voir cela sans larmes et sans cris.

Douleur bruyante est bien vite passée :  
Depuis trois ans, d'autres émotions,  
Des biens, des maux, - des révolutions, -  
Ont dans les murs sa mémoire effacée.

Moi seul j'y songe, et la pleure souvent ;  
Depuis trois ans, par le temps prenant force,  
Ainsi qu'un nom gravé dans une écorce,  
Son souvenir se creuse plus avant !

---

---

# INTRODUCTION

---

Je ne sais pas ce que je cherche, je ne s'est pas ce que c'est mais je sais que lorsque je l'aurai trouvé, je le ressentirai. Et je continuerai à chercher.

---

John Coltrane

Ce geste Poemsien tente de modéliser  
Par un développement asymptotique  
D'un "fin" fil de matériaux diélectriques  
Des câbles coaxiaux abimés ou déformés  
Ce n'est guère les lois de kirchhoff appliquées  
Mais bien Maxwell qui s'avère plus bénéfique  
Reposant sur des hypothèses géométriques  
Alliant non simple connexité et régularité  
Et découle l'équation aux dérivées partielles  
Sur les électriques courants et potentiels  
Dont le si recherché sens ne nous échappe  
Et le mystère des fines lignes de transmission  
Tombe sous le poignant coup de la dite équation  
Qui du nom se remémore l'invention de Chappe

Les réseaux électriques (figure 1) envahissent de plus en plus notre quotidien et cela depuis la généralisation des technologies de type "brake-by-wire" : les systèmes de contrôles mécaniques et hydrauliques autrefois présents dans tous les véhicules motorisés ont cédés le pas aux systèmes électroniques faits de tentaculaires déploiements de câbles électriques. Par exemple, un avion actuel contient en son sein une quarantaine de kilomètres de câbles coaxiaux et quelques défauts (usure, rupture, ...) sur ceux-ci ou sur des jonctions entre ces mêmes peuvent avoir des conséquences si ce n'est tragiques, au moins coûteuses. Récemment un employé d'une compagnie allemande qui a pété un câble fut responsable d'une grande catastrophe humaine. Ces systèmes sont bien souvent embarqués, il est ainsi primordial de déceler l'anomalie sans pour autant devoir éteindre le système afin d'analyser la partie défectueuse tranquillement sur un banc d'essai. Parmi les différents efforts déployés pour le **contrôle non destructif** de tels réseaux, les méthodes de type réflectométrie ont maintenu l'attention de l'ANR SODDA. Nous envoyons un signal à une extrémité du réseau et nous l'analysons à une autre extrémité pour essayer de conclure quant à la présence et/ou à la localisation de tels défauts. Pour que ces méthodes soient efficaces nous avons dû proposer un **modèle des câbles coaxiaux ou multiconducteurs et des jonctions** entre ceux-ci qui intègrent au maximum la complexité géométrique et physique d'éventuels défauts tout en restant simple à mettre en oeuvre. Un câble coaxial est un tube constitué d'un matériau diélectrique entourant une âme métallique et étant entouré d'un conducteur métallique. Un câble multiconducteur est un tube du même type mais avec plusieurs âmes. Nous nous focaliserons dans cette introduction sur les câbles coaxiaux. La contribution à cette problématique de ce présent manuscrit est la construction d'un modèle 1D dont les inconnus sont le potentiel électrique  $V$  et le courant électrique  $I$  ainsi que des formules permettant de simuler les ondes électromagnétiques à partir de ce modèle.

Nous partirons de la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell caractérisée par les champs électromagnétiques que nous chercherons à déterminer et des caractéristiques physiques des matériaux qui constituent le réseau électrique, à savoir la permittivité  $\epsilon$ , la perméabilité  $\mu$ , la conductivité électrique  $\sigma_e$  et la conductivité

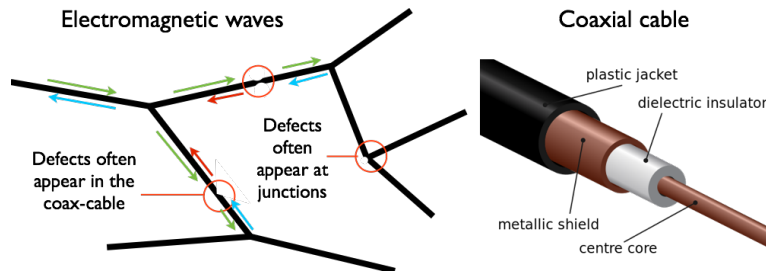


FIGURE 1 – Réseaux de câbles coaxiaux

magnétique  $\sigma_m$ , et que nous supposons connus. Les ondes électromagnétiques se baladent dans un réseau qui a des caractéristiques bien particulières. Premièrement, les câbles sont de "**fin**" guides d'ondes constitués de différents types de matériaux, à savoir un diélectrique et un conducteur, dont les conductivités électriques "**diffèrent fortement**". Secondement, les jonctions qui relient ces câbles sont de "**petite**" taille. La résolution des équations de Maxwell 3D, dont l'étude mathématique et numérique approfondie est faite dans [54], dans un tel réseau est coûteuse. Coûteuse notamment en terme de maillage, car si la largeur des câbles est petite, nous devons multiplier les degrés de liberté. Nous aurions pu exploiter des méthodes purement numériques comme le raffinement de maillage mais nous avons préféré avoir recours à des "approximations" justifiées par la géométrie et la physique du problème qui permettent de simplifier les équations de Maxwell. Les termes "**fin**", "**fort contraste**" et "**petit**", qui seront par la suite vêtus par la précision mathématique, nous amènent à définir des **ansätze**, c'est à dire des quantités qui apparaissent dans les équations de Maxwell et qui sont sensées être "négligeables". Nous montrerons que si nous faisons tendre tous nos ansätze vers zéro alors nous retrouverons et généraliserons un modèle déjà bien connu et exploité, celui des télégraphistes. Nous décrirons plus loin en quoi il consiste. Cependant, nous souhaitons gagner en précision en analysant ce que deviennent les champs électromagnétiques quand les ansätze sont extrêmement "petits" sans pour autant être nuls. Pour cela, nous allons proposer des développements asymptotiques adaptés au sens précis que prendront les notions de "**fin**" câble, "**fort contraste**" de conductivité et respectivement "**petite**" jonction. Plus précisément nous proposerons des **développements asymptotiques classiques, multi-échelles et raccordés**.

Tous les modèles obtenus par analyse asymptotique seront des **modèles 1D**. Ils sont plus simples que les équations de Maxwell 3D initiales. Les inconnues de ces nouveaux modèles ne seront plus les champs électromagnétiques mais les **potentiels et courants électriques**. Ces dernières notions permettent de faire des analogies avec les circuits électriques.

## Partie I : Outils et résultats préliminaires sur les champs de vecteurs

La première partie de la thèse est dévolue à la construction d'une boîte à outils - constituée de l'étude des **problèmes de type div-curl**, des **décompositions de Helmholtz**, des **inégalités de Poincaré-Friedrichs** et des **espaces harmoniques** - adaptée à nos besoins particuliers. Si de prime abord elle peut sembler abstraite de part son contexte général - poids complexes, domaine non simplement connexe puis non borné - nous avons réellement besoin d'un cadre aussi large. Nous avons choisi de la séparer de l'étude des câbles car, premièrement nous pensons qu'elle peut s'appliquer à d'autres domaines, notamment issus de la mécanique des fluides, deuxièmement elle ne nécessite aucun prérequis, et troisièmement tous ces outils sont reliés les uns aux autres alors que nous les exploitons à des moments si différents (les espaces harmoniques pour l'ordre 0, les décompositions de Helmholtz pour les ordres supérieurs et les inégalités de Poincaré-Friedrich pour les estimations d'erreur) que les liens entre eux ne sautent qu'aux yeux des initiés. Il est conseillé de lire les résultats du premier chapitre même si le lecteur ne souhaite pas perdre son temps avec les démonstrations pour attaquer directement l'analyse des câbles coaxiaux. Le chapitre 1 ne traite que des domaines bornés de  $\mathbb{R}^2$  alors que le chapitre 2 se concentre sur les domaines non bornés de  $\mathbb{R}^3$ .

## Partie II : Modélisation et analyse d'un câble multiconducteur

L'objectif de la deuxième partie est de retrouver et d'améliorer l'équation simplifiée 1D, dite des **télégraphistes**, utilisée couramment par les ingénieurs [59],[68] modélisant la transmission du courant et du potentiel électrique le long d'une succession de **quadripôles RLCG** (voir figure 2). Dans notre approche, la dérivation

de ce modèle s'appuie sur une analyse asymptotique des champs électromagnétiques, solution des équations de Maxwell 3D, se propageant dans un "fin" câble co-axial dont les parties métalliques sont "parfaitement" conductrices. Le terme "fin" signifie que les faibles dimensions transverses de ce câble sont proportionnelles à un petit paramètre  $\delta > 0$ . Le fait que le conducteur est parfait signifie que les ondes se propagent dans la partie diélectrique  $\Omega^\delta$ . En faisant tendre cet anstanz vers 0, dans l'esprit de ce qui est fait en mécanique pour établir rigoureusement les équations des poutres à partir de l'élasticité tri-dimensionnelle [46], nous retrouvons ce modèle des télégraphistes. Cette approche, basée sur un changement d'échelle dans les coordonnées transverses, est très générale dans la mesure où nous avons tâché, afin d'intégrer les défauts géométriques, de nous satisfaire d'hypothèses géométriques simples et minimales compte tenu de la physique du câble, âme(s) non dégénérée(s), et de caractéristiques électromagnétiques (permittivité, perméabilité, conductivité, ...) qui varient dans toutes les directions. Dans un tel contexte, des outils plus classiques comme la séparation des variables ou la décomposition modale ne peuvent plus être utilisés. Cette partie s'inscrit dans la continuité de la thèse de Sébastien Impériale [38] qui porte sur les capteurs piézoélectrique.

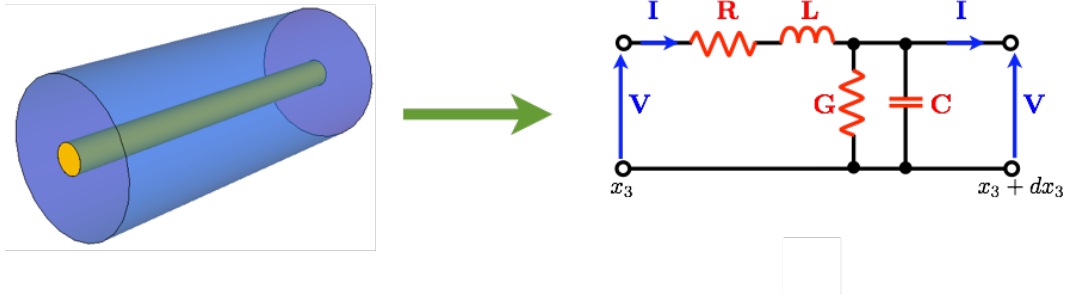


FIGURE 2 – Un câble coaxial comme succession de quadripôles RLCG infinitésimaux

Nous avons proposé un développement asymptotique des champs électromagnétiques  $E$  et  $H$  solutions des équations de Maxwell 3D sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(x_T, x_3, t) &= E^0\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \delta E^1\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \delta^2 E^2\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \dots \\ H(x_T, x_3, t) &= H^0\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \delta H^1\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \delta^2 H^2\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Le modèle 1D qui résulte de notre analyse se résume en l'équation des télégraphistes

$$\begin{cases} C_\infty(x_3) \partial_t V(x_3, t) + G_\infty(x_3) V(x_3, t) + \int_0^t K_e(x_3, t-s) V(x_3, s) ds + \partial_3 I(x_3, t) = I_s(x_3, t) + O(\delta), \\ L_\infty(x_3) \partial_t I(x_3, t) + R_\infty(x_3) I(x_3, t) + \int_0^t K_m(x_3, t-s) I(x_3, s) ds + \partial_3 V(x_3, t) = O(\delta), \end{cases} \quad (2)$$

où les coefficients homogénéisés  $C_\infty$ ,  $L_\infty$ ,  $G_\infty$ ,  $R_\infty$ ,  $K_e$  et  $K_m$  sont calculés via la résolution numérique des problèmes elliptiques posés dans les sections droites du câble. Plus précisément les coefficients  $C_\infty(x_3)$ ,  $L_\infty(x_3)$ ,  $G_\infty(x_3)$  et respectivement  $R_\infty(x_3)$  dépendent de la géométrie de la section droite du câble situé en  $x_3$  et des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_e$  et respectivement  $\sigma_m$ . La capacité  $C_\infty$  et l'inductance  $L_\infty$  que nous avons ainsi définis redonnent dans des cas particuliers les matrices qui sont usuellement utilisées par les ingénieurs [75],[76]. Par exemple si la section  $S$  est une couronne de rayon intérieur  $r_-$  et de rayon extérieur  $r_+$  et si  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont homogènes, nous retrouvons les formules standards :

$$C_\infty = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right)} \quad \text{et} \quad L_\infty = \mu \frac{\ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right)}{2\pi}.$$

Les coefficients  $K_e$  et  $K_m$  responsables d'effets de mémoire résultent de la présence conjuguée de termes de pertes électromagnétiques et d'hétérogénéité de la section transverse. Le chapitre 4 fournit une étude détaillée de l'obtention et de l'analyse de ce modèle.

De part leur dépendance géométrique les coefficients homogénéisés que nous avons introduits traduisent la présence de défauts sur la ligne. Cependant certains défauts ne peuvent être détectés par ce modèle. Plus

précisément ces coefficients sont invariants par transformation conforme (comme les similitudes et les transformations de Joukovsky), ce qui indique que notre modèle sera parfaitement incapable de détecter des défauts tels des torsions, compressions, dilatations ou certains écrasements. Dans le chapitre 5 nous avons étudié les modèles d'ordre supérieur, c'est à dire que nous avons amélioré le modèle des télégraphistes en y incluant les effets de la prise en compte des ordres supérieurs de notre développement asymptotique. Nous avons eu besoin d'aller jusqu'à l'ordre 2 pour incorporer les défauts reliés aux transformations conformes.

La validité théorique des modèles est prouvée avec des estimations d'erreur entre la solution exacte et la solution approchée dans le chapitre 6. Les preuves ne sont données que dans le cas où le câble est cylindrique.

### Partie III : Modélisation de la résistance d'un câble par la considération de l'effet de peau

Dans les modèles proposés dans la partie II la **résistance** d'un câble dépend de la conductivité magnétique. Or cette dernière est souvent négligeable, alors que la résistance est souvent prise en compte. Pour en donner une définition plus apte à représenter la réalité physique nous la faisons dériver de **l'effet de peau**. Ce phénomène est dû au fait que la partie métallique que constitue l'âme du câble et la couche qui l'entoure n'est pas un conducteur parfait mais un matériaux hautement conducteur. L'effet de peau a été a souvent été étudié [16], [64] et se caractérise par la présence de **couches minces** dans les parties conductrices qui jouxtent la partie diélectrique (voir la figure 3 gauche) dans lesquelles se concentrent toute l'énergie électromagnétique des conducteurs. Le chapitre 7 est une analyse asymptotique multi-échelles qui prend aussi bien en compte la **"finesse"**

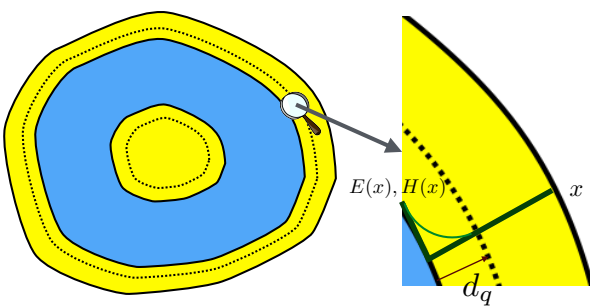


FIGURE 3 – couche limite

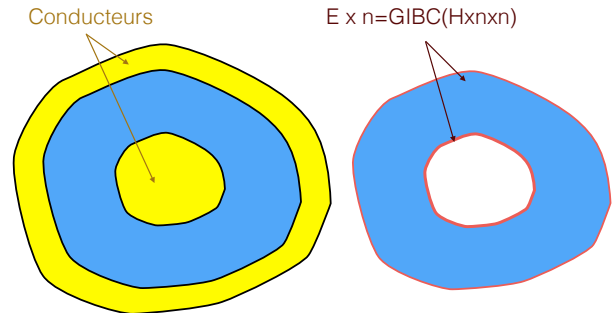


FIGURE 4 – Conditions aux bords de type GIBC

du câble, petite dimension transverse par rapport à la longueur du câble-que nous supposons cylindrique-, que la **"petitesse de la profondeur de peau"**, épaisseur des couches minces. Ainsi nous considérerons un développement asymptotique du même type que (1) dans la partie diélectrique et un développement adapté à la petitesse de la profondeur de peau dans la couche mince

$$E(t_\tau, \nu, x_3) = E^0 \left( \frac{t_\tau}{\delta}, \frac{\nu}{\delta^2}, x_3 \right) + \delta E^1 \left( \frac{t_\tau}{\delta}, \frac{\nu}{\delta^2}, x_3 \right) + \dots, \quad \text{de même pour } H(t_\tau, \nu, x_3)$$

où  $(t_\tau, \nu, x_3)$  représente les coordonnées locales de la couche mince ( $t_\tau$  est l'abscisse curviligne de l'interface entre le diélectrique et le conducteur). Cette analyse a mené à la construction de conditions aux bords des conducteurs de type **GIBC** (general impedance boundary condition) à l'instar de [22],[35],[64] (voire la figure 4 droite), c'est-à-dire du type

$$E \times n = \text{GIBC}(H \times n \times n),$$

qui remplace la condition aux bords de la partie diélectrique de type conducteur parfait

$$E \times n = 0,$$

considérée dans la partie II. A l'aide de cette dernière, nous avons pu définir une résistance  $R_{\text{sk}}(x_3)$  qui dépend de la géométrie, de la conductivité et de la perméabilité de la section droite en  $x_3$ . L'expression de cette résistance rejoint les cas particuliers évoqués dans la littérature [66],[68]. Cette nouvelle résistance s'introduit de la manière

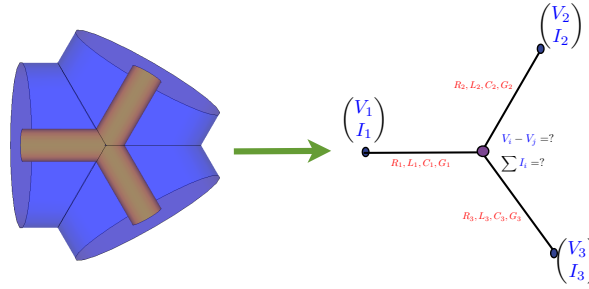
suivante dans le modèle des télégraphistes (avec  $\sigma_e = \sigma_m = 0$  dans la partie diélectrique) :

$$\begin{cases} C_\infty(x_3) \partial_t V(x_3, t) + \partial_3 I(x_3, t) = I_s^\delta + O(\delta^2), \\ L_\infty(x_3) \partial_t I(x_3, t) + \delta R_{\text{sk}}(x_3) \partial_t^{1/2} I(x_3, t) + \partial_3 V(x_3, t) = O(\delta^2). \end{cases}$$

où la dérivée fractionnaire  $\partial_t^{1/2}$  est l'opérateur pseudo-différentiel associé à  $\sqrt{i\omega}$  en fréquentiel. Par contre l'étude que nous avons fait de l'effet de peau ne prend en compte que les câbles cylindriques. Cependant, nous pensons que dans le cas défauts géométriques, l'expression de la résistance sera la même et seul les formules de reconstruction des champs électromagnétiques différeront.

## Partie IV : Modélisation d'une jonction

Chercher un modèle de la jonction entre  $L + 1$  câbles coaxiaux (nous nous focaliserons sur le cas mono-âme dans cette introduction) numéroté de 0 à  $L$ , c'est partir des équations 3D de Maxwell d'inconnues  $E$  et  $H$  les champs électromagnétiques pour obtenir une structure 1D de type graphe d'inconnues  $I$  et  $V$ . Les potentiels  $V$  et les courants  $I$  se déplacent sur les **branches du graphe selon l'équation des télégraphistes** et se séparent dans les **noeuds selon les lois de Kirchoff**. Et ce sont ces lois que nous cherchons à prouver à partir de la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell.



Nous ne pouvons prétendre à un développement asymptotique uniforme en espace car si le comportement d'un fin câble est, comme nous l'avons précédemment prétendu, 1D, il sera 3D au voisinage proche de la jonction. Pour mener à bien notre analyse asymptotique, nous devons distinguer deux types de régions particulières. La première est la partie "câble"  $\Omega^\delta$  de petite épaisseur  $\delta$  et la deuxième est la partie jonction  $\mathcal{J}^\delta$  qui relie ces câbles. Cette partie jonction contient une zone de noeud  $\mathcal{K}$  de taille  $\delta$  et des zones  $\mathfrak{D}_\ell$  communes à la partie câble de longueur  $\sqrt{\delta}$ . La méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à proposer des développements différents dans le câble et dans la jonction pour mettre en exergue la différence de phénomène et à les faire se rencontrer dans les zones communes que nous avons nommées overlap. Nous allons supposer pour simplifier les propos de cette introduction, bien que nous ayons démontré les résultats qui vont suivre dans le cadre général, que les pertes sont nulles et que la permittivité et la perméabilité ne varient pas le long des parties câble.

Proposer un développement asymptotique c'est déjà normaliser la géométrie pour faire passer le petit paramètre  $\delta$  de la géométrie vers l'équation. Nous proposons des changements d'échelle différents et ainsi des développements différents dans les parties câble et la jonction, la première est souvent nommée champ "lointain", la seconde champ "proche" : dans la partie câble, nous n'affectons que les parties transverses :

$$E_\ell^\delta(x_T, x_3, t) = E^0\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \delta E_\ell^1\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \delta^2 E_\ell^2\left(\frac{x_T}{\delta}, x_3, t\right) + \dots \quad \text{avec } (x_T, x_3) \in \Omega_\ell^\delta$$

et dans la partie jonction, nous affectons toutes les directions :

$$E_J^\delta(\mathbf{x}, t) = E^0\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}, t\right) + \delta E_J^1\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}, t\right) + \delta^2 E_J^2\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}, t\right) + \dots \quad \text{avec } \mathbf{x} \in \mathcal{J}^\delta.$$

Bien entendu ces développements doivent être égaux dans les zones communes, les "overlaps", c'est ce que l'on nomme le principe du raccordement :

$$E_\ell^\delta = E_J^\delta.$$



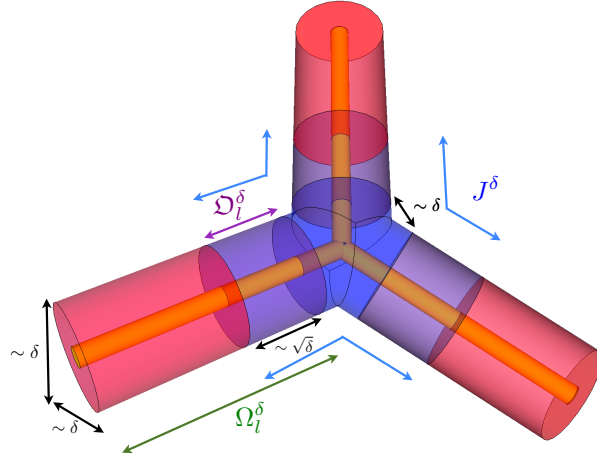


FIGURE 5 – Problème de jonction décomposé en ces trois parties remarquables

Intuitivement cela peut se comprendre comme un raccord entre la limite du champ lointain en zéro avec la limite du champ proche en l'infini. C'est ce principe qui nous permettra d'obtenir les relations de Kirchhoff. L'étude de l'ordre 0 permet d'en retrouver les usuelles :

- loi des mailles :  $V_0^\delta(0) - V_l^\delta(0) = O(\delta)$  (3a)

- loi des noeuds :  $\sum_{l=0}^L I_l^\delta(0_l) = O(\delta)$  (3b)

et l'étude du premier ordre permet de les améliorer. Nous obtenons ainsi un graphe sur lequel se propagent le potentiel et le courant électrique. Sur les branches, ils vérifient l'équation des télégraphistes et sur les noeuds, ils satisfont les conditions de Kirchhoff améliorées

- loi des mailles :  $V_0^\delta(0) - V_l^\delta(0) = \delta \left[ \sum_{l'=1}^L \mathcal{Z}_{l,l'} I_{l'}^\delta(0) \right] + O(\delta^2)$  (4a)

- loi des noeuds :  $-\sum_l I_l^\delta(0_l) = \delta \mathcal{Y} V_0^\delta(0) + O(\delta^2)$  (4b)

Un tel graphe sur lequel nous disposons des équations se nomme un graphe quantique. Les nouveaux coefficients effectifs  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Z}_{l,l'}$  intègrent la complexité géométrique de la jonction avec ses éventuels défauts.

Cette étude nous est apparue particulièrement intéressante parce qu'en plus de démontrer et d'améliorer les usuelles loi des noeuds et loi des mailles, nous pouvons nous servir de ces résultats pour **modéliser des défauts conséquents** en considérant la jonction entre deux câbles coaxiaux et en mettant le défaut franc dans la partie jonction. Le chapitre 8 se focalise sur la jonction de câbles coaxiaux cylindriques avec des hypothèse restrictives qui simplifient la présentation mais qui ne peuvent intégrer de défauts hors de la petite zone de jonction. Le chapitre 9 traite du cas général avec des ruses qui simplifient la tâche mais qui peuvent paraître ardues.

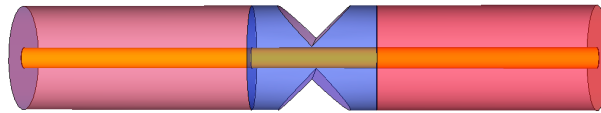


FIGURE 6 – Défaut franc

## Partie V : Annexes

La partie V est faite d'un agrégat d'annexes constituant une base, ainsi que des précisions, sur des précieux outils techniques exploités dans cette thèse et qui peuvent s'avérer favorables dans d'autres contextes. L'annexe 10 est un formulaire sur les **opérateurs différentiels** spatiaux tant 2D que 3D. L'annexe 11 est quant à elle

une vulgarisation de la **topologie algébrique**, discipline qui traite de la notion de "trou", laquelle est au centre nos préoccupations. L'annexe 12 présente, via la **transformée de Laplace**, une méthode pour obtenir des estimations d'énergie d'EDPs d'évolutions à partir de la seule connaissance de celles-ci dans le domaine de Laplace, ainsi que la notion de dérivées fractionnaires que nous utiliserons pour décrire l'influence de l'effet de peau. Enfin, l'annexe 13 s'attarde sur les problèmes aux frontières libres et la **dérivée de forme** qui caractérise la sensibilité quant à une déformation du domaine.

## Conseils de lecture et avertissements

Les cinq parties sont totalement indépendantes bien qu'elles se réfèrent les unes les autres et se complètent. Au sein de chacune d'elle les chapitres se suivent, mais nous avons néanmoins tâché de présenter des rappels des chapitres précédents quand cela s'avère nécessaire de façon que le lecteur puisse les lire dans le désordre s'il en éprouve le besoin ou la volonté. Il est par contre malaisé de s'aventurer dans l'étude des câbles sans s'être auparavant armé des outils du chapitre 1. De même nous conseillons aux lecteurs non avertis la lecture du chapitre 4 afin de s'habituer à la méthode avant d'aborder les parties III et IV réellement intéressantes. Notons pour finir que les parties présentant les outils sont rédigées en français de manière à faciliter leur lecture par d'éventuels doctorants en mal de topologie algébrique ou de décompositions en potentiels et que les parties centrées sur le câble, exception faite, à cause du temps perdu, de la partie sur l'effet de peau, sont rédigées en anglais.

"Ce maudit télégraphe va-t-il cesser  
d'importuner mes yeux qu'il commence à lasser ?  
Là, devant ma lucarne ! Il est bien ridicule  
Qu'on place un télégraphe auprès de ma cellule !  
Il s'élève, il s'abaisse... et mon esprit distrait  
dans ces vains mouvements cherche quelque secret..."  
Victor Hugo



---

---

# **PREMIÈRE PARTIE**

## **OUTILS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES SUR LES CHAMPS DE VECTEURS**

---

---



---

# INTRODUCTION

---

La dernière chose qu'on trouve en faisant un ouvrage, est de savoir celle qu'il faut mettre en première

---

Pascal, Les Pensées

Les problèmes Div-curl 2D et 3D

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{u} = \omega \text{ dans } B^2 \\ \mathbf{div} (\rho \mathbf{u}) = c \text{ dans } B^2 \\ + \text{condition(s) aux limites} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{curl} \mathbf{u} = \omega \text{ dans } B^3 \\ \mathbf{Div} (\rho \mathbf{u}) = c \text{ dans } B^3 \\ + \text{condition(s) aux limites} \end{array} \right.$$

(où nous préciserons plus tard les conditions aux limites, les hypothèses sur le poids  $\rho$  et les sources  $\omega$  et  $c$ ) posés sur un domaine  $B^d \subset \mathbb{R}^d$  avec  $d = 2, 3$  sont fréquents en physique. Ils apparaissent en électromagnétisme quand on considère un changement d'échelle dans toutes les dimensions d'un petit domaine ou dans une approximation basse fréquence, en électrostatique, en mécanique des fluides. L'étude générale de ces problèmes est connue [6], [30], [33] mais est néanmoins délicate quand le domaine n'est pas simplement connexe ou non borné, cas qui nous intéresse particulièrement pour la modélisation de nos câbles coaxiaux. De plus nous avons eu besoin de généraliser celle-ci à des poids  $\rho$  plus compliqués qu'accoutumé (typiquement une matrice complexe non hermitienne), cas où les preuves habituelles fondées sur des arguments de compacité (voire [54]) s'effondrent. C'est aussi l'occasion de présenter et démontrer des résultats sur les décompositions de Helmholtz <sup>1</sup>

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \nabla \varphi + \mathbf{rot} \psi + \dots, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mathbf{grad} \Phi + \mathbf{curl} \Psi + \dots$$

et sur les inégalités de Poincaré-Friedrich du type

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2} \leq K (\|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{div} \mathbf{u}\|_{L^2} + \dots), \quad \|\mathbf{u}\|_{L^2} \leq K (\|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{Div} \mathbf{u}\|_{L^2} + \dots)$$

avec les ... correspondent aux conditions aux bords et à des quantités présentes que dans le cas non simplement connexe.

De manière générale, les décompositions de Helmholtz sont des décompositions de champs 2D ou 3D sous la forme de sommes de gradients et de rotationnels de fonctions ainsi nommées potentiels <sup>2</sup> représentant souvent des phénomènes physiques différents (du moins quand de telles décompositions sont autorisées) que l'on cherche à mettre en valeur. En mécaniques des fluides elles permettent de définir le potentiel, en élastodynamique, elles permettent de séparer les ondes S des ondes P [14]. Elles permettent aussi de transformer des équations difficiles ou non elliptiques comme nos problèmes Div-curl en équations sur les potentiels qui nous sont plus familières. La définition de ces potentiels n'est pas uniquement déterminée. Par exemple, dans les décompositions ci-dessus, nous pouvons rajouter n'importe quelle constante aux potentiels sans que cela ne modifie leurs gradients et rotationnels. Le choix d'une unique détermination constitue une jauge. Ces décompositions ne sont pas non plus uniques dans le sens où certaines fonctions peuvent tout aussi bien s'écrire sous la forme d'un gradient que sous

---

1. Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (31 août 1821 - 8 septembre 1894) est un savant (de la physique à la psychologie) allemand. Parmi ses nombreuses contributions, nous ne mentionnerons que ses définitions et formalisations de la notion d'énergie, l'analyse des harmoniques sonores (l'équation des ondes en harmonique honore son nom) et sa description de l'acoustique musicale.

2. Soyons vigilant avec le vocabulaire, le terme "potentiel" sera toujours relié à une décomposition de Helmholtz et ne sera jamais à comprendre au sens de la théorie du potentiel bien que celle-ci soit tout de même en lien avec nos considérations.

la forme d'un rotationnel. L'étude générale de celles-ci constitue la théorie de la cohomologie de Rahm. Le livre [33] applique ce formalisme à l'électromagnétisme. Nous allons toutefois éviter tout le vocabulaire de celui-ci pour nous concentrer sur l'aspect EDP de ces décompositions.

Les démonstrations que nous donnerons des inégalités de Poincaré-Friedrich seront constructives<sup>3</sup>, c-a-d ne feront pas appel au raisonnement par l'absurde comme elles sont usuellement prouvées, car nous souhaitons connaître une description explicite des constantes  $K$ . En pratique les poids que nous considérerons dépendront de la fréquence ou de la variable de Laplace selon le domaine dans lequel on travaille et de la géométrie. La connaissance explicite de la dépendance de  $K$  en la fréquence et en la géométrie sera nécessaire, notamment dans le chapitre 6 portant sur les estimations d'erreurs. Nous ferons d'ailleurs en sorte que  $K$  soit le plus petit possible et nous discuterons quand à l'optimalité.

Les seuls prérequis nécessaires pour lire les démonstrations de cette partie sont le lemme de Lax-Milgram, les inégalités de Poincaré et Poincaré-Wirtinger (rappeler dans le lemme 1.5.1) et dans une moindre mesure le principe du maximum. Le lemme de Lax-Milgram, dont la démonstration se trouve dans de nombreux livres portant sur l'analyse fonctionnelle (corollaire V.8 de [13]), est l'ingrédient indispensable pour montrer qu'un problème elliptique est bien posé au sens de Hadamard :

**Lemme 0.0.1. (Lemme de Lax-Milgram)** *Soit  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  une forme sesquilinéaire sur un espace de Hilbert complexe  $H$  telle que :*

- *$a$  est  $H$ -continue :  $|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H$ ,*
- *$a$  est  $H$ -coercive :  $|a(u, u)| \geq c \|u\|_H^2$ ,*

*et  $L \in H'$  une forme linéaire sur  $H$ . Il existe une unique solution  $u \in H$  au problème variationnel*

$$\forall v \in H, a(u, v) = L(v),$$

*et qui plus est, est bien posé au sens de Hadamard :*

$$\|u\|_H \leq \frac{C}{c} \|L\|_{H'}.$$

Le premier chapitre se focalise sur les domaines 2D borné. Nous démontrerons en particulier les résultats suivants :

- les **décompositions de Helmholtz** (théorème 1.2.1),
- les **bases des espaces harmoniques** (théorème 1.3.1),
- le **lemme de conjugaison** 1.3.5,
- les **inégalités de Poincaré-Friedrichs** (théorèmes 1.5.1 et 1.5.2),

dont la connaissance sera indispensable pour comprendre les démonstrations des chapitres suivants. Le second chapitre, quant à lui, portera sur les domaines 3D bornés et surtout non bornés.

---

3. Le constructivisme est une attitude qui consiste à démontrer l'existence d'objets mathématiques qu'en donnant une construction de ceux-ci. Au sens strict ce sont les mathématiques qui s'appuient sur la logique intuitionniste, c'est à dire celle qui ne considère pas le Tiers-Exclu comme axiome et réfute ainsi l'exploitation du raisonnement par l'absurde, qui est elle même la formalisation de la philosophie de L. E. J. Brouwer (celui même du fameux théorème du point fixe). Par exemple la preuve que  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos par le principe du maximum ne l'est pas. Dans l'analyse constructiviste, notamment développée par Bishop dans [12], certaines propriétés, par exemple celle de la borne supérieure, et certaines constructions, celle de la complétion de  $\mathbb{Q}$  via les suites de Cauchy des nombres réels, ne sont pas admises. Nous n'adopterons pas une position aussi extrême (nous ne refuserons pas des théorèmes habituels sous prétexte que la preuve exploite un raisonnement par l'absurde), mais nous conviendrons de l'apport de telles démonstrations (par exemple en souhaitant expliciter la dépendance quant à la géométrie et à la fréquence de chaque constante intervenant dans des majorations) et nous en ferons dès que ce peut.

# CHAMPS DE VECTEURS DÉFINIS SUR UN DOMAINE BORNÉ DE $\mathbb{R}^2$

---

Les soleils couchants revêtent les champs

Baudelaire

Quand dans les parties qui suivent nous étudierons nos câbles coaxiaux, il apparaîtra de manière naturelle des problèmes div-rot du type suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\hat{\varepsilon}E) = \rho_e, \quad \text{dans } S \\ \operatorname{rot} E = B, \quad \text{dans } S, \\ E \times n = \tau_e, \quad \text{sur } \partial S, \end{array} \right. \quad (e) \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\hat{\mu}H) = \rho_m, \quad \text{dans } S \\ \operatorname{rot} H = D, \quad \text{dans } S, \\ \hat{\mu} H \cdot n = \nu_m, \quad \text{sur } \partial S, \end{array} \right. \quad (h) \quad (1.1)$$

d'inconnues les champs 2D  $E : S \rightarrow \mathbb{C}^2$  et  $H : S \rightarrow \mathbb{C}^2$  et où la régularité des sources  $\rho_e, B, \tau_e, \rho_m, D$  et  $\nu_m$  sera ultérieurement précisée. Les opérateurs différentiels pris en compte ici sont les opérateurs 2D :

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \partial_1 T_1 + \partial_2 T_2, \quad \operatorname{rot} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \partial_1 T_2 - \partial_2 T_1,$$

et les conditions aux bords sont

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \times n = T_1 n_2 - T_2 n_1, \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \cdot n = T_1 n_1 + T_2 n_2$$

avec  $n$  la normale sortante de  $S$ . L'annexe 10 fournit une fiche avec toutes les formules pratiques nécessaires à la simplification des calculs qui ont recours à ces opérateurs. Les difficultés tiennent en ce que dans le cas le plus général les poids  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  seront des matrices  $2 \times 2$  à coefficients complexes non auto-adjointes et le domaine bidimensionnel  $S$  ne sera pas simplement connexe. Pour résoudre de tels problèmes nous aurons recours à des décompositions de Helmholtz adaptées à ces poids, c-a-d du type :

$$E = \nabla \xi + \hat{\varepsilon}^{-1} \operatorname{rot} \zeta,$$

avec les opérateurs différentiels :

$$\nabla \xi = \begin{pmatrix} \partial_1 \xi \\ \partial_2 \xi \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} \zeta = \begin{pmatrix} \partial_2 \zeta \\ -\partial_1 \zeta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \xi, \zeta : S \rightarrow \mathbb{C}.$$

Nous introduirons ces décompositions dans la section 1.2 en précisant à quoi peut ressembler les potentiels  $\xi$  et  $\zeta$ . Nous étudierons ensuite les problèmes div-rot dans le cas plus simple où toutes les sources sont nulles (section 1.3). Nous étudierons enfin (dans la section 1.4) ces problèmes de manière générale, et cela mènera à l'obtention des inégalités de Poincaré-Friedrichs (section 1.5) du type

$$\|u\|_{L^2} \leq K (\|\operatorname{rot} u\|_{L^2} + \|\operatorname{div} u\|_{L^2} + \dots).$$

Nous allons maintenant préciser la structure des poids  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  et la géométrie des surfaces  $S$  que nous considérerons.



## 1.1 Préliminaires

### 1.1.1 Descriptions des fonctions poids considérées

Introduisons l'hypothèse que devront impérativement vérifier les poids  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  intervenant dans les problèmes div-rot 1.1 :

#### Hypothèse 1.1.1. (Hypothèse des poids complexes)

Soit un champ matriciel à coefficients complexes

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} : S \subset \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathcal{G}l_2(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \mathbf{\Lambda}_r(x) + i \mathbf{\Lambda}_i(x) \end{aligned}$$

tel que pour tout  $x \in S$ , les matrices  $\mathbf{\Lambda}_r(x)$  et  $\mathbf{\Lambda}_i(x)$  sont symétriques. Nous supposons de plus qu'il existe des constantes réelles finies :

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-}, \mathbf{\Lambda}_{r,+} > 0 \text{ et } \mathbf{\Lambda}_{i,-}, \mathbf{\Lambda}_{i,+} \geq 0$$

de manière que pour tout  $x \in S$  les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{\Lambda}_r}(x)$  de  $\mathbf{\Lambda}_r(x)$  et les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{\Lambda}_i}(x)$  de  $\mathbf{\Lambda}_i(x)$  vérifient :

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-} \leq \lambda_{\mathbf{\Lambda}_r}(x) \leq \mathbf{\Lambda}_{r,+}, \text{ et } \mathbf{\Lambda}_{i,-} \leq |\lambda_{\mathbf{\Lambda}_i}(x)| \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+} .$$

Nous noterons

$$\mathbf{\Lambda}_- := \sqrt{\mathbf{\Lambda}_{r,-}^2 + \mathbf{\Lambda}_{i,-}^2} \text{ et } \mathbf{\Lambda}_+ := \sqrt{\mathbf{\Lambda}_{r,+}^2 + \mathbf{\Lambda}_{i,+}^2}.$$

Les difficultés tiennent en ce que l'espace  $L^2(S, \mathbf{\Lambda} dx)$ , que l'on définit comme l'espace  $L^2(S, \mathbb{C}^2)$  muni de la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} L^2(S, \mathbb{C}^2)^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\mapsto (a, b)_{\mathbf{\Lambda}} := \int_S (\mathbf{\Lambda} a, b)_{\mathbb{C}^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

n'est un espace de Hilbert que si le poids  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice réelle symétrique définie positive. Dans le cas qui nous intéresse le plus, c-a-d  $\mathbf{\Lambda}$  complexe, ce n'est pas même un espace normé. Pour cela il faut prendre la partie réelle ou le module :

$$\Re((a, a)_{\mathbf{\Lambda}}) \text{ et } |(a, a)_{\mathbf{\Lambda}}|$$

Ce sont alors des normes équivalentes aux normes  $L^2$  usuelles :

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-} \|a\|_{L^2(B)}^2 \leq \Re((a, a)_{\mathbf{\Lambda}}) \leq \mathbf{\Lambda}_{r,+} \|a\|_{L^2(B)}^2 \text{ et } \mathbf{\Lambda}_- \|a\|_{L^2(B)}^2 \leq |(a, a)_{\mathbf{\Lambda}}| \leq \mathbf{\Lambda}_+ \|a\|_{L^2(S)}^2. \quad (1.3)$$

Cela se voit avec le point (i) de la propriété qui suit :

**Propriété 1.1.1.** Si  $\mathbf{\Lambda}$  est un champ matriciel symétrique alors pour tout  $u \in \mathbb{C}^2$ , nous avons

$$\Re[(\mathbf{\Lambda}(x)u, u)_{\mathbb{C}}] = (\mathbf{\Lambda}_r(x)u, u)_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R} \text{ et } \Im[(\mathbf{\Lambda}(x)u, u)_{\mathbb{C}}] = (\mathbf{\Lambda}_i(x)u, u)_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}.$$

(i) Si  $\mathbf{\Lambda}$  vérifie l'hypothèse 1.1.1 des poids complexes, alors

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-} |u|^2 \leq \Re[(\mathbf{\Lambda}(x)u, u)_{\mathbb{C}}] \leq \mathbf{\Lambda}_{r,+} |u|^2, \quad \mathbf{\Lambda}_{r,-} |u|^2 \leq |(\mathbf{\Lambda}(x)u, u)_{\mathbb{C}}| \leq \mathbf{\Lambda}_+ |u|^2 \text{ et } |\Im[(\mathbf{\Lambda}(x)u, u)_{\mathbb{C}}]| \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+} |u|^2,$$

et de plus les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)$  de  $\mathbf{\Lambda}(x)$  vérifient

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-} \leq \Re(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)) \leq \mathbf{\Lambda}_{r,+}, \quad \mathbf{\Lambda}_{r,-} \leq |\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)| \leq \mathbf{\Lambda}_+ \text{ et } |\Im(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x))| \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+},$$

et les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{\Lambda}^{-1}}(x)$  de  $\mathbf{\Lambda}^{-1}(x)$  vérifient

$$\frac{\mathbf{\Lambda}_{r,-}}{\mathbf{\Lambda}_+^2} \leq \Re(\lambda_{\mathbf{\Lambda}^{-1}}(x)) \leq \frac{\mathbf{\Lambda}_{r,+}}{\mathbf{\Lambda}_{r,-}^2}, \quad \mathbf{\Lambda}_+^{-1} \leq |\lambda_{\mathbf{\Lambda}^{-1}}(x)| \leq \mathbf{\Lambda}_{r,-}^{-1} \text{ et } |\Im(\lambda_{\mathbf{\Lambda}^{-1}}(x))| \leq \frac{\mathbf{\Lambda}_{i,+}}{\mathbf{\Lambda}_{r,-}^2}.$$

(ii) Si de plus la matrice  $\mathbf{\Lambda}_i(x)$  est soit positive ou soit négative alors nous avons des bornes plus précises pour les valeurs propres de  $\mathbf{\Lambda}(x)$  :

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-} \leq \Re(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)) \leq \mathbf{\Lambda}_{r,+}, \quad \mathbf{\Lambda}_- \leq |\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)| \leq \mathbf{\Lambda}_+ \text{ et } \mathbf{\Lambda}_{i,-} \leq |\Im(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x))| \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+}, \quad (1.4)$$

et pour les valeurs propres de  $\mathbf{\Lambda}^{-1}(x)$  :

$$\frac{\mathbf{\Lambda}_{r,-}}{\mathbf{\Lambda}_+^2} \leq \Re(\lambda_{\mathbf{\Lambda}^{-1}}(x)) \leq \frac{\mathbf{\Lambda}_{r,+}}{\mathbf{\Lambda}_-^2}, \quad \mathbf{\Lambda}_+^{-1} \leq |\lambda_{\mathbf{\Lambda}^{-1}}(x)| \leq \mathbf{\Lambda}_-^{-1} \text{ et } \frac{\mathbf{\Lambda}_{i,-}}{\mathbf{\Lambda}_+^2} \leq |\Im(\lambda_{\mathbf{\Lambda}^{-1}}(x))| \leq \frac{\mathbf{\Lambda}_{i,+}}{\mathbf{\Lambda}_-^2}. \quad (1.5)$$

(iii) Si nous nous restreignons au cadre des champs matriciel  $\mathbf{\Lambda}$  tels que pour tout  $x \in S$

$$\mathbf{\Lambda} \text{ est hermitienne ou } \mathbf{\Lambda} = (\Lambda_r + i\Lambda_i)\mathbf{Id}_2 \text{ avec } \Lambda_r \in \mathbb{R}^{*,+}, \Lambda_i \in \mathbb{R}$$

alors la condition (1.4) est équivalente à l'hypothèse 1.1.1 des poids complexes et la propriété (1.5) est alors immédiatement vérifiée.

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que pour toute matrice réelle symétrique  $A \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{R})$  et vecteur complexe  $u = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , nous avons

$$Au \cdot \bar{u} = Aa \cdot a + Ab \cdot b \in \mathbb{R},$$

ainsi

$$\Re[(\mathbf{\Lambda}(x)u, u)_{\mathbb{C}}] = \mathbf{\Lambda}_r(x)a \cdot a + \mathbf{\Lambda}_r(x)b \cdot b \quad \text{et} \quad \Im[(\mathbf{\Lambda}(x)u, u)_{\mathbb{C}}] = \mathbf{\Lambda}_i(x)a \cdot a + \mathbf{\Lambda}_i(x)b \cdot b$$

et la première partie du point (i) est alors évidente. Soit maintenant  $\mathbf{e}$  le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre  $\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)$ , nous avons

$$\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \cdot \bar{\mathbf{e}} = (\mathbf{\Lambda}_r \mathbf{e} \cdot \bar{\mathbf{e}}) + i(\mathbf{\Lambda}_i \mathbf{e} \cdot \bar{\mathbf{e}}).$$

Prenons successivement la partie réelle et la partie imaginaire de cette dernière égalité et en écrivant le vecteur complexe  $\mathbf{e}$  sous la forme algébrique  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_i$  :

$$\Re(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)) = \mathbf{\Lambda}_r(x) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{\Lambda}_r(x) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \Im(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)) = \mathbf{\Lambda}_i(x) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{\Lambda}_i(x) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i.$$

Il est alors évident de conclure comme  $\mathbf{\Lambda}_r(x)$  et  $\mathbf{\Lambda}_i(x)$  sont symétriques que

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-} \leq \Re(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)) \leq \mathbf{\Lambda}_{r,+}, \quad \mathbf{\Lambda}_{r,-} \leq |\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x)| \leq \mathbf{\Lambda}_+ \quad \text{et} \quad |\Im(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x))| \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+}.$$

(ii) Si nous nous plaçons dans le cas où la matrice  $\mathbf{\Lambda}_i(x)$  est définie positive alors

$$\mathbf{\Lambda}_{i,-} \leq \mathbf{\Lambda}_i(x) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{\Lambda}_i(x) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+}$$

ou dans le cas où la matrice est définie négative

$$\mathbf{\Lambda}_{i,-} \leq -\mathbf{\Lambda}_i(x) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r - \mathbf{\Lambda}_i(x) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+}.$$

Dans tous les cas nous avons bien

$$\mathbf{\Lambda}_{i,-} \leq |\Im(\lambda_{\mathbf{\Lambda}}(x))| \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+}.$$

Concernant  $\lambda_{\mathbf{\Lambda}^{-1}}(x)$ , il suffit de rappeler que pour tout complexe  $\lambda \neq 0$  nous avons

$$\Re(\lambda^{-1}) = \frac{\Re(\lambda)}{|\lambda|^2}, \quad |\lambda^{-1}| = |\lambda|^{-1} \quad \text{et} \quad \Im(\lambda^{-1}) = -\frac{\Im(\lambda)}{|\lambda|^2},$$

et que pour toute matrice inversible  $M$  nous avons

$$\lambda \in \sigma(M) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(M^{-1}).$$

□

### 1.1.2 Prise en compte de domaines non simplement connexes

Nous supposons dans tout le reste du chapitre que  $S$  est une **surface plane à  $Q$  trous** incluse dans un domaine convexe borné  $\mathcal{B}$ , c-a-d (conformément à la définition 11.2.1) que :

$$S = \mathcal{O}_0 \setminus \bigcup_q \mathcal{O}_q, \quad \overline{\mathcal{O}_k} \cap \overline{\mathcal{O}_\ell} \neq \emptyset \text{ for } k \neq \ell,$$

avec  $\mathcal{O}_q$  pour  $q = 0 \dots Q$  des domaines simplement connexes d'aire non nulle. Les domaines  $\mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{B}$  pour  $q = 1 \dots Q$  sont appelés "trous" de  $S$ . Nous noterons les  $Q + 1$  composantes connexes du bord de cette surface de genre  $Q$  de la manière suivante :

$$\partial_q S = \partial \mathcal{O}_q, \quad q = 0 \dots Q.$$

Nous supposons que chaque composante connexe du bord  $\partial_q S$  est une variété fermée au moins **lipschitzienne**. Nous savons qu'il existe  $Q$  **coupsures** ("artificielles")  $\Gamma_q$ . Chaque coupure  $\Gamma_q$  est par définition un arc de courbe dont l'une des extrémités appartient à  $\partial_q S$  et l'autre à  $\partial_0 S$ . De plus comme  $S$  est connexe par arc et de frontière lipschitzienne, nous savons qu'il existe de tels arcs de courbe  $\Gamma_q$  qui sont lipschitziens et ne s'entrechoquent jamais :

$$\overline{\Gamma_q} \cap \overline{\Gamma_{q'}} = \emptyset \quad \text{pour } q \neq q'.$$

Ces coupures  $\Gamma_q$  sont définies afin de rendre le domaine  $S$  simplement connexe, c-a-d que

$$S_\Gamma := S \setminus \bigcup_{q=1}^Q \Gamma_q$$

est simplement connexe. Cette surface à  $Q$  trous et ses coupures sont représentées dans la figure 11.4. Un domaine simplement connexe est une surface à 0 trou.

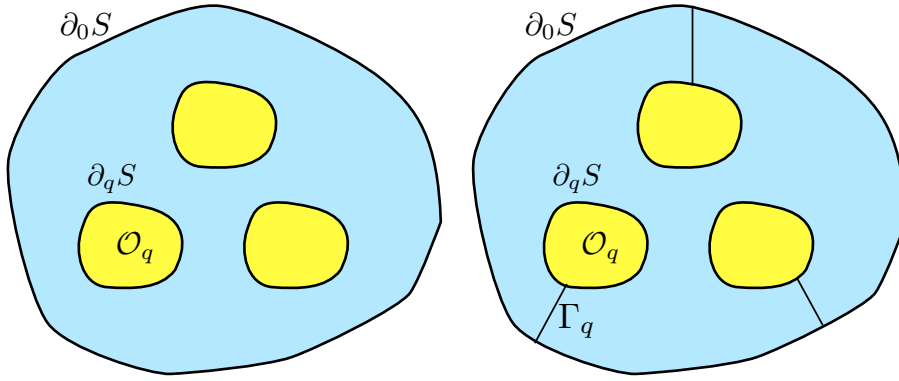


FIGURE 1.1 – Surface à  $Q$  trous et ses coupures.

Nous allons voir que les coupures "artificielles" qui permettent de rendre le domaine  $S$  simplement connexe vont jouer un rôle crucial. Nous serons amenés par la suite à définir des fonctions qui présentent un saut de discontinuité au travers certaines de ces coupures. En orientant chaque coupure du bord intérieur qu'elle jouxte vers le bord extérieur nous pouvons introduire les vecteurs tangent  $\tau_q$  et normal<sup>1</sup>  $n_q$  à chaque coupure  $\Gamma_q$  et ainsi définir le saut d'une fonction  $\varphi$  à travers celle-ci par :

$$[\varphi]_{\Gamma_q}(x_\tau) := \lim_{\nu \rightarrow 0} (\varphi(x_\tau + \nu n) - \varphi(x_\tau - \nu n)) \quad \text{pour presque tous } x_\tau \in \Gamma_q. \quad (1.6)$$

La présence de coupures  $\Gamma_q$  implique la présence d'intégrales le long de ces dernières lorsque l'on exploite les formules de Green (10.18, 10.19) dans le domaine  $S_\Gamma$ . Ces dernière deviennent pour tous champs  $\mathbf{T} \in H(\mathbf{div}, S_\Gamma)$  et  $\varphi \in H^1(S_\Gamma)$  :

$$\begin{aligned} \int_{S_\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{T} \varphi &= - \int_{S_\Gamma} \mathbf{T} \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial S} \mathbf{T} \cdot n \varphi + \sum_{q=1}^Q \int_{\Gamma_q} [\varphi \mathbf{T}] \cdot n \\ \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \mathbf{T} \varphi &= \int_{S_\Gamma} \mathbf{T} \cdot \operatorname{rot} \varphi - \int_{\partial S} \mathbf{T} \times n \varphi - \sum_{q=1}^Q \int_{\Gamma_q} [\varphi \mathbf{T}] \times n \end{aligned}$$

où les intégrales sur les bords et long des coupures sont à prendre au sens d'un produit de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}}$ .

Travailler dans un tel domaine implique que le noyau des problèmes Div-curl avec conditions aux bords type tangentiel,  $\mathbf{u} \times n|_{\partial B}$ , ou normal,  $\mathbf{u} \cdot n|_{\partial B}$ , n'est pas vide, c-a-d que les espaces harmoniques à poids pour les champs de dimension deux

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Lambda, S) &:= \{ \mathbf{u} \in L^2(S, \mathbb{C}^2); \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \operatorname{div}(\Lambda \mathbf{u}) = 0, \text{ et } \mathbf{u} \times n|_{\partial S} = 0 \} \\ \mathcal{H}(\Lambda, S) &:= \{ \mathbf{u} \in L^2(S, \mathbb{C}^2); \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \operatorname{div}(\Lambda \mathbf{u}) = 0, \text{ et } (\Lambda \mathbf{u}) \cdot n|_{\partial S} = 0 \} \end{aligned} \quad (1.7)$$

ne sont pas de dimension 0 (voir théorème 1.3.1). Nous en donnerons une description précise dans la section 1.3.

1. la normale est définie presque partout car la coupure  $\Gamma_q$  est lipschitzienne

## 1.2 Décompositions de Helmholtz

The method of orthogonal projection in Hilbert space is a pleasant variant of the Dirichlet principle of minimization.

H. Weyl

### 1.2.1 Théorème de Hodge-Weyl dans des domaines non simplement connexes

Nous rappelons le théorème usuel de Hodge<sup>2</sup>-Weyl<sup>3</sup> [78] sur lequel nous allons nous reposer :

**Lemme 1.2.1. (Théorème de Hodge-Weyl)** *Soit  $S$  un domaine ouvert borné et simplement connexe et  $u \in L^2(S)^3$ . Nous avons*

$$\operatorname{rot} u = 0 \quad \text{dans } S \quad \Rightarrow \quad \exists! \varphi \in H^1(S)_{/\mathbb{C}}, u = \nabla \varphi \quad \text{dans } S.$$

Nous allons généraliser ce résultat bien connu dans le cas où le domaine  $S$  n'est pas simplement connexe mais possède  $Q$  trous.

**Lemme 1.2.2.** *Soit  $S$  une surface plane à  $Q$  trous. Donnons nous  $u \in L^2(S)$  tel que  $\operatorname{rot} u = 0$  dans  $S$ . Alors il existe  $\varphi \in H^1(S_\Gamma)$  tel que*

$$u = \nabla \varphi \quad \text{et pour tout } q = 1 \dots Q, \text{ nous avons } [\partial_\tau \varphi]_{\Gamma_q} = 0.$$

avec  $\Gamma_q$  des coupures qui rendent le domaine  $S$  simplement connexe. Le potentiel  $\varphi$  ne saute pas :

$$\varphi \in H^1(S).$$

si l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiée

- (i) il existe une portion du bord extérieur  $\gamma_0 \subset \partial_0 S$  de mesure (de Lebesgue) non nulle telle que  $u \times n|_{\gamma_0} = 0$ ,
- (ii) il existe pour tout  $q = 1 \dots Q$  des portions des bords intérieurs  $\gamma_q \subset \partial_q S$  de mesure non nulle telles que  $u \times n|_{\gamma_{q,i}} = 0$ .

*Démonstration.* Le domaine  $S$  privé de ses coupures  $\Gamma_q$  est simplement connexe, ce qui nous donne le droit d'exploiter le lemme 1.2.1, nous savons ainsi qu'il existe  $\varphi \in H^1(S_\Gamma)$  tel que

$$u = \nabla \varphi.$$

La composante tangentielle de  $u$  ne peut sauter au travers d'une coupure  $\Gamma_q$  puisque  $\operatorname{rot} u = 0$  dans  $S$ . Ainsi pour  $q = 1 \dots Q$  :

$$[\varphi]_{\Gamma_q} = cte_q.$$

Choisissons de placer nos coupures de façon qu'elles intersectent la portion  $\gamma_0$  (voir le dessin de gauche de la figure 1.2) :

$$\overline{\Gamma_q} \cap \gamma_0 = \{x_{q,0}\} \neq \emptyset,$$

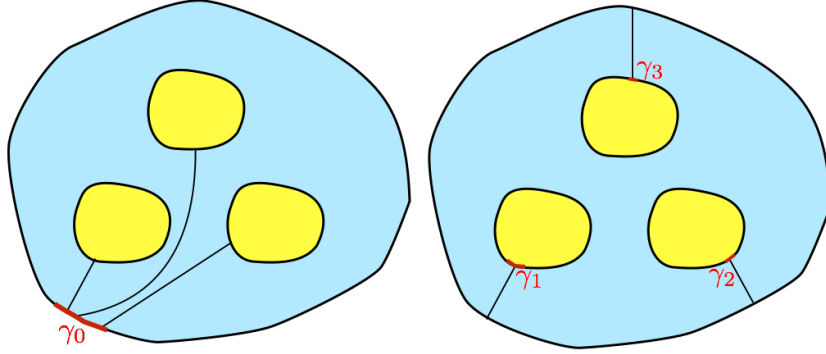
en un point  $x_{q,0}$  pour lequel la normale de  $\gamma_0$  est bien définie (ce point existe car  $\gamma_0$  est lipschitzienne et la coupure existe car le domaine est simplement connexe). Si  $u \times n|_{\gamma_0} = 0$  alors il existe une constante  $\varphi_0$  tel que  $\varphi|_{\gamma_0} = \varphi_0$  et donc

$$cte_q = \lim_{x_\tau \rightarrow x_{q,0}} [\varphi]_{\Gamma_q}(x_\tau) = \varphi_0 - \varphi_0 = 0.$$

Le raisonnement est similaire si nous choisissons de placer nos coupures de façon que pour chaque  $q$  nous avons  $\overline{\Gamma_q} \cap \gamma_q \neq \emptyset$  (voir le dessin de droite de la figure 1.2).  $\square$

2. William Vallance Douglas Hodge (17 juin 1903 - 7 juillet 1975) mathématicien écossais ayant travaillé sur les formes différentielles. Son étude approfondie de la cohomologie de Rham est à l'origine de l'utilisation de son nom dans les décompositions de Helmtz.

3. Hermann Weyl (9 novembre 1885 - 8 décembre 1955) a réalisé des travaux majeurs en géométrie (différentielle, symplectique, théorie des groupes), à son exploitation pour fonder la physique théorique (relativité, mécanique quantique) et à ses conséquences sur la philosophie. Il donne une démonstration rigoureuse de la décomposition en gradient et voit son apport pour les EDPs. Il est une grande partie de sa vie partisan du constructivisme.

FIGURE 1.2 – Portion du bord  $\gamma_0$  et  $\gamma_q$ 

Nous observons dans le lemme 1.2.2 que le potentiel introduit peut dépendre des coupures artificiellement introduites. Cependant comme le champ que le gradient de ce potentiel est censé représenter ne dépend pas de ces coupures, le gradient de ce potentiel ne le doit pas non plus. Soit  $\Gamma_q$  et  $\Gamma'_q$  des coupures différentes qui relient  $\partial_q S$  et  $\partial_0 S$ , alors pour  $u \in L^2(S)$  tel que  $\text{rot } u = 0$ , nous avons :

$$\exists \varphi \in H^1(S_\Gamma), \exists \varphi' \in H^1(S_{\Gamma'}) ; u = \nabla \varphi = \nabla \varphi'.$$

Nous pouvons identifier la distribution constituée du gradient d'une fonction qui saute à travers une coupure par une fonction  $L^2$  :

**Remarque 1.2.1.** Pour tout  $v \in H^1(S_\Gamma)$  le champ  $\tilde{\nabla} v$  est défini par :

$$\tilde{\nabla} v = \nabla v \quad \text{dans } \mathcal{D}'(S_\Gamma).$$

Considérons  $v \in H^1(S_\Gamma)$ , comme  $\text{rot } \nabla v = 0$  sur  $S_\Gamma$ , la trace tangentielle est bien définie sur  $S_\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \partial_\tau &:= H^1(S_\Gamma) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial S \setminus \partial \Gamma) \\ v &\mapsto -\nabla v \times n|_{\partial S \setminus \partial \Gamma} \end{aligned}$$

avec  $n$  la normale sortante à  $\partial S \setminus \partial \Gamma$ . De même comme  $\text{rot } \tilde{\nabla} v = 0$  sur  $S$ , nous pouvons définir l'opérateur "**dérivée tangentielle**"  $\tilde{\partial}_\tau$  sur le bord  $\partial S$  par :

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_\tau &:= H^1(S) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial S) \\ v &\mapsto -\tilde{\nabla} v \times n|_{\partial S}. \end{aligned}$$

Cet opérateur coïncide avec la "dérivée tangentielle" usuelle  $\partial_\tau$  quand cela est possible :

$$\tilde{\partial}_\tau v|_{\partial S \setminus \partial \Gamma} = \partial_\tau v,$$

par contre il faut être vigilant avec l'intégrale sur un contour fermé (considérons que  $\Gamma_q$  intersecte  $\partial_q S$  et  $\partial_0 S$ ) :

$$\int_{\partial_q S} \tilde{\partial}_\tau v = -[v]_{\Gamma_q} \quad \text{et} \quad \int_{\partial_0 S} \tilde{\partial}_\tau v = [v]_{\Gamma_q}.$$

Si  $v$  est le potentiel d'un champ 2D de  $L^2$  alors la dérivée tangentielle  $\tilde{\partial}_\tau$  ne dépend bien entendu pas des coupures artificielles.

## 1.2.2 Décompositions de Helmholtz à poids

Whoever, in the pursuit of science, seeks  
after immediate practical utility may rest  
assured that he seeks in vain.

Helmholtz, Heidelberg 1862

**Théorème 1.2.1.** *Si  $\Lambda$  vérifie l'hypothèse 1.1.1 des poids complexes, alors les champs 2D dans  $L^2(S)$  peuvent être décomposés en potentiels :*

$$\begin{aligned} L^2(S, \mathbb{C}^2) &= \nabla H_0^1(S) \oplus \Lambda^{-1} \mathbf{rot} H^1(S) \oplus \mathcal{E}(\Lambda, S) \\ L^2(S, \mathbb{C}^2) &= \nabla H^1(S) \oplus \Lambda^{-1} \mathbf{rot} H_0^1(S) \oplus \mathcal{H}(\Lambda, S) \end{aligned}$$

avec les espaces harmoniques à poids  $\mathcal{E}(\Lambda, S)$  et  $\mathcal{H}(\Lambda, S)$  définis en (1.7). Ces décompositions sont orthogonales selon la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$  définie en (1.2).

Ce théorème dit que tout champ 2D

$$u_e \in L^2(S, \mathbb{C}^2)_{/\mathcal{E}(\Lambda, S)} \quad \text{et} \quad u_m \in L^2(S, \mathbb{C}^2)_{/\mathcal{H}(\Lambda, S)}$$

peuvent s'écrire sous la forme

$$u_e = \nabla \xi_e + \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e \quad \text{et} \quad u_m = \nabla \xi_m + \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_m$$

avec des potentiels (pour  $u_e$ )

$$\xi_e \in H_0^1(S) \quad \text{et} \quad \zeta_e \in H^1(S)_{/\mathbb{R}}$$

et (pour  $u_m$ )

$$\xi_m \in H^1(S)_{/\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \zeta_m \in H_0^1(S).$$

Ceux ci peuvent se déterminer en appliquant respectivement  $u_e$  à  $\nabla \xi_e$  et à  $\Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e$  selon la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$  :

$$(u_e, \nabla \xi_e)_\Lambda = (\nabla \xi_e + \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e, \nabla \xi_e)_\Lambda, \quad (u_e, \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e)_\Lambda = (\nabla \xi_e + \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e, \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e)_\Lambda.$$

En rappelant que la décomposition est orthogonale selon  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ , nous avons

$$(u_e, \nabla \xi_e)_\Lambda = (\nabla \xi_e, \nabla \xi_e)_\Lambda, \quad (u_e, \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e)_\Lambda = (\Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e, \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e)_\Lambda,$$

et ainsi les potentiels  $\xi_e$  et  $\zeta_e$  sont les uniques solutions des problèmes variationnels suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \xi_e \in H_0^1(S) \text{ telle que } \forall \xi \in H_0^1(S) \\ \int_S (\Lambda \nabla \xi_e) \cdot \nabla \xi = \int_S (\Lambda u_e) \cdot \nabla \xi, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \zeta_e \in H^1(S)_{/\mathbb{C}} \text{ telle que } \forall \zeta \in H^1(S)_{/\mathbb{C}} \\ \int_S (\Lambda \mathbf{rot} \zeta_e) \cdot \mathbf{rot} \zeta = \int_S (\Lambda u_e) \cdot \mathbf{rot} \zeta. \end{array} \right. \quad (1.8)$$

De la même manière les potentiels  $\xi_m$  et  $\zeta_m$  qui nous permettent de décomposer  $u_m$  sont les solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \xi_m \in H^1(S)_{/\mathbb{C}} \text{ telle que } \forall \xi \in H^1(S)_{/\mathbb{C}} \\ \int_S (\Lambda \nabla \xi_m) \cdot \nabla \xi = \int_S (\Lambda u_m) \cdot \nabla \xi \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \zeta_m \in H_0^1(S) \text{ telle que } \forall \zeta \in H_0^1(S) \\ \int_S (\Lambda \mathbf{rot} \zeta_m) \cdot \mathbf{rot} \zeta = \int_S (\Lambda u_m) \cdot \mathbf{rot} \zeta. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Si de plus

$$u_e \in H(\mathbf{rot}, S) \quad \text{et} \quad u_m \in H(\mathbf{div} \Lambda, S)$$

alors, les problèmes variationnels décrits plus haut peuvent s'écrire avec des formulations fortes. Plus précisément, les potentiels  $\xi_e \in H_0^1(S)$  et  $\zeta_e \in H^1(S)_{/\mathbb{R}}$  sont les solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div}(\Lambda \nabla \xi_e) = \mathbf{div}(\Lambda u_e), \quad \text{dans } S \\ \xi_e = 0, \quad \text{sur } \partial S, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}(\Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e) = \mathbf{rot} u_e, \quad \text{dans } S, \\ (\Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e) \times n = u_e \times n, \quad \text{sur } \partial S, \end{array} \right.$$

et pour finir les potentiels  $\xi_m \in H^1(S)_{/\mathbb{R}}$  et  $\zeta_m \in H_0^1(S)$  sont les solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div}(\Lambda \nabla \xi_m) = \mathbf{div}(\Lambda u_m), \quad \text{dans } S, \\ (\Lambda \nabla \xi_m) \cdot n = u_m \cdot n, \quad \text{sur } \partial S, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}(\Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta_m) = \mathbf{rot} u_m, \quad \text{dans } S, \\ \zeta_m = 0, \quad \text{sur } \partial S. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Il est aisé de vérifier avec le lemme de Lax-Milgram et l'hypothèse des poids complexes 1.1.1 que les problèmes issus de (2.13) et (2.14) sont bien posés puis que les potentiels  $\xi_e \in H_0^1(S)$ ,  $\zeta_e \in H^1(S)_{/\mathbb{R}}$ ,  $\xi_m \in H^1(S)_{/\mathbb{R}}$  et  $\zeta_m \in H_0^1(S)$  vérifient pour tout champ  $u \in L^2(S, \mathbb{C})$

$$e := u - (\nabla \xi_e + \widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e) \in \mathcal{E}(\widehat{\varepsilon}, S) \quad \text{et} \quad h := u - (\nabla \xi_m + \widehat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_m) \in \mathcal{H}(\widehat{\varepsilon}, S).$$

Les relations d'orthogonalité s'obtiennent par les formules de Green 2D :

$$\begin{aligned} - (\nabla \xi_e, \widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e)_{\widehat{\varepsilon}} &\stackrel{(10.18)}{=} - \int_S \xi_e \operatorname{div} \mathbf{rot} \zeta_e + \int_{\partial S} \mathbf{rot} \zeta_e \cdot n \xi_e = 0, \\ - (\nabla \xi_e, e)_{\widehat{\varepsilon}} &\stackrel{(10.18)}{=} - \int_S \xi_e \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon} e) + \int_{\partial S} \widehat{\varepsilon} e \cdot n \xi_e = 0, \\ - (\widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e, e)_{\widehat{\varepsilon}} &\stackrel{(10.19)}{=} - \int_S \mathbf{rot} \zeta_e \operatorname{rot}(e) + \int_{\partial S} e \times n \mathbf{rot} \zeta_e = 0 \end{aligned}$$

Les relations d'orthogonalité pour la seconde décomposition se démontrent de la même manière.  $\square$

Les décompositions du théorème 1.2.1 nous laissent une amère saveur d'inachevé en ce que nous ne connaissons la structure des espaces harmoniques  $\mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, \cdot)$  et  $\mathcal{H}(\mathbf{\Lambda}, \cdot)$ . C'est ainsi tout naturellement l'objet de la section suivante. En particulier, nous verrons que ces espaces sont eux aussi engendrés par des gradients et des rotationnels complétant ainsi l'objectif de nos décompositions.

### 1.3 Espaces des fonctions harmoniques

Une partie des résultats présentés dans cette section sont une généralisation à des poids plus compliqués et étendus à la dimension 2 de certains présents dans [6] et [11]. Le cas d'un domaine simplement connexe est bien connu :

**Proposition 1.3.1.** *Si le domaine  $S$  est simplement connexe alors les espaces harmoniques sont vides :*

$$\mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, S) = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\mathbf{\Lambda}; S) = \emptyset$$

*Démonstration.* Soit  $e \in \mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, S)$ , par le lemme 1.2.2, nous savons qu'il existe un potentiel  $\varphi \in H^1(S)$  tel que  $e = \nabla \varphi$ . De plus comme  $e \times n|_{\partial S} = 0$ , le potentiel est constant sur l'unique bord  $\varphi|_{\partial S} = a$ , ainsi  $\varphi$  vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{\Lambda} \nabla \varphi) = 0, & \text{dans } S, \\ \varphi = a, & \text{sur } \partial S, \end{cases}$$

et donc  $\varphi = a$  dans tout le domaine, ce qui implique que  $e = 0$ .

De même pour  $h \in \mathcal{H}(\mathbf{\Lambda}; S)$ , par le lemme 1.2.2 et le fait que  $\mathbf{\Lambda} h \cdot n|_{\partial S}$ , nous savons qu'il existe un potentiel  $\psi \in H^1(S)$  tel que

$$h = \nabla \psi \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{\Lambda} \nabla \psi) = 0, & \text{dans } S, \\ \mathbf{\Lambda} \nabla \psi \cdot n = 0, & \text{sur } \partial S, \end{cases}$$

et donc  $h = 0$ .  $\square$

**Théorème 1.3.1.** *Les espaces harmoniques sont décrits par les bases suivantes :*

$$\mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, S) = \operatorname{span}\{\nabla \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S), 1 \leq q \leq Q\}, \quad \mathcal{H}(\mathbf{\Lambda}; S) = \operatorname{span}\{\widetilde{\nabla} \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S), 1 \leq q \leq Q\},$$

avec les potentiels harmoniques  $\varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S) \in H^1(S)$  et  $\psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) \in H^1(S_{\Gamma_q})_{/\mathbb{C}}$  uniques solutions des problèmes elliptiques suivants :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{\Lambda} \nabla \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S)) = 0, & \text{dans } S, \\ \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S) = 0, & \text{sur } \partial_0 S, \\ \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S) = \delta_{qk}, & \text{sur } \partial_k S, \quad k \leq Q, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{\Lambda} \nabla \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)) = 0, & \text{dans } S \setminus \Gamma_q, \\ \mathbf{\Lambda} \nabla \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) \cdot n = 0, & \text{sur } \partial S, \\ [\psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)]_{\Gamma_k} = \delta_{qk}, & \text{sur } \Gamma_k, \quad k \leq Q, \\ [\mathbf{\Lambda} \nabla \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) \cdot n]_{\Gamma_k} = 0 & \text{sur } \Gamma_k, \quad k \leq Q. \end{cases} \quad (1.10)$$

Le potentiel conjugué  $\psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  est défini par son équation à une constante près, c'est la raison pour laquelle l'unicité se démontre dans l'espace quotient  $H^1(S_{\Gamma_q})/\mathbb{C}$ , que nous pouvons choisir avec une condition de normalisation que nous ne fixerons pas dans ce chapitre afin de nous laisser ce degré de liberté pour éventuellement simplifier les expressions des calculs dans les chapitres suivants par le choix astucieux d'une normalisation. Néanmoins, quand le poids  $\mathbf{\Lambda}$  est scalaire, la manière la plus naturelle de la choisir est

$$\int_S \mathbf{\Lambda} \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) = 0.$$

*Démonstration. Caractère bien posé des potentiels harmoniques.* Le caractère bien posé des équations tient au lemme de Lax-Milgram et aux inégalités de Poincaré. Ceux qui veulent se remémorer ces dernières doivent se référer au lemme 1.5.1. Nous n'allons traiter que la seconde équation de (1.10) qui semble plus inhabituelle que la première, et ce sera la seule fois où nous ferons la preuve de l'existence et l'unicité de solution d'un problème elliptique "simple". La formulation faible est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) \in H^1(S_{\Gamma_q}) \text{ telle que } [\psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)]_{\Gamma} = 1, \int_{S_{x_3}} \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) = 0 \text{ et} \\ \forall \psi \in H^1(S), \int_S \mathbf{\Lambda} \nabla \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) \cdot \nabla \psi = 0. \end{array} \right.$$

où nous avons rajouté une condition de moyenne nulle afin de s'assurer l'unicité (si nous ne le faisons pas le gradient reste lui tout de même unique). Il suffit d'introduire un relèvement  $\psi^* \in H^1(S_{x_3}^{\Gamma})$  tel que  $[\psi^*]_{\Gamma} = 1$  et de moyenne nulle - nous savons qu'il en existe au moins un - et d'écrire  $\psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) = \psi^* + \theta_s$  de manière à ce que la nouvelle inconnue  $\theta_s$  soit solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \theta_s \in H^1(S) \text{ telle que } \int_{S_{x_3}} \theta_s = 0 \text{ et} \\ \forall \psi \in H^1(S_{x_3}), \int_{S_{x_3}} \mathbf{\Lambda} \nabla \theta_s \cdot \nabla \psi = - \int_{S_{x_3}} \mathbf{\Lambda} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi. \end{array} \right.$$

Nous concluons avec le lemme de Lax-Milgram en rappelant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger qui nous permet de démontrer la coercitivité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz la continuité.

**Espace harmonique avec condition tangentielle.** Soit  $e \in \mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, S)$ , par le lemme 1.2.2, nous savons qu'il existe un potentiel  $\varphi \in H^1(S)$  tel que  $e = \nabla \varphi$ . De plus comme  $e \times n|_{\partial S} = 0$ , le potentiel est constant sur chacun des bords  $\varphi|_{\partial_q S} = a_q$  pour  $0 \leq q \leq Q$ . Nous avons donc par linéarité

$$\varphi = a_0 + \sum_{q=1}^Q (a_q - a_0) \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S) \quad \text{et ainsi} \quad e = \nabla \varphi = \sum_{q=1}^Q (a_q - a_0) \nabla \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S).$$

**Espace harmonique avec condition normale.** De même avec le lemme 1.2.2, nous savons qu'il existe un potentiel  $\psi \in H^1(S_{\Gamma})$  tel que

$$h = \tilde{\nabla} \psi \quad \text{et} \quad [\psi]_{\Gamma_q} = b_q \quad \text{et donc} \quad h = \sum_{q=1}^Q b_q \tilde{\nabla} \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S).$$

**Vérifions que les familles génératrices  $\nabla \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  et  $\tilde{\nabla} \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  sont bien linéairement indépendantes (et donc des bases) :**

- Si  $\sum_q \alpha_q \nabla \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S) = 0$ , par connexité  $\sum \alpha_j \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  est constant dans  $S$ . Puisque  $\varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  s'annule sur  $\partial_0 S$ . Ainsi  $\sum_q \alpha_q \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S) = 0$  sur  $\partial_k S$  et donc  $\alpha_k = 0$ .
- Si  $\sum_q \alpha_q \tilde{\nabla} \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S) = 0$ , par connexité  $\sum_q \alpha_q \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  est constant dans  $S$ . En particulier  $\sum_q \alpha_q [\psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)] = 0$  sur  $\Gamma_k$ , et ainsi  $\alpha_k = 0$ .

□

Remarquons que  $\psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  dépend de la position de la coupure  $\Gamma_q$  alors que  $\tilde{\nabla} \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  (voir la remarque 1.2.1 pour la définition du  $\tilde{\nabla}$ ) non. Cette remarque ne semble pas évidente mais analysons un exemple pour s'en persuader :



**Exemple 1.3.1.** Soit  $S$  est une couronne et soit  $\Lambda$  un scalaire ne dépendant pas de la coordonnée angulaire. Si nous définissons la coupure  $\Gamma$  comme un des rayons de la couronne alors  $\psi^q(\Lambda, S)$  et son gradient peuvent s'écrire dans les coordonnées polaires  $(e_r, e_\theta)$  avec  $e_r$  placé sur la coupure  $\Gamma$  :

$$\psi^q(\Lambda, S)(r, \theta) = 1 - \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{et} \quad \nabla \psi^q(\Lambda, S)(r, \theta) = \frac{-1}{2\pi r} e_\theta.$$

*Démonstration.* la fonction

$$\psi(r, \theta) = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$$

vérifie l'équation (1.10) qui admet une unique solution. Nous n'offenserons pas le lecteur en calculant son gradient.  $\square$

Dans cet exemple  $\nabla \psi^q(\Lambda, S)$  ne dépend pas de la variable angulaire et donc de la coupure. Cette remarque s'éclaircira encore d'avantage grâce au lemme 1.3.5 ou nous pourrons réécrire  $\tilde{\nabla} \psi^q(\Lambda, S)$  via un problème qui ne dépend pas de la coupure.

Faisons une remarque sur la formulation faible qui nous sera d'un grand réconfort :

**Remarque 1.3.1.** Les potentiels harmoniques vérifient :

$$\begin{cases} \int_S \Lambda \nabla \varphi^q(\Lambda, S) \cdot \nabla \varphi^* = 0, & \forall \varphi^* \in H_0^1(S), \\ \int_S \Lambda \tilde{\nabla} \psi^q(\Lambda, S) \cdot \nabla \psi^* = 0, & \forall \psi^* \in H^1(S). \end{cases} \quad (1.11)$$

Les familles de potentiels que nous avons introduites vérifient une relation de bi-orthogonalité :

**Lemme 1.3.1.** Soit  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  vérifiant l'hypothèse 1.1.1 des poids complexes, pour tout  $q, q' = 1 \dots Q$ ,

$$\int_S \nabla \varphi^q(\Lambda_1, S) \cdot \overline{\text{rot} \psi^{q'}(\Lambda_2, S)} = - \int_S \text{rot} \varphi^q(\Lambda_1, S) \cdot \overline{\tilde{\nabla} \psi^{q'}(\Lambda_2, S)} = \delta_q^{q'}. \quad (1.12)$$

*Démonstration.* Appliquons la formule de Green 2D (10.19) avec  $\varphi = \psi^{q'}(\Lambda_2)$  and  $\mathbf{v} = \nabla \varphi^q(\Lambda_1)$ . En utilisant (10.10) et l'annulation de la trace tangentielle  $\nabla \varphi^q(\Lambda_1) \times n|_{\partial S}$  :

$$\int_S \nabla \varphi^q(\Lambda_1) \cdot \overline{\text{rot} \psi^{q'}(\Lambda_2)} = \int_{S_\Gamma} \nabla \varphi^q(\Lambda_1) \cdot \overline{\text{rot} \psi^{q'}(\Lambda_2)} = \sum_{k=1}^Q \int_{\Gamma_k} [\overline{\psi^{q'}(\Lambda_2)}] \nabla \varphi^q(\Lambda_1) \times n = \int_{\Gamma_{q'}} \nabla \varphi^q(\Lambda_1) \times n.$$

La preuve se termine grâce aux conditions aux bords du potentiel  $\varphi^q$  :

$$\int_{\Gamma_{q'}} \nabla \varphi^q(\Lambda_1) \times n \stackrel{(10.11)}{=} - \int_{\Gamma_{q'}} \partial_\tau \varphi^q(\Lambda_1) = \varphi^q(\Lambda_1)|_{\overline{\Gamma_{q'} \cap \partial_{q'} S}} - \varphi^q(\Lambda_1)|_{\overline{\Gamma_{q'} \cap \partial_0 S}} = \delta_q^{q'} - 0. \quad \square$$

**Définition 1.3.1.** Les matrices de Gram  $Q \times Q$  des espaces harmoniques  $\mathcal{E}(\Lambda, S)$  et  $\mathcal{H}(\Lambda, S)$  sont définies par

$$\mathbf{Y}(\Lambda, S) = (\mathbf{Y}_{q,q'}(\Lambda, S))_{q,q'}, \quad \mathbf{Y}_{q,q'}(\Lambda, S) = \int_S \Lambda \nabla \varphi^q(\Lambda, S) \cdot \overline{\nabla \varphi^{q'}(\Lambda, S)}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{Z}(\Lambda, S) = (\mathbf{Z}_{q,q'}(\Lambda, S))_{q,q'}, \quad \mathbf{Z}_{q,q'}(\Lambda, S) = \int_S \Lambda \tilde{\nabla} \psi^q(\Lambda, S) \cdot \overline{\tilde{\nabla} \psi^{q'}(\Lambda, S)}. \quad (1.14)$$

Quand le poids  $\Lambda = \text{Id}$  alors la matrice de Gram  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$  devient la matrice de capacité :

$$\mathbf{Y}(\text{Id}, S) = \mathfrak{C},$$

dont les caractéristiques sont détaillées dans l'annexe 11.

**Remarque 1.3.2.** Pour tout vecteur  $u = (u_q)_{q=1 \dots Q} \in \mathbb{C}^Q$  et  $v = (v_q)_{q=1 \dots Q} \in \mathbb{C}^Q$ , nous noterons

$$\varphi_\Lambda(u) = \sum_q^Q u_q \varphi^q(\Lambda, S) \quad \text{et} \quad \psi_\Lambda(u) = \sum_q^Q u_q \psi^q(\Lambda, S).$$

Les matrices de Gram définissent des formes sesquilinéaires :

$$(\mathbf{Y}(\Lambda, S) u, v)_{\mathbb{C}^Q} = \int_S \Lambda \nabla \varphi_\Lambda(u) \cdot \overline{\nabla \varphi_\Lambda(v)} \quad \text{et} \quad (\mathbf{Z}(\Lambda, S) u, v)_{\mathbb{C}^Q} = \int_S \Lambda \tilde{\nabla} \psi_\Lambda(u) \cdot \overline{\tilde{\nabla} \psi_\Lambda(v)} \quad \text{pour} \quad u, v \in \mathbb{C}^Q$$

Nous allons maintenant étudier en profondeur ces matrices de Gram et leur forme sesquilinéaire associée.

**Lemme 1.3.2.** *Les matrices de Gram  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$  and  $\mathbf{Z}(\Lambda, S)$  sont symétriques inversibles et vérifient*

$$\Re((\mathbf{Y}(\Lambda, S)u, u)_{\mathbb{C}^Q}) > 0 \quad \text{et} \quad \Re((\mathbf{Z}(\Lambda, S)u, u)_{\mathbb{C}^Q}) > 0 \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{C}^Q \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Si  $\Lambda$  est hermitienne (et donc définie positive), alors  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$  et  $\mathbf{Z}(\Lambda, S)$  sont des matrices complexes hermitiennes définies positives. Elles sont de plus invariantes par transformations conformes et anti-conformes par morceaux<sup>4</sup>, c-a-d que pour toute transformation conforme ou anti-conforme par morceaux  $\mathcal{T}_c$  :

$$\mathbf{Y}(\Lambda \circ \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_c(S)) = \mathbf{Y}(\Lambda, S) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}(\Lambda \circ \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_c(S)) = \mathbf{Z}(\Lambda, S)$$

*Démonstration.* Nous donnerons la preuve seulement pour  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$ . L'autre est similaire.

**Positivité :** En utilisant la remarque 1.3.2 :

$$\Re((\mathbf{Y}(\Lambda, S)u, u)_{\mathbb{C}^Q}) = \int_S \Re((\Lambda \nabla \varphi_\Lambda(u), \nabla \varphi_\Lambda(u))_{\mathbb{C}^Q}),$$

et puisque  $\Lambda$  vérifie l'hypothèse 1.1.1 des poids complexes :

$$\Re((\mathbf{Y}(\Lambda, S)u, u)_{\mathbb{C}^Q}) \geq \Lambda_{r,-} \int_S |\nabla \varphi_\Lambda(u)|^2.$$

**Inversibilité :**

$$(\mathbf{Y}(\Lambda, S)u, u)_{\mathbb{C}^N} = 0 \implies \int_S |\nabla \varphi_\Lambda(u)|^2 = 0 \implies \varphi_\Lambda(u) = 0 \implies u = 0.$$

**Symétrie :** Appliquons (1.11) avec  $\varphi^* = \varphi^q(\Lambda, S) - \overline{\varphi^q(\Lambda, S)}$  pour se rendre compte que

$$\mathbf{Y}_{q,q'}(\Lambda, S) = \int_S \Lambda \nabla \varphi^q(\Lambda, S) \cdot \nabla \varphi^{q'}(\Lambda, S) \tag{1.15}$$

ainsi si  $\Lambda$  est symétrique, alors

$$\mathbf{Y}_{q,q'}(\Lambda, S) = \int_S \nabla \varphi^q(\Lambda, S) \cdot \Lambda \nabla \varphi^{q'}(\Lambda, S).$$

La symétrie hermitienne si  $\Lambda$  hermitienne est évidente aux regards de (1.13).

**Invariances par transformations conformes et anti-conformes :** la preuve est la même que celle de la propriété 11.2.4.  $\square$

La matrice de Gram  $\mathbf{Y}$  est pleine, c'est en particulier ce qu'énonce le résultat suivant :

**Lemme 1.3.3.** *Si  $\Lambda$  est une matrice réelle, alors  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$  est une M-matrice stricte, plus précisément*

$$\mathbf{Y}_{qq'}(\Lambda, S) < 0 \quad \text{pour } q \neq q', \quad \mathbf{Y}_{qq}(\Lambda, S) > \sum_{q' \neq q} |\mathbf{Y}_{qq'}(\Lambda, S)|, \quad \forall 1 \leq q \leq Q, \tag{1.16}$$

*Démonstration.* En appliquant le principe du maximum appliqué à l'EDP elliptique (1.10) qui définit le potentiel  $\varphi^q(S, \Lambda)$  nous concluons que  $0 \leq \varphi^q(S, \Lambda) \leq 1$  et que  $\varphi^q(S, \Lambda)$  atteint son minimum dans  $\bar{S}$  sur le bord  $\partial_{q'}S$  pour  $q' \neq q$ . Ensuite,  $\partial_n \varphi^q(S, \Lambda) \leq 0$  sur  $\partial_{q'}S$ . Et avec la formule de Green 2D nous avons<sup>5</sup>

$$\mathbf{Y}_{qq'}(\Lambda, S) = \int_{\partial_{q'}S} (\Lambda n \cdot n) \partial_n \varphi^q(S, \Lambda) \leq 0. \tag{1.17}$$

4. les transformations conformes et anti-conformes sont les transformations dont la jacobienne est localement une similitude directe et respectivement indirecte. Une transformation conforme par morceaux est un homéomorphisme tel qu'il existe une partition du domaine quelle transforme de manière que sa restriction à un des éléments cette partition soit une transformation conforme (définition 11.2.4). Se référer à l'annexe 11.2.3 pour plus amples et précises informations.

5.  $(\Lambda \nabla \varphi^q(\Lambda, S)) \cdot n|_{\partial S} = (\Lambda n \cdot n) \partial_n \varphi^q(\Lambda, S)$  car pour tout  $u \in \mathbb{C}^2$  :

$$(\Lambda u) \cdot n = \Lambda [(u \cdot n)n + (u \cdot \tau)\tau] \cdot n = (\Lambda n \cdot n) (u \cdot n) + (\Lambda \tau \cdot n) (u \cdot \tau)$$

et que  $\partial_\tau \varphi^q|_{\partial S} = 0$

Cette inégalité est stricte car  $\mathbf{Y}_{q,q'}(\mathbf{\Lambda}, S) = 0$  impliquerait que  $\partial_n \varphi^q(S, \mathbf{\Lambda}) = 0$  sur  $\partial_{q'} S$ . Si  $\varphi^q(S, \mathbf{\Lambda}) = 0$  sur  $\partial_{q'} S$ , alors, par le principe de continuation unique,  $\varphi^q(S, \mathbf{\Lambda})$  s'annule dans  $S$  ce qui entre en contradiction avec  $\varphi^q(S, \mathbf{\Lambda}) = 1$  sur  $\partial_q S$ .

La seconde inégalité (1.16) revient à démontrer que  $\sum_{q'=1}^Q \mathbf{Y}_{q,q'}(\mathbf{\Lambda}, S) > 0$ . Pour cela introduisons le potentiel  $\varphi_{\mathbf{\Lambda}}(1) = \sum_{q=1}^Q \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S)$  solution du problème elliptique :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{\Lambda} \nabla \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(1)) = 0, & \text{dans } S, \\ \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(1) = 0, & \text{sur } \partial_0 S, \\ \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(1) = 1, & \text{sur } \partial_q S, 0 < q \leq Q. \end{cases}$$

De la même manière, par le principe du maximum,  $\varphi_{\mathbf{\Lambda}}(1)$  atteint son maximum sur les bords  $\partial_k S$  où il vaut 1, et ainsi  $(\mathbf{\Lambda} n \cdot n) \partial_n \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(1) \geq 0$  sur  $\partial_q S$ . Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{q'}^Q \mathbf{Y}_{q,q'}(\mathbf{\Lambda}, S) &= \int_S \mathbf{\Lambda} \nabla \varphi^q(S, \mathbf{\Lambda}) \cdot \nabla \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(1) = \int_{\partial_q} (\mathbf{\Lambda} n \cdot n) \partial_n \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(1) \geq 0. \\ \sum_j \mathbf{Y}_{ij}(\mathbf{\Lambda}, S) &= \int_{\Sigma_i} (\mathbf{\Lambda} n \cdot n) \partial_n \varphi_e(S, \mathbf{\Lambda}) \geq 0. \end{aligned}$$

Nous prouvons que cette inégalité est stricte de la même manière que pour l'inégalité (1.17).  $\square$

Nous tiendrons à établir une relation du même type pour  $\mathbf{Z}(\mathbf{\Lambda}, S)$  par la suite dans un cadre légèrement plus plus restreint<sup>6</sup>. Pour l'heure, nous allons chercher à étudier les valeurs propres de ces matrices. Nous savons déjà que si  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice réelle symétrique alors  $\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S)$  et  $\mathbf{Z}(\mathbf{\Lambda}, S)$  sont définies positives et forment donc un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^Q$  équivalent au produit scalaire canonique, c-a-d :

$$\exists c, C > 0; \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^Q, c |\mathbf{u}|_{\mathbb{R}^Q} \leq \mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbb{R}^Q} \quad \text{et} \quad c |\mathbf{u}|_{\mathbb{R}^Q} \leq \mathbf{Z}(\mathbf{\Lambda}, S) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbb{R}^Q}.$$

Cependant, nous souhaitons savoir comment évoluent ces constantes si la géométrie s'en trouve modifiée, et plus particulièrement nous aimerions des estimations uniformes par rapport à l'ensemble des surfaces à  $Q$  trous "non-dégénérés" bornées, et élargir ce cadre aux poids complexes. Plus précisément, nous espérons montrer qu'il existe une borne inférieure à toutes les parties réelles des valeurs propres de  $\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S)$  et  $\mathbf{Z}(\mathbf{\Lambda}, S)$ . Un premier résultat nous conforte quant à la réalisabilité de nos objectifs :

**Propriété 1.3.1.** *Pour tout  $u \in \mathbb{C}^Q$ , nous avons*

$$\Re((\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S) u, u)_{\mathbb{C}^Q}) \geq \mathbf{\Lambda}_{r,-} C_-^0 |u|^2$$

avec  $C_-^0 = \left(\frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)}\right)^2 \min_q |\mathcal{O}_q|$  où  $c_{p,0}(\mathcal{O}_0)$  la constante de Poincaré associée au domaine  $\mathcal{O}_0$  intervenant dans le lemme 1.5.1. Si de plus le champ matriciel  $\mathbf{\Lambda}_i$  est positif ou négatif alors :

$$|\Im((\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S) u, u)_{\mathbb{C}^Q})| \geq \mathbf{\Lambda}_{i,-} C_-^0 |u|^2 \quad \text{et} \quad |(\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S) u, u)_{\mathbb{C}^Q}| \geq \mathbf{\Lambda}_- C_-^0 |u|^2.$$

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{C}^Q$ . La remarque 1.3.2, nous rappelle que

$$(\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S) u, u)_{\mathbb{C}^Q} = \int_S (\mathbf{\Lambda} \nabla \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(u), \nabla \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(u))_{\mathbb{C}^Q}.$$

Etendons  $\varphi_{\mathbf{\Lambda}}(u) \in H^1(S)$  sur  $\mathcal{O}_0$  par la fonction bouche-trou suivante

$$\varphi_{\mathbf{\Lambda}}(u)^* = \begin{cases} \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(u) & \text{sur } S, \\ u_q & \text{dans } \overline{\mathcal{O}_q}. \end{cases}$$

Nous avons

$$(\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S) u, u)_{\mathbb{C}^Q} = \int_S (\mathbf{\Lambda} \nabla \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(u)^*, \nabla \varphi_{\mathbf{\Lambda}}(u)^*)_{\mathbb{C}^Q}. \quad (1.18)$$

6. Nous contraindrons les comatrices de  $\mathbf{\Lambda}$  et de son inverse à vérifier elles aussi l'hypothèse des poids scalaires.

En prenant la partie réelle et en exploitant la propriété 1.1.1, nous obtenons

$$\Re((\mathbf{Y}(\Lambda, S)u, u)_{\mathcal{C}Q}) \geq \Lambda_{r,-} \int_{\mathcal{O}_0} |\nabla \varphi_\Lambda(u)^*|^2.$$

Similairement, si le champ matriciel  $\Lambda_i$  est positif ou négatif, en prenant successivement la partie imaginaire et le module de (1.18), nous obtenons

$$|\Im((\mathbf{Y}(\Lambda, S)u, u)_{\mathcal{C}Q})| \geq \Lambda_{i,-} \int_{\mathcal{O}_0} |\nabla \varphi_\Lambda(u)^*|^2 \quad \text{et} \quad |(\mathbf{Y}(\Lambda, S)u, u)_{\mathcal{C}Q}| \geq \Lambda_- \int_{\mathcal{O}_0} |\nabla \varphi_\Lambda(u)^*|^2$$

Pour finir par l'inégalité de Poincaré classique, nous pouvons minorer :

$$\int_{\mathcal{O}_0} |\nabla \varphi_\Lambda(u)^*|^2 \geq \left(\frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)}\right)^2 \int_{\mathcal{O}_0} |\varphi_\Lambda(u)^*|^2 \geq \left(\frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)}\right)^2 \sum_{q=1}^Q \int_{\mathcal{O}_q} |\varphi_\Lambda(u)|^2 = \left(\frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)}\right)^2 \left(\sum_q |u_q|^2 |\mathcal{O}_q|\right).$$

□

En particulier, avec un raisonnement similaire à la propriété 1.1.1 (c'est à dire prendre  $u$  un vecteur propre de  $\Lambda$ ), alors les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{Y}} \in \sigma(\mathbf{Y}(\Lambda, S))$  de  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$  vérifient des propriétés de type borne inférieur :

$$\Lambda_{r,-} C_-^0 \leq \Re(\lambda_{\mathbf{Y}})$$

et si  $\Lambda_i$  est positif ou négatif alors

$$|\Lambda|_- C_-^0 \leq |\lambda_{\mathbf{Y}}| \quad \text{et} \quad \Lambda_{i,-} C_-^0 \leq |\Im(\lambda_{\mathbf{Y}})|.$$

Cette borne  $C_-^0$  est uniforme dans le sens où si l'on se restreint à l'ensemble des surfaces à  $Q$  trous tels que l'aire du plus petit trou est supérieure à  $a_*$  alors cette constante  $C_-^0$  est toujours supérieure à  $1/c_{p,0}(\mathcal{O}_0)^2 a_*$ . Mais à ce stade nous ne pouvons pas affirmer l'existence d'une borne inférieur (autre que 0) aux parties réelles des valeurs propres de  $\mathbf{Z}(\Lambda, S)$ . L'objet de la prochaine sous-section est de présenter un lemme qui nous permettra de démontrer l'existence de cette borne inférieure en plus de mieux caractériser nos matrices.

### 1.3.1 Le lemme de conjugaison (cas scalaire)

Où tout, même l'horreur tourne à l'enchantement

---

Baudelaire, les petites vieilles

Quand le poids  $\Lambda$  est un scalaire complexe (nous sommes dans le cas (ii) de la propriété 1.1.1), les espaces harmoniques  $\mathcal{E}(\Lambda, S)$  et  $\mathcal{H}(\Lambda, S)$  sont reliés par une "sorte de rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ". L'application linéaire  $L^2(S)^2$

$$J_\Lambda : \mathbf{v} \longrightarrow \Lambda \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v} \tag{1.19}$$

de réciproque  $J_\Lambda^{-1} = -J_{1/\Lambda}$  relie nos deux espaces harmoniques.

**Lemme 1.3.4.**  $J_\Lambda$  réalise un isomorphisme de  $\mathcal{E}(\Lambda, S)$  dans  $\mathcal{H}(\Lambda^{-1}, S)$  et de  $\mathcal{H}(\Lambda, S)$  dans  $\mathcal{E}(\Lambda^{-1}, S)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}(\Lambda, S)$  et en utilisant (10.5)

$$\operatorname{div}(\Lambda^{-1} J_\Lambda \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}) = -\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 0,$$

$$\operatorname{rot} J_\Lambda \mathbf{v} = \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 \times \Lambda \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\Lambda \mathbf{v}) = 0,$$

$$J_\Lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \Lambda (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \Lambda \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0.$$

ce qui signifie  $J_\Lambda \mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Lambda^{-1}, S)$ . Nos deux espaces ayant la même dimension  $Q$ , l'application linéaire  $J_\Lambda$  est un isomorphisme. La preuve de la seconde partie du lemme est identique. □

Nous pouvons désormais et enfin présenter le lemme que nous utiliserons autant de fois que Vlad III Basarab a empalé d'hommes.

**Lemme 1.3.5. (lemme de conjugaison)**

Les espaces harmoniques peuvent être engendrés via les rotationnels des potentiels conjugués :

$$\mathcal{E}(\Lambda, S) = \Lambda^{-1} \text{span}\{\mathbf{rot} \psi^q(\Lambda^{-1}, S)\}_{q=1;Q} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\Lambda, S) = \Lambda^{-1} \text{span}\{\mathbf{rot} \varphi^q(\Lambda^{-1}, S)\}_{q=1;Q}$$

Plus précisément, nous avons les formules de changement de bases suivantes

$$\widetilde{\nabla} \psi_j(\Lambda, S) = -\Lambda^{-1} \sum_{\ell=1}^N \mathbf{Z}_{j\ell}(\Lambda, S) \mathbf{rot} \varphi_\ell(\Lambda^{-1}, S) \quad \text{et} \quad \nabla \varphi_j(\Lambda, S) = \Lambda^{-1} \sum_{\ell=1}^N \mathbf{Y}_{j\ell}(\Lambda, S) \widetilde{\mathbf{rot}} \psi_\ell(\Lambda^{-1}, S), \quad (1.20)$$

ainsi qu'un lien entre les matrices de Gram

$$\mathbf{Y}(\Lambda, S)^{-1} = \mathbf{Z}(\Lambda^{-1}, S) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}(\Lambda, S)^{-1} = \mathbf{Y}(\Lambda^{-1}, S).$$

*Démonstration.* Pour simplifier, nous noterons  $\varphi_j(\Lambda)$  pour  $\varphi_j(\Lambda, S)$  et ainsi de suite.

Le lemme 1.3.4 nous dit que  $J_\Lambda \widetilde{\nabla} \psi_j(\Lambda) \in \mathcal{E}(\Lambda^{-1})$  et ainsi, en utilisant (10.7)

$$\Lambda \widetilde{\nabla} \psi^q(\Lambda) = \sum_{\ell=1}^N \alpha_{q\ell} \mathbf{rot} \varphi^\ell(\Lambda^{-1}).$$

$$\text{Nous avons } \mathbf{Z}_{qk}(\Lambda) = \int_S \Lambda \widetilde{\nabla} \psi^j(\Lambda) \cdot \overline{\widetilde{\nabla} \psi^k(\Lambda)} = \sum_{\ell=1}^Q \alpha_{q\ell} \int_S \mathbf{rot} \varphi^\ell(\Lambda^{-1}) \cdot \overline{\widetilde{\nabla} \psi^k(\Lambda)}.$$

Via la relation de bi-orthogonalité (1.12) avec  $\Lambda_1 = \Lambda^{-1}$  et  $\Lambda_2 = \Lambda$  nous avons  $\alpha_{jk} = -\mathbf{Z}_{jk}(\Lambda)$  puis la première partie de l'équation (1.20). La seconde partie se démontre de manière analogue.

En prenant  $\Lambda^{-1} \mathbf{e}_3 \times$  (1.20), et (1.20) réécrite avec  $\Lambda^{-1}$  à la place de  $\Lambda$ , nous avons

$$\Lambda^{-1} \widetilde{\mathbf{rot}} \psi_\ell(\Lambda^{-1}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_{\ell k}(\Lambda^{-1}) \nabla \varphi_k(\Lambda). \quad (1.21)$$

En mettant (1.21) dans la seconde équation de (1.20), nous avons

$$\nabla \varphi_j(\Lambda) = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{\ell=1}^N \mathbf{Y}_{j\ell}(\Lambda) \mathbf{Z}_{\ell k}(\Lambda^{-1}) \right) \nabla \varphi_k(\Lambda). \quad (1.22)$$

ainsi  $\mathbf{Y}(\Lambda) \mathbf{Z}(\Lambda^{-1}) = \mathbf{Id}$ . □

Il nous sera utile par la suite, quand nous souhaiterons étudier les champs électromagnétiques longitudinaux dans des câbles, d'écrire un champ à divergence nulle sous la forme d'un rotationnel.

**Lemme 1.3.6.** Soit  $\Lambda$  un poids complexe scalaire et soit un champ  $u \in L^2(S)$   $\Lambda$ -solénoïdal :

$$\mathbf{div}(\Lambda u) = 0.$$

Le champ  $u$  peut toujours s'écrire sous la forme d'un rotationnel :

$$u = \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \left[ \zeta + \sum_{q=1}^Q \langle \Lambda u \cdot n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_q S)} \psi^q(S, \Lambda^{-1}) \right],$$

avec  $\psi^q(S, \Lambda^{-1})$  un des potentiels décrits dans (1.10) et  $\zeta$  la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \zeta \in H^1(S)_{/\mathbb{C}} \text{ telle que } \forall \tilde{\zeta} \in H^1(S)_{/\mathbb{C}}, \\ \int_S \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta \cdot \mathbf{rot} \tilde{\zeta} = \int_S u \cdot \mathbf{rot} \tilde{\zeta}. \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Si de plus  $u \in H(\mathbf{rot}, S)$  alors le problème précédent peut s'écrire avec la formulation forte :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}(\Lambda^{-1} \mathbf{rot} \zeta) = \mathbf{rot} u, & \text{dans } S \\ \Lambda^{-1} \partial_n \zeta = u \times n, & \text{sur } \partial S. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que

$$\tilde{u} := u - \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \left[ \zeta + \sum_{q=1}^Q \langle \Lambda u \cdot n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_q S)} \psi^q(S, \Lambda^{-1}) \right] \in \mathcal{E}(\Lambda, S)$$

et donc, par la description de l'espace harmonique du théorème 1.3.1, que :

$$\int_S \Lambda \tilde{u} \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u} = 0.$$

Nous avons par la définition de  $\tilde{u}$  :

$$\begin{aligned} \int_S \Lambda \tilde{u} \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda) &= \int_S \Lambda u \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda) - \int_S \mathbf{rot} \zeta \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda) \\ &\quad - \sum_{q=1}^Q \langle \Lambda u \cdot n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_q S)} \int_S \mathbf{rot} \psi^q(S, \Lambda^{-1}) \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Par la formule de green 10.18 et comme  $\mathbf{div}(\Lambda u) = 0$ , nous avons :

$$\int_S \Lambda u \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda) = \langle \Lambda u \cdot n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_{q'} S)} \quad \text{et} \quad \int_S \mathbf{rot} \zeta \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda) = 0.$$

De plus avec la relation de bi-orthogonalité du lemme 1.3.1 nous avons

$$\sum_{q=1}^Q \langle \Lambda u \cdot n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_q S)} \int_S \mathbf{rot} \psi^q(S, \Lambda^{-1}) \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda) = \langle \Lambda u \cdot n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_{q'} S)}$$

et ainsi

$$\int_S \Lambda \tilde{u} \cdot \nabla \varphi^{q'}(S, \Lambda) = 0.$$

□

Ce lemme nous servira dans le chapitre 5 et plus particulièrement dans la démonstration des propositions 5.1.1 et 5.4.5. Par contre nous aurons besoin dans le chapitre 7 consacré l'effet de peau d'une autre écriture sous la forme d'un rotationnel d'un champ à divergence nulle.

**Lemme 1.3.7.** *Soit  $\Lambda$  un poids complexe scalaire et soit un champ  $u \in L^2(S)$  tel que :*

$$\mathbf{div}(\Lambda u) = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda u \cdot n = \partial_\tau w \quad \text{avec} \quad w \in H^{\frac{1}{2}}(\partial S)$$

alors il s'écrit aussi sous la forme d'un rotationnel :

$$u = \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \left[ \kappa - \sum_q^Q \left( \langle w, \tilde{\partial}_\tau \psi^q(S, \Lambda) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S)} + \int_S \Lambda u \cdot \nabla \psi^q(S, \Lambda) \right) \varphi^q(S, \Lambda^{-1}) \right]$$

avec  $\kappa$  solution de

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\Lambda^{-1} \mathbf{rot} \kappa) = \mathbf{rot} u, & \text{dans } S \\ \kappa = w, & \text{sur } \partial S \end{cases}$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que

$$\tilde{u} := u - \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \left[ \kappa - \sum_q^Q \langle w, \tilde{\partial}_\tau \psi^q(S, \Lambda) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S)} \varphi^q(S, \Lambda^{-1}) \right] \in \mathcal{H}(\Lambda, S).$$

Nous décomposons  $\tilde{u}$  via le lemme de conjugaison 1.3.5 dans la base conjuguée :

$$\tilde{u} = \sum_q^Q I(\tilde{u}) \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \varphi^q(S, \Lambda^{-1}),$$

et en utilisant la relation de bi-orthogonalité du lemme 1.3.1 :

$$\int_S \Lambda \tilde{u} \cdot \nabla \psi^q(S, \Lambda) = -I(\tilde{u})$$

or nous avons avec la formule de Green (10.18) :

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{rot} \kappa \cdot \nabla \psi^{q'}(S, \Lambda) &= \int_{\partial S} \kappa \nabla \psi^{q'}(S, \Lambda) \times n + \int_{\Gamma_{q'}} [\kappa \nabla \psi^{q'}(S, \Lambda) \times n]_{\Gamma_{q'}} \\ &\stackrel{(10.11)}{=} - \left\langle w, \tilde{\partial}_\tau \psi^{q'}(S, \Lambda) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S)} \end{aligned}$$

et la relation de bi-orthogonalité du lemme 1.3.1 :

$$\int_S \Lambda \tilde{u} \cdot \nabla \psi^{q'}(S, \Lambda) = \int_S \Lambda u \cdot \nabla \psi^{q'}(S, \Lambda).$$

Ainsi

$$\tilde{u} = - \sum_q^Q \left( \int_S \Lambda u \cdot \nabla \psi^{q'}(S, \Lambda) \right) \Lambda^{-1} \mathbf{rot} \varphi^q(S, \Lambda^{-1}).$$

□

Bien que les hypothèse du lemme 1.3.7 soient incluses dans le lemme 1.3.6, nous aurons besoin de cette écriture pour démontrer le lemme 7.5.3.

Nous allons utiliser le lemme de conjugaison 1.3.5 et en particulier  $\mathbf{Z}(\Lambda, S) = \mathbf{Y}(\Lambda^{-1}, S)^{-1}$  pour décrire les propriétés de la matrice de Gram  $\mathbf{Z}$  à partir de celles de  $\mathbf{Y}$  établies dans la sous section précédente. En premier lieu, nous pouvons remarquer que  $\mathbf{Z}$  est, elle aussi, pleine :

**Lemme 1.3.8.** *Si  $\Lambda$  est un scalaire réel, alors  $\mathbf{Z}(\Lambda, S)$  vérifie :*

$$\mathbf{Z}_{qq'}(\Lambda, S) > 0, \quad \forall 1 \leq q, q' \leq Q. \quad (1.25)$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer par le lemme de conjugaison 1.3.5 que  $\mathbf{Z}(\Lambda, S) = \mathbf{Y}(\Lambda^{-1}, S)^{-1}$ . Par définition d'une M-matrice, et  $\mathbf{Y}(\Lambda^{-1}, S)$  l'est par le lemme 1.3.3 puisque  $\Lambda$  est une matrice réelle, son inverse a tout ses coefficients positifs et strictement si les éléments de la diagonales de la M-matrice le sont aussi et ses coefficients non diagonaux strictement négatif. □

En second lieu, nous pouvons montrer avec le lemme de conjugaison 1.3.5 que les valeurs propres sont encadrées par des constantes géométriques si la surface ne dégénère pas (au sens de la définition 11.2.3), c'est à dire que les valeurs propres  $\lambda_{\mathfrak{C}}$  de la matrice de capacité  $\mathfrak{C} = \mathbf{Y}(1, S)$  sont bornées :

$$\exists \lambda_{\mathfrak{C}}^+ \in ]0, \infty[; \lambda_{\mathfrak{C}} \leq \lambda_{\mathfrak{C}}^+.$$

Cette hypothèse est en particulier vérifiée si il existe des couronnes d'aire non nulles qui entourent chaque trous (voir la propriété 11.2.3).

**Propriété 1.3.2.** *Les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{Y}}$  de  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$  vérifient les propriétés de l'hypothèse 1.1.1 :*

$$\Lambda_{r,-} C_-^0 \leq \Re(\lambda_{\mathbf{Y}}), \quad \Lambda_{i,-} C_-^0 \leq |\Im(\lambda_{\mathbf{Y}})| \quad \text{et} \quad |\lambda_{\mathbf{Y}}| \leq \Lambda_+ \lambda_{\mathfrak{C}}^+$$

et de même pour les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{Z}}$  de  $\mathbf{Z}(\Lambda, S)$  :

$$\frac{\Lambda_{r,-} \Lambda_-^2}{\Lambda_+^2} \frac{C_-^0}{(\lambda_{\mathfrak{C}}^+)^2} \leq \Re(\lambda_{\mathbf{Z}}), \quad \frac{\Lambda_-^2}{|\Lambda_{i,+}|} C_-^0 \leq |\Im(\lambda_{\mathbf{Z}})| \quad \text{et} \quad |\lambda_{\mathbf{Z}}| \leq \Lambda_+ (\lambda_{\mathfrak{C}}^+)^{-1}$$

avec les constantes

$$C_-^0 = \left( \frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)} \right)^2 \min_q |\mathcal{O}_q| \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathfrak{C}}^+ = \max\{\lambda_{\mathfrak{C}} \in \sigma(\mathfrak{C})\}$$

basées sur l'aire minimales des trous et la valeur propre maximale de la matrice de capacité  $\mathfrak{C}$  définie en 11.4. Rappelons aussi que  $c_{p,0}(\mathcal{O}_0)$  est la constante intervenant dans l'inégalité de Poincaré classique (1.36) pour le domaine  $\mathcal{O}_0$ .

*Démonstration.* Les bornes inférieures des parties réelles, imaginaires et des modules des valeurs propres de  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$  sont données par la propriété 1.3.1. Appliquons (1.11) avec  $\varphi^* = \overline{\varphi_\Lambda(u)} - \varphi_1(u)$

$$(\mathbf{Y}(\Lambda, S) u, u)_{\mathbb{C}^Q} \stackrel{\text{remarque 1.3.2}}{=} \int_S \Lambda |\nabla \varphi_\Lambda(u)|^2 \stackrel{(1.11)}{=} \int_S \Lambda \nabla \varphi_\Lambda(u) \cdot \nabla \varphi_1(u),$$

ainsi en prenant le module et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\left| \int_S \Lambda |\nabla \varphi_\Lambda(u)|^2 \right| = \int_S |\Lambda| |\nabla \varphi_\Lambda(u)|^2 \leq \sqrt{\int_S |\Lambda|^2 |\nabla \varphi_\Lambda(u)|^2} \sqrt{\int_S |\nabla \varphi_1(u)|^2}.$$

Puisque par définition  $|\Lambda| \leq \Lambda_+$  (voir hypothèse 1.1.1) et  $\int_S |\nabla \varphi_1(u)|^2 = (\mathfrak{C}u, u)_{\mathbb{C}Q}$  (voir (11.4)), nous avons :

$$\sqrt{|\langle \mathbf{Y}(\Lambda, S)u, u \rangle_{\mathbb{C}Q}|} \leq \sqrt{\Lambda_+} \sqrt{(\mathfrak{C}u, u)_{\mathbb{C}Q}}.$$

Nous obtenons une inégalité du même type sur  $\mathbf{Z}(\Lambda, S)$  en faisant le même raisonnement à partir de (1.11) avec la fonction harmonique  $\psi^* = \psi_\Lambda(u) - \psi_1(u)$  :

$$\sqrt{|\langle \mathbf{Z}(\Lambda, S)u, u \rangle_{\mathbb{C}Q}|} \leq \sqrt{\Lambda_+} \sqrt{(\mathfrak{C}^{-1}u, u)_{\mathbb{C}Q}}.$$

Les bornes inférieures proviennent du lemme de conjugaison 1.3.5 qui affirme que  $\mathbf{Z}(\Lambda, S) = \mathbf{Y}(\Lambda^{-1}, S)$  et du fait que pour tout complexe  $\lambda \neq 0$  nous avons

$$\Re(\lambda^{-1}) = \frac{\Re(\lambda)}{|\lambda|^2}, \quad |\lambda^{-1}| = |\lambda|^{-1} \text{ et } \Im(\lambda^{-1}) = -\frac{\Im(\lambda)}{|\lambda|^2}.$$

□

Nous avons en particulier

$$\left| \int_S \Lambda |\nabla \varphi^q(\Lambda, S)|^2 \right| = |(\mathbf{Y}(\Lambda, S)_{q,q})| \leq \Lambda_+ \text{Cap}_S(\partial_q S) \quad (1.26)$$

et

$$\left| \int_S \Lambda |\tilde{\nabla} \psi^q(\Lambda, S)|^2 \right| = |(\mathbf{Z}(\Lambda, S)_{q,q})| \leq \Lambda_+ \text{Ind}_S(\partial_q S)$$

où les capacités  $\text{Cap}_S(\partial_q S)$  et respectivement les inductances  $\text{Ind}_S(\partial_q S)$  sont les éléments diagonaux de la matrice de capacité  $\mathfrak{C}$  (voir (11.3)) et respectivement de son inverse  $\mathfrak{C}^{-1}$  (voir (11.7)). Nous avons ainsi une majoration de nos potentiels harmoniques :

$$\|\nabla \varphi^q(\Lambda, S)\|^2 \leq \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} \text{Cap}_S(\partial_q S) \quad \text{et} \quad \|\tilde{\nabla} \psi^q(\Lambda, S)\|^2 \leq \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} \text{Ind}_S(\partial_q S). \quad (1.27)$$

Les démonstrations de l'existence d'une borne supérieure données dans cette preuve peuvent se généraliser au cas où  $\Lambda$  est une matrice auto-adjointe, mais ce cas ne nous intéresse guère. Etudions maintenant le produit  $\mathbf{Y}(\Lambda_1, S) \mathbf{Z}(\Lambda_2, S)$  :

**Lemme 1.3.9.** *Le produit  $\mathbf{Y}(\Lambda_1, S) \mathbf{Z}(\Lambda_2, S)$  a une expression simple :*

$$(\mathbf{Y}(\Lambda_1, S) \mathbf{Z}(\Lambda_2, S))_{q,q'} = \int_S \Lambda_1 \Lambda_2 \nabla \varphi^q(\Lambda_1, S) \cdot \widetilde{\text{rot}} \psi^{q'}(\Lambda_2, S).$$

En particulier si le produit  $\Lambda_1 \Lambda_2$  est une constante, alors nous avons  $\mathbf{Y}(\Lambda_1, S) \mathbf{Z}(\Lambda_2, S) = \Lambda_1 \Lambda_2 \mathbf{Id}_Q$ .

*Démonstration.* Appliquons (1.11) avec  $\psi^* = \overline{\tilde{\nabla} \psi^{q'}(\Lambda, S)} - \tilde{\nabla} \psi^{q'}(\Lambda_1^{-1}, S)$

$$\mathbf{Z}_{q,q'}(\Lambda_2, S) = \int_S \Lambda_2 \tilde{\nabla} \psi^q(\Lambda_2, S) \cdot \tilde{\nabla} \psi^{q'}(\Lambda_1, S)$$

et utilisons la formule (1.20) du lemme de conjugaison 1.3.5 :

$$\mathbf{Z}_{q,q'}(\Lambda_2, S) = - \int_S \Lambda_1 \Lambda_2 \tilde{\nabla} \psi^q(\Lambda_2, S) \cdot \left( \sum_k^Q \mathbf{z}_{k,q'}(\Lambda_1^{-1}, S) \text{rot} \varphi^k(\Lambda_1, S) \right).$$

Par ce même lemme de conjugaison 1.3.5 nous avons  $\mathbf{z}_{k,q'}(\Lambda_1^{-1}, S) = \mathbf{Y}_{k,q'}^{-1}(\Lambda_1, S)$  et en utilisant (10.9) nous avons :

$$\mathbf{Z}_{q,q'}(\Lambda_2, S) = \sum_k^Q \mathbf{Y}_{k,q'}^{-1}(\Lambda_1, S) \int_S \Lambda_1 \Lambda_2 \nabla \varphi^k(\Lambda_1, S) \cdot \widetilde{\text{rot}} \psi^{q'}(\Lambda_2, S),$$

et par la relation de bi-orthogonalité nous avons  $\mathbf{Y}(\Lambda_1, S) \mathbf{Z}(\Lambda_2, S) = \Lambda_1 \Lambda_2 \mathbf{Id}_Q$  si  $\Lambda_1 \Lambda_2$  est une constante. □



Donnons pour terminer un exemple, rendu simple grace encore au lemme de conjugaison 1.3.5, de calcul de ces matrices  $\mathbf{Y}(\Lambda, S)$  et  $\mathbf{Z}(\Lambda, S)$  qui nous servira bien par la suite :

**Exemple 1.3.1.** Dans le cadre de l'exemple 1.3.1 ( $S$  est une couronne dans laquelle  $\Lambda$  ne dépend pas de la coordonnée angulaire), les coefficients de Gram des espaces harmoniques s'écrivent :

$$Z(\Lambda, S) = \frac{1}{2\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{\Lambda(r)}{r} dr \quad \text{et} \quad Y(\Lambda, S) = 2\pi \left( \int_{r_-}^{r_+} \frac{\Lambda^{-1}(r)}{r} dr \right)^{-1}$$

où  $r_-$  et  $r_+$  représentent respectivement le rayon intérieur et extérieur de la couronne.

*Démonstration.* Rappelons que

$$\nabla\psi^q(\Lambda, S)(r, \theta) = \frac{-1}{2\pi r} e_\theta \quad (\text{voir exemple 1.3.1})$$

et en intégrant

$$Z(\Lambda, S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r_-}^{r_+} \Lambda(r) |\nabla\psi^q(\Lambda, S)(r, \theta)|^2 r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{\Lambda(r)}{r} dr.$$

Pour finir nous utilisons le lemme de conjugaison 1.3.5. □

### 1.3.2 Le lemme de conjugaison (cas matriciel)

La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine de l'imaginaire.

---

Jacques Hadamard, Essai sur la psychologie dans le domaine de l'invention mathématique

Nous allons faire une hypothèse supplémentaire quand aux poids considérés

**Hypothèse 1.3.1.** Le poids  $\Lambda$ , sa comatrice<sup>7</sup>  $\text{Com}(\Lambda)$  ainsi que leur inverses vérifient l'hypothèse des poids complexes. Nous noterons plus précisément les bornes

$$\tilde{\Lambda}_{r,-} \leq \tilde{\lambda}_r(x) \leq \tilde{\Lambda}_{r,+}, \quad \tilde{\Lambda}_{i,-} \leq |\tilde{\lambda}_i(x)| \leq \tilde{\Lambda}_{i,+}, \quad \tilde{\Lambda}_- := \sqrt{\tilde{\Lambda}_{r,-}^2 + \tilde{\Lambda}_{i,-}^2} \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}_+ := \sqrt{\tilde{\Lambda}_{r,+}^2 + \tilde{\Lambda}_{i,+}^2}$$

avec  $\tilde{\lambda}_r(x)$  et  $\tilde{\lambda}_i(x)$  les valeurs propres de la partie réelle et respectivement imaginaire de la matrice  $\text{Com}(\Lambda(\mathbf{x}))$ .

Par exemple les matrices réelles symétriques définies positives, en particulier le cas scalaire  $\Lambda = \Lambda \mathbf{Id}$  (incluant par là la sous section précédente), vérifient cette hypothèse.

Considérons l'application

$$J_\Lambda : \mathbf{v} \longrightarrow \Lambda (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}). \quad (1.28)$$

Nous pouvons montrer que

$$J_\Lambda \mathbf{v} = \Lambda (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}) = \mathbf{e}_3 \times \left[ (\text{Tr}(\Lambda) \mathbf{Id}_2 - {}^t \Lambda) \mathbf{v} \right] = \mathbf{e}_3 \times \left[ \det(\Lambda) {}^t \Lambda^{-1} \mathbf{v} \right] = \mathbf{e}_3 \times \left[ \text{Com}(\Lambda) \right]$$

et donc que

$$J_\Lambda^{-1} = -J_{\text{Com}(\Lambda^{-1})}$$

**Lemme 1.3.10.** L'application

$$J_{\Lambda^{-1}}^{-1} : \mathcal{E}(\Lambda, S) \rightarrow \mathcal{H}(\text{Com}(\Lambda^{-1}), S)$$

réalise un isomorphisme.

---

7. La comatrice d'une matrice  $A$  est la matrice formée des cofacteurs de  $A$ . Rappelons la relation

$$A^{tr} \text{Com} A = \det A \mathbf{Id}$$

qui reste vraie même si la matrice  $A$  n'est pas inversible. Notons qu'en particulier pour une matrice  $2 \times 2$  proportionnelle à l'identité, nous avons

$$A = \text{Com} A = a \mathbf{Id}_2.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}), S)$  et en utilisant (10.5)

$$\text{div}(\mathbf{\Lambda} J_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \mathbf{v}) = \text{div}(\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}) = \text{div}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}) = -\text{rot}(\mathbf{v}) = 0,$$

$$\text{rot} J_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{\Lambda}^{-1} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v})) = \text{rot}(\mathbf{e}_3 \times [\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}) \mathbf{v}]) = \text{div}[\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}) \mathbf{v}] = 0,$$

$$(J_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \mathbf{v}) \times n = (\mathbf{\Lambda}^{-1} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v})) \times n = \mathbf{e}_3 \times [\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}) \mathbf{v}] \times n = -[\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}) \mathbf{v}] \cdot n = 0$$

ce qui signifie  $J_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \mathbf{v} \in \mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, S)$ . Nos deux espaces ayant la même dimension  $Q$ , l'application linéaire

$$J_{\mathbf{\Lambda}} : \mathcal{E}(\text{Com}(\mathbf{\Lambda}), S) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S)$$

est un isomorphisme.  $\square$

Les résultats de la sous section précédente peuvent se généraliser au cas matriciel en étant vigilant sur les poids. Donnons les énoncés de ceux-ci sans les démonstrations car ces dernières sont assez proches de la sous section précédente.

**Lemme 1.3.11. (lemme de conjugaison, cas matriciel)**

*Nous avons les formules suivantes*

$$\tilde{\nabla} \psi_j(\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}), S) = - \sum_{\ell=1}^N \mathbf{Z}_{j\ell}(\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}), S) \text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1} \mathbf{rot} \varphi_{\ell}(\mathbf{\Lambda}, S)$$

et

$$\nabla \varphi_j(\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}), S) = \sum_{\ell=1}^N \mathbf{Y}_{j\ell}(\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}), S) \text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1} \widetilde{\mathbf{rot}} \psi_{\ell}(\mathbf{\Lambda}, S),$$

et de plus

$$\mathbf{Y}(\text{Com}(\mathbf{\Lambda}^{-1}), S)^{-1} = \mathbf{Z}(\mathbf{\Lambda}, S). \quad (1.29)$$

**Lemme 1.3.12.** *Si  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice réelle, alors  $\mathbf{Z}(\mathbf{\Lambda}, S)$  vérifie :*

$$\mathbf{Z}_{qq'}(\mathbf{\Lambda}, S) > 0, \quad \forall 1 \leq q, q' \leq Q. \quad (1.30)$$

**Propriété 1.3.3.** *Les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{Y}}$  de  $\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S)$  vérifient les propriétés de l'hypothèse 1.1.1 :*

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-} C_-^0 \leq \Re(\lambda_{\mathbf{Y}}), \quad \mathbf{\Lambda}_{i,-} C_-^0 \leq |\Im(\lambda_{\mathbf{Y}})| \quad \text{et} \quad |\lambda_{\mathbf{Y}}| \leq \mathbf{\Lambda}_+ \lambda_{\mathbf{e}}^+$$

et de même pour les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{Z}}$  de  $\mathbf{Z}(\mathbf{\Lambda}, S)$  :

$$\frac{\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{r,-}}{\tilde{\mathbf{\Lambda}}_+^2} \frac{C_-^0}{(\lambda_{\mathbf{e}}^+)^2} \leq \Re(\lambda_{\mathbf{Z}}), \quad \frac{\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{i,-}}{\tilde{\mathbf{\Lambda}}_+^2} \frac{C_-^0}{(\lambda_{\mathbf{e}}^+)^2} \leq |\Im(\lambda_{\mathbf{Z}})| \quad \text{et} \quad |\lambda_{\mathbf{Z}}| \leq \tilde{\mathbf{\Lambda}}_-^{-1} (\lambda_{\mathbf{e}}^+)^{-1}$$

avec les constantes  $C_-^0$  et  $\lambda_{\mathbf{e}}^+$  définies dans la propriété 1.3.2.

### 1.3.3 Solutions des problèmes div-rot sans source

Les solutions d'un problème div-rot plan sans sources appartiennent aux espaces harmoniques et s'écrivent ainsi sous la forme :

$$E \in \mathcal{E}(\hat{\varepsilon}, S) \implies E = \sum_{q=1}^Q V_q \nabla \varphi^q(\hat{\varepsilon}, S) \quad \text{et} \quad H \in \mathcal{H}(\hat{\mu}; S) \implies H = \sum_{q=1}^Q I_q \nabla \psi^q(\hat{\mu}, S),$$

avec des indéterminées  $V_q$  et  $I_q$  qui joueront des rôles essentiels lors de l'étude des câbles électriques. Nous les nommerons par analogie à ce à quoi elles se réfèrent lors de de l'établissement de nos modèles "potentiels électriques" et "courants électriques". Elles sont définies par

$$V_q = \sum_{q'}^Q (\mathbf{Y}^{-1}(\hat{\varepsilon}, S))_{q,q'} \int_S \hat{\varepsilon} E \cdot \nabla \varphi^{q'}(\hat{\varepsilon}, S) \quad \text{et} \quad I_q = \sum_{q'}^Q (\mathbf{Z}^{-1}(\hat{\mu}, S))_{q,q'} \int_S \hat{\mu} H \cdot \nabla \psi^{q'}(\hat{\mu}, S)$$

et enfin si les poids  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  vérifient l'hypothèse 1.3.1, alors nous pouvons exprimer plus simplement, c-a-d sans faire appel aux matrices de Gram  $\mathbf{Y}(\mathbf{\Lambda}, S)$  et  $\mathbf{Z}(\mathbf{\Lambda}, S)$ , les potentiels et courants électriques :

$$V_q = \int_S E \cdot \mathbf{rot} \psi^{q'}(\text{Com}(\hat{\varepsilon}^{-1}), S) \quad \text{et} \quad I_q = - \int_S H \cdot \mathbf{rot} \varphi^{q'}(\text{Com}(\hat{\mu}^{-1}), S),$$

avec  $\text{Com}(\hat{\varepsilon}^{-1})$  et  $\text{Com}(\hat{\mu}^{-1})$  les comatrices des matrices  $\hat{\varepsilon}^{-1}$  et  $\hat{\mu}^{-1}$ .

## 1.4 Analyse des problèmes de type div-rot

PDE's are made by God, the boundary conditions by the Devil!

Alan Turing

Nous énonçons dans cette section les résultats d'existence (et d'unicité ou non unicité) relatifs aux problèmes div-rot (1.1-e) et (1.1-h). La preuve de ces résultats est repoussée à la section 1.6.

**Théorème 1.4.1.** *Soit  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  deux champs matriciels complexes sur  $S$  satisfaisant l'hypothèse 1.1.1,  $\rho_e$ ,  $B$  et  $\rho_m$ ,  $D$  des champs scalaires dans  $L^2(S, \mathbb{C})$  et  $\tau_e$ ,  $\nu_m$  des champs scalaires dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial S, \mathbb{C})$ .*

(i) *Le problème (1.1-e) admet une solution  $E \in L^2(S, \mathbb{C}^2)$  sous réserve de la condition de compatibilité :*

$$\int_S B = \langle \tau_e, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S), H^{\frac{1}{2}}(\partial S)}. \quad (1.31)$$

*Cette solution est unique à un élément de l'espace harmonique  $\mathcal{E}(\hat{\varepsilon}, S)$  près. Cette solution est unique si le domaine est simplement connexe. Sinon elle est unique si nous imposons les valeurs des  $Q$  quantités*

$$\int_S E \cdot \nabla \hat{\varphi}_q(\hat{\varepsilon}, S).$$

(ii) *Le problème (1.1-h) admet une solution  $H \in L^2(S, \mathbb{C}^2)$  sous réserve de la condition de compatibilité :*

$$\int_S \rho_m = \langle \nu_m, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S), H^{\frac{1}{2}}(\partial S)}. \quad (1.32)$$

*Cette solution est unique à un élément de l'espace harmonique  $\mathcal{H}(\hat{\mu}, S)$  près. Cette solution est unique si le domaine est simplement connexe. Sinon elle est unique si nous imposons les valeurs des  $Q$  quantités*

$$\int_S H \cdot \nabla \hat{\psi}_q(\hat{\mu}, S).$$

Dans les chapitres 4 et 5, le contexte où apparaîtra des problèmes div-rot est légèrement plus général. En effet les poids  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  sauteront le long d'une ligne de Jordan fermé de discontinuité  $\Sigma$  et seront  $W^{1,\infty}$  partout ailleurs et les traces tangentielles et normales des inconnues des problèmes div-rot sauteront de même le long de cette même ligne de discontinuité. Plus précisément, nous avons :

**Remarque 1.4.1.** *Soit  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  vérifiant l'hypothèse 1.1.1 des poids complexes,  $\Sigma$  une courbe de Jordan fermé au moins lipschitzienne,  $\rho_e$ ,  $B$  et  $\rho_m$ ,  $D$  des champs scalaires dans  $L^2(S \setminus \Sigma, \mathbb{C})$ ,  $\tau_e$ ,  $\nu_m$  des champs scalaires dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial S, \mathbb{C})$  et  $\tau_{\Sigma,e}$ ,  $\tau_{\Sigma,m}$ ,  $\nu_{\Sigma,e}$  et  $\nu_{\Sigma,m}$  des champs scalaires dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathbb{C})$ . Si  $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu} \in W^{1,\infty}(S \setminus \Sigma)$ , alors, il existe des solutions dans  $L^2(S \setminus \Sigma, \mathbb{C}^2)$  aux problèmes div-rot :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\hat{\varepsilon}E) = \rho_e, & \text{dans } S \setminus \Sigma \\ \operatorname{rot} E = B, & \text{dans } S, \\ E \times n = \tau_e, & \text{sur } \partial S, \\ [E \times n_\Sigma]_\Sigma = \tau_{\Sigma,e}, & \text{sur } \Sigma \\ [\hat{\varepsilon}E \cdot n_\Sigma]_\Sigma = \nu_{\Sigma,e}, & \text{sur } \Sigma, \end{array} \right. \quad (e) \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\hat{\mu}H) = \rho_m, & \text{dans } S \setminus \Sigma \\ \operatorname{rot} H = D, & \text{dans } S, \\ \hat{\mu} H \cdot n = \nu_m, & \text{sur } \partial S \\ [H \times n_\Sigma]_\Sigma = \tau_{\Sigma,m}, & \text{sur } \Sigma \\ [\hat{\mu}H \cdot n_\Sigma]_\Sigma = \nu_{\Sigma,m}, & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (h) \quad (1.33)$$

si les données satisfont les conditions de compatibilités suivantes pour  $E$

$$\int_S B = \langle \tau_e, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S), H^{\frac{1}{2}}(\partial S)} + \langle \tau_{\Sigma,e}, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \quad \text{et} \quad \int_S \rho_e = \langle \nu_{\Sigma,e}, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}, \quad (1.34)$$

et pour  $H$  :

$$\int_S \rho_m = \langle \nu_m, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S), H^{\frac{1}{2}}(\partial S)} + \langle \nu_{\Sigma,m}, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \quad \text{et} \quad \int_S D = \langle \tau_{\Sigma,m}, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}. \quad (1.35)$$

*Cette solution est unique si le domaine est simplement connexe et ils nous faut  $Q$  déterminations supplémentaires si celle-ci possède  $Q$  trous.*

Nous ne ratons aucune difficulté essentielle en ne démontrant que le théorème 1.4.1 et non la remarque 1.33.

## 1.5 Inégalités de Poincaré-Friedrichs

Le but de cette section est démontrer quelques inégalités de type Poincaré-Friedrichs que nous utiliserons tout le long du manuscrit et qui sont particulièrement utiles pour l'obtention des estimations d'erreurs (chapitre 6). Une démonstration non constructive des inégalités de Poincaré-Friedrichs de type

$$\|u\|_{L^2(S)} \leq K(\mathbf{\Lambda}, S) (\|\operatorname{rot} u\|_{L^2(S)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{\Lambda} u)\|_{L^2(S)} + \dots)$$

est une preuve qui exploite un raisonnement par l'absurde pour assurer l'existence de constantes  $K(\mathbf{\Lambda}, S)$  qui dépendent que de la géométrie de  $S$  et du poids  $\mathbf{\Lambda}$  mais non une idée de sa valeur ou de sa dépendance précise. De telles démonstrations, nous en ferons d'ailleurs pour le cas 3D (proposition 2.2.2), dans des cas simples où les poids sont des salaires réels, et où les conditions aux limites sont homogènes, c'est à dire du type :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n}|_S = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_S = 0,$$

sont connues [54] et s'appuient sur un argument de compacité (voir corollaire 3.49 de [54]) qu'il n'est guère aisé de généraliser quand les conditions aux limites ne sont pas homogènes et surtout quand le poids  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice complexe non hermitienne, ce qui correspond au cas qui nous intéresse le plus. Supposons que la géométrie  $S$  et le poids dépendent d'un paramètre  $x_3$  qui varie. La constante  $K(\mathbf{\Lambda}(x_3), S(x_3))$  peut-elle exploser quand  $x_3$  varie? Pour répondre à cette question, qui apparaît naturellement si nous souhaitons analyser des problèmes aux frontières libres ou plus simplement si les poids dépendent de la fréquence, il nous faut une description précise de ces constantes et donc une démonstration constructive.

### 1.5.1 Inégalités de Poincaré usuelles

11. C'est qu'on ne voit pas à quel point l'emploi de "Je sais" est spécialisé.

Wittgenstein, De la certitude

Nous aurons besoin des deux inégalités suivantes (que nous donnons tous de suite pour des champs de dimension quelconque finie) :

**Lemme 1.5.1. (Inégalités de Poincaré.)** Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$ .

(i) S'il existe une isométrie  $I$  telle que  $I\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1} \times ]0, d_+^* [$  alors nous avons l'**inégalité de Poincaré classique** pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$  :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{p,0}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{avec} \quad c_{p,0}(\Omega) \leq \frac{d_+^*}{2} \quad (1.36)$$

et si de plus le domaine  $\Omega$  est borné alors la constante de Poincaré  $c_{p,0}(\Omega)$  du domaine  $\Omega$  est l'inverse de la première valeur propre du Laplacien-Dirichlet et nous avons l'inégalité de Krahn :

$$c_{p,0}(\Omega) \leq \frac{(|\Omega| \Gamma(\frac{d}{2} - 1))^{\frac{d}{2}}}{\pi j_{\frac{d}{2}-1}^2} \quad \text{où } j_{\frac{d}{2}-1} \text{ est le premier zéro positif de la fonction de Bessel } J_{\frac{d}{2}-1}.$$

(ii) Si  $\Omega$  est borné, nous avons l'**inégalité de Poincaré-Wirtinger**<sup>8</sup> pour tout  $u \in H^1(\Omega)$  :

$$\left\| u - \int_{\Omega} u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{p,w}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.37)$$

où la constante de Poincaré  $c_{p,w}(\Omega)$  du domaine  $\Omega$  est l'inverse de la seconde valeur propre du Laplacien-Neumann (la première étant nulle). Si  $\Omega$  est inclus dans un domaine convexe borné  $\mathcal{B}^*$  de diamètre  $d_+^*$ , alors :

$$c_{p,w}(\Omega) \leq c_{p,w}(\mathcal{B}^*) \leq \frac{d_+^*}{\pi}.$$

8. Wilhelm Wirtinger (15 juillet 1865 - 15 janvier 1945) est un mathématicien autrichien principalement connu pour ses travaux en géométrie différentielle.

L'inégalité de Poincaré classique (1.36) est démontrée dans [79] (théorème 20.6) ou [37] (proposition 3.1.17) et reste vrai dans les espaces  $L^p$  pour  $1 \leq p < \infty$  avec toujours la majoration  $c_{p,0} \leq d_+^*/2$ . La majoration de la constante pour un domaine borné dans le cas  $p = 2$  est obtenue via l'inégalité de Faber-Krahn (voir théorème 26.7 de [79], initialement démontré dans [47]) qui stipule que parmi tous les ouverts de volume fixé, la boule possède la plus petite première valeur propre du Laplacien-Dirichlet. Nous calculons ainsi cette valeur propre pour obtenir notre inégalité. Ces considérations sont inadéquates pour majorer la constante de Poincaré-Wirtinger, car l'inégalité de Faber-Krahn n'est plus vraie pour le Laplacien-Neumann. La formule de Szegö-Weinberger, que nous verrons par la suite, nous dit même l'opposé : parmi tous les ouverts de volume fixé, la boule possède la plus grande seconde valeur propre du Laplacien-Neumann.

**Caractère optimal des majorations de la constante de Poincaré-Wirtinger** Il est prouvé dans [61] que si  $\Omega$  est un domaine convexe borné, alors la constante de Poincaré  $d_+^*/\pi$  dans l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (1.37) en dimension 2 est optimale. Ce résultat est étendu à la dimension quelconque dans [10] et au cas  $L^1$  dans [1] avec  $d_+^*/2$  au lieu de  $d_+^*/\pi$  tout en continuant de se restreindre au cas convexe. Une généralisation de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger avec une moyenne dépendant d'un poids est faite dans [19] mais nous n'allons pas présenter ces travaux car la classe des poids traitée est pour nous bien trop restrictive. Comme nous traiterons principalement des cas où  $\Omega$  est non simplement connexe (et donc non convexe), nous pouvons choisir  $\mathcal{B}^*$  comme l'enveloppe convexe de  $\Omega$  pour avoir une borne de la constante de Poincaré  $c_{p,w}(\Omega)$  la plus petite possible. Il est aussi possible d'utiliser la formule de Szegö-Weinberger (démontrée en dimension deux dans [69] et en dimension supérieure dans [77]) pour donner une borne inférieure :

$$c_{p,w}(\Omega) \geq p_d \left( \frac{|B_d(1)|}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{d}} \quad (\text{avec une égalité dans le cas de la boule})$$

où  $d$  est la dimension du domaine,  $|B_d(1)|$  le volume de la boule unité de dimension  $d$ ,  $|\Omega|$  le volume du domaine et  $p_d$  la plus petite racine positive de l'équation

$$p J'_{\frac{d}{2}}(p_d) - \left( \frac{d}{2} - 1 \right) J_{\frac{d}{2}}(p_d) = 0 \quad (\text{avec } J \text{ la fonction de Bessel})$$

Il est prouvé dans [29] que  $0 < \mu_{n+1} < \lambda_n$  où  $\mu_{n+1}$  correspond à la  $(n+1)$ -ième valeur du Laplacien-Neumann et  $\lambda_n$  correspond à la  $n$ -ième valeur propre du Laplacien-Dirichlet, ainsi nous avons :

$$0 < c_{p,0}(\Omega) < c_{p,w}(\Omega) \leq \frac{d_+^*}{\pi}.$$

Nous allons maintenant donner des majorations de la norme d'un champ non pas avec la norme de son gradient comme les inégalités de Poincaré du lemme précédent mais avec les normes de sa divergence, de son rotationnel et de ses traces. Pour ces dernières, nous définissons la norme de l'espace fractionnaire  $H^{\frac{1}{2}}$  sur le bord par :

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial S)} = \inf_{U \in H^1(S), U|_{\partial S} = u} \|U\|_{H^1(S)}.$$

## 1.5.2 Inégalités de Poincaré-Friedrichs

Entre deux solutions, opte toujours pour la plus généreuse.

Jiddu Krishnamurti

**Théorème 1.5.1.** Soit  $\hat{\varepsilon}$  un champ matriciel vérifiant l'hypothèse 1.1.1 des poids complexes. Tout champ  $E \in L^2(S, \mathbb{C}^2)$  tel que

$$\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}E) \in L^2(S, \mathbb{C}^2) \quad , \quad \operatorname{rot}E \in L^2(S, \mathbb{C}^2)$$

vérifie l'inégalité de Poincaré-Friedrichs

$$\begin{aligned} \left| \int_S (\hat{\varepsilon}E) \cdot E \right| &\leq c_{p,0}(S)^2 \frac{1}{\hat{\varepsilon}_-} \|\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}E)\|_{L^2(S)}^2 \\ &+ c_{p,w}(S)^2 \hat{\varepsilon}_+ \left( \|\operatorname{rot}E\|_{L^2(S)} + (1 + c_{p,w}(S)^{-2}) \|E \times n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S)} \right)^2 \\ &+ |(\mathbf{Y}(\hat{\varepsilon}, S) \mathbf{V}, \mathbf{V})_{\mathbb{C}^Q}| \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{V} = (V_q)_{q=1:Q}, \quad V_q = \sum_{q'=1}^Q (\mathbf{Y}(\hat{\varepsilon}, S)^{-1})_{q,q'} \int_S \hat{\varepsilon} E \cdot \nabla \varphi^{q'}(\hat{\varepsilon}, S)$$

avec  $\mathbf{Y}(\hat{\varepsilon}, S)$  définie en (1.13) et  $\varphi^q(\hat{\varepsilon}, S)$  défini en (1.10).

**Théorème 1.5.2.** Soit  $\hat{\mu}$  un champ matriciel vérifiant l'hypothèse 1.1.1 des poids complexes. Tout champ  $H \in L^2(S, \mathbb{C}^2)$  tel que

$$\mathbf{div}(\hat{\mu}H) \in L^2(S, \mathbb{C}^2) \quad , \quad \text{rot} H \in L^2(S, \mathbb{C}^2)$$

vérifie l'inégalité de Poincaré-Friedrichs

$$\begin{aligned} \left| \int_S (\hat{\mu}H) \cdot H \right| &\leq c_{p,w}(S)^2 \frac{1}{\hat{\mu}_-} \left( \|\mathbf{div}(\hat{\mu}H)\|_{L^2(S)} + (1 + c_{p,0}(S)^{-2}) \|\hat{\mu}H \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S)} \right)^2 \\ &+ c_{p,0}(S)^2 \hat{\mu}_+ \|\text{rot} H\|_{L^2(S)}^2 \\ &+ |(\mathbf{Z}(\hat{\mu}, S) \mathbf{I}, \mathbf{I})_{\mathbb{C}^Q}| \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{I} = (I_q)_{q=1:Q}, \quad I_q = \sum_{q'=1}^Q (\mathbf{Z}(\hat{\mu}, S)^{-1})_{q,q'} \int_S \hat{\mu} H \cdot \nabla \psi^{q'}(\hat{\mu}, S)$$

avec  $\mathbf{Z}(\hat{\mu}, S)$  définie en (1.14) et  $\psi^q(\hat{\mu}, S)$  défini en (1.10).

**Remarque 1.5.1.** Soit un champ  $u$  de trace tangentielle ( $u \times n$ ) nulle (respectivement de trace normale ( $\mathbf{u} \cdot n$ ) nulle) et un poids  $\mathbf{\Lambda} = \text{Id}$ . Si nous décidons de travailler dans un domaine simplement connexe de dimension deux ou avec un champ  $\mathbf{u}$  orthogonal à l'espace harmonique  $\mathcal{E}$  (respectivement à l'espace harmonique conjugué  $\mathcal{H}$ ), alors nous avons l'inégalité de Poincaré -Friedrich classique :

$$\|u\|_{L^2} \leq c_{p,0}^2 \|\text{rot} u\|^2 + c_{p,w}^2 \|\mathbf{div} u\|^2 \leq c_{p,F}^2 \left( \|\text{rot} u\|^2 + \|\mathbf{div} u\|^2 \right)$$

respectivement

$$\|u\|_{L^2} \leq c_{p,w}^2 \|\text{rot} u\|^2 + c_{p,0}^2 \|\mathbf{div} u\|^2 \leq c_{p,F}^2 \left( \|\text{rot} u\|^2 + \|\mathbf{div} u\|^2 \right)$$

avec

$$0 < c_{p,0} \leq c_{p,F} \leq c_{p,w} \leq \frac{d_+^*}{\pi} \quad (\text{où } d_+^* \text{ correspond au diamètre si le domaine est convexe}).$$

cette dernière inégalité constitue le pendant 2D du théorème 3.6 de [60].

## 1.6 Démonstration des diverses résultats du chapitre

Les démonstrations de ces trois théorèmes s'enchainent naturellement, aussi nous avons choisi de les regrouper dans cette section.

### 1.6.1 Existence (et unicité) de la solution des problèmes div-rot (théorème 1.4.1)

**Introduction des potentiels.** Définissons les potentiels  $\xi_e \in H_0^1(S)$  et  $\zeta_e \in H^1(S)/\mathbb{C}$  comme les uniques solutions des problèmes elliptiques (simple utilisation du lemme de Lax-Milgram puisque les données vérifient les conditions de compatibilité (2.11)) :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\hat{\varepsilon} \nabla \xi_e) = \rho_e, & \text{dans } S \\ \xi_e = 0, & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{rot}(\hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e) = B, & \text{dans } S, \\ (\hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e) \times n = \tau_e, & \text{sur } \partial S, \end{cases}$$

et les potentiels  $\xi_m \in H^1(S)/\mathbb{C}$  et  $\zeta_m \in H_0^1(S)$  solutions de

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\hat{\mu} \nabla \xi_m) = \rho_m, & \text{dans } S \\ \hat{\mu} \nabla \xi_m \cdot n = \nu_m, & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{rot}(\hat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_m) = D, & \text{dans } S, \\ \zeta_m = 0, & \text{sur } \partial S, \end{cases}$$

**Existence de solutions.** Il est aisé de vérifier que

$$\nabla \xi_e + \widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e \quad \text{et respectivement} \quad \nabla \xi_m + \widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_m$$

sont solutions de (1.1-e) et respectivement (1.1-h).

**Unicité ?** Remarquons que pour toute solution  $E$  et  $H$  de (1.1-e) et respectivement (1.1-h), nous avons :

$$E - (\nabla \xi_e + \widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e) \in \mathcal{E}(\widehat{\varepsilon}, S) \quad \text{et} \quad H - (\nabla \xi_m + \widehat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_m) \in \mathcal{H}(\widehat{\mu}, S),$$

ainsi nous pouvons donner la **structure des solutions de (1.1-e) et (1.1-h)** :

$$E = \nabla \xi_e + \widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e + \sum_{q=1}^Q V_q \nabla \varphi^q(\widehat{\varepsilon}, S) \quad , \quad H = \nabla \xi_m + \widehat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_m + \sum_{q=1}^Q I_q \nabla \psi^q(\widehat{\mu}, S)$$

avec les indéterminées :

$$V_q = \sum_{q'}^Q (\mathbf{Y}(\widehat{\varepsilon}, S)^{-1})_{q,q'} \int_S \widehat{\varepsilon} E \cdot \nabla \varphi^{q'}(\widehat{\varepsilon}, S) \quad \text{et} \quad I_q = \sum_{q'}^Q (\mathbf{Z} \nabla \psi^{q'}(\widehat{\mu}, S)^{-1})_{q,q'} \int_S \widehat{\mu} H \cdot \nabla \psi^{q'}(\widehat{\mu}, S).$$

Les structures présentées correspondent aux décompositions de Helmholtz du théorème 1.2.1.

### 1.6.2 Démonstration des inégalités de Poincaré-Friedrichs (théorèmes 1.5.1 et 1.5.2)

Nous ne démontrons que le théorème 1.5.1, la preuve du théorème 1.5.2 lui est similaire. Pour cela, nous allons estimer l'énergie de chacun des potentiels  $\xi_e$  et  $\zeta_e$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\left| \int_S (\widehat{\varepsilon} \nabla \xi_e) \cdot \nabla \xi_e \right| \leq \|\rho_e\|_{L^2(S)} \|\xi_e\|_{L^2(S)},$$

et

$$\sqrt{\left| \int_S (\widehat{\varepsilon}^{-1} \nabla \zeta_e) \cdot \nabla \zeta_e \right|} \leq \|B\|_{L^2(S)} \|\zeta_e\|_{L^2(S)} + \left| \langle \tau_e, \zeta_e \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S), H^{\frac{1}{2}}(\partial S)} \right|,$$

en rappelant la convention  $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial S)} = \inf_{U \in H^1(S), U|_{\partial S} = u} \|U\|_{H^1(S)} \leq \|u\|_{H^1(S)}$ , nous en concluons que

$$\sqrt{\left| \int_S (\widehat{\varepsilon}^{-1} \nabla \zeta_e) \cdot \nabla \zeta_e \right|} \leq \|\zeta_e\|_{L^2(S)} \left( \|B\|_{L^2(S)} + \|\tau_e\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S)} \right) + \|\nabla \xi_e\|_{L^2(S)} \|\tau_e\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S)}.$$

Par ailleurs, les inégalités de Poincaré classique (1.36) et de Poincaré-Wirtinger (1.37) nous rappelle que

$$\|\xi_e\|_{L^2(S)} \stackrel{(1.36)}{\leq} c_{p,0} \|\nabla \xi_e\|_{L^2(S)} \quad \text{et} \quad \|\zeta_e\|_{L^2(S)} \stackrel{(1.37)}{\leq} c_{p,w} \|\nabla \zeta_e\|_{L^2(S)}.$$

Nous utilisons la propriété 1.1.1

$$\|\nabla \xi_e\|_{L^2(S)} \stackrel{(1.3)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\widehat{\varepsilon}_-}} \sqrt{\left| \int_S (\widehat{\varepsilon} \nabla \xi_e) \cdot \nabla \xi_e \right|} \quad \text{et} \quad \|\nabla \zeta_e\|_{L^2(S)} \stackrel{(1.3)}{\leq} \sqrt{\widehat{\varepsilon}_+} \sqrt{\left| \int_S (\widehat{\varepsilon}^{-1} \nabla \zeta_e) \cdot \nabla \zeta_e \right|},$$

pour achever les estimations d'énergie de  $\xi_e$  :

$$\left| \int_S (\widehat{\varepsilon} \nabla \xi_e) \cdot \nabla \xi_e \right| \leq c_{p,0}^2 \frac{1}{\widehat{\varepsilon}_-} \|\rho_e\|_{L^2(S)}^2,$$

et de  $\zeta_e$  :

$$\left| \int_S (\widehat{\varepsilon}^{-1} \nabla \zeta_e) \cdot \nabla \zeta_e \right| \leq c_{p,w}^2 \widehat{\varepsilon}_+ \left( \|B\|_{L^2(S)} + (1 + c_{p,w}^{-2}) \|\tau_e\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S)} \right)^2.$$

Pour le noyau, nous avons

$$\int_S (\widehat{\varepsilon} e) \cdot e = \sum_{q,q'=1}^Q V_q \int_S \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,q}(\widehat{\varepsilon}, S) \cdot \nabla \overline{\widehat{\varphi}_{e,q'}(\widehat{\varepsilon}, S)} V_{q'} = (\mathbf{Y}(\widehat{\varepsilon}, S) \mathbf{V}, \mathbf{V})_{\mathcal{C}}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser la relation d'orthogonalité de la décomposition de Helmholtz :

$$\int_S (\widehat{\varepsilon} E) \cdot E = \int_S (\widehat{\varepsilon} \nabla \xi_e) \cdot \nabla \xi_e + \int_S (\widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_e) \cdot \mathbf{rot} \zeta_e + \int_S (\widehat{\varepsilon} e) \cdot e,$$

d'en prendre le module et de rappeler que par définition même des sources de (1.1-e) :

$$\|\mathbf{div}(\widehat{\varepsilon} E)\|_{L^2(S)} = \|\rho_e\|_{L^2(S)} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{rot} E\|_{L^2(S)} = \|B\|_{L^2(S)}.$$

## 1.7 Problèmes div-curl à frontières libres

Maintenant que nous nous sommes rassasiés de ces démonstrations, passons au digestif : la dépendance quant à la forme.

Nous allons maintenant supposer que la surface  $S$  à  $Q$  trous sur laquelle nous posons nos problèmes et les poids dépendent d'un paramètre  $x_3$  qui évolue. Plus précisément, nous allons considérer une famille d'isomorphismes  $(\mathcal{T}_{x_3})_{x_3 \in \mathbb{R}}$  qui déforment continument la section de référence :

$$S_{x_3} := \mathcal{T}_{x_3} S.$$

Pour exploiter les outils de l'analyse de forme, nous allons supposer que le bord de notre surface de référence  $S$  est de classe  $C^1$  et que la famille de transformation  $(\mathcal{T}_{x_3})_{x_3 \in \mathbb{R}}$  est un "groupe de transformations admissibles" au sens de la définition 13.1.1, c'est-à-dire que

$$(x, x_3) \rightarrow \mathcal{T}_{x_3}(x) \in C^1(\mathbb{R} \times \bar{B}, \mathbb{R} \times \bar{B})$$

est suffisamment régulière pour définir la trace normale de la vitesse euclidienne de cette transformation :

$$g(x_3) = -(\partial_3 \mathcal{T}_{x_3} \circ \mathcal{T}_{x_3}^{-1}) \cdot n,$$

avec  $n$  la normale sortante unitaire à  $S_{x_3}$ . Nous allons maintenant chercher les dérivées eulériennes de forme au sens de la définition 13.2.1.

**Théorème 1.7.1.** *La dérivée "eulérienne" de forme  $\partial_3 E$  d'une solution  $E$  au problème div-rot plan avec condition tangentielle, équation de (1.1-e) du théorème 1.4.1, est donnée par le problème div-rot plan suivant :*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon}(\partial_3 E)) = -\operatorname{div}((\partial_3 \widehat{\varepsilon}) E) + \partial_3 \rho_e, & \text{dans } S_{x_3} \\ \operatorname{rot}(\partial_3 E) = \partial_3 B, & \text{dans } S_{x_3}, \\ (\partial_3 E) \times n = \partial_3 \tau_e + g B - g(\partial_n + 2k)(\tau_e) + \operatorname{rot}_\Gamma(g E), & \text{sur } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (1.38)$$

où les conditions de compatibilité sont automatiquement vérifiées si elles le sont pour le problème initial et avec  $k(x_3)$  la courbure de  $S_{x_3}$  et  $\operatorname{rot}_\Gamma$  le rotationnel tangentiel.

*Démonstration.* En intégrant la seconde équation de (1.1-e) contre une fonction test  $\varphi$  et en utilisant la formule de Green 2D (avec  $E \times n = 0$  sur le bord  $\partial S_{x_3}$ ) :

$$\int_{S_{x_3}} \operatorname{rot} E \varphi = \int_{S_{x_3}} E \operatorname{rot} \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} \tau_e \varphi = \int_{S_{x_3}} B \varphi,$$

et avec le théorème de transport de Reynolds (théorème 13.2.1) :

$$\int_{S_{x_3}} \partial_3 E \cdot \operatorname{rot} \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} g E \cdot \operatorname{rot} \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} \partial_3 \tau_e \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} g(\partial_n + k)(\tau_e \varphi) = \int_{S_{x_3}} \partial_3 B \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} g B \varphi.$$

Comme  $E \operatorname{rot} \varphi = (E \cdot n) \partial_\tau \varphi + (E \times n) \partial_n \varphi$  on  $\partial S_{x_3}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{S_{x_3}} \operatorname{rot}(\partial_3 E) \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} (\partial_3 E) \times n \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} g(E \cdot n) \partial_\tau \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} \partial_3 \tau_e \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} g(\partial_n + k)(\tau_e) \varphi \\ = \int_{S_{x_3}} \partial_3 B \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} g B \operatorname{rot} \varphi. \end{aligned}$$

Par la formule de Green curviligne (10.25) nous avons :

$$\int_{\partial S_{x_3}} g(E \cdot n) \partial_\tau \varphi = \int_{\partial S_{x_3}} g E \cdot \operatorname{rot}_\Gamma \varphi = \int_{\partial S_{x_3}} \operatorname{rot}_\Gamma(g E) \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} g k \tau_e \varphi,$$

et ainsi

$$\int_{S_{x_3}} [\operatorname{rot}(\partial_3 E) - \partial_3 B] \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} [(\partial_3 E) \times n - \partial_3 \tau_e - g B + g(\partial_n + 2k)(\tau_e) - \operatorname{rot}_\Gamma(g E)] \varphi.$$

Si nous prenons notre fonction test à support compact  $\varphi \in \mathcal{D}_0^\infty(S_{x_3})$  nous avons

$$\operatorname{rot}(\partial_3 E) = \partial_3 B,$$



et si nous la prenons  $\varphi \in L^2(\partial S_{x_3})$ , nous avons

$$(\partial_3 E) \times n = \partial_3 \tau_e + g B - g (\partial_n + 2k) (\tau_e) + \text{rot}_\Gamma (g E)$$

La dernière équation s'obtient en intégrant la première équation de (1.1-e) contre une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(S_{x_3})$  (où  $\mathcal{D}(S_{x_3})$  correspond à l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans  $S_{x_3}$ ) :

$$\int_{S_{x_3}} \text{div}(\widehat{\varepsilon} E) \varphi = \int_{S_{x_3}} \rho_e \varphi,$$

et en dérivant avec le théorème de Reynolds (théorème 13.2.1) :

$$\int_{S_{x_3}} \text{div}(\partial_3(\widehat{\varepsilon} E)) \varphi = \int_{S_{x_3}} \partial_3 \rho_e \varphi.$$

Pour assurer que l'équation admet au moins une solution, il nous faut vérifier les conditions de compatibilité. En appliquant le théorème de transport de Reynolds (théorème 13.2.1) sur les conditions de compatibilité du problème initial :

$$\int_S B \, dx = \int_{\partial S} \tau_e \, d\sigma_x \Rightarrow \int_S \partial_3 B + \int_{\partial S} \partial_3 \tau_e + g B - g(\partial_n + k)(\tau_e)$$

et comme

$$\int_{\partial S} \text{rot}_\Gamma (g E) = \int_{\partial S} g k \tau_e,$$

nous avons

$$\int_S \text{rot} \partial_3 E + \int_{\partial S} (\partial_3 E) \times n = 0,$$

ce qui correspond aux conditions de compatibilités du problème div-rot plan dont  $\partial_3 E$  est la solution.  $\square$

**Théorème 1.7.2.** *La dérivée "eulérienne" de forme  $\partial_3 H$  d'une solution  $H$  du problème div-rot plan avec condition normale, équation de (1.1-h) du théorème 1.4.1, est donnée par le problème div-rot plan suivant :*

$$\begin{cases} \text{div}(\partial_3(\widehat{\mu} H)) = \partial_3 \rho_m, & \text{dans } S \\ \text{rot} \partial_3 H = \partial_3 D, \text{ adans } S, \\ \partial_3(\widehat{\mu} H) \cdot n = \partial_3 \nu_m + g \rho_m - g \partial_n \nu_m - \mathbf{div}_\Gamma (g \widehat{\mu} H), \text{ asur } \partial S. \end{cases} \quad (1.39)$$

où les conditions de compatibilité sont automatiquement vérifiées si elles le sont pour le problème initial.

*Démonstration.* En intégrant la seconde équation de (1.1-h) contre une fonction test  $\varphi$  et en utilisant la formule de Green 2D :

$$\int_{S_{x_3}} \mathbf{div}(\widehat{\mu} H) \varphi = - \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} H \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} \nu_m \varphi = \int_{S_{x_3}} \rho_m \varphi$$

avec le théorème de transport de Reynolds :

$$- \int_{S_{x_3}} \partial_3(\widehat{\mu} H) \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{\mu} H \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} \partial_3 \nu_m \varphi - \int_{\partial S} g (\partial_n + k) (\nu_m \varphi) = \int_{S_{x_3}} \partial_3 \rho_m \varphi - \int_{\partial S} g \rho_m \varphi.$$

Puisque nous avons la relation algébrique  $H \cdot \nabla \varphi = (H \times n) \partial_\tau \varphi + (H \cdot n) \partial_n \varphi$  sur  $\partial S$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{S_{x_3}} \mathbf{div}(\partial_3 H) \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} \partial_3(\widehat{\mu} H) \cdot n \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} g (\widehat{\mu} H \times n) \partial_\tau \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} \partial_3 \nu_m \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} g (\partial_n + k_g) (\nu_m) \varphi \\ = \int_{S_{x_3}} \partial_3 \rho_m \varphi - \int_{\partial S_{x_3}} g \rho_m \varphi, \end{aligned}$$

puis par la formule de Green curviligne (10.25) :

$$\int_{\partial S_{x_3}} g (\widehat{\mu} H \times n) \partial_\tau \varphi = \int_{\partial S} g \widehat{\mu} H \cdot \nabla_\Gamma \varphi = - \int_{\partial S_{x_3}} \mathbf{div}_\Gamma (g \widehat{\mu} H) \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} g k \nu_m \varphi,$$

et ainsi

$$\int_{S_{x_3}} [\mathbf{div}(\partial_3 H) - \partial_3 \rho_m] \varphi + \int_{\partial S_{x_3}} [-\partial_3(\widehat{\mu} H) \cdot n + \partial_3 \nu_m + g \rho_m - g \partial_n \nu_m - \mathbf{div}_\Gamma (g \widehat{\mu} H)] \varphi.$$

Si nous prenons notre fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}_0^\infty(S_{x_3})$ , nous avons

$$\mathbf{div}(\partial_3 H) = \partial_3 \rho_m,$$

et si  $\varphi \in L^2(\partial S_{x_3})$  alors

$$\partial_3(\hat{\mu}H) \cdot n = \partial_3 \nu_m + g \rho_m - g \partial_n \nu_m - \mathbf{div}_\Gamma(g \hat{\mu} H)$$

□



# CHAMPS DE VECTEURS DÉFINIS SUR UN DOMAINE NON BORNÉ DE $\mathbb{R}^3$

---

Après avoir longtemps discoursu au sujet des problèmes div-rot pour des champs bidimensionnels dans le précédent chapitre, nous allons maintenant étudier les problèmes Div-curl **tridimensionnels** du type

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{u} &= \omega & \text{dans } \mathcal{K} \\ \mathbf{Div} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{u}) &= c & \text{dans } \mathcal{K} \\ &+ \text{condition(s) aux limites} \end{cases}$$

avec les opérateurs différentiels usuels (pour  $\varphi$  un champ scalaire et  $\mathbf{u}$  un champ 3D) :

$$\mathbf{grad} \varphi := \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \\ \partial_3 \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{curl} \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Div} \mathbf{u} := \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$$

Ces types de problèmes et les outils qui y sont reliés, à savoir les décompositions de Helmholtz et les inégalités de Poincaré-Friedrichs, ont déjà été étudiées dans [6], [30] et [33] quand le domaine est  $\mathcal{K}$  borné et le poids  $\mathbf{\Lambda}$  est scalaire. Nous généraliserons les résultats à ce sujet au cas où  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice complexe non hermitienne puis au cas où le domaine  $\mathcal{K}$  n'est plus borné. De tels problèmes peuvent apparaître dans l'étude de guide infini dans au moins une direction. Le cas **non borné** présage des difficultés d'ordre théoriques et numériques. En effet, nombreux sont les outils, parmi ceux que nous avons présenté dans le chapitre 1, qui nécessitent d'être remaniés (pour être applicable au cas des domaines non-bornés, notamment afin de s'assurer l'existence de solutions). Parmi ceux-ci les décompositions de Helmholtz. D'autre part les méthodes numériques usuelles, comme les éléments ou les différences finies, s'appuient sur une discrétisation du domaine, rendue impossible par le caractère non borné. Pour lever les difficultés tant théoriques que numériques ainsi évoquées, nous chercherons un problème équivalent à celui que nous souhaitons analyser mais cette fois-ci sur un domaine borné. Plus précisément, nous allons introduire des bords arbitraires sur lesquels nous allons considérer des conditions aux limites qui nous permettent de retrouver la ou les solutions du problème original. De telles conditions aux bords sont nommées **conditions transparentes**. La littérature sur ces dernières est abondante. Nous recommandons à cet égard la monographie suivante [31]. Avant de peiner à la lecture, apprenez que ce chapitre n'est, dans le cadre de cette thèse, nécessaire qu'à la présentation et à la démonstration de la décomposition en profils du théorème 2.7.1 qui sera utilisé dans le chapitre 8 et à nous assurer de l'existence de solutions aux problèmes de type Div-curl qui naturellement interviendront dans la partie IV. Aussi il peut être sage de s'y plonger en parallèle aux chapitres 8 et 9. Nous pensons toutefois que le contenu de ce chapitre peut servir dans d'autres situations potentiellement décorréelées des problèmes types jonctions entres câbles des chapitres 8 et 9.

## 2.1 Préliminaires

### 2.1.1 Description de la géométrie considérée

#### Domaine borné

Nous allons maintenant définir les domaines que nous considérerons dans ce chapitre. Commençons par un **domaine borné à  $Q$  anses de degré  $L+1$**  dont nous allons donner la définition. Soit un domaine simplement

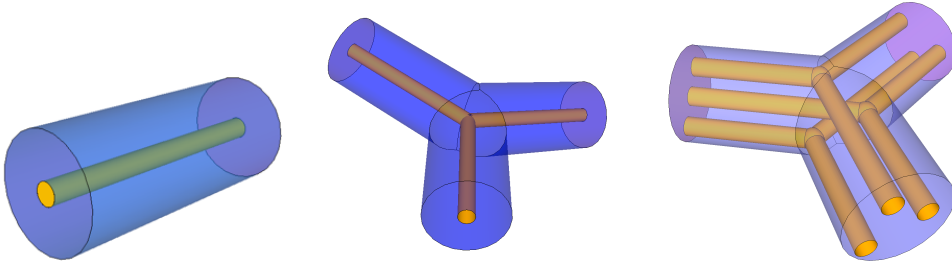


FIGURE 2.1 – Domaines avec 1 anse d'ordre 2 (figure de gauche), avec 1 anse d'ordre 3 (figure du milieu), avec 3 anses d'ordre 3 (figure de droite).

connexe  $\mathcal{W}_0$  avec un bord connexe<sup>1</sup>. Nous supposons que le bord  $\partial\mathcal{W}_0$  contient  $(L + 1)$  surfaces planes<sup>2</sup>, nommées sections finales  $\mathcal{O}_{0,l}$  pour  $l = 0 \dots L$  qui ne s'intersectent pas :

$$\overline{\mathcal{O}_{0,l}} \cap \overline{\mathcal{O}_{0,l'}} = \emptyset \text{ for } l \neq l'.$$

Donnons nous aussi  $Q$  domaines simplement connexes  $\mathcal{W}_q \subset \mathcal{W}_0$  de bords  $\partial\mathcal{W}_q$  connexes. Ces domaines n'in-

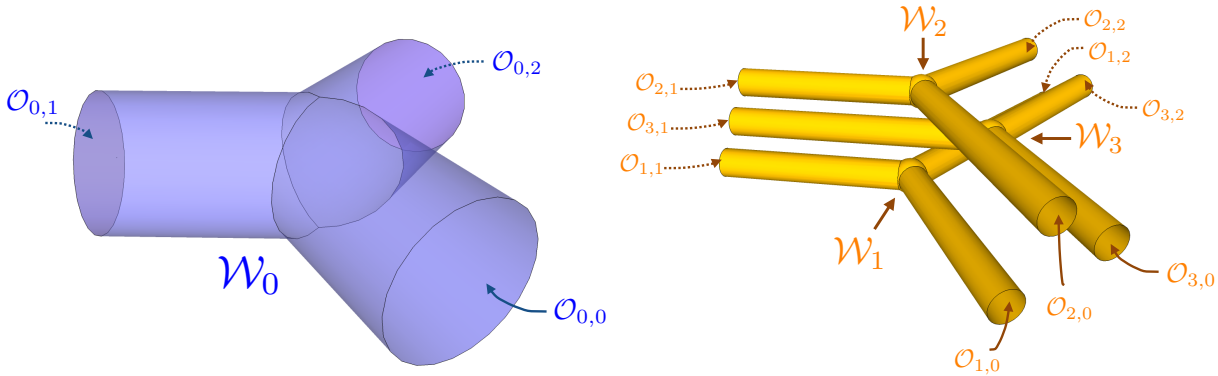


FIGURE 2.2 – Domaine  $\mathcal{W}_0$  (gauche), domaines  $\mathcal{W}_q$  avec  $Q = 3$  (droite).

tersectent  $\mathcal{W}_0$  que sur les sections finales  $\mathcal{O}_{0,l}$  :

$$\partial\mathcal{W}_q \cap \partial\mathcal{W}_0 \subset \bigcup_{l=0}^L \mathcal{O}_{0,l}.$$

Plus précisément, nous définissons les  $Q \times (L + 1)$  trous  $\mathcal{O}_{q,l}$  des sections finales de la manière suivante  $\mathcal{O}_{q,l} := \mathcal{O}_{0,l} \cap \mathcal{W}_q$  en s'assurant que  $\mathcal{O}_{q,l} \neq \emptyset$ . Les domaines  $\mathcal{W}_q$  sont nommés anses de degré  $(L + 1)$ .

Ainsi le domaine à  $Q$  anses de degré  $(L + 1)$  se définit<sup>3</sup> par :

$$\mathcal{K} := \mathcal{W}_0 \setminus \left( \bigcup_{q=1}^Q \mathcal{W}_q \right).$$

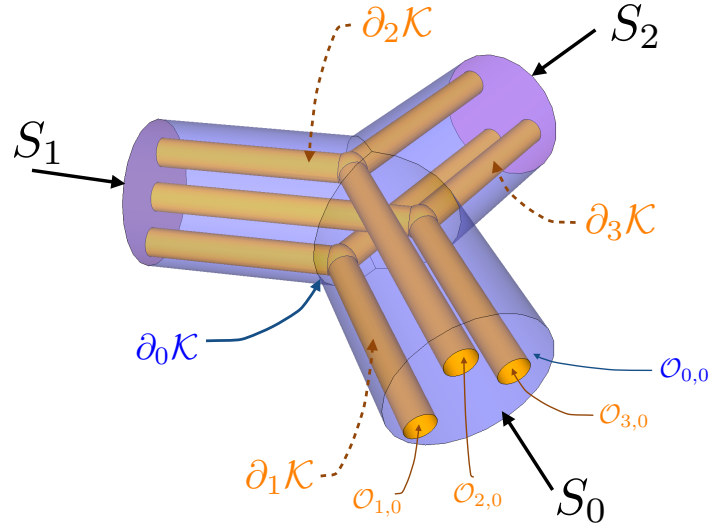
Nous noterons les bords du domaine et des sections finales par

$$\partial_q \mathcal{K} = \partial\mathcal{W}_q \text{ et } \partial_q S_l = \partial\mathcal{O}_{q,l} \text{ pour } q = 0 \dots Q, k = 1 \dots K \text{ et } l = 0 \dots L.$$

1. Un domaine tridimensionnel simplement connexe avec un bord connexe est dit dans le vocabulaire de la topologie algébrique 2-connexe.

2. Nous aurions pu choisir de considérer des surfaces générales mais nous n'avons pas voulu nous encombrer d'opérateurs surfaciques.

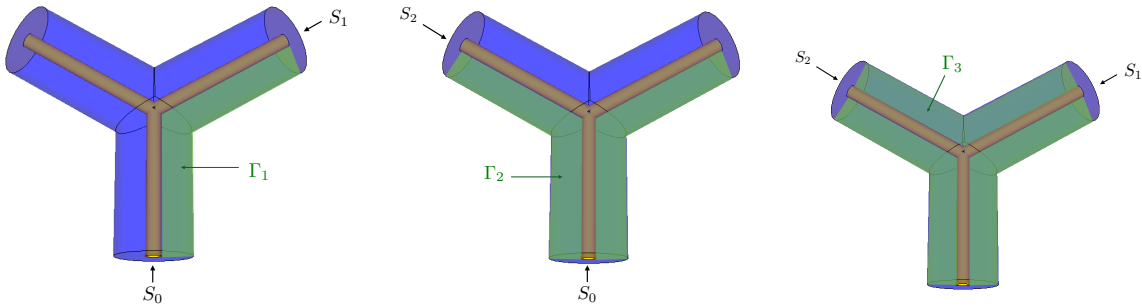
3. Plus précisément, il s'agit d'un domaine à  $Q$  anses de degré  $(L + 1)$  sans cavité.

FIGURE 2.3 – domaine  $\mathcal{K}$  avec 3 anses de degré 3 et ses notations

Introduisons les  $Q \times L$  **coupures 2D**  $\Gamma_{q,l}$  joignant  $S_l$  à  $S_0$  pour  $q = 1 \dots Q$  et  $l = 1 \dots L$  telles que le domaine

$$\mathcal{K}_\Gamma := \mathcal{K} \setminus \left( \bigcup_{q=1}^Q \bigcup_{l=1}^L \Gamma_{q,l} \right) \quad (2.1)$$

soit simplement connexe. Plus précisément, ce sont des surfaces 2D simplement connexes telles que pour tout  $1 \leq q \leq Q$  et  $1 \leq l \leq L$  :

FIGURE 2.4 – Domaine avec 1 anse de degré 3 avec la première coupure (figure gauche), avec les deux coupures issues de  $S_0$  (figure du centre) et avec les trois coupures (figure de droite).

- elles ne s'intersectent pas :  $\Gamma_{q,l} \cap \Gamma_{q',l'} = \emptyset$  pour  $q \neq q'$  et  $l \neq l'$ ,
- elles sont intérieures et ne s'appuient que sur une partie de l'anse  $\partial\Gamma_{q,l} \subset S_0 \cup \partial_q\mathcal{K} \cup S_l \cup \partial_0\mathcal{K}$ .

Nous supposons que l'unique<sup>4</sup> **composante connexe du bord est lipschitzienne**. Il est ainsi possible (car  $\mathcal{K}$  est connexe par arcs) de choisir les coupures  $\Gamma_{q,l}$  telles que leurs bords soient lipschitziens. Nous noterons  $\partial_l\Gamma_q$  l'intersection entre le bord des coupures  $\partial\Gamma_{q,l}$  et les sections finales  $S_l^\delta$  pour  $l = 1 \dots L$  et  $q = 1 \dots Q$ . Ces **coupures 1D**  $\partial_l\Gamma_q$  pour  $q = 1 \dots Q$  sont les coupures nécessaires pour rendre la surface  $S_l^\delta$  simplement connexe.

Comme dans le chapitre 1, ces coupures nous seront d'un précieux recours pour les décompositions en potentiels, car certains sauteront au travers de celles-ci et pour définir correctement la notion de saut, nous avons besoin de choisir au préalable une convention concernant l'orientation des coupures. Chaque coupure  $\Gamma_{q,l}$  est paramétrisée par les vecteurs  $(\tau_{q,l}, e^{q,l})$  avec

4. Il n'y a pas de cavité.

- $\mathbf{e}^{q,l}$  colinéaire à la tangente de  $\partial_q \mathcal{K}^\delta$  et orienté de  $S_l$  vers  $S_0$ ,
- $\boldsymbol{\tau}_{q,l}$  orthogonal à  $\mathbf{e}^{q,l}$  dans  $\Gamma_{q,l}$  et orienté de  $\partial_q \mathcal{K}$  vers  $\partial_0 \mathcal{K}$ .

Nous introduisons presque partout la normale  $\mathbf{n}_{q,l}$  à la surface  $\Gamma_{q,l}$  comme le vecteur unitaire tel que  $(\mathbf{n}_{q,l}, \boldsymbol{\tau}_{q,l}, \mathbf{e}^{q,l})$  soit une base directe. Le saut d'une fonction  $u$  à travers la coupure  $\Gamma_{q,l}$  est ainsi défini par :

$$[u]_{\Gamma_q}(\mathbf{x}_{\tau,e}) := \lim_{\nu \rightarrow 0} [u(\mathbf{x}_{\tau,e} + \nu \mathbf{n}_{q,l}) - u(\mathbf{x}_{\tau,e} - \nu \mathbf{n}_{q,l})] \text{ pour presque tout } \mathbf{x}_{\tau,e} \in \Gamma_{q,l}. \quad (2.2)$$

Les conventions concernant l'orientation que nous avons choisi impliquent qu'une fonction  $u^{q,l}$  qui saute au travers de  $\Gamma_{q,l}$  et qui est continue ailleurs saute de la manière suivante au travers de la coupure 1D  $\partial_l \Gamma_{q'}$  :

$$[u^{q,l}]_{\partial_l \Gamma_{q'}} = \delta_{q'}^q (\delta_{l'}^1 - \delta_{l'}^l) [u^{q,l}]_{\Gamma_{q,l}}. \quad (2.3)$$

conformément à la définition 1.6 du saut au travers d'une courbe sur une surface.

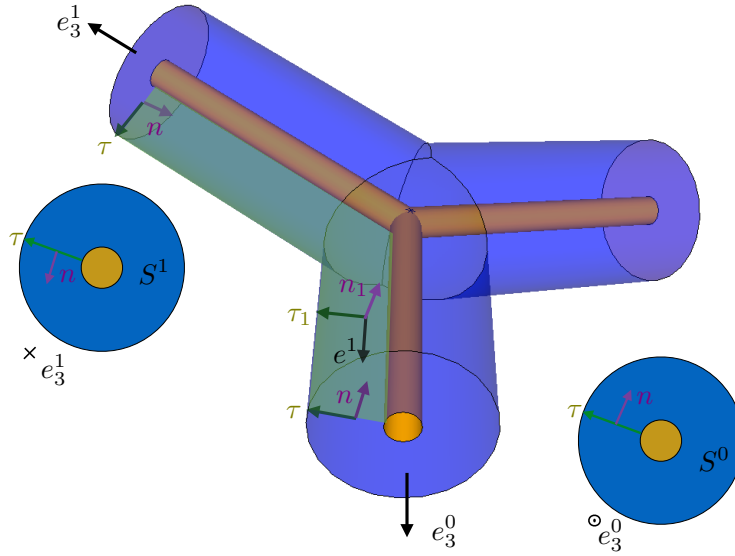


FIGURE 2.5 – Orientation de la coupure  $\Gamma_1$  dans un domaine à 1 anse d'ordre 3.

### Domaine non borné

Nous allons prolonger ce domaine  $\mathcal{K}$  précédemment défini en y adjoignant aux sections finales, là où il y a des trous, des cylindres percés semi-infinis (voir la section 11.3.2). Plus précisément, définissons  $\mathbf{e}_3^l$  la normale extérieure à  $\mathcal{K}$  sur les sections finales  $S_l^\delta$  et notons  $\mathbf{x} = (x_T, x_3^l)$  les coordonnées locales dans le repère affine  $(O_l, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3^l)$  avec pour origine  $0_l$ . Les **cylindres percés semi-infinis** sont alors définis par la translation des sections finales  $S_l$  le long de la normale  $\mathbf{e}_3^l$  :

$$\mathfrak{D}_l = S_l \times [0_l, +\infty] \mathbf{e}_3^l,$$

où  $[0_l, +\infty] \mathbf{e}_3^l$  correspond à la ligne semi-infinie de direction  $\mathbf{e}_3^l$  qui démarre en  $0_l$  (voir la figure 2.6). Le **domaine non borné** sur lequel nous allons porter notre travail est :

$$J = \mathcal{K} \bigcup_{l=0}^L \mathfrak{D}_l.$$

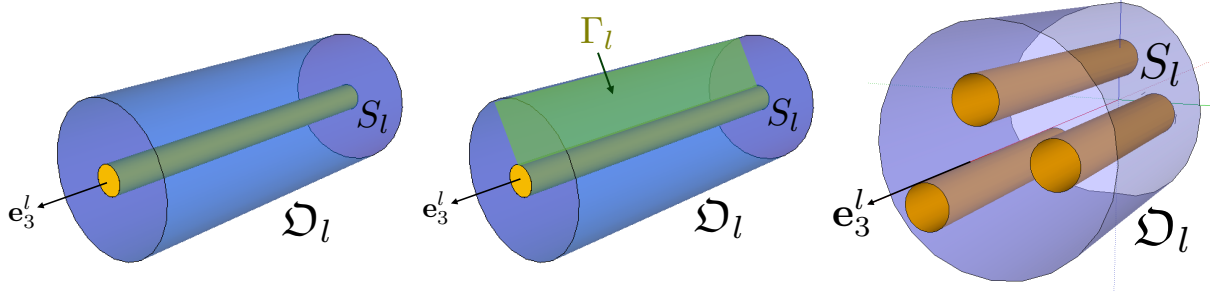
Dans certains contextes,  $\mathcal{K}$  est nommée zone défectueuse et  $\mathfrak{D}_l$  les zones régulières. Notons que nous pouvons prolonger les coupures  $\Gamma_{q,l}$  sur  $J$  par la même translation :

$$\Gamma_{q,l} |_{\mathfrak{D}_l} := \partial_l \Gamma_q \times [0_l, +\infty] \mathbf{e}_3^l.$$

Le domaine

$$J_\Gamma := J \setminus \left( \bigcup_{q=1, l=1}^{Q, L} \Gamma_{q,l} \right) \quad (2.4)$$

est simplement connexe.

FIGURE 2.6 –  $\mathfrak{D}_l$  dans le cas d'une anse (figure de gauche et au centre) et de trois anses.

### 2.1.2 Descriptions des fonctions poids considérées

Nous envisagerons des poids qui ont sensiblement la même forme que ceux considérés pour les champs 2D au chapitre 1 (hypothèse 1.1.1) mais adaptée au cas 3D :

**Hypothèse 2.1.1. (Hypothèse des poids complexes 3D)** Soit un champ matriciel à coefficients complexes

$$\mathbf{\Lambda} : J \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{G}l_3(\mathbb{C})$$

tel qu'en tout point  $\mathbf{x} \in J$ , la matrice  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})$  est inversible et il existe des constantes

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-}, \mathbf{\Lambda}_{r,+} > 0, \quad \mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_+ > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{\Lambda}_{i,-}, \mathbf{\Lambda}_{i,+} \geq 0$$

telles que pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$  :

$$\mathbf{\Lambda}_{r,-} |\mathbf{u}|^2 \leq \Re [(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbb{C}}] \leq \mathbf{\Lambda}_{r,+} |\mathbf{u}|^2, \quad \mathbf{\Lambda}_- |\mathbf{u}|^2 \leq |(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbb{C}}| \leq \mathbf{\Lambda}_+ |\mathbf{u}|^2 \quad \text{et} \quad |\Im [(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbb{C}}]| \leq \mathbf{\Lambda}_{i,+} |\mathbf{u}|^2.$$

Comme nous l'avons auparavant fait pour le cas des domaines de  $\mathbb{R}^2$  dans le chapitre précédent, nous introduisons pour tout poids  $\mathbf{\Lambda}$  vérifiant l'hypothèse 2.1.1 et tout domaine borné  $\tilde{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}^3$  la forme bilinéaire suivante :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\tilde{\mathcal{K}}, \mathbb{C}^3), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{\Lambda}, \tilde{\mathcal{K}}} = \int_{\tilde{\mathcal{K}}} \mathbf{\Lambda} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad (2.5)$$

qui est symétrique (respectivement hermitienne) si  $\mathbf{\Lambda}$  l'est.

## 2.2 Champs 3D dans un domaine borné

Nous allons restreindre dans un premier temps notre étude au domaine borné  $\mathcal{K}$  décrit dans la section 2.1.1 et renvoyons pour plus tard le cas non borné. Avant d'attaquer les problèmes Div-curl généraux, nous allons nous focaliser sur les espaces harmoniques.

### 2.2.1 Les espaces harmoniques

Les espaces harmoniques avec conditions aux bords de type tangentielle et type normale sont

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, \mathcal{K}) &:= \{ \mathbf{u} \in L^2(\mathcal{K}); \operatorname{curl} \mathbf{u} = 0, \operatorname{Div}(\mathbf{\Lambda} \mathbf{u}) = 0, \text{ et } \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{K}} = \mathbf{0} \}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{\Lambda}, \mathcal{K}) &:= \{ \mathbf{u} \in L^2(\mathcal{K}); \operatorname{curl} \mathbf{u} = 0, \operatorname{Div}(\mathbf{\Lambda} \mathbf{u}) = 0, \text{ et } (\mathbf{\Lambda} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{K}} = \mathbf{0} \}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pour les domaines de dimension deux, ces deux espaces furent reliés à la notion de "trou". Cependant, la nature de la topologie des domaines de dimension deux et trois diffère, plus précisément dans la notion de "trou" en dimension trois, il faut distinguer les "anses", ici au nombre de  $Q$  et les "cavités", ici non présentes. Référez vous à l'annexe 11 pour plus de précisions concernant ce sujet. Dans le cadre de ce chapitre (et des suivants), les "anses" seront ce que nous avons précédemment défini (lors de la description de la géométrie dans la section 2.1.1).

Commençons par annoncer le lemme Hodge-Weyl suivant qui est le pendant 3D du lemme 1.2.2 :

**Lemme 2.2.1.** Donnons nous  $u \in L^2(\mathcal{K})$  tel que  $\operatorname{curl} u = 0$  dans  $\mathcal{K}$ . Alors il existe<sup>5</sup>  $\Phi \in H^1(\mathcal{K}_{\Gamma})$  tel que

$$u = \operatorname{grad} \Phi \quad \text{et} \quad q = 1 \dots Q, l = 1 \dots L \quad \text{nous avons} \quad [\operatorname{grad} \Phi \times \mathbf{n}_{q,l}]_{\Gamma_{q,l}} = 0,$$

5. Rappelons que (voir (2.1)) que  $\mathcal{K}_{\Gamma}$  est le domaine  $\mathcal{K}$  privé des coupures qui le rendent simplement connexe.



avec  $\Gamma_{q,l}$  des coupures qui permettent de rendre  $\mathcal{K}$  simplement connexe. Ce potentiel ne saute pas

$$\Phi \in H^1(\mathcal{K}),$$

si l'une de ces trois conditions est vérifiée :

(i) le domaine  $\mathcal{K}$  est simplement connexe ( $Q = 0$ ),

(ii) il existe pour tout  $l = 0 \dots L$  des portions de surface  $\gamma_{0,l} \subset \partial_0 \mathcal{K}$  joignant  $S_1$  à  $S_l$  tel que  $u \times n|_{\gamma_{0,l}} = 0$ ,

(iii) il existe pour tout  $l = 0 \dots L$  et  $q = 1 \dots Q$  des portions de surface  $\gamma_{q,l} \subset \partial_q \mathcal{K}$  joignant  $S_1$  à  $S_l$  tel que  $u \times n|_{\gamma_{q,l}} = 0$ .

*Démonstration.* Admettons le point (i), c'est à dire que, dans le cas simplement connexe, si un champ est irrotationnel, alors il peut s'écrire sous la forme du gradient d'un potentiel dans  $H^1$ , c'est le théorème de Hodge Weyl (lemme 1.2.1) adapté au cas 3D. Le domaine  $\mathcal{K}$  privé de ses coupures  $\Gamma_{q,l}$  est simplement connexe, ce qui nous donne le droit d'exploiter le point (i), nous savons ainsi qu'il existe  $\Phi \in H^1(\mathcal{K}_\Gamma)$  tel que

$$u = \mathbf{grad} \Phi.$$

La composante tangentielle de  $u$  ne peut sauter en passant au travers d'une coupure  $\Gamma_{q,l}$  puisque  $\mathbf{curl} u = 0$  dans  $\mathcal{K}$ . Ainsi pour  $q = 1 \dots Q, l = 1 \dots L$ , nous avons :

$$[\Phi]_{\Gamma_{q,l}} = cte_{q,l}.$$

Choisissons de placer nos coupures de façon que  $\Gamma_{q,l} \subset S_1 \cup \partial_q \mathcal{K} \cup S_l \cup \gamma_{0,l}$ . Si  $u \times n|_{\gamma_{0,l}} = 0$  alors il existe pour  $l = 1 \dots L$  des constantes  $\Phi_{0,l}$  telles que  $\Phi|_{\gamma_0} = \Phi_{0,l}$  et donc

$$cte_{q,l} = \lim_{x_\tau \rightarrow x_{0,l} \in \gamma_{0,l}} [\Phi]_{\Gamma_{q,l}}(x_\tau) = \Phi_{0,l} - \Phi_{0,l} = 0.$$

Le raisonnement est similaire si nous choisissons de placer nos coupures de cette façon  $\Gamma_{q,l} \subset S_1 \cup \gamma_{q,l} \cup S_l \cup \partial_0 \mathcal{K}$ .  $\square$

Considérons un champ  $u \in L^2(\mathcal{K}, \mathbb{C}^3)$  irrotationnel  $\mathbf{curl} u = 0$ . Nous savons pour le lemme 2.2.1 de Hodge-Weyl tout juste démontré qu'il existe un potentiel

$$\Phi \in H^1(\mathcal{K} \setminus \left( \bigcup_{q=1}^Q \bigcup_{l=1}^L \Gamma_{q,l} \right))$$

tel que  $u = \mathbf{grad} \Phi$  et  $[\mathbf{grad} \Phi \times \mathbf{n}_{q,l}]_{\Gamma_{q,l}}$ . Considérons maintenant un entier  $\tilde{q}$  entre 1 et  $Q$ , un entier  $\tilde{l}$  entre 1 et  $L$  ainsi qu'une coupure  $\tilde{\Gamma}_{\tilde{q},\tilde{l}} = 0$  du même type que  $\Gamma_{\tilde{q},\tilde{l}}$  mais différente, c'est à dire que

- elle n'intersecte aucune autre coupure :  $\Gamma_{q,l} \cap \tilde{\Gamma}_{\tilde{q},\tilde{l}} = \emptyset$  pour  $q \neq \tilde{q}$  et  $l \neq \tilde{l}$ ,
- elle ne s'appuie que sur une partie de l'anse  $\tilde{\Gamma}_{\tilde{q},\tilde{l}} \subset S_0 \cup \partial_{\tilde{q}} \mathcal{K} \cup S_{\tilde{l}} \cup \partial_0 \mathcal{K}$ ,
- le domaine  $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma := \mathcal{K} \setminus \left( \bigcup_{q=1, q \neq \tilde{q}}^Q \bigcup_{l=1, l \neq \tilde{l}}^L \Gamma_{q,l} \bigcup \tilde{\Gamma}_{\tilde{q},\tilde{l}} \right)$  est simplement connexe.

De même avec ce nouveau jeu de coupures, il existe un potentiel  $\tilde{\Phi} \in H^1(\mathcal{K} \setminus \tilde{\mathcal{K}}_\Gamma)$  tel que  $u = \mathbf{grad} \tilde{\Phi}$ ,  $[\mathbf{grad} \tilde{\Phi} \times \mathbf{n}_{q,l}]_{\Gamma_{q,l}} = 0$  pour  $q \neq \tilde{q}, l \neq \tilde{l}$  et  $[\mathbf{grad} \tilde{\Phi} \times \mathbf{n}_{q,l}]_{\tilde{\Gamma}_{\tilde{q},\tilde{l}}} = 0$ . Nous avons donc

$$\mathbf{grad} \Phi = \mathbf{grad} \tilde{\Phi} \quad \text{dans } \mathcal{K}_\Gamma \setminus \tilde{\Gamma}_{\tilde{q},\tilde{l}}.$$

Ainsi si  $\Phi$  dépend du choix des coupures, son gradient non. Nous allons utiliser la notation  $\widetilde{\mathbf{grad}}$  pour mettre en lumière cette invariance.

**Remarque 2.2.1.** Pour tout  $u \in H^1(\mathcal{K}_\Gamma)$ , le champ  $\widetilde{\mathbf{grad}} u$  est défini par

$$\widetilde{\mathbf{grad}} u \in L^2(\mathcal{K}_\Gamma)^2 \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{grad}} u = \mathbf{grad} u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{K}_\Gamma).$$

Avec une preuve similaire à celle du théorème 1.3.1 mais en utilisant le lemme 2.2.1 plutôt que le lemme 1.2.2, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1.** *Les espaces harmoniques dépendent des caractéristiques topologiques de  $\mathcal{K}$  :*

$$\mathcal{E}(\varepsilon, \mathcal{K}) = \{\emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\boldsymbol{\mu}, \mathcal{K}) = \text{span} \left\{ \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi^{q,l}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) \right\}_{q=1\dots Q, l=1\dots L}$$

avec les potentiels harmoniques

$$\Psi^{q,l}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) \in H^1(\mathcal{K} \setminus \Gamma_{q,l}) / \mathbb{C}$$

solutions de

$$\begin{cases} \mathbf{Div}(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{grad} \Psi^{q,l}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K})) = 0, & \text{dans } \mathcal{K} \setminus \Gamma_{q,l}, \\ \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{grad} \Psi^{q,l}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{K}, \\ [\Psi^{q,l}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K})] = 1 & \text{sur } \Gamma_{q,l}, \\ [\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{grad} \Psi^{q,l}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) \cdot \mathbf{n}] = 0 & \text{sur } \Gamma_{q,l}. \end{cases}$$

Les potentiels qui permettent d'engendrer les espaces harmoniques vérifient comme dans le cas de la dimension 2 :

$$\int_{\mathcal{K}} (\boldsymbol{\Lambda} \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi^{q,l}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K})) \cdot \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi^* = 0, \quad \forall \Psi^* \in H^1(\mathcal{K}). \quad (2.7)$$

Nous pouvons de même introduire le tenseur de Gram  $\mathbf{Cut}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K})$  de taille  $L \times L \times Q \times Q$  défini par :

$$\mathbf{Cut}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) = (\mathbf{Cut}_{q,q'}^{l,l'}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}))_{q,q'}^{l,l'}, \quad \mathbf{Cut}_{q,q'}^{l,l'}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} (\boldsymbol{\Lambda} \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi^{q,l}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K})) \cdot \widetilde{\mathbf{grad}} \Phi^{q',l'}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}). \quad (2.8)$$

Avec des preuves similaires au cas 2D, nous pouvons démontrer que :

**Lemme 2.2.2.** *Le tenseur de Gram  $\mathbf{Cut}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K})$  est inversible. Il est de plus symétrique (respectivement hermitienne) si le poids  $\boldsymbol{\Lambda}$  est symétrique (respectivement hermitienne) et défini positif si  $\boldsymbol{\Lambda}$  est symétrique réel.*

Par contre, il n'y a pas invariance par transformation conforme ni de relation du type lemme 1.3.5 de conjugaison. L'étude générale du spectre de  $\mathbf{Cut}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K})$  reste une question ouverte qui ne nous a guère retenu dans le cadre des câbles coaxiaux. Précisons que si la géométrie comportait des cavités alors l'espace harmonique  $\mathcal{E}(\varepsilon, \mathcal{K})$  ne serait pas vide et il serait alors nécessaire d'introduire d'autres potentiels harmoniques pour le caractériser.

## 2.2.2 Décompositions de Helmholtz à poids de champs 3D

Rappelons au préalable la définition de quelques espaces fonctionnels usuels. Aux opérateurs divergences et rotationnels, nous associons les espaces<sup>6</sup> de Sobolev suivants :

$$H(\mathbf{Div} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) := \{ \mathbf{u} \in L^2(\mathcal{K}, \mathbb{C}^3) \mid \mathbf{Div}(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}) \in L^2(\mathcal{K}, \mathbb{C}) \}, \quad H(\mathbf{curl} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) := \{ \mathbf{u} \in L^2(\mathcal{K}, \mathbb{C}^3) \mid \mathbf{curl} \mathbf{u} \in L^2(\mathcal{K}, \mathbb{C}^3) \},$$

ainsi que leur intersection :

$$H(\mathbf{Div} \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{curl} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) := H(\mathbf{Div} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) \cap H(\mathbf{curl} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}).$$

Introduisons aussi des espaces liés aux champs  $\boldsymbol{\Lambda}$ -solénoïdaux

$$H_{n,0}(\mathbf{Div} \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{curl} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) := \{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{curl} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) \mid \mathbf{Div}(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}) = 0 \text{ et } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{K}} = 0 \}$$

$$H_{\tau,0}(\mathbf{Div} \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{curl} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) := \{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{curl} \boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) \mid \mathbf{Div}(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}) = 0 \text{ et } \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{K}} = 0 \}.$$

**Théorème 2.2.2.** *Si  $\boldsymbol{\Lambda}$  vérifie l'hypothèse 2.1.1 des poids complexes, alors les champs 3D peuvent être décomposés en potentiels :*

$$\begin{aligned} L^2(S, \mathbb{C}^3) &= \mathbf{grad} H_0^1(\mathcal{K}) \oplus \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{curl} \left( H_{n,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K}) / \mathbb{C} \right) \\ L^2(S, \mathbb{C}^3) &= \mathbf{grad} H^1(\mathcal{K}) \oplus \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{curl} H_{\tau,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \oplus \mathcal{H}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec l'espace harmonique à poids  $\mathcal{H}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K})$  défini en (2.6) et son orthogonal

$$\mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K}) := \left\{ u \in L^2(\mathcal{K}) \mid \forall h \in \mathcal{H}(1, \mathcal{K}), \int_{\mathcal{K}} u \cdot h = 0 \right\}.$$

Ces décompositions sont orthogonales selon la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_{\boldsymbol{\Lambda}, \mathcal{K}}$  définie en (2.5).

6. Attention, rappelons que comme le poids  $\boldsymbol{\Lambda}$  n'est pas nécessairement hermitien, il ne s'agit pas obligatoirement des espaces de Hilbert.

### 2.2.3 Existence de solutions aux problèmes Div-curl

**Théorème 2.2.3.** Soient  $\varepsilon$  et  $\mu$  vérifiant l'hypothèse 2.1.1 des poids complexes, des champs solénoïdaux

$$\mathbf{B} \in L^2(S, \mathbb{C}^3) \text{ et } \mathbf{D} \in H^{-1}(S, \mathbb{C}^3) \text{ tels que } \mathbf{Div} \mathbf{B} = \mathbf{Div} \mathbf{D} = 0$$

et des champs

$$\rho_e \in H^{-1}(S, \mathbb{C}), \quad \tau_e \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial S, \mathbb{C}^3) \text{ et } \rho_m \in L^2(S, \mathbb{C}), \quad N_m \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial S, \mathbb{C}).$$

Il existe une solution dans  $L^2(S, \mathbb{C}^3)$  aux problèmes Div-curl :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div} (\varepsilon E) = \rho_e, \quad \text{dans } \mathcal{K} \\ \mathbf{curl} E = \mathbf{B}, \quad \text{dans } \mathcal{K}, \\ E \times n = \tau_e, \quad \text{sur } \partial \mathcal{K}, \end{array} \right. \quad (e) \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div} (\mu H) = \rho_m, \quad \text{dans } \mathcal{K} \\ \mathbf{curl} H = \mathbf{D}, \quad \text{dans } \mathcal{K}, \\ \mu H \cdot n = N_m, \quad \text{sur } \partial \mathcal{K}. \end{array} \right. \quad (h) \quad (2.10)$$

si les données satisfont les conditions de compatibilité suivantes pour  $E$

$$\int_S \mathbf{B} = \langle \tau_e, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{K}), H^{\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{K})} \quad (2.11)$$

et pour  $H$  :

$$\int_S \rho_m = \langle N_m, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S), H^{\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{K})} \quad (2.12)$$

La solution de (2.10-e) est unique mais ce n'est le cas pour (2.10-h) que si le domaine est simplement connexe. En effet, il nous faut  $Q \times L$  déterminations supplémentaires pour le problème (2.10-h) et celles-ci peuvent être

$$\int_{\mathcal{K}} \mu H \cdot \mathbf{grad} \Psi^{q,l}(\mu, \mathcal{K}).$$

### 2.2.4 Démonstrations des divers résultats de la section

Tout est plus simple qu'on ne peut l'imaginer et en même temps plus enchevêtré qu'on ne saurait le concevoir.

Goethe

Les démonstrations de tous les résultats présentés dans cette section, à savoir les théorèmes 2.2.2 et 2.2.3 sont faites d'un même jet. Soient des champs

$$E, H \in L^2(\mathcal{K}, \mathbb{C}^3),$$

nous allons montrer qu'ils peuvent s'écrire sous la forme de somme de gradients et de rotationnels pour démontrer le théorème 2.2.2, puis sous quelles conditions ils sont solutions des problèmes (2.10).

#### Introduction des potentiels

Considérons, afin de décomposer  $E$ , les potentiels

$$\xi_e \in H_0^1(\mathcal{K}) \quad \text{et} \quad \zeta_e \in H_{n,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K})/\mathbb{C}$$

solutions des problèmes variationnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \xi \in H_0^1(\mathcal{K}), \\ \int_{\mathcal{K}} (\Lambda \mathbf{grad} \xi_e) \cdot \mathbf{grad} \xi = \int_{\mathcal{K}} (\Lambda E) \cdot \mathbf{grad} \xi, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \zeta \in H_{n,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K})/\mathbb{C}, \\ \int_S (\Lambda \mathbf{curl} \zeta_e) \cdot \mathbf{curl} \zeta = \int_S (\Lambda u_e) \cdot \mathbf{curl} \zeta. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Considérons de même, afin de décomposer  $H$ , les potentiels

$$\xi_m \in H^1(\mathcal{K})/\mathbb{C} \quad \text{et} \quad \zeta_m \in H_{\tau,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K})$$

solutions des problèmes variationnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \xi \in H^1(\mathcal{K})/\mathbb{C} \\ \int_{\mathcal{K}} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{grad} \xi_m) \cdot \mathbf{grad} \xi = \int_S (\mathbf{\Lambda} u_m) \cdot \nabla \xi \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \zeta \in H_{\tau,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \\ \int_{\mathcal{K}} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{curl} \zeta_m) \cdot \mathbf{curl} \zeta = \int_{\mathcal{K}} (\mathbf{\Lambda} u_m) \cdot \mathbf{curl} \zeta. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

L'existence et l'unicité de solutions aux problèmes associés à  $\xi_e$  et  $\xi_m$  sont d'évidentes conséquences du théorème de Lax-Milgram<sup>7</sup>. Pour s'assurer de propriétés similaires pour les potentiels  $\zeta_e$  et  $\zeta_m$ , nous avons besoin d'une description un poil plus précise des espaces

$$H_{\tau,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \quad \text{et} \quad H_{n,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K})/\mathbb{C}.$$

**Proposition 2.2.1.** *La forme bilinéaire*

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{curl} \zeta \cdot \mathbf{curl} \tilde{\zeta} \quad \text{pour} \quad \zeta, \tilde{\zeta} \in H(\mathbf{curl}, \mathcal{K})$$

*est un produit scalaire des espaces*

$$H_{\tau,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \quad \text{et} \quad H_{n,0}(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K})/\mathbb{C}$$

*dont la norme est équivalente à celle de  $H^1(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K})$ , à savoir :*

$$\forall \zeta \in H^1(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}), \quad \|\zeta\|_{H^1(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K})} = \sqrt{\int_{\mathcal{K}} |\zeta|^2} + \sqrt{\int_{\mathcal{K}} |\mathbf{curl} \zeta|^2} + \sqrt{\int_{\mathcal{K}} |\mathbf{Div} \zeta|^2}.$$

Il est, avec cette proposition 2.2.1, évident de prouver que les formes bilinéaires associées aux potentiels  $\zeta_e$  et  $\zeta_m$  sont coercives. Si un sens de cette proposition 2.2.1 est triviale, à savoir

$$\forall \zeta \in H^1(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}), \quad \int_{\mathcal{K}} \mathbf{curl} \zeta \cdot \mathbf{curl} \zeta \leq \|\zeta\|_{H^1(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K})}^2,$$

l'autre nécessite des inégalités de Poincaré-Friedrichs du même type que celles des théorèmes 1.5.1 et 1.5.2 adaptées au cas 3D.

## Deux inégalités de Poincaré-Friedrichs 3D obtenues avec un raisonnement par l'absurde

La poésie domine l'absurde

René Char

**Proposition 2.2.2.** *Soient  $\varepsilon$  et  $\mu$  des poids scalaires réels strictement positifs. Si les champs 3D  $E$  et  $H$  vérifient*

$$E \in H_{\tau}(\mathbf{Div} \varepsilon, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \quad \text{et} \quad H \in H_n(\mathbf{Div} \mu, \mathbf{curl}, \mathcal{K})$$

*alors il existe des constantes  $K(\varepsilon, \mathcal{K})$  et  $K(\mu, \mathcal{K})$  qui dépendent de la géométrie de  $\mathcal{K}$  et des poids  $\varepsilon$  et  $\mu$  et telles que :*

$$\|E\|_{L^2(\mathcal{K})} \leq K(\varepsilon, \mathcal{K}) \left( \|\mathbf{curl} E\|_{L^2(\mathcal{K})} + \|\mathbf{Div} (\varepsilon E)\|_{L^2(\mathcal{K})} \right) \quad (2.15)$$

*et*

$$\|H\|_{L^2(\mathcal{K})} \leq K(\mu, \mathcal{K}) \left( \|\mathbf{curl} H\|_{L^2(\mathcal{K})} + \|\mathbf{Div} (\mu H)\|_{L^2(\mathcal{K})} + |(\mathbf{Cut}(\mu, \mathcal{K}) \mathbf{I}, \mathbf{I})_{\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^L}| \right) \quad (2.16)$$

*avec le tenseur de Gram  $\mathbf{Cut}(\mu, \mathcal{K})$  défini en (2.8) et les "courants" :*

$$I_{q,l} := \sum_{q',l'}^{Q,L} (\mathbf{Cut}(\mu, \mathcal{K})^{-1})_{q,q'}^{l,l'} \int_{\mathcal{K}} (\mu H) \cdot \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi^{q',l'}(\mathbf{\Lambda}, \mathcal{K})$$

7. Le fait que  $\mathbf{\Lambda}$  vérifie l'hypothèse 2.1.1 assure que la forme bilinéaire

$$\forall u, v \in H^1(\mathcal{K}), \quad \int_{\mathcal{K}} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{grad} u) \cdot \mathbf{grad} v$$

est continue et coercive aussi bien sur  $H_0^1(\mathcal{K})$  que sur  $H^1(\mathcal{K})/\mathbb{C}$  (pensez aux inégalités de Poincaré (1.36) et Poincaré-Wirtinger (1.37)).

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que le résultat est faux. Nous pouvons alors définir une suite  $(E_n)_n$  telle que :

$$\|\mathbf{curl} E_n\|_{L^2(\mathcal{K})} + \|\mathbf{Div} (\varepsilon E_n)\|_{L^2(\mathcal{K})} \leq \frac{1}{n}$$

et

$$\|E_n\|_{L^2(\mathcal{K})} = 1, \quad E_n \times n = 0,$$

ainsi qu'une suite  $(H_n)_n$  telle que

$$\|\mathbf{curl} H_n\|_{L^2(\mathcal{K})} + \|\mathbf{Div} (\mu H_n)\|_{L^2(\mathcal{K})} + |(\mathbf{Cut}(\mu, \mathcal{K}) \mathbf{I}^n, \mathbf{I}^n)_{\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^L}| \leq \frac{1}{n}$$

et

$$\|H_n\|_{L^2(\mathcal{K})} = 1, \quad H_n \cdot n = 0,$$

avec  $\mathbf{I}^n$  défini de la même manière que  $\mathbf{I}$  mais  $H_n$ .

Comme les injections

$$H_\tau(\mathbf{Div} \varepsilon, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \rightarrow L^2(\mathcal{K}) \quad \text{et} \quad H_n(\mathbf{Div} \mu, \mathbf{curl}, \mathcal{K}) \rightarrow L^2(\mathcal{K})$$

sont **compactes** (voir corollaire 3.49 de [54]), nous savons qu'il existe des fonctions  $E_\infty$  et  $H_\infty$  telles que

$$E_n \xrightarrow{L^2} E_\infty \quad \text{et} \quad H_n \xrightarrow{L^2} H_\infty$$

et qui par conséquent vérifient

$$E_\infty \in \mathcal{E}(\varepsilon, \mathcal{K}), \quad \|E_\infty\|_{L^2(\mathcal{K})} = 1$$

et

$$H_\infty \in \mathcal{H}(\mu, \mathcal{K}), \quad |(\mathbf{Cut}(\mu, \mathcal{K}) \mathbf{I}^\infty, \mathbf{I}^\infty)_{\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^L}| = 0, \quad \|H_\infty\|_{L^2(\mathcal{K})} = 1$$

ce qui est absurde car si  $E_\infty \in \mathcal{E}(\varepsilon, \mathcal{K}) = \{\emptyset\}$  alors  $E_\infty = 0$  et cela rentre en contradiction avec  $\|E_\infty\|_{L^2(\mathcal{K})} = 1$ . Raisonement identique avec  $H_\infty$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant aisément prouver la proposition 2.2.1 :

*Démonstration.* Si  $\zeta_e \in H_{n,0}^1(\mathbf{Div}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K})$  alors

$$\mathbf{Div} \zeta_e = 0 \text{ dans } \mathcal{K}, \quad \zeta_e \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{K} \text{ et } \int_{\mathcal{K}} \zeta_e \cdot \mathbf{grad} \Psi_{q,l}(\mathbf{A}, \mathcal{K}) = 0,$$

ainsi, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrich (2.16) :

$$\int_{\mathcal{K}} |\mathbf{curl} \zeta_e|^2 \geq K \int_{\mathcal{K}} |\zeta_e|^2.$$

De même si  $\zeta_m \in H_{\tau,0}^1(\mathbf{Div}, \mathcal{K})$  alors avec (2.15)

$$\int_{\mathcal{K}} |\mathbf{curl} \zeta_m|^2 \geq K \int_{\mathcal{K}} |\zeta_m|^2.$$

$\square$

### Décompositions de Helmholtz 3D

Il suffit de remarquer que

$$e := E - (\mathbf{grad} \xi_e + \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_e) \in \mathcal{E}(\varepsilon, S) \quad \text{et} \quad h := H - (\mathbf{grad} \xi_m + \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_m) \in \mathcal{H}(\varepsilon, S)$$

pour établir les décompositions en potentiels souhaitées. Les relations d'orthogonalité s'obtiennent par les formules de Green 3D comme dans le cas 2D (voir la démonstration du théorème 1.2.1).

**Existence (et unicité?) de solutions aux problèmes de type Div-curl**

Supposons maintenant que de plus nous avons les champs 3D

$$\mathbf{B} := \mathbf{curl} E \in L^2(S, \mathbb{C}^3) \text{ et } \mathbf{D} := \mathbf{curl} H \in H^{-1}(S, \mathbb{C}^3) \text{ qui sont bien tels que } \mathbf{Div} \mathbf{B} = \mathbf{Div} \mathbf{D} = 0$$

et les champs scalaires

$$\rho_e := \mathbf{div}(\varepsilon E) \in H^{-1}(S, \mathbb{C}) \text{ et } \rho_m := \mathbf{div}(\mu H) \in L^2(S, \mathbb{C}),$$

ainsi que les traces aux bords qui sont correctement définies :

$$\boldsymbol{\tau}_e := E \times \mathbf{n} \Big|_{\partial S} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial S, \mathbb{C}^3) \text{ et } N_m := N \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial S} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial S, \mathbb{C}).$$

Les conditions de compatibilité (2.11) et (2.12) sont vérifiées.

Les problèmes pour lesquels les potentiels  $\xi_e \in H^1(\mathcal{K})$  et  $\zeta_e \in H^1(\mathbf{Div}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K})/\mathbb{C}$  sont solutions peuvent être réécrit avec la formulation forte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div}(\varepsilon \mathbf{grad} \xi_e) = \rho_e, \quad \text{dans } \mathcal{K} \\ \xi_e = 0, \quad \text{sur } \partial \mathcal{K} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{curl}(\varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_e) = \mathbf{B}, \quad \text{dans } \mathcal{K}, \\ \mathbf{Div} \zeta_e = 0 \text{ dans } \mathcal{K} \quad \zeta_e \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{K} \\ (\varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_e) \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_e, \quad \text{sur } \partial \mathcal{K}, \end{array} \right.$$

et de même pour les problèmes dont  $\xi_m \in H^1(\mathcal{K})/\mathbb{C}$  et  $\zeta_m \in H_{\tau,0}(\mathbf{Div}, \mathcal{K})$  sont solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\mu \mathbf{grad} \xi_m) = \rho_m, \quad \text{dans } \mathcal{K} \\ \mu \mathbf{grad} \xi_m \cdot \mathbf{n} = N_m, \quad \text{sur } \partial \mathcal{K} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \zeta_m) = \mathbf{D}, \quad \text{dans } \mathcal{K}, \\ \mathbf{Div} \zeta_m = 0 \text{ dans } \mathcal{K} \\ \zeta_m \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial S, \end{array} \right.$$

de manière à ce que

$$\mathbf{grad} \xi_e + \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_e \text{ et } \mathbf{grad} \xi_m + \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_m$$

sont respectivement des solutions particulières aux problèmes (2.10-e) et (2.10-h). De plus comme toutes les solutions E de (2.10-e) et H de (2.10-h) vérifient

$$E - (\mathbf{grad} \xi_e + \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_e) \in \mathcal{E}(\varepsilon, S) \text{ et } H - (\mathbf{grad} \xi_m + \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_m) \in \mathcal{H}(\varepsilon, S),$$

nous pouvons en donner la structure générale :

$$E = \mathbf{grad} \xi_e + \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_e \text{ et } H = \sum_{q,l=1}^{Q,L} I_{q,l} \mathbf{grad} \Psi^{q,l}(\Lambda, \mathcal{K}) + \mathbf{grad} \xi_m + \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \zeta_m$$

avec les "courants" :

$$I_{q,l} := \sum_{q',l'}^{Q,L} (\mathbf{Cut}(\mu, \mathcal{K})^{-1})_{q,q'}^{l,l'} \int_{\mathcal{K}} (\mu H) \cdot \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi^{q',l'}(\Lambda, \mathcal{K})$$

qui sont les indéterminées du problème (2.10-h).

**2.3 Présentation des problèmes Div-curl posés sur des domaines non bornés**

Nous allons considérer dans les sections prochaines les problèmes Div-curl suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl} E = B & x \in J \\ \mathbf{Div}(\varepsilon E) = 0, & x \in J \\ E \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & x \in \partial J \setminus \partial_{\text{HD}} \mathcal{K}, \\ E \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_{e,HD} & x \in \partial_{\text{HD}} \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (e) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl} H = D & x \in J \\ \mathbf{Div}(\mu H) = 0, & x \in J \\ H \cdot \mathbf{n} = 0 & x \in \partial J \setminus \partial_{\text{HD}} \mathcal{K}, \\ H \cdot \mathbf{n} = N_{m,HD} & x \in \partial_{\text{HD}} \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (h) \quad (2.17)$$

où les poids  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont des matrices  $3 \times 3$  vérifiant l'hypothèse 2.1.1 des poids complexes ainsi que l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.3.1.** Les poids  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont, dans les cylindres semi-infinis  $\mathfrak{D}_l$ , isotropes et invariants dans la direction longitudinale :

$$\varepsilon(\mathbf{x})|_{\mathfrak{D}_l} = \varepsilon(x_T^l) Id_3 \quad \text{et} \quad \mu(\mathbf{x})|_{\mathfrak{D}_l} = \mu(x_T^l) Id_3 \quad \text{pour} \quad \mathbf{x} = (x_T^l, x_3^l) \in \mathfrak{D}_l,$$

avec

$$\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mu : S \rightarrow \mathbb{R}.$$

Le domaine non borné  $J$  est tel que décrit dans la section 2.1.1 et  $\partial_{\text{HD}}\mathcal{K}$  correspond à une portion du bord de  $\mathcal{K}$  :

$$\partial_{\text{HD}}\mathcal{K} \subset \partial\mathcal{K} \setminus \left( \bigcup_{l=0}^L S_l \right).$$

Dans un domaine non borné, nous nous intéresserons aux fonctions qui vivent dans un espace qui répudie les exponentiels qui croissent trop rapidement, car dans le cadre dans lequel nous nous placerons lors de l'étude de jonction entre câbles coaxiaux, les exponentiels croissants ne correspondront pas à des solutions physiques. Ainsi notons

$$L_w^2(J) := \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(J) \mid \int_{\mathfrak{D}_l} e^{-\sqrt{x_3^l}} |u|^2 < \infty \right\} \quad (2.18)$$

l'espace à poids associé au bannissement des fonctions qui croissent trop rapidement et associons lui le produit scalaire :

$$(u, v)_{L_w^2(J)} := \int_{\mathcal{K}} u \bar{v} + \int_{\mathfrak{D}_l} e^{-\sqrt{x_3^l}} u \bar{v},$$

de façon qu'il soit un espace de Hilbert. Définissons de la même manière l'espace à poids :

$$H_w^1(J) := \left\{ u \in H_{\text{loc}}^1(J) \mid \int_{\mathfrak{D}_l} e^{-\sqrt{x_3^l}} (|u|^2 + |\mathbf{grad} u|^2) < \infty \right\} \quad (2.19)$$

muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H_w^1(J)} = (u, v)_{L_w^2(J)} + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} \bar{v} + \int_{\mathfrak{D}_l} e^{-\sqrt{x_3^l}} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} \bar{v}.$$

Le poids exponentiellement décroissant est présent seulement pour proscrire certains exponentiels croissants, en pratique nous n'utiliserons pas les produits scalaires précédemment introduits.

Les sources des problèmes (2.17-e) et (2.17-h) seront supposées assez régulières

$$B, D \in L_w^2(S, \mathbb{C}^3) \quad , \quad N_{m,HD} \in L^2(\partial J, \mathbb{C}) \quad , \quad \boldsymbol{\tau}_{e,HD} \in L^2(\partial J, \mathbb{C}^3)$$

et satisferont :

$$\mathbf{Div} B = \mathbf{Div} D = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial_{\text{HD}}\mathcal{K}} N_{m,HD} = 0. \quad (2.20)$$

Comme le domaine est non borné, nous allons chercher à réduire nos problèmes (2.17-e) et (2.17-h) sur un domaine de calcul borné du type :

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{K} \bigcup_{l=1}^L S_l \times [0_l, \sigma_l] \mathbf{e}_3^l, \quad (2.21)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_l)_{0 \leq l \leq L} \quad \text{où} \quad \sigma_l \geq 0,$$

et  $[0_l, \sigma_l] \mathbf{e}_3^l$  les segments partant de  $O_l$  et s'arrêtant à une distance  $\sigma_l$  selon la direction  $\mathbf{e}_3^l$ .  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})$  est une suite exhaustive de compacts qui converge vers  $J$  quand  $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \infty$ . Pour assurer l'existence de solutions aux problèmes (2.17), nous devons au préalable établir les conditions de compatibilité.

**Proposition 2.3.1.** Les conditions de compatibilité que doivent vérifier les solutions  $E$  et  $H$  de (2.17-e) et respectivement (2.17-h) sont :

$$\int_{\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})} B \cdot \bar{C} + \int_{\partial_{\text{HD}}J} \boldsymbol{\tau}_{e,HD} \cdot (\mathbf{n} \times \bar{C} \times \mathbf{n}) = - \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} E \times \mathbf{e}_3^l \cdot (\mathbf{e}_3^l \times \bar{C} \times \mathbf{e}_3^l)$$

pour tout champ  $C \in L^2(\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma}))$  tel que  $\mathbf{curl} C = 0$  et

$$\sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} H \cdot \mathbf{e}_3^l = 0.$$

*Démonstration.* Nous avons avec (2.17-(e)) :

$$\int_{\mathcal{K}(\sigma)(\sigma)} B \cdot \bar{C} \stackrel{(2.17(e))}{=} \int_{\mathcal{K}(\sigma)(\sigma)} \mathbf{curl} E \cdot \bar{C} \quad (2.22)$$

$$\stackrel{(10.22)}{=} \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} E \times \mathbf{e}_3^l \cdot (\mathbf{e}_3^l \times \bar{C} \times \mathbf{e}_3^l) \quad (2.23)$$

$$- \int_{\partial_{HD}J} \boldsymbol{\tau}_{e,HD} \cdot (\mathbf{n} \times \bar{C} \times \mathbf{n}) \text{ avec les conditions aux bords de } E \quad (2.24)$$

Remarquons que comme  $\mathbf{curl} C = 0$ , la trace tangentielle  $(\mathbf{n} \times \bar{C} \times \mathbf{n})$  est bien définie (théorème 3.31 de [54]).

Nous avons avec l'équation (2.17-(h)) :

$$0 = \int_{\mathcal{K}(\sigma)(\sigma)} \mathbf{Div} (\boldsymbol{\mu} H) = \int_{\partial_{HD}\mathcal{K}} N_{m,HD} + \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} H \cdot \mathbf{e}_3^l.$$

□

Dans le cas d'un domaine borné, nous avons existence de solutions mais pas forcément unicité. La non unicité est reliée, pour le problème avec conditions aux bords de type tangentielle, au nombre de cavités, ici 0, et au produit du nombre d'anses et de leur ordre pour le problème avec conditions aux bords de type normale. Nous ne retrouverons pas tout à fait le même résultat dans le cas non borné.

## 2.4 Espaces harmoniques dans un domaine non borné

Une ondulation majestueuse et lente  
S'éveille, et va mourir à l'horizon poudreux.

Leconte de Lisle, Midi

Quand le domaine d'étude n'est pas borné les espaces harmoniques deviennent :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varepsilon, J) &:= \{E \in L_w^2(J); \mathbf{curl} E = 0, \mathbf{Div} (\varepsilon E) = 0, \text{ and } E \times n|_J = \mathbf{0}\} \\ \mathcal{H}(\boldsymbol{\mu}, J) &:= \{H \in L_w^2(J); \mathbf{curl} E = 0, \mathbf{Div} (\boldsymbol{\mu} H) = 0, \text{ and } H \cdot n|_J = \mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Deux méthodes s'ouvrent à nous : la première consiste à généraliser le lemme 2.2.1 de Hodge-Weyl au cas non borné pour écrire les champs irrotationnels sous la forme d'un gradient, la seconde consiste à se ramener à un domaine borné pour exploiter les décompositions de Helmholtz qui nous sont connues. Commençons par la première méthode, nous utiliserons la seconde pour les problèmes Div-curl avec sources.

**Lemme 2.4.1.** *Donnons nous  $u \in L_{loc}^2(J)$  tel que  $\mathbf{curl} u = 0$  dans  $J$ . Alors il existe<sup>8</sup>  $\Phi \in H_{loc}^1(J)_\mathbb{C}$  tel que*

$$u = \mathbf{grad} \Phi \text{ et } q = 1 \dots Q, l = 1 \dots L \text{ nous avons } [\mathbf{grad} \Phi \times \mathbf{n}_{q,l}]_{\Gamma_{q,l}} = 0,$$

avec  $\Gamma_{q,l}$  des coupures qui permettent de rendre  $J$  simplement connexe. Ce potentiel ne saute pas

$$\Phi \in H_{loc}^1(\mathcal{J})_{\mathbb{C}},$$

si l'une au moins de ces trois conditions est vérifiée :

(i) le domaine  $J$  est simplement connexe (c'est à dire que tout compact inclus dans  $J$  est simplement connexe ou dans le cadre de notre géométrie  $Q = 0$ ),

(ii)  $u \times n|_{\partial_0 J} = 0$ ,

(iii) pour tout  $q = 1 \dots Q$  nous avons  $u \times n|_{\partial_q J} = 0$ .

<sup>8</sup> Rappelons que selon (2.4),  $J_\Gamma$  est le domaine  $J$  privé de ses coupures qui permettent de le rendre simplement connexe.



*Démonstration.* Donnons nous  $\mathcal{K}_n \subset J$  une suite croissante de domaines ouverts bornés. Nous savons d'après le lemme 2.2.1 de Hodge-Weyl que :

$$\forall n, u|_{\mathcal{K}_n} = \mathbf{grad} \Phi_n \quad \text{avec} \quad \int_{\mathcal{K}_0} \Phi_n = 0.$$

Pour tout  $m \leq n$  nous avons :

$$0 = u|_{\mathcal{K}_n} - u|_{\mathcal{K}_m} = \mathbf{grad} \left( \Phi|_{\mathcal{K}_n} - \Phi|_{\mathcal{K}_m} \right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}_m$$

de plus comme  $\int_{\mathcal{K}_0} (\Phi_n - \Phi_m) = 0$ , nous avons :

$$\Phi_n = \Phi_m \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}_m.$$

Posons  $\Phi : J \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n : \Phi|_{\mathcal{K}_n} = \Phi_n$ . Ainsi nous avons montré que pour tout  $n$  :

$$u = \mathbf{grad} \Phi \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}_n.$$

Nous avons montré que pour tout  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{K}_n)$  :

$$\langle u|_{\mathcal{K}_n}; v \rangle = - \langle \Phi; \mathbf{Div} v \rangle$$

Or pour tout  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$ , nous avons pour  $n$  assez grand  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{K}_n)$ , donc

$$\langle u|_{\mathcal{K}}; v \rangle = - \langle \Phi; \mathbf{Div} v \rangle$$

La suite se démontre de la même façon que dans le lemme 2.2.1 de Hodge-Weyl.  $\square$

Nous pouvons grâce à ce lemme, avec une démarche qui nous est maintenant familière, décrire les espaces harmoniques :

**Théorème 2.4.1.** *Les espaces harmoniques pour un domaine non borné sont engendrés par les bases suivantes :*

$$\mathcal{E}(\varepsilon, J) = \text{span} \{ \mathbf{grad} \Phi_e^q \}_{1 \leq q \leq Q} \quad \text{and} \quad \mathcal{H}(\mu, J) = \text{span} \{ \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} \}_{1 \leq q \leq Q, 1 \leq l \leq L}$$

Avec les  $Q$  potentiels harmoniques et  $Q \times L$  potentiels harmoniques conjugués<sup>9</sup> :

$$\Phi_e^q \in H_w^1(J) \quad \text{et} \quad \Psi_m^{q,l} \in H_w^1(J \setminus \Gamma_{q,l}) / \mathbb{C}$$

solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\varepsilon \mathbf{grad} \Phi_e^q) = 0, \quad \text{dans } J \\ \Phi_e^q = \delta_q^{q'} \quad \text{on } \partial_{q'} J \quad (q' = 0 \dots Q) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\mu \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}) = 0, \quad \text{dans } J \setminus \Gamma_{q,l} \\ \mu \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial J, \\ [\Psi_m^{q,l}]_{\Gamma_{q,l}} = 1 \quad \text{sur } \Gamma_{q,l}, \\ [\mu \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma_{q,l}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{q,l}, \end{array} \right. \quad (2.26)$$

*Démonstration.* En utilisant le lemme 2.4.1 en sachant que  $E \times n = 0$ , nous avons l'écriture en potentiel :

$$E = \mathbf{grad} \Phi \quad \text{avec le potentiel} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\varepsilon \mathbf{grad} \Phi) = 0, \quad \text{in } J \\ \Phi = \Phi_q^{q'} \quad \text{on } \partial_{q'} J \quad (0 \leq q' \leq Q) \end{array} \right.$$

Par l'existence et l'unicité de la solution au problème (cela sera démontré<sup>10</sup> dans le lemme 2.4.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\varepsilon \mathbf{grad} \Phi_e^q) = 0, \quad \text{in } J \\ \Phi_e^q = \delta_q^{q'} \quad \text{on } \partial_{q'} J \quad (0 \leq q' \leq Q) \end{array} \right.$$

9. L'espace à poids  $H_w^1(J)$  est définie en (2.18).

10. Nous pouvons aussi démontrer l'existence et unicité dans un espace à poids moins grand que  $H_w^1$ , à savoir

$$\left\{ u \in H_{\text{loc}}^1(J) \mid \forall l = 0 \dots L, \int_{\Omega_l} \frac{|u(x_T, x_3^l)|^2}{1 + (x_3^l)^2} dx_T dx_3^l \right\}$$

en utilisant des inégalités de type Hardy au lieu des usuelles inégalités de type Poincaré.

nous avons

$$u = \sum_q^Q U_q \mathbf{grad} \Phi_e^q. \quad (2.27)$$

La suite de la démonstration se fait de manière analogue.  $\square$

Pour s'assurer que les problèmes issus de (2.26) sont effectivement bien posés et donner un moyen de calculer les solutions, nous allons en donner des équivalents mais cette fois posés sur le domaine borné  $\mathcal{K}$ . Pour cela nous devons introduire quelques potentiels associés aux sections finales  $S_l$ . Commençons déjà par les potentiels harmoniques pour  $q = 1 \dots Q$  et  $l = 0 \dots L$  :

$$\varphi_e^{q,l} \in H^1(S_l) \quad \text{et} \quad \psi_m^{q,l} \in H^1(S_l)_{/\mathbb{C}}$$

qui sont les uniques solutions des problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\varepsilon \nabla \varphi_e^{q,l}) = 0, & \text{dans } S_l, \\ \varphi_e^{q,l} = 0, & \text{sur } \partial_0 S_l, \\ \varphi_e^{q,l} = \delta_{qk}, & \text{sur } \partial_k S_l, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\mu \nabla \psi_m^{q,l}) = 0, & \text{dans } S_l \setminus \partial_l \Gamma_q, \\ \partial_n \psi_m^{q,l} = 0, & \text{sur } \partial S_l, \\ [\psi_m^{q,l}]_{\partial_l \Gamma} = 1, \quad [\mu \partial_n \psi_m^{q,l}]_{\partial_l \Gamma} = 0 & \text{sur } \partial_l \Gamma_q. \end{array} \right.$$

dont nous avons fait une étude exhaustive dans la section 1.3. Introduisons ensuite les solutions

$$\varphi_n^{l,e} \in H_0^1(S_l) \quad \text{et} \quad \psi_n^l \in H^1(S_l)$$

aux problèmes aux valeurs propres

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\varepsilon^{-1} \mathbf{div}(\varepsilon \nabla \varphi_n^{l,e}) = \lambda_n^{l,e} \varphi_n^{l,e}, & \text{dans } S_l, \\ \varphi_n^{l,e} = 0 & \text{sur } \partial S_l, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\mu^{-1} \mathbf{div}(\mu \nabla \psi_n^{l,m}) = k_n^{l,m} \psi_n^{l,m}, & \text{dans } S_l, \\ \partial_n \psi_n^{l,m} = 0 & \text{sur } \partial S_l, \\ \int_{S_l} \mu \nabla \psi_n^{l,m} = 0. & \end{array} \right. \quad (2.28)$$

**Lemme 2.4.2.** *Les familles de potentiels  $(\varphi_n^{l,e})_{n=1,\infty}$  et  $(\psi_n^{l,m})_{n=1,\infty}$  forment des bases de  $L^2(S_l)$ . Les familles*

$$\left( \frac{\varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \right)_{n=1,\infty} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \right)_{n=1,\infty}$$

*forment respectivement des bases de  $H_0^1(S_l)$  et de  $H^1(S_l)$ . De plus ces familles vérifient les conditions d'orthogonalité :*

$$\delta_n^k = \int_{S_l} \varepsilon \varphi_n^{l,e} \varphi_k^{l,e} = \frac{\int_{S_l} \varepsilon \nabla \varphi_n^{l,e} \cdot \nabla \varphi_k^{l,e}}{\lambda_n^{l,e}} \quad \text{et} \quad \delta_n^k = \int_{S_l} \mu \psi_n^l \psi_k^{l,m} = \frac{\int_{S_l} \mu \nabla \psi_n^l \cdot \nabla \psi_k^{l,m}}{k_n^{l,m}}.$$

*Démonstration.* Considérons l'espace  $L^2(S_l, \varepsilon dx)$  des fonctions dans  $L^2(S_l)$  muni du produit scalaire

$$(\varphi, u)_\varepsilon = \int_{S_l} \varepsilon \varphi u, \quad \text{pour tout } \varphi, u \in L^2(S_l, \varepsilon dx)$$

ainsi que le problème aux valeurs propres

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \varphi_n^{l,e} \in H_0^1(S_l) \setminus \{0\} \text{ et } \lambda_n^{l,e} \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } u \in H_0^1(S_l), \\ \int_{S_l} \varepsilon \nabla \varphi_n^{l,e} \cdot \nabla u = \lambda_n^{l,e} (\varphi_n^{l,e}, u)_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Ce dernier est la formulation faible de la première équation de (8.16). Comme la forme bilinéaire

$$\int_{S_l} \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla u, \quad \text{pour tout } \varphi, u \in L^2(S_l, \varepsilon dx)$$

est un produit scalaire sur  $H_0^1(S_l)$  et que l'injection  $H_0^1(S_l) \rightarrow L^2(S_l, \varepsilon dx)$  est compacte, il existe une suite croissante de valeurs propres  $(\lambda_n^{l,e})_{n=1,\infty}$  non nulles et une famille de vecteurs propres  $(\varphi_n^{l,e})_{n=1,\infty}$  formant une base hilbertienne de  $L^2(S_l, \varepsilon dx)$  qui sont solutions de (2.29). De plus

$$\left( \frac{\varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \right)_{n=1,\infty} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \right)_{n=1,\infty}$$

est une base de  $H_0^1(S_l)$  et les conditions d'orthogonalité évoquées dans l'énoncé du lemme sont vérifiées. Le raisonnement pour la famille  $(\psi_n^{l,m})_{n=1,\infty}$  est identique.  $\square$

Nous avons admis dans le lemme l'existence et l'unicité des potentiels solutions des deux équations issues de (2.26). Nous allons démontrer cette existence en écrivant des équations équivalentes à celles de (2.26) mais posées sur le domaine borné  $\mathcal{K}$ .

**Lemme 2.4.3.** *les problèmes de (2.26) peuvent être restreints sur la géométrie bornée  $\mathcal{K}$ . Plus précisément les solutions*

$$\Phi_e^q \in H_w^1(J) \quad \text{et} \quad \Psi_m^{q,l} \in H_w^1(J \setminus \Gamma_{q,l})_{\mathbb{C}}$$

de (2.26) restreintes à  $\mathcal{K}$  vérifient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Div}(\varepsilon \mathbf{grad} \Phi_e^q) = 0, & \text{dans } \mathcal{K} \\ \Phi_e^q = \delta_q^{l'} & \text{sur } \partial_q \mathcal{K} \\ \Phi_e^q + \mathfrak{St}_e^{l'}(\partial_3 \Phi_e^q) = \varphi_e^{q,l}, & \text{sur } S_l \times \{0_l\} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Div}(\mu \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}) = 0, & \text{dans } \mathcal{K} \setminus \Gamma_{q,l} \\ \mu \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial J, \\ [\Psi_m^{q,l}]_{\Gamma_{q,l}} = 1 & \text{sur } \Gamma_{q,l}, \\ [\mu \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma_{q,l}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{q,l}, \\ \Psi_m^{q,l} + \mathfrak{St}_m^{l'}(\partial_3 \Psi_m^{q,l}) = (\delta_1^{l'} - \delta_l^{l'}) \psi_e^{q,l'} & \text{sur } S_l \times \{0_l\}, \end{array} \right. \quad (2.30)$$

avec les opérateurs de Steklov-Poincaré :

$$\mathfrak{St}_e^{l'}(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\int_{S_l \times \{0_l\}} \varepsilon u \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \right) \varphi_n^{l,e} \quad \text{et} \quad \mathfrak{St}_m^{l'}(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\int_{S_l \times \{0_l\}} \mu u \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \right) \psi_n^{l,m}. \quad (2.31)$$

De plus ces mêmes potentiels  $\Phi_e^q$  et  $\Psi_m^{q,l}$  peuvent être décrits sur les cylindres semi-infinis  $\mathfrak{D}_l$  par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_e^q|_{\mathfrak{D}_l}(x_T, x_3) = \varphi_e^{q,l}(x_T) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q,l} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3} \varphi_n^{l,e}(x_T), & (x_T, x_3) \in \mathfrak{D}_l, \\ \Psi_m^{q,l}|_{\mathfrak{D}_l}(x_T, x_3) = (\delta_0^l - \delta_l^{l'}) \psi_e^{q,l}(x_T) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{q,l,l'} e^{-\sqrt{k_n^{l,m}} x_3} \psi_n^{l,m}(x_T), & (x_T, x_3) \in \mathfrak{D}_l, \end{array} \right. \quad (2.32)$$

avec les coefficients complexes :

$$\alpha_n^{q,l} = - \frac{\int_{S_l \times O_l} \varepsilon \partial_3 \Phi_e^q \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} = - \int_{S_l \times O_l} \varepsilon \mathfrak{St}_e^{l'}(\partial_3 \Phi_e^q) \varphi_n^{l,e} \quad (2.33)$$

et

$$\beta_n^{q,l,l'} = - \frac{\int_{S_l \times O_l} \mu \partial_3 \Psi_m^{q,l'} \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} = - \int_{S_l \times O_l} \mu \mathfrak{St}_m^{l'}(\partial_3 \Psi_m^{q,l'}) \psi_n^{l,m}. \quad (2.34)$$

Les problèmes issus de l'équation (2.30), et ainsi ceux de (2.26), sont bien posés.

*Démonstration.* Considérons les problèmes (2.26) sur les cylindres percés semi-infinis  $\mathfrak{D}_l$ . Le comportement (2.32) de  $\Phi_e^q$  et de  $\Psi_m^{q,l}$  dans  $\mathfrak{D}_l$  est la conséquence de la séparation des variables et de la répudiation des solutions exponentiellement croissantes (puisque nous cherchons des solutions dans l'espace à poids  $L_w^2$ ). Explicitons cette

démarche. Introduisons sur  $\mathfrak{D}_l$  les potentiels  $\tilde{\Phi}_e^q = \Phi_e^q - \varphi_e^{q,l}$  et  $\tilde{\Psi}_m^q = \Psi_m^q - (\delta_0^l - \delta_{l'}^l)\psi_m^{q,l}$  pour tout  $q = 1\dots Q$ , qui vérifient

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \tilde{\Phi}_e^q) + \varepsilon \partial_3^2 \tilde{\Phi}_e^q = 0 & \text{dans } \mathfrak{D}_l, \\ \tilde{\Phi}_e^q = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mu \nabla \tilde{\Psi}_m^q) + \varepsilon \partial_3^2 \tilde{\Psi}_m^q = 0 & \text{dans } \mathfrak{D}_l, \\ \partial_n \tilde{\Psi}_m^q = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.35)$$

comme  $(\varphi_n^{l,e})_{n=1,\infty}$  et  $(\psi_n^{l,m})_{n=1,\infty}$  forment des bases de  $L^2(S_l)$ , les séparations des variables s'écrivent

$$\tilde{\Phi}_e^q(x_3, x_T) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{q,l}(x_3) \varphi_n^{l,e}(x_T) \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi}_m^q(x_3, x_T) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{q,l}(x_3) \psi_n^{l,m}(x_T) \quad \text{pour } (x_3, x_T) \in \mathfrak{D}_l. \quad (2.36)$$

En insérant (2.36) dans (2.35), nous avons les équations différentielles ordinaires

$$\partial_3^2 a_n^{q,l} - \lambda_n^{l,e} a_n^{q,l} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_3^2 b_n^{q,l} - k_n^{l,m} b_n^{q,l} = 0,$$

dont les solutions s'écrivent sous la forme

$$a_n^{q,l}(x_3) = \alpha_n^{q,l} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3} \quad \text{et} \quad b_n^{q,l}(x_3) = \beta_n^{q,l} e^{-\sqrt{k_n^{l,m}} x_3},$$

car, comme  $\tilde{\Phi}_e^q, \tilde{\Psi}_m^q \in L_w^2(\mathfrak{D}_l)$ , les solutions sous la forme d'exponentiels croissants sont interdites. Nous retrouvons bien le comportement (2.32).

Pour retrouver (2.33, 2.34), nous intégrons (2.32) respectivement contre  $\varepsilon \varphi_n^{l,e}$  et contre  $\mu \psi_n^{l,m}$  et nous intégrons la dérivée longitudinale  $\partial_3$  de (2.32) respectivement contre  $\varepsilon \varphi_n^{l,e}$  et contre  $\mu \psi_n^{l,m}$ . Nous avons ainsi :

$$\int_{S_l \times O_l} \varepsilon \partial_3 \tilde{\Phi}_e^q \varphi_n^{l,e} + \frac{\int_{S_l \times O_l} \varepsilon \partial_3 \Phi_e^q \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} = \int_{S_l \times O_l} \varepsilon \varphi_e^{q,l} \varphi_n^{l,e} \quad (\text{et de même pour } \Psi_m^{q,l})$$

et nous retrouvons nos opérateurs de Steklov-Poincaré  $\mathfrak{S}_e^l$  et  $\mathfrak{S}_m^l$ .

□

**Remarque 2.4.1.** *Le comportement (2.32) des potentiels harmoniques dans les cylindres semi-infinis impliquent les comportements suivants à l'infini :*

$$\Phi_e^q \underset{x_3 \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_e^{q,l}, \quad \Psi_m^{q,l'} \underset{x_3 \rightarrow \infty}{\sim} (\delta_1^l - \delta_{l'}^l) \psi_m^{q,l} \quad \text{et} \quad \partial_3 \Phi_e^q, \partial_3 \Psi_m^{q,l'} \underset{x_3 \rightarrow \infty}{\sim} 0$$

Les solutions de problèmes Div-curl de type (2.17-e) et (2.17-h) sans sources ( $B = D = \mathbf{0}$ ,  $\tau_{e,HD} = 0$  et  $N_{m,HD} = 0$ ) s'écrivent ainsi sous la forme

$$E = \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}_q \mathbf{grad} \Phi_e^q \quad \text{et} \quad H = \sum_{q=1, l=1}^{Q,L} \mathbf{J}_{q,l} \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}$$

et similairement au cas borné, il y a  $Q \times L$  indéterminées  $\mathbf{J}_{q,l}$  pour  $q = 1\dots Q, l = 1\dots L$  pour les solutions de (2.17-h), mais contrairement à lui il y a respectivement  $Q$  indéterminées  $\mathbf{U}_q$  pour (2.17-e).

## 2.5 Analyses des problèmes Div-curl dans les cylindres semi-infinis

Pour trouver les conditions transparentes afin de résoudre les problèmes (2.17-e) et (2.17-h), nous allons utiliser la structure bien particulière des éventuelles solutions dans le guide  $\mathfrak{D}_l$ .

### 2.5.1 Définition de bases de fonctions pour la séparation des variables

Pulvérisation furieuse de la continuité

Pierre Boulez

Comme le cylindre semi-infini  $\mathfrak{D}_l$  est cylindrique<sup>11</sup> et que les coefficients  $\varepsilon$  et  $\mu$  ne dépendent pas de la variable longitudinale conformément à l'hypothèse 2.3.1, nous pouvons décrire le comportement de  $E$  et  $H$  sur dans cette partie via une séparation des variables. Pour se faire, nous devons songer à des choix judicieux de bases de  $L^2(S_l)^2$ . Pour cela nous allons introduire une kyrielle de potentiels en espérant que le courageux lecteur ne fera pas d'indigestion de notations. Nous opterons pour les deux formes de bases données dans le lemme suivant :

**Lemme 2.5.1.** *Nous avons les décompositions suivantes*

$$L^2(S_l)^2 = \text{Span} \left( \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}{\sqrt{\lambda_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}}, \mathbf{\Lambda}^{-1} \frac{\mathbf{rot} \psi_n(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S_l)}{\sqrt{k_n(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S_l)}} \right)_{n=1:\infty} \oplus \text{span} (\nabla \varphi_q(\mathbf{\Lambda}, S_l))_{q \leq Q} \quad (2.37)$$

et

$$L^2(S_l)^2 = \text{Span} \left( \frac{\nabla \psi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}{\sqrt{k_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}}, \mathbf{\Lambda}^{-1} \frac{\mathbf{rot} \varphi_n(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S_l)}{\sqrt{\lambda_n(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S_l)}} \right)_{n=1:\infty} \oplus \text{span} (\tilde{\nabla} \psi_q(\mathbf{\Lambda}, S_l))_{q \leq Q} \quad (2.38)$$

où les constantes  $\lambda_n(\mathbf{\Lambda}, S_l), k_n(\mathbf{\Lambda}, S_l) \in \mathbb{R}^{+,*}$  et les potentiels

$$\varphi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l) \in H_0^1(S_l) \quad \text{et} \quad \psi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l) \in H^1(S_l)$$

sont les uniques solutions des problèmes aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{div} (\mathbf{\Lambda} \nabla \varphi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)) = \lambda_n(\mathbf{\Lambda}, S_l) \varphi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l), & \text{dans } S, \\ \varphi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l) = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad (2.39)$$

et

$$\begin{cases} -\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{div} (\mathbf{\Lambda} \nabla \psi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)) = k_n(\mathbf{\Lambda}, S_l) \psi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l), & \text{dans } S, \\ \partial_n \psi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l) = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad (2.40)$$

*Démonstration.* Les décompositions de Helmholtz du théorème 1.2.1 sont

$$\begin{aligned} L^2(S_l, \mathbb{C}^2) &= \nabla H_0^1(S_l) \oplus \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{rot} H^1(S_l) \oplus \mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, S_l) \\ L^2(S_l, \mathbb{C}^2) &= \nabla H^1(S_l) \oplus \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{rot} H_0^1(S_l) \oplus \mathcal{H}(\mathbf{\Lambda}, S_l). \end{aligned}$$

Par le théorème 1.3.1, nous savons que

$$\mathcal{E}(\mathbf{\Lambda}, S_l) = \text{span}\{\nabla \varphi^q(\mathbf{\Lambda}, S_l), 1 \leq q \leq Q\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\mathbf{\Lambda}, S_l) = \text{span}\{\tilde{\nabla} \psi^q(\mathbf{\Lambda}, S_l), 1 \leq q \leq Q\},$$

ainsi, il ne nous reste plus qu'à déterminer des bases de  $\nabla H_0^1(S_l)$ ,  $\mathbf{rot} H^1(S_l)$ ,  $\nabla H^1(S_l)$  et  $\mathbf{rot} H_0^1(S_l)$ .

De manière similaire au lemme 2.4.2, nous pouvons montrer que les familles

$$\left( \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}{\sqrt{\lambda_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}} \right)_{n=1,\infty} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\nabla \psi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}{\sqrt{k_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}} \right)_{n=1,\infty}$$

forment respectivement des bases de  $H_0^1(S_l)$  et de  $H^1(S_l)$  et donc

$$\left( \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}{\sqrt{\lambda_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}} \right)_{n=1,\infty} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\nabla \psi_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}{\sqrt{k_n(\mathbf{\Lambda}, S_l)}} \right)_{n=1,\infty}$$

forment respectivement des bases de  $\nabla H_0^1(S_l)$  et de  $\nabla H^1(S_l)$ . De même avec  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$  à la place de  $\mathbf{\Lambda}$ , les familles

$$\left( \frac{\mathbf{rot} \varphi_n(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S_l)}{\sqrt{\lambda_n(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S_l)}} \right)_{n=1,\infty} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\mathbf{rot} \psi_n(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S_l)}{\sqrt{k_n(\mathbf{\Lambda}^{-1}, S_l)}} \right)_{n=1,\infty}$$

forment respectivement des bases de  $\mathbf{rot} H_0^1(S_l)$  et de  $\mathbf{rot} H^1(S_l)$ . □

11. Cela va sans dire.

En particulier, nous considérerons les bases formées à partir de

$$\varphi_n^{l,e} := \varphi_n(\varepsilon, S_l), \psi_n^{l,e} := \psi_n(\varepsilon^{-1}, S_l), \varphi_e^{q,l} := \varphi^q(\varepsilon, S_l) \quad \text{avec} \quad \lambda_n^{l,e} := \lambda_n(\varepsilon, S_l), k_n^{l,e} := k_n(\varepsilon^{-1}, S_l)$$

et

$$\psi_n^{l,m} := \psi_n(\mu, S_l), \varphi_n^{l,m} := \varphi_n(\mu^{-1}, S_l), \psi_m^{q,l} := \psi^q(\mu, S_l) \quad \text{avec} \quad k_n^{l,m} := k_n(\mu, S_l), \lambda_n^{l,m} := \lambda_n(\mu^{-1}, S_l)$$

Introduisons aussi les potentiels conjugués :

$$\psi_e^{q,l} := \psi^q(\varepsilon^{-1}, S_l) \quad \text{et} \quad \varphi_m^{q,l} := \varphi^q(\mu^{-1}, S_l).$$

qui nous permettront le recours au précieux lemme 1.3.5.

### 2.5.2 Structure des solutions dans les cylindres semi-infinis via la séparation des variables

La structure des solutions des problèmes (2.17) dans les cylindres semi-infinis  $\mathfrak{D}_l$  prendra la forme donnée par le lemme suivant :

**Lemme 2.5.2.** *Les solutions  $E$  et  $H$  du problème (2.17-(e)) et (2.17-(h)) peuvent se décomposer sous la forme suivante :*

$$E|_{\mathfrak{D}_l} = E|_{\mathfrak{D}_l}^{hom} + E_{\mathfrak{D}_l}^R \quad \text{et} \quad H|_{\mathfrak{D}_l} = H|_{\mathfrak{D}_l}^{hom} + H_{\mathfrak{D}_l}^R, \quad (2.41)$$

avec les "profils" homogènes :

$$\begin{cases} E|_{\mathfrak{D}_l}^{hom}(x, x_3) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{V}_{q,l}(x_3) \begin{pmatrix} \nabla \varphi_e^{q,l}(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_n^\infty a_n^l \begin{pmatrix} \nabla \varphi_n^{l,e}(x) \\ -\sqrt{\lambda_n^{l,e}} \varphi_n^{l,e}(x) \end{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3} \\ H|_{\mathfrak{D}_l}^{hom}(x, x_3) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l}(x_3) \begin{pmatrix} \nabla \psi_m^{q,l}(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_n^\infty b_n^l \begin{pmatrix} \nabla \psi_n^{l,m}(x) \\ -\sqrt{k_n^{l,e}} \psi_n^{l,m}(x) \end{pmatrix} e^{-\sqrt{k_n^{l,e}} x_3}, \end{cases} \quad (2.42)$$

où les "potentiels"  $\mathbf{V}_{q,l}$  et les "courants"<sup>12</sup>  $\mathbf{I}_{q,l}$  satisfont :

$$\partial_3 \mathbf{V}_{q,l}(x_3^l, s) = \left( B; \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{L^2} \quad \text{et} \quad -\partial_3 \mathbf{I}_{q,l}(x_3^l, s) = \left( D; \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{L^2}. \quad (2.43)$$

Les "profils" dus aux sources s'écrivent :

$$E_{\mathfrak{D}_l}^R = \sum_{n=1}^\infty \begin{pmatrix} \frac{\dot{c}_n^P}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \frac{\nabla \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} + b_n \varepsilon^{-1} \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \\ c_n^P \varphi_n^{l,e} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_{\mathfrak{D}_l}^R = \sum_{n=1}^\infty \begin{pmatrix} \frac{\dot{g}_n^P}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \frac{\nabla \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} + f_n \mu^{-1} \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}} \\ g_n^P \psi_n^{l,m} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

avec les coefficients :

$$b_n = \frac{\int_{S^l} B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^{l,e} \end{pmatrix}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \quad \text{et} \quad f_n = \frac{\int_{S^l} D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n^{l,m} \end{pmatrix}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}}, \quad (2.45)$$

$c_n^P$  et  $g_n^P$  les solutions particulières de :

$$\ddot{c}_n - \lambda_n^{l,e} c_n = - \int_{S^l} \varepsilon \partial_3 B \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{g}_n - k_n^{l,m} g_n = - \int_{S^l} \mu \partial_3 D \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_n^{l,m} \\ \sqrt{k_n^{l,m}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

**Démonstration. Séparation des variables**

Comme  $\varepsilon$  ne dépend pas de la variable longitudinale dans le cylindre semi-infini  $\mathfrak{D}_l$  (hypothèse 2.3.1), nous pouvons décomposer  $E|_{\mathfrak{D}_l}$  dans la base (2.37) :

$$E|_{\mathfrak{D}_l}(x, x_3, s) = \left( \sum_{q=1}^Q \mathbf{V}_{q,l}(x_3, s) \nabla \varphi_e^{q,l}(x) + \sum_{n=1}^\infty v_n(x_3, s) \frac{\nabla \varphi_n^{l,e}(x)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} + b_n(x_3, s) \varepsilon^{-1} \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,e}(x)}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \right), \quad \sum_{n=1}^\infty c_n(x_3, s) \varphi_n^{l,e}(x)$$

12. Nous verrons dans le chapitre 8 que ce choix de dénomination n'est pas hasardeux.

et  $\varepsilon B|_{\mathcal{D}_l}$  dans la base (2.38) avec  $\mathbf{\Lambda} = \varepsilon^{-1}$  :

$$B|_{\mathcal{D}_l}(x, x_3, s) = \left( \begin{array}{c} \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_l^q(x_3, s) \varepsilon^{-1} \nabla \psi_e^{q,l}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(x_3, s) \varepsilon^{-1} \frac{\nabla \psi_n^{l,e}(x)}{\sqrt{k_n^{l,e}}} + f_n(x_3, s) \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}(x)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{-1} g_n(x_3, s) \psi_n^{l,e}(x) \end{array} \right).$$

Rappelons que comme la source est solénoïdale (2.20), nous avons :

$$\mathbf{Div} B = 0 \Rightarrow \dot{g}_j = \sqrt{k_j} i_j \quad (2.47)$$

### Résolution

Nous allons intégrer sur  $S_l$  toutes les équations de (2.17-e) contre la base (2.37) avec  $\mathbf{\Lambda} = \varepsilon$ .

-1) Nous intégrons sur  $S_l$  la condition  $\mathbf{Div}(\varepsilon \hat{E}) = 0$  contre  $\varphi_n^{l,e}$  :

$$v_n \sqrt{\lambda_n^{l,e}} - \dot{c}_n = 0, \forall n. \quad (2.48)$$

La condition  $\mathbf{rot} E = B$  peut s'écrire sous la forme (voir la formule (10.16)) :

$$\left( \begin{array}{c} - \sum_{q=1}^Q \dot{\mathbf{v}}_l^q(x_3, s) \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} + \sum_{n=1}^{\infty} -\dot{v}_n \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} + \dot{b}_n \varepsilon^{-1} \frac{\nabla \psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} + c_n \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1} \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^{l,e}}}) \end{array} \right) = B$$

-2) Nous intégrons sur  $S_l$  la condition  $\mathbf{rot} E = B$  contre  $\varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_e^{q',l} \\ 0 \end{pmatrix}$  :

$$- \sum_{q=1}^Q \dot{\mathbf{v}}_{q,l} \int_{S_l} \varepsilon \nabla \varphi_e^{q,l} \cdot \nabla \varphi_e^{q',l} = \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l} \int_{S_l} \underbrace{\nabla \psi_e^{q,l} \mathbf{rot} \varphi_e^{q',l}}_{(10.19) \Rightarrow -\delta_q^{\bar{q}}} + \sum_{n=1}^{\infty} i_n \int_{S_l} \underbrace{\frac{\nabla \psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \mathbf{rot} \varphi_e^{q',l}}_{(10.19) \Rightarrow 0} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_{S_l} \underbrace{\varepsilon \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \mathbf{rot} \varphi_e^{q',l}}_{(10.19) \Rightarrow 0},$$

ainsi

$$\mathbf{Y}_e^l \dot{\mathbf{v}}_l(x_3, s) = \mathbf{I}_l = \mathbf{Y}_e^l \left( B; \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{L^2} \quad (2.49)$$

qui est la première partie de (9.41).

-3) Nous intégrons sur  $S_l$  la condition  $\mathbf{rot} E = B$  contre  $\varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \end{pmatrix}$  :

$$-\dot{v}_{\bar{n}} + \sqrt{\lambda_n^{l,e}} c_{\bar{n}} = \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l} \int_{S_l} \nabla \psi_e^{q,l} \frac{\mathbf{rot} \varphi_{\bar{n}}^{l,e}}{\sqrt{\lambda_{\bar{n}}^{l,e}}} + \sum_{n=1}^{\infty} i_n \int_{S_l} \frac{\nabla \psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \frac{\mathbf{rot} \varphi_{\bar{n}}^{l,e}}{\sqrt{\lambda_{\bar{n}}^{l,e}}} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_{S_l} \varepsilon \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \frac{\mathbf{rot} \varphi_{\bar{n}}^{l,e}}{\sqrt{\lambda_{\bar{n}}^{l,e}}}$$

et comme les décompositions (2.39) et (2.40) sont orthogonales :

$$\int_{S_l} \nabla \psi_e^{q,l} \cdot \mathbf{rot} \varphi_{\bar{n}}^{l,e} = \int_{S_l} \nabla \psi_n^{l,e} \cdot \mathbf{rot} \varphi_{\bar{n}}^{l,e} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{S_l} \varepsilon \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \frac{\mathbf{rot} \varphi_{\bar{n}}^{l,e}}{\sqrt{\lambda_{\bar{n}}^{l,e}}} = \delta_{\bar{n}},$$

nous avons ainsi

$$-\dot{v}_{\bar{n}} + \sqrt{\lambda_n^{l,e}} c_{\bar{n}} = f_{\bar{n}}. \quad (2.50)$$

-4) Nous intégrons sur  $S_l$  la condition  $\mathbf{rot} E = B$  contre  $\begin{pmatrix} \frac{\nabla \psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \\ 0 \end{pmatrix}$  et contre  $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^{l,e} \end{pmatrix}$  :

$$\dot{b}_n = i_n \quad \text{et} \quad \sqrt{k_n^{l,e}} b_n = g_n \quad (2.51)$$

ce qui est conforme avec (2.47).

### Conclusion

Nous avons avec (2.48,2.50) :

$$\ddot{c}_n - \lambda_n c_n = -\dot{f}_n \sqrt{\lambda_n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\dot{c}_n}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Les solutions homogènes sont données par :

$$c_n^{\text{hom}} = -a_n^l \sqrt{\lambda_n^{l,e}} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3} \quad \text{et} \quad v_n^{\text{hom}} = a_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3}$$

et les solutions particulières sont bien données par (2.46).

La preuve pour  $H|_{\mathfrak{D}_l}$  est grandement similaire : puisque  $\mu$  est constant dans le cylindre semi-infini  $\mathfrak{D}_l$  (hypothèse 2.3.1), nous pouvons décomposer  $H|_{\mathfrak{D}_l}$  dans la base (2.38) avec  $\mathbf{\Lambda} = \mu$  et  $\mu D|_{\mathfrak{D}_l}$  dans la base (2.37).  $\square$

Notons que les quantités  $V_{q,l}$  et  $I_{q,l}$  présentes dans le lemme 2.5.2 joueront des rôles particuliers, nous allons les introduire de manière intrinsèque :

**Definition 2.5.1.** Nous appellerons couramment "potentiels" et "courants" électriques les projections suivantes :

$$V_{q,l}(x_3^l) := \int_{S \times \{x_3^l\}} E \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -I_{q,l}(x_3^l) := \int_{S \times \{x_3^l\}} H \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Nous pouvons vérifier avec le lemme de conjugaison 1.3.5 et la relation de bi-orthogonalité (1.3.1) que la définition 2.5.1 concorde avec le lemme 2.5.2. Les raisons hautement concrètes du choix d'une telle dénomination seront comprises dans le chapitre 8.

En retravaillant les expressions du lemme 2.5.2 obtenues par séparation des variables, nous pouvons réécrire les "profils" homogènes  $E|_{\mathfrak{D}_l}^{\text{hom}}$  et  $H|_{\mathfrak{D}_l}^{\text{hom}}$  aussi bien sous la forme d'un **grad** que d'un **curl** :

$$E|_{\mathfrak{D}_l}^{\text{hom}} = \mathbf{grad} \left( \sum_{q=1}^Q V_{q,l} \varphi_e^{q,l} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varphi_n^{l,e} \right) = \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varepsilon \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \\ \sum_{q,q'}^Q (\mathbf{Y}_m)_{q,q'} V_{q,l} \psi_e^{q',l} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

et

$$H|_{\mathfrak{D}_l}^{\text{hom}} = \mathbf{grad} \left( \sum_{q=1}^Q I_{q,l} \psi_m^{q,l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^l e^{-\sqrt{k_n^{l,e}} x_3^l} \psi_n^{l,m} \right) = \mu^{-1} \mathbf{curl} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^l e^{-\sqrt{k_n^{l,e}} x_3^l} \varepsilon \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \\ \sum_{q,q'}^Q (\mathbf{Z}_e)_{q,q'} I_{q,l} \psi_m^{q',l} \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

tandis que les "profils" liés à la source ne semblent s'écrire que sous la forme d'un **curl** :

$$E|_{\mathfrak{D}_l}^P = \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} \sum_n \begin{pmatrix} c_n^P \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\lambda_n^{l,e}} \\ b_n^P \frac{\psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H|_{\mathfrak{D}_l}^P = \mu^{-1} \mathbf{curl} \sum_n \begin{pmatrix} g_n^P \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,m}}{k_n^{l,m}} \\ f_n^P \frac{\varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}} \end{pmatrix}.$$

Les solutions sur les cylindres semi-infinis peuvent ainsi être décrites sous la forme d'un rotationnel conformément au fait qu'elles soient solénoïdales :

$$E|_{\mathfrak{D}_l} = \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} A_{e,\mathfrak{D}_l} \quad \text{et} \quad H|_{\mathfrak{D}_l} = \mu^{-1} \mathbf{curl} A_{m,\mathfrak{D}_l}$$

avec les potentiels vecteurs :

$$A_{e,\mathfrak{D}_l} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varepsilon \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} + c_n^P \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\lambda_n^{l,e}} \right) \\ \sum_{q,q'}^Q (\mathbf{Y}_m)_{q,q'} V_{q,l} \psi_e^{q',l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^P \frac{\psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$



et

$$A_{m,\mathfrak{D}_l} = \left( \begin{array}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varepsilon \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} + g_n^P \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,m}}{k_n^{l,m}} \right) \\ \sum_{q,q'}^Q (\mathbf{Z}_e)_{q,q'} \mathbf{I}_{q,l} \psi_m^{q',l} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^P \frac{\varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}} \end{array} \right)$$

et semblent ne pouvoir s'écrire sous la forme d'un gradient que si les sources  $B$  et  $D$  sont nulles. La section 2.4 a déjà enquêté sur ce dernier cas. Faisons le lien avec le théorème 2.4.1. En identifiant sur la décomposition par séparation des variables (2.53, 2.54) et la décomposition sous forme d'un gradient du théorème 2.4.1 nous avons :

$$\mathbf{grad} \left[ \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}_q \varphi_e^{q,l}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}_q \alpha_n^{q,l} \right) e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varphi_n^{l,e} \right] = \mathbf{grad} \left[ \sum_{q=1}^Q \mathbf{V}_{q,l} \varphi_e^{q,l} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varphi_n^{l,e} \right]$$

et ainsi

$$\mathbf{U}_q = \mathbf{V}_{q,l} \quad \text{et} \quad a_n^l = \left( \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}_q \alpha_n^{q,l} \right).$$

De même, pour  $H$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} & \left[ \sum_{q=1, l'=1}^{Q,L} (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \mathbf{J}_{q,l'} \psi_m^{q,l}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{q=1, l'=1}^{Q,L} \mathbf{J}_{q,l'} \beta_n^{q,l,l'} \right) e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,m}} x_3^l} \psi_n^{l,m} \right] \\ & = \mathbf{grad} \left[ \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l} \psi_m^{q,l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \psi_n^{l,m} \right] \end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathbf{J}_{q,l} = -\mathbf{I}_{q,l} \text{ pour } l \neq 0, \quad \sum_{l=1}^L \mathbf{J}_{q,l} = \mathbf{I}_{q,0} \quad \text{et} \quad b_n^l = \left( \sum_{q=1, l'=1}^{Q,L} \mathbf{J}_{q,l'} \beta_n^{q,l,l'} \right).$$

Ce discours nous fait prendre conscience que les indéterminations quand à l'espace harmonique sont reliées à  $\mathbf{V}_{q,l}$  et  $\mathbf{I}_{q,l}$ . La section 2.7 sera consacrée à une décomposition des champs fondée sur ce lien.

### 2.5.3 Conditions transparentes

Nous comptons dans cette sous-section déterminer les opérateurs de Steklov-Poincaré nécessaires à la définition des conditions transparentes sur  $S_l$  qui permettront de ramener les problèmes (2.17-e) et (2.17-h) à des problèmes sur des domaines bornés, grâce à la structure des solutions dans les cylindres semi-infinis.

#### Conditions transparentes pour (2.17-e)

En exploitant le lemme 2.5.2, nous pouvons donner les conditions aux bords sur  $S_l \times \{\sigma_l\}$ . Les conditions normales sont

$$\varepsilon E \cdot e_3|_{S_l \times \{\sigma_l\}} \stackrel{(2.41, 2.42, 2.44, 10.12)}{=} -\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^l \sqrt{\lambda_n^{l,e}} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} \sigma_l} \right) \varphi_n^{l,e} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} c_n^P \varphi_n^{l,e}, \quad (2.56)$$

et les conditions tangentielles sont :

$$\begin{aligned} E \times e_3|_{S_l \times \{\sigma_l\}} & \stackrel{(2.41, 2.42, 2.44, 10.12)}{=} \sum_{q=1}^Q \mathbf{V}_{q,l} \left( \begin{array}{c} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{array} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^l \sqrt{\lambda_n^{l,e}} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} \sigma_l} \right) \left( \begin{array}{c} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \end{array} \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{c}_n^P}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \left( \begin{array}{c} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \end{array} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varepsilon^{-1} \left( \begin{array}{c} \nabla \psi_n^{l,e} \\ \sqrt{k_n^e} \\ 0 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Nous remarquons des termes en commun dans ces deux équations

$$\begin{aligned} \left( a_n^l \sqrt{\lambda_n^{l,e}} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} \sigma_l} \right) & = -(\varepsilon E \cdot e_3|_{S_l}; \varphi_n^{l,e})_{L^2} + c_n^P \\ & = (E \times e_3|_{S_l}; \varepsilon \left( \begin{array}{c} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \\ 0 \end{array} \right))_{L^2} - \frac{\dot{c}_n^P}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

qui nous permettent de relier les conditions tangentielles aux conditions normales :

$$\left( E \times e_3|_{S_l}; \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{L^2(S^l)} + \left( \varepsilon E \cdot e_3|_{S_l}; \varphi_n^{l,e} \right)_{L^2(S^l)} = c_n^P + \frac{\dot{c}_n^P}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \quad \text{en } x_3^l = \sigma_l.$$

Nous pouvons choisir d'exprimer les conditions normales en fonction des conditions tangentielles et vice et versa. Premièrement, avec (2.56)

$$\varepsilon E \cdot e_3 + NtD_e^l(E \times e_3) = S_e^l \quad \text{sur } S_l \times \{\sigma_l\}, \quad (2.59)$$

où l'application Neumann-to-Dirichlet  $NtD_e^l$  est définie par :

$$NtD_e^l(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( u; \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{L^2} \varepsilon \varphi_n^{l,e} \quad (2.60)$$

et la source par :

$$S_e^l = \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n^P + \frac{\dot{c}_n^P}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \right) \varepsilon \varphi_n^{l,e}. \quad (2.61)$$

Secondement, avec (2.57) :

$$E \times e_3^l + T_e^l(\varepsilon E \cdot e_3^l) = \sum_{q=1}^Q v_{q,l} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_e^l \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sur } S_l \times \{\sigma_l\}, \quad (2.62)$$

où l'application Dirichlet-to-Neumann  $T_e^l$  est définie par :

$$T_e^l(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n^{l,e})_{L^2} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

et le reste par :

$$R_e^l = \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n^P + \frac{\dot{c}_n^P}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \right) \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varepsilon^{-1} \frac{\nabla \psi_n^{l,e}}{\sqrt{k_n^e}}. \quad (2.64)$$

Nous avons un lien entre les opérateurs  $NtD_e^l$  et  $T_e^l$  :

$$NtD_e^l \left( \begin{pmatrix} R_e^l \\ 0 \end{pmatrix} \right) = S_e^l \quad \text{et} \quad NtD_e^l(T_e^l(\varepsilon u)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon u, \varphi_n^{l,e}) \varepsilon \varphi_n^{l,e} = \varepsilon u$$

**Remarque 2.5.1.** Si nous appliquons  $NtD_e^l$  à (2.62) ou si nous intégrons (2.62) contre  $\varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_n^{l,e} \\ \sqrt{\lambda_n^{l,e}} \\ 0 \end{pmatrix}$ , nous retrouvons (2.59) ce qui veut dire que toutes les informations de (2.59) sont incluses dans (2.62).

### Conditions transparentes pour (2.17-h)

De manière similaire au champ  $E$ , nous pouvons exprimer la trace normale de  $H$  à partir de sa trace tangentielle sur les finales  $S_l \times \{\sigma_l\}$  :

$$\mu H \cdot e_3 + NtD_m^l(H \times e_3) = S_m^l \quad \text{sur } S_l \times \{\sigma_l\}, \quad (2.65)$$

avec l'opérateur Neumann-to-Dirichlet  $NtD_e^l$  :

$$NtD_m^l(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( u; \mu \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_n^{l,m} \\ \sqrt{k_n^{l,m}} \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{L^2} \mu \psi_n^{l,m}, \quad (2.66)$$

et

$$S_m^l = \sum_{n=1}^{\infty} \left( g_n^P + \frac{\dot{g}_n^P}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \right) \mu \psi_n^{l,m}, \quad (2.67)$$

ou vice et versa :

$$H \times e_3^l + T_m^l(\mu H \cdot e_3^l) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_m^l \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{on } S_l \times \{\sigma_l\}, \quad (2.68)$$

avec l'opérateur Dirichlet-to-Neumann  $T_m^l$  :

$$T_m^l(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \psi_n^{l,m})_{L^2} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_n^{l,m} \\ \sqrt{k_n^{l,m}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

et

$$R_m^l = \sum_{n=1}^{\infty} \left( g_n^P + \frac{\dot{g}_n^P}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \right) \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mu^{-1} \frac{\nabla \varphi_n^m}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}}. \quad (2.70)$$

De la manière que pour  $E$ , nous avons :

$$NtD_m^l \left( \begin{pmatrix} R_m^l \\ 0 \end{pmatrix} \right) = S_m^l \quad NtD_m^l(T_m^l(\mu u)) = \mu u.$$

**Remarque 2.5.2.** Si nous appliquons l'opérateur  $NtD_m^l$  à (2.68) ou si nous intégrons (2.68) contre  $\mu \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_n^{l,m} \\ \sqrt{k_n^{l,m}} \\ 0 \end{pmatrix}$  nous retrouvons (2.65), ainsi toutes les informations sur (2.65) sont inclus dans (2.68).

## 2.6 Problèmes réduits sur un domaine borné avec des conditions transparentes

Avec nos opérateurs Steklov-Poincaré  $T_e^l$  et  $T_m^l$  définis en (2.63, 2.69), nous pouvons réduire nos problèmes originaux posés sur une géométrie non bornée  $J$  en des problèmes sur une géométrie bornée  $\mathcal{K}(\sigma)$  (un domaine de calcul dont la définition est donnée en (2.21)).

### 2.6.1 Problèmes avec conditions aux bords de type tangentielle réduits au domaine de calcul

Le problème (2.17-e) réduit à la zone de calcul  $\mathcal{K}(\sigma)$  via des conditions transparentes sur  $S_l \times \{\sigma_l\}$  est :

$$\begin{cases} \mathbf{curl} E = B & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma), \\ \mathbf{Div}(\varepsilon E) = 0, & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma), \\ E \times n = \mathbf{0} & \text{sur } \partial J \setminus \partial_{HD} \mathcal{K}, \\ E \times n = \tau_{e,HD} & \text{sur } \partial_{HD} \mathcal{K}, \\ E \times e_3^l + T_e^l(\varepsilon E \cdot e_3^l) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{V}_{q,l}(\sigma_l) \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_e^l \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sur } S_l \times \{\sigma_l\}. \end{cases} \quad (2.71)$$

**Lemme 2.6.1.** Le problème avec condition transparentes (2.71) est bien posé si les données  $B$ ,  $\mathbf{V}_{q,l}(\sigma_l)$  et  $R_e^l$  vérifient pour toute fonction  $u$  qui saute au travers de la coupure  $\Gamma_{q,l}$  la condition de compatibilité

$$(\mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0) - \mathbf{V}_{q,l}(\sigma_l)) [u]_{\Gamma_{q,l}} = \int_{\mathcal{K}(\sigma)} B \cdot \mathbf{grad} u + \int_{\partial_{HD} \mathcal{K}} \tau_{e,HD} (\mathbf{n} \times \mathbf{grad} u \times \mathbf{n}) + \sum_{l'=0}^L \int_{S_{l'} \times \{\sigma_{l'}\}} \begin{pmatrix} R_e^{l'} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{grad} u. \quad (2.72)$$

La solution  $E$  peut s'écrire sous la forme d'un rotationnel :

$$E|_{\mathcal{K}} = \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} A$$

avec le potentiel vecteur  $A \in H(\mathbf{Div}, \mathbf{curl}, \mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma}))$  défini comme l'unique solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} A = B & x \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma}) \\ \mathbf{Div} A = 0 & x \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma}) \\ A \cdot n = 0 & x \in \partial \mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma}) \\ (\mathbf{curl} A) \times n_D = 0, & x \in \partial J, \\ (\mathbf{curl} A) \times e_3^l = -T_e^l(\mathbf{curl} A \cdot e_3^l) + R + \sum_{q=1}^Q \mathbf{v}_{q,l}(\sigma_l) \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} & x \in S_l \times \{\sigma_l\}. \end{cases} \quad (2.73)$$

*Démonstration. Condition de comptabilité.*

Nous avons avec la formule de Green 3D (10.21) pour tout  $C \in H(\mathbf{curl}, \mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma}))$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})} E|_D \cdot \mathbf{curl} C + \int_{\partial_{\text{HD}} \mathcal{K}} \boldsymbol{\tau}_{e, \text{HD}} (\mathbf{n} \times C \times \mathbf{n}) + \sum_{l=1}^L \int_{S_l} T_e^l(\varepsilon E \cdot e_3^l) \cdot C \\ = \int_{\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})} B \cdot C + \sum_{q=1, l=0}^{Q, L} \mathbf{v}_{q,l} \int_{S_l} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot C + \sum_{l=1}^L \int_{S_l} \begin{pmatrix} R_e^l \\ 0 \end{pmatrix} \cdot C. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Si  $C = \mathbf{grad} u$  alors notre condition de compatibilité devient :

$$\int_{\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})} B \cdot \mathbf{grad} u + \int_{\partial_{\text{HD}} \mathcal{K}} \boldsymbol{\tau}_{e, \text{HD}} (n \times \mathbf{grad} u \times n) + \sum_{q=1, l=0}^{Q, L} \mathbf{v}_{q,l} \int_{S_l} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{grad} u + \sum_{l=1}^L \int_{S_l} \begin{pmatrix} R_e^l \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{grad} u = 0. \quad (2.75)$$

En particulier si  $u$  saute le long de la coupure  $\Gamma_{q,l}$ , nous avons :

$$\int_{S_{l'}} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l'} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{grad} u \stackrel{(10.9)}{=} - \int_{S_{l'}} \nabla \varphi_e^{q,l'} \cdot \mathbf{rot} u \stackrel{(10.19)}{=} - \int_{\partial_{l'} \Gamma_{q'}} [u]_{\partial_{l'} \Gamma_{q'}} \partial_{\tau} \varphi_e^{q,l'} \stackrel{(2.3)}{=} - (\delta_{l'}^0 - \delta_{l'}^l) [u]_{\Gamma_{q,l}} \int_{\partial_{l'} \Gamma_{q'}} \partial_{\tau} \varphi_e^{q,l'}. \quad (2.76)$$

En insérant (2.76) dans (2.75) nous retrouvons (2.72).

### Ecriture sous la forme d'un rotationnel.

Secondement, nous utilisons la première des décompositions de Helmholtz du théorème 2.2.2 :

$$E = \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} A$$

où  $A$  est solution de (2.73) de formulation faible (utiliser (2.74)) :

$$\begin{cases} \text{trouver } A \in H_{n,0}^1(\mathbf{Div}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K}) \text{ telle que pour toutes } \tilde{A} \in H_{n,0}^1(\mathbf{Div}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K}), \text{ nous avons} \\ \int_{\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})} \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} A \cdot \mathbf{curl} \tilde{A} + \sum_l \int_{S_l} T_e^l(\mathbf{curl} A \cdot e_3^l) \cdot \tilde{A} = \int_{\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})} B \cdot \tilde{A} + \sum_{l,q=1}^{L,Q} \mathbf{v}_{q,l} \int_{S_l} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} \cdot \tilde{A}_T + \int_{S_l} \begin{pmatrix} R_e^l \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{A}. \end{cases}$$

Pour s'assurer qu'il existe un unique potentiel vecteur  $A \in H_{n,0}(\mathbf{Div}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K})$  solution de l'équation précédente via le lemme de Lax-Milgram, il suffit de remarquer que, premièrement, la forme bilinéaire

$$\int_{\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})} \mathbf{curl} A \cdot \mathbf{curl} \tilde{A}$$

est selon la proposition 2.2.1 un produit scalaire de l'espace  $H_{n,0}^1(\mathbf{Div}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{H}^\perp(1, \mathcal{K})$ , et ainsi que

$$\int_{\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})} \varepsilon^{-1} \mathbf{curl} A \cdot \mathbf{curl} \tilde{A}$$

est coercive et continue, et secondement que la forme bilinéaire

$$\sum_l \int_{S_l} T_e^l(\mathbf{curl} A \cdot e_3^l) \cdot \tilde{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \mathbf{rot} A_T \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \mathbf{rot} \tilde{A}_T \varphi_n^{l,e} \right)$$

est bien positive (avec  $A_T$  la composante transverse de  $A$ ).

□

La condition de compatibilité (2.72) nous fournit une précieuse information : il n'y a besoin de connaître que  $Q$  quantités, par exemple  $V_{q,0}(\sigma_0)$  pour  $q = 1 \dots Q$  afin de déterminer tous les  $V_{q,l}(\sigma_l)$  ( $q = 1 \dots Q, l = 1 \dots L$ ). Cela signifie que le problème (2.71) posé sur un domaine borné à  $Q$  indéterminations.

**Théorème 2.6.1.** *Il existe une solution au problème (2.17-e). Celle-ci est connue à  $Q$  indéterminations près qui peuvent être :*

$$V_{q,0}(\sigma_0).$$

Les solutions sont données sur chaque compact par (2.71) où les sources  $V_{q,l}(\sigma_l)$  pour  $q = 1 \dots Q, l = 1 \dots L$  sont données par (2.72). Ces solutions peuvent être complétées sur les cylindres semi-infinis par le lemme 2.5.2.

Remarquons que nous pouvons écrire la solution sous la forme d'un rotationnel

$$E = \varepsilon^{-1} \text{curl } A^\sigma$$

avec  $A^\sigma|_{\mathcal{K}(\sigma)}$  la solution de (2.73) et  $A^\sigma|_{J/\mathcal{K}(\sigma)}$  donnée dans (2.55). Par contre le potentiel vecteur  $A^\sigma$  n'est pas  $H_w^1(J)$  dans tout le domaine  $J$  :

$$0 = A^\sigma|_{\mathcal{K}(\sigma)} \cdot e_3^l \neq A^\sigma|_{J/\mathcal{K}(\sigma)} \cdot e_3^l = \sum_{q,q'}^Q (\mathbf{Y}_m)_{q,q'} V_{q,l}(\sigma_l) \psi_e^{q',l}.$$

## 2.6.2 Problèmes avec conditions aux bords de type normale réduits au domaine de calcul

Le problème (2.17-h) réduit à la zone de calcul  $\mathcal{K}(\sigma)$  via des conditions transparentes sur  $S_l \times \{\sigma_l\}$  est :

$$\begin{cases} \text{curl } H = D & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma), \\ \text{div } (\mu H) = 0, & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma), \\ H \cdot n = 0 & \text{sur } \partial J \setminus \partial_{\text{HD}} \mathcal{K}, \\ H \cdot n = N_{m,\text{HD}} & \text{sur } \partial_{\text{HD}} \mathcal{K}; \\ H \times e_3^l + T_m^l (\mu H \cdot e_3^l) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) \begin{pmatrix} \text{rot } \Psi_\sigma^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + R_m^l & \text{sur } S_l \times \{\sigma_l\}. \end{cases} \quad (2.77)$$

**Lemme 2.6.2.** (2.77) est un problème bien posé si les sources  $D$ ,  $\mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l)$  et  $R_m^l$  sont connues et vérifient la conditions de compatibilité :

$$-\sum_{l=1}^L \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) = \int_{\mathcal{K}(\sigma)} D \cdot X_\sigma^q \quad \text{pour } q = 1 \dots Q, \quad (2.78)$$

pour toutes fonctions tests  $X_\sigma^q$  vérifiant :

$$\begin{cases} \text{curl } X_\sigma^q = 0 & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma) \\ n_D \times X_\sigma^q \times n_D = 0, & \text{sur } \partial J, \\ e_3 \times X_\sigma^q \times e_3 = \begin{pmatrix} X_T^q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sur } S_l \times \{\sigma_l\}. \end{cases}$$

La solution peut s'écrire sur le domaine de calcul  $\mathcal{K}(\sigma)$  via la décomposition :

$$H = \sum_{q,l=1,1}^{Q,L} J_{q,l} \text{grad } \Psi_\sigma^{q,l} + \text{grad } \xi + \mu^{-1} \text{curl } \zeta, \quad (2.79)$$

avec  $\Psi_\sigma^{q,l} \in H^1(\mathcal{K}(\sigma) \setminus \Gamma_{q,l})_{\mathbb{C}}$  solution de :

$$\begin{cases} \text{div } (\mu \text{grad } \Psi_\sigma^{q,l}) = 0, & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma) \setminus \Gamma_{q,l}, \\ \partial_n \Psi_\sigma^{q,l} = 0, & \text{sur } \partial \mathcal{K}(\sigma), \\ [\mu \partial_n \Psi_\sigma^{q,l}] = 0, \quad [\Psi_\sigma^{q,l}] = 1 & \text{sur } \Gamma_{q,l}, \end{cases} \quad (2.80)$$

$\zeta \in H^1(\mathcal{K}(\sigma))$  la solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mu^{-1} \mathbf{curl} \zeta = D, & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma), \\ \zeta \times n = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{K}(\sigma), \end{cases} \quad (2.81)$$

et  $\xi \in H^1(\mathcal{K}(\sigma))$  la solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\mu \mathbf{grad} \xi) = 0, & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma), \\ \mu \nabla \xi \cdot n = 0, & \text{sur } \partial J \setminus \partial_{HD} \mathcal{K}, \\ \mu \nabla \xi \cdot n = N_{m,HD}, & \text{sur } \partial_{HD} \mathcal{K}, \\ \mu \nabla \xi \cdot e_3^l + NtD_m^l (\nabla \xi \times e_3^l) = - \sum_{q,l=1,1}^{Q,L} J_{q,l} NtD (\mathbf{grad} \Psi_\sigma^{q,l} \times e_3^l) \\ \quad - NtD_m^l (\mu^{-1} \mathbf{curl} \zeta \times e_3^l) + NtD(R_m^l), & \text{sur } S_l \times \{\sigma_l\}. \end{cases} \quad (2.82)$$

et les constantes

$$J_{q,l} = \mathbf{I}_{q,l} - \int_{S_l} \mu^{-1} (\partial_3 \zeta_T - \nabla \zeta_l) \cdot \nabla \varphi_m^{q,l}.$$

*Démonstration.* Nous utilisons la seconde des décompositions de Helmholtz du théorème 2.2.2 pour retrouver (2.79), en ayant remarqué (équation (3.60) de [54]) que

$$\zeta \times n|_{\partial\mathcal{K}(\sigma)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{curl} \zeta \cdot n|_{\partial\mathcal{K}(\sigma)} = 0.$$

Les problèmes elliptiques (2.80, 2.81, 2.82) sont bien posés. En effet la forme bilinéaire

$$\int_{S_l} NtD (\nabla \xi \times e_3^l) \cdot u = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_l} \mu \operatorname{rot} \xi \frac{\mathbf{rot} \psi_n}{\sqrt{k_n}} (u; \mu \psi_n)_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_n} (\xi; \mu \psi_n)_{L^2} (u; \mu \psi_n)_{L^2}$$

est symétrique définie positive.

La dernière équation de (2.82) est suffisante pour déterminer uniquement  $\xi_m$  si les  $Q \times L$  constantes  $J_{q,l}$  sont connues. Rappelons que la remarque 2.5.2 nous dit que la dernière équation de (2.82) n'utilise pas tout le contenu informationnel de (2.77) qui est

$$H \times e_3^l + T_m^l (\mu H \cdot e_3^l) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_m^l \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans } S_l. \quad (2.83)$$

Cette dernière équation va nous permettre de relier les constantes  $J_{q,l}$  pour l'instant inconnues aux sources  $\mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l)$  qui sont supposées être connues dans le cadre de cette démonstration. Avec l'annexe 10, nous pouvons réécrire cette équation (2.83) en termes d'opérateurs  $2D$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{q,l=1,1}^{Q,L} J_{q,l} \mathbf{rot} \Psi_\sigma^{q,l} + \mathbf{rot} \xi + \mu^{-1} (\partial_3 \zeta_T - \nabla \zeta_l) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \partial_3 \xi, \psi_n^{l,m})_{L^2} \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n}} \\ & = \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) \mathbf{rot} \Psi_\sigma^{q,l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( g_n^P + \frac{\dot{g}_n^P}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \right) \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n}} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\nabla \varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}} \text{ dans } S_l. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est une équation  $L^2(S_l)^2$  équivalente à (2.83) qui peut être projetée sur la base (2.37).

1) Premièrement, nous intégrons contre  $\frac{\nabla \varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}}$  :

$$\left( H \times e_3^l; \begin{pmatrix} \frac{\nabla \varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( R_m^l; \begin{pmatrix} \frac{\nabla \varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \stackrel{(2.70)}{=} -f_n \stackrel{(2.45)}{=} -\frac{(D \cdot e_3^l; \varphi_n)}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}} \quad (2.84)$$

Cette relation est bien vérifiée car si nous intégrons  $\mathbf{curl} H$  sur  $\mathcal{K}(\sigma)$  contre le gradient de la fonction  $\Phi_n^l$  définie comme étant la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \Phi_n^l = 0, & \text{dans } \mathcal{K}(\sigma), \\ \Phi_n^l = 0, & \text{sur } \partial \mathcal{V}_q^l, \\ \Phi_n^l = \delta_l^k \frac{\varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}}, & \text{sur } \Sigma_k, \end{cases} \quad (2.85)$$

nous avons :

$$\int_{\mathcal{K}(\sigma)} \mathbf{curl} H \cdot \nabla \Phi_n^l \stackrel{(2.77)}{=} \int_{\mathcal{K}(\sigma)} \mathbf{curl} D \cdot \nabla \Phi_n^l.$$

En intégrant par parties la partie gauche de l'égalité précédente avec la formule de Green (10.22) et la partie droite avec la formule de Green (10.21), nous obtenons

$$-\int_{S_l} (H \times e_3) \cdot (e_3 \times \nabla \Phi_n^l \times e_3) = \int_{S_l} D \cdot e_3 \frac{\varphi_n^{l,m}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}},$$

ce qui correspond à (2.84).

2) Deuxièmement, nous intégrons contre  $\mu \frac{\mathbf{rot} \psi_n}{\sqrt{k_n}}$  et nous retrouvons, voir la remarque 2.5.2, la dernière équation de (2.82).

3) Finalement, nous intégrons contre  $\nabla \varphi_m^{q,l'}$  sur  $S_l$  :

$$\sum_{q,l=1,1}^{Q,L} J_{q,l} \int_{S_{l'}} \mathbf{rot} \Psi_{\sigma}^{q,l} \cdot \nabla \varphi_m^{q,l'} + \int_{S_{l'}} \mu^{-1} (\partial_3 \zeta_T - \nabla \zeta_l) \cdot \nabla \varphi_m^{q,l'} = \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_{q,l} \int_{S_{l'}} \mathbf{rot} \Psi_{\sigma}^{q,l} \cdot \nabla \varphi_m^{q,l'}.$$

Utilisons la formule de Green 2D donnée en (10.19) :

$$\sum_{q,l=1,1}^{Q,L} J_{q,l} \delta_{q'}^q (\delta_{l'}^0 - \delta_{l'}^l) \int_{\partial_{l'} \Gamma_{q'}} \partial_{\tau} \varphi_m^{q,l'} + \int_{S_{l'}} \mu^{-1} (\partial_3 \zeta_T - \nabla \zeta_l) \cdot \nabla \varphi_m^{q,l'} = \mathbf{I}_{q,l'}(\sigma_{l'}),$$

ainsi nous avons relié les  $J_{q,l}$  aux  $\mathbf{I}_{q,l}$  :

$$\begin{cases} -\sum_{l=1}^L J_{q,l} + \int_{\Sigma_l} \mu^{-1} (\partial_3 \zeta_T - \nabla \zeta_l) \cdot \nabla \varphi_m^{q,0} = \mathbf{I}_{q,0}(\sigma_0), \\ J_{q,l} + \int_{S_l} \mu^{-1} (\partial_3 \zeta_T - \nabla \zeta_l) \cdot \nabla \varphi_m^{q,l} = \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) \quad \text{pour } l \neq 0. \end{cases} \quad (2.86)$$

En particulier, nous avons pour tout  $q = 1 \dots Q$  :

$$\sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) = \sum_{l=0}^L \int_{S_l} \mu^{-1} (\mathbf{curl} \zeta \times e_3) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix},$$

que nous pouvons simplement réécrire via les fonctions tests  $X_{\sigma}^q$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}(\sigma)} D \cdot X_{\sigma}^q &\stackrel{(2.81)}{=} \int_{\mathcal{K}(\sigma)} \mathbf{curl} \mu^{-1} \mathbf{curl} \zeta \cdot X_{\sigma}^q \stackrel{(10.22)}{=} - \int_{\partial \mathcal{K}(\sigma)} \mu^{-1} \mathbf{curl} \zeta \times n \cdot (n \times X_{\sigma}^q \times n) \\ &= - \sum_{l=0}^L \int_{S_l} \mu^{-1} \mathbf{curl} \zeta \times e_3 \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} = - \sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) \end{aligned} \quad (2.87)$$

qui est la condition de compatibilité (2.78). □

Soyons attentif au fait que la décomposition en potentiels issus de  $H$  dans le lemme 2.6.2 peut apparaître inhabituelle car les potentiels sont couplés ( $\xi$  nécessite le calcul de  $\Psi_{\sigma}^{q,l}$  et de  $\zeta$ ).

La condition de compatibilité (2.78) nous informe qu'il n'y a besoin de connaître que  $Q \times L$  quantités, par exemple  $(\mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l))_{q=1;Q, l=1;L}$  pour déterminer intégralement le problème (2.77).

**Théorème 2.6.2.** *Il existe une solution au problème (2.17-h). Celle-ci est connue à  $Q \times L$  indéterminations :*

$$\mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l).$$

La solution est donnée sur chaque compact par (2.77) où la source  $\mathbf{I}_{q,0}(\sigma_0)$  est donnée par (2.72). Cette solution peut être complétée sur les cylindres semi-infinis avec le lemme 2.5.2.

## 2.7 Décompositions des solutions des problèmes Div-curl (décomposition en profils)

Le nombre d'indéterminé des problèmes (2.17-e) et (2.17-h), c-a-d  $Q$  et respectivement  $Q \times L$  (voir théorèmes 2.6.1 et 2.6.2) coïncident avec la dimension des espaces harmoniques  $\mathcal{E}(\varepsilon, J)$  et  $\mathcal{H}(\mu, J)$ . Les décompositions en profils consistent à donner les solutions aux problèmes Div-curl (2.17-e) et (2.17-h) où les indéterminées sont les coefficients devant les bases des noyaux et où le reste est calculable sur un domaine borné.

### Théorème 2.7.1. (Décompositions en profils)

Les solutions  $E$  et  $H$  de (2.17-e) et (2.17-h) peuvent se décomposer pour tout  $\sigma$  sous la forme

$$E = \sum_{q=1}^Q \mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0) \mathbf{grad} \Phi_e^q + E^{R,\sigma} \quad \text{et} \quad H = - \sum_{q=1, l=1}^{Q,L} \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} + H^{R,\sigma}$$

avec les indéterminées (voir définition 2.5.1) :

$$\mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0) \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) \quad \text{avec} \quad l = 1 \dots L,$$

les potentiels harmoniques  $\Phi_e^q$  et  $\Psi_m^{q,l}$  définis en (2.26) et les profils  $E^{R,\sigma}$  et  $H^{R,\sigma}$  calculables sur le domaine de calcul  $\mathcal{K}(\sigma)$  par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl} E^{R,\sigma} = B & x \in \mathcal{K}(\sigma) \\ \mathbf{Div} (\varepsilon E^{R,\sigma}) = 0, & x \in \mathcal{K}(\sigma) \\ E^{R,\sigma} \times n = \mathbf{0} & x \in \partial J \setminus \partial_{HD} \mathcal{K}, \\ E^{R,\sigma} \cdot n = \tau_{e,HD} & x \in \partial_{HD} \mathcal{K} \\ E^{R,\sigma} \times e_3^0 + T_e^0(\varepsilon E^{R,\sigma} \cdot e_3^l) = \begin{pmatrix} R_e^0 \\ 0 \end{pmatrix} & x \in S_0 \times \{\sigma_0\}, \\ E^{R,\sigma} \times e_3^l + T_e^l(\varepsilon E^{R,\sigma} \cdot e_3^l) = \sum_{q=1}^Q (\mathbf{V}_{q,l}(\sigma_l) - \mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0)) \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_e^l \\ 0 \end{pmatrix} & x \in S_l \times \{\sigma_l\}, \end{array} \right. \quad (2.88)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl} H^{R,\sigma} = D & x \in \mathcal{K}(\sigma) \\ \mathbf{div} (\mu H) = 0, & x \in \mathcal{K}(\sigma) \\ H^{R,\sigma} \cdot n = 0 & x \in \partial J \setminus \partial_{HD} \mathcal{K}, \\ H^{R,\sigma} \cdot n = N_{m,HD} & x \in \partial_{HD} \mathcal{K} \\ H^{R,\sigma} \times e_3^0 + T_m^0(\mu H^{R,\sigma} \cdot e_3^l) = - \sum_{q=1, l=1}^{Q,L} \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l) \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_m^0 \\ 0 \end{pmatrix} & x \in S_0 \times \{\sigma_0\}, \\ H^{R,\sigma} \times e_3^l + T_m^l(\mu H^{R,\sigma} \cdot e_3^l) = \begin{pmatrix} R_m^l \\ 0 \end{pmatrix} & x \in S_l \times \{\sigma_l\}, \end{array} \right. \quad (2.89)$$

où les constantes

$$(\mathbf{V}_{q,l}(\sigma_l) - \mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0)) \quad \text{et} \quad \sum_{q=1, l=1}^{Q,L} \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l)$$

sont données partir des sources avec (2.72) et (2.78). Les profils  $E^{R,\sigma}$  et  $H^{R,\sigma}$  sont calculables sur les cylindres semi-infinis avec le lemme 2.5.2.

*Démonstration.* Les problèmes (8.52) et (8.53) vérifient bien les conditions de compatibilité (2.72) et (2.78), ils sont ainsi bien posés et en particulier uniquement déterminés. La décomposition se trouve de la manière suivante :

$$E^R = E - \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}_{q,0} \mathbf{grad} \Phi_e^q \quad \text{et} \quad H^R = H - \sum_{q=1, l=1}^{Q,L} \mathbf{J}_{q,l} \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}$$



sont bien des problèmes Div-curl que nous savons étudier. Nous retrouvons

$$E^R = E^{R,\sigma} \quad \text{et} \quad H^R = H^{R,\sigma}$$

en fixant l'indétermination de la manière suivante :

$$\mathbf{U}_{q,0} = \mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0) \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_{q,l} = \mathbf{I}_{q,l}(\sigma_l).$$

□

Le choix de la décomposition en profils dépend de la zone de calcul  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma})$  que nous souhaitons considérer. Concrètement, pour réduire la taille du volume à mailler, nous avons tout intérêt à choisir pour domaine de calcul  $\mathcal{K}$ .

---

---

**DEUXIÈME PARTIE**

**MATHEMATICAL MODELING OF  
MULTI-CONDUCTORS CABLES**

---

---



# ELECTROMAGNETIC WAVES IN MULTI-CONDUCTORS CABLES

---

An electrical cable is a structure whose transverse dimensions are smaller than the longitudinal one. We want to study the propagation of electromagnetic waves along it. The electromagnetic fields are the solution of the 3D Maxwell's equation. These equations can be very complicated to solve : complex geometry due to defaults, 3D mesh for the thin cable... In particular, in order to have an efficient simulation tool for inverse problem, we want to find and to justify the use of a simplified 1D model that still reflects the complex 3D structure such as defaults. In such a situation, electrical engineers use the so-called telegrapher's equations where the electric unknowns are reduced to an electric potential  $V(x_3, t)$  and an electric current  $I(x_3, t)$ , where  $x_3$  denotes the abscissa along the cable and  $t$  denotes the time. The telegrapher's equation is generally used in the case of a "perfect" coaxial cable : this corresponds to the case where the domain of propagation is a cylindrical annulus, filled with a homogeneous dielectric (possibly conducting) medium, which surrounds a perfectly conducting cylinder (the inner wire) and is surrounded by another cylindrical perfectly conducting medium (the metallic shield). This model can be obtained by considering a little part of the cable as an infinitesimal quadripole RLCG and use Kirchhoff's circuit laws. If the intuition of quadripole is good, we cannot be satisfied with this method which use quantities that are not defined by Maxwell's equations.

For a mathematician, these equations can be, at least formally, derived from Maxwell's equation in the case of "perfect" and non-lossy coaxial cable. We can briefly expose the main idea. One starts from a modal representation of the solution of 3D time harmonic Maxwell's equations (decomposition into guided modes), which is valid due to the translation invariance of the propagation domain. In the case of a circular symmetry of the cross section, one can exploit the separation of variables in cylindrical coordinates to compute explicitly these guided modes (in terms of Bessel functions) as well as their dispersion relation. When it exists an inner wire, the so-called fundamental mode has no cut-off frequency and is the only one with such property. In other words, at sufficiently low frequency, there is only one propagative mode, the fundamental one and, roughly speaking, the telegrapher's equation can be obtained from a low frequency analysis of the equations governing this fundamental mode. A natural question is : what does the approximate model become in a more general and realistic situation, namely when each cross section is heterogeneous (physical characteristics of the medium vary in the cross section), the cable has a variable cross section and material properties along the cable (translation invariance and modal representations are lost) and when there are several inner conductors. Obviously, the possible benefits of such a work goes beyond the straightforward application to non destructive testing. Our objective is to derive a 1D effective model (let say a generalized telegrapher's equation) via an asymptotic analysis with respect to the (small) transverse dimensions of the cable, in the spirit of what has been done in applied mechanics for the justification of plate, shell or beam models ([4],[46], [58], [73]) from the 3D elasticity equations. It differs by the domain of application (electromagnetism) and the fact that we are considering evolution problems. A first step has been done in this direction in [39], [38] (and in [40] for error estimates), which treated the case of a co-axial cable containing a single metallic wire. Some issues raised in this paper and get solved in [11]. This model will be derived, studied and improved throughout this part.

We will describe mathematically a multi-conductors co-axial cable with  $Q \geq 1$  inner-wires as shawn in figure 3.1 in the case  $Q = 3$ .

## 3.1 Description of the geometry

We have two possible views on how to construct the geometry of these multi-conductors cables, the first one consists in defining it as a tube of variable cross-section (see equation 3.1), whereas the second one considers it

as a reference section and a continuous group of mapping. If the former is easier to grasp, the latter enables to use the tools of the free boundary (i-e shape dependent) problems (see appendix 13 for a presentation of some issues of shape analysis).

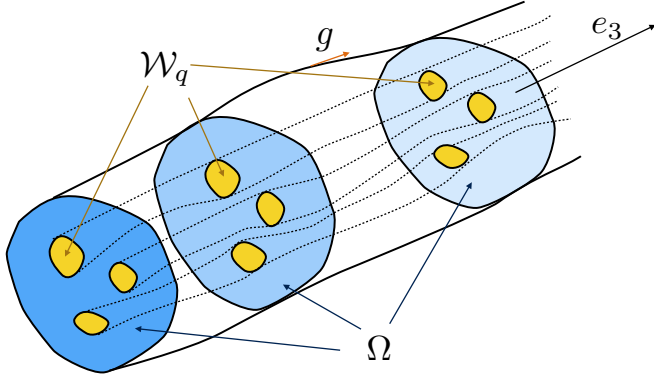


FIGURE 3.1 – Multi-conductors cable with 3 inner wires.

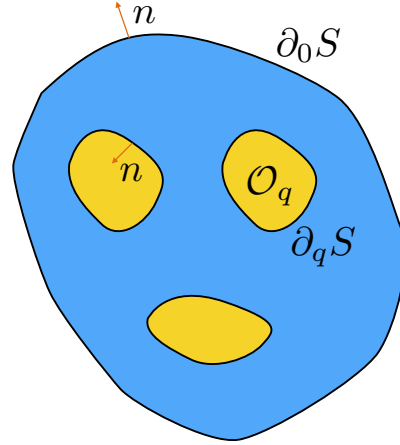


FIGURE 3.2 – Cross section of a multi-conductors cable with 3 inner wires.

### 3.1.1 First description : a tube of variable cross-section

A cable, of longitudinal axis  $\mathbf{e}_3$  (with  $x_3$  to denote the longitudinal variable), will be defined as the union of its cross sections (in the  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  plane)

$$\Omega = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} S_{x_3} \times \{x_3\}, \quad (3.1)$$

where for each  $x_3$  the cross-section  $S_{x_3}$  is a plane surface with  $Q$  holes as described in definition 11.2.1. According to the notations of this definition, the cross-section is given by

$$S_{x_3} = \mathcal{O}_0^{x_3} \setminus \bigcup_{q=1}^Q \mathcal{O}_q^{x_3}, \quad (3.2)$$

where all the domains  $\mathcal{O}_q^{x_3}$  for  $q = 0 \dots Q$  are simply connected domain. The domains  $\mathcal{O}_q^{x_3} \subset \mathcal{O}_0^{x_3}$  for  $q = 1 \dots Q$  are the "holes" of  $S_{x_3}$ , they define the metallic wires (filled by perfectly conducting metal)

$$\mathcal{W}_q = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \mathcal{O}_q^{x_3} \times \{x_3\}. \quad (3.3)$$

The multi-conductor cable  $\Omega$  is defined by

$$\Omega = \mathcal{W}_0 \setminus \bigcup_{q=1}^Q \mathcal{W}_q.$$

The cable  $\Omega$  is called a coaxial cable if there is a sole inner wire ( $Q = 1$ ). We assume that the cross sections are included within a bounded convex domain  $S_{x_3} \subseteq \mathcal{B}^*$  of diameter  $d_+^*$  and, in addition, the boundary  $\partial\Omega$  is a Lipschitz continuous manifold such that

$$\partial\Omega = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \partial S_{x_3} \times \{x_3\}.$$

Along the boundary  $\partial\Omega$ , we define the 2D vector field of unit normal vectors  $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  such that, along  $\partial S_{x_3}$ ,  $n$  is the unit normal vector to  $\partial S_{x_3}$ , outgoing with respect to  $S_{x_3}$ . On  $\partial\Omega$ , a field of (non unitary) normal vectors to  $\partial\Omega$ , outgoing with respect to  $\Omega$ , will be defined by

$$\mathbf{n} := (n, g) : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad n : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

In other words  $g$  denotes the longitudinal component of the normal vector to  $\partial\Omega$  whose projection on the  $(x_1, x_2)$  plane is  $n$ .

**Example 3.1.1.** An example for one inner-conductors ( $Q = 1$ ) is given by the case where  $\mathcal{O}_0^{x_3}$  and  $\mathcal{O}_1^{x_3}$  are star-like domains with respect to the origin. Given  $(r, \theta)$  the polar coordinates in the  $(x_1, x_2)$ -plane, this corresponds to the existence of two Lipschitz continuous functions  $0 < r_-(x_3, \theta) < r_+(x_3, \theta)$ ,  $2\pi$  periodic in  $\theta$ , such that

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid r_-(x_3, \theta) < r < r_+(x_3, \theta) \}.$$

We have along each part of the boundary

$$n_{\pm}(r, \theta) = \left( \cos \theta - \frac{\partial r_{\pm}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r_{\pm}}, \sin \theta + \frac{\partial r_{\pm}}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r_{\pm}} \right)^t, \quad g_{\pm}(r, \theta) = -\frac{\partial r_{\pm}}{\partial x_3}.$$

### 3.1.2 Second description : a reference section and a continus group of mapping

Now we will consider the case where the cross sections are obtained through smooth deformations of a reference section, the domain  $S$  of the same type of the one in (3.2), i-e, a plane surface with  $Q$  "holes" (described more precisely in definition 11.2.1), and included whitin a bounded convex domain  $\mathcal{B}^*$  of diameter  $d_+^*$  ( $S$  is defined as the cross sections of the previous subsections). More precisely, let  $(\mathcal{T}_{x_3})_{x_3 \in \mathbb{R}}$  be a group of diffeomorphisms of  $\mathcal{B}^*$  from which we define  $\mathcal{T} : \mathcal{B}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}^* \times \mathbb{R}$  such that

$$\mathcal{T}(x, x_3) := \mathcal{T}_{x_3}(x). \tag{3.5}$$

We define the cross sections as

$$\forall x_3 \in \mathbb{R}, \quad S_{x_3} = \mathcal{T}_{x_3} S. \tag{3.6}$$

If we assume that

$$\mathcal{T} \in C^1(\mathbb{R}, C^{0,1}(\mathcal{B}^*)) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^{-1} \in C^0(\mathbb{R}, C^{0,1}(\mathcal{B}^*)),$$

we can define the vector field  $\mathcal{V} \in C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  of eulerian velocities (we use this vocabulary by analogy with fluid mechanics, assuming that the variable  $x_3$  plays the role of the time), such that

$$y = \mathcal{T}(x, x_3) \equiv \mathcal{T}_{x_3}(x) \implies \mathcal{V}(y, x_3) = \partial_3 \mathcal{T}(x, x_3). \tag{3.7}$$

In the appendix 13, we have called  $(\mathcal{T}_{x_3})_{x_3 \in \mathbb{R}}$  "admissible group of mapping" and  $\mathcal{V}$  "admissible eulerian speed" field and we have seen that knowing one, it is knowing the other and knowing all the section  $S_{x_3}$  (in definition 13.1.3 we say that  $(S_{x_3})_{x_3 \in \mathbb{R}}$  is associated to  $\mathcal{V}$  or  $(\mathcal{T}_{x_3})_{x_3 \in \mathbb{R}}$ ). We can recover the first way to describe the geometry of the cable (the tubular one) with the knowledge of  $(\mathcal{T}_{x_3})_{x_3 \in \mathbb{R}}$  or  $\mathcal{V}$ . This way of thinking need more regularity about the geometry but allows us the use of the shape optimisation's tool and more specifically the "eulerian" shape derivative (see definition 13.2.1) that will be needing for technical intermediary lemmata. We will place ourselves in this mathematical framework.

#### Hypothesis 3.1.1. (Geometric regularities)

We assume that  $\partial S$  is a  $C^1 \cap W^{1,\infty}$  manifolds and  $\mathcal{T} \in C^1(\mathbb{R}, W^{1,\infty}(\overline{\mathcal{B}^*}, \overline{\mathcal{B}^*}))$ .

Since  $\mathcal{T}_{x_3}$  is regular<sup>1</sup> enough,  $S_{x_3}$  preserves the same topological properties ( $Q$  holes non degenerate) and regularity ( $\partial S_{x_3}$  is a  $C^1 \cap W^{1,\infty}$  manifold) as the reference section  $S$  (see [25]).

**Proposition 3.1.1.** We recover the longitudinal component of the normal vector to  $\partial\Omega$  from the eulerian velocity field

$$g(x_3) = -\mathcal{V}(x_3) \cdot n \Big|_{\partial S_{x_3}}. \tag{3.8}$$

*Proof.* We assume that  $u \in C^\infty(\Omega)$  and  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . By the Reynold's transport theorem we have :

$$\partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} u \right) = \int_{S_{x_3}} \partial_3 u + \int_{\partial S_{x_3}} (\mathcal{V} \cdot n) u$$

that we integrate over  $\varphi$  :

$$\int_{\Omega} \partial_3 u + \int_{\partial\Omega} (\mathcal{V} \cdot n) u = \int_{\mathbb{R}} \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} u(x, x_3) dx \right) \varphi(x_3) dx_3 = - \int_{\mathbb{R}} \int_{S_{x_3}} u(x, x_3) \partial_3 \varphi(x_3) dx dx_3 \tag{3.9}$$

---

1. Topolgy :  $\|\mathcal{T}_{x_3}\|_{W^{1,\infty}} := \sup_{x \neq \hat{x}} \left( |\mathcal{T}_{x_3}(x)| + \frac{|\mathcal{T}_{x_3}(x) - \mathcal{T}_{x_3}(\hat{x})|}{|x - \hat{x}|} \right)$

and through integration by parts in  $\Omega$ , denoting  $d\Sigma$  the surface measure on  $\partial\Omega$  (we use again that  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_T, g)^t$  is normal to  $\partial\Omega$  which implies that the third component of the outgoing unit normal vector to  $\partial\Omega$  is  $g/|\mathbf{n}|$ ) :

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \partial_3 \varphi(x_3) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \partial_3 u(\mathbf{x}) \varphi(x_3) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{g}{|\mathbf{n}|} u \varphi d\Sigma \quad (3.10)$$

and, as  $d\sigma_{x_3}$  denoted the lineic measure along  $\partial S_{x_3}$ , one easily checks the formula

$$d\Sigma = |\mathbf{n}| d\sigma_{x_3} dx_3$$

so that the equality (3.10) becomes

$$\int_{\Omega} u \partial_3 \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \partial_3 u \varphi d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g u \varphi d\sigma_{x_3} dx_3$$

so we have with (3.9)

$$\int_{\partial\Omega} (\mathcal{V} \cdot \mathbf{n}) u \varphi = - \int_{\partial\Omega} g u \varphi$$

□

The Reynolds transport theorem (see theorem 13.2.1) can be written as

$$\forall u \in W^{1,1}(S_{x_3}), \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} u \right) = \int_{S_{x_3}} \partial_3 u - \int_{\partial S_{x_3}} g u. \quad (3.11)$$

### 3.2 Dielectric materials' characteristics

L'objet est toujours déguisé par la couleur du milieu, au travers duquel il est aperçu.

---

Boulainvilliers

We shall consider a heterogeneous, anisotropic and lossy dielectric material which preserves the tubular structure

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} := \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_e := \begin{pmatrix} \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{e,3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_m := \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{m,3} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

whose transverse characteristics  $3 \times 3$  matrices, electric permittivity, magnetic permeability, electric and magnetic conductivities (responsible for losses), satisfy the usual assumptions of positive matrix for all  $\mathbf{x} \in \Omega$  and  $u \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_- |u|^2 &\leq (\varepsilon(\mathbf{x}) u, u)_{\mathbb{R}^2} \leq \varepsilon_+ |u|^2, & 0 < \mu_- |u|^2 &\leq (\mu(\mathbf{x}) u, u)_{\mathbb{R}^2} \leq \mu_+ |u|^2, \\ 0 \leq \sigma_{e,-} |u|^2 &\leq (\sigma_e(\mathbf{x}) u, u)_{\mathbb{R}^2} \leq \sigma_{e,+} |u|^2, & 0 \leq \sigma_{m,-} |u|^2 &\leq (\sigma_m(\mathbf{x}) u, u)_{\mathbb{R}^2} \leq \sigma_{m,+} |u|^2, \\ 0 < \varepsilon_- &\leq \varepsilon_3(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_+, & 0 < \mu_- &\leq \mu_3(\mathbf{x}) \leq \mu_+, \\ 0 \leq \sigma_{e,-} &\leq \sigma_{e,3}(\mathbf{x}) \leq \sigma_{e,+}, & 0 \leq \sigma_{m,-} &\leq \sigma_{m,3}(\mathbf{x}) \leq \sigma_{m,+} \end{aligned} \quad (3.13)$$

The cables are often made with several materials with different characteristic matrices. The interface between two materials can be interpreted as a discontinuity surfaces of the characteristic matrices. Consider  $\Sigma_0$  an union of  $C^1 \cap W^{1,\infty}$  non intersecting Jordan curve<sup>2</sup> include in  $S$  and  $\Sigma_{x_3} = \mathcal{T}_{x_3} \Sigma_0 \subset S_{x_3}$ . We do not even care about the choice of the orientation of the curvilinear abscissa and the normal. Moreover, we will assume that<sup>3</sup>

$$\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\sigma}_m \in W^{1,\infty} \left( \Omega \setminus \left( \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3} \times \{x_3\} \right), \mathcal{G}l_3(\mathbb{R}) \right) \quad (3.14)$$

Except in the chapter 4, we will assume that  $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_e$  and  $\boldsymbol{\sigma}_m$  will be scalar (that is to say matrices proportional to the identity) fields.

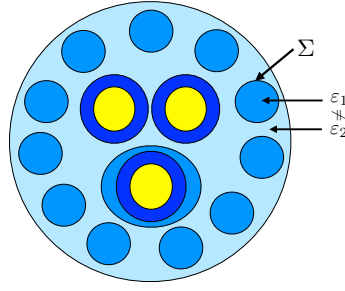


FIGURE 3.3 – Cross section of a cable made of different materials (the level of blue represents the difference)

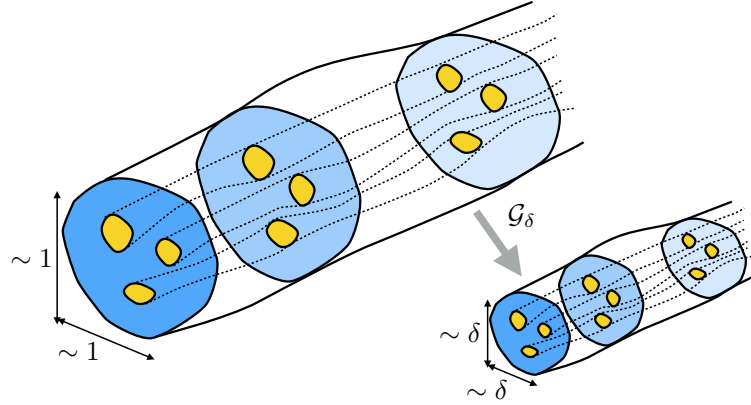


FIGURE 3.4 – Scaling to define a "thin" cable.

### 3.3 Maxwell's equation in "thin" cables

In fact the multi-conductors cables are "thin". We will now mathematically specify the word "thin". We consider a family of (thin) domains parametrized by a "small" but strictly positive scalar  $\delta$  (the diameter of the cross section of a usual cable in the plane  $x_3 = 0$ )

$$\Omega^\delta = \mathcal{G}_\delta(\Omega),$$

where  $\mathcal{G}_\delta$  is the scaling transformation  $\mathcal{G}_\delta : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (\delta x_1, \delta x_2, x_3)$ . We assume that the material properties of the thin cables are defined from those of the reference cable  $\Omega$  according to this scaling :

$$\varepsilon^\delta = \varepsilon \circ \mathcal{G}_\delta^{-1}, \quad \mu^\delta = \mu \circ \mathcal{G}_\delta^{-1}, \quad \sigma_e^\delta = \sigma_e \circ \mathcal{G}_\delta^{-1}, \quad \sigma_m^\delta = \sigma_m \circ \mathcal{G}_\delta^{-1}.$$

**Remark 3.3.1. Abuse of notation.** *In what follows, we will use the passage from  $\Omega$  to  $\Omega^\delta$  via the change of variable  $\mathcal{G}_\delta$ . To make things clearer, we will use the same letters  $(\mathbf{x}, \dots)$  for the coordinates in  $\Omega$  or  $\Omega^\delta$ .*

The equations that govern the propagation of electromagnetic waves in the cable  $\Omega^\delta$  are Maxwell's equations (**curl** is the 3D curl operator), whose unknowns are two time dependent vector fields  $E^\delta$  (the electric field) and  $H^\delta$  (the magnetic field), and the source is the current density  $\mathbf{J}_s^\delta$  :

$$\begin{cases} \varepsilon^\delta \partial_t E^\delta + \sigma_e^\delta E^\delta - \mathbf{curl} H^\delta = \mathbf{J}_s^\delta, & \text{in } \Omega^\delta, \quad t > 0, \\ \mu^\delta \partial_t H^\delta + \sigma_m^\delta H^\delta + \mathbf{curl} E^\delta = 0, & \text{in } \Omega^\delta, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.15)$$

completed with perfectly conducting boundary conditions

$$E^\delta \times \mathbf{n}^\delta = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega^\delta, \quad \text{for } t > 0, \quad (3.16)$$

2. A Jordan curve is a non-self-intersecting continuous loop in the plane  
 3.  $\mathcal{G}_3(\mathbb{R})$  is the set of invertible  $3 \times 3$  matrices



and zero initial conditions

$$E^\delta(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad H^\delta(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^\delta. \quad (3.17)$$

We will assume that for all  $T > 0$  the source belong to the usual functional framework

$$\mathbf{J}_s^\delta \in C^0 \left( [0, T[, H \left( \mathbf{Div}, \Omega^\delta \setminus \left( \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\} \right) \right) \cap L^2(\Omega^\delta) \right). \quad (3.18)$$

We can outline some consequences of the Maxwell's equations (3.15). Firstly, if we take the 3D divergence of (3.15), we have the hidden divergence equations ( $\mathbf{Div}$  is the 3D divergence operator) :

$$\begin{cases} \mathbf{Div} \left( (\boldsymbol{\varepsilon}^\delta \partial_t + \boldsymbol{\sigma}_e^\delta) E^\delta \right) = \mathbf{Div} \left( \mathbf{J}_s^\delta \right), & \text{in } \Omega^\delta, \quad t > 0, \\ \mathbf{Div} \left( (\boldsymbol{\mu}^\delta \partial_t + \boldsymbol{\sigma}_m^\delta) H^\delta \right) = 0, & \text{in } \Omega^\delta, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

We usually refer to  $\mathbf{Div} \left( \mathbf{J}_s^\delta \right)$  as the time derivative of the electrostatic charge.

Secondly, we can describe the usual transmission conditions of the electromagnetic fields across the interface  $(\Sigma_{x_3})_{S_{x_3} \in \mathbb{R}}$  of discontinuity of the characteristic coefficients.

**Property 3.3.1.** *If the source  $\mathbf{J}^\delta$  is enough regular*

$$\mathbf{J}_s^\delta(t) \in H \left( \mathbf{Div}, \Omega^\delta \setminus \left( \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\} \right) \right) \cap L^2(\Omega^\delta), \quad t \geq 0$$

then, we have the usual transmission conditions for the Maxwell's equations (3.15) at the interface  $(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})$

$$\begin{cases} [E^\delta \times \mathbf{n}_\Sigma^\delta]_{(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})} = [H^\delta \times \mathbf{n}_\Sigma^\delta]_{(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})} = \mathbf{0} \\ \left[ \left( (\boldsymbol{\varepsilon}^\delta \partial_t + \boldsymbol{\sigma}_e^\delta) E^\delta \right) \cdot \mathbf{n}_\Sigma^\delta \right]_{(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})} = [\mathbf{J}_s^\delta \cdot \mathbf{n}_\Sigma^\delta]_{(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})} \\ \left[ \left( (\boldsymbol{\mu}^\delta \partial_t + \boldsymbol{\sigma}_m^\delta) H^\delta \right) \cdot \mathbf{n}_\Sigma^\delta \right]_{(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

where

$$[\cdot]_{(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})}$$

stands for the jump<sup>4</sup> across the interface  $(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})$ .

In the same way  $E^\delta \times \mathbf{n}^\delta = \mathbf{0}$  on  $\partial\Omega^\delta$  implies

$$(\boldsymbol{\mu}^\delta \partial_t + \boldsymbol{\sigma}_m^\delta) H^\delta \cdot \mathbf{n}^\delta = 0 \quad \text{on } \partial\Omega^\delta.$$

**Remark 3.3.2.** *In contrast with the paper [11], we do weaker hypothesis :*

- $\boldsymbol{\varepsilon}^\delta, \boldsymbol{\mu}^\delta, \boldsymbol{\sigma}_e^\delta, \boldsymbol{\sigma}_m^\delta$  are not necessary scalar and continuous on the whole cable,
- the current source  $\mathbf{J}^\delta$  is not necessary transverse and solenoidal and continuous on the whole cable.

The permittivity is a macroscopic quantity linked to electrical polarization of the molecules which compose the dielectric material at microscopic scale. The anisotropy depends on orientation of the crystallographic axes. When the material is heated or strongly damaged, there is no reason for the material to be isotropic. For the purpose of our analysis we will assume the specific anisotropy described in (3.12). Since the current source is not solenoidal, it exists a charge density that moves in the cable. The consideration of discontinuities interfaces allows us to recover the case of cables constituting in different dielectric materials.

4. By definition (see equation (2.2)), the jump is

$$\forall \mathbf{x}_\tau \in \left( \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\} \right), [u]_{(\bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \Sigma_{x_3}^\delta \times \{x_3\})}(\mathbf{x}_\tau) := \lim_{\nu \rightarrow 0} [u(\mathbf{x}_\tau + \nu \mathbf{n}_{q,l}) - u(\mathbf{x}_\tau - \nu \mathbf{n}_{q,l})].$$

**Theorem 3.3.1.** *If the current density satisfy (3.18), then there exists unique solution*

$$E^\delta, H^\delta \in C^0\left([0, T[, L^2(\Omega^\delta)\right)$$

to the Maxwell's equations (3.15), with the boundary condition (3.16) and the initial data (3.17). Moreover this solution satisfy

$$\text{Div}\left((\varepsilon^\delta \partial_t + \sigma_e^\delta) E^\delta\right) \in C^0\left([0, T[, L^2(\Omega^\delta)\right)$$

and

$$\text{Div}\left((\mu^\delta \partial_t + \sigma_m^\delta) H^\delta\right) \in C^0\left([0, T[, L^2(\Omega^\delta)\right).$$

### 3.4 A scaling to work in the reference geometry

For the forthcoming asymptotic analysis, it is useful to work in the reference geometry  $\Omega$  with the rescaled electromagnetic fields

$$\tilde{E}^\delta = E^\delta \circ \mathcal{G}_\delta, \quad \tilde{H}^\delta = H^\delta \circ \mathcal{G}_\delta. \quad (3.21)$$

The longitudinal variable  $x_3$ , being invariant by  $\mathcal{G}_\delta$ , plays a different role compared to the transverse variables  $x := (x_1, x_2)$ . It is therefore natural to distinguish between transverse components

$$\tilde{E}_T^\delta = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1^\delta \\ \tilde{E}_2^\delta \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_T^\delta = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1^\delta \\ \tilde{H}_2^\delta \end{pmatrix}$$

of the electromagnetic fields from longitudinal ones  $\tilde{E}_3^\delta, \tilde{H}_3^\delta$ . Doing so, the parameter  $\delta$  will appear in the coefficients of the governing equations

$$\mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{T}}{\varphi}\right) \rightarrow \mathbf{grad}_\delta\left(\frac{\mathbf{T}}{\varphi}\right) := \begin{pmatrix} \delta^{-1} \nabla T \\ \partial_3 \varphi \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{curl}\left(\frac{\mathbf{T}}{\varphi}\right) \rightarrow \mathbf{curl}_\delta\left(\frac{\mathbf{T}}{\varphi}\right) := \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 \mathbf{T} + \delta^{-1} \mathbf{rot} \varphi \\ \delta^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T} \end{pmatrix}.$$

We can rewrite (3.15, 3.16, 3.20), with these new unknowns (note that a  $\delta^{-1}$  factor appears whenever a transverse derivative, in  $x_1$  or  $x_2$ , is involved). The electromagnetic fields in the thin multi-conductors cable  $\Omega^\delta$  are

$$E^\delta(x, x_3, t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_T^\delta \\ \tilde{E}_3^\delta \end{pmatrix} \left(\frac{x}{\delta}, x_3, t\right) \quad \text{and} \quad H^\delta(x, x_3, t) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_T^\delta \\ \tilde{H}_3^\delta \end{pmatrix} \left(\frac{x}{\delta}, x_3, t\right)$$

with  $(\tilde{E}_T^\delta, \tilde{E}_3^\delta, \tilde{H}_T^\delta, \tilde{H}_3^\delta)$  the solution of the (transverse scaled) Maxwell's equations (with null initial data) in the reference geometry  $\Omega$

$$\begin{cases} (\varepsilon \partial_t + \sigma_e) \tilde{E}_T^\delta - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{H}_T^\delta) - \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{H}_3^\delta = \hat{J}_{s,T}, & \text{in } \Omega, \quad t > 0, \\ (\varepsilon_3 \partial_t + \sigma_{e,3}) \tilde{E}_3^\delta - \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{H}_T^\delta = \hat{J}_{s,3}, & \text{in } \Omega, \quad t > 0, \\ (\mu \partial_t + \sigma_m) \tilde{H}_T^\delta + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_T^\delta) + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{E}_3^\delta = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \quad t > 0, \\ (\mu_3 \partial_t + \sigma_{m,3}) \tilde{H}_3^\delta + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{E}_T^\delta = 0, & \text{in } \Omega, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

with the boundary conditions (3.16) (multiplied by  $\delta^{-1}$  for convenience) on  $\partial\Omega$  for  $t > 0$

$$\delta^{-1} \tilde{E}_T^\delta \times n = \mathbf{0}, \quad \delta^{-1} \tilde{E}_3^\delta n - g \tilde{E}_T^\delta = 0, \quad \delta^{-1} \left( (\mu^\delta \partial_t + \sigma_m^\delta) \tilde{H}_T^\delta \right) \cdot n + g (\mu_3^\delta \partial_t + \sigma_{m,3}^\delta) \tilde{H}_3^\delta = 0, \quad (3.23)$$

and with the following transmission conditions<sup>5</sup>

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left[ \tilde{E}_T^\delta \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \tilde{H}_T^\delta \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \quad t > 0, \\ \left[ \tilde{E}_3^\delta n - \delta g_\Sigma \tilde{E}_T^\delta \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \tilde{H}_3^\delta n - \delta g_\Sigma \tilde{H}_T^\delta \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \quad t > 0, \\ \left[ \left( (\varepsilon^\delta \partial_t + \sigma_e^\delta) \tilde{E}_T^\delta \right) \cdot n + \delta g_\Sigma (\varepsilon_3^\delta \partial_t + \sigma_{e,3}^\delta) \tilde{E}_3^\delta \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \tilde{J}_{s,T}^\delta \cdot n + \delta g_\Sigma \tilde{J}_3^\delta \right]_{\Sigma_{x_3}} & \text{on } \Sigma_{x_3}, \quad t > 0, \\ \left[ \left( (\mu^\delta \partial_t + \sigma_m^\delta) \tilde{H}_T^\delta \right) \cdot n + \delta g_\Sigma (\mu_3^\delta \partial_t + \sigma_{m,3}^\delta) \tilde{H}_3^\delta \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (3.24)$$

with  $g_\Sigma$  the longitudinal component of the normal of the curve  $\Sigma_{x_3}$ .

Let us emphasize that the factor  $g$  corresponds to the speed of the deformation of the boundaries of the cable. If it is cylindrical one along the  $e_3$  direction then  $g = 0$ . This geometrical factor will clearly complicate futur study. A study of the cylindrical case will be done in chapter 6. We can already give information about the average of the magnetic field.

**Proposition 3.4.1.** *We have*

$$\int_{S_{x_3}} (\mu_3 \partial_t + \sigma_{m,3}) \tilde{H}_3^\delta = 0. \quad (3.25)$$

*Proof.* If we integrate the last equation of (3.22) and use the Green-Ostrogradski formula, we have

$$\int_{S_{x_3}} (\mu_3 \partial_t + \sigma_{m,3}) \tilde{H}_3^\delta \stackrel{(3.22)}{=} -\delta^{-1} \int_{S_{x_3}} \text{rot } \tilde{E}_T^\delta = -\delta^{-1} \left( \int_{\partial S_{x_3}} \tilde{E}_T^\delta \times n + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \tilde{E}_T^\delta \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} \right) \stackrel{(3.23, 3.24)}{=} 0.$$

□

Our aim will be to analyze the behavior of the solution of the electromagnetic fields when  $\delta$  tends to 0. The idea is to conjecture a formal power series expansion in  $\delta$  of the solution of (3.22).

## 3.5 Motivation and introduction to asymptotic analysis

et ideo stultitia magna est in hujus modi  
quaestione quam faciunt de individuatione

Guillaume d'Ockham

Our (formal) expansions in this section are fully justified provided that the functions we manipulate are smooth enough. This requires implicitly smoothness assumptions of the geometry (hypothesis 3.1.1) of the cable and of the coefficients of the problem. However, we are convinced that these assumptions can be removed at order 0.

### 3.5.1 Formal asymptotic expansions

We will consider that the parameter  $0 < \delta \ll 1$  is small and supposed to vanish ( $\delta \rightarrow 0$ ). We will do a dimensional analysis in the chapter 7 to specify the context of this hypothesis. Our approach consists in postulating a priori an asymptotic expansion in power series expansion of the form

$$\tilde{E}^\delta = \tilde{E}^0 + \delta \tilde{E}^1 + \delta^2 \tilde{E}^2 + \dots, \quad \tilde{H}^\delta = \tilde{H}^0 + \delta \tilde{H}^1 + \delta^2 \tilde{H}^2 + \dots, \quad (3.26)$$

and to identify and characterize the formal limit field  $(\tilde{E}^0, \tilde{H}^0)$  and their correctors  $(\tilde{E}^p, \tilde{H}^p)$ . For this, we substitute the expansions (3.26) into equations (3.22, 3.23, 3.24) and identify each power of  $\delta$  in the resulting series, which begins with the  $\delta^{-1}$  terms (because of the  $\delta^{-1}$  factors in (3.23)).

5. Conformally to (1.6), the jump across the 1D curve  $\Sigma_{x_3}$  is defined by

$$\forall x_\tau \in \Sigma_{x_3}, [\varphi]_{\Sigma_{x_3}}(x_\tau) := \lim_{\nu \rightarrow 0} (\varphi(x_\tau + \nu n) - \varphi(x_\tau - \nu n)).$$

**Definition 3.5.1.** *The electromagnetic fields at each order are defined as the solution in  $L^2(\Omega)$  of the following cascade of equations*

$$\begin{cases} (\varepsilon \partial_t + \sigma_e) \tilde{E}_T^p - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{H}_T^p) - \mathbf{rot} \tilde{H}_3^{(p+1)} = \delta_p^0 \tilde{J}_T, & \text{in } \Omega, t > 0 \\ (\varepsilon_3 \partial_t + \sigma_{e,3}) \tilde{E}_3^p - \mathbf{rot} \tilde{H}_T^{(p+1)} = \delta_p^0 \tilde{J}_3, & \text{in } \Omega, t > 0 \\ (\mu \partial_t + \sigma_m) \tilde{H}_T^p + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_T^p) + \mathbf{rot} \tilde{E}_3^{(p+1)} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, t > 0 \\ (\mu_3 \partial_t + \sigma_{m,3}) \tilde{H}_3^p + \mathbf{rot} \tilde{E}_T^{(p+1)} = 0, & \text{in } \Omega, t > 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

with the boundary conditions

$$\begin{cases} \tilde{E}_T^{(p+1)} \times n = \mathbf{0}, & \text{on } \partial\Omega, t > 0 \\ \tilde{E}_3^{(p+1)} n - g \tilde{E}_T^p = 0, & \text{on } \partial\Omega, t > 0 \\ (\mu \partial_t + \sigma_m) \tilde{H}_T^{(p+1)} \cdot n + g (\mu_3 \partial_t + \sigma_{m,3}) \tilde{H}_3^p = 0, & \text{on } \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

and the transmission conditions

$$\begin{cases} \left[ \tilde{E}_T^{(p+1)} \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \tilde{H}_T^{(p+1)} \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} = \mathbf{0} \\ \left[ \tilde{E}_3^{(p+1)} n - g_{\Sigma} \tilde{E}_T^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \tilde{H}_3^{(p+1)} n - g_{\Sigma} \tilde{H}_T^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 \\ \left[ (\varepsilon \partial_t + \sigma_e) \tilde{E}_T^{(p+1)} \cdot n + g_{\Sigma} (\varepsilon_3 \partial_t + \sigma_{e,3}) \tilde{E}_3^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = \delta_0^p \left[ \tilde{J}_T^\delta \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} + \delta_1^p \left[ g_{\Sigma} \tilde{J}_3^\delta \right]_{\Sigma_{x_3}} \\ \left[ (\mu \partial_t + \sigma_m) \tilde{H}_T^{(p+1)} \cdot n + \delta g_{\Sigma} (\mu_3 \partial_t + \sigma_{m,3}) \tilde{H}_3^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

and with the convention

$$\tilde{E}^p = \tilde{H}^p = 0 \quad \text{for } p < 0.$$

We shall also use the "hidden" divergence free equations

$$\begin{cases} \operatorname{div} ((\varepsilon \partial_t + \sigma_e) \tilde{E}_T^{(p+1)}) + \partial_{x_3} ((\varepsilon_3 \partial_t + \sigma_{e,3}) \tilde{E}_3^p) = \delta_0^{p+1} \operatorname{div} (\tilde{J}_T) + \delta_0^p \partial_3 \tilde{J}_3, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad (a) \\ \operatorname{div} ((\mu \partial_t + \sigma_m) \tilde{H}_T^{(p+1)}) + \partial_{x_3} ((\mu_3 \partial_t + \sigma_{m,3}) \tilde{H}_3^p) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad (b) \end{cases} \quad (3.30)$$

It is very important to realize that this system consists, amongst others things, of two div-rot problems, one on  $\tilde{E}_T^{(p+1)}$ , and an other one on  $\tilde{H}_T^{(p+1)}$  where the sources are the electromagnetic fields of order 0 to  $p$ . We will use what we do about div-rot problem in the chapter 1. In particular, since we do not work in simply connected domain, there will have some indeterminations (we will call these electrical potentials and currents) that will be describe with the other equations of the system that doesn't be div-rot problems.

The proposition 3.25 gives a precious information about the average of the magnetic longitudinal field :

$$\int_{S_{x_3}} (\mu \partial_t + \sigma_m) \tilde{H}_3^p = 0. \quad (3.31)$$

With this asymptotic assumption we will be able to prove (see proposition 4.1.1) that the limit field  $(\tilde{E}^0, \tilde{H}^0)$  is TEM (Transverse Electromagnetic Modes)<sup>6</sup> which is common for engineering books [59], [68], [56] and papers [75], [76] and an usual and essential hypothesis for the validity of telegrapher's model we aim to elaborate. By contrast, the higher orders  $(\tilde{E}^p, \tilde{H}^p)$  are not necessary transversely polarized.

Maxwell's electromagnetism theory	Telegrapher's circuit model
$E(x, x_3, t)$	$\mathbf{V}(x_3, t)$
$H(x, x_3, t)$	$\mathbf{I}(x_3, t)$
$\varepsilon(x, x_3)$	$\mathbf{C}_\infty(x_3)$
$\mu(x, x_3)$	$\mathbf{L}_\infty(x_3)$
$\sigma_e(x, x_3)$	$\mathbf{G}_\infty(x_3), \mathbf{K}_e(x_3, t)$
$\sigma_m(x, x_3)$	$\mathbf{R}_\infty(x_3), \mathbf{K}_m(x_3, t)$

TABLE 3.1 – From the electromagnetic theory to the "classical" electrical quantities

### 3.5.2 The expected 1D model

The 1D model that will be derived from our asymptotic analysis of the Maxwell's equations is based on the following telegrapher's equation :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_\infty(x_3) \partial_t \mathbf{V}^\delta + \mathbf{G}_\infty(x_3) \mathbf{V} + \int_0^t \mathbf{K}_e(x_3, t-s) \mathbf{V}^\delta(x_3, s) ds + \partial_3 \mathbf{I}^\delta = \mathbf{I}_s^\delta + O(\delta), \\ \mathbf{L}_\infty(x_3) \partial_t \mathbf{I}^\delta + \mathbf{R}_\infty(x_3) \mathbf{I}^\delta + \int_0^t \mathbf{K}_m(x_3, t-s) \mathbf{I}^\delta(x_3, s) ds + \partial_3 \mathbf{V}^\delta = O(\delta), \end{cases} \quad (3.32)$$

where the dimension of the vectors  $\mathbf{V}^\delta$ , the electrical potentials, and  $\mathbf{I}^\delta$ , the electrical courants, coincide with the number of inner wires and are defined from the electromagnetic fields (see table 3.1). Then the matrices  $\mathbf{C}_\infty$ ,  $\mathbf{L}_\infty$ ,  $\mathbf{G}_\infty$ ,  $\mathbf{R}_\infty$ ,  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{K}_m$  are computed from 2D consideration on each cross section. They depend of the geometry of the cross sections and the physical properties of the materials of the cable (that is to say  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon\sigma_e$  and  $\sigma_m$ ). The current source  $\mathbf{I}_s^\delta$  is defined from the source  $\mathbf{J}^\delta$ . If we step back of the memories terms  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{K}_m$ , the telegrapher's equation could be interpreted as a succession of infinitesimal RLCG quadripole (see figure 3.5). We will see a way to reconstruct an approximation of the electromagnetic fields from the quantities

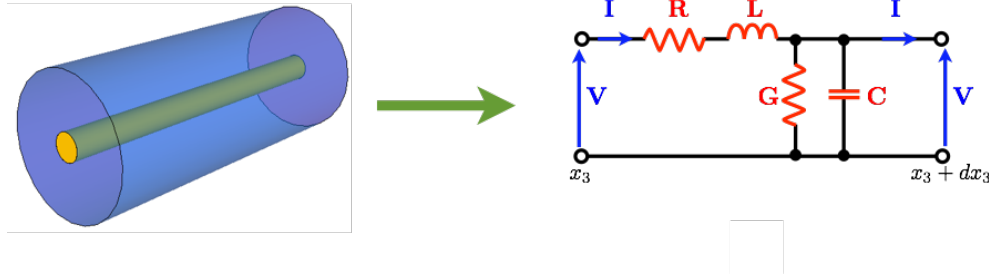


FIGURE 3.5 – The RLCG model

of this model (see proposition 4.1.2). We also study in the chapter 5 more accurate model.

### 3.5.3 Error estimates

The errors caused by our asymptotic expansion assumption in the Maxwell's equation are

$$\tilde{e}^{P,\delta} := \tilde{E}^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \tilde{E}^p \quad \text{and} \quad \tilde{h}^{P,\delta} := \tilde{H}^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \tilde{H}^p$$

We expect convergence results such that

$$\tilde{e}^{P,\delta}, \tilde{h}^{P,\delta} \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{L^2(\Omega)} 0.$$

and error estimation such the ones given in the following theorem.

**Theorem 3.5.1.** *Given  $P = 0, 1, 2$ . Assuming that  $\mathbf{J}^\delta$  is locally supported in time and*

$$\partial_3^k \mathbf{J}_s^\delta \in H^1(]0, T[, L^2(\Omega)), \quad \partial_3^k \mathbf{J}_{s,T}^\delta(\cdot, x_3) \in H^1(]0, T[, H(\mathbf{div}, S_{x_3})), \quad \text{for } 0 \leq k \leq P$$

6. A field is TEM iff it longitudinal component is null

then the errors are bounded

$$\|\tilde{\varepsilon}^{P,\delta}\|_{L^\infty(]0,T[, L^2(\Omega))} + \|\tilde{h}^{P,\delta}\|_{L^\infty(]0,T[, L^2(\Omega))} = O(\delta^{P+1}).$$

This will be proved in chapter 6 only for orders 0, 1 and 2 in the cylindrical case.

### 3.6 A remark on cables without inner-wire

Le réel n'est jamais "ce qu'on pourrait croire" mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser.

---

Bachelard, La formation de l'esprit scientifique

We said that the hypothesis of non simply connected cross-sections is crucial. We must carefully analyze the case of a thin transmission line without inner conductors (no holes  $Q = 0$ ) and we will show that it is not a wave guide along the longitudinal axis  $e_3$ . To simplify we assume that there is no losses  $\sigma_e = \sigma_m = 0$  and no interface of discontinuity  $\Sigma_0 = \emptyset$ .

**Proposition 3.6.1.** *If each section  $S_{x_3}$  of a transmission line  $\Omega$  are simply connected, then :*

$$E(x, x_3, t) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \begin{pmatrix} \nabla \hat{\xi}_e^0 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \frac{x}{\delta}, x_3, t \right) \quad \text{and} \quad H \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \mathbf{0}$$

with the electrostatic potential :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\varepsilon \nabla \hat{\xi}_e^0) = \int_0^t \mathbf{div} j_T(\cdot, x_3, s) ds, & \text{in } S_{x_3}, t > 0 \\ \hat{\xi}_e^0 = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, t > 0 \end{cases}$$

*Proof.* We have  $\mathbf{rot} H_3^0 = \mathbf{rot} E_3^0 = \mathbf{0}$  in  $S_{x_3}$  so  $\hat{H}_3^0$  and  $\hat{E}_3^0$  are function of  $x_3$  and  $t$  only. To conclude we remark with (3.28) and (3.31) that

$$\hat{E}_3^0(x_3, s)|_{\partial S_{x_3}} = 0 \quad \text{and} \quad \hat{H}_3^0(x_3, s) \int_{\widehat{S}_{x_3}} (s\mu_3 + \sigma_{m,3}) = 0.$$

Then with the transverse fields satisfy

$$\begin{cases} \mathbf{rot} E_T^0(\cdot, x_3, t) = 0, & \text{in } S_{x_3}, \\ \mathbf{div}(\varepsilon(\cdot, x_3) \partial_t E_T^0(\cdot, x_3, t)) = \mathbf{div} J_T(\cdot, x_3, t), & \text{in } S_{x_3}, \\ E_T^0(\cdot, x_3, \omega) \times n = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \hat{H}_T^0(\cdot, x_3, \omega) = 0, & \text{in } S_{x_3}, \\ \mathbf{div}(\hat{\mu}(\cdot, x_3, \omega) \hat{E}_T^0(\cdot, x_3, \omega)) = 0, & \text{in } S_{x_3}, \\ \hat{H}_T^0(\cdot, x_3, \omega) \cdot n = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}. \end{cases}$$

With the Helmholtz decomposition of the theorem 1.2.1 (and as say in the proposition 1.3.1 the harmonic spaces for simply connected domain are empty) we have

$$\hat{E}^0 = \begin{pmatrix} \nabla \hat{\xi}_e^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{H}^0 = 0.$$

□



# LIMIT TELEGRAPHER MODEL

---

Pluralitas non est ponenda sine necessitate

Guillaume d'Ockham

The present chapter is a verbatim of [11]. We aim at proposing a rigorous justification of simplified 1D models for the propagation of electromagnetic waves in thin transmission lines, in particular multi-conductors co-axial cables, that is to say a dielectric material which surrounds some metallic inner wires. Our approach consists in deriving such models from an asymptotic analysis of 3D Maxwell's equations, considering the transverse dimensions of the cable as the small parameter in the analysis. In this sense, our approach is similar to what has been done in applied mechanics when deriving the theory of beams from the equations of 3D elasticity [4], [46], [58], [73]. It differs by the domain of application (electromagnetism) and the fact that we are considering evolution problems. Doing so, we justify and extend the telegrapher's models classically used by electrical engineers [59], [68],[75], [76]. In this model the variables of interest are the electrical potential(s) and current(s). We must emphasize that the situation we consider in this chapter is rather general : the cable has a variable cross section of arbitrary geometry and the dielectric medium in which the electromagnetic field is propagating is heterogeneous, anisotropic (this is the only generalization of [11]) and lossy. This degree of generality is mandatory considering the application context that we have in mind, namely the non destructive testing of electrical networks : the presence of defaults or localized damages modifies the nice structure of a perfect cable. From the mathematical point of view, the absence of any cylindrical structure prevents us from using some tools such as Fourier transform in space or modal decomposition (separation of variables), which is done in some textbooks [24], [59]. We are able to recover some proprieties, such as TEM polarization, which are usually done as hypothesis. The outline of this chapter is as follows. In section 4.1, we perform the formal asymptotic analysis (in the Laplace domain) of this problem and establish, using the results of the chapter 1 about 2D fields, our generalized telegrapher's model (4.59). In section 4.2, we rewrite the previous model in time domain. Finally, in section 4.3, various properties of this model are established.

## 4.1 Derivation of the generalize telegrapher's model in frequency domain

We will recall some notations and the approach already raised in the introduction of the part. Our reference cable  $\Omega$ , obtained through the application of a scaling process on a thin cable  $\Omega^\delta$ , in the sense that the transverse dimension is of order  $\delta$ , is made of a succession of cross sections  $S_{x_3}$  which are plane surfaces with  $Q$  holes. We consider inside this cable the electromagnetic fields  $\tilde{E}^\delta, \tilde{H}^\delta$  (see equations (3.27,3.28)). To solve this 3D scaled Maxwell's equation, we speculate (see (3.26)) a polynomial expansion  $\tilde{E}^p, \tilde{H}^p$  (see equations (3.27,3.28)) in power of the thin parameter  $\delta$ . In this chapter we will deal about the limit terms  $\tilde{E}^0, \tilde{H}^0$  but we will need some considerations about the first order  $\tilde{E}^1, \tilde{H}^1$  to perform the analysis. It is useful to pass to the frequency domain  $\omega$  via a time Fourier transform :

$$\tilde{E}^p(\mathbf{x}, t) \mapsto \hat{E}^p(\mathbf{x}, \omega), \quad \tilde{H}^p(\mathbf{x}, t) \mapsto \hat{H}^p(\mathbf{x}, \omega), \quad \varepsilon \partial_t + \sigma_e \mapsto i\omega \varepsilon + \sigma_e \quad \text{and} \quad \mu \partial_t + \sigma_m \mapsto i\omega \mu + \sigma_e.$$

We will denote by

$$\hat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega) := \varepsilon(\cdot, x_3) + \frac{\sigma_e(\cdot, x_3)}{i\omega} \quad \text{and} \quad \hat{\mu}(\cdot, x_3, \omega) := \mu(\cdot, x_3) + \frac{\sigma_m(\cdot, x_3)}{i\omega}$$

the effective permittivity and permeability matrices in the frequency domain. The matrices  $\hat{\varepsilon}$  and  $\hat{\mu}$  satisfy the complex weight hypothesis 1.1.1 since  $\varepsilon, \mu, \sigma_e$  and  $\sigma_m$  satisfy the usual positivity assumption (6.10). Taking



into account zero as initial data, we obtain for each value of the frequency  $\omega$ , the following problem for the electromagnetic fields in frequency domain  $\widehat{E}^p, \widehat{H}^p$  (the index  $T$  (resp. 3) indicates the transverse (and resp. longitudinal) component of a 3D vector field)

$$\begin{cases} s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^p - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \widehat{H}_T^p) - \mathbf{rot} \widehat{H}_3^{(p+1)} = \delta_p^0 \widehat{J}_{s,T}, & \text{in } \Omega, \quad (a) \\ s \widehat{\varepsilon}_3 \widehat{E}_3^p - \mathbf{rot} \widehat{H}_T^{(p+1)} = \delta_p^0 \widehat{J}_{s,3}, & \text{in } \Omega, \quad (b) \\ s \widehat{\mu} \widehat{H}_T^p + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \widehat{E}_T^p) + \mathbf{rot} \widehat{E}_3^{(p+1)} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \quad (c) \\ s \widehat{\mu}_3 \widehat{H}_3^p + \mathbf{rot} \widehat{E}_T^{(p+1)} = 0, & \text{in } \Omega, \quad (d) \end{cases} \quad (4.1)$$

with the boundary conditions

$$\begin{cases} \widehat{E}_T^{(p+1)} \times n = 0, & \text{on } \partial\Omega, \quad (a) \\ \widehat{E}_3^{(p+1)} n - g \widehat{E}_T^p = 0, & \text{on } \partial\Omega, \quad (b) \\ \widehat{\mu} \widehat{H}_T^{(p+1)} \cdot n + g \widehat{\mu}_3 \widehat{H}_3^p = 0, & \text{on } \partial\Omega, \quad (c) \end{cases} \quad (4.2)$$

and the transmissions conditions (due to the presence of surfaces of discontinuities)

$$\begin{cases} \left[ \widehat{E}_T^{(p+1)} \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \widehat{H}_T^{(p+1)} \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 \\ \left[ \widehat{E}_3^{(p+1)} n - g_\Sigma \widehat{E}_T^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \widehat{H}_3^{(p+1)} n - g_\Sigma \widehat{H}_T^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 \\ \left[ s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^{(p+1)} \cdot n + g_\Sigma s \widehat{\varepsilon}_3 \widehat{E}_3^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = \delta_0^p \left[ \widehat{J}_{s,t} \cdot n \right]_\Sigma + \delta_1^p \left[ g_\Sigma \widehat{J}_{s,3} \right] \\ \left[ s \widehat{\mu} \widehat{H}_T^{(p+1)} \cdot n + \delta g_\Sigma s \widehat{\mu}_3 \widehat{H}_3^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

with the convention

$$\widehat{E}^p = \widehat{H}^p = 0 \quad \text{for } p < 0.$$

We shall also use the "hidden" divergence free equations :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^{(p+1)}) + \partial_{x_3} (\widehat{\varepsilon}_3 \widehat{E}_3^p) = \delta_0^{p+1} \operatorname{div} (\widehat{J}_{s,T}) + \delta_0^p \partial_3 \widehat{J}_{s,3}, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad (a) \\ \operatorname{div} (\widehat{\mu} \widehat{H}_T^{(p+1)}) + \partial_{x_3} (\widehat{\mu}_3 \widehat{H}_3^p) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega. \quad (b) \end{cases} \quad (4.4)$$

#### 4.1.1 Identification of the limit terms : transverse polarization

First we recover the usual assumption of TEM polarization made in many books or papers on transmission lines ([59], [75], [76]).

**Proposition 4.1.1.** *At order 0, the electromagnetic fields are TEM, that is to say the limit electromagnetic fields satisfy*

$$\widehat{E}_3^0 = \widehat{H}_3^0 = 0.$$

*Proof.* We have  $\mathbf{rot} \widehat{H}_3^0 = \mathbf{rot} \widehat{E}_3^0 = \mathbf{0}$  in  $S_{x_3}$  and  $\left[ \widehat{E}_3^0 \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \widehat{H}_3^0 \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0$  on the interface  $\Sigma_{x_3}$  so  $\widehat{H}_3^0$  and  $\widehat{E}_3^0$  are function of  $x_3$  and  $\omega$  only. To conclude we remark with (4.2-b) and (3.25) of proposition 3.4.1 that

$$\widehat{E}_3^0(x_3, \omega)|_{\partial S_{x_3}} = 0 \quad \text{and} \quad \widehat{H}_3^0(x_3, \omega) \int_{S_{x_3}} (i\omega\mu_3 + \sigma_{m,3}) = 0$$

□

Then we look for the transverse electromagnetic fields. They will appear as a 1D structure. At order 0 the equations (4.1, 4.2, 4.3, 4.4) become the following div-rot problems depending on the frequency  $\omega$  and the

longitudinal variable  $x_3$  (the longitudinal variable  $x_3$  can be seen as a shape parameter)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \widehat{E}_T^0(\cdot, x_3, \omega) = 0, & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}, \\ \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega) \widehat{E}_T^0(\cdot, x_3, \omega)) = \operatorname{div} \frac{\widehat{J}_{s,t}(\cdot, x_3, \omega)}{i\omega}, & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}, \\ \widehat{E}_T^0(\cdot, x_3, \omega) \times n = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}, \\ \left[ \widehat{E}_T^0(\cdot, x_3, \omega) \times n_\Sigma \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \\ \left[ \widehat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega) \widehat{E}_T^0(\cdot, x_3, \omega) \cdot n_\Sigma \right]_{\Sigma_{x_3}} = \frac{\left[ \widehat{J}_{s,t} \cdot n \right]_\Sigma(\cdot, x_3, \omega)}{i\omega} & \text{on } \Sigma_{x_3} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \widehat{H}_T^0(\cdot, x_3, \omega) = 0, & \text{in } S_{x_3}, \\ \operatorname{div}(\widehat{\mu}(\cdot, x_3, \omega) \widehat{H}_T^0(\cdot, x_3, \omega)) = 0, & \text{in } S_{x_3}, \\ \widehat{H}_T^0(\cdot, x_3, \omega) \cdot n = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

These problems are studied at great length in the chapter 1. The limit transverse fields solving the div-rot problem (4.5,4.6) for all  $x_3$  have a "kind of variable separation" structure described in the following proposition.

**Proposition 4.1.2.** *The limit transverse fields solving the div-rot problem (4.5,4.6) are of the form*

$$\widehat{E}_T^0(\cdot, x_3, \omega) = \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^0(x_3, \omega) \nabla \widehat{\varphi}_{e,q}(\cdot, x_3, \omega) + \nabla \widehat{\xi}_e^0(\cdot, x_3, \omega) \in L^2(S_{x_3}) \quad (4.7)$$

and

$$\widehat{H}_T^0(\cdot, x_3, \omega) = \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^0(x_3, \omega) \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q}(\cdot, x_3, \omega) \in L^2(S_{x_3}) \quad (4.8)$$

with the 1D electrical potentials  $\widehat{\mathbf{V}}^0 := \left( \widehat{V}_q^0 \right)_{q=1 \dots Q}$  and currents  $\widehat{\mathbf{I}}^0 := \left( \widehat{I}_q^0 \right)_{q=1 \dots Q}$ , the harmonic potentials

$$\widehat{\varphi}_{e,q}(\cdot, x_3, \omega) := \varphi^q(\widehat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \widehat{\psi}_{m,q}(\cdot, x_3, \omega) := \psi^q(\widehat{\mu}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3})$$

solutions of the equations (1.10) of the theorem 1.3.1 in subsection 1.3 (see also the equation (4.10)), and the electrostatic potential is the unique solution in  $H^1(S_{x_3})$  of the elliptic problem that followed

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\xi}_e^0) = \operatorname{div} \frac{\widehat{J}_{s,t}(\cdot, x_3, \omega)}{i\omega}, & \text{in } S_{x_3} \\ \widehat{\xi}_e^0 = 0, & \text{on } \partial S_{x_3} \\ \left[ \widehat{\xi}_e^0 \right]_\Sigma = 0, & \text{on } \Sigma_{x_3} \\ \left[ \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\xi}_e^0 \cdot n \right]_\Sigma = \frac{\left[ \widehat{J}_{s,t} \cdot n \right]_\Sigma(\cdot, x_3, \omega)}{i\omega}, & \text{on } \Sigma_{x_3}. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

*Proof.* We know that there exist solutions of the div-rot problem (4.5, 4.6) since the compatibility conditions, the hypothesis 1.1.1 of complex weight and the smoothness assumption about the domains are satisfied (see theorem 1.4.1). To characterize these solutions, we use the Helmholtz decompositions of the theorem 1.2.1

$$\widehat{E}_T^0(\cdot, x_3, \omega) = \nabla \widehat{\xi}_e^0(\cdot, x_3, \omega) + e \quad \text{and} \quad \widehat{H}_T^0(\cdot, x_3, \omega) = h.$$

with

$$e \in \mathcal{E}(\widehat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}) \quad \text{and} \quad h \in \mathcal{H}(\widehat{\mu}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3})$$

We have seen in the theorem 1.3.1 in the subsection 1.3 that the harmonic spaces are spanned by the gradient of the harmonic potentials

$$\widehat{\varphi}_{e,q}(\cdot, x_3, \omega) := \varphi^q(\widehat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \widehat{\psi}_{m,q}(\cdot, x_3, \omega) := \psi^q(\widehat{\mu}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}).$$

□

Formulae (4.7) and (4.8) express a generalized separation of variables, valid at the limit  $\delta \rightarrow 0$  (generalization in the sense that if there is cylindrical symmetry, that is to say,  $g = 0$  and  $\hat{\varepsilon}$  and  $\hat{\mu}$  independent of  $x_3$ , then  $\hat{\varphi}_{e,q}$  and  $\hat{\psi}_{m,q}$  do not depend of  $x_3$ ). The fields  $\nabla\varphi_{e,j}(\cdot, x_3, \omega)$  and  $\tilde{\nabla}\psi_{m,j}(\cdot, x_3, \omega)$  can be precomputed by solving 2D boundary value problems in the cross sections  $S_{x_3}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\hat{\varepsilon}\nabla\hat{\varphi}_{e,q}) = 0, & \text{in } S, \\ \hat{\varphi}_{e,q} = 0, & \text{on } \partial_0 S, \\ \hat{\varphi}_{e,q} = \delta_{qk}, & \text{on } \partial_k S, \quad k \leq Q, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\hat{\mu}\nabla\hat{\psi}_{m,q}) = 0, & \text{in } S_{x_3} \setminus \Gamma_q, \\ \hat{\mu}\nabla\hat{\psi}_{m,q} \cdot n = 0, & \text{on } \partial S, \\ [\hat{\psi}_{m,q}]_{\Gamma_q} = 1, & \text{on } \Gamma_q, \\ [\hat{\mu}\nabla\hat{\psi}_{m,q} \cdot n]_{\Gamma_q} = 0 & \text{on } \Gamma_q. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

This kind of harmonic potentials are also found in [58] for elasticity. There remains to find the equations that determine the functions  $V_q^0(x_3, \omega)$  and  $I_q^0(x_3, \omega)$ , which will provide us with our effective model, the generalized telegrapher's model. For this we need to proceed to the next step of the identification process.

### 4.1.2 Establishment of the telegrapher's equation in the frequency domain

**Proposition 4.1.3.** *The electrical potentials and currents are solution of the telegrapher's equation*

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\omega \hat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega) \hat{\mathbf{V}}^0(x_3, \omega) + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^0(x_3, \omega) = \hat{\mathbf{I}}_s(x_3, \omega), & (a) \\ i\omega \hat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega) \hat{\mathbf{I}}^0(x_3, \omega) + \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^0(x_3, \omega) = 0, & (b) \end{array} \right. \quad (4.11)$$

The admittance  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and the impedance  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  are defined as the  $Q \times Q$  Gram matrix of the harmonic spaces

$$\hat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega) := \hat{\mathbf{Y}}(\hat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}), \quad \hat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega) := \hat{\mathbf{Z}}(\hat{\mu}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}), \quad (4.12)$$

(see the equation (1.13,1.14) in subsection 1.3) that is to say

$$(\hat{\mathbf{Y}}_e)_{q,q'} = \int_{S_{x_3}} \hat{\varepsilon} \nabla \hat{\varphi}_{e,q} \cdot \nabla \hat{\varphi}_{e,q'} \quad \text{and} \quad (\hat{\mathbf{Z}}_m)_{q,q'} = \int_{S_{x_3}} \hat{\mu} \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q} \cdot \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q'}.$$

The current source is defined by

$$\hat{\mathbf{I}}_s^0(x_3, \omega) = (\hat{I}_{s,q}(x_3, \omega))_{1 \leq q \leq Q} \quad \text{with} \quad \hat{I}_{s,q}^0(x_3, \omega) = \int_{S_{x_3}} \hat{J}_{s,T} \cdot \overline{\nabla \hat{\varphi}_{e,q}}. \quad (4.13)$$

We did an exhaustive study of the matrices  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  in the section 1.3. In particular we know (see lemma 1.3.2) that there are invertible symmetric matrices with eigenvalues of positive real part and that they are invariant under conformal mapping (see lemma 1.3.2 for much more explanations). To demonstrate this proposition, we first need to prove that  $\partial_3 \hat{E}_T^0 \in L^2(S_{x_3})$  and  $\partial_3 \hat{H}_T^0 \in L^2(S_{x_3})$  because we will take the  $L^2$  scalar product, in each cross section  $S_{x_3}$ , of (4.1-a) with each  $\nabla \hat{\varphi}_{e,q}$  and of (4.1-c) with each  $\tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q}$ . So we need to give a signification of  $\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q}$  and  $\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}$ . To do it, we need to use the tools of shape optimization (see the appendix 13 or the monographs [25],[37]). This is the reason why we must make the assumption that  $\partial S_{x_3}$  is a  $C^1 \cap W^{1,\infty}$  manifold in the hypothesis 3.1.1.

**Proposition 4.1.4.** *The "eulerian" shape derivative (see definition 13.2.1) of  $\hat{\varphi}_{e,j}$  and  $\hat{\psi}_{m,q}$  exists if the hypothesis 3.1.1 is satisfied and they are solutions the solution*

$$\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q} \in H^1(S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \in H^1(S_{x_3})$$

of the elliptic problems

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\hat{\varepsilon}\nabla(\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q})) = -\mathbf{div}((\partial_3 \hat{\varepsilon})\nabla \hat{\varphi}_{e,q}), & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3} \\ \partial_3 \hat{\varphi}_{e,q} = g \partial_n \hat{\varphi}_{e,q} & \text{on } \partial S_{x_3} \\ [\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q}]_{\Sigma} = [g \partial_n \hat{\varphi}_{e,q}]_{\Sigma} & \text{on } \Sigma_{x_3} \\ [\hat{\varepsilon}\nabla(\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q}) \cdot n]_{\Sigma} = -[(\partial_3 \hat{\varepsilon})\nabla \hat{\varphi}_{e,q} \cdot n]_{\Sigma} - [\mathbf{div}_{\Sigma}(g \nabla \hat{\varphi}_{e,q})]_{\Sigma} & \text{on } \Sigma_{x_3} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

and

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \hat{\mu} \nabla (\partial \hat{\psi}_{m,q}) \right) = -\operatorname{div} \left( \partial_3 (\hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \right), & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3} \\ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n = -(\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n - \operatorname{div}_{\partial S} \left( g \nabla \hat{\psi}_{m,q} \right) & \text{on } \partial S_{x_3} \\ \left[ \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma} = \left[ g \partial_n \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma} & \text{on } \Sigma_{x_3} \\ \left[ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Sigma} = - \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Sigma} - \left[ \operatorname{div}_{\Sigma} \left( g_{\sigma} \nabla \hat{\psi}_{m,q} \right) \right]_{\Sigma} & \text{on } \Sigma_{x_3} \end{cases} \quad (4.15)$$

with  $\operatorname{div}_{\partial S}$  and  $\operatorname{div}_{\Sigma}$  the curvilinear divergence operator on  $\partial S_{x_3}$  and  $\Sigma_{x_3}$  (see appendix 10).

*Proof.* We will use shape derivatives calculus tools' described in the appendix 13.

**Step 1 : existence and uniqueness of a solution of (4.14) and of (4.15)**

If  $S$  satisfies the hypothesis 3.1.1, then  $\hat{\varphi}_{e,q} \in H^2(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})$  and  $\hat{\psi}_{m,q} \in H^2(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})$ , so  $\partial_n \hat{\varphi}_{e,q} \in L^2(\partial S_{x_3})$  and  $\operatorname{div}_{\Gamma_q} \left( g \nabla \hat{\psi}_{m,q} \right) \in H^{-\frac{1}{2}}$ , therefore there exists a unique solution  $\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q} \in H^1(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})$  to the equation (4.14) and  $\partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \in H^1(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})/\mathbb{C}$ . We now must check that  $\partial_3 \hat{\varphi}_{e,j}$  and  $\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}$  are in fact the "eulerian" shape derivatives of  $\hat{\varphi}_{e,j}$  and  $\hat{\psi}_{m,q}$ . We will do it only for the second since it is the more complicated term.

**Step 2 : the eulerian shape derivative of  $\hat{\psi}_{m,q}$  is the unique solution of (4.15)** Consider  $u \in H^2(S_{x_3})$ . Firstly since  $\hat{\psi}_{m,q} \in H^2(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})$  we have along the discontinuity curve  $\Sigma_{x_3}$

$$\left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \nabla \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \partial_n \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3}} + \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau \partial_{\tau} \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau \partial_{\tau} \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3}}. \quad (4.16)$$

Similarly we have along the artificial cut

$$\begin{aligned} \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \nabla \bar{u} \right]_{\Gamma_q \setminus \Sigma_{x_3}} &= \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau \partial_{\tau} \bar{u} \right]_{\Gamma_q \setminus \Sigma_{x_3}} \\ &= \left[ (\hat{\mu} \tau) \cdot n \right]_{\Gamma_q \setminus \Sigma_{x_3}} \partial_{\tau} \hat{\psi}_{m,q} \partial_{\tau} \bar{u} + \left[ (\hat{\mu} n) \cdot \tau \right]_{\Gamma_q \setminus \Sigma_{x_3}} \partial_n \hat{\psi}_{m,q} \partial_{\tau} \bar{u} = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

and on the boundary

$$(\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \nabla \bar{u} \Big|_{\partial S_{x_3}} = (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau (\partial_{\tau} \bar{u}) \Big|_{\partial S_{x_3}}. \quad (4.18)$$

We have with the equation (1.11) in remark 1.3.1

$$\int_{S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \cup \Gamma_q)} \hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot \nabla \bar{u} = 0.$$

We do the  $x_3$ -derivative of the previous equality with the Reynold's transport theorem (3.11)

$$\begin{aligned} &\int_{S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \cup \Gamma_q)} (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot \nabla \bar{u} + \int_{S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \cup \Gamma_q)} \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \nabla \bar{u} \\ &\quad - \int_{\partial S_{x_3}} g \hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot \nabla \bar{u} - \int_{\Gamma_q \setminus \Sigma_{x_3}} g \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \nabla \bar{u} \right]_{\Gamma_q \setminus \Sigma_{x_3}} - \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} g \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \nabla \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} = 0 \end{aligned}$$

then with (4.16, 4.17, 4.18), we have

$$\begin{aligned} &\int_{S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \cup \Gamma_q)} (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot \nabla \bar{u} + \int_{S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \cup \Gamma_q)} \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \nabla \bar{u} \\ &\quad - \int_{\partial S_{x_3}} g (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau (\partial_{\tau} \bar{u}) - \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} g \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau \partial_{\tau} \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

The interface  $\Sigma_{x_3}$  is a set of  $N$  Jordan's curves  $\Sigma_{x_3}^n$ , so there exists a finite partition  $(S_{x_3}^n)_{n \leq N+1}$  such that the connected boundaries of  $S_{x_3}^n$  is constituted of some  $\Sigma_{x_3}^k$  with  $k \leq N$  and some  $\partial_q S$  with  $q \leq Q$ . Among the  $S_{x_3}^n$ , there are  $\tilde{K}$  ones that have one of the  $\partial_q S$  for connected boundary, and we denote them by  $\tilde{S}_{x_3}^k$  for  $\tilde{k} \leq \tilde{K}$ .

If we take a test function  $u \in H_0^2(S_{x_3}^n)$ , the equation (4.19) becomes

$$\int_{S_{x_3}^n \setminus \Gamma_q} (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot \nabla \bar{u} + \int_{S_{x_3}^n \setminus \Gamma_q} \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \nabla \bar{u} = 0,$$

then by the Green's formula (10.18)

$$\int_{S_{x_3}^n \setminus \Gamma_q} \mathbf{div} \left( (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \right) \bar{u} = - \int_{S_{x_3}^n \setminus \Gamma_q} \mathbf{div} \left( \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \right) \bar{u}.$$

Thus

$$\mathbf{div} \left( (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} = -\mathbf{div} \left( \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \right) \quad \text{in } S_{x_3} \setminus (\Gamma_q \cup \Sigma_{x_3}).$$

In particular we have

$$\mathbf{div} \left( (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \right) \in L^2(S_{x_3} \setminus (\Gamma_q \cup \Sigma_{x_3})) \Rightarrow \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{x_3}).$$

By the Green's formula and the previous consideration, the equation (4.19) becomes

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S_{x_3} \setminus \Gamma_q} (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \bar{u} + \int_{\partial S_{x_3} \setminus \Gamma_q} \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \bar{u} - \int_{\partial S_{x_3}} g(\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau (\partial_\tau \bar{u}) \\ & \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} \bar{u} + \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} \left[ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} \bar{u} - \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} g \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau \partial_\tau \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} \\ & + \int_{\Gamma_q} \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Gamma_q} \bar{u} + \int_{\Gamma_q} \left[ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Gamma_q} \bar{u} = 0 \quad (4.20) \end{aligned}$$

If we take a test function  $u \in H^2(\tilde{S}_{x_3}^k)$  that vanish on each connected curve of the boundaries  $\tilde{S}_{x_3}^k$  except on one of the  $\partial_q S_{x_3}$  for  $q \leq Q$  such that  $\partial_q S_{x_3} \subset \tilde{S}_{x_3}^k$ , we have with (4.20)

$$\int_{\partial_q S_{x_3} \setminus \Gamma_q} (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \bar{u} + \int_{\partial_q S_{x_3} \setminus \Gamma_q} \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \bar{u} - \int_{\partial_q S_{x_3}} g(\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau (\partial_\tau \bar{u}).$$

With the curvilinear Green's formula (10.24), we have

$$\int_{\partial_q S_{x_3}} g(\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau (\partial_\tau \bar{u}) = - \int_{\partial_q S_{x_3}} \mathbf{div}_{\partial S} (g \hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \bar{u} + \int_{\partial_q S} k_{\partial S} g(\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \bar{u},$$

then with the boundary conditions of  $\hat{\psi}_{m,q}$ , we have

$$\int_{\partial_q S_{x_3} \setminus \Gamma_q} \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \bar{u} = - \int_{\partial_q S_{x_3} \setminus \Gamma_q} (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \bar{u} - \int_{\partial_q S_{x_3}} \mathbf{div}_{\partial S} (g \hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \bar{u},$$

so

$$\hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \big|_{\partial_q S} = -(\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \mathbf{div}_{\partial S} (g \hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}).$$

With this new information, (4.20) becomes

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} \bar{u} + \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} \left[ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} \bar{u} - \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} g \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau \partial_\tau \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} \\ & + \int_{\Gamma_q} \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Gamma_q} \bar{u} + \int_{\Gamma_q} \left[ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Gamma_q} \bar{u} = 0 \quad (4.21) \end{aligned}$$

If we take a test function  $u \in H_0^2(S_{x_3}^n)$ , (4.23) becomes

$$\int_{\Gamma_q \cap S_{x_3}^n} \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Gamma_q} \bar{u} + \int_{\Gamma_q \cap S_{x_3}^n} \left[ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Gamma_q} \bar{u} = 0,$$

thus

$$\left[ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Gamma_q} = - \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Gamma_q}, \quad (4.22)$$

and (4.23) becomes

$$\int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} \bar{u} + \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} \left[ \hat{\mu} \nabla (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} \bar{u} - \int_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} g \left[ (\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \cdot \tau \partial_\tau \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3} \setminus \Gamma_q} = 0 \quad (4.23)$$

and again with the curvilinear Green's formula (10.24), we have

$$\left[ \hat{\mu} \nabla(\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} = - \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} - \left[ \mathbf{div}_{\Sigma} (g \hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) \right]_{\Sigma_{x_3}}.$$

We integrate the condition  $\left[ \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0$  over a test function  $u \in H^3(S_{x_3})$  on  $\Sigma_{x_3}$

$$\int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma_{x_3}} \bar{u} = 0$$

and derive it along  $x_3$  with the curvilinear Reynold's transport theorem :

$$\int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma_{x_3}} \bar{u} - \int_{\Sigma_{x_3}} g \left( \left[ \partial_n (\hat{\psi}_{m,q} \bar{u}) \right]_{\Sigma_{x_3}} + k_{\Sigma} \left[ \hat{\psi}_{m,q} \bar{u} \right]_{\Sigma_{x_3}} \right) = 0$$

with  $k_{\Sigma}$  the curvature of  $\Sigma_{x_3}$ . Since  $\left[ \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0$ , we have

$$\left[ \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma_{x_3}} = g \left[ \partial_n \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma_{x_3}}.$$

With the same reasoning, we have

$$\left[ \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Gamma_q} = g \left[ \partial_n \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Gamma_q} = 0. \quad (4.24)$$

We finally recover the system (4.15) except for (4.22, 4.24). Since neither  $\hat{\mu}$  nor  $\partial_3 \hat{\mu}$  jump across  $\Gamma_q \setminus \Sigma_{x_3}$ , we have

$$\left[ \partial_{\tau} \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Gamma_q} = 0 \quad \text{and} \quad \left[ \partial_n \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Gamma_q} = 0.$$

We thus have with (4.24)

$$\left[ \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Gamma_q} = 0.$$

We then have with (4.22)

$$\left[ \hat{\mu} \nabla(\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}) \cdot n \right]_{\Gamma_q} = - \left[ (\partial_3 \hat{\mu}) \nabla \hat{\psi}_{m,q} \cdot n \right]_{\Gamma_q} = -(\partial_3 \hat{\mu} \tau \cdot n) \left[ \partial_{\tau} \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Gamma_q} - (\partial_3 \hat{\mu} n \cdot n) \left[ \partial_n \hat{\psi}_{m,q} \right]_{\Gamma_q} = 0.$$

**Step 2 : the eulerian shape derivative of  $\hat{\varphi}_{e,i}$  is the unique solution of (4.14)** The proof is quite similar to the one of the step 2 but easier. □

We remark that  $\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}$  does not depend of the artificial cut  $\Gamma_q$ . With these shape derivatives we can demonstrate the following very helpful lemma.

**Lemma 4.1.1.** *We have the bi-orthogonal relation*

$$\left( \nabla \hat{\varphi}_{e,j}, \widetilde{\mathbf{rot}} \hat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} = - \left( \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,j}, \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} = \delta_i^j$$

Moreover, if  $S_{x_3}$  checks the regularity assumptions of the hypothesis 3.1.1, then

- (i)  $\left( \partial_3 \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,j}, \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} + \int_{\partial S_{x_3}} g \partial_n \hat{\varphi}_{e,j} \overline{\partial_{\tau} \hat{\psi}_{m,i}} + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_{\Sigma} \partial_n \hat{\varphi}_{e,j} \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_{\tau} \hat{\psi}_{m,i}} = 0,$
- (ii)  $\left( \partial_3 \widetilde{\mathbf{rot}} \hat{\psi}_{m,j}, \nabla \varphi_{e,i} \right)_{L^2(S_{x_3}^{\Gamma})} + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_{\Sigma} \partial_n \hat{\psi}_{m,j} \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_{\tau} \varphi_{e,i}} = 0,$
- (iii)  $\left( \partial_3 \mathbf{rot} \hat{\xi}_e^0, \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} + \int_{\partial S_{x_3}} g \partial_n \hat{\xi}_e^0 \overline{\partial_{\tau} \hat{\psi}_{m,i}} + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_{\Sigma} \partial_n \hat{\xi}_e^0 \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_{\tau} \hat{\psi}_{m,i}} = 0,$

with  $\tilde{\partial}_{\tau} \cdot := \tilde{\nabla} \cdot \times n$ .

*Proof.* We recall (by the Green's formula (10.19)) that we have for all  $a, b \in L^2(S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \cup \Gamma))$ .

$$\left( \mathbf{rot} a, \nabla b \right)_{L^2(S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \cup \Gamma))} = \int_{\partial S_{x_3}} a \overline{\nabla b \times n} d\sigma_{\partial S} + \int_{\Gamma} [a \overline{\nabla b \times n}]_{\Gamma} d\sigma_{\Gamma} + \int_{\Sigma_{x_3}} [a \overline{\nabla b \times n}]_{\Sigma_{x_3}} d\sigma_{\Sigma}.$$

**Proof of bi-orthogonal relation** We choose  $a = \widehat{\psi}_{m,i}$  and  $b = \widehat{\varphi}_{e,j}$  and then since  $\widehat{\varphi}_{e,j}|_{\partial S_{x_3}}$ ,  $[\widehat{\varphi}_{e,j}]_{\Sigma}$  and  $[\widehat{\varphi}_{e,j}]_{\Gamma}$  are constant along  $\partial S_{x_3}$ ,  $\Sigma$  and  $\Gamma$  and since  $[\widehat{\psi}_{m,i}]_{\Gamma} = 1$  and  $[\widehat{\psi}_{m,i}]_{\Sigma} = 0$ , we have :

$$\left( \nabla \widehat{\varphi}_{e,j}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} = - \int_{\Gamma} \partial_{\tau} \widehat{\varphi}_{e,j} = 1$$

(it is the same proof as the of the bi-orthogonal relation of lemma 1.3.1).

**Proof of (i)** We choose  $a = \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j}$  and  $b = \widehat{\psi}_{m,i}$ . Since  $[\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j}]_{\Gamma} = 0$  and  $[\widehat{\psi}_{m,i}]_{\Gamma}$  and  $[\widehat{\psi}_{m,i}]_{\Sigma}$  are constant we have

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,j}, \nabla \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(\widetilde{S}_{x_3}^{\Gamma})} = - \int_{\partial S_{x_3}} \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j} \overline{\partial_{\tau} \widehat{\psi}_{m,i}} - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j} \overline{\partial_{\tau} \widehat{\psi}_{m,i}} \right]_{\Sigma_{x_3}} \quad (4.25)$$

and by shape derivative calculus (4.14)

$$\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j}|_{\partial S_{x_3}} = g \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j} \quad \text{and} \quad \left[ \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j} \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ g_{\Sigma} \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j} \right]_{\Sigma_{x_3}}$$

so we have the wanted formula.

**Proof of (ii)** We choose  $a = \partial_3 \widehat{\psi}_{e,i}$  and  $b = \widehat{\varphi}_{e,j}$ . Since  $\widehat{\varphi}_{e,j}|_{\partial S_{x_3}}$ ,  $[\widehat{\varphi}_{e,j}]_{\Sigma}$  and  $[\widehat{\varphi}_{e,j}]_{\Gamma}$  are constant along  $\partial S_{x_3}$ ,  $\Sigma$  and  $\Gamma$  and since  $[\partial_3 \widehat{\psi}_{m,i}]_{\Gamma} = 0$ , we have

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_3} \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,i}, \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} \right)_{L^2(\widetilde{S}_{x_3}^{\Gamma})} = - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \frac{\partial \widehat{\psi}_{m,i}}{\partial x_3} \overline{\frac{\partial \widehat{\varphi}_{e,j}}{\partial \tau}} \right]_{\Sigma_{x_3}}.$$

and by shape derivative calculus (4.15) :

$$\left[ \partial_3 \widehat{\psi}_{m,i} \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ g_{\Sigma} \partial_n \widehat{\psi}_{m,i} \right]_{\Sigma_{x_3}}$$

so we have the wanted formula.

**Proof of (iii)** With the same consideration for the bi-orthogonal relation we have :

$$\left( \nabla \widehat{\xi}_e^0, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} = - \int_{\Gamma} \partial_{\tau} \widehat{\xi}_e^0 = 0 \quad \text{since} \quad \widehat{\xi}_e^0|_{\partial S_{x_3}} = 0$$

We derive the previous equality according to the shape parameter  $x_3$  and use the Reynold's transport theorem :

$$\begin{aligned} & \left( \partial_3 \nabla \widehat{\xi}_e^0, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} + \left( \nabla \widehat{\xi}_e^0, \partial_3 \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} \\ & - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_{\Sigma} \nabla \widehat{\xi}_e^0 \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,i} \right]_{\Sigma_{x_3}} - \int_{\partial S_{x_3}} g \nabla \widehat{\xi}_e^0 \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,i} = 0 \end{aligned}$$

then we have

$$\left( \nabla \widehat{\xi}_e^0, \partial_3 \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} = - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \frac{\partial \widehat{\psi}_{m,i}}{\partial x_3} \overline{\frac{\partial \widehat{\xi}_e^0}{\partial \tau}} \right]_{\Sigma_{x_3}} = - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_{\Sigma} \partial_n \widehat{\psi}_{m,i} \overline{\partial_{\tau} \widehat{\xi}_e^0} \right]_{\Sigma_{x_3}}$$

□

We have now all the tools to prove the proposition 4.1.3.





and

$$\begin{aligned}
& i\omega \sum_{j=1}^Q \left( \widehat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega) \right)_{i,j} \widehat{\mathbf{I}}_j + \sum_{j=1}^Q \partial_3 \widehat{V}_j \left( \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,j}, \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} \\
& - \sum_{j=1}^Q \widehat{V}_j \left( \left( \partial_3 \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,j}, \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} + \int_{\partial S_{x_3}} g \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,i}} + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_\Sigma \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j} \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,i}} \right) \\
& - \left( \left( \partial_3 \mathbf{rot} \widehat{\xi}_e^0, \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} + \int_{\partial S_{x_3}} g \partial_n \widehat{\xi}_e^0 \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,i}} + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_\Sigma \partial_n \widehat{\xi}_e^0 \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,i}} \right) = 0
\end{aligned}$$

To end we use the lemma 4.1.1. □

We can rewrite the telegrapher's equation (4.11) as two waves equations.

**Proposition 4.1.5.** *The electrical potentials  $\widehat{\mathbf{V}}^0$  and currents  $\widehat{\mathbf{I}}^0$  are solution of*

$$\begin{cases} \partial_3^2 \widehat{\mathbf{I}}^0 - \left( \partial_3 \widehat{\mathbf{Y}}_e \right) \widehat{\mathbf{Y}}_e^{-1} \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^0 + \omega^2 \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{I}}^0 & = - \left( \partial_3 \widehat{\mathbf{Y}}_e \right) \widehat{\mathbf{Y}}_e^{-1} \left( \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}_s \right) + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}_s \\ \partial_3^2 \widehat{\mathbf{V}}^0 - \left( \partial_3 \widehat{\mathbf{Z}}_m \right) \widehat{\mathbf{Z}}_m^{-1} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^0 + \omega^2 \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}}^0 & = \omega^2 \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{I}}_s \end{cases} \quad (4.32)$$

with the eulerian shape derivative (if  $\Sigma = \emptyset$ )

$$\partial_3 \widehat{\mathbf{Y}}_e = \int_{S_{x_3}} \partial_3 \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} + \int_{\partial S_{x_3}} g \left( \widehat{\varepsilon} n \cdot n \right) \partial_n \widehat{\varphi}_{e,i} \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j} \quad (4.33)$$

$$\partial_3 \widehat{\mathbf{Z}}_m = \int_{S_{x_3}} \partial_3 \widehat{\mu} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,i} \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,j} - \int_{\partial S_{x_3}} g \left( \widehat{\mu} n \cdot n \right) \widetilde{\partial}_\tau \widehat{\psi}_{m,i} \widetilde{\partial}_\tau \widehat{\psi}_{m,j}. \quad (4.34)$$

*Proof.* The rewriting in order 1 is left to the reader.

### Shape derivative of $\widehat{\mathbf{Y}}_e$

By definition of  $\widehat{\mathbf{Y}}_e$ , we have

$$\left( \widehat{\mathbf{Y}}_e \right)_{i,j} = \int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_{e,j}.$$

We derive the previous equation by  $x_3$  with the use of the Reynold's transport theorem (3.11)

$$\begin{aligned}
\partial_3 \left( \widehat{\mathbf{Y}}_e \right)_{i,j} &= \int_{S_{x_3}} \partial_3 \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} \\
&+ \int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla \left( \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i} \right) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} + \int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \cdot \nabla \left( \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j} \right) \\
&- \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_{e,j}
\end{aligned} \quad (4.35)$$

Since  $\widehat{\varphi}_{e,i}$  is constant along the boundary  $\partial S_{x_3}$ , we have

$$\widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \Big|_{\partial S_{x_3}} = \left( \widehat{\varepsilon} n \right) \partial_n \widehat{\varphi}_{e,i} \quad (4.36)$$

so we have for the fourth term of (4.35) become

$$\int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} = \int_{\partial S_{x_3}} g \left( \widehat{\varepsilon} n \cdot n \right) \partial_n \widehat{\varphi}_{e,i} \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j}.$$

With the 2D Green's formula (10.18) we have for the second term of (4.35)

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla \left( \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i} \right) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} = \int_{\partial S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} \cdot n \left( \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i} \right) - \int_{S_{x_3}} \mathbf{div} \left( \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} \right) \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i} \stackrel{(4.36)}{=} \int_{\partial S_{x_3}} \left( \widehat{\varepsilon} n \cdot n \right) \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j} \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i},$$

then we use the PDE (4.14) of the eulerian shape derivative  $\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i}$  :

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla (\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i}) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_{e,j} = \int_{\partial S_{x_3}} g (\widehat{\varepsilon} n \cdot n) \partial_n \widehat{\varphi}_{e,i} \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j}$$

Similarly we have for the third term

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \cdot \nabla (\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j}) = \int_{\partial S_{x_3}} g (\widehat{\varepsilon} n \cdot n) \partial_n \widehat{\varphi}_{e,i} \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j}$$

and we obtain so the wanted expression.

### Shape derivative of $\widehat{\mathbf{Z}}_m$

By definition of  $\widehat{\mathbf{Z}}_m$ , we have

$$\left( \widehat{\mathbf{Z}}_m \right)_{i,j} = \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,i} \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,j},$$

We derive the previous equation by  $x_3$  with the use of the Reynold's transport theorem (3.11)

$$\begin{aligned} \partial_3 \left( \widehat{\mathbf{Z}}_m \right)_{q,q'} &= \int_{S_{x_3}} \partial_3 \widehat{\mu} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,i} \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,j} + \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \nabla (\partial_3 \widehat{\psi}_{m,i}) \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,j} + \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{e,i} \cdot \nabla (\partial_3 \widehat{\psi}_{m,j}) \\ &\quad - \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{\mu} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,i} \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,j} - \int_{\Gamma_i} g [\widehat{\mu} \nabla \widehat{\psi}_{m,i} \cdot \nabla \widehat{\psi}_{m,j}]_{\Gamma_i} - \int_{\Gamma_j} g [\widehat{\mu} \nabla \widehat{\psi}_{m,i} \cdot \nabla \widehat{\psi}_{m,j}]_{\Gamma_j} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Since

$$[\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,i}]_{\Gamma_i} = [\partial_n \widehat{\psi}_{m,i}]_{\Gamma_i} = [\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,i}]_{\Gamma_j} = [\partial_n \widehat{\psi}_{m,i}]_{\Gamma_j} = 0$$

the fifth and sixth terms of (4.37) become null. We have for the fourth term of (4.37) (since  $\partial_n \widehat{\psi}_{m,i}|_{\partial S_{x_3}} = 0$ )

$$\int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{\mu} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,i} \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,j} = \int_{\partial S_{x_3}} g (\widehat{\mu} n \cdot n) \partial_\tau \widehat{\psi}_{m,i} \partial_\tau \widehat{\psi}_{m,j},$$

and with the 2D Green's formula (10.18) and the equation (4.15) we have nullity of the second and third terms :

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \nabla (\partial_3 \widehat{\psi}_{m,i}) \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,j} = 0 \quad \text{and} \quad \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{e,i} \cdot \nabla (\partial_3 \widehat{\psi}_{m,j}) = 0.$$

□

## 4.2 Derivation of the generalized telegrapher's model in time domain

Hiver était le seul maître des temps,  
Lorsque Vénus sortit du sein de l'onde ;  
Son premier souffle enfanta le printemps,  
Et le printemps fit éclore le monde.

Nerval, Caligula - Ier chant

Our objective is to find the time domain formulation of equation (4.11). This is done formally by an inverse Fourier applied on (4.11). We shall do it in a way that emphasizes energy preservation (or dissipation) relations and the related stability properties of the resulting evolution problem. Since all the weights  $\rho = \varepsilon, \mu$  are symmetric positive definite matrices the space

$$L^2(S_{x_3}, \rho dx) := \left\{ \mathbf{u} : S_{x_3} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \int_{S_{x_3}} |\rho^{1/2} \mathbf{u}|^2 < \infty \right\}$$

with the inner product

$$\left( \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)_{L^2(S_{x_3}, \rho dx)} = \int_{S_{x_3}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

is an Hilbert space.

### 4.2.1 High frequency behavior

We introduce the high frequency behavior of the functions

$$\widehat{\varphi}_{e,j} \text{ and } \widehat{\psi}_{m,j}.$$

These high frequency limits are naturally defined after noticing that

$$\widehat{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon \text{ and } \widehat{\mu} \rightarrow \mu \text{ when } \omega \rightarrow \pm\infty.$$

This justifies the introduction of the "high frequency potentials"

$$\varphi_{e,j}^\infty(\cdot, x_3) := \varphi_j(\varepsilon(\cdot, x_3), S_{x_3}), \quad \psi_{m,j}^\infty(\cdot, x_3) := \psi_j(\mu(\cdot, x_3), S_{x_3}), \quad (4.38)$$

as well as the (frequency dependent) "residual functions"

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{e,j}^r(\cdot, x_3, \omega) &:= \widehat{\varphi}_{e,j}(\cdot, x_3, \omega) - \varphi_{e,j}^\infty(\cdot, x_3), \\ \widehat{\psi}_{m,j}^r(\cdot, x_3, \omega) &:= \widehat{\psi}_{m,j}(\cdot, x_3, \omega) - \psi_{m,j}^\infty(\cdot, x_3). \end{aligned} \quad (4.39)$$

**Remark 4.2.1.** *If  $\sigma_e(x_3, \cdot)$  and  $\sigma_m(x_3, \cdot)$  are proportional to  $\varepsilon(x_3, \cdot)$  and to  $\mu(x_3, \cdot)$  in  $S_{x_3}$  of order  $\delta$ , then*

$$\widehat{\varphi}_{e,j}(\cdot, x_3, \omega) = \varphi_{e,j}^\infty(\cdot, x_3) \quad \text{and} \quad \widehat{\psi}_{m,j}(\cdot, x_3, \omega) = \psi_{m,j}^\infty(\cdot, x_3)$$

Owing to the definition of  $\varphi_{e,j}^\infty$ , we remark that  $\widehat{\varphi}_{e,j}^r \in H^1(S_{x_3})$  is the unique solution of

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,j}^r) = -\frac{1}{i\omega} \operatorname{div}(\sigma_e \nabla \varphi_{e,j}^\infty), & \text{in } S_{x_3}, \\ \widehat{\varphi}_{e,j}^r = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (4.40)$$

Multiplying this equation by  $\overline{\widehat{\varphi}_{e,j}^r}$ , we get the relation

$$\int_{S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}} (i\omega \varepsilon + \sigma_e) \nabla \widehat{\varphi}_{e,j}^r \cdot \overline{\nabla \widehat{\varphi}_{e,j}^r} = - \int_{S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}} \sigma_e \nabla \varphi_{e,j}^\infty \cdot \overline{\nabla \widehat{\varphi}_{e,j}^r},$$

which enables us to deduce the following estimates (by simply taking the imaginary and the real part of the previous equality)

$$\|\nabla \widehat{\varphi}_{e,j}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \frac{1}{\varepsilon_- |\omega|} \|\sigma_e \nabla \varphi_{e,j}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}, \quad (4.41)$$

$$\|\sigma_e^{1/2} \nabla \widehat{\varphi}_{e,j}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \|\sigma_e^{1/2} \nabla \varphi_{e,j}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}. \quad (4.42)$$

Similarly, the residual function  $\widehat{\psi}_{m,j}^r \in H^1(S_{x_3})$  is the unique solution of

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\mu} \nabla \widehat{\psi}_{m,j}^r) = -\frac{1}{i\omega} \operatorname{div}(\sigma_m \nabla \psi_{m,j}^\infty), & \text{in } S_{x_3}, \\ \widehat{\mu} \nabla \widehat{\psi}_{m,j}^r \cdot n = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (4.43)$$

and satisfies

$$\|\nabla \widehat{\psi}_{m,j}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \frac{1}{\mu_- |\omega|} \|\sigma_m \widetilde{\nabla} \psi_{m,j}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})},$$

$$\|\sigma_m^{1/2} \nabla \widehat{\psi}_{m,j}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \|\sigma_m^{1/2} \widetilde{\nabla} \psi_{m,j}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}.$$

The high frequency decomposition (4.39) yields the following proposition.

**Proposition 4.2.1.** *The matrices  $\widehat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega)$  and  $\widehat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega)$  satisfy*

$$i\omega \widehat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega) = i\omega \mathbf{C}_\infty(x_3) + \mathbf{G}_\infty(x_3) + \widehat{\mathbf{K}}_e(x_3, \omega), \quad (4.44)$$

$$i\omega \widehat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega) = i\omega \mathbf{L}_\infty(x_3) + \mathbf{R}_\infty(x_3) + \widehat{\mathbf{K}}_m(x_3, \omega), \quad (4.45)$$

where, the  $Q \times Q$  real symmetric non negative matrices  $(\mathbf{C}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{L}_\infty, \mathbf{R}_\infty)$  are defined by

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_\infty)_{qq'} &:= \int_{S_{x_3}} \varepsilon \nabla \varphi_{e,q}^\infty \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty, & (\mathbf{G}_\infty)_{qq'} &:= \int_{S_{x_3}} \sigma_e \nabla \varphi_{e,q}^\infty \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty, \\ (\mathbf{L}_\infty)_{qq'} &:= \int_{S_{x_3}} \mu \tilde{\nabla} \psi_{m,q}^\infty \cdot \tilde{\nabla} \psi_{m,q'}^\infty, & (\mathbf{R}_\infty)_{qq'} &:= \int_{S_{x_3}} \sigma_m \tilde{\nabla} \psi_{m,q}^\infty \cdot \tilde{\nabla} \psi_{m,q'}^\infty. \end{aligned} \quad (4.46)$$

The matrices  $\mathbf{C}^\infty$  and  $\mathbf{L}^\infty$  are positive definite,  $\mathbf{C}^\infty$  is a strict M-matrix and  $\mathbf{L}^\infty$  is the inverse of a strict M-matrix (and so all its coefficients are strictly positive). The matrices  $\mathbf{G}^\infty$  and  $\mathbf{R}^\infty$  are positive (but not necessary invertible). Finally, the frequency dependent symmetric matrices  $(\hat{\mathbf{K}}_e, \hat{\mathbf{K}}_m)$ , called the "memories kernels" are defined by

$$(\hat{\mathbf{K}}_e)_{qq'}(x_3, \omega) = \int_{S_{x_3}} \sigma_e \nabla \hat{\varphi}_{e,q}^r(x_3, \omega) \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty(x_3), \quad (\hat{\mathbf{K}}_m)_{qq'}(x_3, \omega) = \int_{S_{x_3}} \sigma_m \nabla \hat{\psi}_{m,q}^r(x_3, \omega) \cdot \tilde{\nabla} \psi_{m,q'}^\infty(x_3). \quad (4.47)$$

All the matrices  $\hat{\mathbf{Y}}_e, \hat{\mathbf{Z}}_m, \mathbf{C}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{L}_\infty, \mathbf{R}_\infty, \hat{\mathbf{K}}_e$  and  $\hat{\mathbf{K}}_m$  are invariant by (piecewise) conformal map<sup>1</sup> in the sense of the lemma 1.3.2.

*Proof.* By definition of  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  (see (1.13)), we have

$$(\hat{\mathbf{Y}}_e)_{qq'} = \int_{S_{x_3}} \hat{\varepsilon} \nabla \hat{\varphi}_{e,q} \cdot \nabla \hat{\varphi}_{e,q'}.$$

Then by using remark 1.3.1 with  $\rho = \hat{\varepsilon}$  and  $\varphi^* = \hat{\varphi}_{e,q'}^r$ , we have

$$(\hat{\mathbf{Y}}_e)_{qq'} = \int_{S_{x_3}} \hat{\varepsilon} \nabla \hat{\varphi}_{e,q} \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty.$$

Then we introduce the high frequency behavior of  $\hat{\varphi}_{e,q}$

$$(\hat{\mathbf{Y}}_e)_{qq'} = \int_{S_{x_3}} \varepsilon \nabla \hat{\varphi}_{e,q} \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty dx + \int_{S_{x_3}} \sigma_e \nabla \varphi_{e,q}^\infty \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty dx + \int_{S_{x_3}} \frac{\sigma_e}{i\omega} \nabla \hat{\varphi}_{e,q}^r \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty dx.$$

Using again remark 1.3.1 with  $\rho = \varepsilon$  and  $\varphi^* = \hat{\varphi}_{e,q}^r$ , we can simply further the previous expression :

$$(\hat{\mathbf{Y}}_e)_{qq'} = \int_{S_{x_3}} \varepsilon \nabla \varphi_{e,q}^\infty \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty dx + \int_{S_{x_3}} \sigma_e \nabla \varphi_{e,q}^\infty \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty dx + \int_{S_{x_3}} \frac{\sigma_e}{i\omega} \nabla \hat{\varphi}_{e,q}^r \cdot \nabla \varphi_{e,q'}^\infty dx,$$

which concludes the proof of the decomposition. The symmetry property of  $(\hat{\mathbf{K}}_e, \hat{\mathbf{K}}_m)$  is a direct consequence of the obvious symmetry of  $(\mathbf{C}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{L}_\infty, \mathbf{R}_\infty)$  and of  $(\hat{\mathbf{Y}}_e, \hat{\mathbf{Z}}_m)$  (as proven in lemma 1.3.2). The properties of the matrices  $\mathbf{C}^\infty$  and  $\mathbf{L}^\infty$  are a straightforward application of lemma 1.3.3 and 1.3.12. The invariance by conformal map is a consequence of lemma 1.3.2.  $\square$

**Lemma 4.2.1.** The "memory kernels"  $\hat{\mathbf{K}}_e(x_3, \cdot)$  and  $\hat{\mathbf{K}}_m(x_3, \cdot)$  which are functions of the frequency satisfy

$$\hat{\mathbf{K}}_e(x_3, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}_Q(\mathbb{C})), \quad \hat{\mathbf{K}}_m(x_3, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}_Q(\mathbb{C})),$$

and, for all  $u \in \mathbb{C}^Q$ ,

$$\begin{aligned} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \Re([\mathbf{G}_\infty(x_3) + \hat{\mathbf{K}}_e(x_3, \omega)]u, u)_{\mathbb{C}} &\geq 0, \\ \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \Re([\mathbf{R}_\infty(x_3) + \hat{\mathbf{K}}_m(x_3, \omega)]u, u)_{\mathbb{C}} &\geq 0. \end{aligned}$$

*Proof.* Using (4.47), Cauchy-Schwartz inequality and estimate (4.41), we get

$$|(\hat{\mathbf{K}}_e)_{ij}| \leq \|\nabla \hat{\varphi}_{e,i}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \|\sigma_e \nabla \varphi_{e,j}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \frac{1}{\mu_- |\omega|} \|\sigma_e \nabla \varphi_{e,i}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})} \|\sigma_e \nabla \varphi_{e,j}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}.$$

1. a transformation whose jacobian is locally a direct similitude

In a similar way, using (4.42) we can deduce a uniform, frequency independent, bound on  $(\widehat{\mathbf{K}}_e)_{ij}(x_3, \cdot)$  :

$$|(\widehat{\mathbf{K}}_e)_{ij}| \leq \left\| \sigma_e^{1/2} \nabla \widehat{\varphi}_{e,i}^r \right\|_{L^2(S_{x_3})} \left\| \sigma_e^{1/2} \nabla \varphi_{e,j}^\infty \right\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \left\| \sigma_e^{1/2} \nabla \varphi_{e,i}^\infty \right\|_{L^2(S_{x_3})} \left\| \sigma_e^{1/2} \nabla \varphi_{e,j}^\infty \right\|_{L^2(S_{x_3})}.$$

Combining the two previous estimates we deduce the first result of the lemma which can be proven for  $\mathbf{K}_m$  in a very similar way. Next the positivity property follows from the simple observation that

$$\Re([\mathbf{G}_\infty(x_3) + \widehat{\mathbf{K}}_e(x_3, \omega)]u, u)_\mathbb{C} = \Re(\widehat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega)u, u)_\mathbb{C} = \Re\left(\int_{S_{x_3}} (\sigma_e \nabla \widehat{\varphi}_e(u), \widehat{\varphi}_e(u))_\mathbb{C}\right) \geq \int_{S_{x_3}} \sigma_{e,-} |\nabla \widehat{\varphi}_e(u)|^2$$

which defines a positive matrix since  $\sigma_{e,-} \geq 0$ .  $\square$

## 4.2.2 The "memory kernels" $\mathbf{K}_e$ and $\mathbf{K}_m$ in time domain

Let us introduce by a definition the functions for all  $x_3$  :

$$\mathbf{K}_e(x_3, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}_Q(\mathbb{R})), \quad \text{and} \quad \mathbf{K}_m(x_3, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}_Q(\mathbb{R})), \quad (4.48)$$

defined as the inverse Fourier transforms (in time) of  $\widehat{\mathbf{K}}_e(x_3, \omega)$  and  $\widehat{\mathbf{K}}_m(x_3, \omega)$

$$\forall x_3 \in \mathbb{R}, \quad (\mathbf{K}_e(x_3, \cdot), \mathbf{K}_m(x_3, \cdot)) := \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathbf{K}}_e(x_3, \cdot), \widehat{\mathbf{K}}_m(x_3, \cdot)).$$

Note that the regularity (4.48) follows from lemma 4.2.1 and Plancherel's theorem. We are going to give below a characterization, directly in time domain, of the functions  $\mathbf{K}_e(x_3, t)$  and  $\mathbf{K}_m(x_3, t)$  that will demonstrate in particular that they, as expected, are causal functions. This characterization will also be useful from both theoretical and computational points of view.

### The potentials $\varphi_{e,j}^r$ and $\psi_{m,j}^r$ in time domain

Looking at (4.53) suggests an introduction of the causal function  $\varphi_{e,j}^r(x, x_3, t)$  defined by  $\varphi_{e,j}^r(x_3, x, t) = 0$  for  $t < 0$  and solution, for  $t \geq 0$ , of the Cauchy problem

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi_{e,j}^r + \sigma_e \nabla \varphi_{e,j}^r\right) = 0, & \text{in } S_{x_3}, \\ \varphi_{e,j}^r = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (4.49)$$

with the initial data  $\varphi_{e,j}^r(t=0)$  solution of

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \varphi_{e,j}^r(t=0)) = -\operatorname{div}(\sigma_e \nabla \varphi_{e,j}^\infty), & \text{in } S_{x_3}, \\ \varphi_{e,j}^r(t=0) = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (4.50)$$

and looking at (4.43) suggests the introduction of the causal function  $\psi_{m,j}^r(x_3, x, t)$  as the causal function solution of the following evolution problem

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi_{m,j}^r + \sigma_m \nabla \psi_{m,j}^r\right) = 0, & \text{in } S_{x_3}, \\ \left(\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi_{m,j}^r + \sigma_m \nabla \psi_{m,j}^r\right) \cdot n = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (4.51)$$

with the initial data  $\varphi_{e,j}^r(t=0)$  solution of

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu \nabla \psi_{m,j}^r(t=0)) = -\operatorname{div}(\sigma_m \nabla \psi_{m,j}^\infty), & \text{in } S_{x_3}, \\ \left(\mu \nabla \psi_{m,j}^r(t=0)\right) \cdot n = -\left(\sigma_m \nabla \psi_{m,j}^\infty\right) \cdot n, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (4.52)$$

To demonstrate the well-posedness, we need to introduce the abstract linear operators

$$\mathbf{A}_e(x_3) \in \mathcal{L}\left(H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)\right) \quad \text{and} \quad \mathbf{A}_m(x_3) \in \mathcal{L}\left(H_{\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)\right)$$

on the Hilbert spaces  $H_0^1(S_{x_3})$  and  $H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3})$  endowed with the inner product

$$\left( \varphi, \varphi' \right)_{H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)} := \int_{S_{x_3}} \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' \quad \text{and} \quad \left( \psi, \psi' \right)_{H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)} := \int_{S_{x_3}} \mu \nabla \psi \cdot \nabla \psi'.$$

They are defined such that for every  $\varphi \in H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)$  and  $\psi \in H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)$ ,

$$\Phi = \mathbf{A}_e(x_3)\varphi \quad \text{and} \quad \Psi = \mathbf{A}_m(x_3)\psi$$

are solution of the elliptic problems

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \Phi) = \operatorname{div}(\sigma_e \nabla \varphi), & \text{in } S_{x_3}, \\ \Phi = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mu \nabla \Psi) = \operatorname{div}(\sigma_m \nabla \psi), & \text{in } S_{x_3}, \\ (\mu \nabla \Psi) \cdot n = (\sigma_m \nabla \psi) \cdot n, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (4.53)$$

The weak formulations associated to the problems (4.53) are : for all test functions  $\varphi' \in H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)$  and  $\psi' \in H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)$ , find  $\mathbf{A}_e(x_3)\varphi \in H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)$  and  $\mathbf{A}_m(x_3)\psi \in H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)$  such that

$$\int_{S_{x_3}} \varepsilon \nabla (\mathbf{A}_e(x_3)\varphi) \cdot \nabla \varphi' = \int_{S_{x_3}} \sigma_e \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' \quad \text{and} \quad \int_{S_{x_3}} \mu \nabla (\mathbf{A}_m(x_3)\psi) \cdot \nabla \psi' = \int_{S_{x_3}} \sigma_m \nabla \psi \cdot \nabla \psi' \quad (4.54)$$

which are well-posed since  $\sigma_e$  and  $\sigma_m$  are symmetric positive matrices.

**Property 4.2.1.** *The operators  $\mathbf{A}_e(x_3)$  and  $\mathbf{A}_m(x_3)$  are bounded, self-adjoint and positive operators :*

$$\forall \varphi \in H_0^1(S_{x_3}) \quad \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+} \|\varphi\|_{H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)} \leq \int_{S_{x_3}} \varepsilon \nabla (\mathbf{A}_e(x_3)\varphi) \cdot \nabla \varphi \leq \frac{\sigma_{e,+}}{\varepsilon_-} \|\varphi\|_{H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)},$$

$$\forall \psi \in H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}) \quad \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+} \|\psi\|_{H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)} \leq \int_{S_{x_3}} \mu \nabla (\mathbf{A}_m(x_3)\psi) \cdot \nabla \psi \leq \frac{\sigma_{m,+}}{\mu_-} \|\psi\|_{H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)}.$$

Moreover, if  $\sigma_{e,-} > 0$  and  $\sigma_{m,-} > 0$  then  $\mathbf{A}_e(x_3)$  and  $\mathbf{A}_m(x_3)$  are invertible and non compact operators.

*Proof.* **bounded, self-adjoint and positive operators.** Looking at (4.54) it is obvious.

**Invertibility.** If  $\sigma_{e,-} > 0$  and  $\sigma_{m,-} > 0$  then the operators  $\mathbf{A}_e(x_3)$  and  $\mathbf{A}_m(x_3)$  are coercive.

**Non compact operators.** More than anything, we recall the Riesz Lemma. For every Banach space  $H$  and a closed subspace  $V$  of  $H$  such that  $V \neq H$  and  $d \in ]0, 1[$ , there exists a vector  $\Phi \in H$  such that

$$d(\Phi, V) \geq d,$$

with  $d(\Phi, V)$  the distance between  $\Phi$  and the subspace  $V$ . With this lemma, we will construct a bounded sequence  $(\varphi_n)_n$  of  $H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)$  such that  $(A_e(x_3)\varphi_n)_n$  is not a Cauchy sequence. First, we take

$$d \in ]0, 1[ \quad \text{and} \quad \varphi_0 \in H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx).$$

Since

$$\operatorname{span}\{A_e(x_3)\varphi_0\}$$

is a closed subset of  $H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)$  that does not span all the space, there exists a unitary  $\Phi_1$  such that  $d(\Phi_1, \operatorname{span}\{A_e(x_3)\varphi_0\}) \geq d$ . Since  $A_e(x_3)$  is an isomorphism there exists  $\varphi_1$  such that :

$$\|\varphi_1\|_{H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)} \leq \frac{\varepsilon_+}{\sigma_{e,-}} \quad \text{and} \quad d(A_e(x_3)\varphi_1, \operatorname{span}\{A_e(x_3)\varphi_0\}) \geq d.$$

With the same reasoning we can construct by recurrence a sequence  $(\varphi_n)_n$  such that

$$\|\varphi_n\|_{H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)} \leq \frac{\varepsilon_+}{\sigma_{e,-}} \quad \text{and} \quad d(A_e(x_3)\varphi_n, \operatorname{span}\{A_e(x_3)\varphi_k\}_{k=1 \dots n-1}) \geq d.$$

□

If the matrices  $\varepsilon(x_3)$  and  $\sigma_e(x_3)$  (respectively  $\mu(x_3)$  and  $\sigma_m(x_3)$ ) are proportional, the operator  $\mathbf{A}_e(x_3)$  (respectively  $\mathbf{A}_m(x_3)$ ) is proportional to the identity.

Finally the equations (4.49, 4.51) with the initial data (4.50, 4.52) can be written as (with  $x_3$  a parameter)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi_{e,j}^r}{dt} + \mathbf{A}_e(x_3) \varphi_{e,j}^r = 0 \quad \text{for } t > 0, \\ \varphi_{e,j}^r(t=0) = -\mathbf{A}_e(x_3)\varphi_{e,j}^\infty, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_{m,j}^r}{dt} + \mathbf{A}_m(x_3) \psi_{m,j}^r = 0 \quad \text{for } t > 0, \\ \psi_{m,j}^r(t=0) = -\mathbf{A}_m(x_3)\psi_{m,j}^\infty, \end{array} \right. \quad (4.55)$$

With the property 4.2.1 and the Lummer-Phillips theorem (see proposition 3.8.5 page 104 of [72]) we know that for each  $x_3$ , the operators  $\mathbf{A}_e(x_3)$  and  $\mathbf{A}_m(x_3)$  are generators of contraction semigroups

$$e^{-t\mathbf{A}_e(x_3)} \quad \text{and} \quad e^{-t\mathbf{A}_m(x_3)} \quad \text{such that} \quad \|e^{-t\mathbf{A}_e(x_3)}\| \leq e^{-\frac{\sigma_{e,+}}{\varepsilon_-}t} \quad \text{and} \quad \|e^{-t\mathbf{A}_m(x_3)}\| \leq e^{-\frac{\sigma_{m,+}}{\mu_-}t},$$

and so the unique causal solutions

$$\varphi_{e,j}^r \in L^\infty\left(\mathbb{R}, H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)\right) \quad \text{and} \quad \psi_{m,j}^r \in L^\infty\left(\mathbb{R}, H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)\right)$$

of (4.55) satisfy for  $t > 0$

$$\varphi_{e,j}^r(t) = -e^{-t\mathbf{A}_e(x_3)}(\mathbf{A}_e(x_3)\varphi_{e,j}^\infty) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{+,*}, H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx)\right) \quad (4.56)$$

and

$$\psi_{m,j}^r(t) = -e^{-t\mathbf{A}_m(x_3)}(\mathbf{A}_m(x_3)\psi_{m,j}^\infty) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{+,*}, H_{/\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)\right), \quad (4.57)$$

and are null when  $t < 0$ . The regularity  $C^\infty$  is due to the fact the equations of (4.55) are parabolic.

#### Characterization of the operators $\mathbf{A}_e$ and $\mathbf{A}_m$

Ce spectre singulier n'a pour toute toilette  
Grotesquement campé sur son front de  
squelette  
Qu'un diadème sentant le carnaval

---

Baudelaire, Une gravure fantastique

The operators  $\mathbf{A}_e(x_3)$  and  $\mathbf{A}_m(x_3)$  are bounded, positive, self-adjoint so their spectrums satisfy

$$\sigma(\mathbf{A}_e) \subset \left[ \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{e,+}}{\varepsilon_-} \right] \quad \text{and} \quad \sigma(\mathbf{A}_m) \subset \left[ \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}, \frac{\sigma_{m,+}}{\mu_-} \right],$$

but since chances are that the resolvents are non compact, the diagonalization with an Hilbert basis made of eigenvectors appears difficult. Nevertheless, we can concentrate on the case (see figure 4.1) where the set of curve  $\Sigma_{x_3}$  divide the cross section  $S_{x_3}$  into  $N$  areas  $S_{x_3}^n$  with  $n = 1 \dots N$  where the characteristic matrices are homogeneous :

$$\varepsilon(x, x_3)|_{S_{x_3}^n} = \varepsilon_n(x_3), \quad \mu(x, x_3)|_{S_{x_3}^n} = \mu_n(x_3), \quad \sigma_e(x, x_3)|_{S_{x_3}^n} = \sigma_{e,n}(x_3), \quad \sigma_m(x, x_3)|_{S_{x_3}^n} = \sigma_{m,n}(x_3) \quad \text{with } x \in \Omega$$

In this can case we can prove that  $\mathbf{A}_e(x_3)$  and  $\mathbf{A}_m(x_3)$  have a punctual essential spectrum. Indeed

$$\left\{ \frac{\sigma_{e,n}(x_3)}{\varepsilon_n(x_3)} \mid n = 1 \dots N \right\} \subset \sigma_p(\mathbf{A}_e(x_3)) \quad \text{and} \quad \left\{ \frac{\sigma_{m,n}(x_3)}{\mu_n(x_3)} \mid n = 1 \dots N \right\} \subset \sigma_p(\mathbf{A}_m(x_3))$$

and the multiplicity associated to each  $\frac{\sigma_{e,n}(x_3)}{\varepsilon_n(x_3)}$  and  $\frac{\sigma_{m,n}(x_3)}{\mu_n(x_3)}$  is infinity

$$\begin{aligned} \{u \in H_0^1(S_{x_3}) \mid u \in H_0^1(S_{x_3}^n) \text{ and } u = 0 \text{ in } S_{x_3} \setminus S_{x_3}^n\} &\subset \mathbf{Ker} \left( \mathbf{A}_e - \frac{\sigma_{e,n}(x_3)}{\varepsilon_n(x_3)} \mathbb{I} \right), \\ \{u \in H_0^1(S_{x_3}) \mid u \in H_0^1(S_{x_3}^n) \text{ and } u = 0 \text{ in } S_{x_3} \setminus S_{x_3}^n\} &\subset \mathbf{Ker} \left( \mathbf{A}_m - \frac{\sigma_{m,n}(x_3)}{\mu_n(x_3)} \mathbb{I} \right). \end{aligned}$$

The problems

$$(\mathbf{A}_e - \lambda_e \mathbb{I}) = f_e \quad \text{and} \quad (\mathbf{A}_m - \lambda_m \mathbb{I}) = f_m$$

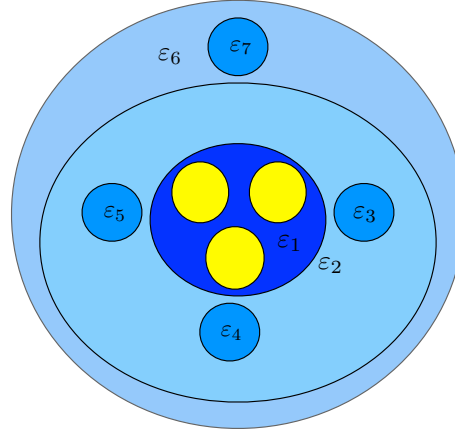


FIGURE 4.1 – 7 areas where the characteristic matrices are homogeneous

are related to indefinite sign Laplacian problems (like in Metamaterials)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}((\sigma_e - \lambda_e \varepsilon) \nabla \varphi) = f_e, \quad \text{in } S_{x_3}, \\ \varphi = 0, \quad \text{on } \partial S_{x_3}, \\ \left[ \varphi \right]_{\Sigma} = 0 \quad \text{on } \Sigma_{x_3}, \\ \left[ ((\sigma_e - \lambda_e \varepsilon) \nabla \varphi) \cdot n \right]_{\Sigma} = 0 \quad \text{on } \Sigma_{x_3}. \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}((\sigma_m - \lambda_m \mu) \nabla \psi) = f_m, \quad \text{in } S_{x_3}, \\ ((\sigma_m - \lambda_m \mu) \nabla \psi) \cdot n = 0, \quad \text{on } \partial S_{x_3}, \\ \left[ \psi \right]_{\Sigma} = 0 \quad \text{on } \Sigma_{x_3}, \\ \left[ ((\sigma_m - \lambda_m \mu) \nabla \psi) \cdot n \right]_{\Sigma} = 0 \quad \text{on } \Sigma_{x_3}. \end{array} \right.$$

We know, with the use of the tool of  $\mathbb{T}$ -coercivity like in [18], that if  $\lambda_e$  is not of the form

$$\frac{\sigma_{e,n}(x_3)}{\varepsilon_n(x_3)} \quad \text{or} \quad \frac{\sigma_{e,n}(x_3) + \sigma_{e,k}(x_3)}{\varepsilon_n(x_3) + \varepsilon_k(x_3)} \quad \text{for } k, n \text{ such that } \overline{S_{x_3}^n} \cap \overline{S_{x_3}^k} \neq \emptyset$$

then  $(\mathbf{A}_e - \lambda_e \mathbb{I})$  is Fredholm of order 0. But we have managed to demonstrate that it is injective. In fact the variables that interest us are the "memory kernels"  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$ .

### "memory kernels" $\mathbf{K}_e$ and $\mathbf{K}_m$ in time domain

We are now able to give an explicit expressions of the "memory kernels"  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$  in time domain :

**Lemma 4.2.2.** *The solutions  $\varphi_{e,j}^r$  and  $\psi_{m,j}^r$  of (4.55) and the "memory kernels"  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$  defined by*

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_e)_{ij}(x_3, t) &= \int_{S_{x_3}} \sigma_e(x, x_3) \nabla \varphi_{e,i}^r(x, x_3, t) \cdot \nabla \varphi_{e,j}^\infty(x, x_3) dx, \\ (\mathbf{K}_m)_{ij}(x_3, t) &= \int_{S_{x_3}} \sigma_m(x, x_3) \nabla \psi_{m,i}^r(x, x_3, t) \cdot \tilde{\nabla} \psi_{m,j}^\infty(x, x_3) dx. \end{aligned} \quad (4.58)$$

are the inverse Fourier transforms of  $\widehat{\varphi}_{e,j}^r, \widehat{\psi}_{m,j}^r, \widehat{\mathbf{K}}_e$  and  $\widehat{\mathbf{K}}_m$ . The "memory kernels"  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$  in time domain are causal and have the following regularity

$$\mathbf{K}_e(x_3, t), \mathbf{K}_m(x_3, t) = \mathbf{0} \quad \text{for } t < 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{K}_e(x_3), \mathbf{K}_m(x_3) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^+, *),$$

moreover the initial data satisfy

$$(\mathbf{K}_e)_{ij}(x_3, t = 0) = - \int_{S_{x_3}} \varepsilon(x, x_3) \nabla \mathbf{A}_e(x_3) \varphi_{e,i}^\infty(x, x_3) \cdot \nabla \mathbf{A}_e(x_3) \varphi_{e,j}^\infty(x, x_3) dx$$

and

$$(\mathbf{K}_m)_{ij}(x_3, t = 0) = - \int_{S_{x_3}} \mu(x, x_3) \nabla \mathbf{A}_m(x_3) \psi_{m,i}^\infty(x, x_3) \cdot \nabla \mathbf{A}_m(x_3) \psi_{m,j}^\infty(x, x_3) dx.$$

In particular  $\mathbf{K}_e(x_3, t = 0)$  and  $\mathbf{K}_m(x_3, t = 0)$  are negative matrices.



*Proof.* If we take the Fourier transform of the equations (4.49, 4.51) with the initial data (4.50, 4.52) (which are equivalent to (4.55)), we obtain the equations (4.53) and (4.43), and we conclude with the uniqueness of solution of (4.53) and (4.43).

Then, the formulae in (4.58) are consequences of (4.47) and of the linearity of the Fourier transform, the causality of  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$  and the regularity following from the similar properties of  $\varphi_{e,j}^r$  and  $\psi_{m,j}^r$  (see (4.56,4.57)).

We put (4.56) in the first equation of (4.58)

$$(\mathbf{K}_e)_{ij}(x_3, t) = - \int_{S_{x_3}} \sigma_e \nabla \left( e^{-t \mathbf{A}_e(x_3)} (\mathbf{A}_e(x_3) \varphi_{e,j}^\infty) \right) \cdot \nabla \varphi_{e,j}^\infty,$$

and (4.57) in the second equation of (4.58)

$$(\mathbf{K}_m)_{ij}(x_3, t) = - \int_{S_{x_3}} \sigma_m \nabla \left( e^{-t \mathbf{A}_m(x_3)} (\mathbf{A}_m(x_3) \psi_{m,j}^\infty) \right) \cdot \nabla \psi_{m,j}^\infty,$$

then we take this formula with  $t = 0$  and use the definition of  $\mathbf{A}_e(x_3)$  and  $\mathbf{A}_m(x_3)$  (see (4.54)) to obtain the last formulae of this lemma.  $\square$

### 4.2.3 Generalized telegrapher's model in time domain

#### Telegrapher's equation in time domain

We can now deduce a convenient time domain formulation of the generalized telegrapher's model from the equations (4.11) with the coefficients decomposed following proposition 4.2.1. Using the standard properties of the Fourier transform with respect to convolution, we obtain

$$\begin{cases} \mathbf{C}_\infty(x_3) \partial_t \mathbf{V}^0 + \mathbf{G}_\infty(x_3) \mathbf{V}^0 + \int_0^t \mathbf{K}_e(x_3, t-s) \mathbf{V}^0(x_3, s) ds + \partial_3 \mathbf{I}^0 = \mathbf{I}_s, \\ \mathbf{L}_\infty(x_3) \partial_t \mathbf{I}^0 + \mathbf{R}_\infty(x_3) \mathbf{I}^0 + \int_0^t \mathbf{K}_m(x_3, t-s) \mathbf{I}^0(x_3, s) ds + \partial_3 \mathbf{V}^0 = 0, \end{cases} \quad (4.59)$$

this set of equations being completed with null initial conditions

$$\mathbf{V}^0(x_3, 0) = \mathbf{I}^0(x_3, 0) = 0. \quad (4.60)$$

The model (4.59) is our effective 1D model in which :

- the effective coefficients  $\mathbf{C}_\infty(x_3)$ ,  $\mathbf{G}_\infty(x_3)$ ,  $\mathbf{L}_\infty(x_3)$ ,  $\mathbf{R}_\infty(x_3)$  are deduced, through (4.46), from the solution of 2D elliptic problems in  $S_{x_3}$ , see (1.10, 4.38),
- the kernels  $(\mathbf{K}_e(x_3, \cdot), \mathbf{K}_m(x_3, \cdot))$  are deduced, through formulas (4.58), from the solution of 2D evolution problems in  $S_{x_3}$ , namely (4.49).

We call it the generalized telegrapher's model because the unknowns  $\mathbf{I}^0$  and  $\mathbf{V}^0$  are vector valued, and not scalar, the memory effects are represented through time convolution terms and the coefficients depend of a shape parameter  $x_3$ .

#### Reconstruction formulae in time domain

We need first to find the inverse Fourier transform of  $\widehat{\xi}_e^0$  solution of (4.9).

**Proposition 4.2.2.** *The inverse Fourier transform of  $\widehat{\xi}_e^0$  solution of (4.9) is the unique solution of the following Cauchy problem*

$$\begin{cases} \frac{d\xi_e^0}{dt} + \mathbf{A}_e(x_3) \xi_e^0 = \xi_e^{0,\infty} & \text{for } t > 0, \\ \xi_e^0(t=0) = 0, \end{cases}$$

with the high frequency potential  $\xi_e^{0,\infty}$  the unique solution of the quasi-static problem

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\varepsilon \nabla \xi_e^{0,\infty}(\cdot, x_3, t)) = \mathbf{div} J_{s,T}(\cdot, x_3, t), & \text{in } S_{x_3}, \\ \xi_e^{0,\infty}(\cdot, x_3, t) = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}. \end{cases}$$

Finally it is worth mentioning that from the solution  $(\mathbf{V}^0, \mathbf{I}^0)$ , one can reconstruct (approximately) the 3D electromagnetic field through the following formulas, deduced from formulas (4.7, 4.8) and the decompositions (4.39)

$$\begin{aligned} E^\delta(x, x_3, t) &\underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \sum_{q=1}^Q \nabla \varphi_{e,q}^\infty \left( \frac{x}{\delta}, x_3, t \right) V_q^0(x_3, t) + \sum_{j=1}^N \int_0^t \nabla \varphi_{e,j}^r \left( \frac{x}{\delta}, x_3, t-s \right) V_j(x_3, s) ds + \nabla \xi_e^0 \left( \frac{x}{\delta}, x_3, t \right) \\ H^\delta(x, x_3, t) &\underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \sum_{q=1}^Q \tilde{\nabla} \psi_{m,q}^\infty \left( \frac{x}{\delta}, x_3, t \right) I_q^0(x_3, t) + \sum_{j=1}^N \int_0^t \nabla \psi_{m,j}^r \left( \frac{x}{\delta}, x_3, t-s \right) I_j(x_3, s) ds. \end{aligned} \quad (4.61)$$

### What informations does $\mathbf{K}_e$ and $\mathbf{K}_m$ give about the model

Let us emphasize that the presence of these memory terms is due in part to the conjugated presence of losses in the medium and heterogeneity of the cross section.

#### Remark 4.2.2.

$$\begin{aligned} \sigma_e(x_3, \cdot) \text{ is proportional to } \varepsilon(x_3, \cdot) \text{ in } S_{x_3} \text{ or null} &\implies \mathbf{K}_e(x_3, \cdot) = 0, \\ \sigma_m(x_3, \cdot) \text{ is proportional to } \mu(x_3, \cdot) \text{ in } S_{x_3} \text{ or null} &\implies \mathbf{K}_m(x_3, \cdot) = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

*Proof.* Just use remark 4.2.1. We can also remark that if  $\sigma_e(x_3, \cdot)$  and  $\sigma_m(x_3, \cdot)$  are proportional to  $\varepsilon(x_3, \cdot)$  and to  $\mu(x_3, \cdot)$  in  $S_{x_3}$ , then

$$\ker \mathbf{A}_e(x_3) = H_0^1(S_{x_3}, \varepsilon dx) \quad \text{and} \quad \ker \mathbf{A}_m(x_3) = H_{\mathbb{R}}^1(S_{x_3}, \mu dx)$$

and so

$$\varphi_{e,i}^r(x, x_3, t) = 0 \quad \text{and} \quad \psi_{m,i}^r(x, x_3, t) = 0.$$

□

Note that if the losses are small in the sense that there exist  $\alpha_e$  and  $\alpha_m$  functions of  $\Omega$  such that  $\varepsilon/\sigma_e = \delta\alpha_e$  and  $\mu/\sigma_m = \delta\alpha_m$ , then the memories  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$  are not present either. The memories  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$  are not good indicators for the presence of losses and heterogeneities since there exists cases where  $\mathbf{K}_m = 0$  while  $\sigma_m$  could be huge and very heterogeneous.

**Example 4.2.1.** If  $S$  is an annulus and  $\mu$  and  $\sigma_m$  are scalar invariant in the angular coordinate (and could be very heterogeneous in the radial coordinate) then  $\mathbf{K}_m = 0$ .

*Proof.* with example 1.3.1 of 1.3.1, we have

$$i\omega Z = \frac{1}{2\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{i\omega \mu(r) + \sigma_m(r)}{r} dr = \frac{i\omega}{2\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{\mu(r)}{r} dr + \frac{1}{2\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{\sigma_m(r)}{r} dr = i\omega L_\infty + R_\infty$$

□

This very simple example allows us to think that  $\mathbf{K}_e$  has no reason to be null except the presence of heterogeneous losses (and is therefore a good indicator for that). We can generalize this example (in which  $K_m = 0$ ) for more complicated geometries  $S$  (with one hole) if there is one conformal mapping  $\mathcal{T}_c$  such that  $\mathcal{T}_c(S)$  is an annulus,  $\mu \circ \mathcal{T}_c$  and  $\sigma_m \circ \mathcal{T}_c$  are radial. Such examples will be presented in 4.4.

## 4.3 Properties of the generalized telegrapher's model.

Since  $\mathbf{C}_\infty$  and  $\mathbf{L}_\infty$  are symmetric positive definite matrices, the weight spaces

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbf{C}_\infty dx) \text{ and } L^2(\mathbb{R}, \mathbf{L}_\infty dx) \quad \text{with the inner product} \quad \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_\infty \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \text{ and } \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_\infty \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

are Hilbert spaces.

### 4.3.1 Well-posedness of the limit model

**Theorem 4.3.1.** *If the source terms satisfy the following regularity assumption*

$$\mathbf{I}_s \in L^1\left(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}, \mathbf{C}_\infty^{-1} dx)\right),$$

then, there exists a unique mild solution

$$(\mathbf{V}, \mathbf{I}) \in C^0\left(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}, \mathbf{C}_\infty dx) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbf{L}_\infty dx)\right)$$

of (4.59, 4.60) and it satisfies the prior estimate for all time  $t$

$$\sqrt{\mathcal{E}_{LC}}(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|\mathbf{C}_\infty^{-1/2} \mathbf{J}_T(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R})} ds. \quad (4.63)$$

with the electrical energy

$$\mathcal{E}_{LC} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_\infty \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_\infty \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} \right].$$

This energy is the classical one for electrokinesis. The proof of the above result relies on the introduction of the following two bilinear forms in  $L^2(]0, t[, L^2(\mathbb{R}^3))$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e(t; \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{G}_\infty(x_3) \mathbf{U}(x_3, s), \tilde{\mathbf{U}}(x_3, s))_{\mathbb{R}^N} dx_3 ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{K}_e(x_3, s-r) \mathbf{U}(x_3, r), \tilde{\mathbf{U}}(x_3, s))_{\mathbb{R}^N} dx_3 dr ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m(t; \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{R}_\infty(x_3) \mathbf{U}(x_3, s), \tilde{\mathbf{U}}(x_3, s))_{\mathbb{R}^N} dx_3 ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{K}_m(x_3, s-r) \mathbf{U}(x_3, r), \tilde{\mathbf{U}}(x_3, s))_{\mathbb{R}^N} dx_3 dr ds, \end{aligned}$$

that have the important positivity property that followed.

**Lemma 4.3.1.** *The bilinear forms  $\mathbf{a}_e(t; \cdot, \cdot)$  and  $\mathbf{a}_m(t; \cdot, \cdot)$  satisfy*

$$\forall \mathbf{U} \in L^2(0, t; L^2(\mathbb{R}^3)), \quad \mathbf{a}_\ell(t; \mathbf{U}, \mathbf{U}) \geq 0, \quad \ell = e, m. \quad (4.64)$$

*Proof.* We give the proof for  $\mathbf{a}_e$ . We extend  $\mathbf{U}$  outside  $[0, t]$  into a function  $\mathbf{U}^*$  such that

$$\mathbf{U}^*(\cdot, s) = \mathbf{U}(\cdot, s) \text{ for } s \in [0, t] \text{ and } \mathbf{U}^*(\cdot, s) = 0 \text{ otherwise,}$$

then we have

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e(t; \mathbf{U}, \mathbf{U}) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{G}_\infty(x_3) \mathbf{U}^*(x_3, s), \mathbf{U}^*(x_3, s))_{\mathbb{R}^N} dx_3 ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{K}_e(x_3, s-r) \mathbf{U}^*(x_3, r), \mathbf{U}^*(x_3, s))_{\mathbb{R}^N} dx_3 dr ds. \end{aligned}$$

Denoting  $\hat{\mathbf{U}}^*$  the time Fourier transform of  $\mathbf{U}^*$ , we get, by Parseval identity

$$\mathbf{a}_e(t; \mathbf{U}, \mathbf{U}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\Re[\mathbf{G}_\infty(x_3) + \hat{\mathbf{K}}_e(x_3, \omega)] \hat{\mathbf{U}}^*(x_3, \omega), \hat{\mathbf{U}}^*(x_3, \omega))_{\mathbb{C}^N} d\omega dx_3.$$

We then conclude thanks to lemma 4.2.1. □

One of the most important tool to demonstrate energy inequality is the well-known Grönwall lemma.

**Lemma 4.3.2. (Grönwall lemma)**

*We assume that  $\mathcal{E} \in L^\infty(]0, T[)$  and  $f \in L^1(]0, T[)$  are both a positive function and that the constant  $\mathcal{E}_0$  is positive. If for all (almost everywhere)  $t \in ]0, T[$ , we have*

$$\mathcal{E}^2(t) \leq \mathcal{E}_0^2 + \int_0^t f(s) \mathcal{E}(s) ds$$

then

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2} \int_0^t f(s) ds$$

*Proof of theorem 4.3.1.* We multiply the two equations of (4.59) by  $\mathbf{V}$  and  $\mathbf{I}$  respectively, integrate in space over  $\mathbb{R}$  and in time between 0 and  $t$  and add the two resulting equalities to obtain the energy estimates :

$$\mathcal{E}_{LC}(t) + \mathbf{a}_e(t; \mathbf{V}, \mathbf{V}) + \mathbf{a}_m(t; \mathbf{I}, \mathbf{I}) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_s \cdot \mathbf{V} \, dx_3 \, ds,$$

Lemma 4.3.1 and the fact that the matrix  $\mathbf{C}_\infty$  is symmetric positive definite give

$$\mathcal{E}_{LC} \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_s \cdot \mathbf{V} \, dx_3 \, ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_\infty^{-1/2} \mathbf{I}_s \cdot \mathbf{C}_\infty^{1/2} \mathbf{V} \, dx_3 \, ds$$

then with the Cauchy-Schwarz inequality

$$\mathcal{E}_{LC}(t) \leq \int_0^t \|\mathbf{C}_\infty^{-1/2} \mathbf{J}_T(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\mathbf{C}_\infty^{1/2} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R})} \, ds \leq \int_0^t \|\mathbf{C}_\infty^{-1/2} \mathbf{J}_T(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, ds + \mathcal{E}_{LC}(s)$$

and the Gronwall's lemma 4.3.2 enables us to derive the energy estimate (4.63). This estimate is the key tool to deduce existence and uniqueness of the solution in the right functional space by Galerkin's method. We shall not reproduce the (rather standard) proof but readers can refer to [21].  $\square$

Theorem 4.3.1 guarantees the well-posedness of the generalized telegrapher's equation in the weight space

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbf{C}_\infty \, dx) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbf{L}_\infty \, dx).$$

In fact the solution are in the space  $L^2(\mathbb{R})^2$ , since the capacitance  $\mathbf{C}_\infty$  and the inductance  $\mathbf{L}_\infty$  have a uniform lower bound.

**Property 4.3.1.** *If the section  $S$  has no "degeneration of Hole", that is to say that the constants<sup>2</sup>*

$$C_-^0 = \min_{q, x_3} \frac{|\mathcal{O}_q^{x_3}|}{c_{p,0}^2(\mathcal{O}_0^{x_3})} \quad \text{and} \quad \lambda_{\mathfrak{C}}^+ = \sup_{x_3} \max\{\lambda_{\mathfrak{C}(x_3)} \in \sigma(\mathfrak{C}(x_3))\}$$

*based on the minimum area of a hole  $\min_{q, x_3} |\mathcal{O}_q^{x_3}|$  and the maximal eigenvalue of the electrical capacitance matrix  $\mathfrak{C}$  defined in 11.4 in appendix 11 are bounded, then*

$$\varepsilon_- C_-^0 |\mathbf{V}|^2 \leq \mathbf{C}_\infty(x_3) \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \leq \varepsilon_+ \lambda_{\mathfrak{C}}^+ |\mathbf{V}|^2 \quad \text{for all } \mathbf{V}$$

and

$$\frac{\mu_-^2}{\mu_+} (\lambda_{\mathfrak{C}}^+)^{-1} |\mathbf{I}|^2 \leq \mathbf{L}_\infty(x_3) \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} \leq \frac{\mu_+^2}{\mu_-} (C_-^0)^{-1} |\mathbf{V}|^2 \quad \text{for all } \mathbf{I}.$$

*Proof.* For the matrix  $\mathbf{C}_\infty$  it is the same result as in propriety 1.3.2. We conclude for  $\mathbf{L}_\infty$  with the matrix version of conjugated lemma 1.3.11

$$\mathbf{L}_\infty = \mathbf{Z}(\mu, S_{x_3}) = \mathbf{Y}(\det(\mu^{-1}) \mu, S)^{-1}.$$

$\square$

## 4.3.2 Propagation velocities

**How the matrices  $\mathbf{L}_\infty$   $\mathbf{C}_\infty$  characterize the waves velocities**

In the absence of source, the generalized telegrapher's model (4.59) is a zero order perturbation of the symmetric hyperbolic system (as it is the case for instance in [17])

$$\begin{cases} \mathbf{C}_\infty(x_3) \partial_t \mathbf{V} + \partial_3 \mathbf{I} = 0, \\ \mathbf{L}_\infty(x_3) \partial_t \mathbf{I} + \partial_3 \mathbf{V} = 0. \end{cases} \quad (4.65)$$

In the homogeneous case ( $\mathbf{C}_\infty(x_3) = \mathbf{C}_\infty, \mathbf{L}_\infty(x_3) = \mathbf{L}_\infty$ ), looking for traveling wave solutions of the form

$$\mathbf{V}(x_3, t) = \mathbf{V}_a f(x_3 - \lambda t), \quad \mathbf{I}(x_3, t) = \mathbf{I}_a f(x_3 - \lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. with  $c_{p,0}^2(\mathcal{O}_0^{x_3})$  the Poincaré constant appearing in (1.36) of the domain  $\mathcal{O}_0^{x_3}$

leads to characterizing the propagation velocities  $\lambda$  via the eigenvalue problem

$$\mathbf{C}_\infty^{-1} \mathbf{L}_\infty^{-1} \mathbf{I}_a = \lambda^2 \mathbf{I}_a \iff \mathbf{C}_\infty^{-1} \mathbf{L}_\infty^{-1} \mathbf{V}_a = \lambda^2 \mathbf{V}_a, \quad (\mathbf{V}_a = \mathbf{L}_\infty \mathbf{I}_a).$$

In other words,  $\pm \lambda$  is an admissible velocity associated to (4.65) if and only if

$$\lambda^2 \in \sigma(\mathbf{C}_\infty^{-1} \mathbf{L}_\infty^{-1}),$$

where  $\sigma(\mathbf{C}_\infty^{-1} \mathbf{L}_\infty^{-1}) \subset \mathbb{R}_*^+$  since  $\mathbf{C}_\infty$  and  $\mathbf{L}_\infty$  are real symmetric positive definite.

By extension, the (variable in space) propagation velocities associated to the system (4.65) at point  $x_3$  are the reals  $\pm \lambda(x_3)$  such that

$$\lambda(x_3)^2 \in \sigma(\mathbf{C}_\infty^{-1}(x_3) \mathbf{L}_\infty^{-1}(x_3)). \quad (4.66)$$

Our goal is to provide lower and upper bounds for these velocities. Not surprisingly, these bounds will be related to the matrix field  $c$  defined<sup>3</sup> as

$$\mathbf{c}(x, x_3) = \mu(x, x_3)^{-\frac{1}{2}} \varepsilon(x, x_3)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.67)$$

which represents the velocity of electromagnetic waves at point  $(x, x_3)$ .

### Study of the spectrum of $\mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_\infty$

**Lemma 4.3.3.** *Setting the bounds of the "velocity" matrix :*

$$c^-(x_3) = \inf_{x \in S_{x_3}} \det(\mathbf{c}(x, x_3)) \left( \min_{q, q' \leq Q} \mathbf{c}_{q, q'}(x, x_3) \right)^{-1} \quad \text{and} \quad c^+(x_3) = \sup_{x \in S_{x_3}} |\mathbf{c}(x, x_3)|_\infty,$$

we have

$$\lambda(x_3)^2 \in \sigma(\mathbf{C}_\infty^{-1}(x_3) \mathbf{L}_\infty^{-1}(x_3)) \implies c^-(x_3) \leq |\lambda(x_3)| \leq c^+(x_3). \quad (4.68)$$

In particular if  $\mathbf{c}(x, x_3) = c(x, x_3) \mathbf{Id}_2$  then

$$c^-(x_3) = \inf_{x \in S_{x_3}} c(x, x_3) \quad \text{and} \quad c^+(x_3) = \sup_{x \in S_{x_3}} c(x, x_3).$$

*Proof.* Let  $(u, v) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ ,  $\varphi(u) := \sum_{j=1}^N u_j \varphi_{e,j}^\infty(\cdot, x_3)$  and  $\psi(v) := \sum_{j=1}^N v_j \psi_{m,j}^\infty(\cdot, x_3)$ .

Using the biorthogonality formulas (1.12) with  $\rho_1 = \varepsilon(\cdot, x_3)$ ,  $\rho_2 = \mu(\cdot, x_3)$ , we get

$$(u, v)_{\mathbb{C}^N} = \int_{S_{x_3}} \mathbf{rot} \varphi(u) \cdot \overline{\widetilde{\nabla} \psi(v)}.$$

Then, since  $\mu(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \mathbf{c}(\cdot, x_3) \varepsilon(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Id}_2$ , by definition (4.67) of  $c(\cdot, x_3)$ , and so since  $\mu(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}}$  is self-adjoint :

$$(u, v)_{\mathbb{C}^N} = \int_{S_{x_3}} \mathbf{c}(\cdot, x_3) \varepsilon(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \mathbf{rot} \varphi(u) \cdot \mu(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \overline{\widetilde{\nabla} \psi(v)}$$

then by the Cauchy-Schwarz inequality :

$$\begin{aligned} |(u, v)_{\mathbb{C}^N}| &\leq \int_{S_{x_3}} |\mathbf{c}(\cdot, x_3) \varepsilon(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \nabla \varphi(u)|_{\mathbb{R}^2} |\mu(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla} \psi(v)|_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq c^+(x_3) \left( \int_{S_{x_3}} |\varepsilon(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \nabla \varphi(u)|_{\mathbb{R}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{S_{x_3}} |\mu(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla} \psi(v)|_{\mathbb{R}^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

which can be rewritten, using the definition of  $\mathbf{C}_\infty(x_3)$  and  $\mathbf{L}_\infty(x_3)$ ,

$$|(u, v)_{\mathbb{C}^N}| \leq c^+(x_3) |(\mathbf{C}_\infty(x_3)u, u)_{\mathbb{C}^N}|^{\frac{1}{2}} |(\mathbf{L}_\infty(x_3)v, v)_{\mathbb{C}^N}|^{\frac{1}{2}}. \quad (4.69)$$

It is easy to see that  $\lambda(x_3)^2 \in \sigma(\mathbf{C}_\infty(x_3)^{-1} \mathbf{L}_\infty(x_3)^{-1})$  is equivalent to

$$|\lambda(x_3)| \in \sigma(\mathbf{C}_\infty(x_3)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{L}_\infty(x_3)^{-\frac{1}{2}}),$$

3. since  $\varepsilon$  and  $\mu$  are symmetric positive definite matrices, their square root are well defined

thus, there exists  $w \in \mathbb{C}^N$ , with  $|w|_{\mathbb{C}^N} = 1$ , such that

$$\mathbf{L}_\infty(x_3)^{-\frac{1}{2}} w = |\lambda(x_3)| \mathbf{C}_\infty(x_3)^{\frac{1}{2}} w.$$

Therefore, choosing  $u = \mathbf{C}_\infty(x_3)^{-\frac{1}{2}} w$  and  $v = \mathbf{L}_\infty(x_3)^{-\frac{1}{2}} w$ , we have

$$(u, v)_{\mathbb{C}^N} = (\mathbf{C}_\infty(x_3)^{-\frac{1}{2}} w, \mathbf{L}_\infty(x_3)^{-\frac{1}{2}} w)_{\mathbb{C}^N} = |\lambda(x_3)|,$$

while

$$(\mathbf{C}_\infty(x_3)u, u)_{\mathbb{C}^N} = |w|_{\mathbb{C}^N}^2 = 1 \text{ and } (\mathbf{L}_\infty(x_3)v, v)_{\mathbb{C}^N} = |w|_{\mathbb{C}^N}^2 = 1.$$

Then, (4.69) leads to  $|\lambda(x_3)| \leq c^+(x_3)$ .

For the lower bound, we repeat the same reasoning as above with the functions

$$\psi_{e,j}^\infty(\cdot, x_3) := \psi_j(\det(\varepsilon^{-1}(\cdot, x_3))\varepsilon(\cdot, x_3), S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \varphi_{m,j}^\infty(\cdot, x_3) := \varphi_j(\det(\mu^{-1}(\cdot, x_3))\mu(\cdot, x_3), S_{x_3}).$$

For all vectors  $u, v \in \mathbb{R}^Q$ , we will denote

$$\varphi_m(u) := \sum_{j=1}^N u_j \varphi_{m,j}^\infty(\cdot, x_3) \quad \text{and} \quad \psi_e(v) := \sum_{j=1}^N v_j \psi_{e,j}^\infty(\cdot, x_3).$$

We have

$$\varepsilon(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \mathbf{c}(\cdot, x_3) \mu(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Id}_2 \quad \text{and} \quad \det(\varepsilon(\cdot, x_3)^{-\frac{1}{2}}) \det(\mathbf{c}(\cdot, x_3))^{-1} \det(\mu(\cdot, x_3)^{-\frac{1}{2}}) = 1$$

and so we have similarly to what we have done for the upper bounds

$$(u, v)_{\mathbb{C}^N} = \int_{S_{x_3}} \det(\mathbf{c}(\cdot, x_3))^{-1} \mathbf{c}(\cdot, x_3) \left[ \det(\mu(\cdot, x_3))^{-\frac{1}{2}} \mu(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \mathbf{rot} \varphi_m(u) \right] \cdot \left[ \det(\varepsilon(\cdot, x_3))^{-\frac{1}{2}} \varepsilon(\cdot, x_3)^{\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla} \psi_e(v) \right]$$

$$|(u, v)_{\mathbb{C}^N}| \leq c^-(x_3)^{-1} \left( \int_{S_{x_3}} |\varepsilon(\cdot, x_3)^{-\frac{1}{2}} |\nabla \varphi(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{S_{x_3}} |\mu(\cdot, x_3)^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla} \psi(v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

that is to say, instead of (4.69),

$$|(u, v)_{\mathbb{C}^N}| \leq c^-(x_3)^{-1} |(\mathbf{C}_\infty(x_3)^{-1} u, u)_{\mathbb{C}^N}|^{\frac{1}{2}} |(\mathbf{L}_\infty(x_3)^{-1} v, v)_{\mathbb{C}^N}|^{\frac{1}{2}}. \quad (4.70)$$

Then, choosing  $u = \mathbf{C}_\infty(x_3)^{\frac{1}{2}} w$  and  $v = \mathbf{L}_\infty(x_3)^{\frac{1}{2}} w$  leads to  $|\lambda(x_3)| \geq c^-(x_3)$ .

□

### Is the matrix LC diagonalizable

This is one of the most important questions, that motivated the complete study of multi-conductors cables. It was suggested by Michel Sorine (Inria Rocquencourt) in one of the ANR project SODDA-2011-BS-013-01 meetings. For the model that the physicist studied in [59], where  $\varepsilon$  and  $\mu$  are homogeneous scalar, the answer is yes. We do agree upon this conclusion for that simple case that constitutes the following property.

**Lemma 4.3.4.** *Assuming that*

$$\det(\mu(x, x_3)) \varepsilon(x, x_3) \mu(x, x_3)^{-1} = a(x_3) \mathbf{Id}_2 \quad \text{or} \quad \det(\varepsilon(x, x_3)) \mu(x, x_3) \varepsilon(x, x_3)^{-1} = b(x_3) \mathbf{Id}_2,$$

then

$$\mathbf{L}_\infty(x_3) \mathbf{C}_\infty(x_3) = a(x_3) \mathbf{Id}_Q \quad \text{or respectively} \quad \mathbf{L}_\infty(x_3) \mathbf{C}_\infty(x_3) = b(x_3) \mathbf{Id}_Q.$$

If moreover  $\varepsilon$  and  $\mu$  are scalar then the velocity of electromagnetic waves is constant in the cross section  $S_{x_3}$

$$\mathbf{c}(x, x_3) = c(x_3) \mathbf{Id}_2 \quad (4.71)$$

and

$$\mathbf{L}_\infty(x_3) \mathbf{C}_\infty(x_3) = c(x_3)^{-2} \mathbf{Id}_Q.$$

*Proof.* We have

$$\varepsilon(x, x_3) = \left[ \det(\mu(x, x_3)) \varepsilon(x, x_3) \mu(x, x_3)^{-1} \right] \left[ \det(\mu(x, x_3)^{-1}) \mu(x, x_3) \right] = a(x_3) \det(\mu(x, x_3)^{-1}) \mu(x, x_3).$$

Let us remind that by definition of the capacitance matrix, we have

$$\mathbf{C}_\infty(x_3) = \mathbf{Y}(\varepsilon(\cdot, x_3), S_{x_3})$$

so

$$\mathbf{C}_\infty(x_3) = a(x_3) \mathbf{Y}\left(\det(\mu(x, x_3)^{-1}) \mu(x, x_3), S_{x_3}\right).$$

According to (1.29) of the lemma 1.3.11 and the definition of the inductance matrix,

$$\mathbf{C}_\infty(x_3) = a(x_3) \mathbf{Z}(\mu(\cdot, x_3), S_{x_3})^{-1} = a(x_3) \mathbf{L}_\infty(x_3)^{-1}.$$

We prove the remainder with a same reasoning but with

$$\mu(x, x_3) = \left[ \det(\varepsilon(x, x_3)) \mu(x, x_3) \varepsilon(x, x_3)^{-1} \right] \left[ \det(\varepsilon(x, x_3)^{-1}) \varepsilon(x, x_3) \right] = b(x_3) \det(\varepsilon(x, x_3)^{-1}) \varepsilon(x, x_3).$$

□

The above result is not true in general. When  $\varepsilon$  and  $\mu$  are scalar, we know that (see lemma 1.3.9) we have a simple expression

$$(\mathbf{C}_\infty(x_3) \mathbf{L}_\infty(x_3))_{q,q'} = \int_{S_{x_3}} \varepsilon(x_3) \mu(x_3) \nabla \varphi_{e,q}^\infty(x_3) \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \psi_{m,q'}^\infty(x_3)$$

but there is no reason for it to be symmetric. So  $\mathbf{C}_\infty(x_3)$  and  $\mathbf{L}_\infty(x_3)$  are not necessarily commutative as it can be illustrated by the following numerical results. We consider two cross sections with the same geometry and three holes. These two configurations are described in figure 4.2. In one case, the function  $c(x)$  is constant but

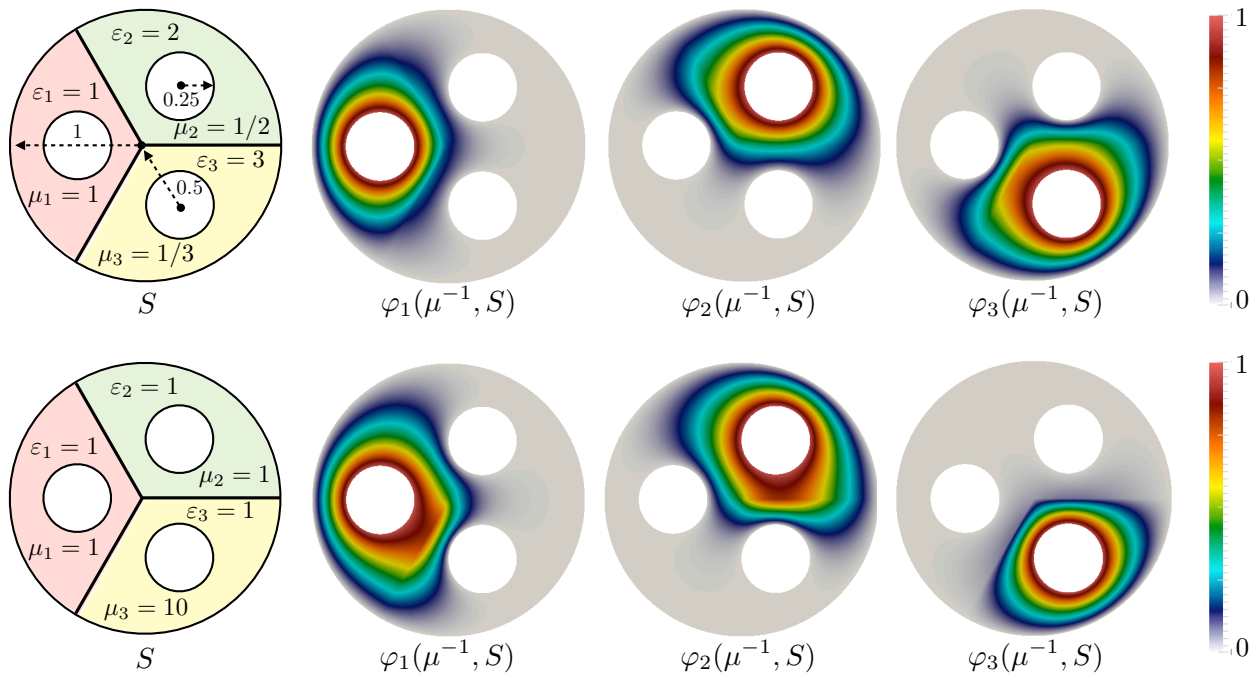


FIGURE 4.2 – Left : the two different configurations. Right : level lines of the functions  $\varphi_j(\mu^{-1}, S)$ . Up  $c(x) = 1$ . Down  $c(x)$  non-constant

in the other case it is not. The results that we obtained via a finite element calculation are the following : for

the first situation  $c(x) = 1$ , the computed matrices  $(\mathbf{C}_\infty, \mathbf{L}_\infty)$  are given by

$$\mathbf{C}_\infty = \mathbf{L}_\infty(x_3)^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 7.57 & -1.42 & -1.71 \\ -1.42 & 13.2 & -2.91 \\ -1.71 & -2.91 & 17.9 \end{pmatrix},$$

whereas in the second case,  $c(x) \in \{1, 1/\sqrt{10}\}$  and we find

$$\mathbf{C}_\infty \simeq \begin{pmatrix} 6.72 & -1.14 & -1.14 \\ -1.14 & 6.72 & -1.14 \\ -1.14 & -1.14 & 6.72 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_\infty^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 5.89 & -1.25 & -0.19 \\ -1.25 & 5.89 & -0.19 \\ -0.19 & -0.19 & 0.83 \end{pmatrix}.$$

### 4.3.3 A remark on undetectable defects.

We end up this section by a remark linked to the use of our models in the context of non destructive testing.

First, let us consider two reference cables

$$(\Omega, \varepsilon, \mu, \sigma_e, \sigma_m) \quad \text{and} \quad (\tilde{\Omega}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}_e, \tilde{\sigma}_m),$$

such that for any  $x_3 \in \mathbb{R}$ , there exists a conformal mapping  $\mathcal{T}_{c,x_3}$  (cf. section 11.2.3) such that

$$\forall x_3 \in \mathbb{R}, \quad \tilde{S}_{x_3} = \mathcal{T}_{c,x_3}(S_{x_3}) \quad (4.72)$$

as well as

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\cdot, x_3) &= \varepsilon(\cdot, x_3) \circ \mathcal{T}_{c,x_3}, & \tilde{\mu}(\cdot, x_3) &= \mu(\cdot, x_3) \circ \mathcal{T}_{c,x_3}, \\ \tilde{\sigma}_e(\cdot, x_3) &= \sigma_e(\cdot, x_3) \circ \mathcal{T}_{c,x_3}, & \tilde{\sigma}_m(\cdot, x_3) &= \sigma_m(\cdot, x_3) \circ \mathcal{T}_{c,x_3}. \end{aligned}$$

In the proposition 4.2.1, we have mentioned that the matrices  $\hat{\mathbf{Y}}_e, \hat{\mathbf{Z}}_m, \mathbf{C}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{L}_\infty, \mathbf{R}_\infty, \hat{\mathbf{K}}_e$  and  $\hat{\mathbf{K}}_m$  are invariant by conformal map. Then the two effective 1D telegrapher's models associated to the two reference cables are the same.

In the context of non destructive testing, let us first consider an ideal perfectly cylindrical cable corresponding to :

$$\Omega^* = S \times \mathbb{R}$$

and coefficients  $(\varepsilon^*, \mu^*, \sigma_e^*, \sigma_m^*)$  that are only functions of the transverse variable  $x$ . Let us consider a cable with a local defect defined, according to our example, by

$$S_{x_3} = \mathcal{T}_{c,x_3}(S),$$

where each  $\mathcal{T}_{c,x_3}$  is a diffeomorphism of  $\mathbb{R}^2$  such that

$$\mathcal{T}_{c,x_3} \equiv \text{Id} \quad \text{for } x_3 \notin [a, b], \quad \mathcal{T}_{c,x_3} \neq \text{Id} \quad \text{for } x_3 \in [a, b],$$

which corresponds to a geometrical defect localized in the portion  $[a, b]$  of the cable. Assuming that the coefficients for this cable are given by

$$\begin{aligned} \varepsilon(\cdot, x_3) &= \varepsilon^* \circ \mathcal{T}_{c,x_3}, & \mu(\cdot, x_3) &= \mu^* \circ \mathcal{T}_{c,x_3}, \\ \sigma_e(\cdot, x_3) &= \sigma_e^* \circ \mathcal{T}_{c,x_3}, & \sigma_m(\cdot, x_3) &= \sigma_m^* \circ \mathcal{T}_{c,x_3}. \end{aligned}$$

Then, if one assumes that, for  $x_3 \in [a, b]$ ,  $\mathcal{T}_{c,x_3}$  is a conformal mapping, then it is not possible to detect the defect with the use of electromagnetic waves by simply using our effective model.

In such a situation, either the original 3D model, or hopefully a higher order asymptotic model, is needed.

**An example : the Joukowski's transformation.** To illustrate our discussion we consider the specific case of two homogeneous straight coaxial cables whose sections are obtained using the Joukowski's conformal mapping :

$$\mathcal{J}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)} \\ x_2 - \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)} \end{pmatrix}$$



which, in particular maps circles into ellipses. In the numerical results represented in Figure 4.3, the reference sections  $S$  considered are annuli of inner radius  $r_-$  and outer radius  $r_+$ . In that specific case (one hole, homogenous straight cables) the (scalar) capacitances for the section  $S$  and  $\mathcal{J}(S)$  are the same and are given by

$$\mathbf{C}_\infty = \varepsilon \|\nabla\varphi_1(1, S)\|_S^2 = \varepsilon \|\nabla\varphi_1(1, \mathcal{J}(S))\|_S^2.$$

Figure 4.3 we plot the annulus and its transform by  $\mathcal{J}$  in the case  $(r_-, r_+) = (1.2, 2)$ . For the annulus it is

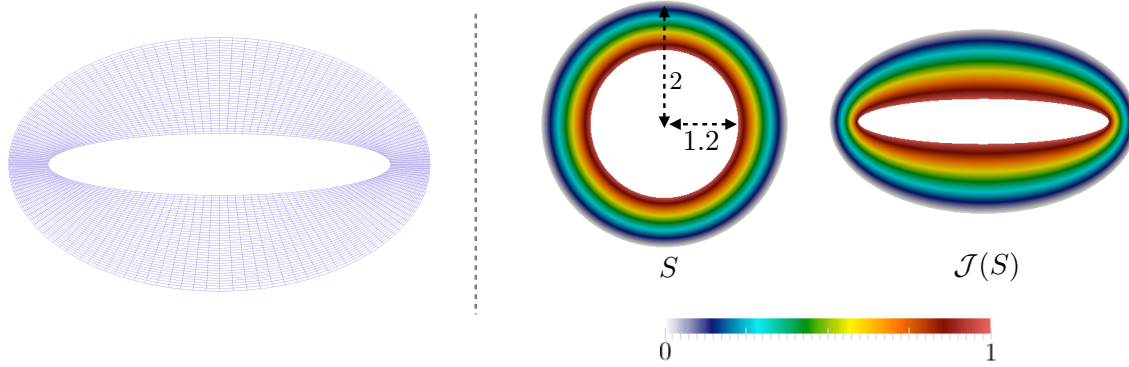


FIGURE 4.3 – Left : Computational mesh. Right : level lines of  $\varphi_1(1, S)$  and  $\varphi_1(1, \mathcal{J}(S))$  .

known that the (scalar) capacitance is given by

$$\mathbf{C}_\infty = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(r_+/r_-)} \simeq 12.30005899 \varepsilon.$$

For the transformed domain  $\mathcal{J}(S)$ , we used a  $Q5$ -finite element method and the computational mesh Figure 4.3 to compute the capacitance numerically, which gave  $\mathbf{C}_\infty \simeq 12.3001 \varepsilon$ .

## 4.4 Application case : concentric composite coaxial cables

We suppose that  $\Omega$  is a coax cable with an sole inner wire (one hole  $Q = 1$ ) made of  $N$  layers which surround the inner wire. In the first subsection, we will concentrate only on the annulus case and the second subsection on the general case via piecewise conformal mappings. We often don't note the  $x_3$  dependance.

### 4.4.1 The annulus case

We suppose that each cross section  $C$  of  $\Omega$  is made of  $N$  annulus  $C^n$  of inner radius  $r^{n-\frac{1}{2}}$  and outer radius  $r^{n+\frac{1}{2}}$  such that  $r^{\frac{1}{2}}$  is the radius of the hole and  $r^{N+\frac{1}{2}} = 1$ . See figure 4.4 for an example with three layers. We will assume that the permittivity, the permeability and the conductivities are constant scalar in each annulus

$$\varepsilon|_{C^n}(x, x_3) = \varepsilon^n(x_3), \quad \mu|_{C^n}(x, x_3) = \mu^n(x_3), \quad \sigma_e|_{C^n}(x, x_3) = \sigma_e^n(x_3), \quad \sigma_m|_{C^n}(x, x_3) = \sigma_m^n(x_3), \quad (x, x_3) \in \Omega.$$

All the circles of radius  $r^{n-\frac{1}{2}}$  and  $r^{n+\frac{1}{2}}$  are curves of discontinuity for the characteristic coefficients.

**Proposition 4.4.1.** *The electrical impedance and admittance are*

$$\hat{\mathbf{Z}}_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \mu^n + \frac{\sigma_m^n}{i\omega} \right) \ln \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{r^{n-\frac{1}{2}}} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{Y}}_e = \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \varepsilon^n + \frac{\sigma_e^n}{i\omega} \right)^{-1} \ln \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{r^{n-\frac{1}{2}}} \right]^{-1}$$

*Proof.* We are in the same case as presented in the example 1.3.1 of the subsection 1.3.1

$$\hat{\mathbf{Z}}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{r^{\frac{1}{2}}}^{r^{N+\frac{1}{2}}} \left( \mu + \frac{\sigma_m}{i\omega} \right) \frac{dr}{r} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{Y}}_e = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{r^{\frac{1}{2}}}^{r^{N+\frac{1}{2}}} \left( \varepsilon + \frac{\sigma_e}{i\omega} \right)^{-1} \frac{dr}{r} \right)^{-1}$$

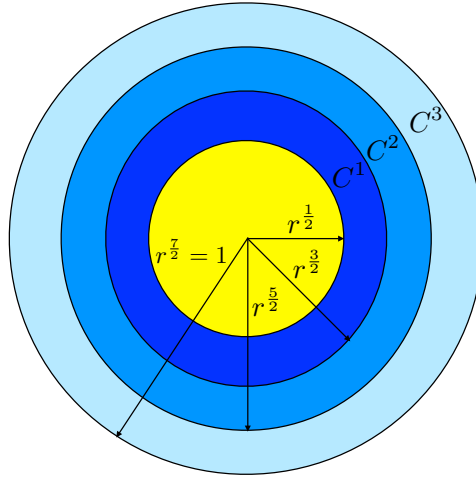


FIGURE 4.4 – Multi-layers annulus

so since the permeability and the magnetic conductivity are constant in each layer we have

$$\hat{\mathbf{Z}}_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \mu^n + \frac{\sigma_m^n}{i\omega} \right) \int_{r^{n-\frac{1}{2}}}^{r^{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \mu^n + \frac{\sigma_m^n}{i\omega} \right) \ln \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{r^{n-\frac{1}{2}}}.$$

The calculus for  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  is the same. □

#### 4.4.2 The general case

We suppose that each cross section  $S_{x_3}$  of the coax cable is made of  $N$  layers  $S_{x_3}^n$  which surround the inner wire such that the inner boundary  $\Sigma_{x_3}^{n-\frac{1}{2}}$  and the outer one  $\Sigma_{x_3}^{n+\frac{1}{2}}$  are the  $(N - 1)$  closed surfaces of discontinuity for the characteristic coefficients  $\varepsilon, \mu, \sigma_e$  and  $\sigma_m$ , which are supposed to be scalar and constant equal to  $\varepsilon^n, \mu^n, \sigma_e^n$  and  $\sigma_m^n$  in each layer  $\Omega^n$ .

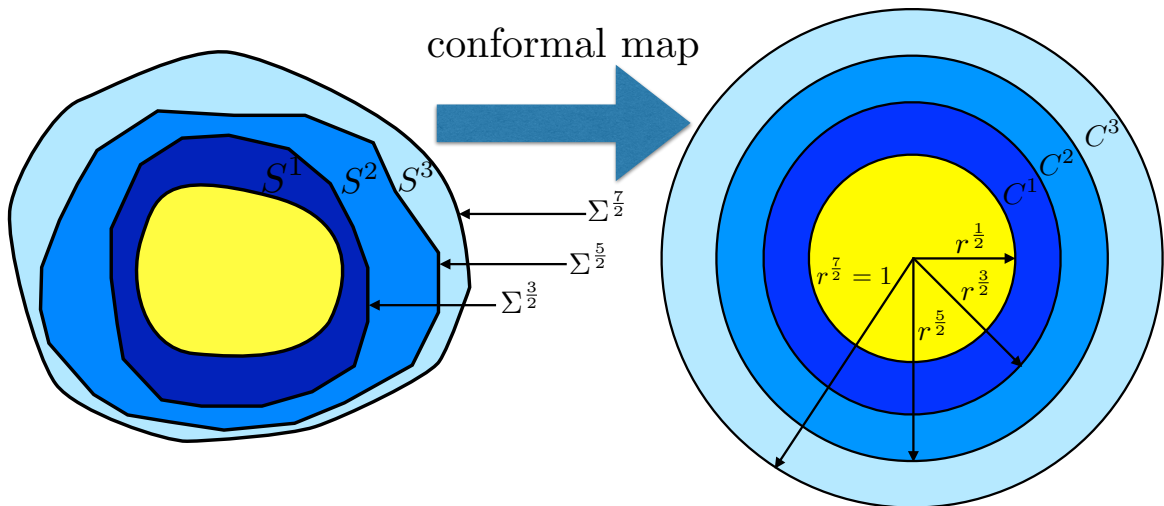


FIGURE 4.5 – general multi-layers to annulus by conformal map

#### Using conformal mapping

We have seen in the previous section that our Telegrapher's model is invariant by conformal map of the cross section. To be more specific the matrices  $\hat{\mathbf{Y}}_e, \hat{\mathbf{Z}}_m, \mathbf{C}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{L}_\infty, \mathbf{R}_\infty, \hat{\mathbf{K}}_e$  and  $\hat{\mathbf{K}}_m$  are invariant by piecewise

conformal map. A homeomorphism  $\mathcal{T}_{c,x_3}$  is piecewise conformal if there exists a finite partition  $(S_{x_3}^n)_{n=1\dots N}$  of  $S_{x_3}$  such that the domain  $\mathcal{T}_{c,x_3}(S_{x_3}^n)$  is conformally equivalent to  $S_{x_3}^n$ . We will use the Ahlfors-Tsuji theorem 11.2.1 and its corollary 11.2.1 (see appendix 11) to work in the easy geometry of previous subsection (annulus case). This corollary says in particular that there exists a conformal map transforming a plane surface  $S$  with one hole  $\mathcal{O}_1$  into an annulus of radius ratio

$$\exp(2\pi \text{Ind}_S(\mathcal{O}_1)),$$

with the geometric inductance (see the section 11.2.2 for more details) of  $S$

$$\text{Ind}_S(\mathcal{O}_1) = \left( \int_S |\nabla\varphi(1,S)|^2 \right)^{-1}.$$

Two plane surfaces are conformal equivalent if and only if they have the same geometric inductance.

We could construct  $N$  conformal maps transforming each layer  $S_{x_3}^K$  into an annulus of radius ratio  $\exp(2\pi I_K)$  with  $I_K$  the geometric inductance of the layer  $S_{x_3}^K$

$$I_K := \text{Ind}_{S_{x_3}^K}(S_{x_3}^{(K-1)})$$

through this procedure :

1. the layer  $S_{x_3}^N$  is conformal equivalent to the annulus  $C^N$  with inner radius and outer radius :

$$r^{N-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\exp(2\pi I_{(N-1)})} \quad \text{and} \quad r^{N+\frac{1}{2}} = 1, \quad (4.73)$$

2. the layer  $S_{x_3}^{N-2K}$  is conformal equivalent to the annulus  $C^{N-2K}$  with inner radius and outer radius :

$$r^{N-2K-\frac{1}{2}} = \frac{\prod_{k=0}^K \exp(2\pi I_{(N-(2k+1))})}{\prod_{k=1}^K \exp(2\pi I_{(N-2k)})} \quad \text{and} \quad r^{N-2K+\frac{1}{2}} = \frac{\prod_{k=1}^K \exp(2\pi I_{(N-2k)})}{\prod_{k=1}^K \exp(2\pi I_{(N-(2k+1))})}, \quad (4.74)$$

3. the layer  $S_{x_3}^{N-(2K+1)}$  is conformal equivalent to the annulus  $C^{N-(2K+1)}$  with inner radius and outer radius :

$$r^{N-(2K+1)-\frac{1}{2}} = \frac{\prod_{k=1}^{K+1} \exp(2\pi I_{(N-2k)})}{\prod_{k=1}^K \exp(2\pi I_{(N-(2k+1))})} \quad \text{and} \quad r^{N-(2K+1)+\frac{1}{2}} = \frac{\prod_{k=0}^K \exp(2\pi I_{(N-(2k+1))})}{\prod_{k=1}^K \exp(2\pi I_{(N-2k)})}. \quad (4.75)$$

So we construct a piecewise conformal map between  $S_{x_3}$  and an annulus of inner radius  $r^{\frac{1}{2}}$  and outer radius  $r^{N+\frac{1}{2}} = 1$  such that the curves of discontinuity of the characteristic coefficients are the circles of inner radius  $r^{n-\frac{1}{2}}$  and outer  $r^{n+\frac{1}{2}}$  as defined above (4.73, 4.74, 4.75). We can find other piecewise conformal mappings but we have chosen the one with outer radius 1.

### In frequency domain

Now we are able to compute easily the impedance and admittance for the Telegrapher's model.

**Proposition 4.4.2.** *In the case of a composite co-axial cable as described at the beginning of this section, the impedance and admittance are*

$$\hat{\mathbf{Z}}_m = \sum_{n=1}^N \left( \mu^n + \frac{\sigma_m^n}{i\omega} \right) I_n \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{Y}}_e = \frac{1}{\sum_{n=1}^N \left( \varepsilon^n + \frac{\sigma_e^n}{i\omega} \right)^{-1}} I_n$$

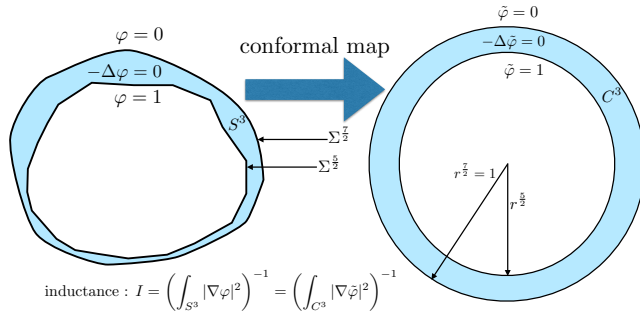


FIGURE 4.6 – the last layer

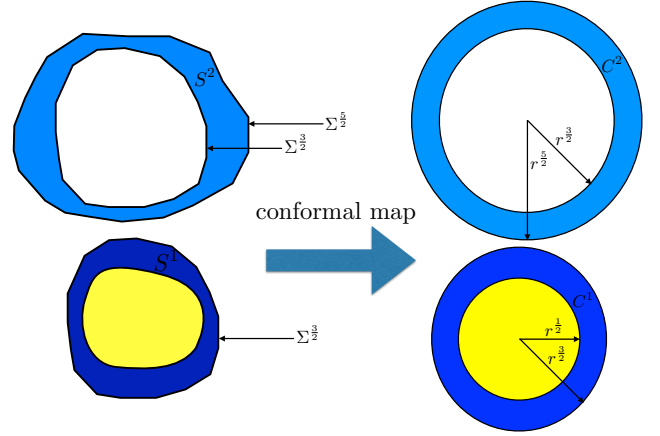


FIGURE 4.7 – the other layers

with  $I_n$  the geometric inductance of the layer  $S^n$

$$I_n = \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)}).$$

*Proof.* Since  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  is invariant by any conformal, we decided to work in  $C$ . So we use the proposition 4.4.1

$$\hat{\mathbf{Z}}_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \mu^n + \frac{\sigma_m^n}{i\omega} \right) \ln \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{r^{n-\frac{1}{2}}}.$$

The definition (4.73, 4.74, 4.75) of the radius enables us to calculate :

$$\hat{\mathbf{Z}}_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \mu^n + \frac{\sigma_m^n}{i\omega} \right) \ln \exp \left( 2\pi \text{Ind}_{S_{x_3}^K}(S_{x_3}^{(K-1)}) \right)$$

But we can also directly outline that

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{r^{n-\frac{1}{2}}}$$

is the inductance of the layer  $C^n$  which is also the inductance of  $S^n$  since  $S^n$  is conformal equivalent to  $C^n$ . The expression for  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  is due to the conjugated lemma 1.3.5.  $\square$

These considerations give us an algorithm to compute easily the electrical potential  $\hat{V}^0$  and current  $\hat{I}^0$  with a maximum of analytic formulae :

1. computing the inductance  $\text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)})$  (or the capacity) of the layer  $\Omega^n$  by solving the problem on the potential  $\varphi(1, S^n)$  by finite 2D finite elements method,
2. computing  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  with the proposition 4.4.2,
3. computing  $\hat{\mathbf{V}}$  and  $\hat{\mathbf{I}}$  by solving the Telegrapher's equation in frequency domain (4.11) with 1D finite elements method.

### In time domain

With the same consideration for the proposition 4.4.2, we obtain

$$L_\infty(x_3) = \sum_{n=1}^N \mu^n(x_3) \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)}) \quad , \quad R_\infty(x_3) = \sum_{n=1}^N \sigma_m^n(x_3) \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)}),$$

$$C_\infty(x_3) = \left( \sum_{n=1}^N (\varepsilon^n(x_3))^{-1} \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)}) \right)^{-1} \quad , \quad G_\infty(x_3) = \left( \sum_{n=1}^N (\sigma_m^n(x_3))^{-1} \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)}) \right)^{-1}.$$

In the annulus geometry  $C$ , we are in the same case as presented in the example 4.2.1 so  $K_m = 0$  but the calculus of  $K_e$  is more difficult.

**Proposition 4.4.3.** *Among all the quotients  $\sigma_n/\varepsilon_n$  for  $n = 0 \dots N$  there are  $0 \leq P \leq N$  ones different<sup>4</sup>. The kernel  $K_e$  decays exponentially, which corresponds to a "short" memory effect. More precisely, it can take the following form*

$$K_e(x_3, t) = \sum_p^P k_{e,0}^p(x_3) e^{-\frac{t}{\tau_e^p(x_3)}} \quad \text{with } \tau_e^p(x_3) \in \mathbb{R}^{+,*} \text{ and } k_{e,0}^p(x_3) \in \mathbb{R}.$$

*Proof.* It is based on the partial-fraction decomposition of  $\widehat{K}_e$  in the frequency domain

$$\widehat{K}_e = \frac{1}{\sum_{n=1}^N (i\omega \varepsilon^n + \sigma_e^n)^{-1} \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)})} - \frac{1}{\sum_{n=1}^N (i\omega \varepsilon^n(x_3))^{-1} \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)})} - \frac{1}{\sum_{n=1}^N (\sigma_m^n(x_3))^{-1} \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)})}$$

that can be written as the rational fraction

$$F(X)^{-1} - (AX + B)$$

with

$$F(X) = \sum_{n=1}^N \frac{\text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)})}{(\varepsilon^n X + \sigma_e^n)},$$

$$A = \frac{1}{\sum_{n=1}^N (\varepsilon^n(x_3))^{-1} \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)})} \quad \text{and} \quad B = \frac{1}{\sum_{n=1}^N (\sigma_m^n(x_3))^{-1} \text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)})}.$$

We denote by  $\tilde{\sigma}_p/\tilde{\varepsilon}_p$  for  $p = 0 \dots P$  the  $P$  different quotients  $\sigma_n/\varepsilon_n$ . We have

$$F(X) = \sum_{p=1}^P \frac{\text{Ind}_{S_{x_3}^n}(S_{x_3}^{(n-1)})/\tilde{\varepsilon}_p}{\left(X - \left(-\frac{\tilde{\sigma}_p}{\tilde{\varepsilon}_p}\right)\right)}$$

and thus  $F(X)$  admits  $P$  simple poles (a black disk in the figure 4.8) which are  $-\tilde{\sigma}_p/\tilde{\varepsilon}_p$  and (since it is continuous)  $P - 1$  zeros (a blue star in the figure 4.8) which are located between the poles. By inversion, the  $P - 1$  simple poles of the fraction  $F(X)^{-1}$  are the  $P - 1$  zeros of  $F(X)$  and the  $P$  zeros of  $F(X)^{-1}$  are the  $P$  poles of  $F(X)$ . Then the addition of a polynomial  $-(AX + B)$  to  $F(X)^{-1}$  does not affect the localisation of the poles (but it affects the number and the localization of the zeros). In the figure 4.8 we give an example when  $P = 1$ . We conclude that the rational fraction  $F(X)^{-1} - (AX + B)$  and thus  $\widehat{K}_e$  admit a decomposition in simple rational fraction of type

$$\widehat{K}_e = \sum_{k,p}^{K,P} k_{e,0}^{k,p}(x_3) \frac{1}{i\omega + \tau_e^p(x_3)}.$$

The wanted formula is the inverse Fourier transform of the previous formula. □

**Example 4.4.1.** *In the case of two layers  $K_e$  is easy to calculate*

$$K_e(x_3, t) = k_{e,0}(x_3) e^{-\frac{t}{\tau_e(x_3)}}$$

*with the initial value*

$$k_{e,0}(x_3) = (2\pi)^3 \frac{(\sigma_{e,2}(x_3)\varepsilon_1(x_3) - \sigma_{e,1}(x_3)\varepsilon_2(x_3))^2}{(\varepsilon_1(x_3)I_2(x_3) + \varepsilon_2(x_3)I_1(x_3))^3} I_1(x_3)I_2(x_3)$$

*and*

$$\tau_e(x_3) = \left( \frac{\varepsilon_1(x_3)I_2(x_3) + \varepsilon_2(x_3)I_1(x_3)}{\sigma_{e,1}(x_3)I_2(x_3) + \sigma_{e,2}(x_3)I_1(x_3)} \right).$$

4.  $P = \text{card}(\{\sigma_n/\varepsilon_n \mid n = 0 \dots N\}_{\neq})$

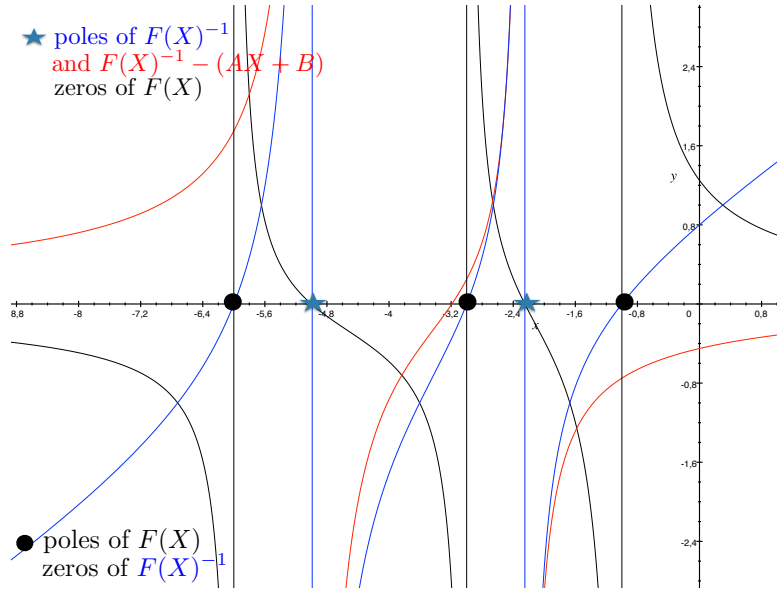


FIGURE 4.8 – Fraction  $F(X)$ ,  $F(X)^{-1}$  and  $F(X)^{-1} - (AX + B)$  with their poles and zeros

The fact that  $K_e$  is reduced to one simple exponential allows us to rewrite (4.59) as the coupling between the usual telegraphist's equation coupled, via the introduction of an auxiliary variable  $W$  (that will represent the nonlocal effects) to a simple linear ordinary differential equation (we reintroduce here the dependency of the coefficients with respect to  $x_3$ )

$$\begin{cases} C^\infty(x_3) \partial_t V(x_3, t) + G^\infty(x_3) V(x_3, t) + \partial_3 I(x_3, t) + k_{e,0}(x_3) W(x_3, t) = I_s(x_3, t), & x_3 \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ L^\infty(x_3) \partial_t I(x_3, t) + R^\infty(x_3) I(x_3, t) + \partial_3 V(x_3, t) = 0, & x_3 \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \tau_e(x_3) \partial_t W(x_3, t) + W(x_3, t) = \tau_e(x_3) V(x_3, t), & x_3 \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \end{cases} \quad (4.76)$$



# HIGHER ORDER TELEGRAPHER MODELS

---

We have seen in the previous chapter that the 1D limit model

$$\begin{cases} s \hat{\mathbf{Y}}_e \hat{\mathbf{V}}^\delta + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^\delta = \hat{\mathbf{I}}_s^\delta + O(\delta), \\ s \hat{\mathbf{Z}}_m \hat{\mathbf{I}}^\delta + \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^\delta = O(\delta), \end{cases}$$

which deals with the propagation of the electrical potentials  $\mathbf{V}^\delta$  and currents  $\mathbf{I}^\delta$  along a multi-conductors cable is obtained by considering the limit term in the asymptotic expansion of the electromagnetic fields. We have also seen that the matrices  $\hat{\mathbf{Y}}_e(x_3)$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m(x_3)$  depend on the geometry of the cross-section in  $x_3$  (where  $x_3$  corresponds to the longitudinal variable along the cable) and are invariant under conformal mapping, that is to say that for two sections linked through a conformal map,  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  are the same. In particular  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  are independent from the presence of some geometrical defaults like a crushing corresponding to a Joukovski's transformation. As expected, finding our final 1D integrating all the geometrical defaults, or at least crushing, requires further analysis so as to have an as exhaustively as deemed necessary model. We will see that the study of more accurate models by considering the order 2 in our asymptotic expansion is mandatory for taking into account such defaults. The new model requires the introduction of new effective matrices that will be defined again from the geometry of the cable and the characteristics of the materials of the cable. We could not find any case in the classical literature on coaxial cables [56], [59], [68], [76] where our new effective matrices are introduced. This is because in the mentioned literature the standard telegrapher's model is only valid for cylindrical cables with constant permittivity and permeability. In fact, under these hypothesis, our new effective matrices vanish. Even so, we need to take them into account for a fine analysis of the defaults. In particular we will see that the usual TEM hypothesis is no longer true.

## 5.1 Previous chapter results summary

We will give a little summary of the previous chapter to help understand how we are going to proceed in a configuration simpler than the one we considered in the chapter 4.

### 5.1.1 Mathematical framework and related assumptions

#### Geometric assumptions

We will assume the hypothesis 3.1.1 that is to say that the cable is made of a plane surface  $S$  with  $Q$  holes<sup>1</sup> included in a convex bounded domain  $\mathcal{B}^*$  and a transformation  $\mathcal{T} \in C^1(\mathbb{R}, W^{1,\infty}(\overline{\mathcal{B}^*}, \overline{\mathcal{B}^*}))$  which let us define any cross-section of the cable

$$S_{x_3} := \mathcal{T}_{x_3}(S).$$

We will assume that at least the  $Q$  connected boundaries  $\partial_q S$  are  $C^1 \cap W^{1,\infty}$  manifolds. Contrary to what has been done in the previous chapter, it is not possible to work with fewer assumptions of regularity or obtain models of higher order. This is quite standard in asymptotic analysis to require more regularity of the solution hence of the geometry to derive higher orders models.

---

1. see appendix 11 for rigorous definition and description of plane with holes



### Characteristics coefficients of the materials

We assume that the characteristic coefficients (see section 3.2 of the introduction)  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_e$  and  $\sigma_m$  are real scalars satisfying the usual positivity assumption (6.10). We also denote (as in chapter 4) by

$$\hat{\varepsilon} := \varepsilon + \frac{\sigma_e}{s} \quad \text{and} \quad \hat{\mu} := \mu + \frac{\sigma_m}{s}$$

the effective permittivity and permeability. They satisfy as consequence of (6.10) the usual positivity assumption for each all  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\varepsilon_- + \frac{\eta \sigma_{e,-}}{\eta + \omega^2} \leq \Re(\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, s)) \leq |\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, s)| \leq \left| \varepsilon_+ + \frac{\sigma_{e,+}}{s} \right| \quad \text{and} \quad \mu_- + \frac{\eta \sigma_{m,-}}{\eta + \omega^2} \leq \Re(\hat{\mu}(\mathbf{x}, s)) \leq |\hat{\mu}(\mathbf{x}, s)| \leq \left| \mu_+ + \frac{\sigma_{m,+}}{s} \right|.$$

The hypothesis that says that the characteristics coefficients are scalar is necessary in order to use some properties of the harmonic spaces

$$\mathcal{E}(\hat{\varepsilon}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}(\hat{\mu}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}) \quad (\text{see definition at equation (1.7)})$$

such as the very useful conjugaison lemma 1.3.5 which gives a link between these two spaces.

### The sources

For the sake of simplicity, we shall assume the following hypothesis.

**Hypothesis 5.1.1.** *The Laplace transform source term, namely the current density,*

$$\hat{\mathbf{J}}_s = \begin{pmatrix} \hat{J}_{s,T} \\ \hat{J}_{s,3} \end{pmatrix}$$

satisfies :

- $\hat{\mathbf{J}}_s \in L^2(S_{x_3})$  and  $\partial_3 \hat{\mathbf{J}}_s \in L^2(S_{x_3})$
- the transverse part of  $\hat{\mathbf{J}}_s$  is 2D-free divergence in each cross-section  $S_{x_3}$ , i-e  $\mathbf{div} \hat{J}_{s,T} = 0$ .

Using lemma 1.3.6, the transverse part of the source term can be written in the form of a 2-D-rotational.

**Proposition 5.1.1.** *We have*

$$\hat{J}_{s,T} = \mathbf{rot} \left[ \zeta_J + \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{s,q}^0 \psi^q(S, 1) \right] \quad (5.1)$$

where  $\psi^q(S, 1)$  is defined in (1.10) and  $\zeta_J$  is the unique solution of

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{find } \zeta_J(\cdot, x_3) \in H^1(S_{x_3})_{/\mathbb{C}} \text{ such that } \forall \tilde{\zeta} \in H^1(S_{x_3})_{/\mathbb{C}} \\ \int_{S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}} \mathbf{rot} \zeta_J(\cdot, x_3) \cdot \mathbf{rot} \tilde{\zeta} = \int_{S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}} \hat{J}_{s,T} \cdot \mathbf{rot} \tilde{\zeta} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

and

$$\hat{I}_{s,q}^0(x_3, s) = \left\langle \hat{J}_{s,T} \cdot \mathbf{n}, 1 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_q S), H^{\frac{1}{2}}(\partial_q S)}. \quad (5.3)$$

In what follows we denote  $\hat{\mathbf{I}}_s^0$  as the vector

$$\hat{\mathbf{I}}_s^0(x_3, s) = (\hat{I}_{s,q}^0(x_3, s))_{1 \leq q \leq Q}. \quad (5.4)$$

This definition of  $\hat{\mathbf{I}}_s^0$  coincides with the one of (4.13) if the hypothesis 5.1.1 is assumed.

### 5.1.2 Asymptotic analysis Ansatz

We have postulated in (3.26) an Ansatz of the electromagnetic fields in the form of a polynomial series of power  $\delta$

$$\hat{E}^\delta = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \begin{pmatrix} E_T^p \\ \hat{E}_3^p \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{H}^\delta = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \begin{pmatrix} H_T^p \\ \hat{H}_3^p \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

where each coefficients  $(E^p, H^p)$  are given by the Laplace transform of equations (3.27,3.28,3.29,3.30), that is to say

$$\begin{cases} s \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^p - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \hat{H}_T^p) - \mathbf{rot} \hat{H}_3^{(p+1)} = \delta_p^0 \hat{J}_{s,T}, & \text{in } \Omega, \quad (a) \\ s \hat{\varepsilon} \hat{E}_3^p - \mathbf{rot} \hat{H}_T^{(p+1)} = \delta_p^0 \hat{J}_{s,3}, & \text{in } \Omega, \quad (b) \\ s \hat{\mu} \hat{H}_T^p + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \hat{E}_T^p) + \mathbf{rot} \hat{E}_3^{(p+1)} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \quad (c) \\ s \hat{\mu} \hat{H}_3^p + \mathbf{rot} \hat{E}_T^{(p+1)} = 0, & \text{in } \Omega, \quad (d) \end{cases} \quad (5.6)$$

with the boundary conditions

$$\begin{cases} \hat{E}_T^{(p+1)} \times n = \mathbf{0}, & \text{on } \partial\Omega, \\ \hat{E}_3^{(p+1)} n - g \hat{E}_T^p = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ \hat{H}_T^{(p+1)} \cdot n + g \hat{H}_3^p = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

the transmission conditions for each  $x_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \left[ \hat{E}_T^{(p+1)} \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \hat{H}_T^{(p+1)} \times n \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \\ \left[ \hat{E}_3^{(p+1)} n - g_\Sigma \hat{E}_T^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = \left[ \hat{H}_3^{(p+1)} n - g_\Sigma \hat{H}_T^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \\ \left[ s \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^{(p+1)} \cdot n + g_\Sigma s \hat{\varepsilon} \hat{E}_3^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \\ \left[ s \hat{\mu} \hat{H}_T^{(p+1)} \cdot n + g_\Sigma s \hat{\mu} \hat{H}_3^p \right]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \end{cases} \quad (5.8)$$

and the "hidden" divergence free equations :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\hat{\varepsilon} \hat{E}_T^{(p+1)}) + \partial_{x_3} (\hat{\varepsilon} \hat{E}_3^p) = \delta_0^p s^{-1} \partial_3 \hat{J}_{s,3}, & \text{in } \Omega, \quad (a) \\ \operatorname{div} (\hat{\mu} \hat{H}_T^{(p+1)}) + \partial_{x_3} (\hat{\mu} \hat{H}_3^p) = 0, & \text{in } \Omega, \quad (b) \end{cases} \quad (5.9)$$

with the convention

$$\hat{E}^p = \hat{H}^p = 0 \quad \text{for } p < 0.$$

### 5.1.3 Some results about the limit model

All the following results are proved in the chapter 4. First and foremost we introduce the harmonic potentials (see theorem 1.3.1 in subsection 1.3)

$$\hat{\varphi}_{e,q}(\cdot, x_3, s) := \varphi^q(\hat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \hat{\psi}_{m,q}(\cdot, x_3, s) := \psi^q(\hat{\mu}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3})$$

which are solution of (1.10) (see also (4.10)). The potentials  $\hat{\psi}_{m,q}$  are uniquely defined up to a constant. To glance over the choice of this constant, we introduce a new notation.

**Definition 5.1.1.** *For all weight  $\rho$ , we will denote by*

$$\langle \mathbf{u} \rangle_\rho := \mathbf{u} - \frac{\int_{S_{x_3}} \rho \mathbf{u}}{\int_{S_{x_3}} \rho}.$$

This definition implies that

$$\int_{S_{x_3}} \rho \langle \mathbf{u} \rangle_\rho = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \langle \mathbf{u} \rangle_\rho = \nabla \mathbf{u}. \quad (5.10)$$

The electrical potentials and currents are solution of the telegrapher's equation

$$\begin{cases} s \hat{\mathbf{Y}}_e(x_3, s) \hat{\mathbf{V}}^0(x_3, s) + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^0(x_3, s) = \hat{\mathbf{I}}_s^0(x_3, s), \\ s \hat{\mathbf{Z}}_m(x_3, s) \hat{\mathbf{I}}^0(x_3, s) + \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^0(x_3, s) = 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

The admittance  $\hat{\mathbf{Y}}_e(x_3, s)$  and the impedance  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  are defined as the Gram matrix of the harmonic spaces  $\mathcal{E}(\hat{\varepsilon}(\cdot, x_3, s), S_{x_3})$  and  $\mathcal{H}(\hat{\mu}(\cdot, x_3, s), S_{x_3})$

$$\hat{\mathbf{Y}}_e(x_3, s) := \hat{\mathbf{Y}}(\hat{\varepsilon}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}), \quad \hat{\mathbf{Z}}_m(x_3, s) := \hat{\mathbf{Z}}(\hat{\mu}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}), \quad (5.12)$$

(see the equation (1.13,1.14) in subsection 1.3 for the definition of  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$ ) and the source  $\hat{\mathbf{I}}_s^0$  is defined in (5.3,5.4). We did an exhaustive study of the matrix  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  in the chapter 1. In particular we know (see lemma 1.3.2) that they are invertible symmetric matrices with eigenvalues of positive real part (see property 1.3.2)

$$\varepsilon_- C_-^0 |u|^2 \leq \Re \left( \hat{\mathbf{Y}}_e \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_{\mathbb{C}} \quad \text{and} \quad \mu_- \frac{|s\mu_- + \sigma_-|^2}{|s\mu_+ + \sigma_+|^2} \frac{C_-^0}{(\lambda_{\mathbb{C}}^+)^2} |u|^2 \leq \Re \left( \hat{\mathbf{Z}}_m \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_{\mathbb{C}} \quad \text{for all } \mathbf{u} \in \mathbb{C}^Q, \quad (5.13)$$

where the geometrics constants  $C_-^0$  and  $\lambda_{\mathbb{C}}^+$  are defined in property 1.3.2. We will see after (see (5.77,5.78)) a sophistication of the inequalities (5.13) in the sense that we will find a strictly positive lower bounds of  $\Re \left( \hat{\mathbf{Z}}_m \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_{\mathbb{C}}$  independent of the Laplace parameter  $s$ .

The reconstruction formulae for the limit term in the ansatz (5.5) are

$$\begin{cases} \hat{E}_T^0(\cdot, x_3, s) = \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^0(x_3, s) \nabla \hat{\varphi}_{e,q}(\cdot, x_3, s), \\ \hat{E}_3^0(\cdot, x_3, s) = 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \hat{H}_T^0(\cdot, x_3, s) = \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^0(x_3, s) \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q}(\cdot, x_3, s), \\ \hat{H}_3^0(\cdot, x_3, s) = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

We know (see section 4.3.3) that this model can not detect some geometric defaults since  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  are invariant by conformal mapping (see the last sentence of the proposition 4.2.1). But since we want to take into account such default types, we need a more accurate model. It will be achieved by considering higher orders in the asymptotic expansions (5.5).

## 5.2 Formal derivation of the first order correctors

### 5.2.1 First order transversal fields

We have with the equations (5.6, 5.7, 5.8, 5.9) for  $p = 0$  the following div-rot problems for the first order transversal fields

$$\begin{cases} \text{rot } \hat{E}_T^1 = 0, & \text{in } S_{x_3}, \\ \text{div} \left( \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^1 \right) = \frac{\partial_3 \hat{J}_{s,3}}{s}, & \text{in } S_{x_3}, \\ \hat{E}_T^1 \times n = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \text{rot } \hat{H}_T^1 = \hat{J}_{s,3}, & \text{in } S_{x_3}, \\ \text{div} \left( \hat{\mu} \hat{H}_T^1 \right) = 0 & \text{in } S_{x_3}, \\ \hat{H}_T^1 \cdot n = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (5.15)$$

With the Helmholtz decompositions of the theorem 1.2.1 and the definition of the harmonic spaces (see theorem 1.3.1)

$$\mathcal{E}(\hat{\varepsilon}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}(\hat{\mu}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}),$$

we have the following decompositions of the first order electromagnetic fields

$$\hat{E}_T^1(\cdot, x_3, s) = \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^1(x_3, s) \nabla \hat{\varphi}_{e,q}(\cdot, x_3, s) \in L^2(S_{x_3}) + \hat{E}_T^{R,1} \quad (5.16a)$$

$$\hat{H}_T^1(\cdot, x_3, s) = \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^1(x_3, s) \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q}(\cdot, x_3, s) \in L^2(S_{x_3}) + \hat{H}_T^{R,1} \quad (5.16b)$$

with the harmonic potential  $\hat{\varphi}_{e,q}$  and  $\hat{\psi}_{m,q}$  (see (1.10)) and the residual

$$\hat{E}_T^{R,1} = \nabla \hat{\xi}_e^1 \quad \text{and} \quad \hat{H}_T^{R,1} = \hat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_m^1, \quad (5.17)$$

where the electrostatic and magneto-static potentials

$$\widehat{\xi}_e^1 \in H_0^1(S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \widehat{\zeta}_m^1 \in H^1(S_{x_3})/\mathbb{C}$$

are the solution of

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\xi}_e^1) = \frac{\partial_3 \widehat{J}_{s,3}}{s}, & \text{in } S_{x_3}, \\ \widehat{\xi}_e^1 = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \operatorname{rot}(\widehat{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \widehat{\zeta}_m^1) = \widehat{J}_{s,3}, & \text{in } S_{x_3}, \\ \widehat{\zeta}_m^1 = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}. \end{cases} \quad (5.18)$$

The electrical potentials and currents at the first order

$$\widehat{\mathbf{V}}^1 = (\widehat{V}_q^1)_{1 \leq q \leq Q} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{I}}^1 = (\widehat{I}_q^1)_{1 \leq q \leq Q}$$

are not determined by the problems (5.15). Indeed all the information of the equation (5.6) for  $p = 1$  was not used to establish (5.15). We will use it in the next subsection to express  $\widehat{\mathbf{V}}^1$  and  $\widehat{\mathbf{I}}^1$ .

### 5.2.2 First order telegrapher's equation

#### Some lemmata

To succeed in establishing the telegrapher's equation of order 1 in a smart formulation, we need some lemmata. The first one gives a meaning to the longitudinal derivative  $\partial_3$  to the transverse fields of order 1.

**Lemma 5.2.1.** *The eulerian shape derivative of  $\widehat{\xi}_e^1$  and  $\widehat{\zeta}_m^1$  are the solution*

$$\partial_3 \widehat{\xi}_e^1 \in H^1(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}) \quad \text{and} \quad \partial_3 \widehat{\zeta}_m^1 \in H^1(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})/\mathbb{C}$$

of the elliptic problems

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon} \nabla \partial_3 \widehat{\xi}_e^1) = \frac{\partial_3^2 \widehat{J}_{s,3}}{s} - \operatorname{div}((\partial_3 \widehat{\varepsilon}) \nabla \widehat{\xi}_e^1), & \text{in } S_{x_3} \\ \partial_3 \widehat{\xi}_e^1 = g \partial_n \widehat{\xi}_e^1, & \text{on } \partial S_{x_3} \\ \left[ \partial_3 \widehat{\xi}_e^1 \right]_{\Sigma} = \left[ g \partial_n \widehat{\xi}_e^1 \right]_{\Sigma}, & \text{on } \Sigma_{x_3} \\ \left[ \widehat{\varepsilon} \nabla(\partial_3 \widehat{\xi}_e^1) \cdot n \right]_{\Sigma} = - \left[ (\partial_3 \widehat{\varepsilon}) \nabla \widehat{\xi}_e^1 \cdot n \right]_{\Sigma} - \left[ \operatorname{div}_{\Sigma} (g \nabla \widehat{\xi}_e^1) \right]_{\Sigma}, & \text{on } \Sigma_{x_3}. \end{cases} \quad (5.19)$$

and

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\widehat{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \partial_3 \widehat{\zeta}_m^1) = \partial_3 \widehat{J}_{s,3} - (\partial_3(\widehat{\mu}^{-1}) \operatorname{rot} \widehat{\zeta}_m^1), & \text{in } S_{x_3} \\ \partial_3 \widehat{\zeta}_m^1 = g \partial_n \widehat{\zeta}_m^1, & \text{on } \partial S_{x_3} \\ \left[ \partial_3 \widehat{\zeta}_m^1 \right]_{\Sigma} = \left[ g \partial_n \widehat{\zeta}_m^1 \right]_{\Sigma}, & \text{on } \Sigma_{x_3} \\ \left[ \widehat{\mu}^{-1} \partial_n \partial_3 \widehat{\zeta}_m^1 \right]_{\Sigma} = - \left[ (\partial_3 \widehat{\mu}^{-1}) \partial_n \widehat{\zeta}_m^1 \right]_{\Sigma} - \left[ \operatorname{div}_{\Sigma} (g \nabla \widehat{\zeta}_m^1) \right]_{\Sigma}, & \text{on } \Sigma_{x_3}, \end{cases} \quad (5.20)$$

where  $\operatorname{div}_{\Sigma}$  is the curvilinear divergence operator on  $\Sigma$ .

*Proof.* The proof is quite similar to the one of the proposition 4.1.4 (and easier). First we note that since there are enough regularity assumptions on the geometry, all the right hand side of the equations (5.19,5.20) are enough regular to prove that the solutions of (5.19,5.20) are  $H^1(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})$ . Then by the use of the Reynolds transport theorem (3.11), we prove that the longitudinal derivative of  $\widehat{\xi}_e^1$  and  $\widehat{\zeta}_m^1$  are also solutions of (5.19,5.20).  $\square$

With the equation (5.17) and the previous lemma, the following corollary is trivial.

**Corollary 5.2.1.** *The  $x_3$ -derivative of the first order residuals satisfy*

$$\partial_3 \widehat{E}_T^{R,1}, \partial_3 \widehat{H}_T^{R,1} \in L^2(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}).$$

The next lemma has some similitudes with the proposition 4.1.3. It is a first step toward the telegrapher's equation of order 2.

**Lemma 5.2.2.** *The electrical potential vector  $\widehat{\mathbf{V}}^1$  and current vector  $\widehat{\mathbf{I}}^1$  satisfy*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( s \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}}^1 + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^1 \right)_q = \left( \partial_3 \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q} \right)_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - \left( \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma \left[ \widehat{H}_T^{R,1} \cdot \mathbf{n}_T \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\varphi}_{e,q}} \right), \\ \left( s \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{I}}^1 + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^1 \right)_q = - \left( \partial_3 \widehat{E}_T^{R,1}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \\ \quad + \left( \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{E}_T^{R,1} \cdot n \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q}} + \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma \left[ \widehat{E}_T^{R,1} \cdot \mathbf{n}_T \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q}} \right), \end{array} \right. \quad (5.21)$$

with  $S_{x_3}^\Sigma = S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}$ .

*Proof.* Putting (5.16a) and (5.16b) in equations (5.6-(a)) and (5.6-(c)) for  $p = 0$ , we have

$$\left\{ \begin{array}{l} s \widehat{\varepsilon} \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^1 \nabla \widehat{\varphi}_{e,q} + \widehat{E}_T^{R,1} - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \left( \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^1 \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q} + \widehat{H}_T^{R,1} \right) - \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2 = 0, \quad (a) \\ s \widehat{\mu} \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^1 \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q} + \widehat{H}_T^{R,1} + \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \left( \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^1 \nabla \widehat{\varphi}_{e,q} + \widehat{E}_T^{R,1} \right) + \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2 = 0, \quad (b) \end{array} \right. \quad (5.22)$$

while (5.7) gives

$$\widehat{E}_3^2 = g \widehat{E}_T^2 \cdot n = \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^1 g \partial_n \widehat{\varphi}_{e,q} + g \widehat{E}_T^{R,1} \cdot n, \quad (5.23)$$

and (5.8) gives

$$\left[ \widehat{E}_3^2 \right]_\Sigma = \left[ g_\Sigma \widehat{E}_T^1 \cdot n \right]_\Sigma = \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q \left[ g_\Sigma \partial_n \widehat{\varphi}_{e,q} \right]_\Sigma + \left[ g_\Sigma \widehat{E}_T^{R,1} \cdot n \right]_\Sigma, \quad (5.24)$$

and

$$\left[ \widehat{H}_3^2 \right]_\Sigma = \left[ g_\Sigma \widehat{H}_T^1 \cdot n \right]_\Sigma = \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q \left[ g_\Sigma \partial_n \widehat{\psi}_{m,q} \right]_\Sigma + \left[ g_\Sigma \widehat{H}_T^{R,1} \cdot n \right]_\Sigma. \quad (5.25)$$

To get rid of the (unknown) terms  $\widehat{H}_3^2$  and  $\widehat{E}_3^2$ , we take the scalar product of  $L^2(S_{x_3})$ , in each cross section  $S_{x_3}$ , of (5.22-(a)) for each  $\nabla \widehat{\varphi}_{e,q'}$  and of (5.22-(b)) for each  $\widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q'}$ . It is motivated by the fact the Helmholtz decompositions we used are orthogonal

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} \cdot \widehat{E}_T^{R,1} = 0 \quad \text{and} \quad \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q'} \cdot \widehat{H}_T^{R,1} = 0. \quad (5.26)$$

Then we have after introducing the Gram matrix  $\widehat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\widehat{\mathbf{Z}}_m$  and using (10.7)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q=1}^Q \left[ s \left( \widehat{\mathbf{Y}}_e \right)_{q,q'} \widehat{V}_q^1 + \partial_3 \widehat{I}_q^1 \left( \mathbf{rot} \widehat{\psi}_{m,q}, \nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} \right] = \\ \quad - \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^1 \left( \mathbf{rot} \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q}, \nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} + \left( \partial_3 \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} + \left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2, \nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} \\ \sum_{q=1}^Q \left[ s \left( \widehat{\mathbf{Z}}_m \right)_{q,q'} \widehat{I}_q^1 - \partial_3 \widehat{V}_q^1 \left( \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q}, \nabla \widehat{\psi}_{m,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} \right] = \\ \quad \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^1 \left( \mathbf{rot} \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}, \nabla \widehat{\psi}_{m,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} + \left( \partial_3 \widehat{E}_T^{R,1}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q'} \right)_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - \left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2, \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} \end{array} \right. \quad (5.27)$$

First, using Green's formula (10.19), we have in each section  $S_{x_3}$  since  $[\widehat{\varphi}_{e,i}]_\Sigma$  is constant along  $\Sigma_{x_3}$  and  $\mathbf{rot} \nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} = 0$

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2, \nabla \widehat{\varphi}_{e,i} \right)_{L^2(S_{x_3})} \stackrel{(10.10)}{=} \int_{\partial S_{x_3}} \widehat{H}_3^2 \overline{\nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} \times n} + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \widehat{H}_3^2 \right]_\Sigma \overline{\nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} \times n},$$

Then since  $\nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} \times n = 0$  along  $\partial S_{x_3}$  and (4.28), we have

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2, \nabla \widehat{\varphi}_{e,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} = - \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_\Sigma \partial_n \widehat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\varphi}_{e,q'}} - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_\Sigma \widehat{H}_T^{R,1} \cdot n \right]_\Sigma \overline{\partial_\tau \widehat{\varphi}_{e,q'}}. \quad (5.28)$$

On the other hand, thanks to the jump relations satisfied by  $\widehat{\psi}_{m,q'}$ , the reader will easily check that

$$\mathbf{rot} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q'} = 0 \text{ in } S_{x_3}.$$

Therefore, by Green's formula

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2, \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} = - \int_{\partial S_{x_3}} \widehat{E}_3^2 \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q'}} - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \widehat{E}_3^2 \right]_\Sigma \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q'}},$$

so we have with (4.26) and (4.28) :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2, \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q'} \right)_{L^2(S_{x_3})} &= - \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_j^1 \left( \int_{\partial S_{x_3}} g \partial_n \widehat{\varphi}_{e,q} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q'}} + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_\Sigma \partial_n \widehat{\varphi}_{e,j} \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q'}} \right) \\ &\quad - \left( \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{E}_T^{R,1} \cdot n \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q'}} + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_\Sigma \widehat{E}_T^{R,1} \cdot n \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q'}} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

We then put (5.28, 5.29) into (5.27) and use the lemma 4.1.1 to recover the wanted equation (5.21).  $\square$

The equation of this lemma 5.2.2 are telegrapher's equation with the right hand side depending on the "residual term"  $\widehat{E}_T^{R,1}$  and  $\widehat{H}_T^{R,1}$ . We will now prove that the right hand side of the equation (5.21) depends only and linearly of the source term  $\widehat{\mathbf{I}}_s$  and some geometrical and physical parameters. The proof is based upon the conjugaison lemma 1.3.5. To use this lemma we introduce the two following conjugated potentials

$$\widehat{\varphi}_{m,q}(\cdot, x_3, s) := \varphi^q \left( \widehat{\mu}^{-1}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3} \right) \in H^1(S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \widehat{\psi}_{e,q}(\cdot, x_3, s) := \psi^q \left( \widehat{\varepsilon}^{-1}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3} \right) \in H^1(S_{x_3})/\mathbb{C}$$

that are solution of

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\widehat{\mu}^{-1} \nabla \widehat{\varphi}_{m,q}) = 0, & \text{in } S, \\ \widehat{\varphi}_{m,q} = 0, & \text{on } \partial_0 S, \\ \widehat{\varphi}_{m,q} = \delta_{qk}, & \text{on } \partial_k S, \quad k \leq Q, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\widehat{\varepsilon}^{-1} \nabla \widehat{\psi}_{e,q}) = 0, & \text{in } S_{\Gamma_q}, \\ \partial_n \widehat{\psi}_{e,q} = 0, & \text{on } \partial S, \\ [\widehat{\psi}_{e,q}] = \delta_{qk}, \quad [\widehat{\varepsilon}^{-1} \partial_n \widehat{\psi}_{e,q}] = 0 & \text{on } \Gamma_k, \quad k \leq Q. \end{array} \right. \quad (5.30)$$

Note that with the conjugaison lemma, the orthogonality relations between "residuals" and harmonic potentials (5.26) imply for all  $q' \leq Q$

$$\int_{S_{x_3}} \mathbf{rot} \widehat{\psi}_{e,q'} \cdot \widehat{E}_T^{R,1} = 0 \quad \text{and} \quad \int_{S_{x_3}} \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{m,q'} \cdot \widehat{H}_T^{R,1} = 0. \quad (5.31)$$

**Lemma 5.2.3.** *For the right hand side of the first equation in (5.21), we have*

$$\begin{aligned} \left( \partial_3 \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q} \right)_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma \left[ \widehat{H}_T^{R,1} \cdot \mathbf{n}_T \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\varphi}_{e,q}} d\sigma_{x_3} \\ = \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} \mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,1} \overline{(\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q})} \right) + \int_{S_{x_3}} \mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,1} \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

with  $\widehat{\varphi}_{e,q}$  defined in (1.10), its longitudinal derivative  $\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}$  in (4.14) (see proposition (4.1.4)) and the conjugated potential  $\widehat{\varphi}_{m,q}$  in (5.30).

*Proof.* A first application of the Reynold's transport theorem (equation (3.11)), gives

$$\begin{aligned} \left( \partial_3 \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q} \right)_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \stackrel{(3.11)}{=} \partial_3 \left( \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q} \right)_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - \left( \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q} \right)_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \\ + \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{H}_T^{R,1} \cdot \overline{\mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q}} d\sigma_{x_3} + \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma \left[ \widehat{H}_T^{R,1} \cdot \overline{\mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q}} \right]_{\Sigma_{x_3}} d\sigma_{x_3}. \end{aligned}$$

Green's formula, equation (10.18), in  $S_{x_3}^\Sigma$  is now used on the second term of the right hand side of this equation to obtain

$$\begin{aligned} & (\partial_3 \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \stackrel{(10.18)}{=} \partial_3 (\widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - (\mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,1}, \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \\ & + \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{H}_T^{R,1} \cdot \overline{\mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q}} - \widehat{H}_T^{R,1} \times \mathbf{n}_T \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}} d\sigma_{x_3} + \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma \left[ \widehat{H}_T^{R,1} \cdot \overline{\mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q}} \right]_{\Sigma_{x_3}} - \left[ \widehat{H}_T^{R,1} \times \mathbf{n}_{\Sigma,T} \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}} \right]_{\Sigma_{x_3}} d\sigma_{x_3}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

With the algebraic formula

$$\widehat{H}_T^{R,1} \cdot \overline{\mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q}} = \widehat{H}_T^{R,1} \cdot n \overline{\partial_\tau \widehat{\varphi}_{e,q}} + \widehat{H}_T^{R,1} \times n \overline{\partial_n \widehat{\varphi}_{e,q}},$$

the second line of (5.33) becomes

$$\int_{\partial S_{x_3}} \widehat{H}_T^{R,1} \times n \left( g \overline{\partial_n \widehat{\varphi}_{e,q}} - \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}} \right) + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \widehat{H}_T^{R,1} \times n \left( g_\Sigma \overline{\partial_n \widehat{\varphi}_{e,q}} - \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}} \right) \right]_\Sigma + \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \widehat{H}_T^{R,1} \cdot n \overline{\partial_\tau \widehat{\varphi}_{e,q}} \right]_\Sigma.$$

We thus have

$$(\partial_3 \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma \left[ \widehat{H}_T^{R,2} \cdot \mathbf{n}_T \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\varphi}_{e,q}} = \partial_3 (\widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - (\mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,1}, \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)}.$$

The first term of the right hand side in equation (5.33) is simplified with the use of the relation (5.31), the Green's formula (10.18) over  $S_{x_3}$  and the relation (5.54)

$$(\widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \stackrel{(5.31)}{=} (\widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} (\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}))_{L^2(S_{x_3})} \stackrel{(10.18)}{=} (\mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,1}, (\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}))_{L^2(S_{x_3})}.$$

In the previous equations, the integral has been extended over  $S_{x_3}$  since  $\widehat{\varphi}_{e,q}$  and  $\widehat{\varphi}_{m,q}$  are  $H^1(S_{x_3})$  functions and from equation (??) the tangential components of  $\widehat{H}_T^{R,1}$  do not jump across  $\Sigma_{x_3}$ . Indeed, its curl is an  $L^2(S_{x_3})$  function given by (5.54). Moreover, the use of Green's formula does not introduce boundary terms since  $\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q} \in H_0^1(S_{x_3})$ .  $\square$

For the second right hand side in the equation (5.21), we use techniques similar to the ones we used to demonstrate lemma 4.1.1.

**Lemma 5.2.4.** *For the right hand side in the first equation of (5.21), we have*

$$-(\partial_3 \widehat{E}_T^{R,1}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} + \left( \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{E}_T^{R,1} \cdot n \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q}} + \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma \left[ \widehat{E}_T^{R,1} \cdot \mathbf{n}_T \right]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q}} \right) = 0$$

*Proof.* We use the 2D Green's formulae (10.19) :

$$\left( \nabla \widehat{\xi}_e^1, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3})} = - \int_\Gamma \partial_\tau \xi_e^1 = 0 \quad \text{since } \xi_e^1|_{\partial S_{x_3}} = 0$$

We derive the previous equality according to the longitudinal parameter  $x_3$  (that acts as a shape variable) and use the Reynold's transport theorem (3.11)

$$\begin{aligned} & \left( \partial_3 \nabla \widehat{\xi}_e^1, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})} + \left( \nabla \widehat{\xi}_e^1, \partial_3 \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3})} \\ & - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_\Sigma \nabla \widehat{\xi}_e^1 \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} \right]_{\Sigma_{x_3}} - \int_{\partial S_{x_3}} g \nabla \widehat{\xi}_e^1 \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} = 0 \end{aligned}$$

then we have

$$\left( \nabla \widehat{\xi}_e^1, \partial_3 \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3})} = - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ \frac{\partial \widehat{\psi}_{m,q}}{\partial x_3} \frac{\partial \widehat{\xi}_e^1}{\partial \tau} \right]_{\Sigma_{x_3}} = - \int_{\Sigma_{x_3}} \left[ g_\Sigma \partial_n \widehat{\psi}_{m,q} \partial_\tau \widehat{\xi}_e^1 \right]_{\Sigma_{x_3}}.$$

We thus have proved the wanted formulae we were looking for since  $\nabla \widehat{\xi}_e^1 = \widehat{E}_T^{R,1}$  (see equation (5.17)).  $\square$

### The first order telegrapher's equation

We then use the lemmata 5.2.2, 5.2.3 and 5.2.4 with  $\text{rot } \hat{H}_T^1 = \hat{J}_{s,3}$  (see (5.15)) to obtain the following theorem.

**Theorem 5.2.1.** *The telegrapher's equation for the first order electrical potentials and currents is*

$$\begin{cases} s \hat{\mathbf{Y}}_e \hat{\mathbf{V}}^1 + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^1 &= \hat{\mathbf{I}}_s^1, \\ s \hat{\mathbf{Z}}_m \hat{\mathbf{I}}^1 + \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^1 &= 0, \end{cases} \quad (5.34)$$

with  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  defined in (5.12) and the source term defined by

$$\hat{\mathbf{I}}_s^1(x_3, s) = (\hat{I}_{s,q}^1(x_3, s))_{q=1:Q}, \quad \hat{I}_{s,q}^1 = \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} \hat{J}_{s,3} (\overline{\hat{\varphi}_{e,q}} - \overline{\hat{\varphi}_{m,q}}) \right) + \int_{S_{x_3}} \hat{J}_{s,3} \overline{\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q}}. \quad (5.35)$$

If there is cylindrical symmetry ( $g = 0$  and  $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$  are independent of  $x_3$ ) or if the longitudinal component of the current density is null ( $\hat{J}_{s,3} = 0$ ), then

$$\hat{\mathbf{I}}_s^1 = 0 \implies \hat{\mathbf{V}}^1 = \hat{\mathbf{I}}^1 = 0.$$

### 5.2.3 First order longitudinal fields

**Proposition 5.2.1.** *The longitudinal part of the first order electric field satisfies*

$$\hat{E}_3^1 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 \hat{\varphi}_{e,q} \hat{V}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^N (\hat{\varphi}_{e,q} - \hat{\varphi}_{m,q}) s (\hat{Z}_m)_{q,q'} \hat{I}_{q'}^0 \quad (5.36)$$

and the longitudinal part of the first order magnetic field satisfies

$$\hat{H}_3^1 = \sum_{q=1}^Q \langle \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \rangle_{\hat{\mu}} \hat{I}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q \langle \hat{\psi}_{m,q} - \hat{\psi}_{e,q} \rangle_{\hat{\mu}} s (\hat{Y}_e)_{q,q'} \hat{V}_l^0 + \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{s,q}^0 \left( \langle \hat{\psi}_{m,q} \rangle_{\hat{\mu}} - \langle \psi^q(S, 1) \rangle_{\hat{\mu}} \right) - \langle \zeta_J \rangle_{\hat{\mu}} \quad (5.37)$$

with the notation  $\langle \cdot \rangle_{\hat{\mu}}$  defined in the definition 5.1.1.

The demonstration of this proposition spreads over the following subsections. Whereas the study of the transverse fields followed the same approach as in the chapter 4, the study of the longitudinal fields differs fairly but is kept simple with the conjugaison lemma 1.3.5.

#### The longitudinal electric field $\hat{E}_3^1$

From the equations (5.6) we can express the longitudinal magnetic field  $\hat{E}_3^1$  as follows

$$\mathbf{rot } \hat{E}_3^1 = -s \hat{\mu} \hat{H}_T^0 - \partial_3 \mathbf{e}_3 \times \hat{E}_T^0 \text{ in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}.$$

By using the identities (5.14), we have

$$\mathbf{rot } \hat{E}_3^1 = -s \hat{\mu} \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^0 \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q} - \partial_3 \left( \mathbf{e}_3 \times \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^0 \nabla \hat{\varphi}_{e,q} \right) = -s \hat{\mu} \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^0 \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q} + \mathbf{rot } \partial_3 \left( \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q \hat{\varphi}_{e,q} \right) \text{ in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}.$$

We then have with conjugaison lemma 1.3.5

$$\mathbf{rot } \hat{E}_3^1 = \mathbf{rot } \left( \sum_{q=1}^Q \left( \partial_3 \hat{\varphi}_{e,q} \hat{V}_q^0 + \partial_3 \hat{V}_q^0 \hat{\varphi}_{e,q} \right) \right) + s \sum_{q,q'=1}^N (\hat{Z}_m)_{q,q'} \mathbf{rot } \hat{\varphi}_{m,q'} \hat{I}_q^0 \text{ in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3},$$

and the telegrapher's equation (5.11)

$$\mathbf{rot } \hat{E}_3^1 = \mathbf{rot } \left( \sum_{q=1}^Q \frac{\partial \hat{\varphi}_{e,q}}{\partial x_3} \hat{V}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^N (\hat{\varphi}_{e,q} - \hat{\varphi}_{m,q}) s (\hat{Z}_m)_{q,q'} \hat{I}_{q'}^0 \right) \text{ in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}.$$



Since  $[\hat{E}_3^1]_{\Sigma_{x_3}} = [\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q}]_{\Sigma_{x_3}}, [\hat{\varphi}_{e,q}]_{\Sigma_{x_3}} = [\hat{\varphi}_{m,q}]_{\Sigma_{x_3}} = 0$ , we have the good jump condition. Thus

$$\mathbf{rot} \hat{E}_3^1 = \mathbf{rot} \left( \sum_{q=1}^Q \frac{\partial \hat{\varphi}_{e,q}}{\partial x_3} \hat{V}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\hat{\varphi}_{e,q} - \hat{\varphi}_{m,q}) s (\hat{Z}_m)_{q,q'} \hat{I}_{q'}^0 \right) \text{ in } S_{x_3}.$$

Since  $\hat{\varphi}_{e,q}|_{\partial S_{x_3}} = \hat{\varphi}_{m,q}|_{\partial S_{x_3}}$ , the boundary condition of  $\hat{E}_3^1$  on  $\partial S_{x_3}$  gives

$$\hat{E}_3^1|_{\partial S_{x_3}} = g \hat{E}_T^0 \cdot n = \sum_{q=1}^Q g \frac{\partial \hat{\varphi}_{e,q}}{\partial n} \hat{V}_q^0 = \sum_{q=1}^Q \frac{\partial \hat{\varphi}_{e,q}}{\partial x_3} \hat{V}_q^0 = \sum_{q=1}^Q \frac{\partial \hat{\varphi}_{e,q}}{\partial x_3} \hat{V}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\hat{\varphi}_{e,q} - \hat{\varphi}_{m,q}) s (\hat{Z}_m)_{q,q'} \hat{I}_{q'}^0$$

and thus

$$\hat{E}_3^1 = \sum_{q=1}^Q \frac{\partial \hat{\varphi}_{e,q}}{\partial x_3} \hat{V}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\hat{\varphi}_{e,q} - \hat{\varphi}_{m,q}) s (\hat{Z}_m)_{q,q'} \hat{I}_{q'}^0.$$

**The longitudinal electric field  $\hat{H}_3^1$**

From the equations (5.6) we can express the longitudinal magnetic field  $\hat{H}_3^1$  as follows

$$\mathbf{rot} \hat{H}_3^1 = s \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^0 - \partial_3 \mathbf{e}_3 \times \hat{H}_T^0 - \hat{J}_{s,T},$$

by using the identities (5.14)

$$\mathbf{rot} \hat{H}_3^1 + \hat{J}_{s,T} = s \hat{\varepsilon} \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^0 \nabla \hat{\varphi}_{e,j} - \partial_3 \left( \mathbf{e}_3 \times \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^0 \nabla \hat{\psi}_{m,q} \right) = s \hat{\varepsilon} \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^0 \nabla \hat{\varphi}_{e,j} + \widetilde{\mathbf{rot}} \partial_3 \left( \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^0 \hat{\psi}_{m,q} \right).$$

We then have in  $S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \cup_{q=1}^Q \Gamma)$  with conjugaison lemma 1.3.5

$$\mathbf{rot} \hat{H}_3^1 = \mathbf{rot} \left( \sum_{q=1}^Q (\partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \hat{I}_q^0 + \partial_3 \hat{I}_q^0 \hat{\psi}_{m,q}) \right) + s \sum_{q,q'=1}^Q (\hat{Y}_e)_{q,q'} \mathbf{rot} \hat{\psi}_{e,q} \hat{I}_{q'}^0 - \hat{J}_{s,T}$$

and the telegrapher's equation (5.11)

$$\mathbf{rot} \hat{H}_3^1 = \mathbf{rot} \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \hat{I}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\hat{\psi}_{m,q} - \hat{\psi}_{e,q}) s (\hat{Y}_e)_{q,q'} \hat{V}_{q'}^0 + \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{s,q}^0 \hat{\psi}_{m,q} \right) - \hat{J}_{s,T}.$$

We then use the proposition 5.1.1 on the possibility to write  $\hat{J}_{s,T}$  as a rotational

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \hat{H}_3^1 = \mathbf{rot} & \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \hat{I}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\hat{\psi}_{m,q} - \hat{\psi}_{e,q}) s (\hat{Y}_e)_{q,q'} \hat{V}_{q'}^0 \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{s,q}^0 (\hat{\psi}_{m,q} - \psi^q(S, 1)) - \zeta_J \right) \text{ in } S_{x_3} \setminus (\Sigma_{x_3} \bigcup_{q=1}^Q \Gamma). \end{aligned}$$

The jump on one artificial cut  $\Gamma_q$  must satisfy

$$\left[ \sum_{q=1}^Q \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \hat{I}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\hat{\psi}_{m,q} - \hat{\psi}_{e,q}) s (\hat{Y}_e)_{q,q'} \hat{V}_{q'}^0 + \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{s,q}^0 (\hat{\psi}_{m,q} - \psi^q(S, 1)) - \zeta_J \right]_{\Gamma_q} = [\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}]_{\Gamma_q} \hat{I}_q^0$$

With the shape derivative calculus of  $\hat{\psi}_{m,q}$  (see equation (4.15) in proposition 4.1.4), we have  $[\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}]_{\Gamma_q} = 0$

which is consistent with  $[\hat{H}_3^1]_{\Gamma_q} = 0$ . Similarly for the cut  $\Sigma_{x_3}$ , we have

$$\left[ \sum_{q=1}^Q \partial_3 \hat{\psi}_{m,q} \hat{I}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\hat{\psi}_{m,q} - \hat{\psi}_{e,q}) s (\hat{Y}_e)_{q,q'} \hat{V}_{q'}^0 + \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{s,q}^0 (\hat{\psi}_{m,q} - \psi^q(S, 1)) - \zeta_J \right]_{\Sigma_{x_3}} = \sum_{q=1}^Q [\partial_3 \hat{\psi}_{m,q}]_{\Sigma_{x_3}} \hat{I}_q^0.$$

Then with the jump condition of  $\widehat{H}_3^1$  across  $\Sigma_{x_3}$  (see equation (5.8)), the reconstruction formula for the transverse magnetic field (see equation (5.14)) and the shape derivative calculus of  $\widehat{\psi}_{m,q}$  (see equation (4.15) in proposition 4.1.4), we have

$$[\widehat{H}_3^1]_{\Sigma_{x_3}} \stackrel{(5.8)}{=} [g \widehat{H}_T^0 \cdot n]_{\Sigma_{x_3}} \stackrel{(5.14)}{=} \sum_{q=1}^Q [g \partial_n \widehat{\psi}_{m,q}]_{\Sigma_{x_3}} \widehat{I}_q^0 \stackrel{(4.15)}{=} \sum_{q=1}^Q [\partial_3 \widehat{\psi}_{m,q}]_{\Sigma_{x_3}} \widehat{I}_q^0,$$

and so

$$\left[ \sum_{q=1}^Q \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \widehat{I}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q}) s (\widehat{Y}_e)_{q,q'} \widehat{V}_{q'}^0 + \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_{s,q}^0 (\widehat{\psi}_{m,q} - \psi^q(S, 1)) - \zeta_J \right]_{\Sigma_{x_3}} = [\widehat{H}_3^1]_{\Sigma_{x_3}}.$$

We thus have proved that

$$\begin{aligned} \text{rot } \widehat{H}_3^1 = \text{rot} & \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \widehat{I}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q}) s (\widehat{Y}_e)_{q,q'} \widehat{V}_{q'}^0 \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_{s,q}^0 (\widehat{\psi}_{m,q} - \psi^q(S, 1)) - \zeta_J \right) \text{ in } S_{x_3}, \end{aligned}$$

and so

$$\widehat{H}_3^1 - \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \widehat{I}_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q (\widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q}) s (\widehat{Y}_e)_{q,q'} \widehat{V}_{q'}^0 + \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_{s,q}^0 (\widehat{\psi}_{m,q} - \psi^q(S, 1)) - \zeta_J \right) = cte.$$

To determine the constant *cte* we use the normalisation condition

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \widehat{H}_3^1 = 0.$$

### Two remarks about the first order longitudinal fields

We can rewrite the longitudinal fields (5.36, 5.37) with the telegrapher's equation (5.11) in the form of the following remark.

**Remark 5.2.1.** *We have*

$$\widehat{E}_3^1 = \sum_{q=1}^Q \left[ \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q} \widehat{V}_q^0 + (\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}) \partial_3 \widehat{V}_q^0 \right], \quad (5.38)$$

$$\widehat{H}_3^1 = \sum_{q=1}^Q \left[ \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \widehat{I}_q^0 + \langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \partial_3 \widehat{I}_q^0 \right] + \langle \widehat{j}_h \rangle_{\widehat{\mu}}, \quad (5.39)$$

with

$$\widehat{j}_h = \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_{s,q}^0 (\widehat{\psi}_{e,q} - \psi^q(S, 1)) - \zeta_J.$$

Note that the proposition 5.1.1 implies that  $\widehat{j}_h = 0$  if and only if  $\widehat{J}_T = 0$ .

**Remark 5.2.2.** *The approximation model*

$$\widehat{E}^{\delta,1} = \widehat{E}^0 + \delta \widehat{E}^1 \quad \text{and} \quad \widehat{H}^{\delta,1} = \widehat{H}^0 + \delta \widehat{H}^1,$$

is no longer TEM in general, i-e  $\widehat{E}_3^{\delta,1} \neq 0$  and  $\widehat{H}_3^{\delta,1} \neq 0$ . However, we can recover the standard TEM assumption as used in classical references on transmissions (see [59] for example). More precisely we have proved that the first order approximation is TEM if :

- there is invariance along  $x_3$  : cylindrical cable  $g = 0$ ,  $\widehat{\varepsilon}$  and  $\widehat{\mu}$  are independent of  $x_3$ ,
- the electromagnetic waves "velocities" are constant, i-e  $\widehat{\varepsilon} \widehat{\mu} = cte$ ,
- there are no transversal components of the source, i-e  $\widehat{J}_T = 0$ .

### 5.3 First order corrector in time domain

Le temps a laissié son manteau

Charles d'Orleans

We aim to find the time domain formulation of equation (5.34) like it is done in the section 4.2 for the limit telegrapher's equation. It is done formally by an inverse Fourier applied on (5.34). We have

$$\begin{cases} \mathbf{C}_\infty(x_3) \partial_t \mathbf{V}^1(x_3, t) + \mathbf{G}_\infty(x_3) \mathbf{V}^1(x_3, t) + \int_0^t \mathbf{K}_e(x_3, t-s) \mathbf{V}^0(x_3, s) ds + \partial_3 \mathbf{I}^1(x_3, t) = \mathbf{I}_s^1(x_3, t), \\ \mathbf{L}_\infty(x_3) \partial_t \mathbf{I}^1(x_3, t) + \mathbf{R}_\infty(x_3) \mathbf{I}^1(x_3, t) + \int_0^t \mathbf{K}_m(x_3, t-s) \mathbf{I}^1(x_3, s) ds + \partial_3 \mathbf{V}^1(x_3, t) = 0, \end{cases} \quad (5.40)$$

with the electrical capacitance  $\mathbf{C}_\infty$ , inductance  $\mathbf{L}_\infty$ , conductance  $\mathbf{G}_\infty$  and resistance  $\mathbf{R}_\infty$  defined in proposition 4.2.1 (the definition of the potentials  $\varphi_{e,q}^\infty$  and  $\varphi_{m,q}^\infty$  will be recalled in the equation (5.43) of this section) and the "memory kernels"  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$  defined in lemma 4.2.2 (the definition of the potentials  $\varphi_{e,q}^r$  and  $\varphi_{m,q}^r$  will be recalled in the equation (5.50) of this section). The matrices  $\mathbf{C}_\infty$ ,  $\mathbf{L}_\infty$ ,  $\mathbf{G}_\infty$ ,  $\mathbf{R}_\infty$ ,  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$  are already given in the previous chapter. But the new current source  $\mathbf{I}_s^1$  is not. Its  $q$  component is

$$I_{s,q}^1 = \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} J_{s,3} (\varphi_{e,q}^\infty - \varphi_{m,q}^\infty) \right) + \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} J_{s,3} *_t (\varphi_{e,q}^r - \varphi_{m,q}^r) \right) + \int_{S_{x_3}} J_{s,3} \partial_3 \varphi_{e,q}^\infty + \int_{S_{x_3}} J_{s,3} *_t \partial_3 \varphi_{e,q}^r. \quad (5.41)$$

where  $\varphi_{m,q}^r$  is not yet defined. It is one of the objectives of this section. Then with in view of (5.38, 5.39) we need to give the temporal equivalent of  $\widehat{\psi}_{e,q}$ . If the harmonic potential  $\varphi_{m,q}^r(x, x_3, t)$  and  $\psi_{e,q}^r(x, x_3, t)$  can be computed in time domain then the reconstruction formulae of the first order corrector in time domain are

$$\begin{aligned} E_T^1 &= \sum_{q=1}^Q \left[ \nabla \varphi_{e,q}^\infty V_q^1 + \nabla \varphi_{e,q}^r *_t V_q^1 \right] + \nabla \zeta_e^1, \\ H_T^1 &= \sum_{q=1}^Q \left[ \nabla \psi_{m,q}^\infty I_q^1 + \nabla \psi_{m,q}^r *_t I_q^1 \right] + \nabla \zeta_m^1, \\ E_3^1 &= \sum_{q=1}^Q \left[ \partial_3 \varphi_{e,q}^\infty V_q^0 + (\varphi_{e,q}^\infty - \varphi_{m,q}^\infty) \partial_3 \widehat{V}_q^0 + \partial_3 \varphi_{e,q}^r *_t V_q^0 + (\varphi_{e,q}^r - \varphi_{m,q}^r) *_t \partial_3 \widehat{V}_q^0 \right], \\ H_3^1 &= \sum_{q=1}^Q \left[ \langle \partial_3 \psi_{m,q}^\infty \rangle_{\mu \partial_t + \sigma_m} I_q^0 + \langle \psi_{m,q}^\infty - \psi_{e,q}^\infty \rangle_{\mu \partial_t + \sigma_m} \partial_3 I_q^0 + (\psi_{e,q}^\infty - \psi_{m,q}^\infty) I_{s,q}^0, \right. \\ &\quad \left. + \langle \partial_3 \psi_{m,q}^r \rangle_{\mu \partial_t + \sigma_m} *_t I_q^0 + \langle \psi_{m,q}^r - \psi_{e,q}^r \rangle_{\mu \partial_t + \sigma_m} *_t \partial_3 I_q^0 + \psi_{e,q}^r *_t I_{s,q}^0 \right] - \zeta_J, \end{aligned} \quad (5.42)$$

with  $*_t$  standing for the time convolution and  $\langle \cdot \rangle_{\mu \partial_t + \sigma_m}$  standing for

$$\langle u \rangle_{\mu \partial_t + \sigma_m} = u - \tilde{u},$$

with  $\tilde{u}$  the solution of the EDO  $\left( \int_{S_{x_3}} \mu \right) \partial_t \tilde{u} + \left( \int_{S_{x_3}} \sigma_m \right) \tilde{u} = \left( \int_{S_{x_3}} u \right)$  such that  $\tilde{u}(0) = u(0)$ .

#### 5.3.1 The harmonic potentials in time domain

##### High frequency behavior

Similarly to the chapter 4, we introduce the high frequency behavior of the harmonic potentials :

$$\widehat{\varphi}_{e,q}, \widehat{\psi}_{m,q} \quad \text{and} \quad \widehat{\varphi}_{m,q}, \widehat{\psi}_{e,q}.$$

These high frequency limits are naturally defined after noticing that

$$\widehat{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon \quad \text{and} \quad \widehat{\mu} \rightarrow \mu \quad \text{when} \quad |s| \rightarrow \infty.$$

This justifies the introduction of the high frequency potentials :

$$\begin{cases} \varphi_{e,q}^\infty(\cdot, x_3) := \varphi^q(\varepsilon(\cdot, x_3), S_{x_3}), & \psi_{m,q}^\infty(\cdot, x_3) := \psi_q(\mu(\cdot, x_3), S_{x_3}), \\ \varphi_{m,q}^\infty(\cdot, x_3) := \psi^q(\mu^{-1}(\cdot, x_3), S_{x_3}), & \psi_{e,q}^\infty(\cdot, x_3) := \psi_q(\varepsilon^{-1}(\cdot, x_3), S_{x_3}), \end{cases} \quad (5.43)$$

(the notation  $\varphi^q(\cdot)$  and  $\psi^q(\cdot)$  are defined in the theorem 1.3.1) as well as the residual harmonic potentials

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{e,q}^r(\cdot, x_3, s) &:= \widehat{\varphi}_{e,q}(\cdot, x_3, s) - \varphi_{e,q}^\infty(\cdot, x_3), \\ \widehat{\psi}_{m,q}^r(\cdot, x_3, s) &:= \widehat{\psi}_{m,q}(\cdot, x_3, s) - \psi_{m,q}^\infty(\cdot, x_3), \\ \widehat{\varphi}_{m,q}^r(\cdot, x_3, s) &:= \widehat{\varphi}_{m,q}(\cdot, x_3, s) - \varphi_{m,q}^\infty(\cdot, x_3), \\ \widehat{\psi}_{e,q}^r(\cdot, x_3, s) &:= \widehat{\psi}_{e,q}(\cdot, x_3, s) - \psi_{e,q}^\infty(\cdot, x_3). \end{aligned} \quad (5.44)$$

**Remark 5.3.1.** If  $\sigma_e(x_3, \cdot)$  and  $\sigma_m(x_3, \cdot)$  are proportional to  $\varepsilon(x_3, \cdot)$  and to  $\mu(x_3, \cdot)$  in  $S_{x_3}$  of order  $\delta$ , then

$$\widehat{\varphi}_{a,q}(\cdot, x_3, s) = \varphi_{a,q}^\infty(\cdot, x_3) \quad \text{and} \quad \widehat{\psi}_{a,q}(\cdot, x_3, s) = \psi_{a,q}^\infty(\cdot, x_3) \quad \text{with } a = e, m$$

In the section 4.2.1, we do a complete analysis of

$$\widehat{\varphi}_{e,j}^r \in H_0^1(S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \widehat{\psi}_{m,j}^r \in H^1(S_{x_3})/\mathbb{C}$$

we will just recall the weak formulation of these potentials :

$$\begin{cases} \text{for all } u \in H_0^1(S_{x_3}) \\ s \int_{S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e,q}^r \cdot \nabla u = - \int_{S_{x_3}} \sigma_e \nabla \widehat{\varphi}_{e,q}^\infty \cdot \nabla u \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \text{for all } u \in H^1(S_{x_3})/\mathbb{C} \\ s \int_{S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}} \widehat{\mu} \nabla \widehat{\psi}_{m,q}^r \cdot \nabla u = - \int_{S_{x_3}} \sigma_m \nabla \widehat{\psi}_{m,q}^\infty \cdot \nabla u. \end{cases}$$

By definition of  $\widehat{\varphi}_{m,q}$  and  $\varphi_{m,q}^\infty$ , the residual  $\widehat{\varphi}_{m,q}^r \in H_0^1(S_{x_3})$  is the unique solution of

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \left( \mu + \frac{\sigma_m}{s} \right)^{-1} \nabla \widehat{\varphi}_{m,q}^r \right) = - \operatorname{div} \left( \left( \mu + \frac{\sigma_m}{s} \right)^{-1} \nabla \varphi_{m,q}^\infty \right) & \text{in } S_{x_3}, \\ \widehat{\varphi}_{m,q}^r = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (5.45)$$

and similarly, we have for the last potentials  $\widehat{\psi}_{e,q}^r \in H^1(S_{x_3})/\mathbb{C}$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \left( \varepsilon + \frac{\sigma_e}{s} \right)^{-1} \nabla \widehat{\psi}_{e,q}^r \right) = - \operatorname{div} \left( \left( \varepsilon + \frac{\sigma_e}{s} \right)^{-1} \nabla \psi_{e,q}^\infty \right), & \text{on } S_{x_3}, \\ \partial_n \widehat{\psi}_{e,q}^r = 0, & \text{on } \partial S_{x_3} \end{cases} \quad (5.46)$$

Since  $\varphi_{m,q}^\infty(\cdot, x_3) := \varphi_q(\mu^{-1}(\cdot, x_3), S_{x_3})$  and  $\psi_{e,q}^\infty(\cdot, x_3) := \psi_q(\varepsilon^{-1}(\cdot, x_3), S_{x_3})$ , we have

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \left( \mu + \frac{\sigma_m}{s} \right)^{-1} \nabla \widehat{\varphi}_{m,q}^r \right) = - \operatorname{div} \left( \frac{\sigma_m}{\mu} (s\mu + \sigma_m)^{-1} \nabla \varphi_{m,q}^\infty \right) & \text{in } S_{x_3}, \\ \widehat{\varphi}_{m,q}^r = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad (5.47)$$

and

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \left( \varepsilon + \frac{\sigma_e}{s} \right)^{-1} \nabla \widehat{\psi}_{e,q}^r \right) = - \operatorname{div} \left( \frac{\sigma_e}{\varepsilon} (s\varepsilon + \sigma_e)^{-1} \nabla \psi_{e,q}^\infty \right), & \text{in } S_{x_3} \\ \partial_n \widehat{\psi}_{e,q}^r = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}. \end{cases} \quad (5.48)$$

We say that  $\psi_{e,q}^\infty$  and  $\varphi_{m,q}^\infty$  are the high frequency behavior of the harmonic potentials  $\widehat{\psi}_{e,q}$  and  $\widehat{\varphi}_{m,q}$  since :

**Proposition 5.3.1.** *The (Laplace variable dependent) residual harmonic potentials satisfy*

$$\|\sigma_m^{\frac{1}{2}} \nabla \widehat{\varphi}_{m,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \left| \frac{s\mu_+ + \sigma_{m,+}}{s\mu_- + \sigma_{m,-}} \right| \|\nabla \varphi_{m,q}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}, \quad \|\sigma_e^{\frac{1}{2}} \nabla \widehat{\psi}_{e,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \left| \frac{s\varepsilon_+ + \sigma_{e,+}}{s\varepsilon_- + \sigma_{e,-}} \right| \|\nabla \psi_{e,q}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}.$$

and

$$\|\nabla \widehat{\varphi}_{m,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \frac{\sigma_{m,+}}{\mu_- |s|} \left| \frac{s\mu_+ + \sigma_{m,+}}{s\mu_- + \sigma_{m,-}} \right| \|\nabla \varphi_{m,q}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}, \quad \|\nabla \widehat{\psi}_{e,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \frac{\sigma_{e,+}}{\varepsilon_- |s|} \left| \frac{s\varepsilon_+ + \sigma_{e,+}}{s\varepsilon_- + \sigma_{e,-}} \right| \|\nabla \psi_{e,q}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}.$$

*Proof.* We integrate (5.45) over  $\overline{\widehat{\varphi}_{m,q}^r}$

$$\int_S \left( \frac{s}{s\mu + \sigma_m} \right) |\nabla \widehat{\varphi}_{m,q}^r|^2 = - \int_S \frac{\sigma_m}{\mu} \left( \frac{1}{s\mu + \sigma_m} \right) \nabla \overline{\widehat{\varphi}_{m,q}^r} \cdot \nabla \varphi_{m,q}^\infty.$$

Then by taking the modulus and using Cauchy-Schwarz inequality :

$$\|\nabla \widehat{\varphi}_{m,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} \leq \frac{\sigma_{m,+}}{\mu_- |s|} \left| \frac{s\mu_+ + \sigma_{m,+}}{s\mu_- + \sigma_{m,-}} \right| \|\nabla \varphi_{m,q}^\infty\|_{L^2(S_{x_3})}.$$

The proof for the potential  $\widehat{\psi}_{e,q}^r$  is similar.  $\square$

This proposition implies that

$$\|\sigma_m^{\frac{1}{2}} \nabla \widehat{\varphi}_{m,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} = O_{|s| \rightarrow 0}(1), \quad \|\sigma_e^{\frac{1}{2}} \nabla \widehat{\psi}_{e,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} = O_{|s| \rightarrow 0}(1)$$

and

$$\|\nabla \widehat{\varphi}_{m,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} = O_{|s| \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma_{m,+}}{|s|} \right), \quad \|\nabla \widehat{\psi}_{e,q}^r\|_{L^2(S_{x_3})} = O_{|s| \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma_{e,+}}{|s|} \right),$$

so that the return in time domain is possible.

### Potentials in the time domain

To define the inverse Laplace transform of the potentials  $\widehat{\varphi}_{e,j}^r$  and  $\widehat{\psi}_{m,j}^r$ , we need to introduce the self-adjoint positive bounded operators

$$\mathbf{A}_e(x_3) \in \mathcal{L} \left( H_0^1(S_{x_3}) \right) \quad \text{and} \quad \mathbf{A}_m(x_3) \in \mathcal{L} \left( H_{\mathbb{R}}^1(S_{x_3}) \right)$$

defined in section 4.2.2 by

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \mathbf{A}_e \varphi) = \operatorname{div}(\sigma_e \nabla \varphi), & \text{in } S_{x_3}, \\ \mathbf{A}_e \varphi = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{A}_m \psi) = \operatorname{div}(\sigma_m \nabla \psi), & \text{in } S_{x_3}, \\ \mu \partial_n (\mathbf{A}_m \psi) = \sigma_m \partial_n \psi, & \text{on } \partial S_{x_3}. \end{cases} \quad (5.49)$$

We have seen that the potentials  $\varphi_{e,q}^r$  and  $\psi_{m,q}^r$  in time domain are the unique causal solutions of

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_{e,q}^r}{dt} + \mathbf{A}_e(x_3) \varphi_{e,q}^r = 0 & \text{for } t > 0, \\ \varphi_{e,q}^r(t=0) = -\mathbf{A}_e(x_3) \varphi_{e,q}^\infty, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \frac{d\psi_{m,q}^r}{dt} + \mathbf{A}_m(x_3) \psi_{m,q}^r = 0 & \text{for } t > 0, \\ \psi_{m,q}^r(t=0) = -\mathbf{A}_m(x_3) \psi_{m,q}^\infty, \end{cases} \quad (5.50)$$

For the potentials  $\widehat{\varphi}_{m,q}^r$  and  $\widehat{\psi}_{e,q}^r$  the approach is quite different. The inverse Laplace transform of (5.45) gives

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu} (e^{-t\sigma_m/\mu} H(t)) * \frac{\partial \nabla \varphi_{m,q}^r}{\partial t} \right) = - \operatorname{div} \left( \frac{\sigma_m}{\mu^2} e^{-t\sigma_m/\mu} H(t) \nabla \varphi_{m,q}^\infty \right),$$

This does not gives us any intuition for operators of the same kind as  $\mathbf{A}_e$  and  $\mathbf{A}_m$ . We introduce the following Hilbert space

$$H_{n,0}(\mathbf{div}, S_{x_3}) := \left\{ u \in L^2(S_{x_3}) \mid \mathbf{div} u = 0 \text{ in } S_{x_3} \text{ and } u \cdot n|_{\partial S_{x_3}} = 0 \right\}$$

and we seek for

$$(\Phi_{m,q}(t), \nabla \varphi_{m,q}^r(t)) \in H_{n,0}(\mathbf{div}, S_{x_3}) \times H_0^1(S_{x_3}),$$

solution of the following problem

$$\begin{cases} \mu \partial_t \Phi_{m,q} + \sigma_m \Phi_{m,q} = \nabla \varphi_{m,q}^r & , \mathbb{R}^{+,*} \times S_{x_3} \\ \operatorname{div} \Phi_{m,q} = 0 & , \mathbb{R}^{+,*} \times S_{x_3} \\ \Phi_{m,q} \cdot n = 0 & , \mathbb{R}^{+,*} \times \partial S_{x_3} \\ \Phi_{m,q}(0) = \mu^{-1} \nabla \varphi_{m,q}^\infty & , S_{x_3} \end{cases} \quad (5.51)$$

The gradient of the potentials  $\varphi_{m,q}^r$  is computed as the Lagrange multiplier from

$$\mu \partial_t \Phi_{m,q} + \sigma_m \Phi_{m,q} = \nabla \varphi_{m,q}^r.$$

Then we deduce the potentials  $\varphi_{m,q}^r$  from its gradient and the fact that  $\varphi_m^r(t) \in H_0^1(S_{x_3})$ .

**Proposition 5.3.2.** *The potential*

$$\varphi_{m,q}^r \in L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(S_{x_3}))$$

such that  $(\Phi_{m,q}, \nabla \varphi_{m,q}^r)$  is solution to (5.51) is the inverse Laplace transform of the residual potential  $\widehat{\varphi}_{m,q}^r$  solution of (5.45).

*Proof.*

We denote by  $\widetilde{\varphi}_{m,q}^r$  and  $\widetilde{\Phi}_{m,q}$  the Laplace transform of  $\varphi_{m,q}^r$  and  $\Phi_{m,q}$ . The Laplace transform of (5.51) gives

$$\begin{cases} (\mu s + \sigma_m) \widetilde{\Phi}_{m,q} - \nabla \varphi_{m,q}^\infty &= \nabla \widetilde{\varphi}_{m,q}^r & , \mathbb{R}^{+,*} \times S_{x_3} \\ \operatorname{div} \widetilde{\Phi}_{m,q} &= 0 & , \mathbb{R}^{+,*} \times S_{x_3} \\ \widetilde{\Phi}_{m,q} \cdot n &= 0 & , \mathbb{R}^{+,*} \times \partial S_{x_3} \end{cases}$$

The first line of this equation gives us

$$\widetilde{\Phi}_{m,q} = (\mu s + \sigma_m)^{-1} [\nabla \widetilde{\varphi}_{m,q}^r + \nabla \varphi_{m,q}^\infty],$$

and the second one gives

$$0 = \operatorname{div} (s \widetilde{\Phi}_{m,q}) = \operatorname{div} \left( \left( \mu + \frac{\sigma_m}{s} \right)^{-1} [\nabla \widetilde{\varphi}_{m,q}^r + \nabla \varphi_{m,q}^\infty] \right).$$

We recognize the equation (5.45) which admit an unique solution.  $\square$

For the last residual potential  $\psi_e^r$  we introduce the problem :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \Psi_{e,q} + \sigma_e \Psi_{e,q} &= \nabla \psi_{e,q}^r & , \mathbb{R}^{+,*} \times \Omega \\ \operatorname{div} \Psi_{e,q} &= 0 & , \mathbb{R}^{+,*} \times \Omega \\ \Psi_{e,q} \cdot n &= 0 & , \mathbb{R}^{+,*} \times \partial \Omega \\ \Psi_{e,q}(0) &= \varepsilon^{-1} \nabla \psi_{e,q}^\infty & , \Omega \end{cases} \quad (5.52)$$

**Proposition 5.3.3.** *The potential*

$$\psi_{e,q}^r \in L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(S_{x_3}))$$

such that  $(\Psi_{e,q}, \nabla \psi_{e,q}^r)$  is solution of (5.52) is the inverse Laplace transform of the residual potential  $\widehat{\psi}_{e,q}^r$  solution of (5.46).

### 5.3.2 The electrostatic and magneto-static potentials

**Electrostatic potential.**

**Proposition 5.3.4.** *The inverse Laplace transform of  $\widehat{\xi}_e^1$  solution of the first equation of (5.18) is the unique solution of the following Cauchy problem*

$$\begin{cases} \frac{d\xi_e^1}{dt} + \mathbf{A}_e(x_3) \xi_e^1 = \xi_e^{1,\infty} & \text{for } t > 0, \\ \xi_e^1(t=0) = 0, \end{cases}$$

with the high frequency potential  $\xi_e^{1,\infty}$  being the unique solution of the quasi-static problem

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \widehat{\xi}_e^{1,\infty}) = \partial_3 j_{s,3}, & \text{in } S_{x_3} \\ \widehat{\xi}_e^{1,\infty} = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}. \end{cases}$$

**Magnetostatic potential.**

**Proposition 5.3.5.** *The potential  $\zeta_m^1$  such that*

$$(\Phi_s, \nabla \zeta_m^1) \in H^1(\mathbb{R}^+, H_{n,0}(\operatorname{div}, S_{x_3}, \mu dx)) \times L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}))$$

is the solution of

$$\begin{cases} \mu \partial_t \Phi_s + \sigma_m \Phi_s + \nabla \zeta_m^1 &= -\mu \partial_t \nabla r_s - \sigma_m \nabla r_s & , \mathbb{R}^{+,*} \times S_{x_3} \\ \operatorname{div} \Phi_s &= 0 & , \mathbb{R}^{+,*} \times S_{x_3} \\ \Phi_s \cdot n &= 0 & , \mathbb{R}^{+,*} \times \partial S_{x_3} \\ \Phi_s(0) &= 0 & , S_{x_3} \end{cases}$$

where the lifting  $r_s$  is the unique solution (up to a constant) of

$$\begin{cases} \Delta r_s(t) = \int_0^t j_{s,3}, \\ \partial_n r_s = |\partial S_{x_3}|^{-1} \int_0^t \int_{S_{x_3}} j_{s,3}, \end{cases}$$

is the inverse Laplace transform of  $\widehat{\zeta}_m^1$  (see the second equation of (5.18)).

## 5.4 Formal derivation of the second order correctors

Sais-tu pourquoi, là-bas, le volcan s'est  
rouvert ?  
C'est qu'un jour nous l'avions touché d'un  
pied agile,  
Et de sa poudre au loin l'horizon s'est  
couvert !

Nerval, A J.-Y. Colonna

We are not yet satisfied by the first order since there is still invariance by conformal mapping (in the sense of the end of lemma 1.3.2). We need to look into higher orders. Moreover, it is classical in asymptotic analysis that consideration of higher orders in the asymptotic expansion gives a better approximation. We will prove in the next chapter that the second order is actually a more accurate model of the cable.

### 5.4.1 Identification of order 2 : the transversal fields

For second the order, we have (see equations (5.6, 5.7, 5.8, 5.9))

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^2) = -\partial_3(\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_3^1) & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}, \\ \operatorname{rot} \widehat{E}_T^2 = -s \widehat{\mu} \widehat{H}_3^1 & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}, \\ \widehat{E}_T^2 \times n = 0, & \text{on } \partial S_{x_3} \\ [\widehat{E}_T^2 \times n_\Sigma]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3} \\ [\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^2 \cdot n_\Sigma]_{\Sigma_{x_3}} = -[\widehat{\varepsilon} g_\Sigma \widehat{E}_3^1]_{\Sigma_{x_3}} & \text{on } \Sigma_{x_3} \end{cases} \quad (5.53)$$

and

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\mu} \widehat{H}_T^2) = -\partial_3(\widehat{\mu} \widehat{H}_3^1), & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}, \\ \operatorname{rot} \widehat{H}_T^2 = s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}_3^1, & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}, \\ \widehat{H}_T^2 \cdot n = -g \widehat{H}_3^1, & \text{on } \partial S_{x_3} \\ [\widehat{H}_T^2 \times n_\Sigma]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3} \\ [\widehat{\mu} \widehat{H}_T^2 \cdot n_\Sigma]_{\Sigma_{x_3}} = -[\widehat{\mu} g_\Sigma \widehat{H}_3^1]_{\Sigma_{x_3}} & \text{on } \Sigma_{x_3} \end{cases} \quad (5.54)$$

which are again div-rot problems like the ones of the remark 1.33. We use the Helmholtz' decompositions of theorem 1.2.1 to write

$$\widehat{E}_T^2 = \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^2 \nabla \widehat{\varphi}_{e,q} + E_T^{r,2} \quad \text{and} \quad \widehat{H}_T^2 = \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^2 \nabla \widehat{\psi}_{m,q} + E_T^{r,2}, \quad (5.55)$$

with the harmonic potential  $\widehat{\varphi}_{e,q}$  and  $\widehat{\psi}_{m,q}$  (see (1.10) ), the constant  $\widehat{V}_q^2(x_3, s)$  and  $\widehat{I}_q^2(x_3, s)$  that we will determine later, and the "residual fields"

$$\widehat{E}_T^{r,2} = \nabla \widehat{\zeta}_e^2 + \widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \widehat{\zeta}_e^2 \quad \text{and} \quad \widehat{H}_T^{r,2} = \nabla \widehat{\zeta}_m^2 + \widehat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \widehat{\zeta}_m^2. \quad (5.56)$$

The potentials

$$\widehat{\xi}_e^2, \widehat{\xi}_m^2, \widehat{\zeta}_e^2, \widehat{\zeta}_m^2 \in H^1(S_{x_3})$$

are solution of the following Dirichlet problems

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\xi}_e^2) = -\partial_3(\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_3^1) & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}, \\ \widehat{\xi}_e^2 = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}, \\ [\widehat{\xi}_e^2]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \\ [\widehat{\varepsilon} \partial_n \widehat{\xi}_e^2]_{\Sigma_{x_3}} = -[\widehat{\varepsilon} g_\Sigma \widehat{E}_3^1]_{\Sigma_{x_3}} & \text{on } \Sigma_{x_3}, \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot}(\widehat{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \widehat{\zeta}_m^2) = s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}_3^1 & \text{in } S_{x_3}, \\ \widehat{\zeta}_m^2 = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{array} \right. \quad (5.57)$$

and the following Neumann problems

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot}(\widehat{\varepsilon}^{-1} \operatorname{rot} \widehat{\zeta}_e^2) = -s \widehat{\mu} \widehat{H}_3^1 & \text{in } S_{x_3}, \\ \partial_n \widehat{\zeta}_e^2 = 0 & \text{on } \partial S_{x_3}, \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\widehat{\mu} \nabla \widehat{\xi}_m^2) = -\partial_3(\widehat{\mu} \widehat{H}_3^1) & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3}, \\ \partial_n \widehat{\xi}_m^2 = -g \widehat{H}_3^1 & \text{on } \partial S_{x_3}, \\ [\widehat{\xi}_m^2]_{\Sigma_{x_3}} = 0 & \text{on } \Sigma_{x_3}, \\ [\widehat{\mu} \partial_n \widehat{\xi}_m^2]_{\Sigma_{x_3}} = -[\widehat{\mu} g_\Sigma \widehat{H}_3^1]_{\Sigma_{x_3}} & \text{on } \Sigma_{x_3}. \end{array} \right. \quad (5.58)$$

All the elliptic problems are well-posed in the appropriate functional spaces. The compatibility condition of the Neumann problem where  $\widehat{\zeta}_e^2$  is solution is checked since  $\widehat{H}_3^1$  satisfies

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \widehat{H}_3^1 = 0.$$

Then thanks the Reynolds transport theorem (3.11) the  $x_3$ -derivative of the previous equation gives

$$\int_{S_{x_3}} \partial_3(\widehat{\mu} \widehat{H}_3^1) = \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{\mu} \widehat{H}_3^1 + \int_{\Sigma} [g_\Sigma \widehat{\mu} \widehat{H}_3^1]_\Sigma$$

which corresponds to the compatibility condition for  $\widehat{\xi}_e^2$ . We can use the expression of the longitudinal fields (5.36,5.37) of the proposition 5.2.1 to linearly separate the form

$$\begin{aligned} \widehat{E}_T^1(x, x_3, s) &= \sum_{q=0} \left[ f_{e,q}(x, s) \widehat{V}_q^0(x_3, s) + g_{e,q}(x, s) \partial_3 \widehat{V}_q^0(x_3, s) + h_{e,q}(x, s) \widehat{I}_q^0(x_3, s) + k_{e,q}(x, s) \partial_3 \widehat{I}_q^0(x_3, s) \right], \\ \widehat{H}_T^1(x, x_3, s) &= \sum_{q=0} \left[ f_{m,q}(x, s) \widehat{V}_q^0(x_3, s) + g_{m,q}(x, s) \partial_3 \widehat{V}_q^0(x_3, s) + h_{m,q}(x, s) \widehat{I}_q^0(x_3, s) + k_{m,q}(x, s) \partial_3 \widehat{I}_q^0(x_3, s) \right]. \end{aligned}$$

We won't present it since it is too long. We have not found an interest in displaying a long succession of equations.

## 5.4.2 Second order telegrapher's equation

### Preliminary results

45. La nature du calcul, nous en avons fait la connaissance en apprenant à calculer.

Wittgenstein, De la certitude

As before, we need to give the functional framework in which  $\partial_3 \widehat{E}_T^{R,2}$  and  $\partial_3 \widehat{H}_T^{R,2}$  belongs to. We will not give an expression of this longitudinal derivative as it was done for the limit and first order (see proposition 4.1.4 and lemma 5.2.1). The theorems 1.7.1 and 1.7.2 imply the following lemma.

**Lemma 5.4.1.** *The  $x_3$ -derivative of the second order residuals satisfies*

$$\partial_3 \widehat{E}_T^{R,2}, \partial_3 \widehat{H}_T^{R,2} \in L^2(S_{x_3}).$$

Similarly to the first order, we will prove some lemmata akin to lemma 4.1.1 in order to obtain the second order telegrapher equation (the proof is similar to the one of the lemma 5.2.2).



**Lemma 5.4.2.** *The second order electrical potentials and currents*

$$\widehat{\mathbf{V}}^2 := (\widehat{V}_q^2)_{1 \leq q \leq Q} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{I}}^2 := (\widehat{I}_q^2)_{1 \leq q \leq Q}$$

satisfy

$$\begin{cases} s \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}}^2 + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^2 &= \widehat{\mathbf{I}}_{H_T^R}^2 & (a) \\ s \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{I}}^2 + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^2 &= \widehat{\mathbf{V}}_{E_T^R}^2 & (b) \end{cases} \quad (5.59)$$

with the right hand side  $\widehat{\mathbf{I}}_{H_T^R}^2 = (\widehat{I}_{H_T^R, q}^2)_{q=1, Q}$  and  $\widehat{\mathbf{V}}_{E_T^R}^2 = (\widehat{V}_{E_T^R, q}^2)_{q=1, Q}$  given by

$$\widehat{I}_{H_T^R, q}^2 := (\partial_3 \widehat{H}_T^{R,2}, \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q})_{L^2(S_{x_3})} - \left( \int_{S_{x_3}} g_\Sigma [\widehat{H}_T^{R,2} \cdot \mathbf{n}_T]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\varphi}_{e,q}} \right),$$

and

$$\widehat{V}_{E_T^R, q}^2 := -(\partial_3 \widehat{E}_T^{R,2}, \mathbf{rot} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3})} + \left( \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{E}_T^{R,2} \cdot n \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,i}} + \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma [\widehat{E}_T^{R,2} \cdot \mathbf{n}_T]_{\Sigma_{x_3}} \overline{\partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q}} \right).$$

The remainder of this section will aim at giving an explicit expression for the right hand side of (5.59), that is to say  $\widehat{\mathbf{I}}_{H_T^R}^2$  and  $\widehat{\mathbf{V}}_{E_T^R}^2$ , in terms of  $\widehat{\mathbf{V}}^0$ ,  $\widehat{\mathbf{I}}^0$ ,  $\widehat{\mathbf{V}}^1$ ,  $\widehat{\mathbf{I}}^1$ ,  $\widehat{\mathbf{I}}_s^0$  and terms depending only of the source term  $\widehat{\mathbf{J}}_s$  and the geometry of the section  $S_{x_3}$ . With a proof similar to the one of lemma 5.2.3, we have the following lemma.

**Lemma 5.4.3.** *The right hand side of (5.59-a) is given by*

$$\widehat{I}_{H_T^R, q}^2 = \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} \mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,2} (\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}) \right) + \int_{S_{x_3}} \mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,2} \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}}. \quad (5.60)$$

Then with the equation (5.53) and the expression of the first order magnetic longitudinal field given in the equation (5.39) of remark 5.2.1 we have the following lemma.

**Lemma 5.4.4.** *The right hand side of (5.59-a) is given by*

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{H_T^R, q}^2 &= \sum_{q'=1}^Q \partial_3 \left[ \partial_3 \widehat{V}_{q'}^0 \left( s \widehat{\varepsilon} (\widehat{\varphi}_{e,q'} - \widehat{\varphi}_{m,q'}), (\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}) \right)_{L^2(S_{x_3})} \right] - \left[ \widehat{V}_{q'}^0 \left( s \widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q'}, \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q} \right)_{L^2(S_{x_3})} \right] \\ &\quad + \partial_3 \left[ \widehat{V}_{q'}^0 \int_{S_{x_3}} s \widehat{\varepsilon} (\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}) \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q'} \right] - \partial_3 \widehat{V}_{q'}^0 \int_{S_{x_3}} s \widehat{\varepsilon} (\widehat{\varphi}_{e,q'} - \widehat{\varphi}_{m,q'}) \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Then we demonstrate a similar equality for the right hand side of (5.59-b).

**Lemma 5.4.5.** *The right hand side of (5.59-b) is given by*

$$\begin{aligned} \widehat{V}_{E_T^R, q}^2 &= \sum_{j=1}^Q \partial_3 \left[ \partial_3 \widehat{I}_{q'}^0 \left( s \widehat{\mu} \langle \widehat{\psi}_{m,q'} - \widehat{\psi}_{e,q'} \rangle_{\widehat{\mu}}, \langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \right)_{L^2(S_{x_3})} \right] - \left[ \widehat{I}_{q'}^0 s \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q'} \rangle_{\widehat{\mu}} \overline{\langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}}} \right] \\ &\quad + \partial_3 \left[ \widehat{I}_{q'}^0 \int_{S_{x_3}} s \widehat{\mu} \overline{\langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}}} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q'} \rangle_{\widehat{\mu}} \right] - \partial_3 \widehat{I}_{q'}^0 \int_{S_{x_3}} s \widehat{\mu} \langle \widehat{\psi}_{m,q'} - \widehat{\psi}_{e,q'} \rangle_{\widehat{\mu}} \overline{\langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}}} - \widehat{V}_{s,q}^2. \end{aligned} \quad (5.62)$$

where the source term  $\widehat{\mathbf{V}}_s^2 = (\widehat{V}_{s,q}^2)_{q=1, Q}$  is defined by

$$\widehat{V}_{s,q}^2 = s \left[ \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \langle \widehat{j}_h \rangle_{\widehat{\mu}} \overline{\langle \widehat{\psi}_{m,q'} - \widehat{\psi}_{e,q'} \rangle_{\widehat{\mu}}} \right) - \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \langle \widehat{j}_h \rangle_{\widehat{\mu}} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q'} \rangle_{\widehat{\mu}} \right]. \quad (5.63)$$

*Proof.* A first application of the Reynold's transport theorem (see equation (3.11)), gives

$$\begin{aligned} (\partial_3 \widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} &\stackrel{(3.11)}{=} \partial_3 (\widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - (\widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \\ &\quad + \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{E}_T^{R,2} \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} d\sigma_{x_3} + \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma [\widehat{E}_T^{R,2} \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q}]_{\Sigma_{x_3}} d\sigma_{x_3}. \end{aligned}$$

Green's formula in  $S_{x_3}^\Sigma$ , equation (10.18), is now used on the second term of the right hand side of this equations to obtain

$$\begin{aligned} (\partial_3 \widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} &\stackrel{(10.18)}{=} \partial_3 (\widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - (\mathbf{rot} \widehat{E}_T^{R,2}, \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \\ &\quad + \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{E}_T^{R,2} \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{E}_T^{R,2} \times \mathbf{n}_T \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} + \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma [\widehat{H}_T^{R,2} \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q}]_{\Sigma_{x_3}} - [\widehat{E}_T^{R,2} \times \mathbf{n}_{\Sigma,T} \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q}]_{\Sigma_{x_3}}. \end{aligned}$$

**Step 1.** In the same way as the first step of the proof of the lemma 5.4.4, we have

$$\begin{aligned} (\partial_3 \widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} &- \int_{\partial S_{x_3}} g \widehat{E}_T^{R,2} \cdot \mathbf{n} \partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q} - \int_{\Sigma_{x_3}} g_\Sigma [\widehat{E}_T^{R,2} \cdot \mathbf{n}_T]_{\Sigma_{x_3}} \partial_\tau \widehat{\psi}_{m,q} d\sigma_{x_3} \\ &= \partial_3 (\widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} - (\mathbf{rot} \widehat{E}_T^{R,2}, \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \quad (5.64) \end{aligned}$$

**Step 2.** The first term of the right hand side of equation (5.64) is simplified as follows : from the relation (5.31), Green's formula (10.18) over  $S_{x_3}$  and relation (5.54) :

$$\begin{aligned} (\widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} &\stackrel{(5.10)}{=} (\widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \langle \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} \stackrel{(5.31)}{=} (\widehat{E}_T^{R,2}, \mathbf{rot} \langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}})_{L^2(S_{x_3})} \\ &\stackrel{(10.18)}{=} (\mathbf{rot} \widehat{E}_T^{R,2}, \langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}})_{L^2(S_{x_3})} \stackrel{(5.54)}{=} -(s \widehat{\mu} \widehat{H}_3^1, \langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}})_{L^2(S_{x_3})}. \quad (5.65) \end{aligned}$$

Finally using the definition of  $\widehat{H}_3^1$  in terms of the electric currents  $\widehat{\mathbf{I}}^0$  given by (5.39) we obtain

$$\begin{aligned} -\partial_3 (\widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\mathbf{rot}} \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} &= \sum_{q'=1}^Q \partial_3 \left[ \left( s \widehat{\mu} \langle \widehat{\psi}_{m,q'} - \widehat{\psi}_{e,q'} \rangle_{\widehat{\mu}}, \langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \right)_{L^2(S_{x_3})} \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}_{q'}^0 \right] \\ &\quad + \partial_3 \left[ \left( s \widehat{\mu} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q'} \rangle_{\widehat{\mu}}, \langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \right)_{L^2(S_{x_3})} \widehat{\mathbf{I}}_{q'}^0 \right] + \partial_3 \left[ \left( s \widehat{\mu} \langle \partial_3 \widehat{j}_h \rangle_{\widehat{\mu}}, \langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \right)_{L^2(S_{x_3})} \widehat{\mathbf{I}}_{q'}^0 \right]. \quad (5.66) \end{aligned}$$

**Step 3.** We now deal with the second term of the right hand side of equation (5.64). Using equation (5.54) and the definition of  $\widehat{E}_3^1$  given by (5.38) we find

$$\begin{aligned} -(\mathbf{rot} \widehat{E}_T^{R,2}, \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3}^\Sigma)} &= (s \widehat{\mu} \widehat{H}_3^1, \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q})_{L^2(S_{x_3})} \\ &= \sum_{q'=1}^Q \left[ \left( s \widehat{\mu} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q'} \rangle_{\widehat{\mu}}, \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3})} \widehat{\mathbf{I}}_{q'}^0 + \left( s \widehat{\mu} \langle \widehat{\psi}_{m,q'} - \widehat{\psi}_{e,q'} \rangle_{\widehat{\mu}}, \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3})} \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}_{q'}^0 \right] + \left( s \widehat{\mu} \langle \widehat{j}_h \rangle_{\widehat{\mu}}, \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3})} \end{aligned}$$

We have by defintion of the notation  $\langle \cdot \rangle_{\widehat{\mu}}$

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q'} \rangle_{\widehat{\mu}} \frac{\int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q}}{\int_{S_{x_3}} \widehat{\mu}} = 0 \quad , \quad \text{and so on for } \langle \widehat{\psi}_{m,q'} - \widehat{\psi}_{e,q'} \rangle_{\widehat{\mu}} \text{ and } \langle \widehat{j}_h \rangle_{\widehat{\mu}},$$

and so

$$\begin{aligned} - \left( \operatorname{rot} \widehat{E}_T^{R,2}, \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{L^2(S_{x_3}^{\Sigma})} &= \sum_{q'=1}^Q \left[ \left( s \widehat{\mu} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q'} \rangle_{\widehat{\mu}}, \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \right)_{L^2(S_{x_3})} \widehat{I}_{q'}^0 \right. \\ &\quad \left. + \left( s \widehat{\mu} \langle \widehat{\psi}_{m,q'} - \widehat{\psi}_{e,q'} \rangle_{\widehat{\mu}}, \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \right)_{L^2(S_{x_3})} \partial_3 \widehat{I}_{q'}^0 \right] + \left( s \widehat{\mu} \langle \widehat{j}_h \rangle_{\widehat{\mu}}, \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \right)_{L^2(S_{x_3})} \end{aligned}$$

□

### Introduction of the new effective matrices

We introduce new effective matrices.

**Definition 5.4.1.** We define the new effective  $Q \times Q$  matrices (that depend on the longitudinal variable  $x_3$  and the Laplace parameter  $s$ ) by :

- matrices linked to the inhomogeneity of the characteristic's coefficients

$$(\widehat{\gamma}_Y)_{ij} = \int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon}(\widehat{\varphi}_{e,i} - \widehat{\varphi}_{m,i}) \overline{(\widehat{\varphi}_{e,j} - \widehat{\varphi}_{m,j})} \quad \text{and} \quad (\widehat{\gamma}_Z)_{ij} = \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \langle \widehat{\psi}_{m,i} - \widehat{\psi}_{e,i} \rangle_{\widehat{\mu}} \overline{\langle \widehat{\psi}_{m,j} - \widehat{\psi}_{e,j} \rangle_{\widehat{\mu}}}$$

- matrices linked to the non cylindricity of the cable

$$\widehat{Y}_g = (\widehat{\eta}_Y - \partial_3 \widehat{\chi}_Y) Id - (\widehat{\chi}_Y - \widehat{\chi}_{Y,*}) \partial_3 \quad \text{and} \quad \widehat{Z}_g = (\widehat{\eta}_Z - \partial_3 \widehat{\chi}_Z) Id - (\widehat{\chi}_Z - \widehat{\chi}_{Z,*}) \partial_3,$$

with the matrices

$$(\widehat{\eta}_Y)_{ij} = \int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i} \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j}}, \quad (\widehat{\eta}_Z)_{ij} = \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,i} \rangle_{\widehat{\mu}} \overline{\langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,j} \rangle_{\widehat{\mu}}}$$

and

$$\begin{aligned} (\widehat{\chi}_Y)_{ij} &= \int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,j} \overline{(\widehat{\varphi}_{e,i} - \widehat{\varphi}_{m,i})}, \quad (\widehat{\chi}_Z)_{ij} = \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,j} \rangle_{\widehat{\mu}} \overline{\langle \widehat{\psi}_{m,i} - \widehat{\psi}_{e,i} \rangle_{\widehat{\mu}}}, \\ (\widehat{\chi}_{Y,*})_{ij} &= \int_{S_{x_3}} \widehat{\varepsilon} \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i}} (\widehat{\varphi}_{e,j} - \widehat{\varphi}_{m,j}), \quad (\widehat{\chi}_{Z,*})_{ij} = \int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \overline{\langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,i} \rangle_{\widehat{\mu}}} \langle \widehat{\psi}_{m,j} - \widehat{\psi}_{e,j} \rangle_{\widehat{\mu}}. \end{aligned}$$

The potentials occurring in the previous definition are defined previously. More precisely  $\widehat{\varphi}_{e,q}$  and  $\widehat{\psi}_{m,q}$  are defined in (1.10), their shape derivative  $\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}$  and  $\partial_3 \widehat{\psi}_{m,q}$  in the proposition (4.1.4) and the conjugated potential  $\widehat{\varphi}_{m,q}$  and  $\widehat{\psi}_{e,q}$  in (5.30).

We already know that  $\widehat{Y}_e$  and  $\widehat{Z}_m$  are invariant by any conformal mapping (see lemma 1.3.2 for more explication). This invariance property is lost by the new effective matrices, but an other one can be revealed.

**Proposition 5.4.1.** The new effective matrices  $\widehat{\gamma}_Y, \widehat{\gamma}_Z, \widehat{\eta}_Y, \widehat{\eta}_Z, \widehat{\chi}_Y, \widehat{\chi}_Z, \widehat{\chi}_{Y,*}$  and  $\widehat{\chi}_{Z,*}$  are invariant by volume preserving mapping, that it is to say for each transformation  $\mathcal{T}_v$  such that its jacobian  $J_v$  satisfies  $\det J_v = 1$  we have

$$(\widehat{\gamma}_Y)_{i,j} = \int_{\mathcal{T}_v S_{x_3}} (\widehat{\varepsilon} \circ \mathcal{T}_v) (\widehat{\varphi}^i(\widehat{\varepsilon} \circ \mathcal{T}_v, \mathcal{T}_v S_{x_3}) - \widehat{\varphi}^i(\widehat{\mu}^{-1} \circ \mathcal{T}_v, \mathcal{T}_v S_{x_3})) \overline{(\widehat{\varphi}^j(\widehat{\varepsilon} \circ \mathcal{T}_v, \mathcal{T}_v S_{x_3}) - \widehat{\varphi}^j(\widehat{\mu}^{-1} \circ \mathcal{T}_v, \mathcal{T}_v S_{x_3}))}$$

and so on for  $\widehat{\gamma}_Z, \widehat{\eta}_Y, \widehat{\eta}_Z, \widehat{\chi}_Y, \widehat{\chi}_Z, \widehat{\chi}_{Y,*}$  and  $\widehat{\chi}_{Z,*}$ .

Having summarized the various configurations in a table, it is interesting to notice that the coefficients  $\widehat{\gamma}_Y, \widehat{\gamma}_Z$  are related to the inhomogeneity of the cross-sections, as they vanish if  $\widehat{\mu}$  is proportional to  $\widehat{\varepsilon}$ . Moreover, the coefficients  $\widehat{\eta}_Y, \widehat{\eta}_Z$  are null in case of straight cables, and finally the cross terms  $\widehat{\chi}_Y, \widehat{\chi}_Z, \widehat{\chi}_{Y,*}$  and  $\widehat{\chi}_{Z,*}$  vanish if either of the physical coefficients satisfy the proportionality relationship or in the case of straight cables. The latter terms are induced by coupling effects in non-straight cables with inhomogeneous cross-section.

A good question about these new effective matrices is : are they good indicators of defaults? The following proposition try to give a first answer.

cylindrical homogeneous cable	$\hat{\gamma}_Y = \hat{\gamma}_Z = 0$	$\hat{\eta}_Y = \hat{\eta}_Z = 0$	$\hat{\chi}_Y = \hat{\chi}_Z = \hat{\chi}_{Y,*} = \hat{\chi}_{Z,*} = 0$
cylindrical non-homogeneous cable	---	$\hat{\eta}_Y = \hat{\eta}_Z = 0$	$\hat{\chi}_Y = \hat{\chi}_Z = \hat{\chi}_{Y,*} = \hat{\chi}_{Z,*} = 0$
non-cylindrical homogeneous cable	$\hat{\gamma}_Y = \hat{\gamma}_Z = 0$	---	$\hat{\chi}_Y = \hat{\chi}_Z = \hat{\chi}_{Y,*} = \hat{\chi}_{Z,*} = 0$
non-cylindrical non-homogeneous cable	---	---	---

**Proposition 5.4.2.** (To be or not be cylindrical, that is the question for inverse problem).

The matrices  $\hat{\eta}_Y, \hat{\eta}_Z$  are good indicators of cylindricity

$$\hat{\eta}_Y = \hat{\eta}_Z = 0 \iff \text{there is cylindrical symmetry } (g = 0 \text{ and } \partial_3 \hat{\varepsilon} = \partial_3 \hat{\mu} = 0),$$

whereas  $\hat{\eta}_Y, \hat{\eta}_Z$  are not good indicators of inhomogeneities

$$\hat{\gamma}_Y = \hat{\gamma}_Z = 0 \iff \text{the electromagnetic waves "velocities" are constant } (\hat{\varepsilon} \hat{\mu} = cte(x_3, s)).$$

A counterexample is given by the case where  $S$  is an circular annulus and where  $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$  only depend of  $x_3$  and the radial coordinate (see example 1.3.1). In this counterexample we have in the polar coordinate system  $(e_r, e_\theta)$

$$\hat{\psi}_{m,j} = \hat{\psi}_{e,j} = 1 - \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{but } \hat{\varepsilon} \hat{\mu} \text{ is not necessarily a constant.}$$

Now we are interested to proving some properties about the matrices  $\hat{\gamma}_Y, \hat{\gamma}_Z, \hat{\eta}_Y, \hat{\eta}_Z$ . Again by considering for each vectors  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^Q$ , the potentials

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_e(\mathbf{u}) &= \sum_{q=1}^Q u_q \hat{\varphi}_{e,q}, & \hat{\varphi}_m(\mathbf{u}) &= \sum_{q=1}^Q u_q \hat{\varphi}_{m,q}, & (\hat{\varphi}_e - \hat{\varphi}_m)(\mathbf{u}) &= \sum_{q=1}^Q u_q (\hat{\varphi}_{e,q} - \hat{\varphi}_{m,q}), \\ \hat{\psi}_m(\mathbf{u}) &= \sum_{q=1}^Q u_q \hat{\psi}_{m,q}, & \hat{\psi}_e(\mathbf{u}) &= \sum_{q=1}^Q u_q \hat{\psi}_{e,q}, & (\hat{\psi}_m - \hat{\psi}_e)(\mathbf{u}) &= \sum_{q=1}^Q u_q (\hat{\psi}_{m,q} - \hat{\psi}_{e,q}), \end{aligned}$$

we have

$$(\hat{\gamma}_Y(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \int_{S_{x_3}} \hat{\varepsilon} (\hat{\varphi}_e - \hat{\varphi}_m)(\mathbf{u}) \overline{(\hat{\varphi}_e - \hat{\varphi}_m)(\mathbf{v})}, \quad (\hat{\gamma}_Z(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \int_{S_{x_3}} \hat{\mu} \langle \hat{\psi}_m - \hat{\psi}_e \rangle_{\hat{\mu}}(\mathbf{u}) \overline{\langle \hat{\psi}_m - \hat{\psi}_e \rangle_{\hat{\mu}}(\mathbf{v})}, \quad (5.67)$$

and

$$(\hat{\eta}_Y(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \int_{S_{x_3}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \hat{\varphi}_e(\mathbf{u}) \overline{\partial_3 \hat{\varphi}_e(\mathbf{v})}, \quad (\hat{\eta}_Z(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \int_{S_{x_3}} \hat{\mu} \langle \partial_3 \hat{\psi}_m \rangle_{\hat{\mu}}(\mathbf{u}) \overline{\langle \partial_3 \hat{\psi}_m \rangle_{\hat{\mu}}(\mathbf{v})}. \quad (5.68)$$

**Proposition 5.4.3.** (i) The effectives matrices related to the inhomogeneity  $\hat{\gamma}_Y, \hat{\gamma}_Z$  are symmetric and satisfy for all  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

$$0 \leq \Re((\hat{\gamma}_Y(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}) \quad , \quad |(\hat{\gamma}_Y(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}}| \leq C_{\gamma,Y}(x_3, |s|) |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$$

and

$$0 \leq \Re((\hat{\gamma}_Z(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}) \quad , \quad |(\hat{\gamma}_Z(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}}| \leq C_{\gamma,Z}(x_3, |s|) |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$$

with the rational fraction in the variable  $|s|$

$$C_{\gamma,Y}(x_3, |s|) = \begin{cases} 0 & \text{if } \hat{\varepsilon}(x_3) \hat{\mu}(x_3) \text{ is constant in } S_{x_3}, \\ c_{0,w}^2 C_+ \varepsilon_+ \left[ \left| \frac{\mu_+ s + \sigma_{m,+}}{\mu_- s + \sigma_{m,-}} \right|^2 + \left| \frac{\varepsilon_+ s + \sigma_{e,+}}{\varepsilon_- s + \sigma_{e,-}} \right|^2 \right] & \text{everywhere else ,} \end{cases}$$

$$C_{\gamma,Z}(x_3, |s|) = \begin{cases} 0 & \text{if } \hat{\varepsilon}(x_3) \hat{\mu}(x_3) \text{ is constant in } S_{x_3}, \\ c_{p,w}^2 (\lambda_{\mathbf{e}}^-)^{-1} \mu_+ \left[ \left| \frac{\mu_+ s + \sigma_{m,+}}{\mu_- s + \sigma_{m,-}} \right|^2 + \left| \frac{\varepsilon_+ s + \sigma_{e,+}}{\varepsilon_- s + \sigma_{e,-}} \right|^2 \right] & \text{everywhere else .} \end{cases}$$

(ii) The effectives matrices related to the non-cylindricity,  $\hat{\eta}_Y, \hat{\eta}_Z$  are symmetric and satisfy for all  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Re((\hat{\eta}_Y \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}) \quad , \quad |(\hat{\eta}_Y \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}}| \leq C_{\eta,Y}(|s|) |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \\ 0 &\leq \Re((\hat{\eta}_Z \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}) \quad , \quad |(\hat{\eta}_Z \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}}| \leq C_{\eta,Z}(|s|) |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|, \end{aligned}$$

where the constants  $C_{\eta,Y}(|s|)$  and  $C_{\eta,Z}(|s|)$  are rational function of  $|s|$  where the coefficients depends on the geometric factor  $g$ .

*Proof.* Looking at the equations (5.67) and (5.68), the positivity of the real part of  $(\hat{\gamma}_Y(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}$ ,  $(\hat{\gamma}_Z(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}$ ,  $(\hat{\eta}_Y(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}$  and  $(\hat{\eta}_Z(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}$  is obvious.

With the Poincaré inequality (1.36) and the bound of the gradient of the harmonic potentials (see (1.27)), we have

$$|(\hat{\gamma}_Y(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}}| \leq c_{0,w}^2 C_+ \varepsilon_+ \left[ \left| \frac{\mu_+ s + \sigma_{m,+}}{\mu_- s + \sigma_{m,-}} \right|^2 + \left| \frac{\varepsilon_+ s + \sigma_{e,+}}{\varepsilon_- s + \sigma_{e,-}} \right|^2 \right] |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$$

With the Poincaré-Wirtinger inequality (1.37) and the bound of the gradient of the harmonic potentials (see (1.27)), we have

$$|(\hat{\gamma}_Z(x_3) \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}}| \leq c_{p,w}^2 (\lambda_{\mathcal{E}}^-)^{-1} \mu_+ \left[ \left| \frac{\mu_+ s + \sigma_{m,+}}{\mu_- s + \sigma_{m,-}} \right|^2 + \left| \frac{\varepsilon_+ s + \sigma_{e,+}}{\varepsilon_- s + \sigma_{e,-}} \right|^2 \right] |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$$

We have by the shape derivative of the harmonic potentials (see proposition 4.1.4) the last wanted inequality.  $\square$

### Second order telegrapher's equation

We can rewrite the telegrapher's equation (5.59) of lemma 5.4.2 with lemmata 5.4.4 and 5.4.5 and the definition 5.4.1 of the **new effective matrices** and the new source terms (5.63)

$$\begin{cases} s \hat{\mathbf{Y}}_e \hat{\mathbf{V}}^2 + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^2 &= s \partial_3 (\hat{\gamma}_Y \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^0) - s \hat{\mathbf{Y}}_g \hat{\mathbf{V}}^0, \\ s \hat{\mathbf{Z}}_m \hat{\mathbf{I}}^2 + \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^2 &= s \partial_3 (\hat{\gamma}_Z \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^0) - s \hat{\mathbf{Z}}_g \hat{\mathbf{I}}^0 + \hat{\mathbf{V}}_{s,2}. \end{cases} \quad (5.69)$$

Bear in mind that we expect to find an effective model that integrate a maximum of defaults. Since  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  are invariant by any conformal map and the new effective matrices  $\hat{\eta}_Y$ ,  $\hat{\eta}_Z$ ,  $\hat{\eta}_Y$ ,  $\hat{\eta}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$  are invariant by volume preserving map (see proposition 5.4.4), we have the following invariance proposition

**Proposition 5.4.4.** *All the effective matrices that we introduced, that is to say  $\hat{\mathbf{Y}}_e$ ,  $\hat{\mathbf{Z}}_m$ ,  $\hat{\eta}_Y$ ,  $\hat{\eta}_Z$ ,  $\hat{\eta}_Y$ ,  $\hat{\eta}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$  are invariant by a transformation  $\mathcal{T}_{cv}$  whose the jacobian is locally orthogonal ( $(D\mathcal{T}_{cv})^{-1} = D\mathcal{T}_{cv}^{tr}$ ) in the sense that the electrical admittance  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  can be computed on  $\mathcal{T}_{cv}S$  as*

$$(\hat{\mathbf{Y}}_e)_{q,q'} = \int_{\mathcal{T}_{cv}S} \hat{\varepsilon} \circ \mathcal{T}_{cv} \nabla \varphi^q (\hat{\varepsilon} \circ \mathcal{T}_{cv}, \mathcal{T}_{cv}S) \cdot \overline{\nabla \varphi^{q'} (\hat{\varepsilon} \circ \mathcal{T}_{cv}, \mathcal{T}_{cv}S)}$$

and so on for  $\hat{\mathbf{Z}}_m$ ,  $\hat{\eta}_Y$ ,  $\hat{\eta}_Z$ ,  $\hat{\eta}_Y$ ,  $\hat{\eta}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ ,  $\hat{\chi}_Y$ ,  $\hat{\chi}_Z$ .

In particular the second order model does not see if the cable is twisted or not. The 1D model of coaxial cable contrasts with waveguides made of the Laplace-Dirichet operator in a tube where twisting acts as a repulsive interaction [27].

### 5.4.3 Second order longitudinal fields

**Proposition 5.4.5.** *The second order longitudinal fields satisfy*

$$\hat{E}_3^2 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\hat{V}_q^1 \varphi_{e,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s [\mathbf{L}_{q,q'} \hat{I}_q^1 \varphi_{m,q'}] - s \hat{\zeta}_m^1 + \partial_3 \hat{\xi}_e^1 \quad (5.70)$$

and

$$\hat{H}_3^2 = \left\langle \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\hat{I}_q^1 \psi_{m,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s [\mathbf{C}_{q,q'} \hat{V}_q^1 \psi_{e,q'}] + \zeta_{m,3} - \sum_{q=1}^Q \left( \int_{S_{x_3}} \partial_3 \hat{H}_T^{R,1} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,q} \right) \psi^q(S, 1) \right\rangle_{\hat{\mu}} \quad (5.71)$$

with the potential  $\zeta_{m,3} \in H^1(S_{x_3})_{/\mathbb{C}}$  solution of

$$\begin{cases} -\Delta \zeta_{m,3} = s \mathbf{rot} (\hat{\varepsilon} \nabla \hat{\xi}_e^1) - \mathbf{div} \partial_3 (\hat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_m^1), & \text{in } S_{x_3} \setminus \Sigma_{x_3} \\ \partial_n \zeta_{m,3} = \partial_\tau (g \partial_n \hat{\zeta}_m^1), & \text{on } \partial S_{x_3} \\ [\partial_n \zeta_{m,3}]_\Sigma = \partial_\tau (g \partial_n \hat{\zeta}_m^1), & \text{on } \Sigma_{x_3} \end{cases}$$

*Proof.* We have with the Maxwell's equations (5.6)

$$\mathbf{rot} \hat{E}_3^2 = -s \hat{\mu} \hat{H}_T^1 - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{E}_T^1 \quad \text{and} \quad \mathbf{rot} \hat{H}_3^2 = s \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^1 - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{H}_T^1.$$

With the same approach as the proof of proposition 5.2.1, we have :

$$\mathbf{rot} \hat{E}_3^2 = \mathbf{rot} \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\hat{V}_q^1 \varphi_{e,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s [\mathbf{L}_{q,q'} \hat{I}_q^1 \varphi_{m,q'}] \right) - s \hat{\mu} \hat{H}_T^{R,1} - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{E}_T^{R,1}$$

and

$$\mathbf{rot} \hat{H}_3^2 = \mathbf{rot} \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\hat{I}_q^1 \psi_{m,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s [\mathbf{C}_{q,q'} \hat{V}_q^1 \psi_{e,q'}] \right) + s \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^{R,1} - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{H}_T^{R,1}.$$

Now we have to prove that

$$e_3^2 = -s \hat{\mu} \hat{H}_T^{R,1} - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{E}_T^{R,1} \quad \text{and} \quad h_3^2 = s \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^{R,1} - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{H}_T^{R,1}$$

can be written with a rotational.

For the first one we have

$$e_3^2 = -\mathbf{rot} \left[ s \hat{\zeta}_m^1 - \partial_3 \hat{\zeta}_e^1 \right]$$

For the second, we have

$$\mathbf{div} h_3^2 = 0, \quad [h_3^2 \cdot n]_{\Sigma} = 0, \quad [h_3^2 \times n]_{\Sigma} = \partial_{\tau} [g \partial_n \hat{\zeta}_m^1]_{\Sigma} \quad \text{et} \quad h_3^2 \times n = \partial_{\tau} (g \partial_n \hat{\zeta}_m^1)$$

so with the lemma 1.3.6, we have

$$h_3^2 = \mathbf{rot} \left[ \zeta_{m,3} + \sum_{q=1}^Q \langle h_3^2 \cdot n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_q S)} \psi^q(S, 1) \right]$$

or since  $\hat{\varphi}_{e,q}|_{\partial_q S_{x_3}} = 1$  and  $\mathbf{div} h_3^2 = 0$ , we have by the 2D Green's formula (10.18)

$$\begin{aligned} \langle h_3^2 \cdot n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_q S)} &= \langle h_3^2 \cdot n, \hat{\varphi}_{e,q} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial_q S)} \\ &= - \int_{S_{x_3}} h_3^2 \cdot \nabla \hat{\varphi}_{e,q} = \int_{S_{x_3}} \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{H}_T^{R,1} \cdot \nabla \hat{\varphi}_{e,q} = - \int_{S_{x_3}} \partial_3 \hat{H}_T^{R,1} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,q}. \end{aligned}$$

We have :

$$\hat{E}_3^2 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\hat{V}_q^1 \varphi_{e,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s [\mathbf{L}_{q,q'} \hat{I}_q^1 \varphi_{m,q'}] - s \hat{\zeta}_m^1 + \partial_3 \hat{\zeta}_e^1 + cte_e$$

and

$$\hat{H}_3^2 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\hat{I}_q^1 \psi_{m,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s [\mathbf{C}_{q,q'} \hat{V}_q^1 \psi_{e,q'}] + \zeta_{m,3} - \sum_{q=1}^Q \left( \int_{S_{x_3}} \partial_3 \hat{H}_T^{R,1} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,q} \right) \psi^q(S, 1) + cte_m$$

For the longitudinal electric fields we have on the boundaries with (5.7)

$$\hat{E}_3^2|_{\partial S_{x_3}} = g \hat{E}_3^1 \cdot n \stackrel{(5.16a)}{=} \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^1 g \partial_n \varphi_{e,q} + g \partial_n \hat{\zeta}_e^1$$

and we have by shape analysis (equation (4.14) and lemma 5.2.1)

$$\partial_3 \varphi_{e,q}|_{\partial S_{x_3}} = g \partial_n \varphi_{e,q} \quad \text{and} \quad \partial_3 \hat{\zeta}_e^1|_{\partial S_{x_3}} = g \partial_n \hat{\zeta}_e^1$$

so we have

$$0 = \hat{E}_3^2 - \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^1 \partial_3 \varphi_{e,q} - \partial_3 \hat{\zeta}_e^1|_{\partial_0 S_{x_3}} = cte_e \quad \text{and} \quad 0 = \hat{E}_3^2 - \sum_{q'=1}^Q \hat{V}_{q'}^1 \partial_3 \varphi_{e,q'} - \partial_3 \hat{\zeta}_e^1|_{\partial_q S_{x_3}} = \partial_3 \hat{V}_q^1 + \sum_{q'=1}^Q s \mathbf{L}_{q,q'} \hat{I}_q^1 + cte_e$$

and we conclude that  $cte_e = 0$ .

We know with lemmata 5.2.2 and 5.2.4 that

$$\partial_3 \widehat{V}_q^1 + \sum_{q'=1}^Q s \mathbf{L}_{q,q'} \widehat{I}_q^1 = 0$$

so  $cte_e = 0$ . For the longitudinal magnetic fields we have on the artificial cut  $\Gamma_q$

$$0 = \widehat{H}_3^2|_{\Gamma_q} = \partial_3 \widehat{I}_q^1 + \sum_{q'=1}^Q s \mathbf{C}_{q,q'} \widehat{V}_q^1 - \int_{S_{x_3}} \partial_3 \widehat{H}_T^{R,1} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q}$$

which is coherent with the lemma 5.2.2. To determine the constant we use the nullity of the weight average :

$$\int_{S_{x_3}} \widehat{\mu} \widehat{H}_3^2 = 0.$$

□

The second order is TEM, that is to say  $\widehat{E}_3^2 = \widehat{H}_3^2 = 0$ , if and only if  $\widehat{J}_3 = 0$ .

## 5.5 Second order effective telegrapher's model

We have a cascade of equations (see (5.11, 5.34, 5.69)) to determine  $(\widehat{\mathbf{V}}^0, \widehat{\mathbf{I}}^0)$ ,  $(\widehat{\mathbf{V}}^1, \widehat{\mathbf{I}}^1)$  and then  $(\widehat{\mathbf{V}}^2, \widehat{\mathbf{I}}^2)$ . We want a suitable equation that take care into consideration the three equations (5.11, 5.34, 5.69). This is motivated by application of the inverse problem. Formally by doing the following combination

$$(5.11) + \delta (5.34) + \delta^2 (5.69),$$

we can write an equation for  $\widehat{\mathbf{V}}^0 + \delta \widehat{\mathbf{V}}^1 + \delta^2 \widehat{\mathbf{V}}^2$  and  $\widehat{\mathbf{I}}^0 + \delta \widehat{\mathbf{I}}^1 + \delta^2 \widehat{\mathbf{I}}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} s \left[ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_e + \delta^2 \widehat{\mathbf{Y}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3) \right] \left( \sum_{p=0}^2 \delta^p \widehat{\mathbf{V}}^p \right) + \partial_3 \left( \sum_{p=0}^2 \delta^p \widehat{\mathbf{I}}^p \right) \\ \quad = \widehat{\mathbf{I}}_s^\delta + \delta^3 \left[ \widehat{\mathbf{Y}}_g - \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3) \right] \left( \widehat{\mathbf{V}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{V}}^2 \right), \\ s \left[ \left( \widehat{\mathbf{Z}}_m + \delta^2 \widehat{\mathbf{Z}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3) \right] \left( \sum_{p=0}^2 \delta^p \widehat{\mathbf{I}}^p \right) + \partial_3 \left( \sum_{p=0}^2 \delta^p \widehat{\mathbf{V}}^p \right) \\ \quad = \delta^2 \widehat{\mathbf{V}}_s^2 + \delta^3 \left[ \widehat{\mathbf{Z}}_g - \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3) \right] \left( \widehat{\mathbf{I}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{I}}^2 \right). \end{array} \right. \quad (5.72)$$

If we neglect the third and fourth orders we can define the second order effective model.

**Definition 5.5.1.** *The second order effective potentials and currents*

$$\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} = \left( \widehat{V}_q^{\delta,2} \right)_{q=1,Q} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} = \left( \widehat{I}_q^{\delta,2} \right)_{q=1,Q}$$

are solutions of the second order effective telegrapher's equation

$$\left\{ \begin{array}{l} s \left[ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_e + \delta^2 \widehat{\mathbf{Y}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3) \right] \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} = \widehat{\mathbf{I}}_s^\delta, \\ s \left[ \left( \widehat{\mathbf{Z}}_m + \delta^2 \widehat{\mathbf{Z}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3) \right] \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} = \delta^2 \widehat{\mathbf{V}}_s^2, \end{array} \right. \quad (5.73)$$

where the non-local improved admittance and impedance operators

$$\left( \widehat{\mathbf{Y}}_e + \delta^2 \widehat{\mathbf{Y}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3) \quad \text{and} \quad \left( \widehat{\mathbf{Z}}_m + \delta^2 \widehat{\mathbf{Z}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3)$$

are defined from the admittance  $\widehat{\mathbf{Y}}_e$ , the impedance  $\widehat{\mathbf{Z}}_m$  and the new effective matrices  $\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}}$ ,  $\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}}$ ,  $\widehat{\mathbf{Y}}_g$ ,  $\widehat{\mathbf{Z}}_g$  defined in the section 5.4.1. The sources are

$$\widehat{\mathbf{I}}_s^\delta = \widehat{\mathbf{I}}_s^0 + \delta \widehat{\mathbf{I}}_s^1 \quad \text{and} \quad \delta^2 \widehat{\mathbf{V}}_s^2$$

where  $\widehat{\mathbf{I}}_s^0$ ,  $\widehat{\mathbf{I}}_s^1$  and  $\widehat{\mathbf{V}}_s^2$  are defined in (5.3, 5.4), (5.35) and (5.63).

The equation of propagation (5.73) is the same as the usual one (4.11) if

1. there is invariance along  $x_3$  : cylindrical cable,  $\hat{\varepsilon}$  and  $\hat{\mu}$  are independant of  $x_3$ ,
2. the electromagnetic waves "velocities" are constant :  $\hat{\varepsilon}\hat{\mu} = cte$ .

From  $\hat{\mathbf{V}}^{\delta,2}$  and  $\hat{\mathbf{I}}^{\delta,2}$ , we can give an approximation of the electromagnetic fields  $(\hat{E}^\delta, \hat{H}^\delta)$  solution of the full rescaled Maxwell's equations

$$\begin{cases} \hat{E}_T^{\delta,2} = \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^{\delta,2} \nabla \hat{\varphi}_{e,q} + \delta \nabla \hat{\xi}_e^1 + \delta^2 \left( \nabla \hat{\xi}_e^2 + \hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_e^2 \right) \\ \hat{E}_3^{\delta,2} := \delta \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{V}_q^{\delta,2} \varphi_{e,q} \right] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ (\hat{Z}_m)_{q,q'} \hat{I}_q^{\delta,2} \varphi_{m,q'} \right] \right) - \delta^2 \left( s \hat{\zeta}_m^1 + \partial_3 \hat{\xi}_e^1 \right) \\ \hat{H}_T^{\delta,2} = \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^{\delta,2} \hat{\nabla} \hat{\psi}_{m,q} + \delta \hat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_m^1 + \delta^2 \left( \nabla \hat{\xi}_m^2 + \hat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_m^2 \right) \\ \hat{H}_3^{\delta,2} := \delta \left\langle \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{I}_q^{\delta,2} \psi_{m,q} \right] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ (\hat{Y}_e)_{q,q'} \hat{V}_q^{\delta,2} \psi_{e,q'} \right] \right\rangle_{\hat{\mu}} + \delta^2 \left\langle \zeta_{m,3} - \sum_{q=1}^Q \left( \int_{S_{x_3}} \partial_3 \hat{H}_T^{R,1} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,q} \right) \psi^q(S,1) \right\rangle_{\hat{\mu}} \end{cases} \quad (5.74)$$

based on the expression of  $(\hat{E}^0, \hat{H}^0)$ ,  $(\hat{E}_T^1, \hat{H}_T^1)$ ,  $(\hat{E}_T^2, \hat{H}_T^2)$ ,  $(\hat{E}_3^1, \hat{H}_3^1)$  and  $(\hat{E}_T^2, \hat{H}_T^2)$  (respectively) given in (5.14), (5.16a, 5.16b, 5.17), (5.55, 5.56), proposition 5.2.1 and 5.4.5. We expect that  $(\hat{E}^{\delta,2}, \hat{H}^{\delta,2})$  is a better approximation of  $(\hat{E}^\delta, \hat{H}^\delta)$  than  $(\hat{E}^{\delta,1}, \hat{H}^{\delta,1})$  given in the remark 5.2.2 and  $(\hat{E}^0, \hat{H}^0)$  in the sense that

$$\|\hat{E}^\delta - \hat{E}^{\delta,2}\|_{L^2(\Omega)} = O\left(\delta \|\hat{E}^\delta - \hat{E}^{\delta,1}\|_{L^2(\Omega)}\right) = O\left(\delta^2 \|\hat{E}^\delta - \hat{E}^0\|_{L^2(\Omega)}\right) = O(\delta^3).$$

It will be proved in the chapter 6.

### 5.5.1 Study of the improved effective telegrapher model

In this section we prove that the problem (5.73) is well posed. Be careful, the new effective matrices, and in particular  $\hat{\gamma}_Y$  and  $\hat{\gamma}_Z$  could degenerate. This the main difficulty to ensure the existence of solution of (5.73). We introduce the weighted Hilbert spaces

$$H^1(\mathbb{R}, \hat{\gamma}_Y dx) := \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R})^Q \mid \Re \left( \int_{\mathbb{R}} (\hat{\gamma}_Y \partial_3 \mathbf{u}) \cdot \partial_3 \mathbf{u} \right) < \infty \right\}$$

and

$$H^1(\mathbb{R}, \hat{\gamma}_Z dx) := \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R})^Q \mid \Re \left( \int_{\mathbb{R}} (\hat{\gamma}_Z \partial_3 \mathbf{u}) \cdot \partial_3 \mathbf{u} \right) < \infty \right\}.$$

Those spaces account for the fact that the matrices  $\hat{\gamma}_Y$  and  $\hat{\gamma}_Z$  could vanish. We can now state some positivity properties of terms appearing in the equation (5.73).

**Lemma 5.5.1.** *For all*

$$\hat{\mathbf{V}}, \hat{\mathbf{U}} \in H^1(\mathbb{R}, \hat{\gamma}_Y dx) \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}} \in H^1(\mathbb{R}, \hat{\gamma}_Z dx),$$

*the non-local part of the improved admittance and impedance operators satisfy*

$$\left( \left[ \hat{\mathbf{Y}}_g Id - \partial_3 \hat{\gamma}_Y \partial_3 \right] \hat{\mathbf{V}}, \hat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\Omega} \hat{\varepsilon} \left[ (\hat{\varphi}_e - \hat{\varphi}_m) (\partial_3 \hat{\mathbf{V}}) + \overline{\partial_3 \hat{\varphi}_e(\hat{\mathbf{V}})} \right] \left[ (\hat{\varphi}_e - \hat{\varphi}_m) (\partial_3 \hat{\mathbf{U}}) + \overline{\partial_3 \hat{\varphi}_e(\hat{\mathbf{U}})} \right]$$

and

$$\left( \left[ \hat{\mathbf{Y}}_g Id - \partial_3 \hat{\gamma}_Y \partial_3 \right] \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\Omega} \hat{\mu} \left[ \langle \hat{\psi}_m - \hat{\psi}_e \rangle_{\hat{\mu}} (\partial_3 \hat{\mathbf{I}}) + \overline{\langle \partial_3 \hat{\psi}_m(\hat{\mathbf{I}}) \rangle_{\hat{\mu}}} \right] \left[ \langle \hat{\psi}_m - \hat{\psi}_e \rangle_{\hat{\mu}} (\partial_3 \hat{\mathbf{J}}) + \overline{\langle \partial_3 \hat{\psi}_m(\hat{\mathbf{J}}) \rangle_{\hat{\mu}}} \right].$$

*Proof.* We first recall that for each  $\hat{\mathbf{V}} = (\hat{V}_i)_{i \leq Q}$  we have denoted by  $\hat{\varphi}_e(\hat{\mathbf{V}}) = \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q \hat{\varphi}_{e,q}$  and so on for  $\hat{\varphi}_m(\hat{\mathbf{V}})$ ,  $\partial_3 \hat{\varphi}_e(\hat{\mathbf{V}})$ , ...



By definition of the new effective matrices we have

$$\left( \left[ \widehat{\mathbf{Y}}_g Id - \partial_3 \widehat{\gamma}_Y \partial_3 \right] \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \left( \widehat{\eta}_Y \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} - \left( (\partial_3 \widehat{\chi}_Z Id + (\widehat{\chi}_Z - \widehat{\chi}_{Z,*}) \partial_3) \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} - \left( \partial_3 \widehat{\gamma}_Y \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

We have by integration by part and definition of  $\widehat{\gamma}_Y$

$$- \left( \partial_3 \widehat{\gamma}_Y \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} \left( \widehat{\varphi}_e(\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}) - \widehat{\varphi}_m(\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}) \right) \overline{\left( \widehat{\varphi}_e(\partial_3 \widehat{\mathbf{U}}) - \widehat{\varphi}_m(\partial_3 \widehat{\mathbf{U}}) \right)}. \quad (5.75)$$

By definition of  $\widehat{\eta}_Y$ , we have

$$\left( \widehat{\eta}_Y \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} \left( \partial_3 \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{V}}) \right) \overline{\left( \partial_3 \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{U}}) \right)}. \quad (5.76)$$

We also have by integration by part

$$\left( \partial_3 \widehat{\chi}_Z \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = - \int_{\mathbb{R}} \widehat{\chi}_Y \left[ \partial_3 \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{V}} \cdot \partial_3 \widehat{\mathbf{U}} \right]$$

so

$$- \left( (\partial_3 \widehat{\chi}_Z Id + (\widehat{\chi}_Z - \widehat{\chi}_{Z,*}) \partial_3) \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\chi}_Y \widehat{\mathbf{V}} \cdot \partial_3 \widehat{\mathbf{U}} + \int_{\mathbb{R}} \widehat{\chi}_{Y,*} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{U}}.$$

Then by definition of the matrices  $\widehat{\chi}_Y$  and  $\widehat{\chi}_{Y,*}$ , we have

$$- \left( (\partial_3 \widehat{\chi}_Z Id + (\widehat{\chi}_Z - \widehat{\chi}_{Z,*}) \partial_3) \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} (\widehat{\varphi}_e - \widehat{\varphi}_m) (\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}) \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{U}})} + \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{V}})} (\widehat{\varphi}_e - \widehat{\varphi}_m) (\partial_3 \widehat{\mathbf{U}}).$$

Collecting the previous equation, (5.75) and (5.76), we have proved the first equality of the lemma

$$\left( \left[ \widehat{\mathbf{Y}}_g Id - \partial_3 \widehat{\gamma}_Y \partial_3 \right] \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} \left[ (\widehat{\varphi}_e - \widehat{\varphi}_m) (\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}) + \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{V}})} \right] \left[ (\widehat{\varphi}_e - \widehat{\varphi}_m) (\partial_3 \widehat{\mathbf{U}}) + \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{U}})} \right].$$

The second one is proved in the same way.  $\square$

We introduce the bilinear forms

$$(\cdot, \cdot)_{D_Y} : H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_Y dx) \times H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_Y dx) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{and} \quad (\cdot, \cdot)_{D_Z} : H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_Z dx) \times H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_Z dx) \rightarrow \mathbb{C}$$

defined by

$$\left( \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{D_Y} = \int_{\mathbb{R}} \left( s \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{\mathbb{C}} + \delta^2 \int_{\Omega} s \widehat{\varepsilon} \left[ (\widehat{\varphi}_e - \widehat{\varphi}_m) (\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}) + \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{V}})} \right] \left[ (\widehat{\varphi}_e - \widehat{\varphi}_m) (\partial_3 \widehat{\mathbf{U}}) + \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{U}})} \right]$$

and

$$\left( \widehat{\mathbf{I}}, \widehat{\mathbf{J}} \right)_{D_Z} = \int_{\mathbb{R}} \left( s \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{I}}, \widehat{\mathbf{J}} \right)_{\mathbb{C}} + \delta^2 \int_{\Omega} s \widehat{\mu} \left[ \langle \widehat{\psi}_m - \widehat{\psi}_e \rangle_{\widehat{\mu}} (\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}) + \overline{\langle \partial_3 \widehat{\psi}_m(\widehat{\mathbf{I}}) \rangle_{\widehat{\mu}}} \right] \left[ \langle \widehat{\psi}_m - \widehat{\psi}_e \rangle_{\widehat{\mu}} (\partial_3 \widehat{\mathbf{J}}) + \overline{\langle \partial_3 \widehat{\psi}_m(\widehat{\mathbf{J}}) \rangle_{\widehat{\mu}}} \right].$$

Before proving some continuity and coercivity properties related to the bilinear forms  $(\cdot, \cdot)_{D_Y}$  and  $(\cdot, \cdot)_{D_Z}$  we need to give better lower bounds of the real part of eigenvalues of the electrical admittance and impedance matrix than the ones given in (5.13).

**Lemma 5.5.2.** *The electrical admittance and impedance matrices  $\widehat{\mathbf{Y}}_e$  and  $\widehat{\mathbf{Z}}_m$  satisfy for all  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^Q$*

$$\Re \left( s \widehat{\mathbf{Y}}_e \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_{\mathbb{C}} \geq \left( \eta + \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+} \right) (\mathbf{C}^\infty \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbb{C}} \geq \left( \eta \varepsilon_- + \sigma_{e,-} \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \right) C_-^0 |\mathbf{u}|^2, \quad (5.77)$$

and

$$\Re \left( s \widehat{\mathbf{Z}}_m \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_{\mathbb{C}} \geq \left( \eta + \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+} \right) (\mathbf{L}^\infty \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbb{C}} \geq \left( \eta \mu_- + \sigma_{m,-} \frac{\mu_-}{\mu_+} \right) (\lambda_{\mathbf{e}}^+)^{-1} |\mathbf{u}|^2, \quad (5.78)$$

with the electrical capacity matrix  $\mathbf{C}^\infty$  and the electrical inductance matrix defined in proposition 4.2.1 and the constant  $C_-^0$  and  $\lambda_{\mathbf{e}}^+$  independent of the longitudinal variable  $x_3$  and of the Laplace variable  $s$  defined in property 1.3.2.

*Proof.* We recall the "high frequency decomposition" of the harmonic potential  $\widehat{\varphi}_{e,q} = \varphi_{e,q}^\infty + \widehat{\varphi}_{e,q}^r$  and that we have denoted for any vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^Q$

$$\widehat{\varphi}_e(\mathbf{u}) := \sum_{q=1}^Q u_q \widehat{\varphi}_{e,q}, \quad \varphi_e^\infty(\mathbf{u}) := \sum_{q=1}^Q u_q \varphi_{e,q}^\infty \quad \text{and} \quad \widehat{\varphi}_e^r(\mathbf{u}) := \sum_{q=1}^Q u_q \widehat{\varphi}_{e,q}^r.$$

We aim to determine a lower bound of the real part of the spectrum of  $s \widehat{\mathbf{Y}}_e$ . The proof for (5.78) is similar. By the positivity assumption on the characteristic's coefficients (6.10), we have

$$\Re \left( s \widehat{\mathbf{Y}}_e \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_{\mathbb{C}} = \int_S (\eta \varepsilon + \sigma_e) |\nabla \widehat{\varphi}_e(\mathbf{u})|^2 \geq \left( \eta + \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+} \right) \int_S \varepsilon |\nabla \widehat{\varphi}_e(\mathbf{u})|^2.$$

We have by the property of the inner product

$$\int_S \varepsilon |\nabla \widehat{\varphi}_e(\mathbf{u})|^2 = \int_S \varepsilon |\nabla \varphi_e^\infty(\mathbf{u})|^2 + \int_S \varepsilon |\nabla \widehat{\varphi}_e^r(\mathbf{u})|^2 + \Re \left( \int_S \varepsilon \nabla \varphi_e^\infty(\mathbf{u}) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^r(\mathbf{u}) \right).$$

Then with the remark 1.11, we have

$$\int_S \varepsilon \nabla \varphi_e^\infty(\mathbf{u}) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^r(\mathbf{u}) = 0$$

and so with the propriety 4.3.1

$$\Re \left( s \widehat{\mathbf{Y}}_e \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_{\mathbb{C}} \geq \left( \eta + \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+} \right) (\mathbf{C}^\infty \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbb{C}} \geq \left( \eta \varepsilon_- + \sigma_{e,-} \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \right) C_-^0 |\mathbf{u}|^2.$$

□

**Lemma 5.5.3.** For all  $\widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \in H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} dx)$  the bilinear form  $(\cdot, \cdot)_{D_{\mathbf{Y}}}$  satisfy

$$\begin{aligned} \Re \left( \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{V}} \right)_{D_{\mathbf{Y}}} &\geq \left( \eta + \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+} \right) \left[ \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{C}^\infty \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{V}})_{\mathbb{C}} + \delta^2 \int_{\Omega} \varepsilon \left| \sum_{q=1}^Q [(\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}) \partial_3 \widehat{V}_q + \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}} \widehat{V}_q] \right|^2 \right] \\ &\geq C_-^0 \left( \eta + \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+} \right) \|\widehat{\mathbf{V}}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned} \quad (5.79)$$

and

$$\left| (\widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}} \right)_{D_{\mathbf{Y}}} \left| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} (s \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{U}})_{\mathbb{C}} \right| + \delta^2 \left| \int_{\Omega} (s \widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}) \cdot \overline{\partial_3 \widehat{\mathbf{U}}} \right| + \delta^2 \left| \int_{\Omega} (s \widehat{\eta}_{\mathbf{Y}} \widehat{\mathbf{V}}) \cdot \overline{\widehat{\mathbf{U}}} \right|. \quad (5.80)$$

For all  $\widehat{\mathbf{I}}, \widehat{\mathbf{J}} \in H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} dx)$  the bilinear form  $(\cdot, \cdot)_{D_{\mathbf{Z}}}$  satisfy

$$\begin{aligned} \Re \left( \widehat{\mathbf{I}}, \widehat{\mathbf{I}} \right)_{D_{\mathbf{Z}}} &\geq \left( \eta + \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+} \right) \left[ \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{L}^\infty \widehat{\mathbf{I}}, \widehat{\mathbf{I}})_{\mathbb{C}} + \delta^2 \int_{\Omega} \mu \left| \sum_{q=1}^Q [\langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \partial_3 \widehat{I}_q + \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,i} \rangle_{\widehat{\mu}} \widehat{I}_q] \right|^2 \right] \\ &\geq (\lambda_{\mathcal{C}}^+)^{-1} \left( \eta + \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+} \right) \|\widehat{\mathbf{I}}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned} \quad (5.81)$$

and

$$\left| (\widehat{\mathbf{I}}, \widehat{\mathbf{J}} \right)_{D_{\mathbf{Z}}} \left| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} (s \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{I}}, \widehat{\mathbf{J}})_{\mathbb{C}} \right| + \delta^2 \left| \int_{\Omega} (s \widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}) \cdot \overline{\partial_3 \widehat{\mathbf{J}}} \right| + \delta^2 \left| \int_{\Omega} (s \widehat{\eta}_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{I}}) \cdot \overline{\widehat{\mathbf{J}}} \right|. \quad (5.82)$$

*Proof.* Looking at the definition of the bilinear form  $(\cdot, \cdot)_{D_{\mathbf{Y}}}$  the first inequality of (5.79) is obvious. The second one is due to the equations

$$\Re \left( s \widehat{\mathbf{Y}}_e \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_{\mathbb{C}} \geq \left( \eta + \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+} \right) (\mathbf{C}^\infty \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbb{C}} \geq \left( \eta \varepsilon_- + \sigma_{e,-} \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \right) C_-^0 |\mathbf{u}|^2. \quad (5.83)$$

(5.77) and the lemma 7.6.1. The inequality (5.80) is due to the triangular inequality. The inequalities (5.81) and (5.82) are proved in the same way. □

**Theorem 5.5.1.** *Any solution*

$$\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}, \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} \in H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} dx) \times H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} dx)$$

of the problem (5.73) satisfies the following prior estimate

$$\mathcal{E}_{LC}^{\delta,2} \leq \frac{1}{\left(\eta + \min\left(\frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}\right)\right)^2} \max\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_{\infty}^{-1} \widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta} \cdot \widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta}, \delta^2 \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_{\infty}^{-1} \widehat{\mathbf{V}}_s^2 \cdot \widehat{\mathbf{V}}_s^2\right)$$

with the electrical energy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{LC}^{\delta,2} &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_{\infty} \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} \cdot \overline{\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}} + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_{\infty} \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} \cdot \overline{\widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}} \right] \\ &+ \frac{\delta^2}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon \left| \sum_q^Q [(\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}) \partial_3 \widehat{V}_q^{\delta,2} + \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q}} \widehat{V}_q^{\delta,2}] \right|^2 + \int_{\Omega} \mu \left| \sum_{q=1}^Q [\langle \widehat{\psi}_{m,q} - \widehat{\psi}_{e,q} \rangle_{\widehat{\mu}} \partial_3 \widehat{I}_q^{\delta,2} + \overline{\langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,i} \rangle_{\widehat{\mu}} \widehat{I}_q^{\delta,2}}] \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

*Proof.* We make the  $L^2$  inner product for the real variable  $x_3$  of the first and the conjugate of the second equation of (5.73) respectively with  $\widehat{\mathbf{V}}^{\delta}$  and  $\widehat{\mathbf{I}}^{\delta}$ , then add the two equalities to obtain the following energy equality

$$\begin{aligned} &s \left[ \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} \cdot \overline{\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}} + \delta^2 \left( \left[ \widehat{\mathbf{Y}}_g Id - \partial_3 \widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3 \right] \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}, \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} \right)_{L^2(\mathbb{R})} \right] \\ &+ \overline{s} \left[ \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} \cdot \overline{\widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}} + \delta^2 \left( \left[ \widehat{\mathbf{Z}}_g Id - \partial_3 \widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3 \right] \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}, \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} \right)_{L^2(\mathbb{R})} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta} \cdot \overline{\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}} + \delta^2 \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{\mathbf{V}}_s^2} \cdot \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}. \end{aligned}$$

If we take the real part of this equality, use the equations (5.77, 5.78) and use the lemma 7.6.1

$$2 \left( \eta + \min\left(\frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}\right) \right) \mathcal{E}_{LC}^{\delta,2} \leq \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta} \cdot \overline{\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}} \right| + \delta^2 \left| \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{\mathbf{V}}_s^2} \cdot \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} \right|$$

and with the Cauchy-Schwarz inequality (and the fact that  $\widehat{\mathbf{C}}$  is positive define)

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta} \cdot \overline{\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_{\infty}^{-1} \widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta} \cdot \mathbf{C}_{\infty} \overline{\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}} \right| \leq \|\mathbf{C}_{\infty}^{-1/2} \widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta}\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\mathbf{C}_{\infty}^{1/2} \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

and

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{\mathbf{V}}_s^2} \cdot \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} \right| \leq \|\mathbf{L}_{\infty}^{-1/2} \widehat{\mathbf{V}}_s^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\mathbf{L}_{\infty}^{1/2} \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

We conclude with the Young's inequality

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \sqrt{a+b}$$

□

Using again the equations (5.77, 5.78), we can conclude that

$$\|\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2 \max((C_-^0)^{-1}, \lambda_{\mathbf{e}}^+)}{\left(\eta + \min\left(\frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}\right)\right)} \max\left(\|\widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta}\|, \delta^2 \|\widehat{\mathbf{V}}_s^2\|\right). \quad (5.85)$$

In particular, since the problem (5.73) is linear, we have uniqueness of solution of the problem (5.73). The existence is difficult to demonstrate since the matrices  $\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}}$  and  $\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}}$  could degenerate. For that we introduce a family of perturbed problem :

$$\begin{cases} s \left[ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_e + \delta^2 \widehat{\mathbf{Y}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3) - v \partial_3^2 \right] \widehat{\mathbf{V}}^v + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v &= \widehat{\mathbf{I}}_s^{\delta}, \\ s \left[ \left( \widehat{\mathbf{Z}}_m + \delta^2 \widehat{\mathbf{Z}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3) - v \partial_3^2 \right] \widehat{\mathbf{I}}^v + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v &= \delta^2 \widehat{\mathbf{V}}_s^2, \end{cases} \quad (5.86)$$

for any  $v > 0$ .

**Lemma 5.5.4.** *For any  $v > 0$  there exists a unique solution*

$$(\widehat{\mathbf{V}}^v, \widehat{\mathbf{I}}^v) \in H^1(\mathbb{R})^2$$

to the perturbed problem (5.86). Moreover there exists a constant  $C$  such that the solution satisfies

$$\begin{cases} \|\widehat{\mathbf{V}}^v\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\widehat{\mathbf{I}}^v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{(\eta + \alpha_-)} \left[ \|\widehat{\mathbf{I}}_s^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \|\widehat{\mathbf{V}}_s^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \right] \\ \|\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{\sqrt{(\eta + \alpha_-)} \sqrt{v}} \left[ \|\widehat{\mathbf{I}}_s^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \|\widehat{\mathbf{V}}_s^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \right] \end{cases}$$

with  $\alpha_- := \min\left(\frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}\right)$ .

*Proof.* The variational formulation of (5.86) is

$$\begin{cases} \text{find } (\widehat{\mathbf{V}}^v, \widehat{\mathbf{I}}^v) \in H^1(\mathbb{R})^2 \text{ such that for any } (\widehat{\mathbf{U}}^v, \widehat{\mathbf{J}}^v) \in H^1(\mathbb{R})^2 \\ a^v \left( \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{U}}^v \\ \widehat{\mathbf{J}}^v \end{pmatrix} \right) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{I}}_s^\delta \cdot \widehat{\mathbf{U}}^v + \delta^2 \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{V}}_s^2 \cdot \widehat{\mathbf{J}}^v \end{cases}$$

with the bilinear form  $a^v$  defined by :

$$\begin{aligned} a^v \left( \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{U}}^v \\ \widehat{\mathbf{J}}^v \end{pmatrix} \right) &= (\widehat{\mathbf{V}}^v, \widehat{\mathbf{U}}^v)_{D_Y} + v (\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v, \partial_3 \widehat{\mathbf{U}}^v)_{L^2(\mathbb{R})} + \overline{(\widehat{\mathbf{I}}^v, \widehat{\mathbf{J}}^v)}_{D_Z} + v \overline{(\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v, \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}^v)}_{L^2(\mathbb{R})} \\ &+ \left[ \int_{\mathbb{R}} \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v \widehat{\mathbf{U}}^v + \int_{\mathbb{R}} \overline{\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v} \widehat{\mathbf{J}}^v \right]. \end{aligned}$$

With the lemma 5.5.3 and the proposition 5.4.3 the bilinear form  $a^v$  is coercive

$$\Re \left[ a^v \left( \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix} \right) \right] \geq C \left[ (\eta + \alpha_-) \left\| \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + v \left\| \begin{pmatrix} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right] \quad (5.87)$$

(with  $C$  a constant) and continuous. So by the Lax-Milgram lemma 0.0.1 there exists a unique solution on  $H^1(\mathbb{R})$ .

Then with (5.87) we have

$$C \left[ (\eta + \alpha_-) \left\| \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + v \left\| \begin{pmatrix} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right] \leq \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{I}}_s^\delta \cdot \widehat{\mathbf{V}}^v \right| + \delta^2 \left| \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{\mathbf{V}}_s^2} \cdot \widehat{\mathbf{I}}^v \right|$$

and with the Cauchy-Schwarz inequality, there exists a constant  $C$  such that

$$(\eta + \alpha_-) \left\| \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + v \left\| \begin{pmatrix} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v \\ \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \left[ \|\widehat{\mathbf{I}}_s^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \|\widehat{\mathbf{V}}_s^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \right] \left[ \|\widehat{\mathbf{V}}^v\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\widehat{\mathbf{I}}^v\|_{L^2(\mathbb{R})} \right].$$

□

**Proposition 5.5.1.** *There exists a unique solution*

$$(\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}, \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}) \in L^2(\mathbb{R})^2$$

to the problem (5.73).

*Proof.* With the lemma 5.5.4, we know that the sequence  $(\widehat{\mathbf{V}}^v, \widehat{\mathbf{I}}^v)$  for  $v > 0$  is bounded in  $L^2(\mathbb{R})$ , so, since  $L^2(\mathbb{R})$  is a reflexive space, there exists a weakly convergent subsequence that we will again denote by  $(\widehat{\mathbf{V}}^v, \widehat{\mathbf{I}}^v)$

$$(\widehat{\mathbf{V}}^v, \widehat{\mathbf{I}}^v) \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} (\widetilde{\mathbf{V}}, \widetilde{\mathbf{I}}).$$

Moreover since each  $(\widehat{\mathbf{V}}^v, \widehat{\mathbf{I}}^v)$  are bounded in  $L^2(\mathbb{R})$ , then  $(\widetilde{\mathbf{V}}, \widetilde{\mathbf{I}}) \in L^2(\mathbb{R})^2$ .

For all test function  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  we have

$$- \langle v \partial_3^2 \widehat{\mathbf{V}}^v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = v \int_{\mathbb{R}} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v \partial_3 \varphi \quad \text{and} \quad - \langle v \partial_3^2 \widehat{\mathbf{I}}^v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = v \int_{\mathbb{R}} \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v \partial_3 \varphi,$$

then by using one of the inequality of the lemma 5.5.4, we have

$$v \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^v \partial_3 \varphi \right| \leq \sqrt{v} \frac{C}{\sqrt{(\eta + \alpha_-)}} \left[ \|\widehat{\mathbf{I}}_s^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \|\widehat{\mathbf{V}}_s^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \right] \|\partial_3 \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0$$

and

$$v \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^v \partial_3 \varphi \right| \leq \sqrt{v} \frac{C}{\sqrt{(\eta + \alpha_-)}} \left[ \|\widehat{\mathbf{I}}_s^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \|\widehat{\mathbf{V}}_s^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \right] \|\partial_3 \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0,$$

so that

$$- \langle v \partial_3^2 \widehat{\mathbf{V}}^v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0 \quad \text{and} \quad - \langle v \partial_3^2 \widehat{\mathbf{I}}^v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0.$$

Since the space of distribution  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  is closed with regard to the topology of the convergence in the sense of distribution, we have

$$- \langle v \partial_3^2 \widetilde{\mathbf{V}}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0 \quad \text{and} \quad - \langle v \partial_3^2 \widetilde{\mathbf{I}}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0 \quad \text{for all } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

So the problem (5.86) converges in the sense of distribution to the problem (5.73). So we have proved the existence of a solution  $(\widetilde{\mathbf{V}}, \widetilde{\mathbf{I}}) \in L^2(\mathbb{R})^2$  of (5.73). Then, by a regulation process, the solutions are in the space  $H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} dx) \times H^1(\mathbb{R}, \widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} dx)$ . The uniqueness is a consequence of the prior estimate given in (5.85).  $\square$

## 5.5.2 Error between the effective model and the asymptotic model

The goal of this section is to analyze the error between the effective model and the asymptotic second order model

$$\mathcal{V} := \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} - \sum_{p=0}^2 \delta^p \widehat{\mathbf{V}}^p, \quad \mathcal{I} := \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} - \sum_{p=0}^2 \delta^p \widehat{\mathbf{I}}^p, \quad \widehat{e} := \widehat{E}^{\delta,2} - \sum_{p=0}^2 \delta^p \widehat{E}^p \quad \text{and} \quad \widehat{h} := \widehat{H}^{\delta,2} - \sum_{p=0}^2 \delta^p \widehat{H}^p. \quad (5.88)$$

Our purpose is to show that

$$\mathcal{E}_{LC}^{\text{err}} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_\infty \mathcal{V} \cdot \overline{\mathcal{V}} + \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathbf{L}_\infty} \mathcal{I} \cdot \mathcal{I} \right] = O(\delta^3) \quad \text{and} \quad \mathcal{E}^{\text{err}} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |e|^2 + \int_{\Omega} \mu |h|^2 \right] = O(\delta^3).$$

With the equations (5.72) and (5.73) we have

$$\begin{cases} s \left[ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_e + \delta^2 \widehat{\mathbf{Y}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3) \right] \mathcal{V} + \partial_3 \mathcal{I} &= \delta^3 \left[ \widehat{\mathbf{Y}}_g - \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Y}} \partial_3) \right] \left( \widehat{\mathbf{V}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{V}}^2 \right) \\ s \left[ \left( \widehat{\mathbf{Z}}_m + \delta^2 \widehat{\mathbf{Z}}_g \right) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3) \right] \mathcal{I} + \partial_3 \mathcal{V} &= \delta^3 \left[ \widehat{\mathbf{Z}}_g - \partial_3 (\widehat{\gamma}_{\mathbf{Z}} \partial_3) \right] \left( \widehat{\mathbf{I}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{I}}^2 \right) \end{cases} \quad (5.89)$$

To simplify the presentation we introduce the following notations

$$\alpha_- := \min \left( \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+} \right), \quad \alpha_+ := \max \left( \frac{\sigma_{e,+}}{\varepsilon_-}, \frac{\sigma_{m,+}}{\mu_-} \right), \quad \beta_+ := \max \left( \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-}, \frac{\mu_+}{\mu_-} \right).$$

**Proposition 5.5.2.** *The energy of the error satisfies*

$$\mathcal{E}_{LC}^{\text{err}} \leq \frac{\delta^3}{(\eta + \alpha_-)^2} \left| \beta_+ + \frac{\alpha_+}{s} \right|^2 \max(\mathcal{E}_{\mathbf{V}}, \mathcal{E}_{\mathbf{I}})$$

with

$$\mathcal{E}_{\mathbf{V}} := \int_{\Omega} \varepsilon \left| \sum_q^Q \left[ (\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}) \partial_3 \left( \widehat{V}_q^1 + \delta \widehat{V}_q^2 \right) + \overline{\widehat{\varphi}_{e,i}} \left( \widehat{V}_q^1 + \delta \widehat{V}_q^2 \right) \right] \right|^2$$

and

$$\mathcal{E}_{\mathbf{I}} := \int_{\Omega} \mu \left| \sum_i^N \left[ \langle \widehat{\psi}_{m,i} - \widehat{\psi}_{e,i} \rangle_{\widehat{\mu}} \partial_3 \left( \widehat{I}^1 + \delta \widehat{I}^2 \right) + \overline{\langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,i} \rangle_{\widehat{\mu}}} \left( \widehat{I}^1 + \delta \widehat{I}^2 \right) \right] \right|^2.$$

*Proof.* To shorten the expression we will denote by

$$\mathcal{E}_V := \int_{\Omega} \varepsilon \left| \sum_q^Q \left[ (\widehat{\varphi}_{e,q} - \widehat{\varphi}_{m,q}) \partial_3 \mathcal{V}_q + \overline{\partial_3 \widehat{\varphi}_{e,i}} \mathcal{V}_q \right] \right|^2$$

and so on for  $\mathcal{E}_I$ . Similarly with the proof of the theorem 5.5.1, we have

$$\begin{aligned} & \left[ \Re \left( s \widehat{\mathbf{Y}}_e \mathcal{V}, \mathcal{V} \right)_{\mathbb{C}} + \Re \left( s \widehat{\mathbf{Z}}_m \mathcal{I}, \mathcal{I} \right)_{\mathbb{C}} \right] + \left[ \mathcal{E}_V + \mathcal{E}_I \right] \\ & \leq \delta^3 \left| \left( \left[ \widehat{\mathbf{Y}}_g Id - \partial_3 \widehat{\gamma}_Y \partial_3 \right] \left( \widehat{\mathbf{V}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{V}}^2 \right), \mathcal{V} \right)_{L^2(\mathbb{R})} + \left( \left[ \widehat{\mathbf{Z}}_g Id - \partial_3 \widehat{\gamma}_Z \partial_3 \right] \left( \widehat{\mathbf{I}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{I}}^2 \right), \mathcal{I} \right)_{L^2(\mathbb{R})} \right| \end{aligned} \quad (5.90)$$

with the lemma we know that

$$\left| \left( \left[ \widehat{\mathbf{Y}}_g Id - \partial_3 \widehat{\gamma}_Y \partial_3 \right] \left( \widehat{\mathbf{V}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{V}}^2 \right), \mathcal{V} \right)_{L^2(\mathbb{R})} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} + s^{-1} \frac{\sigma_{e,+}}{\varepsilon_-} \right| \sqrt{\mathcal{E}_V \mathcal{E}_V} \quad (5.91)$$

and

$$\left| \left( \left[ \widehat{\mathbf{Z}}_g Id - \partial_3 \widehat{\gamma}_Z \partial_3 \right] \left( \widehat{\mathbf{I}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{I}}^2 \right), \mathcal{I} \right)_{L^2(\mathbb{R})} \right| \leq \left| \frac{\mu_+}{\mu_-} + s^{-1} \frac{\sigma_{m,+}}{\mu_-} \right| \sqrt{\mathcal{E}_I \mathcal{E}_I} \quad (5.92)$$

so with the Young formula  $\sqrt{\mathcal{E}_V} + \sqrt{\mathcal{E}_I} \leq \sqrt{2} \sqrt{\mathcal{E}_V + \mathcal{E}_I}$ , we have

$$\mathcal{E}_V + \mathcal{E}_I \leq \delta^3 \sqrt{2} \left| \beta_+ + \frac{\alpha_+}{s} \right| \sqrt{\max(\mathcal{E}_V, \mathcal{E}_I)} \left[ \sqrt{\mathcal{E}_V + \mathcal{E}_I} \right]$$

and so

$$\left[ \Re \left( s \widehat{\mathbf{Y}}_e \mathcal{V}, \mathcal{V} \right)_{\mathbb{C}} + \Re \left( s \widehat{\mathbf{Z}}_m \mathcal{I}, \mathcal{I} \right)_{\mathbb{C}} \right] \leq \delta^3 2 \left| \beta_+ + \frac{\alpha_+}{s} \right|^2 \max(\mathcal{E}_V, \mathcal{E}_I).$$

we conclude using (5.77) and (5.78) to bound by below the left hand side of the previous equation.  $\square$

The calculus of the upper bound of  $\mathcal{E}_V$  and  $\mathcal{E}_I$  is a long and tedious process. We will only give the main steps and the details are left to the reader. Some calculus of the same type will be done in the chapter 6 when we will study the error estimates. First we remark that

$$\mathcal{E}_V \leq \int_{\Omega} \varepsilon \left| (\widehat{\varphi}_e - \widehat{\varphi}_m) \left[ \partial_3 \left( \widehat{\mathbf{V}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{V}}^2 \right) \right] \right|^2 + \int_{\Omega} \varepsilon \left| \partial_3 \widehat{\varphi}_e \left[ \widehat{\mathbf{V}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{V}}^2 \right] \right|^2$$

and

$$\mathcal{E}_I \leq \int_{\Omega} \mu \left| \left\langle \widehat{\psi}_m - \widehat{\psi}_e \right\rangle_{\widehat{\mu}} \left[ \partial_3 \left( \widehat{\mathbf{I}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{I}}^2 \right) \right] \right|^2 + \int_{\Omega} \mu \left| \left\langle \partial_3 \widehat{\psi}_m \right\rangle_{\widehat{\mu}} \left[ \widehat{\mathbf{I}}^1 + \delta \widehat{\mathbf{I}}^2 \right] \right|^2.$$

With similar arguments given in the proof of the proposition 5.4.3, we have :

$$\max(\mathcal{E}_V, \mathcal{E}_I) \leq C(|s|) \left[ \|\widehat{\mathbf{V}}^1\|^2 + \|\widehat{\mathbf{I}}^1\|^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^1\|^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^1\|^2 \right] + \delta \left[ \|\widehat{\mathbf{V}}^2\|^2 + \|\widehat{\mathbf{I}}^2\|^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^2\|^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^2\|^2 \right]$$

with  $C(|s|)$  a rational fraction of  $|s|$  and with coefficients which only depend on geometrics factors (included  $g$ ) and of the characteristics coefficients.

Then, we need to bound  $\widehat{\mathbf{V}}^p$  and  $\widehat{\mathbf{I}}^p$  for each  $p = 0..2$  and their  $x_3$ -derivative. For  $p = 0, 1$ , the procedure is the same as the one of theorem 5.5.1 (or proposition 5.5.2). We have

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_{\infty} \widehat{\mathbf{V}}^0 \cdot \overline{\widehat{\mathbf{V}}^0} + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_{\infty} \widehat{\mathbf{I}}^0 \cdot \widehat{\mathbf{I}}^0 \leq \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\mathbf{C}_{\infty}^{-1/2} \mathbf{I}_s\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_{\infty} \widehat{\mathbf{V}}^1 \cdot \overline{\widehat{\mathbf{V}}^1} + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_{\infty} \widehat{\mathbf{I}}^1 \cdot \widehat{\mathbf{I}}^1 \leq \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\mathbf{C}_{\infty}^{-1/2} \mathbf{I}_s^1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

We conclude with the property 4.3.1(that deals with the lower bounds of the eigenvalue of  $\mathbf{C}_{\infty}$  and  $\mathbf{L}_{\infty}$ ) that

$$\|\widehat{\mathbf{V}}^0\|^2 + \|\widehat{\mathbf{I}}^0\|^2 \leq \frac{\max(\varepsilon_-^{-1} C_-^{-1}, \mu_-^{-1} \lambda_{\mathbf{e}}^+)}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\mathbf{C}_{\infty}^{-1/2} \mathbf{I}_s\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

For the longitudinal derivative, we simply use the telegrapher equations (5.11)

$$\|\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^0\| = \|s \widehat{\mathbf{Z}}_m \widehat{\mathbf{I}}^0\| \quad \text{and} \quad \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^0\| \leq \|s \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}}^0\| + \|\widehat{\mathbf{I}}_s\|.$$

We then have with the property 1.3.2

$$\|\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^0\| \leq |\mu_+ s + \sigma_{m,+}| \lambda_{\mathbf{e}}^+ \|\widehat{\mathbf{I}}^0\| \quad \text{and} \quad \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^0\| \leq |\varepsilon_+ s + \sigma_{e,+}| C_-^{-1} \|\widehat{\mathbf{V}}^0\| + \|\widehat{\mathbf{I}}_s\|$$

so there exists a constant  $K$  which only depends on the geometric constants  $\lambda_{\mathbf{e}}^+$  and  $C_-^{-1}$  such that

$$\|\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^0\|^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^0\|^2 \leq K \frac{|\beta_+ s + \alpha_+|^2}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\widehat{\mathbf{I}}_s\| + \|\widehat{\mathbf{I}}_s\|$$

and similarly we have

$$\|\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^1\|^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^1\|^2 \leq K \frac{|\beta_+ s + \alpha_+|^2}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\widehat{\mathbf{I}}_s^1\| + \|\widehat{\mathbf{I}}_s^1\|.$$

We can use the expression (4.32) (see proposition 4.1.5) of the telegrapher equation at order 0. We obtain after such long calculus :

$$\|\partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^0\|^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^0\|^2 \leq C(|s|) \left[ \|\widehat{\mathbf{I}}_s\| + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}_s\| \right],$$

with  $C(|s|)$  a rational fraction of  $|s|$ . Then with (5.69) we have

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_\infty \widehat{\mathbf{V}}^2 \cdot \overline{\widehat{\mathbf{V}}^2} + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_\infty \widehat{\mathbf{I}}^2 \cdot \overline{\widehat{\mathbf{I}}^2} \leq \frac{1}{\left(\eta + \min\left(\frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}\right)\right)^2} \tilde{K}(|s|) \left[ \|\widehat{\mathbf{I}}_s\| + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}_s\| \right],$$

with  $\tilde{C}(|s|)$  a rational fraction of  $|s|$ . To conclude we have

$$\max(\mathcal{E}_V, \mathcal{E}_I) \leq \frac{1}{\left(\eta + \min\left(\frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}\right)\right)^2} K(|s|) \left[ \|\widehat{\mathbf{I}}_s\| + \|\partial_3 \widehat{\mathbf{I}}_s\| \right],$$

with  $K(|s|)$  a rational fraction of  $|s|$ . It can be proved that there exists finite integers  $K, K'$  such that

$$K(|s|) \leq C \left( \sum_{k=-K'}^K |s|^k \right).$$

Then with (5.74), (5.14, 5.16a, 5.16b, 5.17, 5.55, 5.56), proposition 5.2.1 and 5.4.5, we have

$$\begin{cases} \widehat{e}_T = \sum_{q=1}^Q \mathcal{V}_q \nabla \widehat{\varphi}_{e,q}, \\ \widehat{e}_3 = \delta \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\mathcal{V}_q \varphi_{e,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ (\widehat{Z}_m)_{q,q'} \mathcal{I}_q \varphi_{m,q'} \right] \right) + \delta^3 \left( \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\widehat{V}_q^2 \varphi_{e,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ (\widehat{Z}_m)_{q,q'} \widehat{I}_q^2 \varphi_{m,q'} \right] \right), \\ \widehat{h}_T = \sum_{q=1}^Q \mathcal{I}_q \widehat{\nabla} \widehat{\psi}_{m,q}, \\ \widehat{h}_3 = \delta \left\langle \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\mathcal{I}_q \psi_{m,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ (\widehat{Y}_e)_{q,q'} \mathcal{V}_q \psi_{e,q'} \right] \right\rangle_{\widehat{\mu}} + \delta^3 \left\langle \sum_{q=1}^Q \partial_3 [\widehat{I}_q^2 \psi_{m,q}] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ (\widehat{Y}_e)_{q,q'} \widehat{V}_q^2 \psi_{e,q'} \right] \right\rangle_{\widehat{\mu}}. \end{cases}$$

Thus the estimation on  $(e_T, e_3, h_T, h_3)$  is deduced from the one on  $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ .

**Theorem 5.5.2.** *There exists finite integers  $K, K'$  and a constant  $C$  depending only on the geometry and the coefficients  $\varepsilon, \mu, \sigma_e$  and  $\sigma_m$  such that*

$$\mathcal{E}^{err} + \mathcal{E}_{LC}^{err} \leq \frac{C \delta^3}{\left(\eta + \min\left(\frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}\right)\right)^4} \left[ \left\| \left( \sum_{k=-K'}^K |s|^k \right) \widehat{\mathbf{J}} \right\|^2 + \left\| \left( \sum_{k=-K'}^K |s|^k \right) \partial_3 \widehat{\mathbf{J}} \right\|^2 \right].$$

### 5.5.3 Second order effective model in time domain

Le Temps ne surprend pas le sage ;  
Mais du Temps le sage se rit,  
Car lui seul en connaît l'usage ;

Nerval, Le Temps

With the prior estimates (5.85), we can conclude for solution  $\mathbf{V}^{\delta,2}$  and  $\mathbf{I}^{\delta,2}$  in time domain which are the inverse Laplace transform of  $\widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2}$  and  $\widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}$ . More precisely with the theorem 12.2.1 if the sources satisfy

$$\mathbf{I}_s^\delta, \mathbf{V}_s^2 \in L^2(]0, T[, L^2(\mathbb{R})),$$

then for any long time  $T > 1$ , there exists two constants<sup>2</sup>  $K_2$  and  $\alpha_-$  independent of  $T$  such that

$$\|\mathbf{V}^{\delta,2}\|_{L^2([0,T[,L^2(\mathbb{R}))})} + \|\mathbf{I}^{\delta,2}\|_{L^2([0,T[,L^2(\mathbb{R}))})} \leq K_2 \left( \frac{T}{1 + \alpha_- T} \right) \left[ \|\mathbf{I}_s^\delta\|_{L^2(]0,T[,L^2(\mathbb{R}))})} + \delta^2 \|\mathbf{V}_s^2\|_{L^2(]0,T[,L^2(\mathbb{R}))})} \right]$$

and with corollary 12.2.1 if the sources satisfy

$$\mathbf{I}_s^\delta, \mathbf{V}_s^2 \in L^2(]0, T[, L^2(\mathbb{R})),$$

then there exists a constant  $K_\infty$  also independent  $T$  such that

$$\|\mathbf{V}^{\delta,2}\|_{L^\infty([0,T[,L^2(\mathbb{R}))})} + \|\mathbf{I}^{\delta,2}\|_{L^\infty([0,T[,L^2(\mathbb{R}))})} \leq K_\infty \left( \frac{T}{1 + \alpha_- T} \right) \left[ \|\mathbf{I}_s^\delta\|_{H^1(]0,T[,L^2(\mathbb{R}))})} + \delta^2 \|\mathbf{V}_s^2\|_{H^1(]0,T[,L^2(\mathbb{R}))})} \right].$$

To express the improved telegrapher's equation in time, we use the same approach as in chapter 4 when we introduce the kernel memories  $\mathbf{K}_e$  and  $\mathbf{K}_m$ , but since we don't find a trivial explicit expression of the memories kernels for the new effective matrices in the general case. However, we find an explicit time formulation of our new effective model in the non losses case and the cylindrical one. In the second case we think that it is easier to use an algorithm of the inverse Laplace transform than to simulate in time domain. We will just describe the non losses case since the losses are often negligible all the more as we will see in the part III that the presence of conductivities is not the usual physical way to modelize the losses in a coaxial cable. If the electric and magnetic conductivities are smaller than  $\delta^2$  then we can do some simplifications

$$\widehat{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon \text{ and } \widehat{\mu} \rightarrow \mu.$$

Thus the harmonic potentials become

$$\widehat{\varphi}_{e,j}, \widehat{\psi}_{m,j} \rightarrow \varphi_{e,j}^\infty, \psi_{m,j}^\infty \quad \text{and} \quad \widehat{\varphi}_{m,j}, \widehat{\psi}_{e,j} \rightarrow \varphi_{m,j}^\infty, \psi_{e,j}^\infty.$$

and the new effective matrices  $\gamma_Y^\infty, \gamma_Z^\infty, \eta_Y^\infty, \eta_Z^\infty, \chi_Y^\infty, \chi_Z^\infty$  become the same as  $\widehat{\eta}_Y, \widehat{\eta}_Z, \widehat{\eta}_Y, \widehat{\eta}_Z, \widehat{\chi}_Y, \widehat{\chi}_Z$  but with  $\varphi_{e,j}^\infty, \psi_{m,j}^\infty, \varphi_{m,j}^\infty, \psi_{e,j}^\infty$  instead of  $\widehat{\varphi}_{e,j}, \widehat{\psi}_{m,j}, \widehat{\varphi}_{m,j}, \widehat{\psi}_{e,j}$ . There are no difficulties in writing the effective telegrapher's equation of order 2 (5.73) in time domain

$$\begin{cases} [(\mathbf{C}^\infty + \delta^2 Y_g^{2,\infty}) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_Y^\infty \partial_3)] \partial_t \mathbf{V}^\delta + \partial_3 \mathbf{I}^\delta &= \mathbf{I}_s^{\delta,\infty}, \\ [(\mathbf{L}^\infty + \delta^2 Z_g^{2,\infty}) Id - \delta^2 \partial_3 (\widehat{\gamma}_Z^\infty \partial_3)] \partial_t \mathbf{I}^\delta + \partial_3 \mathbf{V}^\delta &= \delta^2 \mathbf{V}_s^{2,\infty}. \end{cases}$$

## 5.6 Concentric composite coaxial cable case

As in the section 4.4, we will consider a concentric composite coax-cable (one hole  $Q = 1$ ) i-e  $\Omega$  is made of  $N$  layer  $\Omega^n$  which surround the inner wire and such that the inner boundary and the outer one are the  $(N - 1)$  closed surfaces of discontinuity for the characteristic coefficients  $\varepsilon, \mu, \sigma_e$  and  $\sigma_m$  that are supposed scalar and constant equal to  $\varepsilon^n, \mu^n, \sigma_e^n$  and  $\sigma_m^n$  in each layer  $\Omega^n$ .

As we seen in the section 4.4, it is easy to compute the electrical admittance and impedance  $\widehat{\mathbf{Z}}_m$  since they are invariant by conformal map. More precisely, the proposition 4.4.2 says that

$$\widehat{\mathbf{Z}}_m = \sum_{n=1}^N \left( \mu^n + \frac{\sigma_m^n}{s} \right) \text{Ind}_{S_{x_3}^n} (S_{x_3}^{(n-1)}) \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{Y}}_e = \frac{1}{\sum_{n=1}^N \left( \varepsilon^n + \frac{\sigma_e^n}{s} \right)^{-1} \text{Ind}_{S_{x_3}^n} (S_{x_3}^{(n-1)})}$$

2.  $\alpha_- = \min \left( \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+} \right)$



In the same way, we will use the invariance by preserving volume map to calculate the new effective matrices  $\hat{\eta}_Y, \hat{\eta}_Z, \hat{\chi}_Y, \hat{\chi}_Z$ . We will denote by  $V_{x_3}^n$  the volume of each layer  $S_{x_3}^n$ . We could construct  $N$  maps preserving volume elements such that it transforms each layer  $S_{x_3}^K$  into an annulus of the same volume by this recurrent way :

- the layer  $S_{x_3}^N$  have the same volume than the annulus

$$C^N := C \left( r_-^N := \sqrt{(d_+^*)^2 - \frac{V_{x_3}^n}{\pi}}, r_+^N := d_+^* \right)$$

- the layer  $S_{x_3}^{N-1}$  have the same volume than the annulus

$$C^{N-1} := C \left( r_-^{N-1} := \sqrt{(r_+^{N-1})^2 - \frac{V_{x_3}^n}{\pi}}, r_+^{N-1} := r_-^N \right)$$

with  $C(r_-, r_+)$  the annulus of inner and outer radius  $r_-$  and  $r_+$ .

In the geometry  $\tilde{C} = \bigcup_{n=1}^N C^n$ , the conjugated harmonic potentials are easy to compute

$$\hat{\psi}_m = \hat{\psi}_e = 1 - \frac{\theta}{2\pi} \implies \hat{\eta}_Z = 0.$$

The harmonic potentials are most difficult to compute. We just give the results and the intermediary steps being left to the reader. We have for  $\hat{\varphi}_e$  (the formulae are the same  $\hat{\varphi}_m$  with  $\hat{\mu}^{-1}$  instead of  $\hat{\varepsilon}$ ) :

$$\varphi_e \Big|_{S_{x_3}^n} = A_e^n \ln(r) + B_e^n \quad \text{with} \quad A_e^n = \left[ \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\varepsilon}^n}{\hat{\varepsilon}^k} \ln \left( \frac{r_+^{k-1}}{r_+^k} \right) \right]^{-1}$$

and the coefficients  $B_e^n$  are given by the linear system :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} 1 - A_e^1 \ln r_+^0 \\ \vdots \\ A_e^{n-1} \ln(r_+^{n-1}) + A_e^{n+1} \ln(r_+^{n+1}) - A_e^n \ln(r_+^{n-1} r_+^{n+1}) \\ \vdots \\ -A_e^N \ln(r_+^N) \end{pmatrix}.$$

So we have

$$\hat{\eta}_Y = \sum_{n=1}^N |A_e^n - A_m^n|^2 [r_+^n \ln^2 r_+^n - r_-^n \ln^2 r_-^n] + 2 \Re((A_e^n - A_m^n)(B_e^n - B_m^n)) [r_+^n \ln r_+^n - r_+^n - r_-^n \ln r_-^n + r_-^n] + |B_e^n - B_m^n|^2 [r_+^n - r_-^n]$$

# ERROR ESTIMATES BETWEEN THE TELEGRAPHER'S MODELS AND THE MAXWELL'S THEORY

---

In the previous chapters, thanks to a formal asymptotic expansion with respect to a small parameter  $\delta$  representing the transverse dimension, we derived a simplified 1D effective model of a multi-conductors coaxial cable (a cable surrounding several inner-wires), called the telegrapher's model, from the original Maxwell's theory. The present chapter is devoted to the rigorous justification of our formal asymptotic expansion. More than a simple convergence theorem, we aim at establishing an error estimate between the "exact" solution of the full 3D Maxwell's equation and the "approximated" telegrapher's model. We focus on a simpler case than the general 1D telegrapher model we described in the previous chapter, as the cable will be cylindrical. The difficulties of a non cylindrical case are mentioned. A first step toward this goal was done in [40] but it only deals with non lossy and homogeneous cable, more precisely the characteristic coefficients were not allowed to vary longitudinally.

## 6.1 Introduction

We shall consider the electromagnetic fields

$$\widehat{E}^\delta = \begin{pmatrix} \widehat{E}_T^\delta \\ \widehat{E}_3^\delta \end{pmatrix}, \widehat{H}^\delta = \begin{pmatrix} \widehat{H}_T^\delta \\ \widehat{H}_3^\delta \end{pmatrix} \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$$

solution of the rescaled Maxwell's

$$\begin{cases} s \widehat{\varepsilon}^\delta \widehat{E}^\delta - \mathbf{curl}_\delta \widehat{H}^\delta = \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta, & \text{in } \Omega, \\ s \widehat{\mu}^\delta \widehat{H}^\delta + \mathbf{curl}_\delta \widehat{E}^\delta = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div}_\delta (s \widehat{\varepsilon}^\delta \widehat{E}^\delta) = \mathbf{Div}_\delta \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div}_\delta (s \widehat{\mu}^\delta \widehat{H}^\delta) = 0, & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

with the boundaries conditions

$$\widehat{E}^\delta \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{with} \quad \widehat{H}^\delta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad (6.2)$$

where the 3D "scaled" operators are

$$\mathbf{curl}_\delta \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 \mathbf{T} + \delta^{-1} \mathbf{rot} \varphi \\ \delta^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{Div}_\delta \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} := \delta^{-1} \mathbf{div} \mathbf{T} + \partial_3 \varphi,$$

in coaxial and multi-conductors cables, that is to say a lossy dielectric material  $\Omega$ , surrounding  $Q$  perfect conducting wires, and that is for simplicity's sake cylindrical.

### 6.1.1 The general approach

We will explain the general approach in the case of a sole inner wire ( $Q = 1$ ). We are interested in the electromagnetic fields  $(\widehat{E}^\delta, \widehat{H}^\delta)$  solution of the full rescaled Maxwell's equations in the cable given in the equations (6.1, 6.2). As a consequence of the Helmholtz decompositions of the theorem 1.2.1, it is possible to introduce the following decompositions

$$\widehat{E}^\delta = \widehat{V}^\delta \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\varphi}_e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{E}_T^{R,\delta} \\ \widehat{E}_3^\delta \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \widehat{H}^\delta = \widehat{I}^\delta \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\psi}_m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{H}_T^{R,\delta} \\ \widehat{H}_3^\delta \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

where  $(\widehat{\varphi}_e, \widehat{\psi}_m)$  are harmonic potentials and  $(V^\delta, I^\delta)$  are respectively the electrical potential and current. The fields  $(E_T^{R,\delta}, H_T^{R,\delta})$  are "residual" transverse fields and the functions  $(E_3^\delta, H_3^\delta)$  are the longitudinal component of the electric and magnetic fields. Instead of solving the full rescaled Maxwell's equations, we have proposed in the chapters 4 and 5 three models that enable the construction of  $(\widehat{E}^{\delta,p}, \widehat{H}^{\delta,p})$  for  $p = 0, 1, 2$  by the following decompositions

$$\widehat{E}^{\delta,p} = \widehat{V}^{\delta,p} \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\varphi}_e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{E}_T^{R,\delta,p} \\ \widehat{E}_3^{\delta,p} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \widehat{H}^{\delta,p} = \widehat{I}^{\delta,p} \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\psi}_m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{H}_T^{R,\delta,p} \\ \widehat{H}_3^{\delta,p} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

(where all the terms are defined in the chapter 4 and 5 and will be recalled in the section 6.3), that are supposed to be approximations of the electromagnetic fields  $(\widehat{E}^\delta, \widehat{H}^\delta)$ . Such models are obtained via asymptotic analysis thank to a small parameter  $\delta$  that represent the transverse dimension of the cable. Our objective is prove that  $(\widehat{E}^{\delta,p}, \widehat{H}^{\delta,p})$  are indeed approximations of  $(\widehat{E}^\delta, \widehat{H}^\delta)$  when  $\delta$  is small enough. More precisely, we expect to have

$$\|\widehat{E}^\delta - \widehat{E}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^{p+1}) \quad \text{and} \quad \|\widehat{H}^\delta - \widehat{H}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^{p+1}).$$

To do that, we will need some spatial regularity of the characteristic coefficients (see hypothesis 6.1.3) and the source term (see hypothesis 6.1.4). The error estimates that we want to obtain will take the form

$$\|\widehat{E}^\delta - \widehat{E}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta^{p+1} C(s) \left[ \|J^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{div} J_{s,T}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3 J_{s,3}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3^2 J_{s,3}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right], \quad (6.5)$$

and so on for  $\widehat{H}^\delta - \widehat{H}^{\delta,p}$ , where  $C(s)$  does not depend of  $\delta$ . We will keep track of the dependance on  $s$  of the constant  $C(s)$  and of all the constants appearing in each estimation because we aim at proving our error estimates not only in the frequency domain but also in the time domain. Indeed to use (6.5) to obtain an estimation in time domain the dependance on  $s$  must be detailed. More precisely we are interested in knowing if the approximation models we proposed are valid in time domain for time  $T > 1$ . To return to the time domain from the study we will present in the Laplace domain, we use the theorem 12.2.1 and the corollary 12.2.1. More precisely, from estimations of the form

$$\|\widehat{u}(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \sum_{p=0}^P \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^p} \right) \left( \sum_{k=-K'}^K |s|^k \right) \|\widehat{J}(s)\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.6)$$

in the Laplace domain  $s = \eta + i\omega$  where  $C$  and  $\alpha_-$  are constants independent of  $s$ , we can deduce an estimation in time domain of the form

$$\|u\|_{L^2([0,T],L^2(\Omega))} \leq C \left( \frac{T}{1 + \alpha_- T} \right)^P \left( \sum_{k=0}^K \|\partial_t^k J\|_{L^2([0,T],L^2(\Omega))} + \sum_{k'=1}^{K'} \|I^{k'} J\|_{L^2([0,T],L^2(\Omega))} \right), \quad (6.7)$$

where  $C$  is another constant independent of  $T$  and where  $I^k$  stands for the integrator of power  $k$ , that is to say

$$[I^k u](t) = \int_0^t \int_0^{t_{k-1}} \dots \int_0^{t_1} u(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{k-1}.$$

The dependance on  $s$  of the bounds occurring in the estimation in the Laplace domain (6.6) has two main influences in the estimation in time domain (6.7) :

- terms in  $\frac{1}{(\eta + \alpha_-)^p}$  imply powers of  $\frac{T}{1 + \alpha_- T}$ ,
- terms in  $|s|^k$  imply differentiation in time (therefor in our context it leads to time regularity assumptions on the source).

### 6.1.2 The outline of the chapter

In section 6.2, we present some **estimations on the solutions of the rescaled full Maxwell's equations**. More precisely :

1. We first give an estimation of  $\widehat{E}^\delta$  and  $\widehat{H}^\delta$  in the  $L^2(\Omega)$  norm (see lemma 6.2.1).
2. Then, as it is relatively standard for the Maxwell equation, an estimation (again in the  $L^2(\Omega)$  norm) of the rotational of the transverse electromagnetic fields  $(\widehat{E}_T^\delta, \widehat{H}_T^\delta)$  is given (see lemma 6.2.2).
3. As it will be clear later, our analysis requires estimations of the derivatives with respect to  $x_3$  of the electromagnetic fields  $(\widehat{E}^\delta, \widehat{H}^\delta)$ . More precisely we need estimations of  $\partial_3 \widehat{E}^\delta$  and  $\partial_3 \widehat{H}^\delta$  in the  $L^2(\Omega)$  norm (see proposition 6.2.1). These estimations are simple consequences of the Maxwell equations, they are valid only after assuming extra-regularity on the parameters of the equations (i.e. coefficient and source).
4. As a consequence of the estimates obtained in the previous point, we deduce estimations on the divergence of the transverse electromagnetic fields  $(\widehat{E}_T^\delta, \widehat{H}_T^\delta)$  in the  $L^2(\Omega)$  norm (see lemma 6.2.3).
5. We can then derive an estimate of the transverse gradients of the longitudinal electromagnetic fields  $(\nabla \widehat{E}_3^\delta, \nabla \widehat{H}_3^\delta)$  (see lemma 6.2.4). This estimate be of order  $\delta$  and reads, formally,

$$\|\nabla \widehat{E}_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \widehat{H}_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta).$$

6. Finally, we justify decompositions of the form (6.3) (note that in what follows we focus on multi-conductors cables ) and give the corresponding estimation of the electrical potential  $\widehat{V}^\delta$  and current  $\widehat{I}^\delta$  (see theorem 6.2.2) in the  $L^2(\mathbb{R})$  norm.

In the **third section**, we will recall the **approximation models** we proposed in the previous chapters, that is to say how to construct the approximate electromagnetic fields  $(\widehat{E}^{\delta,p}, \widehat{H}^{\delta,p})$  and also the electrical potential and current  $\widehat{V}^{\delta,p}$  and  $\widehat{I}^{\delta,p}$  (they are 1d-fields). As explained in the previous chapters, these approximate models are deduced from an asymptotic expansion. We introduce the truncations of asymptotic expansions of the form

$$\widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \widehat{E}^k, \quad \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \widehat{H}^k, \quad \widehat{V}_{\text{trunc}}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \widehat{V}^k, \quad \widehat{I}_{\text{trunc}} := \sum_{k=0}^p \delta^k \widehat{I}^k. \quad (6.8)$$

They aim at being good approximations of the approximate models  $(\widehat{E}^{\delta,p}, \widehat{H}^{\delta,p})$  and the electromagnetic fields  $(\widehat{E}^\delta, \widehat{H}^\delta)$

$$\widehat{E}^{\delta,p} \simeq \widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p} \simeq E^\delta, \quad \widehat{H}^{\delta,p} \simeq \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p} \simeq H^\delta, \quad \widehat{V}^{\delta,p} \simeq \widehat{V}_{\text{trunc}}^{\delta,p} \simeq V^\delta, \quad \widehat{I}^{\delta,p} \simeq \widehat{I}_{\text{trunc}}^{\delta,p} \simeq I^\delta.$$

in the sense that we have the following error estimates

- **modeling error estimation**  $\|\widehat{E}^{\delta,p} - \widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{H}^{\delta,p} - \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^{p+1}), \quad (6.9a)$

- **truncature error estimation**  $\|\widehat{E}^\delta - \widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{H}^\delta - \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^{p+1}), \quad (6.9b)$

- **global error estimation**  $\|\widehat{E}^\delta - \widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{H}^\delta - \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^{p+1}), \quad (6.9c)$

and so on for  $\widehat{V}^{\delta,p}, \widehat{V}_{\text{trunc}}^{\delta,p}, V^\delta$  and  $\widehat{I}^{\delta,p}, \widehat{I}_{\text{trunc}}^{\delta,p}, I^\delta$ . The global estimation (6.9c) is the expected estimation and rationale behind this chapter. The truncature error estimation (6.9b) is postponed to the next section. Finally the modeling error estimation (6.9a) is the object of this section.

1. We first give the cascade of equations that determine  $\widehat{E}^p$  and  $\widehat{H}^p$  and give a similar decomposition as in (6.4), more precisely

$$\widehat{E}^p = \widehat{V}^p \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\varphi}_e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{E}_T^{R,p} \\ \widehat{E}_3^p \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \widehat{H}^p = \widehat{I}^p \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\psi}_m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{H}_T^{R,p} \\ \widehat{H}_3^p \end{pmatrix},$$

and so

$$\widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p} = \widehat{V}_{\text{trunc}}^{\delta,p} \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\varphi}_e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{E}_{\text{trunc},T}^{R,\delta,p} \\ \widehat{E}_{\text{trunc},3}^{\delta,p} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p} = \widehat{I}_{\text{trunc}}^{\delta,p} \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\psi}_m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{H}_{\text{trunc},T}^{R,\delta,p} \\ \widehat{H}_{\text{trunc},3}^{\delta,p} \end{pmatrix}.$$

We give the equations satisfied by the electrical potential  $\widehat{V}^p$  and current  $\widehat{I}^p$ , the residual terms  $\widehat{E}_T^{R,p}$  and  $\widehat{H}_T^{R,p}$ , as well as by the longitudinal longitudinal electromagnetic fields  $\widehat{E}_3^p$  and  $\widehat{H}_3^p$ .

2. Then we give stability relations of the type

$$\|\widehat{V}^p\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{I}^p\|_{L^2(\Omega)} = O(1), \quad \|\widehat{E}^{R,p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{H}^{R,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(1), \quad \|\widehat{E}_3^p\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{H}_3^p\|_{L^2(\Omega)} = O(1)$$

and

$$\|\partial_3 \widehat{V}^p\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3 \widehat{I}^p\|_{L^2(\Omega)} = O(1), \quad \|\partial_3 \widehat{E}^{R,p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3 \widehat{H}^{R,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(1),$$

$$\|\partial_3 \widehat{E}_3^p\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3 \widehat{H}_3^p\|_{L^2(\Omega)} = O(1).$$

3. Finally, we will give the approximation models  $(\widehat{E}^{\delta,p}, \widehat{H}^{\delta,p})$  and the modeling error estimation (6.9a).

The **fourth section** is devoted to the truncature estimation (6.9b) in the form of (6.5). We will present the main results, that is to say the errors estimates in the Laplace domain and the related simplifications in the case where the cable's physical medium is not dissipative or invariant along the longitudinal direction. The proof is done for  $p = 0$  and recursively for  $p = 1, 2$  using the following steps (in these steps,  $p$  is fixed and we assume that estimations of the form (6.5) and all intermediate estimations are already obtained for  $p - 1$  with the convention  $\widehat{E}^k = \widehat{H}^k = 0$  for  $k < 0$ ) :

1. We first give an estimation of the form

$$\|\widehat{E}^\delta - \widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^p) \quad \text{and} \quad \|\widehat{H}^\delta - \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^p).$$

Those estimations are not the ones we expect ( $O(\delta^p)$  instead of  $O(\delta^{p+1})$ ) all the more so as they are not sufficient to ensure convergence of the limit truncated model  $(\widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,0}, \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,0})$  (it is therefore a simple consequence of the estimation of the solution of the full Maxwell equation for  $p = 0$ ).

2. Then we obtain, see lemma 6.4.1, the estimation of

$$\widehat{E}_3^\delta - \widehat{E}_{\text{trunc},3}^{\delta,p} \quad \text{and} \quad \widehat{H}_3^\delta - \widehat{H}_{\text{trunc},3}^{\delta,p}$$

at the expected order, namely  $O(\delta^{p+1})$ . To do so we use the Poincaré inequality (see lemma 1.5.1). To obtain such estimation, we need the estimations of  $\widehat{E}_T^\delta - \widehat{E}_{\text{trunc},T}^{\delta,p}$  and  $\widehat{H}_T^\delta - \widehat{H}_{\text{trunc},T}^{\delta,p}$ . We will also give in this subsection an estimation of

$$\partial_3^K \widehat{E}_3^\delta - \partial_3^K \widehat{E}_{\text{trunc},3}^{\delta,p} \quad \text{and} \quad \partial_3^K \widehat{H}_3^\delta - \partial_3^K \widehat{H}_{\text{trunc},3}^{\delta,p}$$

at order  $O(\delta^{p+1})$  for  $K = 1, 2, 3$  that we will thereafter need. To obtain such estimation we need estimations of the form

$$\|\partial_3^K \widehat{E}^\delta - \partial_3^K \widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^p) \quad \text{and} \quad \|\partial_3^K \widehat{H}^\delta - \partial_3^K \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p}\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta^p).$$

3. Then we look for an estimations of

$$\widehat{E}_T^{R,\delta} - \widehat{E}_{\text{trunc},T}^{R,\delta,p} \quad \text{and} \quad \widehat{H}_T^{R,\delta} - \widehat{H}_{\text{trunc},T}^{R,\delta,p}$$

at the expected order  $O(\delta^{p+1})$  by the use of the Poincaré-Friedrichs inequality of the theorems 1.5.1 and 1.5.2. To do it we need estimations of

$$\begin{cases} \text{rot} \left( \widehat{E}_T^{R,\delta} - \widehat{E}_{\text{trunc},T}^{R,\delta,p} \right), \\ \text{div} \left( \widehat{E}_T^{R,\delta} - \widehat{E}_{\text{trunc},T}^{R,\delta,p} \right), \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \text{rot} \left( \widehat{H}_T^{R,\delta} - \widehat{H}_{\text{trunc},T}^{R,\delta,p} \right), \\ \text{div} \left( \widehat{H}_T^{R,\delta} - \widehat{H}_{\text{trunc},T}^{R,\delta,p} \right), \end{cases}$$

The estimation of the divergence need an estimation of at least order one of

$$\partial_3 \widehat{E}_3^\delta - \partial_3 \widehat{E}_{\text{trunc},3}^{\delta,p} \quad \text{and} \quad \partial_3 \widehat{H}_3^\delta - \partial_3 \widehat{H}_{\text{trunc},3}^{\delta,p}$$

that we have talked about in the previous point.

4. The estimation of  $\widehat{V}^\delta - \widehat{V}_{\text{trunc}}^{\delta,p}$  and  $\widehat{I}^\delta - \widehat{I}_{\text{trunc}}^{\delta,p}$  is the most difficult task. To succeed we need an estimation of

$$\partial_3 \widehat{E}^{R,\delta} - \partial_3 \widehat{E}_{\text{trunc}}^{R,\delta,p} \quad \text{and} \quad \partial_3 \widehat{H}^{R,\delta} - \partial_3 \widehat{H}_{\text{trunc}}^{R,\delta,p}.$$

at order  $O(\delta^{p+1})$ . To do that we will again use the Poincaré-Friedrichs inequalities with a train of though quite similar to the second point.

In the **fifth section**, we will collect all the estimations given in the previous section in order to prove the main theorem, that is to say the (truncature) estimations of  $\widehat{E}^\delta - \widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p}$  and  $\widehat{H}^\delta - \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p}$  in the form of (6.5). We will also give an explicit bound of the constant  $C(s)$  for the estimation

$$\|E^\delta - E^0\|_{L^2(\Omega)} + \|H^\delta - H^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta C(s) \left[ \|\mathbf{J}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3 \mathbf{J}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right].$$

Then we will give the estimations in time domain thanks theorem 12.2.1.

The **last section** deals with **some generalizations**. Firstly the non-cylindrical case and secondly the estimation for each orders.

### 6.1.3 Some assumptions and notations

**Hypothesis 6.1.1.** *The cable  $\Omega$  is cylindrical ( $g = 0$ ), that is to say  $\Omega = S \times \mathbb{R}$  with  $S \subset \mathbb{R}^2$  a bounded plane surface with  $Q$  holes with lipschitzian boundary.*

The characteristic coefficients, being the electric permittivity, magnetic permeability, electric and magnetic conductivities (responsible for loss in the transmission line), satisfy the usual positivity assumptions.

**Hypothesis 6.1.2.** *The characteristic coefficients satisfy*

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_- \leq \varepsilon(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_+, \quad 0 < \mu_- \leq \mu(\mathbf{x}) \leq \mu_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 \leq \sigma_{e,-} \leq \sigma_e(\mathbf{x}) \leq \sigma_{e,+}, \quad 0 \leq \sigma_{m,-} \leq \sigma_m(\mathbf{x}) \leq \sigma_{m,+}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (6.10)$$

In order to simplify our notation we denote  $\widehat{\varepsilon}$  and  $\widehat{\mu}$  the effective permittivity and permeability

$$\widehat{\varepsilon} := \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_e}{s} \right) \quad \text{and} \quad \widehat{\mu} := \mu \left( 1 + \frac{\alpha_m}{s} \right) \quad \text{with} \quad \alpha_e := \frac{\sigma_e}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad \alpha_m := \frac{\sigma_m}{\mu}, \quad (6.11)$$

with<sup>1</sup>  $s = (\eta + i\omega) \in \mathbb{C}_0$  the Laplace parameter.

We denote the bounds by

$$\alpha_{e,-} := \frac{\sigma_{e,-}}{\varepsilon_+}, \quad \alpha_{m,-} := \frac{\sigma_{m,-}}{\mu_+}, \quad \alpha_{e,+} := \frac{\sigma_{e,+}}{\varepsilon_-}, \quad \alpha_{m,+} := \frac{\sigma_{m,+}}{\mu_-}$$

and

$$\alpha_- := \min(\alpha_{e,-}, \alpha_{m,-}), \quad \alpha_+ := \max(\alpha_{e,+}, \alpha_{m,+}), \quad (6.12)$$

Remark that  $\alpha_-$  and  $\alpha_+$  are related to the loss in the cable. In the non-lossy case we have  $\alpha_- = \alpha_+ = 0$ . To further simplify some notations we introduce

$$\beta_- := \min\left(\frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+}, \frac{\mu_-}{\mu_+}\right), \quad \beta_+ := \max\left(\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-}, \frac{\mu_+}{\mu_-}\right). \quad (6.13)$$

The coefficients  $\beta_-$  and  $\beta_+$  account for the heterogeneity of the physical coefficients (permittivity and permeability) of the cable. We introduce the velocity of the electromagnetic's wave

$$c := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{that satisfies the bounds} \quad c_- = \min_{\Omega} c \quad \text{and} \quad c_+ = \max_{\Omega} c. \quad (6.14)$$

We will denote the logarithmic increment of the characteristic coefficients along the longitudinal coordinate  $x_3$  by

$$\varepsilon' = \frac{\partial_3 \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \mu' = \frac{\partial_3 \mu}{\mu}, \quad \alpha_e' = \frac{\partial_3 \sigma_e}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad \alpha_m' = \frac{\partial_3 \sigma_m}{\mu}$$

and the second order

$$\varepsilon'' = \frac{\partial_3^2 \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \mu'' = \frac{\partial_3^2 \mu}{\mu}, \quad \alpha_e'' = \frac{\partial_3^2 \sigma_e}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad \alpha_m'' = \frac{\partial_3^2 \sigma_m}{\mu}$$

and so on for any orders  $k$  for which such derivatives still exist

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{\partial_3^k \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \mu^{(k)} = \frac{\partial_3^k \mu}{\mu}, \quad \alpha_e^{(k)} = \frac{\partial_3^k \sigma_e}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad \alpha_m^{(k)} = \frac{\partial_3^k \sigma_m}{\mu}$$

The  $x_3$  dependence of the characteristic coefficients must satisfy

1.  $\mathbb{C}_0 := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0\}$

**Hypothesis 6.1.3.** We have the following bounds

$$\begin{aligned} |\varepsilon'(\mathbf{x})| \leq \varepsilon'_+ \quad , \quad |\mu'(\mathbf{x})| \leq \mu'_+ \quad , \quad |\alpha'_e(\mathbf{x})| \leq \alpha'_{e,+} \quad \text{and} \quad |\alpha'_m(\mathbf{x})| \leq \alpha'_{m,+} \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ |\varepsilon''(\mathbf{x})| \leq \varepsilon'_+ \quad , \quad |\mu''(\mathbf{x})| \leq \mu'_+ \quad , \quad |\alpha''_e(\mathbf{x})| \leq \alpha'_{e,+} \quad \text{and} \quad |\alpha''_m(\mathbf{x})| \leq \alpha'_{m,+} \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

We denote

$$\beta'_+ = \max(\varepsilon'_+, \mu'_+) \quad , \quad \alpha'_- = \min(\alpha'_{e,+}, \alpha'_{m,+}) \quad \text{and} \quad \alpha'_+ = \max(\alpha'_{e,+}, \alpha'_{m,+}), \quad (6.15)$$

in order to highlight the influence of the characteristic coefficients along the cables.

The sole source of the problem

$$\hat{\mathbf{J}}_s^\delta = \begin{pmatrix} \hat{J}_{s,T}^\delta \\ \hat{J}_{s,3}^\delta \end{pmatrix},$$

namely the current density, must satisfy the spatial regularity assumptions given below.

**Hypothesis 6.1.4.** We assume that

$$\hat{J}_{s,T}^\delta \in H(\mathbf{div}, S), \quad \partial_3 \hat{J}_{s,T}^\delta \in L^2(\Omega) \quad \text{and} \quad \hat{J}_{s,3}^\delta, \partial_3 \hat{J}_{s,3}^\delta \in L^2(\Omega).$$

We introduce some definitions that enable us to keep track of the dependence in  $s$  - in a form compatible with (6.6) - in the estimations while shortening the presentation.

**Definition 6.1.1.** (i) We say that a constant  $C \in \mathbb{R}^+$  depends only of the physical and geometrical properties of the cable if it only depends on the physical constants

$$c_-, c_+, \beta_-, \beta_+, \alpha_-, \alpha_+, \beta'_+, \beta''_+$$

and the geometry of the cross section  $S$ .

(ii) A rational function  $\mathbb{K}$  belongs to the set  $\mathbb{K}$  if it is of the form

$$|\mathbb{K}(X)| \leq \sum_{k=-K'}^K a_k |X^k|$$

with  $a_k$  a constant depending only of the physical and geometrical properties of the cable (in the sense of the first point (i)) and  $K, K'$  finite integers.

**Remark 6.1.1.** In [40] the errors estimates are obtained in simpler case :

- there are no losses, i-e  $\alpha_+ = 0$ ,
- the characteristic coefficients are homogeneous in the longitudinal direction, i-e  $\beta'_+ = 0$ ,
- the transverse source is free-divergence, i-e  $\mathbf{div} \hat{J}_{s,T}^\delta = 0$ ,
- the longitudinal source is null, i-e  $\hat{J}_{s,3}^\delta = 0$ ,
- the cable has a sole inner wire, i-e  $Q = 1$ .

## 6.2 Estimates for scaled Maxwell's equations

We already know that there exists a unique solution

$$\hat{E}^\delta = \begin{pmatrix} \hat{E}_T^\delta \\ \hat{E}_3^\delta \end{pmatrix}, \quad \hat{H}^\delta = \begin{pmatrix} \hat{H}_T^\delta \\ \hat{H}_3^\delta \end{pmatrix} \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$$

to the rescaled Maxwell's equations (see theorem 3.3.1). In fact, we will prove that the electromagnetic fields live a more restrictive functional space

**Theorem 6.2.1.** The electromagnetic fields  $\hat{E}^\delta$  and  $\hat{H}^\delta$  solution of (6.1, 6.2) are in the functional spaces

$$\hat{E}_T^\delta, \hat{H}_T^\delta \in L^2(\mathbb{R}, H(\mathbf{div}, \mathbf{rot}, S)) \quad \text{and} \quad \hat{E}_3^\delta, \hat{H}_3^\delta \in H^1(\Omega).$$

This theorem will be proven with the following three subsections. Before all, we want to recall the usual Green's formula (deduced from the ones of the appendix 10) for any  $\mathbf{T}, \mathbf{X} \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^2)$  and  $\varphi, \psi \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$

$$\int_{\Omega} \mathbf{curl}_\delta \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \psi \end{pmatrix} - \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \mathbf{curl}_\delta \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \psi \end{pmatrix} = - \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} \times \mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{n} \times \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \psi \end{pmatrix} \right) \times \mathbf{n} \quad (6.16)$$

### 6.2.1 Estimates for scaled Maxwell's equations

In this subsection we aim at giving an estimation of  $\widehat{E}^\delta$  and  $\widehat{H}^\delta$ .

**Lemma 6.2.1.** *The solutions of (6.1,6.2) satisfy the prior estimates*

$$\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}^\delta|^2 \leq \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2}{(\eta + \alpha_{e,-})^2} \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} \mu |\widehat{H}^\delta|^2 \leq \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2}{(\eta + \alpha_{e,-}) (\eta + \alpha_{m,-})}.$$

*Proof.* We integrate the first equation of (6.1) over  $\overline{\widehat{E}^\delta}$  and the conjugated form of second equation over  $\widehat{H}^\delta$  of (6.1), then add them and using the green formula (6.16)

$$s \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} |\widehat{E}^\delta|^2 + \overline{s} \int_{\Omega} \overline{\widehat{\mu}} |\widehat{H}^\delta|^2 = \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta \cdot \overline{\widehat{E}_T^\delta}.$$

Taking the real part of this energy equality, we have

$$(\eta + \alpha_{e,-}) \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}^\delta|^2 + (\eta + \alpha_{m,-}) \int_{\Omega} \mu |\widehat{H}^\delta|^2 \leq \left| \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta \cdot \overline{\widehat{E}_T^\delta} \right|. \quad (6.17)$$

Moreover using Cauchy-Schwarz inequality, we get

$$\left| \int_{\Omega} \widehat{j}_T \cdot \overline{\widehat{E}_T^\delta} \right| \leq \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}^\delta|^2}$$

so

$$\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}^\delta|^2 \leq \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2}{(\eta + \alpha_{e,-})^2}.$$

Then we have with (6.17)

$$(\eta + \alpha_{m,-}) \int_{\Omega} \mu |\widehat{H}^\delta|^2 \leq \left| \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta \cdot \overline{\widehat{E}_T^\delta} \right| \leq \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2}{(\eta + \alpha_{e,-})}.$$

□

**Remark 6.2.1.** *This result is also valid in the case of a more general hypothesis such as non cylindrical cable ( $g \neq 0$ ).*

### 6.2.2 Estimation of the rotational

The rotational is quite simple since

$$s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}_3^\delta - \delta^{-1} \operatorname{rot} \widehat{H}_T^\delta = \widehat{J}_{s,3}^\delta \quad \text{and} \quad s \widehat{\mu} \widehat{H}_3^\delta + \delta^{-1} \operatorname{rot} \widehat{E}_T^\delta = 0.$$

It is then used to prove the following lemma.

**Lemma 6.2.2.** *The solution of (6.1, 6.2) satisfies the prior estimates*

$$\sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\operatorname{rot} \widehat{H}_T^\delta|^2} \leq \delta \left[ \frac{\|(s + \alpha_{e,+}) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{(\eta + \alpha_{e,-})} + \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{J}_{s,3}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

and

$$\sqrt{\int_{\Omega} \mu^{-1} |\operatorname{rot} \widehat{E}_T^\delta|^2} \leq \delta \frac{\|(s + \alpha_{e,+}) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{(\eta + \alpha_{e,-}) (\eta + \alpha_{m,-})}}.$$



### 6.2.3 Estimation of the $x_3$ -derivative of the electromagnetic fields

**Proposition 6.2.1.** *We can differentiate with respect to the  $x_3$  variable the equation (6.1, 6.2)*

$$\left\{ \begin{array}{ll} s \widehat{\varepsilon}^\delta \partial_3 \widehat{E}^\delta - \mathbf{curl}_\delta \partial_3 \widehat{H}^\delta = \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta - s \partial_3 \widehat{\varepsilon}^\delta \widehat{E}^\delta, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ s \widehat{\mu}^\delta \partial_3 \widehat{H}^\delta + \mathbf{curl}_\delta \partial_3 \widehat{E}^\delta = -s \partial_3 \widehat{\mu}^\delta \widehat{H}^\delta, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{Div}_\delta (s \widehat{\varepsilon}^\delta \partial_3 \widehat{E}^\delta) = \mathbf{Div}_\delta \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta - \mathbf{Div}_\delta (s \partial_3 \widehat{\varepsilon}^\delta \widehat{E}^\delta), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{Div}_\delta (s \widehat{\mu}^\delta \partial_3 \widehat{H}^\delta) = -\mathbf{Div}_\delta (s \partial_3 \widehat{\mu}^\delta \widehat{H}^\delta), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{array} \right. \quad (6.18)$$

with the boundaries conditions :

$$\widehat{E}^\delta \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{with} \quad \widehat{H}^\delta \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6.19)$$

There exists a unique solution since the error estimates are bounded

$$\sqrt{\int_\Omega \varepsilon |\partial_3 \widehat{E}^\delta|^2 + \int_\Omega \mu |\partial_3 \widehat{H}^\delta|^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{(\eta + \alpha_-)} \left( \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} + |\beta'_+ s + \alpha'_+| \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{(\eta + \alpha_-)} \right).$$

*Proof.* We only give the proof for the energy estimates, the remainder being trivial. In the as the proof of the lemma 6.2.1, we begin with the energy equality

$$s \int_\Omega \widehat{\varepsilon} |\partial_3 \widehat{E}^\delta|^2 + \overline{s} \int_\Omega \widehat{\mu} |\partial_3 \widehat{H}^\delta|^2 = \int_\Omega \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta \cdot \overline{\partial_3 \widehat{E}_T^\delta} - \int_\Omega s \partial_3 \widehat{\varepsilon}^\delta \widehat{E}^\delta \cdot \overline{\partial_3 \widehat{E}_T^\delta} - \int_\Omega s \partial_3 \widehat{\mu}^\delta \widehat{H}^\delta \cdot \overline{\partial_3 \widehat{H}_T^\delta}$$

and then we use Cauchy-Schwarz inequality

$$\left| \int_\Omega s \partial_3 \widehat{\varepsilon}^\delta \widehat{E}^\delta \cdot \overline{\partial_3 \widehat{E}_T^\delta} \right| = \left| \int_\Omega s \widehat{\varepsilon}' \varepsilon^{\frac{1}{2}} \widehat{E}^\delta \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} \overline{\partial_3 \widehat{E}_T^\delta} \right| \leq |\varepsilon'_+ s + \alpha_{e,+}| \sqrt{\int_\Omega \varepsilon |\widehat{E}^\delta|^2} \sqrt{\int_\Omega \varepsilon |\partial_3 \widehat{E}^\delta|^2}$$

and so on with the other members of the right side of the energy equality. We take the real part of the energy equality, use the lemma 6.2.1 and the previous considerations

$$(\eta + \alpha_-) \left[ \int_\Omega \varepsilon |\partial_3 \widehat{E}^\delta|^2 + \int_\Omega \mu |\partial_3 \widehat{H}^\delta|^2 \right] \leq K(s, \Omega) \left[ \sqrt{\int_\Omega \varepsilon |\partial_3 \widehat{E}^\delta|^2} + \sqrt{\int_\Omega \mu |\partial_3 \widehat{H}^\delta|^2} \right]$$

with

$$K(s, \Omega) = \max \left( \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon'_+ s + \alpha'_{e,+}| \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{(\eta + \alpha_-)}, |\mu'_+ s + \alpha'_{m,+}| \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{(\eta + \alpha_-)} \right).$$

To end we use the following consequence of the young inequality

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \sqrt{a+b}$$

□

**Remark 6.2.2.** *This differentiation is no long true if the cable is curved. The boundaries conditions are modified by the deformation of the reference cross-section's shape and so are the energy estimates.*

### 6.2.4 Estimation of the divergence of the electromagnetic fields

The estimation of the divergence is more difficult than the estimation of the rotational since there appears a  $x_3$ -derivative

$$\mathbf{div} (s \widehat{E}_T^\delta) = -\delta \partial_3 (s \widehat{E}_3^\delta) + \mathbf{div} J_{s,T} + \delta \partial_3 J_{s,3}.$$

We need to use the proposition 6.2.1 about the  $x_3$  derivative of the electromagnetic fields.

**Lemma 6.2.3.**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{div} (\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^\delta)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta \sqrt{\varepsilon_+} \left[ \frac{\left|1 + \frac{\alpha'_{e,+}}{s}\right|}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{2} \frac{|\beta'_+ s + \alpha'_+| \left|1 + \frac{\alpha_{e,+}}{s}\right|}{(\eta + \alpha_-)^2} \right] \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{2} \frac{\left|1 + \frac{\alpha_+}{s}\right|}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{|s|} \|\mathbf{div} \widehat{\mathbf{J}}_{s,T}^\delta + \delta \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_{s,3}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|\mathbf{div} (\widehat{\mu} \widehat{H}_T^\delta)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta \sqrt{\mu_+} \left[ \frac{\left|1 + \frac{\alpha'_{m,+}}{s}\right|}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{2} \frac{|\beta'_+ s + \alpha'_+| \left|1 + \frac{\alpha_{m,+}}{s}\right|}{(\eta + \alpha_-)^2} \right] \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta \sqrt{\mu_+} \sqrt{2} \frac{\left|1 + \frac{\alpha_+}{s}\right|}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

*Proof.* From (6.1), we have for the divergence

$$\mathbf{div} (s \widehat{\varepsilon}^\delta \widehat{E}_T^\delta) + \delta \partial_3 (s \widehat{\varepsilon}^\delta \widehat{E}_3^\delta) = \mathbf{div} \widehat{\mathbf{J}}_{s,T}^\delta + \delta \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_{s,3}^\delta$$

In view of

$$\sqrt{\int_{\Omega} |\partial_3 \widehat{\varepsilon} \widehat{E}_3^\delta|^2} = \sqrt{\int_{\Omega} \frac{|\partial_3 \widehat{\varepsilon}|^2}{\varepsilon^2} \varepsilon |\varepsilon^{\frac{1}{2}} \widehat{E}_3^\delta|^2} \leq \varepsilon'_+ \left|1 + \frac{\alpha'_{e,+}}{s}\right| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_3^\delta|^2},$$

and

$$\sqrt{\int_{\Omega} |\widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{E}_3^\delta|^2} \leq \left|1 + \frac{\alpha_{e,+}}{s}\right| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\partial_3 \widehat{E}_3^\delta|^2}.$$

we recover the wanted inequality for the  $L^2$ -norm of  $\mathbf{div} (\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^\delta)$ . The proof is rather similar for the transverse magnetic field  $\square$

### 6.2.5 Estimation of the longitudinal fields

**Lemma 6.2.4.** *The longitudinal fields have a bounded  $H^1(\Omega)$ -norm, more precisely*

$$\|\nabla \widehat{H}_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \left[ \|j_{s,T}\|_{L^2(\Omega)} + \left( \sqrt{\frac{2}{\mu_-}} \frac{|\beta'_+ s + \alpha'_+|}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{\varepsilon_+} |s + \alpha_+| \right) \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{\frac{2}{\mu_-}} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

and

$$\|\nabla \widehat{E}_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \left[ + \left( \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_-}} \frac{|\beta'_+ s + \alpha'_+|}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{\mu_+} |s + \alpha_+| \right) \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_-}} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

*Proof.* We take the transverse part of the first equation of (6.1) :

$$s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^\delta - \partial_3 \mathbf{e}_3 \times \widehat{H}_T^\delta - \delta^{-1} \mathbf{rot} \widehat{H}_3^\delta = \widehat{\mathbf{J}}_{s,T} \quad (6.20)$$

so by taking the  $L^2(\Omega)$ -norm, we have

$$\begin{aligned} \|\nabla \widehat{H}_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta \left[ \|\widehat{\mathbf{J}}_s\|_{L^2(\Omega)} + \left\| (s\varepsilon + \sigma_e) \widehat{E}_T^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3 \widehat{H}_T^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right] \\ &\leq \delta \left[ \|\widehat{\mathbf{J}}_s\|_{L^2(\Omega)} + |s + \alpha_{e,+}| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_T^\delta|^2} + \sqrt{\int_{\Omega} \frac{\mu}{\mu_-} |\partial_3 \widehat{H}_T^\delta|^2} \right] \end{aligned}$$

then we use the energy estimates of lemma 6.2.1 and proposition 6.2.1. And so on for  $\widehat{E}_3^\delta$ .  $\square$

With the estimation for the gradient of the longitudinal fields given in lemma (6.2.4), and the Poincaré inequalities, we can obtain better bounds for the  $L^2(\Omega)$ -norm of the longitudinal fields than the ones we gave in lemma 6.2.1. More precisely, through the Poincaré inequalities 1.5.1 we have for all  $u \in H^1(\Omega)$

$$c_{p,w} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = c_{p,w} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\|_{L^2(S)}^2} \geq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left\| u - \int_S u \right\|_{L^2(S)}^2} = \left\| u - \int_S u \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.21)$$

and similarly for all  $u \in H_0^1(\Omega)$  we have

$$c_{p,0} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.22)$$

with the poincaré's constants of cross-section  $S$ , that is to say  $c_{p,0}$  and  $c_{p,w}$ , given in the lemma 1.5.1. So, since

$$\int \hat{\mu} \hat{H}_3^\delta = \hat{E}_3^\delta|_{\partial\Omega} = 0,$$

we have

$$\|\hat{H}_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta c_{p,w} \left[ \|j_T\|_{L^2(\Omega)} + \left( \sqrt{\frac{2}{\mu_-}} \frac{|\beta'_+ s + \alpha'_+|}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{\varepsilon_+} |s + \alpha_+| \right) \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{\frac{2}{\mu_-}} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \hat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

and

$$\|\hat{E}_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta c_{p,0} \left[ \left( \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_-}} \frac{|\beta'_+ s + \alpha'_+|}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{\mu_+} |s + \alpha_+| \right) \frac{\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{(\eta + \alpha_-)} + \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_-}} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \hat{\mathbf{J}}_s^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right].$$

### 6.2.6 Definition of the electrical potentials and currents

The physical quantities of interest to us are the electrical potentials and currents

$$\hat{\mathbf{V}}^\delta = (V_q^\delta)_{q=1;Q} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{I}}^\delta = (I_q^\delta)_{q=1;Q}.$$

To study them we need to introduce the residual electromagnetic fields that we can define as

$$\hat{E}_T^{R,\delta} := \hat{E}_T^\delta - \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^\delta \nabla \hat{\varphi}_{e,q} \quad \text{and} \quad \hat{H}_T^{R,\delta} := \hat{H}_T^\delta - \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^\delta \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q}. \quad (6.23)$$

with the orthogonal relations

$$\int_S \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^{R,\delta} \cdot \nabla \hat{\varphi}_{e,q} \quad \text{and} \quad \int_S \hat{\mu} \hat{H}_T^{R,\delta} \cdot \tilde{\nabla} \hat{\psi}_{m,q},$$

and where the harmonic potentials  $\hat{\varphi}_{e,j}$  and  $\hat{\psi}_{m,j}$  are solution of

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\hat{\varepsilon} \nabla \hat{\varphi}_{e,q}) = 0, & \text{in } S, \\ \hat{\varphi}_{e,q} = \delta_q^k, & \text{on } \partial_k S \quad k = 0 \dots Q \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\hat{\mu} \nabla \hat{\psi}_{m,q}) = 0, & \text{in } S \setminus \Gamma_q, \\ \partial_n \hat{\psi}_{m,j} = 0, & \text{on } \partial S, \\ [\hat{\psi}_{m,q}] = \delta_q^k, \quad [\hat{\mu} \partial_n \hat{\psi}_{m,q}] = 0 & \text{on } \Gamma_k, \quad k \leq Q. \end{cases} \quad (6.24)$$

and the electrical potentials  $\hat{\mathbf{V}}^\delta$  and currents  $\hat{\mathbf{I}}^\delta$  are related to the residual fields  $\hat{E}_T^{R,\delta}$  and  $\hat{H}_T^{R,\delta}$  :

**Proposition 6.2.2.** *The electrical potentials and currents satisfy the  $\delta$ -telegrapher's equation :*

$$\begin{cases} i\omega \hat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega) \hat{\mathbf{V}}^\delta(x_3, \omega) + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^\delta(x_3, \omega) = \hat{\mathbf{I}}_s^\delta(x_3, \omega) + \left( \int_S \partial_3 \hat{H}_T^{R,\delta} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,q} \right)_{q=1;Q}, & (a) \\ i\omega \hat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega) \hat{\mathbf{I}}^\delta(x_3, \omega) + \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^\delta(x_3, \omega) = - \left( \int_S \partial_3 \hat{E}_T^{R,\delta} \cdot \mathbf{rot} \hat{\psi}_{m,q} \right)_{q=1;Q}, & (b) \end{cases} \quad (6.25)$$

where the admittance  $\hat{\mathbf{Y}}_e$  and the impedance  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  are defined as the Gram matrix of the harmonic spaces

$$\hat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega) := \hat{\mathbf{Y}}(\hat{\varepsilon}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}) \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega) := \hat{\mathbf{Z}}(\hat{\mu}(\cdot, x_3, \omega), S_{x_3}).$$

*Proof.* The proof is rather similar the one of lemma 5.2.2.  $\square$

We define the homogenized symmetric (but not necessary hermitian) matrices  $(\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{R}})$  depending on the longitudinal variable  $x_3$  and the Laplace one  $s$  as

$$\begin{aligned} \bullet \text{ electrical capacity : } & \hat{\mathbf{C}}_{ij}(x_3) := \int_S \varepsilon(x_T, x_3) \nabla \hat{\varphi}_{e,i}(x_T, x_3) \cdot \nabla \hat{\varphi}_{e,j}(x_T, x_3) dx_T, \\ \bullet \text{ electrical conductance : } & \hat{\mathbf{G}}_{ij}(x_3) := \int_S \sigma_e(x_T, x_3) \nabla \hat{\varphi}_{e,i}(x_T, x_3) \cdot \nabla \hat{\varphi}_{e,j}(x_T, x_3) dx_T, \\ \bullet \text{ electrical inductance : } & \hat{\mathbf{L}}_{ij}(x_3) := \int_S \mu(x_T, x_3) \nabla \hat{\psi}_{m,i}(x_T, x_3) \cdot \nabla \hat{\psi}_{m,j}(x_T, x_3) dx_T, \\ \bullet \text{ electrical resistance : } & \hat{\mathbf{R}}_{ij}(x_3) := \int_S \sigma_m(x_T, x_3) \nabla \hat{\psi}_{m,i}(x_T, x_3) \cdot \nabla \hat{\psi}_{m,j}(x_T, x_3) dx_T, \end{aligned} \quad (6.26)$$

such that they are linked to the admittance and impedance matrices :

$${}_s \hat{\mathbf{Y}}_e = {}_s \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{G}} \quad \text{and} \quad {}_s \hat{\mathbf{Z}}_m = {}_s \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}.$$

**Remark 6.2.3.** In the proposition 4.2.1, we introduced an other decomposition :

$${}_s \hat{\mathbf{Y}}_e = {}_s \mathbf{C}^\infty + \mathbf{G}^\infty + \hat{\mathbf{K}}_e$$

We have for each vector  $u \in \mathbb{C}^Q$  (see remark 1.3.2)

$$\left( {}_s \hat{\mathbf{Y}}_e u, u \right)_{\mathbb{C}} = s \left( \hat{\mathbf{C}} u, u \right)_{\mathbb{C}} + \left( \hat{\mathbf{G}} u, u \right)_{\mathbb{C}}$$

with

$$\left( \hat{\mathbf{C}} u, u \right)_{\mathbb{C}} := \int_S \varepsilon |\nabla \hat{\varphi}(u)|^2, \quad \left( \hat{\mathbf{G}} u, u \right)_{\mathbb{C}} := \int_S \sigma_e |\nabla \hat{\varphi}(u)|^2 \quad \text{and} \quad \hat{\varphi}(u) = \sum_{q=1}^Q u_q \hat{\varphi}_{e,q}$$

so the eigenvalues of  $\hat{\mathbf{C}}$  and  $\hat{\mathbf{G}}$  are real (same for  $\hat{\mathbf{L}}$  and  $\hat{\mathbf{R}}$ ). We have :

$$[\eta + \alpha_{e,-}] \left( \hat{\mathbf{C}} u, u \right)_{\mathbb{C}} \leq \Re \left[ \left( {}_s \hat{\mathbf{Y}}_e u, u \right)_{\mathbb{C}} \right] \leq \left| \left( {}_s \hat{\mathbf{Y}}_e u, u \right)_{\mathbb{C}} \right| \leq |s + \alpha_{e,+}| \left( \hat{\mathbf{C}} u, u \right)_{\mathbb{C}} \quad (6.27)$$

$$[\eta + \alpha_{m,-}] \left( \hat{\mathbf{L}} u, u \right)_{\mathbb{C}} \leq \Re \left[ \left( {}_s \hat{\mathbf{Z}}_m u, u \right)_{\mathbb{C}} \right] \leq \left| \left( {}_s \hat{\mathbf{Z}}_m u, u \right)_{\mathbb{C}} \right| \leq |s + \alpha_{m,+}| \left( \hat{\mathbf{L}} u, u \right)_{\mathbb{C}}. \quad (6.28)$$

In particular all the matrices  $\hat{\mathbf{Y}}_e, \hat{\mathbf{Z}}_m, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{G}}$  and  $\hat{\mathbf{R}}$  are positive definite. Moreover, we have (see (5.77, 5.78))

$$\left( \hat{\mathbf{C}} u, u \right)_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon_- C_- |u|^2 \quad \text{and} \quad \left( \hat{\mathbf{L}} u, u \right)_{\mathbb{C}} \geq \mu_- (\lambda_{\mathfrak{e}}^+)^{-1} |u|^2, \quad (6.29)$$

with the geometric constants

$$C_- = \left( \frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)} \right)^2 \min_q |\mathcal{O}_q| \quad (\text{with } c_{p,0}(\mathcal{O}_0) \text{ the Poincaré's constant for the whole section of } \mathcal{O}_0)$$

and

$$\lambda_{\mathfrak{e}}^+ = \max \{ \lambda_{\mathfrak{e}} \mid \lambda_{\mathfrak{e}} \text{ is an eigenvalue of the capacity matrix } \mathfrak{C} \} \quad (\text{see property 11.2.3}).$$

**Theorem 6.2.2.** The electrical potentials and currents solution of the  $\delta$ -Telegrapher's equation (6.25) satisfy the prior estimate :

$$\mathcal{E}_{LC}^\delta \leq \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{J}}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(\beta'_+)^2 \max c^2 \max \left( \int_\Omega \varepsilon |\hat{E}_T^{R,\delta}|^2, \int_\Omega \mu |\hat{H}_T^{R,\delta}|^2 \right) \right]$$

with the electrical energy :

$$\mathcal{E}_{LC}^\delta := \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{V}}^\delta \cdot \overline{\hat{\mathbf{V}}^\delta} + \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{I}}^\delta} \cdot \hat{\mathbf{I}}^\delta \right]$$

*Proof.* We have with (6.50) and the integration by parts

$$\int_S \partial_3 \hat{H}_T^{R,p} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,i} = - \int_S \hat{H}_T^{R,p} \cdot \mathbf{rot} \partial_3 \hat{\varphi}_{e,i} \quad , \quad \int_S \partial_3 \hat{E}_T^{R,p} \cdot \mathbf{rot} \hat{\psi}_{m,i} = - \int_S \hat{E}_T^{R,p} \cdot \mathbf{rot} \partial_3 \hat{\psi}_{m,i}$$

the estimate

$$2 \mathcal{E}_{LC} [\eta + \alpha_-] \leq \left| \int_\Omega \hat{\mathcal{J}}^\delta \cdot \hat{\mathbf{V}}^\delta \right| + \left| \int_\Omega \hat{H}_T^{R,\delta} \cdot \mathbf{rot} (\partial_3 \hat{\varphi}_e)(\hat{\mathbf{V}}^\delta) \right| + \left| \int_\Omega \hat{E}_T^{R,\delta} \cdot \mathbf{rot} (\partial_3 \hat{\psi}_m)(\hat{\mathbf{I}}^\delta) \right|$$

we have

$$\left| \int_\Omega \hat{H}_T^{R,\delta} \cdot \mathbf{rot} (\partial_3 \hat{\varphi}_e)(\hat{\mathbf{V}}^\delta) \right|^2 \leq \int_\Omega \varepsilon^{-1} |\hat{H}_T^{R,\delta}|^2 \int_{\mathbb{R}} \left( \hat{\mathbf{C}}_3 \hat{\mathbf{V}}^\delta, \hat{\mathbf{V}}^\delta \right)_{\mathbb{C}} \leq \max c^2 \int_\Omega \mu |\hat{H}_T^{R,\delta}|^2 \int_{\mathbb{R}} \left( \hat{\mathbf{C}}_3 \hat{\mathbf{V}}^\delta, \hat{\mathbf{V}}^\delta \right)_{\mathbb{C}}$$

and with the lemma ?? :

$$\left| \int_{\Omega} \widehat{H}_T^{R,\delta} \cdot \mathbf{rot} (\partial_3 \widehat{\varphi}_e)(\widehat{\mathbf{V}}^\delta) \right|^2 \leq (\varepsilon'_+)^2 \max c^2 \int_{\Omega} \mu |\widehat{H}_T^{R,\delta}|^2 \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{V}}^\delta, \widehat{\mathbf{V}}^\delta)_{\mathbb{C}}$$

and similarly :

$$\left| \int_{\Omega} \widehat{E}_T^{R,\delta} \cdot \mathbf{rot} (\partial_3 \widehat{\psi}_m)(\widehat{\mathbf{I}}^\delta) \right| \leq (\mu'_+)^2 \max c^2 \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_T^{R,\delta}|^2 \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathbf{L}} \widehat{\mathbf{I}}^\delta, \widehat{\mathbf{I}}^\delta)_{\mathbb{C}}$$

□

We have seen in lemmata 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3 and 6.2.4 and proposition 6.2.1 that the constants constituting the bounds of our inequality are related to the same physical and geometric quantities as given in the definition (6.1.1).

### 6.3 Definition and stability analysis of the truncated and effective telegrapher model

To obtain an asymptotic model from the Maxwell theory of electromagnetism, we need to do the assumption that  $\delta \ll 1$  is small enough. We postulated a priori asymptotic expansion in the form of polynomial series in power of delta for the electromagnetic field in the Laplace domain (as it is explained in the introduction chapter)

$$\widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^P \delta^k \widehat{E}^k \quad \text{and} \quad \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^P \delta^k \widehat{H}^k,$$

that aim to be an approximation of the electromagnetic fields  $\widehat{E}^\delta$  and  $\widehat{H}^\delta$ . The orders 0,1 and 2 are completely studied in the chapter 4 and 5, however we recall them.

#### 6.3.1 Definition of the ("truncated" asymptotic) approximation model

The transverse electromagnetic fields  $\widehat{E}_T^p$  and  $\widehat{H}_T^p$  for  $p = 0, 1, 2$  are given by the decompositions

$$\widehat{E}_T^p = \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^p \nabla \widehat{\varphi}_{e,q} + \widehat{E}_T^{R,p} \quad \text{and} \quad \widehat{H}_T^p = \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^p \nabla \widehat{\psi}_{e,q} + \widehat{H}_T^{R,p} \quad (6.30)$$

where the residual transverse electromagnetic fields

$$\widehat{E}_T^{R,p} \in L^2(S)_{/\mathcal{E}(\varepsilon,S)} \quad \text{and} \quad \widehat{H}_T^{R,p} \in L^2(S)_{/\mathcal{H}(\mu,S)}$$

are the unique solution of the following div-rot problems

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^{R,p}) = -\partial_3(\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_3^{p-1}) + \delta_p^1 \partial_3 \widehat{J}_{s,3} + \delta_p^0 \operatorname{div} \widehat{J}_{s,T}, \\ \operatorname{rot} \widehat{E}_T^{R,p} = -s \widehat{\mu} \widehat{H}_3^{p-1}, \\ \widehat{E}_T^{R,p} \times n = 0, \quad \text{on } \partial S \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\widehat{\mu} \widehat{H}_T^{R,p}) = -\partial_3(\widehat{\mu} \widehat{H}_3^{p-1}), \\ \operatorname{rot} \widehat{H}_T^{R,p} = s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}_3^{p-1} - \delta_p^1 \widehat{J}_{s,3}, \\ \widehat{H}_T^{R,p} \cdot n = 0, \end{cases} \quad (6.31)$$

and the electrical potential and current vectors

$$\widehat{\mathbf{V}}^p := (\widehat{V}_q^p)_{q=1,Q} \in H^1(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{I}}^p := (\widehat{I}_q^p)_{q=1,Q} \in H^1(\mathbb{R})$$

are the unique solutions of the telegrapher's equations

$$\begin{cases} i\omega \widehat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega) \widehat{\mathbf{V}}^p(x_3, \omega) + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^p(x_3, \omega) = \delta_0^p \widehat{\mathbf{I}}_s^0(x_3, \omega) + \left( \int_S \partial_3 \widehat{H}_T^{R,p} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q} \right)_{q=1;Q}, & (a) \\ i\omega \widehat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega) \widehat{\mathbf{I}}^p(x_3, \omega) + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^p(x_3, \omega) = - \left( \int_S \partial_3 \widehat{E}_T^{R,p} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{q=1;Q}. & (b) \end{cases} \quad (6.32)$$

The right hand term of (6.32) are be computed with the following expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{I}_{s,q}^0 \\ \int_S \partial_3 \hat{H}_T^{R,0} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,q} \\ \int_S \partial_3 \hat{E}_T^{R,0} \cdot \mathbf{rot} \hat{\psi}_{m,q} \\ \int_S \partial_3 \hat{H}_T^{R,1} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,q} \\ \int_S \partial_3 \hat{E}_T^{R,1} \cdot \mathbf{rot} \hat{\psi}_{m,q} \\ \left( \int_S \partial_3 \hat{H}_T^{R,2} \cdot \mathbf{rot} \hat{\varphi}_{e,q} \right)_{q=1;Q} \\ \left( \int_S \partial_3 \hat{E}_T^{R,2} \cdot \mathbf{rot} \hat{\psi}_{m,q} \right)_{q=1;Q} \end{array} \right. = \begin{array}{l} \int_S \hat{J}_{s,T} \cdot \overline{\nabla \hat{\varphi}_{e,q}} \\ = 0 \\ = 0 \\ = \partial_3 \left( \int_S \hat{J}_{s,3}^\delta (\overline{\hat{\varphi}_{e,q} - \hat{\varphi}_{m,q}}) \right) + \int_S \hat{J}_{s,3}^\delta \overline{\partial_3 \hat{\varphi}_{e,q}} \\ = 0 \\ = s \partial_3 (\hat{\gamma}_Y \partial_3 \hat{V}^0) - s \hat{Y}_g \hat{V}^0 \\ = s \partial_3 (\hat{\gamma}_Z \partial_3 \hat{I}^0) - s \hat{Z}_g \hat{I}^0 + \hat{V}_{s,2} \end{array} \quad (6.33)$$

with the matrices  $\hat{\gamma}_Y$ ,  $\hat{Y}_g$ ,  $\hat{\gamma}_Z$  and  $\hat{Z}_g$  defined in the definition 5.4.1 and the vector  $\hat{V}_{s,2}$  defined in the equation (5.63) (see lemma 5.4.5 and remark 5.2.1) and the "conjugated potentials"

$$\hat{\psi}_{e,q} := \psi_q(\hat{\varepsilon}^{-1}, S) \quad \text{and} \quad \hat{\varphi}_{m,q} := \varphi_q(\hat{\mu}^{-1}, S).$$

The residuals fields can be described with the use of Helmholtz

$$\hat{E}_T^{R,p} = \nabla \hat{\xi}_e^p + \left( \varepsilon + \frac{\sigma_e}{s} \right)^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_e^p \quad \text{and} \quad \hat{H}_T^{R,p} = \nabla \hat{\xi}_m^p + \left( \mu + \frac{\sigma_m}{s} \right)^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_m^p \quad (6.34)$$

where all the potentials  $\hat{\xi}_e^p$ ,  $\hat{\zeta}_m^p$ ,  $\hat{\xi}_m^p$  and  $\hat{\zeta}_e^p$  are the solution in  $H^1(S)$  of the elliptic problems that follow

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\hat{\varepsilon} \nabla \hat{\xi}_e^p) = -\frac{\partial}{\partial x_3} (\hat{\varepsilon} \hat{E}_3^{p-1}) + \delta_p^1 \partial_3 \hat{J}_3 + \delta_p^0 \operatorname{div} \hat{J}_{s,T}, \quad \text{in } S \\ \hat{\xi}_e^{(p+1)} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}(\hat{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_m^p) = s \hat{\varepsilon} \hat{E}_3^{p-1} - \delta_p^0 \hat{J}_3, \\ \hat{\zeta}_m^p = 0 \end{array} \right. \quad (6.35)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\hat{\mu} \nabla \hat{\xi}_m^{(p+1)}) = -\frac{\partial}{\partial x_3} (\hat{\mu} \hat{H}_3^p), \\ \partial_n \hat{\xi}_m^{(p+1)} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}(\hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{rot} \hat{\zeta}_e^{(p+1)}) = -s \hat{\mu} \hat{H}_3^p, \quad \text{in } S, \\ \partial_n \hat{\zeta}_e^{(p+1)} = 0, \quad \text{in } \partial S. \end{array} \right. \quad (6.36)$$

The limit longitudinal fields are

$$\hat{E}_3^0 = \hat{H}_3^0 = 0 \quad (6.37)$$

and the longitudinal fields at higher orders are given (as a consequence of ) by

$$\mathbf{rot} \hat{E}_3^{(p+1)} = -(s\mu + \sigma_m) \hat{H}_T^p - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{E}_T^p \quad \text{and} \quad \mathbf{rot} \hat{H}_3^{(p+1)} = s \hat{\varepsilon} \hat{E}_T^p - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{H}_T^p - \delta_0^p j_T. \quad (6.38)$$

More precisely, the orders one and two are given by the propositions 5.2.1 and 5.4.5.

**Theorem 6.3.1.** *The ("truncated" asymptotic) approximation model is given by the following decompositions*

$$\hat{E}_{trunc}^{\delta,p} = \sum_{q=1}^Q \hat{V}_{trunc,q}^{\delta,p} \begin{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_{e,q} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{E}_{trunc,T}^{R,\delta,p} \\ \hat{E}_{trunc,3}^{\delta,p} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{H}_{trunc}^{\delta,p} = \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{trunc,q}^{\delta,p} \begin{pmatrix} \nabla \hat{\psi}_{m,q} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{H}_{trunc,T}^{R,\delta,p} \\ \hat{H}_{trunc,3}^{\delta,p} \end{pmatrix}.$$

The ("truncated" asymptotic) approximation potential and current are

$$\hat{V}_{trunc}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \hat{V}^k \quad \text{and} \quad \hat{I}_{trunc}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \hat{I}^k$$

with  $\hat{V}^k$  and  $\hat{I}^k$  for  $k = 0 \dots p$  given by (6.32, 6.33). The ("truncated" asymptotic) approximation "residuals" are

$$\hat{E}_{trunc,T}^{R,\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \hat{E}^{R,k} \quad \text{and} \quad \hat{H}_{trunc,3}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \hat{H}^{R,k}$$

with  $\widehat{E}^{R,k}$  and  $\widehat{H}^{R,k}$  for  $k = 0 \dots p$  given by (6.34, 6.35, 6.36). The ("truncated" asymptotic) approximation longitudinal fields are

$$\widehat{E}_{trunc,3}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \widehat{E}_3^k \quad \text{and} \quad \widehat{H}_{trunc,3}^{\delta,p} := \sum_{k=0}^p \delta^k \widehat{H}^k$$

with  $\widehat{E}_3^k$  and  $\widehat{H}_3^k$  for  $k = 0 \dots p$  given by (6.37) and the propositions 5.2.1 and 5.4.5.

### 6.3.2 Stability of the ("truncated" asymptotic) approximation model

We aim at recalling that the electromagnetic energy of order  $p$

$$\mathcal{E}^p := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}^p|^2 + \int_{\Omega} \mu |\widehat{H}^p|^2 \right],$$

and its longitudinal derivatives (for  $k = 0 \dots 3$ )

$$\mathcal{E}_{\partial_3^k}^p := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\partial_3^k \widehat{E}^p|^2 + \int_{\Omega} \mu |\partial_3^k \widehat{H}^p|^2 \right]$$

are bounded. To do this we introduce the following energies

- electrical energy of order  $p$  :  $\mathcal{E}_{LC}^p := \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{V}}^p \cdot \widehat{\mathbf{V}}^{\delta} + \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{L}} \widehat{\mathbf{I}}^{\delta} \cdot \widehat{\mathbf{I}}^p \right]$
- residual transverse energy of order  $p$  :  $\mathcal{E}_T^{R,p} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_T^{R,p}|^2 + \int_{\Omega} \mu |\widehat{H}_T^{R,p}|^2 \right]$
- longitudinal energy of order  $p$  :  $\mathcal{E}_3^p := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_3^p|^2 + \int_{\Omega} \mu |\widehat{H}_3^p|^2 \right]$

linked with  $\mathcal{E}^p$  by

$$\mathcal{E}^p \leq \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| \left[ \mathcal{E}_T^{R,p} + \mathcal{E}_3^p + \mathcal{E}_{LC}^p \right].$$

Indeed, with the orthogonality of the decomposition

$$\int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} |\widehat{E}_T^p|^2 = \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} + \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} |\widehat{E}_T^{R,p}|^2$$

and the inequality

$$\left| 1 + \frac{\sigma_{e,-}}{s} \right| \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_T^p|^2 \leq \left| \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} |\widehat{E}_T^p|^2 \right| \leq \left| 1 + \frac{\sigma_{e,+}}{s} \right| \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_T^p|^2 \quad \text{and} \quad \left| \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} \right| \leq \left| 1 + \frac{\sigma_{e,+}}{s} \right| \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{V}}$$

we have

$$\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_T^p|^2 = \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| \left[ \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} + \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_T^{R,p}|^2 \right].$$

It can be done similarly for the magnetic fields of order  $p$ . We need afterward of the following theorem that will be admit.

**Theorem 6.3.2.** *We have for order 0*

$$\begin{cases} \mathcal{E}_T^{R,0} \leq c_{p,w}^2 \frac{\beta_-^{-1}}{|1 + \frac{\sigma_-}{s}|^2} \|\operatorname{div} \widehat{J}_{s,T}\|^2 \\ \mathcal{E}_{LC}^0 \leq \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} (\beta_+)^4 \max c^4 c_{p,w}^2 \frac{\beta_-^{-1}}{|1 + \frac{\sigma_-}{s}|^2} \|\operatorname{div} \widehat{J}_{s,T}\|^2 \\ \mathcal{E}_3^0 = 0 \\ \mathcal{E}_{\partial_3,T}^{R,0} \leq c_{p,w}^2 \beta_-^{-1} \frac{|s\beta'_+ + \sigma'_+|}{|s + \sigma_-|} \|\operatorname{div} \widehat{J}_{s,T}\|^2 \\ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^0 = 0 \end{cases}$$

then we have for order  $P = 1, 2$

$$\mathcal{E}^p = \left( 1 + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} \right) \mathbb{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \|\operatorname{div} \partial_3^{p-2k} \widehat{J}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \widehat{J}_s\|^2 \right] \quad (6.39)$$

and for any  $K = 1, 2, 3$

$$\mathcal{E}_{\partial_3^K}^p = \left(1 + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2}\right) \mathbb{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{K + \lceil \frac{p}{2} \rceil} \|\operatorname{div} \partial_3^{p-2k} \hat{\mathbf{J}}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \hat{\mathbf{J}}_s\|^2 \right]$$

with  $\lceil \cdot \rceil$  the ceiling functions<sup>2</sup> map and  $\mathbb{K} \in \mathbb{K}$  (see definition 6.1.1).

For the non cylindrical case we have seen in the chapter 5 that formula (6.39) is also right for  $p = 0, 1, 2$ . Moreover, with some added regularity assumptions on the characteristic coefficients and sources the formulae of the previous lemma are right for any  $P$  and  $K$ .

### 6.3.3 Error estimates between the effective and the truncated model

Using the ("truncated" asymptotic) approximation model of order  $p$

$$\hat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,p} \quad \text{and} \quad \hat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,p}$$

of the theorem 6.3.1 requires the computation of  $\hat{E}^k$  and  $\hat{H}^k$  at each order  $k = 0 \dots p$ . The effective model aims at dividing by  $p$  the number of fields that we will need to compute. The limit effective model is given by

$$\hat{\mathbf{V}}^{\delta,0} = \hat{\mathbf{V}}^0, \quad \hat{\mathbf{I}}^{\delta,0} = \hat{\mathbf{I}}^0, \quad \hat{E}^{\delta,0} = \hat{E}^0, \quad \hat{H}^{\delta,0} = \hat{H}^0$$

The effective model at order 1 is given by

$$\hat{\mathbf{V}}^{\delta,1} = \hat{\mathbf{V}}^0 + \delta \hat{\mathbf{V}}^1, \quad \hat{\mathbf{I}}^{\delta,1} = \hat{\mathbf{I}}^0 + \delta \hat{\mathbf{I}}^1, \quad \hat{E}^{\delta,1} = \hat{E}^0 + \delta \hat{E}^1, \quad \hat{H}^{\delta,1} = \hat{H}^0 + \delta \hat{H}^1.$$

Of course, the theorem implies that all the  $\hat{\mathbf{V}}^{\delta,0}, \hat{\mathbf{I}}^{\delta,0}, \hat{E}^{\delta,0}, \hat{H}^{\delta,0}$  and  $\hat{\mathbf{V}}^{\delta,1}, \hat{\mathbf{I}}^{\delta,1}, \hat{E}^{\delta,1}, \hat{H}^{\delta,1}$  have a bounded  $L^2$ -norm. The effective model at order 2 is more complex. It is given in definition 5.5.1 and studied in section 5.5. The error estimation between the asymptotic expansion and the second order effective model is at the right power of  $\delta$ . Indeed we have with the theorem 5.5.2 the error estimation that follow

$$\|\hat{E}^{\delta,2} - \hat{E}_{\text{trunc}}^{\delta,2}\|_{L^2(\Omega)} + \|\hat{H}^{\delta,2} - \hat{H}_{\text{trunc}}^{\delta,2}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\delta^3}{\eta + \alpha_-} \left(1 + \frac{1}{\eta + \alpha_-}\right) \mathbb{K}(|s|) \left(\|\hat{\mathbf{J}}^\delta\| + \|\partial_3 \mathbf{J}^\delta\|\right),$$

with  $\mathbb{K} \in \mathbb{K}$  (see definition 6.1.1). We have proved the **modeling error estimation** (6.9a). Now to obtain the expected **global error estimation** (6.9c), we need the **truncature error estimation** (6.9c). It is the object of the next section.

## 6.4 Truncature error estimates

To establish the **truncature error estimation** (6.9c) resulting of our asymptotic assumption (3.26) (see section 3.5.1) compared to the initial Maxwell theory (6.1) we separate, as usual, the transverse and longitudinal fields

$$\hat{e}_T^{P,\delta} := \hat{E}_T^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \hat{E}_T^p, \quad \hat{e}_3^{P,\delta} := \hat{E}_3^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \hat{E}_3^p, \quad \hat{h}_T^{P,\delta} := \hat{H}_T^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \hat{H}_T^p \quad \text{and} \quad \hat{h}_3^{P,\delta} := \hat{H}_3^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \hat{H}_3^p.$$

We will denote by

$$\mathcal{E}_T^{\text{err},P} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\hat{e}_T^{P,\delta}|^2 + \int_{\Omega} \mu |\hat{h}_T^{P,\delta}|^2 \right], \quad \mathcal{E}_3^{\text{err},0} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\hat{e}_3^{P,\delta}|^2 + \int_{\Omega} \mu |\hat{h}_3^{P,\delta}|^2 \right].$$

so that the truncature energy error satisfies

$$\mathcal{E}^{\text{err},P} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\hat{e}^{P,\delta}|^2 + \int_{\Omega} \mu |\hat{h}^{P,\delta}|^2 \right] = \mathcal{E}_T^{\text{err},P} + \mathcal{E}_3^{\text{err},P}.$$

To shorten the rhetoric, we will simply say "error" for "truncature error". The error for the electrical potentials and currents are

$$\hat{\mathbf{v}}^{P,\delta} := \hat{\mathbf{V}}^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \hat{\mathbf{V}}^p \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{i}}^{P,\delta} := \hat{\mathbf{I}}^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \hat{\mathbf{I}}^p \quad (6.40)$$

2.  $n - 1 < p \leq n \Rightarrow [p] = 1$



and the energy of the error on this electrical quantity is

$$\mathcal{E}_{LC}^{err,P} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{v}^{P,\delta}, \mathbf{v}^{P,\delta} \right)_{\mathbb{C}} + \int_{\mathbb{R}} \overline{\left( \widehat{\mathbf{L}} \mathbf{i}^{P,\delta}, \mathbf{i}^{P,\delta} \right)_{\mathbb{C}}} \right].$$

There exists a constant  $C \in \mathbb{R}^+$  depending<sup>3</sup> only of the physical and geometrical properties of the cable in the sense of the definition 6.1.1 such that

$$C \|\widehat{\mathbf{V}}^\delta - \widehat{\mathbf{V}}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\widehat{\mathbf{I}}^\delta - \widehat{\mathbf{I}}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{E}_{LC}^{err,P}. \quad (6.41)$$

**Theorem 6.4.1.** *If we assume that the source is regular enough*

$$\partial_3^K \widehat{\mathcal{J}}_{s,T} \in L^2(\Omega)$$

with  $K = 0, 1, 2$ , then the error between our telegrapher's model of order 0 and the full Maxwell's equation is bounded in the Laplace domain by a power of the small parameter  $\delta$ . We denote in this theorem by  $C$  and  $\tilde{C}$  constants independent of the small parameter  $\delta$  and the Laplace parameter  $s$ . Firstly, the estimation of the error on the electrical potentials and currents is

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{LC}^{err,0} &\leq \frac{C \delta^2}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ (1 + |s|^{-6}) \|\widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + |s|^{-2}) \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + \frac{C \delta^4}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ (1 + |s|^2 + |s|^{-6}) \|\widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + |s|^2 + |s|^{-8}) \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + |s|^{-2}) \|\partial_3^2 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Secondly, the estimation of the error on the transverse electromagnetic fields is

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T^{err,0} &\leq C \delta^2 \left[ (1 + |s|^{-2}) + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} (1 + |s|^{-8}) \right] \|\widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} (1 + |s|^{-2}) \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + C \delta^4 \left[ (1 + |s|^2 + |s|^{-2}) + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} (1 + |s|^2 + |s|^{-8}) \right] \left( \|\widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + C \frac{\delta^4}{(\eta + \alpha_-)^2} (1 + |s|^{-4}) \|\partial_3^2 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Thirdly, the error on the longitudinal electromagnetic fields is :

$$\mathcal{E}_3^{err,0} \leq C \delta^2 \|\widehat{\mathcal{J}}_s\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

By making some assumption, the estimations of the theorem 6.4.1 become simpler :

**(i) non losses cases** ( $\alpha_+ = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{LC}^{err,0} &\leq \frac{C \delta^2}{\eta^2} \left[ \|\widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + \frac{C \delta^4}{\eta^2} \left[ (1 + |s|^2) \|\widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + |s|^2) \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_3^2 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T^{err,0} &\leq C \delta^2 \left[ 1 + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} \right] \|\widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + C \delta^4 \left[ (1 + |s|^2) + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} (1 + |s|^2) \right] \left( \|\widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + C \frac{\delta^4}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\partial_3^2 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

3. More precisely, we have

$$\varepsilon_- C_- \|\widehat{\mathbf{V}}^\delta - \widehat{\mathbf{V}}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_- (\lambda_{\mathbf{e}}^+)^{-1} \|\widehat{\mathbf{I}}^\delta - \widehat{\mathbf{I}}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \mathcal{E}_{LC}^{err,P}$$

(ii) cylindrical case ( $\beta'_+ = \alpha'_+ = 0$ )

$$\mathcal{E}_{LC}^{err,0} \leq \frac{C \delta^2}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ (1 + |s|^{-2}) \|\partial_3 \hat{J}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{C \delta^4}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ (1 + |s|^2 + |s|^{-2}) \|\partial_3 \hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + |s|^{-2}) \|\partial_3^2 \hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T^{err,0} &\leq C \delta^2 \left[ (1 + |s|^{-2}) \|\hat{J}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} (1 + |s|^{-2}) \|\partial_3 \hat{J}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + C \delta^4 (1 + |s|^2 + |s|^{-2}) \|\hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \delta^4 \left[ c_{p,w}^2 (1 + |s|^{-2}) + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} (1 + |s|^2 + |s|^{-2}) \right] \|\partial_3 \hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\delta^4}{(\eta + \alpha_-)^2} (1 + |s|^{-4}) \|\partial_3^2 \hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

For higher orders, we have similar type of error estimates but we will not detail the precise dependance on  $s$ . We aim at demonstrating the following errors estimates for any order :

**Theorem 6.4.2.** *If the source satisfies*

$$\partial_3^k \hat{J}_{s,T} \in H(\mathbf{div}, S) \quad \text{and} \quad \partial_3^k \hat{J}_{s,3} \in L^2(S) \quad \text{for} \quad k = 0 \dots P$$

then we have for order  $P = 1, 2$

$$\mathcal{E}_T^{err,P} \leq \delta^{2(P+1)} \left( \sum_{k=0}^{P+1} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^{2k}} \right) \mathbb{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \|\operatorname{div} \partial_3^{p-2k} \hat{J}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \hat{J}_s\|^2 \right]$$

and the electrical energy error satisfies

$$\mathcal{E}_{LC}^{err,P} \leq \delta^{4(P+1)} (C_J + \delta^2) \left( \sum_{k=1}^{P+1} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^{2k}} \right) \mathbb{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \|\operatorname{div} \partial_3^{p-2k} \hat{J}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \hat{J}_{s,3}\|^2 \right]$$

with  $\lceil \cdot \rceil$  the ceiling functions map and  $\mathbb{K} \in \mathbb{K}$  (see definition 6.1.1).

In first instance, we need to write down the equation for the error  $\hat{e}^{P,\delta}$  and  $\hat{h}^{P,\delta}$ . In order to ensure this, we do

$$(6.1) - \sum_{k=0}^P \delta^k (5.6, 5.9)$$

which gives

$$\left\{ \begin{array}{ll} s \hat{\varepsilon}^\delta \hat{e}^{P,\delta} - \mathbf{curl}_\delta \hat{h}^{P,\delta} = -\delta^p \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \hat{H}_3^{(p+1)} \\ \mathbf{rot} \hat{H}_T^{(p+1)} \end{pmatrix} + \delta^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \hat{H}_3^0 \\ \mathbf{rot} \hat{H}_T^0 \end{pmatrix}, & \text{in } \Omega, \\ s \hat{\mu}^\delta \hat{h}^{P,\delta} + \mathbf{curl}_\delta \hat{e}^{P,\delta} = \delta^p \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \hat{E}_3^{(p+1)} \\ \mathbf{rot} \hat{E}_T^{(p+1)} \end{pmatrix} - \delta^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \hat{E}_3^0 \\ \mathbf{rot} \hat{E}_T^0 \end{pmatrix}, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div}_\delta (s \hat{\varepsilon}^\delta \hat{e}^{P,\delta}) = -\delta^p \partial_3 \hat{E}_3^p, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div}_\delta (s \hat{\mu}^\delta \hat{h}^{P,\delta}) = -\delta^p \partial_3 \hat{H}_3^p, & \text{in } \Omega. \end{array} \right.$$

Since we have  $\hat{E}_3^0 = \hat{H}_3^0 = 0$  (see equation (6.37)) the previous equation becomes with the equations (5.6, 5.7, 5.8, 5.9)

$$\left\{ \begin{array}{ll} s \hat{\varepsilon}^\delta \hat{e}^{P,\delta} - \mathbf{curl}_\delta \hat{h}^{P,\delta} = \delta^p \left[ \delta_0^p \hat{J} - s \hat{\varepsilon} \hat{E}^p + \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 \hat{H}_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right], & \text{in } \Omega, \\ s \hat{\mu}^\delta \hat{h}^{P,\delta} + \mathbf{curl}_\delta \hat{e}^{P,\delta} = \delta^p \left[ s \hat{\mu} \hat{H}^p - \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 \hat{E}_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right], & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div}_\delta (s \hat{\varepsilon}^\delta \hat{e}^{P,\delta}) = -\delta^p \partial_3 \hat{E}_3^p, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div}_\delta (s \hat{\mu}^\delta \hat{h}^{P,\delta}) = -\delta^p \partial_3 \hat{H}_3^p, & \text{in } \Omega, \end{array} \right. \quad (6.42)$$

plus the boundaries conditions

$$\hat{e}^{P,\delta} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{and} \quad \hat{h}^{P,\delta} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (6.43)$$

### 6.4.1 Estimation at order $O(\delta^P)$ : convergence results for $P > 0$

We are now glad to announce the following convergence theorem :

**Theorem 6.4.3.** *We have the following prior energy error estimate*

$$\mathcal{E}^{err,P} \leq \frac{\delta^{2P} 2}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ \delta_0^0 \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \hat{j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + |s + \alpha_+|^2 \mathcal{E}^P + c_+^2 \mathcal{E}_{\partial_3,3}^P \right]$$

and so for  $P > 0$  there is convergence

$$\mathcal{E}^{err,P} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

*Proof.* We proceed in the same way as the proof of lemma 6.2.1 and in proposition 6.2.1 to obtain the energy inequality :

$$\mathcal{E}^{err,P} \leq \frac{\delta^{2P}}{(\eta + \alpha_-)} \max \left( \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \delta_0^p \hat{J} - s \hat{\varepsilon} \hat{E}^p + \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 H_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2, \int_{\Omega} \mu^{-1} \left| s \hat{\mu} \hat{H}^p - \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 E_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \right)$$

and we conclude with theorem 6.3.2.  $\square$

But we are not satisfied since we have not yet proven the convergence of order 0 all the more so as if we only have convergence, we do not know if considering higher orders will improve the approximation or not. A better bound in term of  $\delta$  can be find with the use of Poincaré-Friedrichs inequalities. To do it, as usual we separate the transverse and the longitudinal fields errors

$$\mathcal{E}_T^{err,P} = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\hat{e}_T^{P,\delta}|^2 + \int_{\Omega} \mu |\hat{h}_T^{P,\delta}|^2 \right] \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_3^{err,P} = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon |\hat{e}_3^{P,\delta}|^2 + \int_{\Omega} \mu |\hat{h}_3^{P,\delta}|^2 \right].$$

We will work recursively for  $p = 1, 2$  with the convention  $\hat{E}^k = \hat{H}^k = 0$  for  $k < 0$ .

### 6.4.2 Estimation of the longitudinal fields

We do (6.20) minus  $\sum_{p=0}^P \delta^p$  (6.38)

$$s \hat{\varepsilon} \hat{e}_T^{P,\delta} - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{h}_T^{P,\delta} - \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{h}_3^{P+1,\delta} = \delta_0^{P+1} \hat{J}_{s,T} \quad (6.44)$$

so by taking the  $L^2(\Omega)$ -norm, we have

$$\|\hat{h}_3^{P+1,\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \left[ \delta_0^{P+1} \|\hat{J}_s\|_{L^2(\Omega)} + |s + \alpha_{e,+}| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\hat{e}_T^{P,\delta}|^2} + \sqrt{\int_{\Omega} \frac{\mu}{\mu_-} |\partial_3 \hat{h}_T^{P,\delta}|^2} \right].$$

We take the longitudinal derivative of (6.44)

$$s \partial_3 \hat{\varepsilon} \hat{e}_T^{P,\delta} + s \hat{\varepsilon} \partial_3 \hat{e}_T^{P,\delta} - \partial_3^2 \mathbf{e}_3 \times \hat{h}_T^{P,\delta} - \delta^{-1} \mathbf{rot} \partial_3 \hat{h}_3^{P+1,\delta} = \delta_0^{P+1} \partial_3 \hat{J}_{s,T}$$

and we have :

$$\begin{aligned} \|\nabla \partial_3 \hat{h}_3^{P+1,\delta}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta \sqrt{2} \left[ \delta_0^{P+1} \|\partial_3 \hat{J}_s\|_{L^2(\Omega)} + |\beta'_+ s + \alpha'_+| \sqrt{\mu_+} \sqrt{\mathcal{E}_T^{err,P}} \right. \\ &\quad \left. + |s + \alpha_+| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3,T}^{err,P}} + \sqrt{\mu_-^{-1}} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3^2,T}^{err,P}} \right], \end{aligned}$$

Similarly for the second  $x_3$ -derivative, we have

$$\begin{aligned} \|\nabla \partial_3^2 \hat{h}_3^{P+1,\delta}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta \sqrt{2} \left[ \delta_0^{P+1} \|\partial_3 \hat{J}_s\|_{L^2(\Omega)} + |\beta''_+ s + \alpha''_+| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\mathcal{E}_T^{err,P}} \right. \\ &\quad \left. + |\beta'_+ s + \alpha'_+| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3,T}^{err,P}} + |s + \alpha_+| \sqrt{\varepsilon_+} \mathcal{E}_{\partial_3^2,T}^{err,P} + \sqrt{\mu_-^{-1}} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3^3,T}^{err,P}} \right]. \end{aligned}$$

And so on for  $\hat{e}_3^{P,\delta}$ . Then with the Poincaré inequalities (6.21) and (6.22), we conclude that

**Lemma 6.4.1.** *If the energy error of the transverse fields  $\mathcal{E}_T^{err,P-1}$  and its three first  $x_3$ -derivatives are bounded by  $\delta^2 P$  then the energy error of the longitudinal fields  $\mathcal{E}_3^{err,P}$  and its three first  $x_3$ -derivatives are bounded by  $\delta^2(P+1)$  since*

$$\sqrt{\mathcal{E}_3^{err,P}} \leq \delta c_{p,w} \left[ \delta_0^P \sqrt{\mu_+} \|\hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)} + |s + \alpha_+| \max c^{-1} \sqrt{\mathcal{E}_T^{err,P-1}} + \sqrt{\beta_+} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3,T}^{err,P-1}} \right]$$

and

$$\sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P}} \leq \delta c_{p,w} \left[ \delta_0^P \sqrt{\mu_+} \|\hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)} + |\beta'_+ s + \alpha'_+| \max c^{-1} \sqrt{\mathcal{E}_T^{err,P-1}} + |s + \alpha_+| \max c^{-1} \mathcal{E}_{\partial_3,T}^{err,P-1} + \sqrt{\beta_+} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3^2,T}^{err,P-1}} \right]$$

and

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P}} \leq \delta c_{p,w} & \left[ \delta_0^P \sqrt{\mu_+} \|\hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)} + |\beta''_+ s + \alpha''_+| \max c^{-1} \sqrt{\mathcal{E}_T^{err,P-1}} \right. \\ & \left. + |\beta'_+ s + \alpha_+| \max c^{-1} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3,T}^{err,P-1}} + |s + \alpha_+| \max c^{-1} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3^2,T}^{err,P-1}} + \sqrt{\beta_+} \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3^3,T}^{err,P-1}} \right] \end{aligned}$$

In particular, for the order  $P = 0$ , we have :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_3^{err,0} \leq \delta^2 c_{p,w}^2 \mu_+ \|\hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,0} \leq \delta^2 c_{p,w}^2 \mu_+ \|\partial_3 \hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \mathcal{E}_{\partial_3^2,3}^{err,0} \leq \delta^2 c_{p,w}^2 \mu_+ \|\partial_3^2 \hat{J}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{cases} \quad (6.45)$$

so we have convergence for the longitudinal fields and the expected error estimates. But for the order  $P > 0$  we need to study the error for the transverse fields. To do it, we need an estimation of the longitudinal derivative of the electromagnetic fields. We have for every  $K$

**Lemma 6.4.2.** *We have for every  $K$*

$$\mathcal{E}_{\partial_3^K}^{err,P} \leq C \frac{\delta^{2p}}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ \delta_0^0 \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3^K \hat{J}_s\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=0}^K |s\beta_+^{(K-k)} + \alpha_+^{(K-k)}|^2 \mathcal{E}_{\partial_3^k}^P + \mathcal{E}_{\partial_3^{K+1}}^P \right]$$

Then we have

**Lemma 6.4.3.** *For every  $P = 1, 2$ ,*

$$\mathcal{E}_{\partial_3^K,3}^{err,P} \leq C \frac{\delta^{2(P+1)}}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^k |s\beta_+^{(K-k)} + \alpha_+^{(K-k)}|^2 |s\beta_+^{(k-j)} + \alpha_+^{(k-j)}|^2 \mathcal{E}_{\partial_3^j}^{P-1} + \sum_{k=0}^{K+1} |s\beta_+^{(K-k)} + \alpha_+^{(K-k)}|^2 \mathcal{E}_{\partial_3^k}^{P-1} + \mathcal{E}_{\partial_3^{K+2}}^{P-1} \right]$$

The previous formula is valid for every  $k$  if we add some assumptions on the regularity of the characteristic coefficients. We have

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\partial_3^K,3}^{err,P} \leq C \frac{\delta^{2(P+1)}}{(\eta + \alpha_-)^2} & \left[ |s\beta_+ + \alpha_+|^4 \mathcal{E}_{\partial_3^K}^{P-1} + |s\beta_+ + \alpha_+|^2 \mathcal{E}_{\partial_3^{K+1}}^{P-1} + \mathcal{E}_{\partial_3^{K+2}}^{P-1} + |s\beta'_+ + \alpha'_+|^4 \left( \sum_{k=0}^{K-1} \mathcal{E}_{\partial_3^k}^{P-1} \right) \right. \\ & \left. + |s\beta'_+ + \alpha'_+|^2 \left( \sum_{k=0}^K \mathcal{E}_{\partial_3^k}^{P-1} \right) \right] \end{aligned}$$

### 6.4.3 Estimation of the error on the residual by the use Poincaré-Friedrichs inequalities

**Estimation of the curl**

We use the equation (6.42)

$$\operatorname{rot} \hat{e}_T^{P,\delta} = -\delta s\hat{\mu} \left[ \hat{h}_3^{P,\delta} - \delta^P \hat{H}_3^P \right] \quad \text{and} \quad \operatorname{rot} \hat{h}_T^{P,\delta} = \delta s\hat{\mu} \left[ \hat{e}_3^{P,\delta} - \delta^P \hat{E}_3^P \right] + \delta \delta_p^0 \hat{J}_{s,3} \quad (6.46)$$

so we can prove the following lemma.

**Lemma 6.4.4.** *We have :*

$$\sqrt{\int_{\Omega} \mu^{-1} |\operatorname{rot} \widehat{e}_T^{P,\delta}|^2} \leq \delta |s + \alpha_+| \left[ \sqrt{\int_{\Omega} \mu |\widehat{h}_3^{P,\delta}|^2} + \delta^P \sqrt{\int_{\Omega} \mu |\widehat{H}_3^P|^2} \right],$$

and

$$\sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\operatorname{rot} \widehat{h}_T^{P,\delta}|^2} \leq \delta |s + \alpha_+| \left[ \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{e}_3^{P,\delta}|^2} + \delta^P \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{E}_3^P|^2} \right] + \delta \delta_p^0 \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{j}_3\|_{L^2(\Omega)}.$$

### Estimation of the divergence

For the divergence, we also use equation (6.42)

$$\operatorname{div} (s \widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{P,\delta}) = -\delta^{p+1} s \partial_3 \widehat{\varepsilon} \left[ \widehat{e}_3^{P,\delta} + \widehat{E}_3^P \right] - \delta^{p+1} s \widehat{\varepsilon} \partial_3 \left[ \widehat{e}_3^{P,\delta} + \widehat{E}_3^P \right] \quad \text{and} \quad \operatorname{div} (s \widehat{\mu} \widehat{h}_T^{P,\delta}) = -\delta^{p+1} s \partial_3 \widehat{\mu} \left[ \widehat{h}_3^{P,\delta} + \widehat{H}_3^P \right]$$

**Lemma 6.4.5.** *We have a bound for the divergence of the transverse fields error since :*

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} (\widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{P,\delta})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta^{(p+1)} \left| \varepsilon'_+ + \frac{\alpha'_{e,+}}{s} \right| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon \left( |\widehat{e}_3^{P,\delta}|^2 + |\widehat{E}_3^P|^2 \right)} \\ &\quad + \delta^{(p+1)} \left| 1 + \frac{\alpha_{e,+}}{s} \right| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon \left( |\partial_3 \widehat{e}_3^{P,\delta}|^2 + |\partial_3 \widehat{E}_3^P|^2 \right)}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} (\widehat{\mu} \widehat{h}_T^{P,\delta})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta^{(p+1)} \left| \mu'_+ + \frac{\alpha'_{m,+}}{s} \right| \sqrt{\mu_+} \sqrt{\int_{\Omega} \mu \left( |\widehat{h}_3^{P,\delta}|^2 + |\widehat{H}_3^P|^2 \right)} \\ &\quad + \delta^{(p+1)} \left| 1 + \frac{\alpha_{m,+}}{s} \right| \sqrt{\mu_+} \sqrt{\int_{\Omega} \mu \left( |\partial_3 \widehat{h}_3^{P,\delta}|^2 + |\partial_3 \widehat{H}_3^P|^2 \right)}. \end{aligned}$$

The bounds of lemma 6.4.5 are at least of order  $\delta^{(p+1)}$  since the estimation of the  $x_3^l$  derivative is :

$$\mathcal{E}_{\partial_3}^{err,P} \leq \frac{\delta^{2p}}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ \delta_p^0 \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{j}\|_{L^2(\Omega)} + |s \beta'_+ + \alpha'_+|^2 \mathcal{E}^P |s + \alpha_+|^2 \mathcal{E}_{\partial_3}^P + \max\left(\frac{\varepsilon}{\mu}, \frac{\mu}{\varepsilon}\right) \mathcal{E}_{\partial_3^2}^P \right]$$

The fact that the norm of both rotational and divergence are order  $\delta^{(P+1)}$  suggests to us the use the Poincaré-Friedrichs inequalities.

### Introducing the electrical potentials and currents and the Poincaré-Friedrichs inequalities

We introduce the residual terms :

$$\widehat{e}_T^{R,P,\delta} := \widehat{e}_T^{P,\delta} - \sum_{q=1}^Q v_q^{P,\delta} \nabla \widehat{\varphi}_e^q \quad \text{and} \quad \widehat{h}_T^{R,P,\delta} := \widehat{h}_T^{P,\delta} - \sum_{q=1}^Q i_q^{P,\delta} \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_m^q.$$

where the error on the electrical potentials  $\mathbf{v}^{P,\delta}$  and currents  $\mathbf{i}^{P,\delta}$  are defined in (6.40). Moreover the following orthogonal relations are satisfied :

$$\int_S \widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{R,P,\delta} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^q = 0 \quad \text{and} \quad \int_S \widehat{\mu} \widehat{h}_T^{R,P,\delta} \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi}_m^q = 0. \quad (6.47)$$

We also remark that

$$\operatorname{div} (\widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{R,P,\delta}) = \operatorname{div} (\widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{P,\delta}) \quad , \quad \operatorname{rot} \widehat{e}_T^{R,P,\delta} = \operatorname{rot} \widehat{e}_T^{P,\delta} \quad (6.48)$$

and

$$\operatorname{div} (\widehat{\mu} \widehat{h}_T^{R,P,\delta}) = \operatorname{div} (\widehat{\mu} \widehat{h}_T^{P,\delta}) \quad , \quad \operatorname{rot} \widehat{h}_T^{R,P,\delta} = \operatorname{rot} \widehat{h}_T^{P,\delta}. \quad (6.49)$$

The Poincaré-Friedrichs inequalities (theorem 1.5.1) say that

$$\left| \int_S \widehat{\varepsilon} |\widehat{e}_T^{P,\delta}|^2 \right| \leq c_{p,0}^2 \frac{1}{\varepsilon_- \left| 1 + \frac{\alpha_{e,-}}{s} \right|} \|\operatorname{div} (\widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{P,\delta})\|_{L^2(S)}^2 + c_{p,w}^2 \varepsilon_+ \left| 1 + \frac{\alpha_{e,+}}{s} \right| \|\operatorname{rot} \widehat{e}_T^{P,\delta}\|_{L^2(S)}^2 + \left| \widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta} \cdot \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta} \right|$$

and since  $|1 + \frac{\alpha_{e,-}}{s}| \int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{e}_T^{P,\delta}|^2 \leq \left| \int_S \widehat{\varepsilon} |\widehat{e}_T^{P,\delta}|^2 \right|$  and  $|\widehat{\mathbf{Y}}_e \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta} \cdot \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}| \leq |1 + \frac{\alpha_{e,+}}{s}| |\widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta} \cdot \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}|$  we have

$$\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{e}_T^{P,\delta}|^2 \leq \frac{c_{p,0}^2 |s|^2}{\varepsilon_- |s + \alpha_{e,-}|^2} \|\operatorname{div} (\widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{P,\delta})\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{p,w}^2 \varepsilon_+ \left| \frac{s + \alpha_{e,+}}{s + \alpha_{e,-}} \right| \|\operatorname{rot} \widehat{e}_T^{P,\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \frac{s + \alpha_{e,+}}{s + \alpha_{e,-}} \right| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta} \cdot \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}$$

and similarly with theorem 1.5.2 :

$$\int_{\Omega} \mu |\widehat{h}_T^{P,\delta}|^2 \leq \frac{c_{p,w}^2 |s|^2}{\mu_- |s + \alpha_{m,-}|^2} \|\operatorname{div} (\widehat{\mu} \widehat{h}_T^{P,\delta})\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{p,0}^2 \mu_+ \left| \frac{s + \alpha_{m,+}}{s + \alpha_{m,-}} \right| \|\operatorname{rot} \widehat{h}_T^{P,\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \frac{s + \alpha_{m,+}}{s + \alpha_{m,-}} \right| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{L}} \widehat{\mathbf{i}}^{P,\delta} \cdot \widehat{\mathbf{i}}^{P,\delta}$$

With Those two last inequalities, the lemmata 6.4.4 and 6.4.5, and since Poincaré's constants satisfy  $c_{p,0} \leq c_{p,w}$  we have the following lemma.

**Lemma 6.4.6.** *We can bound the error for the transverse fields :*

$$\mathcal{E}_T^{err,P} \leq \mathcal{E}_T^{err,R,P} + \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| \mathcal{E}_{LC}^{err,P}.$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T^{err,R,P} &= c_{p,w}^2 2c_-^{-2} \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| \delta_0^P \delta^2 \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{p,w}^2 4c_-^{-2} \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right|^3 \delta^2 \left[ \mathcal{E}_3^{err,P} + \delta^{2P} \mathcal{E}_3^P \right] \\ &\quad + c_{p,w}^2 4\beta_+ \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right|^2 \delta^{2(P+1)} \left[ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P} + \mathcal{E}_{\partial_3,3}^P \right] + c_{p,w}^2 4\beta_+ \left| \frac{s\beta'_+ + \alpha'_+}{s + \alpha_-} \right|^2 \delta^{2(P+1)} \left[ \mathcal{E}_3^{err,P} + \mathcal{E}_3^P \right] \end{aligned}$$

and the electrical energy error  $\mathcal{E}_{LC}^{err,P}$  defined in (6.41).

We know with this lemma that except  $\mathcal{E}_{LC}^{err,P}$  all the coefficients are at least of order  $\delta^{(2P+1)}$ . The next subsection is devoted to the estimation of  $\mathcal{E}_{LC}^{err,P}$ .

#### 6.4.4 Error estimate on the electrical potentials and currents

We can also give the error from the telegrapher model (with a proof similar to the one used for (6.32))

$$\begin{cases} i\omega \widehat{\mathbf{Y}}_e(x_3, \omega) \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}(x_3, \omega) + \partial_3 \widehat{\mathbf{i}}^{P,\delta}(x_3, \omega) = \left( \int_S \partial_3 \widehat{h}_T^{R,P,\delta} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q} \right)_{q=1;Q}, & (a) \\ i\omega \widehat{\mathbf{Z}}_m(x_3, \omega) \widehat{\mathbf{i}}^{P,\delta}(x_3, \omega) + \partial_3 \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}(x_3, \omega) = - \left( \int_S \partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\psi}_{m,q} \right)_{q=1;Q}, & (b) \end{cases} \quad (6.50)$$

**Lemma 6.4.7.** *The error resulting of the estimation of electrical potentials and currents is bounded by the energy of the  $x_3$ -derivative :*

$$\mathcal{E}_{LC}^{err,P} \leq \frac{\max c^2}{(\eta + \alpha_-)^2} \max \left( \int_S \mu |\partial_3 \widehat{h}_T^{R,P,\delta}|^2, \int_S \varepsilon |\partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta}|^2 \right)$$

*Proof.* We have the estimate

$$2\mathcal{E}_{LC}^{err,P} [\eta + \alpha_-] \leq \left| \int_{\Omega} \partial_3 \widehat{h}_T^{R,P,\delta} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}) \right| + \left| \int_{\Omega} \partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\psi}_m(\widehat{\mathbf{i}}^R) \right|.$$

We thus have

$$\left| \int_{\Omega} \partial_3 \widehat{h}_T^{R,P,\delta} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_e(\widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}) \right|^2 \leq \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\partial_3 \widehat{h}_T^{R,P,\delta}|^2 \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}, \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta})_{\mathbb{C}} \leq \max c^2 \int_{\Omega} \mu |\partial_3 \widehat{h}_T^{R,P,\delta}|^2 \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta}, \widehat{\mathbf{v}}^{P,\delta})_{\mathbb{C}}$$

and

$$\left| \int_{\Omega} \partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\psi}_m(\widehat{\mathbf{i}}^R) \right|^2 \leq \int_{\Omega} \mu^{-1} |\partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta}|^2 \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathbf{L}} \widehat{\mathbf{i}}^R, \widehat{\mathbf{i}}^R)_{\mathbb{C}} \leq \max c^2 \int_{\Omega} \varepsilon |\partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta}|^2 \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathbf{L}} \widehat{\mathbf{i}}^R, \widehat{\mathbf{i}}^R)_{\mathbb{C}}$$

□

So we need to prove that the following energy

$$\mathcal{E}_{\partial_3,T}^{err,R,P} := \frac{1}{2} \left[ \int_S \mu |\partial_3 \widehat{h}_T^{R,P,\delta}|^2 + \int_S \varepsilon |\partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta}|^2 \right]$$

is of order  $\delta^{2(P+1)}$ .

### Estimation of $\mathcal{E}_{\partial_3}^{err,R,P}$ with Poincaré-Friedrich inequalities

To do this we again use the Poincaré-Friedrich inequalities. We have

$$\operatorname{rot} \partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta} \stackrel{(6.48)}{=} \partial_3 \operatorname{rot} \widehat{e}_T^{P,\delta} \stackrel{(6.46)}{=} -\delta s \widehat{\mu}' \mu \left[ \widehat{h}_3^{P,\delta} - \delta^p \widehat{H}_3^P \right] - \delta s \widehat{\mu} \partial_3 \left[ \widehat{h}_3^{P,\delta} - \delta^p \widehat{H}_3^P \right]$$

We will not explain again how we bound both rotational and divergence and just give the result. For the curl we have

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} |\operatorname{rot} \partial_3 \widehat{e}_T^{R,P,\delta}|^2 \leq \delta |s \mu'_+ + \alpha'_{m,+}| \sqrt{\int_{\Omega} \mu |\widehat{h}_3^{P,\delta} - \delta^p \widehat{H}_3^{P,\delta}|^2} + \delta |s + \alpha_{m,+}| \sqrt{\int_{\Omega} \mu |\partial_3 \widehat{h}_3^{P,\delta} - \delta^p \partial_3 \widehat{H}_3^{P,\delta}|^2}, \quad (6.51)$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\operatorname{rot} \partial_3 \widehat{h}_T^{R,P,\delta}|^2 &\leq \delta |s \varepsilon'_+ + \alpha'_{e,+}| \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{e}_3^{P,\delta} - \delta^p \widehat{E}_3^{P,\delta}|^2} \\ &\quad + \delta |s + \alpha_{e,+}| \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\partial_3 \widehat{e}_3^{P,\delta} - \delta^p \partial_3 \widehat{E}_3^{P,\delta}|^2} \\ &\quad + \delta_p^0 \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\partial_3 \widehat{j}_3|^2}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

We have for the divergence :

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} (\widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{e}_T^{P,\delta})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta^{(p+1)} \left| \varepsilon''_+ + \frac{\alpha''_{e,+}}{s} \right| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon (|\widehat{e}_3^{P,\delta}|^2 + |\widehat{E}_3^P|^2)} \\ &\quad + \delta^{(p+1)} 2 \left| \varepsilon' + \frac{\alpha'_{e,+}}{s} \right| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon (|\partial_3 \widehat{e}_3^{P,\delta}|^2 + |\partial_3 \widehat{E}_3^P|^2)} \\ &\quad + \delta^{(p+1)} \left| 1 + \frac{\alpha_{e,+}}{s} \right| \sqrt{\varepsilon_+} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon (|\partial_3^2 \widehat{e}_3^{P,\delta}|^2 + |\partial_3^2 \widehat{E}_3^P|^2)}, \end{aligned} \quad (6.53)$$

and

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} (\widehat{\mu} \widehat{h}_T^{P,\delta})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \delta^{(p+1)} \left| \mu''_+ + \frac{\alpha''_{m,+}}{s} \right| \sqrt{\mu_+} \sqrt{\int_{\Omega} \mu (|\widehat{h}_3^{P,\delta}|^2 + |\widehat{H}_3^P|^2)} \\ &\quad + \delta^{(p+1)} 2 \left| \mu' + \frac{\alpha'_{m,+}}{s} \right| \sqrt{\mu_+} \sqrt{\int_{\Omega} \mu (|\partial_3 \widehat{h}_3^{P,\delta}|^2 + |\partial_3 \widehat{H}_3^P|^2)} \\ &\quad + \delta^{(p+1)} \left| 1 + \frac{\alpha_{m,+}}{s} \right| \sqrt{\mu_+} \sqrt{\int_{\Omega} \mu (|\partial_3^2 \widehat{h}_3^{P,\delta}|^2 + |\partial_3^2 \widehat{H}_3^P|^2)}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Then to prove that the two estimates of the divergence are bounded by  $\delta^{(P+1)}$ , we need to do an estimation of the energy of the second  $x_3$ -derivative

$$\mathcal{E}_{\partial_3^2}^{err,P} := \frac{1}{2} \left[ \int_S \mu |\partial_3^2 \widehat{h}_T^{P,\delta}|^2 + \int_S \varepsilon |\partial_3^2 \widehat{e}_T^{P,\delta}|^2 \right],$$

which can be bound (the calculus are left to the reader) by

$$\mathcal{E}_{\partial_3^2}^{err,P} \leq \frac{\delta^{2p}}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ \delta_p^0 \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{j}\|_{L^2(\Omega)} + |s \beta''_+ + \alpha''_+|^2 \mathcal{E}^P + 2 |\beta'_+ s + \alpha'_+|^2 \mathcal{E}_{\partial_3}^P + |s + \alpha_+|^2 \mathcal{E}_{\partial_3^2}^P + \max\left(\frac{\varepsilon}{\mu}, \frac{\mu}{\varepsilon}\right) \mathcal{E}_{\partial_3^3}^P \right]$$

To conclude we have with the Poincaré-Friedrich inequalities and the estimations we just gave of both rotational (see equations (6.51), (6.52)) and divergence (see equations (6.53), (6.54)) the following lemma.

**Lemma 6.4.8.**

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\partial_3, T}^{err, P} &\leq 2c_{p, w}^2 c_-^{-2} \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| \delta_0^P \delta \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{J}_3\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ 4c_{p, w}^2 c_-^{-2} \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| |s\mu'_+ + \alpha'_{m, +}|^2 \delta^2 \left[ \mathcal{E}_3^{err, P} + \delta^{2P} \mathcal{E}_3^P \right] + 4c_{p, w}^2 c_-^{-2} \frac{|s + \alpha_+|^3}{|s + \alpha_-|} \delta^2 \left[ \mathcal{E}_{\partial_3, 3}^{err, P} + \delta^{2P} \mathcal{E}_{\partial_3, 3}^P \right] \\ &+ 4c_{p, w}^2 \beta_+ \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right|^2 \delta^{2(P+1)} \left[ \mathcal{E}_{\partial_3, 3}^{err, P} + \mathcal{E}_{\partial_3, 3}^P \right] + 8c_{p, w}^2 \beta_+ \left| \frac{s\beta'_+ + \alpha'_+}{s + \alpha_-} \right|^2 \delta^{2(P+1)} \left[ \mathcal{E}_{\partial_3, 3}^{err, P} + \mathcal{E}_{\partial_3, 3}^P \right] \\ &+ 4c_{p, w}^2 \beta_+ \left| \frac{s\beta''_+ + \alpha''_+}{s + \alpha_-} \right|^2 \delta^{2(P+1)} \left[ \mathcal{E}_3^{err, P} + \mathcal{E}_3^P \right] + \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| (VB_{p, w} + IB_{p, w}) \end{aligned}$$

with

$$VB_{p, w} := \left| \sum_{q, q'}^Q (\widehat{\mathbf{Y}}_e^{-1})_{q, q'} \left( \int_S \widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{e}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^q \right) \left( \int_S \widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{e}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^{q'} \right) \right|^2,$$

and

$$IB_{p, w} := \left| \sum_{q, q'}^Q (\widehat{\mathbf{Z}}_m^{-1})_{q, q'} \left( \int_S \widehat{\mu} \partial_3 \widehat{h}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \widehat{\psi}_m^q \right) \left( \int_S \widehat{\mu} \partial_3 \widehat{h}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \widehat{\psi}_m^{q'} \right) \right|^2.$$

**Estimation of  $VB_{p, w}$  and  $IB_{p, w}$**

We need to bound the last terms in the Poincaré-Friedrichs inequality

$$VB_{p, w} \quad \text{and} \quad IB_{p, w}.$$

With the conjugaison lemma 1.3.5, we have

$$\widehat{\mathbf{Y}}_e^{-1} = \mathbf{Z}(\widehat{\varepsilon}^{-1}, S)$$

and then with property 1.3.2 we have

$$VB_{p, w} \leq \frac{\lambda_{\mathbf{e}}^{-1}}{\varepsilon_- \left| 1 + \frac{\alpha_{e, -}}{s} \right|} \left| \sum_{q=1}^Q \int_S \widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{e}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^q \right|^2.$$

Since  $\widehat{e}_T^{R, P, \delta}$  is orthogonal to  $\nabla \widehat{\varphi}_e^q$  (see (6.47)) we have by  $x_3$ -derivative

$$\int_S \widehat{\varepsilon} \partial_3 \widehat{e}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^q + \int_S \partial_3 \widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^q + \int_S \widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \partial_3 \widehat{\varphi}_e^q = 0,$$

then with the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\left| \int_S \partial_3 \widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_e^q \right|^2 \leq \left( \int_S \frac{|\partial_3 \widehat{\varepsilon}|^2}{|\widehat{\varepsilon}|} |\nabla \widehat{\varphi}_e^q|^2 \right) \int_S \varepsilon |\widehat{e}_T^{R, P, \delta}|^2 \leq \frac{|s\varepsilon'_+ + \alpha'_{e, +}|^2}{|s| |s + \alpha_{e, -}|} \left( \int_S |\widehat{\varepsilon}| |\nabla \widehat{\varphi}_e^q|^2 \right) \int_S \varepsilon |\widehat{e}_T^{R, P, \delta}|^2$$

and similarly with the Cauchy-Schwarz inequality again, we have

$$\left| \int_S \widehat{\varepsilon} \widehat{e}_T^{R, P, \delta} \cdot \nabla \partial_3 \widehat{\varphi}_e^q \right|^2 \leq \left( \int_S |\widehat{\varepsilon}| |\nabla \partial_3 \widehat{\varphi}_e^q|^2 \right) \left| 1 + \frac{\alpha_{e, +}}{s} \right| \int_S \varepsilon |\widehat{e}_T^{R, P, \delta}|^2.$$

Then we note that  $\partial_3 \widehat{\varphi}_{e, q}$  is the solution of

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\widehat{\varepsilon} \nabla \partial_3 \widehat{\varphi}_{e, q}) = -\mathbf{div}(\partial_3 \widehat{\varepsilon} \nabla \widehat{\varphi}_{e, q}), & \text{in } S, \\ \widehat{\varphi}_{e, q} = 0, & \text{on } \partial S, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \mathbf{div}(\widehat{\mu} \nabla \partial_3 \widehat{\psi}_{m, q}) = -\mathbf{div}(\partial_3 \widehat{\mu} \nabla \widehat{\psi}_{m, q}), & \text{in } S, \\ \partial_n \partial_3 \widehat{\psi}_{m, q} = 0, & \text{on } \partial S, \end{cases}$$

By the weak formulation of the above problem, we have

$$\int_S |\widehat{\varepsilon}| |\nabla \partial_3 \widehat{\varphi}_e^q|^2 = \left| \int_S \partial_3 \widehat{\varphi}_e^q \cdot \overline{\nabla \partial_3 \widehat{\varphi}_e^q} \right| \leq \sqrt{\int_S |\widehat{\varepsilon}| |\nabla \partial_3 \widehat{\varphi}_e^q|^2} \sqrt{\int_S \left| \frac{\partial_3 \widehat{\varepsilon}}{\widehat{\varepsilon}} \right|^2 |\widehat{\varepsilon}| |\nabla \widehat{\varphi}_e^q|^2},$$



so

$$\int_S |\hat{\varepsilon}| |\nabla \partial_3 \hat{\varphi}_e^q|^2 \leq \left| \frac{s \varepsilon'_+ + \alpha'_{e,+}}{s + \alpha_{e,-}} \right|^2 \left( \int_S |\hat{\varepsilon}| |\nabla \hat{\varphi}_e^q|^2 \right),$$

and thus

$$\left| \int_S \hat{\varepsilon} \hat{e}_T^{R,P,\delta} \cdot \nabla \partial_3 \hat{\varphi}_e^q \right|^2 \leq \left| \frac{s \varepsilon'_+ + \alpha'_{e,+}}{s + \alpha_{e,-}} \right|^2 \left| 1 + \frac{\alpha_{e,+}}{s} \right| \left( \int_S |\hat{\varepsilon}| |\nabla \hat{\varphi}_e^q|^2 \right) \int_S \varepsilon |\hat{e}_T^{R,P,\delta}|^2.$$

We thus have

$$\left| \int_S \hat{\varepsilon} \partial_3 \hat{e}_T^{R,P,\delta} \cdot \nabla \hat{\varphi}_e^q \right| \leq \left[ \frac{|s \varepsilon'_+ + \alpha'_{e,+}|^2}{|s| |s + \alpha_{e,-}|} + \left| \frac{s \varepsilon'_+ + \alpha'_{e,+}}{s + \alpha_{e,-}} \right|^2 \frac{|s + \alpha_{e,+}|}{|s|} \right] \left( \int_S |\hat{\varepsilon}| |\nabla \hat{\varphi}_e^q|^2 \right) \int_S \varepsilon |\hat{e}_T^{R,P,\delta}|^2$$

then we use (1.26)

$$\left| \int_S \hat{\varepsilon} \partial_3 \hat{e}_T^{R,P,\delta} \cdot \nabla \hat{\varphi}_e^q \right| \leq \left[ \left| \frac{s \varepsilon'_+ + \alpha'_{e,+}}{s + \alpha_{e,-}} \right|^2 \frac{|s + \alpha_{e,-}|}{|s|} + \left| \frac{s \varepsilon'_+ + \alpha'_{e,+}}{s + \alpha_{e,-}} \right|^2 \frac{|s + \alpha_{e,+}|}{|s|} \right] \varepsilon_+ \left| 1 + \frac{\alpha_{e,+}}{s} \right| \int_S \varepsilon |\hat{e}_T^{R,P,\delta}|^2$$

To conclude we have

$$VB_{p,w} \leq 2 \lambda_{\mathfrak{C}}^{-1} \text{Tr}(\mathfrak{C}) \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} \frac{|s \varepsilon'_+ + \alpha'_{e,+}|^2 |s + \alpha_{e,+}|^2}{|s| |s + \alpha_{e,-}|^3} \int_S \varepsilon |\hat{e}_T^{R,P,\delta}|^2,$$

and similarly

$$IB_{p,w} \leq 2 \lambda_{\mathfrak{C}} \text{Tr}(\mathfrak{C}^{-1}) \frac{\mu_+}{\mu_-} \frac{|s \mu'_+ + \alpha'_{m,+}|^2 |s + \alpha_{m,+}|^2}{|s| |s + \alpha_{m,-}|^3} \int_S \mu |\hat{h}_T^{R,P,\delta}|^2,$$

then with the Poincaré-Friedrich inequalities and (6.48, 6.49), we have

$$\left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| (VB_{p,w} + IB_{p,w}) \leq K_{\mathfrak{C}} \beta_+ \frac{|s \beta'_+ + \alpha'_+|^2 |s + \alpha_+|^3}{|s| |s + \alpha_-|^4} \mathcal{E}_T^{err,R,P}, \quad (6.55)$$

with

$$K_{\mathfrak{C}} := 4 \max(\lambda_{\mathfrak{C}}^{-1} \text{Tr}(\mathfrak{C}), \lambda_{\mathfrak{C}} \text{Tr}(\mathfrak{C}^{-1})). \quad (6.56)$$

## Conclusion

Collecting (6.55), lemma 6.4.8 and lemma 6.4.7, we have :

**Lemma 6.4.9.** *The error on the electrical potentials and currents are bounded by known quantities*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{LC}^{err,P} &\leq \frac{\delta^2}{(\eta + \alpha_-)^2} \delta_0^P \left[ K_0(|s|) \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \hat{J}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + K_{\partial_3,0}(|s|) \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \hat{J}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &+ \frac{\delta^2}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ \tilde{K}_1(|s|) \left[ \mathcal{E}_3^{err,P} + \delta^{2P} \mathcal{E}_3^P \right] + \tilde{K}_2(|s|) \left[ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P} + \delta^{2P} \mathcal{E}_{\partial_3,3}^P \right] \right] \\ &+ \frac{\delta^{2(P+1)}}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ K_1(|s|) \left[ \mathcal{E}_3^{err,P} + \mathcal{E}_3^P \right] + K_2(|s|) \left[ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P} + \mathcal{E}_{\partial_3,3}^P \right] + K_3(|s|) \left[ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P} + \mathcal{E}_{\partial_3,3}^P \right] \right] \end{aligned}$$

With the following rational fractions :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0(|s|) := (4 c_-^{-2} c_+^2) c_{p,w}^2 K_{\mathfrak{E}} \frac{|s \beta'_+ + \alpha'_+|^2 |s + \alpha_+|^4}{|s| |s + \alpha_-|^5} \\ K_{\partial_{3,0}}(|s|) := (4 c_-^{-2} c_+^2) c_{p,w}^2 \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| \\ K_1(|s|) := (8 \beta_+ c_+^2) c_{p,w}^2 \left( \left| \frac{s \beta''_+ + \alpha''_+}{s + \alpha_-} \right|^2 + K_{\mathfrak{E}} \frac{|s \beta'_+ + \alpha'_+|^4 |s + \alpha_+|^3}{|s| |s + \alpha_-|^6} \right) \\ \tilde{K}_1(|s|) := (8 c_-^{-2} c_+^2) c_{p,w}^2 \left( \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| |s \mu'_+ + \alpha'_{m,+}|^2 + K_{\mathfrak{E}} \frac{|s \beta'_+ + \alpha'_+|^2 |s + \alpha_+|^6}{|s| |s + \alpha_-|^5} \right) \\ K_2(|s|) = (8 \beta_+ c_+^2) c_{p,w}^2 \left( 2 \left| \frac{s \beta'_+ + \alpha'_+}{s + \alpha_-} \right|^2 + K_{\mathfrak{E}} \frac{|s \beta'_+ + \alpha'_+|^2 |s + \alpha_+|^5}{|s| |s + \alpha_-|^6} \right) \\ \tilde{K}_2(|s|) := (8 c_-^{-2} c_+^2) c_{p,w}^2 \frac{|s + \alpha_+|^3}{|s + \alpha_-|} \\ K_3(|s|) := (8 \beta_+ c_+^2) c_{p,w}^2 \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right|^2. \end{array} \right.$$

There exists a constant  $C$  that depends only of the physical and geometrical properties of the cable (in the sense of the definition 6.1.1) such that the rational fractions of the lemma 6.4.9 satisfy

$$K_0(|s|) + K_{\partial_{3,0}}(|s|) + K_1(|s|) + \tilde{K}_1(|s|) + K_2(|s|) + K_3(|s|) \leq C \left( \sum_{k=-7}^2 |s|^k \right).$$

By making some assumptions, we can simplify the expression of the rational fractions in the lemma 6.4.9.

**(i) Non losses cases ( $\alpha_+ = 0$ )**

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0(|s|) := (4 c_-^{-2} c_+^2) c_{p,w}^2 K_{\mathfrak{E}} (\beta'_+)^2 \\ K_{\partial_{3,0}}(|s|) := (4 c_-^{-2} c_+^2) c_{p,w}^2 \\ K_1(|s|) := (8 \beta_+ c_+^2) c_{p,w}^2 \left( (\beta''_+)^2 + K_{\mathfrak{E}} (\beta')^2 \right) \\ \tilde{K}_1(|s|) := (8 c_-^{-2} c_+^2) c_{p,w}^2 (\beta'_+)^2 (1 + K_{\mathfrak{E}}) |s|^2 \\ K_2(|s|) = (8 \beta_+ c_+^2) c_{p,w}^2 (2 + K_{\mathfrak{E}}) (\beta'_+)^2 \\ \tilde{K}_2(|s|) := (8 c_-^{-2} c_+^2) c_{p,w}^2 |s|^2 \\ K_3(|s|) := (8 \beta_+ c_+^2) c_{p,w}^2 \end{array} \right.$$

There exists a constant  $C$  that depends only of the physical and geometrical properties of the cable (in the sense of the definition 6.1.1) such that if  $\alpha_+ = 0$  then

$$K_0(|s|) + K_{\partial_{3,0}}(|s|) + K_1(|s|) + \tilde{K}_1(|s|) + K_2(|s|) + K_3(|s|) \leq C(1 + |s|^2).$$

**(ii) cylindrical case ( $\beta'_+ = 0$  and  $\alpha'_+ = 0$ )**

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0(|s|) := 0 \\ K_{\partial_3,0}(|s|) := (4c_-^{-2}c_+^2)c_{p,w}^2 \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right| \\ K_1(|s|) := 0 \\ \tilde{K}_1(|s|) := 0 \\ K_2(|s|) = 0 \\ \tilde{K}_2(|s|) := (8c_-^{-2}c_+^2)c_{p,w}^2 \frac{|s+\alpha_+|^3}{|s+\alpha_-|} \\ K_3(|s|) := (8\beta_+c_+^2)c_{p,w}^2 \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right|^2 \end{array} \right.$$

There exists a constant  $C$  that depends only of the physical and geometrical properties of the cable (in the sense of the definition 6.1.1) such that if  $\beta'_+ = 0$  and  $\alpha'_+ = 0$  then

$$K_0(|s|) + K_{\partial_3,0}(|s|) + K_1(|s|) + \tilde{K}_1(|s|) + K_2(|s|) + K_3(|s|) \leq C \left( \sum_{k=-2}^2 |s|^k \right).$$

**Lemma 6.4.10.** *The error estimation of the transverse fields are*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T^{err,P} &\leq \delta_0^P \delta^2 \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right| \left[ \left( c_{p,w}^2 2c_-^{-2} + \frac{K_0(|s|)}{(\eta+\alpha_-)^2} \right) \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \hat{J}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{K_{\partial_3,0}(|s|)}{(\eta+\alpha_-)^2} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \hat{J}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &+ \delta^2 \left[ c_{p,w}^2 4c_-^{-2} \frac{|s+\alpha_+|^3}{|s+\alpha_-|} + \frac{1}{(\eta+\alpha_-)^2} \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right| \tilde{K}_1(|s|) \right] \left[ \mathcal{E}_3^{err,P} + \delta^{2P} \mathcal{E}_3^P \right] \\ &+ \frac{\delta^2}{(\eta+\alpha_-)^2} \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right| \tilde{K}_2(|s|) \left[ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P} + \delta^{2P} \mathcal{E}_{\partial_3,3}^P \right] \\ &+ \delta^{2(P+1)} \left[ c_{p,w}^2 4\beta_+ \left| \frac{s\beta'_+ + \alpha'_+}{s+\alpha_-} \right|^2 + \frac{1}{(\eta+\alpha_-)^2} \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right| K_1(|s|) \right] \left[ \mathcal{E}_3^{err,P} + \mathcal{E}_3^P \right] \\ &+ \delta^{2(P+1)} \left[ c_{p,w}^2 4\beta_+ \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right|^2 + \frac{1}{(\eta+\alpha_-)^2} \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right| K_2(|s|) \right] \left[ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P} + \mathcal{E}_{\partial_3,3}^P \right] \\ &+ \frac{\delta^{2(P+1)}}{(\eta+\alpha_-)^2} \left| \frac{s+\alpha_+}{s+\alpha_-} \right| K_3(|s|) \left[ \mathcal{E}_{\partial_3,3}^{err,P} + \mathcal{E}_{\partial_3,3}^P \right]. \end{aligned}$$

## 6.5 Collecting all the results to prove and improve the main theorem

On the other hand the truth of the thoughts communicated here seems to me unassailable and definitive. I am, therefore, of the opinion that the problems have in essentials been finally solved.

Lord Russel

### 6.5.1 Truncature error estimates for the limit order

**Theorem 6.5.1.** *If we assume that the source is regular enough*

$$\hat{J}_{s,T} \in L^2(\Omega) \quad \text{and} \quad \hat{J}_{s,3}, \partial_3 \hat{J}_{s,3}, \partial_3^2 \hat{J}_{s,3} \in L^2(\Omega)$$

then the error between our telegrapher's model of order 0 and the full Maxwell's equation is bounded in the Laplace domain by a power of the small parameter  $\delta$ . Firstly, the estimation of the error on the electrical potentials and

currents is

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{LC}^{err,0} &\leq \frac{\delta^2}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ \mathsf{K}_0(|s|) \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mathsf{K}_{\partial_3,0}(|s|) \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + \frac{\delta^4 c_{p,w}^2 \mu_+}{(\eta + \alpha_-)^2} \left[ (\mathsf{K}_1(|s|) + \widetilde{\mathsf{K}}_1(|s|)) \|\widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\mathsf{K}_2(|s|) + \widetilde{\mathsf{K}}_2(|s|)) \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mathsf{K}_3(|s|) \|\partial_3^2 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Secondly, the estimation of the error on the transverse electromagnetic fields is

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T^{err,0} &\leq \delta^2 \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| \left[ \left( c_{p,w}^2 2 c_-^{-2} + \frac{\mathsf{K}_0(|s|)}{(\eta + \alpha_-)^2} \right) \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mathsf{K}_{\partial_3,0}(|s|)}{(\eta + \alpha_-)^2} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + \delta^4 c_{p,w} \mu_+ \left[ c_{p,w}^2 4 c_-^{-2} \frac{|s + \alpha_+|^3}{|s + \alpha_-|} + c_{p,w}^2 4 \beta_+ \left| \frac{s \beta'_+ + \alpha'_+}{s + \alpha_-} \right|^2 + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| (\mathsf{K}_1(|s|) + \widetilde{\mathsf{K}}_1(|s|)) \right] \|\widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \delta^4 c_{p,w} \mu_+ \left[ c_{p,w}^2 4 \beta_+ \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right|^2 + \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^2} \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| (\mathsf{K}_2(|s|) + \widetilde{\mathsf{K}}_2(|s|)) \right] \|\partial_3 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\delta^4 c_{p,w} \mu_+}{(\eta + \alpha_-)^2} \left| \frac{s + \alpha_+}{s + \alpha_-} \right| \mathsf{K}_3(|s|) \|\partial_3^2 \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Thirdly, the error on the longitudinal electromagnetic fields is

$$\mathcal{E}_3^{err,0} \leq \delta^2 c_{p,w}^2 \mu_+ \left\| \widehat{\mathcal{J}}_s \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

All the rational fractions  $\mathsf{K}_0(|s|)$ ,  $\mathsf{K}_{\partial_3,0}(|s|)$ ,  $\mathsf{K}_1(|s|)$ ,  $\widetilde{\mathsf{K}}_1(|s|)$ ,  $\mathsf{K}_2(|s|)$ ,  $\widetilde{\mathsf{K}}_2(|s|)$  and  $\mathsf{K}_3(|s|)$  are defined in the lemma 6.4.9.

*Proof.* With the lemma 6.4.9, the error estimates on the longitudinal fields (6.45) and the fact that the longitudinal fields of order 0 are null we have the bounds on  $\mathcal{E}_T^{err,0}$ . We conclude with (6.29) for the estimation of the error on the electrical potentials and currents. Then the estimation of the error on the transverse electromagnetic fields is obtained with the lemma 6.4.6.  $\square$

It is easy to find the bounds of the theorem 6.4.1 with the theorem 6.5.1 and the following lemma which is an application of the Young's inequality.

**Lemma 6.5.1.** *There exists a constant  $C$  independent<sup>4</sup> of  $s$*

$$\left( \sum_{k=-K'}^K |s|^k \right) \leq C \left( 1 + |s|^2 \lceil \frac{K-1}{2} \rceil + |s|^{-2} \lceil \frac{K'+1}{2} \rceil \right)$$

with  $\lceil \cdot \rceil$  the ceiling function.

## 6.5.2 Truncature error estimation for orders $p = 1, 2$

**Theorem 6.5.2.** *Consider an integer  $0 < P \leq 2$ . If the source satisfies*

$$\partial_3^k \widehat{\mathcal{J}}_{s,T} \in H(\mathbf{div}, S) \quad \text{and} \quad \partial_3^k \widehat{\mathcal{J}}_{s,3} \in L^2(S) \quad \text{for} \quad k = 0 \dots P$$

then we have for order  $P$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_3^{err,P} \leq \delta^{4P} (C_J + \delta^2) \left( \sum_{k=0}^P \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^{2k}} \right) \mathsf{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \|\operatorname{div} \partial_3^{p-2k} \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \widehat{\mathcal{J}}_{s,3}\|^2 \right], \\ \mathcal{E}_T^{err,P} \leq \delta^{4(P+1)} (C_J + \delta^2) \left( \sum_{k=0}^{P+1} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^{2k}} \right) \mathsf{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \|\operatorname{div} \partial_3^{p-2k} \widehat{\mathcal{J}}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \widehat{\mathcal{J}}_{s,3}\|^2 \right], \end{cases}$$

4. More precisely,  $C$  depends only of  $K$  and  $K'$

and the electrical energy error satisfies

$$\mathcal{E}_{LC}^{err,P} \leq \delta^{4(P+1)} (C_J + \delta^2) \left( \sum_{k=1}^{P+1} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^{2k}} \right) \mathbb{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{P}{2} \rfloor} \|\operatorname{div} \partial_3^{p-2k} \hat{J}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \hat{J}_{s,3}\|^2 \right]$$

with  $\mathbb{K} \in \mathbb{K}$  (see definition 6.1.1) and  $C_J = 0$  if the source satisfies

$$\operatorname{div} \hat{J}_{s,T}^\delta = \hat{J}_{s,3}^\delta = 0$$

and  $C_J = 1$  if not.

*Proof.* We demonstrate it by recurrence with lemmata 6.4.1, 6.4.6 and 6.4.9 and the theorem 6.3.2.  $\square$

### 6.5.3 Error estimates in time domain

We are interested in knowing if the telegrapher's model we proposed is valid in time domain for quite long times  $T > 1$ . To return to the time domain from the study we did in the Laplace domain, we use the theorem 12.2.1 and the corollary 12.2.1. To do this, we first remark that all the constant of the form

$$\left( \sum_{p=0}^P \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^p} \right) \mathbb{K}(|s|) \quad \text{with } \mathbb{K} \in \mathbb{K}$$

are what we called "admissible for the time domain" in the theorem 12.2.1 and that the inequalities of theorems 6.5.1 and 6.4.2 are suitable for the application of the theorem 12.2.1 (and the corollary 12.2.1 for regularity  $L^\infty$  in time).

**Theorem 6.5.3.** *Consider  $T > 1$ . If we assume that the source is regular enough (in time domain)*

$$J_{s,T} \in H^1(]0, T[, L^2(\Omega)), \partial_3 J_{s,T} \in H^1(]0, T[, L^2(\Omega)), \partial_3^2 J_{s,T} \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega)),$$

and

$$J_{s,3} \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega)), \partial_3 J_{s,3} \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega)),$$

then there exists a constant  $C$  independent of  $T$  and  $\delta$  (more precisely  $C$  is "elementary with respect to the physical and geometrical properties of the cable" in the sense of the definition 6.1.1) such that :

$$\|\mathbf{V}^\delta - \mathbf{V}^0\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{I}^\delta - \mathbf{I}^0\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 \leq C \left( \frac{\delta T}{1 + \alpha_- T} \right)^2 \left[ C_{J,3} + \delta^2 (C_{J,T,0} + C_{J,T,1} + C_{J,T,2}) \right]$$

with

$$\begin{cases} C_{J,3} := \|J_{s,3}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^3 J_{s,3}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_3 J_{s,3}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 \partial_3 J_{s,3}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,0} := \|J_{s,T}\|_{H^1(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^3 J_{s,T}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,1} := \|\partial_3 J_{s,T}\|_{H^1(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^4 \partial_3 J_{s,T}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,2} := \|\partial_3^2 J_{s,T}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 \partial_3^2 J_{s,T}\|_{H^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2. \end{cases}$$

In some particular cases the constant  $C_{J,3}$ ,  $C_{J,T,0}$ ,  $C_{J,T,1}$  and  $C_{J,T,2}$  can be simplified.

(i) **Non losses cases** ( $\alpha_+ = 0$ )

$$\begin{cases} C_{J,3} := \|J_{s,3}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_3 J_{s,3}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,0} := \|J_{s,T}\|_{H^1(]0, T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,1} := \|J_{s,T}\|_{H^1(]0, T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,2} := \|J_{s,T}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2, \end{cases}$$

(ii) cylindrical case ( $\beta'_+ = 0$  and  $\alpha'_+ = 0$ )

$$\begin{cases} C_{J,3} := \|\partial_3 J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 \partial_3 J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,0} := 0 \\ C_{J,T,1} := \|J_{s,T}\|_{H^1([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 \partial_3 J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,2} := \|J_{s,T}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 J_{s,T}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2. \end{cases}$$

**Theorem 6.5.4.** Consider  $T > 1$ . If we assume that the source is enough regular (in time domain) :

$$J_{s,T} \in H^1([0, T[, L^2(\Omega)), \partial_3 J_{s,T} \in H^1([0, T[, L^2(\Omega)), \partial_3^2 J_{s,T} \in H^1([0, T[, L^2(\Omega)),$$

and

$$J_{s,3} \in L^2([0, T[, L^2(\Omega)), \partial_3 J_{s,3} \in L^2([0, T[, L^2(\Omega)),$$

then there exists a constant  $C$  independent of  $T$  and  $\delta$  (more precisely  $C$  depends only of the physical and geometrical properties of the cable in the sense of the definition 6.1.1) such that the (truncature) error between our limit telegrapher's model and the full rescaled Maxwell's equations is bounded in the time domain by a power of the small parameter  $\delta$

$$\begin{aligned} \|E_T^\delta - E_T^0\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|H_T^\delta - H_T^0\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 &\leq C \left( \frac{\delta T}{1 + \alpha_- T} \right)^2 \left[ C_{J,3}^T + \delta^2 (C_{J,T,0}^T + C_{J,T,1}^T + C_{J,T,2}^T) \right] \\ &\quad + C \delta^2 \left[ D_{J,3}^T + \delta^2 (D_{J,T,0}^T + C_{J,T,1}^T + D_{J,T,2}^T) \right] \end{aligned}$$

and

$$\|E_3^\delta - E_3^0\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|H_3^\delta - H_3^0\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 \leq \delta^2 C \|J_s\|_{H^1([0,T[, L^2(\Omega))}^2.$$

with

$$\begin{cases} C_{J,3}^T := \|J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^4 J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_3 J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 \partial_3 J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,0}^T := \|J_{s,T}\|_{H^1([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^4 J_{s,T}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,1}^T := \|\partial_3 J_{s,T}\|_{H^1([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^4 \partial_3 J_{s,T}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2, \\ C_{J,T,2}^T := \|\partial_3^2 J_{s,T}\|_{H^1([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 \partial_3^2 J_{s,T}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2. \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} D_{J,3}^T := \|J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^2 J_{s,3}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2 \\ D_{J,T,0}^T := \|J_{s,T}\|_{H^1([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 J_{s,T}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2, \\ D_{J,T,1}^T := \|\partial_3 J_{s,T}\|_{H^1([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|I^1 \partial_3 J_{s,T}\|_{L^2([0,T[, L^2(\Omega))}^2, \end{cases}$$

Then for the other orders with the theorem 6.4.2 we have the theorem that follow.

**Theorem 6.5.5.** We assume that the source satisfies

$$\partial_3^k \hat{J}_{s,T} \in H^\infty([0, T[, H(\mathbf{div}, S) \otimes L^2(\mathbb{R})) \quad \text{and} \quad \partial_3^k \hat{J}_{s,3} \in H^\infty([0, T[, L^2(\Omega)), \quad \text{for } k = 0 \dots P.$$

There exist finite integers  $K$  and  $K'$  such that for order  $P > 0$  and  $T > 1$  we have

$$\mathcal{E}_3^{err,P} \leq \left( \frac{\delta T}{1 + \alpha_- T} \right)^{2P} C_J^P \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_T^{err,P} \leq \left( \frac{\delta T}{1 + \alpha_- T} \right)^{2(P+1)} C_J^P,$$

and the electrical energy error satisfies

$$\|\mathbf{V}^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \mathbf{V}^p\|_{L^\infty([0,T[, L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{I}^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \mathbf{I}^p\|_{L^\infty([0,T[, L^2(\Omega))}^2 \leq \left( \frac{\delta T}{1 + \alpha_- T} \right)^{2(P+1)} C_J^P$$

with

$$C_J^P = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{P}{2} \rfloor} \left( \| \operatorname{div} \partial_3^{p-2k} J_{s,T} \|_{H^K}^2(\mathbb{J}_0, T[, L^2(\Omega)) + \| I^{K'} \operatorname{div} \partial_3^{p-2k} J_{s,T} \|_{L^2}^2(\mathbb{J}_0, T[, L^2(\Omega)) \right. \\ \left. + \| \partial_3^{p-2k} J_{s,3} \|_{H^K}^2(\mathbb{J}_0, T[, L^2(\Omega)) + \| I^{K'} \partial_3^{p-2k} J_{s,3} \|_{L^2}^2(\mathbb{J}_0, T[, L^2(\Omega)) \right).$$

## 6.6 Two generalizations

### 6.6.1 The non cylindrical case

In the previous chapter we studied the telegrapher's model in the non cylindrical case for the orders zero to two. In view of the complexity of the order 2 and since this model incorporates the defaults that we want to highlight, we have not seen any benefit in studying higher orders. In this section we are interested in knowing if the solution of the telegrapher's model converges with the solution of the full Maxwell's equations when the anstanz  $\delta$  tends to zero. To prove it for the orders one and two, we can adapt the procedure used in the proof of theorem 6.4.3 in the non cylindrical case.

In the non cylindrical case the equation (6.42) is still valid but the boundaries conditions (6.43) on  $\partial\Omega$  differ

$$\begin{cases} \delta^{-1} \widehat{e}_T^{P,\delta} \times n = 0 \\ \delta^{-1} \widehat{e}_3^{P,\delta} n - g \widehat{e}_T^{P,\delta} = g \delta^P \widehat{E}_T^P \\ \delta^{-1} \widehat{h}_T^{P,\delta} \cdot n + g \widehat{h}_3^{P,\delta} = -g \delta^P \widehat{H}_3^P \end{cases} \quad (6.57)$$

and the Green's formula (6.16) differs too

$$\int_{\Omega} \operatorname{curl}_{\delta} \begin{pmatrix} T \\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix} - \int_{\Omega} \begin{pmatrix} T \\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \operatorname{curl}_{\delta} \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix} = - \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} T \\ \varphi \end{pmatrix} \times \mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{n} \times \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix} \right) \times \mathbf{n} \\ = \int_{\partial\Omega} [X \times n (\varphi - \delta g T \cdot n) - T \times n (u - \delta g X \cdot n)] \quad (6.58)$$

**Theorem 6.6.1.** *We have the following prior energy error estimate*

$$\sqrt{\mathcal{E}^{err,P}} \leq K \left[ \frac{\delta^P}{\eta + \alpha_-} + \frac{\delta^{P+1}}{\sqrt{\eta + \alpha_-}} \right] \left( \delta_0^P \|\widehat{J}\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\mathcal{E}^P} + \sqrt{\mathcal{E}_{\partial_3,T}^P} + \|g \widehat{E}_T^P\|_{L^2(\partial\Omega)} \right).$$

In particular for  $P = 1$  and  $P = 2$  we have the convergence

$$\sqrt{\mathcal{E}^{err,P}} = \left[ \frac{O(\delta^P)}{\eta + \alpha_-} + \frac{O(\delta^{P+1})}{\sqrt{\eta + \alpha_-}} \right] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

*Proof.* We integrate the first equation of (6.1) over  $\widehat{E}^{\delta}$  and the conjugated form of second equation of (6.1) over  $\widehat{H}^{\delta}$ , then add them and using the previous green formula (6.16)

$$s \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon} |\widehat{e}_T^{P,\delta}|^2 + \overline{s} \int_{\Omega} \widehat{\mu} |\widehat{h}_T^{P,\delta}|^2 + \delta^P \int_{\partial\Omega} \overline{\widehat{h}_T^{P,\delta}} \times n g \widehat{E}_T^P \\ = \delta^P \int_{\Omega} \left[ \delta_0^P \widehat{J} - s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}^p + \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 H_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right] \overline{\widehat{e}_T^{P,\delta}} + \delta^P \int_{\Omega} \left[ s \widehat{\mu} \widehat{H}^p - \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 E_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right] \overline{\widehat{h}_T^{P,\delta}} \quad (6.59)$$

If we take out the real part of this energy equality and use the Cauchy-Schwarz inequality :

$$(\eta + \alpha_-) \mathcal{E}^{err,P} \leq \delta^P \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \delta_0^p \widehat{J} - s \widehat{\varepsilon} \widehat{E}^p + \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 H_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2} \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon |\widehat{e}_T^{P,\delta}|^2} \\ + \delta^P \sqrt{\int_{\Omega} \mu^{-1} \left| s \widehat{\mu} \widehat{H}^p - \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 E_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2} \sqrt{\int_{\Omega} \mu |\widehat{h}_T^{P,\delta}|^2} \\ + \delta^P \|\widehat{h}_T^{P,\delta} \times n\|_{L^2(\partial\Omega)} \|g \widehat{E}_T^P\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

To finish we have by the continuity of the tangential trace

$$\|\widehat{h}_T^{P,\delta} \times n\|_{L^2(\partial S)} \leq C_{\text{trace}} \left( \|\widehat{h}_T^{P,\delta}\|_{L^2(S)} + \|\nabla \widehat{h}_T^{P,\delta}\|_{L^2(S)} \right)$$

and with the equation (6.42)

$$\|\nabla \widehat{h}_T^{P,\delta}\|_{L^2(S)} = \delta \|s \widehat{e}_3^{P,\delta} - \delta_0^P \widehat{J}_3 - \delta^P s \widehat{E}_3^P\|_{L^2(S)}$$

so we have

$$\|\widehat{h}_T^{P,\delta} \times n\|_{L^2(\partial S)} \leq C_{\text{trace}} \delta^P \left[ \max \left( \frac{1}{\sqrt{\mu_-}} ; \delta \sqrt{\varepsilon_+} |s + \alpha_{e,+}| \right) \sqrt{2} \sqrt{\mathcal{E}^{err,P}} + \delta \|\delta_0^P \widehat{J}_3 - s \widehat{E}_3^P\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

$$(\eta + \alpha_-) \mathcal{E}^{err,P} \leq \delta^P A \sqrt{2} \sqrt{\mathcal{E}^{err,P}} + \delta^{P+1} C_{\text{trace}} \|\delta_0^P \widehat{J}_3 - s \widehat{E}_3^P\|_{L^2(\Omega)} \|g \widehat{E}_T^P\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

with

$$A = \left[ \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \delta_0^P \widehat{J} - s \widehat{E}^p + \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 H_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2} + \sqrt{\int_{\Omega} \mu^{-1} \left| s \widehat{\mu} \widehat{H}^p - \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3 E_T^p \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2} \right. \\ \left. + C_{\text{trace}} \delta^P \max \left( \frac{1}{\sqrt{\mu_-}} ; \delta \sqrt{\varepsilon_+} |s + \alpha_{e,+}| \right) \|g \widehat{E}_T^P\|_{L^2(\partial\Omega)} \right]$$

so

$$\sqrt{\mathcal{E}^{err,P}} \leq \frac{\delta^P}{2(\eta + \alpha_-)} \left[ \sqrt{2} A + \sqrt{2 A^2 + 4(\eta + \alpha_-) C_{\text{trace}} \delta \|\delta_0^P \widehat{J}_3 - s \widehat{E}_3^P\|_{L^2(\Omega)} \|g \widehat{E}_T^P\|_{L^2(\partial\Omega)}} \right]$$

□

We are not entirely satisfied since, as in the cylindrical case, this theorem does not enable us to conclude on the convergence of the model at order 0. We also think that we can do a better error estimates in term of power of  $\delta$ . To do it we could use the same procedure as for the cylindrical case (estimation of both divergence and curl and use of Poincaré-Friedrichs inequalities) except for some results related to the longitudinal derivative  $\partial_3$  for whose it is necessary to find bounds to the divergence and the electrical energy error. All the difficulty resides in that the longitudinal derivative  $\partial_3$  is not a simple derivative but a shape derivative since the cross-section of the cable changes with  $x_3$ . More precisely the proposition 6.2.1, the proposition 6.2.2 and the lemma 6.4.8 and their consequences (lemma 6.2.3, theorem 6.2.2) are no longer true. To find the shape derivative of (6.42,6.57) we can use theorems 1.7.1 and 1.7.2. In view of the cumbersome aspect of this chapter, we judged it best not to enter into the technical part of the proof for the non cylindrical case.

### 6.6.2 Higher orders case

We have given in the section 6.3 a way to compute  $\widehat{E}^p$  and  $\widehat{H}^p$  and in section 6.4 the estimation for  $p = 0, 1, 2$ . We are now interested in any order  $P > 2$ .

**Hypothesis 6.6.1.** Consider an integer  $P > 2$ . We have the following bounds for any  $k = 0 \dots P$

$$|\varepsilon^{(k)}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon_+^{(k)} \quad , \quad |\mu^{(k)}(\mathbf{x})| \leq \mu_+^{(k)} \quad , \quad |\alpha_e^{(k)}(\mathbf{x})| \leq \alpha_{e,+}^{(k)} \quad \text{and} \quad |\alpha_m^{(k)}(\mathbf{x})| \leq \alpha_{m,+}^{(k)} \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

In the context of this subsection, a constant  $C$  depends only of the physical and geometrical properties if in addition to the definition 6.1.1,  $C$  can depend of

$$\varepsilon_+^{(k)}, \mu_+^{(k)}, \alpha_{e,+}^{(k)} \quad \text{and} \quad \alpha_{m,+}^{(k)}.$$

We assume that

$$\widehat{\partial}_3^k J_{s,T}^\delta \in H(\mathbf{div}, S) \quad \text{and} \quad \partial_3^k \widehat{J}_{s,T}^\delta \in L^2(\Omega) \quad \text{for} \quad k = 0 \dots P.$$

The formulae (6.30, 6.31) for the computation of  $\widehat{E}_T^p$  and  $\widehat{H}_T^p$  are still valid for  $p = 0 \dots P$ , as well as the telegrapher's equation (6.32) for the computation of  $\widehat{\mathbf{V}}^p$  and  $\widehat{\mathbf{I}}^p$ . The longitudinal electromagnetic fields for any order are given by the lemma that follow (the proof is essentially the same as the one for proposition 5.4.5).



**Lemma 6.6.1.** *The longitudinal fields satisfy*

$$\begin{aligned} \widehat{E}_3^{(p+1)} &= \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_j^p \partial_3 \widehat{\varphi}_{e,q} + s \sum_{q,q'=1}^N (\widehat{Z}_m)_{q,q'} \widehat{I}_q^p (\widehat{\varphi}_{m,q'} - \widehat{\varphi}_{e,q'}) \\ &\quad + \sum_{q=1}^Q \left( \int_S \partial_3 \widehat{E}_T^{R,p} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\psi}_{m,q} \right) (\varphi_q - \widehat{\varphi}_{e,q}) + \widehat{\zeta}^p \end{aligned} \quad (6.60)$$

and

$$\begin{aligned} \widehat{H}_3^{(p+1)} &= \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_j^p \langle \partial_3 \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}} + s \sum_{q,q'=1}^N (\widehat{Y}_e)_{q,q'} \widehat{V}_q^p \langle \widehat{\psi}_{e,q'} - \widehat{\psi}_{m,q'} \rangle_{\widehat{\mu}} \\ &\quad + \sum_{q=1}^Q \left( \int_S \partial_3 \widehat{H}_T^{R,p} \cdot \mathbf{rot} \widehat{\varphi}_{e,q} \right) \langle \psi_q - \widehat{\psi}_{m,q} \rangle_{\widehat{\mu}} + \langle \widehat{\zeta}^p \rangle_{\widehat{\mu}} + \delta_0^p \langle \widehat{j}_h \rangle_{\widehat{\mu}} \end{aligned} \quad (6.61)$$

with the harmonic potentials without weight (or harmonic measure)  $\varphi_q := \varphi_q(1, S)$  and  $\psi_q := \psi_q(1, S)$  and the potentials related to the residual of the transverse electromagnetic fields

$$\begin{cases} \Delta \widehat{\zeta}^p = \mathbf{rot} \left[ (s\mu + \sigma_m) \widehat{H}_T^{R,p} + \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \widehat{E}_T^{R,p} \right] \\ \widehat{\zeta}^p = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \Delta \widehat{\xi}^p = \mathbf{rot} \left[ s \widehat{e} \widehat{E}_T^{R,p} - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \widehat{H}_T^{R,p} \right] \\ \partial_n \widehat{\xi}^p = 0. \end{cases}$$

We are unable to propose an effective model based on all the terms  $\widehat{\mathbf{V}}^p$ ,  $\widehat{\mathbf{I}}^p$ ,  $\widehat{E}^p$  and  $\widehat{H}^p$  for  $p = \dots, P$  but it is possible to use the truncated model

$$\widehat{\mathbf{V}}_{\text{trunc}}^{\delta, P} = \sum_{k=0}^P \delta^k \widehat{\mathbf{V}}^k, \quad \widehat{\mathbf{I}}_{\text{trunc}}^{\delta, P} = \sum_{k=0}^P \delta^k \widehat{\mathbf{I}}^k, \quad \widehat{E}_{\text{trunc}}^{\delta, P} = \sum_{k=0}^P \delta^k \widehat{E}^k \quad \text{and} \quad \widehat{H}_{\text{trunc}}^{\delta, P} = \sum_{k=0}^P \delta^k \widehat{H}^k$$

for numerical simulations. We are also interested in the truncated error. The whole line of section 6.4 is still valid for  $p = P > 2$  and thus so is the theorem 6.5.2 that is to say

$$\begin{cases} \mathcal{E}_3^{\text{err}, P} \leq \delta^{4P} (C_J + \delta^2) \left( \sum_{k=0}^P \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^{2k}} \right) \mathbf{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{P}{2} \rfloor} \|\text{div} \partial_3^{p-2k} \widehat{J}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \widehat{J}_{s,3}\|^2 \right], \\ \mathcal{E}_T^{\text{err}, P} \leq \delta^{4(P+1)} (C_J + \delta^2) \left( \sum_{k=0}^{P+1} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^{2k}} \right) \mathbf{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{P}{2} \rfloor} \|\text{div} \partial_3^{p-2k} \widehat{J}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \widehat{J}_{s,3}\|^2 \right], \\ \mathcal{E}_{LC}^{\text{err}, P} \leq \delta^{4(P+1)} (C_J + \delta^2) \left( \sum_{k=1}^{P+1} \frac{1}{(\eta + \alpha_-)^{2k}} \right) \mathbf{K}(|s|) \left[ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{P}{2} \rfloor} \|\text{div} \partial_3^{p-2k} \widehat{J}_{s,T}\|^2 + \|\partial_3^{p-2k} \widehat{J}_{s,3}\|^2 \right], \end{cases}$$

with all the notations given in theorem 6.5.2.

---

---

**TROISIÈME PARTIE**

**MODÉLISATION DE LA RÉSISTANCE  
D'UN CÂBLE PAR LA CONSIDÉRATION  
DE L'EFFET DE PEAU**

---

---



# A LA RECHERCHE DE LA RESISTANCE PERDUE

---

Je règne par l'étonnant pouvoir de l'absence

Victor Segalen

Dans le modèle des télégraphistes que nous avons précédemment proposé, nous avons donné pour essence à la résistance la présence de conductivité magnétique. Cette première approximation est peu satisfaisante, déjà parce que la conductivité magnétique est excessivement faible voire même nulle puis parce qu'il est habituel d'expliquer celle-ci par l'effet de peau. Ce dernier est un phénomène électromagnétique qui se caractérise par la tendance qu'a le courant dans un bon conducteur à ne circuler qu'en surface de celui-ci. Les âmes métalliques de nos câbles multiconducteurs et coaxiaux ainsi que la couche métallique qui entoure la ligne constituent de tels conducteurs. La faiblesse du modèle de la partie précédente consiste en ce que nous avons considéré ces conducteurs comme parfaits, c'est-à-dire que la conductivité électrique y est infinie. Cette forte conductivité en empêchant une pénétration profonde des champs électromagnétiques dans les conducteurs entraîne une atténuation du signal se propageant du diélectrique qui, rappelons le, n'aurait pas eu lieu si la conductivité des conducteurs était infinie. Par conséquent la modélisation est plus exigeante et comporte une part d'arbitraire. En effet une analyse dimensionnelle suggère que deux petits paramètres sont à prendre en compte : le diamètre du câble et la profondeur de peau (distance de pénétration d'une onde monochromatique dans un milieu conducteur). Nous avons choisi de relier, là est la part d'arbitraire, ces deux grandeurs à un même petit paramètre adimensionnel  $\delta$  : le diamètre du câble est proportionnel à  $\delta$  et la profondeur de peau à  $\delta^2$ . Ce choix de régime asymptotique est fait a priori à partir des données numériques correspondant à des câbles concrets standards et est justifié a posteriori car il permet de faire intervenir une perturbation du modèle des télégraphistes des chapitres précédents à l'ordre souhaité<sup>1</sup>. L'analyse asymptotique diffère de la partie précédente puisqu'il faut tenir compte des différents phénomènes dans les parties diélectriques et fortement conductrices. Une fois ramené à un câble de référence via un scaling transverse, nous allons proposer un développement asymptotique double échelle dans le sillon de [74], c'est à dire un dans le câble et un autre dans les conducteurs. Celui dans la partie diélectrique sera, comme dans la section précédente, un simple développement en puissance de  $\delta$  des champs électromagnétiques. Par contre dans les parties conductrices, il nous faudra faire un développement type couche limite des équations de Maxwell, comme dans [22]. Ce dernier prendra en compte le fait que dans les conducteurs, les champs électromagnétiques sont confinés dans un voisinage de l'interface avec le diélectrique. In fine, via nos développements asymptotiques, nous proposerons une condition aux limites de type GIBC (Generalized impedance boundary condition) en remplacement de la condition de type conducteur parfait utilisée dans la précédente partie II. Notons que des travaux de ce type ont maints fois été réalisés, notamment [35] a déjà étudié le cas des équations de Maxwell 3D. Cependant, nous n'avons pu directement exploiter leurs résultats car préalablement nous nous sommes placé dans un câble de référence via un scaling transverse et qu'en plus notre régime asymptotique fait intervenir certains termes à des ordres différents des habituels. De plus tout notre travail consiste à constater que la considération des nouvelles conditions aux limites de type GIBC aux interfaces diélectrique/conducteurs se répercute en faisant apparaître une résistance dans le modèle des télégraphistes qui dépend, dans le domaine fréquentiel, de  $\sqrt{\omega}$ . Nous n'avons trouvé dans la littérature de formules univoques de calcul de cette résistance. Quelques unes existent dans le cas d'un câble coaxial de section annulaire ou rectangulaire à certaines fréquences et avec des coefficients qui ne sont pas uniquement déterminés à partir des seules hypothèses sur la géométrie et les matériaux mais semblent venir de considérations empiriques. La raison même de ce chapitre est d'arriver à une explication satisfaisante sur le plan mathématique.

---

1. l'effet résistif est moins important que les effets capacitif et inductif

## 7.1 Le discours de la méthode asymptotique

Il ne faut jamais s'exprimer plus clairement que ses propres idées.

---

Niels Bohr

Nous allons altérer le modèle de la partie II en considérant d'avantage les conducteurs et en faisant des hypothèses physiques plus précises et plus approfondies issues d'une analyse dimensionnelle. Celles-ci nous ouvriront la voie vers l'analyse asymptotique. Nous présenterons à cette occasion les intuitions qui nous ont amené à postuler un développement asymptotique multi-échelles.

### 7.1.1 Description de la géométrie considérée

Une idée fausse mais claire et précise aura toujours plus de puissance dans le monde qu'une idée vraie mais complexe.

---

Alexis De Tocqueville

Nous allons faire une grossière simplification qui nous éloigne grandement de notre objectif initial qui est de modéliser les défauts : le câble sera cylindrique. Nous avons choisi de faire cette hypothèse pour simplifier l'étude du phénomène d'effet de peau que nous souhaitons mettre en avant dans cette partie (se référer à la partie II pour les subtilités du cas non cylindrique). Nous verrons plus tard à quel point l'analyse asymptotique est rendue complexe si nous refusons cette dernière simplification (voir section 7.4.4). Le câble est censé être "fin", nous ajouterons ainsi un exposant  $\delta$  pour symboliser ce fait. Nous expliciterons plus tard ce que nous entendons par "fin" et ce à quoi  $\delta$  se réfère.

Ainsi notre câble est constitué d'une translation dans la direction longitudinale  $\mathbf{e}_3$  d'une "petite" surface plane (dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ) simplement connexe  $\mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta$  :

$$\mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta \times \{x_3\}. \quad (7.1)$$

Nous supposons que  $\mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta$  est inclu dans un disque de diamètre  $d$ .

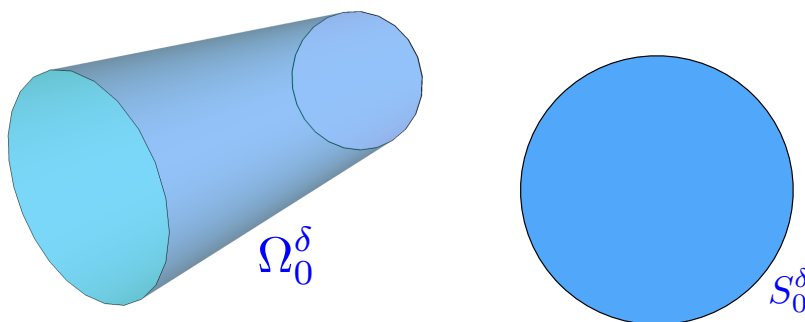


FIGURE 7.1 – Gauche : domaine  $\Omega_0^\delta$ . Droite : section  $S_0^\delta$  de  $\Omega_0^\delta$ .

Nous considérerons à l'intérieur de ce câble un autre domaine simplement connexe

$$\Omega_0^\delta = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} S_0^\delta \times \{x_3\},$$

de telle manière que la distance qui le sépare du bord du câble  $\mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta$  soit minorée et majorée :

$$d_- \leq \text{dist}(\partial S_0^\delta, \partial \mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta) \leq d_+ \quad (\text{figure 7.4}).$$

Nous définissons le conducteur extérieur (voir figure 7.2) par

$$\mathcal{W}_0^\delta = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \mathcal{O}_0^\delta \times \{x_3\} \quad \text{avec la surface à un trou} \quad \mathcal{O}_0^\delta = \mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta \setminus S_0^\delta. \quad (7.2)$$

Nous définissons  $Q$  (avec  $Q \geq 1$ ) domaine(s) simplement connexe(s)  $\mathcal{O}_q^\delta$  inclu(s) dans  $S_0^\delta$  qui ne se touchent pas et ne touchent pas le conducteur extérieur :

$$\overline{\mathcal{O}_k^\delta} \cap \overline{\mathcal{O}_\ell^\delta} \neq \emptyset \quad \text{pour } k \neq \ell.$$

Nous supposons qu'à l'intérieur de ceux-ci se trouve un domaine convexe de diamètre  $d_c$ . Ces sections permettent de définir les  $Q$  âmes (voir figure 7.2) de notre câble :

$$\mathcal{W}_q^\delta = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \mathcal{O}_q^\delta \times \{x_3\}. \quad (7.3)$$

Le conducteur extérieur  $\mathcal{W}_0^\delta$  et les  $Q$  âmes  $\mathcal{W}_q^\delta$  seront amenés à être composés de matériaux

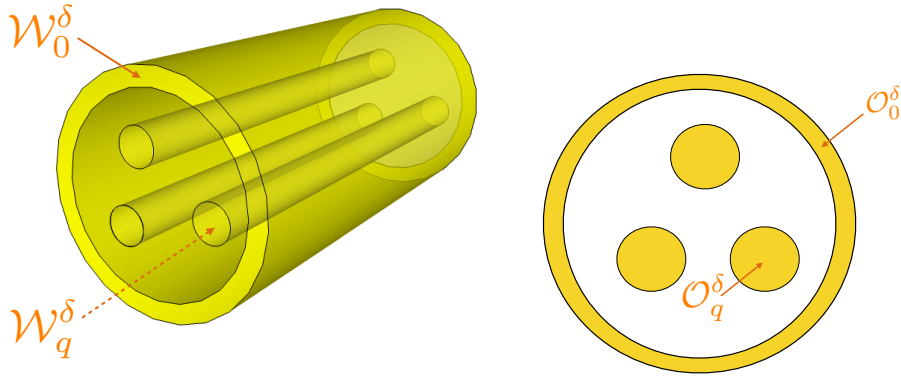


FIGURE 7.2 – Parties métalliques du câble.

hautement conducteurs tel du métal. Nous noterons l'ensemble de ces parties :

$$\mathcal{W}^\delta = \bigcup_{q=0}^Q \mathcal{W}_q^\delta \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^\delta = \bigcup_{q=0}^Q \mathcal{O}_q^\delta.$$

Le reste du câble :

$$\Omega^\delta = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} S^\delta \times \{x_3\}, \quad \text{avec} \quad S^\delta = \mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta \setminus \mathcal{O}^\delta \quad (7.4)$$

est amené quant à lui à être composé d'un matériau diélectrique très peu conducteur (en bleu sur la figure 7.3). Notons que chaque section  $S^\delta$  de la partie diélectrique du câble  $\Omega^\delta$  est un domaine à  $Q$  trous  $\mathcal{O}_q^\delta$  ( $q = 1 \dots Q$ ). Ainsi le bord de  $S^\delta$  est l'union d'un bord extérieur et de  $Q$  bords intérieurs, tous constitué d'une courbe de Jordan fermée :

$$\partial S^\delta = \bigcup_{j=0}^N \partial_j S^\delta \quad \text{avec} \quad \partial_q S^\delta := \partial \mathcal{O}_q^\delta, \quad q = 0 \dots Q. \quad (7.5)$$

Rappelons aussi quelques considérations topologiques - dont nous avons déjà longuement parlé dans les parties I et II et qui sont résumés dans l'annexe 11 - qui sont indispensables pour analyser des problèmes div-rot ou faire des décompositions de Helmholtz dans des domaines non simplement connexes. Ils existent  $Q$  coupures  $\Gamma_q^\delta$  pour  $q = 1 \dots Q$  telles que :

- (i) chaque coupure  $\Gamma_q^\delta$  est une courbe ouverte partant de  $\partial_j S^\delta$  pour rejoindre  $\partial_0 S^\delta$  (au sens où  $\partial \Gamma_q^\delta \subset \partial_j S^\delta \cup \partial_0 S^\delta$ ),
- (ii) aucune coupure n'intersecte une autre ( $\Gamma_q^\delta \cap \Gamma_{q'}^\delta = \emptyset$ ),
- (iii) l'ensemble des coupures  $\Gamma^\delta = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^\delta$  rend le domaine  $S^\delta \setminus \Gamma^\delta$  simplement connexe.

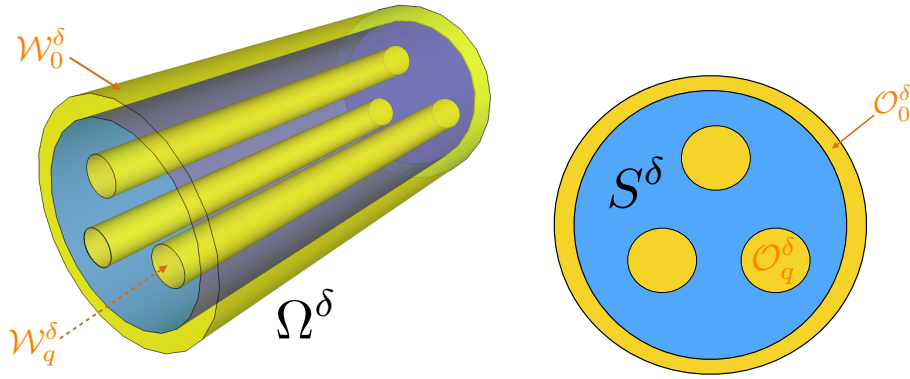


FIGURE 7.3 – Gauche : câble considéré. Droite : section du câble considéré.

Pour finir, nous supposons que tous les domaines précédemment définis, c-a-d  $S^\delta$ ,  $\mathcal{O}^\delta$  et  $\mathcal{O}_q^\delta$  (et par conséquent le diélectrique  $\Omega^\delta$  et les conducteurs  $\mathcal{W}_q$ ) ont une régularité au moins **lipschitzienne**. Nous notons  $n^\delta$  la normale extérieure à  $S^\delta$ . Nous orientons la coupure de  $\partial_j S^\delta$  à  $\partial_0 S^\delta$ , dans le sens où le vecteur tangent  $\tau_q^\delta$  à la coupure  $\Gamma_q^\delta$  est dirigé vers  $\partial_0 S^\delta$ , la normale  $n_q^\delta$  à la coupure est définie telle que la base  $(\tau_q^\delta, n_q^\delta, e_3)$  soit directe et le saut d'une fonction à travers la coupure est définie par :

$$\forall x_\tau \in \Gamma_q, [\varphi]_{\Gamma_q}(x_\tau) := \lim_{\nu \rightarrow 0} (\varphi(x_\tau + \nu n_q) - u(x_\tau - \nu n_q)).$$

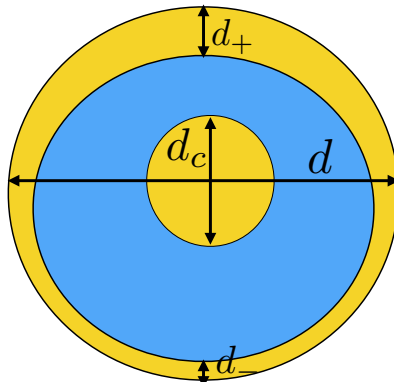
Il est important de songer aux ordres de grandeurs qui relient  $d$ ,  $d_c$ ,  $d_-$  et  $d_+$  (voir la figure 7.4) car cela conditionnera fortement nos hypothèses quant au régime asymptotique et ainsi le modèle qui en découlera. Nous faisons notre choix à partir d'un câble coaxial de référence, le RG 187 A/U copper, supposé être un cylindre constitué de couronne circulaire dans lequel nous avons

$$d_c = 3 \times 10^{-4} m \quad , \quad d_- = d_+ = 2 \times 10^{-4} m \quad \text{et} \quad d = 1.6 \times 10^{-3} m.$$

En particulier, avec ces ordres de grandeur, nous avons

$$d = 5,3 d_c \quad \text{et} \quad d = 8 d_+$$

ce qui nous laisse penser que  $d$ ,  $d_c$ ,  $d_-$  et  $d_+$  **sont du même ordre de grandeur**. L'étude des équations de Maxwell dans l'approximation des courants de Foucault avec une portion hautement conductrice de taille bien plus petite que la partie diélectrique, du genre  $d_c \ll d$  est traitée dans [64]. Cette première étude des ordres de grandeur est une première étape de l'analyse dimensionnelle que nous allons traiter avec plus de rigueur que lors de la partie II pour proposer un développement asymptotique propre à intégrer notre nouvelle problématique qu'est l'effet de peau.

FIGURE 7.4 – Les distances  $d$ ,  $d_-$ ,  $d_+$  et  $d_c$ .

### 7.1.2 Analyse dimensionnelle

Le physicien doit se limiter à la description des relations entre les perceptions.

Werner Heisenberg

L'idée maîtresse de l'analyse dimensionnelle est d'adimensionnaliser tous les coefficients et toutes les variables. Les résultats sont ainsi donnés par rapport à des grandeurs caractéristiques. Le choix de celles-ci dépend fortement de la physique du problème et de la nature du phénomène à mettre en exergue. Selon la valeur des grandeurs adimensionnelles, il est possible de déterminer les effets prépondérants dans le phénomène traité et ainsi de ne résoudre que les parties correspondantes dans les équations et d'en négliger d'autres. L'adimensionnalisation permet aussi de présenter les résultats expérimentaux de façon à s'affranchir des paramètres spécifiques utilisés et permettre des similitudes expérimentales (modèle réduit d'avion dans une soufflerie - avion réel dans l'atmosphère pour l'étude de la portance).

Les coefficients caractéristiques du milieu dans lequel se propagent les ondes électromagnétiques, à savoir la permittivité  $\varepsilon^\delta$ , la perméabilité  $\mu^\delta$  et la conductivité électrique  $\sigma^\delta$ , vérifient les usuelles **hypothèses de positivité** suivantes :

$$0 < \varepsilon_-^\delta \leq \varepsilon^\delta(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_+^\delta, \quad 0 < \mu_-^\delta \leq \mu^\delta(\mathbf{x}) \leq \mu_+^\delta \quad \text{et} \quad 0 \leq \sigma_-^\delta \leq \sigma^\delta(\mathbf{x}) \leq \sigma_+^\delta, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta.$$

**Ces coefficients sont discontinus sur les surfaces qui séparent la partie diélectrique de la partie métallique** : ils ont des valeurs différentes dans la partie diélectrique  $\Omega^\delta$  du câble et des conducteurs  $\mathcal{W}_q^\delta$  avec  $q = 0 \dots Q$ . Nous n'hésiterons d'ailleurs pas à préciser avec un indice si on se trouve dans la partie diélectrique ou dans la partie conductrice :

$$\varepsilon^\delta = \begin{cases} \varepsilon_e^\delta & \text{dans } \Omega^\delta \\ \varepsilon_c^\delta & \text{dans } \mathcal{W}^\delta \end{cases}, \quad \mu^\delta = \begin{cases} \mu_m^\delta & \text{dans } \Omega^\delta \\ \mu_c^\delta & \text{dans } \mathcal{W}^\delta \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma^\delta = \begin{cases} \sigma_e^\delta & \text{dans } \Omega^\delta \\ \sigma_c^\delta & \text{dans } \mathcal{W}^\delta \end{cases}.$$

Précisons tout de suite qu'il est possible que la conductivité soit nulle dans la partie diélectrique mais elle ne peut l'être dans la partie conductrice où de plus elle est censée être très élevée :

$$\sigma_e^\delta \geq 0 \quad \text{et} \quad \sigma_c^\delta \gg 1.$$

Nous supposons que dans les parties conductrices les coefficients ne varient pas :

**Hypothèse 7.1.1.** *Nous avons pour tout  $q = 0 \dots Q$  :*

$$\varepsilon_c^\delta|_{\mathcal{W}_q} = \varepsilon_q^\delta, \quad \mu_c^\delta|_{\mathcal{W}_q} = \mu_q^\delta \quad \text{et} \quad \sigma_c^\delta|_{\mathcal{W}_q} = \sigma_q^\delta$$

avec  $\varepsilon_q^\delta$ ,  $\mu_q^\delta$  et  $\sigma_q^\delta$  des constantes. De plus nous supposons :

$$\varepsilon_e^\delta, \mu_m^\delta, \sigma_e^\delta \in W^{1,\infty}(\Omega^\delta).$$

#### Les équations de Maxwell

La force qui fait le plus de fois le tour de la terre en une seconde, ce n'est pas l'électricité, c'est la douleur.

Proust, Albertine disparue

Les équations qui régissent la propagation des ondes électromagnétiques  $(E^\delta, H^\delta)$  sont celles de Maxwell (voir le chapitre 3 pour plus détails sur ces dernières) :

$$\begin{cases} \varepsilon^\delta \partial_t E^\delta + \sigma^\delta E^\delta - \mathbf{curl} H^\delta = \mathbf{j}^\delta, & \text{dans } \mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta, \\ \mu^\delta \partial_t H^\delta + \mathbf{curl} E^\delta = \mathbf{0}, & \text{dans } \mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta, \end{cases} \quad (7.6)$$

auxquelles nous ajoutons les conditions initiales suivantes :

$$E^\delta(t=0) = H^\delta(t=0) = \mathbf{0}.$$



Nous verrons par la suite que ces conditions sur le bord du câble  $\mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta$  n'ont aucune importance car le conducteur extérieur isole le diélectrique de l'extérieur<sup>2</sup>, dans le sens où nous montrerons qu'il y a décroissance exponentielle des champs électromagnétiques dans le conducteur extérieur  $\mathcal{W}_0^\delta$  (voir théorème 7.3.1). Cette décroissance ne serait plus vraie si la distance  $d_-$  se trouvait être beaucoup plus petite, mais cette situation est exclue par nos hypothèses. Nous pouvons ainsi, sans perte de généralité, considérer les conditions aux bords de type<sup>3</sup> :

$$E^\delta \times \mathbf{n}^\delta = \mathbf{0} \text{ sur } \mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta, \quad (7.7)$$

avec  $\mathbf{n}^\delta$  la normale extérieure  $\mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta$ . Notons que la condition d'onde absorbante dite de Silver-Müller

$$E^\delta \times \mathbf{n}^\delta = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\mu} (\mathbf{n}^\delta \times H^\delta \times \mathbf{n}^\delta) \text{ sur } \mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta,$$

est d'avantage réaliste, mais comme nous l'avons déjà évoqué, l'asymptotique que nous allons proposer n'en n'est pas modifiée par la prise en compte d'une telle condition au bord.

Rappelons aussi que la discontinuité des coefficients caractéristiques  $\varepsilon^\delta$ ,  $\mu^\delta$  et  $\sigma^\delta$  entre les deux matériaux, le diélectrique  $\Omega^\delta$  et le conducteur  $\mathcal{W}^\delta$  entraîne la discontinuité des champs électromagnétiques  $E^\delta$  et  $H^\delta$  aux interfaces entre les deux types de matériaux. Plus précisément les conditions de transmission sur  $\partial_q \mathcal{W}^\delta$  sont (voir la propriété 3.3.1) :

$$\begin{cases} [E^\delta \times \mathbf{n}^\delta]_{\partial_q \mathcal{W}^\delta} = [H^\delta \times \mathbf{n}^\delta]_{\partial_q \mathcal{W}^\delta} = \mathbf{0} \\ \left[ \left( (\varepsilon^\delta \partial_t + \sigma^\delta) E^\delta \right) \cdot \mathbf{n}^\delta \right]_{\partial_q \mathcal{W}^\delta} = [\mathbf{J}^\delta \cdot \mathbf{n}^\delta]_{\partial_q \mathcal{W}^\delta} \\ \left[ \left( \mu^\delta \partial_t H^\delta \right) \cdot \mathbf{n}^\delta \right]_{\partial_q \mathcal{W}^\delta} = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

avec le saut défini par

$$[u]_{\partial_q \mathcal{W}^\delta}(\mathbf{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} [u(\mathbf{x} + h \mathbf{n}^\delta) - u(\mathbf{x} - h \mathbf{n}^\delta)], \mathbf{x} \in \partial_q \mathcal{W}^\delta$$

et  $\mathbf{n}^\delta$  la normale extérieure à  $\mathcal{W}_q^\delta$ .

Les **échelles caractéristiques** de distances transversale et longitudinale sont  $d$  et  $L$ . L'échelle de temps est la durée maximale nécessaire à une onde électromagnétique pour parcourir la distance  $L$  dans le câble. Celle-ci est  $T = \sqrt{\varepsilon^* \mu^*} L$  avec les échelles caractéristiques de la permittivité et de la perméabilité basées sur leurs valeurs maximales :

$$\varepsilon^* = \max_{\mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta} \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu^* = \max_{\mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta} \mu.$$

Faisons les **changements de variables** suivant :

$$E^\delta = E^* \tilde{E}^\delta \left( \frac{x}{d}, \frac{x_3}{L}, \frac{t}{T} \right), \quad H^\delta = H^* \tilde{H}^\delta \left( \frac{x}{d}, \frac{x_3}{L}, \frac{t}{T} \right) \quad \text{et} \quad J = J^* \tilde{J} \left( \frac{x}{d}, \frac{x_3}{L}, \frac{t}{T} \right).$$

Celui-ci implique un comportement différent pour la partie transverse et la partie longitudinale, ainsi, pour mettre en valeur ce fait, nous noterons dorénavant pour les champs 3D :

$$E^\delta = \begin{pmatrix} E_T^\delta \\ E_3^\delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad E_T = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{pareillement pour } H^\delta, J^\delta.$$

De même pour la permittivité et la perméabilité, nous considérons les changements de variables :

$$\varepsilon^\delta = \varepsilon^* \tilde{\varepsilon} \left( \frac{x}{d}, \frac{x_3}{L} \right) \quad \text{et} \quad \mu^\delta = \mu^* \tilde{\mu} \left( \frac{x}{d}, \frac{x_3}{L} \right).$$

Par contre la conductivité ne varie que dans la partie diélectrique, le changement de variable ne sera nécessaire que dans cette partie du câble :

$$\sigma_e^\delta = \sigma_e^* \tilde{\sigma}_e \left( \frac{x}{d}, \frac{x_3}{L} \right) \quad \text{avec} \quad \sigma_e^* = \max_{\Omega^\delta} \sigma_e$$

2. Par ailleurs, en anglais le conducteur extérieur est dénommé "shield".

3. Si  $d_-$  était plus petite nous aurions dû considérer des conditions aux bords de type Silver-Müller.

Les équations de Maxwell dans le diélectrique deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \left[ \frac{E^*}{L} \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{\mu^*}} \right] \tilde{\varepsilon} \partial_t + [E^* \sigma_e^*] \tilde{\sigma}_e \right) \tilde{E}_T^\delta - \left[ \frac{H^*}{L} \right] \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{H}_T^\delta) - \left[ \frac{H^*}{d} \right] \mathbf{rot} \tilde{H}_3^\delta = J^* \tilde{J}_T, \quad \text{dans } \Omega, \\ \left( \left[ \frac{E^*}{L} \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{\mu^*}} \right] \tilde{\varepsilon} \partial_t + [E^* \sigma_e^*] \tilde{\sigma}_e \right) \tilde{E}_3^\delta - \left[ \frac{H^*}{d} \right] \mathbf{rot} \tilde{H}_T^\delta = J^* \tilde{J}_3, \quad \text{dans } \Omega, \\ \left[ \frac{H^*}{L} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^\delta + \left[ \frac{E^*}{L} \right] \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_T^\delta) + \left[ \frac{E^*}{d} \right] \mathbf{rot} \tilde{E}_3 = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \left[ \frac{H^*}{L} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_3^\delta + \left[ \frac{E^*}{d} \right] \mathbf{rot} \tilde{E}_T^\delta = 0, \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (7.9)$$

et dans chaque partie conductrice :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \left[ \frac{E^*}{L} \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{\mu^*}} \right] \tilde{\varepsilon}_c \partial_t + [E^* \sigma_q] \right) \tilde{E}_T^\delta - \left[ \frac{H^*}{L} \right] \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{H}_T^\delta) - \left[ \frac{H^*}{d} \right] \mathbf{rot} \tilde{H}_3^\delta = J_c^* \tilde{J}_{c,T}, \quad \text{dans } \mathcal{W}_q, \\ \left( \left[ \frac{E^*}{L} \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{\mu^*}} \right] \tilde{\varepsilon}_c \partial_t + [E^* \sigma_q] \right) \tilde{E}_3^\delta - \left[ \frac{H^*}{d} \right] \mathbf{rot} \tilde{H}_T^\delta = J_c^* \tilde{J}_{c,3}, \quad \text{dans } \in \mathcal{W}_q, \\ \left[ \frac{H^*}{L} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{\mu}_c \partial_t \tilde{H}_T^\delta + \left[ \frac{E^*}{L} \right] \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_T^\delta) + \left[ \frac{E^*}{d} \right] \mathbf{rot} \tilde{E}_3 = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \mathcal{W}_q, \\ \left[ \frac{H^*}{L} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{\mu}_c \partial_t \tilde{H}_3^\delta + \left[ \frac{E^*}{d} \right] \mathbf{rot} \tilde{E}_T^\delta = 0, \quad \text{dans } \mathcal{W}_q, \end{array} \right. \quad (7.10)$$

où les domaines  $\Omega$  et  $\mathcal{W}_q$  sont induits par le changement d'échelle du changement de variable :

$$\Omega := \mathcal{G}(\Omega^\delta) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_q := \mathcal{G}(\mathcal{W}_q^\delta) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G} : (x, x_3) \mapsto (dx, Lx_3).$$

Nous notons de même  $S := \mathcal{G}(S^\delta)$  et les  $\mathcal{O}_q^\delta$  pour  $q = 0 \dots Q$  respectivement les sections de la partie diélectrique du câble de référence  $\Omega$  et des conducteurs de référence  $\mathcal{W}_q$ .

### Quantités caractéristiques et ordre de grandeur des phénomènes

3.326 - Pour reconnaître le symbole sous le signe, il faut prendre garde à son usage pourvu de sens.

Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus

Nous allons maintenant introduire les grandeurs caractéristiques et les quantités adimensionnelles propres à mettre en exergue ce que nous souhaitons. Introduisons l'épaisseur de peau dans chacun des conducteurs :

$$d_{\text{sk},q} := \sqrt{\frac{T}{\sigma_q \mu^*}}$$

qui représente l'ordre de grandeur de la profondeur de pénétration d'une onde monochromatique dans un milieu conducteur. Les grandeurs adimensionnelles que nous considérerons sont :

— **rapport entre les dimensions transverses et longitudinal :**

$$\delta = \left[ \frac{d}{L} \right]$$

— **rapport entre la profondeur de peau et les dimensions transverses :**

$$\delta_{\text{sk},q} = \left[ \frac{d_{\text{sk},q}}{d} \right] \quad (7.11)$$

— **rapport entre la conductivité et la permittivité électrique :**

$$\alpha_e^* = \left[ L \sqrt{\frac{\varepsilon^* \mu^* \sigma_e^*}{\varepsilon^*}} \right]$$

Les équations dans le diélectrique (7.9) deviennent alors en multipliant ces deux premières par  $\left[\frac{L}{H^*}\right]$  et ces deux dernières par  $\left[\frac{L}{E^*}\right]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{E^*}{H^*} \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{\mu^*}} \right] (\tilde{\varepsilon} \partial_t + \alpha_e^* \tilde{\sigma}_e) \tilde{E}_T^\delta - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{H}_T^\delta) - \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{H}_3^\delta = \left[ \frac{L J^*}{H^*} \right] \tilde{J}_T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \left[ \frac{E^*}{H^*} \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{\mu^*}} \right] (\tilde{\varepsilon} \partial_t + \alpha_e^* \tilde{\sigma}_e) \tilde{E}_3^\delta - \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{H}_T^\delta = \left[ \frac{L J^*}{H^*} \right] \tilde{J}_3, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \left[ \frac{H^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^\delta + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_T^\delta) + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{E}_3^\delta = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \left[ \frac{H^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_3^\delta + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{E}_T^\delta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

et les équations dans la partie conductrice (7.10) deviennent en multipliant ces deux premières par  $\delta^{-1} \left[ \frac{d}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right]$  et ces deux dernières par  $\delta^{-1} \left[ \frac{d}{H^*} \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{\mu^*}} \right]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \tilde{\varepsilon}_c \partial_t + \delta^{-2} \delta_{\text{sk},q}^{-2} \right) \tilde{E}_T^\delta - \left[ \frac{H^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \left( \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{H}_T^\delta) + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{H}_3^\delta \right) = \left[ \frac{L J_c^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{J}_{c,T}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{W}_q \\ \left( \tilde{\varepsilon}_c \partial_t + \delta^{-2} \delta_{\text{sk},q}^{-2} \right) \tilde{E}_3^\delta - \left[ \frac{H^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{H}_T^\delta = \left[ \frac{L J_c^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{J}_{c,3}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{W}_q, \\ \left[ \frac{H^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{\mu}_c \partial_t \tilde{H}_T^\delta + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_T^\delta) + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{E}_3^\delta = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{W}_q, \\ \left[ \frac{H^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] \tilde{\mu}_c \partial_t \tilde{H}_3^\delta + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{E}_T^\delta = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{W}_q. \end{array} \right.$$

Nous souhaitons mettre en exergue quelques hypothèses de modélisation :

- **câble fin** (petite dimension transverse) :  $\delta \ll 1$
- **effet de peau** (effet de peau proche de la surface) :  $\delta_{\text{sk},q} \ll 1$
- **milieux diélectriques peu conducteurs** :  $\alpha_e^* \ll 1$

Afin de ne travailler qu'avec un petit paramètre, nous relierons les quantités adimensionnelles  $\delta$ ,  $\delta_{\text{sk},q}$  et  $\alpha_e^*$  entre elles.

**Hypothèse 7.1.2.** *Les coefficients adimensionnels sont reliés par*

$$\delta_q = \tilde{\sigma}_q \delta \quad \text{et} \quad \alpha_e^* = \delta^2,$$

avec  $\tilde{\sigma}_q$  de l'ordre de l'unité<sup>4</sup>.

Nous justifions cette hypothèse en nous appuyant sur un cas concret particulier : le RG 187 A/U copper avec une longueur  $L = 1m$  et une seule âme  $Q = 1$ . Avec les valeurs numériques de  $d$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma_c$  données dans la table, nous obtenons :

$$\delta = 1.6 \times 10^{-3} = \delta_q.$$

Nous n'avons pu trouver dans la littérature un quelconque ordre de grandeur de la conductivité magnétique tant celle-ci est extrêmement petite et négligeable dans les matériaux classiques que nous considérons. Considérer l'ordre  $\delta^2$  pour  $\alpha_e^*$ , c'est avoir largement surélevé la valeur de la conductivité électrique dans le milieu diélectrique qui serait d'avantage de l'ordre  $\delta^4$ . Cependant, nous avons souhaité étudier un cas bien pire à ce sujet que les matériaux usuellement exploités pour la construction de câbles. Nous ne faisons aucune erreur d'approximation en considérant l'ordre  $\delta^2$ , au pire, nous compliquons nos calculs avec des coefficients dont nous aurions a priori pu nous rendre compte qu'ils étaient négligeables.

4.  $1 < \tilde{\sigma}_q < 10$

Les échelles caractéristiques des champs électromagnétiques et de la source sont choisies de manière à ce que :

$$\left[ \frac{H^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon_c^*}} \right] = 1 \quad \text{et} \quad \left[ \frac{L J^*}{H^*} \right] = 1.$$

Ce choix implique en particulier que :

$$\left[ \frac{L J_c^*}{E^*} \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \right] = 1.$$

Les équations de Maxwell adimensionnalisées sont ainsi écrites sous la forme condensée suivante<sup>5</sup> :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} \partial_t \tilde{E} + \tilde{\sigma}^\delta \tilde{E} - \mathbf{curl}_\delta \tilde{H} = \tilde{\mathbf{J}}, & \text{dans } \mathcal{W}_{\text{ext}}, \\ \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H} + \mathbf{curl}_\delta \tilde{E} = \mathbf{0}, & \text{dans } \mathcal{W}_{\text{ext}}, \end{cases} \quad (7.12)$$

avec l'opérateur :

$$\mathbf{curl}_\delta \begin{pmatrix} U_T \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \times \partial_3 U_T + \delta^{-1} \mathbf{rot} U_3 \\ \delta^{-1} \mathbf{rot} U_T \end{pmatrix}$$

et les coefficients :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_e & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\varepsilon}_q & \text{dans } \mathcal{W}_q \end{cases}, \quad \tilde{\mu} = \begin{cases} \tilde{\mu}_m & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\mu}_q & \text{dans } \mathcal{W}_q \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}^\delta = \begin{cases} \delta^2 \tilde{\sigma}_e & \text{dans } \Omega \\ \delta^{-4} \tilde{\sigma}_q & \text{dans } \mathcal{W}_q \end{cases}. \quad (7.13)$$

**Lemme 7.1.1.** *Soit  $T > 0$ . Si la source est suffisamment régulière*

$$\tilde{\mathbf{J}} \in L^2(]0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})),$$

*alors il existe une unique solution*

$$\tilde{E}^\delta, \tilde{H}^\delta \in L^2(]0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))$$

*de (7.12). De plus cette solution vérifie les inégalités a priori :*

$$\|\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \tilde{E}^\delta\|_{L^2(]0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))} + \|\tilde{\mu}^{\frac{1}{2}} \tilde{H}^\delta\|_{L^2(]0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))} \leq C T \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{J}}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))}$$

*et*

$$\|\tilde{\sigma}_e^{\frac{1}{2}} \tilde{E}^\delta\|_{L^2(]0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))} \leq C \delta^2 \sqrt{T} \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{J}}\|_{L^2(]0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))}$$

*avec  $C$  une constante indépendante de  $T$  et de  $\delta$ .*

### 7.1.3 Couche mince où a lieu l'effet de peau

On ne fréquente pas sans s'infecter la couche du divin

Saint-John Perse, Vents

L'effet de peau se caractérise par la tendance qu'a l'énergie électromagnétique au sein des conducteurs à se concentrer à la surface de ceux-ci. Le théorème 7.3.1 illustrera ce propos en signalant que les champs électromagnétiques décroissent exponentiellement vite à l'intérieur de ceux-ci (figure 7.5). Nous allons ainsi introduire une **couche mince** dans chacun des conducteurs  $\mathcal{W}_q$  pour  $q = 0 \dots Q$  qui touchent la partie diélectrique (zone jaune entre le trait et les pointillés dans la figure 7.5) :

$$\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}} := \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \mathcal{O}_q^{\tilde{\nu}} \times \{x_3\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{O}_q^{\tilde{\nu}} := \left\{ x \in \mathcal{O}_q \mid \text{dist}(x, \partial \mathcal{O}_q^{\tilde{\nu}}) < \tilde{\nu} \right\}. \quad (7.14)$$

Nous allons définir les coordonnées locales dans cette couche mince. Commençons pour cela par définir par la paramétrisation  $x_\tau(t_\tau)$  d'un bord  $\partial_q S$  (les autres se font de la même manière) avec  $t_\tau$  l'abscisse curviligne se

5. Rappelons, afin de compléter le problème, qu'à l'heure actuelle nous n'avons que faire des conditions aux bords.

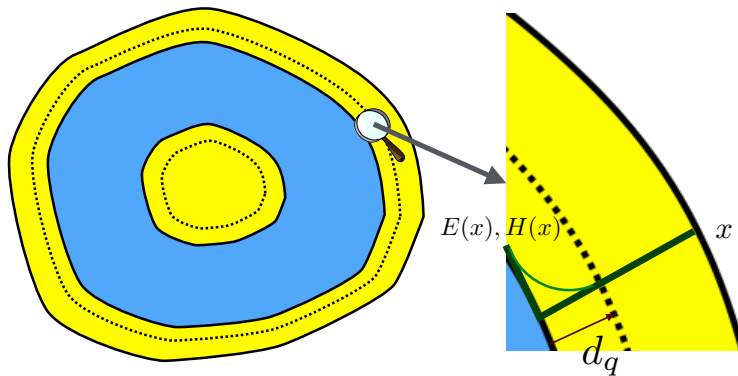


FIGURE 7.5 – Couches minces et décroissance exponentielle des champs électromagnétiques au sein de celles-ci.

déplaçant le long du bord fermé  $\partial_q S$  dont la courbure sera noté  $k$ . Nous ne pouvons définir les coordonnées locales dans la couche mince  $\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$  que si l'épaisseur de cette couche est inférieure à l'incurvation maximale :

$$\tilde{\nu} \leq \tilde{\nu}_+ = \inf_{\partial_q S} |k^{-1}|.$$

Cela signifie que nous pouvons tirer chaque point du bord  $\partial_q S$  dans la direction normale jusqu'à une distance  $\tilde{\nu}$  pour définir  $\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$ . **Les coordonnées locales** sont ainsi définies par :

$$x(t_\tau, \nu) = x_\tau(t_\tau) + \nu n(t_\tau) \quad \text{avec} \quad \nu \leq \tilde{\nu}_+. \quad (7.15)$$

Nous avons donné en annexe 10 un formulaire précis des formules dont nous aurons besoin pour calculer dans les coordonnées locales d'une couche mince.

#### 7.1.4 A la recherche de la conjecture asymptotique

Chacun appelant idées claires celles qui sont au même degré de confusion que les siennes propres.

Proust, A l'ombre des jeunes filles en fleurs

Rappelons que notre **ansatz** est  $\delta \ll 1$ . Toutes les quantités qui doivent être petites ou grandes sont exprimées en fonction de celui-ci qui est amené à tendre vers 0. La différence entre les équations de Maxwell (7.12) dans la partie diélectrique  $\Omega$  et dans la partie conductrice  $\mathcal{W}$  due au contraste de conductivité  $\tilde{\sigma}^\delta$  entre ces deux parties (voir (7.13)) nous poussent à proposer des développements asymptotiques différents dans la partie diélectrique  $\Omega$  et dans la partie conductrice  $\mathcal{W}$ . Nous allons alors utiliser la méthode des développements asymptotiques multi-échelles dans la continuité de [74]. Nous proposons de la même manière que dans la section 4.1 **un développement polynomial** en puissance de  $\delta$  pour les champs électromagnétiques dans le **diélectrique** :

$$\tilde{E}^\delta|_\Omega = \tilde{E}^0 + \delta \tilde{E}^1 + \delta^2 \tilde{E}^2 + \dots, \quad \tilde{H}^\delta|_\Omega = \tilde{H}^0 + \delta \tilde{H}^1 + \delta^2 \tilde{H}^2 + \dots, \quad (7.16)$$

avec les **champs extérieurs (aussi nommés champs lointains)**  $\tilde{E}^p, \tilde{H}^p$  aux ordres  $p$  définis sur la partie diélectrique de référence  $\Omega$ . Dans les **conducteurs**, nous allons postuler un **développement type couche limite** qui prend en compte la décroissance exponentielle des champs électromagnétiques au sein de ceux-ci :

$$\tilde{E}^\delta(x, x_3)|_{\mathcal{W}^{\tilde{\nu}}} = \tilde{E}_c^0\left(t_\tau, \frac{\nu}{\delta}, x_3\right) + \delta \tilde{E}_c^1\left(t_\tau, \frac{\nu}{\delta}, x_3\right) + \delta^2 \tilde{E}_c^2\left(t_\tau, \frac{\nu}{\delta}, x_3\right) + \dots, \quad \text{de même pour } \tilde{H}^\delta|_{\mathcal{W}} \quad (7.17)$$

où  $(t_\tau, \nu)$  sont les coordonnées locales dans les couches minces  $\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$ . Les **champs intérieurs**  $\tilde{E}_c^p, \tilde{H}_c^p$  aux ordres  $p$ , aussi nommés **champs proches**, sont ainsi définis sur chaque semi-bande  $\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+$  et doivent vérifier :

$$\lim_{\tilde{\nu} \rightarrow \infty} |\tilde{E}_c^p| = \lim_{\tilde{\nu} \rightarrow \infty} |\tilde{H}_c^p| = 0 \quad \text{pour tout abscisse curviligne } t_\tau, \quad (7.18)$$

conformément au fait que les **champs électromagnétiques périssent exponentiellement rapidement dans les couches minces**  $\mathcal{W}^{\tilde{\nu}}$ . Les champs extérieurs, aussi nommés champs lointains, correspondent à ce qui

est observé à l'échelle macroscopique. Si nous insérons le développement proposé pour le champ extérieur en (7.16) dans les équations de Maxwell (7.12), nous obtenons dans la partie diélectrique  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} \partial_t \tilde{E}_T^p + \tilde{\sigma}_e \tilde{E}_T^{p-2} - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{H}_T^p) - \mathbf{rot} \tilde{H}_3^{(p+1)} = \tilde{j}_T, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\varepsilon} \partial_t \tilde{E}_3^p + \tilde{\sigma}_e \tilde{E}_3^{p-2} - \mathbf{rot} \tilde{H}_T^{(p+1)} = \tilde{J}_3, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^p + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_T^p) + \mathbf{rot} \tilde{E}_3^{(p+1)} = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_3^p + \mathbf{rot} \tilde{E}_T^{(p+1)} = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (7.19)$$

En prenant la divergence des deux premières équations de (7.19), nous obtenons des équations que nous exploiterons par la suite :

$$\begin{cases} \left\{ \operatorname{div} (\tilde{\varepsilon} \partial_t \tilde{E}_T^{(p+1)}) + \operatorname{div} (\tilde{\sigma}_e \tilde{E}_T^{(p-1)}) + \partial_3 (\tilde{\varepsilon} \partial_t \tilde{E}_3^p) + \partial_3 (\tilde{\sigma}_e \tilde{E}_3^{p-2}) = \delta_{(p+1)}^0 \operatorname{div} J_T + \delta_p^0 \partial_3 J_3 \right. & \text{dans } \Omega \\ \left. \operatorname{div} (\tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^{(p+1)}) + \partial_3 (\tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_3^p) = 0 \right. & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (7.20)$$

Nous pouvons de même insérer le développement postulé pour le champ intérieur, aussi appelé champ proche, en (7.17) dans les équations de Maxwell (7.12) dans la partie conductrice  $\mathcal{W}$ , pour obtenir des équations sur chaque champs intérieurs  $\tilde{E}_c^p, \tilde{H}_c^p$ . Nous détaillerons cette équation par la suite (car les calculs dans les coordonnées locales sont plus délicats). Les conditions de transmission issues de (7.8) (voir (3.24) ou la propriété 3.3.1 pour plus de détails) de type tangentielle deviennent :

$$\begin{cases} \left\{ \tilde{E}_T^p \times n \Big|_{\partial_q S} = \tilde{E}_{c,T}^p \times n \Big|_{\partial_q S} \right. & \text{et} & \left\{ \tilde{H}_T^p \times n \Big|_{\partial_q S} = \tilde{H}_{c,T}^p \times n \Big|_{\partial_q S} \right. \\ \left. \tilde{E}_3^p \Big|_{\partial_q S} = \tilde{E}_{c,3}^p \Big|_{\partial_q S} \right. & & \left. \tilde{H}_3^p \Big|_{\partial_q S} = \tilde{H}_{c,3}^p \Big|_{\partial_q S} \right. \end{cases} \quad (7.21)$$

et de type normale sur  $\partial_q S$  deviennent :

$$\begin{cases} \left\{ \tilde{\varepsilon} \partial_t \tilde{E}_T^p \cdot n + \tilde{\sigma}_e \tilde{E}_T^{(p-2)} \cdot n - \delta_p^0 \tilde{J}_T \cdot n = (\tilde{\varepsilon}_c \partial_t \tilde{E}_{c,T}^p \cdot n + \tilde{\sigma}_c \tilde{E}_{c,T}^{(p+4)} \cdot n) - \delta_p^0 \tilde{J}_{c,T} \cdot n, \right. \\ \left. \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^p \cdot n = \tilde{\mu}_c \partial_t \tilde{H}_{c,T}^p \cdot n. \right. \end{cases} \quad (7.22)$$

## 7.2 Du coté des résultats escomptés

Il est faux de croire que l'échelle des craintes correspond à celle des dangers qui les inspirent.

---

Proust, Le Temps retrouvé

L'étude approfondie des champs intérieurs nous permettra de proposer des conditions aux limites des champs extérieurs aux ordres  $p$  sur les surfaces entre la partie conductrice et la partie diélectrique qui ne font intervenir que des considérations sur les champs extérieurs aux ordres inférieurs. De telles conditions aux limites sont nommées **GIBC (Generalize Impedance Boundary Condition)**. Celles-ci nous aideront grandement à définir une résistance due à l'effet de peau améliorant le modèle 1D obtenu à partir de l'analyse asymptotique.

### 7.2.1 A l'ombre des conditions aux limites de type GIBC en fleurs

Des images difficiles à suivre, quand l'auditeur ne connaissait pas encore l'univers qu'elles peignaient

---

Proust, A l'ombre des jeunes filles en fleurs

Les équations de Maxwell (7.12) peuvent être résolues que dans la partie diélectrique  $\Omega$  en considérant les conditions aux bords sur la surface  $\partial\Omega$  de séparation entre la partie diélectrique et la partie conductrice :

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_T^\delta \times n \\ \tilde{E}_3^\delta \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} = GIBC^\delta \begin{pmatrix} \tilde{H}_T^\delta \times n \\ \tilde{H}_3^\delta \end{pmatrix}$$

où l'opérateur de Steklov-Poincaré<sup>6</sup>  $GIBC^\delta$  correspond aux conditions de transmission (7.21) avec les champs électromagnétiques dans la partie conductrice. Plus précisément, nous avons

$$GIBC^\delta : \mathbf{u} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{E}_{c,T}^\delta(\mathbf{u}) \times n \\ \tilde{E}_{c,3}^\delta(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

avec  $\tilde{E}_c^\delta(\mathbf{u}), \tilde{H}_c^\delta(\mathbf{u})$  la solution au problème intérieur :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\tilde{\varepsilon}_c \partial_t + \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c) \tilde{E}_{c,T}^\delta(\mathbf{u}) - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{H}_{c,T}^\delta) - \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{H}_{c,3}^\delta(\mathbf{u}) = \tilde{J}_T, & \text{dans } \Omega, \\ (\tilde{\varepsilon}_c \partial_t + \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c) \tilde{E}_{c,3}^\delta(\mathbf{u}) - \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{H}_{c,T}^\delta(\mathbf{u}) = \tilde{J}_3, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mu}_c \partial_t \tilde{H}_{c,T}^\delta(\mathbf{u}) + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_{c,T}^\delta(\mathbf{u})) + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{E}_{c,3}^\delta(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\mu}_c \partial_t \tilde{H}_{c,3}^\delta(\mathbf{u}) + \delta^{-1} \mathbf{rot} \tilde{E}_{c,T}^\delta(\mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \begin{pmatrix} \tilde{H}_T^\delta(\mathbf{u}) \times n \\ \tilde{H}_3^\delta(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \mathbf{u} & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

N'oublions pas qu'il faut aussi vérifier que les autres conditions de transmission, à savoir (7.22), sont également satisfaites.

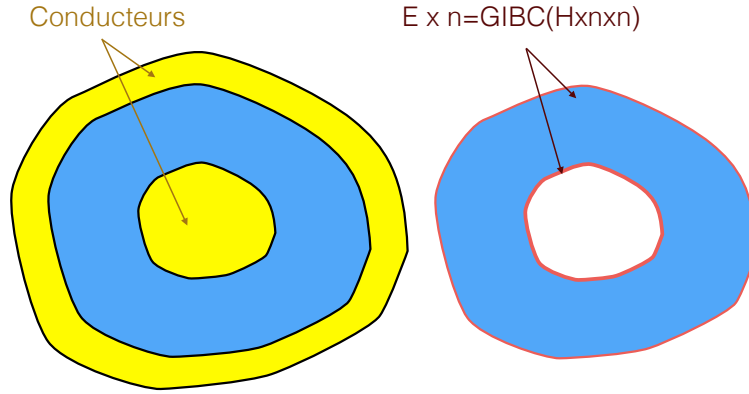


FIGURE 7.6 – Conditions aux bords de type GIBC.

Les approximations de cet opérateur  $GIBC^\delta$ , que nous nommerons  $GIBC^p$ , nous permettent ainsi de calculer les champs extérieurs (7.19) dans la partie diélectrique  $\Omega$  avec les conditions aux bords :

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_T^p \times n \\ \tilde{E}_3^p \end{pmatrix} = GIBC^p \left[ \begin{pmatrix} \tilde{H}_T^k \times n \\ \tilde{H}_3^k \end{pmatrix} \right]_{k < p}.$$

sans avoir à se soucier des champs intérieurs (figure 7.6). Ces  $GIBC^p$  seront des opérateurs non-locaux en temps, plus précisément ils contiendront la demi-dérivée temporelle au sens de Caputo (voir annexe 12 pour plus de détails) :

$$\partial_t^{1/2} u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial_r u}{\sqrt{t-r}} dr.$$

Nous démontrerons dans la section 7.4 que :

**Théorème 7.2.1.** *Les  $GIBC^p$  sur le bord  $\partial\Omega$  aux ordres  $p = 0, 1, 2, 3$  sont :*

— ordre 0 :

$$\tilde{E}_T^0 \times n = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{E}_3^0 = 0$$

6. C'est une sorte de DtN pour les équations de Maxwell.

— ordre 1 :

$$\tilde{E}_T^1 \times n = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{E}_3^1 = 0$$

— ordre 2 :

$$\tilde{E}_T^2 \times n = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{E}_3^2 = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_t^{1/2} (\tilde{H}_T^0 \times n)$$

— ordre 3 :

$$\tilde{E}_T^3 \times n = -\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_t^{1/2} \tilde{H}_3^1 \quad \text{et} \quad \tilde{E}_3^3 = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_t^{1/2} (\tilde{H}_{c,T}^1 \times n)$$

Nous pouvons à partir de ces conditions aux limites en déduire ceux sur le champ magnétique :

**Proposition 7.2.1.** *Les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$  vérifiées par le champ magnétique induites par les GIBC<sup>p</sup> du théorème 7.2.1 sont :*

— ordre 0 :

$$\tilde{H}_T^0 \cdot n = 0$$

— ordre 1 :

$$\tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^1 \cdot n = -\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_t^{1/2} \partial_\tau (\tilde{H}_T^0 \times n)$$

— ordre 2 :

$$\tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^2 \cdot n = -\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_t^{1/2} \partial_\tau (\tilde{H}_T^1 \times n)$$

La démonstration de cette proposition suit du lemme suivant :

**Lemme 7.2.1.** *Sur le bord  $\partial\Omega$ , le champ magnétique extérieur à l'ordre  $p$  vérifie*

$$\mu \partial_t (\tilde{H}_T^p \cdot n) = -\tilde{E}_T^p \times n - \partial_\tau \tilde{E}_3^{(p+1)}$$

*Démonstration.* Soit  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Nous intégrons la troisième équation (pour  $p = k$ ) de (7.19) contre  $\nabla u$  sur  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^k \cdot \nabla u + \int_{\Omega} \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \tilde{E}_T^k) \cdot \nabla u + \int_{\Omega} \mathbf{rot} \tilde{E}_3^{(k+1)} \cdot \nabla u = 0$$

et en intégrant par parties avec la formule de Green 2D (10.18), nous obtenons

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^k \right) u + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^k \cdot n u - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \tilde{E}_T^k \right) u \\ + \int_{\partial\Omega} \left( \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \tilde{E}_T^k \right) \cdot n u + \int_{\partial\Omega} \mathbf{rot} \tilde{E}_3^{(k+1)} \cdot n u = 0. \end{aligned} \quad (7.23)$$

De même nous intégrons la dérivée longitudinale  $\partial_3$  de la quatrième équation de (7.19) pour  $p = k - 1$  contre  $u$  sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \partial_3 \left( \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_T^{k-1} \right) u + \int_{\Omega} \operatorname{rot} \partial_3 \tilde{E}_T^k u = 0. \quad (7.24)$$

En soustrayant les deux équations (7.23) et (7.24) en rappelant (7.20) et (10.5) nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega} \left( \mu \partial_t (\tilde{H}_T^k \cdot n) + \tilde{E}_T^k \times n + \mathbf{rot} \tilde{E}_3^{(k+1)} \cdot n \right) u = 0$$

et cela pour toute fonction test  $u$ . □

Nous pouvons aussi, toujours à partir des conditions aux bords sur le champ extérieur électrique, établir la proposition suivante :

**Proposition 7.2.2.** *La moyenne des champs longitudinaux extérieurs magnétiques vérifie :*

$$\int_S \tilde{\mu} \partial_t \tilde{H}_3^p = - \int_{\partial S} \tilde{E}_T^{(p+1)} \times n.$$



## 7.2.2 La résistance retrouvée

Toute nouveauté paraîtra toujours  
alambiquée et fatigante

---

Proust, Autour de Madame Swann

Le but même de la modélisation de l'effet de peau est d'analyser sa répercussion sur le modèle 1D que nous avons obtenu dans la partie II. Celui-ci, nommé modèle des télégraphistes, exploite le développement asymptotique pour définir des matrices homogénéisées  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$  (qui seront rappelées en (7.52)), les variables usuelles que sont les potentiels électriques  $\mathbf{V}^\delta$  et les courants  $\mathbf{I}^\delta$ . La prise en compte de conditions aux limites de type GIBC nous permet d'ajouter à ce modèle une nouvelle matrice  $\mathbf{R}_{\text{sk}}$  (qui sera définie en (7.67)) qui agit comme une résistance. L'équation générale devient alors :

$$\begin{cases} \mathbf{C} \partial_t \mathbf{V}^\delta + \partial_3 \mathbf{I}^\delta = \mathbf{I}_s^\delta + O(\delta^2), \\ \mathbf{L} \partial_t \mathbf{I}^\delta + \delta \mathbf{R}_{\text{sk}} \partial_t^{1/2} \mathbf{I}^\delta + \partial_3 \mathbf{V}^\delta = O(\delta^2). \end{cases} \quad (7.25)$$

Remarquons que la présence de la demi-dérivée  $\partial_t^{1/2}$  devant la résistance  $\mathbf{R}_{\text{sk}}$  due à l'effet de peau implique que ce dernier est un phénomène à mémoire. La section 7.5 sera consacrée à l'établissement de ce nouveau modèle et la section 7.6 à son analyse.

## 7.2.3 L'estimation d'erreur disparue

C'est peine perdue que nous cherchions à l'  
évoquer, tous les efforts de notre intelligence  
sont inutiles.

---

Proust, Du côté de chez Swann

Nous devons vérifier que le modèle obtenu converge vers les solutions des équations de Maxwell 3D avec très haute conductivité. Pour justifier notre modèle, nous nous attendons à ce que

$$\tilde{E}^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \tilde{E}^p = O(\delta^{p+1}) \quad \text{et} \quad \tilde{H}^\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \tilde{H}^p = O(\delta^{p+1}).$$

Soupirs, tourments de l'inachevé, ne pas avoir eu hélas le temps de s'en charger, là est ma honte.

## 7.3 Estimation a priori et décroissance exponentielle dans les conducteurs

Nous ne connaissons a priori des choses que  
ce que nous y mettons nous-mêmes.

---

Kant, Préface à la seconde édition de la  
Critique de la raison pure

### 7.3.1 Domaine de Laplace à la place du domaine temporel

Pour simplifier l'analyse, nous allons considérer les champs électromagnétiques solutions des équations (7.12) dans le **domaine de Laplace** via la transformée de Laplace :

$$\tilde{U}(t) \rightarrow \hat{U}(s) := \int_0^\infty e^{-st} U(t) dt.$$

Nous noterons toujours  $\eta = \Re(s)$  la partie réelle et  $\omega = \Im(s)$  la partie fréquentielle de la variable de Laplace  $s$  qui vit sur le demi-plan

$$\mathbb{C}_0 := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0\}.$$

**Definition 7.3.1.** Les équations de Maxwell adimensionnalisées dans la partie diélectriques sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\tilde{\varepsilon} s + \delta^2 \tilde{\sigma}_e) \hat{E}_T^\delta - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \hat{H}_T^\delta) - \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{H}_3^\delta = \hat{J}_T, & \text{dans } \Omega, \\ (\tilde{\varepsilon} s + \delta^2 \tilde{\sigma}_e) \hat{E}_3^\delta - \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{H}_T^\delta = \hat{J}_3, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mu} s \hat{H}_T^\delta + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \hat{E}_T^\delta) + \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{E}_3^\delta = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mu} s \hat{H}_3^\delta + \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{E}_T^\delta = 0, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (7.26)$$

et dans la partie conductrice :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\tilde{\varepsilon}_c s + \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c) \hat{E}_{c,T}^\delta - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \hat{H}_{c,T}^\delta) - \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{H}_{c,3}^\delta = \hat{J}_{c,T}, & \text{dans } \mathcal{W}, \\ (\tilde{\varepsilon}_c s + \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c) \hat{E}_{c,3}^\delta - \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{H}_{c,T}^\delta = \hat{J}_{c,3}, & \text{dans } \mathcal{W}, \\ \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,T}^\delta + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \hat{E}_{c,T}^\delta) + \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{E}_{c,3}^\delta = \mathbf{0}, & \text{dans } \mathcal{W}, \\ \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,3}^\delta + \delta^{-1} \mathbf{rot} \hat{E}_{c,T}^\delta = 0, & \text{dans } \mathcal{W}. \end{array} \right. \quad (7.27)$$

auxquelles nous ajoutons des conditions aux bords sur  $\partial \mathcal{W}_{ext}$  issues de (7.7)

$$\hat{E}_T^\delta \times n = 0 \quad , \quad \hat{E}_3^\delta = 0 \quad (7.28)$$

et les conditions de transmission de type tangentielle sur  $\partial_q S$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \hat{E}_T^\delta \times n \right]_{\partial_q S} = 0 \\ \left[ \hat{E}_3^\delta \right]_{\partial_q S} = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \hat{H}_T^\delta \times n \right]_{\partial_q S} = 0 \\ \left[ \hat{H}_3^\delta \right]_{\partial_q S} = 0 \end{array} \right. \quad (7.29)$$

et de type normale sur  $\partial_q S$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{\varepsilon} s + \delta^2 \tilde{\sigma}_e) \hat{E}_T^\delta \cdot n - \hat{J}_T \cdot n = (\tilde{\varepsilon}_c s + \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c) \hat{E}_{c,T}^\delta \cdot n - \hat{J}_{c,T} \cdot n \\ \tilde{\mu} s \hat{H}_T^\delta \cdot n = \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,T}^\delta \cdot n \end{array} \right. \quad (7.30)$$

Nous pouvons aussi introduire les équations de divergences induites par (7.26) sur la partie diélectrique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \left( (\tilde{\varepsilon} s + \delta^2 \tilde{\sigma}_e) \hat{E}_T^\delta \right) + \delta \partial_3 \left( (\tilde{\varepsilon} s + \delta^2 \tilde{\sigma}_e) \hat{E}_3^\delta \right) = \operatorname{div} J_T + \delta \partial_3 j_3 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \left( \tilde{\mu} s \hat{H}_T^\delta \right) + \delta \partial_3 \left( \tilde{\mu} s \hat{H}_3^\delta \right) = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.31)$$

ainsi que celles induites par (7.27) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \left( (\tilde{\varepsilon}_c s + \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c) \hat{E}_{c,T}^\delta \right) + \delta \partial_3 \left( (\tilde{\varepsilon}_c s + \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c) \hat{E}_{c,3}^\delta \right) = \operatorname{div} J_T + \delta \partial_3 j_3 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \left( \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,T}^\delta \right) + \delta \partial_3 \left( \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,3}^\delta \right) = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.32)$$

L'effet de peau est caractérisé par la présence d'une racine carrée  $\sqrt{s}$ , nous nous attendons à souvent la retrouver. Nous avons choisi de déterminer uniquement la racine carrée d'un nombre complexe de partie réelle positive en choisissant pour convention :

$$\sqrt{s} = \sqrt{|s|} e^{\frac{i}{2} \arg s}.$$

Pour revenir en temps, il nous suffit de rappeler que  $\sqrt{s}$  est le symbole de l'opérateur :

$$\sqrt{s} \quad \longleftrightarrow \quad \partial_t^{1/2}$$

avec  $\partial_t^{1/2}$  la demi-dérivée temporelle au sens de Caputo et les autres opérateurs  $s$  et  $s^{-1}$  par la dérivée temporelle et l'intégrateur temporel. L'avantage de la transformée de Laplace est qu'elle peut donner des estimations a priori dans le domaine temporel via le théorème 12.2.1 (nous reviendrons sur ce théorème par la suite).

### 7.3.2 Estimations d'énergies a priori

**Lemme 7.3.1.** *Nous avons les inégalités d'énergie a priori :*

$$\sqrt{\mathcal{E}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\eta} \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})} \quad \text{et} \quad \sqrt{\mathcal{Q}_c} \leq \delta^2 \sqrt{\frac{2}{\eta}} \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}$$

avec l'énergie électromagnétique  $\mathcal{E}$  dans le câble et les pertes dans les conducteurs  $\mathcal{Q}_c$  définies par :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\varepsilon} |\hat{\mathbf{E}}^\delta|^2 + \tilde{\mu} |\hat{\mathbf{H}}^\delta|^2 \right] \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_c = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}} \tilde{\sigma}_c |\hat{\mathbf{E}}_c^\delta|^2.$$

*Démonstration.* L'égalité d'énergie correspondant aux équations (7.26, 7.27, 7.29, 7.30) est

$$s \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\varepsilon} |\hat{\mathbf{E}}^\delta|^2 + \bar{s} \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\mu} |\hat{\mathbf{H}}^\delta|^2 + \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\sigma}^\delta |\hat{\mathbf{E}}_c^\delta|^2 = \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^\delta$$

ainsi par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\eta \left[ \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\varepsilon} |\hat{\mathbf{E}}^\delta|^2 + \tilde{\mu} |\hat{\mathbf{H}}^\delta|^2 \right] + \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\sigma}^\delta |\hat{\mathbf{E}}_c^\delta|^2 \leq \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})} \sqrt{\int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\varepsilon} |\hat{\mathbf{E}}^\delta|^2}.$$

Nous en concluons que

$$\sqrt{\int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\varepsilon} |\hat{\mathbf{E}}^\delta|^2} \leq \frac{\|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}}{\eta}$$

et donc que

$$\eta \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\mu} |\hat{\mathbf{H}}^\delta|^2 \leq \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})} \sqrt{\int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\varepsilon} |\hat{\mathbf{E}}^\delta|^2} \leq \frac{\|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}^2}{\eta},$$

et ainsi

$$\int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\sigma}^\delta |\hat{\mathbf{E}}_c^\delta|^2 \leq \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})} \sqrt{\int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\varepsilon} |\hat{\mathbf{E}}^\delta|^2} \leq \frac{\|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}^2}{\eta}.$$

□

Une preuve similaire à celle-ci (mais avec le lemme 4.3.2 de Grönwall) permet de retrouver le lemme 7.1.1.

### 7.3.3 Décroissance exponentielle dans les conducteurs

Sous la couche épaisse [...] l'âme échappe au temps.

Mauriac, La Fin de la nuit

**Théorème 7.3.1.** *Pour tout  $\delta \leq 1$  et  $\tilde{\nu} > 0$ , il y a décroissance exponentielle dans le coeur  $\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$ , avec la couche mince  $\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$  définie en (7.14), et plus précisément, nous avons l'inégalité a priori suivante :*

$$\mathcal{E}^{\tilde{\nu}} \leq \exp\left(-\frac{\delta^{-1} \sqrt{\eta}}{\|\nabla \chi\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}})}}\right) \frac{1}{\eta} \left[ 2 \left( \frac{|s|}{\eta} + 1 + \delta^2 \max\left(\frac{\tilde{\sigma}_e}{\tilde{\varepsilon}}\right) \right) \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}^2 + \|\tilde{\sigma}_c^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_q)}^2 \right] \quad (7.33)$$

avec  $\mathcal{E}^{\tilde{\nu}}$  l'énergie dans le coeur :

$$\mathcal{E}^{\tilde{\nu}} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}} \tilde{\varepsilon}_c |\hat{\mathbf{E}}^\delta|^2 + \tilde{\mu}_c |\hat{\mathbf{H}}^\delta|^2 \right].$$

et  $\chi \in H^1(\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}})$  une quelconque fonction vérifiant

$$\chi|_{\partial_q S} = 0 \quad \text{et} \quad \chi|_{\partial(\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}})} = 1.$$

*Démonstration.* Etendons sur toute la section du câble notre fonction  $\chi \in H^1(\mathcal{O}_{\text{ext}})$  par <sup>7</sup> :

$$\chi|_{\bar{S}} \equiv 0 \quad , \quad 0 \leq \chi|_{\mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} \leq 1 \quad \text{et} \quad 1 \equiv \chi|_{\overline{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}}}.$$

Soit  $f(\delta)$  un nombre réel dépendant de  $\delta$  dont nous choisirons l'expression qui nous arrange à la fin de preuve. Posons

$$e^{\text{B.L}} = e^{\chi f(\delta)} \widehat{E}^\delta \quad \text{et} \quad h^{\text{B.L}} = e^{\chi f(\delta)} \widehat{H}^\delta,$$

par calcul de dérivées de composées, nous avons pour les rotationnels 2D :

$$\mathbf{rot} \widehat{E}_3^\delta = e^{-\chi f(\delta)} [\mathbf{rot} e_3^{\text{B.L}} - f(\delta) e_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi] \quad , \quad \mathbf{rot} \widehat{E}_T^\delta = e^{-\chi f(\delta)} [\mathbf{rot} e_T^{\text{B.L}} + f(\delta) \mathbf{rot} \chi \cdot e_T^{\text{B.L}}],$$

et de même pour  $\widehat{H}^\delta$ . Nous pouvons ainsi réécrire les équations (7.26) et (7.27) dans  $\mathcal{W}_{\text{ext}}$  en considérant les variables  $e^{\text{B.L}}, h^{\text{B.L}}$  davantage que  $\widehat{E}^\delta, \widehat{H}^\delta$  en les multipliant par  $e^{\chi f(\delta)}$  et en utilisant les formules décrites plus haut :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\tilde{\varepsilon} s + \tilde{\sigma}^\delta) e_T^{\text{B.L}} - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times h_T^{\text{B.L}}) - \delta^{-1} [\mathbf{rot} h_3^{\text{B.L}} - f(\delta) h_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi] = \widehat{J}_T, & \text{dans } \mathcal{W}_{\text{ext}}, \\ (\tilde{\varepsilon} s + \tilde{\sigma}^\delta) e_3^{\text{B.L}} - \delta^{-1} [\mathbf{rot} h_T^{\text{B.L}} + f(\delta) \mathbf{rot} \chi \cdot h_T^{\text{B.L}}] = \widehat{J}_3, & \text{dans } \mathcal{W}_{\text{ext}}, \\ \tilde{\mu} s h_T^{\text{B.L}} + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times e_T^{\text{B.L}}) + \delta^{-1} [\mathbf{rot} e_3^{\text{B.L}} - f(\delta) e_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi] = \mathbf{0}, & \text{dans } \mathcal{W}_{\text{ext}}, \\ \tilde{\mu} s h_3^{\text{B.L}} + \delta^{-1} [\mathbf{rot} e_T^{\text{B.L}} + f(\delta) \mathbf{rot} \chi \cdot e_T^{\text{B.L}}] = 0, & \text{dans } \mathcal{W}_{\text{ext}}. \end{array} \right.$$

De la même manière que pour l'estimation a priori, l'égalité d'énergie est :

$$\int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} (\tilde{\varepsilon} s + \tilde{\sigma}^\delta) |e^{\text{B.L}}|^2 + \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\mu} s |h^{\text{B.L}}|^2 = \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \widehat{\mathbf{J}} \cdot e^{\text{B.L}} + 2\delta^{-1} f(\delta) \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} (e_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot h_T^{\text{B.L}} - h_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot e_T^{\text{B.L}}).$$

En rappelant que  $\chi = 0$  hors de  $\mathcal{W}_q$  (et donc  $e^{\text{B.L}} = \widehat{E}^\delta$  et  $h^{\text{B.L}} = \widehat{H}^\delta$  dans  $\mathcal{W}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{W}_q$ ) et que  $\nabla \chi = 0$  hors de  $\mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}$ , l'égalité d'énergie devient :

$$\begin{aligned} s \left[ \int_{\mathcal{W}_q} \tilde{\varepsilon} |e^{\text{B.L}}|^2 + \tilde{\mu} |h^{\text{B.L}}|^2 \right] + \delta^{-4} \int_{\mathcal{W}_q} \tilde{\sigma}_c^\delta |e^{\text{B.L}}|^2 &= \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} \widehat{\mathbf{J}} \cdot e^{\text{B.L}} \\ &+ \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} \widehat{\mathbf{J}} \cdot e^{\text{B.L}} + 2\delta^{-1} f(\delta) \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} (e_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot h_T^{\text{B.L}} - h_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot e_T^{\text{B.L}}) \\ &+ \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{W}_q} \widehat{\mathbf{J}} \cdot \widehat{E}^\delta - s \left[ \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{W}_q} \tilde{\varepsilon} |\widehat{E}^\delta|^2 + \tilde{\mu} |\widehat{H}^\delta|^2 \right] - \delta^2 \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{W}_q} \tilde{\sigma}_e |\widehat{E}_c^\delta|^2 \end{aligned} \quad (7.34)$$

Par l'estimation a priori du lemme 7.3.1, nous avons

$$\left| s \left[ \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{W}_q} \tilde{\varepsilon} |\widehat{E}^\delta|^2 + \tilde{\mu} |\widehat{H}^\delta|^2 \right] + \delta^2 \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{W}_q} \tilde{\sigma}_e |\widehat{E}_c^\delta|^2 \right| \leq \left( \frac{|s|}{\eta^2} + \max \left( \frac{\tilde{\sigma}_e}{\tilde{\varepsilon}} \right) \frac{\delta^2}{\eta} \right) \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}^2 \quad (7.35)$$

et

$$\left| \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{W}_q} \widehat{\mathbf{J}} \cdot \widehat{E}^\delta \right| \leq \frac{1}{\eta} \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{W}_q)} \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}. \quad (7.36)$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous avons :

$$\left| \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} \widehat{\mathbf{J}} \cdot e^{\text{B.L}} \right| \leq \sqrt{\int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} \tilde{\sigma}_c |e^{\text{B.L}}|^2} \|\tilde{\sigma}_c^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{\nu}})} \leq \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} \tilde{\sigma}_c |e^{\text{B.L}}|^2 + \|\tilde{\sigma}_c^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{\nu}})}^2 \right], \quad (7.37)$$

et

$$\left| \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} \widehat{\mathbf{J}} \cdot e^{\text{B.L}} \right| \leq \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{\nu}}} \tilde{\sigma}_c |e^{\text{B.L}}|^2 + \|\tilde{\sigma}_c^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_q^{\bar{\nu}})}^2 \right]. \quad (7.38)$$

<sup>7</sup>.  $\equiv$  correspond à identiquement égal.

De même avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\left| \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} (e_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot h_T^{\text{B.L}} - h_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot e_T^{\text{B.L}}) \right| \leq \left\| (\tilde{\mu} \tilde{\sigma}_c)^{-\frac{1}{2}} \nabla \chi \right\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\bar{v}})} \left[ \sqrt{\int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\sigma}_c |e_3^{\text{B.L}}|^2} \sqrt{\int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\mu} |h_3^{\text{B.L}}|^2} + \sqrt{\int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\sigma}_c |e_T^{\text{B.L}}|^2} \sqrt{\int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\mu} |h_T^{\text{B.L}}|^2} \right]$$

puis avec l'inégalité de Young

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \sqrt{a+b},$$

nous en déduisons que

$$\left| \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} (e_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot h_T^{\text{B.L}} - h_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot e_T^{\text{B.L}}) \right| \leq \sqrt{2} \left\| (\tilde{\mu} \tilde{\sigma}_c)^{-\frac{1}{2}} \nabla \chi \right\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\bar{v}})} \sqrt{\int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\sigma}_c |e^{\text{B.L}}|^2} \sqrt{\int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\mu} |h^{\text{B.L}}|^2}.$$

Pour finir, l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{\sqrt{2} f(\delta) \left\| (\tilde{\mu} \tilde{\sigma}_c)^{-\frac{1}{2}} \nabla \chi \right\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\bar{v}})}}{2\eta\delta} a^2 + \frac{\eta\delta}{2\sqrt{2} f(\delta) \left\| (\tilde{\mu} \tilde{\sigma}_c)^{-\frac{1}{2}} \nabla \chi \right\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\bar{v}})}} b^2,$$

nous permet de conclure que :

$$\left| \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} (e_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot h_T^{\text{B.L}} - h_3^{\text{B.L}} \mathbf{rot} \chi \cdot e_T^{\text{B.L}}) \right| \leq \frac{f(\delta)}{\eta\delta} \left\| (\tilde{\mu} \tilde{\sigma}_c)^{-\frac{1}{2}} \nabla \chi \right\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\bar{v}})}^2 \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\sigma}_c |e^{\text{B.L}}|^2 + \frac{\eta\delta}{2f(\delta)} \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\mu} |h^{\text{B.L}}|^2. \quad (7.39)$$

Nous avons ainsi, en prenant la partie réelle de l'égalité d'énergie (7.34) et en collectant (7.35, 7.36, 7.37, 7.38, 7.39) :

$$\begin{aligned} \eta \left[ \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\varepsilon} |e^{\text{B.L}}|^2 + \tilde{\mu} |h^{\text{B.L}}|^2 \right] + \left( \delta^{-4} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\sigma}_c^\delta |e^{\text{B.L}}|^2 \\ + \eta \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\varepsilon} |e^{\text{B.L}}|^2 + \left( \delta^{-4} - 2 \frac{f(\delta)^2}{\eta\delta^2} \left\| (\tilde{\mu} \tilde{\sigma}_c)^{-\frac{1}{2}} \nabla \chi \right\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\bar{v}})}^2 - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\sigma}_c^\delta |e^{\text{B.L}}|^2 \\ \leq \left( \frac{|s|}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} + \max \left( \frac{\tilde{\sigma}_e}{\tilde{\varepsilon}} \right) \frac{\delta^2}{\eta} \right) \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}^2 + \frac{\|\tilde{\sigma}_c^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_q)}^2}{2}. \quad (7.40) \end{aligned}$$

Nous avons trivialement

$$\left( \delta^{-4} - \frac{1}{2} \right) \geq 0,$$

et en choisissant judicieusement l'expression de  $f(\delta)$  :

$$f(\delta) = \frac{\delta^{-1} \sqrt{\eta}}{2 \|\nabla \chi\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\bar{v}})}},$$

nous avons

$$\left( \delta^{-4} - 2 \frac{f(\delta)^2}{\eta\delta^2} \left\| (\tilde{\mu} \tilde{\sigma}_c)^{-\frac{1}{2}} \nabla \chi \right\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\bar{v}})}^2 - \frac{1}{2} \right) \geq 0,$$

et ainsi l'inégalité (7.40) devient :

$$\eta \left[ \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\varepsilon} |e^{\text{B.L}}|^2 + \tilde{\mu} |h^{\text{B.L}}|^2 \right] \leq \left( \frac{|s|}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} + \max \left( \frac{\tilde{\sigma}_e}{\tilde{\varepsilon}} \right) \frac{\delta^2}{\eta} \right) \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}^2 + \frac{\|\tilde{\sigma}_c^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2(\mathcal{W}_q)}^2}{2}.$$

Comme par définition de notre fonction de coupure  $\chi$  nous avons :

$$\int_{\mathcal{W}_q} \tilde{\varepsilon} |e^{\text{B.L}}|^2 + \tilde{\mu} |h^{\text{B.L}}|^2 \geq e^{2f(\delta)} \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\bar{v}}} \tilde{\varepsilon} |\hat{E}^\delta|^2 + \tilde{\mu} |\hat{H}^\delta|^2,$$

nous obtenons l'inégalité souhaitée.  $\square$

### 7.3.4 Estimations dans le domaine temporel

Toutes les estimations que nous avons données dans le domaine de Laplace peuvent être traduites dans le domaine temporel. Pour plus d'informations sur le passage de l'un à l'autre, nous invitons le lecteur à se référer à la section 12.2 de l'annexe qui est consacrée à la transformée de Laplace, et plus précisément au théorème 12.2.1 et à son corollaire 12.2.1. En particulier avec ces derniers et le lemme 7.3.1, nous en concluons que pour tout temps long  $1 \leq T < \infty$  si

$$J \in L^2([0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})) \cap L^1_{\text{loc}}([0, \infty[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))$$

alors

$$\|\mathcal{E}\|_{L^2([0, T[, L^2(\mathcal{W}_q))} \leq CT \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})} \quad \text{et} \quad \|\mathcal{Q}_c\|_{L^2([0, T[, L^2(\mathcal{W}_q))} \leq C\sqrt{T} \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}$$

et si

$$J \in H^1([0, T[, L^2(\mathcal{W}_q)) \cap L^1_{\text{loc}}([0, \infty[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))$$

alors

$$\|\mathcal{E}\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\mathcal{W}_q))} \leq CT \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}\|_{H^1(\mathcal{W}_{\text{ext}})} \quad \text{et} \quad \|\mathcal{Q}_c\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\mathcal{W}_q))} \leq C\sqrt{T} \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}\|_{H^1(\mathcal{W}_{\text{ext}})}$$

avec

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} \tilde{\varepsilon} |E^\delta|^2 + \tilde{\mu} |H^\delta|^2 \right] \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_c = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}} \tilde{\sigma}_c |E_c^\delta|^2.$$

Remarquons que ces estimations sont moins bonnes que celles que nous aurions directement pu obtenir en travaillant dans le domaine temporel avec le lemme 4.3.2 de Grönwall (à l'instar du théorème 4.3.1) :

$$\|\mathcal{E}\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\mathcal{W}_q))} \leq CT \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}\|_{L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})}.$$

Enfin par simple exploitation du théorème 12.2.2 sur l'estimation a priori du théorème 7.3.1, nous obtenons :

**Théorème 7.3.2.** *Considérons une source suffisamment régulière*

$$J \in L^2([0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}})) \cap L^1_{\text{loc}}([0, \infty[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))$$

Pour tout anstanz  $\delta \leq 1$ , temps  $1 < T < \infty$  et épaisseur de couche  $\tilde{\nu} > 0$ , il y a décroissance exponentielle dans le coeur  $\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$ , avec la couche mince  $\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$  définie en (7.14), et plus précisément l'inégalité a priori :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}^{\tilde{\nu}}\|_{L^2([0, T])} \leq C \exp\left(-\frac{\delta^{-1}}{C_{\tilde{\nu}} T}\right) T \left[ 2T \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \partial_t^{1/2} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2([0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))}^2 \right. \\ \left. + 2 \left(1 + \delta^2 \max\left(\frac{\tilde{\sigma}_c}{\tilde{\varepsilon}}\right)\right) \|\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2([0, T[, L^2(\mathcal{W}_{\text{ext}}))}^2 + \|\tilde{\sigma}_c^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{J}}\|_{L^2([0, T[, L^2(\mathcal{W}_q))}^2 \right] \end{aligned} \quad (7.41)$$

avec  $\mathcal{E}^{\tilde{\nu}}$  l'énergie dans le coeur :

$$\mathcal{E}^{\tilde{\nu}}(t) := \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}} \tilde{\varepsilon}_c |E^\delta(t)|^2 + \tilde{\mu}_c |H^\delta(t)|^2 \right],$$

la constante

$$C_{\tilde{\nu}} := \|\nabla \chi\|_{L^\infty(\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}})},$$

où  $\chi \in H^1(\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}})$  la même quelconque fonction du théorème 7.3.1 et  $C$  est une constante indépendante de  $\delta$ ,  $T$  et de l'épaisseur  $\tilde{\nu}$  de la couche mince.

## 7.4 De l'étude des champs intérieurs aux GIBC

Nous allons incorporer le développement asymptotique type couche mince (7.17) dans les équations de Maxwell (7.12) et ainsi pouvoir identifier dans une cascade d'équations les champs intérieurs

$$\hat{E}_{c,T}^p(t_\tau, \cdot, s), \hat{H}_{c,T}^p(t_\tau, \cdot, s) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad \hat{E}_{c,3}^p(t_\tau, \cdot, s), \hat{H}_{c,3}^p(t_\tau, \cdot, s) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{avec} \quad t_\tau \in \mathcal{W}.$$

Là est la partie fastidieuse. Nous verrons que les champs longitudinaux à partir de  $\widehat{H}_{c,3}^1$  et  $\widehat{E}_{c,3}^3$  satisfont, après retour dans le domaine temporel, des équations de la chaleur. Chaleur, effet de peau, résistance. Voilà un accord agréable à l'oreille... et chaleureux. Ces équations de la chaleur sont posées sur un domaine des domaines non bornés  $\mathbb{R}^+$ . Afin de les résoudre, nous allons chercher des équations équivalentes à ces dernières mais posées sur un domaine borné de type  $]0, \nu_r[$  via des conditions transparentes en  $\nu_r$  qui prennent en compte le comportement des solutions dans  $]\nu_r, \infty[$ . Par contre contrairement au chapitre 2, nous ne trouverons nos conditions transparentes à partir d'une séparation des variables mais avec du calcul pseudo-différentiel. Nous utiliserons la structure des champs intérieurs ainsi étudiée et les conditions de transmission (7.21, 7.22) avec les champs extérieurs pour retrouver les GIBC proposées dans le théorème 7.2.1.

### 7.4.1 Une remarque préliminaire issue des champs extérieurs

Faisons tout d'abord attention à un fait qui simplifiera notre imminente analyse des champs intérieurs :

**Lemme 7.4.1.** *A l'ordre 0 tous les champs longitudinaux extérieurs sont des constantes sur chaque section  $S$  :*

$$\widehat{E}_3^0(x, x_3)|_S = \widehat{E}_3^0(x_3) \quad \text{et} \quad \widehat{H}_3^0(x, x_3)|_S = \widehat{H}_3^0(x_3) \quad \text{avec} \quad x \in S$$

*et tous les champs longitudinaux intérieurs sont égaux à la même constante sur le bord  $\partial S$  :*

$$\forall q = 0 \dots Q, \quad \widehat{E}_{c,3}^0|_{\partial_q S} = \widehat{E}_3^0(x_3) \quad \text{et} \quad \widehat{H}_{c,3}^0|_{\partial_q S} = \widehat{H}_3^0(x_3)$$

*Démonstration.* En prenant (7.19) avec  $p = -1$  nous avons

$$\mathbf{rot} \widehat{E}_3^0 = \mathbf{rot} \widehat{H}_3^0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

ainsi  $\widehat{E}_3^0$  et  $\widehat{H}_3^0$  sont des constantes et nous utilisons ensuite les conditions de transmission (7.21).  $\square$

### 7.4.2 Expression des champs intérieurs dans les coordonnées locales

Trop de longueur et trop de brièveté de discours l'obscurcit

Pascal, Les pensées

Cette sous-section pourra sembler bien aride car les démonstrations seront réduites à l'essentiel mais le raisonnement est classique et s'apparente fortement à celui de l'article [35] à cela près qu'il ne s'agit pas des mêmes équations et surtout que les résultats finaux seront donnés dans le domaine temporel.

Nous **travaillerons dans les coordonnées locales**  $(t_\tau, \nu)$  **de la couche mince**  $\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$  de chaque conducteur  $\mathcal{W}_q$ . Rappelons que les coordonnées locales sont définies si et seulement si la profondeur  $\tilde{\nu}$  de la couche mince  $\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}}$  ne dépasse pas l'incurvation maximale de  $\partial_q S$  (voir la section 7.1.3). Nous pouvons considérer des couches minces qui vérifient cette hypothèse car la décroissance exponentielle au sein du conducteur (théorème 7.3.1) à lieu qu'importe la profondeur  $\tilde{\nu}$ . Après le changement d'échelle  $(t_\tau, \frac{\nu}{\delta})$  pour travailler dans  $\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+$ , les champs intérieurs s'écrivent, en insérant le développement postulé pour le champ intérieur en (7.17) dans les équations de Maxwell de la partie conductrice (7.27), sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c \widehat{E}_{c,T}^\delta + \delta^{-2} \left( \partial_\nu \widehat{H}_{c,3}^\delta \right) \tau - \frac{\delta^{-1}}{1+k\delta\nu} \left( \partial_\tau \widehat{H}_{c,3}^\delta \right) n + \tilde{\varepsilon}_c s \widehat{E}_{c,T}^\delta - \partial_3 \left( \mathbf{e}_3 \times \widehat{H}_{c,T}^\delta \right) = \widehat{J}_T, \\ \delta^{-4} \tilde{\sigma}_c \widehat{E}_{c,3}^\delta - \frac{\delta^{-1}}{1+k\delta\nu} \left[ \delta^{-1} \partial_\nu \left( \widehat{H}_{c,T}^\delta \cdot \tau \right) + kS \partial_\nu \left( \widehat{H}_{c,T}^\delta \cdot \tau \right) + k \left( \widehat{H}_{c,T}^\delta \cdot \tau \right) - s \left( \widehat{H}_{c,T}^\delta \cdot n \right) \right] + \tilde{\varepsilon}_c s \widehat{E}_{c,3}^\delta = \widehat{J}_3, \\ -\delta^{-2} \left( \partial_\nu \widehat{E}_{c,3}^\delta \right) \tau + \frac{\delta^{-1}}{1+k\delta\nu} \left( \partial_\tau \widehat{E}_{c,3}^\delta \right) n + \tilde{\mu}_c s \widehat{H}_{c,T}^\delta + \partial_3 \left( \mathbf{e}_3 \times \widehat{E}_{c,T}^\delta \right) = j_T, \\ \frac{\delta^{-1}}{1+k\delta\nu} \left[ \delta^{-1} \partial_\nu \left( \widehat{E}_{c,T}^\delta \cdot \tau \right) + kS \partial_\nu \left( \widehat{E}_{c,T}^\delta \cdot \tau \right) + k \left( \widehat{E}_{c,T}^\delta \cdot \tau \right) - s \left( \widehat{E}_{c,T}^\delta \cdot n \right) \right] + \tilde{\mu}_c s \widehat{H}_{c,3}^\delta = 0, \end{array} \right.$$

où nous nous sommes aidés de la section 10.4 de l'annexe portant sur les opérateurs différentiels 2D. Remarquons que dans les deux premières équations du jeu d'équations les termes en  $\tilde{\varepsilon}_c s \widehat{E}_c^\delta$  sont négligeables devant le terme en  $\delta^{-4}$ , en les annulant, nous retombons sur l'approximation des courants de Foucault. L'article [64] s'était déjà

mis dans le cadre de cette approximation avant de faire l'analyse asymptotique. Nous multiplions ensuite ce jeu d'équations par  $1 + k\delta\nu$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,T}^{p+4} + k\nu \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,T}^{p+3} \\ + \left( \partial_\nu \hat{H}_{c,3}^{p+2} \right) \tau + \left[ k\nu \left( \partial_\nu \hat{H}_{c,3}^{p+1} \right) \tau - \left( \partial_\tau \hat{H}_{c,3}^{p+1} \right) n \right] \\ + \left[ \tilde{\varepsilon}_c s \hat{E}_{c,T}^p - \partial_3 \left( \mathbf{e}_3 \times \hat{H}_{c,T}^p \right) \right] + k\nu \left[ \tilde{\varepsilon}_c s \hat{E}_{c,T}^{p-1} - \partial_3 \left( \mathbf{e}_3 \times \hat{H}_{c,T}^{p-1} \right) \right] = \delta_p^0 \hat{J}_T, \\ \\ \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,3}^{p+4} + k\nu \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,3}^{p+3} \\ - \partial_\nu \left( \hat{H}_{c,T}^{p+2} \cdot \tau \right) - \left[ k\nu \partial_\nu \left( \hat{H}_{c,T}^{p+1} \cdot \tau \right) + k \left( \hat{H}_{c,T}^{p+1} \cdot \tau \right) - \partial_\tau \left( \hat{H}_{c,T}^{p+1} \cdot n \right) \right] \\ + \tilde{\varepsilon}_c s \hat{E}_{c,3}^p + k\nu \tilde{\varepsilon}_c s \hat{E}_{c,3}^{p-1} = \delta_p^0 \hat{J}_3, \\ \\ - \left( \partial_\nu \hat{E}_{c,3}^{p+2} \right) \tau + \left[ -k\nu \left( \partial_\nu \hat{E}_{c,3}^{p+1} \right) \tau + \left( \partial_\tau \hat{E}_{c,3}^{p+1} \right) n \right] \\ + \left[ \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,T}^p + \partial_3 \left( \mathbf{e}_3 \times \hat{E}_{c,T}^p \right) \right] + k\nu \left[ \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,T}^{p-1} + \partial_3 \left( \mathbf{e}_3 \times \hat{E}_{c,T}^{p-1} \right) \right] = 0, \\ \\ \partial_\nu \left( \hat{E}_{c,T}^{p+2} \cdot \tau \right) + \left[ k\nu \partial_\nu \left( \hat{E}_{c,T}^{p+1} \cdot \tau \right) + k \left( \hat{E}_{c,T}^{p+1} \cdot \tau \right) - \partial_\tau \left( \hat{E}_{c,T}^{p+1} \cdot n \right) \right] \\ + \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,3}^p + k\nu \tilde{\mu}_c s \hat{H}_{c,3}^{p-1} = 0. \end{array} \right. \quad (7.42)$$

Nous n'allons nous intéresser qu'aux premiers ordres (ordre 3 en l'occurrence). Nous encadrerons les formules à retenir avant d'être résumées dans le théorème 7.4.1 Nous n'avons pas hésité à annuler des quantités qui se sont avérées l'être dans des équations précédentes.

La première équation de (7.42) devient pour  $p$  allant de 0 à 4 :

$$\bullet \quad p = -4 \Rightarrow \boxed{\hat{E}_{c,T}^0 = 0} \quad (7.43a)$$

$$\bullet \quad p = -3 \Rightarrow \boxed{\hat{E}_{c,T}^1 = 0} \quad (7.43b)$$

$$\bullet \quad p = -2 \cdot n \Rightarrow \boxed{\hat{E}_{c,T}^2 \cdot n = 0} \quad (7.43c)$$

$$\bullet \quad p = -2 \cdot \tau \Rightarrow \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,T}^2 \cdot \tau + \partial_\nu \left( \hat{H}_{c,3}^0 \right) = 0 \quad (7.43d)$$

$$\bullet \quad p = -1 \cdot n \Rightarrow \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,T}^3 \cdot n = \partial_\tau \hat{H}_{c,3}^0 \quad (7.43e)$$

$$\bullet \quad p = -1 \cdot \tau \Rightarrow \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,T}^3 \cdot \tau + \partial_\nu \left( \hat{H}_{c,3}^1 \right) = 0 \quad (7.43f)$$

La deuxième équation de (7.42) devient pour  $p$  allant de 0 à 4 :

$$\bullet \quad p = -4 \Rightarrow \boxed{\hat{E}_{c,3}^0 = 0} \quad (7.44a)$$

$$\bullet \quad p = -3 \Rightarrow \boxed{\hat{E}_{c,3}^1 = 0} \quad (7.44b)$$

$$\bullet \quad p = -2 \cdot n \Rightarrow \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,3}^2 - \partial_\nu \left( \hat{H}_{c,T}^0 \cdot \tau \right) = 0 \quad (7.44c)$$

$$\bullet \quad p = -1 \cdot n \Rightarrow \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,3}^3 - \partial_\nu \left( \hat{H}_{c,T}^1 \cdot \tau \right) = k \left( \hat{H}_{c,T}^0 \cdot \tau \right) - \partial_\tau \left( \hat{H}_{c,T}^0 \cdot n \right) \quad (7.44d)$$

La troisième équation de (7.42) devient pour  $p$  allant de 0 à 4

$$\bullet \quad p = -2 \Rightarrow \partial_\nu \hat{E}_{c,3}^0 = 0 \quad \text{redondant avec } \hat{E}_{c,3}^0 = 0 \quad (7.45a)$$

$$\bullet \quad p = -1 \Rightarrow \partial_\nu \hat{E}_{c,3}^1 = 0 \quad \text{redondant avec } \hat{E}_{c,3}^1 = 0 \quad (7.45b)$$

$$\bullet \quad p = 0 \cdot n \Rightarrow s \tilde{\mu}_c \hat{H}_{c,T}^0 \cdot n + \partial_\tau \hat{E}_{c,3}^1 = \partial_3 \left( \hat{E}_{c,T}^0 \cdot \tau \right) \xrightarrow{(7.43a, 7.44b)} \boxed{s \hat{H}_{c,T}^0 \cdot n = 0} \quad (7.45c)$$

$$\bullet \quad p = 0 \cdot \tau \Rightarrow -\partial_\nu \hat{E}_{c,3}^2 + s \tilde{\mu}_c \hat{H}_{c,T}^0 \cdot \tau = \partial_3 \left( \hat{E}_{c,T}^0 \cdot n \right) \stackrel{(7.43a)}{=} 0 \quad (7.45d)$$

$$\bullet \quad p = 1 \cdot n \Rightarrow s \tilde{\mu}_c \hat{H}_{c,T}^1 \cdot n + \partial_\tau \hat{E}_{c,3}^2 = \partial_3 \left( \hat{E}_{c,T}^1 \cdot \tau \right) \xrightarrow{(7.43b)} \boxed{s \tilde{\mu}_c \hat{H}_{c,T}^1 \cdot n + \partial_\tau \hat{E}_{c,3}^2} \quad (7.45e)$$

$$\bullet \quad p = 1 \cdot \tau \Rightarrow -\partial_\nu \hat{E}_{c,3}^3 + s \tilde{\mu}_c \hat{H}_{c,T}^1 \cdot \tau = 0 \quad (7.45f)$$



La quatrième et dernière équation de (7.42) devient pour  $p$  allant de 0 à 4 :

$$\bullet p = -2 \Rightarrow \partial_\nu \left( \widehat{E}_{c,T}^0 \cdot \tau \right) = 0 \quad \text{redondant avec } \widehat{E}_{c,T}^0 = 0 \quad (7.46a)$$

$$\bullet p = -1 \Rightarrow \partial_\nu \left( \widehat{E}_{c,T}^1 \cdot \tau \right) = 0 \quad \text{redondant avec } \widehat{E}_{c,T}^1 = 0 \quad (7.46b)$$

$$\bullet p = 0 \cdot n \Rightarrow \partial_\nu \left( \widehat{E}_{c,T}^2 \cdot \tau \right) + s \tilde{\mu}_c \widehat{H}_{c,3}^0 = 0 \quad (7.46c)$$

$$\bullet p = 1 \cdot n \Rightarrow \partial_\nu \left( \widehat{E}_{c,T}^3 \cdot \tau \right) + s \tilde{\mu}_c \widehat{H}_{c,3}^1 = -k \left( \widehat{E}_{c,T}^2 \cdot \tau \right) \quad (7.46d)$$

En regroupant certaines équations entre elles, nous pouvons mettre en exergue des **équations de type chaleur**. Nous avons premièrement avec (7.44c) et (7.45d)

$$-\partial_\nu^2 \widehat{E}_{c,3}^2 + s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c \widehat{E}_{c,3}^2 = 0 \quad (7.47)$$

Il s'agit bien d'une équation de la chaleur, car si nous retournons dans le domaine temporel, nous avons :

$$-\partial_\nu^2 \tilde{E}_{c,3}^2 + \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c \partial_t \tilde{E}_{c,3}^2 = 0.$$

L'équation de la chaleur est caractérisée dans le domaine de Laplace par la présence de  $\sqrt{s}$  (rappelons que  $s \in \mathbb{C}_0$ ), nous la retrouverons fréquemment. Les solutions de cette équation de la chaleur sont engendrées par

$$e^{\pm \sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}$$

or les exponentiels de module croissant ne sont pas autorisés par l'hypothèse de définition des champs intérieurs (7.18). La solution dans chacun des conducteurs peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\widehat{E}_{c,3}^2 |_{\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+} = A_q(t_\tau, x_3) e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}} \quad \text{et avec (7.45d) :} \quad \boxed{\widehat{H}_{c,T}^0 \cdot \tau |_{\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+} = -\frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c}{\tilde{\mu}_c}} A_q(t_\tau, x_3) e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu},}$$

où chaque  $A_q(t_\tau, x_3)$  est donnée par le champ  $\widehat{E}_{c,3}^2$  sur le bord  $\partial_q \Omega$ . Nous avons avec (7.45e) le champ magnétique transverse à l'ordre 0

$$\boxed{s \tilde{\mu}_c \widehat{H}_{c,T}^1 \cdot n |_{\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+} = -\partial_\tau A_q(t_\tau, x_3) e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}.$$

Nous avons de même une équation de la chaleur pour l'ordre qui suit :

$$(7.43d) + (7.46c) \Rightarrow -\partial_\nu^2 \widehat{H}_{c,3}^0 + s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c \widehat{H}_{c,3}^0 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\nu \left( \widehat{E}_{c,T}^2 \cdot \tau \right) = -\tilde{\mu}_c \widehat{H}_{c,3}^0$$

dont la solution s'écrit

$$\widehat{H}_{c,3}^0 |_{\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+} = B_q(t_\tau, x_3) e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu} \quad \text{et avec (7.43d) :} \quad \widehat{E}_{c,T}^2 \cdot \tau |_{\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+} = \sqrt{s} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} B_q(t_\tau, x_3) e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}.$$

Nous allons maintenant utiliser le lemme 7.4.1 préliminaire à l'étude des champs intérieurs pour démontrer que chaque  $B_q = 0$ . Nous savons de celui-ci que tous les  $B_Q$  sont égaux et constants :

$$\forall q = 0 \dots Q, B_q(t_\tau, x_3) = \widehat{H}_{c,3}^0 |_{\partial_q \Omega} = \widehat{H}_3^0(x_3).$$

Par la formule de Green 2D, nous avons :

$$\int_{\mathcal{W}} s \tilde{\mu}_c \widehat{H}_{c,3}^0 = - \int_{\partial \mathcal{W}} \text{rot} \widehat{E}_{c,T}^1 = - \int_{\partial \mathcal{W}} \widehat{E}_{c,T}^1 \times \quad \underset{(7.43b)}{=} 0$$

or

$$\int_{\mathcal{W}} s \tilde{\mu}_c \widehat{H}_{c,3}^0 = \int_{\mathcal{W}^v} s \tilde{\mu}_c \widehat{H}_{c,3}^0$$

car le champ est exponentiellement décroissant (7.18), ainsi nous avons par Fubini-Tonelli :

$$0 = \sum_{q=0}^Q \int_{\partial_q S \times \mathbb{R}^+} B_q(t_\tau, x_3) e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu} dt_\tau d\nu = \frac{Q \widehat{H}_3^0(x_3)}{\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c}} \Rightarrow \widehat{H}_3^0(x_3) = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\hat{H}_{c,3}^0|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\hat{E}_{c,T}^2 \cdot \tau|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0}.$$

Nous avons de plus avec (7.43e) :

$$\boxed{\hat{E}_{c,T}^3 \cdot n|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0}.$$

Nous avons aussi avec (7.44d) et (7.45f) l'équation de la chaleur :

$$-\partial_\nu^2 \hat{E}_{c,3}^3 + s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c \hat{E}_{c,3}^3 = s \tilde{\mu}_c k \left( \hat{H}_{c,T}^0 \cdot \tau \right) \quad (7.48)$$

et ainsi comme

$$s \tilde{\mu}_c k \left( \hat{H}_{c,T}^0 \cdot \tau \right) |_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = -\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} A_q k e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}$$

nous avons, après résolution,

$$\boxed{\hat{E}_{c,3}^3|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = \left[ C_q - \frac{A_q k}{2\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c}} \right] e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}.$$

En dérivant, nous avons

$$\partial_\nu \hat{E}_{c,3}^3|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = -\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \hat{E}_{c,3}^3,$$

et ainsi avec (7.45f) :

$$\boxed{\hat{H}_{c,T}^1 \cdot \tau|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = -\frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c}{\tilde{\mu}_c}} \left[ C_q - \frac{A_q k}{2\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c}} \right] e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}}$$

Pour finir, nous avons avec (7.43f) et (7.46d) l'équation de la chaleur

$$-\partial_\nu^2 \hat{H}_{c,3}^1 + s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c \hat{H}_{c,3}^1 = 0 \quad (7.49)$$

dont la solution est :

$$\boxed{\hat{H}_{c,3}^1|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = D_q e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}} \quad \text{et} \quad \boxed{\hat{E}_{c,T}^3 \cdot \tau|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \sqrt{s} D_q e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}}.$$

Nous allons résumer tous ces résultats dans le théorème suivant qui décrit les champs intérieurs.

**Théorème 7.4.1.** *Pour les champs transverses électriques intérieurs, nous avons :*

$$\hat{E}_{c,T}^0 = \hat{E}_{c,T}^1 = \hat{E}_{c,T}^2 = 0,$$

$$\hat{E}_{c,T}^3|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = \left( \sqrt{s} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} D_q e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu} \right) \tau,$$

pour les champs longitudinaux électriques intérieurs, nous avons :

$$\hat{E}_{c,3}^0 = \hat{E}_{c,3}^1 = 0,$$

$$\hat{E}_{c,3}^2|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = A_q e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu},$$

$$\hat{E}_{c,3}^3|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = \left[ C_q - \frac{A_q k}{2\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c}} \right] e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu},$$

pour les champs transverses magnétiques intérieurs, nous avons :

$$\hat{H}_{c,T}^0|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = -\left( \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c}{\tilde{\mu}_c}} A_q e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu} \right) \tau,$$

$$\hat{H}_{c,T}^1|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = -\left( \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c}{\tilde{\mu}_c}} \left[ C_q - \frac{A_q k}{2\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c}} \right] e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu} \right) \tau - \left( \frac{\partial_\tau A_q}{s \tilde{\mu}_c} e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu} \right) n,$$

et enfin pour les champs longitudinaux magnétiques intérieurs, nous avons :

$$\hat{H}_{c,3}^0 = 0 \quad \text{et} \quad \hat{H}_{c,3}^1|_{\partial_q\Omega\times\mathbb{R}^+} = D_q e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu},$$

où les  $3(Q+1)$  variables  $A_q, C_q, D_q$  ne dépendent que des coordonnées curvilignes  $(t_\tau, x_3)$  sur les bords  $\partial_q\Omega$ .

### 7.4.3 Obtention des GIBC

Le théorème précédent permet de retrouver les GIBC annoncées dans le théorème 7.2.1. La nullité des champs électriques à l'ordre 0 est à l'ordre 1 et les conditions de transmission (7.21) nous donnent les GIBC aux ordres 0 et 1. Pour la suite, nous relierons les champs intérieurs qui ne sont pas nuls sur les bords  $\partial_q S$  :

$$\begin{aligned} A &= \widehat{E}_{c,3}^2 |_{\partial_q S} = \sqrt{s} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \widehat{H}_{c,T}^0 \times n |_{\partial_q S} \\ \left[ C_q - \frac{A_q k}{2\sqrt{s\tilde{\mu}_c\tilde{\sigma}_c}} \right] &= \widehat{E}_{c,3}^3 = \sqrt{s} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \widehat{H}_{c,T}^1 \times n |_{\partial_q S} \\ -\sqrt{s} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} D &= \widehat{E}_{c,T}^3 \times n \times n |_{\partial_q S} = -\sqrt{s} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \widehat{H}_{c,3}^1 |_{\partial_q S} \end{aligned}$$

Le retour en temps est aisé, il suffit de replacer le symbole  $\sqrt{s}$  par l'opérateur pseudo-différentiel  $\partial_t^{1/2}$ . Ainsi en utilisant les conditions de transmission, nous obtenons bien les GIBC pour les ordres qui suivent. Il est aisé de vérifier que les conditions de compatibilité (7.22) sont elles aussi satisfaites pour  $p$  allant de  $-4$  à  $0$  pour le champ électrique et pour  $p = 0, 1$  pour le champ magnétique. Pour finir nous remarquons aussi que les expressions des champs magnétiques transverses du théorème 7.4.1 confirment celles annoncées dans la proposition 7.2.1.

### 7.4.4 Remarque concernant le cas non cylindrique

On dédaigne volontiers un but qu'on n'a pas réussi à atteindre, ou qu'on a atteint définitivement

Proust, Albertine disparue

Si nous voulons étoffer notre cadre d'application en ne considérant plus le câble cylindrique alors notre conjecture asymptotique (7.17) concernant les champs intérieurs n'est pas adéquate et par conséquent les GIBC proposées dans le théorème 7.2.1 ne sont plus applicables. Expliquons quelque peu pourquoi.

Un câble non cylindrique correspond au cas où les sections du câble varient, c-a-d sont données par transformation d'une section de référence  $\mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta$  incluse dans un domaine borné convexe  $\mathcal{B}^*$  de diamètre  $\delta$  :

$$\mathcal{O}_{\text{ext},x_3}^\delta = \mathcal{T}_{x_3} \mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta \quad \text{avec} \quad \mathcal{T} \in C^1(\mathbb{R}, W^{1,\infty}(\overline{\mathcal{B}^*}, \overline{\mathcal{B}^*})),$$

le câble est alors défini par

$$\mathcal{W}_{\text{ext}}^\delta = \bigcup_{x_3 \in \mathbb{R}} \mathcal{O}_{\text{ext}}^\delta \times \{x_3\},$$

et de même pour les conducteurs  $\mathcal{O}_{q,x_3}^\delta$ . Nous invitons le lecteur à lire la section 3.1.2 pour plus de précisions et de rigueur. Dans cette section nous avons démontré que les conditions aux bords et de transmission sont modifiées par l'apparition d'un facteur correspondant à la trace normale de l'opposé de la vitesse eulérienne de la transformation  $\mathcal{T}_{x_3}$  (voir la proposition 3.8) :

$$g = -\left( \partial_3 \mathcal{T}_{x_3} \circ \mathcal{T}_{x_3}^{-1} \right) \cdot n.$$

Les conditions de transmission de type tangentielle deviennent alors :

$$\begin{cases} \widehat{E}_T^p \times n |_{\partial_q S_{x_3}} = \widehat{E}_{c,T}^p \times n |_{\partial_q S_{x_3}} \\ \widehat{E}_3^p - g \widehat{E}_T^{p-1} \cdot n |_{\partial_q S_{x_3}} = \widehat{E}_{c,3}^p - g \widehat{E}_{c,T}^{p-1} \cdot n |_{\partial_q S_{x_3}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \widehat{H}_T^p \times n |_{\partial_q S_{x_3}} = \widehat{H}_{c,T}^p \times n |_{\partial_q S_{x_3}} \\ \widehat{H}_3^p \widehat{H}_T^{p-1} \cdot n |_{\partial_q S_{x_3}} = \widehat{H}_{c,3}^p \widehat{H}_{c,T}^{p-1} \cdot n |_{\partial_q S_{x_3}} \end{cases}$$

et de type normale sur  $\partial_q S_{x_3}$  deviennent :

$$\begin{cases} s \tilde{\varepsilon} \widehat{E}_T^p \cdot n + s \tilde{\varepsilon} g \widehat{E}_3^{(p-1)} + \tilde{\sigma}_e \widehat{E}_T^{(p-2)} \cdot n + \tilde{\sigma}_e g \widehat{E}_3^{(p-3)} = \left( s \tilde{\varepsilon}_c \widehat{E}_{c,T}^p \cdot n + s \tilde{\varepsilon}_c g \widehat{E}_{c,3}^{(p-1)} + \tilde{\sigma}_c \widehat{E}_{c,T}^{(p+4)} \cdot n + \tilde{\sigma}_c g \widehat{E}_{c,3}^{(p+3)} \right) \\ s \tilde{\mu} \widehat{H}_T^p \cdot n + s \tilde{\mu} g \widehat{H}_3^{(p-1)} = s \tilde{\mu}_c \widehat{H}_{c,T}^p \cdot n + s \tilde{\mu}_c g \widehat{H}_{c,3}^{(p-1)} \end{cases}$$

Si nous postulons le même développement asymptotique (7.17) pour les champs intérieurs dans le cas cylindrique, alors l'étude des champs intérieurs est la même, c-a-d que le théorème 7.4.1 est aussi vrai. Par contre, les nouvelles

conditions de transmission vont nous donner de nouvelles  $GIBC^p$  différentes du théorème 7.2.1. Intéressons nous qu'au cas qui pose problème. Les conditions de transmission donnent

$$\tilde{\sigma}_c \widehat{E}_{c,T}^3 \cdot n + \tilde{\sigma}_c g \widehat{E}_{c,3}^2 \Big|_{\partial_q S_{x_3}} = 0$$

et comme

$$\widehat{E}_{c,T}^3 \cdot n = 0 \quad \text{et} \quad \widehat{E}_{c,3}^2 \Big|_{\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+} = A_q e^{-\sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \nu}$$

nous avons  $g A_q = 0$ , ce qui veut dire qu'il n'y aucune conséquence de l'effet de peau sur  $\widehat{E}_c^2 = 0$  et  $\widehat{H}_c^0 = 0$  alors qu'il y en a dans le cas non cylindrique. Et si nous continuons notre raisonnement aux ordres supérieurs nous trouverons  $\widehat{E}_{c,3}^p = 0$  alors que se sont justement ces coefficients qui seront responsables de la présence d'une résistance dans le modèle des télégraphistes. Comme sûrement vous vous attendiez, notre erreur est de postuler (7.17). Dans le cas non cylindrique, le phénomène de couche limite dépend de la variable  $x_3$  :

$$\widehat{E}^\delta(x, x_3) \Big|_{\mathcal{W}^{\tilde{\nu}}} = \widehat{E}_c^0 \left( \mathbf{t}_{\tau, x_3}, \frac{\nu}{\delta} \right) + \delta \widehat{E}_c^1 \left( \mathbf{t}_{\tau, x_3}, \frac{\nu}{\delta} \right) + \delta^2 \widehat{E}_c^2 \left( \mathbf{t}_{\tau, x_3}, \frac{\nu}{\delta} \right) + \dots$$

avec  $(\mathbf{t}_{\tau, x_3}, \nu)$  les coordonnées locales dans la nouvelle couche mince :

$$\mathcal{W}_q^{\tilde{\nu}} := \left\{ x \in \mathcal{W}_q \mid \text{dist}(x, \partial_q S_{x_3}) < \tilde{\nu} \right\}.$$

ce nouveau développement modifie les équations (7.42). Trop embrouillé dans les calculs, nous avons sombré sur cet écueil. Toutefois, nous imaginons que le modèle 1D final n'en serait pas altéré mais que la reconstruction des champs électromagnétiques si.

#### 7.4.5 A la recherche du temps perdu

Nous avons dit que les champs intérieurs longitudinaux  $\widehat{E}_{c,3}^2$ ,  $\widehat{E}_{c,3}^3$  et  $\widehat{H}_{c,3}^1$  sont respectueusement solutions des équations (7.47), (7.48) et (7.49) sur un domaine non-borné dans une direction. Dans l'autre direction ces champs sont, par les conditions de transmission (7.21), égaux sur chaque  $\partial_q \Omega$  à  $A_q$ ,  $C_q$  aux champs extérieurs

$$\widehat{E}_{c,3}^2 \Big|_{\partial_q \Omega} = A_q = \widehat{E}_3^2, \quad \widehat{E}_{c,3}^3 \Big|_{\partial_q \Omega} = C_q = \widehat{E}_3^3 \quad \text{et} \quad \widehat{H}_{c,3}^1 \Big|_{\partial_q \Omega} = D_q = \widehat{H}_3^1.$$

Les composantes non nulles des champs transversaux à savoir

$$\widehat{H}_{c,T}^0 \cdot \tau, \quad \widehat{H}_{c,T}^1 \cdot n, \quad \widehat{H}_{c,T}^1 \cdot \tau \quad \text{et} \quad \widehat{E}_{c,T}^3 \cdot \tau,$$

se retrouvent respectivement à partir de

$$(7.44c), \quad (7.45e), \quad (7.44d) \quad \text{et} \quad (7.43f).$$

Nous allons utiliser les expressions dans le domaine de Laplace afin de trouver des formulations équivalentes aux équations de la chaleur (7.47), (7.48) et (7.49) mais cette fois-ci posées sur un domaine borné  $]0, \nu_r[$  via des **conditions transparentes** (en  $\nu_r$ ). Plus précisément en dérivant l'expression de  $\widehat{E}_{c,3}^2$  donnée dans le théorème 7.4.1, nous avons en un point  $\nu_r > 0$  :

$$\partial_\nu \widehat{E}_{c,3}^2(\nu_r) + \sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \widehat{E}_{c,3}^2(\nu_r) = 0.$$

Pour revenir en temps, il nous suffit de rappeler que  $\sqrt{s}$  est le symbole de l'opérateur  $\partial_t^{1/2}$ . Nous pouvons alors écrire :

**Théorème 7.4.2.** *Le champ longitudinal intérieur d'ordre deux restreint au conducteur numéro  $q$  pris en  $(t_\tau, x_3)$  :*

$$\Theta(t, \nu) = \widehat{E}_{c,3}^2 \Big|_{\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+}(t, \nu, t_\tau, x_3)$$

*est solution d'une équation de la chaleur (avec paramètre  $(t_\tau, x_3)$ ) avec condition transparente au bord droit et condition initiale nulle :*

$$\begin{cases} \partial_t \Theta - \frac{1}{\tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \partial_\nu^2 \Theta = 0 & \text{sur } ]0, \nu_r[ \\ \Theta = A_q & \text{en } \nu = 0 \\ \partial_\nu \Theta + \sqrt{\tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \partial_t^{1/2} \Theta = 0 & \text{en } \nu = \nu_r \end{cases}$$

qui est un problème bien posé de part son égalité d'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{\Theta}(T)\|_{L^2(]0,\nu_r])}}{2} + \frac{1}{\tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \int_0^T \|\partial_\nu \tilde{\Theta}\|_{L^2(]0,\nu_r])}^2 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c}} \int_0^T \tilde{\Theta}(\nu_r) \partial_t^{1/2} \tilde{\Theta}(\nu_r) \\ + \int_0^T (\partial_t A_q, \tilde{\Theta})_{L^2(]0,\nu_r])} + \int_0^T \partial_t^{1/2} A_q(\nu_r) \tilde{\Theta}(\nu_r) = \frac{\|\tilde{\Theta}(0)\|_{L^2(]0,\nu_r])}}{2} \end{aligned} \quad (7.50)$$

avec  $\tilde{\Theta} = \Theta - A_q$

*Démonstration.* Nous avons introduit  $\tilde{\Theta}$  pour nous débarrasser de la condition de Dirichlet non homogène en  $\nu = 0$ . L'égalité d'énergie vient de l'équation d'inconnue  $\tilde{\Theta}$  intégrée sur  $]0, T[ \times ]0, \nu_r[$  contre  $\tilde{\Theta}$ . Il est bon de rappeler que

$$\int_0^T \tilde{\Theta}(\nu_r) \partial_t^{1/2} \tilde{\Theta}(\nu_r) \geq 0,$$

en conséquence du théorème 12.3.1. Cette égalité d'énergie permet via le lemme de Gronwall d'obtenir une estimation d'énergie. Le caractère bien posé se déduit alors de la méthode de Galerkin. Une démonstration du même type est plus détaillée pour le théorème 4.3.1.  $\square$

Le problème pour lequel  $\hat{H}_{c,3}^1$  est solution est exactement le même qu'auparavant mais avec  $D_q$  au lieu de  $A_q$  comme condition de Dirichlet en  $\nu = 0$ . Le problème pour lequel  $\hat{E}_{c,3}^3$  est légèrement plus compliqué de part la présence de source. En dérivant l'expression de  $\hat{E}_{c,3}^3$  donnée dans le théorème 7.4.1, nous avons en un point  $\nu_r > 0$  :

$$\partial_\nu \hat{E}_{c,3}^3(\nu_r) + \sqrt{s \tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \hat{E}_{c,3}^3(\nu_r) = 0$$

Ainsi avec cette dernière égalité et l'équation de la chaleur (7.48) nous obtenons la formulation :

**Théorème 7.4.3.** *Le champ longitudinal intérieur d'ordre trois restreint au conducteur numéro  $q$  pris en  $(t_\tau, x_3)$  :*

$$\Theta'(t, \nu) = \hat{E}_{c,3}^3 \big|_{\partial_q \Omega \times \mathbb{R}^+}(t, \nu, t_\tau, x_3)$$

est solution d'une équation de la chaleur avec condition transparente au bord droit et condition initiale nulle :

$$\begin{cases} \partial_t \Theta' - \frac{1}{\tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \partial_\nu^2 \Theta' = \frac{k}{\tilde{\sigma}_c} \partial_t (\hat{H}_{c,T}^0 \cdot \tau) & \text{sur } ]0, \nu_r[ \\ \Theta' = C_q & \text{en } \nu = 0 \\ \partial_\nu \Theta' + \sqrt{\tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c} \partial_t^{1/2} \Theta' = 0 & \text{en } \nu = \nu_r \end{cases}$$

qui est un problème bien posé.

*Démonstration.* Les arguments sont similaires à ceux de la preuve du théorème 7.4.2.  $\square$

Les seules inconnues qui demeurent pour décrire dans le domaine temporel les champs intérieurs sont les  $A_q$ ,  $C_q$  et  $D_q$ . Elles sont données par les champs extérieurs qui comme nous le savons peuvent exprimer via les  $GIBC^p$  du théorème 7.2.1, que nous avons déjà justifié, sans avoir besoin de connaître les champs intérieurs. L'étude des champs extérieurs constitue le sujet de la section prochaine.

## 7.5 Vers le modèle des télégraphistes incorporant l'effet de peau

En verra i ge jamais la fin

Charles d'Orléans

Nous allons une fois de plus exploiter la même démarche que dans les chapitres 4 et 5 pour déterminer les champs extérieurs (7.19) avec les conditions aux bords données par le théorème 7.2.1. Cette démarche permet de déterminer des formules de reconstruction des champs extérieurs ( $\hat{E}^p, \hat{H}^p$ ) à partir des quantités 1D que sont les potentiels électriques  $\hat{\mathbf{V}}^p := (\hat{V}_q^p)_{q=1,Q}$  et les courants électriques  $\hat{\mathbf{I}}^p := (\hat{I}_q^p)_{q=1,Q}$  qui sont définis comme projection sur les espaces harmoniques

$$\hat{\mathbf{V}}_q^p := \sum_{q'}^Q (\mathbf{C}^{-1})_{q,q'} \int_S \tilde{\varepsilon} \hat{E}_T^p \cdot \nabla \varphi_{e,q'} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{I}}_q^p := \sum_{q'}^Q (\mathbf{L}^{-1})_{q,q'} \int_S \tilde{\mu} \hat{H}_T^p \cdot \nabla \psi_{m,q'}$$

avec les potentiels harmoniques

$$\varphi_{e,q} = \varphi^q(\tilde{\varepsilon}(x_3), S) \in H^1(S) \quad \text{et} \quad \psi_{m,q} = \psi^q(\tilde{\mu}(x_3), S) \in H^1(S)//\mathbb{R}$$

définis comme les uniques solutions des problèmes elliptiques

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\tilde{\varepsilon} \nabla \varphi_{e,q}) = 0, & \text{in } S, \\ \varphi_{e,q} = 0, & \text{on } \partial_0 S, \\ \varphi_{e,q} = \delta_{qk}, & \text{on } \partial_k S, \quad k \leq Q, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\tilde{\mu} \nabla \psi_{m,q}) = 0, & \text{in } S_{\Gamma_q}, \\ \partial_n \psi_{m,q} = 0, & \text{on } \partial S, \\ [\psi_{m,q}] = \delta_{qk}, \quad [\partial_n \psi_{m,q}] = 0 & \text{on } \Gamma_k, \quad k \leq Q. \end{array} \right. \quad (7.51)$$

et la matrice de capacitance et d'inductance  $Q$ -polaires :

$$\mathbf{C}_{q,q'} := \int_S \tilde{\varepsilon} \nabla \varphi_{e,q} \cdot \nabla \varphi_{e,q'} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{q,q'} := \int_S \tilde{\mu} \nabla \psi_{m,q} \cdot \nabla \psi_{m,q'}. \quad (7.52)$$

Toutes ces quantités sont déjà définies dans les chapitres 4 et 5, nous avons seulement enlevé l'indice  $\infty$  afin d'alléger les notations.

Notons que seules les conditions aux limites diffèrent de l'étude faite aux chapitres 4 et 5. Le lecteur vigilant aura remarqué dans la partie II que pour déterminer les champs électromagnétiques à l'ordre  $p$ , nous avons besoin des équations volumiques, des conditions aux bords à l'ordre  $p$  et de la condition au bord  $\hat{E}_3^{(p+1)}$ , c'est la raison pour laquelle nous avons tenu à écrire les GIBC jusqu'à l'ordre 3 alors que nous nous contenterons d'étudier que les ordres jusqu'à deux.

Pour plus de simplicité, nous supposons que la source, c-a-d la densité de courant  $\hat{J}_s$  est solénoïdale :

$$\mathbf{div} \hat{J}_T = 0.$$

Cette hypothèse, selon la proposition 5.1.1, implique un certain comportement de la source :

$$\hat{J}_{s,T} = \mathbf{rot} \left[ \zeta_J + \sum_{q=1}^Q \hat{J}_{T,q} \psi^q(S, 1) \right] \quad (7.53)$$

avec  $\psi^q(S, 1)$  défini en (1.10) et  $\zeta_J \in H^1(S)$  la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \zeta_J = \mathbf{rot} \hat{J}_T, & \text{dans } S, \\ \partial_n \zeta_J = \hat{J}_T \times n & \text{sur } \partial S. \end{array} \right. \quad (7.54)$$

### 7.5.1 Champs électromagnétiques limites et modèle des télégraphistes limite

La répétition est la plus forte des figures de rhétorique

Napoléon Bonaparte

Cette sous-section est entièrement dévolue à quelques rappels des résultats de l'ordre 0 déjà présentés et démontrés dans la section 4.1 et dans la section 5.1.3. Les potentiels et courants électriques limites sont les solutions de l'équation des télégraphistes à l'ordre 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} s \mathbf{C}(x_3) \hat{\mathbf{V}}^0(x_3, s) + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^0(x_3, s) = \hat{\mathbf{I}}_s(x_3, s), \\ s \mathbf{L}(x_3) \hat{\mathbf{I}}^0(x_3, s) + \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^0(x_3, s) = 0, \end{array} \right. \quad (7.55)$$

où la source est définie par

$$\hat{\mathbf{I}}_s(x_3, s) = \left( \hat{\mathbf{I}}_{s,q}(x_3, s) \right)_{1 \leq q \leq Q} \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{I}}_{s,q}(x_3, s) = \int_{\partial S} \hat{J}_T \cdot n. \quad (7.56)$$

Les formules de reconstruction des champs extérieurs à l'ordre 0 sont :

$$\hat{E}^0 = \sum_{q=1}^Q \hat{V}_q^0 \begin{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_{e,q}^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{H}^0 = \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^0 \begin{pmatrix} \tilde{\nabla} \psi_{m,q}^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

Nous pouvons aussi écrire ces champs sous la forme d'un rotationnel via le lemme de conjugaison 1.3.5 :

$$\widehat{E}^0 = \widehat{\varepsilon}^{-1} \sum_{q,q'=1}^Q \left[ \mathbf{C}_{q,q'} \widehat{V}_q^0 \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_{e,q'} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \text{et} \quad \widehat{H}^0 = -\widehat{\mu}^{-1} \sum_{q,q'=1}^Q \left[ \mathbf{L}_{q,q'} \widehat{I}_q^0 \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_{m,q'} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (7.58)$$

en ayant pris soin d'introduire potentiels conjugués :

$$\varphi_{m,q}(\cdot, x_3) := \varphi^q(\widehat{\mu}^{-1}(\cdot, x_3), S) \in H^1(S) \quad \text{and} \quad \psi_{e,q}(\cdot, x_3) = \psi^q(\widehat{\varepsilon}^{-1}(\cdot, x_3), S) \in H^1(S)_{/\mathbb{R}}$$

solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\widehat{\mu}^{-1} \nabla \varphi_{m,q}) = 0, & \text{dans } S, \\ \varphi_{m,q} = 0, & \text{sur } \partial_0 S, \\ \varphi_{m,q} = \delta_{qk}, & \text{sur } \partial_k S, \quad k \leq Q, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\widehat{\varepsilon}^{-1} \nabla \psi_{e,q}) = 0, & \text{dans } S_{\Gamma_q}, \\ \partial_n \psi_{e,q} = 0, & \text{sur } \partial S, \\ [\psi_{e,q}] = \delta_{qk}, \quad [\widehat{\varepsilon}^{-1} \partial_n \psi_{e,q}] = 0 & \text{sur } \Gamma_k, \quad k \leq Q, \end{array} \right. \quad (7.59)$$

## 7.5.2 Champs électromagnétiques et modèle des télégraphistes à l'ordre 1

ce qui est répété a existé, sinon il ne pourrait être répété ; mais c'est précisément le fait d'avoir existé qui donne à la répétition le caractère d'une nouveauté.

Sören Kierkegaard, La Répétition

### Les champs transverses à l'ordre 1

Les équations (7.19, 7.20) auxquelles nous ajoutons les conditions aux bords issues du théorème 7.2.1 et de la proposition 7.2.1 nous donnent les problèmes div-rot dont les champs transversaux à l'ordre 1 sont les solutions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \widehat{E}_T^1 = 0, & \text{dans } S, \\ \mathbf{div}(\widehat{\varepsilon} \widehat{E}_T^1) = \partial_3 \widehat{J}_3, & \text{dans } S, \\ \widehat{E}_T^1 \times n = 0 & \text{sur } \partial S, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \widehat{H}_T^1 = \widehat{J}_3, & \text{dans } S, \\ \mathbf{div}(\widehat{\mu} \widehat{H}_T^1) = 0 & \text{dans } S, \\ \sqrt{s} \widehat{\mu} \widehat{H}_T^1 \cdot n = -\sqrt{\frac{\mu_c}{\varepsilon_c}} \partial_\tau(\widehat{H}_T^0 \times n) & \text{sur } \partial S. \end{array} \right. \quad (7.60)$$

Nous devons avant toute chose donner un sens à la trace "dérivée tangentielle" de  $\psi_{m,q}$  et donc à  $\widehat{H}_T^0 \times n$  sur le bord  $\partial S$ . Sur les portions  $\partial_{q'} S$  pour  $q' \neq 0, q$  cela ne pose aucun problème mais sur  $\partial_0 S$  et  $\partial_q S$  le potentiel  $\psi_{m,q}$  saute. En réalité, cela ne pose guère de problème car avec le lemme de conjugaison 1.3.5, nous avons

$$\widetilde{\nabla} \psi_{m,q} = -\widehat{\mu}^{-1} \left[ \sum_{q'=1}^Q \mathbf{L}_{q,q'} \mathbf{rot} \varphi_{m,q'} \right]$$

et comme la trace "dérivée normale"  $\partial_n \varphi_{m,q'}$  est parfaitement opérante<sup>8</sup>, nous pouvons définir l'opérateur  $\widetilde{\partial}_\tau$  sur le bord  $\partial S$  par :

$$\widetilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} = \sum_{q'}^Q \mu^{-1} L_{q,q'} \partial_n \varphi_{m,q'}. \quad (7.61)$$

Cet opérateur ne dépend bien entendu pas de la coupure et coïncide avec la "dérivée tangentielle" usuelle  $\partial_\tau \psi_{m,q}$  quand cela est possible :

$$\widetilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} \big|_{\partial S \setminus \partial \Gamma_q} = \partial_\tau \psi_{m,q},$$

par contre il faut être vigilant avec l'intégrale sur un contour fermé :

$$\int_{\partial_{q'} S} \widetilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} = 0 \quad \text{mais} \quad \int_{\partial_q S} \widetilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} = \int_{\partial_0 S} \widetilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} = 1.$$

8.  $\mathbf{div}(\mu^{-1} \nabla \varphi_{m,q'}) = 0$  donc la trace normale de  $\nabla \varphi_{m,q'}$  est bien définie.

La trace tangentielle du champ magnétique et sa "dérivée tangentielle" usuelle sur le bord  $\partial S$  sont alors parfaitement définies :

$$\widehat{H}_T^0 \times n = - \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} \quad \text{et} \quad \partial_\tau (\widehat{H}_T^0 \times n) = - \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q \partial_\tau \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q},$$

et nous avons bien, car il s'agit bien d'une dérivée tangentielle usuelle :

$$\int_{\partial_q S} \partial_\tau (\widehat{H}_T^0 \times n) = 0 \quad \text{pour } q = 0 \dots Q,$$

ce qui correspond aux conditions de compatibilité du second problème de (7.60). Les problèmes div-rot (7.60) sont ainsi bien posés, nous pouvons écrire leur solution à l'aide des décompositions de Helmholtz du théorème 1.2.1 :

$$\widehat{E}_T^1 = \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_j^1 \nabla \varphi_{e,q} + \widehat{E}_T^{R,1} \quad \text{et} \quad \widehat{H}_T^1 = \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q \tilde{\nabla} \psi_{m,q} + \widehat{H}_T^{R,1} \quad (7.62)$$

avec les restes dans  $L^2(S)_{/\mathcal{E}(\varepsilon,S)}$  et  $L^2(S)_{/\mathcal{H}(\tilde{\mu},S)}$

$$\widehat{E}_T^{R,1} = \nabla \widehat{\xi}_e^1 \quad \text{et} \quad \widehat{H}_T^{R,1} = \tilde{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \widehat{\zeta}_m^1 + \sum_{q=0}^Q \sqrt{s} \widehat{I}_q^0 \nabla \widehat{\xi}_{m,q}^1$$

déterminables à partir des potentiels électrostatique et magnétostatique :

$$\widehat{\xi}_e^1, \widehat{\zeta}_m^1 \in H_0^1(S)$$

définis comme les uniques solutions de :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\tilde{\varepsilon} \nabla \widehat{\xi}_e^1) = \frac{\partial_3 \widehat{J}_3}{s}, & \text{dans } S \\ \widehat{\xi}_e^1 = 0, & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{rot}(\tilde{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \widehat{\zeta}_m^1) = \widehat{J}_3, & \text{dans } S \\ \widehat{\zeta}_m^1 = 0, & \text{on } \partial S \end{cases} \quad (7.63)$$

et de potentiels

$$\widehat{\xi}_{m,q}^1 \in H^1(S)_{/\mathbb{R}}$$

(ceux-ci sont nouveaux par rapport à la section 5.2.1) dus aux conditions aux bords de la proposition 7.2.1 (nous avons simplement remplacer  $\widehat{H}_T^0$  par son expression (7.57)) :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\tilde{\mu} \nabla \widehat{\xi}_{m,q}^1) = 0, & \text{dans } S, \\ \tilde{\mu} \partial_n \widehat{\xi}_{m,q}^1 = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_\tau \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q}, & \text{sur } \partial S. \end{cases} \quad (7.64)$$

Les conditions de compatibilité pour les problèmes (7.60, 7.64) sont bien entendu satisfaites. Nous pouvons, comme dans le cas de l'ordre 0, aussi écrire le champ magnétique sous la forme d'un rotationnel. Nous allons pour cela utiliser la version non simplement connexe du théorème de Hodge-Weyl pour les champs solénoïdaux donnés par le lemme 1.3.7 :

$$\widehat{H}_T^1 = -\tilde{\mu}^{-1} \left[ \sum_{q,q'=1}^Q \mathbf{L}_{q,q'} \widehat{I}_q^1 \mathbf{rot} \varphi_{m,q'} \right] + \widehat{H}_T^{R,1}$$

où cette fois le reste est donné sous la forme

$$\widehat{H}_T^{R,1} = \tilde{\mu}^{-1} \left[ \mathbf{rot} \widehat{\zeta}_m^1 + \sum_{q=1}^Q \frac{1}{\sqrt{s}} \widehat{I}_q^0 \mathbf{rot} \kappa_{m,q} - \sum_{q,q'=1}^Q \frac{1}{\sqrt{s}} \left( \int_{\partial S} \sqrt{\frac{1}{\tilde{\mu}_c \tilde{\sigma}_c}} \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q'} \right)_{q,q'} \widehat{I}_q^0 \mathbf{rot} \varphi_{m,q'} \right] \quad (7.65)$$

avec les potentiels

$$\kappa_{m,q} \in H^1(S)$$

les uniques solutions :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\tilde{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \kappa_{m,q}) = 0 & \text{dans } S, \\ \kappa_{m,q} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} & \text{sur } \partial S. \end{cases}$$



### La première occurrence de l'effet de peau dans l'équation des télégraphistes

Des jugements analytiques ne disent dans le prédicat rien qui n'ait déjà été pensé réellement dans la notion du sujet, quoique pas aussi clairement et avec la même conscience.

---

Kant, Prolégomènes à toute métaphysique future qui aura le droit de se présenter comme science

**Quelques prolégomènes** Commençons déjà par quelques égalités qui nous simplifieront notre tâche :

**Lemme 7.5.1.** *Nous avons la relation de bi-orthogonalité*

$$\left( \nabla \varphi_{e,q}, \widetilde{\mathbf{rot}} \psi_{m,q'} \right)_{L^2(S)} = - \left( \mathbf{rot} \varphi_{e,q}, \widetilde{\nabla} \psi_{m,q'} \right)_{L^2(S)} = \delta_q^{q'}$$

ainsi que les relations sur les dérivées longitudinales de certains potentiels :

$$(i) \quad \left( \partial_3 \mathbf{rot} \varphi_{e,q}, \widetilde{\nabla} \psi_{m,q'} \right)_{L^2(S)} = 0,$$

$$(ii) \quad \left( \partial_3 \widetilde{\mathbf{rot}} \psi_{m,q}, \nabla \varphi_{e,q'} \right)_{L^2(S)} = 0,$$

$$(iii) \quad \left( \partial_3 \widehat{E}_T^{R,1}, \widetilde{\mathbf{rot}} \psi_{m,q} \right)_{L^2(S)} = 0,$$

$$(iv) \quad \left( \partial_3 \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \varphi_{e,q} \right)_{L^2(S)} = \partial_3 \left( \int_S \mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,1} (\varphi_{e,q} - \varphi_{m,q}) \right) + \int_S \mathbf{rot} \widehat{H}_T^{R,1} \partial_3 \varphi_{e,q}.$$

*Démonstration.* La relation de bi-orthogonalité et les égalités (i) et (ii) proviennent du lemme 4.1.1. La relation (iii) est issue du lemme 5.2.4. Pour finir nous pouvons démontrer l'égalité (iv) de la même manière que dans le lemme 5.2.3, et cela même si les conditions aux bords de la trace normale de  $\widehat{H}_T^{R,1}$  ne sont pas les mêmes, car dans cette preuve les conditions aux bords n'interviennent pas.  $\square$

**L'équation des télégraphistes à l'ordre 1** Nous pouvons, démontrer le résultat phare de ce chapitre, l'établissement du modèle des télégraphistes qui incorpore l'effet de peu :

**Théorème 7.5.1.** *Les potentiels  $\widehat{\mathbf{V}}^1$  et courants  $\widehat{\mathbf{I}}^1$  électriques d'ordre 1 vérifient l'équation des télégraphistes suivante*

$$\begin{cases} s \mathbf{C}(x_3) \widehat{\mathbf{V}}^1(x_3, s) + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^1(x_3, s) = \widehat{\mathbf{I}}_s^1(x_3, s), \\ s \mathbf{L}(x_3) \widehat{\mathbf{I}}^1(x_3, s) + \sqrt{s} \mathbf{R}_{sk}(x_3) \widehat{\mathbf{I}}^0(x_3, s) + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^1(x_3, s) = 0, \end{cases} \quad (7.66)$$

avec la résistance due à l'effet de peau

$$(\mathbf{R}_{sk})_{q,q'} := \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q'} \quad (7.67)$$

et la source de courant

$$\widehat{\mathbf{I}}_s^1 = \left( \widehat{I}_{s,q}^1 \right)_{q=1 \dots Q} \quad \text{avec} \quad \widehat{I}_{s,q}^1 = \partial_3 \left( \int_S \widehat{J}_3 (\varphi_{e,q} - \varphi_{m,q}) \right) + \int_S \widehat{J}_{s,3} \partial_3 \varphi_{e,q}. \quad (7.68)$$

*Démonstration.* La première et la troisième équation de (7.19) donnent après avoir exploité les expressions des champs extérieurs à l'ordre 1 données par (7.62) :

$$\begin{cases} i\omega \widehat{\varepsilon} \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^1 \nabla \varphi_{e,q} + \widehat{E}_T^{R,1} - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \left( \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^1 \widetilde{\nabla} \psi_{m,q} + \widehat{H}_T^{R,1} \right) - \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2 = 0, & (a) \\ i\omega \tilde{\mu} \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^1 \widetilde{\nabla} \psi_{m,q} + \widehat{H}_T^{R,1} + \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \left( \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^1 \nabla \varphi_{e,q} + \widehat{E}_T^{R,1} \right) + \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2 = 0. & (b) \end{cases} \quad (7.69)$$

Pour se débarrasser des termes, pour l'instant totalement inconnus,  $\widehat{H}_3^2$  et  $\widehat{E}_3^2$ , nous allons prendre le produit scalaire  $L^2(S)$  de (7.5.3-(a)) avec chaque  $\nabla\varphi_{e,q'}$  et de (7.5.3-(b)) avec chaque  $\widetilde{\nabla}\psi_{m,q'}$ . De plus nous avons les relations d'orthogonalité dues aux décompositions de Helmholtz :

$$\int_S \widetilde{\varepsilon} \nabla\varphi_{e,q'} \cdot \widehat{E}_T^{R,1} = 0 \quad \text{et} \quad \int_S \widetilde{\mu} \widetilde{\nabla}\psi_{m,q'} \cdot \widehat{H}_T^{R,1} = 0$$

Nous avons finalement après avoir introduit les matrices de capacité électrique  $\mathbf{C}$  et d'inductance électrique  $\mathbf{L}$  :

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^Q \left[ i\omega \mathbf{C}_{q,q'} \widehat{V}_q^1 + \left( \partial_3 \left( \widehat{I}_q^1 \mathbf{rot} \psi_{m,q} \right), \nabla\varphi_{e,q'} \right)_{L^2(S)} \right] - \left( \partial_3 \widehat{H}_T^{R,1}, \mathbf{rot} \varphi_{e,q'} \right)_{L^2(S)} = \left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2, \nabla\varphi_{e,q'} \right)_{L^2(S)} \\ \sum_{q=1}^Q \left[ i\omega \mathbf{L}_{q,q'} \widehat{I}_q^1 - \left( \partial_3 \left( \widehat{V}_q^1 \mathbf{rot} \varphi_{e,q} \right), \widetilde{\nabla}\psi_{m,q'} \right)_{L^2(S)} \right] + \left( \partial_3 \widehat{E}_T^{R,1}, \widetilde{\mathbf{rot}} \psi_{m,q'} \right)_{L^2(S\Gamma)} = - \left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2, \widetilde{\nabla}\psi_{m,q'} \right)_{L^2(S)} \end{cases} \quad (7.70)$$

En utilisant le lemme 7.5.1 et en rappelant que  $\mathbf{rot} H_T^{R,1} = \widehat{J}_3$  (voir équation (7.60)), nous obtenons

$$\begin{cases} \sum_{q'=1}^Q \left[ s \mathbf{C}_{q,q'} \widehat{V}_{q'}^1 + \partial_3 \widehat{I}^1 \right] - \widehat{I}_{s,q}^1 = \left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2, \nabla\varphi_{e,q} \right)_{L^2(S)}, \\ \sum_{q'=1}^Q \left[ s \mathbf{L}_{q,q'} \widehat{I}_{q'}^1 \right] + \partial_3 \widehat{V}_q^1 = - \left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2, \widetilde{\nabla}\psi_{m,q} \right)_{L^2(S)}, \end{cases}$$

Premièrement, on utilise la formule de Green 2D (10.19) :

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2, \nabla\varphi_{e,q} \right)_{L^2(S)} \stackrel{(10.10)}{=} \int_{\partial S} \widehat{H}_3^2 \nabla\varphi_{e,q} \times n \quad \text{et} \quad \left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2, \widetilde{\nabla}\psi_{m,q} \right)_{L^2(S)} \stackrel{(10.10)}{=} \int_{\partial S} \widehat{E}_3^2 \widetilde{\nabla}\psi_{m,q} \times n$$

Ensuite comme  $\nabla\varphi_{e,q} \times n = 0$  sur  $\partial S$  nous avons

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^2, \nabla\varphi_{e,q} \right)_{L^2(S)} = 0. \quad (7.71)$$

Pour finir, nous allons enfin avoir recours aux conditions aux bords de type GIBC données par le théorème 7.2.1 :

$$E_3^2|_{\partial S} = \sqrt{s} \sqrt{\frac{\widetilde{\mu}_c}{\widetilde{\sigma}_c}} \widehat{H}_T^0 \times n,$$

ainsi, nous avons

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^2, \nabla\psi_{m,q} \right)_{L^2(S)} = \sqrt{s} \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\widetilde{\mu}_c}{\widetilde{\sigma}_c}} \widehat{H}_T^0 \times n \nabla\psi_{m,q} \times n \stackrel{(7.57)}{=} \sqrt{s} \sum_{q'=1}^Q \widehat{I}_{q'}^0 \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\widetilde{\mu}_c}{\widetilde{\sigma}_c}} \widetilde{\nabla}\psi_{m,q'} \times n \widetilde{\nabla}\psi_{m,q} \times n.$$

□

Nous retrouvons en particulier l'équation des télégraphistes évoquée en (7.25) en faisant (7.55) +  $\delta$  (7.66).

### Etude de la résistance

**Proposition 7.5.1.** *La résistance  $\mathbf{R}_{sk}$  est une matrice symétrique et définie positive.*

*Démonstration.* Pour montrer que la matrice est pleine, il suffit de démontrer que sur chacun des bords. Si nous notons pour tout vecteur  $\mathbf{I}$  de dimension  $Q$  :

$$\psi_m(\mathbf{I}) := \sum_{q=1}^Q I_q \psi_{m,q}$$

alors nous avons

$$\mathbf{R}_{sk} \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} = \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\widetilde{\mu}_c}{\widetilde{\sigma}_c}} |\partial_\tau \psi_m(\mathbf{I})|^2 \geq 0$$

Si nous avons  $\mathbf{R}_{sk} \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} = 0$  pour  $\mathbf{I} \neq 0$  alors il existe  $1 \leq q \leq Q$  tel que :

$$\widetilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} = 0 \quad \text{sur } \partial S$$

Or nous allons voir que ceci est strictement impossible. Pour cela nous allons exploiter le lemme de conjugaison 1.3.5 :

$$\tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} = \sum_{q'}^Q \mu^{-1} L_{q,q'} \partial_n \varphi_{m,q'}.$$

Comme la matrice  $L$  est définie positive, si nous avons  $\partial_\tau \psi_{m,q} = 0$  sur  $\partial_k S$  alors pour tout  $q'$ , nous avons  $\partial_n \varphi_{m,q'}$  sur  $\partial_k S$  ce qui est rendu impossible par le principe de continuation unique : comme  $\varphi_{m,q'}$  est constant sur le bord  $\partial_k S$  alors  $\varphi_{m,q'}$  est une constante ce qu'il ne peut pas être de part ces conditions aux limites.

□

### Champs longitudinaux à l'ordre 1

Nous avons avec la première et la troisième équation de (7.19) pour  $p = 0$ , les conditions aux bords du théorème 7.2.1 et la proposition 7.2.2 :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \hat{E}_3^1 = -i\omega \tilde{\mu} \hat{H}_T^0 - \partial_3 \mathbf{e}_3 \times \hat{E}_T^0, \\ \hat{E}_3^1|_{\partial S} = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{rot} \hat{H}_3^1 = i\omega \tilde{\varepsilon} \hat{E}_T^0 - \partial_3 \mathbf{e}_3 \times \hat{H}_T^0 - \hat{j}_T, \\ \int_S \tilde{\mu} \hat{H}_3^0 = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons montrer exactement de la même manière, notamment avec le précieux recours du lemme de conjugaison 1.3.5, que pour la proposition 5.2.1 et la remarque 5.2.1 que

$$\hat{E}_3^1 = \sum_{q=1}^Q \left[ \partial_3 \hat{\varphi}_{e,q} \hat{V}_q^0 + (\hat{\varphi}_{e,q} - \hat{\varphi}_{m,q}) \partial_3 \hat{V}_q^0 \right] \quad (7.72)$$

et

$$\hat{H}_3^1 = \sum_{q=1}^Q \left[ \langle \partial_3 \psi_{m,q} \rangle_{\tilde{\mu}} \hat{I}_q^0 + \langle \psi_{m,q} - \psi_{e,q} \rangle_{\tilde{\mu}} \partial_3 \hat{I}_q^0 \right] + \langle \hat{j}_h \rangle_{\tilde{\mu}} \quad (7.73)$$

avec

$$\hat{j}_h = \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{s,q} (\psi_{e,q} - \psi^q(S, 1)),$$

et où la notation  $\langle \cdot \rangle_{\tilde{\mu}}$  correspondante à un signal privé de sa moyenne :

$$\langle \mathbf{u} \rangle_{\tilde{\mu}} := \mathbf{u} - \frac{\int_S \tilde{\mu} \mathbf{u}}{\int_S \tilde{\mu}},$$

a été introduite de manière à ne pas se préoccuper de la normalisation des fonctions définies à une constante près.

### 7.5.3 Champs électromagnétiques et modèle à l'ordre 2

Pour que les choses paraissent nouvelles, si elles sont anciennes, et même si elles sont nouvelles, il faut, en art, comme en médecine, comme en mondanité, des noms nouveaux.

---

Proust, Le Temps retrouvé

Embrassons à la fois la prise en compte de l'effet de peau et le modèle d'ordre du chapitre 5. Nous ne répéterons pas une fois de plus la démarche du chapitre 5 mais donnerons seulement les résultats utiles et des preuves que quand nous devons être plus vigilant quand aux conséquences dues à la prise en compte des nouvelles GIBC.

### Champs transversaux à l'ordre 2

Nous pouvons écrire les champs transversaux à l'ordre 2

$$\widehat{E}_T^2 = \sum_{q=1}^Q \widehat{V}_q^2 \nabla \varphi_{e,q} + \widehat{E}_T^{R,2} \quad \text{et} \quad \widehat{H}_T^2 = \sum_{q=1}^Q \widehat{I}_q^2 \widetilde{\nabla} \psi_{m,q} + \widehat{H}_T^{R,2} \quad (7.74)$$

avec  $\widehat{E}_T^{R,2}$  et respectivement  $\widehat{H}_T^{R,2}$  les uniques solutions dans  $L^2(S)$  privé des noyaux que sont les espaces harmoniques

$$L^2(S)/\mathcal{E}(\varepsilon, S) \quad \text{et respectivement} \quad L^2(S)/\mathcal{H}(\tilde{\mu}, S)$$

des problèmes div-rot suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\tilde{\varepsilon} \widehat{E}_T^2) = -\partial_3(\tilde{\varepsilon} \widehat{E}_3^1) - \operatorname{div}(\tilde{\sigma}_e \widehat{E}_T^0), \\ \operatorname{rot} \widehat{E}_T^2 = -i\omega \tilde{\mu} \widehat{H}_3^1, \\ E_T^2 \times n = 0, \quad \text{on } \partial S \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\tilde{\mu} \widehat{H}_T^2) = -\partial_3(\tilde{\mu} \widehat{H}_3^1), \\ \operatorname{rot} \widehat{H}_T^2 = i\omega \tilde{\varepsilon} \widehat{E}_3^1 \\ \sqrt{s} \tilde{\mu} \widehat{H}_T^2 \cdot n = -\sqrt{\frac{\mu_c}{\sigma_c}} \partial_\tau(\widehat{H}_T^1 \times n) \end{array} \right. \quad (7.75)$$

### Equation des télégraphistes d'ordre 2

Ce ne sont pas les êtres qui existent réellement, mais les idées.

Proust, Le temps retrouvé

Nous introduisons les nouveaux coefficients décrits dans la définition 5.4.1 :

— matrices liées à l'inhomogénéité :

$$(\gamma_C)_{ij} = \int_S \tilde{\varepsilon} (\varphi_{e,i} - \varphi_{m,i}) (\varphi_{e,j} - \varphi_{m,j}) \quad \text{et} \quad (\gamma_L)_{ij} = \int_S \tilde{\mu} \langle \psi_{m,i} - \psi_{e,i} \rangle_{\tilde{\mu}} \langle \psi_{m,j} - \psi_{e,j} \rangle_{\tilde{\mu}}$$

— matrices liées à la dépendance en  $x_3$  :

$$\mathbf{C}_g = (\boldsymbol{\eta}_C - \partial_3 \boldsymbol{\chi}_C) Id \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_g^2 = (\boldsymbol{\eta}_L - \partial_3 \boldsymbol{\chi}_L) Id \quad (7.76)$$

avec les matrices

$$(\boldsymbol{\eta}_C)_{ij} = \int_S \tilde{\varepsilon} \partial_3 \varphi_{e,i} \partial_3 (\varphi_{e,j}) \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\eta}_L)_{ij} = \int_S \tilde{\mu} \langle \partial_3 \psi_{m,i} \rangle_{\tilde{\mu}} \langle \partial_3 \psi_{m,j} \rangle_{\tilde{\mu}}$$

et

$$(\boldsymbol{\chi}_C)_{ij} = \int_S \tilde{\varepsilon} \partial_3 \varphi_{e,i} (\varphi_{e,i} - \varphi_{m,i}) \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\chi}_L)_{ij} = \int_S \tilde{\mu} \langle \partial_3 \psi_{m,i} \rangle_{\tilde{\mu}} \langle \psi_{m,i} - \psi_{e,i} \rangle_{\tilde{\mu}}$$

Par rapport au lemme 7.5.1, nous aurons besoin de deux égalités supplémentaires :

**Lemme 7.5.2.** *les dérivées longitudinales vérifient :*

$$(i) \quad (\partial_3 \widehat{E}_T^{R,2}, \widetilde{\operatorname{rot}} \psi_{m,q})_{L^2(S^\Sigma)} = - \sum_{q'}^Q s \left[ (\mathbf{L}_g)_{q,q'} I_{q'}^0 - \partial_3 \left( (\boldsymbol{\gamma}_L)_{q,q'} \partial_3 V_{q'}^0 \right) \right] + \widehat{V}_{s,q}$$

$$(ii) \quad (\partial_3 \widehat{H}_T^{R,2}, \operatorname{rot} \varphi_{e,i})_{L^2(S^\Sigma)} = \sum_{q'}^Q s \left[ (\mathbf{C}_g)_{q,q'} V_{q'}^0 - \partial_3 \left( (\boldsymbol{\gamma}_C)_{q,q'} \partial_3 V_{q'}^0 \right) \right].$$

avec les nouveaux coefficients définis plus haut et la source de tension :

$$\widehat{V}_{s,q} = s \left[ \partial_3 \left( \int_S \tilde{\mu} \langle \widehat{j}_h \rangle_{\tilde{\mu}} \langle \psi_{m,q} - \psi_{e,q} \rangle_{\tilde{\mu}} \right) - \int_S \tilde{\mu} \langle \widehat{j}_h \rangle_{\tilde{\mu}} \langle \partial_3 \psi_{m,q} \rangle_{\tilde{\mu}} \right]. \quad (7.77)$$

*Démonstration.* Les démonstrations sont les mêmes que dans les lemmata 5.4.4 et 5.4.5 même si les conditions aux bords de la trace normale de  $\widehat{H}_T^{R,2}$  et la divergence de  $\widehat{E}_T^{R,2}$  diffèrent.  $\square$

Avec de telles égalités, ils devient aisé de démontrer :

**Théorème 7.5.2.** *Les potentiels  $\widehat{\mathbf{V}}^2$  et courants  $\widehat{\mathbf{I}}^2$  électriques d'ordre deux vérifient l'équation des télégraphistes suivante :*

$$\begin{cases} s \mathbf{C}(x_3) \widehat{\mathbf{V}}^2(x_3, s) + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^2(x_3, s) + \mathbf{G}(x_3) \widehat{\mathbf{V}}^0(x_3, s) - s \partial_3 \left( \gamma_{\mathbf{C}} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^0 \right) + s \mathbf{C}_{\mathbf{g}} \widehat{\mathbf{V}}^0 = 0, \\ s \mathbf{L}(x_3) \widehat{\mathbf{I}}^2(x_3, s) + \sqrt{s} \mathbf{R}_{sk}(x_3) \widehat{\mathbf{I}}^1(x_3, s) + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^1(x_3, s) - s \partial_3 \left( \gamma_{\mathbf{L}} \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^0 \right) + s \mathbf{L}_{\mathbf{g}} \widehat{\mathbf{I}}^0 - s \mathbf{L}_{sk} \widehat{\mathbf{I}}^0(x_3, s) = \widehat{\mathbf{V}}_s, \end{cases} \quad (7.78)$$

avec la matrice de conductance définie par

$$\mathbf{G}_{q,q'} := \int_S \tilde{\sigma}_e \nabla \varphi_{e,q} \cdot \nabla \varphi_{e,q'} \quad (7.79)$$

et matrice d'inductance due à l'effet de peau par

$$(\mathbf{L}_{sk})_{q,q'} := \int_S \tilde{\mu} \nabla \xi_{m,q}^1 \cdot \nabla \xi_{m,q'}^1 \quad (7.80)$$

avec  $\xi_{m,q}^1$  défini en (7.64).

*Démonstration.* De la même manière que pour la démonstration du théorème 7.5.1, nous trouvons l'équation (7.70) (à l'ordre supérieur), puis en exploitant le lemme 7.5.2, nous avons

$$\begin{cases} \sum_{q'=1}^Q \left[ s \mathbf{C}_{q,q'} \widehat{\mathbf{V}}_{q'}^2 \right] + \sum_{q'=1}^Q \mathbf{G}_{q,q'} \widehat{\mathbf{V}}_{q'}^0 + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^2 + \sum_{q'} s \left[ (\mathbf{C}_{\mathbf{g}})_{q,q'} \widehat{\mathbf{V}}_{q'}^0 - \partial_3 \left( (\gamma_{\mathbf{C}})_{q,q'} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}_{q'}^0 \right) \right] = \left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^3, \nabla \varphi_{e,q} \right)_{L^2(S)}, \\ \sum_{q'=1}^Q \left[ s \mathbf{L}_{q,q'} \widehat{\mathbf{I}}_{q'}^2 \right] + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}_q^2 + \sum_{q'} s \left[ (\mathbf{L}_{\mathbf{g}})_{q,q'} \widehat{\mathbf{I}}_{q'}^0 - \partial_3 \left( (\gamma_{\mathbf{L}})_{q,q'} \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}_{q'}^0 \right) \right] = - \left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^3, \tilde{\nabla} \psi_{m,q} \right)_{L^2(S)} + \widehat{\mathbf{V}}_{s,q}, \end{cases}$$

de plus, nous pouvons comme nous l'avons déjà fait pour (7.71), montrer que

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{H}_3^3, \nabla \varphi_{e,q} \right)_{L^2(S)} = 0.$$

Pour le dernier terme, nous utilisons les conditions aux bords de type GIBC du théorème 7.2.1 :

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^3, \tilde{\nabla} \psi_{m,q} \right)_{L^2(S)} = \int_{\partial S} \widehat{E}_3^3 \nabla \psi_{m,q} \times n = \sqrt{s} \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \widehat{H}_T^1 \times n \tilde{\nabla} \psi_{m,q} \times n$$

et en utilisant l'expression de  $\widehat{H}_T^1$  donnée par (7.62), nous avons

$$\left( \mathbf{rot} \widehat{E}_3^3, \tilde{\nabla} \psi_{m,q} \right)_{L^2(S)} = \sqrt{s} \sum_{q'=1}^Q (\mathbf{R}_{sk})_{q,q'} \widehat{I}_{q'}^1 + s \sum_{q'=1}^Q \left( \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_{\tau} \xi_{m,q'}^1 \tilde{\partial}_{\tau} \psi_{m,q} \right) \widehat{I}_{q'}^0.$$

Pour achever notre démonstration, il nous reste à prouver que

$$(\mathbf{L}_{sk})_{q,q'} = - \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_{\tau} \xi_{m,q'}^1 \tilde{\partial}_{\tau} \psi_{m,q}.$$

La formulation faible de (7.64), nous dit que pour toute fonction test  $u \in H^1(S)$ , nous avons

$$- \int_S \tilde{\mu} \nabla \xi_{m,q}^1 \cdot \nabla u + \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_{\tau} \tilde{\partial}_{\tau} \psi_{m,q} u = 0$$

En particulier, pour  $u = \xi_{m,q'}^1$ , nous avons

$$- \int_S \tilde{\mu} \nabla \xi_{m,q}^1 \cdot \nabla \xi_{m,q'}^1 + \int_{\partial S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_{\tau} \tilde{\partial}_{\tau} \psi_{m,q} \xi_{m,q'}^1 = 0.$$

Nous intégrons par parties l'intégrale sur chaque partie connexe fermé du bord

$$\int_{\partial_q S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_{\tau} \tilde{\partial}_{\tau} \psi_{m,q} \xi_{m,q'}^1 = - \int_{\partial_q S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \tilde{\partial}_{\tau} \psi_{m,q} \partial_{\tau} \xi_{m,q'}^1,$$

ainsi

$$\int_{\partial S} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \partial_{\tau} \xi_{m,q'}^1 \tilde{\partial}_{\tau} \psi_{m,q} = - \int_S \tilde{\mu} \nabla \xi_{m,q}^1 \cdot \nabla \xi_{m,q'}^1,$$

ce qui correspond à la formule attendue.  $\square$

**Proposition 7.5.2.** *La matrice  $\mathbf{L}_{sk}$  est positive.*

*Démonstration.* En notant pour tout vecteur  $\mathbf{u} = (u_q)_{q \leq Q} \in \mathbb{C}^Q$

$$\xi_m(\mathbf{u}) := \sum_{q=1}^Q \xi_{m,q}^1 u_q,$$

nous avons :

$$\mathbf{L}_{sk} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \int_S \tilde{\mu} |\nabla \xi_m(\mathbf{u})|^2 \geq 0.$$

□

**Remarque 7.5.1.** *Dans le cas mono-âme ( $Q = 1$ ) où  $S$  est une couronne, et  $\tilde{\mu}$  est constant dans  $S$ , la matrice  $\mathbf{L}_{sk}$  est nulle.*

*Démonstration.* En effet dans ce cas, nous avons, conformément à l'exemple 1.3.1, dans les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  (avec la coupure coïncidant avec l'axe radial pour un angle nul)

$$\psi_m(r, \theta) = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$$

et ainsi  $\partial_\tau \partial_{\bar{\tau}} \psi_m = 0$  ce qui implique  $\hat{\xi}_m = 0$ .

□

### Champs longitudinaux d'ordre 2

Pour simplifier, nous allons prendre

$$\hat{J}_3 = 0$$

de manière à ce que

$$\hat{\zeta}_m^1 = 0.$$

**Lemme 7.5.3.** *Les champs extérieurs longitudinaux vérifient*

$$\hat{E}_3^2 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{V}_q^1 \varphi_{e,q} \right] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ \mathbf{L}_{q,q'} \hat{I}_q^1 \varphi_{m,q'} \right] - \sum_q \sqrt{s} \hat{I}_q^0 \kappa_{m,q} + \sum_{q,q'=1}^Q \sqrt{s} \left[ (\mathbf{R}_{sk})_{q,q'} \hat{I}_q^0 \varphi_{m,q'} \right] \quad (7.81)$$

et

$$\hat{H}_3^2 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{I}_q^1 \psi_{m,q} \right] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ \mathbf{C}_{q,q'} \hat{V}_q^1 \psi_{e,q'} \right] + \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{I}_q^0 \hat{\zeta}_m^1 \right] + \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \int_{\partial S} \hat{H}_3^1 \quad (7.82)$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\mathbf{rot} \hat{E}_3^2 = -s \tilde{\mu} \hat{H}_T^1 - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{E}_T^1 \quad \text{et} \quad \mathbf{rot} \hat{H}_3^2 = s \tilde{\varepsilon} \hat{E}_T^1 - \mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{H}_T^1. \quad (7.83)$$

En utilisant les expressions des champs  $\hat{H}_T^1$  et  $\hat{E}_T^1$  sous la forme d'un rotationnel issues de (7.65) et des conséquences du lemme de conjugaison 1.3.5 :

$$\hat{E}_T^1 = \tilde{\varepsilon}^{-1} \sum_{q,q'=1}^Q \left[ \mathbf{C}_{q,q'} \hat{V}_q^1 \mathbf{rot} \psi_{e,q'} \right] \quad \text{et} \quad \hat{H}_T^1 = -\tilde{\mu}^{-1} \left[ \sum_{q,q'=1}^Q \left[ \mathbf{L}_{q,q'} \hat{I}_q^1 \mathbf{rot} \varphi_{m,q'} \right] - \sum_q \mathbf{rot} \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \hat{I}_q^0 \kappa_{m,q} \right) \right]$$

ainsi que celles sous la forme d'un gradient :

$$-\mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{E}_T^1 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{V}_q^1 \mathbf{rot} \varphi_{e,q} \right] \quad \text{et} \quad -\mathbf{e}_3 \times \partial_3 \hat{H}_T^1 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{I}_q^1 \mathbf{rot} \psi_{m,q} + \hat{I}_q^0 \mathbf{rot} \hat{\zeta}_m^1 \right],$$

nous pouvons écrire les membres de droite des égalités de (7.83) sous la forme d'un rotationnel. En effet, nous avons

$$\hat{E}_3^2 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{V}_q^1 \varphi_{e,q} \right] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ \mathbf{L}_{q,q'} \hat{I}_q^1 \varphi_{m,q'} \right] - \sum_q \sqrt{s} \hat{I}_q^0 \kappa_{m,q} + \sum_{q,q'=1}^Q \sqrt{s} \left[ (\mathbf{R}_{sk})_{q,q'} \hat{I}_q^0 \varphi_{m,q'} \right] + cte \mathbf{e}_3^e$$

et

$$\hat{H}_3^2 = \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{I}_q^1 \psi_{m,q} \right] + \sum_{q,q'=1}^Q s \left[ \mathbf{C}_{q,q'} \hat{V}_q^1 \psi_{e,q'} \right] + \sum_{q=1}^Q \partial_3 \left[ \hat{I}_q^0 \hat{\xi}_m^1 \right] + cte_3^m$$

où nous allons déterminer les constantes  $cte_3^e$  avec  $cte_3^m$  avec les conditions aux bords de  $\hat{E}_3^2$  et de moyenne de  $\hat{H}_3^2$ . Comme

$$\hat{E}_3^2|_{\partial S} = \sqrt{s} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \hat{H}_T^0 \times n = -\sqrt{s} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \sum_{q=1}^Q \hat{I}_q^0 \tilde{\partial}_\tau \psi_{m,q} = -\sum_{q=1}^Q \sqrt{s} \hat{I}_q^0 \kappa_{m,q},$$

nous avons sur le bord  $\partial_0 S$  :

$$cte_3^e = 0$$

et sur chaque bord  $\partial_q S$  pour  $q = 1 \dots Q$ , nous avons :

$$\partial_3 \hat{V}_q^1 + \sum_{q'=1}^Q s \mathbf{L}_{q,q'} \hat{I}_q^1 + \sum_{q'=1}^Q \sqrt{s} (\mathbf{R}_{sk})_{q,q'} \hat{I}_q^0 + cte_3^e = 0$$

et ces deux dernières inégalités concordent avec (7.66).

Pour déterminer  $cte_3^m$ , nous rappelons que (voir proposition 7.2.2) la moyenne des champs longitudinaux extérieurs magnétiques vérifie :

$$s \int_S \tilde{\mu} \hat{H}_3^2 = - \int_{\partial S} \hat{E}_T^3 \times n = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_c}{\tilde{\sigma}_c}} \int_{\partial S} \hat{H}_3^1.$$

□

## 7.6 Un amour de modèle effectif

Pallia si terra nimium demissa jacebunt

Ovide, l'Art d'aimer

En exploitant les équations des télégraphistes jusqu'à l'ordre 2

$$(7.55) + \delta (7.66) + \delta^2 (7.78)$$

nous obtenons enfin l'équation des télégraphistes effective qui prend en compte l'effet de peau :

**Théorème 7.6.1.** *Le modèle effectif des télégraphistes d'ordre 2 incorporant l'effet de peau est*

$$\begin{cases} s [\mathbf{C} + \delta^2 \mathbf{C}_g - \delta^2 \partial_3 (\gamma_C \partial_3)] \hat{\mathbf{V}}^{\delta,2} + \delta^2 \mathbf{G} \hat{\mathbf{V}}^{\delta,2} + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2}(x_3, s) = \mathbf{I}_s^\delta, \\ s [\mathbf{L} + \delta^2 \mathbf{L}_g - \delta^2 \partial_3 (\gamma_L \partial_3) - \delta^2 \mathbf{L}_{sk}] \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2} + \delta \sqrt{s} \mathbf{R}_{sk} \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2} + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2} = \delta^2 \mathbf{V}_s, \end{cases} \quad (7.84)$$

avec les  $Q \times Q$  matrices effectives  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{G}$  définies en (7.52) et (7.79), la matrice de résistance due à l'effet de peau  $\mathbf{R}_{sk}$  définie par (7.67), les nouveaux coefficients  $\mathbf{C}_g$  et  $\mathbf{L}_g$  définis en (7.76) et l'inductance due à l'effet de peau  $\mathbf{L}_{sk}$  définie en (7.80). Les sources sont elles définies en (7.56, 7.68) et (7.77).

Ce modèle nous permet de reconstruire les champs électromagnétiques jusqu'à l'ordre 2 avec les équations (7.58, 7.62, 7.72, 7.73, 7.74, 7.81, 7.82). Si nous traitons le cas d'un câble où la perméabilité et la permittivité du milieu diélectrique sont proportionnelles et n'évoluent pas dans la direction longitudinale  $e_3$  alors nous retombons (hormis la présence de  $\mathbf{L}_{sk}$ ) sur un modèle type RLCG classique car les coefficients  $\gamma_C$ ,  $\gamma_L$ ,  $\mathbf{C}_g$  et  $\mathbf{L}_g$  sont nuls.

L'erreur commise entre la considération de l'équation des télégraphistes effective 7.84 et ((7.55) +  $\delta$  (7.66) +  $\delta^2$  (7.78)) est d'ordre  $O(\delta^3)$ . La démonstration s'opère de la même façon que celle pour l'ordre deux (voir la section 5.5.2) et nous n'avons pas recopié la démarche.

### 7.6.1 Positivité des matrices effectives

Tout est plus simple qu'on ne peut l'imaginer et en même temps plus enchevêtré qu'on ne saurait le concevoir.

Goethe

Pour s'assurer du caractère bien posé, nous avons besoin d'établir la positivité, et parfois la coercivité, des matrices établies dans le modèle effectif des télégraphistes. Les matrices de capacités électrique et d'inductance électrique sont coercives :

**Propriété 7.6.1.** *Si les trous de  $S$  sont non-dégénérés, c-a-d qu'il existe des constantes*

$$C_- = \left( \frac{2}{d^*} \right)^2 \min_q |\mathcal{O}_q| \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathfrak{C}}^+ = \max\{\lambda_{\mathfrak{C}} \in \sigma(\mathfrak{C})\}$$

basées sur l'aire minimale des trous et sur la valeur propre maximale de la matrice de capacité  $\mathfrak{C}$  définie en 11.4, alors

$$\varepsilon_- C_- |\mathbf{V}|^2 \leq \mathbf{C} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \leq \varepsilon_+ \lambda_{\mathfrak{C}}^+ |\mathbf{V}|^2 \quad \text{pour tout } \mathbf{V}$$

et

$$\mu_- (\lambda_{\mathfrak{C}}^+)^{-1} |\mathbf{I}|^2 \leq \mathbf{L} \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} \leq \mu_+ C_-^{-1} |\mathbf{V}|^2 \quad \text{pour tout } \mathbf{I}$$

*Démonstration.* Similaire à la propriété 4.3.1. □

Introduisons maintenant les espaces pré-hilbertiens

$$\mathbb{H}_e = \left\{ \mathbf{V} \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} |(\varphi_e - \varphi_m)(\partial_3 \mathbf{V}) + \partial_3 \varphi_e(\mathbf{V})|^2 < \infty \right\}$$

$$\mathbb{H}_m = \left\{ \mathbf{I} \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_{\Omega} \tilde{\mu} \left| \langle \psi_m - \psi_e \rangle_{\tilde{\mu}} (\partial_3 \mathbf{I}) + \langle \partial_3 \psi_m(\mathbf{I}) \rangle_{\tilde{\mu}} \right|^2 < \infty \right\}$$

munis des produits scalaires

$$(\mathbf{V}, \mathbf{U})_e = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C} \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} + \delta^2 \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} [(\varphi_e - \varphi_m)(\partial_3 \mathbf{V}) + \partial_3 \varphi_e(\mathbf{V})] [(\varphi_e - \varphi_m)(\partial_3 \mathbf{U}) + \partial_3 \varphi_e(\mathbf{U})]$$

$$(\mathbf{I}, \mathbf{J})_m = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L} \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + \delta^2 \int_{\Omega} \tilde{\mu} \left[ \langle \psi_m - \psi_e \rangle_{\tilde{\mu}} (\partial_3 \mathbf{I}) + \langle \partial_3 \psi_m(\mathbf{I}) \rangle_{\tilde{\mu}} \right] \left[ \langle \psi_m - \psi_e \rangle_{\tilde{\mu}} (\partial_3 \mathbf{J}) + \langle \partial_3 \psi_m(\mathbf{J}) \rangle_{\tilde{\mu}} \right].$$

Notons que les termes après le  $\delta^2$  dans les produits scalaires peuvent dégénérer. Nous allons vous rappeler (se référer au lemme 7.6.1 pour la preuve) que la partie non locale des effets capacitifs et inductifs est une perturbation positive :

**Lemme 7.6.1.** *Les opérateurs de la partie non locale*

$$[\mathbf{C}_g - \partial_3 \gamma_C \partial_3] : \mathbb{H}_e \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad [\mathbf{L}_g - \partial_3 \gamma_L \partial_3] : \mathbb{H}_m \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

définissent pour tout

$$\mathbf{V}, \mathbf{U} \in \mathbb{H}_e \quad \text{et} \quad \mathbf{I}, \mathbf{J} \in \mathbb{H}_m,$$

les formes bilinéaires

$$([\mathbf{C}_g - \partial_3 \gamma_C \partial_3] \mathbf{V}, \mathbf{U})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} [(\varphi_e - \varphi_m)(\partial_3 \mathbf{V}) + \partial_3 \varphi_e(\mathbf{V})] [(\varphi_e - \varphi_m)(\partial_3 \mathbf{U}) + \partial_3 \varphi_e(\mathbf{U})]$$

et

$$([\mathbf{L}_g - \partial_3 \gamma_L \partial_3] \mathbf{I}, \mathbf{J})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\Omega} \tilde{\mu} \left[ \langle \psi_m - \psi_e \rangle_{\tilde{\mu}} (\partial_3 \mathbf{I}) + \langle \partial_3 \psi_m(\mathbf{I}) \rangle_{\tilde{\mu}} \right] \left[ \langle \psi_m - \psi_e \rangle_{\tilde{\mu}} (\partial_3 \mathbf{J}) + \langle \partial_3 \psi_m(\mathbf{J}) \rangle_{\tilde{\mu}} \right].$$

qui sont symétriques positives.



Nous savons de part la proposition 7.5.1 que la matrice de **résistance**  $\mathbf{R}_{sk}$  est elle aussi **positive**. La matrice de **conductance**  $\mathbf{G}$  est **positive** mais  $-\mathbf{L}_{sk}$  est **négative**. Pour palier à cela, nous allons remplacer une approximation polynomiale par une **approximation en fraction rationnelle** :

$$\mathbf{L} - \delta^2 \mathbf{L}_{sk} = \mathbf{L} [\mathbf{Id} + \delta^2 \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}_{sk}]^{-1}. \quad (7.85)$$

Ce développement de Padé, nous suggère l'intervention d'une variable auxiliaire  $\widehat{\mathbf{I}}_{aux}^{\delta,2}$  dans (7.84)

$$\begin{cases} s [\mathbf{C} + \delta^2 \mathbf{C}_g - \delta^2 \partial_3 (\gamma_C \partial_3)] \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} + \delta^2 \mathbf{G} \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^\delta(x_3, s) = \mathbf{I}_s^\delta, \\ s \mathbf{L} \widehat{\mathbf{I}}_{aux}^{\delta,2} + \delta^2 [\mathbf{L}_g - \delta^2 \partial_3 (\gamma_L \partial_3)] \widehat{\mathbf{I}}^\delta + \delta \sqrt{s} \mathbf{R}_{sk} \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} + \partial_3 \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2} = \delta^2 \mathbf{V}_s, \\ \widehat{\mathbf{I}}^\delta = \widehat{\mathbf{I}}_{aux}^{\delta,2} + \delta^2 \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}_R \widehat{\mathbf{I}}_{aux}^{\delta,2}. \end{cases} \quad (7.86)$$

Nous avons dans la table 7.6.1 rappeler les principales propriétés que le lecteur doit avoir en mémoire (en particulier les propriétés d'invariance).

Matrices	invariance par	positivité ?	nulle si
$\mathbf{C}$	transformation conforme	coercive	
$\mathbf{L}$	transformation conforme	coercive	
$\mathbf{G}$	transformation conforme	positive	$\tilde{\sigma}_e = 0$
$\mathbf{R}_{sk}$		définie positive	
$\mathbf{L}_{sk}$		définie négative	$\forall q, \partial_\tau \partial_{\tilde{\tau}} \psi_{m,q}  _{\partial S} = 0$
$\mathbf{C}_g$	conservation des éléments de volume		$\partial_3 \tilde{\varepsilon} = 0$
$\mathbf{L}_g$	conservation des éléments de volume		$\partial_3 \tilde{\mu} = 0$
$\gamma_C$	conservation des éléments de volume	positive	$\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} = cte$
$\gamma_L$	conservation des éléments de volume	positive	$\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} = cte$

TABLE 7.1 – Propriétés principales des matrices effectives de notre modèle.

## 7.6.2 Le Temps retrouvé

Nous dérivons.  
Mais le pas du temps  
n'est pas tant  
dans ce qui dure

---

Rainer Maria Rilke, Nous dérivons...

Le passage en temps est ici bien plus aisé que dans le chapitre 4 dans le sens où seul  $\sqrt{s}$  correspond à des effet non locaux en temps et est un opérateur pseudo-différentiel connu (contrairement à  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{K}_m$ ). Il suffit de reprendre toutes nos équations (7.58, 7.62, 7.72, 7.73, 7.74, 7.84) en remplaçant  $s$  par  $\partial_t$  et  $\sqrt{s}$  par  $\partial_t^{1/2}$  pour obtenir le modèle et les formules de reconstruction dans le domaine temporel. Nous n'explicitons que l'équation des télégraphistes (7.84) :

$$\begin{cases} \mathbf{C} \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2} + \delta^2 [\mathbf{C}_g - \partial_3 (\gamma_C \partial_3)] \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2} + \delta^2 \mathbf{G} \mathbf{V}^{\delta,2} + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2} = \mathbf{I}_s^\delta, & (a) \\ \mathbf{L} \partial_t \mathbf{I}^{\delta,2} + \delta^2 [\mathbf{L}_g - \partial_3 (\gamma_L \partial_3) - \mathbf{L}_{sk}] \partial_t \mathbf{I}^{\delta,2} + \delta \mathbf{R}_{sk} \partial_t^{1/2} \mathbf{I}^{\delta,2} + \partial_3 \mathbf{V}^{\delta,2} = \delta^2 \mathbf{V}_s, & (b) \end{cases} \quad (7.87)$$

or, comme nous l'avons déjà évoqué auparavant, comme  $\mathbf{L}_{sk}$  est négative, nous devons par l'intermédiaire de l'approximation (7.85), faire intervenir une inconnue auxiliaire (7.86) :

$$\begin{cases} \mathbf{C} \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2} + \delta^2 [\mathbf{C}_g - \partial_3 (\gamma_C \partial_3)] \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2} + \delta^2 \mathbf{G} \mathbf{V}^{\delta,2} + \partial_3 \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2}(x_3, s) = \mathbf{I}_s^\delta + O(\delta^3), & (a) \\ \mathbf{L} \partial_t \mathbf{I}_{aux}^{\delta,2} + \delta^2 [\mathbf{L}_g - \partial_3 (\gamma_L \partial_3)] \partial_t \mathbf{I}^{\delta,2} + \delta \mathbf{R}_{sk} \partial_t^{1/2} \mathbf{I}^{\delta,2} + \partial_3 \mathbf{V}^{\delta,2} = \delta^2 \mathbf{V}_s, & (b) \\ \mathbf{I}^{\delta,2} = \mathbf{I}_{aux}^{\delta,2} + \delta^2 \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}_{sk}^- \mathbf{I}_{aux}^{\delta,2}. & (c) \end{cases} \quad (7.88)$$

**Théorème 7.6.2.** *Si les sources sont assez régulières*

$$\mathbf{I}_s^\delta, \mathbf{V}_s \in L^1(]0, T[, L^2(\mathbb{R})),$$

alors, les solutions

$$\mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2} \in L^\infty(]0, T[, \mathbb{H}_e \times \mathbb{H}_m)$$

à l'équation des télégraphistes (7.88) vérifient l'estimation d'énergie a priori :

$$\sqrt{\mathcal{E}_{LCR}(T)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T \left\| \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{I}_s^\delta + \delta^2 \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_s \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (7.89)$$

avec l'énergie électrique :

$$\mathcal{E}_{LCR} := \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{V}^{\delta,2} \mathbf{V}^{\delta,2})_e + (\mathbf{I}^{\delta,2} \mathbf{I}^{\delta,2})_m + \delta^2 \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L}_{sk}^- \mathbf{I}_{aux}^\delta \cdot \mathbf{I}_{aux}^\delta \right].$$

*Démonstration.* En faisant

$$\int_{\mathbb{R}} (7.88a) \cdot \mathbf{V}^{\delta,2} + \int_{\mathbb{R}} (7.88b) \cdot \mathbf{I}^{\delta,2}$$

et en intégrant par parties, nous obtenons l'égalité d'énergie :

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\mathbf{C} \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \int_0^T (\mathbf{L} \partial_t \mathbf{I}_{aux}^\delta, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \delta \int_0^T (\mathbf{R}_{sk} \partial_t^{1/2} \mathbf{I}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \int_0^T (\mathbf{G} \mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} \\ & + \delta^2 \int_0^T ([\mathbf{C}_g - \partial_3 \gamma_C \partial_3] \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \int_0^T ([\mathbf{L}_g - \partial_3 \gamma_L \partial_3] \partial_t \mathbf{I}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} \\ & = \int_0^T (\mathbf{I}_s^\delta, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \int_0^T (\mathbf{V}_s^\delta, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} \quad (7.90) \end{aligned}$$

or comme  $\mathbf{R}_{sk}$  est une matrice positive, nous avons avec le théorème 12.3.1 :

$$\int_0^T (\mathbf{R}_{sk} \partial_t^{1/2} \mathbf{I}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} \geq 0,$$

comme  $\mathbf{G}$  est une matrice positive :

$$(\mathbf{G} \mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} \geq 0,$$

et comme  $[\mathbf{C}_g - \partial_3 \gamma_C \partial_3]$  et  $[\mathbf{L}_g - \partial_3 \gamma_L \partial_3]$  sont auto-adjoints :

$$\begin{aligned} \int_0^T ([\mathbf{C}_g - \partial_3 \gamma_C \partial_3] \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2} \int_0^T \partial_t ([\mathbf{C}_g - \partial_3 \gamma_C \partial_3] \mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2} ([\mathbf{C}_g - \partial_3 \gamma_C \partial_3] \mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})}(T) \geq 0, \quad (7.91) \end{aligned}$$

de même :

$$\int_0^T ([\mathbf{L}_g - \partial_3 \gamma_L \partial_3] \partial_t \mathbf{I}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2} ([\mathbf{L}_g - \partial_3 \gamma_L \partial_3] \mathbf{I}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})}(T) \geq 0$$

et

$$\int_0^T (\mathbf{L}_{sk}^+ \partial_t \mathbf{I}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} \geq 0.$$

De plus en faisant

$$\int_0^T \mathbf{L} \partial_t \mathbf{I}_{aux}^\delta \cdot (7.88c),$$

nous obtenons

$$\int_0^T (\mathbf{L} \partial_t \mathbf{I}_{aux}^\delta, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_0^T (\mathbf{L} \partial_t \mathbf{I}_{aux}^\delta, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \int_0^T (\mathbf{L}_{sk}^- \partial_t \mathbf{I}_{aux}^\delta, \mathbf{I}_{aux}^\delta)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ainsi l'équation d'énergie (7.90) devient :

$$\mathcal{E}_{LCR}(T) \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{I}_s^\delta) \cdot (\mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{\delta,2}) + \delta^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_s) \cdot (\mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \mathbf{I}^{\delta,2}).$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\mathcal{E}_{LCR}(T) \leq \int_0^T \left\| \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{I}_s^\delta + \delta^2 \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_s \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \mathcal{E}_{LC}(t) dt,$$

et l'inégalité d'énergie se retrouve avec le lemme 4.3.2 de Grönwall.  $\square$

L'estimation d'énergie a priori obtenue n'est qu'une étape, elle sert tout d'abord à postuler un cadre fonctionnel adéquate dans lequel chercher d'éventuelles solutions, ici

$$L^\infty(]0, T[, \mathbb{H}_e \times \mathbb{H}_m),$$

à démontrer l'unicité de solutions (prendre cette estimation avec des sources nulles) et est le début de la méthode de Galerkin qui permet de conclure quant à l'existence d'une solution. Rappelons que cette équation est plus délicate qu'il n'y paraît. En effet les matrices  $\gamma_C$  et  $\gamma_L$  peuvent dégénérer et il nous faut alors avoir recours à une méthode de type perturbation comme dans la section 5.5.1 (mais en plus simple). Nous laissons le soin au lecteur de compiler ces divers ingrédients pour s'assurer que notre équation est effectivement bien posée pour nous focaliser sur la nouveauté de notre modèle, c-a-d l'opérateur  $\mathbf{R}_{sk} \partial_t^{1/2}$ .

**Nous allons par la suite supposer que  $\mathbf{L}_{sk} = 0$  et donc que  $\mathbf{I}_{aux}^{\delta,2} = \mathbf{I}^{\delta,2}$**  car la difficulté que nous souhaitons mettre en avant dans la suite de la section est le caractère non local de la dérivée fractionnaire  $\partial_t^{1/2}$ . La première idée est d'utiliser des quadratures pour calculer le produit de convolution qu'est la demi-dérivée (voir [51]). Toutefois les difficultés liées au caractère non local de  $\partial_t^{1/2}$  peuvent être évité en approximant le symbole de cet opérateur via l'approximation de Padé de la racine carrée d'un nombre complexe  $s \in \mathbb{C}_0$  :

$$\sqrt{s} = \sqrt{1 - (1-s)} \approx 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\text{si}_n(1-s)}{1 - \text{co}_n(1-s)}$$

avec

$$\text{si}_n = \frac{2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right)}{2N+1} \quad \text{et} \quad \text{co}_n = \cos^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right).$$

qui nous permet d'introduire des problèmes auxiliaires  $\hat{\mathbf{K}}^n$  :

$$\begin{cases} s [\mathbf{C} + \delta^2 \mathbf{C}_g - \delta^2 \partial_3 (\gamma_C \partial_3)] \hat{\mathbf{V}}^{\delta,2} + \delta^2 \mathbf{G} \hat{\mathbf{V}}^{\delta,2} + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2}(x_3, s) = \mathbf{I}_s^\delta + O(\delta^3), \\ s [\mathbf{L} + \delta^2 \mathbf{L}_g - \delta^2 \partial_3 (\gamma_L \partial_3)] \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2} + \delta \mathbf{R}_{sk} \left[ \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2} - \sum_{n=1}^N \text{si}_n(1-s) \hat{\mathbf{K}}^n \right] + \partial_3 \hat{\mathbf{V}}^{\delta,2} = \delta^2 \mathbf{V}_s, \\ -\text{co}_n(1-s) \hat{\mathbf{K}}^n + \hat{\mathbf{K}}^n = \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2} \end{cases}$$

qui devient dans le domaine temporel :

$$\begin{cases} [\mathbf{C} + \delta^2 \mathbf{C}_g - \delta^2 \partial_3 (\gamma_C \partial_3)] \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2} + \delta^2 \mathbf{G} \mathbf{V}^{\delta,2} + \partial_3 \hat{\mathbf{I}}^{\delta,2}(x_3, s) = \mathbf{I}_s^\delta + O(\delta^3), & (a) \\ [\mathbf{L} + \delta^2 \mathbf{L}_g - \delta^2 \partial_3 (\gamma_L \partial_3)] \partial_t \mathbf{I}^{\delta,2} + \delta \mathbf{R}_{sk} \left[ \mathbf{I}^{\delta,2} + \sum_{n=1}^N \text{si}_n(\partial_t - 1) \mathbf{K}^n \right] + \partial_3 \mathbf{V}^{\delta,2} = \delta^2 \mathbf{V}_s, & (b) \\ \text{co}_n \partial_t \mathbf{K}^n + (1 - \text{co}_n) \mathbf{K}^n = \mathbf{I}^{\delta,2}. & (c) \end{cases} \quad (7.92)$$

**Proposition 7.6.1.** *La solution*

$$\mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2} \in L^1(]0, T[, H^1(\mathbb{R})) , \mathbf{K}^n \in L^1(]0, T[, L^2(\mathbb{R}))$$

à l'équation des télégraphistes avec problèmes auxiliaires (7.92) vérifie l'estimation a priori

$$\sqrt{\mathcal{E}_{LC,K}}(T) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T \left\| \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{I}_s^\delta + \delta^2 \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_s \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

avec l'énergie :

$$\mathcal{E}_{LC,K} := \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C} \mathbf{V}^{\delta,2} \cdot \mathbf{V}^{\delta,2} + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L} \mathbf{I}^{\delta,2} \cdot \mathbf{I}^{\delta,2} + \delta \sum_{n=1}^N \text{si}_n \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{sk} \mathbf{K}^n \cdot \mathbf{K}^n \right) \right].$$

*Démonstration.* En faisant

$$\int_{\mathbb{R}} (7.92a) \cdot \mathbf{V}^{\delta,2} + \int_{\mathbb{R}} (7.92b) \cdot \mathbf{I}^{\delta,2} + \sum_{n=1}^N \frac{\text{si}_n}{\text{co}_n} \int_{\mathbb{R}} (7.92c) \cdot (\mathbf{K}^n - \mathbf{I}^{\delta,2}),$$

nous obtenons l'égalité d'énergie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{C} \mathbf{V}^{\delta,2} \cdot \mathbf{V}^{\delta,2} + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{L} \mathbf{I}^{\delta,2} \cdot \mathbf{I}^{\delta,2} + \delta \sum_{n=1}^N \text{si}_n \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\text{sk}} \mathbf{K}^n \cdot \mathbf{K}^n \right) \right] + \delta^2 \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G} \mathbf{V}^{\delta,2} \cdot \mathbf{V}^{\delta,2} \\ & + \delta^2 \int_0^T ([\mathbf{C}_{\mathbf{g}} - \partial_3 \gamma_{\mathbf{C}} \partial_3] \partial_t \mathbf{V}^{\delta,2}, \mathbf{V}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \int_0^T ([\mathbf{L}_{\mathbf{g}} - \partial_3 \gamma_{\mathbf{L}} \partial_3] \partial_t \mathbf{I}^{\delta,2}, \mathbf{I}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} \\ & + \delta \left( 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\text{si}_n}{\text{co}_n} \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\text{sk}} \mathbf{I}^{\delta,2} \cdot \mathbf{I}^{\delta,2} \right) + \delta \sum_{n=1}^N \frac{\text{si}_n}{\text{co}_n} (1 - \text{co}_n) \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\text{sk}} \mathbf{K}^n \cdot \mathbf{K}^n \right) \\ & = 2 \delta \sum_{n=1}^N \frac{\text{si}_n}{\text{co}_n} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\text{sk}} \mathbf{I}^{\delta,2} \cdot \mathbf{K}^n \right) (\widehat{\mathbf{I}}_s^\delta, \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 (\widehat{\mathbf{V}}_s^\delta, \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Young nous avons :

$$2 \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\text{sk}} \mathbf{I}^{\delta,2} \cdot \mathbf{K}^n \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\text{sk}} \mathbf{I}^{\delta,2} \cdot \mathbf{I}^{\delta,2}}{1 - \text{co}_n} + (1 - \text{co}_n) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\text{sk}} \mathbf{K}^n \cdot \mathbf{K}^n$$

et ainsi l'égalité d'énergie devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{LC,K}(t) + \delta \left( 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\text{si}_n}{1 - \text{co}_n} \right) \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\text{sk}} \mathbf{I}^{\delta,2} \cdot \mathbf{I}^{\delta,2} \right) + \delta^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G} \mathbf{V}^{\delta,2} \cdot \mathbf{V}^{\delta,2} \\ = \int_0^t (\widehat{\mathbf{I}}_s^\delta, \widehat{\mathbf{V}}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2 \int_0^t (\widehat{\mathbf{V}}_s^\delta, \widehat{\mathbf{I}}^{\delta,2})_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

or les coefficients  $\text{si}_n$  et  $\text{co}_n$  intervenant dans le développement de Padé vérifient le critère de Kreiss (section 7.1.2 de [42]) :

$$\left( 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\text{si}_n}{1 - \text{co}_n} \right) > 0.$$

Pour conclure il ne reste plus qu'à utiliser le lemme 4.3.2 de Grönwall.  $\square$



---

---

**QUATRIÈME PARTIE**

**MODELING ELECTRICAL NETWORKS**

---

---



# MODELING A JUNCTION BETWEEN COAXIAL CABLES WHEN THERE ARE NOS LOSSES AND WHEN THE ELECTROMAGNETIC WAVES VELOCITY IS CONSTANT

---

In the previous chapters, we have studied a 1D model of coaxial cables, the unknowns of which are the electrical potential and current. We are now interested in modeling the case of a junction of such cables (see figure 8.1 for examples) in order to define a reduced model. To do that, it is standard to consider each cable as a branche of a graph and each junction as the node of the graph. Then the junction is modeled by Kirchhoff's circuit laws, namely, the loop-rule (all potentials at the node are equal) and the node-rule (the sum of the currents at the junction equals zero). It is clear that such transmission conditions do not take into account the geometry of the 3D structure, and we could not find in the literature any model that does. Therefore in this chapter we aim to find improved Kirchhoff's circuit laws characterizing (up to a certain extent) the 3D properties and the physical parameters of the junction. As in the previous chapter, we derive such a reduced model using asymptotic analysis of Maxwell's equations. Far from the junction it is clear that the previous asymptotic analysis done in part I is valid, that is to say, the electromagnetic fields are essentially transversally polarized and characterized by the 1D-propagation of electrical potential and currents. Close to the junction we cannot expect such structure to hold, therefore another expression of the electromagnetic fields has to be found (again using asymptotic analysis). Finally both asymptotic expressions of the electromagnetic fields have to match close to the junction and the extremities of the cables, this is done using the so-called technique of matched asymptotic expansions method. Such a method has been used in the context of propagation of acoustic waves in a network (see [43]) or in the context of wave propagation through thin slots (see [70]). To simplify our study and to dispense with technical difficulties, this chapter is focused on a simple case : the junction of cylindrical coaxial cables whose characteristics permittivity and permeability satisfy some strong assumptions, as they vary only transversally and the electromagnetic wave velocity is constant ( $1/\sqrt{\epsilon\mu} = c$ ).



FIGURE 8.1 – Two examples of junctions : a "Y" and a bend



## 8.1 Modelling a coaxial cables junction problem

### 8.1.1 Geometry of the problem

We consider the junction of  $L + 1$  coaxial cables as represented in the figure 8.2. These cables are assumed to be cylindrical (i.e. invariant along a direction) up to the junction. Let  $\widetilde{\mathcal{W}}_0$  be a connected domain in  $\mathbb{R}^3$  constituted of the unit ball and outside this ball by the union of  $L + 1$  non overlapping semi-infinite cylinders. Then consider  $\widetilde{\mathcal{W}}_1$  a homogeneous dilation of the center of the unit ball of  $\widetilde{\mathcal{W}}_0$  and of ratio  $0 < \alpha < 1$  of  $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ . The domain  $\Omega$  we will consider is homomemorphic to  $\widetilde{\mathcal{W}}_0 \setminus \widetilde{\mathcal{W}}_1$  We will now describe in detail this geometry.

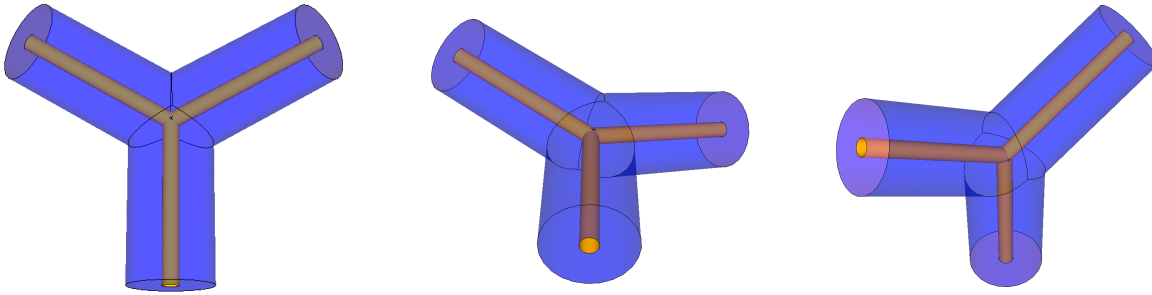


FIGURE 8.2 – Geometry of the junction (three angles)

#### The knot area

We consider a simply connected domain  $\mathcal{W}_0$  with a connected lipschitz boundary<sup>1</sup>. We will assume that  $\mathcal{W}_0$  is included in a unit ball  $B$ . Moreover, we will assume that the boundary  $\partial\mathcal{W}_0$  includes  $L + 1$  plane surfaces, called the end sections,  $\mathcal{O}_{0,l}$  for  $l = 0 \dots L$  such that they do not intersect

$$\overline{\mathcal{O}_{0,l}} \cap \overline{\mathcal{O}_{0,l'}} = \emptyset \text{ for } l \neq l'.$$

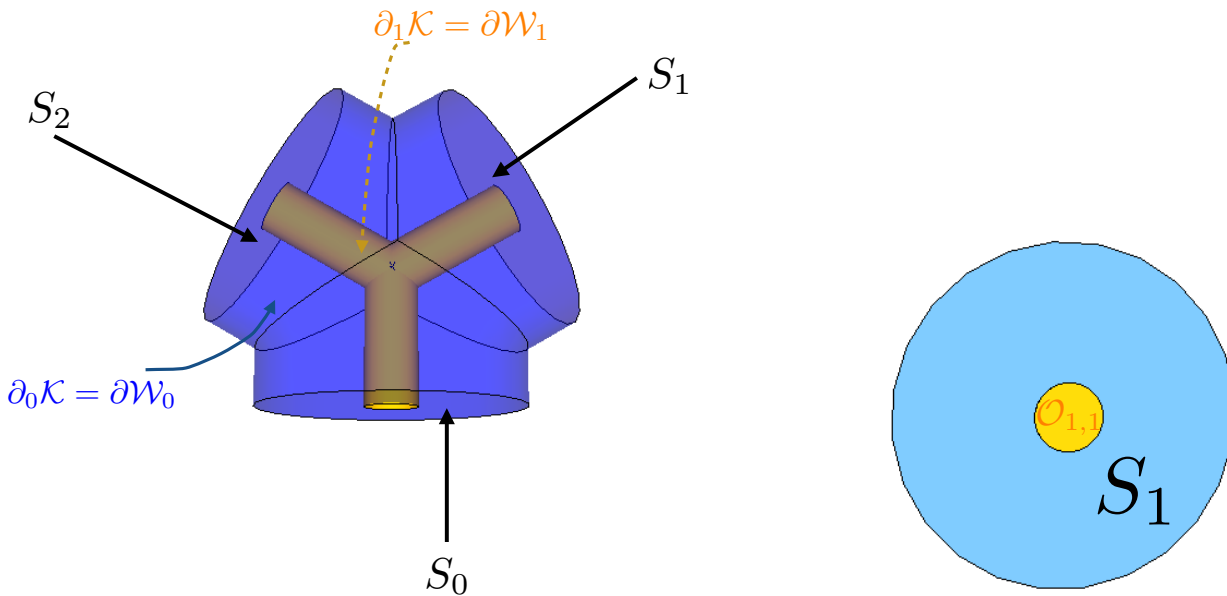


FIGURE 8.3 – the knot area and one end section

We also consider an other simply connected domain  $\mathcal{W}_1$  with a connected lipschitz boundary, called the "handle", which is included in  $\mathcal{W}_0$ . It intersects  $\mathcal{W}_0$  only at the end sections  $\mathcal{O}_{0,l}$

$$\partial\mathcal{W}_1 \cap \partial\mathcal{W}_0 \subset \bigcup_{l=0}^L \mathcal{O}_{0,l} \text{ and } \text{dist} \left( \mathcal{W}_1, \partial\mathcal{W}_0 \setminus \bigcup_{l=0}^L \mathcal{O}_{0,l} \right) \geq \alpha > 0.$$

1. There are no cavities. Such domain is called 2-connected

More precisely the intersection, the "holes", are defined as

$$\mathcal{O}_{1,l} := \mathcal{O}_{0,l} \cap \mathcal{W}_1,$$

that satisfy  $\mathcal{O}_{1,l} \neq \emptyset$ . The knot area and the cable end sections (see figure 8.3) are then defined as

$$\mathcal{K} := \mathcal{W}_0 \setminus \mathcal{W}_1 \quad \text{and} \quad S_l = \mathcal{O}_{0,l} \setminus \mathcal{O}_{1,l}.$$

Finally we will introduce the following notations

$$\partial_1 \mathcal{K} = \partial \mathcal{W}_1 \quad , \quad \partial_0 \mathcal{K} = \partial \mathcal{W}_0 \quad \text{and} \quad \partial_1 S_l = \partial \mathcal{O}_{1,l} \quad , \quad \partial_0 S_l = \partial \mathcal{O}_{0,l} \quad \text{with} \quad l = 0 \dots L.$$

**The cables part**

We define for each  $l = 0 \dots L$  the unit vector  $\mathbf{e}_3^l \in \mathbb{R}^3$  as the constant outward normal to  $\mathcal{K}$  along  $S_l$ . We then define two unit orthogonal vectors  $(\mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l) \in \mathbb{R}^3$  and a point  $O_l \in \mathcal{O}_{0,l}$  such that the (affine coordinate) system  $(O_l, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$  has for origin  $O_l$  and for orthonormal basis  $(\mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$ .

The cables (see figure 8.4) are then defined as the cylinders created by the translation of  $S_l$  along the direction  $\mathbf{e}_3^l$

$$\mathfrak{D}_l = S_l \times (O_l, \mathbf{e}_3^l),$$

with  $(O_l, \mathbf{e}_3^l)$  representing the half-line of direction  $\mathbf{e}_3^l$  starting at  $O_l$ .

In the cable  $\mathfrak{D}_l$ , we will denote by

$$(x^l, x_3^l)$$

the local (transverse, longitudinal) coordinate of a point  $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_l$  in the system  $(O_l, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$  and  $0_l$  the longitudinal component of the origin  $O_l$  in the system  $(O_l, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$  that is to say :

$$\mathbf{x} = (x^l, 0_l) \in \mathfrak{D}_l \iff \mathbf{x} \in \mathcal{O}_{0,l}.$$

There are  $L + 1$  local coordinate systems recognized by the exponent  $l$ .

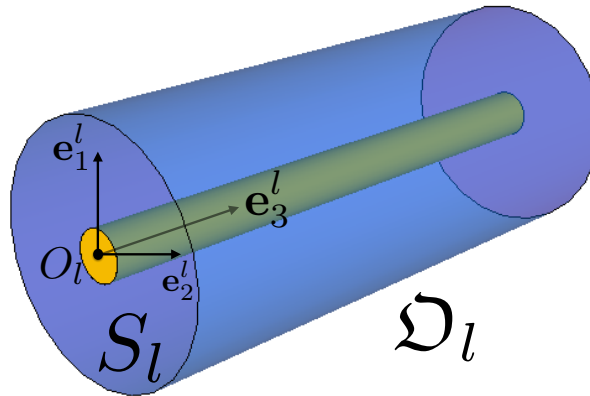


FIGURE 8.4 – the cable part

**Family of scaled geometries**

The domain

$$\Omega := \mathcal{K} \bigcup_{l=0}^L \mathfrak{D}_l$$

is the reference geometry. We denote the boundary of  $\Omega$  by

$$\partial_0 \Omega := \partial_0 \mathcal{K} \bigcup_{l=0}^L \bigcup_{x_3^l=0_l}^{\infty} \partial_0 S_l \times \{x_3^l\} \quad \text{and} \quad \partial_1 \Omega := \partial_1 \mathcal{K} \bigcup_{l=0}^L \bigcup_{x_3^l=0_l}^{\infty} \partial_1 S_l \times \{x_3^l\}.$$

But, in fact, the practical coaxial cables we consider are "thin" and the knot is "small". We consider a family of domains parametrized by a "small" but strictly positive scalar  $\delta$

$$\Omega^\delta := \mathcal{G}_{r_\delta}(\Omega)$$

obtained by a scaling  $\mathcal{G}_{r_\delta} : \mathbf{x} \mapsto \delta \mathbf{x}$ . The cables

$$\mathfrak{D}_l^\delta := \mathcal{G}_{r_\delta}(\mathfrak{D}_l)$$

are "thin" in the sense that their cross sections are included in a disk of diameter  $\delta$ . The knot

$$\mathcal{K}^\delta := \mathcal{G}_{r_\delta}(\mathcal{K})$$

is small since it is included in a ball of radius  $\delta$ . We will also consider the points  $O_l^\delta = \mathcal{G}_{r_\delta}(O_l)$  and the cross section of the thin cable  $S_l^\delta$ . We will denote by  $\mathbf{x}^\delta$  the coordinate of points in  $\Omega^\delta$  and by  $(x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l})$  the local coordinate in  $\mathfrak{D}_l^\delta$  expressed in the system  $(O_l^\delta, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$ . We will denote by  $0_l^\delta$  the longitudinal component of  $O_l^\delta$ , that is to say

$$\mathbf{x}^\delta = (x^{\delta,l}, 0_l^\delta) \in \mathfrak{D}_l^\delta \iff \mathbf{x}^\delta \in \mathcal{O}_{0,l}^\delta.$$

### 8.1.2 According to Maxwell's theory

We consider that the thin domain  $\Omega^\delta$  is a lossless dielectric material whose characteristic coefficients, electric permittivity and magnetic permeability satisfy the usual assumptions

$$0 < \varepsilon_- \leq \varepsilon^\delta(\mathbf{x}^\delta) \leq \varepsilon_+, \quad \text{and} \quad 0 < \mu_- \leq \mu^\delta(\mathbf{x}^\delta) \leq \mu_+, \quad \mathbf{x}^\delta \in \Omega^\delta. \quad (8.1)$$

We assume the following strong hypothesis to simplify the presentation.

**Hypothesis 8.1.1.** *In the cable part  $\mathfrak{D}_l^\delta$ , the electric permittivity and magnetic permeability are independent of the longitudinal variable*

$$\varepsilon^\delta(x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) = \varepsilon^\delta(x_3^{\delta,l}) \quad \text{and} \quad \mu^\delta(x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) = \mu^\delta(x_3^{\delta,l}) \quad \text{for} \quad (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \in \mathfrak{D}_l^\delta,$$

and the electromagnetic waves velocity is constant

$$c := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^\delta(\mathbf{x}^\delta) \mu^\delta(\mathbf{x}^\delta)}} \quad \text{for} \quad \mathbf{x}^\delta \in \Omega^\delta.$$

In the next chapter, we will retain this hypothesis. We will focus on the electromagnetic fields  $E^\delta, H^\delta$  solution of the Maxwell's equations (without loss and sources)

$$\begin{cases} \varepsilon^\delta \partial_t E^\delta - \mathbf{curl} H^\delta = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega^\delta, \\ \mu^\delta \partial_t H^\delta + \mathbf{curl} E^\delta = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega^\delta, \end{cases} \quad (8.2)$$

completed with a perfectly conducting boundary

$$E^\delta \times \mathbf{n}^\delta = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \partial\Omega^\delta \quad (8.3)$$

and the initial conditions

$$E^\delta(t=0, \cdot) \in L^2(\Omega^\delta) \quad \text{and} \quad H^\delta(t=0, \cdot) = 0$$

satisfying the usual admissible condition

$$\mathbf{Div} (\varepsilon^\delta E^\delta(t=0, \cdot)) = 0 \quad \text{in } \Omega^\delta. \quad (8.4)$$

Moreover, without loss of generality, we assume that the **initial condition is supported in the 0<sup>th</sup> cable far from the knot area**

$$\text{supp}(E^\delta(t=0, \cdot)) \subset \mathfrak{D}_0^\delta \quad \text{and} \quad \text{dist}(\text{supp}(E^\delta(t=0, \cdot)), \mathcal{K}^\delta) > 1. \quad (8.5)$$

Such a convention is taken as we want to observe the other branches reactions to an imposed signal in the 0<sup>th</sup> cable. We can prove that the equations (8.2, 8.3, 8.4) imply the hidden divergence equations

$$\begin{cases} \mathbf{Div} (\varepsilon^\delta E^\delta) = 0, \\ \mathbf{Div} (\mu^\delta H^\delta) = 0, \end{cases} \quad (8.6)$$

as well as the hidden boundary condition

$$\mu H^\delta \cdot \mathbf{n}^\delta = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega^\delta. \quad (8.7)$$

## 8.2 The 1D model

La beauté est une énigme. (prince Mychkine)

Dostoïevski, L'Idiot

In fact we want a 1D model whose limit graph matches the structure of the junction  $\Omega^\delta$ . More precisely we expected a quantum graph with 1 node and  $L+1$  branches. A quantum graph (see [49]) is a metric graph equipped with a wave operator along the branches and some transmission conditions on the nodes, called Kirchhoff's laws, which connect the quantities evaluated on the branches together. The quantum graph we propose in this section is an improvement of the usual electrical circuit model.

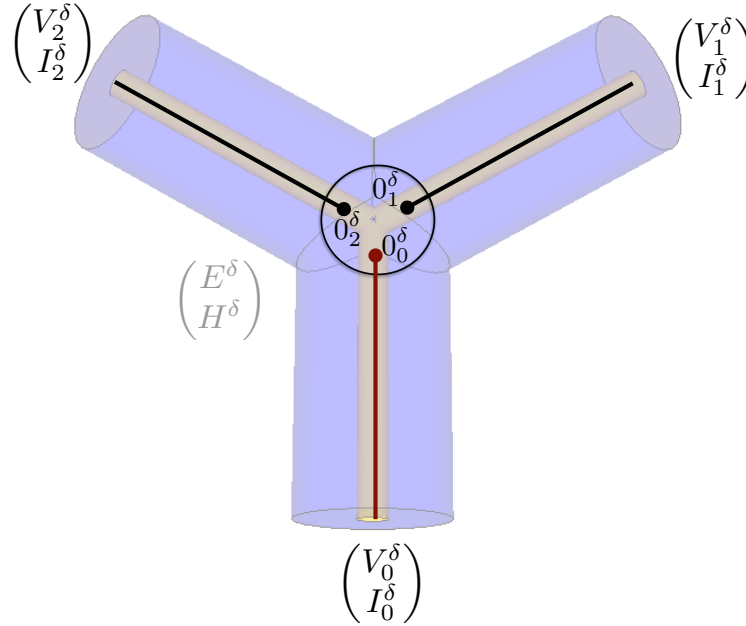


FIGURE 8.5 – The limit graph as the skeleton of the junction geometry

### 8.2.1 The quantum limit graph

Pense que ce qui nous convainc souvent de la rectitude d'une façon de voir, c'est la simplicité ou la symétrie... Et alors on dit tout simplement quelque chose du genre : "C'est forcément comme ça".

Wittgenstein, De la certitude

The interesting 1D variables are the electrical potential and the electrical current present in the limit star-like graph made out of one knot and  $L + 1$  branches. On this graph, each branch represents the phenomena taking place in the cable  $\Omega_l^\delta$  and the node stands for the junction  $\mathcal{K}^\delta$ . More precisely, on each **branch**, the electrical potential  $V_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t)$  and current  $I_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t)$  satisfy the lossless waves equations

$$\begin{cases} C^l \partial_t V_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t) + \partial_3 I_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t) = 0, & x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[, t > 0 \\ L^l \partial_t I_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t) + \partial_3 V_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t) = 0, & x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[, t > 0 \end{cases} \quad \text{(Telegrapher's equation)} \quad (8.8)$$

and each couple  $(V_l^\delta, I_l^\delta)$  for  $l = 0 \dots L$  are linked to one another by transmission conditions at the **knot** of the

graph which are the following **improved Kirchhoff's circuit rules**

$$\boxed{V_0^\delta(0_0^\delta, t) - V_l^\delta(0_l^\delta, t) = \delta \sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^\delta(0_{l'}^\delta, t), \quad t > 0} \quad \text{(Loop-rule),} \quad (8.9a)$$

$$\boxed{-\sum_{l=0}^L I_l^\delta(0_l^\delta, t) = \delta \mathcal{C} \partial_t V_0^\delta(0_0^\delta, t), \quad t > 0} \quad \text{(Node-rule).} \quad (8.9b)$$

The initial values

$$V_l^\delta(t=0) \quad \text{and} \quad I_l^\delta(t=0)$$

and the effective coefficients  $C^l, L^l, \mathcal{L}^{l,l'}$  and  $\mathcal{C}$  will be defined and described later (equation (8.14), definitions 8.2.1 and 8.2.2). Note that the improved Kirchhoff's circuit rules are made of  $L+1$  equations which are sufficient to complete the problem.

We note that if  $\delta$  vanishes, the improved Kirchhoff's circuit rules (8.9) become usual Kirchhoff's circuit laws. The cable  $0^{\text{th}}$  plays a privileged role because we have chosen it as the reference from which the electrical potential of each branch is expressed. It is consistent with the fact we have decided to impose a signal in the  $0^{\text{th}}$  cable (see 8.5). The effective coefficients of the telegrapher's equation, namely the electrical capacitance  $C^l$  and the electrical inductance  $L^l$ , are functions of the geometry of the cable  $\Omega_l^\delta$  and the material's characteristics ( $\varepsilon^\delta, \mu^\delta$ ). The effective coefficients  $\mathcal{L}^{l,l'}$  and  $\mathcal{C}$  integrate the complex structure of the knot area  $\mathcal{K}^\delta$ . The next section will explain how to compute the effective coefficients  $C^l, L^l, \mathcal{L}^{l,l'}$  and  $\mathcal{C}$  from the **geometry** and the **materials' characteristics** and prove that they satisfy the following positivity properties. However, in order to give energy equality, we announce now some positivity proprieties.

**Proposition 8.2.1.** *The effective coefficients  $C^l, L^l$  and  $\mathcal{C}$  are positive and the matrix  $\mathcal{L}^{l,l'}$  is symmetric positive.*

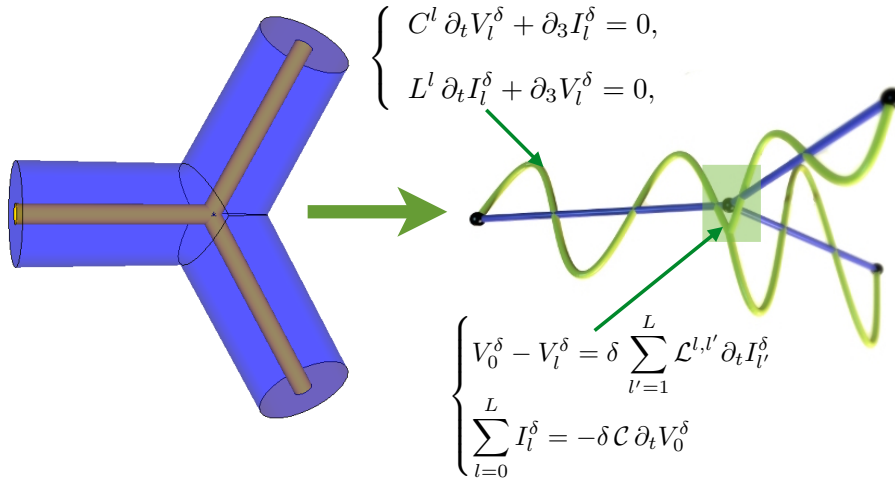


FIGURE 8.6 – From the junction to the quantum graph

**Lemma 8.2.1.** *If we denote by*

$$\mathcal{E}_l(t) := \frac{1}{2} \left[ \int_{0_0^\delta}^{\infty} C^l |V_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t)|^2 dx_3^l + \int_{0_0^\delta}^{\infty} L^l |I_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t)|^2 dx_3^l \right]$$

the electrical energy of the branch  $e_l$  and by

$$\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(t) := \frac{\delta}{2} \left[ \mathcal{C} |V_0^\delta(0_0, t)|^2 + \sum_{l, l'}^L \mathcal{L}^{l, l'} I_l^\delta(0_l, t) I_{l'}^\delta(0_{l'}, t) \right]$$

the electrical energy of the knot, then the electrical energy of the limit graph

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(t) = \sum_{l=0}^L \mathcal{E}_l(t) + \mathcal{E}_{\mathcal{K}}(t)$$

is conserved, namely,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(t) = \mathcal{E}_{\mathcal{G}}(t = 0).$$

*Proof.* We integrate the first equation of (8.8) over  $V_l^\delta$  from  $0_l^\delta$  to  $\infty$  and the second equation of (8.8) over  $I_l^\delta$  and add them

$$\frac{1}{2} \partial_t \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} C^l |V_l^\delta(x_3^{\delta, l}, t)|^2 dx_3^l + \int_{0_l^\delta}^{\infty} L^l |I_l^\delta(x_3^{\delta, l}, t)|^2 dx_3^l \right] + \int_{0_l^\delta}^{\infty} \partial_3 I_l V_l + \int_{0_l^\delta}^{\infty} \partial_3 V_l^\delta I_l^\delta = 0$$

then by summing for  $l = 0 \dots L$

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^L \partial_t \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} C^l |V_l^\delta(x_3^{\delta, l}, t)|^2 dx_3^l + \int_{0_l^\delta}^{\infty} L^l |I_l^\delta(x_3^{\delta, l}, t)|^2 dx_3^l \right] + \sum_{l=0}^L \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} \partial_3 I_l V_l + \int_{0_l^\delta}^{\infty} \partial_3 V_l^\delta I_l^\delta \right] = 0$$

Through integration by parts (and assuming that the electrical potential and current vanish at  $\infty$ ) we have

$$\sum_{l=0}^L \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} \partial_3 I_l^\delta V_l^\delta + \int_{0_l^\delta}^{\infty} \partial_3 V_l^\delta I_l^\delta \right] = - \sum_{l=0}^L V_l^\delta(0_l^\delta) I_l^\delta(0_l^\delta)$$

then we use improved Kirchhoff's rules

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^L V_l^\delta(0_l^\delta) I_l^\delta(0_l^\delta) &\stackrel{(8.9a)}{=} V_0^\delta(0_0^\delta) \sum_{l=0}^L I_l^\delta(0_l^\delta) - \delta \sum_{l, l'=1}^L \mathcal{L}^{l, l'} \partial_t I_{l'}^\delta(0_{l'}, t) I_l^\delta(0_l^\delta) \\ &\stackrel{(8.9b)}{=} -\delta \left[ \mathcal{C} V_0^\delta(0_0^\delta, t) \partial_t V_0^\delta(0_0^\delta, t) + \sum_{l, l'=1}^L \mathcal{L}^{l, l'} \partial_t I_{l'}^\delta(0_{l'}, t) I_l^\delta(0_l^\delta, t) \right] \end{aligned}$$

so since  $\mathcal{L}$  is symmetric

$$\sum_{l=0}^L \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} \partial_3 I_l^\delta V_l^\delta + \int_{0_l^\delta}^{\infty} \partial_3 V_l^\delta I_l^\delta \right] = \frac{\delta}{2} \partial_t \left[ \mathcal{C} |V_0^\delta(0_0^\delta, t)|^2 + \sum_{l, l'}^L \mathcal{L}^{l, l'} I_l^\delta(0_l^\delta, t) I_{l'}^\delta(0_{l'}, t) \right].$$

To sum up, we have proved that

$$\partial_t \mathcal{E}_{\mathcal{G}} = 0.$$

□

This estimate is the fundamental cornerstone ensuring that the 1D approximate model is **well-posed** in the right functional space by the Galerkin method. We shall not reproduce the (rather standard) proof but readers can look to [21]. It is worth noting that the evolution PDE on a graph with less complicated Kirchhoff's transmission conditions is covered within the paper [8].

### 8.2.2 Signification of the effective terms $C$ , $L$ , $\mathcal{C}$ and $\mathcal{L}$

All the effective coefficients  $C, L, \mathcal{L}^{l, l'}$  and  $\mathcal{C}$  are given in a reference geometry  $S_l$  and  $\Omega$ . The characteristic's coefficients are also modified by the scaling :

$$\varepsilon = \varepsilon^\delta \circ \mathcal{G}_{r_\delta} \quad \text{and} \quad \mu = \mu^\delta \circ \mathcal{G}_{r_\delta}.$$

**Topological feature**

To penetrate the depth of the signification of the coefficients  $C, L, \mathcal{L}^{l,l'}$  and  $\mathcal{C}$  we need topological preliminaries since their definition is intimately linked to the notion of "handle" and "holes". The domain  $\mathcal{K}$  is **not simply connected**<sup>2</sup> but the introduction of  $L$  **bidimensional cuts** might change that. In fact there are many ways to introduce these cuts. We choose for convenience that all the cuts come from the end of the 0<sup>th</sup> cable to the end of the  $l^{\text{th}}$  cable. This is why the 0<sup>th</sup> cable plays a privileged role. More precisely the cuts  $\Gamma_l$  are such that

- all the  $\Gamma_l$  are 2D surfaces,
- they do not intersect  $\Gamma_l \cap \Gamma_{l'} = \emptyset$  for  $l \neq l'$ ,
- they are interior  $\partial\Gamma_l \subset (S_0 \cup \partial_1\mathcal{K} \cup S_l \cup \partial_0\mathcal{K})$ ,
- the domain  $\mathcal{K}_\Gamma := \mathcal{K}^\delta \setminus \left(\bigcup_{l=1}^L \Gamma_l\right)$  is simply connected.

We will assume that it is possible to choose the cuts  $\Gamma_l$  such that

- the cuts are lipschitz manifolds<sup>3</sup>,
- the cuts are orthogonal to the end sections  $\Gamma_l \perp S_l$  and  $\Gamma_l \perp S_0$ <sup>4</sup>.

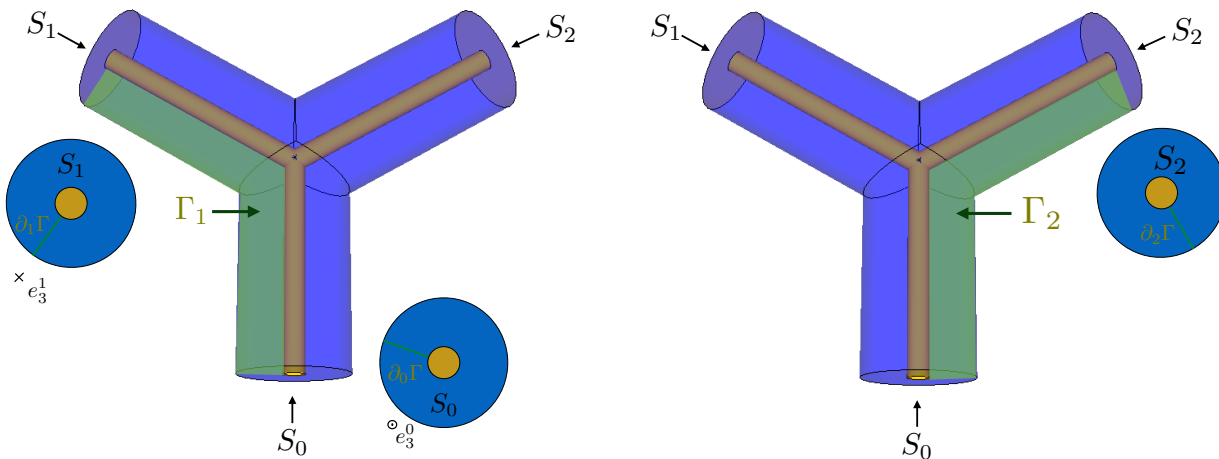


FIGURE 8.7 – The two cuts for a junction of three cables

The 2D cut  $\Gamma_l$  (from 0<sup>th</sup> cable to  $l^{\text{th}}$  cable) implies a **1D cut** making the end sections of the cables 0 and  $l$  simply connected. More precisely, we denote by  $\partial_l\Gamma$  the intersection between the boundary of cut  $\partial\Gamma_l$  and the end section of the cable  $S_l$  for  $1 \leq l \leq L$

$$\partial_l\Gamma := \partial\Gamma_l \cap S_l$$

and by  $\partial_0\Gamma$  the intersection between the boundary of one of the cuts  $\partial\Gamma_l$  (arbitrarily chosen) and the end section of the cable  $S_0$ . The **1D cuts**  $\partial_l\Gamma$  for  $l = 0 \dots L$  are such that the domains

$$S_l \setminus \partial_l\Gamma$$

are simply connected. We will see later on that the choice of the cut  $\partial_0\Gamma$  does not affect further analysis. We then are extending the cut  $\Gamma_l$  to  $\mathfrak{D}_l$  and  $\mathfrak{D}_0$  by translation of  $\partial_l\Gamma$  and  $\partial_0\Gamma$  along  $\mathbf{e}_3^l$  and  $\mathbf{e}_3^0$ .

We then define an orientation (see figure 9.4). In what follows, each  $\Gamma_l$  will be parameterized by a curvilinear vector  $e^l$  colinear to the tangent of  $\partial_1\mathcal{K}$  oriented from  $S_l$  to  $S_0$  and by  $\tau_l$  orthogonal to  $e^l$  in  $\Gamma_l$  oriented  $\Gamma_l$  from  $\partial_1\mathcal{K}$  towards  $\partial_0\mathcal{K}$ . We shall define  $\mathbf{n}_l$  along  $\Gamma_l$  as the unit normal<sup>5</sup> vector to  $\Gamma_l$  such that  $(n_l, \tau_l, e^l)$  is a direct

2. Since the loops surrounding the inner wire  $\mathcal{G}r_s(\mathcal{W}_1^0)$  cannot be retracted on a point.  
 3. It is actually possible since the domain  $\Omega$  have lipschitzian boundaries and is connected by arcs.  
 4. This assumption will not be necessary but it appears to be useful in simplifying the definition of the orientations. That is also possible since the domain is connected by arcs.  
 5. The normal vector is defined almost everywhere.

basis of the plane. Same with  $\partial\Gamma$  oriented from  $\partial_1S$  towards  $\partial_0S$ .

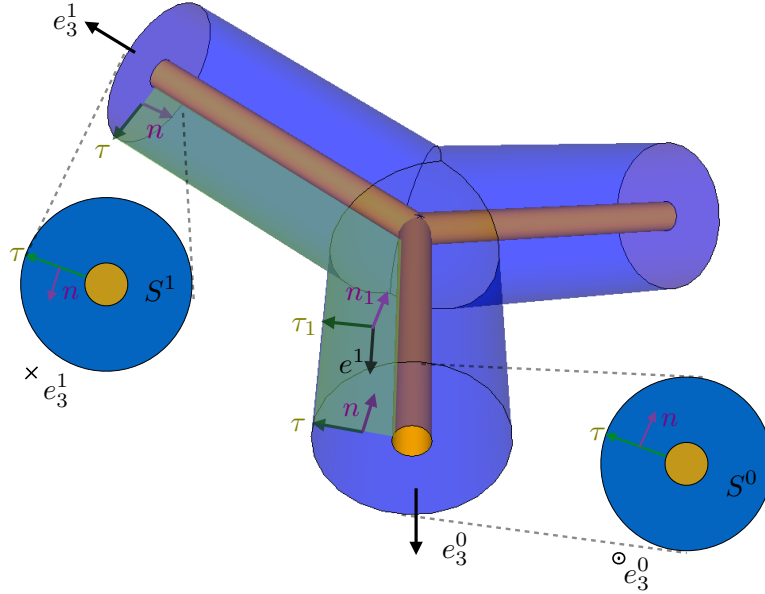


FIGURE 8.8 – Orientation of the cut  $\Gamma_1$

Be aware, with our orientation choice, a function  $u^l$  which jumps<sup>6</sup> on  $\Gamma_l$  and continuous elsewhere could jump<sup>7</sup> on  $\partial_l\Gamma$  as

$$[u^l]_{\partial_l\Gamma} = (\delta_{l'}^0 - \delta_{l'}^l)[u^l]_{\Gamma_l}. \quad (8.10)$$

**Definition of  $C^l$  and  $L^l$**

Let us define on each end sections  $S_l$  for  $l = 0 \dots L$  the 2D harmonic potentials

$$\varphi^l \in H^1(S_l) \quad \text{and} \quad \psi^l \in H^1(S_l \setminus \partial_l\Gamma)$$

as the solutions of the following problems

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\varepsilon \nabla \varphi^l) = 0, & \text{in } S_l, \\ \varphi^l = 0, & \text{on } \partial_0 S_l, \\ \varphi^l = \delta_{qk}, & \text{on } \partial_1 S_l, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\mu \nabla \psi^l) = 0, & \text{in } S_l \setminus \partial_l\Gamma, \\ \partial_n \psi^l = 0, & \text{on } \partial S_l, \\ [\psi^l]_{\partial_l\Gamma} = 1, \quad [\mu \partial_n \psi^l]_{\partial_l\Gamma} = 0 & \text{on } \partial_l\Gamma. \end{array} \right. \quad (8.11)$$

We made an exhaustive study of these elliptic problems in the section 1.3 of the chapter on 2D fields. It is important to note that although  $\psi^l$  depends of the cuts  $\partial_l\Gamma$ , its gradient does not. We have lengthily argued about that (see remark 1.2.1 and the previous explanations). We will just recall that we will use the notation  $\widetilde{\nabla}$  and  $\widetilde{\mathbf{rot}}$  to highlight the independence with respect to the 1D cut (see remark 1.2.1). This is the reason why we said that  $\partial_0\Gamma$  could be the intersection between  $S_0$  and any cut  $\Gamma_l$ . Then the capacitance and the inductance of cable are defined as the energy of these potentials as done below.

6. The jump across a 2D cut is defined in (2.2) as

$$[u]_{\Gamma_l}(\mathbf{x}_{\tau,e}) := \lim_{\nu \rightarrow 0} [u(\mathbf{x}_{\tau} + \nu \mathbf{n} - u(\mathbf{x}_{\tau} - \nu \mathbf{n}))] \text{ for almost everywhere } \mathbf{x}_{\tau} \in \Gamma_l.$$

7. The jump across a 1D cut is defined in (1.6) as

$$[u^l]_{\partial_l\Gamma}(x_{\tau}) := \lim_{\nu \rightarrow 0} (u^l(x_{\tau} + \nu n) - u^l(x_{\tau} - \nu n)) \text{ for almost everywhere } x_{\tau} \in \partial_l\Gamma.$$



**Definition 8.2.1.** *The effective coefficients of the cable, namely the capacitance and respectively the inductance, are defined by*

$$C^l = \int_{S_l} \varepsilon |\nabla \varphi^l|^2 \quad \text{and} \quad L^l = \int_{S_l} \mu |\tilde{\nabla} \psi^l|^2$$

with  $\varphi^l$  and  $\psi^l$  the solution of (8.11).

The property 1.3.2 implies the first point (i) of the proposition 8.2.1. Note that it is not necessary to compute both  $\varphi^l$  and  $\psi^l$  to know  $C^l$  and  $L^l$  since the conjugation lemma 1.3.5 implies that

$$\nabla \varphi^l = C^l \varepsilon^{-1} \widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l, \quad \tilde{\nabla} \psi^l = L^l \mu^{-1} \mathbf{rot} \varphi^l \quad \text{and} \quad L^l C^l = c^{-2}. \quad (8.12)$$

In particular, we conclude that (8.8) can be written as second order waves equations

$$\begin{cases} \partial_t^2 V_l^\delta - c^2 \partial_3^2 V_l^\delta = 0, \\ \partial_t^2 I_l^\delta - c^2 \partial_3^2 I_l^\delta = 0. \end{cases}$$

It is worth recalling the bi-orthogonality relation (see lemma 1.3.1)

$$\int_{S_l} \nabla \varphi^l \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l = - \int_{S_l} \mathbf{rot} \varphi^l \cdot \tilde{\nabla} \psi^l = 1. \quad (8.13)$$

We want to underscore that the potentials are related to the harmonic spaces (see theorem 1.3.1)

**Lemma 8.2.2.** *The harmonic spaces*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varepsilon; S) &:= \{ \mathbf{u} \in L^2(S, \mathbb{R}^2); \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0, \mathbf{div}(\varepsilon \mathbf{u}) = 0, \text{ and } \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial S} = 0 \} \\ \mathcal{H}(\mu; S) &:= \{ \mathbf{u} \in L^2(S, \mathbb{R}^2); \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0, \mathbf{div}(\mu \mathbf{u}) = 0, \text{ and } (\mu \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\partial S} = 0 \} \end{aligned}$$

have for basis the gradient of the 2D harmonic potentials we introduced in (8.11), that is to say

$$\mathcal{E}(\varepsilon; S) = \text{span}\{\nabla \varphi\} \quad \text{and} \quad \mathcal{H}(\mu; S) = \text{span}\{\tilde{\nabla} \psi\}.$$

The initial value of the 1D effective model is defined by the projection on the harmonic space we introduced in the lemma 8.2.2. More precisely we have for all  $x_3^l \in [0_l^\delta, \infty[$  and  $l = 0 \dots L$

$$\boxed{\begin{cases} V_0^\delta(x_3^{\delta, l}, t = 0) := \int_{S_0 \times \{x_3^{\delta, l}\}} E^\delta(\delta x, x_3^{\delta, l}, t = 0) \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx, \\ V_l^\delta(x_3^{\delta, l}, t = 0) := 0, \\ I_l^\delta(x_3^{\delta, l}, t = 0) := 0. \end{cases}} \quad \text{(initial conditions)} \quad (8.14)$$

Since  $E^\delta(\cdot, t = 0)$  is supported far to the knot area (see (8.5)), we may have

$$V_0^\delta(0_l^\delta, t = 0) = 0.$$

### The effective terms $\mathcal{C}$ and $\mathcal{L}$

Here, we define some new harmonic potentials on the normalized junction  $\Omega$ . Since  $\Omega$  is unbounded, we need to keep a close eye on the space where the new harmonic potentials live. We introduce the following weighted spaces

$$L_w^2(\Omega) := \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega) \mid \int_{\Omega_l} e^{-\sqrt{x_3^l}} |u|^2 < \infty \right\} \quad \text{and} \quad H_w^1(\Omega) := \left\{ u \in L_w^2(\Omega) \mid \mathbf{grad} u \in L_w^2(\Omega) \right\}.$$

The goal of the weight is to exclude the fields that would increase exponentially (those which increase faster than  $e^{\sqrt{x_3^l}}$ ) in  $\Omega$ . We introduce the 3D harmonic potentials

$$\Phi \in H_w^1(\Omega) \quad \text{and} \quad \Psi^l \in H_w^1(\Omega \setminus \Gamma_l)_{/\mathbb{C}} \quad \text{for } l = 1 \dots L$$

solutions of

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Div}(\varepsilon \mathbf{grad}\Phi) = 0, & \text{in } \Omega \\ \Phi = 0, & \text{on } \partial_0\Omega \\ \Phi = 1, & \text{on } \partial_1\Omega \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Div}(\mu \mathbf{grad}\Psi^l) = 0, & \text{in } \Omega \setminus \Gamma_l \\ \partial_n \Psi^l = 0, & \text{on } \partial\Omega \\ [\mu \partial_n \Psi^l] = 0, \quad [\Psi^l] = 1 & \text{on } \Gamma_l, \end{array} \right. \quad (8.15)$$

It is not easy to ensure the existence of solutions and to solve these problems (8.15) by domain discretization methods, such as finite element or differences method, since the domain is infinite in some directions. So we look for equivalent problems posed in a bounded domain with transparent boundaries conditions as in [31]. When the infinite parts of the domains are cylindrical (as in our case since  $\mathfrak{D}_l$  are homogeneous and cylindrical in the direction  $\mathbf{e}_3^l$ ) we can express the transparent boundary conditions with a nonlocal operator sometimes called the Steklov-Poincaré operator. This nonlocal artificial boundary condition has been found to be very effective in various applications, especially in infinite waveguide studies. This approach was done in Chapter 2 for a more complicated type of potentials<sup>8</sup>. We just recall the results and the notation we will use.

Please take notice that the half-strips  $\mathfrak{D}_l$  being homogeneous and cylindrical in the direction  $\mathbf{e}_3^l$  is the first step in order to be able to use the separation of variables method. To achieve this, we introduce the following  $L^2(S)$  basis (see lemma 2.4.2) made out of eigenvectors (for an usual  $L^2(S_l)$  scalar product with weight respectively  $\varepsilon$  and  $\mu$ )

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\varepsilon^{-1} \mathbf{div}(\varepsilon \nabla \varphi_n^l) = \lambda_n^l \varphi_n^l, & \text{in } S_l, \\ \varphi_n^l = 0 & \text{on } \partial S_l \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\mu^{-1} \mathbf{div}(\mu \nabla \psi_n^l) = k_n^l \psi_n^l, & \text{in } S_l, \\ \partial_n \psi_n^l = 0 & \text{on } \partial S_l \\ \int_{S_l} \mu \nabla \psi_n^l = 0 \end{array} \right. \quad (8.16)$$

which are orthonormal

$$\delta_n^k = \int_{S_l} \varepsilon \varphi_n^l \varphi_k^l = \frac{\int_{S_l} \varepsilon \nabla \varphi_n^l \cdot \nabla \varphi_k^l}{\lambda_n^l} \quad \text{and} \quad \delta_n^k = \int_{S_l} \mu \psi_n^l \psi_k^l = \frac{\int_{S_l} \mu \nabla \psi_n^l \cdot \nabla \psi_k^{l,m}}{k_n^l}.$$

**Lemma 8.2.3.** *The problems (8.15) are well-posed and can be reduced as a set of well-posed problems posed in the bounded geometry  $\mathcal{K}$*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Div}(\varepsilon \mathbf{grad}\Phi) = 0, & \text{in } \mathcal{K} \\ \Phi = 1, & \text{on } \partial_1\mathcal{K} \\ \Phi = 0, & \text{on } \partial_0\mathcal{K} \\ \Phi + \mathfrak{S}_e^l(\partial_3\Phi) = \varphi^l, & \text{on } S_l \times O_l \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Div}(\mu \mathbf{grad}\Psi^l) = 0, & \text{in } \mathcal{K} \\ \partial_n \Psi^l = 0, & \text{on } \partial J^\delta \\ \Psi^l + \mathfrak{S}_m^{l'}(\partial_3\Psi^l) = (\delta_1^{l'} - \delta_l^{l'}) \psi^{l'}, & \text{on } S_{l'} \times \hat{O}_{l'} \\ [\mu \partial_n \Psi_m^l] = 0, \quad [\Psi^l] = 1, & \text{on } \Gamma_{q,l}, \end{array} \right. \quad (8.17)$$

with the Steklov-Poincaré operators

$$\mathfrak{S}_e^l(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\int_{S_l \times O_l} \varepsilon u \varphi_n^l}{\sqrt{\lambda_n^l}} \right) \varphi_n^l \quad \text{and} \quad \mathfrak{S}_m^l(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\int_{S_l \times O_l} \mu u \psi_n^l}{\sqrt{k_n^l}} \right) \psi_n^l. \quad (8.18)$$

The solutions of (8.17) can be extended in the half-strip  $\mathfrak{D}_l$  by

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi|_{\mathfrak{D}_l}(x, x_3^l) = \varphi^l(x) + \sum_n \alpha_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^l} x_3^l} \varphi_n^l(x) \\ \Psi^l|_{\mathfrak{D}_l}(x, x_3^l) = (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \psi^l(x) + \sum_n \beta_n^{l,l'} e^{-\sqrt{k_n^l} x_3^l} \psi_n^l(x), \end{array} \right. \quad (x, x_3^l) \in \mathfrak{D}_l, \quad (8.19)$$

8.  $\varepsilon$  and  $\mu$  could be complex non hermitian matrices.

with the constants

$$\alpha_n^l = -\frac{\int_{S_l \times O_l} \varepsilon \partial_3 \Phi \varphi_n^l}{\sqrt{\lambda_n^l}} = \int_{S_l \times O_l} \varepsilon \Phi_e^{q,l} \varphi_n^l - \int_{S_l \times O_l} \varepsilon \varphi^l \varphi_n^l \quad (8.20)$$

and

$$\beta_n^{l,l'} = -\frac{\int_{S_l \times O_l} \mu \partial_3 \Psi^{l'} \psi_n^l}{\sqrt{k_n^l}} = \int_{S_l \setminus \partial_l \Gamma \times O_l} \mu \Psi^{l'} \psi_n^l - (\delta_1^l - \delta_{l'}^l) \int_{S_l \setminus \partial_l \Gamma \times O_l} \mu \Psi^l \psi_n^l \quad (8.21)$$

to coincide with the solution of (8.15).

*Proof.* The proof is given in the lemma 2.4.3. □

The behavior (8.19) of  $\Phi$  and  $\Psi^l$  in the half-strip implies that

$$(\Phi - \varphi^l) \in L^2(\mathfrak{D}_l) \quad \text{and} \quad (\Psi^{l'} - (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \psi^l) \in L^2(\mathfrak{D}_{l'}),$$

and then by taking the longitudinal derivative  $\partial_3$  of (8.19) we have

$$\partial_3 \Phi \in L^2(\mathfrak{D}_l) \quad \text{and} \quad \partial_3 \Psi^{l'} \in L^2(\mathfrak{D}_{l'}).$$

We can define

**Definition 8.2.2.** *The effective terms related to the reference junction are defined by*

$$\mathcal{C} := \int_{\mathcal{K}} \varepsilon |\mathbf{grad} \Phi|^2 + 2 \sum_{l=0}^L \int_{\mathfrak{D}_l} \varepsilon |\partial_3 \Phi|^2 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}^{l,l'} := \int_{\mathcal{K} \setminus \Gamma_l} \mu \mathbf{grad} \Psi^{l'} \cdot \mathbf{grad} \Psi^{l'} + 2 \sum_{l=0}^L \int_{\hat{\mathfrak{D}}_l \setminus \Gamma_l} \mu \partial_3 \Psi^l \partial_3 \Psi^{l'}.$$

The positivity of  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{L}$  is readily apparent, and the same goes for the symmetry of  $\mathcal{L}$ . Similarly for  $\psi^l$ , it is important to note that if  $\Psi^l$  depends on the cuts  $\Gamma_l$ , then its gradient does not. This is in the sense that if we choose another cut  $\tilde{\Gamma}_l$  that came from the 0<sup>th</sup> to the cable  $l$  then the potential  $\tilde{\Psi}^l$  satisfying

$$\begin{cases} \mathbf{Div}(\mu \mathbf{grad} \tilde{\Psi}^l) = 0, & \text{in } \Omega \setminus \tilde{\Gamma}_l \\ \partial_n \tilde{\Psi}^l = 0, & \text{on } \partial\Omega \\ [\mu \partial_n \tilde{\Psi}^l] = 0, \quad [\tilde{\Psi}^l] = 1 & \text{on } \tilde{\Gamma}_l, \end{cases}$$

is such that

$$\mathbf{grad} \Psi^l = \mathbf{grad} \tilde{\Psi}^l \text{ in } \Omega \setminus (\Gamma_l \cup \tilde{\Gamma}_l).$$

We have argued at length about that (see remark 2.2.1). We recall that we use the notation  $\widetilde{\mathbf{grad}}$  to highlight the independence with respect to the 3D cut. The 3D harmonic potentials are related to the harmonic spaces of 3D fields (see theorem 2.4.1).

**Lemma 8.2.4.** *The harmonic spaces*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varepsilon; J) &:= \{ \mathbf{u} \in L_w^2(J, \mathbb{R}^3); \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0, \mathbf{div}(\varepsilon \mathbf{u}) = 0, \text{ and } \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial S} = 0 \} \\ \mathcal{H}(\mu; J) &:= \{ \mathbf{u} \in L_w^2(J, \mathbb{R}^3); \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0, \mathbf{div}(\mu \mathbf{u}) = 0, \text{ and } (\mu \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\partial S} = 0 \} \end{aligned}$$

have for basis the gradient of the 3D harmonic potentials we introduced in (8.11)

$$\mathcal{E}(\varepsilon; J) = \text{span}\{ \mathbf{grad} \Phi \}, \quad \text{and} \quad \mathcal{H}(\mu; J) = \text{span}\{ \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi \}.$$

### 8.3 The matched asymptotics method

Inestimable s'avère l'enrichissement qui se produit par la greffe d'une pensée sur une autre, d'une attitude sur une autre.

Pierre Boulez

#### 8.3.1 Asymptotic expansions assumptions

We will now explain how to find this 1D model and how to reconstruct the electromagnetic fields from it. Firstly we can try a uniform asymptotic expansion of type

$$E^\delta(\mathbf{x}^\delta, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_J^p \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta}, t \right) + O(\delta^\infty) \quad \text{and} \quad H^\delta(\mathbf{x}^\delta, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{H}_J^p \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta}, t \right) + O(\delta^\infty), \quad \mathbf{x}^\delta \in \Omega^\delta. \quad (8.22)$$

with the **electromagnetic near-fields**

$$\mathbf{E}_J^p, \mathbf{H}_J^p : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

but we cannot expect a precise approximation in the whole domain. In fact, it is valid only in a "small" area near the knot area  $\mathcal{K}^\delta$  which is typically of the form

$$J^\delta := \mathcal{K}^\delta \bigcup_{l=1}^L S_l^\delta \times (0_l^\delta, \sqrt{\delta} \mathbf{e}_3^l)$$

where  $(0_l^\delta, \sqrt{\delta} \mathbf{e}_3^l)$  is the segment in the direction  $\mathbf{e}_3^l$  starting at  $0_l^\delta$  and ending at a distance  $\sqrt{\delta}$  from  $0_l^\delta$ .  $J^\delta$  is included in a ball of size  $\sqrt{\delta}$  (see remark 9.2.1 in the next chapter for further details). More precisely we will assume that (8.22) is valid in the domain  $J^\delta$ . Portions of  $J^\delta$  shared (see figure 9.5) with the cable parts  $\Omega_l^\delta$  for  $l = 0 \dots L$

$$\Omega_l^\delta \cap J^\delta = S_l^\delta \times (0_l^\delta, \sqrt{\delta} \mathbf{e}_3^l).$$

are called the **overlap area**. We will return to the overlap area later on.

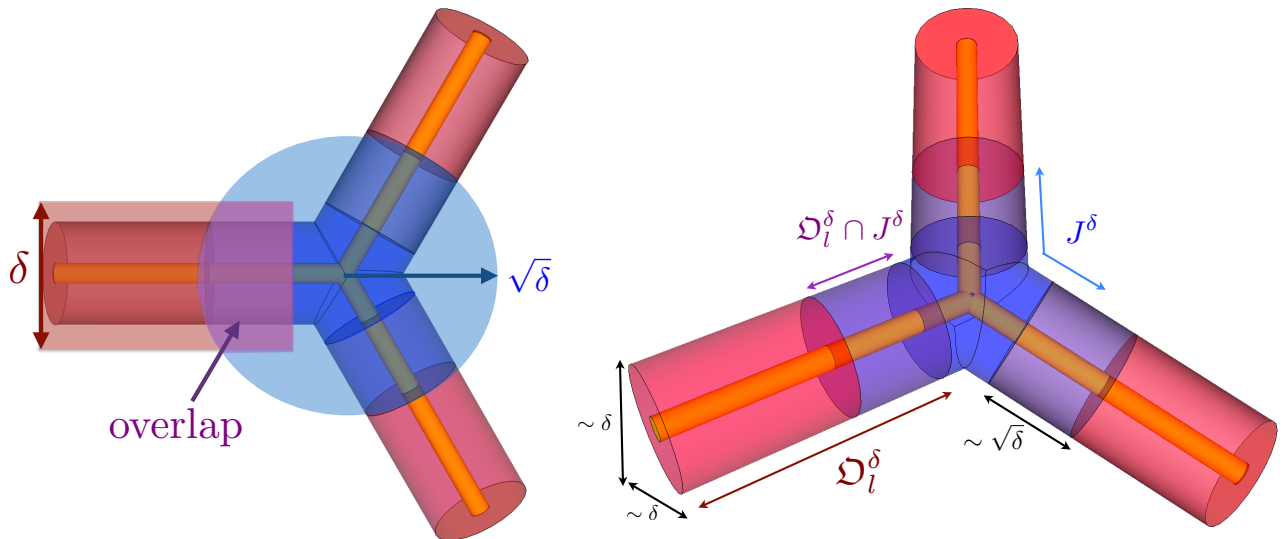


FIGURE 8.9 – Different areas : the cables  $\Omega_l^\delta$  (red + purple), the knot  $\mathcal{K}^\delta$  (blue), the junction  $J^\delta$  (blue + purple) and the overlaps (purple).

Secondly, we look for a **1D** behavior in each cable part  $\Omega_l^\delta$ , therefore (similarly to the part II) we postulate

an asymptotic expansion of the type

$$\begin{cases} E^\delta(\mathbf{x}^\delta, t)|_{\Omega_l^\delta} = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_l^p \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l}, t \right) + O(\delta^\infty), \\ H^\delta(\mathbf{x}^\delta, t)|_{\Omega_l^\delta} = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{H}_l^p \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l}, t \right) + O(\delta^\infty), \end{cases} \quad \text{with } \mathbf{x}^\delta = (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \in \Omega_l^\delta. \quad (8.23)$$

The terms  $\mathbf{E}_l^p$  and  $\mathbf{H}_l^p$  are expressed in a scaling of  $\mathfrak{D}_l^\delta$  in the transverse direction only

$$\Omega_l := \mathcal{ST}^\delta(\mathfrak{D}_l^\delta) \quad \text{with} \quad \mathcal{ST}^\delta : (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \mapsto \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right).$$

Note that  $\Omega_l$  differs of  $\mathfrak{D}_l$  only by a translation of order  $\delta$  in the direction  $\mathbf{e}_3$  since

$$\Omega_l = S_l \times (O_l^\delta, \mathbf{e}_3^l) \quad \text{and} \quad \mathfrak{D}_l = S_l \times (O_l, \mathbf{e}_3^l).$$

We will denote by  $(x^l, x_3^{\delta,l})$  the local coordinate in  $\Omega_l$ . The notation for the local coordinates are summarized in the table 8.3.1.

Domain	system	local coordinate	origin point
$\Omega^\delta$		$\mathbf{x}^\delta$	
$\Omega$		$\mathbf{x}$	
$\mathfrak{D}_l^\delta = S_l^\delta \times (O_l^\delta, \mathbf{e}_3^l)$	$(O_l^\delta, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$	$(x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l})$	$O_l^\delta = (0, 0_l^\delta)$
$\mathfrak{D}_l = S_l \times (O_l, \mathbf{e}_3)$	$(O_l, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$	$(x, x_3^l)$	$O_l = (0, 0_l)$
$\Omega_l = S_l \times (O_l^\delta, \mathbf{e}_3)$	$(O_l^\delta, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$	$(x, x_3^{\delta,l})$	$O_l^\delta = (0, 0_l^\delta)$

TABLE 8.1 – Domains and local coordinates

The **electromagnetic far-fields** are expressed in the reference cable  $\Omega_l$

$$\mathbf{E}_l^p, \mathbf{H}_l^p : \Omega_l \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Then the electromagnetic fields must be the same in each overlap area  $S_l^\delta \times (O_l^\delta, \sqrt{\delta} \mathbf{e}_3^l)$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_J^p \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, \frac{x_3^{\delta,l}}{\delta}, t \right) + O(\delta^\infty) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_l^p \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l}, t \right) + O(\delta^\infty). \quad (8.24)$$

This is called the **matching principle**. This principle is that when  $\delta$  tends to 0, the behavior in  $O_l$  of the exterior field will match with the behavior of the interior field in  $\infty$  in the direction  $\mathbf{e}_3^l$ . In the next chapter, we will describe this process in a much more sophisticated way (see sections 9.2.1, 9.2.2 and 9.2.3).

Please take notice that since the initial condition is supported in the 0<sup>th</sup> cable far from the knot (see (8.5)), we have

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_0^0 \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l}, t = 0 \right) = E^\delta(\mathbf{x}^\delta, t = 0) \quad \text{for } \mathbf{x}^\delta = (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \in \text{supp}(E^\delta(t = 0, \cdot)) \subset \mathfrak{D}_0^\delta \\ \mathbf{E}_l^0(\cdot, t = 0) = \mathbf{0} \quad \text{for } l = 0 \dots L, \\ \mathbf{E}_l^p(\cdot, t = 0) = \mathbf{0} \quad \text{for } p > 0, l = 0 \dots L, \\ \mathbf{H}_l^p(\cdot, t = 0) = \mathbf{0} \quad \text{for } p \geq 0, l = 0 \dots L, \\ \mathbf{E}_J^p(\cdot, t = 0) = \mathbf{H}_J^p(\cdot, t = 0) = \mathbf{0} \quad \text{for } p \geq 0. \end{array} \right. \quad (8.25)$$

### 8.3.2 How to determine the fields $\mathbf{E}_J^p$ , $\mathbf{H}_J^p$ , $\mathbf{E}_l^p$ and $\mathbf{H}_l^p$

The coefficients  $\mathbf{E}_J^p$  and  $\mathbf{H}_J^p$  of the expansion in series of power  $\delta$  of the electromagnetic fields in  $J^\delta$  given in (8.22) are called the **electromagnetic near-fields**. They are given in the reference geometry  $\Omega$  which is the

domain  $\Omega^\delta$  after the 3D-scaling  $\mathcal{G}_r^{-1}$ . The coefficients  $\mathbf{E}_l^p$  and  $\mathbf{H}_l^p$  in expansion (8.23) of the electromagnetic fields in the cable parts are called the **electromagnetic far-fields**. They are given in the  $\Omega_l$  obtained by a 2D-scaling of  $\mathfrak{D}_l^\delta$ . Now we are interested to determinate the electromagnetic fields  $\mathbf{E}_J^p$ ,  $\mathbf{H}_J^p$ ,  $\mathbf{E}_l^{p+1}$  and  $\mathbf{H}_l^{p+1}$ .

We include the expansions (8.22) and (8.23) into the 3D Maxwell's equations (8.2)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_{l,T}^p - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{H}_{l,T}^p) - \mathbf{rot} \mathbf{H}_{l,3}^{p+1} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega_l, \\ \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_{l,3}^p - \mathbf{rot} \mathbf{H}_{l,T}^{p+1} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega_l, \\ \mu \partial_t \mathbf{H}_{l,T}^p + \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_{l,T}^p) + \mathbf{rot} \mathbf{E}_{l,3}^{p+1} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \\ \mu \partial_t \mathbf{H}_{l,3}^p + \mathbf{rot} \mathbf{E}_{l,T}^{p+1} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega_l, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_J^p - \mathbf{curl} \mathbf{H}_J^{p+1} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \\ \mu \partial_t \mathbf{H}_J^p + \mathbf{curl} \mathbf{E}_J^{p+1} = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \end{array} \right.$$

then into the boundaries conditions (8.3, 8.7)

$$\mathbf{E}_{l,T}^p \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_{l,3}^p = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_{l,T}^p \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega_l, \quad \left| \quad \mathbf{E}_J^p \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_J^p \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega,$$

and then into the hidden divergence (8.6)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}_{l,T}^{p+1}) + \partial_3 (\varepsilon \mathbf{E}_{l,3}^p) = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega_l, \\ \operatorname{div} (\mu \mathbf{H}_{l,T}^{p+1}) + \partial_3 (\mu \mathbf{H}_{l,3}^p) = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega_l, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Div} (\varepsilon \mathbf{E}_J^{p+1}) = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div} (\mu \mathbf{H}_J^{p+1}) = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \end{array} \right.$$

We can rearrange all the previous equations to highlight div-curl problems with the electric far-fields and near-fields

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} (\hat{\varepsilon} \mathbf{E}_{l,T}^{p+1}) = -\partial_3 (\hat{\varepsilon} \mathbf{E}_{l,3}^p), & \text{in } S_l, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}_{l,T}^{p+1} = -\hat{\mu} \partial_t \mathbf{H}_{l,3}^p, & \text{in } S_l, \\ \mathbf{E}_{l,T}^{p+1} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \text{on } \partial S_l, \end{array} \right. \quad (8.26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl} \mathbf{E}_J^{p+1} = -\mu \partial_t \mathbf{H}_J^p, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div} (\varepsilon \mathbf{E}_J^{p+1}) = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{E}_J^{p+1} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (8.27)$$

and the div-curl problems with the magnetic far-fields and near-fields

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} (\hat{\mu} \mathbf{H}_{l,T}^{p+1}) = -\partial_3 (\hat{\mu} \mathbf{H}_{l,3}^p), & \text{in } S_l, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_{l,T}^{p+1} = \hat{\varepsilon} \partial_t \mathbf{E}_{l,3}^p, & \text{in } S_l, \\ \mathbf{H}_{l,T}^{p+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \text{on } \partial S_l, \end{array} \right. \quad (8.28) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl} \mathbf{H}_J^{p+1} = \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_J^p, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div} (\mu \mathbf{H}_J^{p+1}) = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{H}_J^{p+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (8.29)$$

and equations to characterize the longitudinal far-fields<sup>9</sup>

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{l,3}^{p+1} = -\mu \partial_t \mathbf{H}_{l,T}^p - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_{l,T}^p) & \text{in } S_l, \\ \mathbf{E}_{l,3}^{p+1} = \mathbf{0} & \text{on } \partial S_l, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{l,3}^{p+1} = \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_{l,T}^p - \partial_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{H}_{l,T}^p) & \text{in } S_l, \\ \int_S \mu \mathbf{H}_{l,3}^{p+1} = \mathbf{0} & \text{on } \partial S_l. \end{array} \right. \quad (8.30)$$

All the initial conditions are given in (8.25). Since all the electromagnetic fields  $\mathbf{E}_J^p$ ,  $\mathbf{H}_J^p$ ,  $\mathbf{E}_l^p$  and  $\mathbf{H}_l^p$  are related to  $E^\delta$  and  $H^\delta$ , the functional framework is deduced from Maxwell's equations. More precisely the transverse electromagnetic far-fields  $\mathbf{E}_{l,T}^p$  and  $\mathbf{H}_{l,T}^p$  uniquely solve (8.26) and (8.28) in  $L^2(\Omega_l, \mathbb{R}^2)$ , the longitudinal

9. The average

$$\int_S \mu \partial_t \mathbf{H}_{l,3}^{p+1} = \mathbf{0}$$

is due to the boundary condition  $\mathbf{E}_{l,T}^{p+1} \times \mathbf{n}|_{\partial S} = \mathbf{0}$  (see proposition 3.4.1).

electromagnetic far-fields  $\mathbf{E}_{l,3}^p$  and  $\mathbf{H}_{l,3}^p$  are the unique solution of (8.30) in  $L^2(\Omega_l, \mathbb{R})$  and the electromagnetic near-fields  $\mathbf{E}_J^p$  and  $\mathbf{H}_J^p$  are the unique solution of (8.27) and (8.29) in  $L_w^2(\Omega)$ . We look for solutions in the weight space  $L_w^2(\Omega)$  since if the near fields are exponentially increasing functions then  $E^\delta$  and  $H^\delta$  are not  $L^2$  functions.

## 8.4 Study of the limit electromagnetic fields

We aim at finding the model when  $\delta \rightarrow 0$ . The equations (8.26, 8.27, 8.28, 8.29, 8.30) for  $p = -1$  say that we have for ant  $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{l,T}^0(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) \in \mathcal{E}(\varepsilon; S), \\ \mathbf{E}_{l,3}^0(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = 0, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_{l,T}^0(\cdot, x_3^l, t) \in \mathcal{H}(\mu; S), \\ \mathbf{H}_{l,3}^0(\cdot, x_3^l, t) = 0, \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathbf{E}_J^0(\cdot, t) \in \mathcal{E}(\varepsilon; J) \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_J^0(\cdot, t) \in \mathcal{H}(\mu; J). \end{array} \right.$$

The presence of harmonic space encourages us to use the lemmata 8.2.2 and 8.2.4. Firstly, the lemma 8.2.2 ensures that there exists in each cross section  $S_l \times \{x_3^l\}$  the constants

$$V_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \quad \text{and} \quad I_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \quad \text{for} \quad l = 0 \dots L, t \geq 0$$

such that the limit electromagnetic far-fields are given by the following separation of variable

$$\mathbf{E}_l^0(x^l, x_3^{\delta,l}, t) = V_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_l^0(x^l, x_3^{\delta,l}, t) = I_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \begin{pmatrix} \tilde{\nabla} \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x, x_3^{\delta,l}) \in \Omega_l, t \geq 0. \quad (8.31)$$

Secondly, using lemma 8.2.4 there exists the constants

$$U(t) \quad \text{and} \quad J_{l'}(t) \quad \text{for} \quad l' = 1 \dots L, t \geq 0$$

such that the limit electromagnetic near-fields of order 0 are given by

$$\mathbf{E}_J^0(\mathbf{x}, t) = U(t) \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_J^0(\mathbf{x}, t) = \sum_{l'=1}^L J_{l'}(t) \mathbf{grad} \Psi^{l'}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0. \quad (8.32)$$

The matching principle gives us a relation between the constants we introduced.

**Lemma 8.4.1.** *We have for each instant  $t \geq 0$*

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{l'}(t) = -I_{l'}^0(0_{l'}, t) \quad \text{for} \quad l' = 1 \dots L, \\ \sum_{l'=1}^L J_{l'}(t) = I_0^0(0_0, t) \end{array} \right. \quad \text{and} \quad U(t) = V_l^0(0_l^\delta, t) \quad \text{for} \quad l = 0 \dots L.$$

*Proof.* We will check beforehand that, owing to the matching principle (8.24), when  $\delta$  tends to 0, the behavior in  $O_l$  of the exterior field matches the behavior of the interior field in  $\infty$  in the direction  $\mathbf{e}_3^l$ . We remark that for each  $x \in S_l$  the far-field satisfies

$$\sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_l^p \left( x, \sqrt{\delta} x_3, t \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathbf{E}_l^0(x, 0, t),$$

and the near-field satisfies

$$\sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_J^p \left( x, \frac{x_3}{\sqrt{\delta}}, t \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \lim_{x_3^l \rightarrow \infty} \mathbf{E}_J^0(x, x_3^l, t).$$

Then by (8.24) we have

$$\lim_{x_3^{\delta,l} \rightarrow 0_l^\delta} \mathbf{E}_l^0(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = \lim_{x_3^l \rightarrow \infty} \mathbf{E}_J(\cdot, x_3^l, t) \quad \text{and similarly} \quad \lim_{x_3^{\delta,l} \rightarrow 0_l^\delta} \mathbf{H}_l^0(\cdot, x_3^l, t) = \lim_{x_3^l \rightarrow \infty} \mathbf{H}_J(\cdot, x_3^l, t). \quad (8.33)$$

We have for the electric far-field in the "normalized" cable  $\Omega_l$

$$\mathbf{E}_l^0(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = V_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_3^l \rightarrow 0_l^\delta} V_l^0(0_l^\delta, t) \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}$$

then the electric near field in the half-strip  $\mathfrak{D}_l$  has a special behavior due to (8.19)

$$\mathbf{E}_J^0(\cdot, x_3^l, t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{grad} \Phi(\cdot, x_3^l) \xrightarrow{x_3^l \rightarrow 0_l} \mathbf{U}(t) \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}$$

and so through (8.33) we have one of the desired formulae

$$\lim_{x_3^l \rightarrow 0_l} \mathbf{E}_l^0 = \lim_{x_3^l \rightarrow \infty} \mathbf{E}_J^0 \Rightarrow V_l^0(0_l^\delta, t) \nabla \varphi^l = \mathbf{U}(t) \nabla \varphi^l \quad \text{for } l = 0 \dots L.$$

Similarly for the magnetic far-field in the "normalized" cable  $\Omega_l$

$$H_T^0(\cdot, x_3^{\delta, l}, t) = I_l^0(x_3^{\delta, l}, t) \begin{pmatrix} \tilde{\nabla} \psi^l(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_3^l \rightarrow 0_l^\delta} I_l^0(0_l^\delta, t) \begin{pmatrix} \tilde{\nabla} \psi^l(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The behavior (8.19) of the magnetic near field in the half-strip  $\mathfrak{D}_l$  for  $l = 1 \dots L$  implies that

$$\mathbf{H}_J^0(\cdot, x_3^l, t) = \sum_{l'=1}^L J_{l'}(t) \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi^{l'}(\cdot, x_3^l) \xrightarrow{x_3^l \rightarrow 0_l} -J_l(t) \begin{pmatrix} \tilde{\nabla} \psi^l(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}$$

and the behavior in the half-strip  $\mathfrak{D}_0$  implies that

$$\mathbf{H}_J^0(\cdot, x_3^{\delta, l}, t) = \sum_{l'=1}^L J_{l'}(t) \widetilde{\mathbf{grad}} \Psi^{l'}(\cdot, x_3^l) \xrightarrow{x_3^0 \rightarrow 0_0} \sum_{l'=1}^L J_{l'}(t) \begin{pmatrix} \tilde{\nabla} \psi^0(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We conclude from (8.33) that

$$I_l^0(0_l^\delta, t) \tilde{\nabla} \psi^l = -J_l(t) \tilde{\nabla} \psi^l \quad \text{for } l=1 \dots L \quad \text{and} \quad I_0^0(0_0^\delta, t) \tilde{\nabla} \psi^0 = \sum_{l'=1}^L J_{l'}(t) \tilde{\nabla} \psi^0.$$

□

In particular this lemma allow us to recover the usual Kirchoff's laws for the electrical potential and current of order 0

$$V_l^0(0_l^\delta, t) = V_0^0(0_0^\delta, t) \quad \text{and} \quad \sum_{l=0}^L I_l^0(0_l^\delta, t) = 0. \quad (8.34)$$

The equalities of (8.34) are the formulae (8.9a) and (8.9b) when  $\delta = 0$ .

To determine uniquely the electromagnetic fields we need to check that all the terms

$$V_l^0(x_3^{\delta, l}, t), I_l^0(x_3^{\delta, l}, t) \quad x_3^{\delta, l} \in [0_l^\delta, \infty[ , \quad l = 0 \dots L, t \geq 0$$

are uniquely determined and give a way to compute them. In fact we have seen in Chapter 4 (similar proof to the one of the proposition 4.1.3) that the equations (8.30) for  $p = 0$  give the limit telegrapher's equation

$$\begin{cases} C^l \partial_t V_l^0(x_3^{\delta, l}, t) + \partial_3 I_l^0(x_3^{\delta, l}, t) = 0, & x_3^{\delta, l} \in ]0_l^\delta, \infty[ , t > 0, \\ L^l \partial_t I_l^0(x_3^{\delta, l}, t) + \partial_3 V_l^0(x_3^{\delta, l}, t) = 0, & x_3^{\delta, l} \in ]0_l^\delta, \infty[ , t > 0. \end{cases} \quad (8.35)$$

The initial conditions are

$$V_0^0(\cdot, t = 0) = V_0^{\delta, 1}(\cdot, t = 0) , \quad V_l^0(\cdot, t = 0) = 0 \quad \text{and} \quad I_l^0(\cdot, t = 0) = 0 \quad (8.36)$$

Indeed, if we integrate the initial conditions of the electromagnetic far-fields given in (8.25) over  $\widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l$  we have

$$\begin{aligned} V_0^\delta(x_3^{\delta, l}, t = 0) & \stackrel{(8.14)}{=} \int_{S_0 \times \{x_3^{\delta, l}\}} E^\delta(\delta x, x_3^{\delta, l}, t = 0) \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx \\ & \stackrel{(8.25)}{=} \int_{S_0^\delta \times \{x_3^{\delta, l}\}} \mathbf{E}_l^0(x, x_3^{\delta, l}, t = 0) \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx \\ & \stackrel{(8.31)}{=} V_l^0(x_3^{\delta, l}, t) \int_{S_0^\delta \times \{x_3^{\delta, l}\}} \nabla \varphi^l(x) \cdot \widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l(x) dx \\ & \stackrel{(8.13)}{=} V_0^0(x_3^{\delta, l}, t = 0). \end{aligned}$$

The remaining compents are trivial.



**Remark 8.4.1.** *There exists unique limit electromagnetic fields  $\mathbf{E}_l^0$ ,  $\mathbf{H}_l^0$ ,  $\mathbf{E}_j^0$  and  $\mathbf{H}_j^0$  given by the following procedure :*

1. *determine uniquely the electrical potential  $V_l^0$  and current  $I_l^0$  of order 0 through the telegrapher's equation (8.35) with the Kirchhoff's rules of order 0 (see (8.34)) and the initial conditions (8.36),*
2. *compute the electromagnetic far-fields  $\mathbf{E}_l^0$  and  $\mathbf{H}_l^0$  with (8.31),*
3. *determine  $\mathbf{U}$  and  $(\mathbf{J}_l)_{l=1\dots L}$  with the lemma 8.4.1,*
4. *compute the electromagnetic near-fields  $\mathbf{E}_j^0$  and  $\mathbf{H}_j^0$  with (8.32).*

A natural tendency would be to look for more accurate models, that is to say models allowing the identification of not only the limit solution but also its first order expansion with respect to  $\delta$ . As we shall see, this can be reduced to constructing improved Kirchhoff's rules (8.9a) and (8.9b) at the node of the limit graph.

## 8.5 Study of the first order electromagnetic fields

### 8.5.1 The first order electromagnetic far-fields

We put the far limit electromagnetic fields (8.31) into the equations (8.26) and (8.28) with  $p = 0$  to describe the first order transverse electromagnetic far-fields

$$\mathbf{E}_{l,T}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) \in \mathcal{E}(\varepsilon, S) \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_{l,T}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) \in \mathcal{H}(\mu, S). \quad (8.37)$$

Similarly we can also put the far limit electromagnetic fields (8.31) into the equations of (8.30) to describe the first order electric longitudinal far field

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{l,3}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = -\mu \partial_t I_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \tilde{\nabla} \psi^l(\cdot) + \partial_3 V_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \mathbf{rot} \varphi^l(\cdot), & \text{in } S_l, \\ \mathbf{E}_{l,3}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = 0, & \text{on } \partial S_l, \end{cases} \quad (8.38)$$

and the first order magnetic longitudinal far field

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{l,3}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = \varepsilon \partial_t V_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \nabla \varphi^l(\cdot) + \partial_3 I_l^0(x_3^{\delta,l}, t) \widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l(\cdot), & \text{in } S_l, \\ \int_S \mu \mathbf{H}_{l,3}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = 0. \end{cases} \quad (8.39)$$

Using the links between the rotational and the gradient of the 2D harmonic potentials given in the equation (8.12) and the telegrapher equation of order 0 (8.35) we have

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}_{l,3}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = \mathbf{rot} \mathbf{H}_{l,3}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = 0 \text{ in } S_l,$$

and we conclude with

$$\mathbf{E}_{l,3}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t)|_{\partial S} = 0 \quad \text{and} \quad \int_S \mu \mathbf{H}_{l,3}^1(\cdot, x_3^{\delta,l}, t) = 0,$$

that<sup>10</sup>

$$\mathbf{E}_{l,3}^1 = \mathbf{H}_{l,3}^1 = 0.$$

For the first order transverse electromagnetic far-fields, we again use the lemma 8.2.2 to ensure that there exists on each cross section  $S_l \times \{x_3^l\}$  the constants

$$V_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \quad \text{and} \quad I_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \quad \text{for} \quad l = 0\dots L, t \geq 0$$

such that

$$\mathbf{E}_l^1(x, x_3^{\delta,l}, t) = V_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_l^1(x, x_3^{\delta,l}, t) = I_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \begin{pmatrix} \tilde{\nabla} \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x, x_3^{\delta,l}) \in \Omega_l, t \geq 0. \quad (8.40)$$

With the equations (8.30) for  $p = 1$ , we can prove (see the proof of the theorem 5.2.1) that the first order electrical potential and current are linked by the following telegrapher's equation

$$\begin{cases} C^l \partial_t V_l^1(x_3^{\delta,l}, t) + \partial_3 I_l^1(x_3^{\delta,l}, t) = 0, & x_3^{\delta,l} \in ]0_t^\delta, \infty[, t > 0, \\ L^l \partial_t I_l^1(x_3^{\delta,l}, t) + \partial_3 V_l^1(x_3^{\delta,l}, t) = 0, & x_3^{\delta,l} \in ]0_t^\delta, \infty[, t > 0. \end{cases} \quad (8.41)$$

<sup>10</sup>. The fact that the first order far-fields have no longitudinal component is due to the assumptions we did in the hypothesis 8.1.1. It is no longer true in the general case.

which is the same as the limit telegrapher's equation (8.35). In the same way as (8.36), we have for the initial conditions

$$V_l^1(\cdot, t=0) = I_l^1(\cdot, t=0) = 0. \quad (8.42)$$

However,  $V_l^1$  and  $I_l^1$  are not the same as  $V_l^0$  and  $I_l^0$  since the transmission conditions between the  $0_l^\delta$  change.

The information required to complete the description of the electromagnetic far-fields  $\mathbf{E}_l^1$  and  $\mathbf{H}_l^1$  constitutes the boundary values at the origin

$$V_l^1(0_l^\delta, t) \quad \text{and} \quad I_l^1(0_l^\delta, t) \quad \text{for} \quad l = 0 \dots L.$$

For that we need to match the electromagnetic far-fields with the electromagnetic near-fields. The next subsection is devoted to the electromagnetic near-fields of order 1.

### 8.5.2 The first order electromagnetic near-fields

D'ou ces nombreux retours sur les mêmes formules, tout en changeant profils et perspectives.

Pierre Boulez

With (8.27, 8.29) for  $p = 0$  and (8.32), the first order electromagnetic near-fields are solution of Div-curl problems on unbounded domain

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{curl} \mathbf{E}_J^1 = -\mu \sum_{l'=1}^L (\partial_t \mathbf{J}_{l'}) \mathbf{grad} \Psi^{l'}, \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div}(\varepsilon \mathbf{E}_J^1) = 0, \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{E}_J^1 \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{curl} \mathbf{H}_J^1 = \varepsilon (\partial_t \mathbf{U}) \mathbf{grad} \Phi, \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{Div}(\mu \mathbf{H}_J^1) = 0, \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{H}_J^1 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (8.43)$$

Problems of that kind have been discussed in detail in the chapter 2. More precisely the problems in (8.43) are the problems in (2.17) with

$$B = -\mu \sum_{l'=1}^L (\partial_t \mathbf{J}_{l'}) \mathbf{grad} \Psi^{l'} \quad \text{and} \quad D = \varepsilon (\partial_t \mathbf{U}) \mathbf{grad} \Phi. \quad (8.44)$$

Firstly we introduce the near electrical potentials and currents in each cylindrical part  $\Omega_l$  for all  $l = 0 \dots L$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_l^1(x_3^l, t) := \int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{E}_J^1(x, x_3^l, t) \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{rot}} \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx \\ -\mathbf{I}_l^1(x_3^l, t) := \int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{H}_J^1(x, x_3^l, t) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx \end{array} \right. \quad \text{for} \quad x_3^l \in [0_l, \infty[, t \geq 0. \quad (8.45)$$

They are the quantities which are set to match the electrical potentials  $V_l^1$  and currents  $I_l^1$ . In particular their behavior is described by the equation (9.41) of the lemma 2.5.2

**Lemma 8.5.1.** *The first order near electrical potentials and currents are affine functions of the longitudinal variable*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_l^1(x_3^l, t) = \mathbf{V}_l^1(0_l, t) - x_3^l L^l \partial_t I_l^0(0_0, t) \\ \mathbf{I}_l^1(x_3^l, t) = \mathbf{I}_l^1(0_l, t) - x_3^l C^l \partial_t V_0(0_0, t) \end{array} \right. \quad , \quad x_3^l \in [0_l, \infty[, t \geq 0, l = 0 \dots L.$$

*Proof.* We have with the equation (9.41) of the lemma 2.5.2

$$\begin{aligned} \partial_3 \mathbf{V}_l^1(x_3^l, t) & \stackrel{(9.41, 8.43)}{=} - \sum_{l'=1}^L \partial_t \mathbf{J}_{l'}(t) \int_{S \times \{x_3^l\}} \varepsilon \mathbf{grad} \Psi^{l'}(x, x_3^l) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx \\ & \stackrel{(8.19)}{=} - \sum_{l'=1}^L \partial_t \mathbf{J}_{l'}(t) \left[ \int_{S \times \{x_3^l\}} (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \nabla \psi^l \cdot \nabla \psi^l + \sum_n^{\infty} \beta_n^{l, l'} e^{-\sqrt{k_n^l} x_3^l} \nabla \psi_n^l \cdot \nabla \psi^l \right]. \end{aligned}$$

Then, we use the orthogonality relation

$$\int_S \varepsilon \nabla \psi_n^l \cdot \nabla \psi^l = 0,$$

the definition 8.2.1 of the electrical inductance  $L^l$  and the lemma 8.4.1 to conclude that

$$\partial_3 V_l^1(x_3^l, t) = -L^l \partial_t I_l^0(0_0, t).$$

Then we find the desired formula by integrating along the longitudinal variable from  $0_l$  to  $x_3^l$ .

We have with the equation (9.41) of the lemma 2.5.2

$$\begin{aligned} \partial_3 I_l^1(x_3^l, t) &\stackrel{(9.41, 8.43)}{=} -\partial_t \mathbf{U}(t) \int_{S \times \{x_3^l\}} \mu \mathbf{grad} \Phi(x, x_3^l, t) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx \\ &\stackrel{(8.19)}{=} -\partial_t \mathbf{U}(t) \left[ \int_{S \times \{x_3^l\}} \varepsilon \nabla \varphi_l \cdot \nabla \varphi^l + \sum_n \alpha_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^l} x_3^l} \int_{S \times \{x_3^l\}} \varepsilon \nabla \varphi_n^l \cdot \nabla \varphi^l \right]. \end{aligned}$$

Then, we use the orthogonality relation

$$\int_S \varepsilon \nabla \varphi_n^l \cdot \nabla \varphi^l = 0,$$

the definition 8.2.1 of the electrical capacity  $C^l$  and the lemma 8.4.1 to conclude that

$$\partial_3 I_l^1(x_3^l, t) = -C^l \partial_t V_0^0(0_0, t).$$

Then we find the desired formula by integration along the longitudinal variable from  $0_l$  to  $x_3^l$ .  $\square$

Then we use the lemma 2.5.2 to describe the behavior of the first order electromagnetic near-fields in the cylindrical part  $\mathfrak{D}_l$ .

**Lemma 8.5.2.** *The behavior of the first order electromagnetic near-fields in  $\mathfrak{D}_l$  is*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_J^1|_{\mathfrak{D}_l}(x, x_3^l, t) = V_l(x_3, t) \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n^l(t) \begin{pmatrix} \nabla \varphi_n^l(x) \\ -\sqrt{\lambda_n^l} \varphi_n^l(x) \end{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_n^l} x_3} + \sum_{\nu=1}^L \partial_t J_{\nu'}(t) \beta_n^{l, \nu'} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \frac{\mathbf{rot} \psi_n^{l, e}}{\sqrt{k_n^{l, e}}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{k_n^l} x_3^l} \right] \\ \mathbf{H}_J^1|_{\mathfrak{D}_l}(x, x_3^l, t) = I_l(x_3, t) \begin{pmatrix} \nabla \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n^l(t) \begin{pmatrix} \nabla \psi_n^l(x) \\ -\sqrt{k_n^l} \psi_n^l(x) \end{pmatrix} e^{-\sqrt{k_n^l} x_3} - \alpha_n^l \partial_t \mathbf{U}(t) \begin{pmatrix} \mu^{-1} \frac{\mathbf{rot} \varphi_n^{l, m}}{\sqrt{\lambda_n^{l, m}}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_n^l} x_3^l} \right] \end{array} \right.$$

for  $(x, x_3^l) \in \mathfrak{D}_l$  where  $\alpha_n^l$  and  $\beta_n^{l, \nu'}$  are the coefficients defined in (8.20) and (8.21) and

$$\begin{aligned} a_n^l(t) &= \int_S \varepsilon \mathbf{E}_J^1|_{\mathfrak{D}_l}(x, 0_l, t) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_n^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx = -\frac{\int_S \varepsilon \mathbf{E}_J^1|_{\mathfrak{D}_l}(x, 0_l, t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n^l(x) \end{pmatrix} dx}{\sqrt{\lambda_n^l}}, \\ b_n^l(t) &= \int_S \mu \mathbf{H}_J^1|_{\mathfrak{D}_l}(x, 0_l, t) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_n^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx = -\frac{\int_S \mu \mathbf{H}_J^1|_{\mathfrak{D}_l}(x, 0_l, t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^l(x) \end{pmatrix} dx}{\sqrt{k_n^l}}. \end{aligned}$$

*Proof.* We use the lemma 2.5.2 with the sources

$$B = -\mu \sum_{\nu=1}^L (\partial_t J_{\nu'}) \mathbf{grad} \Psi^{\nu'} \quad \text{and} \quad D = \varepsilon (\partial_t \mathbf{U}) \mathbf{grad} \Phi.$$

Using the behavior of the 3D harmonic potential in  $\mathfrak{D}_l$  given in (8.19) we have

$$B(x, x_3^l, t)|_{\mathfrak{D}_l} = -\mu \sum_{\nu=1}^L \partial_t J_{\nu'}(t) \left[ (\delta_0^l - \delta_{\nu'}^l) \begin{pmatrix} \nabla \psi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_n \beta_n^{l, \nu'} \begin{pmatrix} \nabla \psi_n^l(x) \\ -\sqrt{k_n^l} \psi_n^l(x) \end{pmatrix} e^{-\sqrt{k_n^l} x_3^l} \right]$$

and

$$D(x, x_3^l, t)|_{\mathcal{D}_l} = \varepsilon \partial_t \mathbf{U}(t) \left[ \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_n^\infty \alpha_n^l \begin{pmatrix} \varphi_n^l(x) \\ -\sqrt{\lambda_n^l} \varphi_n^l(x) \end{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_n^l} x_3^l} \right].$$

With the orthogonality relation we have (in the notation of the lemma 2.5.2)  $c_n^P = 0$ ,  $g_n^P = 0$  and

$$b_n = \frac{\int_{S^l} B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^{l,e} \end{pmatrix}}{\sqrt{k_n^{l,e}}} = \sum_{l'=1}^L \partial_t \mathbf{J}_{l'}(t) \beta_n^{l,l'} e^{-\sqrt{k_n^{l,e}} x_3^l} \quad \text{and} \quad f_n = \frac{\int_{S^l} D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n^{l,m} \end{pmatrix}}{\sqrt{\lambda_n^{l,m}}} = -\partial_t \mathbf{U}(t) \alpha_n^l e^{-\sqrt{\lambda_n^l} x_3^l} \quad (8.46)$$

□

To know uniquely  $\mathbf{E}_J^1|_{\mathcal{D}_l}$  and  $\mathbf{H}_J^1|_{\mathcal{D}_l}$  we need to know the constants

$$\mathbf{V}_l^1(0_l, t), \mathbf{I}_l^1(0_l, t), a_n^l(t), b_n^l(t) \quad l = 0 \dots L, t \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

This will be achieved with the study of  $\mathbf{E}_J^1$  and  $\mathbf{H}_J^1$  in the bounded knot area  $\mathcal{K}$ . We use the "electromagnetic fields decompositions" of the theorem 2.7.1.

**Lemma 8.5.3.** *We have for  $\mathbf{x} \in \Omega$  and  $t > 0$*

$$\mathbf{E}_J^1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0^1(0_0, t) \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_J^{R,1}(\mathbf{x}, t) \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_J^1(\mathbf{x}, t) = - \sum_{l'=1}^L \mathbf{I}_{l'}^1(\hat{0}_{l'}, t) \mathbf{grad} \Psi^{l'}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_J^{R,1}(\mathbf{x}, t)$$

where the "electromagnetic fields"  $\mathbf{E}_J^{R,1}$  and  $\mathbf{H}_J^{R,1}$  are given in the bounded domain  $\mathcal{K}$  as the unique solution of the following problems

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl} \mathbf{E}_J^{R,1} = B & x \in \mathcal{K} \\ \mathbf{Div} (\varepsilon \mathbf{E}_J^{R,1}) = 0, & x \in \mathcal{K} \\ \mathbf{E}_J^{R,1} \times n = \mathbf{0} & x \in \partial\Omega, \\ \mathbf{E}_J^{R,1} \times e_3^0 + T_e^0(\varepsilon \mathbf{E}_J^{R,1} \cdot e_3^l) = R_e^0 & x \in S_0 \times O_0, \\ \mathbf{E}_J^{R,1} \times e_3^l + T_e^l(\varepsilon \mathbf{E}_J^{R,1} \cdot e_3^l) = (\mathbf{V}_l^1(0_l) - \mathbf{V}_0^1(0_0)) \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi^l \\ 0 \end{pmatrix} + R_e^l & x \in S_l \times O_l, \end{array} \right. \quad (8.47)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl} \mathbf{H}_J^{R,1} = D & x \in \mathcal{K} \\ \mathbf{div} (\mu \mathbf{H}) = 0, & x \in \mathcal{K} \\ \mathbf{H}_J^{R,1} \cdot n = 0 & x \in \partial\Omega, \\ \mathbf{H}_J^{R,1} \times e_3^0 + T_m^0(\mu \mathbf{H}_J^{R,1} \cdot e_3^l) = - \sum_{l'=0}^L \mathbf{I}_{l'}^1(\hat{0}_{l'}) \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \Psi^{l'} \\ 0 \end{pmatrix} + R_m^0 & x \in S_0 \times O_0, \\ \mathbf{H}_J^{R,1} \times e_3^l + T_m^l(\mu \mathbf{H}_J^{R,1} \cdot e_3^l) = R_m^l & x \in S_l \times O_l, \end{array} \right. \quad (8.48)$$

with the Steklov-Poincaré operators

$$T_e^l(u) = \sum_{n=1}^\infty \left( \int_{S_l} u \varphi_n^l \right) \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_n^l \\ \sqrt{\lambda_n^l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T_m^l(u) = \sum_{n=1}^\infty \left( \int_{S_l} u \psi_n^l \right) \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_n^l \\ \sqrt{k_n^l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u \in L^2(S_l) \quad l = 0 \dots L$$

and the sources

$$B, D, R_e^l, R_m^l, (\mathbf{V}_l^1(0_l, t) - \mathbf{V}_0^1(0_0, t)) \quad \text{and} \quad \sum_{l=0}^{Q,L} \mathbf{I}_l^1(0_l, t).$$

The volume sources  $B$  and  $D$  are given in (8.44). The boundary sources are given by the "residual" terms

$$R_e^l = \sum_{l'=1}^L (\partial_t \mathbf{J}_{l'}) \left( \sum_{n=1}^\infty \beta_n^{l,l'} \begin{pmatrix} \nabla \varphi_n^l \\ \sqrt{k_n^l} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{and} \quad R_m^l = -(\partial_t \mathbf{U}) \left( \sum_{n=1}^\infty \alpha_n^l \begin{pmatrix} \nabla \varphi_n^l \\ \sqrt{\lambda_n^l} \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

with  $\alpha_n^l$  and  $\beta_n^{l,l'}$  defined in (8.20, 8.21), the near "loop-rule"

$$(\mathbf{V}_l^1(0_l, t) - \mathbf{V}_0^1(0_0, t)) = \sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t \mathbf{J}_{l'}(t), \quad (8.49)$$

and the near "node-rule"

$$\sum_{l=0}^L \mathbf{I}_l(0_l, t) = -\mathcal{C} \partial_t \mathbf{U}(t). \quad (8.50)$$

*Proof.* We use the theorem 2.7.1 with the sources

$$B = -\mu \sum_{l'=1}^L (\partial_t \mathbf{J}_{l'}) \mathbf{grad} \Psi^{l'} \quad \text{and} \quad D = \varepsilon (\partial_t \mathbf{U}) \mathbf{grad} \Phi.$$

The near "loop-rule" comes from the equation (2.72) with  $\Psi^l$  as test function  $u$

$$(\mathbf{V}_l(0_0) - \mathbf{V}_l(0_l)) = \sum_{l'=1}^L (\partial_t \mathbf{J}_{l'}) \left[ \int_{\mathcal{K}} \mu \mathbf{grad} \Psi^l \cdot \mathbf{grad} \Psi^{l'} + \sum_{\bar{l}=0}^L \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{\bar{l}, l'} \int_S \mu \begin{pmatrix} \frac{\nabla \psi_n^{\bar{l}}}{\sqrt{k^{\bar{l}}}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{grad} \Psi^l \right].$$

By using the behavior of the 3D harmonic potential in  $\mathcal{D}_l$  given in (8.19) we have

$$\sum_{\bar{l}=0}^L \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{\bar{l}, l'} \int_S \mu \begin{pmatrix} \frac{\nabla \psi_n^{\bar{l}}}{\sqrt{k^{\bar{l}}}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{grad} \Psi^l = \sum_{\bar{l}=0}^L \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{\bar{l}, l'} \beta_n^{l, l'} \sqrt{k_n^{\bar{l}}}.$$

Then we have :

$$2 \sum_{\bar{l}=0}^L \int_{\mathcal{D}_i} \mu \partial_3 \Phi^l \partial_3 \Phi^{l'} = 2 \sum_{\bar{l}=0}^L \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{\bar{l}, l'} \beta_n^{l, l'} k_n^{\bar{l}} \int_{0_i}^{\infty} \left( e^{-\sqrt{k_n^{\bar{l}}} u} \right)^2 du = \sum_{\bar{l}=0}^L \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{\bar{l}, l'} \beta_n^{l, l'} \sqrt{k_n^{\bar{l}}}.$$

The proof of the near "node-rule"

$$\sum_{l=0}^L \mathbf{I}_l(0_l) = -\mathcal{C} \partial_t \mathbf{U}(t)$$

is the same but with (2.78) instead of (2.72).  $\square$

By linearity we can express the electromagnetic near-fields of order 1 in the form written down in the following lemma.

**Lemma 8.5.4.** *We have for  $\mathbf{x} \in \Omega$  and  $t \geq 0$*

$$\begin{cases} \mathbf{E}_J^1(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{V}_0^1(0_0, t) \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{l'=1}^L (\partial_t \mathbf{I}_{l'}^0)(0_{l'}, t) E_{J, l'}^{R, 1}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{H}_J^1(\mathbf{x}, t) &= -\sum_{l'=1}^L \mathbf{I}_{l'}^1(\hat{0}_{l'}, t) \mathbf{grad} \Psi^{l'}(\mathbf{x}) + (\partial_t \mathbf{V}_0^0)(0_{l'}, t) H_{J, 0}^{R, 1}(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (8.51)$$

where the electromagnetic fields  $\mathbf{E}_J^{R, 1}$  and  $\mathbf{H}_J^{R, 1}$  are given in the bounded domain  $\mathcal{K}$  by

$$\begin{cases} \mathbf{curl} E_{J, l'}^{R, 1} = \mathbf{grad} \Psi^{l'} & \text{in } \mathcal{K} \\ \mathbf{Div} (\varepsilon E_{J, l'}^{R, 1}) = 0, & \text{in } \mathcal{K} \\ E_{J, l'}^{R, 1} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\Omega, \\ E_{J, l'}^{R, 1} \times \mathbf{e}_3^0 + T_e^0(\varepsilon E_{J, l'}^{R, 1} \cdot \mathbf{e}_3^l) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{0, l'} \begin{pmatrix} \frac{\nabla \varphi_n^0}{\sqrt{k_n^0}} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{on } S_0 \times O_0, \\ E_{J, l'}^{R, 1} \times \mathbf{e}_3^l + T_e^l(\varepsilon E_{J, l'}^{R, 1} \cdot \mathbf{e}_3^l) = \mathcal{L}^{l, l'} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi^l \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{l, l'} \begin{pmatrix} \frac{\nabla \varphi_n^l}{\sqrt{k_n^l}} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{on } S_l \times O_l, \end{cases} \quad (8.52)$$

and

$$\begin{cases} \mathbf{curl} H_{J, 0}^{R, 1} = \mathbf{grad} \Phi & \text{in } \mathcal{K} \\ \mathbf{Div} (\mu H_{J, 0}^{R, 1}) = 0, & \text{in } \mathcal{K} \\ H_{J, 0}^{R, 1} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ H_{J, 0}^{R, 1} \times \mathbf{e}_3^0 + T_m^0(\mu H_{J, 0}^{R, 1} \cdot \mathbf{e}_3^l) = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \Psi^l \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^0 \begin{pmatrix} \frac{\nabla \varphi_n^0}{\sqrt{\lambda_n^0}} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{on } S_0 \times O_0, \\ H_{J, 0}^{R, 1} \times \mathbf{e}_3^l + T_m^l(\mu H_{J, 0}^{R, 1} \cdot \mathbf{e}_3^l) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^l \begin{pmatrix} \frac{\nabla \varphi_n^l}{\sqrt{\lambda_n^l}} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{on } S_l \times O_l, \end{cases} \quad (8.53)$$

with all the notation given in lemma 8.5.3.

We now have a way to compute uniquely  $\mathbf{E}_J^1$  and  $\mathbf{H}_J^1$  in the bounded domain  $\mathcal{K}$  if  $V_0^1(0_0)$  and  $\mathbf{I}_{l'}^1(0_{l'})$  for  $l' = 1 \dots L$  are known. The next subsection is devoted to these constants.

### 8.5.3 Application of the matching principle

**Lemma 8.5.5.** *The near and far electrical potential and current at order 1 are linked by the following equations*

$$V_l^1(0_l) = V_l^1(0_l^\delta) \quad \text{and} \quad \mathbf{I}_l^1(0_l) = \mathbf{I}_l^1(0_l^\delta) \quad \text{for } l = 0 \dots L. \quad (8.54)$$

*Proof.* The matching (8.24) principle says that

$$\sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_J^p(x, 0_l + x_3^l) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_l^p(x, 0_l^\delta + \delta x_3^l),$$

then we subtract (8.33) and divide by  $\delta$

$$\left( \frac{\mathbf{E}_J^0(x, 0_l + x_3^l) - \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \mathbf{E}_J^0(x, x_3)}{\delta} \right) + \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_J^{p+1}(x, 0_l + x_3^l) = \left( \frac{\mathbf{E}_l^0(x, 0_l^\delta + \delta x_3^l) - \mathbf{E}_l^0(x, 0_l^\delta)}{\delta} \right) + \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_l^{p+1}(x, 0_l^\delta + \delta x_3^l). \quad (8.55)$$

#### Step 1 - the far-field

Here, we will study in the right side of the equality (8.55). By taking the limit  $\delta \rightarrow 0$

$$\left( \frac{\mathbf{E}_l^0(x, 0_l^\delta + \delta x_3^l) - \mathbf{E}_l^0(x, 0_l^\delta)}{\delta} \right) + \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_l^{p+1}(x, 0_l^\delta + \delta x_3^l) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x_3^l \partial_3 \mathbf{E}_l^0(x, 0_l^\delta) + \mathbf{E}_l^1(x, 0_l^\delta),$$

and with (8.31) and the lemma 8.5.2 we have

$$\int_S \varepsilon \left[ \left( \frac{\mathbf{E}_l^0(x, 0_l^\delta + \delta x_3^l) - \mathbf{E}_l^0(x, 0_l^\delta)}{\delta} \right) + \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_l^{p+1}(x, 0_l^\delta + \delta x_3^l) \right] \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} C^l (x_3^l \partial_3 V_l^0(0_l^\delta) + V_l^1(0_l^\delta)). \quad (8.56)$$

#### Step 2 - the near-field

We integrate the left side of the equality (8.55) over  $\varepsilon(\nabla \varphi, 0)^t$  on  $S$

$$\int_S \varepsilon \left( \frac{\mathbf{E}_J^0(x, 0_l + x_3^l) - \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \mathbf{E}_J^0(x, x_3)}{\delta} \right) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \int_S \varepsilon \mathbf{E}_J^{p+1}(x, 0_l + x_3^l) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.57)$$

Then with the expression of the near field of order 0 given in (8.32), we have

$$\mathbf{E}_J^0(x, 0_l + x_3^l) - \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \mathbf{E}_J^0(x, x_3) = \mathbf{U}(t) \mathbf{grad} \left( \Phi(x, 0_l + x_3^l) - \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \Phi(x, x_3) \right),$$

and then with the behavior of  $\Phi$  given in (8.19) and the fact that

$$\int_S \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi_n = 0 \quad (\text{due to the orthogonality of the Helmholtz decomposition})$$

we have

$$\int_S \varepsilon \left( \mathbf{E}_J^0(x, 0_l + x_3^l) - \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \mathbf{E}_J^0(x, x_3) \right) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Thus when  $\delta$  tends to 0, (8.57) becomes

$$\int_S \varepsilon \mathbf{E}_J^1(x, 0_l + x_3^l) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

and with the lemma 8.5.2 we have

$$\int_S \varepsilon \mathbf{E}_J^1(x, 0_l + x_3^l) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} = C^l \mathbf{V}_l(x_3^l).$$

We thus have with the lemma 8.5.1

$$\int_S \varepsilon \left[ \left( \frac{\mathbf{E}_J^0(x, 0_l + x_3^l) - \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \mathbf{E}_J^0(x, x_3)}{\delta} \right) + \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{E}_J^{p+1}(x, 0_l + x_3^l) \right] \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l(x) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} C^l (\mathbf{V}_l^1(0_l, t) - x_3^l L^l \partial_t I_l^0(0_0, t)). \quad (8.58)$$

### Step 3 - application of the matching principle

We integrate the equality (8.55) over  $\varepsilon (\nabla \varphi, 0)^t$  on  $S$  and when  $\delta$  tends to 0 one arrives to with (8.56, 8.58)

$$C^l (x_3^l \partial_3 V_l^0(0_l^\delta) + V_l^1(0_l^\delta)) = C^l (\mathbf{V}_l^1(0_l, t) - x_3^l L^l \partial_t I_l^0(0_0, t)).$$

For  $x_3^l = 0$  we have the desired formula

$$V_l^1(0_l^\delta) = V_l^1(0_l, t)$$

and thus

$$\partial_3 V_l^0(0_l^\delta) = -L^l \partial_t I_l^0(0_0, t)$$

which is redundant with (8.41). □

We conclude with this lemma 8.5.5 and the lemma 8.4.1 that

$$V_0^1(0_0^\delta, t) - V_l^1(0_l^\delta, t) = \sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^0(0_{l'}^\delta, t) \quad \text{and} \quad - \sum_{l=0}^L I_l^1(0_l^\delta) = C \partial_t V_0^0(0_0^\delta, t). \quad (8.59)$$

In the chapter 9 (see lemma 9.5.1) we will simultaneously give the proof of the lemmata 8.4.1 and 8.5.5.

**Remark 8.5.1.** *There exist unique first order electromagnetic fields  $\mathbf{E}_l^1$ ,  $\mathbf{H}_l^1$ ,  $\mathbf{E}_J^1$  and  $\mathbf{H}_J^1$  given by the following procedure*

1. *determine uniquely the first order electrical potential  $V_l^1$  and current  $I_l^1$  through the telegrapher's equation (8.41) with the Kirchhoff's rules of order 1 (see (8.59)) and the initial conditions (8.42),*
2. *compute the electromagnetic far-fields  $\mathbf{E}_l^1$  and  $\mathbf{H}_l^1$  with (8.40),*
3. *determine  $V_l^1(0_l)$  and  $I_l^1(0_l)$  with the lemma 8.5.5,*
4. *compute the electromagnetic near-fields  $\mathbf{E}_J^1$  and  $\mathbf{H}_J^1$  with the lemma 8.5.4.*

The 1D model we have just constructed is based on the two systems of equations (8.35, 8.34) and (8.41, 8.59). But we only want to solve one problem. To do this we will recover the 1D effective model of the section 8.2 (see (8.8, 8.9a, 8.9b, 8.14) by taking into account

$$(8.35, 8.34) + \delta (8.41, 8.59).$$

## 8.6 Toward the effective model

We are now interested in the comparison between the asymptotic solution

$$\left( V_l^0(x_3^{\delta,l}, t) + \delta V_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \right) \quad \text{and} \quad \left( I_l^0(x_3^{\delta,l}, t) + \delta I_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \right)$$

and the effective potentials and currents

$$V_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t) \quad \text{and} \quad I_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t),$$

defined in the section 8.2 as the solution of (8.8, 8.9a, 8.9b) with the initial conditions (8.14).

With the telegrapher's equations (8.35) and (8.41), we have

$$\begin{cases} C^l \partial_t \left( V_l^0(x_3^{\delta,l}, t) + \delta V_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \right) + \partial_3 \left( I_l^0(x_3^{\delta,l}, t) + \delta I_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \right) = 0, & x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[, t > 0 \\ L^l \partial_t \left( I_l^0(x_3^{\delta,l}, t) + \delta I_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \right) + \partial_3 \left( V_l^0(x_3^{\delta,l}, t) + \delta V_l^1(x_3^{\delta,l}, t) \right) = 0, & x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[, t > 0. \end{cases} \quad (8.60)$$

with the Kirchhoff's rules (8.34) and (8.59)

$$\begin{cases} \left( V_0^0(0_0^\delta, t) + \delta V_0^1(0_0^\delta, t) \right) - \left( V_l^0(0_l^\delta, t) + \delta V_l^1(0_l^\delta, t) \right) = \delta \sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^0(0_{l'}^\delta, t), & t > 0, \\ - \sum_{l=0}^L \left( I_l^0(0_l^\delta, t) + \delta I_l^1(0_l^\delta, t) \right) = \delta C \partial_t V_0^0(0_0^\delta, t), & t > 0, \end{cases} \quad (8.61)$$

and of course with the initial conditions (8.36) and (8.42), we have

$$\begin{cases} V_0^0(\cdot, t=0) + \delta V_0^1(\cdot, t=0) = V_0^{\delta,1}(\cdot, t=0), \\ V_l^0(\cdot, t=0) + \delta V_l^1(\cdot, t=0) = 0 \quad \text{for } l > 0, \\ I_l^0(\cdot, t=0) + \delta I_l^1(\cdot, t=0) = 0 \quad \text{for } l \geq 0. \end{cases} \quad (8.62)$$

### 8.6.1 An error estimate between the effective model and the asymptotic expansion

We denote by

$$\mathcal{V}_l = V_l^\delta - V_l^0 - \delta V_l^1 \quad \text{and} \quad \mathcal{I}_l = I_l^\delta - I_l^0 - \delta I_l^1 \quad (8.63)$$

the errors between the effective model we have proposed in the section 8.2.1 and the asymptotic expansion. With (8.8) and (8.60), we have

$$\begin{cases} C^l \partial_t \mathcal{V}_l(x_3^{\delta,l}, t) + \partial_3 \mathcal{I}_l(x_3^{\delta,l}, t) = 0, & x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[, t > 0, \\ L^l \partial_t \mathcal{I}_l(x_3^{\delta,l}, t) + \partial_3 \mathcal{V}_l(x_3^{\delta,l}, t) = 0, & x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[, t > 0, \end{cases} \quad (8.64)$$

then, with (8.9) and (8.61), we have

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0(0_0^\delta, t) - \mathcal{V}_l(0_l^\delta, t) = \delta \sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t \mathcal{I}_{l'}(0_{l'}^\delta, t) + \delta^2 \sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^1(0_{l'}^\delta, t), & t > 0, \\ - \sum_{l=0}^L \mathcal{I}_l(0_l^\delta, t) = \delta C \partial_t \mathcal{V}_0(0_0^\delta, t) + \delta^2 C \partial_t V_0^1(0_0^\delta, t), & t > 0, \end{cases}$$

and with (8.62)

$$\mathcal{V}_l(\cdot, t=0) = \mathcal{I}_l(\cdot, t=0) \quad \text{for } l \geq 0.$$

**Proposition 8.6.1.** *The error energy*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{\text{err}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^L \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} C^l |\mathcal{V}_l(x_3^{\delta,l}, t)|^2 dx_3^{\delta,l} + \int_{0_l^\delta}^{\infty} L^l |\mathcal{I}_l(x_3^{\delta,l}, t)|^2 dx_3^{\delta,l} \right] + \frac{\delta}{2} \left[ C |\mathcal{V}_0(0_0^\delta, t)|^2 + \sum_{l,l'} \mathcal{L}^{l,l'} \mathcal{I}_l(0_l^\delta, t) \mathcal{I}_{l'}(0_{l'}^\delta, t) \right],$$

satisfies for every instant  $T > 0$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{\text{err}}(T) \leq \delta^4 \int_0^T \left[ \sqrt{\sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^1(0_{l'}^\delta, t) \partial_t I_l^1(0_l^\delta, t)} + \sqrt{C |\partial_t V_0^1(0_0^\delta, t)|^2} \right]^2.$$

*Proof.* Similarly to the lemma 8.2.1, we have the energy equality

$$\partial_t \mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{\text{err}} = -\delta^2 \left[ \sum_{l,l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^1(0_{l'}^\delta, t) \mathcal{I}_l(0_l^\delta, t) + C \partial_t V_0^1(0_0^\delta, t) \mathcal{V}_0(0_0^\delta, t) \right].$$



If we integrate from 0 to T we have

$$\sum_{l=0}^L \mathcal{E}_l^{\text{err}}(T) + \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{\text{err}}(T) \leq \delta^2 \int_0^T \left[ \sum_{l,l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^1(0_0^\delta, t) \mathcal{I}_l(0_l^\delta, t) + \mathcal{C} \partial_t V_0^1(0_0^\delta, t) \mathcal{V}_0(0_0^\delta, t) \right],$$

then by Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\sum_{l,l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^1(0_0^\delta, t) \mathcal{I}_l(0_l^\delta, t) \leq \sqrt{\left[ \sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^1(0_0^\delta, t) \partial_t I_l^1(0_l^\delta, t) \right]} \sqrt{2\mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{\text{err}}(t)},$$

so

$$\mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{\text{err}}(T) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{\text{err}}(T) \leq \delta^2 \int_0^T \sqrt{2} \left[ \sqrt{\sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^1(0_0^\delta, t) \partial_t I_l^1(0_l^\delta, t)} + \sqrt{\mathcal{C} |\partial_t V_0^1(0_0^\delta, t)|^2} \right] \sqrt{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{\text{err}}(t)}.$$

The Grönwall lemma 4.3.2 let us conclude that

$$\sqrt{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{\text{err}}(T)} \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2}} \int_0^T \left[ \sqrt{\sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^1(0_0^\delta, t) \partial_t I_l^1(0_l^\delta, t)} + \sqrt{\mathcal{C} |\partial_t V_0^1(0_0^\delta, t)|^2} \right].$$

□

## 8.6.2 Approximation of the electromagnetic fields in the junction

We are able to give an approximation of the electromagnetic fields with the 1D model of the section 8.2.1 in keeping with the expression of the electromagnetic far and near-fields of order 0 and 1.

### Reconstruction formulae in the cable

We can give an approximation of the electromagnetic fields in each cable part  $\Omega_l^\delta$ . They are given by a variable separation  $(x) - (x_3, t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{\delta,1} |_{\Omega_l^\delta} (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}, t) = V_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t) \begin{pmatrix} \nabla \varphi^l \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ H^{\delta,1} |_{\Omega_l^\delta} (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}, t) = I_l^\delta(x_3^{\delta,l}, t) \begin{pmatrix} \tilde{\nabla} \psi^l \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{for } (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \in \mathcal{D}_l^\delta, t \geq 0 \quad (8.65)$$

The fact that the far-fields approximations are TEM is due to the hypothesis 8.1.1. We will see in the next chapter that it is no longer true in the general case.

### Reconstruction formulae in the knot area

We can give an approximation of the electromagnetic fields in the "small" knot area  $\mathcal{K}^\delta$  with the following variable separation  $(\mathbf{x}) - (t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{\delta,1} |_{\mathcal{K}^\delta} (\mathbf{x}^\delta, t) = V_0^\delta(0_0^\delta, t) \mathbf{grad} \Phi \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) + \delta \left[ \sum_{l'=1}^L \partial_t I_{l'}^\delta(0_0^\delta, t) E_{J,l'}^{R,1} \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) \right] \\ H^{\delta,1} |_{\mathcal{K}^\delta} (\mathbf{x}^\delta, t) = - \sum_{l'=1}^L I_{l'}^\delta(0_0^\delta, t) \mathbf{grad} \Psi^{l'} \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) + \delta \partial_t V_0^\delta(0_0^\delta, t) H_{J,0}^{R,1} \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) \end{array} \right. \quad \text{for } \mathbf{x}^\delta \in \mathcal{K}^\delta, t \geq 0 \quad (8.66)$$

### Error between the approximation of the electromagnetic fields and the asymptotic one

We denote by

$$e^{\delta,1}(\mathbf{x}^\delta) = \left\{ \begin{array}{l} E^{\delta,1} (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) - \left( E_l^0 \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right) + \delta E_l^1 \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right) \right) \quad \text{for } \mathbf{x}^\delta = (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \in \Omega_l^\delta \\ E^{\delta,1} (\mathbf{x}^\delta) - \left( E_J^0 \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) + \delta E_J^1 \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) \right) \quad \text{for } \mathbf{x}^\delta \in \mathcal{K}^\delta \end{array} \right. \quad (8.67)$$

and

$$h^{\delta,1}(\mathbf{x}^\delta) = \begin{cases} H^{\delta,1}(x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) - \left( H_l^0 \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right) + \delta H_l^1 \left( \frac{x^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right) \right) & \text{for } \mathbf{x}^\delta = (x^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \in \Omega_l^\delta \\ H^{\delta,1}(\mathbf{x}^\delta) - \left( H_J^0 \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) + \delta H_J^1 \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) \right) & \text{for } \mathbf{x}^\delta \in \mathcal{K}^\delta \end{cases} \quad (8.68)$$

the errors between the effective model we have just proposed (see equation (8.65) for the far-fields approximations and (8.66) for the near-fields approximations) and the asymptotic expansion (see equation (8.31,8.40) for the far-fields and (8.32,8.51) for the near-fields).

**Lemma 8.6.1.** *The error in each "thin" cable part is bounded by*

$$\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{\delta,1}(t)\|_{L^2(\Omega_l^\delta)} \leq \sqrt{\int_{0_l^\delta}^{\infty} C^l |\mathcal{V}_l(x_3^{\delta,l}, t)|^2 dx_3^{\delta,l}} \quad \text{and} \quad \|\mu^{\frac{1}{2}} h^{\delta,1}(t)\|_{L^2(\Omega_l^\delta)} \leq \sqrt{\int_{0_l^\delta}^{\infty} L^l |\mathcal{I}_l(x_3^{\delta,l}, t)|^2 dx_3^{\delta,l}}.$$

*The error in the "small" knot area is bounded by*

$$\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{\delta,1}(t)\|_{L^2(\mathcal{K}^\delta)} \leq \mathcal{V}_0(0_0^\delta, t) \sqrt{\int_{\mathcal{K}} \varepsilon |\mathbf{grad} \Phi|^2} + \delta \sum_{l'=1}^L \left( \partial_t \mathcal{I}_{l'}(0_{l'}^\delta, t) + \delta \partial_t I_{l'}^1(0_{l'}^\delta, t) \right) \sqrt{\int_{\mathcal{K}} \varepsilon |E_{J,l'}^{R,1}|^2}$$

and

$$\|\mu^{\frac{1}{2}} h^{\delta,1}(t)\|_{L^2(\mathcal{K}^\delta)} \leq \sqrt{\sum_{l,l'=1}^L \int_{\mathcal{K}} \mu (\mathbf{grad} \Psi^l \cdot \mathbf{grad} \Psi^{l'}) \mathcal{I}_{l'}(0_{l'}^\delta, t) \mathcal{I}_l(0_l^\delta, t) + \delta \left( \partial_t \mathcal{V}_0(0_0^\delta, t) + \delta \partial_t V_0^1(0_0^\delta, t) \right)} \sqrt{\int_{\mathcal{K}} \mu |H_{J,0}^{R,1}|^2}.$$

**Theorem 8.6.1.** *There exists a constant  $C$  which does not depend of the time such that the error is bounded*

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{\delta,1}(t)\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} h^{\delta,1}(t)\|_{L^2(\Omega^\delta)} \leq & C \left[ \sqrt{\mathcal{E}_G^{err}(t)} + \delta \sum_{l'=1}^L \left( \partial_t \mathcal{I}_{l'}(0_{l'}^\delta, t) + \delta \partial_t I_{l'}^1(0_{l'}^\delta, t) \right) \right. \\ & \left. + \delta \left( \partial_t \mathcal{V}_0(0_0^\delta, t) + \delta \partial_t V_0^1(0_0^\delta, t) \right) \right] = O(\delta^2) \end{aligned} \quad (8.69)$$

To be certain that our model is a good approximation of the electromagnetic waves propagation in the junction  $\Omega^\delta$  it remains to be checked that the asymptotic expansions we proposed are right but we haven't done this work yet.

The models we proposed do not include the case of junctions of multi-conductors cables (see figure 8.10). It is the purpose of the next chapter.

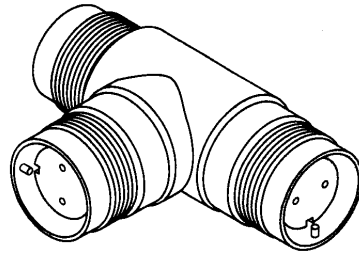


FIGURE 8.10 – junction between three twinax



# MODELING A JUNCTION BETWEEN MULTI-CONDUCTORS CABLES IN A VERY GENERAL CASE

---

Creativity is making the complicated simple.

Charles Mingus

Here we are interested by the electromagnetic waves propagation in a network of multi-conductors cables. The goal is to trim down this complex 3D problem into a 1D model that keeps memory of the **complex 3D structure** such as defaults in the cable or at the junction. More precisely we aim at proposing a quantum graph (see [49]) such as the electrical potentials and currents are propagated on each edge by a wave equation looking like the telegrapher's one (see [11, 39]), and joined on each vertex by the Kirchhoff's laws that we want to demonstrate and improve in this chapter. In the previous chapter, we studied the case of a junction between co-axial cables with strong geometric and physical assumptions. However, the specific focus of this chapter is the case of multi-conductors cables without the strong assumptions of the previous chapter. We aim at finding and improving the usual Kirchhoff's circuits law's with matched asymptotic methods like it is done in [43] for acoustic waves.

## 9.1 Modelling a coaxial cables junction problem

### 9.1.1 Problem's geometry

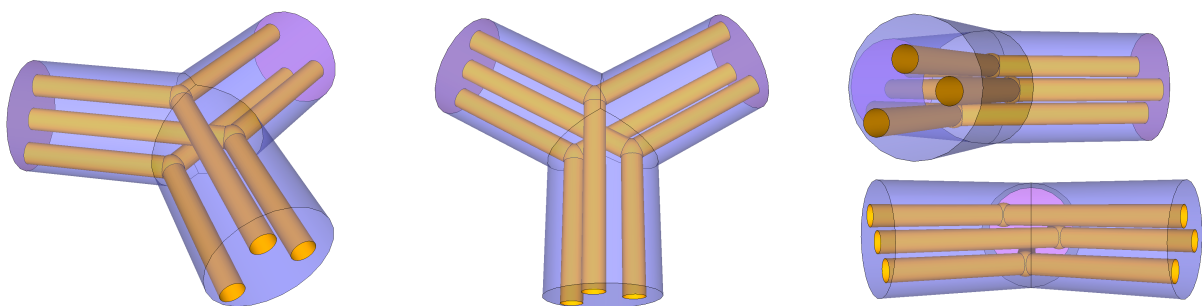


FIGURE 9.1 – Geometry of the junction of three multiconductors cables (four angles)

We consider  $L + 1$  "thin" cables, that is to say tubes bored by several inner-wires like the ones considered in part II. They are linked in a "small" area. In this context the  $Q$  inner-wires are considered as "handles". One can consider a very general geometry for these links however to make our study clearer we consider the specific case of 3D unbounded domains with  $Q$  handles of order  $L + 1$  as described below.

In what follows, to perform the mathematical analysis we use a small parameter  $\delta \ll 1$  to indicate that the geometrical object we use are "small" or "thin".

**The knot area.** We consider a simply connected domain  $\mathcal{W}_0^\delta$  with connected lipschitz boundary<sup>1</sup>. We will assume that  $\mathcal{W}_0^\delta$  is included in a ball  $B_\delta$  with a radius of order  $\delta$  and does not degenerate<sup>2</sup>. Moreover, we will assume that the boundary  $\partial\mathcal{W}_0^\delta$  includes  $L + 1$  plane surfaces, called the end sections,  $\mathcal{O}_{0,l}^\delta$  for  $l = 0 \dots L$  that are included in disks of radius of order  $\delta$  and such that they do not intersect

$$\overline{\mathcal{O}_{0,l}^\delta} \cap \overline{\mathcal{O}_{0,l'}^\delta} = \emptyset \text{ for } l \neq l'.$$

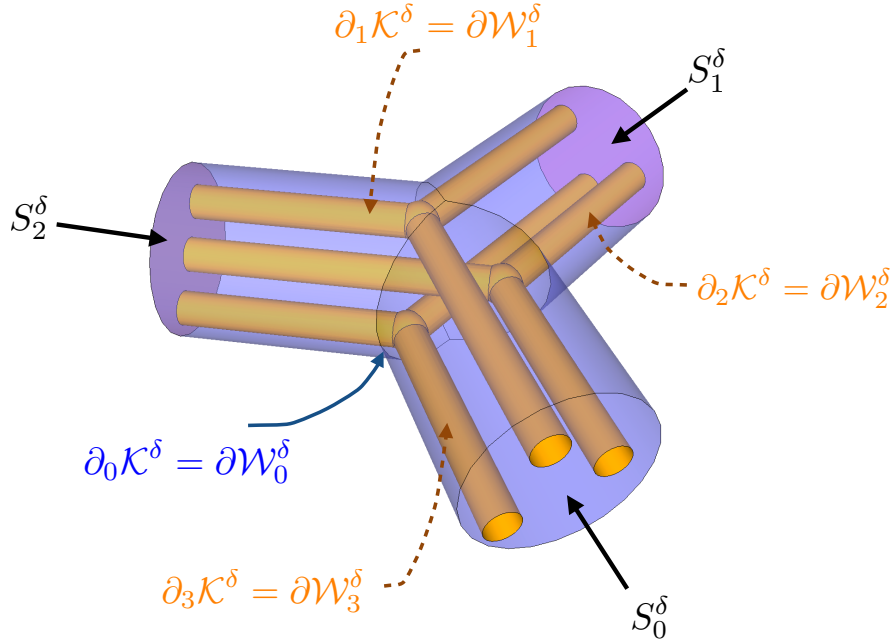


FIGURE 9.2 – the knot area

We also consider  $Q$  simply connected 3D domains  $\mathcal{W}_q^\delta$ , the **inner-wires** (mathematically the "handle"), of the same kind<sup>3</sup> as  $\mathcal{W}_0^\delta$ , which is included in  $\mathcal{W}_0^\delta$  and also does not degenerate. They do not intersect themselves

$$\text{dist}(\mathcal{W}_q^\delta, \mathcal{W}_{q'}^\delta) \geq \alpha > 0 \text{ for } q \neq q'$$

and they intersect  $\mathcal{W}_0^\delta$  only at the end sections  $\mathcal{O}_{0,l}^\delta$

$$\partial\mathcal{W}_q^\delta \cap \partial\mathcal{W}_0^\delta \subset \bigcup_{l=0}^L \mathcal{O}_{0,l}^\delta \quad \text{and} \quad \text{dist}\left(\mathcal{W}_q^\delta, \partial\mathcal{W}_0^\delta \setminus \bigcup_{l=0}^L \mathcal{O}_{0,l}^\delta\right) \geq \alpha > 0.$$

More precisely we define the "**holes**"  $\mathcal{O}_{q,l}^\delta$  as

$$\mathcal{O}_{q,l}^\delta := \mathcal{O}_{0,l}^\delta \cap \mathcal{W}_q^\delta$$

and we assume that  $\mathcal{O}_{q,l}^\delta \neq \emptyset$ . The knot and the cable root sections are then defined as

$$\mathcal{K}^\delta := \mathcal{W}_0^\delta \setminus \bigcup_{q=1}^Q \mathcal{W}_q^\delta \quad \text{and} \quad S_l^\delta = \mathcal{O}_{0,l}^\delta \setminus \bigcup_{q=1}^Q \mathcal{O}_{q,l}^\delta.$$

We will denote the connected boundaries by

$$\partial_q \mathcal{K}^\delta = \partial \mathcal{W}_q^\delta \quad \text{and} \quad \partial_q S_l^\delta = \partial \mathcal{O}_{q,l}^\delta \quad \text{with } q = 0 \dots Q, \quad l = 0 \dots L.$$

1. There are no cavities. Such a domain is called 2-connected  
 2. i.e. all non-vanishing connected surfaces defined by the intersection with a plane have an area greater than a given fixed positive number.  
 3. that is to say a simply connected domain with a connected lipschitzian boundary

**The cables part.**

We define for each  $l = 0 \dots L$  the unit vector  $\mathbf{e}_3^l \in \mathbb{R}^3$  as the constant **outward normal** to  $\mathcal{K}^\delta$  along  $S_l^\delta$ . We then define two unit orthogonal vectors  $(\mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l) \in \mathbb{R}^3$  and a point  $O_l^\delta \in \mathcal{O}_{0,l}^\delta$  such that the (afin coordinate) system  $(O_l^\delta, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$  has for origin  $O_l^\delta$  and for orthonormal basis  $(\mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$ . We denote by  $(x_T^l, x_3^l) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  the **(transverse, longitudinal) coordinates** in the basis  $(\mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$  and by  $0_l^\delta$  the longitudinal component of the origin  $O_l^\delta$  in the system  $(O_l^\delta, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$  that is to say :

$$\mathbf{x}^\delta = (x^{\delta,l}, 0_l^\delta) \in \mathbb{R}^3 \iff \mathbf{x}^\delta \in \mathcal{O}_{0,l}^\delta.$$

The cables (see figure 9.3) are then defined as **distorted cylinders** in the sense that their cross section  $S_l^\delta$  vary along the direction  $\mathbf{e}_3^l$ . Let  $\{\mathcal{T}_{x_3^{\delta,l}}^l, x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[ \}$  be a family of diffeomorphisms of  $\mathbb{R}^2$  from which we can define the cross sections of the cable by

$$\forall x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[, \quad S_{l,x_3^{\delta,l}}^\delta = \mathcal{T}_{x_3^{\delta,l}}^l S_l^\delta. \tag{9.1}$$

and so the  $L$  **multi conductors** cables are defined as the tubes

$$\Omega_l^\delta := \bigcup_{x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[} S_{l,x_3^{\delta,l}}^\delta \times \{x_3^{\delta,l}\},$$

and its boundaries are denoted by

$$\partial_q \Omega_l^\delta := \bigcup_{x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[} \partial_q S_{l,x_3^{\delta,l}}^\delta \times \{x_3^{\delta,l}\}.$$

We will assume that  $\{\mathcal{T}_{x_3^{\delta,l}}^l, x_3^{\delta,l} \in ]0_l^\delta, \infty[ \}$  is an "admissible group of mapping" (see appendix 13) that is to say we can define  $\mathcal{T} : \mathcal{B}^\star \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}^\star \times \mathbb{R}$  such that

$$\mathcal{T}(x, x_3) := \mathcal{T}_{x_3}(x).$$

which satisfies the following regularity assumption

$$\mathcal{T} \in C^1(]0_l^\delta, \infty[, C^{0,1}(\mathcal{B}^\star)) \quad \text{and} \quad \mathcal{T}^{-1} \in C^0(]0_l^\delta, \infty[, C^{0,1}(\mathcal{B}^\star)).$$

If the diffeomorphisms of family  $\mathcal{T}_{x_3^{\delta,l}}^l$  are the identity, then the cables are then defined as cylinders made of the translation of  $S_l^\delta$  along the direction  $\mathbf{e}_3^l$

$$\Omega_l^\delta = S_l^\delta \times [0_l^\delta, \infty) \mathbf{e}_3^l,$$

with  $[0_l^\delta, \infty) \mathbf{e}_3^l$  representing the half-line of direction  $\mathbf{e}_3^l$  starting at  $O_l^\delta$ . The cable number  $l = 0$  will play a privileged role.

**Remark 9.1.1.** Looking at the figure 9.2, we can notice that we could define a common center  $O$  for all orientation  $\mathbf{e}_3^l$  and denote  $\delta \sigma_l$  the distance between this center  $O^\delta$  and the section  $O_l^\delta$ . Alas, this kind of operation is impossible in the case of more complex geometries.

**The whole domain.** The domain of our study is

$$\Omega^\delta := \mathcal{K}^\delta \bigcup_{l=1}^L \Omega_l^\delta$$

and the connected part of its boundary will be denoted by

$$\partial_q \Omega^\delta := \partial_q \mathcal{K}^\delta \bigcup_{l=0}^L \partial_q \Omega_l^\delta.$$

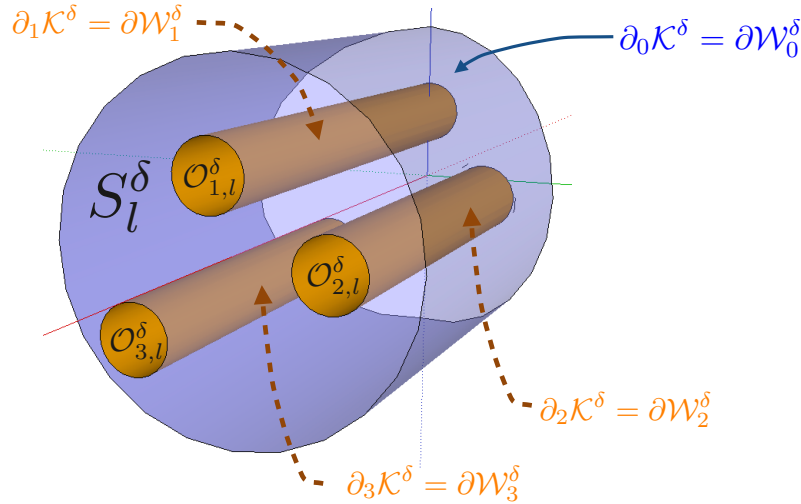


FIGURE 9.3 – the cable part

### 9.1.2 Topological Features

We need some topological notions linked to the non-simply connected geometry of the knot area  $\mathcal{K}^\delta$ . More precisely we assume that there exists  $Q \times L$  **2D-cuts**  $\Gamma_{q,l}$  (2D open smooth simply connected surface) which link the root section  $S_0^\delta$  to the root section  $S_l^\delta$ . More precisely these cuts are such that for  $1 \leq q \leq Q$  and  $1 \leq l \leq L$  :

- they do not intersect  $\Gamma_{q,l}^\delta \cap \Gamma_{q',l'}^\delta = \emptyset$  for  $q \neq q'$  and  $l \neq l'$ ,
- they are interior  $\partial \Gamma_{q,l}^\delta \subset S_0^\delta \cup \partial_q \mathcal{K}^\delta \cup S_l^\delta \cup \partial_0 \mathcal{K}^\delta$ ,
- the domain  $\mathcal{K}_\Gamma^\delta := \mathcal{K}^\delta \setminus \left( \bigcup_{q=1}^Q \bigcup_{l=1}^L \Gamma_{q,l}^\delta \right)$  is simply connected.

We will denote by  $\partial_l \Gamma_q^\delta$  the intersection between the boundary of cut  $\partial \Gamma_{q,l}^\delta$  and the root section of the cable  $S_l^\delta$  for  $1 \leq l \leq L$  and  $1 \leq q \leq Q$ . The  $Q$  **1D-cuts**  $\partial_l \Gamma_q^\delta$ , for  $1 \leq q \leq Q$  and  $1 \leq l \leq L$  (1D open smooth simply connected surface) are such that  $S_{l,\Gamma}^\delta := S_l^\delta \setminus \bigcup_{q=1}^Q \partial_l \Gamma_q^\delta$  is simply connected.

Later we will study free curl fields and potentials which jump across these cuts, so we need to define an orientation (see figure 9.4). In what follows, each  $\Gamma_{q,l}$  will be parameterized by a curvilinear abscissae  $e^{q,l}$  collinear to the tangent of  $\partial_q \mathcal{K}^\delta$  oriented from  $S_l^\delta$  to  $S_0^\delta$  and by  $\tau_{q,l}$  orthogonal to  $e^{q,l}$  in  $\Gamma_{q,l}^\delta$  oriented  $\Gamma_{q,l}$  from  $\partial_q \mathcal{K}^\delta$  towards  $\partial_0 \mathcal{K}^\delta$ . We shall define  $\mathbf{n}_{q,l}$  along  $\Gamma_l$  as the unit normal<sup>4</sup> vector to  $\Gamma_{q,l}^\delta$  such that  $(n_{q,l}, \tau_{q,l}, e^{q,l})$  is a direct basis of the 3D space. Same with  $\partial_l \Gamma^\delta$  oriented from  $\partial_q S_l^\delta$  towards  $\partial_0 S_l^\delta$ .

Be careful, with our orientation choice a function  $u^{q,l}$  that jumps on  $\Gamma_{q,l}$  and is continuous elsewhere could jump on  $\partial_{l'} \Gamma_{q'}$  as :

$$[u^{q,l}]_{\partial_{l'} \Gamma_{q'}} = \delta_{q'}^q (\delta_{l'}^1 - \delta_{l'}^l) [u^{q,l}]_{\Gamma_{q,l}}. \quad (9.2)$$

The  $Q$  cuts  $\partial_l \Gamma_q$  for  $q = 1 \dots Q$  of the domain  $S_l^\delta$  ( $l = 0 \dots L$ ) could be extend on each cable part  $\Omega_l^\delta$ . All the 1D curves  $\partial_l \Gamma_q \times \{x_3^\delta\}$  (for  $q = 0 \dots Q$ ) are the 1D cuts that bring the cross section  $S_l^\delta \times \{x_3^\delta\}$  simply connected.

In fact there are many ways to introduce these cuts. We choose for convenience that all cuts come from the root section  $S_0^\delta$  to  $S_l^\delta$ , so it will play a privileged role.

4. the normal vector is defined almost everywhere

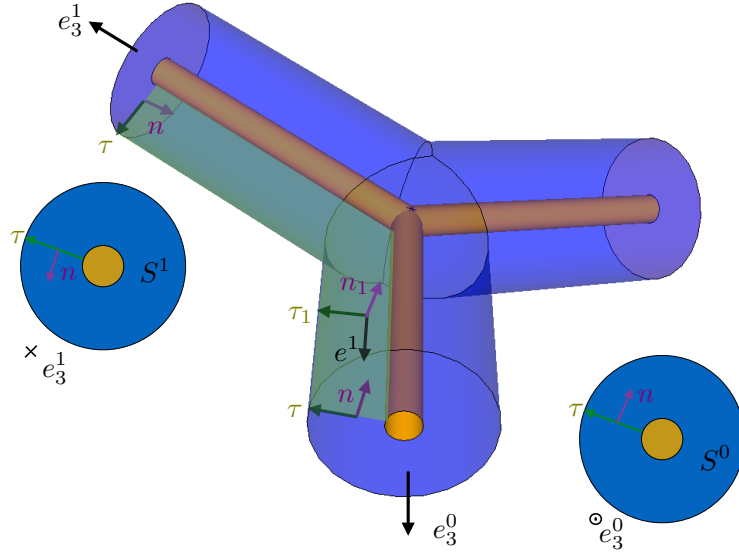


FIGURE 9.4 – Orientation of the cut  $\Gamma_1$

### 9.1.3 Maxwell's equations

We consider a lossy dielectric material whose characteristic coefficients, electric permittivity, magnetic permeability, electric and magnetic losses (conductivities, damping...) satisfy the usual **positivity assumptions** in the Laplace domain ( $s \in \mathbb{C}_0$ )

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_- \leq \varepsilon^\delta(\mathbf{x}^\delta) \leq \varepsilon_+, \quad 0 \leq \sigma_{e,-} \leq \Re(\sigma_e^\delta(\mathbf{x}^\delta, s)) \leq |\sigma_e^\delta(\mathbf{x}^\delta, s)| \leq \sigma_{e,+}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^\delta, \\ 0 < \mu_- \leq \mu^\delta(\mathbf{x}^\delta) \leq \mu_+, \quad 0 \leq \sigma_{m,-} \leq \Re(\sigma_m^\delta(\mathbf{x}^\delta, s)) \leq |\sigma_m^\delta(\mathbf{x}^\delta, s)| \leq \sigma_{m,+}, \quad \mathbf{x}^\delta \in \Omega^\delta. \end{aligned} \tag{9.3}$$

To simplify our notations, let us introduce the effective permittivity and permeability defined by

$$\tilde{\varepsilon}^\delta(\mathbf{x}^\delta, s) := s \varepsilon^\delta(\mathbf{x}^\delta) + \sigma_e^\delta(\mathbf{x}^\delta, s) \quad \text{and} \quad \tilde{\mu}^\delta(\mathbf{x}^\delta, s) := s \mu^\delta(\mathbf{x}^\delta) + \sigma_m^\delta(\mathbf{x}^\delta, s)$$

We will focus on the electromagnetic fields  $E^\delta, H^\delta$  solution of the Maxwell's equations in the Laplace domain

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}^\delta E^\delta - \mathbf{curl} H^\delta = \mathbf{J}_s^\delta, & \text{in } \Omega^\delta, \\ \tilde{\mu}^\delta H^\delta + \mathbf{curl} E^\delta = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega^\delta, \end{cases} \tag{9.4}$$

completed with perfectly conducting boundary conditions

$$E^\delta \times \mathbf{n}^\delta = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad H^\delta \cdot \mathbf{n}^\delta = 0 \quad \text{on } \partial\Omega^\delta. \tag{9.5}$$

## 9.2 The matched asymptotics method

We expect a 1D model which is a good approximation of the electromagnetic waves phenomenon in  $\Omega^\delta$ . We know thanks to the part II that it is possible to give one for the cable part  $\Omega_l^\delta$  but we cannot expect the same asymptotic analysis to work for the "small" knot area. The matched asymptotic method is based on the existence of an area where the two different analysis could be performed. We first describe precisely what is this common area and then postulate the asymptotic expansions.

### 9.2.1 Junction and overlap parts

It is therefore essential to distinguish two types of area. The first one is the  $L$  multi-conductor cables  $\Omega_l^\delta$  of **thickness**  $\delta$  and the second one is the **small** junction part

$$J^\delta := \mathcal{K}^\delta \bigcup_{l=0}^L \bigcup_{x_3^{\delta,l} \in [0_l^\delta, \sqrt{\delta}]} S_{l, x_3^{\delta,l}}^\delta$$



included in a ball of size  $\sqrt{\delta}$  that links the  $L$  multiconductor cables  $\Omega_l^\delta$ . This junction part contains the knot area  $\mathcal{K}^\delta$  of size  $\delta$ , that could be the less regular area (so that it could integrate the most defective of the electrical network), and the  $L$  area in common with  $\Omega_l^\delta$  called the **overlap** parts

$$\mathfrak{D}_l^\delta := \Omega_l^\delta \cap J^\delta = \bigcup_{x_3^{\delta,l} \in [0^\delta, \sqrt{\delta}]} S_{l,x_3^{\delta,l}}^\delta.$$

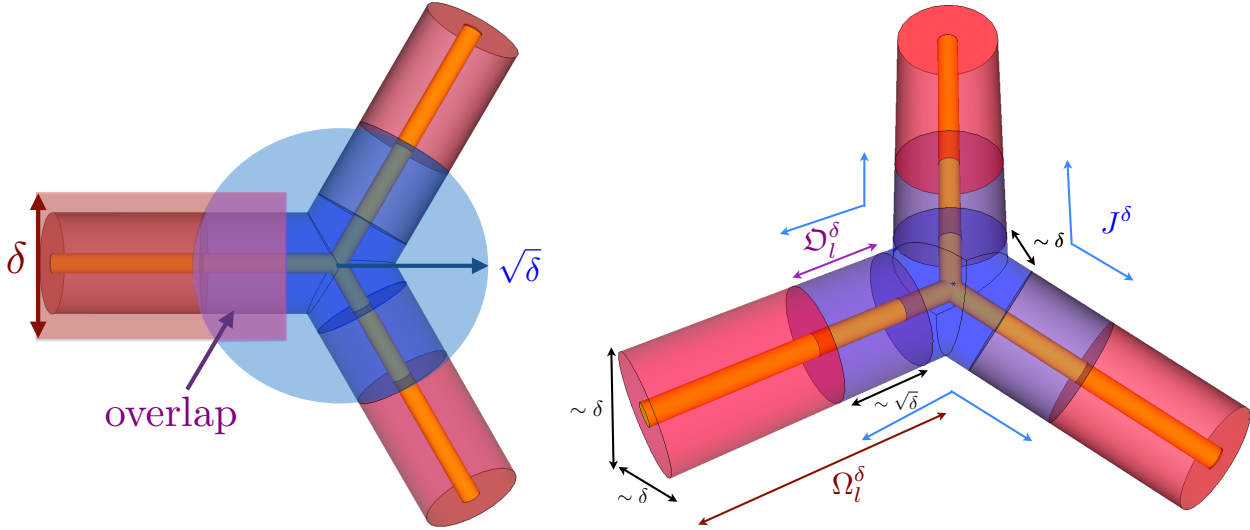


FIGURE 9.5 – Different areas : the cables  $\Omega_l^\delta$  (red + purple), the knot  $\mathcal{K}^\delta$  (blue), the junction  $J^\delta$  (blue + purple) and the overlaps  $\mathfrak{D}_l^\delta$  (purple).

**Remark 9.2.1.** *The overlap area is the cornerstone of the method of matched asymptotic analysis. For the readers who are familiar with this method, we recall that the overlap is not necessary included in a ball of size  $\sqrt{\delta}$ . The size  $f(\delta)$  must satisfy :*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(\delta)}{\delta} = \infty. \quad (9.6)$$

*In particular  $f(\delta) = \sqrt{\delta}$  and smaller  $f(\delta) = \delta |\ln(\delta)|$  agree with (9.6).*

The overlap areas are totally contingent. They are artificial tricks for the use of matched asymptotic method. To implement this method we need some mathematical assumptions about each overlap areas  $\mathfrak{D}_l^\delta$ .

**Hypothesis 9.2.1.** *We assume that each overlap area  $\mathfrak{D}_l^\delta$  for  $l = 0 \dots L$  are cylindrical*

$$\mathfrak{D}_l^\delta = \Omega_l^\delta \cap J^\delta = S_l^\delta \times [0^\delta, \sqrt{\delta}] \mathbf{e}_3^l,$$

*with  $[0^\delta, \sqrt{\delta}] \mathbf{e}_3^l$  the segment starting in  $O_l^\delta$  and ending at a distance  $\sqrt{\delta}$  of  $O_l^\delta$  in the direction  $\mathbf{e}_3^l$ . Moreover we assume that in  $\mathfrak{D}_l^\delta$  the permittivity, the permeability and the source term are homogeneous in the longitudinal direction :*

$$\begin{cases} \varepsilon^\delta |_{\mathfrak{D}_l^\delta}(x_T^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) = \varepsilon^\delta |_{\mathfrak{D}_l^\delta}(x_T^{\delta,l}), \\ \mu^\delta |_{\mathfrak{D}_l^\delta}(x_T^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) = \mu^\delta |_{\mathfrak{D}_l^\delta}(x_T^{\delta,l}), \\ \mathbf{J}_s^\delta |_{\mathfrak{D}_l^\delta}(x_T^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) = \mathbf{J}_s^\delta |_{\mathfrak{D}_l^\delta}(x_T^{\delta,l}), \end{cases} \quad \text{for } (x_T^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \in \mathfrak{D}_l^\delta,$$

*and we assume that the losses are null*

$$\sigma_e^\delta |_{\mathfrak{D}_l^\delta} = \sigma_m^\delta |_{\mathfrak{D}_l^\delta} = 0.$$

## 9.2.2 "Normalized" geometries

Before proposing an asymptotic expansion, we need to normalized the geometry in order to pass the small parameter  $\delta$  from the geometry to the equation. The main idea of the matched asymptotic method is to make

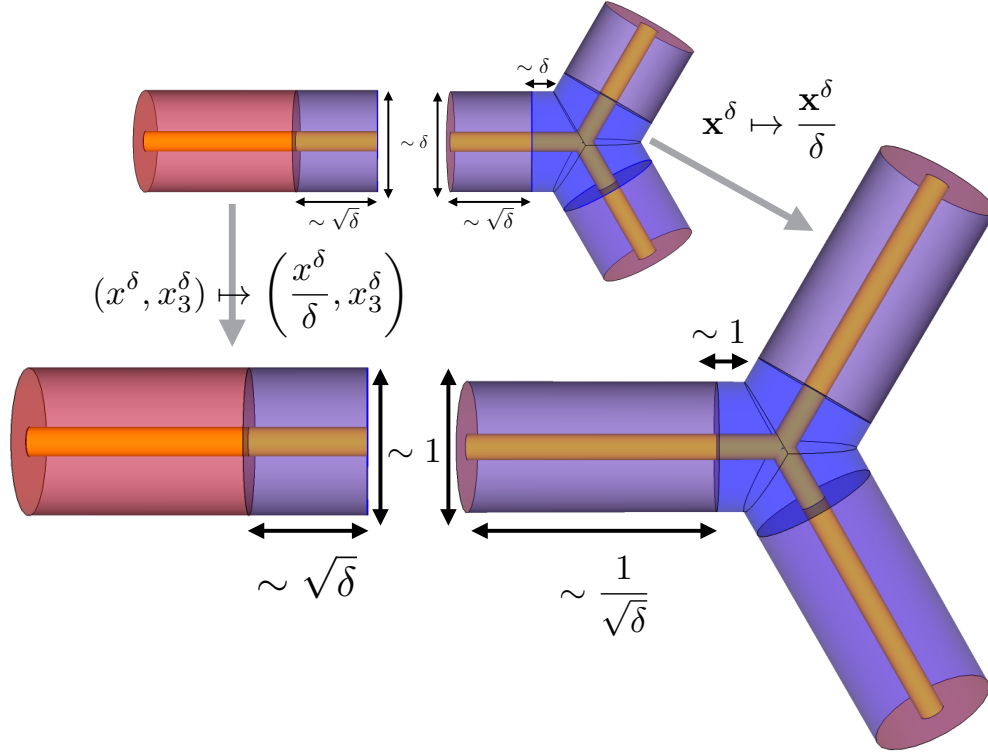


FIGURE 9.6 – Scaling

different asymptotic analysis where the "thickness" varies, that is to say in the junction part  $J^\delta$  and in the multi conductors part  $\Omega_l^\delta$ , and to match them in the common areas, the overlaps parts  $\mathfrak{D}_l^\delta$ . So we choose different **scaling** (see figure 9.6)

$$\vee^\delta : (x_T^\delta, x_3^\delta) \mapsto \left( \frac{x_T^\delta}{\delta}, x_3^\delta \right) \quad \text{and} \quad \wedge^\delta : \mathbf{x}^\delta \mapsto \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta}.$$

The image of the points  $O_l^\delta$  by the previous scaling are

$$\vee^\delta(O_l^\delta) = O_l^\delta \quad \text{and} \quad \wedge^\delta(O_l^\delta) = \hat{O}_l.$$

We denote by  $\hat{0}_l$  the longitudinal component of  $\hat{O}_l$  in the system  $(\hat{O}_l, \mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$ .

For the cable part  $\Omega_l^\delta$ , we choose a scaling that affects only the transverse dimensions and for the junction part  $J^\delta$  we choose a scaling that affects all the dimensions

$$\check{\Omega}_l^\delta := \vee^\delta(\Omega_l^\delta) = \bigcup_{x_3^{\delta,l} \in [0_l^\delta, \infty[} \mathcal{T}_{x_3^{\delta,l}}^l(S_l) \times \{x_3^{\delta,l}\} \quad \text{with} \quad S_l := \delta S_l^\delta \quad \text{and} \quad \hat{J}^\delta := \wedge^\delta(J^\delta) = \delta J^\delta.$$

The overlap-parts are transformed in two ways

$$\check{\mathfrak{D}}_l^\delta := \vee^\delta(\mathfrak{D}_l^\delta) = S_l \times \left[ 0_l^\delta, \sqrt{\delta} \right] \mathbf{e}_3^l \quad \text{and} \quad \hat{\mathfrak{D}}_l^\delta := \wedge^\delta(\mathfrak{D}_l^\delta) = S_l \times \left[ \hat{0}_l, \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right] \mathbf{e}_3^l,$$

with  $\left[ \hat{0}_l, \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right] \mathbf{e}_3^l$  representing the segment in direction  $\mathbf{e}_3^l$  with beginning in  $\hat{O}_l$  and ending at a distance  $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$  after  $\hat{O}_l$ .

But the geometries we introduced are not independent of  $\delta$  in the sense that  $\hat{J}^\delta$  is included in a ball of radius  $1/\sqrt{\delta}$ . So we consider the previous "scaled" geometries when  $\delta$  tends to 0 to define the **reference geometries** we will consider (see figure 9.7). More precisely :

- $L$  normalized multiconductor cables  $\check{\Omega}_l^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \check{\Omega}_l = \check{\Omega}_l^\delta,$

- the normalized knot area  $\widehat{\mathcal{K}}^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \widehat{\mathcal{K}} = \widehat{\mathcal{K}}^\delta = \delta \mathcal{K}^\delta$ ,
- the normalized junction  $J^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \widehat{J} = \mathcal{K} \bigcup_{l=1}^L S_l \times [\widehat{0}_l, \infty] \mathbf{e}_3^l$ ,
- $L$  normalized overlaps  $\check{\mathfrak{D}}_l^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \check{\mathfrak{D}}_l = O_l^\delta$  and  $\widehat{\mathfrak{D}}_l^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \widehat{\mathfrak{D}}_l = S_l \times [\widehat{0}_l, \infty] \mathbf{e}_3^l$ .

The characteristic coefficients and the source are also modified by the scaling

$$\check{\varepsilon}(x_T^\delta, x_3^\delta) = \check{\varepsilon}^\delta|_{\Omega_l^\delta} \left( \frac{x_T^\delta}{\delta}, x_3^\delta \right) \quad \text{and} \quad \widehat{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \check{\varepsilon}^\delta|_{\mathcal{K}^\delta} \left( \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \quad \text{and so on for } \check{\mu}^\delta \text{ and } \mathbf{J}_s^\delta,$$

and since they do not depend of  $x_3^{\delta,l}$  in  $\mathfrak{D}_l^\delta$ , we have

$$\check{\varepsilon}|_{\check{\mathfrak{D}}_l} = \widehat{\varepsilon}|_{\widehat{\mathfrak{D}}_l}, \quad \check{\mu}|_{\check{\mathfrak{D}}_l} = \widehat{\mu}|_{\widehat{\mathfrak{D}}_l} \quad \text{and} \quad \check{\mathbf{J}}_s|_{\check{\mathfrak{D}}_l} = \widehat{\mathbf{J}}_s|_{\widehat{\mathfrak{D}}_l}.$$

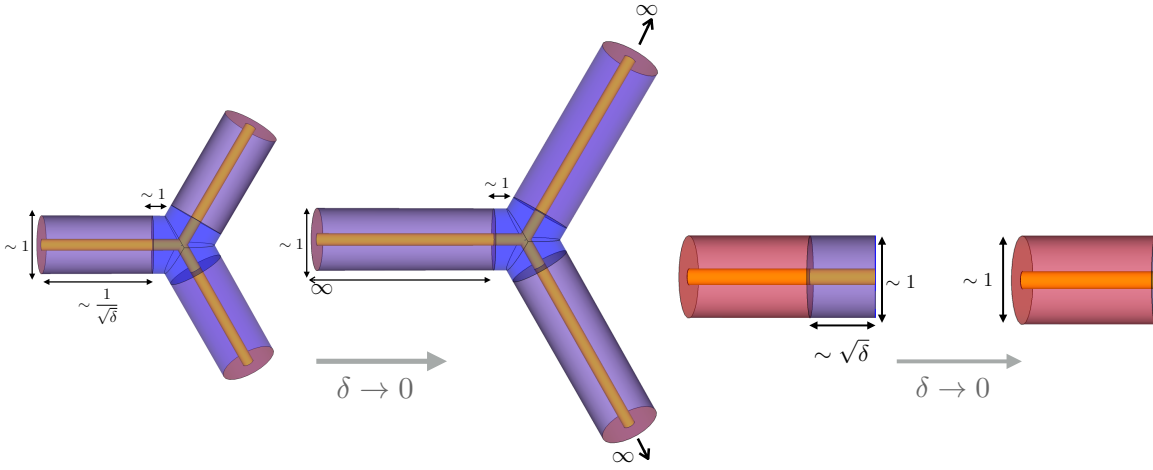


FIGURE 9.7 – To the reference geometry

### 9.2.3 Asymptotic expansions assumptions (and matching principle)

Now, we are in position to postulate our **asymptotic expansions**. The solution in the cable part  $\Omega_l^\delta$ , the exterior field, will be written as a polynomial in  $\delta$

$$\begin{cases} E^\delta(x_T^{\delta,l}, x_3^{\delta,l})|_{\Omega_l^\delta} = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \check{\mathbf{E}}_l^p \left( \frac{x_T^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right) + O(\delta^\infty), \\ H^\delta(x_T^{\delta,l}, x_3^{\delta,l})|_{\Omega_l^\delta} = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \check{\mathbf{H}}_l^p \left( \frac{x_T^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right) + O(\delta^\infty), \end{cases} \quad \text{with} \quad (x_T^{\delta,l}, x_3^{\delta,l}) \in \Omega_l^\delta \quad (9.7)$$

where the coefficients are expressed in the reference geometry

$$\check{\mathbf{E}}_l^p, \check{\mathbf{H}}_l^p : \Omega_l \rightarrow \mathbb{C}^3 \quad (\text{exterior electromagnetic fields}),$$

and in the junction part  $J^\delta$ , the interior field, will be written as polynomial in  $\delta$

$$E^\delta(\mathbf{x}^\delta)|_{J^\delta} = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \widehat{\mathbf{E}}_J^p \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) + O(\delta^\infty) \quad \text{and} \quad H^\delta(\mathbf{x}^\delta)|_{J^\delta} = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \widehat{\mathbf{H}}_J^p \left( \frac{\mathbf{x}^\delta}{\delta} \right) + O(\delta^\infty) \quad \mathbf{x}^\delta \in \Omega^\delta, \quad (9.8)$$

where the coefficients are express in the reference geometry

$$\widehat{\mathbf{E}}_J^p, \widehat{\mathbf{H}}_J^p : \widehat{J} \rightarrow \mathbb{C}^3 \quad (\text{interior electromagnetic fields}).$$

The solution has to be the same in the common areas (the overlaps parts  $\mathfrak{D}_l^\delta$ )

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \widehat{\mathbf{E}}_J^p \left( \frac{x_T^{\delta,l}}{\delta}, \frac{x_3^{\delta,l}}{\delta} \right) &= \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \check{\mathbf{E}}_l^p \left( \frac{x_T^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right), \text{ in } \mathfrak{D}_l^\delta, \\ \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \widehat{\mathbf{H}}_J^p \left( \frac{x_T^{\delta,l}}{\delta}, \frac{x_3^{\delta,l}}{\delta} \right) &= \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \check{\mathbf{H}}_l^p \left( \frac{x_T^{\delta,l}}{\delta}, x_3^{\delta,l} \right), \text{ in } \mathfrak{D}_l^\delta. \end{aligned} \tag{9.9}$$

It is called the **matching principle**. This principle claims that when  $\delta$  tends to 0, the behavior in  $O_l^\delta$  of the exterior field will match with the behavior of the interior field in  $\infty$  in the direction  $\mathbf{e}_3^l$ .

The coefficients  $\widehat{\mathbf{E}}_J^p$  and  $\widehat{\mathbf{H}}_J^p$  of the expansion in series of power  $\delta$  of the electromagnetic fields in  $J^\delta$  given in (9.8) are called the **interior electromagnetic fields** or the **near electromagnetic fields**. The coefficients  $\check{\mathbf{E}}_l^p$  and  $\check{\mathbf{H}}_l^p$  in expansion (9.7) of the electromagnetic fields in the cable parts are called the **exterior electromagnetic fields** or the **far electromagnetic fields**. We are interested in determining the electromagnetic fields  $\widehat{\mathbf{E}}_J^p$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}_J^p$ ,  $\check{\mathbf{E}}_l^p$  and  $\check{\mathbf{H}}_l^p$ . But, in fact, that is not necessary for the development of the 1D model. As we shall go on to examine, only some 1D quantities related to  $\widehat{\mathbf{E}}_J^p$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}_J^p$ ,  $\check{\mathbf{E}}_l^p$  and  $\check{\mathbf{H}}_l^p$  will be needed.

### 9.2.4 The 1D improved model

We aim at transforming through this analysis the initial problem (9.4, 9.5) posed on  $\Omega^\delta$  into a **1D waves propagation on a graph** (see figure 9.8). A quantum graph (see [49]) is a metric graph equipped with a waves operator along the edges and some conditions on the nodes, called Kirchhoff's laws, connecting the quantities evaluated on the edges together. The cable part, the exterior field (sometimes called far-field), will give this waves operator (it will be the telegrapher's equation), and the junction part, the interior field (sometimes called near-field), with the matching principle (9.9) will give us the Kirchhoff's laws.

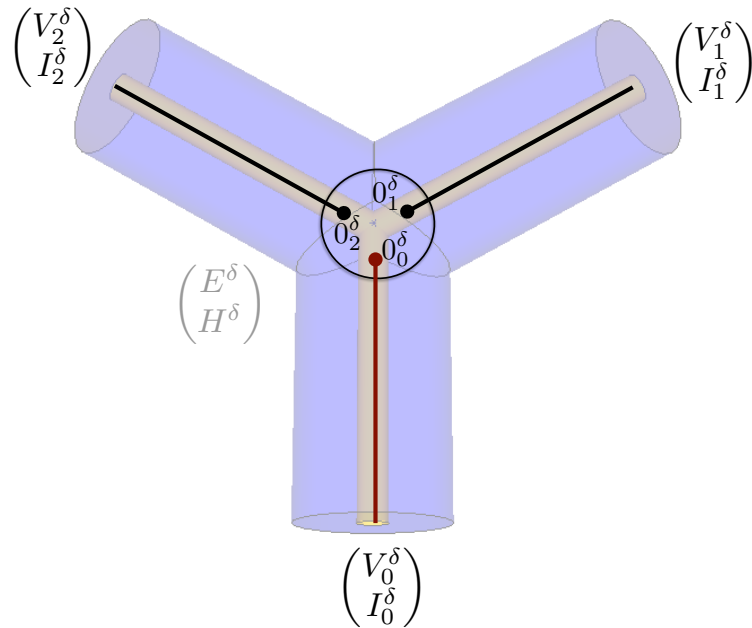


FIGURE 9.8 – The quantum graph as the skeleton of the junction geometry

#### Model of the cable

We include the asymptotic expansion assumption (9.7) into to the Maxwell's equations (9.4, 9.5) to perform the asymptotic analysis in the cable. This analysis was done in the part II for order 0 to 2 and contains much more details than the little summary we will do. It enables us to transform the 3D Maxwell's equation (9.4) to 1D and 2D considerations. So the reader must be careful with the differential operators : some are 3D (**grad**, **Div**, **curl**) others are 2D ( $\nabla$ , **div**, **rot**, **rot**). The appendix 10 gives the definition of these operators and some useful formulae.

The physics of the model is done in [59]. We will only recall the results that we use. We make a new assumption about the source in order to simplify the writing of the reconstruction formulae. For reasons of brevity, in this paragraph, we will denote by  $(x, x_3)$  the local coordinate of  $\Omega_l$  instead of  $(x_T, x_3^{\delta, l})$ .

**Hypothesis 9.2.2.** *The source*

$$\check{\mathbf{J}}_s = \begin{pmatrix} \check{J}_{s,T} \\ \check{J}_{s,3} \end{pmatrix} := \vee^\delta(\mathbf{J}_s^\delta),$$

namely the current density, is 2D divergence free

$$\mathbf{div} \check{J}_{s,T} = 0.$$

This assumption implies that the transverse part of the current density can be written as a rotational

$$\check{J}_{s,T} = \mathbf{rot} \left[ \zeta + \sum_{q=1}^Q I_{s,q,l}^0(x_3, s) \psi^q(S_{x_3}, 1) \right]$$

with the current source

$$\mathbf{I}_{s,1}^0(x_3, s) = (I_{s,q,l}^0(x_3, s))_{q=1:Q}, \quad I_{s,q,l}^0(x_3, s) = \int_{\partial_q S} \check{J}_{s,T} \cdot n, \quad (9.10)$$

and the potentials

$$\psi^q(S_{x_3}, 1) \in H^1(S_{x_3}^l \setminus \Gamma)_{/\mathbb{R}} \quad \text{and} \quad \zeta \in H^1(S_{x_3}^l)_{/C}$$

solution of the following problems :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \psi^q(S_{x_3}, 1) = 0, \quad \text{in } S_{x_3}^l \setminus \partial_q \Gamma_l, \\ \partial_n \psi^q(S_{x_3}, 1) = 0, \quad \text{on } \partial S_{x_3}^l, \\ [\psi^q(S_{x_3}, 1)] = \delta_{qk}, \quad \text{on } \Gamma_k, \quad k \leq Q, \\ [\partial_n \psi^q(S_{x_3}, 1)] = 0 \quad \text{on } \Gamma_k, \quad k \leq Q. \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{find } \zeta \in H^1(S_{x_3}^l)_{/C} \text{ such that } \forall \tilde{\zeta} \in H^1(S_{x_3}^l)_{/C} \\ \int_{S_{x_3}^l} \mathbf{rot} \zeta \cdot \mathbf{rot} \tilde{\zeta} = \int_{S_{x_3}^l} \check{J}_{s,T} \cdot \mathbf{rot} \tilde{\zeta}. \end{array} \right. \quad (9.11)$$

First, we define the exterior electric potentials  $V_{q,l}^p$  and currents  $I_{q,l}^p$  in cable  $\check{\Omega}_l^\delta$  as

$$V_{q,l}^p(x_3) := \int_{S_{x_3}^l \times \{x_3\}} \check{\mathbf{E}}_l^p \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad -I_{q,l}^p(x_3) := \int_{S_{x_3}^l \times \{x_3\}} \check{\mathbf{H}}_l^p \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in [0_l^\delta, \infty[, \quad (9.12)$$

which are necessary to compute the exterior electromagnetic fields for  $p = 0, 1$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_l^p(x_T, x_3, s) &= \sum_{q=1}^Q \begin{pmatrix} \nabla \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} (x_T, x_3, s) V_{q,l}^p(x_3, s) + \check{\mathbf{E}}_l^{r,p}(x_T, x_3, s) \quad \text{in } \check{\Omega}_l, \\ \hat{\mathbf{H}}_l^p(x_T, x_3, s) &= \sum_{q=1}^Q \begin{pmatrix} \nabla \psi^q \\ 0 \end{pmatrix} (x_T, x_3, s) I_{q,l}^p(x_3, s) + \check{\mathbf{H}}_l^{r,p}(x_T, x_3, s) \quad \text{in } \check{\Omega}_l, \end{aligned} \quad (9.13)$$

where the harmonic potentials (see theorem 1.3.1)

$$\varphi_{e,q}(\cdot, x_3, s) := \varphi^q(\check{\varepsilon}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}^l) \quad \text{and} \quad \psi_{m,q}(\cdot, x_3, s) := \psi^q(\check{\mu}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}^l)$$

are by definition the solution in  $H^1(S_{x_3})$  and  $H^1(S_{x_3} \setminus \partial_l \Gamma_q)_{/C}$  of the elliptic problems :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div}(\check{\varepsilon} \nabla \varphi_{e,q}) = 0, \quad \text{in } S_{x_3}^l, \\ \varphi_{e,q} = 0, \quad \text{on } \partial_0 S_{x_3}^l, \\ \varphi_{e,q} = \delta_{qk}, \quad \text{on } \partial_k S_{x_3}^l, \quad k \leq Q, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div}(\check{\mu} \nabla \psi_{m,q}) = 0, \quad \text{in } S_{x_3}^l \setminus \partial_l \Gamma_q, \\ \check{\mu} \partial_n \psi_{m,q} = 0, \quad \text{on } \partial S_{x_3}^l, \\ [\psi_{m,q}] = \delta_{qk}, \quad [\check{\mu} \partial_n \psi_{m,q}] = 0 \quad \text{on } \Gamma_k, \quad k \leq Q. \end{array} \right. \quad (9.14)$$

and the conjugated harmonic potentials :

$$\psi_{e,q}(\cdot, x_3, s) := \psi^q(\check{\varepsilon}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}^l) \in H^1(S_{x_3} \setminus \partial_l \Gamma_q)_{/C} \quad \text{and} \quad \varphi_{m,q}(\cdot, x_3, s) := \varphi^q(\check{\mu}(\cdot, x_3, s), S_{x_3}^l) \in H^1(S_{x_3})$$

are solution of

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\tilde{\varepsilon} \nabla \psi_{e,q}) = 0, & \text{in } S_{x_3}^l \setminus \partial_l \Gamma_q, \\ \tilde{\varepsilon} \partial_n \psi_{e,q} = 0, & \text{on } \partial S_{x_3}^l, \\ [\psi_{e,q}] = \delta_{qk}, \quad [\tilde{\varepsilon} \partial_n \psi_{e,q}] = 0 & \text{on } \Gamma_k, \quad k \leq Q. \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\tilde{\mu} \nabla \varphi_{m,q}) = 0, & \text{in } S_{x_3}^l, \\ \varphi_{m,q} = 0, & \text{on } \partial_0 S_{x_3}^l, \\ \varphi_{m,q} = \delta_{qk}, & \text{on } \partial_k S_{x_3}^l, \quad k \leq Q. \end{array} \right. \quad (9.15)$$

The residuals  $\check{\mathbf{E}}_l^{r,p}$  and  $\check{\mathbf{H}}_l^{r,p}$  satisfy :

$$\int_{S_{x_3}^l} \tilde{\varepsilon} \begin{pmatrix} \nabla \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \check{\mathbf{E}}_l^{r,p} = 0 \quad \text{and} \quad \int_{S_{x_3}^l} \tilde{\mu} \begin{pmatrix} \nabla \psi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \check{\mathbf{H}}_l^{r,p} = 0.$$

The vectorial exterior electrical potential  $\mathbf{V}_l^p = (V_{q,l}^p)_{q,l \in S_{x_3}^l}$  and exterior electrical current  $\mathbf{I}_l^p = (I_{q,l}^p)_{q,l \in S_{x_3}^l}$  for order  $p = 0, 1$  (higher order are much more complicated) are solution of the telegrapher's equations for  $x_3 \in [0_l^\delta, \infty[$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}_e^l(x_3, s) \mathbf{V}_l^0(x_3, s) + \partial_3 \mathbf{I}_l^0(x_3, s) = \mathbf{I}_{s,1}^0(x_3, s), \\ \mathbf{Z}_m^l(x_3, s) \mathbf{I}_l^0(x_3, s) + \partial_3 \mathbf{V}_l^0(x_3, s) = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}_e^l(x_3, s) \mathbf{V}_l^1(x_3, s) + \partial_3 \mathbf{I}_l^1(x_3, s) = \mathbf{I}_{s,1}^1(x_3, s), \\ \mathbf{Z}_m^l(x_3, s) \mathbf{I}_l^1(x_3, s) + \partial_3 \mathbf{V}_l^1(x_3, s) = 0, \end{array} \right. \quad (9.16)$$

where the source is

$$\mathbf{I}_{s,1}^1(x_3, s) = (I_{s,q,l}^1(x_3, s))_{q=1:Q}, \quad I_{s,q,l}^1(x_3, s) = \partial_3 \left( \int_{S_{x_3}} \hat{J}_{s,3} \overline{(\varphi_{e,q} - \varphi_{m,q})} \right) + \int_{S_{x_3}} \hat{J}_{s,3} \overline{\partial_3 \varphi_{e,q}} \quad (9.17)$$

and the Gram matrices are

$$\mathbf{Y}_e^l(x_3, s) := \mathbf{Y}(\tilde{\varepsilon}(\cdot, x_3, s), S_l), \quad \mathbf{Z}_m^l(x_3, s) := \mathbf{Z}(\tilde{\mu}(\cdot, x_3, s), S_l). \quad (9.18)$$

defined by

$$\mathbf{Y}_e^l(x_3, s) = \left( (\mathbf{Y}_e)_{q,q'}(x_3, s) \right)_{q,q'}, \quad (\mathbf{Y}_e)_{q,q'}(x_3, s) = \int_{S_{x_3}^l} \tilde{\varepsilon} \nabla \varphi_e^{q,l}(\cdot, x_3, s) \cdot \overline{\nabla \varphi_e^{q',l}(\cdot, x_3, s)}, \quad (9.19)$$

$$\mathbf{Z}_m^l(x_3, s) = \left( (\mathbf{Z}_m)_{q,q'}(x_3, s) \right)_{q,q'}, \quad (\mathbf{Z}_m)_{q,q'}(x_3, s) = \int_{S_{x_3}^l} \tilde{\mu} \nabla \psi_m^{q,l}(\cdot, x_3, s) \cdot \overline{\nabla \psi_m^{q',l}(\cdot, x_3, s)}. \quad (9.20)$$

They are not the same quantities compared to the initial problem (9.4), the electromagnetic fields  $E, H$ , which will be studied in the final model that is the quantum graph but new quantities  $\mathbf{V}_l^\delta = \mathbf{V}_l^0 + \delta \mathbf{V}_l^1 + o(\delta)$  and  $\mathbf{I}_l^\delta = \mathbf{I}_l^0 + \delta \mathbf{I}_l^1 + o(\delta)$  that we think are the variables of interest to the engineers. It is a change in comparison to the article [43]. The formula (9.13) enables us to recover the electromagnetic fields in order to compare with other models since we can calculate  $E_l^{r,0} = H_l^{r,0} = 0$  (see equation (5.14)) and

$$E_l^{r,1} = \begin{pmatrix} \nabla \zeta_e^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ E_{l,3}^{r,1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad H_l^{r,1} = \tilde{\mu}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \zeta_m^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ H_{l,3}^{r,1} \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

with the transverse electrostatic and magneto-static potentials

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\tilde{\varepsilon} \nabla \zeta_e^1) = \partial_3 \hat{J}_{s,3}, & \text{in } S_{x_3} \\ \zeta_e^1 = 0, & \text{on } \partial S_{x_3} \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}(\tilde{\mu}^{-1} \mathbf{rot} \zeta_m^1) = \hat{J}_{s,3}, & \text{in } S_{x_3} \\ \zeta_m^1 = 0, & \text{on } \partial S_{x_3} \end{array} \right.$$

and with the longitudinal fields (see proposition 5.2.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{l,3}^{r,1} = \sum_{q=1}^Q \partial_3 \varphi_e^{q,l} V_q^0 - \sum_{q,q'=1}^N (\varphi_e^{q,l} - \varphi_m^{q,l}) (Z_m)_{q,q'} I_{q'}^0 \\ H_{l,3}^{r,1} = \sum_{q=1}^Q \langle \partial_3 \psi_m^{q,l} \rangle_{\tilde{\mu}} I_q^0 - \sum_{q,q'=1}^Q \langle \psi_m^{q,l} - \psi_e^{q,l} \rangle_{\tilde{\mu}} (Y_e)_{q,q'} V_l^0 + \sum_{q=1}^Q I_{s,q,l}^0 \left( \langle \psi_m^{q,l} \rangle_{\tilde{\mu}} - \langle \psi^q(S, 1) \rangle_{\tilde{\mu}} \right) - \langle \zeta_J \rangle_{\tilde{\mu}} \end{array} \right. \quad (9.22)$$

with

$$\langle \mathbf{u} \rangle_{\check{\mu}} := \mathbf{u} - \frac{\int_{S_{x_3}} \check{\mu} \mathbf{u}}{\int_{S_{x_3}} \check{\mu}}.$$

Be careful, if  $\mathbf{I}_{s,l}^0$  and  $\mathbf{I}_{s,l}^1$  are null then  $\mathbf{V}_l^0, \mathbf{I}_l^0$  and  $\mathbf{I}_l^1, \mathbf{I}_l^1$  are not necessarily null because they can jump in the junction part.

The sole things that remains to be done to determine completely of the exterior fields is the establishment of relations between  $\mathbf{V}_l^0, \mathbf{I}_l^0$  and  $\mathbf{V}_l^1, \mathbf{I}_l^1$  for  $l = 0 \dots L$ , that is to say the Kirchhoff's rules. We will find them by studying the interior fields and the matching principle.

### In the junction

The junction part is a way more difficult than the cable one. We introduce the expansion (9.8) in the Maxwell's equation (9.4) and we indentify the terms in power of  $\delta^p$  ( with the convention  $\widehat{\mathbf{E}}_J^p, \widehat{\mathbf{H}}_J^p = 0, p < 0$ )

$$\begin{cases} \widehat{\varepsilon} \widehat{\mathbf{E}}_J^p - \mathbf{curl} \widehat{\mathbf{H}}_J^{p+1} = \delta_0^p \widehat{\mathbf{J}}_s, & \text{in } \widehat{J}, \\ \widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}}_J^p + \mathbf{curl} \widehat{\mathbf{E}}_J^{p+1} = 0, & \text{in } \widehat{J}, \\ \mathbf{Div}(\widehat{\varepsilon} \widehat{\mathbf{E}}_J^{p+1}) = 0, & \text{in } \widehat{J}, \\ \mathbf{Div}(\widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}}_J^{p+1}) = 0, & \text{in } \widehat{J}, \end{cases} \quad (9.23)$$

completed with the following boundary conditions

$$\widehat{\mathbf{E}}_J^p \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{H}}_J^p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial \widehat{J}. \quad (9.24)$$

We can also define the interior electric potentials  $V_{q,l}^p$  and currents  $I_{q,l}^p$  in each semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$  as

$$V_{q,l}^p(x_3^l) := \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mathbf{E}}_J^p \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad -I_{q,l}^p(x_3^l) := \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mathbf{H}}_J^p \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

In the end we aim at matching these interior potentials and currents  $V_{q,l}^p$  and  $I_{q,l}^p$  with the exterior ones  $\mathbf{V}_{q,l}^p$  and  $\mathbf{I}_{q,l}^p$ . In fact to obtain a 1D model, that is to say a way to determine completely the exterior electrical potentials and currents  $\mathbf{V}_l^0, \mathbf{I}_l^0$  and  $\mathbf{V}_l^1, \mathbf{I}_l^1$  for  $l = 0 \dots L$  (the equation (9.16) is a first step to do it), we just need to determine  $V_{q,l}^0, I_{q,l}^0$  and  $V_{q,l}^1, I_{q,l}^1$  and not  $\widehat{\mathbf{E}}_J^0, \widehat{\mathbf{H}}_J^0$  and  $\widehat{\mathbf{E}}_J^1, \widehat{\mathbf{H}}_J^1$ . So we will try do the bare minimum with the Div-curl problems (9.23) that we will use to study  $V_{q,l}^p$  and  $I_{q,l}^p$ . The complete study of the interior electromagnetic is possible with the use of profiles decomposition of the theorem 2.7.1 as we do in the previous chapter.

## 9.3 Div-curl problem in waveguides with $L$ bored cylindrical ends

As we have seen in the previous section, we need to study the following kinds of problem

$$\begin{cases} \mathbf{curl} E = B & \text{in } \widehat{J}, \\ \mathbf{Div}(\widehat{\varepsilon} E) = 0 & \text{in } \widehat{J}, \\ E \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \partial \widehat{J}, \end{cases} \quad (e) \quad \begin{cases} \mathbf{curl} H = D & \text{in } \widehat{J}, \\ \mathbf{Div}(\widehat{\mu} H) = 0 & \text{in } \widehat{J}, \\ H \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial \widehat{J}, \end{cases} \quad (h) \quad (9.26)$$

where the sources are solenoidal

$$\mathbf{Div} B = \mathbf{Div} D = 0, \quad (9.27)$$

and in a weight space censorship of the exponentially increasing functions

$$B, D \in L_w^2(J) := \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(J) \mid \int_{\widehat{\mathcal{D}}_l} e^{-\sqrt{x_3}} |u|^2 < \infty \right\}.$$

**Remark 9.3.1.** *Be aware, the letters  $E$  and  $H$  are for general problems not for the special one from our study.*

With a view to an application of the matching principle we will focus on the behavior of the interior field in  $\infty$  in the direction  $\mathbf{e}_3^l$ . In that context the exponentially decreasing functions will not have an effect on it. We will denote by

$$\#(e^{-x_3^l}) := \left\{ f; [0_l^\delta, \infty[ \mid \exists \lambda > 0, \lim_{x_3^l \rightarrow 0} e^{\lambda x_3^l} f(x_3^l) = 0 \right\}.$$

For all  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_l)_{0 \leq l \leq L}$  with  $\sigma_l \geq \hat{0}_l$  we define the comprehensive suite of compact domain

$$\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma}) = \hat{\mathcal{K}} \bigcup_{l=1}^L S_l \times [\hat{0}_l, \sigma_l] \mathbf{e}_3^l.$$

**Proposition 9.3.1.** *The compatibility relations that must satisfy the solution  $E$  and  $H$  of (9.26) are*

$$\int_{\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} B \cdot \overline{\mathbf{grad} u} = - \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} E \times \mathbf{e}_3^l \cdot (\mathbf{e}_3^l \times \overline{\mathbf{grad} u} \times \mathbf{e}_3^l)$$

for all  $u \in L^2(\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})) \cap H^1(\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma}) \setminus \Gamma)$  and

$$\sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} H \cdot \mathbf{e}_3^l = 0.$$

*Proof.* We have with the equation (9.26-(e))

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} B \cdot \overline{\mathbf{grad} u} & \stackrel{(9.26)}{=} \int_{\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} \mathbf{curl} E \cdot \overline{\mathbf{grad} u} \\ & \stackrel{(10.22)}{=} \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} E \times \mathbf{e}_3^l \cdot (\mathbf{e}_3^l \times \overline{\mathbf{grad} u} \times \mathbf{e}_3^l) \text{ with boundaries condition of } E \end{aligned}$$

We have with the equation (9.26-(h))

$$0 = \int_{\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} \mathbf{Div}(\hat{\mu} H) = \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} H \cdot \mathbf{e}_3^l.$$

□

We studied these problems in the chapter 2, but we will not have to compute them to obtain the wanted model. In fact we are only interested by the "electric potentials"  $V_{q,l}$  and "currents"  $I_{q,l}$  in each semi-stripe  $\hat{\Omega}_l$  associated with (9.26)

$$V_{q,l}(x_3^l) := \int_{S \times \{x_3^l\}} E \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad -I_{q,l}(x_3^l) := \int_{S \times \{x_3^l\}} H \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.28)$$

To do it we will only assume the existence of solution(s) of (9.26) (the proof and the way to compute it is given in the chapter 2)

**Lemma 9.3.1.** *There exists at least one solution  $E$  and respectively  $H$  to the problems (9.26-e) and (9.26-e) if the sources satisfy the compatibility conditions of the proposition 9.3.1.*

In fact we know that there is no single solution. In the next subsection we will study the kernels of (9.26-e) and (9.26-e), that is to say  $B = D = 0$ .

### 9.3.1 The harmonic spaces

The kernels of (9.26) are

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\hat{\varepsilon}, \hat{J}) & := \{ E \in L_w^2(\hat{J}); \mathbf{curl} E = 0, \mathbf{Div}(\hat{\varepsilon} E) = 0, \text{ and } E \times n|_{\hat{J}} = \mathbf{0} \} \\ \mathcal{H}(\hat{\mu}, \hat{J}) & := \{ H \in L_w^2(\hat{J}); \mathbf{curl} H = 0, \mathbf{Div}(\hat{\mu} H) = 0, \text{ and } H \cdot n|_{\hat{J}} = 0 \} \end{aligned}$$

which are described by the following theorem.



**Theorem 9.3.1.** *The harmonic spaces related to unbounded domains have for basis*

$$\mathcal{E}(\widehat{\varepsilon}, \widehat{J}) = \text{span} \{ \mathbf{grad} \Phi_e^q \}_{1 \leq q \leq Q} \quad \text{and} \quad \mathcal{H}(\widehat{\mu}, \widehat{J}) = \text{span} \{ \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} \}_{1 \leq q \leq Q, 2 \leq l \leq L}$$

with the  $Q$  electric harmonic potentials and the  $Q \times L$  magnetic harmonic potentials

$$\Phi_e^q \in H_w^1(\widehat{J}) \quad \text{and} \quad \Psi_m^{q,l} \in H_w^1(\widehat{J} \setminus \Gamma_{q,l}) / \mathbb{C}$$

solutions of

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\widehat{\varepsilon} \mathbf{grad} \Phi_e^q) = 0, \quad \text{in } \widehat{J} \\ \Phi_e^q = \delta_{q'}^{q'}, \quad \text{on } \partial_{q'} \widehat{J} \quad (0 \leq q' \leq Q) \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\widehat{\mu} \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}) = 0, \quad \text{in } \widehat{J} \setminus \Gamma_{q,l} \\ \partial_n \Psi_m^{q,l} = 0, \quad \text{on } \partial \widehat{J} \\ [\widehat{\mu} \partial_n \Psi_m^{q,l}] = 0, \quad [\Psi_m^{q,l}] = 1, \quad \text{on } \Gamma_{q,l}, \end{array} \right. \quad (9.29)$$

In the chapter 2 we have solved them by identifying an equivalent problem in a bounded domain with transparent boundaries conditions like in [31]. Indeed when the non-finite parts of the domains are cylindrical (as in our case since  $\widehat{\mathcal{D}}_l$  are homogeneous and cylindrical in the direction  $\mathbf{e}_3^l$ ) we can express the transparent boundaries conditions with a nonlocal operator sometimes called Steklov-Poincaré operator. To achieve this, we introduce the following  $L^2(S)$  basis made out of eigenvectors (for an usual  $L^2(S_l)$  scalar product with weight respectively  $\widehat{\varepsilon}$  and  $\widehat{\mu}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} -\widehat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{div}(\widehat{\varepsilon} \nabla \varphi_n^{l,e}) = \lambda_n^{l,e} \varphi_n^{l,e}, \quad \text{in } S, \\ \varphi_n^{l,e} = 0 \quad \text{on } \partial S \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\widehat{\mu}^{-1} \mathbf{div}(\widehat{\mu} \nabla \psi_n^{l,m}) = k_n^{l,m} \psi_n^{l,m}, \quad \text{in } S, \\ \partial_n \psi_n^{l,m} = 0 \quad \text{on } \partial S \\ \int_S \widehat{\mu} \nabla \psi_n^{l,m} = 0 \end{array} \right. \quad (9.30)$$

which are orthonormal

$$\delta_n^k = \int_{S_l} \widehat{\varepsilon} \varphi_n^{l,e} \varphi_k^{l,e} = \frac{\int_{S_l} \widehat{\varepsilon} \nabla \varphi_n^{l,e} \cdot \nabla \varphi_k^{l,e}}{\lambda_n^{l,e}} \quad \text{and} \quad \delta_n^k = \int_{S_l} \widehat{\mu} \psi_n^{l,m} \psi_k^{l,m} = \frac{\int_{S_l} \widehat{\mu} \nabla \psi_n^{l,m} \cdot \nabla \psi_k^{l,m}}{k_n^{l,m}}.$$

**Lemma 9.3.2.** *The problems (9.29) can be reduced as problems posed on the bounded geometry  $\widehat{K}$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\widehat{\varepsilon} \mathbf{grad} \Phi_e^q) = 0, \quad \text{in } \widehat{K} \\ \Phi_e^q = \delta_{q'}^{q'} \quad \text{on } \partial \mathcal{V}_k^l \quad (0 \leq q' \leq Q) \\ \Phi_e^q + \mathfrak{S}_e^l(\partial_3 \Phi_e^q) = \varphi_e^{q,l}, \quad \text{on } S_l \times \{\widehat{0}_l\} \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Div}(\widehat{\mu} \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}) = 0, \quad \text{in } \widehat{K} \\ \partial_n \Psi_m^{q,l} = 0 \quad \text{on } \partial J^\delta \\ \Psi_m^{q,l} + \mathfrak{S}_m^{l'}(\partial_3 \Psi_m^{q,l}) = (\delta_1^{l'} - \delta_l^{l'}) \psi_e^{q,l'} \quad \text{on } S_{l'} \times \{\widehat{0}_{l'}\}, \\ [\widehat{\mu} \partial_n \Psi_m^{q,l}] = 0, \quad [\Psi_m^{q,l}] = 1 \quad \text{on } \Gamma_{q,l}, \end{array} \right. \quad (9.31)$$

with the Steklov-Poincaré operators

$$\mathfrak{S}_e^l(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\varepsilon} u \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \right) \varphi_n^{l,e} \quad \text{and} \quad \mathfrak{S}_m^l(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\mu} u \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \right) \psi_n^{l,m}, \quad (9.32)$$

and could be completed in the semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$  by

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_e^q|_{\widehat{\mathcal{D}}_l}(x, x_3^l) = \varphi_e^{q,l}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q,l} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varphi_n^{l,e}(x), \\ \Psi_m^{q,l}|_{\widehat{\mathcal{D}}_l}(x, x_3^l) = (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \psi_m^{q,l}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{q,l,l'} e^{-\sqrt{k_n^{l,m}} x_3^l} \psi_n^{l,m}(x), \end{array} \right. \quad \text{with } (x, x_3^l) \in \widehat{\mathcal{D}}_l, \quad (9.33)$$

with the complexe constants

$$\alpha_n^{q,l} = - \frac{\int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^q \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} = \int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\varepsilon} \Phi_e^{q,l} \varphi_n^{l,e} - \int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\varepsilon} \varphi_e^{q,l} \varphi_n^{l,e}, \quad (9.34)$$

and

$$\beta_n^{q,l,l'} = -\frac{\int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\mu} \partial_3 \Psi_m^{q,l'} \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} = \int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\mu} \Psi_m^{q,l'} \psi_n^{l,m} - (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\mu} \psi_m^{q,l} \psi_n^{l,m}. \quad (9.35)$$

*Proof.* The behavior of  $\Phi_e^q$  and  $\Psi_m^{q,l}$  in the semi-stripe (9.33) is a consequence of variable separation and repudiation of exponentially increasing solution (since we want solution in  $L^2_{x_3}(\hat{\mathcal{D}}_l)$ ). To find (9.34, 9.35), we integrate (9.33) respectively over  $\hat{\varepsilon} \varphi_n^{l,e}$  and over  $\hat{\mu} \psi_n^{l,m}$  and we integrate the  $x_3^l$ -derivative (9.33) respectively over  $\hat{\varepsilon} \varphi_n^{l,e}$  and over  $\hat{\mu} \psi_n^{l,m}$ . We have so

$$\int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^q \varphi_n^{l,e} + \frac{\int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^q \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} = \int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\varepsilon} \varphi_e^{q,l} \varphi_n^{l,e} \quad (\text{and so for } \Psi_m^{q,l})$$

and so the definition of Steklov-Poincaré operators. A more detailed proof is given in lemma 2.4.3. □

**Remark 9.3.2.** We can begin our analysis in the semi-strip after  $\sigma_l \geq \hat{0}_l$

$$\alpha_n^{q,l} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} \sigma_l} = -\frac{\int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^q \varphi_n^{l,e}}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} = \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\varepsilon} \Phi_e^{q,l} \varphi_n^{l,e} - \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\varepsilon} \varphi_e^{q,l} \varphi_n^{l,e} \quad (9.36)$$

and

$$\beta_n^{q,l,l'} e^{-\sqrt{k_n^{l,m}} \sigma_l} = -\frac{\int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\mu} \partial_3 \Psi_m^{q,l'} \psi_n^{l,m}}{\sqrt{k_n^{l,m}}} = \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\mu} \Psi_m^{q,l'} \psi_n^{l,m} - (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\mu} \psi_m^{q,l} \psi_n^{l,m} \quad (9.37)$$

**Remark 9.3.3.** The behavior of  $\Phi_e^q$  and  $\Psi_m^{q,l}$  towards infinity are

$$\Phi_e^q \underset{x_3^l \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_e^{q,l} + \#(e^{-x_3^l}), \quad \Psi_m^{q,l'} \underset{x_3^l \rightarrow \infty}{\sim} (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \psi_m^{q,l} + \#(e^{-x_3^l}) \quad \text{and} \quad \partial_3 \Phi_e^q, \partial_3 \Psi_m^{q,l'} \underset{x_3^l \rightarrow \infty}{\sim} 0 + \#(e^{-x_3^l})$$

**Theorem 9.3.2.** There exist solutions of the div-curl problems (9.26) in the space  $L^2_w(J)$ . It could be written with :

$$E = \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}_q \mathbf{grad} \Phi_e^q + E^R(B) \quad \text{and} \quad H = - \sum_{q=1, l=1}^{Q,L} \mathbf{J}_{q,l} \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} + H^R(D) \quad (9.38)$$

with  $\mathbf{U}_q$  and  $\mathbf{J}_{q,l}$  for  $q = 1 \dots Q$  and  $l = 1 \dots L$  some complex constants, the potentials  $\Phi_e^q$  and  $\Psi_m^{q,l}$  defined in (9.29) and the residual  $E^R(B)$  and respectively  $H^R(D)$  are solution of (9.26-e) and (9.26-h) in

$$L^2_w(\hat{J})_{/\mathcal{E}(\hat{\varepsilon}, \hat{J})} \quad \text{and} \quad L^2_w(\hat{J})_{/\mathcal{H}(\hat{\mu}, \hat{J})}.$$

*Proof.* We know with the lemma 9.3.1 that there exists  $E$  and  $H$  solutions of (9.26-e) and (9.26-h). Since

$$\sum_{q=1}^Q \mathbf{U}_q \mathbf{grad} \Phi_e^q \in \mathcal{E}(\hat{\varepsilon}, \hat{J}) \quad \text{and} \quad \sum_{q=1, l=1}^{Q,L} \mathbf{J}_{q,l} \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l} \in \mathcal{H}(\hat{\mu}, \hat{J})$$

so  $E^R(B)$  and  $H^R(D)$  are also solution of (9.26-e) and (9.26-h). □

The constants  $\mathbf{U}_q$  and  $\mathbf{J}_{q,l}$  are consequences of the non simply connected geometry  $\hat{J}$ . They will play a crucial role. The next subsection will focus on the links between those constants and  $(\mathbf{V}_{q,l}, \mathbf{I}_{q,l})$  in each semi-stripe  $\hat{\mathcal{D}}_l$ . The 1D functions  $\mathbf{V}_{q,l}$  and  $\mathbf{I}_{q,l}$  are defined in (9.28) and are dedicated to, in the case of that application of these div-curl problem to the interior fields, look like the exteriors electrical potentials and currents that we want to study. To do that we don't need to compute  $E^R(B)$  and  $H^R(D)$  which is a difficult problem. Nevertheless, the reader interested in  $E^R(B)$  and  $H^R(D)$  can refer to the profils decomposition of the theorem 2.7.1. We will not look either into the lack of uniqueness of the theorem 9.3.2 about Div-curl problems (due to non simply connected geometry) because all the solutions will verify all the lemmata of the next subsection that constitute the minimum set of properties we need for our aims.

### 9.3.2 Links between this constants, the potentials $V_{q,l}$ and currents $I_{q,l}$

#### Problem in the semi-stripe $\widehat{\mathcal{D}}_l$

Since the geometry of the semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$  is cylindrical in the direction  $\mathbf{e}_3^l$ , the study is quite simple. The first lemma give us a relation between  $V_{q,l}$ ,  $I_{q,l}$  and  $U_q, J_{q,l}$ .

**Lemma 9.3.3.** *The potentials  $V_{q,l}$  are link to the projections  $U_q$  of  $E$  on the kernel  $\mathcal{E}(\widehat{\varepsilon}, J)$  by this way*

$$V_{q,l}(x_3^l) = U_q - \int_{S \times \{x_3^l\}} E^R(B) \times e_3^l \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.39)$$

Similarly for the currents  $I_{q,l}$  and the projections  $J_q$  of  $H$  on the kernel  $\mathcal{H}(\widehat{\mu}, J)$

$$\begin{cases} -I_{q,0}(x_3^0) = \sum_{l=1}^L J_{q,l} - \int_{S \times \{x_3^1\}} H^R(D) \times e_3^l \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ -I_{q,l}(x_3^l) = -J_{q,l} - \int_{S \times \{x_3^l\}} H^R(D) \times e_3^l \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } l \neq 0 \end{cases} \quad (9.40)$$

*Proof.* We put into the definition of the exterior potential  $V_{q,l}$  the decomposition of the electric exterior field proposed in the theorem 9.3.2

$$V_{q,l}(x_3^l) \stackrel{(9.28)}{=} \int_{S \times \{x_3^l\}} E \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(9.38)}{=} \sum_{q'=1}^Q U_{q'} \int_{S \times \{x_3^l\}} \nabla \Phi_e^{q'} \cdot \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} + \int_{S \times \{x_3^l\}} E^R(B) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix},$$

then we used the 2D green's formula (10.19) to ensure that

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \nabla \Phi_e^{q'} \cdot \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} = \int_{\partial_l \Gamma_q \times \{x_3^l\}} \nabla \Phi_e^{q'} \times n = \delta_q^{q'}$$

and so

$$V_{q,l}(x_3^l) \stackrel{(10.8)}{=} U_q + \int_{S \times \{x_3^l\}} E^R(B) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} = U_q - \int_{S \times \{x_3^l\}} E^R(B) \times e_3^l \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The proof is quite similar for  $I_{q,l}$ . By using again (9.38) we have

$$-I_{q,l}(x_3^l) = - \sum_{q'=1, l'=1}^{Q,L} J_{q',l'} \int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{grad} \Psi_m^{q',l'} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{S \times \{x_3^l\}} H^R(D) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}$$

then with (9.33), we have

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{grad} \Psi_m^{q',l'} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} = (\delta_0^l - \delta_{l'}^l) \int_{S \times \{x_3^l\}} \nabla \psi_m^{q',l'} \cdot \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} + \sum_n \beta_n^{q',l,l'} e^{-\sqrt{k_n^{l,m}} x_3^l} \int_{S \times \{x_3^l\}} \nabla \psi_n^{l,m} \cdot \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l}.$$

We simply have to note that

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \nabla \psi_n^{l,m} \cdot \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} = 0$$

and

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \nabla \psi_m^{q,l} \cdot \mathbf{rot} \varphi_m^{q,l} = -\delta_q^{q'}.$$

Thus we have

$$-I_{q,l}(x_3^l) = - \sum_{l'=1}^L (\delta_{l'}^l - \delta_0^l) J_{q,l'} - \int_{S \times \{x_3^l\}} H^R(D) \times e_3^l \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

The following lemma that is a consequence of the previous one allows us to determine up to a constant the behavior of the "electric potentials"  $V_{q,l}$  and "currents"  $I_{q,l}$  in the semi-stripe from the source  $B$  and  $D$  :

**Lemma 9.3.4.** *The "electrical potentials"  $V_{q,l}$  and "currents"  $I_{q,l}$  satisfy*

$$\partial_3 V_{q,l}(x_3^l) = \int_{S \times \{x_3^l\}} B \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad -\partial_3 I_{q,l}(x_3^l) = \int_{S \times \{x_3^l\}} D \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.41)$$

*Proof.* We have with the equations of the Div-curl problem (9.26-e)

$$\begin{aligned} \int_{S \times \{x_3^l\}} B \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} &= \int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{curl} E^R(B) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(10.16)}{=} \int_{S \times \{x_3^l\}} (e_3 \times \partial_3 E_T^R(B) + \mathbf{rot} E_3^R(B)) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

then we use the lemma 9.3.3

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} B \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(9.39)}{=} \partial_3 \mathbf{V}_{q,l}(x_3^l) + \int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{rot} E_3^R(B) \cdot \nabla \psi_e^{q,l}.$$

Since we have on the boundary  $E^R(B) \times n|_{\partial S} = 0$  we deduce with (10.12) that  $E_3^R(B)|_{\partial S} = 0$  and so with the 2D-Green's formula (10.18)

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{rot} E_3^R(B) \cdot \nabla \psi_e^{q,l} = 0.$$

Similarly, we have

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} D \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} = -\partial_3 \mathbf{I}_{q,l}(x_3^l) + \int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{rot} H_3^R(D) \cdot \nabla \varphi_m^{q,l},$$

and with the 2D-Green's formula (10.19)

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{rot} H_3^R(D) \cdot \nabla \varphi_m^{q,l} = \int_{\partial S \times \{x_3^l\}} H_3^R(D) (\nabla \varphi_m^{q,l} \times n) = 0.$$

we thus conclude for the wanted formula.  $\square$

If  $B$  and  $D$  have polynomials behavior according to  $x_3^l$  on  $\hat{\mathcal{D}}_l$ , then the "electrical potentials"  $\mathbf{V}_{q,l}$  and "currents"  $\mathbf{I}_{q,l}$  have also a polynomials behavior. But this lemma does not enable us to determine the term of order 0 of the polynomials. The following subsection will give a link between the interior potentials and currents of each branches.

### Problem in a compact that include the knot area

We going to rework the compatibly condition on the computation domain

$$\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{for all } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_l)_{0 \leq l \leq L} \quad \text{with } \sigma_l \geq \hat{0}_l$$

to rewrite them of the form of the two following lemmata.

**Lemma 9.3.5.** *We have the interior loop-rule for all  $1 \leq q \leq Q$  and  $1 \leq l \leq L$*

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0) - \mathbf{V}_{q,l}(\sigma_l) &= \int_{\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} B \cdot \overline{\mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}} + \sum_{\tilde{l}=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_{\tilde{l}} \times \{\sigma_{\tilde{l}}\}} \hat{\mu} \partial_3 \overline{\Psi_m^{q,\tilde{l}}} \psi_n^{\tilde{l},m} \right) \left( \int_{S_{\tilde{l}} \times \{\sigma_{\tilde{l}}\}} (B \cdot e_3^{\tilde{l}}) \psi_n^{\tilde{l},m} \right)}{\sqrt{k_n^{\tilde{l},m}}} \\ &\quad + \int_{S_0 \times \{\sigma_0\}} (B \cdot e_3^0) (\psi_e^{q,0} - \psi_m^{q,0}) - \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (B \cdot e_3^l) (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) \end{aligned} \tag{9.42}$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} B \cdot \overline{\mathbf{grad} \Psi_m^{q,\tilde{l}}} &\stackrel{(9.38)}{=} \int_{\hat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} \mathbf{curl} E^R(B) \cdot \overline{\mathbf{grad} \Psi_m^{q,\tilde{l}}} \quad \text{definition of the profiles } E^R(B) \\ &\stackrel{(10.22)}{=} \underbrace{- \sum_{\tilde{l}=0}^L \int_{S_{\tilde{l}} \times \{\sigma_{\tilde{l}}\}} E^R(B) \times e_3^{\tilde{l}} \cdot \left( e_3^{\tilde{l}} \times \overline{\mathbf{grad} \Psi_m^{q,\tilde{l}}} \times e_3^{\tilde{l}} \right)}_{=(\text{term 1})} \quad \text{with boundaries condition of } E^R(B). \end{aligned}$$

The expression of (term1) can be written in a different way in order to make the elements of (9.42) appear

$$\begin{aligned}
 \text{(term 1)} & \stackrel{(10.13)}{=} - \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^l \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla \Psi_m^{q,\bar{l}}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \stackrel{(9.33)}{=} - \int_{S_0 \times \{\sigma_0\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^0 \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla \psi_e^{q,0}} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{S_{\bar{l}} \times \{\sigma_{\bar{l}}\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^{\bar{l}} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla \psi_e^{q,\bar{l}}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad + \int_{S_0 \times \{\sigma_0\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^0 \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla (\psi_e^{q,0} - \psi_m^{q,0})} \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{S_{\bar{l}} \times \{\sigma_{\bar{l}}\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^{\bar{l}} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla (\psi_e^{q,\bar{l}} - \psi_m^{q,\bar{l}})} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad - \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\beta_n^{q,\bar{l},l}} e^{-\sqrt{k_n^{l,m}} x_3^l} \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^l \cdot \nabla \psi_n^{l,m}.
 \end{aligned}$$

We then have with the lemma 9.3.3 since  $\psi_e^{q,\bar{l}}$  is real in  $\hat{\mathcal{D}}_l$

$$- \int_{S_0 \times \{\sigma_0\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^0 \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla \psi_e^{q,0}} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{S_{\bar{l}} \times \{\sigma_{\bar{l}}\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^{\bar{l}} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla \psi_e^{q,\bar{l}}} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(9.39)}{=} \mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0) - \mathbf{V}_{q,\bar{l}}(\sigma_{\bar{l}}).$$

We then have for any  $u \in H^1(S_l \times \{\sigma_l\})$  which not jump by 2D-Green's formula (10.18)

$$\int_{S_l \times \{\sigma_l\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^l \cdot \nabla u \stackrel{(10.5)}{=} - \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \text{rot } E^R(D) u - \int_{\partial S_l \times \{\sigma_l\}} E^R(D) \times n u$$

and since (10.16) we have  $\text{rot } E^R(D) = \text{curl } E^R(D) \cdot \mathbf{e}_3^l = B \cdot \mathbf{e}_3^l$

$$\int_{S_l \times \{\sigma_l\}} E^R(B) \times \mathbf{e}_3^l \cdot \nabla u = - \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (B \cdot \mathbf{e}_3^l) u.$$

We take in particular  $u = (\psi_e^{q,0} - \psi_m^{q,0})$ ,  $u = (\psi_e^{q,\bar{l}} - \psi_m^{q,\bar{l}})$  and  $u = \psi_n^{l,m}$ , we obtain

$$\begin{aligned}
 \text{(term 1)} & = \mathbf{V}_{q,0}(\sigma_0) - \mathbf{V}_{q,\bar{l}}(\sigma_{\bar{l}}) - \int_{S_0 \times \{\sigma_0\}} (B \cdot \mathbf{e}_3^0) (\psi_e^{q,0} - \psi_m^{q,0}) + \int_{S_{\bar{l}} \times \{\sigma_{\bar{l}}\}} (B \cdot \mathbf{e}_3^{\bar{l}}) (\psi_e^{q,\bar{l}} - \psi_m^{q,\bar{l}}) \\
 & \quad - \sum_{\bar{l}=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\beta_n^{q,\bar{l},l}} e^{-\sqrt{k_n^{l,m}} \sigma_{\bar{l}}} \left( \int_{S_{\bar{l}} \times \{\sigma_{\bar{l}}\}} (B \cdot \mathbf{e}_3^{\bar{l}}) \psi_n^{\bar{l},m} \right),
 \end{aligned}$$

then with the remark 9.3.2, we have

$$\overline{\beta_n^{q,\bar{l},l}} e^{-\sqrt{k_n^{l,m}} \sigma_{\bar{l}}} \left( \int_{S_{\bar{l}} \times \{\sigma_{\bar{l}}\}} (B \cdot \mathbf{e}_3^{\bar{l}}) \psi_n^{\bar{l},m} \right) = - \frac{\left( \int_{S_{\bar{l}} \times \{\sigma_{\bar{l}}\}} \hat{\mu} \partial_3 \overline{\Psi_m^{q,\bar{l}}} \psi_n^{\bar{l},m} \right) \left( \int_{S_{\bar{l}} \times \{\sigma_{\bar{l}}\}} (B \cdot \mathbf{e}_3^{\bar{l}}) \psi_n^{\bar{l},m} \right)}{\sqrt{k_n^{l,m}}}$$

and thus the wanted formula. □

In this lemma 9.3.5, we have chosen to express the "electrical" potential  $\mathbf{V}_{q,1}(\sigma_l)$  of each semi-stripe from the one of the semi-stripe number 0.

We also can express the second term of the right side of the equality (9.42) with the Steklov-Poincaré operators  $\mathfrak{S}_m^l$

$$\sum_{\bar{l}=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_{\bar{l}} \times \{\hat{\sigma}_{\bar{l}}\}} \hat{\mu} \partial_3 \overline{\Psi_m^{q,\bar{l}}} \psi_n^{\bar{l},m} \right) \left( \int_{S_{\bar{l}} \times \{\hat{\sigma}_{\bar{l}}\}} (B \cdot \mathbf{e}_3^{\bar{l}}) \psi_n^{\bar{l},m} \right)}{\sqrt{k_n^{l,m}}} = \sum_{\bar{l}=0}^L \int_{S_{\bar{l}} \times \{\hat{\sigma}_{\bar{l}}\}} \hat{\mu} \mathfrak{S}_m^{\bar{l}} \left( \partial_3 \overline{\Psi_m^{q,\bar{l}}} \right) \mathfrak{S}_m^{\bar{l}} \left( \hat{\mu}^{-1} (B \cdot \mathbf{e}_3^{\bar{l}}) \right).$$

**Lemma 9.3.6.** *We have the interior node-rule for all  $1 \leq q \leq Q$*

$$\begin{aligned}
 - \sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,1}(\sigma_l) & = \int_{\hat{\mathcal{K}}(\sigma)} D \cdot \overline{\text{grad } \Phi_e^q} + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (D \cdot \mathbf{e}_3^l) \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \\
 & \quad + \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (D \cdot \mathbf{e}_3^l) (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}).
 \end{aligned} \tag{9.43}$$

*Proof.* The equation (9.40) of the lemma 9.3.3 give the node-rule for all  $q \leq Q$

$$-\sum_{l=0}^L \mathbb{I}_{q,l}(\sigma_l) = -\sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\mu}^{-1} \mathbf{curl} \zeta_m(D) \times \mathbf{e}_3 \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.44)$$

that we can rewrite thanks to the harmonic potential  $\Phi_e^q$ . Indeed, we have

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathcal{K}}(\sigma)} D \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} &\stackrel{(9.38)}{=} \int_{\hat{\mathcal{K}}(\sigma)} \mathbf{curl} H^R(D) \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} \quad \text{definition of the profil } H^R(D) \\ &\stackrel{(10.22)}{=} - \int_{\partial \hat{\mathcal{K}}(\sigma)} H^R(D) \times \mathbf{n}_{\partial \hat{\mathcal{K}}(\sigma)} \cdot \left( \mathbf{n}_{\partial \hat{\mathcal{K}}(\sigma)} \times \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} \times \mathbf{n}_{\partial \hat{\mathcal{K}}(\sigma)} \right) \quad \text{Green's formula} \\ &\stackrel{(10.13)}{=} - \sum_{l=1}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} H^R(D) \times \mathbf{e}_3 \cdot \begin{pmatrix} \nabla \overline{\Phi_e^q} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{since } \Phi_e^q \text{ is constant on } \partial \mathcal{V}_k^l \\ &\stackrel{(9.44)}{=} - \sum_{l=1}^L \mathbb{I}_{q,l}(\sigma_l) + \sum_{l=1}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} H^R(D) \times \mathbf{e}_3 \cdot \left( \nabla \left[ \overline{\left( \varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q,l} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varphi_n^{l,e}} \right] \right). \end{aligned}$$

Since  $(\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l})$  and  $\varphi_n^{l,e}$  are null on the boundaries, we have by 2D-Green's formula (10.18)

$$\int_{\hat{\mathcal{K}}(\sigma)} D \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} \stackrel{(10.5)}{=} - \sum_{l=0}^L \mathbb{I}_{q,l}(\sigma_l) + \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \text{rot} H^R(D) \left[ (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q,l} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varphi_n^{l,e} \right]$$

and since (10.16) we have  $\text{rot} H^R(D) = \mathbf{curl} H^R(D) \cdot e_3^l = D \cdot e_3^l$  and so

$$\int_{\hat{\mathcal{K}}(\sigma)} D \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} = - \sum_{l=0}^L \mathbb{I}_{q,l}(\sigma_l) + \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (D \cdot e_3^l) \left[ (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q,l} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \varphi_n^{l,e} \right].$$

To finish, we know with the remark 9.3.2 that

$$\alpha_n^{q,l} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (D \cdot e_3^l) \varphi_n^{l,e} \stackrel{(9.36)}{=} - \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (D \cdot e_3^l) \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}}.$$

□

We also can express the second term of the right side of the equality (9.43) with the Steklov-Poincaré operators  $\mathfrak{S}_e^l$

$$\sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (D \cdot e_3^l) \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} = \sum_{l=1}^L \int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\mu} \mathfrak{S}_e^l \left( \partial_3 \overline{\Psi_e^q} \right) \mathfrak{S}_e^l \left( \hat{\varepsilon}^{-1} (D \cdot e_3^l) \right).$$

In particular if  $(B \cdot e_3^l) = \#(e^{-x_3^l})$  then the equation (9.42) of the lemma 9.3.5 become

$$\mathbb{V}_{q,0}(\sigma_0) - \mathbb{V}_{q,l}(\sigma_l) = \int_{\hat{\mathcal{K}}(\sigma)} B \cdot \overline{\mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}} + \int_{\partial_{HD} \hat{J}} \rho_{\mathbf{e},HD} \cdot \left( \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}} \times \mathbf{n} \right) + \#(e^{-x_3^l}), \quad (9.45)$$

and if  $(D \cdot e_3^l) = \#(e^{-x_3^l})$  the equation (9.43) of the lemma 9.3.6 become

$$-\sum_{l=1}^L \mathbb{I}_{q,1}(\sigma_l) = \int_{\hat{\mathcal{K}}(\sigma)} D \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} + \#(e^{-x_3^l}). \quad (9.46)$$

## 9.4 Application to the interior fields

We apply the results of the previous section to determine the interior fields  $\hat{\mathbb{E}}_J^p$  and  $\hat{\mathbb{H}}_J^p$  with source  $B = -\hat{\mu} H_J^{p-1}$  and  $D = \hat{\varepsilon} E_J^{p-1} - \delta_1^p \hat{J}_T$ .

**Remark 9.4.1.** *Since the source term is solenoidal (see hypothesis 9.2.2) and independent of the longitudinal variable in the overlap parts (see hypothesis 9.2.1), we have*

$$\int_{\partial_q S \times \{x_3^l\}} \hat{J}_{s,T} \cdot n = \int_{S \times \{x_3^l\}} \hat{J}_{s,T} \cdot \nabla \varphi_e = \int_{S \times \{x_3^l\}} \hat{J}_{s,t} \cdot \nabla \varphi_m = I_{s,q,l}^0(0_l^\delta) \quad \text{for } x_3^l \in \hat{\mathcal{D}}_l. \quad (9.47)$$

*Proof.* Indeed, the three first equalities are trivial with the use Green's formula since  $\hat{J}_{s,t}$  is solenoidal. Then we have in the overlap area

$$\check{J}_s|_{\hat{\mathcal{D}}_l} = \hat{J}_s|_{\hat{\mathcal{D}}_l}.$$

and thus the wanted formula.  $\square$

### 9.4.1 Order 0

**Lemma 9.4.1.** *For the order 0 the interior electrical potentials  $V_{q,l}^0$  and currents  $I_{q,l}^0$  are constant which satisfy the following interior Kirchhoff's laws for all  $1 \leq q \leq Q$*

$$\forall l = 0 \dots L, V_{q,l}^0 = V_{q,1}^0 \quad \text{and} \quad \sum_{l=1}^L I_{q,l}^0 = 0, \quad (9.48)$$

and the reconstruction formulae for the interior electromagnetic fields at order 0 are

$$\hat{E}_J^0 = \sum_{q=1}^Q V_{q,0}^0 \mathbf{grad} \Phi_e^q \quad \text{and} \quad \hat{H}_J^0 = - \sum_{q=1, l=1}^{Q,L} I_{q,l}^0 \mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}, \quad (9.49)$$

with the  $Q$  electrostatic's potentials and  $Q(L-1)$  magneto static's defined in (9.29).

*Proof.* Remember that at order 0 the source  $B, D$  are nul. The fact that the interior electrical potentials  $V_{q,l}^0$  and currents  $I_{q,l}^0$  are constant is a consequence of lemma 9.3.4. The interior Kirchhoff's laws are consequence of theorems 9.3.5 and 9.3.6. Then, the reconstruction formulae are consequences of (9.38) since  $E^R(B) = H^R(D) = 0$  and  $V_{q,l}^0 = U_q$  and  $I_{q,l}(x_3^l) = J_{q,l}$  as consequence of lemma 9.3.3.  $\square$

### 9.4.2 Order 1 - interior Kirchhoff's laws

The first order interior fields are given by the following Div-curl problems

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \hat{E}_J^1 = -\hat{\mu} \hat{H}_J^0, & \text{in } \hat{J}, \\ \mathbf{Div}(\hat{\varepsilon} \hat{E}_J^1) = 0, & \text{in } \hat{J}, \\ \hat{E}_J^1 \times n = 0, & \text{on } \partial \hat{J}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \mathbf{curl} \hat{H}_J^1 = \hat{\varepsilon} \hat{E}_J^0 - \hat{J}_s, & \text{in } \hat{J}, \\ \mathbf{Div}(\hat{\mu} \hat{H}_J^1) = 0, & \text{in } \hat{J}, \\ \hat{H}_J^1 \cdot n = 0, & \text{on } \partial \hat{J}. \end{cases} \quad (9.50)$$

**Lemma 9.4.2.** *The first order interior electrical potentials  $V_l^1$  and currents  $I_l^1$  are affine functions (up to inhomogeneous vectors)*

$$\begin{cases} V_l^1(x_3^l) = V_l^1(\hat{0}_l) - x_3^l \mathbf{Z}_m^l I_l^0 - \sum_{l'=1}^L \left[ \mathfrak{Z}^{l,l'}(x_3^l) - \mathfrak{Z}^{l,l'}(\hat{0}_l) \right], \\ I_l^1(x_3^l) = I_l^1(\hat{0}_l) - x_3^l \mathbf{Y}_e^l V_l^0 - \Upsilon^l(x_3^l) + \Upsilon^l(\hat{0}_l) + x_3^l \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta), \end{cases} \quad \text{with } x_3^l \in [\hat{0}_l, \infty[, \quad (9.51)$$

with the impedance  $\mathbf{Z}_m^l$  and the admittance  $\mathbf{Y}_e^l$  definded as in (9.18) and the inhomogeneous vectors

$$\Upsilon^l(x_3^l) = (\Upsilon_q^l(x_3^l))_{q=1 \dots Q} \quad \text{and} \quad \mathfrak{Z}^{l,l'} = \left( \mathfrak{Z}_q^{l,l'}(x_3^l) \right)_{q=1 \dots Q},$$

defined by

$$\Upsilon_q^l(x_3^l) := \int_{S_l \times \{x_3^l\}} (\hat{\varepsilon} \hat{E}_J^0 \cdot e_3^l) (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) \quad \text{and} \quad \mathfrak{Z}_q^{l,l'}(x_3^l) := \int_{S_l \times \{x_3^l\}} (\hat{\mu} \hat{H}_J^0 \cdot e_3^l) (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}). \quad (9.52)$$

*Proof. Step 1 : polynomial + exponetnionally decreasing behavior*

**For the interior electrical potentials**  $V_{q,l}^1(x_3^l)$

We use the behavior of the longitudinal of the interior potential  $V_{q,l}^1$  in the semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$  given in the lemma 9.3.4 (with  $B = -\widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0$ )

$$\partial_3 V_{q,l}^1(x_3^l) \stackrel{(9.41)}{=} - \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla(\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.53)$$

With the conjugation lemma 1.3.5 we recover the definition of the interior electrical current

$$- \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla \psi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{q'=1}^Q (\mathbf{Z}_m)_{q',q} \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi_m^{q',l} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(9.25)}{=} - \sum_{q'=1}^Q (\mathbf{Z}_m)_{q',q} \mathbf{I}_{q',l}^0. \quad (9.54)$$

Then we use the green's formula (10.18) (there are no jump since  $\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l} \in H^1(S)$ )

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla(\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{div} (\widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0) (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) + \int_{\partial S \times \{x_3^l\}} (\widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \mathbf{n}) (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}),$$

we thus have since  $\widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \mathbf{n} |_{\partial S}$

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla(\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{S \times \{x_3^l\}} \partial_3 (\widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \mathbf{e}_3^l) (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}).$$

We then recall that the shape  $S$  and  $\widehat{\mu}$  are homogenous according to the longitudinal variable  $x_3^l$

$$\int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla(\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_3 \left( \int_{S \times \{x_3^l\}} (\widehat{\mu}\widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \mathbf{e}_3^l) (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) \right) \stackrel{(9.49)}{=} \partial_3 (\mathfrak{Z}^{l,l'}(x_3^l)). \quad (9.55)$$

With (9.53, 9.54, 9.55), we have

$$\partial_3 V_{q,l}^1(x_3^l) = - \sum_{q'=1}^Q (\mathbf{Z}_m)_{q',q} - \mathbf{I}_{q',l}^0 \partial_3 (\mathfrak{Z}^{l,l'}(x_3^l)),$$

then we integrate to obtained the wanted formula.

**For the interior electrical currents**  $I_{q,l}^1(x_3^l)$

We use the Lemma 9.3.4 with  $D = \widehat{\varepsilon}\widehat{\mathbf{E}}_J^0 - \widehat{\mathbf{J}}$

$$\begin{aligned} \partial_3 I_{q,l}^1(x_3^l) &\stackrel{(9.41)}{=} - \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\varepsilon}\widehat{\mathbf{E}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mathbf{J}}_s \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_m^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{lemma 9.3.4 with } D = \widehat{\varepsilon}\widehat{\mathbf{E}}_J^0 - \widehat{\mathbf{J}}_s \\ &\stackrel{(9.47)}{=} - \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\varepsilon}\widehat{\mathbf{E}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla \varphi_e^{q,l} \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\varepsilon}\widehat{\mathbf{E}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \nabla(\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta) \\ &\stackrel{(1.20,10.18)}{=} - \sum_{q'=1}^Q (\mathbf{Y}_e)_{q',q} \int_{S \times \{x_3^l\}} \widehat{\mathbf{E}}_J^0 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q',l} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{S \times \{x_3^l\}} \mathbf{div} (\widehat{\varepsilon}\widehat{\mathbf{E}}_J^0) (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) + \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta) \\ &\stackrel{(9.25)}{=} - \sum_{q'=1}^Q \left[ (\mathbf{Y}_e)_{q',q} \mathbf{V}_{q',l}^0 + \partial_3 \left( \int_{S \times \{x_3^l\}} (\widehat{\varepsilon}\widehat{\mathbf{E}}_J^0 \cdot \mathbf{e}_3^l) (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) \right) \right] + \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta), \end{aligned}$$

then with the decomposition of the electric interior field (9.49)

$$\partial_3 \left( \int_{S \times \{x_3^l\}} (\widehat{\varepsilon}\widehat{\mathbf{E}}_J^0 \cdot \mathbf{e}_3^l) (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) \right) = \partial_3 (\Upsilon^l(x_3^l)).$$

□

The inhomogeneous vectors  $\Upsilon^l(x_3^l)$  and  $\mathfrak{Z}^{l,l'}(x_3^l)$  are null if the waves' velocity of the electromagnetic field is homogeneous in the overlap (like in chapter 8)

$$\widehat{\varepsilon}\widehat{\mu}|_{\widehat{\mathcal{D}}_l} = cte \Rightarrow \Upsilon^l(x_3^l) = \mathfrak{Z}^{l,l'}(x_3^l) = 0,$$

but if it is not the case the following lemma tells us how much is their importance.



**Lemma 9.4.3.** *The inhomogeneous vectors  $\Upsilon^l$  and  $\mathfrak{Z}^{l,l'}$  are decreasing exponentials functions*

$$\begin{cases} \Upsilon_q^l(x_3^l) := \sum_{q'=1}^Q \left( \int_{S_l \times \{x_3^l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^{q'} (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) \right) \mathbf{V}_{q',0}^0, x_3^l \rightarrow \infty \# \left( e^{-x_3^l} \right) \\ \mathfrak{Z}_q^{l,l'}(x_3^l) := - \sum_{q'=1, l'=1}^{Q,L} \left( \int_{S_l \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu} \partial_3 \Phi_m^{q',l'} (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) \right) \mathbf{I}_{q',l'}^0, x_3^l \rightarrow \infty \# \left( e^{-x_3^l} \right) \end{cases} \quad \text{with } x_3^l \in [\widehat{0}_l, \infty[ \quad (9.56)$$

*Proof.* We obtained (9.56) by putting the decomposition of interior field (9.49) in (9.52) and note with remark 9.3.3 that

$$\int_{S_l \times \{x_3^l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^{q'} (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) \underset{x_3^l \rightarrow \infty}{\sim} \# \left( e^{-x_3^l} \right), \quad \int_{S_l \times \{x_3^l\}} \widehat{\mu} \partial_3 \Phi_m^{q',l'} (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}) \underset{x_3^l \rightarrow \infty}{\sim} \# \left( e^{-x_3^l} \right).$$

□

**Lemma 9.4.4.** *The first order interior Kirchhoff's laws for all  $1 \leq q \leq Q$  are*

- interior loop-rule

$$\mathbf{V}_{q,0}^1(\sigma_0) - \mathbf{V}_{q,l}^1(\sigma_l) = + \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\sigma) \mathbf{I}_{q',l'}^0 + \mathfrak{Z}_q^{0,l'}(\sigma_0) - \mathfrak{Z}_q^{l,l'}(\sigma_l),$$

- interior node-rule

$$- \sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}^1(\sigma_l) = \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q,q'}(\sigma) \mathbf{V}_{q',0}^0 + \sum_{l=0}^L \Upsilon_q^l(\sigma_l) - I_{J,q}(\sigma),$$

with the "junction-impedance"  $\mathcal{Z}$  and "junction-admittance"  $\mathcal{Y}$

$$\mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\sigma) = \int_{\widehat{\mathcal{K}}(\sigma)} \widehat{\mu} \mathbf{grad} \Psi_m^{q',l'} \cdot \overline{\mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}} + \sum_{i=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_i \times \{\sigma_i\}} \widehat{\mu} \partial_3 \overline{\Psi_m^{q,l}} \psi_n^{l,m} \right) \left( \int_{S_i \times \{\sigma_i\}} \widehat{\mu} \partial_3 \Psi_m^{q',l'} \psi_n^{l,m} \right)}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \quad (9.57)$$

$$\mathcal{Y}_{q,q'}(\sigma) = \int_{\widehat{\mathcal{K}}(\sigma)} \widehat{\varepsilon} \mathbf{grad} \Phi_e^{q'} \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \quad (9.58)$$

and the junction source

$$I_{J,q}(\sigma) = \int_{\widehat{\mathcal{K}}(\sigma)} \widehat{\mathbf{J}}_s \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\mathbf{J}}_s \cdot e_3^l \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} + \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\mathbf{J}}_s \cdot e_3^l (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) \quad (9.59)$$

*Proof.* We use the theorem 9.3.5 with  $B = -\widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}}_J^0$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{q,0}^1(\sigma_0) - \mathbf{V}_{q,l}^1(\sigma_l) &\stackrel{(9.42)}{=} - \int_{\widehat{\mathcal{K}}(\sigma)} \widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot \overline{\mathbf{grad} \Psi_m^{q,l}} \\ &- \sum_{i=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_i \times \{\sigma_i\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Psi_m^{q,l}} \psi_n^{l,m} \right) \left( \int_{S_i \times \{\sigma_i\}} (\widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot e_3^i) \psi_n^{l,m} \right)}{\sqrt{k_n^{l,m}}} \\ &- \int_{S_0 \times \{\sigma_0\}} (\widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot e_3^1) (\psi_e^{q,1} - \psi_m^{q,1}) + \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} (\widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}}_J^0 \cdot e_3^l) (\psi_e^{q,l} - \psi_m^{q,l}), \end{aligned}$$

then we use the reconstruction formula of the interior magnetic field of order 0

$$\mathbf{V}_{q,0}^1(\sigma_0) - \mathbf{V}_{q,l}^1(\sigma_l) \stackrel{(9.49)}{=} + \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\sigma) \mathbf{I}_{q',l'}^0 + \mathfrak{Z}_q^{0,l'}(\sigma_0) - \mathfrak{Z}_q^{l,l'}(\sigma_l).$$

We use theorem 9.3.6 with  $D = \widehat{\varepsilon} \widehat{\mathbf{E}}_J^0 - \widehat{\mathbf{J}}_s$

$$\begin{aligned}
 -\sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}^1(\sigma_l) & \stackrel{(9.43)}{=} \int_{\widehat{\mathcal{K}}(\sigma)} \left( \widehat{\varepsilon} \widehat{\mathbf{E}}_J^0 - \widehat{\mathbf{J}}_s \right) \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \left( \widehat{\varepsilon} \widehat{\mathbf{E}}_J^0 - \widehat{\mathbf{J}}_s \right) \cdot e_3^l \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \\
 & + \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \left( \widehat{\varepsilon} \widehat{\mathbf{E}}_J^0 - \widehat{\mathbf{J}}_s \right) \cdot e_3^l \left( \varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l} \right) \\
 & \stackrel{(9.49)}{=} \sum_{q'=1}^Q \left[ \mathcal{Y}_{q,q'}(\sigma) + \sum_l \Upsilon_{q,q'}^l(\sigma_l) \right] \mathbf{v}_{q',1}^0 - I_{J,q}(\sigma)
 \end{aligned}$$

□

The next lemma will give us some formulae which will be useful for subsequent calculations of the second terms of the right sides of the equations (9.57, 9.58).

**Lemma 9.4.5.** *The part of  $\mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\sigma)$  about the semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$  can be written of the following form*

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} & = 2 \int_{\sigma_l}^{\infty} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^{q'} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \right) du \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q',l} \overline{\alpha_n^{q,l}} \sqrt{\lambda_n^{l,e}} e^{-2\sqrt{\lambda_n^{l,e}} \sigma_l},
 \end{aligned}$$

and the part of  $\mathcal{Y}_{q,q'}(\sigma)$  about the semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$  can be written of the following form

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\mu} \partial_3 \overline{\Psi_m^{q,l}} \psi_n^{l,m} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\mu} \partial_3 \Psi_m^{q',l'} \psi_n^{l,m} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} & = 2 \int_{\sigma_l}^{\infty} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\mu} \partial_3 \Psi_m^{q',l'} \partial_3 \overline{\Psi_m^{q,l}} \right) du \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{q',l',l} \overline{\beta_n^{q,l,l}} \sqrt{k_n^{l,m}} e^{-2\sqrt{k_n^{l,m}} \sigma_l}.
 \end{aligned}$$

*Proof.* The proof is based on the behavior of the potentials  $\Phi_e^{q'}$  and  $\Psi_m^{q',l'}$  in the semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$ .

$$\begin{aligned}
 2 \int_{\sigma_l}^{\infty} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^{q'} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \right) du & \stackrel{(9.33)}{=} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q',l} \overline{\alpha_n^{q,l}} \lambda_n^{l,e} \int_{\sigma_l}^{\infty} \left( e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} u} \right)^2 du \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q',l} \overline{\alpha_n^{q,l}} \sqrt{\lambda_n^{l,e}} e^{-2\sqrt{\lambda_n^{l,e}} \sigma_l},
 \end{aligned}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \stackrel{(9.37)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q',l} \overline{\alpha_n^{q,l}} \sqrt{\lambda_n^{l,e}} e^{-2\sqrt{\lambda_n^{l,e}} \sigma_l}.$$

The remainder of the lemma is proved with similar claims. □

**Remark 9.4.2.** *The "junction-impedance"  $\sigma \mapsto \mathcal{Z}(\sigma)$ , "junction-admittance"  $\sigma \mapsto \mathcal{Y}(\sigma)$  and "junction-source"  $\sigma \mapsto I_{J,q}(\sigma)$  are increasing tensors*

$$\begin{cases} \mathcal{Y}(\sigma) = \mathcal{Y}(\widehat{0}) + \sum_{l=0}^L \sigma_l \mathbf{Y}_e^l \\ \mathcal{Z}^{l,l'}(\sigma) = \mathcal{Z}^{l,l'}(\widehat{0}) + \sigma_0 \mathbf{Z}_m^0 + \delta_l^{l'} \sigma_l \mathbf{Z}_m^l \\ I_{J,q}(\sigma) = I_{J,q}(\widehat{0}) + \sum_{l=0}^L \sigma_l \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta) \end{cases} \quad (9.60)$$

*Proof.* The proof is again based on the behavior of the potentials  $\Phi_e^{q'}$  and  $\Psi_m^{q',l'}$  in the semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$ . For the "junction-admittance", we have

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{q,q'}(\boldsymbol{\sigma}) &\stackrel{(9.58)}{=} \int_{\widehat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} \widehat{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^{q'} \cdot \overline{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^q + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \\ &= \int_{\widehat{\mathcal{K}}(\widehat{0})} \widehat{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^{q'} \cdot \overline{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^q + \sum_{l=0}^L \int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^{q'} \cdot \overline{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^q + \partial_3 \Phi_e^{q'} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \right) du \\ &\quad + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}}. \end{aligned}$$

We then have in the semi-stripe  $\widehat{\mathcal{D}}_l$

$$\int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^{q'} \cdot \overline{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^q \right) du \stackrel{(9.33)}{=} \int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\boldsymbol{\text{grad}}} \varphi_e^{q',l} \cdot \overline{\boldsymbol{\text{grad}}} \varphi_e^{q,l} \right) du + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{q',l} \overline{\alpha_n^{q,l}} \lambda_n^{l,e} \int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} u} \right)^2 du.$$

By definition of the electrical admittance  $\mathbf{Y}_e^l$  and the lemma 9.4.5, we have

$$\int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^{q'} \cdot \overline{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^q \right) du = \sigma_l \mathbf{Y}_e^l + \int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \right) du$$

thus

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{q,q'}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathcal{Y}_{q,q'}(\widehat{0}) + \sum_{l=1}^L \sigma_l \mathbf{Y}_e^l + 2 \sum_{l=1}^L \int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \right) du \\ &\quad + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \\ &\quad - \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\partial}_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}}. \end{aligned}$$

We then have with the lemma 9.4.5

$$\begin{aligned} 2 \sum_{l=1}^L \int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \right) du &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\partial}_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\widehat{0}_l\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \\ &\quad - \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \Phi_e^{q'} \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \end{aligned}$$

and so thus wanted formula. Similarly we have

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\widehat{0}_l) + \sum_{\bar{l}=0}^L (\delta_{\bar{l}}^l - \delta_{\bar{l}}^l) (\delta_{\bar{l}}^l - \delta_{\bar{l}}^l) \int_{\widehat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \widehat{\boldsymbol{\text{grad}}} \psi_m^{q',\bar{l}} \cdot \overline{\boldsymbol{\text{grad}}} \psi_m^{q,\bar{l}} \right) du \\ &= \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\widehat{0}_l) + \sigma_0 (\mathbf{Z}_m^0)_{q,q'} + \delta_l^{l'} \sigma_l (\mathbf{Z}_m^l)_{q,q'}. \end{aligned}$$

The junction source term is defined by

$$I_{J,q}(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\widehat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma})} \widehat{\mathbf{J}}_s \cdot \overline{\boldsymbol{\text{grad}}} \Phi_e^q + \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\mathbf{J}}_s \cdot e_3^l (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\partial}_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \widehat{\mathbf{J}}_s \cdot e_3^l \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}}.$$

Since the source term is independent of the longitudinal variable in the overlap areas we have

$$\sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\mathbf{J}}_s \cdot e_3^l (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}) = \sum_{l=0}^L \int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\mathbf{J}}_s \cdot e_3^l (\varphi_m^{q,l} - \varphi_e^{q,l}).$$

We thus have

$$\begin{aligned} I_{J,q}(\sigma) &= I_{J,q}(\hat{0}_l) + \sum_{l=0}^L \int_{\hat{0}_l}^{\sigma_l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \hat{\mathbf{J}}_s \cdot \overline{\mathbf{grad} \Phi_e^q} \right) du \\ &+ \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \overline{\Phi_e^q} \varphi_n^{l,e} \right) \left( \int_{S_l \times \{\sigma_l\}} \hat{\mathbf{J}}_s \cdot e_3^l \varphi_n^{l,e} \right)}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}} \\ &\stackrel{(9.33)}{=} I_{J,q}(\hat{0}) + \sum_{l=0}^L \sigma_l \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta) + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\hat{0}_l}^{\sigma_l} \overline{\alpha_n^{q,l}} e^{-\sqrt{\lambda_n^{l,e}} x_3^l} \left( \int_{S_l \times \{u\}} \hat{\mathbf{J}}_{s,T} \cdot \nabla \varphi_n^{l,e} \right) du \\ &\stackrel{(10.18)}{=} I_{J,q}(\hat{0}) + \sum_{l=0}^L \sigma_l \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta) \quad \text{since } \hat{\mathbf{J}}_{s,T} \text{ is divergence free and } \varphi_n^{l,e} \text{ is null on boundaries.} \end{aligned}$$

□

**Remark 9.4.3.** *The interior Kirchhoff's laws of the lemma 9.4.4 are independent of  $\sigma$  (the compact we take to find these laws).*

*Proof.* If we put (9.51) in the interior loop-rule of the lemma 9.4.4 we have

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{q,0}^1(\hat{0}_0) - \mathbf{V}_{q,l}^1(\hat{0}_l) &\stackrel{(9.51)}{=} + \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\sigma) \mathbf{I}_{q',l'}^0 + \mathfrak{Z}_q^{0,l'}(\hat{0}_0) - \mathfrak{Z}_q^{l,l'}(\hat{0}_l) \\ &+ \sigma_0 (\mathbf{Z}_m^0)_{q,q'} \mathbf{I}_{q',0}^0 - \sigma_l (\mathbf{Z}_m^l)_{q,q'} \mathbf{I}_{q',l}^0 \end{aligned}$$

with the interior Kirchhoff's laws of the lemma 9.4.1

$$\sigma_0 (\mathbf{Z}_m^0)_{q,q'} \mathbf{I}_{q',0}^0 \stackrel{(9.48)}{=} -\sigma_0 (\mathbf{Z}_m^0)_{q,q'} \sum_{l'=1}^L \mathbf{I}_{q',l'}^0$$

and since  $\mathbf{J}_{q',l'}^0$  and  $\mathbf{I}_{q',l'}^0$  are linked

$$\mathbf{V}_{q,0}^1(\hat{0}_0) - \mathbf{V}_{q,l}^1(\hat{0}_l) = + \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \left[ \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\sigma) - \sigma_0 (\mathbf{Z}_m^0)_{q,q'} - \delta_{l'}^l \sigma_l (\mathbf{Z}_m^l)_{q,q'} \right] \mathbf{I}_{q',l'}^0 + \mathfrak{Z}_{q,q'}^{0,l'}(\hat{0}_0) - \mathfrak{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\hat{0}_l).$$

To finish, we use the remark 9.4.2

$$\mathbf{V}_{q,0}^1(\hat{0}_0) - \mathbf{V}_{q,l}^1(\hat{0}_l) \stackrel{(9.60)}{=} + \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\hat{0}) \mathbf{I}_{q',l'}^0 + \mathfrak{Z}_{q,q'}^{0,l'}(\hat{0}_0) - \mathfrak{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\hat{0}_l).$$

Similarly we put (9.51) in the interior node-rule of the lemma 9.4.4 we have

$$\begin{aligned} - \sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}^1(\hat{0}_l) &\stackrel{(9.51)}{=} \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q,q'}(\sigma) \mathbf{V}_{q',0}^0 + \sum_{l=0}^L \Upsilon_{q,q'}^l(\hat{0}_l) - I_{J,q}(\sigma) + \sum_{l=0}^L \sigma_l \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta) - \sum_{l=0,q'=1}^{L,Q} \sigma_l (\mathbf{Y}_e^l)_{q,q'} \mathbf{V}_{q',l}^0 \\ &= \sum_{q'=1}^Q \left[ \mathcal{Y}_{q,q'}(\sigma) - \sum_{l=0}^L \sigma_l (\mathbf{Y}_e^l)_{q,q'} \right] \mathbf{V}_{q',0}^0 + \sum_{l=0}^L \Upsilon_{q,q'}^l(\hat{0}_l) - \left( I_{J,q}(\sigma) - \sum_{l=0}^L \sigma_l \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta) \right) \\ &\stackrel{(9.60)}{=} \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q,q'}(\hat{0}) \mathbf{V}_{q',0}^0 + \sum_{l=0}^L \Upsilon_{q,q'}^l(\hat{0}_l) - I_{J,q}(\hat{0}) \quad \text{(see remark 9.4.2).} \end{aligned}$$

□

If  $\mathbf{V}_{q,0}^0(\hat{0}_0)$  and  $\mathbf{I}_{q,l}^0(\hat{0}_l)$  for all  $q = 1 \dots Q$  and  $l = 1 \dots L$  are known, then, with the lemma 9.4.1, the interior fields of order 0, ie  $\hat{\mathbf{E}}_J^0$  and  $\hat{\mathbf{H}}_J^0$  are also known. If  $\mathbf{V}_{q,0}^1(\hat{0}_0)$  and  $\mathbf{I}_{q,l}^1(\hat{0}_l)$  for all  $q = 1 \dots Q$  and  $l = 1 \dots L$  are known, then, with the lemmata 9.4.2 and 9.4.4, all the  $\mathbf{V}_{q,l}^1(x_3^l)$  and  $\mathbf{I}_{q,l}^1(x_3^l)$  for  $q = 1 \dots Q$ ,  $l = 1 \dots L$  and  $x_3^l \in [\hat{0}_l, \infty[$  are also known. Moreover, with the profiles decompositions of the theorem 2.7.1,  $\hat{\mathbf{E}}_J^1$  and  $\hat{\mathbf{H}}_J^1$  are also known. To determine the constants  $\mathbf{V}_{q,0}^0(\hat{0}_0)$ ,  $\mathbf{I}_{q,l}^0(\hat{0}_l)$  and  $\mathbf{V}_{q,0}^1(\hat{0}_0)$  and  $\mathbf{I}_{q,l}^1(\hat{0}_l)$  for all  $q = 1 \dots Q$  and  $l = 1 \dots L$ , we will help us of the exterior fields of order 0 and 1 by the way of the matching principle.

## 9.5 Developpement of the wanted model

We have seen that to determine completely the interior fields of order 0 and 1 we need the knowledge of  $\mathbf{V}_{q,0}^0(\widehat{0}_l)$ ,  $\mathbf{I}_{q,l}^0(\widehat{0}_l)$  and  $\mathbf{V}_{q,0}^1(\widehat{0}_l)$  and  $\mathbf{I}_{q,l}^1(\widehat{0}_l)$  for all  $q = 1 \dots Q$  and  $l = 1 \dots L$  and to determine completely the exterior fields of order 0 and 1, we need some relations between  $\mathbf{V}^0$ ,  $\mathbf{V}^1$  and  $\mathbf{I}^0$ ,  $\mathbf{I}^1$ . Or the interior Kirchhoff's laws of the lemmata 9.4.1 and 9.4.4, if they are their equivalents for the exteriors potentials and currents are perfect for that. In fact, we will pass the interior Kirchhoff's laws to the exterior ones thanks the matching principle (9.9). After that, it will be easy to compute completely the exterior and then interior fields of order 0 and 1. We will then propose an effective model that will allow us to solve an unique equation for the approximation of the electrical potentials and currents until the order 1.

### 9.5.1 Determine completely all the first order interior electrical potentials and currents

#### Application of the matching principle

The matching principle (9.9) gives us a link between the interior and exterior electrical potentials and currents for  $p = 0, 1$ .

**Lemma 9.5.1.** *The interior and exterior electrical potential and current for  $p = 0, 1$  are linked by :*

$$\mathbf{V}_l^0 = \mathbf{V}_l^0(0_l^\delta) \quad \mathbf{I}_l^0 = \mathbf{I}_l^0(0_l^\delta) \quad \text{and} \quad \mathbf{V}_l^1(\widehat{0}_l) + \sum_{l'=1}^L \mathfrak{Z}^{l,l'}(\widehat{0}_l) = \mathbf{V}_l^1(0_l^\delta) \quad \mathbf{I}_l^1(\widehat{0}_l) + \Upsilon^l(\widehat{0}_l) = \mathbf{I}_l^1(0_l^\delta). \quad (9.61)$$

*Proof.*

**Step 1 : proof of  $\mathbf{V}_l^\delta = V_l^\delta$**

The matching principle (9.9) say that

$$\sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \widehat{\mathbf{E}}_J^p \left( \frac{x_T^l}{\delta}, \widehat{0}_l + \frac{x_3^l}{\sqrt{\delta}} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \check{\mathbf{E}}_l^p \left( \frac{x_T^l}{\delta}, 0_l^\delta + \sqrt{\delta} x_3^l \right). \quad (9.62)$$

by definition of the exterior and interior electrical potentials and currents :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{q,l}^\delta \left( \widehat{0}_l + \frac{x_3^l}{\sqrt{\delta}} \right) &:= \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \mathbf{V}_{q,l}^p \left( \widehat{0}_l + \frac{x_3^l}{\sqrt{\delta}} \right) && \stackrel{(9.25)}{=} \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \int_{S_l \times \{x_3^l\}} \widehat{\mathbf{E}}_J^p \left( \frac{x_T^l}{\delta}, \widehat{0}_l + \frac{x_3^l}{\sqrt{\delta}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \left( \frac{x_T^l}{\delta} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &&& \stackrel{(9.62)}{=} \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \int_{S_l \times \{x_3^l\}} \check{\mathbf{E}}_l^p \left( \frac{x_T^l}{\delta}, 0_l^\delta + \sqrt{\delta} x_3^l \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \psi_e^{q,l} \left( \frac{x_T^l}{\delta} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &&& \stackrel{(9.12)}{=} \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p V_{q,l}^p \left( 0_l^\delta + \sqrt{\delta} x_3^l \right) := V_{q,l}^\delta \left( 0_l^\delta + \sqrt{\delta} x_3^l \right) \end{aligned}$$

so we have

$$\mathbf{V}_l^\delta \left( \widehat{0}_l + x_3^l \right) = \mathbf{V}_l^\delta \left( 0_l^\delta + \delta x_3^l \right) \quad \text{and} \quad \mathbf{I}_l^\delta \left( \widehat{0}_l + x_3^l \right) = \mathbf{I}_l^\delta \left( 0_l^\delta + \delta x_3^l \right) \quad (9.63)$$

#### Step 2 : the interior field

With the (9.51) of the lemma 9.4.2 and since  $\mathfrak{Z}^{l,l'}(x_3^l)$ ,  $\Upsilon^l(x_3^l) \sim \# \left( e^{-x_3^l} \right)$  (see the lemma 9.4.3), we have the following expansions :

$$\mathbf{V}_l^\delta \left( \widehat{0}_l + x_3^l \right) = \mathbf{V}_l^0(\widehat{0}_l) + \delta \left[ \mathbf{V}_l^1(\widehat{0}_l) - x_3^l \mathbf{Z}_m^l \mathbf{I}_l^0 + \sum_{l'=2}^L \mathfrak{Z}^{l,l'}(\widehat{0}_l) \right] + O(\delta^2) + \# \left( e^{-x_3^l} \right), \quad (9.64)$$

and

$$\mathbf{I}_l^\delta \left( \widehat{0}_l + x_3^l \right) = \mathbf{I}_l^0(\widehat{0}_l) + \delta \left[ \mathbf{I}_l^1(\widehat{0}_l) - x_3^l \mathbf{Y}_e^l \mathbf{V}_l^0 + \Upsilon^l(\widehat{0}_l) + x_3^l \mathbf{I}_{s,l}^0(0_l^\delta) \right] + O(\delta^2) + \# \left( e^{-x_3^l} \right). \quad (9.65)$$

#### Step 3 : the exterior field

We suppose that for all  $p = 0, 1$  that  $\mathbf{V}_l^p$  and  $\mathbf{I}_l^p$  are in  $C^1$  to use the taylor formula :

$$\mathbf{V}_l^\delta (0_l^\delta + \delta x_3^l) = \mathbf{V}_l^0(0_l^\delta) + \delta [\mathbf{V}_l^1(0_l^\delta) + x_3^l \partial_3 \mathbf{V}_l^0(0_l^\delta)] + O(\delta^2) \quad (9.66)$$

and

$$\mathbf{I}_l^\delta (0_l^\delta + \delta x_3^l) = \mathbf{I}_l^0(0_l^\delta) + \delta [\mathbf{I}_l^1(0_l^\delta) + x_3^l \partial_3 \mathbf{I}_l^0(0_l^\delta)] + O(\delta^2) \quad (9.67)$$

#### Step 4 : the matching principle

We use the matching principle (9.63) to match the interior fields (9.64, 9.65) and the exterior fields together (9.66, 9.67) and we identify order  $\delta^p$  for  $p = 0, 1$  and polynomials in  $x_3^k$  for  $k = 0, 1$  to find the wanted equation (9.61) and redundants ones. □

The first consequent of the previous lemma for which we all yearn is the establishment of the exterior Kirchhoff's laws from the interiors ones of the lemma 9.4.4.

**Lemma 9.5.2.** *The exterior Kirchhoff's laws of order 0 are for all  $1 \leq q \leq Q$*

$$\forall l = 0 \dots L, \mathbf{V}_{q,l}^0 = \mathbf{V}_{q,1}^0 \quad \text{and} \quad \sum_{l=1}^L \mathbf{I}_{q,l}^0 = 0. \quad (9.68)$$

*The exterior Kirchhoff's laws of order 1 are for all  $1 \leq q \leq Q$  :*

$$\bullet \text{ exterior loop-rule : } \mathbf{V}_{q,0}^1(0_0^\delta) - \mathbf{V}_{q,l}^1(0_l^\delta) = \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\hat{0}) \mathbf{I}_{q',l'}^0(0_{l'}^\delta), \quad (9.69a)$$

$$\bullet \text{ exterior node-rule : } \sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}^1(0_l^\delta) = - \left[ \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q,q'}(\hat{0}) \mathbf{V}_{q',0}^0(0_0^\delta) - I_{J,q}(\hat{0}) \right]. \quad (9.69b)$$

*Proof.* Application of (9.48) and the lemma 9.4.4 with  $\sigma = \hat{0}$  and the lemma 9.5.1. □

#### The procedure for the knowledge of all the quantities of the asymptotic model

It exists unique exterior and interior electromagnetic fields of order 0  $\mathbf{E}_l^0, \mathbf{H}_l^0, \mathbf{E}_J^0$  and  $\mathbf{H}_J^0$  given by the following procedure :

1. determine uniquely the electrical potential  $\mathbf{V}_l^0$  and current  $\mathbf{I}_l^0$  of order 0 through the telegrapher's equation (9.16) with the exterior Kirchhoff's laws of order 0 (see (9.68)),
2. compute the exterior fields in each cable parts  $\mathbf{E}_l^0$  and  $\mathbf{H}_l^0$  with (9.13),
3. determine  $\mathbf{V}_0^0(\hat{0}_l)$  and  $\mathbf{I}_l^0(\hat{0}_l)$  for  $l = 1$  to  $L$  with the lemma 9.5.1, all the interior electrical potential and current of order 0 are known with lemma 9.4.1,
4. compute the interior fields  $\mathbf{E}_J^0$  and  $\mathbf{H}_J^0$  with the equation (9.49).

There are unique exterior and interior electromagnetic fields of order 1  $\mathbf{E}_l^1, \mathbf{H}_l^1, \mathbf{E}_J^1$  and  $\mathbf{H}_J^1$  given by the following procedure :

1. determine uniquely the electrical potential  $\mathbf{V}_l^1$  and current  $\mathbf{I}_l^1$  of order 1 through the telegrapher's equation (9.16) with the exterior Kirchhoff's laws of order 1 (see (9.68)),
2. compute the exterior fields in each cable parts  $\mathbf{E}_l^1$  and  $\mathbf{H}_l^1$  with (9.13),
3. determine  $\mathbf{V}_l^1(\hat{0}_l)$  and  $\mathbf{I}_l^1(\hat{0}_l)$  for  $l = 0 \dots L$  with the lemma 9.5.1, all the interior electrical potential and current of order 0 are known for all  $x_3^l$  with the lemma 9.4.2,
4. (compute the interior fields  $\mathbf{E}_J^1$  and  $\mathbf{H}_J^1$  with the profiles decomposition of the theorem 2.7.1).

In fact, for the application we have in mind (1D modelisation of a electrical network and inverse problem), only the exterior electrical potential  $\mathbf{V}_l^0, \mathbf{V}_l^1$  and currents  $\mathbf{I}_l^0, \mathbf{I}_l^1$  interest us. We will now propose an effective model which have the same order of approximation than

$$\mathbf{V}_l^0 + \delta \mathbf{V}_l^1 \quad \text{and} \quad \mathbf{I}_l^0 + \delta \mathbf{I}_l^1.$$

### 9.5.2 The effective model

By considering

$$(9.16), \quad (9.68) + \delta(9.69a) \quad \text{and} \quad (9.68) + \delta(9.69b),$$

we have the (truncated) asymptotic telegrapher's equation

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_e^l(x_3^l, s) \left( \mathbf{V}_l^0 + \delta \mathbf{V}_l^1 \right) + \partial_3 \left( \mathbf{I}_l^0 + \delta \mathbf{I}_l^1 \right) = \left( \mathbf{I}_{s,1}^0 + \delta \mathbf{I}_{s,1}^1 \right), & \text{on } ]0_l^\delta, \infty[, \\ \mathbf{Z}_m^l(x_3^l, s) \left( \mathbf{I}_l^0 + \delta \mathbf{I}_l^1 \right) + \partial_3 \left( \mathbf{V}_l^0 + \delta \mathbf{V}_l^1 \right) = 0, & \text{on } ]0_l^\delta, \infty[, \end{cases} \quad (9.70)$$

the asymptotic loop-rule (for  $q = 1 \dots Q$  and  $l = 1 \dots L$ )

$$\left( \mathbf{V}_{q,0}^0(0_0^\delta) + \delta \mathbf{V}_{q,0}^1(0_0^\delta) \right) - \left( \mathbf{V}_{q,l}^0(0_l^\delta) + \delta \mathbf{V}_{q,l}^1(0_l^\delta) \right) = \delta \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\hat{0}) \mathbf{I}_{q',l'}^0(0_{l'}^\delta), \quad (9.71)$$

and the asymptotic node rule (for  $q = 1 \dots Q$ )

$$\sum_{l=0}^L \left( \mathbf{I}_{q,l}^0(0_l^\delta) + \mathbf{I}_{q,l}^1(0_l^\delta) \right) = -\delta \left[ \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q,q'}(\hat{0}) \mathbf{V}_{q',0}^0(0_0^\delta) - I_{J,q}(\hat{0}) \right]. \quad (9.72)$$

If we neglect the three order we can define the effective model of order 1 :

#### Definition 9.5.1. (Effective model)

The first order effective potentials and currents

$$\mathbf{V}_{q,0}^{\delta,1} \quad \text{and} \quad \mathbf{I}_{q,0}^{\delta,1}$$

satisfy along each branch  $l = 0 \dots L$  of the graph the effective telegrapher's equation

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_e^l(x_3^l, s) \mathbf{V}_l^{\delta,1}(x_3^l, s) + \partial_3 \mathbf{I}_l^{\delta,1}(x_3^l, s) = \mathbf{I}_{s,l}^{\delta,1}(x_3^l, s), & \text{on } ]0_l^\delta, \infty[, \\ \mathbf{Z}_m^l(x_3^l, s) \mathbf{I}_l^{\delta,1}(x_3^l, s) + \partial_3 \mathbf{V}_l^{\delta,1}(x_3^l, s) = 0, & \text{on } ]0_l^\delta, \infty[, \end{cases} \quad (9.73)$$

with the effective current source

$$\mathbf{I}_{s,l}^{\delta,1} := \mathbf{I}_{s,l}^0 + \delta \mathbf{I}_{s,l}^1,$$

and at the knot of the graph they are linked by the improved Kirchhoff's laws are for all  $1 \leq q \leq Q$

- effective loop-rule :  $\mathbf{V}_{q,0}^{\delta,1}(0_0^\delta) - \mathbf{V}_{q,l}^{\delta,1}(0_l^\delta) = +\delta \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\hat{0}) \mathbf{I}_{q',l'}^{\delta,1}(0_{l'}^\delta),$  (9.74a)

- effective node-rule :  $-\sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}^{\delta,1}(0_l^\delta) = \delta \left[ \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q,q'}(\hat{0}) \mathbf{V}_{q',0}^{\delta,1}(0_0^\delta) - I_{J,q}(\hat{0}) \right],$  (9.74b)

with the "junction-impedance"  $\mathcal{Z}$ , and the "junction-admittance"  $\mathcal{Y}$  defined in lemma 9.4.4 and the "junction-source"  $I_{J,q}$  defined (9.59).

#### Some considerations about the improved Kirchhoff's laws

The fact that all the electrical potentials  $\mathbf{V}_{q,l}^{\delta,1}(0_l^\delta)$  for  $q = 1 \dots Q$  and  $l = 1 \dots L$  are expressed from the one of the cable number 0 is due to the choice of our artificial 2D cuts. If we had chose that all the cuts come from the end section number 1, then the electrical potentials would express from the one of the cable 1.

At order 0 (take  $\delta = 0$ ) we find the usual Kirchhoff's laws for electrical circuit. At order 1 with the "junction-impedance"  $\mathcal{Z}$  and the "junction-admittance"  $\mathcal{Y}$  we modelize the 3D phenomena (in particular geometrical or physical defaults) in the knot area  $\mathcal{K}$  delineated by the point  $(0_l^\delta)_{l=0 \dots L}$ .

We can also give the improved Kirchhoff's laws in a wider area delineated by points near (at order  $\delta$ )  $0_l^\delta$  for  $l = 1 \dots L$ . More precisely, for all  $\sigma \in \mathbb{R}^L$ , we have

$$\bullet \text{ effective loop-rule : } \mathbf{V}_{q,0}^{\delta,1}(\delta\sigma_1) - \mathbf{V}_{q,l}^{\delta,1}(\delta\sigma_l) = +\delta \left[ \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\sigma) \mathbf{I}_{q',l'}^{\delta,1}(\delta\sigma_{l'}) \right] \quad (9.75a)$$

$$\bullet \text{ effective node-rule : } -\sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}^{\delta,1}(\delta\sigma_l) = \delta \left[ \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q,q'}(\sigma) \mathbf{V}_{q',1}^{\delta,1}(\delta\sigma_1) - I_{J,q}(\sigma) \right] \quad (9.75b)$$

with  $\mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\sigma)$  and  $\mathcal{Y}_{q,q'}(\sigma)$  as in (9.60) of remark 9.4.2. Looking at figure 8.5 where we could consider a common point  $O$  of all cables. If we denote  $\delta\sigma_l$  the distance between this center  $O$  and the section  $0_l^\delta$ , we can give the improved Kirchhoff's laws at  $O$

$$\bullet \text{ effective loop-rule : } \mathbf{V}_{q,0}^{\delta,1}(O) - \mathbf{V}_{q,l}^{\delta,1}(O) = +\delta \left[ \sum_{q',l'=1,2}^{Q,L} \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(-\sigma) \mathbf{I}_{q',l'}^{\delta,1}(\delta\sigma_{l'}) \right] \quad (9.76a)$$

$$\bullet \text{ effective node-rule : } -\sum_{l=0}^L \mathbf{I}_{q,l}^{\delta,1}(O) = \delta \left[ \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q,q'}(-\sigma) \mathbf{V}_{q',1}^{\delta,1}(O) - I_{J,q}(-\sigma) \right] \quad (9.76b)$$

but we will see in the next lemma that this formulation is not very interesting. Indeed we cannot prove that  $\mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(-\sigma)$  and  $\mathcal{Y}_{q,q'}(-\sigma)$  are tensor with real part positive define all the more so as in some geometries we cannot define  $O$ .

**Lemma 9.5.3.** *Both,  $\mathcal{Y}(\hat{0})$  and  $\mathcal{Z}(\hat{0})$  are symmetric (but not necessary hermitian) tensor with real part positive define and more precesely for  $\mathcal{Y}(\hat{0})$*

$$\left( \Re \mathcal{Y}(\hat{0}) \overline{\mathbf{V}_0(0_0^\delta)}, \mathbf{V}_0(0_0^\delta) \right)_{\mathbb{R}^Q} \geq (\Re(s) \varepsilon_- + \sigma_{e,-}) \min_{q \leq Q} \text{meas}(O_q) |\mathbf{V}_0(0_0^\delta)|.$$

*Proof.* For every  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^Q$  and  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{Q(L-1)}$  we denote

$$\Phi_e(\mathbf{u}) := \sum_{q=1}^Q \Phi_e^q u_q \quad \text{and} \quad \Psi_m(\mathbf{w}) := \sum_{q,l=1,1}^{Q,L} \Psi_m^{q,l} w_{q,l}$$

and we have

$$\left( \mathcal{Y}(\hat{0}) \overline{\mathbf{V}_1(0_0^\delta)}, \mathbf{V}_0(0_0^\delta) \right)_{\mathbb{R}^Q} = \int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\varepsilon} \left| \mathbf{grad} \Phi_e(\mathbf{V}_0(0_0^\delta)) \right|^2 + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \int_{S_l \times \{\hat{0}_l\}} \hat{\varepsilon} \partial_3 \Phi_e(\mathbf{V}_0(0_0^\delta)) \varphi_n^{l,e} \right|^2}{\sqrt{\lambda_n^{l,e}}},$$

$$\sum_{q,l=1,1}^{Q,L} \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \overline{\mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'}(\hat{0})} I_{q',l'}(0_{l'}^\delta) I_{q,l}(0_l^\delta) = \int_{\hat{\mathcal{K}}(\sigma)} \bar{\mu} \left| \mathbf{grad} \Psi_m(\mathbf{I}) \right|^2 + \sum_{\bar{l}=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \int_{S_{\bar{l}} \times \{\hat{0}_{\bar{l}}\}} \hat{\mu} \partial_3 \Psi_m(\mathbf{I}) \psi_n^{\bar{l},m} \right|^2}{\sqrt{k_n^{\bar{l},m}}}.$$

□

### Energie estimation

**Theorem 9.5.1.** *There exists a constant  $K > 0$  independent of  $s$  such that the first order effective potentials  $\mathbf{V}_{q,0}^{\delta,1}$  and currents  $\mathbf{I}_{q,0}^{\delta,1}$  presented in the definition 9.5.1 satisfy the following a priori energy estiamtion*

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^L \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} (\Re \mathbf{Y}_e^l \mathbf{V}_l, \overline{\mathbf{V}_l})_{\mathbb{R}^Q} + \int_{0_l^\delta}^{\infty} (\Re \mathbf{Z}_m^l \mathbf{I}_l, \mathbf{I}_l)_{\mathbb{R}^Q} \right] \\ & + \delta \left[ \left( \Re \mathcal{Y}(\hat{0}) \overline{\mathbf{V}_0(0_0^\delta)}, \mathbf{V}_0(0_0^\delta) \right)_{\mathbb{R}^Q} + \sum_{q,l=1,1}^{Q,L} \sum_{q',l'=1,1}^{Q,L} \overline{\Re \mathcal{Z}_{q,q'}^{l,l'} I_{q',l'}(0_{l'}^\delta)} I_{q,l}(0_l^\delta) \right] \\ & \leq \left( \frac{K}{\Re(s)} \max_{l,q} \left( \|j_e\|_{L^2(0_l^\delta, \infty)}, \delta I_{J,q}(\hat{0}) \right) \right)^2 \end{aligned}$$



*Proof.* Such demonstration have been made so many times that we reduce this one to the essential First we need to calculate

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1, l=0}^{Q, L} I_{q, l}(0_l^\delta) \overline{V_{q, l}(0_l^\delta)} & \stackrel{(9.74a)}{=} \sum_{q=1}^Q \overline{V_{q, 1}(0_1)} \left( \sum_{l=0}^L I_{q, l}(0_l^\delta) \right) - \delta \sum_{q, l=1, 1}^{Q, L} \sum_{q', l'=1, 1}^{Q, L} \overline{\mathcal{Z}_{q, q'}^{l, l'}(\hat{0})} I_{q', l'}(0_{l'}^\delta) I_{q, l}(0_l^\delta) \\
& \stackrel{(9.74b)}{=} -\delta \sum_{q=1}^Q \sum_{q'}^Q \overline{V_{q, 0}(0_0^\delta)} \mathcal{Y}_{q, q'}(\hat{0}) V_{q', 0}(0_0^\delta) + \delta \sum_{q=1}^Q \overline{V_{q, 0}(0_0^\delta)} I_{J, q}(\hat{0}) \\
& \quad - \delta \sum_{q, l=1, 1}^{Q, L} \sum_{q', l'=1, 1}^{Q, L} \overline{\mathcal{Z}_{q, q'}^{l, l'}(\hat{0})} I_{q', l'}(0_{l'}^\delta) I_{q, l}(0_l^\delta)
\end{aligned}$$

in order to have the energy equality in that form

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^L \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} (\mathbf{Y}_e^l \mathbf{V}_l, \overline{\mathbf{V}_l})_{\mathbb{R}^Q} + \int_{0_l^\delta}^{\infty} (\overline{\mathbf{Z}_m^l} \mathbf{I}_l, \mathbf{I}_l)_{\mathbb{R}^Q} \right] \\
& + \delta \left[ (\mathcal{Y}(\hat{0}) \overline{\mathbf{V}_0(0_0^\delta)}, \mathbf{V}_0(0_0^\delta))_{\mathbb{R}^Q} + \sum_{q, l=1, 1}^{Q, L} \sum_{q', l'=1, 1}^{Q, L} \overline{\mathcal{Z}_{q, q'}^{l, l'}(\hat{0})} I_{q', l'}(0_{l'}^\delta) I_{q, l}(0_l^\delta) \right] \\
& = \sum_{l=0}^L \int_{0_l^\delta}^{\infty} j_e \cdot \overline{\mathbf{V}_l} + \delta \sum_q^Q \overline{V_{q, 0}(0_0^\delta)} I_{J, q}(\hat{0}).
\end{aligned}$$

□

As we already this estimate is the key tool to deduce existence and uniqueness of the solution in the right functional space by Galerkin method.

### 9.5.3 The error between the effective model and the asymptotic one

We denote by

$$\mathcal{V}_l = \mathbf{V}_l^{\delta, 1} - (\mathbf{V}_l^0 + \delta \mathbf{V}_l^1) \quad \text{and} \quad \mathcal{I}_l = \mathbf{I}_l^{\delta, 1} - (\mathbf{I}_l^0 + \delta \mathbf{I}_l^1) \tag{9.77}$$

the errors between the effective model we have proposed in the theorem 9.5.1 and the asymptotic expansion (see (9.70, 9.71, 9.72)). They satisfy on each branch  $l = 0 \dots L$  of the graph

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_e^l(x_3^l, s) \mathcal{V}_l + \partial_3 \mathcal{I}_l = 0, & \text{on } ]0_l^\delta, \infty[, \\ \mathbf{Z}_m^l(x_3^l, s) \mathcal{I}_l + \partial_3 \mathcal{V}_l = 0, & \text{on } ]0_l^\delta, \infty[, \end{cases} \tag{9.78}$$

and the error Kirchhoff's laws on the knot :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{q, 0}(0_0^\delta, t) - \mathcal{V}_l(q, 0_l^\delta, t) = \delta \sum_{l'=1}^L \overline{\mathcal{Z}_{q, q'}^{l, l'}(\hat{0})} \mathcal{I}_{l'}(0_{l'}^\delta, t) + \delta^2 \sum_{l'=1}^L \overline{\mathcal{Z}_{q, q'}^{l, l'}(\hat{0})} \mathcal{I}_{q', l'}^1(0_{l'}^\delta, t), \\ - \sum_{l=0}^L \mathcal{I}_l(0_l^\delta, t) = \delta \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q, q'}(\hat{0}) \mathcal{V}_{q', 0}(0_0^\delta, t) + \delta^2 \mathcal{C} \sum_{q'=1}^Q \mathcal{Y}_{q, q'}(\hat{0}) V_{q', 0}^1(0_0^\delta, t). \end{cases}$$

**Proposition 9.5.1.** *The error energy*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{err}(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^L \left[ \int_{0_l^\delta}^{\infty} C^l |\mathcal{V}_l(x_3^l, t)|^2 dx_3^l + \int_{0_l^\delta}^{\infty} L^l |\mathcal{I}_l(x_3^l, t)|^2 dx_3^l \right] + \frac{\delta}{2} \left[ \mathcal{C} |\mathcal{V}_0(0_0^\delta, t)|^2 + \sum_{l, l'}^L \mathcal{L}^{l, l'} \mathcal{I}_l(0_l^\delta, t) \mathcal{I}_{l'}(0_{l'}^\delta, t) \right],$$

satisfies

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{err}(T) \leq \delta^4 \int_0^T \left[ \sqrt{\sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l, l'} \partial_t \mathcal{I}_{l'}^1(0_{l'}^\delta, t) \partial_t \mathcal{I}_l^1(0_l^\delta, t)} + \sqrt{\mathcal{C} |\partial_t V_0^1(0_0^\delta, t)|^2} \right]^2.$$

But their job doesn't stop there! We of course need to check by error estimate that the model is indeed a good approximation of the electromagnetic phenomena in the junction and to avoid the artificial hypothesis 9.2.1, and to generalize to more cables such as in the figure 9.9 because our study does not take into account the junction between a coaxial cable and a twinax cable (multi-conductor cable with two inner wires, see figure 9.10), and ..., and..., and... We leave the final word to Musil :

Le savoir est une attitude, une passion. C'est même, au fond, une attitude illicite : comme le goût de l'alcool, de l'érotisme ou de la violence, le besoin de savoir entraîne la formation d'un caractère qui n'est plus en équilibre. Il est tout à fait faux de dire que le chercheur poursuive la vérité, c'est elle qui le poursuit. Il la subit. le vrai est vrai, le fait est réel indépendamment du chercheur : simplement le chercheur en a la passion ;

*Robert Musil, L'Homme sans qualités, 1932. Traduction française P. Jacottet, 1956.*

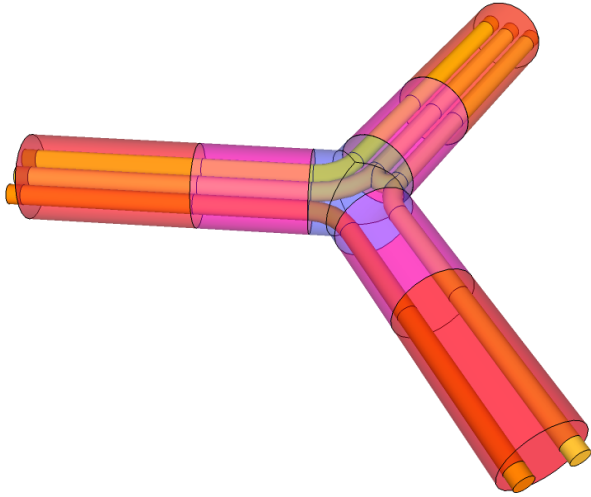


FIGURE 9.9 – Very complicated junction

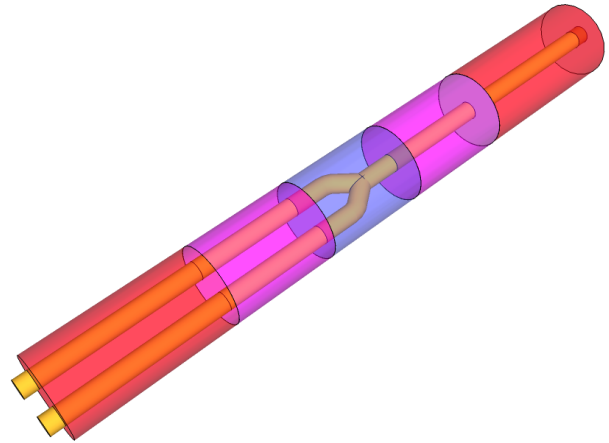


FIGURE 9.10 – Junction between a coaxial cable and a twinax cable



---

---

# **CINQUIÈME PARTIE**

## **ANNEXES**

---

---



# FORMULAIRE SUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS, LES ESPACES ET LES FORMULES DE GREEN

---

Cette annexe a pour but un résumé des quelques principales formules concernant les opérateurs différentiels tels que les opérateurs divergence et rotationnel en 2D et en 3D que nous utilisons couramment tout le long du présent manuscrit. Les champs 2D seront implicitement identifiés à des champs 3D avec une troisième composante nulle ainsi que les champs scalaire à des champs normale au plan  $(x_1, x_2)$ . Nous considérerons les champs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}, \mathbf{X} &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi, \psi &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \psi \end{pmatrix} &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

## 10.1 Diverses relations algébriques reliées aux opérateurs différentiels 2D

Produit vectoriel plan :

$$\mathbf{T} \times n := -n \times \mathbf{T} := T_1 n_2 - T_2 n_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{T} := -\mathbf{T} \times \mathbf{e}_3 := (-T_2, T_1), \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \times \mathbf{T} = -\mathbf{T}. \quad (10.1)$$

Définition de la tangente :

$$\tau = \mathbf{e}_3 \times n \quad n = \tau \times \mathbf{e}_3 \quad \tau \cdot n = 0 \quad \tau \times n = -|n|^2 \quad (10.2)$$

Diverses relations utiles reliées au produit vectoriel plan :

$$(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}) \cdot n = \mathbf{T} \times n = -\mathbf{T} \cdot \tau, \quad (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}) \times n = -\mathbf{T} \cdot n = \mathbf{T} \times \tau, \quad (10.3)$$

$$\mathbf{T} \times \mathbf{X} = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{X} = -(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{X}) \cdot \mathbf{T}, \quad (\mathbf{T} \times n)(\mathbf{X} \cdot n) - (\mathbf{X} \times n)(\mathbf{T} \cdot n) = (\mathbf{T} \times \mathbf{X}) |n|^2.$$

Définitions des opérateurs rotationnel et divergence pour les champs vectoriel 2D :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} := \partial_1 T_1 + \partial_2 T_2, \quad \operatorname{rot} \mathbf{T} := \partial_1 T_2 - \partial_2 T_1. \quad (10.4)$$

Relation (rotation) entre la divergence et le rotationnel :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{rot} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{T} = \operatorname{div} (\mathbf{T} \times \mathbf{e}_3). \quad (10.5)$$

Définitions des opérateurs gradient et rotationnel pour les champs vectoriel :

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} \varphi = \begin{pmatrix} \partial_2 \varphi \\ -\partial_1 \varphi \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Relation (rotation) entre le gradient et le rotationnel :

$$\mathbf{e}_3 \times \nabla \varphi = -\operatorname{rot} \varphi, \quad \mathbf{e}_3 \times \operatorname{rot} \varphi = \nabla \varphi, \quad (10.7)$$

$$\nabla\varphi \times e_3 = \mathbf{rot} \varphi, \quad \mathbf{rot} \varphi \times e_3 = -\nabla\varphi. \quad (10.8)$$

Produit vectoriel et scalaire de gradients et de rotationnels :

$$\mathbf{T} \times \nabla\varphi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \varphi, \quad \mathbf{rot} \varphi \cdot \nabla\psi = -\mathbf{rot} \psi \cdot \nabla\varphi \quad (10.9)$$

Suite exacte

$$\mathbf{rot}(\nabla\varphi) = 0, \quad \mathbf{div}(\mathbf{rot} \varphi) = \mathbf{0}. \quad (10.10)$$

Définition du Laplacien plan et des dérivées normales et tangentiels

$$\Delta\phi = \mathbf{div} \nabla\varphi = -\mathbf{rot} \mathbf{rot} \varphi \quad \partial_n\varphi = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{rot} \varphi \times \mathbf{n} \quad \partial_\tau\varphi = \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{rot} \varphi \cdot \mathbf{n} \quad (10.11)$$

## 10.2 Diverses relations algébriques reliées aux opérateurs différentiels 3D

Produit vectoriel en dimension 3

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(e_3 \times n) - g(e_3 \times \mathbf{T}) \\ \mathbf{T} \times n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ g \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot n + g\varphi \quad (10.12)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{T} \cdot n)n - |n|^2\mathbf{T} + g\varphi n - g^2\mathbf{T} \\ -\varphi|n|^2 + g\mathbf{T} \cdot n \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

Définition du gradient et du rotationnel 3D

$$\mathbf{grad} \varphi := \begin{pmatrix} \nabla\varphi \\ \partial_3\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Div} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} = \mathbf{div} \mathbf{T} + \partial_3\varphi, \quad \mathbf{curl} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3\mathbf{T} + \mathbf{rot} \varphi \\ \mathbf{rot} \mathbf{T} \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

Produits vectoriel et scalaire avec le gradient d'un champ scalaire

$$\mathbf{grad} \varphi \times \begin{pmatrix} n \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{rot} \varphi g + \partial_3\varphi(e_3 \times n) \\ \partial_\tau u \end{pmatrix} \quad \mathbf{grad} \varphi \cdot \begin{pmatrix} n \\ g \end{pmatrix} = \partial_n\varphi + \partial_3\varphi g. \quad (10.15)$$

3D operator curl for 3D field

$$\mathbf{curl} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3 \times \partial_3\mathbf{T} + \mathbf{rot} \varphi \\ \mathbf{rot} \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

Produit vectoriel et scalaire de gradients et de rotationnels :

$$\mathbf{curl} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\partial_3\mathbf{T} - \nabla\varphi) + (\mathbf{rot} \mathbf{T})(e_3 \times n) \\ -(\partial_3\mathbf{T} - \nabla\varphi) \cdot n \end{pmatrix} \quad \mathbf{curl} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ g \end{pmatrix} = g \mathbf{rot} \mathbf{T} + (e_3 \times \partial_3\mathbf{T} + \mathbf{rot} \varphi) \cdot n \quad (10.17)$$

## 10.3 Espaces fonctionnels et diverses formules de Green

Space is the place

Sun Ra

Nous considérerons un domaine 2D  $S$  et un domaine 3D  $\Omega$ .

Espaces de Lebesgue de type  $L^2$  avec  $B = S$  ou  $B = \Omega$

$$L^2(B, \mathbb{C}^n, \rho dx) := \left\{ \mathbf{f} : B \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ mesurable } \mid |(\mathbf{f}, \mathbf{f})_\rho| < \infty \right\} \text{ avec } (\mathbf{f}, \mathbf{g})_\rho := \int_B (\rho \mathbf{f}, \mathbf{g})_{\mathbb{C}^n}$$

Quand le contexte est suffisamment clair, nous ne précisons pas l'espace d'arrivée  $L^2(B, \rho dx)$ . De plus quand la mesure est simplement la mesure de Lebesgue, nous préférons écrire  $L^2(B)$ . Rappelons que  $L^2(B, \mathbb{C}^n, \rho dx)$  muni de la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_\rho$  n'est un espace de Hilbert que si pour tout  $\mathbf{x}$ , la matrice  $\rho(\mathbf{x})$  est

hermitienne définie positive.

Espaces de Sobolev pour les champs 2D avec un rotationnel dans  $L^2$

$$\begin{aligned} \bullet H(\text{rot}, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in L^2(S, \mathbb{C}^2) \mid \text{rot } \mathbf{T} \in L^2(S, \mathbb{C}) \right\} \\ \bullet H_\tau(\text{rot}, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in H(\text{rot}, S) \mid \mathbf{T} \times \mathbf{n} |_{\partial S} = \mathbf{0} \right\} \end{aligned}$$

Espaces de Sobolev pour les champs 2D avec une divergence dans  $L^2$

$$\begin{aligned} \bullet H(\mathbf{div} \rho, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in L^2(S, \mathbb{C}^2) \mid \mathbf{div}(\rho \mathbf{T}) \in L^2(S, \mathbb{C}) \right\} \\ \bullet H_n(\mathbf{div} \rho, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in H(\mathbf{div} \rho, S) \mid \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} |_{\partial S} = 0 \right\} \\ \bullet H_{n,0}(\mathbf{div} \rho, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in H_n(\mathbf{div} \rho, S) \mid \mathbf{div}(\rho \mathbf{T}) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Espaces de Sobolev pour les champs 2D avec un rotationnel et une divergence dans  $L^2$

$$\begin{aligned} \bullet H(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) &:= H(\text{rot}, S) \cap H(\mathbf{div} \rho, S) \\ \bullet H_n(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in H(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) \mid \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} |_{\partial S} = 0 \right\} \\ \bullet H_{n,0}(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in H_n(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) \mid \mathbf{div}(\rho \mathbf{T}) = 0 \right\} \\ \bullet H_\tau(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in H(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) \mid \mathbf{T} \times \mathbf{n} |_{\partial S} = \mathbf{0} \right\} \\ \bullet H_{\tau,0}(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) &:= \left\{ \mathbf{T} \in H_\tau(\mathbf{div} \rho, \text{rot}, S) \mid \mathbf{div}(\rho \mathbf{T}) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Espaces de Sobolev pour les champs 3D avec un rotationnel dans  $L^2$

$$\begin{aligned} \bullet H(\mathbf{curl}, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) \mid \mathbf{curl} \mathbf{u} \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) \right\} \\ \bullet H_\tau(\mathbf{curl}, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} |_{\partial \Omega} = \mathbf{0} \right\} \end{aligned}$$

Espaces de Sobolev pour les champs 3D avec une divergence dans  $L^2$

$$\begin{aligned} \bullet H(\mathbf{Div} \rho, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) \mid \mathbf{Div}(\rho \mathbf{u}) \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) \right\} \\ \bullet H_n(\mathbf{Div} \rho, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{Div} \rho, \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |_{\partial \Omega} = 0 \right\} \\ \bullet H_{n,0}(\mathbf{Div} \rho, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in H_n(\mathbf{Div} \rho, \Omega) \mid \mathbf{Div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Espaces de Sobolev pour les champs 3D avec un rotationnel et une divergence dans  $L^2$

$$\begin{aligned} \bullet H(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) &:= H(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\mathbf{Div} \rho, \Omega) \\ \bullet H_n(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |_{\partial \Omega} = 0 \right\} \\ \bullet H_{n,0}(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in H_n(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) \mid \mathbf{Div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \right\} \\ \bullet H_\tau(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} |_{\partial \Omega} = \mathbf{0} \right\} \\ \bullet H_{\tau,0}(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in H_\tau(\mathbf{Div} \rho, \mathbf{curl}, \Omega) \mid \mathbf{Div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Espaces harmoniques

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{E}(\rho, S) &:= \left\{ \mathbf{u} \in L^2(S); \mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ et } \mathbf{u} \times \mathbf{n} |_{\partial \Omega} = \mathbf{0} \right\} \\ \bullet \mathcal{H}(\rho, S) &:= \left\{ \mathbf{u} \in L^2(S); \mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ et } (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} |_{\partial S} = \mathbf{0} \right\} \\ \bullet \mathcal{E}(\rho, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega); \mathbf{curl} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{Div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ et } \mathbf{u} \times \mathbf{n} |_{\partial \Omega} = \mathbf{0} \right\} \\ \bullet \mathcal{H}(\rho, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega); \mathbf{curl} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{Div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ et } (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} |_{\partial \Omega} = \mathbf{0} \right\} \end{aligned}$$



Les traces

Les applications traces suivantes sont continues et surjectives si le domaine  $S$  a un bord au moins lipschitzien (ce qui nous considérerons implicitement dans toute la suite) :

$$\begin{aligned} \bullet \gamma_0 &: H^1(S) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial S) && \text{avec } \gamma_0(\mathbf{T}) := \mathbf{T}|_{\partial B} \\ \bullet \gamma_{\rho,n} &: H(\mathbf{div} \rho, S) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial S) && \text{avec } \gamma_n(\mathbf{T}) := (\rho \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n}|_{\partial \Omega} \\ \bullet \gamma_\tau &: H(\mathbf{rot}, S) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial S) && \text{avec } \gamma_\tau(\mathbf{T}) := \mathbf{T} \times \mathbf{n}|_{\partial \Omega} \end{aligned}$$

Les applications traces suivantes sont continues si le domaine  $\Omega$  a un bord au moins lipschitzien (ce qui nous considérerons implicitement dans toute la suite) :

$$\begin{aligned} \bullet \gamma_0 &: H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega) && \text{avec } \gamma_0(\mathbf{u}) := \mathbf{u}|_{\partial B} \\ \bullet \gamma_{\rho,n} &: H(\mathbf{Div} \rho, \Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega) && \text{avec } \gamma_n(\mathbf{u}) := (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\partial \Omega} \\ \bullet \gamma_\tau &: H(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega) && \text{avec } \gamma_\tau(\mathbf{u}) := \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial \Omega} \end{aligned}$$

Quelques espaces pour les applications traces tangentielles 3D

$$\begin{aligned} \bullet H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Div}, \partial \Omega) &:= \left\{ f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega) \mid \exists u \in H(\mathbf{curl}, \Omega); \gamma_{Id,n}(u) = f \right\} \\ \bullet H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}, \partial \Omega) &:= (H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Div}, \partial \Omega))' \end{aligned}$$

Les applications traces suivantes sont surjectives

$$\begin{aligned} \bullet \gamma_\tau &: H(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Div}, \partial \Omega) && \text{avec } \gamma_\tau(\mathbf{u}) := \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial \Omega} \\ \bullet \gamma_T &: H(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}, \partial \Omega) && \text{avec } \gamma_T(\mathbf{u}) := \mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial \Omega} \end{aligned}$$

Toutes les preuves sont données dans [54]. Notons que la remarque 3.22 donne une description des espaces  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Div}, \partial \Omega)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}, \partial \Omega)$  plus facile d'exploitation quand  $\partial \Omega$  est une variété au moins  $C^1$ .

Formules de Green 2D

Considérons des champs  $\mathbf{T} \in H(\mathbf{div}, S)$  et  $\varphi \in H^1(S)$ . Les formules de Green 2D sont :

$$\int_S \mathbf{div} \mathbf{T} \varphi = - \int_S \mathbf{T} \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial S} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \varphi \quad (10.18)$$

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{T} \varphi = \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \varphi - \int_{\partial S} \mathbf{T} \times \mathbf{n} \varphi \quad (10.19)$$

où les intégrales de bord sont à prendre au sens d'un produit de dualité :

$$\int_{\partial S} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \varphi := \langle \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S), H^{\frac{1}{2}}(\partial S)}, \quad \int_{\partial S} \mathbf{T} \times \mathbf{n} \varphi := \langle \mathbf{T} \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial S), H^{\frac{1}{2}}(\partial S)}$$

Formules de Green 3D

Considérons des champs  $\mathbf{u} \in H(\mathbf{Div}, \Omega)$ ,  $\varphi \in H^1(S)$ . La formule de Green 3D relié à la divergence est :

$$\int_\Omega \mathbf{Div} \mathbf{u} \varphi = - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \varphi + \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \varphi \quad (10.20)$$

où l'intégrale de bord est à prendre au sens d'un produit de dualité :

$$\int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \varphi := \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega)}$$

Considérons un champs  $\mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, S)$ ,  $\varphi \in H^1(S)$ . Les formules de Green 3D relié au rotationnel sont :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \mathbf{curl} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{u} + \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (10.21)$$

$$\forall v \in H(\mathbf{curl}, S), \int_\Omega \mathbf{curl} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{u} - \int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} \quad (10.22)$$

où les intégrales de bords sont à prendre au sens d'un produit de dualité

$$\int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} := \langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega)}, \quad \text{et} \quad \int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} := \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Div}, \partial \Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}, \partial \Omega)}$$

De plus si les champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont assez réguliers alors

$$\int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = - \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} = - \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (10.23)$$

Ces formules de Green sont démontrées dans les bon espaces fonctionnels dans les théorèmes 3.29 et 3.31 de [54].

## 10.4 Opérateurs curvilignes et dans une couche mince

Le bord  $\Gamma := \partial S$  d'une section plane  $S \subset \mathbb{R}^2$  est composé d'un ensemble de ligne(s) fermé(s). Nous allons maintenant définir des opérateurs pour des champ

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &: \partial S \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi &: \partial S \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

ainsi que leurs liens avec les opérateurs sur  $S$ .

### Coordonnée locale sur $\Gamma$

Le bord  $\Gamma$  est paramétrisé par une fonction

$$x_\Gamma(t)$$

avec  $t$  l'abscisse curviligne. Cette variété  $\Gamma$  est notamment caractérisé par sa courbure  $k(t)$  qui peut si la variété est assez régulière s'exprimer par

$$k(t) = \frac{\dot{x}_{\Gamma,1}(t)\ddot{x}_{\Gamma,2}(t) - \dot{x}_{\Gamma,2}(t)\ddot{x}_{\Gamma,1}(t)}{|\dot{x}_\Gamma(t)|^3}$$

### Champs tangent et normale sur $\partial S$

$$\mathbf{T}_\tau := (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \quad \mathbf{T}_n := (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

### Gradient et rotationnel vectoriel curviligne

$$\nabla_\Gamma \varphi = (\partial_\tau \varphi) \boldsymbol{\tau} \quad \mathbf{rot}_\Gamma \varphi = (\partial_\tau \varphi) \mathbf{n} \quad \mathbf{rot}_\Gamma \varphi = \nabla_\Gamma \varphi \times \mathbf{e}_3$$

### Divergence et rotationnel scalaire curviligne

$$\mathbf{div}_\Gamma(\mathbf{T}) = \mathbf{div}(\mathbf{T}_\tau) + k(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \quad \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{T}) = \mathbf{rot}(\mathbf{T}_n) + k(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{T}) = \mathbf{div}_\Gamma(\mathbf{T} \times \mathbf{e}_3)$$

### Formules de Green surfaciques

$$\int_{\partial S} \mathbf{T} \cdot \nabla_\Gamma u = - \int_{\partial S} \mathbf{div}_\Gamma(\mathbf{T}) u + \int_{\partial S} k(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) u \quad (10.24)$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot}_\Gamma u = \int_{\partial S} \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{T}) u - \int_{\partial S} k(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\tau}) u \quad (10.25)$$

### Couche mince $\Gamma^{\tilde{\nu}}$

La couche mince  $\Gamma^{\tilde{\nu}}$  est un petit étirement (feuilletage) de taille  $\tilde{\nu}$  de  $\Gamma$  dans la direction de sa normale entrante :

$$\Gamma^{\tilde{\nu}} := \{x \in S \mid \text{dist}(x, \Gamma) < \tilde{\nu}\}.$$

Cette couche mince n'est possible que si sa profondeur ne dépasse l'incurvation maximale de  $\Gamma$  :

$$\tilde{\nu} \leq \Gamma_+^{\tilde{\nu}} := \inf |k^{-1}|$$

### Coordonnées locales :

$$\forall \nu < \tilde{\nu}_+, x(t, \nu) = x_\Gamma(t) + \nu n(t) \quad \text{changement de variable } u(x) = \tilde{u}(t, \nu) \quad \text{Jacobien } J = 1 + \nu k$$

### Opérateurs feuilletés :

$$\nabla_\Gamma \tilde{u} = (\partial_t \tilde{u}) \boldsymbol{\tau} \quad \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{u} = (\partial_t \tilde{u}) \mathbf{n} \quad \mathbf{div}_\Gamma T = J \mathbf{div} T_\tau + k T \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{rot}_\Gamma T = J \mathbf{rot} T_n + k T \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \Delta_\Gamma \tilde{u} = \mathbf{div}_\Gamma (J^{-1} \nabla_\Gamma \tilde{u})$$

$$\mathbf{div} T_\tau = J^{-1} \partial_t (T \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad , \quad \mathbf{rot} T_n = -J^{-1} \partial_t (T \cdot \mathbf{n})$$

Les opérateurs coïncident avec les opérateurs tangentiels sur  $\Gamma$ , c'est à dire pour  $\nu = 0$ .

### Line entre des opérateurs volumiques et les opérateurs feuilletés dans une coche mince :

$$\nabla \varphi = J^{-1} \nabla_\Gamma \tilde{\varphi} + (\partial_\nu \tilde{\varphi}) \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{rot} \varphi = J^{-1} \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\varphi} - (\partial_\nu \tilde{\varphi}) \boldsymbol{\tau}$$

$$\mathbf{div} T = J^{-1} \mathbf{div}_\Gamma \tilde{T} + \partial_\nu(\tilde{T} \cdot n) = J^{-1} \left[ \partial_t(\tilde{T} \cdot \tau) + \partial_\nu(J\tilde{T} \cdot n) \right]$$

$$\mathbf{rot} T = J^{-1} \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{T} + \partial_\nu(\tilde{T} \cdot \tau) = J^{-1} \left[ -\partial_t(\tilde{T} \cdot n) + \partial_\nu(J\tilde{T} \cdot \tau) \right]$$

$$\mathbf{div}(\rho \nabla \varphi) = J^{-1} \left[ \partial_t(J^{-1} \rho \partial_t \tilde{\varphi}) + \partial_\nu(J \rho \partial_\nu \tilde{\varphi}) \right] = J^{-1} \left[ \partial_t(J^{-1} \rho \partial_t \tilde{\varphi}) + k \rho \partial_\nu \tilde{\varphi} \right] + \partial_\nu(\rho \partial_\nu \tilde{\varphi})$$

Opérateurs dans une couche minces avec changement d'échelles :

Il peut être aussi utile d'exprimer les éléments de la couche mince non pas dans les coordonnées locales précédemment introduite mais dans une remise à l'échelle de la couche par un petit paramètre  $\delta$ .

$$\nabla \varphi = \frac{1}{1+k\delta\nu} \nabla_\Gamma \tilde{\varphi} + \delta^{-1}(\partial_\nu \tilde{\varphi}) n \quad , \quad \mathbf{rot} \varphi = \frac{1}{1+k\delta\nu} \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\varphi} - \delta^{-1}(\partial_\nu \tilde{\varphi}) \tau$$

$$\mathbf{div} T = \frac{1}{1+k\delta\nu} \left[ \delta^{-1} \partial_\nu(\tilde{T} \cdot n) + kS \partial_\nu(\tilde{T} \cdot n) + k(\tilde{T} \cdot n) + \partial_t(\tilde{T} \cdot \tau) \right]$$

$$\mathbf{rot} T = \frac{1}{1+k\delta\nu} \left[ \delta^{-1} \partial_\nu(\tilde{T} \cdot \tau) + kS \partial_\nu(\tilde{T} \cdot \tau) + k(\tilde{T} \cdot \tau) - \partial_t(\tilde{T} \cdot n) \right]$$

# TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE, NOTION DE "TROU" ET "D'ANSE"

---

On peut déjà prédire sans grand risque d'erreur que le XXe siècle restera dans l'histoire des mathématiques comme le siècle de la Topologie.

J. Dieudonné

Cette annexe portant sur des éléments de **topologie algébrique** est motivée par l'utilisation récurrente de décompositions de Helmholtz. La plus classique de ces décompositions nécessite l'hypothèse de simple connexité et des plus raffinées, celles décrites dans les chapitres 1 et 2 et exploitées tout le long de ce manuscrit, ne s'en satisfont guère. Cette notion de simple connexité est la formalisation de la question : l'espace topologique considéré a-t-il des "trous" ? Nous formaliserons aussi dans cette annexe la question "combien de trous" ? En dimension 2 les "trous" sont des vides percés dans une surface et en dimension 3 les "trous" sont des "anses" (trous par lesquels on peut faire passer nos doigts pour porter à nos lèvres la tasse de café nécessaire à la concentration) et non pas les "cavités" (pépins dans un fruit). Par exemple une planète privée de son noyau, c'est-à-dire une boule de dimension 3 dans la laquelle une boule est enlevée est simplement, connexe alors qu'un bretzel (dit aussi Bredschdel ou Bradschdal), c'est-à-dire l'intérieur d'un 3-tore, a trois "trous" (ou trois "anses"). Ce premier exemple nous dit que l'homéomorphie<sup>1</sup> est une relation trop forte pour caractériser le nombre de "trous" : la boule dans laquelle est enlevée une boule n'est pas homéomorphe à une boule et pourtant elles sont toutes deux simplement connexes. Cette relation d'équivalence plus faible est l'homotopie. C'est l'objet de la première section de cette annexe. L'importance du trou dans l'analyse est mesuré par la capacité, quantité que nous définirons aussi dans cette annexe.



FIGURE 11.1 – Gauche : boule privée d'une cavité (planète sans son noyau). Droite : domaine à 3 anses (Bredschdel).

---

1. Une application est un homéomorphisme entre deux espaces topologiques si c'est une bijection continue d'inverse continue. Ces deux espaces sont alors dits homéomorphes.

## 11.1 Simple connexité et notion de "trous"

Ce qui est rigoureux est insignifiant.

---

René Thom

### 11.1.1 Homotopie

#### Connexité par arcs

La distance est un chemin par lequel je suis plus exposé à être rejoint que toute proximité

---

Rilke

Considérons un espace topologique  $X$ . Deux points  $x, y \in X$  sont dits joignables si et seulement si il existe un chemin permettant de les relier :

$$x \underset{0}{\sim} y \iff \exists \gamma \in C^0([0, 1], X) \text{ tq } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y.$$

Le quotient de l'espace topologique par cette relation d'équivalence  $\pi_0 := X/\underset{0}{\sim}$  est un groupe dont la dimension, aussi nommée dans le langage de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle nombre 0 de Betti, représente le nombre de composantes connexes par arcs. En particulier si c'est 1 nous dirons que l'espace est 0-connexe ou **connexe par arcs**. Cette notion n'est pas suffisante pour comptabiliser les trous car on peut trouver un chemin qui contourne les trous.

#### Groupes d'homotopie

Deux lacets<sup>2</sup> de base  $x$  sont homotopes si l'on peut continûment déformer l'un pour passer à l'autre et vice et versa :

$$\gamma \underset{1}{\sim} \tilde{\gamma} \iff \exists h \in C^0([0, 1] \times [0, 1], X) \text{ tq } h(\cdot, 0) = \gamma(\cdot), h(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}(\cdot) \text{ et } h(0, \cdot) = h(1, \cdot) = x.$$

L'ensemble quotient de l'ensemble des lacets de  $X$  de base  $x$  par cette relation d'équivalence est le groupe<sup>3</sup> fondamental de Poincaré  $\pi_1(X, x)$ . Si  $x$  et  $y$  sont joignables ( $x \underset{0}{\sim} y$ ) alors les groupes fondamentaux de Poincaré  $\pi_1(X, x)$  et  $\pi_1(X, y)$  sont isomorphes<sup>4</sup>. En particulier si l'espace  $X$  est connexe par arcs, cadre dans lequel nous allons toujours nous placer, alors nous ne sommes pas obligé de préciser la base du lacet. La dimension de ce groupe fondamental de Poincaré définit le nombre de "trous". En particulier,  **$X$  est simplement connexe si et seulement si  $\pi_1(X)$  est isomorphe à un point, c'est-à-dire que tout lacet est homotope à (rétractable en) un point.**

Deux espaces  $X$  et  $Y$  sont homotopes si et seulement si leurs groupes fondamentaux de Poincaré  $\pi_1(X)$  et  $\pi_1(Y)$  sont isomorphes. Deux espaces homéomorphes sont homotopes mais la réciproque est fautive (voir l'exemple de l'introduction sur la boule de dimension 3 privée d'une cavité). Pour séparer le cas de la boule de dimension 3 et de la boule privée d'une cavité nous allons introduire la notion de  $N$ -connexité.

Deux hyper-lacets<sup>5</sup> de dimension  $N \leq d$  (avec  $d$  la dimension de l'espace  $X$ ) de base  $x$  sont  $N$ -homotopes si l'on peut continûment déformer l'un pour passer à l'autre et vice et versa :

$$\gamma \underset{N}{\sim} \tilde{\gamma} \iff \exists h \in C^0([0, 1]^N \times [0, 1]^N, X) \text{ tq } h(\cdot, 0) = \gamma(\cdot), h(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}(\cdot) \text{ et } h(0, \cdot) = h(1, \cdot) = x.$$

L'ensemble quotient de l'ensemble des hyper-lacets de  $X$  de dimension  $N \leq d$  de base  $x$  par cette relation d'équivalence est le groupe fondamental d'homotopie d'ordre  $N$ .  $X$  est  **$N$ -connexe** si et seulement si les groupes  $\pi_0(X)$  jusqu'à  $\pi_N(X)$  sont isomorphes à des points. Cette notion n'est pas à confondre avec le nombre de trous.

---

2. Un lacet de base  $x$  est un chemin d'origine et d'extrémité  $x$ .

3. La composition des chemins induit une structure de groupe.

4. En topologie, un isomorphisme est une application continue, inversible et d'inverse continu.

5. Un hyper-lacet de dimension  $N$  est homéomorphe à la sphère de dimension  $N$ .

## 11.1.2 Notions de "trous" et de "cavités"

Un trou est un trou.

Proverbe

Pour un espace topologique de dimension  $d$ , une vision duale<sup>6</sup> du nombre de trous est le nombre de coupures intérieures non sécantes de dimension  $(d-1)$  qu'il est nécessaire d'introduire pour sectionner cet espace en deux domaines simplement connexes sans que dans la construction une coupure divise l'espace en deux dont l'un n'est pas simplement connexe. C'est cette vision que nous adopterons car nous aurons besoin de la construction de ces coupures pour exprimer les potentiels intervenant dans les décompositions de Helmholtz.

**Définition 11.1.1. (Coupures et trous)**

Soit un espace topologique  $X$  connexe par arcs de dimension  $d$ .

(i) Une **coupure** de  $X$  est un ouvert non vide  $\Gamma$  de  $X$  connexe par arcs de dimension  $d-1$  tel que

$$\Gamma \subset X \quad \text{et} \quad \partial\Gamma \subset \partial X$$

(ii) Si  $X$  n'est pas simplement connexe, un ensemble de coupure  $\{\Gamma_q\}_{1 \leq q \leq Q}$  est dit **rendre le domaine  $X$  simplement connexe** si ces coupures vérifient les conditions suivantes :

- les coupures sont non sécantes :  $\Gamma_q \cap \Gamma_{q'} = \emptyset$ ,
- le domaine  $X \setminus \left(\bigcup_{q=1}^Q \Gamma_q\right)$  est simplement connexe.

(iii) Le nombre minimum, disons  $Q$ , de coupures que l'on a besoin d'introduire pour rendre le domaine  $X$  simplement connexe est le nombre de **"trous"**. Nous dirons alors que  $X$  est un **domaine à  $Q$  "trous"**.

Les coupures sont là pour casser les lacets qui ne sont rétractables en un point. Nous illustrerons avec des exemples visuels concrets cette dernière phrase (voir la figure 11.2 pour la dimension 2 et la figure 11.6 pour la dimension 3). Remarquons que si  $X$  est simplement connexe et  $\Gamma$  une coupure alors  $X \setminus \Gamma$  n'est plus connexe. Ainsi le nombre de trous peut aussi être vu comme le nombre maximum de coupures moins une qu'il nous est nécessaire d'introduire pour scinder l'espace en deux espaces simplement connexes. Le **genre** d'une surface (variété de dimension 2) compacte, connexe, orientable et sans bord est usuellement défini comme "le nombre maximal de cercles deux à deux disjoints tracés sur la surface, dont le complémentaire est connexe". Si cette notion (de genre) est plus habituelle en géométrie algébrique, nous avons néanmoins choisi d'exploiter la définition que nous avons donné de la notion de "trous" car nous travaillerons en dimension 3 davantage avec l'intérieur qu'avec le bord. Toutefois le lien entre les deux notions est élémentaire : le bord d'un espace topologique de dimension 3 à  $Q$  trous est une surface sans bord de genre  $Q$ , de même l'intérieur d'une surface sans bord de genre  $Q$  est un domaine à  $Q$  trous. La notion de genre ne s'applique pas avec la dimension<sup>7</sup> 2 et les domaines non bornés.

**Définition 11.1.2. (Cavités)**

Soit un espace topologique  $X$  connexe par arcs de dimension  $d$ .

(i) Un **raccordement** d'ordre  $N < d$  dans  $X$  est un ouvert non vide  $\gamma$  connexe par arcs de dimension  $d-N$  tel que

$$\gamma \subset X \quad \text{et} \quad \partial\gamma \subset \partial X$$

(ii) Si  $\pi_N(X)$  n'est pas isomorphe à un point, un ensemble de raccordements  $\{\Gamma_k\}_{1 \leq k \leq K}$  est dit **rendre le domaine  $X$  sans trous d'ordre  $N$**  si ces coupures vérifient

- les raccordements ne s'intersectent pas :  $\gamma_k \cap \gamma_{k'} = \emptyset$ ,
- le groupe  $\pi_N \left( X \setminus \left( \bigcup_{k=1}^K \Gamma_k \right) \right)$  est isomorphe à un point.

Le nombre minimum de raccordements que l'on a besoin d'introduire pour rendre le domaine  $X$  sans trou d'ordre  $N$  est le nombre de **"trous d'ordre  $N$ "**.

(iii) les **"cavités"** sont les trous d'ordre  $d-1$ .

6. Plus rigoureusement pour ceux qui sont à l'aise avec la notion de revêtement, la notion de coupure est duale à celle de revêtement universel.

7. Bien que nous pouvons aisément élargir la notion de genre en considérant qu'une variété sans bord est de genre  $Q$  si et seulement si elle est le bord d'un espace à  $Q$  trous.

Pour un domaine borné, le nombre de cavités correspond tout simplement aux nombres de composantes connexes du bord moins un. En dimension deux les notions de "trou" et de "cavité" se confondent, mais ce n'est plus nécessairement le cas en dimension trois.

Le nombre de "trous" (et de trous d'ordre  $N$ ) est un invariant topologique lié à l'homotopie dans le sens où deux espaces topologiques ont le même nombre de trous (de trous d'ordre  $N$ ) si et seulement si leurs groupes fondamentaux de Poincaré (groupes fondamentaux d'homotopie d'ordre  $N$ ) ont même dimension. Nous allons maintenant détailler la structure des domaines à  $Q$  trous en dimension 2 et 3.

## 11.2 Cas de la dimension 2, théorie des capacités

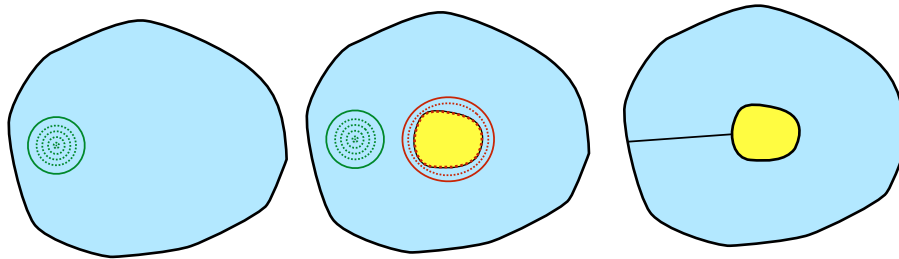


FIGURE 11.2 – Gauche : surface simplement connexe. Milieu : surface à un trou. Droite : surface à un trou avec coupure

Le cas de la dimension 2 est facile à se représenter. Sur l'illustration de gauche de la figure 11.2 tous les lacets de base sont retractables en un point. Puisque ce domaine est connexe par arcs cette propriété est vérifiée pour toutes bases. Prenons maintenant le cas de l'illustration du milieu de cette même figure, tous les lacets verts sont homotopes à un point alors que les lacets rouges ne le sont pas. Le groupe fondamental de Poincaré de cette surface est donc de dimension 1 : il y a un trou. Passons à la vision dual. Dans l'illustration de droite de la figure 11.3 une seule coupure rejoignant les deux bords du domaine est suffisante pour rendre celui-ci simplement connexe. Une coupure de plus le découperait en deux.

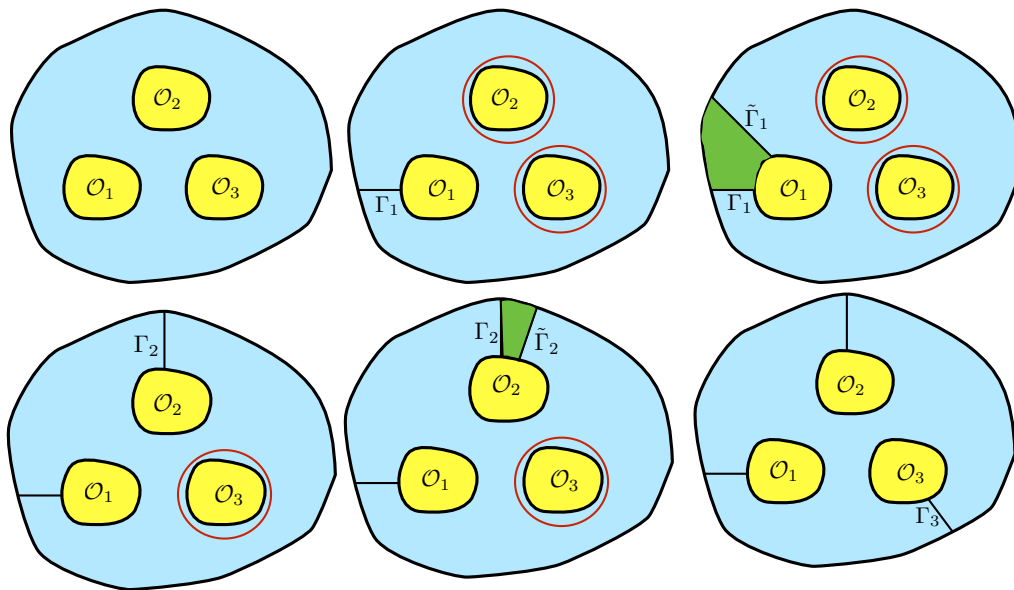


FIGURE 11.3 – Comment passer d'une surface à trois trous à un domaine simplement connexe en introduisant trois coupures.

Plaçons nous dans le cas d'une surface à trois trous que nous supposons assez régulière (typiquement

lipschitzienne). La figure 11.3 présente toutes les étapes du propos qui va suivre. Commençons par construire la coupure  $\Gamma_1$  qui rejoint le bord du trou  $\mathcal{O}_1$  au bord extérieur. L'existence d'une telle coupure est assurée par le fait que domaine est connexe par arcs. Le domaine privé de la coupure  $\Gamma_1$  reste connexe par arcs mais n'est toujours pas simplement connexe car les lacets rouges ne sont pas homotopes à des points. Si nous construisons la coupure  $\tilde{\Gamma}_1$  alors nous séparons le domaine en deux parties (or il ne le faut pas) dont l'une est simplement connexe et l'autre possède encore des trous. Construisons alors une coupure  $\Gamma_2$  qui rejoint le bord du trou  $\mathcal{O}_2$  au bord extérieur. Le domaine n'est toujours pas simplement connexe. De la même manière si nous construisons la coupure  $\tilde{\Gamma}_2$ , nous ne découpons pas le domaine en deux surfaces simplement connexes. La seule manière est d'introduire une coupure  $\Gamma_3$  qui rejoint le bord du trou  $\mathcal{O}_3$  au bord extérieur. Pour finir n'importe quelle coupure qui rejoint deux bords divise la surface en deux domaines simplement connexes. Or toute surface à trois trous est homéomorphe à la nôtre, ce qui achève l'établissement du lien entre le nombre de trous et de coupures. Cet exemple à trois trous se généralise aisément par récurrence à  $Q$ . **Une surface dont le bord est constitué de  $Q + 1$  lignes de Jordan fermées connexes qui ne s'intersectent à  $Q$  trous et nous avons besoin de  $Q + 1$  coupures** pour la rendre simplement connexe. Ces coupures existent car le domaine est connexe par arcs. Dans le cas général cette surface peut être décrite par la définition suivante.

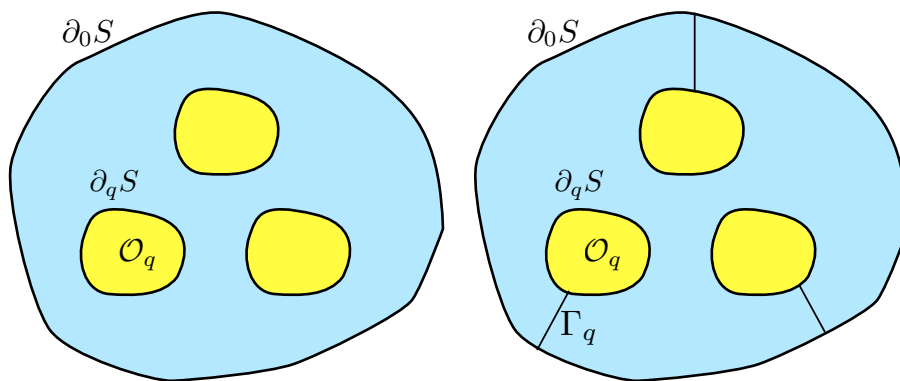


FIGURE 11.4 – Surface à  $Q$  trous et ses coupures.

**Définition 11.2.1. (Domaine 2D à  $Q$  trous)**

Un domaine 2D à  $Q$  "trous" est une surface plane (figure 11.4) incluse dans un domaine convexe borné  $\mathcal{B}$  :

$$S = \mathcal{O}_0 \setminus \overline{\bigcup_q \mathcal{O}_q}, \quad \overline{\mathcal{O}_k} \cap \overline{\mathcal{O}_\ell} = \emptyset \text{ pour } k \neq \ell,$$

avec  $\mathcal{O}_q$  pour  $q = 0 \dots Q$  des domaines simplement connexes tels que les "trous"  $\mathcal{O}_q$  pour  $q = 1 \dots Q$  vérifient  $\mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{B}$ . Nous noterons les  $Q + 1$  composantes connexes du bord de cette surface de la manière suivante :

$$\partial_q S = \partial \mathcal{O}_q, \quad q = 0 \dots Q.$$

Les  $Q$  coupures caractéristiques  $\Gamma_q$  de  $S$  sont des coupures qui joignent  $\partial_q S$  et  $\partial_0 S$  qui permettent de rendre le domaine simplement connexe (au sens de la définition 11.1.1).

Les trous peuvent "dégénérer" c'est-à-dire devenir un point ou venir toucher un des bords du domaine. La quantité qui permet de décrire cela est la capacité. Si nous choisissons les coupures de telles manières qu'elles soient de longueurs minimums, alors un trou "dégénère" en venant toucher le bord extérieur du domaine si cette distance minimale tend vers 0.

**11.2.1 Capacité**

L'espace harmonique<sup>8</sup>

$$\mathcal{E}(1, S) := \{ \mathbf{u} \in L^2(S, \mathbb{C}^2); \text{rot } \mathbf{u} = 0, \text{div } \mathbf{u} = 0, \text{ et } \mathbf{u} \times \mathbf{n} |_{\partial S} = 0 \} \tag{11.1}$$

8. Le mot "harmonique" dénote couramment un accord agréable à l'oreille. Les fonctions harmoniques se sont nommées en raison des solutions de l'équation de la corde vibrante. Un son décrite par cette dernière est décomposé (via Fourier) en une somme de cosinus et de sinus qui représente des sons simples qui se sont nommés au XVI siècle harmoniques. Par analogie, William Thomson a nommé harmonique sphérique ce même type de développement pour la dimension trois. Au début du XIX siècle, le mot harmonique ne s'est plus seulement appliqué aux polynômes de laplacien nul mais à toutes solutions de l'équation de Laplace, alors que l'équation de son origine est maintenant dans le domaine fréquentiel dénommée équation de Helmholtz. Cette petite histoire se trouve dans [9].



est engendré par les gradients

$$\mathcal{E}(1, S) = \text{span} \{ \nabla \varphi^q(1, S) \}_{1 \leq q \leq Q}$$

des mesures harmoniques  $\varphi^q(1, S) \in H^1(S)$  de chacun des  $Q$  trous qui sont les solutions de :

$$\begin{cases} \Delta \varphi^q(1, S) = 0, & \text{dans } S, \\ \varphi^q(1, S) = \delta_k^q & \text{sur } \partial_k S \end{cases} \quad (11.2)$$

La capacité du trou  $\mathcal{O}_q$  est la semi-norme  $H^1$  de la fonction harmonique  $\varphi^q(1, S)$  :

$$\text{Cap}_S(\partial_q S) := \text{Cap}_S(\mathcal{O}_q) := \int_S |\nabla \varphi^q(1, S)|^2, \quad (11.3)$$

elle représente "l'énergie du trou dans le domaine" (ou performance).

Pour une couronne  $S/\mathcal{O}_1$  de rapport de rayon  $b$  (rayon extérieur divisé par le rayon intérieur), nous pouvons calculer analytiquement sa capacité :

$$\text{Cap}_S(\mathcal{O}_1) = \frac{2\pi}{\ln b}.$$

Sur cet exemple, nous pouvons observer les conséquences de la dégénérescence :

$$\begin{cases} b = \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \Rightarrow \text{Cap}_S(\mathcal{O}_1) = \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o} \left( \frac{-1}{\ln(\varepsilon)} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\ b \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} (1 + \varepsilon) \Rightarrow \text{Cap}_S(\mathcal{O}_1) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \left( \frac{1}{\ln(1 + \varepsilon)} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty \end{cases}$$

### Définition 11.2.2. (Dégénérescence d'un trou)

Nous dirons qu'un trou  $\mathcal{O}_q$  "dégénère" en se rétractant en un point si sa capacité tend vers 0 et "dégénère" en se rapprochant d'un bord si sa capacité tend vers l'infini. Ainsi un trou  $\mathcal{O}_q$  ne "dégénère" pas si sa capacité est encadrée :

$$\exists c_-^q, c_+^q \in ]0, \infty[ ; c_-^q \leq \text{Cap}_S(\mathcal{O}_q) \leq c_+^q$$

Des hypothèses géométriques simples permettent de s'assurer qu'un trou  $\mathcal{O}_q$  ne "dégénère" pas.

**Propriété 11.2.1.** Si le trou  $\mathcal{O}_q$  a une aire coercive, c'est-à-dire  $\exists a_{q,*} > 0$  tq  $|\mathcal{O}_q| \geq a_{q,*}$  et si  $S$  est borné dans une direction, alors

$$\text{Cap}_S(\mathcal{O}_q) \geq \left( \frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)} \right)^2 a_{q,*}$$

avec  $c_{p,0}(\mathcal{O}_0)$  la constante de Poincaré du domaine  $\mathcal{O}_0$  (voir le lemme 1.5.1 sur les inégalités de Poincaré) et s'il existe une couronne de rayon de ratio (rayon extérieur sur le rayon intérieur)  $b_q$  incluse dans  $S$  entourant  $\mathcal{O}_q$  alors

$$\text{Cap}_S(\mathcal{O}_q) \leq \frac{2\pi}{\ln b_q}.$$

*Démonstration.* Etendons  $\varphi^q(1, S) \in H^1(S)$  sur  $\mathcal{O}_0$  par la fonction bouche-trou suivante

$$\varphi_*^q(1, S) = \begin{cases} \varphi^q(1, S) & \text{dans } S \\ 1 & \text{dans } \overline{\mathcal{O}_q} \\ 0 & \text{dans } \mathcal{O} / (S \cup \mathcal{O}_q), \end{cases}$$

et nous obtenons par l'inégalité de Poincaré classique

$$\|\nabla \varphi^q(1, S)\|_{L^2(S)} = \|\nabla \varphi_*^q(1, S)\|_{L^2(\mathcal{O})} \geq \frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)} \|\varphi_*^q(1, S)\|_{L^2(\mathcal{O})} \geq \frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)} \sqrt{|\mathcal{O}_q|}.$$

□

**Remarque 11.2.1.** Attention, dans le vocabulaire usuel de la théorie des potentiels et des capacités ([62],[71], [2]),  $\varphi(1, S)$  est la mesure et non le potentiel. Dans celui-ci le potentiel  $\Phi_{\varphi(1, S)}$  associé à la mesure  $\varphi(1, S)$  se définit de la manière suivante

$$\begin{cases} -\Delta \Phi_{\varphi(1, S)} = \varphi(1, S), \\ \Phi_{\varphi(1, S)} = 0. \end{cases}$$

Cependant, nous n'utiliserons jamais le terme "potentiel" dans ce sens mais dans celui de la décomposition de Helmholtz qui constitue l'outil essentiel de notre travail. Dans ce dernier  $\varphi(1, S)$  est bien un potentiel.

La prise en compte des  $Q$  trous, nous permet de définir la matrice des capacités  $\mathfrak{C}$  :

$$\forall q, q' = 1 \dots Q, \mathfrak{C}_{q,q'} = \int_S \nabla \varphi^q(1, S) \cdot \nabla \varphi^{q'}(1, S). \quad (11.4)$$

**Propriété 11.2.2.** *La matrice des capacités  $\mathfrak{C}$  est une M-matrice*

*Démonstration.* La propriété de M-matrice est démontrée dans un cadre plus général en 1.3.3. □

Cette matrice permet de généraliser la notion de non "dégénérescence" à plusieurs trous et cela uniformément :

**Définition 11.2.3. (Non dégénérescence (uniforme) d'un ensemble de  $Q$  trous)**

*Nous dirons qu'un ensemble de  $Q$  trous  $\mathcal{O}_q$  ne dégénère pas si les valeurs propres de sa matrice de capacité sont uniformément encadrée :*

$$\exists c_-, c_+ \in ]0, \infty[ ; \forall \lambda_{\mathfrak{C}} \in \sigma(\mathfrak{C}), c_- \leq \lambda_{\mathfrak{C}} \leq c_+$$

De la même façon des hypothèses géométriques simples permettent de s'assurer de la dégénérescence uniforme d'un ensemble de  $Q$  trous :

**Propriété 11.2.3.** *Si l'aire des trous est uniformément coercive, c'est-à-dire  $\exists a_* > 0$  telle que  $\forall q = 1 \dots Q, |\mathcal{O}_q| \geq a_*$  et si il existe des couronnes de rapports de rayons  $b_q$  entourant les  $Q$  trous, alors les valeurs propres  $\lambda_{\mathfrak{C}}$  de la matrice de capacité  $\mathfrak{C}$  sont uniformément encadrée :*

$$\left( \frac{1}{c_{p,0}(\mathcal{O}_0)} \right)^2 \min_q |\mathcal{O}_q| \leq \lambda_{\mathfrak{C}} \leq \max_q \left( \frac{2\pi}{\ln b_q} \right).$$

*Démonstration.* La preuve de la coercivité est la même que dans la démonstration de la propriété 11.2.1 en remplaçant  $\varphi_*^q(1, S)$  par  $\varphi_*(1, S)$  définit par

$$\varphi_*(1, S) = \begin{cases} \varphi(1, S) & \text{dans } S \\ 1 & \text{dans } \overline{\mathcal{O}_q} \quad q = 1 \dots Q. \end{cases}$$

□

## 11.2.2 Inductance

The real numbers, for certain purposes, are too thin. Many beautiful phenomena become fully visible only when the complex numbers are brought to the fore.

Errett Bishop

L'espace harmonique conjugué

$$\mathcal{H}(1, S) := \{ \mathbf{u} \in L^2(S, \mathbb{C}^2); \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0, \mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \text{ et } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |_{\partial S} = 0 \} \quad (11.5)$$

est engendré

$$\mathcal{H}(1, S) = \text{span} \{ \nabla \psi^q(1, S) \}_{1 \leq q \leq Q}$$

par les gradients des mesures harmoniques  $\psi^q(1, S) \in H^1(S)$  de chacun des  $Q$  trous qui sont les solutions de :

$$\begin{cases} \Delta \psi^q(1, S) = 0, & \text{dans } S \setminus \Gamma_q, & \partial_n \psi^q(1, S) = 0, & \text{sur } \partial S_q, \\ [\partial_n \psi^q(1, S)]_{\Gamma_k} = 0, & & [\psi^q(1, S)]_{\Gamma_k} = \delta_k^q, & \text{sur } \Gamma_k, \end{cases} \quad (11.6)$$

L'inductance du trou  $q$  est la semi-norme  $H^1$  de la fonction harmonique  $\psi^q(1, S)$  :

$$Ind_S(\partial_q S) = Ind_S(\mathcal{O}_q) =: \int_{S \setminus \Gamma_q} |\nabla \psi^q(1, S)|^2, \quad (11.7)$$

elle représente l'énergie nécessaire pour réaliser la coupure entre le trou  $q$  et le bord extérieur. De même nous pouvons définir la matrice d'inductance  $\check{\mathfrak{C}}$  :

$$\forall i, j = 1 \dots Q, \check{\mathfrak{C}}_{i,j} = \int_S \nabla \psi^i(1, S) \cdot \nabla \psi^j(1, S).$$

Pour une couronne  $S/\mathcal{O}_1$  de rapport de rayon  $b$ , nous pouvons calculer analytiquement sa capacité :

$$\text{Ind}_S(\mathcal{O}_1) = \frac{\ln b}{2\pi} = (\text{Cap}_S(\mathcal{O}_1))^{-1}.$$

Ce lien entre l'inductance et la capacité peut être établi dans le cas général via le lemme de conjugaison 1.3.5 :

$$\nabla\psi^q(1, S) = \sum_{q'}^Q \left( \check{\mathfrak{C}}_{q,q'} e_3 \times \nabla\varphi^{q'}(1, S) \right) \quad \text{avec} \quad e_3 \times \nabla\varphi^{q'}(1, S) = -\mathbf{rot} \varphi^{q'}(1, S) \quad \text{et} \quad \check{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}^{-1}$$

Ce lemme nous permet de conclure qu'avec les mêmes hypothèses géométriques, les valeurs propres de la matrice d'inductance sont encadrées. Ainsi nous pouvons définir la non-dégénérescence à partir de la matrice d'inductance. Nous pouvons réécrire ce lien en disant que les potentiels complexes

$$f_q := \varphi^q(1, S) + i \sum_{q'}^Q \left( \mathfrak{C}_{q,q'} \psi^{q'}(1, S) \right) \quad \text{et} \quad \check{f}_q := \sum_{q'}^Q \left( \check{\mathfrak{C}}_{q,q'} \varphi^{q'}(1, S) \right) + i\psi^q(1, S)$$

sont holomorphes. En particulier cela veut dire dans le langage de l'analyse complexe que  $\sum_{q'}^Q \left( \mathfrak{C}_{q,q'} \psi^{q'}(1, S) \right)$  est la fonction harmonique conjuguée de  $\varphi^q(1, S)$ <sup>9</sup>.

En mécanique des fluides, dans l'étude des profils des ailes d'avion par exemple, le potentiel complexe joue un rôle fondamental. Dans ce cas, les domaines étudiés sont souvent simplement connexes. L'intuition quant à l'introduction des potentiels conjugués nous est venue par la volonté d'exploiter ce formalisme dans le cas de domaine non simplement connexe. Sans cette analogie, nous n'aurions jamais pensé à un résultat tel que le lemme de conjugaison 1.3.5.

### 11.2.3 Transformation conforme (par morceaux)

Le sens trop précis rature ta vague  
littérature

Mallarmé

Des transformations conformes et anti-conformes sont respectivement des homéomorphismes dont le jacobien  $J$  est localement une similitude directe et respectivement indirecte  $J(x) = r(x)R(\theta(x))$  avec  $r$  un rapport d'homothétie et  $R(\theta(x)) \in O(2)$  :

$$R(\theta(x)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(x)) & -\sin(\theta(x)) \\ \sin(\theta(x)) & \cos(\theta(x)) \end{pmatrix} \in SO(2) \quad \text{ou} \quad R(\theta(x)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(x)) & \sin(\theta(x)) \\ \sin(\theta(x)) & -\cos(\theta(x)) \end{pmatrix}.$$

En analyse complexe, une transformation conforme est une fonction holomorphe dont la dérivée n'admet pas de zéro. Nous dirons que deux domaines de  $\mathbb{R}^2$  sont conformément équivalents s'il existe une transformation conforme dont l'un est image de l'autre.

**Définition 11.2.4.** Une transformation "conforme par morceaux" (respectivement "anti-conforme par morceaux")  $\mathcal{T}_c$  d'un domaine borné  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  est un homéomorphisme tel qu'il existe une partition  $(S^n)_{n=1\dots N}$  finie de  $S$  de manière à ce que  $\mathcal{T}_c(S^n)$  soit conformément (respectivement anti-conformément) équivalent à  $S^n$ .

**Propriété 11.2.4.** Les matrices des capacités  $\mathfrak{C}$  et des inductances  $\check{\mathfrak{C}}$  sont invariantes par transformation conforme par morceaux dans le sens où

$$\mathfrak{C}_{q,q'} = \int_{\mathcal{T}_c(S)} \nabla\varphi^q(1, \mathcal{T}_c(S)) \cdot \nabla\varphi^{q'}(1, \mathcal{T}_c(S)).$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{T}_c$  un homéomorphisme. Notons  $(S^n)_{n=1\dots N}$  une partition finie de  $S$  telle que les transformations  $\mathcal{T}_{c,n} : S^n \rightarrow \mathcal{T}_c(S^n)$  sont conformes. Nous noterons  $J_n = r_n R_n$  leur jacobiniennes. Nous avons

$$\int_{\mathcal{T}_c(S)} \nabla\varphi^q(1, S) \cdot \nabla\varphi^{q'}(1, S) = \sum_{n=1}^N \int_{\mathcal{T}_c(S^n)} \nabla\varphi^q(1, S) \cdot \nabla\varphi^{q'}(1, S)$$

9. Raison pour laquelle nous avons nommé  $\mathcal{H}(1, S)$  espace harmonique conjugué.

Par changement de variable  $x = \mathcal{T}_c(y)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_c(S^n)} \nabla\varphi^q(1, S)(x) \cdot \nabla\varphi^{q'}(1, S)(x) dx &= \int_{S^n} (J^{-1}(y)\nabla\varphi^q(1, S)(y))^t \cdot (J^{-1}(y)\nabla\varphi^{q'}(1, S)(y)) |\det J_n(y)| dy \\ &= \int_{S^n} \nabla\varphi^q(1, S)(y) \cdot (R_n^{-1}(y))^t R_n(y)^{-1} \cdot \nabla\varphi^{q'}(1, S)(y) \frac{r_n(y)^2}{r_n(y)^2} dy \\ &= \int_{S^n} \nabla\varphi^q(1, S)(y) \cdot \nabla\varphi^{q'}(1, S)(y) dy \end{aligned}$$

□

Remarquons que la démonstration ne marche qu'en dimension 2, en dimension 3 nous aurons  $|\det J(y)| = r(y)^3$ .

L'invariance par transformation conforme permet de faire des calculs dans une géométrie de référence. Cette propriété a d'abord été exploitée dans la cartographie puis dans l'étude des profils d'aile d'avion et dans l'élasticité [44]. Tout domaine simplement connexe autre que le plan complexe en entier est conformément équivalent au disque unité (théorème de l'application conforme de Riemman [45]). Le cas d'un domaine plus compliqué  $S$  est décrit par le théorème de Ahlfors<sup>10</sup>-Tsuji :

**Théorème 11.2.1.** *Pour tout  $q = 1 \dots Q$ , la transformation conforme  $\exp(\check{f}_q)$  transforme  $S$  en un anneau  $1 < |z| < \exp(2\pi \text{Ind}_S(\mathcal{O}_q))$  privé de  $Q - 1$  arcs concentriques situés sur les cercles  $|z| = \exp(2\pi \check{\mathcal{C}}_{q,q'})$ ,  $q = 1 \dots q - 1, q + 1 \dots Q$ .*

*Démonstration.* La démonstration est faite au théorème 10 page 255 de [5]. Nous ne l'avons pas recopiée, par contre, nous tenons à préciser que dans celle-ci, Ahlfors démontre l'existence du potentiel conjugué de  $\varphi^q(1, S)$  sans le construire (c'est d'ailleurs une des étapes les plus délicates de sa démonstration) alors que le lemme de conjugaison 1.3.5 nous a permis de le faire. □

De nombreux exemples de transformations conformes vers des géométries différentes de celles de notre théorème sont données dans [71]. Ce théorème nous permet une classification topologique des surfaces à  $Q$  trous :

**Corollaire 11.2.1.** *Deux surfaces planes bornées sont conformément équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes matrices de capacité. En particulier une surface plane  $S$  à un trou ( $Q = 1$ ) est conformément équivalente à une couronne de rapport de rayon  $\exp(2\pi \text{Ind}_S(\mathcal{O}_1))$  et a aucun autre rapport de rayon.*

Une version plus fiable de ce corollaire, deux couronnes sont conformément équivalente si et seulement-si les rapports des rayons sont égaux, peut être démontrée sans avoir recours au théorème de Ahlfors-Tsuji (théorème 14.22 de [63]).

## 11.3 Le cas des volumes

Le mal de prendre une hypallage pour une découverte, une métaphore pour une démonstration, un vomissement de mots pour un torrent de connaissances capitales, et soi-même pour un oracle, ce mal naît avec nous.

Paul Valéry

Donnons nous un domaine borné simplement connexe  $\mathcal{W}_0$  dont le seul bord  $\partial\mathcal{W}_0$  contient trois surfaces planes, nommées sections finales  $\mathcal{O}_{0,l}$ , pour  $l$  de 0 à 2, qui ne s'intersectent pas :

$$\overline{\mathcal{O}_{0,l}} \cap \overline{\mathcal{O}_{0,l'}} = \emptyset \text{ pour } l \neq l'.$$

ainsi qu'un autre domaine simplement connexe sans cavité  $\mathcal{W}_1$ , l'anse, qui est incluse dans  $\mathcal{W}_0$  et l'intersecte seulement sur les sections finales  $\mathcal{O}_{0,l}$

$$\partial\mathcal{W}_1 \cap \partial\mathcal{W}_0 \subset \bigcup_{l=0}^2 \mathcal{O}_{0,l}$$

10. Lars Valerian Ahlfors (18 April 1907 - 11 October 1996) est le premier mathématicien à recevoir la médaille Fields. Il a surtout travaillé sur l'analyse complexe. Nous exploiterons principalement son étude des transformations conformes.

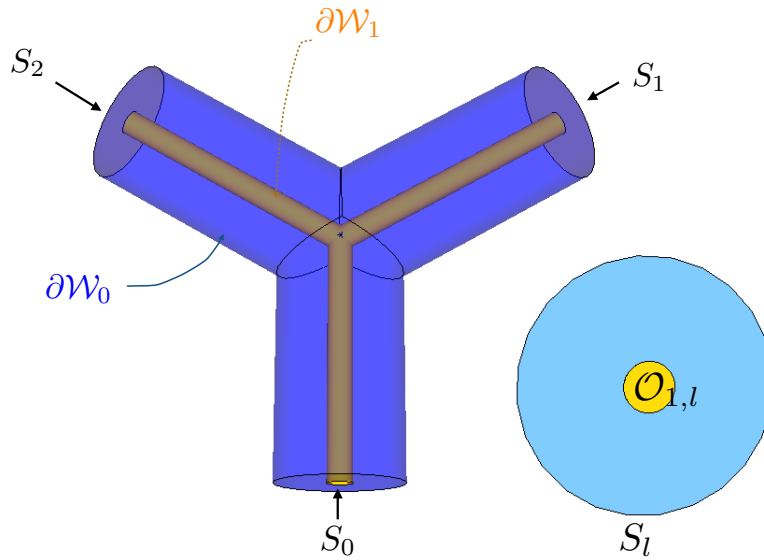


FIGURE 11.5 – Anse de degré trois et section finale.

Plus précisément, nous définissons les trous  $\mathcal{O}_{1,l}$  des sections finales de la manière suivante  $\mathcal{O}_{1,l} := \mathcal{O}_{0,l} \cap \mathcal{W}_1$  en s'assurant que  $\mathcal{O}_{1,l} \neq \emptyset$ . Notre domaine et les sections finales sont définies par :

$$\mathcal{K} := \mathcal{W}_0 \setminus \mathcal{W}_1 \quad \text{et} \quad S_l = \mathcal{O}_{0,l} \setminus \mathcal{O}_{1,l}.$$

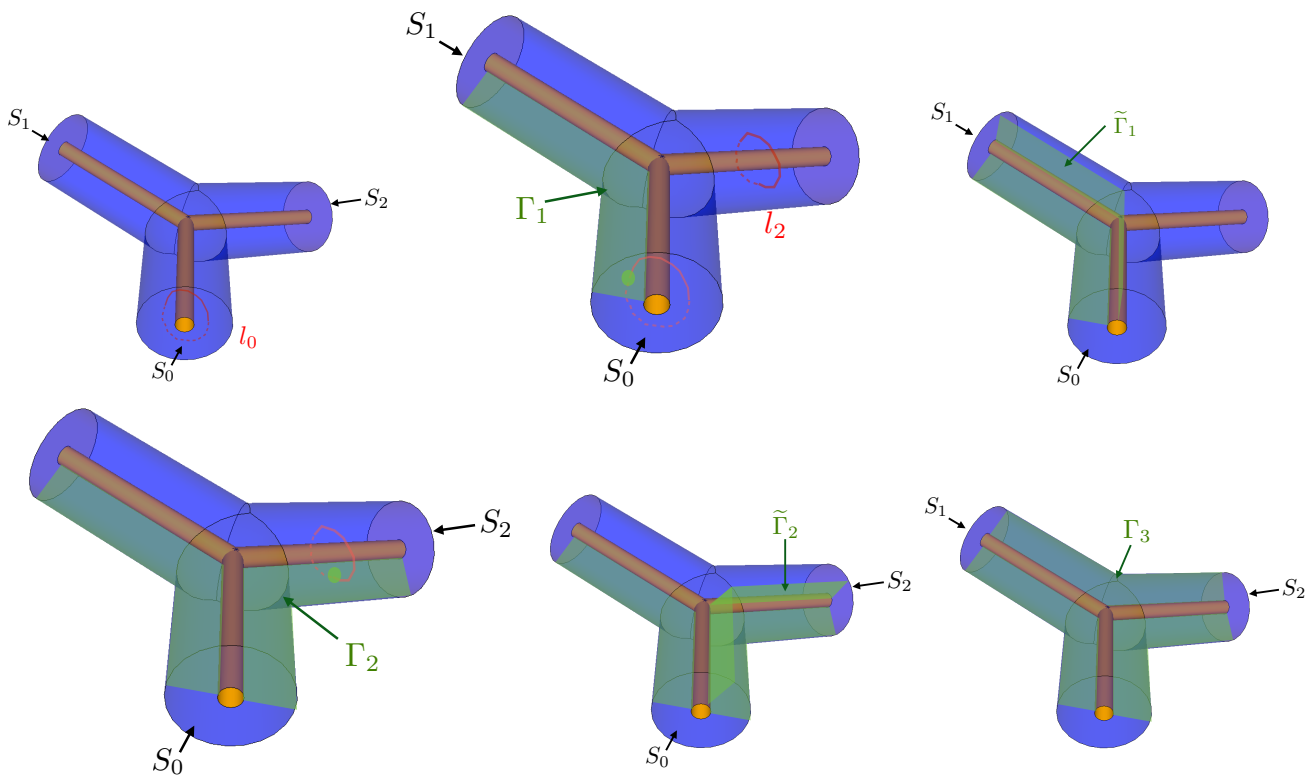


FIGURE 11.6 – Anse de degré trois et section finale.

Concentrons nous sur la figure 11.6 qui montre comment construire des coupures qui permettent de rendre un domaine à 1 anse d'ordre 3 simplement connexe. En effet ce domaine n'est pas simplement connexe car aucune boucle qui entoure l'anse  $\mathcal{W}_1$ , par exemple le lacet  $l_0$ , ne peut se rétracter en un point. Commençons par construire la coupure  $\Gamma_1$  qui rejoint les sections finales  $S_0$  à  $S_1$  en s'appuyant sur le bord de l'anse  $\mathcal{W}_1$  et

sur le bord extérieur. Ce domaine n'est toujours pas simplement connexe car le lacet  $l_2$  qui entoure l'anse ne peut se rétracter en un point. Si nous construisons la coupure  $\tilde{\Gamma}_1$  alors nous séparons le domaine en deux parties dont l'une est simplement connexe et l'autre possède encore des trous. Construisons alors une coupure  $\Gamma_2$  qui rejoint les sections finales  $S_0$  à  $S_2$ . Cette fois le domaine est simplement connexe. De la même manière si nous construisons la coupure  $\tilde{\Gamma}_2$  ou  $\Gamma_3$  qui rejoint les sections finales  $S_2$  à  $S_3$ , nous découpons le domaine en deux domaines simplement connexes. Nous avons eu besoin de deux coupures pour rendre notre domaine simplement connexe (ou de trois coupures pour le décomposer en deux), l'anse est d'ordre 3. Cet exemple à trois sections finales et une anse se généralise à  $L + 1$  sections  $S_l$  finales et  $Q$  anses  $\mathcal{W}_q$  qui vont se fracasser sur chacune des sections finales (il faudra alors  $Q \times L$  coupures). L'ordre de l'anse correspond aux nombres de sections finales qu'elle intersecte. Le genre du bord du domaine est la somme de l'ordre de toutes les anses.

Les cavités  $\text{Cav}_k$  avec  $k = 1 \dots K$  d'un domaine

$$\mathcal{W}_0 \setminus \bigcup_q^Q \mathcal{W}_q$$

sont des domaines simplement connexes avec un bord connexe qui ne touchent aucun bord du domaine

$$\text{dist}(\partial \text{Cav}_k, \mathcal{W}_0 \setminus \bigcup_q^Q \mathcal{W}_q)$$

que nous retranchons au domaine :

$$\mathcal{K} := \mathcal{W}_0 \setminus \left( \bigcup_q^Q \mathcal{W}_q \bigcup_k^K \text{Cav}_k \right).$$

Ajouter une cavité c'est rajouter un bord mais pas une coupure 2D.

**Définition 11.3.1. (Domaine à  $Q$  anses d'ordre  $(L + 1)$  et à  $K$  cavités)**

Soit un domaine simplement connexe  $\mathcal{W}_0$  dont le bord n'a qu'une composante connexe  $\partial \mathcal{W}_0$  contenant  $(L + 1)$  surfaces (pas forcément planes), nommées sections finales  $\mathcal{O}_{0,l}$  pour  $l = 0 \dots L$ , qui ne s'intersectent pas :

$$\overline{\mathcal{O}_{0,l}} \cap \overline{\mathcal{O}_{0,l'}} = \emptyset \text{ for } l \neq l'.$$

Soit  $Q$  domaines simplement connexes  $\mathcal{W}_q$  homéomorphe à  $\mathcal{W}_0$ , nommés anses d'ordres  $(L + 1)$ . Ces domaines ne s'intersectent pas, sont inclus dans  $\mathcal{W}_0$  et ne l'intersectent que sur les sections finales  $\mathcal{O}_{0,l}$

$$\partial \mathcal{W}_q \cap \partial \mathcal{W}_0 \subset \bigcup_{l=0}^L \mathcal{O}_{0,l}$$

Plus précisément, nous définissons les  $Q(L + 1)$  trous  $\mathcal{O}_{q,l}$  des sections finales de la manière suivante  $\mathcal{O}_{q,l} := \mathcal{O}_{0,l} \cap \mathcal{W}_q$  en s'assurant que  $\mathcal{O}_{q,l} \neq \emptyset$ . Les cavités d'un domaine

$$\mathcal{W}_0 \setminus \bigcup_{q=1}^Q \mathcal{W}_q$$

sont des domaines simplement connexes  $\text{Cav}_k$  pour  $k = 1 \dots K$  avec un bord composé d'une unique composante connexe qui ne touche aucun autre bord

$$\text{dist} \left( \partial \text{Cav}_k, \mathcal{W}_0 \setminus \bigcup_q^Q \mathcal{W}_q \right) > 0 \quad \text{et} \quad \text{dist}(\partial \text{Cav}_k, \partial \text{Cav}_{k'}) > 0 \quad \text{pour } k \neq k' = 1 \dots K$$

que nous retranchons au domaine. Ainsi un volume à  $Q$  anses de degré  $(L + 1)$  et  $K$  cavités se définit par :

$$\mathcal{K} := \mathcal{W}_0 \setminus \left( \bigcup_{q=1}^Q \mathcal{W}_q \bigcup_{k=1}^K \text{Cav}_k \right)$$

Nous noterons les bords du domaine et des sections finales par

$$\partial_q \mathcal{K} = \partial \mathcal{W}_q \quad , \quad \partial^k \mathcal{K} = \partial \text{Cav}_k \quad \text{et} \quad \partial_q S_l = \partial \mathcal{O}_{q,l} \quad \text{pour } q = 0 \dots Q \quad , \quad k = 1 \dots K \quad \text{et} \quad l = 0 \dots L$$

Les  $Q \times L$  coupures  $\Gamma_{q,l}$  qui rendent le domaine

$$\mathcal{K}_\Gamma := \mathcal{K} \setminus \left( \bigcup_{q=1}^Q \bigcup_{l=1}^L \Gamma_{q,l} \right)$$

simplement connexe sont des surfaces 2D simplement connexes telles que pour tout  $1 \leq q \leq Q$  et  $1 \leq l \leq L$  :

- elles ne s'intersectent pas :  $\Gamma_{q,l} \cap \Gamma_{q',l'} = \emptyset$  pour  $q \neq q'$  et  $l \neq l'$ .
- elles sont intérieures et ne s'appuient que sur une partie de l'anse  $\partial\Gamma_{q,l} \subset S_0 \cup \partial_q\mathcal{K} \cup S_l \cup \partial_0\mathcal{K}$

Nous noterons  $\partial_l\Gamma_q$  l'intersection entre le bord des coupures  $\partial\Gamma_{q,l}$  et les sections finales  $S_l$  pour  $l = 1\dots L$  et  $Q = 1..Q$ .

Remarquons que nous avons choisi dans cette définition de définir les coupures  $\Gamma_{q,l}$  comme des surfaces qui rejoignent les sections finales  $S_0$  à  $S_l$ . Nous aurions pu bien entendu choisir une autre convention. Cette définition n'épuise pas tous les genres de domaines 3D possiblement rencontrés, en effet il faudrait considérer des domaines avec plusieurs anses d'ordre différent. Cependant, comme nous ne rencontrerons jamais dans le cadre de ce manuscrit de tel domaine, nous avons choisi de ne pas les décrire plus précisément.

### 11.3.1 Capacité et inductance

En dimension trois les espaces des fonctions harmoniques des cavités et respectivement des fonctions harmoniques conjuguées des anses

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{K}) &:= \{E \in L^2(\mathcal{K}); \mathbf{curl} E = 0, \mathbf{Div} E = 0, \text{ and } E \times n|_{\mathcal{K}} = \mathbf{0}\} \\ \mathcal{H}(\mathcal{K}) &:= \{H \in L^2(\mathcal{K}); \mathbf{curl} H = 0, \mathbf{Div} H = 0, \text{ and } H \cdot n|_{\mathcal{K}} = \mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (11.8)$$

sont engendrés par

$$\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \text{span} \{\mathbf{grad}\Phi_k\}_{1 \leq k \leq K} \quad \text{and} \quad \mathcal{H}(\mathcal{K}) = \text{span} \{\mathbf{grad}\Psi^{q,l}\}_{1 \leq q \leq Q, 2 \leq l \leq L}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\Phi_k = 0, & \text{dans } \mathcal{K} \\ \Phi_k = 1 & \text{sur } \partial\text{Cav}_k \\ \Phi_k = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{K} \setminus \partial\text{Cav}_k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\Psi^{q,l} = 0, & \text{dans } \mathcal{K} \\ \partial_n\Psi^{q,l} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{K} \\ [\hat{\mu}\partial_n\Psi^{q,l}] = 0, \quad [\Psi^{q,l}] = 1, & \text{sur } \Gamma_{q,l}. \end{array} \right.$$

Cette fois-ci il n'y a pas d'isomorphisme entre  $\mathcal{E}(\mathcal{K})$  et  $\mathcal{H}(\mathcal{K})$  d'autant plus qu'en générale ils n'ont aucune raison d'avoir la même dimension ainsi les tenseurs de capacité (énergie d'une cavité) et d'inductance (énergie nécessaire à la coupure)

$$\forall i, j = 1\dots K, \mathbf{Cav}_{i,j} = \int_{\mathcal{K}} \mathbf{grad}\Phi_i \cdot \mathbf{grad}\Phi_j \quad \text{et} \quad \forall q, q' = 1\dots Q, l, l' = 2\dots L, \mathbf{Cut}_{q,q'}^{l,l'} = \int_{\mathcal{K}} \mathbf{grad}\Psi^{q,l} \cdot \mathbf{grad}\Psi^{q',l'}$$

sont décorrélés.

### 11.3.2 Le cas des domaines non-bornés

Comprendre, c'est le reflet de créer.

---

Villiers de l'Isle-Adam

Si le comptage du nombre de cavités d'un domaine non borné est aisé celui des coupures et par extension le nombre d'anses du domaine est plus compliqué. Nous nous intéresserons qu'au cas suivant : le domaine précédent  $\mathcal{K}$  (sans cavité pour simplifier) est prolongé aux sections finales  $S_l$  par des cylindres de longueur  $\sigma_l$  constitués par les translations de  $S_l$  dans les directions normales. Nous noterons ce domaine compact

$$\mathcal{K}(\sigma) \quad \text{avec} \quad \sigma = (\sigma_l)_{l=1\dots L},$$

quand  $\sigma_l$  tend vers l'infini le domaine  $\mathcal{K}(\infty)$ , nous dirons alors que le domaine est à  $L$  fin cylindrique. Dans ce cas les anses sont de volumes infinis et les coupures d'aires infinies et contrairement au cas fini l'anse définit aussi un potentiel harmonique :

$$\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \text{span} \{\mathbf{grad}\Phi^q\}_{1 \leq q \leq Q} \quad (\text{il n'y a pas de cavité}),$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\Phi^q = 0, & \text{dans } \mathcal{K}(\infty) \\ \Phi^q = 1 & \text{sur } \partial_q\mathcal{K}(\infty) \\ \Phi^q = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{K}(\infty) \setminus \partial_q\mathcal{K}(\infty). \end{array} \right.$$

Par contre, si nous définissons de la même manière capacité et inductance, celles-ci seront infini. Pour cela nous allons introduire les semi-capacités et les semi-inductances, non plus basées sur la norme  $H^1$  mais sur des semi-normes. Notons  $\varphi^{q,l}$  et  $\psi^{l,q}$  sont les potentiels harmoniques et harmoniques conjuguées associés aux "trous"  $q$  de la section finale  $S_l$ . Nous définissons sur la suite exhaustive de compact  $(\mathcal{K}(\sigma))_{0 \leq \sigma_l < \infty}$  les tenseurs de semi-inductance

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}ut_{q,q'}^{l,l'}(\sigma) := & \int_{\mathcal{K}(\sigma)} \mathbf{grad} \Psi^{q,l} \cdot \mathbf{grad} \Psi^{q',l'} + \sum_{\bar{l}=2}^L \int_{\sigma_{\bar{l}}}^{\infty} \int_{S_{\bar{l}} \times \{u\}} \mathbf{grad} (\Psi^{q,l} + \psi^{q,l}) \cdot \mathbf{grad} (\Psi^{q',l'} + \psi^{q',l'}) \\ & + \int_{\sigma_1}^{\infty} \int_{S_1 \times \{u\}} \mathbf{grad} (\Psi^{q,l} - \psi^{q,1}) \cdot \mathbf{grad} (\Psi^{q',l'} - \psi^{q',1}) \end{aligned}$$

et de semi-capacités :

$$\mathfrak{C}ap_{q,q'}(\sigma) := \int_{\mathcal{K}(\sigma)} \mathbf{grad} \Phi^q \cdot \mathbf{grad} \Phi^{q'} + \sum_{l=1}^L \int_{\sigma_l}^{\infty} \int_{S_l \times \{u\}} \mathbf{grad} (\Phi^q - \varphi^{q,l}) \cdot \mathbf{grad} (\Phi^{q'} - \varphi^{q',l}).$$

Nous justifierons plus tard et dans un cadre plus général pourquoi nous concevons ces objets comme une généralisation des capacités et inductances précédemment définies et pourquoi se sont des quantités finies.

## 11.4 L'art d'aimer

Nous pouvons modéliser un couple par un domaine connexe par arcs, il existe toujours dans les yeux de l'un un chemin pour aller vers l'autre et espérons avec la douceur d'une courbe régulière même si celui-ci peut sembler terriblement long et sinueux. Ce couple est parfait si ce domaine est simplement connexe car rien ne gêne à l'enlacement «que mes bras habitués, en étreignant ton ombre, à se croiser sur ma poitrine» (Desnos, J'ai tant rêvé de toi). La question qui turlupine Ovide [57] est la dimension de celui-ci et son nombre de trous. De chastes fiancés Mormon forment un amour de dimension 0 car ils ne peuvent pas même s'enlacer. Prenons maintenant le couple formé par Benjamin Constant et Cécile, celui-ci n'est pas simplement connexe, un trou du nom de Madame de Staël, se trouve en plein milieu. Le couple dégénère quand le trou tend vers un point car Benjamin s'ennuie si profondément que la relation stagne et quand le trou tend à se rapprocher du bord jusqu'au point de rupture. La capacité quantifie la place que prend Madame de Staël dans le cœur de Benjamin et l'inductance l'énergie qui est nécessaire à cette dernière pour briser le couple. En remarquant ce lien, nous pouvons affirmer que c'est un amour de dimension 2. Passons maintenant au cas de dimension 3. Les cavités représentent les amantes, les capacités mesurent leurs importances, et les anses les femmes épousées, les inductances sont alors le temps restant avant le divorce. Ces deux objets sont bien différents, un amour élégiaque multiplie les cavités, Cynthia, Délie... sans que cela gêne en rien la mariée, sauf si bien sur la cavité se rapproche trop de l'anse (nous dirons alors que la maîtresse coûte trop chère et empiète sur le budget du ménage) et un amour chrétien fait en sorte d'entretenir qu'une anse mais d'ordre le plus élevé possible, c'est-à-dire partager le plus de choses avec sa compagne de manière à augmenter le nombre de coupure nécessaire pour briser en deux le mariage. D'autres cultures permettent même de multiplier les anses. Pour notre étude des jonctions entre câbles coaxiaux et multiconducteurs, nous avons décidé de nous mettre dans un cadre acceptant la polygamie, rétrograde (impossible de résorber un mariage) mais néanmoins fidèle (aucune amante).





# TRANSFORMATION DE LAPLACE ET DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES

Cette annexe a pour but de préciser quelques notions sur la transformée de Laplace et de l'exploiter pour décrire l'effet d'opérateurs différentiels temporels par des considérations algébriques. La première section rappelle la définition ainsi que les propriétés habituelles de la transformée de Laplace de fonction à valeur dans un espace de Hilbert. Elle est grandement inspirée, sinon recopiée, de l'annexe 12.4 de [72] et de [7]. Ces deux références font des liens entre la transformée de Laplace et la théorie des semi-groupes appliquée aux problèmes d'évolutions linéaires. La seconde section traite d'un lien entre le domaine de Laplace et le domaine temporel. Elle est dédiée à la présentation et à la démonstration d'un résultat grandement utilisé et qui explique pourquoi nous avons souvent recours à la transformée de Laplace. La dernière section définit les dérivées fractionnaires. Ces dernières peuvent être vues comme les opérateurs temporels équivalents à des puissances fractionnaires de la variable de Laplace s'inscrivant ainsi dans le vaste sujet que constitue les opérateurs pseudo-différentiels [26]. Nous en donnerons néanmoins une définition directement dans le domaine temporel.

## 12.1 Transformée de Laplace à valeur dans un espace de Hilbert

### 12.1.1 Définition de la transformée de Laplace

Soit  $E$  un espace de Hilbert, la transformée de Laplace d'une fonction  $u \in L^1_{loc}([0, \infty[, E)$  est définie par l'intégrale de Bochner suivante

$$\mathcal{L}(u)(s) := \hat{u}(s) := \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt$$

pour toutes les valeurs complexes  $s$  où l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^\infty e^{-\Re(s)t} \|u(t)\|_E dt < \infty.$$

Le paramètre de Laplace

$$s = \eta + i\omega$$

peut parcourir tout le plan complexe ou seulement une partie. Plus particulièrement, nous nous focaliserons sur les demi-plans

$$\mathbb{C}_{\eta_0} := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > \eta_0\} \quad \text{pour } \eta_0 \in \mathbb{R},$$

car si  $u \in L^1_{loc}([0, \infty[, E)$  admet une transformée de Laplace  $\hat{u}$  définie sur un demi-plan du type  $\mathbb{C}_{\eta_0}$ , alors  $u$  est uniquement déterminée par  $\hat{u}$  (voir [7] pour la démonstration<sup>1</sup>). La transformée de Laplace transforme les opérateurs intégro-différentiels temporels en opérateurs algébriques :

- dérivateur :  $\mathcal{L}(\partial_t u)(s) = \hat{u}(s) - u(t=0, \cdot)$
- dérivateur d'ordre  $K$  :  $\mathcal{L}(\partial_t^K u)(s) = s^K \hat{u}(s) - \sum_k^{K-1} s^k \partial_t^{K-1-k} u(t=0, \cdot)$
- intégrateur :  $\mathcal{L}\left(\int_0^t u(t_0, \cdot) dt_0\right)(s) = \frac{\hat{u}(s, \cdot)}{s}$

1. Celle-ci repose sur la formule de Post-Widder que nous verrons par la suite.

- intégrateur d'ordre  $K$  :  $\mathcal{L}([I^K u](t))(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \int_0^{t_K-1} \dots \int_0^{t_1} u(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_K\right)(s) = \frac{\hat{u}(s, \cdot)}{s^K}$
- produit de convolution :  $\mathcal{L}\left(u *_{\frac{t}{t}} v\right)(s) = \hat{u}(s, \cdot) \hat{v}(s)$

et les signaux temporels en signaux dans le domaine de Laplace où ils devront être analytiques. Pour les caractériser, nous introduisons les espaces de Hardy à valeurs dans un Hilbert :

**Définition 12.1.1. (Espace de Hardy translaté)** Pour tout  $\eta_0 \in \mathbb{R}$ , l'espace de Hardy est l'espace de Banach :

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E) := \left\{ \hat{u} : \mathbb{C}_{\eta_0} \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytique} \mid \sup_{\eta > \eta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{u}(\eta + i\omega)\|_E^2 d\omega < \infty \right\}$$

munie de

$$\|\hat{u}\|_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)} := \left( \frac{1}{2\pi} \sup_{\eta > \eta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{u}(\eta + i\omega)\|_E^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous noterons

$$\mathcal{H}^K(\mathbb{C}_{\eta_0}, E) := \{ \hat{u} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E) \mid s^k \hat{u} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E) \text{ pour } k = 0 \dots K \}$$

### 12.1.2 Paley-Wiener : une certaine équivalence entre le domaine de Laplace et le domaine temporel

Pour comprendre pourquoi nous disons sans cesse que l'étude dans le domaine temporel et dans celui de Laplace est équivalente, nous allons introduire des espaces à poids :

**Définition 12.1.2.** Pour tout  $\eta_0 \in \mathbb{R}$ , nous définissons les espaces à poids suivants :

$$L_{\eta_0}^2([0, \infty[, E) := \{ u \in L_{loc}^2([0, \infty[, E) \mid e^{-\eta_0 \cdot} u(\cdot) \in L^2([0, \infty[, E) \}.$$

munis des normes

$$\|u\|_{L_{\eta_0}^2([0, \infty[, E)} = \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-2\eta_0 t} \|u(t)\|_E^2 dt}.$$

Nous noterons de même :

$$H_{\eta_0}^K([0, \infty[, E) := \{ u \in H_{loc}^K([0, \infty[, E) \mid \partial_t^k u \in L_{\eta_0}^2([0, \infty[, E) \text{ pour } k = 0 \dots K \}.$$

Le premier des résultats à ce sujet et le bien connu théorème de Paley-Wiener :

**Théorème 12.1.1. (Paley-Wiener)** Si  $E$  est un espace de Hilbert alors la transformée de Laplace

$$\mathcal{L} : L_{\eta_0}^2([0, \infty[, E) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)$$

est unitaire.

*Preuve* Soit  $u \in L_{loc}^2([0, \infty[, E)$  tel que  $u_{\eta_0}(\cdot) := e^{-\eta_0 \cdot} u(\cdot) \in L^2([0, \infty[, E)$ . Admettons déjà la démonstration (voir [7]) dans le cadre des espaces à valeurs dans un Banach de l'usuel théorème de Paley-Wiener (voir [63] pour le cas simple) :

$$L^2([0, \infty[, E) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E) \text{ est unitaire.}$$

En particulier, nous avons

$$\hat{u}_{\eta_0}(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s+\eta_0)t} u(t) dt := \tilde{u}(s + \eta_0)$$

ainsi,  $\tilde{u} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)$  est la transformée de Laplace de  $u$ . Nous avons :

$$\|e^{-\eta_0 \cdot} u(\cdot)\|_{L^2([0, \infty[, E)} = \|\tilde{u}(s + \eta_0)\|_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)} = \|\tilde{u}\|_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)}.$$

□

Comme les dérivées  $k^{\text{ièmes}}$  sont associées à les puissances  $k^{\text{ièmes}}$  de  $s$ , nous avons

**Corollaire 12.1.1. (Paley-Wiener)** La transformée de Laplace

$$\mathcal{L} : H_{\eta_0}^K([0, \infty[, E) \rightarrow \mathcal{H}^K(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)$$

est unitaire et de plus pour tout  $k = 0 \dots K$

$$\|\partial_t^k u\|_{L_{\eta_0}^2([0, \infty[, E)} = \|s^k \hat{u}\|_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)}$$

### 12.1.3 Inversion de la transformée de Laplace

Pour inverser cette transformée, nous disposons de la formule classique pour  $\hat{u} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)$  :

$$u(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{(\eta+i\omega)t} \hat{u}(\eta+i\omega) d\omega \quad \text{pour } \eta > 0 \text{ fixé,}$$

ou la formule de Post-Widder (voir encore [7]) si  $\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)$  :

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \frac{d^n \hat{u}}{ds^n} \left(\frac{n}{t}\right).$$

### 12.1.4 La transformée de Fourier comme "trace" de la transformée de Laplace sur le domaine fréquentiel

Pour finir, nous pouvons définir la transformée de Fourier et conclure quant à quelques unes de ses propriétés via la transformée de Laplace dans  $\mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)$ . Pour toute fonction  $\hat{u} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)$ , nous pouvons définir sa trace sur le domaine fréquentiel  $\hat{u}^*(i\omega) \in L^2(i\mathbb{R})$  par

$$\hat{u}^*(i\omega) := \lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{u}(\eta + i\omega),$$

ce qui nous permet en particulier d'exprimer le produit scalaire de l'espace de Hardy  $\mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)$  :

$$(\hat{u}, \hat{v})_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)} := \frac{1}{2\pi} (\hat{u}^*, \hat{v}^*)_{L^2(i\mathbb{R})}$$

et la transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R}, E)$  par

$$\mathcal{F}(u)(\omega) := \hat{u}^*(i\omega),$$

ce qui correspond à la transformée de Laplace quand  $\eta = 0$ . Le théorème de Plancherel s'écrit alors

**Théorème 12.1.2. (Plancherel)**

*L'espace de Hardy  $\mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\forall \hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E), \quad (\hat{u}, \hat{v})_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)} := \frac{1}{2\pi} (\hat{u}^*, \hat{v}^*)_{L^2(i\mathbb{R})}.$$

*Ce dernier vérifie l'égalité de Parseval :*

$$\forall u, v \in L^2(\mathbb{R}, E), \quad (\hat{u}, \hat{v})_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_0, E)} = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v))_{L^2(\mathbb{R}, E)} = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}, E)}.$$

De la même manière pour tout  $\eta_0 \geq 0$ , nous pouvons définir la trace de toute fonction  $\hat{u} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)$  sur le domaine fréquentiel par

$$\hat{u}^{\eta_0}(i\omega) := \lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \hat{u}(\eta + i\omega),$$

et ainsi munir  $\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)$  d'un produit scalaire

$$\forall \hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E), \quad (\hat{u}, \hat{v})_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)} := \frac{1}{2\pi} (\hat{u}^{\eta_0}, \hat{v}^{\eta_0})_{L^2(i\mathbb{R})},$$

lié au produit scalaire de  $L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)$  par

$$(\hat{u}, \hat{v})_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\eta_0 t} u(t) \overline{v(t)} dt.$$

## 12.2 D'une estimation dans le domaine de Laplace à une équivalente dans le domaine temporel

Nous avons principalement recours à la transformée de Laplace pour montrer qu'une EDP d'évolution de source  $J$  et de solution  $u$  est bien posé dans des espaces du type

$$L^2(]0, T[, E) \quad \text{ou} \quad L^\infty(]0, T[, E)$$

sans avoir besoin d'écrire l'EDP dans le domaine temporel (en utilisant que celle dans le domaine de Laplace). Pour s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution d'une EDP par la méthode de Galerkin, nous avons besoin d'une estimation a priori du type

$$\|u\|_{L^2([0,T[,E)} \leq \text{quelque chose qui dépend de la source et de } T,$$

alors que nous ne connaissons qu'une estimation dans le domaine de Laplace

$$\|\hat{u}(s)\|_E \leq \text{quelque chose qui dépend de la source et de } s.$$

En première instance nous avons le résultat suivant :

**Lemme 12.2.1.** *Soit*

$$\hat{J} \in \mathcal{H}^K(\mathbb{C}_{\eta_0}, E).$$

*Si nous avons pour tout  $s \in \mathbb{C}_{\eta_0}$  une estimation a priori dans le domaine de Laplace du type*

$$\|\hat{u}(s)\|_E \leq a \frac{|s|^k}{(\eta + \alpha)^l} \|\hat{J}(s)\|_E$$

*avec des constantes  $a > 0$  et  $\alpha \geq 0$  indépendantes de  $s$ , alors il existe une fonction causale  $u$  correspondant à la transformée de Laplace inverse de  $\hat{u}$  qui vérifie pour tout temps  $T < \infty$  :*

$$\|u\|_{L^2([0,T[,E)} \leq e^{\eta_0 T} \frac{a}{(\eta_0 + \alpha)^l} \|\partial_t^k J\|_{L_{\eta_0}^2([0,\infty[,E)}. \quad (12.1)$$

*Démonstration.* Premièrement remarquons avec le corollaire 12.1.1 du théorème de Paley-Wiener que

$$\|u\|_{L_{\eta_0}^2([0,\infty[,E)} = \|\hat{u}\|_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)} \leq a \frac{\| |s|^k \hat{J}(s) \|_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)}}{(\eta + \alpha)^l}.$$

Notons ensuite que

$$\frac{\| |s|^k \hat{J}(s) \|_{\mathcal{H}(\mathbb{C}_{\eta_0}, E)}}{(\eta + \alpha)^l} = \frac{\|\partial_t^k J\|_{L_{\eta_0}^2([0,\infty[,E)}}{(\eta + \alpha)^l},$$

et pour finir que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\eta_0 t} \|u(t)\|_E^2 dt \geq \int_0^T e^{-2\eta_0 t} \|u(t)\|_E^2 dt \geq e^{-2\eta_0 T} \|u\|_{L^2([0,T[,E)}^2.$$

□

Cependant, nous n'en sommes guère satisfait puisque selon l'inégalité (12.1), l'estimation de  $u$  jusqu'à l'instant  $T$  nécessite de connaître  $J$  pour tout temps. Or généralement, du moins dans le cadre ou toujours nous nous sommes trouvé dans cette thèse,  $u$  est la solution d'une EDP linéaire de source  $J$ . Aussi le rapport causal entre  $J$  et  $u$ , que nous précisons et supposons par la suite, fait que nous pouvons certainement raffiner notre inégalité de façon que nous n'avons besoin de connaître  $J$  seulement jusqu'à l'instant  $T$ . Pour cela nous allons avoir besoin d'un opérateur de prolongement.

**Lemme 12.2.2.** *Pour tout  $K$ , Il existe pour tout  $T > 1$  un opérateur de prolongement*

$$P_T \in \mathcal{L}\left(H^K(]0, T[, E), H^K(]0, \infty[, E)\right)$$

*tel que pour tout  $u \in H^K(]0, T[, E)$  et  $k = 0 \dots K$  :*

$$\partial_t^k (P_T u) \Big|_{]0, T[} = \partial_t^k u.$$

*De plus, il existe une constante  $C_{pro}$  indépendante de  $T$  telle que pour tout  $u$*

$$\|u\|_{H^K(]0, T[, E)} \leq \|P_T u\|_{H^K(]0, \infty[, E)} \leq C_{pro} \|u\|_{H^K(]0, T[, E)}.$$

*Démonstration.* Nous savons que

$$P_1 \in \mathcal{L}\left(H^K(]0, 1[, E), H^K(]0, \infty[, E)\right).$$

En particulier, la constante intervenant dans l'énoncé du lemme est  $C_{pro} := |||P_1|||$  et forcément elle ne dépend pas de  $T$ .

Soient  $r_T$  et  $\tau_T$  les opérateurs de restriction :

$$r_T : \begin{array}{ccc} H^K(]0, T[, E) & \rightarrow & H^K(]T-1, T[, E) \\ u & \mapsto & u|_{]T-1, T[} \end{array}$$

et de translation :

$$\tau_T : \begin{array}{ccc} H^K(]T-1, T[, E) & \rightarrow & H^K(]0, 1[, E) \\ u & \mapsto & u(t+T-1) \end{array}$$

Nous avons

$$P_T = r_T \circ \tau_T \circ P_1$$

et nous en déduisons l'inégalité souhaitée en remarquant que  $r_T$  est une contraction et  $\tau_T$  une isométrie. □

Avec tous ces ingrédients, nous pouvons enfin énoncer le théorème central de cette section dans sa version la plus générale.

**Théorème 12.2.1.** *Soit  $J \in L^1_{loc}(]0, \infty[, E)$  une fonction causale telle que*

$$J \in H^K(]0, T[, E)$$

*et  $u \in L^1_{loc}(]0, \infty[, E)$  une fonction causale donnée par une application*

$$u = \mathfrak{A}(J)$$

*elle aussi "causale", dans le sens où pour tout  $\tilde{T} \in ]0, T[,$  nous avons*

$$\tilde{J} = J|_{]0, \tilde{T}[} \Rightarrow \mathfrak{A}(\tilde{J}) = \mathfrak{A}(J)|_{]0, \tilde{T}[}$$

*Si nous avons pour tout  $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{T}}$  une estimation a priori dans le domaine de Laplace du type*

$$||\hat{u}(s)||_E \leq K(s) ||\hat{J}(s)||_E$$

*avec  $K$  une "borne admissible pour le retour en temps" c'est-à-dire qui peut s'écrire sous la forme :*

$$K(s) = \sum_{\ell=0}^L \sum_{k=-K'}^K a_k^\ell \frac{|s|^k}{(\eta + \alpha_k^\ell)^\ell} \quad \text{avec } a_k^\ell, \alpha_k^\ell \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ne dépendent pas de } s \quad (12.2)$$

*alors il existe une fonction causale  $u$  jusqu'au temps  $T < \infty$  correspondant à la transformée de Laplace inverse de  $\hat{u}$ . De plus, en temps "long"  $T > 1$ , la fonction  $u$  vérifie l'estimation a priori suivante :*

$$\begin{aligned} ||u||_{L^2(]0, T[, E)} &\leq C_{pro} e^1 \max_{0 \leq k \leq K, 0 \leq \ell \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \right] ||J||_{H^K(]0, T[, E)} \\ &\quad + C_{pro} e^1 \max_{-K' \leq k \leq -1, 0 \leq \ell \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \right] ||I^{K'} J||_{H^{K'}(]0, T[, E)} \end{aligned}$$

*avec  $C_{pro}$  une constante indépendante de  $T$  définie dans le lemme 12.2.2 et  $e^1$  la constante de Néper.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons auparavant besoin d'un raffinement du lemme 12.2.1 :

**Lemme 12.2.3.** *Soit*

$$J \in \mathcal{H}^K(\mathbb{C}_{\eta_0}, E).$$

*Si nous avons pour tout  $s \in \mathbb{C}_{\eta_0}$  une estimation a priori dans le domaine de Laplace du type*

$$||\hat{u}(s)||_E \leq K(s) ||\hat{J}(s)||_E$$

avec  $K$  une "borne admissible pour le retour en temps" dans le sens de (12.2) alors il existe une fonction causale  $u$  correspondant à la transformée de Laplace inverse de  $\hat{u}$ . qui vérifie pour tout temps  $T < \infty$  :

$$e^{-\eta_0 T} \|u\|_{L^2([0, T[, E)} \leq \|u\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} \leq \sum_{\ell=0}^L \left[ \sum_{k=-K'}^{-1} \frac{a_k^\ell}{(\eta_0 + \alpha_k^\ell)^\ell} \|I^{-k} J\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} + \sum_{k=0}^K \frac{a_k^\ell}{(\eta_0 + \alpha_k^\ell)^\ell} \|\partial_t^k j\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} \right].$$

*Démonstration.* La seconde partie de l'inégalité, à savoir

$$\|u\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} \leq \sum_{\ell=0}^L \left[ \sum_{k=-K'}^{-1} \frac{a_k^\ell}{(\eta_0 + \alpha_k^\ell)^\ell} \|I^{-k} J\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} + \sum_{k=0}^K \frac{a_k^\ell}{(\eta_0 + \alpha_k^\ell)^\ell} \|\partial_t^k j\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} \right].$$

provient du corollaire 12.1.1 de Paley-Wiener. La première est évidente au vu de

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\eta_0 t} \|u(t)\|_E^2 dt \geq \int_0^T e^{-2\eta_0 t} \|u(t)\|_E^2 dt \geq e^{-2\eta_0 T} \|u\|_{L^2([0, T[, E)}^2.$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème souhaité.

*Démonstration.* Donnons nous  $J$  et  $u$  vérifiant les hypothèses du théorème. Soit  $T > 1$ . Notons

$$J_r = P_T(J|_{]0, T[}).$$

Nous avons par définition de l'opérateur de prolongement pour tout  $k' = 1 \dots K'$  et  $k = 0 \dots K$  :

$$I^{k'} J_r |_{]0, T[} = I^{k'} J |_{]0, T[} \quad \text{et} \quad \partial_t^k J_r |_{]0, T[} = \partial_t^k J |_{]0, T[}$$

Définissons

$$u_r := \mathfrak{F}(J_r).$$

Comme, par le corollaire 12.1.1 de Paley-Wiener

$$\hat{J}_r \in \mathcal{H}^K(\mathbb{C}_0, E),$$

nous pouvons appliquer le lemme 12.2.3 (avec  $\eta_0 = T^{-1}$ ) :

$$\|u_r\|_{L^2([0, T[, E)} \leq e^1 \sum_{\ell=0}^L \left[ \sum_{k=-K'}^{-1} a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \|I^{-k} J\|_{L^2_{\frac{T}{1}}([0, \infty[, E)} + e^1 \sum_{k=0}^K a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \|\partial_t^k J\|_{L^2_{\frac{T}{1}}([0, \infty[, E)} \right].$$

En remarquant que pour tout  $v \in L^2(\mathbb{R}^+, E)$

$$\|v\|_{L^2_{\frac{T}{1}}([0, \infty[, E)} \leq \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^+, E)},$$

nous avons

$$\|u_r\|_{L^2([0, T[, E)} \leq e^1 \max_{0 \leq k \leq K', 0 \leq \ell \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \|J_r\|_{\mathcal{H}^K(]0, \infty[, E)} + e^1 \max_{-K' \leq k \leq 1, 0 \leq \ell \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \|I^{K'} J\|_{\mathcal{H}^{K'}(]0, \infty[, E)} \right].$$

Comme  $\mathfrak{T}$  est "causale" et que  $J_r|_{]0,T[} = J|_{]0,T[}$ , nous avons

$$u_r|_{]0,T[} = u|_{]0,T[}.$$

Pour terminer, en utilisant le lemme 12.2.2, nous retrouvons

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2([0,T[,E])} &\leq C_{\text{pro}} e^1 \max_{0 \leq k \leq K, 0 \leq l \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \right] \|J\|_{H^K}([0,T[,E]) \\ &\quad + C_{\text{pro}} e^1 \max_{-K' \leq k \leq 1, 0 \leq l \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \right] \|I^{K'} J\|_{H^{K'}}([0,T[,E]). \end{aligned}$$

□

Les estimations a priori en temps sont davantage données en norme  $L^\infty$  qu'en norme  $L^2$ , aussi donnons le résultat suivant :

**Corollaire 12.2.1.** *Soit  $J \in L^1_{\text{loc}}(]0, \infty[, E)$  une fonction causale telle que*

$$J \in H^{K+1}(]0, T[, E)$$

*et  $u \in L^1_{\text{loc}}(]0, \infty[, E)$  une fonction causale donnée par une application*

$$u = \mathfrak{T}(J)$$

*elle aussi "causale", dans le sens où pour tout  $\tilde{T} \in ]0, T[$ , nous avons*

$$\tilde{J} = J|_{]0,\tilde{T}[} \Rightarrow \mathfrak{T}(\tilde{J}) = \mathfrak{T}(J)|_{]0,\tilde{T}[}.$$

*Si nous avons pour tout  $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{T}}$  une estimation a priori dans le domaine de Laplace du type*

$$\|\hat{u}(s)\|_E \leq K(s) \|\hat{J}(s)\|_E$$

*avec  $K$  une "borne admissible pour le retour en temps" c'est-à-dire qui vérifie (12.2), alors il existe une fonction causale  $u$  jusqu'au temps  $T < \infty$  correspondant à la transformée de Laplace inverse de  $\hat{u}$ . De plus, en temps "long"  $T > 1$ , la fonction  $u$  vérifie les estimations a priori :*

$$\|u\|_{L^\infty([0,T[,E])} \leq C_{\text{pro}} e^1 \max_{-K' \leq k \leq K, 0 \leq l \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \right] \left[ \|J\|_{H^{K+1}}([0,T[,E]) + \|I^{K'} J\|_{H^{K'}}([0,T[,E]) \right]$$

*avec  $C_{\text{pro}}$  une constante indépendante de  $T$  définie dans le lemme 12.2.2.*

Pour démontrer ce corollaire, il suffit d'appliquer les théorèmes 12.2.1 avec

$$u = \mathfrak{T}(J) \quad \text{et} \quad \partial_t u = \mathfrak{T}(\partial_t J)$$

et l'injection de Sobolev :

**Lemme 12.2.4.** *L'injection*

$$H^1([0, T[, E) \rightarrow L^\infty([0, T[, E)$$

*est une contraction.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que

$$\|u\|_{L^\infty([0,T[,E])} \leq \int_0^T 2 \|\partial_t u\|_E$$

puis d'appliquer les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young pour en conclure que

$$\|u\|_{L^\infty([0,T[,E])} \leq \|u\|_{H^1([0,T[,E])}$$

□

Nous avons aussi utilisé dans le chapitre 7 une variante du théorème 12.2.1 :



**Théorème 12.2.2.** Soit  $J \in L^1_{loc}([0, \infty[, E)$  une fonction causale telle que

$$J \in H^K([0, T[, E)$$

et  $u \in L^1_{loc}([0, \infty[, E)$  une fonction causale donnée par une application

$$u = \mathfrak{T}(J)$$

elle aussi "causale", dans le sens où pour tout  $\tilde{T} \in ]0, T[$ , nous avons

$$\tilde{J} = J|_{]0, \tilde{T}[} \Rightarrow \mathfrak{T}(\tilde{J}) = \mathfrak{T}(J)|_{]0, \tilde{T}[}.$$

Si nous avons pour tout  $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{T}}$  une estimation a priori dans le domaine de Laplace du type

$$\|\hat{u}(s)\|_E \leq \exp(-C\sqrt{\eta}) K(s) \|\hat{J}(s)\|_E$$

avec  $K$  une "borne admissible pour le retour en temps" au sens de (12.2) et  $C$  une constante positive indépendante de  $s$ , alors il existe une fonction causale  $u$  jusqu'au temps  $T < \infty$  correspondant à la transformée de Laplace inverse de  $\hat{u}$ . De plus, en temps "long"  $T > 1$ , la fonction  $u$  vérifie l'estimation a priori suivante :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2([0, T[, E)} &\leq C_{pro} e^1 \exp\left(-C \frac{1}{\sqrt{T}}\right) \left( \max_{0 \leq k \leq K, 0 \leq l \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \right] \|J\|_{H^K}([0, T[, E) \right. \\ &\quad \left. + \max_{-K' \leq k \leq 1, 0 \leq l \leq L} \left[ a_k^\ell \left( \frac{T}{|1 + \alpha_k^\ell T|} \right)^\ell \right] \|I^{K'} J\|_{H^{K'}}([0, T[, E) \right) \end{aligned}$$

avec  $C_{pro}$  une constante indépendante de  $T$  définie dans le lemme 12.2.2 et  $e^1$  la constante de Néper.

*Démonstration.* La démonstration est similaire à celle du théorème 12.2.1 à cela près que l'inégalité du lemme 12.2.3 doit être remplacée par

$$\begin{aligned} e^{-\eta_0 T} \|u\|_{L^2([0, T[, E)} &\leq \|u\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} \leq \exp(-C\sqrt{\eta_0}) \left( \sum_{\ell=0}^L \left[ \sum_{k=-K'}^{-1} \frac{a_k^\ell}{(\eta_0 + \alpha_k^\ell)^\ell} \|I^{-k} J\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^K \frac{a_k^\ell}{(\eta_0 + \alpha_k^\ell)^\ell} \|\partial_t^k J\|_{L^2_{\eta_0}([0, \infty[, E)} \right] \right). \end{aligned}$$

□

### 12.3 Problèmes avec intégrateurs et dérivées fractionnaires

Les dérivées fractionnaires apparaissent naturellement quand des phénomènes conservent la mémoire des événements passés comme, par exemple, en viscoélasticité. Les premières questions sur celles-ci remontent à la fin 17<sup>ème</sup> siècle à travers les correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hospital et Johann Bernoulli. Leibniz dans une lettre à l'Hospital [50] précise qu'il s'est heurté des paradoxes. Ceux-ci s'expliquent aujourd'hui par le fait qu'il existe différentes approches pour définir la dérivée  $\partial^\alpha$  pour  $0 < \alpha < 1$  qui ne coïncident pas nécessairement :

- la dérivée dite de Grunwald-Letnikov<sup>2</sup> est définie à partir de la généralisation de la limite du taux d'accroissement d'une fonction,
- la dérivée de Riemann-Liouville est définie comme opération inverse d'un intégrateur fractionnaire obtenue par la formule de Liouville,
- la dérivée de Caputo est définie comme opérateur pseudo-différentiel associé au symbole  $s^\alpha$ .

Nous n'allons nous occuper que des deux dernières définitions possibles.

2. A titre indicatif nous donnons sa définition :

$$\partial_{G.L}^\alpha u(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha + k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} u(t - kh),$$

où la fonction gamma  $\Gamma$  est décrite dans la note de bas de page suivante.

### 12.3.1 Calcul infinitésimal fractionnaire

Nous nommons intégrateur d'ordre  $\alpha > 0$  l'opérateur :

$$[I^\alpha u](t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds$$

avec  $\Gamma$  la fonction gamma<sup>3</sup>. Cet opérateur généralise bien la notion d'intégrateur car pour  $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$  nous avons en permutant l'ordre d'intégration (c'est la formule de Liouville) :

$$[I^\alpha u](t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} u(s) ds = \int_0^t \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} u(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

L'intégrateur d'ordre  $\alpha$  est ainsi une convolution :

$$I^\alpha u = H_\alpha * u.$$

avec  $H_\alpha$  la fonction causale de Heavyside d'ordre  $\alpha$  :

$$H_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} H(t) \quad (\text{avec } H \text{ la fonction de Heavyside}).$$

Nous retrouvons bien ce que nous attendons du caractère fractionnaire :

$$I^\alpha \circ I^\beta = I^\beta \circ I^\alpha = I^{\alpha+\beta} \quad \text{car} \quad H_\alpha * H_\beta = H_{\alpha+\beta}.$$

Nous aimerions pouvoir définir les dérivées d'ordre  $\alpha$  par convolution avec  $H_{-\alpha}$  mais hélas  $H_{-\alpha}$  n'est pas intégrable au voisinage de  $t = 0$ . Par contre pour  $0 < \alpha < 1$ , la fonction  $H_{1-\alpha}$  l'est, nous pouvons ainsi définir la dérivation fractionnaire par la convolution par  $H_{1-\alpha}$  et une dérivation d'ordre un  $\partial_t$  pour abaisser l'ordre mais ces opérations ne commutent pas. Cela nous laisse ainsi la possibilité de définir cette dérivée de deux manières :

— dérivée dite de Riemann-Liouville :

$$\partial_{R,L,t}^\alpha u := \partial_t (H_{1-\alpha} * u) = \partial_t I^{1-\alpha} u,$$

— dérivée dite de Caputo :

$$\partial_{C,a,t}^\alpha u := H_{1-\alpha} * (\partial_t u) = I^{1-\alpha} \partial_t u.$$

Ces deux définitions sont reliées par la valeur de la fonction à l'origine :

$$\partial_{R,L,t}^\alpha u = \partial_{C,a,t}^\alpha u + u(0^+) H_{1-\alpha}$$

et coïncident si et seulement si  $u(0^+) = 0$ . Notons que pour une fonction causale constante non nulle, la dérivée de Caputo est nulle alors que celle de Riemann-Liouville ne l'est pas. Ainsi pour les fonctions causales  $u$  avec une condition initiale nulle  $u(0^+) = 0$ , la dérivée fractionnaire est définie de manière univoque :

$$\partial_t^\alpha u(t) = \partial_t \left( \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(s) ds \right) = \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \partial_t u(s) ds.$$

En particulier nous avons pour la dérivée un demi  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Nous pouvons généraliser notre propos à l'ordre quelconque :

**Définition 12.3.1.** La dérivée d'ordre  $\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}^{*,+}$  est définie de deux manières

$$\partial_{R,L,t}^\alpha u := \partial_t^{[\alpha]} (H_{[\alpha]-\alpha} * u) = \partial_t^{[\alpha]} I^{[\alpha]-\alpha} u \quad \text{ou} \quad \partial_{C,a,t}^\alpha u := H_{[\alpha]-\alpha} * (\partial_t^{[\alpha]} u) = I^{[\alpha]-\alpha} \partial_t^{[\alpha]} u,$$

avec  $[\alpha]$  la partie entière en excès<sup>4</sup> et  $H_{-\alpha}$  la distribution

$$H_{-\alpha}(t) := \begin{cases} \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} H(t) & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \quad (\text{avec } H \text{ la fonction de Heavyside}) \\ \partial_t^\alpha \delta & \alpha \in \mathbb{N}^* \quad (\text{avec } \partial_t^\alpha \delta \text{ la dérivée } \alpha\text{-ième du Dirac en zéro}). \end{cases}$$

3. La fonction gamma est définie par

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

et généralise la notion de factoriel d'un nombre entier  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Elle peut être prolongé sur l'ensemble du plan complexe privé des entiers négatifs.

4.  $n-1 < \alpha \leq n \Rightarrow [\alpha] = n$ .

Ces deux possibilités ne sont pas forcément équivalentes :

$$\partial_{R.L,t}^\alpha u = \partial_{C_{a,t}}^\alpha u + \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \partial_t^k u(0^+) H_{k+1-\alpha}.$$

Dans le cas entier, la relation entre les dérivées de Liouville-Riemann et Caputo devient alors la formule dite des sauts :

$$\partial_{R.L,t}^n u = \partial_{C_{a,t}}^n u + \sum_{k=0}^{n-1} \partial_t^k u(0^+) \partial_t^{n-(k+1)} \delta,$$

ce qui veut dire que la dérivée de Liouville-Riemann peut se voir comme la dérivée au sens des distributions et la dérivée de Caputo comme la dérivée au sens des fonctions ordinaires.

### 12.3.2 Symbole des intégrateurs et dérivées fractionnaires

Voyons maintenant comment nous pouvons concevoir ce calcul infinitésimale fractionnaire en terme d'opérateur pseudo-différentiel via la transformée de Laplace. En effet comme la transformée de Laplace des fonctions de Heavyside d'ordre  $\alpha$  sont :

$$\widehat{H}_\alpha(s) = s^{-\alpha} \quad \text{pour } s \in \mathbb{C}_0,$$

les opérateurs dérivée fractionnaire et intégrateur fractionnaire sont reliés à des puissances fractionnaires de la variable de Laplace :

$$\widehat{\partial_{C_{a,t}}^\alpha u}(s) = s^\alpha \widehat{u} \quad , \quad \widehat{\partial_{R.L,t}^\alpha u}(s) = s^\alpha \widehat{u} - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \partial_t^k u(0^+) s^{\alpha-(k+1)} \quad \text{et} \quad \widehat{I^\alpha u}(s) = s^{-\alpha} \widehat{u}.$$

Nous disons alors que  $s^{-\alpha}$  et  $s^\alpha$  sont les symboles des opérateurs  $\partial_{C_{a,t}}^\alpha$  et  $I^\alpha$ . La théorie du calcul pseudo-différentiel à laquelle se rattache notre propos permet de définir des opérateurs bien plus compliqués du type  $P(x, t, \partial_t)$  à partir de symbole inhomogène  $p(x, t, s)$  (voir [26]). Pour être entièrement rigoureux, nous devons donner un sens univoque à la racine  $\beta$ -ième d'un nombre complexe car nous rappelons que si  $\beta$  est un entier, il y a  $\beta$  manières de le faire. Par convention, nous allons noter :

$$s^{\frac{1}{\beta}} = |s|^{\frac{1}{\beta}} e^{i \frac{\arg s}{\beta}},$$

nous aurons en particulier avec celle-ci

$$i^{\frac{1}{\beta}} = e^{i \frac{\pi}{2\beta}}.$$

### 12.3.3 Positivité de la dissipation associée aux opérateurs fractionnaires

**Théorème 12.3.1.** Soient  $0 < T \leq \infty$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^{*,+}$ . Pour tout  $u \in H^{[\alpha]}(]0, T[, E)$ , nous avons :

$$\Re \left( \int_0^T \bar{u} \partial_{C_{a,t}}^\alpha u \right) \geq 0 \quad \text{pour } 4k - 1 < \alpha < 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\Re \left( \int_0^T \bar{u} \partial_{C_{a,t}}^\alpha u \right) \leq 0 \quad \text{pour } 4k + 1 < \alpha < 4k + 3, k \in \mathbb{Z}$$

*Démonstration.* Comme  $u \in H^{[\alpha]}(]0, T[, E)$  la dérivée de Caputo est bien définie  $\partial_{C_{a,t}}^\alpha u \in L^2(]0, T[, E)$  et il existe une trace  $u(T)$ . Nous noterons  $\tilde{u}$  le prolongement de  $u$  par  $u(T)$  pour  $t \geq T$ . Nous avons pour tout  $t > T$  la nullité de la dérivée de Caputo du prolongement  $\partial_{C_{a,t}}^\alpha u(t) = 0$ . Nous avons alors :

$$\int_0^T \bar{u} \partial_{C_{a,t}}^\alpha u = \int_0^\infty \bar{\tilde{u}} \partial_{C_{a,t}}^\alpha \tilde{u}$$

Comme  $\tilde{u}$  est assez régulière, nous pouvons définir sa transformée de Laplace  $\widehat{\tilde{u}}$  sur  $\mathbb{C}_0$ . En utilisant l'égalité de Plancherel :

$$\int_0^\infty \bar{\tilde{u}} \partial_{C_{a,t}}^\alpha \tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{\tilde{u}}(i\omega)} \widehat{\partial_{C_{a,t}}^\alpha \tilde{u}}(i\omega) d\omega,$$

en rappelant que  $\widehat{\partial_{C_{a,t}}^\alpha \tilde{u}}(s) = s^\alpha$ , nous avons :

$$\int_0^\infty \bar{\tilde{u}} \partial_{C_{a,t}}^\alpha \tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 |\hat{u}(i\omega)|^2 (-i)^\alpha (-\omega)^\alpha d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |\hat{u}(i\omega)|^2 i^\alpha \omega^\alpha d\omega,$$

or comme

$$i^\alpha = e^{i\frac{\alpha\pi}{2}} \quad \text{et} \quad (-i)^\alpha = e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}},$$

le signe de

$$\Re \left( \int_0^\infty \bar{\tilde{u}} \partial_{C_{a,t}}^\alpha \tilde{u} \right)$$

dépend du signe de

$$\cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right).$$

□



# NOTION DE DÉRIVÉE DE FORME

Le but de cette annexe est de donner quelques outils pour étudier une EDP dans un domaine qui évolue. La principale application en est l'optimisation de forme, c'est-à-dire rechercher la forme (ou les formes) qui optimise(nt) un certain critère. Les excellentes monographies [37], [25] et [67] liées à ce sujet sont vivement conseillées aux lecteurs. Notre objectif est ici plus modeste, nous allons seulement donner un sens mathématique à la notion de dérivée de forme et préciser ce que nous entendons par évolution d'un domaine. L'heuristique de notre démarche s'appuie sur la mécanique des milieux continus.

## 13.1 Déformation d'un domaine et vitesse de déformation

En mécanique des milieux continus, nous souhaitons savoir comment se déforme un milieu de référence  $\Omega_0$  dans le temps et comment évoluent dans celui-ci certaines quantités quand il se déforme. Deux descriptions sont évoqué à ce sujet, l'approche lagrangienne et l'approche eulérienne.

### 13.1.1 Description lagrangienne

Donnons nous un domaine de référence  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma_0$  qui vérifie la condition suivante :

**Hypothèse 13.1.1.** *Nous supposons  $\Omega_0 \in \mathcal{O}(\mathcal{B}^*)$  avec  $\mathcal{O}(\mathcal{B}^*)$  l'ensemble des domaines de  $\mathbb{R}^N$  (avec  $N \geq 2$ ) inclus dans un domaine borné  $\mathcal{B}^*$  de  $\mathbb{R}^N$  et qui de plus ont leurs bords de classe  $C^1$ .*

Sa déformation est donnée par une famille de transformations :

**Définition 13.1.1. ( Groupe de transformations admissibles)**

*Une famille  $(\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]}$  est un "groupe de transformations admissibles" si pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $\mathcal{T}_t : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$  est un homéomorphisme,  $\mathcal{T}_0 = Id$  et si les applications*

$$\mathcal{T} : \begin{array}{ccc} [0, \tau] \times \mathcal{B}^* & \rightarrow & \mathcal{B}^* \\ (t, x) & \mapsto & \mathcal{T}_t(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^{-1} : \begin{array}{ccc} [0, \tau] \times \mathcal{B}^* & \rightarrow & \mathcal{B}^* \\ (t, x) & \mapsto & \mathcal{T}_t^{-1}(x), \end{array}$$

*vérifient les conditions de régularité<sup>1</sup> suivantes :*

$$\mathcal{T} \in C^1([0, \tau], C^{0,1}(\mathcal{B}^*)) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^{-1} \in C^0([0, \tau], C^{0,1}(\mathcal{B}^*)).$$

*Nous noterons alors  $\mathcal{T} \in \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau])$  pour signifier que  $(\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]}$  est un "groupe de transformations admissibles".*

Nous noterons

$$\Omega_t = \mathcal{T}_t(\Omega_0)$$

la configuration à l'instant  $t$  du milieu continu initial  $\Omega_0$  et

$$\Gamma_t := \mathcal{T}_t(\Gamma_0)$$

1. Avec l'espace de Holder

$$C^{0,1} := \left\{ u \in C^0(\mathcal{B}^*) \mid \sup_{x \neq \hat{x}} \left( |u(x)|_{\mathbb{R}^N} + \frac{|u(x) - u(\hat{x})|_{\mathbb{R}^N}}{|x - \hat{x}|_{\mathbb{R}^N}} \right) < \infty \right\}.$$

son bord. Dans la **description lagrangienne**, l'application  $\mathcal{T}$  représente les **trajectoires** des particules initialement dans  $\Omega_0$ .

A chaque instant  $t \in [0, \tau]$ , nous pouvons associer à cette transformation deux types de vitesse qui se distinguent par la configuration dans laquelle elles se repèrent :

- la vitesse lagrangienne  $\xi^t(X) := \partial_t \mathcal{T}_t(X)$  pour  $X \in \Omega_0$ ,
- la vitesse eulérienne  $v_t(x) := \partial_t \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_t^{-1}$  pour  $x \in \Omega_t$ .

Nous pouvons passer d'une représentation à l'autre par simple composition :

$$u_t = \xi^t \circ \mathcal{T}_t^{-1} \quad \text{et} \quad \xi^t = u_t \circ \mathcal{T}_t.$$

### 13.1.2 Description eulérienne

Dans la **description eulérienne** tout se retrouve à partir de la **vitesse eulérienne**.

#### Définition 13.1.2. (Vitesse eulérienne)

Un champ de "vitesse eulérienne admissible"

$$v \in C^0([0, \tau], C^{0,1}(\mathcal{B}^*, \mathbb{R}^N))$$

est un champ de vecteur tel que pour tout  $x \in \mathcal{B}^*$

$$v(t, x) \cdot n(x) = 0,$$

avec  $n$  la normale sortante de  $\mathcal{B}^*$ . Nous noterons  $T_{Id} \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau])$  l'ensemble des champs de "vitesse eulérienne admissible".

### 13.1.3 Equivalence entre les deux descriptions

Pour retrouver les trajectoires issues de  $X \in \Omega_0$  à partir du champ de vitesse, il faut résoudre l'EDO :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = v(t, x(t)), & t \in ]0, \tau[ \\ x(0) = X. \end{cases}$$

Le groupe  $(\Phi_t)_{t \in [0, \tau]}$  tel que pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $\Phi_t(X) = x(t)$  avec  $x$  la solution à l'EDO précédente est nommé **flot associé au champ**  $v$ .

**Théorème 13.1.1.** *L'application flot  $T_{Id} \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau]) \rightarrow \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau])$  est bijective.*

(i) Soient  $\tau > 0$  et  $v \in T_{Id} \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau])$  un champ de "vitesse eulérienne admissible" au sens de la définition 13.1.2. Le flot  $(\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]}$  associé au champ de vecteur  $v$  est un "groupe de transformations admissibles" au sens de la définition 13.1.1.

(ii) Soient  $\tau > 0$  et  $(\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]} \in \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau])$  un "groupe de transformations admissibles" au sens de la définition 13.1.1. Le champ de vecteur

$$v : \begin{array}{ccc} [0, \tau] \times \mathcal{B}^* & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ (t, x) & \mapsto & v_t(x) := \partial_t \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_t^{-1}(x) \end{array}$$

est un champ de "vitesse eulérienne admissible" au sens de la définition 13.1.2.

*Démonstration.* Voir le théorème 5.1 de [25]. □

Le théorème précédent nous affirme que les représentations eulérienne et lagrangienne sont équivalentes. Ainsi nous pouvons aussi bien comprendre la déformation d'un domaine à partir d'un "groupe de transformations admissibles" que d'un champ de "vitesse eulérienne admissible".

**Définition 13.1.3.** (i) Une famille de formes  $(\Omega_t)_{t \in [0, \tau]}$  est dite associée à un "groupe de transformations admissibles"  $(\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]}$  si pour tout  $t \in [0, \tau]$  nous avons  $\Omega_t = \mathcal{T}_t(\Omega_0)$ . L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L : \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau]) &\rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{B}^*)^{[0, \tau]} \\ (\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]} &\mapsto (\Omega_t)_{t \in [0, \tau]} \end{aligned}$$

est appelée "représentation lagrangienne".

(ii) Une famille de formes  $(\Omega_t)_{t \in [0, \tau]}$  est dite associée à un champ de "vitesse eulérienne admissible"  $v$  si pour tout  $t \in [0, \tau]$  nous avons  $\Omega_t = \mathcal{T}_t$  avec  $(\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]}$  le flot de  $v$ . L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_e : T_{Id} \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau]) &\rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{B}^*)^{[0, \tau]} \\ v &\mapsto (\Omega_t)_{t \in [0, \tau]} \end{aligned}$$

est appelée "représentation eulérienne".

Les applications  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_e$  ne sont pas injectives. Par exemple, si on se donne  $\mathcal{T}$  une transformation qui transforme un ellipsoïde  $E$  en la boule unité  $B(1)$  alors la transformation  $R \circ \mathcal{T}$  avec  $R$  une matrice de rotation autre que l'identité transforme elle aussi  $E$  en  $B(1)$ . Remarquons que comme  $\mathcal{T}$  est assez régulière,  $\Gamma_t$  est aussi une variété de classe  $C^1$  et  $\Omega_t$  conserve les mêmes propriétés topologiques que  $\Omega_0$  (connexité, genre...). En particulier cela implique que les applications  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_e$  ne sont pas non plus surjectives. Par exemple, on ne peut pas passer d'une surface sans "trou" à une surface avec "trou" par une transformation continue. Pour que les applications "représentation lagrangienne" et "représentation eulérienne" soient surjectives nous devons restreindre l'ensemble des formes considérées.

**Proposition 13.1.1.** En notant  $\mathcal{O}_Q(\mathcal{B}^*)$  l'ensemble des domaines de  $\mathcal{O}(\mathcal{B}^*)$  qui sont orientables et à  $Q$  trous (voir définition 11.1.1) alors  $\mathcal{R}_L : \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau]) \rightarrow \mathcal{O}_Q(\mathcal{B}^*)^{[0, \tau]}$  et  $\mathcal{R}_e : T_{Id} \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau]) \rightarrow \mathcal{O}_Q(\mathcal{B}^*)^{[0, \tau]}$  sont surjectives. Cela veut dire qu'à partir de n'importe quelle famille  $(\Omega_t)_{t \in [0, \tau]} \in \mathcal{O}_Q(\mathcal{B}^*)^{[0, \tau]}$ , nous pouvons retrouver un "groupe de transformations admissibles" et un champ de "vitesse eulérienne admissible" qui y sont associés.

## 13.2 Derivées de forme

### 13.2.1 Définition de la dérivée eulérienne de forme

Une fonctionnelle  $J : [0, \tau] \times \mathcal{B}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est dite "dépendante de la forme  $(\Omega_t)_{t \in [0, \tau]}$ " si en un instant  $t \in [0, \tau]$ , nous avons  $J(t, \cdot) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous pouvons associer à cette fonctionnelle deux types de représentations selon si elle est exprimée dans la configuration initiale ou dans la configuration à l'instant  $t$  :

- la représentation lagrangienne  $J^t(X) := J(t, \mathcal{T}_t(X))$  pour  $X \in \Omega_0$ ,
- la représentation eulérienne  $J_t(x) := J(t, x)$  pour  $x \in \Omega_t$ .

Dans la première, nous nous intéressons aux applications du type  $\mathcal{T}_t \mapsto J^t$ , tandis que dans la seconde, nous nous intéressons aux applications du type  $v_t \mapsto J_t$ . De la même façon, nous pouvons associer à une fonctionnelle "dépendante de la forme  $(\Omega_t)_{t \in [0, \tau]}$ " suffisamment régulière

$$J \in C^1([0, \tau] \times \mathcal{B}^*, \mathbb{R})$$

deux types de dérivées conformément aux deux types de représentations :

- la dérivée lagrangienne  $D^t J^t(X) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J^{t+\varepsilon}(X) - J^t(X)}{\varepsilon}$  pour  $X \in \Omega_0$ ,
- la dérivée eulérienne  $\partial_t J_t(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_{t+\varepsilon}(x) - J_t(x)}{\varepsilon}$  pour  $x \in \Omega_t$ ,

qui sont reliées par la formule de la dérivée matérielle :

$$D^t J^t(X) = \partial_t J_t(x) + (v_t \cdot \nabla) J_t(x). \quad (13.1)$$

Nous avons ainsi deux manières de définir la dérivée de forme d'une fonctionnelle  $J : D^t J^t$  et  $\partial_t J^t$ . Ce que nous nommons couramment "dérivée de forme" est la dérivée eulérienne.



**Définition 13.2.1.** Une fonctionnelle "dépendante de la forme  $(\Omega_t)_{t \in [0, \tau]}$ "  $J : [0, \tau] \times \mathcal{B}^*, \mathbb{R}$  (c'est-à-dire telle que  $J_t := J(t, \cdot) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ ) admet une dérivée eulérienne de forme en  $t \in [0, \tau]$  si pour tout  $x \in \Omega_t$

$$\frac{J_{t+\varepsilon}(x) - J_t(x)}{\varepsilon}$$

admet une limite finie quand  $\varepsilon$  tend vers 0. La dérivée eulérienne de forme sur un ouvert  $U \subset [0, \tau]$  est :

$$\begin{aligned} \partial_t J : U \times \mathcal{B}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto \partial_t J_t(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_{t+\varepsilon}(x) - J_t(x)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

### 13.2.2 Les théorèmes de transports de Reynolds

Nous allons chercher à calculer la dérivée de forme de fonctionnelles du type

$$\int_{\Omega_t} \rho_t(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_t} u_t(x) dx.$$

Comme les domaines sur lesquels nous intégrons dépendent du temps la dérivée selon  $t$  peut sembler délicate. Les deux théorèmes qui suivent répondent à cette question.

#### **Théorème 13.2.1. (Théorème de transport de Reynolds)**

Soit  $t \in [0, \tau[$  et  $U$  un voisinage de  $t$  et  $\rho \in C^1(U, W^{1,1}(\mathcal{B}^*))$ . Si pour tout  $t \in [0, \tau[$  nous avons  $\rho_t \in H^1(\Omega_t)$  et  $v_t \in H(\mathbf{Div})$  alors la fonctionnelle

$$\int_{\Omega_t} \rho_t(x) dx$$

est dérivable sur  $[0, \tau[$  de dérivée eulérienne de forme :

$$\partial_t \left( \int_{\Omega_t} \rho_t(x) dx \right) = \int_{\Omega_t} \partial_t \rho_t(x) dx + \langle v_t \cdot n, \rho_t \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_t), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_t)}.$$

La démonstration, que nous ne détaillerons pas se fait en se ramenant au domaine fixe  $\Omega_0$  par le changement de variable  $T_t^{-1}$  pour dériver selon  $t$  et en revenant au domaine déformé avec la formule de la dérivée matérielle. Pour le second théorème, le lecteur doit être familier avec la notion d'opérateur différentiel de surface (se référer à la section 10.4 ou à la partie 5.4.3 de [37] pour une dimension quelconque).

**Théorème 13.2.2.** Soient  $t \in [0, \tau[$  et  $U$  un voisinage de  $t$  et  $\rho \in C^1(U, W^{1,1}(\mathcal{B}^*))$   $t \in U$ . Si pour tout  $t \in [0, \tau[$  nous avons  $\rho_t \in H^1(\Gamma_t)$  et  $v_t \in H(\mathbf{Div})$  alors la fonctionnelle

$$\int_{\Gamma_t} \rho_t(x) dx$$

est dérivable sur  $[0, \tau[$  de dérivée eulérienne de forme :

$$\partial_t \left( \int_{\Gamma_t} \rho_t \right) = \int_{\Gamma_t} \partial_t \rho_t + \int_{\Gamma_t} (\partial_n \rho_t + k_{\Gamma_t} \rho_t) (v_t \cdot n),$$

avec  $k_{\Gamma_t}$  la courbure de  $\Gamma_t$ .

La preuve est faite dans la partie 2.33 de [67].

### 13.2.3 Compléments concernant le gradient de forme

Donnons quelques compléments concernant la dérivée de forme dont nous ne nous servons pas dans ce présent manuscrit mais qui peut être utile au lecteur qui souhaite s'initier aux outils de l'optimisation de forme en lisant cette annexe. Cette sous-section correspond à la section 3.1 de [25]. Usuellement, les fonctionnelles de formes sont des fonctionnelles du type

$$\tilde{J} : \mathcal{O}(\mathcal{B}^*) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B}^*, \mathbb{R}).$$

Pour définir la différentielle de forme de ce type de fonctionnelle nous allons nous appuyer sur la dérivée au sens de Dini.  $\tilde{J}$  est dite semi-différentiable en  $\Omega_0$  s'il existe  $\tau > 0$  et un champ de "vitesse eulérienne admissible"  $v \in T_{Id} \mathbf{Ad}(\mathcal{B}^*, [0, \tau])$  tels que la dérivée directionnelle

$$d\tilde{J}_{\Omega_0}(v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{J}(\mathcal{T}_t(\Omega_0)) - \tilde{J}(\Omega_0)}{t},$$

avec  $(\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]}$  le flot associé à  $v$ , existe et est finie. Remarquons que cette semi-différentielle coïncide avec la dérivée eulérienne que nous avons auparavant définie, car si on note  $J(t, \cdot) := \tilde{J}(\mathcal{T}_t(\Omega_0))$  alors

$$d\tilde{J}_{\Omega_0}(v) = \partial_t J.$$

### 13.3 Dérivation eulérienne de forme de solutions d'EDPs

Les problèmes aux frontières libres sont des EDPs posées sur un domaine qui se déforme. Notre but est de déterminer la dérivée eulérienne de forme d'un tel problème. Nous considérerons une famille de domaines  $(\Omega_t)_{t \in [0, \tau]}$  associée à "groupe de transformations admissibles"  $(\mathcal{T}_t)_{t \in [0, \tau]}$  qui vérifient des hypothèses de régularités supplémentaires :  $\partial\Omega_0$  et  $t \mapsto \mathcal{T}_t$  sont de classe  $C^{1,1}$ . Nous ne donnerons que des résultats. Les démonstrations peuvent se faire à l'aide des théorèmes de transports de Reynolds 13.2.1 et 13.2.2. De tels problèmes se retrouvent dans le manuscrit (théorème 1.7.1, théorème 1.7.2, proposition 4.1.4 et lemme 5.2.1).

#### 13.3.1 Problèmes aux frontières libres de type Dirichlet

Considérons la famille de problèmes

$$\begin{cases} -\Delta u(t, x) = f(x, t), & \text{pour } x \in \Omega_t \\ u(t, x) = g(t, x), & \text{pour } x \in \Gamma_t \end{cases} \quad (13.2)$$

avec  $f \in C^1([0, \tau], L^2(\Omega_t))$  et  $g \in C^1([0, \tau], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_t))$ . Sous ces conditions, nous savons qu'il existe une unique solution  $u_t \in H^2(\Omega_t)$  à (13.2).

**Théorème 13.3.1.** *La dérivée de forme de  $u_t$  existe et est la solution  $\partial_t u_t \in H^1(\Omega_t)$  du problème*

$$\begin{cases} -\Delta(\partial_t u_t) = \partial_t f_t, & \text{dans } \Omega_t \\ u_t = \partial_n u_t (v_t \cdot n) + \partial_t g_t, & \text{sur } \Gamma_t \end{cases} \quad (13.3)$$

*Démonstration.* Se référer à la section 3.1 de [67]. □

#### 13.3.2 Problèmes aux frontières libres de type Neumann

Considérons la famille de problèmes

$$\begin{cases} -\Delta u(t, x) + u(t, x) = f(x, t), & \text{pour } x \in \Omega_t \\ \partial_n u(t, x) = g(t, x), & \text{pour } x \in \Gamma_t \end{cases} \quad (13.4)$$

avec  $f \in H^1(\mathcal{B}^*)$  et  $g \in H^2(\mathcal{B}^*)$ . Si de plus  $\Omega$  est de classe  $C^2$ , alors il existe une unique solution  $u_t \in H^2(\Omega_t)$  à (13.4) et un prolongement  $\tilde{u}_t \in H^1(\mathcal{B}^*)$  de  $u_t$ .

**Théorème 13.3.2.** *La solution prolongé  $t \mapsto \tilde{u}_t$  est dérivable sur  $[0, \tau]$ . Sa dérivée de forme  $\partial_t u_t \in H^1(\Omega_t)$  est l'unique solution du problème variationnel :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \partial_t u_t \in H^1(\Omega_t) \text{ telle que pour tout } \varphi \in H^2(\Omega_t), \\ \int_{\Omega_t} \nabla(\partial_t u_t) \cdot \nabla \varphi + \partial_t u_t \varphi + \int_{\Gamma_t} (\nabla_{\Gamma} u_t \cdot \nabla_{\Gamma} \varphi + u_t \varphi) (v_t \cdot n) = \int_{\Gamma_t} (f + k_{\Gamma_t} + \partial_n g) \varphi (v_t \cdot n). \end{array} \right.$$

*Si de plus  $\Omega_t$  est de classe  $C^3$  et  $v$  est de classe  $C^2$  alors  $u_t \in H^3(\Omega_t)$  et  $\partial_t u_t \in H^2(\Omega_t)$ . Dans ce cas le problème précédent peut être écrit avec la formulation forte :*

$$\begin{cases} -\Delta(\partial_t u) + (\partial_t u_t) = 0 & \text{dans } \Omega_t \\ \partial_n \partial_t u_t = (\partial_n g - \partial_{n,n}^2 u_t)(v_t \cdot n) + \nabla u_t \cdot \nabla_{\Gamma}(v_t \cdot n) & \text{sur } \Gamma_t \end{cases}$$

*Démonstration.* Se référer au théorème 5.5.2 de [37]. □



---

# CONCLUSION

---

logion 2 : Que celui qui cherche ne cesse pas de chercher

L'évangile selon Thomas

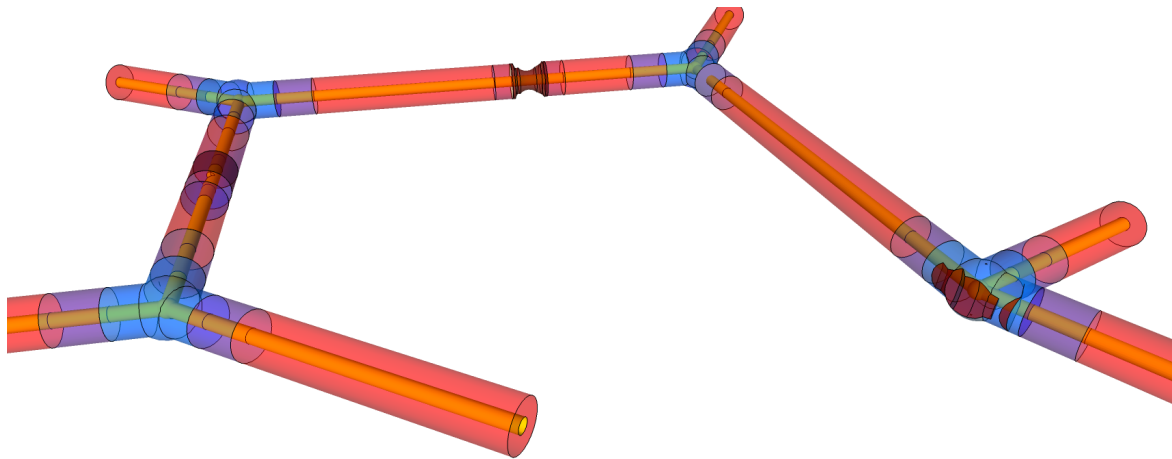


FIGURE 13.1 – réseau

Rappelons que le doux rêve du projet SODDA est le **contrôle non destructif de réseaux électriques** et nous n'avons pas même abordé le versant identification de défauts. Toutefois, le contenu de cette thèse n'est pas vain car la résolution du problème inverse nécessite une bonne connaissance du problème direct sur lequel nous avons concentré tous nos efforts. Il convient en outre de disposer d'outils efficaces pour l'approximations des solutions du **problème direct**. Condition qui n'est guère satisfaite par la résolution des équations de Maxwell  $3D$ . Pour le contrôle non destructif, nous avons besoin de modèles suffisamment simples pour être rapidement résolus tout en demeurant suffisamment sophistiqués pour caractériser convenablement la géométrie  $3D$  du réseau concret considéré et intégrer la complexité de sa structure interne (différents matériaux, caractéristiques qui varient...). Les différents **modèles 1D**, d'inconnues les **potentiels et courants électriques**, dérivés par des **analyse asymptotiques** répondent aux volontés suivantes :

- les inconnues 1D des modèles (les potentiels et courants électriques) sont déduites des inconnues 3D (les champs électromagnétiques),
- les modèles fournissent des approximations convenables des champs électromagnétiques et les ordres d'approximations sont calculés en fonction des "petits" paramètres du problème (finesse du câble, haute conductivité des métaux...),
- les paramètres intervenant dans ces modèles 1D sont liés aux caractéristiques physiques et géométriques du réseaux et certains reçoivent des interprétations physiques simples et attendues (capacitance, inductance, résistance, conductance...),
- les modèles 1D sont bien posés.

Notons que les trois types de **défauts géométriques** que nous avons souhaité modéliser sont

- déformation intervenue dans la jonction entre les câbles (gauche de la figure 13.2),

- déformation de la surface extérieure du câble tel que dû à un écrasement ou à une érosion (centre de la figure 13.2),
  - déformation de l'âme des câbles par exemple dû à un cisaillement (droite de la figure 13.2),
- et que les trois types de **défauts quant aux paramètres physiques** sont :
- présence de pertes dues à la conductivité dans le diélectrique des câbles,
  - variations des coefficients caractéristiques des matériaux,
  - présence d'effet de peau dû au caractère non parfait (mais seulement fortement conducteur) des métaux constituant les âmes de la couches extérieurs.

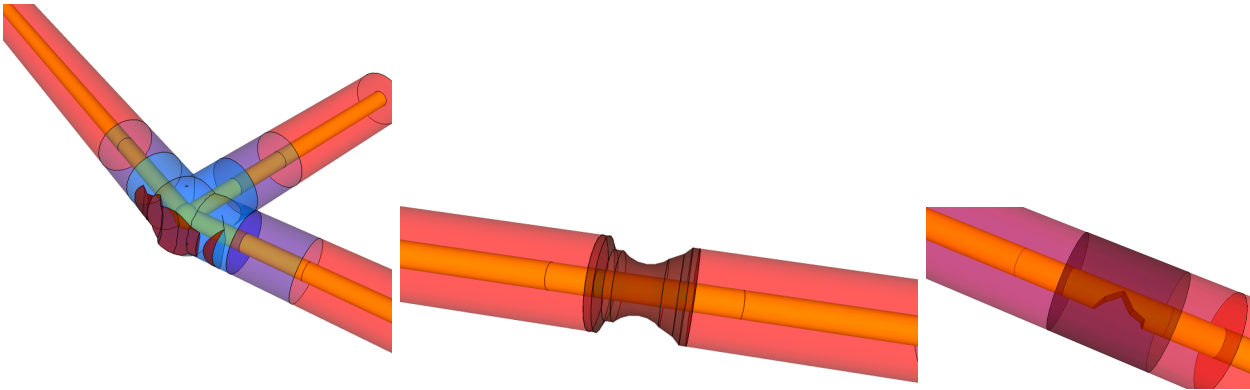


FIGURE 13.2 – Défauts du réseau. Gauche : dans la jonction. Centre : sur le diélectrique d'un câble. Droite : sur l'âme d'un câble

## I Le problème direct : les modèles 1D simplifiés

La fin n'a pas été écrite, elle n'a jamais été trouvée.

M. Duras

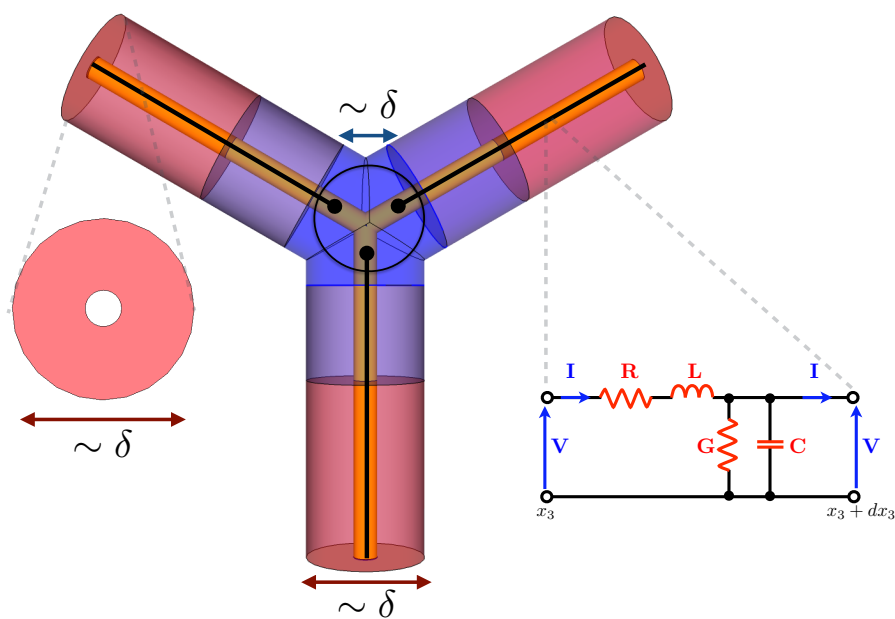


FIGURE 13.3 – Une des jonctions du réseau

Résumons et superposons les modèles 1D des réseaux de câbles coaxiaux (câble formé, d'un diélectrique entouré par une couronne métallique et entourant une âme métallique) que nous avons obtenus par analyse asymptotique de la théorie de Maxwell dont les inconnues sont les champs électromagnétiques  $E^\delta, H^\delta$  solution des équations de Maxwell et les données les coefficients caractéristiques du diélectrique  $\varepsilon, \mu, \sigma_e, \sigma_m$  et des métaux  $\sigma_{e,c}$ . Si toutes les preuves sont faites avec des câbles multi-conducteurs (plusieurs âmes), nous nous focaliserons néanmoins sur les câbles coaxiaux pour simplifier l'écriture de cette conclusion. Considérons - comme sur la figure 13.1 - un réseau formé de câbles coaxiaux (en rouge et violet sur la figure 13.1) reliés par des jonctions (en bleue sur la figure 13.1). Ce réseau est **fin** dans le sens que la dimension transverse de chaque câble est proportionnel à un **petit paramètre**  $0 < \delta \ll 1$  et que chaque jonction est incluse dans une boule de diamètre proportionnel à  $\delta$  (figure 13.3). Les divers modèles 1D sont posés sur le **graphe limite** - que l'on peut voir comme le squelette du réseau en faisant tendre l'épaisseur vers zéro (voir la figure 13.3) - constitué de branches représentant les câbles et reliées par des noeuds représentant les jonctions. Les modèles sont des graphes quantiques, c-a-d avec des EDPs posées sur ses branches et des conditions de transmission sur ces noeuds. Plus précisément, nos graphes quantiques s'apparentent aux usuels **circuits électriques** : les quantités qui circulent le long du graphe sont le potentiel  $V^\delta$  et le courant électriques  $I^\delta$  qui vérifient sur chaque branche une **équation des télégraphistes** et les **lois de Kirchhoff** sur chaque noeuds. Par contre, de manière à prendre en compte une partie de la complexité du problème (géométrie, coefficients caractéristiques des milieux...) les équations des télégraphistes et conditions de Kirchhoff présentées dans ce manuscrit de thèse sont plus générales que les habituelles et cette section a pour but de succinctement les exposer. Notons aussi que toutes les quantités des modèles, que cela soit les inconnues  $V^\delta$  et  $I^\delta$  et les coefficients (notamment ceux qui ont une interprétation physique précise comme la capacitance  $C$ , l'inductance  $L$ ...) sont reliées à la théorie de Maxwell selon la table 13.3.2.

Théorie de l'électromagnétisme de Maxwell	Modèle des télégraphistes sous la forme de circuit électriques
$E^\delta$	$V^\delta$
$H^\delta$	$I^\delta$
$\varepsilon$	$C, C_g, \gamma_C, \mathcal{C}$
$\mu$	$L, L_g, \gamma_L, \mathcal{L}$
$\sigma_e$	$G$
$\sigma_m$	$R$
$1 \ll \sigma_{e,c} < \infty$	$R_{sk}, L_{sk}$

TABLE 13.1 – Analogie entre la théorie de Maxwell et les modèles des télégraphistes.

### 1<sup>er</sup> modèle : réseaux de câbles non cylindriques avec des âmes considérées comme des conducteurs parfaits

#### Hypothèses techniques

Les hypothèses techniques dont nous avons eu besoin pour l'établissement de ce premier modèle sont :

- petite conductivité électrique et magnétique dans le câble :  $\sigma_e \sim \delta$  et  $\sigma_m \sim \delta$ ,
- conductivité infinie dans le conducteur :  $\sigma_{e,c} \rightarrow \infty$ ,
- les câbles sont des tubes de classe  $C^1$  et les jonctions de classe au moins lipschitzienne,
- les zones violettes sont cylindriques,
- les jonctions sont suffisamment éloignées, elles doivent être séparées d'une distance au moins  $\delta |\ln \delta|$ .

#### Equation des télégraphistes sur les branches du graphe

$$\begin{cases} C \partial_t V^\delta + \delta^2 [C_g - \partial_3 (\gamma_C \partial_3)] \partial_t V^\delta + \delta G V^\delta + \partial_3 I^\delta & = I_s^\delta + O(\delta^3), \\ L \partial_t I^\delta + \delta^2 [L_g - \partial_3 (\gamma_L \partial_3)] \partial_t I^\delta + \delta R I^\delta + \partial_3 V^\delta & = \delta^2 V_s + O(\delta^3). \end{cases}$$

#### Relations de Kirchhoff aux noeuds du graphe

- **loi des mailles** :  $V_0^\delta(0_0, t) - V_l^\delta(0_l, t) = \delta \sum_{l'=1}^L \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t I_{l'}^\delta(0_{l'}, t) + O(\delta^2)$ ,
- **loi des noeuds** :  $-\sum_{l=0}^L I_l^\delta(0_l, t) = \delta C \partial_t V_0^\delta(0_0, t) + O(\delta^2)$ .

Remarquons que si le modèle est d'ordre 3 sur les branches, il n'est que d'ordre 2 sur les jonctions :

**Axe de recherche 1.** *Chercher les relations de Kirchhoff d'ordres supérieurs.*

## 2<sup>e</sup> modèle : prise en compte de l'effet de peau

Comme il est apparu dans le précédent modèle, une première cause de pertes électromagnétiques est liée aux conductivités électriques et magnétiques dans la partie diélectrique. Toutefois, en pratique, ces conductivités sont (généralement) extrêmement faibles et par conséquent les pertes induites aussi. L'autre source de pertes est liée au **caractère non parfaitement conducteur** des parties métalliques (la conductivité électrique en leurs seins n'y est pas infinie mais seulement très élevée) responsable de l'**effet de peau**.

### Hypothèses techniques

- Petite conductivité électrique et magnétique nulle dans le diélectrique :  $\sigma_e \sim \delta^2$  et  $\sigma_m = 0$
- conductivité grande mais pas infinie dans le conducteur :  $\sigma_{e,c} \sim \delta^{-4}$ ,
- il n'y a qu'un seul câble supposé être cylindrique et de classe au moins lipschitzienne.

### Equation des télégraphistes incluant l'effet de peau

$$\begin{cases} C \partial_t V^\delta + \delta^2 [C_g - \partial_3 (\gamma_C \partial_3)] \partial_t V^\delta + \delta^2 G V^\delta + \partial_3 I^\delta(x_3, s) & = I_s^\delta + O(\delta^3), \\ L \partial_t I^\delta + \delta^2 [L_g - \partial_3 (\gamma_L \partial_3) - L_{sk}] \partial_t I^\delta + \delta R_{sk} \partial_t^{1/2} I^\delta + \partial_3 V^\delta & = \delta^2 V_s + O(\delta^3). \end{cases}$$

Tous les coefficients intervenant dans cette équation sont les mêmes que ceux décrits plus haut hormis la présence de deux nouveaux termes dues à l'effet de peau  $R_{sk}$  et  $L_{sk}$ .

**Axe de recherche 2.** *Justifier ou amender l'équations des télégraphistes incluant l'effet de peau pour les câbles non-cylindriques.*

Nous n'avons pas établi les lois de Kirchhoff généralisées par la prise en compte de l'effet de peau. Toutefois, nous conjecturons après quelques feuillets de brouillons qu'elles prendront la forme suivante :

- loi des mailles :  $V_0^\delta(0_0, t) - V_l^\delta(0_l, t) = \delta \sum_{l'=1}^L \left[ \mathcal{L}^{l,l'} \partial_t + \mathcal{R}^{l,l'} \partial_t^{1/2} \right] I_{l'}^\delta(0_{l'}, t) + O(\delta^2)$ ,
- loi des noeuds :  $-\sum_{l=0}^L I_l^\delta(0_l, t) = \delta C \partial_t V_0^\delta(0_0, t) + O(\delta^2)$ .

**Axe de recherche 3.** *Justifier ou amender les conditions de Kirchhoff incluant l'effet de peau proposées plus haut.*

## Justifications des modèles

Le doute naît de la vérité, comme une espèce de rejeton, et naturellement ils s'élèvent tous deux, en entrelaçant leurs rameaux.

Dante Alighieri

Nous avons justifié le 1<sup>er</sup> modèle par une **estimation d'erreur** entre les solutions des équations de Maxwell et une reconstruction des champs électromagnétiques à partir de la résolution des équations des télégraphistes de ce même modèle. Cette estimation d'erreur est rédigés dans le cas cylindrique mais non pour le cas non-cylindrique. Par contre, nous n'avons qu'un résultat de convergence pour les modèles d'ordre 2 dans le cas non cylindrique et rien pour la prise en compte des conditions de Kirchhoff et de l'effet de peau.

**Axe de recherche 4.** *Chercher les estimations d'erreurs pour le modèle incluant l'effet de peau ainsi que le modèle incluant les lois de Kirchhoff.*

Nous profitons de cette conclusion pour nous excuser de l'absence manifeste de résultats numériques. Il se trouve que de telles considérations ne sont pas dans les cordes du doctorant et constituent ainsi un champ ouvert au(x) successeur(s).

**Axe de recherche 5.** *Faire des simulations numériques à partir de ces modèles et les comparer avec des simulations obtenues par la résolution des équations de Maxwell et des expériences concrètes notamment celles réalisées par quelques membres de l'ANR SODDA.*

## II Extensions envisageables aux défauts débouchants

on frémit parfois de rencontrer tant de portes sombres ouvertes sur le néant

Nerval, quintus aucler

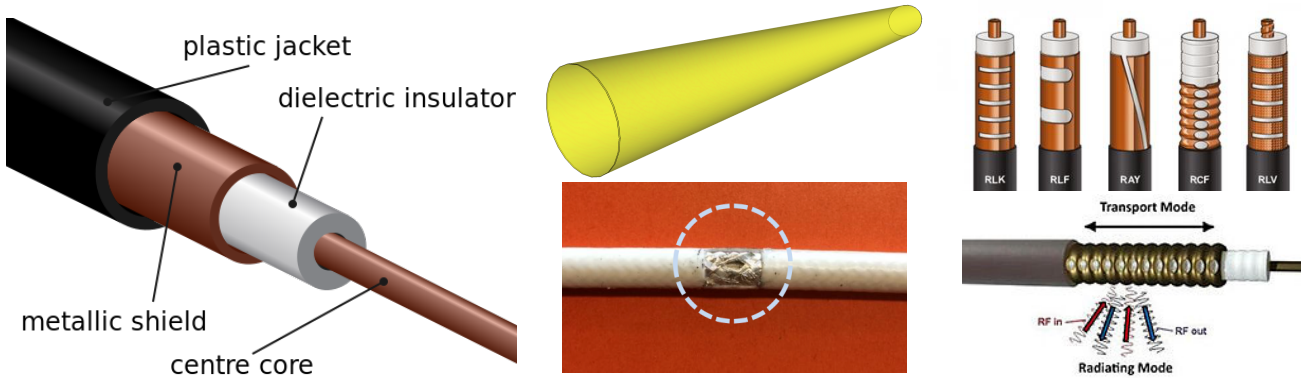


FIGURE 13.4 – Droite : structure d’un coax. Centre : fil libre dans l’air et défaut où la couche extérieure est affectée. Droite : câbles rayonnants

Nous avons dans ce manuscrit toujours respecté la structure du câble coaxial (ou multi-conducteurs) décrite dans la partie droite de la figure 13.4. Celle-ci peut être atteinte, malencontreusement quand le câble est si endommagé que la couche extérieure (conducteur extérieur et gaine en plastique) ne parvient plus à empêcher l’entrée d’ondes électromagnétiques extérieures dans le diélectrique ou volontairement par économie de la couche extérieure ou encore pour laisser rayonner les ondes électromagnétiques hors du câble.

### Modélisation de défauts conséquents

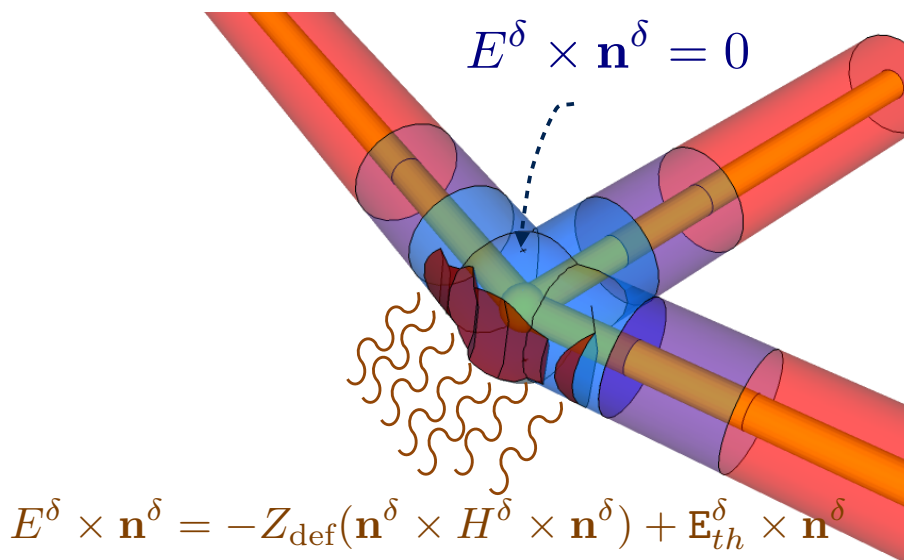


FIGURE 13.5 – Zone de défaut ouvert sur l’extérieur en brun

Supposons que sur une zone du réseau (en brun sur la figure 13.5), nous avons donné de tels coups de cutter que le plastique et le métal qui entoure le diélectrique sur cette zone ont rejoint l’infini du ciel. Il n’est alors plus possible considérer l’usuelle condition au bord de type conducteur parfait sur cette contrariante zone mais une



condition plus générale du type

$$\mathbf{E}^\delta \times \mathbf{n}^\delta = -Z_{\text{def}}(\mathbf{n}^\delta \times H^\delta \times \mathbf{n}^\delta) + \mathbf{E}_{th}^\delta \times \mathbf{n}^\delta$$

à même de modéliser l'ouverture aux terribles torpeurs de l'extérieur. Toute la question est l'expression d'un tel opérateur d'impédance  $Z_{\text{def}}$ . Si notre acharnement avec le cutter s'est concentré sur une petite zone, disons incluse dans une boule de rayon  $\delta$ , alors nous pouvons de nouveau avec ravissement avoir recours aux développements asymptotiques raccordées. La zone défectueuse sera alors considérée comme une partie jonction et recevra une modélisation 3D alors que les parties saines qui l'entourent seront toujours modélisées par une équation type "des télégraphistes". Cette situation ressemble comme deux gouttes de cognac à celle que nous avons tant bien que mal réalisée dans la partie IV à cela près, enfonçons le cutter dans la plaie, qu'il nous faut considérer dans l'étude des champs proches une condition aux bords qui fasse intervenir notre opérateur  $Z_{\text{def}}$ . Souffrez qu'alors les conditions de Kirchhoff qui en résulte se seront profondément compliquées. Nous pouvons vous dire non sans peine que dans le domaine fréquentiel, celles-ci deviennent :

- loi des mailles :  $V_0^\delta(0_0, \omega) - V_l^\delta(0_l, \omega) = \mathcal{U}_{th,l}^\delta(\omega) + \delta \sum_{l'=1}^L \left[ i\omega \mathcal{L}^{l,l'} + \mathcal{Z}_{\text{def}}^{l,l'}(\omega) \right] (I_{l'}^\delta(0_{l'}) - \mathcal{I}_{th,l}^\delta(\omega)) + O(\delta^2)$ ,
- loi des noeuds :  $-\sum_{l=0}^L I_l^\delta(0_l, t) = \delta i\omega \mathcal{C} (V_0^\delta(0_0, t) - V_{th,l}^\delta(\omega)) + O(\delta^2)$ ,

avec  $\mathcal{U}_{th,l}^\delta$ ,  $\mathcal{I}_{th,l}^\delta$  et  $\mathcal{V}_{th,l}^\delta$  des termes qui dépendent de  $\mathbf{E}_{th}^\delta \times \mathbf{n}^\delta$  et  $\mathcal{Z}_{\text{def}}$  une matrice induite par l'opérateur  $Z_{\text{def}}$ . Notons que la prise en compte de défauts conséquents fait intervenir un terme d'ordre 0 dans les conditions de Kirchhoff contrairement à celles dont nous sommes maintenant accoutumés.

**Axe de recherche 6.** *Concevoir une condition aux bords qui prennent en compte un défaut conséquent sur une petite zone et observer son implication sur les conditions de Kirchhoff.*

Conséquent défaut présent sur une grande zone : insondable écueil.

**Axe de recherche 7.** *Une modélisation 1D de défauts conséquents sur une grande zone est elle envisageable ?*

## Modélisation d'un fin métal à l'air libre

Il est maintenant temps de comprendre pourquoi au collège on nous présente l'électricité comme se déplaçant "dans" un métal alors que les ondes électromagnétiques se propagent dans le milieu diélectrique qui entoure l'entour. Ne méprisez point une telle question, car une analyse propre présage ce que l'on nomme avec déférence un guide ouvert. En effet, considérons, pour modéliser cela, un "fin" fil métallique dans l'air. Physiquement parlant, nous nous attendons à ce que l'énergie se concentre "à la surface" du fil, au sens où les champs électromagnétiques décroissent exponentiellement en fonction de la distance au fil.

**Axe de recherche 8.** *Sommes-nous en mesure de dériver par une analyse asymptotique du même type que la partie III sur l'effet de peau un modèle 1D d'un fil de métal dans l'air ? Est il bien plus dissipatif que le modèle du câble coaxial qui guide les ondes en son sein ? La résistance dû à l'effet de peau et la conductance peuvent-elles apparaître au même ordre que respectivement l'inductance et la capacitance ?*

## Rayonnement : antenne et câble rayonnant (leaky feeder cable)

Puisque ces mystères me dépassent, feignons d'en être l'organisateur.

Jean Cocteau

Concevez que les câbles peuvent déboucher sur l'extérieur, cas d'une antenne, pour émettre un signal. Il s'agit alors d'étudier un problème de diffraction.

**Axe de recherche 9.** *Utiliser la méthode des développements asymptotiques raccordées, à l'instar de [70], pour étudier la jonction câble coaxial-antenne.*

Cependant, un fil libre dans l'air ou une antenne peut présenter des désavantages dans le contexte d'un tunnel :

- le tunnel est mauvais guide d'onde : les murs sont trop peu conducteurs pour que les pertes entre l'entrée et la sortie du tunnel n'atténuent la propagation du signal (à cela rajoutons les pertes diélectriques dues à l'humidité),

- les réflexions multiples sur les parois conduisent à des interférences
- des écrans métalliques comme les voitures peuvent couper la transmission radio (effets de masques).

Il faut alors considérer un objet qui comme nos lignes de transmissions guident les ondes et qui comme les antennes les laissent s'échapper dans l'environnement extérieur.

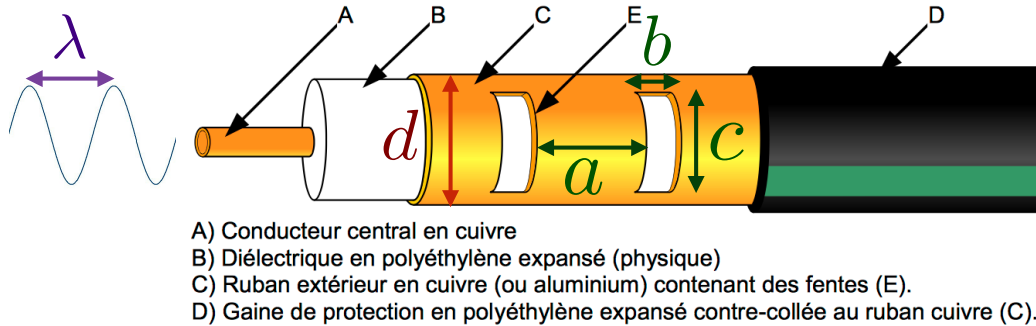


FIGURE 13.6 – Câble rayonnant de diamètre  $d$  avec les fentes de dimensions  $b, c$  régulièrement espacées d'une distance  $a$

Les **câbles rayonnants** (figure 13.6) sont des câbles coaxiaux avec des fentes régulièrement espacées taillées dans le conducteur extérieur. Ils sont en pratique usités là où une communication radio normale est rendue difficile notamment dans les tunnels et ainsi une thèse sur ce sujet pourrait être récompensé par accès Wi-Fi dans le RER-B entre Paris et Palaiseau. Un tel travail concentrerait la considération d'un fin guide d'onde et d'un **milieu périodique**. Si le nombre de Helmholtz

$$\delta := \frac{d}{\lambda} = \frac{\text{dimension transverse}}{\text{longueur d'onde}} \ll 1$$

est suffisamment petit, nous pouvons tenter d'établir un **modèle 1D** et si les fentes vérifient

$$\frac{a}{\lambda} \sim \frac{b}{\lambda} \sim \frac{c}{\lambda} \sim \eta \ll 1,$$

alors nous pouvons songer à des méthodes d'**homogénéisation** standards. Encore faut il, par une analyse dimensionnelle, déterminer le régime asymptotique (ordre de grandeur de  $\delta$  et  $\nu$ ) pour s'en assurer ou motiver quelconques alternatives. Considérons de nouveau les équations de Maxwell d'inconnues  $(E^\delta, H^\delta)$  dans le milieu diélectrique avec condition aux bords de type conducteur parfait à la surface des conducteurs métalliques (négligeons pour simplifier l'effet de peau) et une condition aux bords issus de la modélisation des défauts débouchant (avec un opérateur  $Z_{def}$  comme sur la figure 13.5) sur les fentes que nous avons auparavant réalisé. Deux possibilités de modélisations (voir figure 13.7) s'ouvrent à nous :

1. (*Cable fin + homogénéisation*). Si nous pouvons avoir recours à l'homogénéisation, espérons une structure de la forme

$$E^\delta(x_T, x_3, t) \sim V^\delta \left( \frac{x_3}{\delta}, t \right) E_{\text{profil}}^\delta \left( \frac{x_T}{\eta}, \frac{x_3}{\delta}, t \right) \quad \text{et} \quad H^\delta(x_T, x_3, t) \sim I^\delta \left( \frac{x_3}{\delta}, t \right) H_{\text{profil}}^\delta \left( \frac{x_T}{\eta}, \frac{x_3}{\delta}, t \right),$$

où  $V^\delta$  et  $I^\delta$  sont solutions d'une équation de type télégraphistes avec coefficients effectifs reliés à  $E_{\text{profil}}^\delta$  et  $H_{\text{profil}}^\delta$  et donc homogénéisées par rapport à la variable rapide  $x_T/\eta$ .

2. (*Raccordements de câbles avec des zones de jonctions comportant les fentes*). Dans le cas, celui que par ailleurs nous estimons être le plus plausible, nous imaginons que le modèle résultant ne sera plus une équation des télégraphistes mais une succession périodique d'équations des télégraphistes avec des conditions de saut à des noeuds (condition de Kirchhoff entre deux branches) qui représentent la présence des fentes. Une fois de plus nous devons user des développements asymptotiques raccordées, les fentes seront vues comme les zones de jonctions recevrons une modélisation 3D.

Nous imaginons qu'une résistance apparaîtra dans ces nouveaux modèles, soit dans l'équation des télégraphistes pour le premier, soit dans les conditions de Kirchhoff dans le second, et représentera l'énergie transmise à l'extérieur.

**Axe de recherche 10.** *Dériver un modèle 1D (homogénéisé ou avec des conditions de saut) du câble rayonnant par analyse asymptotique des équations de Maxwell. Faire une étude complète de celui-ci (caractère bien posé, interprétation physique des coefficients effectifs, ratio énergie rayonné - énergie transmise, estimation d'erreur...).*

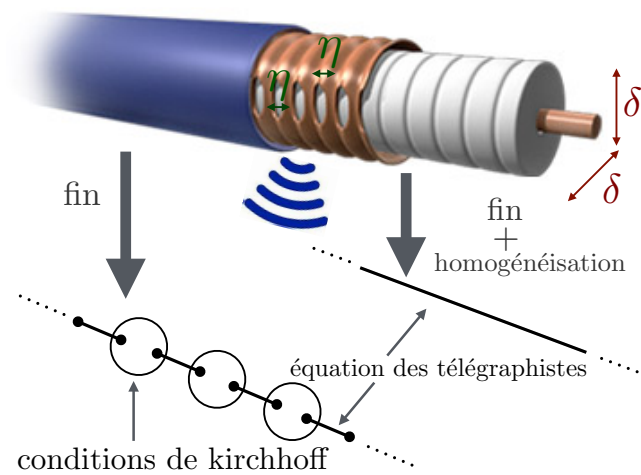


FIGURE 13.7 – Modélisation 1D d’un câble rayonnant par une branche ou succession de branches et de noeuds

### III Le problème inverse : vers l’identification de défauts

Les bonnes questions ne se satisfont pas de réponses faciles

Paul Samuelson

La partie identification de défauts concerne le problème inverse c’est-à-dire la reconstruction des défauts recherchés à l’aide du modèle que nous venons de mettre au point. La méthode proposée par Michel Sorine et

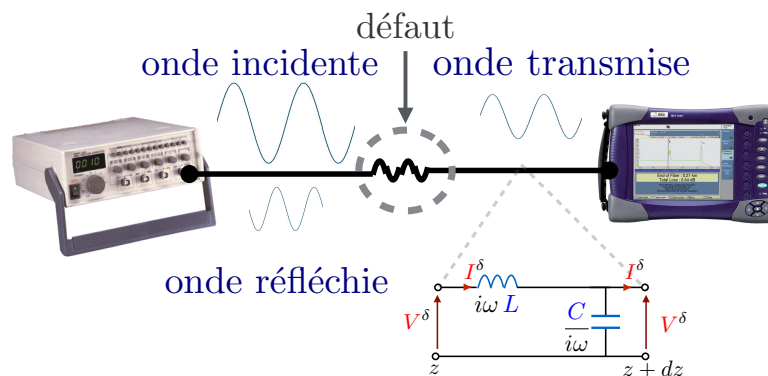


FIGURE 13.8 – Identification de défauts

ses collaborateurs ([3],[53]) s’appuie sur la reconstruction des coefficients effectifs RLCG à partir de l’analyse du coefficient de réflexion via une méthode d’**inverse scattering** (figure 13.8). Pour cela, nous allons transformer l’équations des télégraphistes en une équation de type Zakharov-Shabat conformément à la démarche initiée par M. Jaulent dans [41]. Nous ne considérerons ici que des câbles coaxiaux avec des défauts non franc modélisés par l’équation des télégraphistes issue du problème directe expliqué dans les parties précédentes et que nous avons quelques peu simplifiée :

$$\begin{cases} i\omega C_\infty(x_3) V(x_3, \omega) + \delta^2 G_\infty(x_3) V(x_3, \omega) + \partial_3 I(x_3, \omega) = 0, \\ i\omega L_\infty(x_3) I(x_3, \omega) + \delta \sqrt{i\omega} R_{sk}(x_3) I(x_3, \omega) + \partial_3 V(x_3, \omega) = 0. \end{cases}$$

Nous considérerons aussi des conditions aux bords de cette ligne de transmission ( $x_{3,g}$  correspond au bout gauche et  $x_{3,d}$  au bout droit) :

$$\begin{cases} V(x_{3,g}, \omega) + Z_g I(x_{3,g}, \omega) = V_g(\omega) \\ V(x_{3,d}, \omega) - Z_d I(x_{3,d}, \omega) = V_d(\omega) \end{cases}$$

avec des impédances de bouts de lignes  $Z_g$  et  $Z_d$  et des générateurs de tensions  $V_g(\omega)$  et  $V_d(\omega)$  connus. Nous allons transformer cette équation pour exploiter des outils classiques de la méthode d'inverse scattering. Pour cela nous introduisons les paramètres de référence :

- **impédance caractéristique** :  $Z(x_3) := \sqrt{\frac{L_\infty(x_3)}{C_\infty(x_3)}}$ ,
- **vitesse de propagation** :  $c_0(x_3) := \frac{1}{\sqrt{L_\infty(x_3) C_\infty(x_3)}}$ ,

ainsi que les coordonnées induites par la **transformation de Liouville** :

$$x(x_3) = \int_0^{x_3} \sqrt{L_\infty(z) C_\infty(z)} dz.$$

Dans ce nouveau système de coordonnées<sup>2</sup> les ondes de puissances amenées à devenir les variables qui nous intéresseront sont :

- **onde réfléchie** :  $\nu_1(\omega, x) := \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{Z(x)}} V(\omega, x) - \sqrt{Z(x)} I(\omega, x) \right]$ ,
- **onde incidente** :  $\nu_2(\omega, x) := \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{Z(x)}} V(\omega, x) + \sqrt{Z(x)} I(\omega, x) \right]$ .

L'équation de télégraphistes simplifiée devient après quelques calculs l'**équation de Zakharov-Shabat** (cf [65]) suivante :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu_1(\omega, x) \\ \nu_2(\omega, x) \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \nu_1(\omega, x) \\ \nu_2(\omega, x) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} := \begin{pmatrix} \delta q_d(\omega, x) - i\omega & -q_{LC}(x) - \delta q_{\text{disp}}(\omega, x) \\ -q_{LC}(x) + \delta q_{\text{disp}}(x) & -\delta q_d(\omega, x) + i\omega \end{pmatrix}$$

où les potentiels de la **matrice de scattering S** sont :

- potentiel dû à la non uniformité :  $q_{LC}(x) := \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \left( \ln \frac{L_\infty(x)}{C_\infty(x)} \right)$ ,
- potentiel dû à la dispersion :  $q_{\text{disp}}(\omega, x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{i\omega} R_{sk}(x)}{L_\infty(x)} - \delta \frac{G_\infty(x)}{C_\infty(x)} \right)$ ,
- potentiel dû à la dissipation :  $q_q(\omega, x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{i\omega} R_{sk}(x)}{L_\infty(x)} + \delta \frac{G_\infty(x)}{C_\infty(x)} \right)$ .

Les conditions en entrée de ligne  $x_g = x(x_{3,g})$  et en sortie de ligne  $x_d = x(x_{3,d})$  deviennent :

$$\begin{cases} \nu_2(\omega, x_g) - r_g(x_g) \nu_1(\omega, x_g) = \sqrt{Z(x_g)} \frac{V_g}{Z_g + Z(x_g)}, \\ \nu_1(\omega, x_d) - r_d(x_d) \nu_2(\omega, x_d) = \sqrt{Z(x_d)} \frac{V_d}{Z_d + Z(x_d)}, \end{cases}$$

avec les coefficients de réflexions :

- **coefficient de réflexions en entrée de ligne** :  $r_g := \frac{Z_g - Z(x_g)}{Z_g + Z(x_g)}$ ,
- **coefficient de réflexions en sortie de ligne** :  $r_d := \frac{Z_d - Z(x_d)}{Z_d + Z(x_d)}$ .

Le premier de ces coefficients de réflexions est une donnée du problème et le second est accessible aux mesures. C'est d'ailleurs à partir de ces dernières, réalisées pour plusieurs fréquences, que nous pouvons reconstruire les potentiels de scattering  $q_{LC}$ ,  $q_d$  et  $q_{\text{disp}}$  qui contiennent les informations sur les coefficients effectifs RLCG que nous cherchons à déterminer. Cela se fait plus précisément en introduisant les équations de **Gelfand-Levitan-Marchenko** avec pour paramètre une fonction du coefficient de réflexions en sortie de ligne. Le cas où les **pertes sont négligeables**  $R = G = 0$  est traité dans [3]. Nous ne savons généraliser ce travail que si les potentiels de scattering dues à la dispersion et à la dissipation **ne dépendent pas de la fréquence**, ce qui correspond au modèle directe que si la conductivité dans la partie diélectrique est très petite et que si l'effet de peau est négligé. Le cas des réseaux avec les **conditions de Kirchhoff d'ordre 0** (toujours avec des lignes sans pertes) est traité dans [53].

2. nous écrirons toujours par abus de notation  $u(x)$  pour  $u(x(x_3))$ .

**Axe de recherche 11.** *Généraliser la démarche de Jaulent-Sorine que nous venons d'exposer au cas des modèles plus élaborés que nous avons présenté qui notamment présentent des pertes qui dépendent de la fréquence (par exemple les pertes dues à l'effet de peau).*

Une fois connues les valeurs des coefficients effectifs, il n'est pas non plus évident de reconstruire les paramètres physiques du problème que sont la géométrie du câble et les coefficients caractéristiques (permittivité, perméabilité et conductivités électriques et magnétiques). Pour la géométrie, rappelons que  $C_\infty$ ,  $L_\infty$ ,  $G_\infty$  et  $R_\infty$  sont **invariants par transformations conformes** et que  $\gamma_Y$ ,  $\gamma_Z$ ,  $C_g$  et  $L_g$  sont **invariants par toutes transformations qui conservent les éléments de volume**. Les coefficients  $C_g$  et  $L_g$  sont des bons indicateurs de non cylindricité du câble mais ne le sont pas de constance du produit  $\varepsilon\mu$  et donc de l'hétérogénéité de la célérité des ondes électromagnétiques dans le câble.

**Axe de recherche 12.** *Relire ce manuscrit pour traquer toutes les fautes.*

Wovon man nicht sprechen kann, darüber  
muss man schweigen.

---

Wittgenstein

---

# 31 MARS : ANNIVERSAIRE DE NICOLAS GOGOL

---

Le jeune homme que nous décrivons appartenait à ce type : Piskariov était timide et timorée, mais il avait dans son âme des étincelles d'un sentiment, prêtes, lors d'une circonstance favorable, à se transformer en flammes. Saisi d'un frémissement secret, il se dépêchait de suivre l'objet qui l'avait frappé, il semblait lui-même surpris de son audace. Cet être inconnu, vers lequel ses yeux, ses pensées et ses sentiments étaient si puissamment dirigés, tourna soudain la tête et la regarda. Mon Dieu, quels traits divins ! Des cheveux beaux comme l'agate ombrèrent son front absolument charmant dont la blancheur était éclatante. Ils étaient ondulés, avec de merveilleuses boucles, et partie de sa chevelure s'échappant de son chapeau, effleurait ses joues ou transparaisait une rougeur subtile et fraîche. Ses lèvres étaient closes par un essaim de rêves délicieux. Tout ce qui demeure du souvenir de l'enfance et suscite le rêve et la tranquille inspiration poétique auprès d'une veilleuse allumée, tout cela, semblait-il, se combinait, se mêlait et se reflétait sur ses lèvres harmonieuses. Elle le regarda et son regard fit alors frémir son cœur ; elle le regarda farouchement, un sentiment d'indignation apparut sur son visage à la vue d'un poursuivant si insolent. Mais sur ce beau visage, même la colère était ravissante. Transi de honte et de timidité, il s'arrêta en baissant les yeux ; mais comment laisser partir cette divinité sans même connaître où elle est descendu ? De telles pensées traversèrent l'esprit du rêveur, et il décida de la suivre. Mais afin de ne pas se faire remarquer, il laissa une certaine distance entre elle et lui, regardant ça et là d'un air désinvolte et examinant les enseignes, mais ne perdant pas d'un pouce l'inconnue. Les passants se faisaient plus rares, la rue devenait plus calme ; et la beauté se retourna et eut l'impression qu'un léger sourire avait étincelé sur ses lèvres. Il trembla de tout son corps et n'en crut pas ses yeux. Non, c'était la lumière trompeuse du réverbère qui avait exprimé sur son visage un semblant de sourire ; non, c'étaient ses propres rêves qui se raillaient de lui. Mais sa respiration se bloqua dans sa poitrine, tout en lui se transforma en un vague frémissement, tous ses sentiments se consumaient et tout devant lui s'enveloppa de brouillard. Le trottoir s'échappait sous ses pieds, les coupés avec leurs chevaux aux galop semblaient immobiles, un pont s'étirait et se fracasser sur son arche, une maison était le toi en bas, une guérite s'écroulait en se dirigeant vers lui, et la hallebarde du sergent de ville en même temps que les lettres en or d'une enseigne, où des ciseaux étaient représentés, brillaient, semblait-il, juste devant les cils de ses yeux. Et tout cela étaient le résultat d'un seul regard, du mouvement de quelque jolie frimousse.



---

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] G. Acosta and R. G. Durán, An optimal Poincaré inequality in  $L^1$  for convex domains, *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2003) 195-202.
- [2] Adams, D.R and Hedberg, L.I, *Function spaces and potential theory*. Springer, Grundlehren Math. Wiss. Bd. 314, Berlin 1999
- [3] M. Admane, M. Sorine, Q. Zhang, Inverse scattering for soft fault diagnosis in electric transmission lines, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. 59, No. 1, 141-148, 2011.
- [4] I. Aganovic, Z. Tutek, A justification of the one-dimensional model of elastic beam. *Math. Methods in Applied Sci.*, 8, 1986, pp. 1-14.
- [5] V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1978. (An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics)
- [6] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, V. Girault, Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 21 (9) (1998) 823–864.
- [7] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*. Second edition. Volume 96. *Monographs in Mathematics*. Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, 2011. doi : 10.1007/978-3-0348-0087-7.
- [8] W. Arendt, D. Dier, and M. Kramar Fijavž. Diffusion in networks with time-dependent transmission conditions. *Appl. Math. Optim.* 69 (2014), 315-336. url : <http://arxiv.org/abs/1303.4951>.
- [9] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey (2001). *Harmonic Function Theory* (2nd edition). Springer-Verlag. ISBN 0-387-95218-7.
- [10] M. Bebendorf, A note on the Poincaré inequality for convex domains, *Z. Anal. Anwendungen*, 22 (2003), 751-756.
- [11] G. Beck, S. Imperiale, P. Joly. *Mathematical modelling of multi conductor cables*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Volume 8, Issue 3, June 2015, pp.521-546.
- [12] Bishop, Errett 1967. *Foundations of Constructive Analysis*, New York : Academic Press. ISBN 4-87187-714-0
- [13] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [14] A. Burel, S. Imperiale and P. Joly *Solving the Homogeneous Isotropic Linear Elastodynamics Equations Using Potentials and Finite Elements. The Case of the Rigid Boundary Condition*, *Numerical Analysis and Applications*, vol. 5, pp. 136-143, jun, 2012
- [15] Caffarelli, L. A. ; Kohn, R. ; Nirenberg, L. First order interpolation inequalities with weights. *Compositio Math.* 53 (1984), no. 3, 259-275.
- [16] G. Caloz, M. Dauge, E. Faou and V. Péron, On the influence of the geometry on skin effect in electromagnetism, *Computer Methods Appl. Mech. Eng.* 200 (2011) 1053- 1058.
- [17] G. Canadas, Speed of Propagation of Solutions of a Linear Integro-differential Equation with Nonconstant Coefficients, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 16 (1) (1985) 143.
- [18] L. Chesnel, *Etude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux*, thèse de doctorat, ENSTA (2012)
- [19] S.-K. Chua and R. L. Wheeden. Estimates of best constants for weighted Poincaré inequalities on convex domains. *Proc. London Math. Soc.* (3), 93(1) :197-226, 2006.
- [20] P. Ciarlet Jr, *Notes de cours sur les équations de Maxwell*. cours de 3ième année, ENSTA. 2011



- [21] B. Cockburn, P. Joly, Maxwell equations in polarizable media, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 19 (6) (1988) 1372–1390.
- [22] Duruflé, M., Haddar, H., and Joly, P. Higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems. *Comptes rendus-Physique* 7, 5 (2006), 533-542.
- [23] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Vol. 1, Springer-Verlag, 1990.
- [24] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Vol. 3, Springer-Verlag, 1990.
- [25] M. Delfour, J.P. Zolésio *Shapes and geometries. Analysis, differential calculus, and optimization*, Advances in Design and Control SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- [26] Yu. Egorov, A. Komech, M. Shubin, *Elements of the Modern Theory of Partial Differential Equations*, Springer, NY, 1999.
- [27] T. Ekholm, H. Kovařík, and D. Krejčířík, A Hardy inequality in twisted waveguides, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 188 (2008), 245-264.
- [28] P.Exner and P.Sěba, Free quantum motion on a branching graph, *Rep. Math. Phys.*, 28 (1989), 7-26.
- [29] N. Filonov, On an inequality for the eigenvalues of the Dirichlet and Neumann problems for the Laplace operator, *St. Petersburg Math. J.*, 16 (2005), 413-416.
- [30] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag 1986.
- [31] D. Givoli, *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [32] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, PUF (1971).
- [33] Gross, P. and Kotiuga, P. R. *Electromagnetic Theory and Computation : a Topological Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004
- [34] Haddar, H., and Joly, P. Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings. *J. Comput. Appl. Math.* 143, 2 (2002), 201-236.
- [35] Haddar, H., Joly, P., and Nguyen, H. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case. *Math. Models Methods Appl. Sci* 15, 8 (2005), 1273-1300.
- [36] Helmholtz, Hermann von. 1879. *Studien über electrische Grenzsichten*.
- [37] A. Henrot, M. Pierre, *Variation et Optimisation de formes*, coll. *Mathématiques et Applications*, vol. 48, Springer 2005.
- [38] Impériale S. *Etude mathématique et numérique de capteurs piézoélectriques*, Thèse de doctorat, Paris Dauphine, (2012).
- [39] S. Imperiale and P. Joly, Mathematical modeling of electromagnetic wave propagation in heterogeneous lossy coaxial cables with variable cross section, *Applied Num. Mathematics*, (in Press).
- [40] S. Imperiale and P. Joly, Error estimates for 1D asymptotic models in coaxial cables with non-homogeneous cross-section. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*,(AAMM), 4, (2012), pp. 647-664.
- [41] Jaulent, M., The inverse scattering problem for LCRG transmission lines, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 23, No. 12, 2286-2290, December 1982.
- [42] P.Joly, The mathematical model for elastic wave propagation.
- [43] P. Joly, A. Semin, Construction and analysis of improved Kirchoff conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots, *ESAIM : Proc.*, 2008, pp. 44–67.
- [44] Kaplan, W. *Advanced Calculus*, Reading, MA : Addison-Wesley, 1952
- [45] Koebe, P. *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung : I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung* *z. J. Reine Angew. Math.* 145 (1915), p. 177-225.
- [46] Kozlova M.V., Panasenko G.P. Homogenization of the 3- elasticity problem in non-homogeneous rod. *Zh.Vyc.Mat. Mat.Fis.*,1991,10,1592-1596(in Russian). English transl. by PLENUM in *Journal of Computing Math. and Math. Physics USSR*.
- [47] E. Krahn, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, *Math. Ann.* 94 (1925), 97-100.
- [48] P. Kuchment, Graph models for waves in thin structures, *Waves in Random Media* 12 (4) (2002) R1–R24.
- [49] P. Kuchment, Quantum graphs I. Some basic structures, *Waves in Random Media* 14, S107-S128 (2004)

- [50] Leibniz, lettre au Marquis de L'Hospital datée du 30 septembre 1695 à Hanovre, Leibnizen Mathematische Schriften, 1-2, pp. 297-302, Olms Verlag, Hildesheim, Allemagne (1962).
- [51] Maria Lopez-Fernandez, Christian Lubich, and Achim Schadle. Adaptive, fast, and oblivious convolution in evolution equations with memory. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(2) :1015-1037, 2008.
- [52] Y. Y. Lu : A complex coefficient rational approximation of  $\sqrt{1+x}$ . *Appl. Numer. Math.*, 27 :141-154, 1998.
- [53] M. Mirrahimi, M. Sorine and F. Visco-Comandini. Some inverse scattering problem on star-shaped graphs. *J. of Mathematical Analysis and Application*, 378 :343-358, 2011.
- [54] P. Monk, Finite element methods for Maxwell's equations, Oxford science publications, 2003.
- [55] Nerval, Les Illuminés, 1868 (tome. IV des oeuvres complètes Lévy), p. 269-278.
- [56] Orfanidis, S. J., Electromagnetic Waves and Antennas, Rutgers University, 2014.
- [57] Ovide, L'Art d'aimer, texte établi et trad. par Henri Bornecque. Paris, les Belles lettres, 1983. 103 p. (Collection des universités de France)
- [58] Panasenko G.P. "Multicomponent homogenization of processes in strongly non-homogeneous structures." *Math.Sb.*,1990, 181,1,134-142(in Russian) ; English transl. in *Math.USSR Sbornik* ,1991,69,1,143-153.
- [59] C. R. Paul, Analysis of Multiconductor Transmission Lines, 2nd. New York 2008.
- [60] D. Pauly, On Maxwell's and Poincaré's constants. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Volume 8, Issue 3, June 2015, pp.607-608.
- [61] L. Payne and H. Weinberger, An optimal Poincaré inequality for convex domains, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 5 (1960), 286-292.
- [62] T. Ransford Potential Theory in the Complex Plane, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995)
- [63] W. Rudin, Analyse Réelle et Complexe, Masson, Paris.
- [64] Schmidt, K., and Tordeux, S. Asymptotic modelling of conductive thin sheets. *Z. Angew. Math. Phys.* 61, 4 (Aug 2010), 603-626.
- [65] Shabat, A.B and V.E. Zakharov V.E. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Physics Jetp*, 34(1) :62-69, 1972.
- [66] G. S Smith, A simple derivation for the skin effect in a round wire, *Eur. J. Phys.*, 35, 025002 (2014),
- [67] J. Sokolowski and J. P. Zolesio, Introduction to Shape Optimization : Shape sensitivity analysis. Springer Verlag Berlin, 1992.
- [68] Steer. M, Microwave and RF design : a systems approach. Raleigh, N.C. : SciTech Pub., c2010.
- [69] Szegő, G. : Inequalities for Certain Membranes of a Given Area, *J Rational Mech. Anal.* 3, 343–356 (1954).
- [70] S. Tordeux. Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes, Thèse de doctorat, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2004.
- [71] M. Tsuji, Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen, Tokyo, 1959
- [72] Tucsnak, Marius, Weiss, George, Observation and Control for Operator Semigroups, Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009
- [73] M. F. Veiga, Asymptotic method applied to a beam with a variable cross section, in : Asymptotic methods for elastic structures (Lisbon, 1993), de Gruyter, Berlin, 1995, pp. 237–254.
- [74] Vishik, M. I., and Lyusternik, L. A. The asymptotic behaviour of solutions of linear differential equations with large or quickly changing coefficients and boundary conditions. *Russian Math. Surveys* 15, 4 (1960), 23.
- [75] W. T. Weeks, Calculation of Coefficients of Capacitance of Multiconductor Transmission Lines in the Presence of a Dielectric Interface, *IEEE Trans. MTT-18*,35 (1970).
- [76] W. T. Weeks, Multiconductor transmission line theory in the TEM approximation, *IBM Journal of Research and Development*, 604D611, 1972.
- [77] Weinberger, H. F. : An Isoperimetric Inequality for the N-dimensional Free Membrane Problem. *J. Rational Mech. Anal.* 5, 633–636 (1956).
- [78] Weyl H. Die natürlichen Randwertaufgaben im Aussenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges. *Mathematische Zeitschrift* 1952 ; 56 :105-119.
- [79] M. Willem, Analyse fonctionnelle élémentaire, Cassini, Paris, 2003.

**Titre :** Modélisation et étude mathématique de réseaux de câbles électriques

**Mots clés :** analyse asymptotique, développements asymptotiques raccordés, équations de Maxwell, modèles des télégraphistes, effet de peaux.

**Résumé :** Cette thèse porte sur la modélisation d'un réseau de câbles coaxiaux et multi-conducteurs. Ce dernier peut être mathématiquement traduit par les équations aux dérivées partielles de Maxwell 3D qui régissent la propagation des ondes électromagnétiques en son sein ou par un modèle simplifié type circuit électrique qui se concentre sur les variables unidimensionnelles que sont les potentiels et courants électriques. Dans ce dernier modèle les potentiels et courants électriques vérifient sur les branches du circuit l'équation des télégraphistes et sur les noeuds les lois de Kirchhoff. Si l'utilisation des équations de Maxwell est assez générale pour comprendre toutes sortes de défauts, elle est néanmoins numériquement trop coûteuse pour les applications que nous avons en tête, à savoir le contrôle non destructif. L'utilisation des équations des télégraphistes n'est cependant valide que si les câbles sont parfaits (cylindriques, sans pertes...). Ainsi, nous avons établi dans cette thèse quelques modèles 1D venant généraliser l'équation des télégraphistes et les lois de Kirchhoff pour y incorporer l'influence de divers défauts (géométrie, pertes, effet de peau, caractéristique des matériaux variables) tant sur les câbles que dans les jonctions. Ceux-ci sont obtenus via des analyses asymptotiques (classiques, multi-échelles, raccordées) des équations 3D de Maxwell en considérant certains paramètres (dimensions transverses des câbles par rapport à leurs longueurs, conductivité du milieu diélectrique par rapport à celle du métal des âmes, petite taille de la zone de jonction par rapport à l'ensemble du réseau) extrêmement petits. Une des difficultés mathématiques tient en ce que les domaines que nous prendrons en compte (sections des câbles, jonctions) ne sont aucunement simplement connexes, nous obligeant ainsi à remanier quelques outils standards tel les décompositions en potentiels.

**Title :** Mathematical modeling of electrical networks

**Keywords :** asymptotic analysis, matched asymptotic expansions, Maxwell's equations, telegrapher's models, skin-effect.

**Abstract :** This thesis aims at modelizing a network made of coaxial and multi-conductors cables. This can either be represented mathematically through the Maxwell 3D equations dealing with electromagnetic waves propagation in the network or by an electrical circuit whose unknowns - the electrical potentials and currents - satisfy the telegrapher's equation for each branches and the Kirchhoff's laws for each knots. Maxwell's equations are general enough to integrate many defaults but computation cost is too expansive for the application we have in mind, namely non destructive testing. The telegrapher equation is valid if and only if the cable are perfect (cylindrical, lossless...). Thus, we derive some 1D models from Maxwell's equation generalizing the usual telegrapher's equation and Kirchhoff's laws. Those new models integrate the influence of numerous defect types (geometry, losses, skin-effect, materials' characteristics variations) and are derive via asymptotic analysis (classical, multi-scales and matched ones) by considering very small parameters (transverse dimensions of the cables relative to their length, conductivity of the dielectric part relative to the one of the metallic inner-wires and size of the junction part relative to the whole network). One of the mathematical difficulties is due to the fact that the geometrical elements included in our study (section of the cables, junctions) are not simply connected. Thus we will generalize usual tools such as the Helmholtz decompositions.