



HAL
open science

Problèmes d'interface en présence de métamatériaux : modélisation, analyse et simulations

Valentin Vinales

► **To cite this version:**

Valentin Vinales. Problèmes d'interface en présence de métamatériaux : modélisation, analyse et simulations. Modélisation et simulation. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACL009 . tel-01426226

HAL Id: tel-01426226

<https://pastel.hal.science/tel-01426226v1>

Submitted on 4 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLAY009

THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : École nationale supérieure de techniques avancées

Laboratoire d'accueil : Unité de mathématiques appliquées (ENSTA-CNRS-INRIA)

Spécialité : Mathématiques appliquées

Valentin VINOLES

Problèmes d'interface en présence de métamatériaux :
modélisation, analyse et simulations

Date de soutenance : 8 septembre 2016

Après avis des rapporteurs :

Shari MOSKOW (Université de Drexel, USA)

Chrysoula TSOGKA (Université de Crète, Grèce)

Jury de soutenance :

Guy BOUCHITTÉ	(Université de Toulon)	Examineur
Bruno DESPRÉS	(Université Pierre-et-Marie-Curie)	Président
Julien DIAZ	(Inria Bordeaux)	Examineur
Sonia FLISS	(ENSTA ParisTech)	Directrice
David GÉRARD-VARET	(Université Paris-Diderot)	Examineur
Marcus GROTE	(Université de Bâle, Suisse)	Examineur
Patrick JOLY	(Inria Saclay)	Directeur
Chrysoula TSOGKA	(Université de Crète, Grèce)	Rapporteur



Équipe POems (UMR 7231 CNRS – Inria – ENSTA ParisTech)
828, boulevard des Maréchaux
91 762 Palaiseau Cedex
FRANCE

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	ix
Introduction générale	xi
0 Étude de problèmes de transmission avec changements de signe via une approche modale	1
0.1 Introduction	2
0.2 Setting of the problem and objectives	3
0.3 The case where the negative material is a ball or a disk	5
0.3.1 Reduction to linear systems	5
0.3.2 Asymptotic analysis	6
0.3.3 Conclusion	8
0.3.4 Numerical validations	9
0.3.5 When the curvature degenerates	9
0.4 Some cases with flat interfaces	11
0.4.1 A case where the negative material is unbounded	12
0.4.2 A case where the negative material is bounded	15
0.5 Discussion and prospects	19
0.A Appendix: justification of the radiation conditions for negative materials	20
0.B Appendix: Bessel and Hankel functions	21
0.C Appendix: the one-dimensional case	22
0.C.1 The case where the negative material is a half-line	23
0.C.2 The case where the negative material is a segment	23
I Propagation d'ondes transitoires dans les milieux dispersifs	25
Contenu de cette partie	27
1 Généralités sur les modèles dispersifs en électromagnétisme	29
1.1 Modèles pour les milieux dispersifs	30
1.1.1 Les équations de Maxwell	30
1.1.2 Exemples de modèles pour la permittivité	31
1.1.3 Formes admissibles pour la permittivité et la perméabilité	32

1.2	Le modèle de Lorentz généralisé	36
1.2.1	Du régime fréquentiel au régime temporel	37
1.2.2	Identité d'énergie	39
1.2.3	Caractère bien posé	39
1.3	Analyse des propriétés dispersives	40
1.3.1	Rappels d'analyse par ondes planes	40
1.3.2	Application aux modèles dispersifs	43
1.A	Annexe : fonctions de Herglotz	47
1.B	Annexe : démonstration de la proposition 1.6	49
2	Schémas numériques pour le modèle de Lorentz généralisé	51
2.1	Construction des schémas numériques	52
2.1.1	Discrétisation en temps	52
2.1.2	Discrétisation en espace	56
2.2	Illustration des propriétés dispersives du modèle de Drude	57
2.2.1	Ondes directes, ondes inverses et band gap	58
2.2.2	Indice de réfraction négatif et lentille plate	59
2.A	Annexe : démonstration du théorème 2.3	62
3	Perfectly matched layers classiques et extension au modèle de Drude	65
3.1	Rappels sur les PMLs classiques	65
3.1.1	Construction des PMLs classiques pour des milieux non dispersifs	66
3.1.2	Stabilité des systèmes obtenus	68
3.1.3	Interprétation géométrique du critère de stabilité	68
3.2	Extension au modèle de Drude	71
3.2.1	Construction des PMLs classiques pour le modèle de Drude	71
3.2.2	Expérience numérique	73
4	Analyse des PMLs pour une classe de milieux dispersifs et application aux métamatériaux à indice négatif	77
4.1	Introduction	78
4.2	Isotropic dispersive media	79
4.2.1	The mathematical models	79
4.2.2	Analysis of dispersive properties	83
4.3	Classical PMLs and their instabilities for the Drude model	89
4.3.1	Construction of classical PMLs for the Drude model	89
4.3.2	A numerical experiment of classical PMLs for the Drude model	90
4.4	Construction and analysis of PML models for a class of dispersive systems	90
4.4.1	A class of first order dispersive hyperbolic systems	92
4.4.2	New generalised PMLs for dispersive models	93
4.4.3	Modal stability analysis of the generalised PML model	96
4.5	Application to isotropic dispersive Maxwell equations	101
4.5.1	Description of the set $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$	101
4.5.2	Reinterpretation of the necessary condition (4.111) for isotropic dispersive Maxwell models satisfying the growing property	102
4.5.3	Necessary and sufficient stability conditions for isotropic dispersive Maxwell models satisfying the growing property	103
4.5.4	Extension of the necessary and sufficient stability conditions for general isotropic dispersive Maxwell models	106
4.6	Design of Stable PMLs for isotropic dispersive media	107
4.6.1	The case of the Drude model	107
4.6.2	The case of generalized Lorentz materials	107
4.6.3	A general construction process for optimal stable PMLs	109

5	Exploration numérique du principe d'amplitude limite entre un diélectrique et un matériau de Drude	111
5.1	Le problème de transmission	112
5.1.1	Les équations de Maxwell dans chaque demi-plan	112
5.1.2	Réécriture sous la forme d'une équation de Schrödinger	113
5.2	Principe d'amplitude limite : rappels et application au problème de transmission	113
5.2.1	Le principe d'amplitude limite	113
5.2.2	Validité du PAL pour le problème de transmission	114
5.3	Validations numériques des résultats théoriques	116
5.3.1	Démarche et méthodes numériques	116
5.3.2	Le cas critique : résonances d'interface et battements	117
5.3.3	Le cas non-critique : vérification du PAL	119

II Analyse asymptotique pour des problèmes de transmission en régime harmonique : milieux périodiques classiques et à fort contraste 127

Contenu de cette partie 129

6	Rappels sur l'homogénéisation et introduction du problème de transmission	131
6.1	Homogénéisation classique de l'équation de Helmholtz dans l'espace libre	132
6.1.1	Présentation du problème périodique	132
6.1.2	La méthode des développements à deux échelles	133
6.1.3	Résultats de convergence	138
6.2	Homogénéisation classique de l'équation de Helmholtz dans un domaine borné	143
6.2.1	Le problème des conditions aux bords	143
6.2.2	Résultats numériques	144
6.3	Homogénéisation d'un problème de transmission entre un demi-plan homogène et un demi-plan périodique	147
6.3.1	Présentation du problème de transmission	147
6.3.2	Homogénéisation naïve du problème et expériences numériques	147
6.3.3	Présentation des résultats principaux de [47]	149
6.3.4	Expériences numériques	149
6.A	Annexe : matrices homogénéisées explicites	155
6.B	Annexe : démonstration de la proposition 6.7 via les ondes de Bloch	156
7	Développements asymptotiques raccordés appliqués au problème de transmission	159
7.1	Méthodologie et dérivation des équations	160
7.1.1	Le problème de transmission	160
7.1.2	Termes de champ lointain homogène	161
7.1.3	Termes de champ lointain périodique	162
7.1.4	Termes de champ proche	163
7.1.5	Conditions de raccord formelles	164
7.2	Étude des problèmes vérifiés par les termes de champ proche	166
7.2.1	Cadre variationnel standard et espaces à poids	167
7.2.2	Transformée de Floquet-Bloch dans les espaces à poids	169
7.2.3	Famille d'opérateurs dépendants de la variable de Floquet-Bloch	173
7.2.4	Comportements à l'infini	177
7.2.5	Caractère bien posé dans les espaces à poids	179
7.3	Construction des trois premiers termes de champ proche	181
7.3.1	Construction du terme d'ordre 0	182
7.3.2	Construction du terme d'ordre 1	182
7.3.3	Construction du terme d'ordre 2	184
7.4	Construction des termes de champ lointain	189
7.4.1	Cadre fonctionnel pour les problèmes de champ lointain	189

7.4.2	Problème pour les termes de champ lointain d'ordre 0	190
7.4.3	Problème pour les termes de champ lointain d'ordre 1	191
7.5	Analyse d'erreur	191
7.5.1	Stabilité	192
7.5.2	Consistance	193
7.5.3	Erreur de champ lointain	193
7.5.4	Erreur de raccord	196
7.5.5	Erreur de champ proche	197
7.5.6	Conclusion, corollaire et conjecture	198
7.A	Annexe : faisceaux d'opérateurs dépendant polynomialement d'un paramètre	199
7.B	Annexe : quelques démonstrations	201
8	Construction et analyse d'un modèle approché d'ordre 1	203
8.1	Quelques propriétés des profils et des constantes C_j	204
8.1.1	Le cas stratifié	204
8.1.2	Le cas a symétrique par rapport à y_2	204
8.1.3	La constante C_5	205
8.1.4	La constante C_1	206
8.2	Construction et analyse du modèle approché d'ordre 1	206
8.2.1	Rappels des résultats obtenus	206
8.2.2	Construction du modèle	207
8.2.3	Formulation variationnelle et caractère potentiellement mal posé	207
8.3	Décalage géométrique	209
8.3.1	Construction du modèle décalé	209
8.3.2	Caractère bien posé du modèle décalé	211
8.3.3	Convergence vers la solution exacte	213
9	Méthodes numériques et validations	215
9.1	Résolution des problèmes de cellule et calcul de la matrice homogénéisée	216
9.1.1	Problèmes de cellule du premier ordre	216
9.1.2	Calcul de la matrice homogénéisée	217
9.1.3	Problèmes de cellule du second ordre	217
9.2	Calcul de la solution exacte	218
9.2.1	Utilisation de la transformée de Floquet-Bloch	218
9.2.2	Discretisation du paramètre de Floquet-Bloch	219
9.2.3	Opérateurs DtN dans un guide d'ondes homogène	220
9.2.4	Opérateurs DtN dans un guide d'onde périodique	222
9.2.5	Résolution du problème intérieur à ξ fixé	224
9.2.6	Reconstruction de la solution à gauche et à droite	225
9.3	Calcul des solutions homogénéisées (conditions de transmission classiques)	225
9.3.1	Calcul de la solution homogénéisée d'ordre 0	225
9.3.2	Calcul du gradient de la solution homogénéisée	226
9.3.3	Calcul de l'erreur entre la solution exacte et les solution homogénéisées (conditions de transmission classiques)	227
9.4	Calcul des profils et des constantes C_j	229
9.4.1	Calcul de \mathcal{N}	230
9.4.2	Calcul de \mathcal{P}_1	232
9.4.3	Problèmes d'interface : vers un calcul plus simple des profils et des constantes	233
9.5	Calcul de la solution avec conditions de transmission d'ordre élevé	234
9.5.1	Réduction du domaine de calcul	234
9.5.2	Formulation variationnelle	235
9.5.3	Résolution en pratique	236
9.6	Expériences numériques avec les nouvelles conditions de transmission	237
9.A	Annexe : calcul analytique d'un produit scalaire	238
9.B	Annexe : démonstration de la proposition 9.10	244

10 Extension à l'homogénéisation à fort contraste	247
10.1 Rappels sur l'homogénéisation à fort contraste	248
10.1.1 Le problème périodique initial	248
10.1.2 Développements asymptotiques à deux échelles	249
10.1.3 Un coefficient homogénéisé négatif	252
10.1.4 Le problème de la convergence	254
10.2 Extension des développements asymptotiques	255
10.2.1 Le problème de transmission	255
10.2.2 Champs lointains et champ proche	255
10.2.3 Conditions de raccord	257
10.2.4 Construction des premiers termes de champ proche	258
10.2.5 Construction des modèles approchés	260
10.3 Application des nouvelles conditions de transmission aux problèmes de transmission avec changements de signes	261
Conclusion générale et perspectives	263

REMERCIEMENTS

Mes premières pensées vont à Sonia Fliss. Force est de constater que je n'ai pas toujours été le doctorant idéal, mes doutes et mes questionnements existentiels ayant parasité une grande partie de ma thèse; mais elle a, grâce à son calme, sa gentillesse, sa compréhension et sa bienveillance, toujours su comment relancer la machine et je n'aurai pu arriver au bout de l'aventure sans elle. J'ai beaucoup progressé en mathématiques à ses côtés et j'ai aussi pu apprécié ses qualités humaines à travers les nombreuses et agréables discussions que nous avons pu avoir. Du fond du cœur, merci.

Je pense également à Patrick Joly qui m'a fait confiance pour me prendre en thèse, à raison je l'espère. L'immensité de sa culture mathématique (et sa maîtrise de celle-ci) en font un directeur de thèse qui apporte une solidité et une confiance inébranlable vis-à-vis des résultats, chose extrêmement appréciable pour le thésard empli de doutes que je fus. J'ai énormément appris grâce à lui et je n'oublie pas les instants plus amicaux, ponctués par des blagues dont il a le secret, à écouter ses analyses du dernier match du PSG ou à boire quelques coups (je garde un souvenir ému du raki au bord de l'eau en Crète).

Je voudrais également remercier tous les membres du jury de ma thèse, à commencer par Shari Moskowitz et Chrysoula Tsogka qui se sont pliées à la lourde et ingrate tâche de rapporter ma thèse. Je remercie également Bruno Deprés de me faire l'honneur d'être le président du jury, et merci également pour cette expérience d'enseignement à Jussieu qui fut extrêmement enrichissante. Merci aussi à Guy Bouchitté (qui m'a par ailleurs gentiment invité à passer quelques jours à Toulon). Enfin, merci à Julien Diaz, David Gérard-Varet et Marcus Grote de compléter ce jury des plus prestigieux.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude envers Éliane Bécache et Xavier Claeys, qui ont été des collaborateurs privilégiés de ces travaux de thèse, la première sur les PMLs et plus généralement l'analyse des systèmes hyperboliques, et le second sur l'analyse asymptotique et la théorie de Kondratiev. J'ai énormément appris grâce à eux et j'espère qu'ils reconnaîtront un peu d'eux-mêmes dans ce manuscrit.

Je suis reconnaissant envers tous les membres de l'ANR Metamath, pour tous ces bons moments et ces échanges, que ce soit au niveau scientifique ou humain. Ce fut extrêmement enrichissant et émulant de faire parti de ce projet, et j'ai hâte d'être à Cargèse dans quelques temps pour clore de la plus belle des manières cette aventure.

Je remercie tous les membres permanents de l'équipe POems pour faire de cette équipe de recherche un endroit où il fait bon vivre et travailler, où le cloisonnement entre permanents et non-permanents est quasiment inexistant. Une telle ambiance est rare et précieuse dans le milieu de la recherche. J'ai apprécié les qualités humaines de chacun et j'étais content de retrouver chaque jour d'avantage des amis que des collègues. Plus généralement, je voudrais remercier toutes les personnes de l'UMA, notamment Corinne, notre secrétaire de choc, et nos deux informaticiens Christophe et Maurice, tous les trois toujours prompts à aider le thésard en perdition au milieu des formulaires administratifs ou des 0 et 1 récalcitrants.

J'ai une pensée très émue pour les doctorants et les post-doctorants avec qui j'ai vécu l'aventure de la

thèse. Je pense très fort aux trois autres membres des quatre fantastiques (le lecteur attentif aura deviné qui est le quatrième membre) : Camille, qui m'a soutenu à bout de bras et qui maintenant est en passe de devenir la star des maths appliquées aux US, Rémi la force tranquille et mon fidèle compagnon de voyage lorsque nous rentrions tard du labo, et Simon avec qui nous avons partagé nos doutes et de nombreuses bières. Je n'oublie évidemment pas Aliénor, notre chef (ne pas dire maman) à toutes et à tous, qui est partie beaucoup trop vite et qui m'a beaucoup manqué les deux dernières années et également Maxence, qui avait la belle double-casquette d'ami et de collaborateur. Merci aussi à Maryna et à Christian avec qui j'ai partagé le bureau que j'ai occupé pendant quatre ans, même s'ils ont complètement échoué à me faire apprendre l'allemand (mais j'espère les avoir fait progresser en français!). Je n'aurais pas pu rêver de meilleurs compagnons de bureau. Je remercie plus généralement tous les non-permanents que j'ai pu croiser au cours de ma thèse, et j'espère que la relève continuera à perpétuer l'esprit de camaraderie qui règne au laboratoire.

Enfin, je voudrais remercier tous mes proches, ma famille, mes amis, pour leur soutien indéfectible durant ces quatre ans. Vous êtes tous géniaux.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce manuscrit présente les différents travaux de recherche effectués durant ma thèse au sein de l'équipe de recherche POems¹ sous la direction de Sonia Fliss (ENSTA ParisTech) et Patrick Joly (Inria Saclay).

Contexte scientifique : les métamatériaux en électromagnétisme

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des problèmes de propagation d'ondes dans les *métamatériaux*. Un métamatériau est un matériau artificiel conçu pour avoir une ou des propriétés physiques qui ne se trouvent pas dans la nature [142]. Dans nos travaux, nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux métamatériaux en électromagnétisme, mais il existe des métamatériaux dans d'autres domaines comme l'acoustique (voir par exemple [109, 155]), l'élastodynamique (voir entre autres les travaux autour des métamatériaux dits mécaniques [89, 150, 151] ou en sismologie [45]).

En électromagnétisme, les métamatériaux sont des matériaux composites artificiels composés de structures microscopiques de taille très inférieure à une longueur d'onde de référence et qui dans cette thèse sont supposées être disposées de façon périodique (voir la figure 1). En choisissant de manière judicieuse les paramètres géométriques et physiques de ces structures, les ondes électromagnétiques les traversant ont un comportement macroscopique effectif inhabituel. La classe de métamatériaux qui va nous intéresser ici est celle des métamatériaux à indice négatif (parfois appelés métamatériaux doublement négatifs), c'est-à-dire ceux présentant à la fois une permittivité et une perméabilité négatives sur une bande de fréquences.

D'après [210], quatre publications ont fait naître le sujet des métamatériaux. Tout d'abord, Veselago [228], dès les années 60, a été le premier à explorer de manière théorique les propriétés des matériaux présentant à la fois une permittivité et une perméabilité négatives, même si personne ne savait comment construire de tels matériaux à l'époque. Ensuite, David Smith *et al.* [208] ont été les premiers à construire expérimentalement un milieu composite (structure de type *splits-rings*, voir la figure 1) présentant une permittivité et une perméabilité toutes les deux négatives sur une bande de fréquences (dans le domaine des micro-ondes). Par la suite Shelby, Smith et Schultz [206] ont présenté des données expérimentales d'une expérience de diffraction d'un matériau mettant en évidence un indice de réfraction négatif (toujours sur une bande de fréquences dans le domaine des micro-ondes). Enfin, Pendry [190] a été le premier à suggérer d'utiliser une couche de matériau à indice négatif pour créer une lentille qui s'affranchirait des limites de résolution des lentilles classiques.

Depuis ces premiers travaux, les métamatériaux sont un sujet de recherche extrêmement actif en raison de leurs nombreuses applications [78]. Sans les couvrir toutes, citons-en quelques unes.

- Comme nous l'avons déjà mentionné, les métamatériaux permettent de créer des *lentilles parfaites* (super-lens en anglais) qui sont capables de s'affranchir de la « limite de diffraction » des lentilles

¹POems (Propagation des Ondes : étude mathématique et simulations) est une Unité Mixte de Recherche CNRS – Inria – ENSTA ParisTech (UMR 7231).

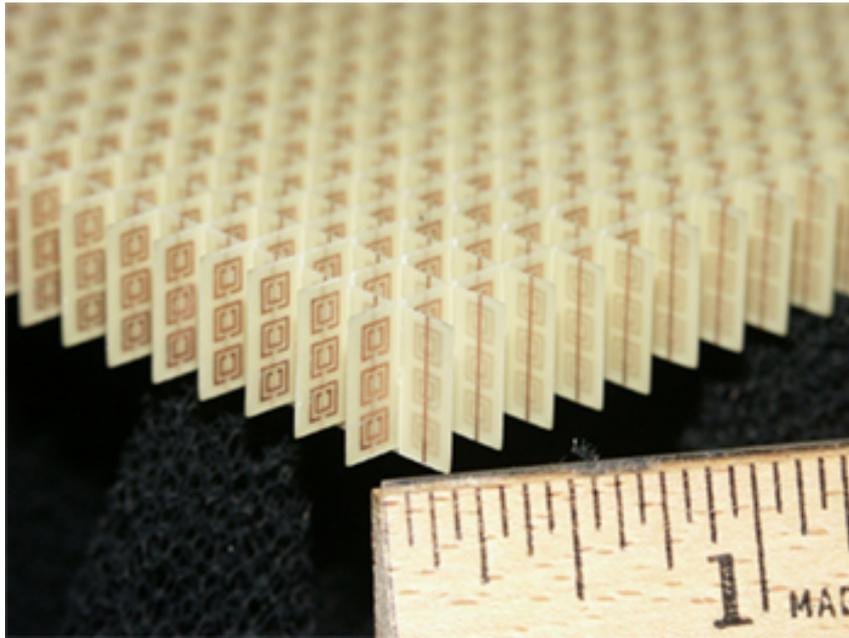


FIGURE 1 – Photo d'un métamatériau (crédit : NASA Glenn Research).

classiques [190]. Cette limite, présente dans les matériaux optiques classiques, implique que les petits détails de l'objet source qui sont inférieurs à la moitié de la longueur d'onde sont irrémédiablement perdus lors de la diffraction et n'apparaissent plus dans l'image de l'objet. La propriété clé nécessaire pour réaliser une lentille parfaite est la capacité à amplifier les ondes évanescentes, propriété possédée par certains métamatériaux. Depuis les années 2000, des lentilles parfaites ont été réalisées à la fois pour les micro-ondes et le domaine du visible [97, 149].

- Les métamatériaux peuvent être utilisés pour construire des matériaux absorbants pour les ondes électromagnétiques qui sont plus performantes que les matériaux classiques. Cela permet notamment d'améliorer les performances des photo-détecteurs [157] et des cellules photovoltaïques [230, 231]. La première démonstration des capacités absorbantes d'un tel métamatériau a été décrite dans [148] où un pic d'absorption de 88% pour une fréquence de 11,5 GHz a été détecté. De nombreux travaux ont alors étendus ces résultats (voir par exemple [10, 160]).
- Grâce aux métamatériaux, il est possible de miniaturiser les antennes radioélectriques tout en augmentant leur pouvoir rayonnant [246, 248]. Alors que les antennes classiques doivent être au moins aussi grandes que la moitié de la longueur d'onde considérée, les métamatériaux peuvent alors permettre de s'affranchir de cette limite. Récemment, des antennes composées de métamatériaux et étant capables de ré-émettre 95% du signal d'entrée ont été réalisées [14].
- Les métamatériaux peuvent aussi être utilisés pour réaliser des *capas d'invisibilité* (cloak en anglais), c'est-à-dire des dispositifs permettant de dévier les ondes électromagnétiques rendant alors les objets présents à l'intérieur du dispositif invisibles pour un observateur extérieur. Cette idée a été proposée de manière indépendante dans [153, 192] et la première réalisation pratique est faite dans [204] où un cylindre de cuivre est rendu invisible à la fréquence spécifique de 8,5 GHz grâce à des couches concentriques de métamatériaux. Depuis, de nombreux dispositifs ont été construits (voir par exemple [179] pour un exemple dans le domaine du visible), nous renvoyons à [59] pour plus de détails.

Contexte mathématique

L'émergence des métamatériaux, en tant que sujet de recherche actif, a provoqué une forte demande en simulations numériques de la propagation des ondes dans les métamatériaux. Le développement de tels outils de calcul numérique a alors soulevé de nombreuses questions mathématiques, aussi bien au niveau des méthodes numériques que des considérations plus théoriques. Notre but ici n'est pas d'être exhaustif sur l'ensemble de la littérature mathématique existant autour des métamatériaux, nous renvoyons notamment au panorama complet [154] pour plus de détails. Mentionnons tout de même deux thématiques importantes qui ne seront pas abordées dans cette thèse : la justification rigoureuse des phénomènes autour des capes d'invisibilité, citons notamment les travaux autour des *résonances localisées anormales* (anomalous localized resonances) [40, 136, 167, 177]) et ceux autour des *transformations optiques* [55, 238]).

Les problèmes qui nous ont intéressés sont les *problèmes de transmission avec des changements de signe*. En effet, d'une part la modélisation mathématique de la plupart des applications des métamatériaux nécessite de considérer des *problèmes de transmission* d'ondes électromagnétiques entre un domaine constitué de métamatériaux (qui modélise par exemple une lentille parfaite, une antenne, etc.) et l'extérieur (typiquement du vide ou de l'air). D'autre part, nous avons vu que les métamatériaux peuvent présenter des permittivités et des perméabilités négatives à certaines fréquences. En considérant donc une fréquence fixée telle que ce soit le cas (nous disons que nous sommes en *régime fréquentiel*, nous reviendrons plus loin sur ce point), la permittivité et la perméabilité vont présenter des *changements de signe* car elles sont négatives dans le métamatériau et positives à l'extérieur.

Ces changements de signe soulèvent alors un certain nombre de questions mathématiques nouvelles, notamment celle du caractère bien posé des problèmes ou celle de la régularité des solutions obtenues (si elles existent). En l'occurrence, il existe des situations où ces problèmes de transmission avec des changements de signe ne sont pas bien posés dans le cadre fonctionnel H^1 classique. Il existe déjà une littérature relativement abondante sur le sujet. Citons notamment les travaux pionniers de Costabel et Stephan [77] (utilisant des techniques d'intégrales de frontière) suivi par Ola [183]. Le laboratoire POems a également énormément contribué sur le sujet avec la série de publications de Bonnet-Ben Dhia *et al.* utilisant la méthode de la *T-coercivité* (voir [27, 29, 30, 31, 32, 33] ainsi que les thèses [49, 57, 249]). Enfin, mentionnons qu'il existe une méthode alternative appelée la *technique de réflexion* (reflecting technique) introduite par Nguyen [176, 178]. Nous renvoyons à [154] pour des références plus complètes.

Ainsi, de nouveaux outils (comme la T-coercivité) permettent de montrer que dans certaines situations, le problème est bien posé et que dans d'autres, il est nécessaire de changer de cadre mathématique (en présence de coins par exemple) ou même que le problème est irrémédiablement mal posé (tout cela est étudié plus en détails lors du chapitre 0). Alors que le problème de départ (c'est-à-dire lorsque le métamatériau est considéré dans toute sa complexité en tant que structure périodique) est bien posé, le problème où le métamatériau a été remplacé par un milieu effectif « plus simple » peut lui être mal posé. Ce changement de modèle a donc introduit des difficultés. C'est de ce constat qu'est parti cette thèse. Il est important d'avoir en tête que ces difficultés qui sont d'ordre mathématique ont des conséquences néfastes sur les méthodes numériques, donc d'un point de vue pratique. Par exemple, même si le problème est bien posé l'ordre de convergence des méthodes classiques n'est plus assuré. Nous ne développons pas plus cet aspect dans cette thèse et nous renvoyons à [28, 60, 98, 180, 185].

Projet ANR METAMATH

C'est sur la base de cette problématique que le projet METAMATH² de l'Agence Nationale pour la Recherche (ANR) a vu le jour. Créé et dirigé par Sonia Fliss, ce projet regroupe un certain nombre de partenaires : le laboratoire Jacques-Louis Lions de l'université Pierre et Marie Curie (Paris VI), l'Institut de Mathématiques (IMATH) de l'université de Toulon, l'équipe de recherche DEFI de l'Inria Saclay et enfin l'équipe de recherche POems.

²<http://uma.ensta-paristech.fr/conf/metamath>

Ce projet s'organise autour de sept tâches :

1. Analyse et approximation des modèles de transmission homogénéisés en régime fréquentiel établi ;
2. Analyse et approximation des modèles de transmission homogénéisés en régime temporel ;
3. Analyse asymptotique des équations de Maxwell harmoniques dans les cas critiques ;
4. Développement de modèles approchés pour des couches minces de métamatériau ;
5. Développement de méthodes d'homogénéisation numérique pour les équations de Maxwell harmoniques ;
6. Développement de méthodes numériques pour les équations de Maxwell harmoniques en milieu périodique ;
7. Développement de méthodes numériques pour les problèmes inverses en milieu périodique.

Cette thèse a été financée par ce projet et s'inscrit dans les tâches 2 et 3 ainsi que, dans une moindre mesure, dans la tâche 1.

Problématiques de cette thèse

Aussi bien du point de vue de la modélisation, de l'analyse mathématique ou des simulations numériques, les problèmes de propagation d'ondes peuvent se traiter de deux points de vue différents mais complémentaires. Le premier, le plus naturel, consiste à décrire la propagation au cours du temps, en spécifiant à chaque instant les caractéristiques physiques de l'onde (amplitude, vitesse, etc.). Nous obtenons ainsi des équations d'évolution qui font intervenir une variable temporelle (par exemple l'équation des ondes, les équations de Maxwell, etc.). Quand la source d'un problème en temps est harmonique (c'est-à-dire qu'elle oscille en temps à une fréquence ω), il est attendu que la solution devienne elle-même harmonique en temps long. Formellement, nous aboutissons à des équations indépendantes du temps où la fréquence ω apparaît comme un paramètre (par exemple l'équation de Helmholtz). C'est ce que nous appelons le régime harmonique (également appelé régime fréquentiel). La question est alors la suivante : la solution d'un problème en temps donné soumis à une excitation harmonique converge-t-elle vers une fonction harmonique en temps ? Cette interrogation constitue le *principe d'amplitude limite* [91].

Cette thèse s'intéresse à des problèmes de transmission, aussi bien en régime temporel qu'en régime harmonique. Comme nous l'avons déjà mentionné, les problèmes de transmission avec changements de signe (qui sont donc posés en régime harmonique) peuvent ne pas être bien posés ou leurs solutions peuvent présenter des pertes de régularité (par rapport à des problèmes de transmission sans changement de signe). Partant de cette constatation, nous proposons alors deux axes de recherche (correspondant aux tâches 2 et 3 du projet METAMATH).

Le premier consiste à comprendre les répercussions dans le régime temporel du caractère potentiellement mal posé des problèmes de transmission avec changements de signe (qui sont posés en régime harmonique). Quand le problème fréquentiel à une fréquence fixée est mal posé (ce qui peut être le cas pour les problèmes de transmission avec changements de signe ou dans un cas plus classique lorsque le problème admet des fréquences de résonance), le principe d'amplitude limite peut tomber en défaut et la solution du problème en régime temporel peut développer des instabilités, comme des croissances linéaires en temps (phénomène de *résonance*). Ce genre de phénomènes pour les métamatériaux ont été remarqués dans [108] et étudiés d'un point de vue mathématique dans la thèse [50] où un problème de transmission entre un demi-plan constitué de vide et un demi-plan constitué de métamatériau est considéré. Un de nos objectifs a été de confirmer les conclusions de la thèse [50] d'un point de vue numérique. Cela nécessite le développement et l'analyse de méthodes numériques spécifiques, comme des schémas numériques performants mais surtout, et c'est la question clé de cette partie de nos travaux, la construction de *couches absorbantes parfaitement adaptées* (perfectly matched layers, PMLs, en anglais) qui sont stables pour les métamatériaux (les PMLs sont une méthode visant à tronquer artificiellement un domaine de calcul infini [128]).

Le second consiste à revenir plus en détails sur la modélisation des métamatériaux à l'interface entre ceux-ci et le vide (ou un diélectrique quelconque comme l'air) en régime harmonique afin de proposer des modèles plus riches qui rendraient alors les problèmes de transmission avec changements de signe toujours bien posés. Pour établir des modèles de métamatériaux, puisqu'ils sont constitués de structures périodiques microscopiques, nous pouvons utiliser l'approche de l'homogénéisation [21]. Cette dernière vise à remplacer le milieu périodique de départ (pour lequel les simulations numériques sont très coûteuses) par un milieu homogène effectif « équivalent » dans le sens où ce milieu reflète les caractéristiques physiques du milieu périodique de départ. Cette approche est justifiée par une analyse asymptotique lorsque la taille de la période tend vers zéro. Si la théorie dite classique de l'homogénéisation (où les coefficients restent uniformément bornées lorsque la période diminue) ne donne pas lieu à des coefficients effectifs négatifs, l'homogénéisation à fort contraste (où les coefficients peuvent dégénérer lorsque la période diminue) quant à elle d'en obtenir et ainsi de justifier mathématiquement l'existence de permittivité et de perméabilité négatives pour les métamatériaux [38,39,41,145,146]. Cependant, même dans le cas classique, le processus d'homogénéisation décrit mal les phénomènes aux bords ou aux interfaces du milieu périodique (voir par exemple [2, 21, 107, 171]). Nous sommes donc revenus sur ce processus afin de proposer des modèles homogénéisés enrichis et plus précis à l'interface, en utilisant notamment la technique des développements asymptotiques raccordés [122]. Puisque cela n'avait jamais été fait pour des problèmes de transmission même pour l'homogénéisation classique (à l'exception de [47] venant d'être accepté lors de la rédaction de ce manuscrit), nous avons tout d'abord traité ce cas qui nécessite déjà un travail conséquent.

Contenu du manuscrit

Décrivons maintenant brièvement le contenu de ce manuscrit (chaque partie commence par un résumé plus complet).

Chapitre 0 Ce chapitre préliminaire est dans une très large mesure indépendant du reste du manuscrit. Dans celui-ci, nous revenons sur les problématiques liées aux problèmes de transmission avec changements de signe (tâche 1 du projet METAMATH). Notamment, nous précisons un certain nombre de résultats (caractère mal posé des problèmes, pertes de régularité des solutions, etc.) obtenus dans la littérature en développant des calculs analytiques (méthode modale basée sur des séparations de variables) dans des géométries simples (comme des disques, des boules, des guides d'ondes). Ce chapitre doit être vu comme une motivation pour le reste de nos travaux, puisqu'il pointe du doigt les lacunes des problèmes de transmission avec changements de signe.

Partie I Celle-ci décrit tous les résultats que nous avons obtenus concernant le régime temporel. Nous y présentons la modélisation des métamatériaux via la notion de *milieu dispersif* puis nous nous concentrons sur le modèle de Lorentz, notamment en proposant des schémas numériques robustes (dans le sens où leur stabilité ne dépend pas des paramètres physiques du milieu). Après avoir constaté que les PMLs classiques sont instables pour les métamatériaux à indice négatif, nous traitons la question de la stabilité des PMLs pour une large classe de milieux dispersifs, ce qui nous permet alors de proposer de nouvelles PMLs qui sont stables pour les métamatériaux à indice négatif, incluant le modèle de Lorentz. Enfin, nous utilisons les méthodes numériques que nous avons développées (schémas robustes et PMLs stables) pour illustrer la question de la validité du principe d'amplitude limite pour un problème de transmission entre le vide et un métamatériau et ainsi confirmer les résultats théoriques obtenus dans [50].

Partie II Dans celle-ci, nous revenons sur le processus d'homogénéisation décrit précédemment. La totalité de cette partie à l'exception du dernier chapitre se concentre sur l'homogénéisation classique des milieux périodiques, qui ne permet pas d'obtenir des coefficients effectifs négatifs mais qui soulève déjà la question la précision du modèle homogénéisé proche des interfaces. Nous rappelons dans un premier temps les grandes lignes de la théorie de l'homogénéisation. Ensuite, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés pour un problème de transmission entre un demi-plan homogène et un demi-plan périodique. Celle-ci nous permet alors d'obtenir des modèles approchés plus précis qui font intervenir des conditions de transmission d'ordre élevé à l'interface qui sont non standard (faisant

intervenir des opérateurs différentiels le long de l'interface). Nous effectuons notamment une analyse d'erreur qui confirme l'efficacité de notre méthode. Nous effectuons ensuite des expériences numériques illustrant et validant nos résultats, ce qui nécessite un certain nombre d'outils numériques spécifiques. Enfin, nous explorons formellement l'extension de nos résultats à l'homogénéisation à fort contraste (qui permet d'obtenir des coefficients effectifs négatifs). Nous montrons notamment que nos nouvelles conditions de transmission permettent de régler certains des problèmes vus au chapitre 0.

CHAPITRE

0

ÉTUDE DE PROBLÈMES DE TRANSMISSION AVEC CHANGEMENTS DE SIGNE VIA UNE APPROCHE MODALE

Sommaire

0.1	Introduction	2
0.2	Setting of the problem and objectives	3
0.3	The case where the negative material is a ball or a disk	5
0.3.1	Reduction to linear systems	5
0.3.2	Asymptotic analysis	6
0.3.3	Conclusion	8
0.3.4	Numerical validations	9
0.3.5	When the curvature degenerates	9
0.4	Some cases with flat interfaces	11
0.4.1	A case where the negative material is unbounded	12
0.4.2	A case where the negative material is bounded	15
0.5	Discussion and prospects	19
0.A	Appendix : justification of the radiation conditions for negative materials	20
0.B	Appendix : Bessel and Hankel functions	21
0.C	Appendix : the one-dimensional case	22
0.C.1	The case where the negative material is a half-line	23
0.C.2	The case where the negative material is a segment	23

Ce chapitre constitue une sorte de « mise en bouche » pour le reste de la thèse et est largement indépendant de la suite du manuscrit (ce qui justifie de lui avoir attribué le numéro 0). Comme expliqué dans l'introduction, considérer naïvement des permittivité et des perméabilité négatives peut conduire, lorsque nous considérons des problèmes de transmission avec changements de signe, à des problèmes mal posés (voir la bibliographie donnée plus bas dans l'introduction). Nous précisons un certain nombre de résultats (caractère mal posé des problèmes, perte de régularité des solutions, etc.) obtenus dans la littérature en développant des calculs analytiques (méthode modale reposant sur la séparation de variables) dans des géométries simples (comme des disques, des boules, des guides d'ondes). Ce chapitre doit être vu comme

une motivation pour le reste de nos travaux, puisqu'il pointe du doigt les difficultés rencontrées avec des problèmes de transmission avec changements de signe.

Ce chapitre va faire l'objet de la publication suivante, dont nous reprenons ici le texte intégral (en anglais) à l'exception de l'ajout de l'annexe 0.C :

[229] Valentin Vinoles. Regularity results for transmission problems with sign-changing coefficients: a modal approach. Submitted to IMA Journal of Applied Mathematics

0.1 Introduction

In recent decades, physicists and engineers have studied and developed metamaterials, *i.e.* artificial materials with unusual electromagnetic properties through periodic microscopic structures that resonate. In particular, some of them exhibit effective permittivity ε and/or permeability μ that are negative in certain ranges of frequencies (see [191,209], the mathematical justification of these effective behaviours is based on the so-called high contrast homogenization, see for instance [41,145]). Such media are subject of intense researches due to promising applications [78]: super-lens, cloaking, improved antenna, etc.

In this paper, we study scalar transmission problems in the frequency domain between a *positive material*, that is to say a medium with both positive ε and μ , and a *negative material*, with both negative ε and μ . Since the permittivity and permeability change sign through the interface between the two materials, we refer to these problems as (scalar) transmission problems with sign-changing coefficients.

From a mathematical point of view, they raise new and interesting questions that require specific tools. There is already a relatively abundant mathematical literature on these problems. We refer to the survey [154]. Without being exhaustive, let us mention first the pioneering work of [77] using boundary integral techniques, followed by [183]. There are also the works around the cloaking and the so-called “anomalous localized resonances” (*e.g.* [40,167]). Another important contribution is the series of papers by Bonnet-Ben Dhia *et al.* using the T-coercivity method (see for instance [29,31] and references therein). An alternative method is the reflecting technique introduced by [176,178]. Finally, some authors studied the links between these problems and some transmission problems in the time domain, based on the limiting amplitude principle [50,51,52,108].

It is nowadays well-known that well-posedness of transmission problems with sign-changing coefficients is related to the *contrasts*, defined as the ratios of the values of the coefficients on each side of the interface between the two materials. In order to ensure well-posedness in the classical H^1 framework, the contrast in the principal part of the operator (for scalar problems) must lie outside an interval called the critical interval that contains $\{-1\}$ (see *e.g.* [29]). If the interface is smooth, this interval reduces to $\{-1\}$.

The critical case of contrasts equal to -1 has not been much studied. As pointed out by [183] and [178], this case can lead to losses of regularity of the solutions in the sense that they are less regular than in the classical case (*i.e.* transmission problems between two positive materials). In this paper, we want to investigate more on these losses of regularity. We restrain ourselves to particular geometries for which one can use modal decomposition techniques based on the separation of variables [170]. While these methods are well-known and widely used, their application to transmission problems with sign-changing coefficients are not without interest: they manage to fully describe the well-posedness of our problems and the regularity of the solutions, and gives optimal results. Incidentally, as we will see, mention that they are well adapted to the description of the radiation conditions which can be tricky in negative materials [163,247].

This text is organized as follows. First, in Section 0.2 we settle the transmission problems with sign-changing coefficients we study. In Section 0.3, we explore the case where the negative material is a disk (in 2d) and a ball (in 3d). The analysis requires estimates for Bessel and Hankel functions that are not totally standard (proved in the Appendix and verified numerically). We also study what happens when the curvature tends to 0. That motivates the study of Section 0.4 in which we investigate some cases where the interface is flat. We conclude in Section 0.5 with some comments and perspectives.

0.2 Setting of the problem and objectives

Consider for the moment a generic non-empty simply connected open set Ω^i (not necessarily bounded) of \mathbb{R}^d where $d \geq 1$ is the dimension and define its exterior Ω^e by

$$\Omega^e := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^i}. \quad (0.1)$$

We assume that $\Omega^+ \neq \emptyset$ and that the interface Γ between Ω^e and Ω^i is smooth. We denote by \mathbf{n} the outward-pointing normal of $\partial\Omega^i$ (see Figure 1).

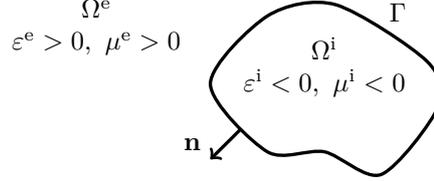


Figure 1 – Geometry of the problem (in the case Ω^i bounded).

The domain Ω^e (resp. Ω^i) represents the positive (resp. negative) material. More precisely, we consider two functions ε and μ , representing for instance the permittivity and the permeability, such that

$$\varepsilon(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varepsilon^e > 0 & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega^e, \\ \varepsilon^i < 0 & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega^i, \end{cases} \quad \text{and} \quad \mu(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mu^e > 0 & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega^e, \\ \mu^i < 0 & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega^i, \end{cases} \quad (0.2)$$

where ε^e and μ^e (resp. ε^i and μ^i) are positive (resp. negative) constants. We define $\omega > 0$ the frequency with the convention of the time dependence $e^{-i\omega t}$. Introduce k^e and k^i the wave numbers such that

$$k^e := \omega \sqrt{\varepsilon^e \mu^e} \quad \text{and} \quad k^i := \omega \sqrt{\varepsilon^i \mu^i}. \quad (0.3)$$

Notice that these quantities are positive.

Let us now introduce the couple (σ, ς) equal indifferently to (ε^{-1}, μ) or (μ^{-1}, ε) . We look for a solution u of the Helmholtz equation

$$\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + \omega^2 \varsigma(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (0.4)$$

that can be written as

$$\begin{cases} \Delta u + (k^\pm)^2 u = 0, & \text{in } \Omega^\pm, \\ [u]_\Gamma = 0, \quad [\sigma \partial_{\mathbf{n}} u]_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (0.5)$$

where $[\cdot]_\Gamma$ stands for the jump through Γ from Ω^e to Ω^i (here $\partial_{\mathbf{n}} u := \nabla u \cdot \mathbf{n}$). Notice that the change of sign in (0.5) only appears in the jump of the fluxes through Γ and not in equations in Ω^e and Ω^i .

Consider now an incident field u^{inc} that satisfies

$$\Delta u^{\text{inc}} + (k^e)^2 u^{\text{inc}} = 0, \quad \text{in } \Omega^e, \quad (0.6)$$

and split u as, on the one hand, the sum of the incident wave u^{inc} and a scattered one denoted by u^e in Ω^e and, on the other hand, as a transmitted wave denoted by u^i in Ω^i :

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) + u^e(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega^e, \\ u^i(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega^i. \end{cases} \quad (0.7)$$

Using (0.7), the transmission conditions of (0.5) write

$$u^i|_\Gamma - u^e|_\Gamma = f \quad \text{and} \quad \partial_{\mathbf{n}} u^i - \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^e = g, \quad (0.8)$$

where $f := u^{\text{inc}}|_{\Gamma}$, $g := \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^{\text{inc}}$ and where κ is the contrast defined by

$$\kappa := \frac{\sigma^e}{\sigma^i} < 0. \quad (0.9)$$

In order to close (0.5), one needs to add Radiation Conditions (RCs) when $|\mathbf{x}|$ tends to $+\infty$. There are two possible cases. When Ω^i is bounded, one must impose the RCs in the positive medium Ω^e only. In this case, one classically uses the Sommerfeld radiation condition [46, 72]:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\mathbf{x}|=R} \left| \frac{\partial}{\partial r} u - ik^e u \right|^2 dr = 0. \quad (0.10)$$

The other case where Ω^i is unbounded is less classical. This case is handled later on in Section 0.4.1.

At the end, we obtain the following transmission problem:

$$\begin{cases} \Delta u^{\pm} + (k^{\pm})^2 u^{\pm} = 0, & \text{in } \Omega^{\pm}, \\ u^i - u^e = f, & \text{on } \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} u^i - \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^e = g, & \text{on } \Gamma, \\ + \text{RCs}, & \text{when } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (0.11)$$

Let $(f, g) \in \mathbf{H}^s(\Gamma)$ be the given data of (0.11), where we define

$$\mathbf{H}^s(\Gamma) := H^s(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma), \quad s > 0, \quad (0.12)$$

Notice that this space is “natural” as the data come from the trace and the normal trace of the incident field u^{inc} on Γ .

When Ω^i is bounded and $\kappa \neq -1$, this is well-known that for all $(f, g) \in \mathbf{H}^s(\Gamma)$, $s > 0$, (0.11) admits a unique solution $(u^i|_{\Gamma}, u^e|_{\Gamma}) \in H^s(\Gamma)^2$ (see for instance [77]). In other words, there is no regularity loss. In dimension $d \geq 3$, when $\kappa = -1$ and Ω^i is bounded and strictly convex, [183] (and [178] later on in a more general setting) proved that for all $(f, g) \in \mathbf{H}^s(\Gamma)$, $s > 1$, (0.11) admits a unique solution $(u^i|_{\Gamma}, u^e|_{\Gamma}) \in H^{s-1}(\Gamma)^2$ (one order of regularity lost).

Studying (0.11) for general domains Ω^e and Ω^i appears to be difficult. In this paper, we shall use a more modest approach using modal decompositions, also called (generalized) Lorentz-Mie method in the physics/engineer communities. Recall (see [46, 72, 170, 214]) that it is based on the separation of variables that allows to reduce (0.11) to a countable family of linear systems. The solvability of (0.11) boils down to the solvability of all these systems and the regularity of the solutions is linked to the asymptotics of their modal coefficients. Let us also mention that the radiation conditions are easily handled by modal decompositions, one just needs to select the modes that satisfy such conditions. Finally, this method gives optimal results, in the sense that it gives the best regularity of the solution for a given regularity of the data.

In the next section (Section 0.3), we deal with cases where Ω^i is a disk (in 2d) and a ball (in 3d). For $d = 3$, we recover the results of [183] and [178] and gives new results for $d = 2$. In particular, this later case leads to larger losses of regularity. We also study what happens when the curvature tends to 0, that is to say when the radius tends to infinity. In Section 0.4, cases with unbounded Ω^i and flat interfaces are explored.

As we will see, three situations can be encountered:

- *the standard case* $\kappa \neq -1$ (corresponding to $\sigma^i/\sigma^e \neq -1$ and $\zeta^i/\zeta^e \neq -1$). Here, nothing unusual happens and we recover the standard result of no regularity loss;
- *the critical case* $\kappa = -1$ and $k^e \neq k^i$ (corresponding to $\sigma^i/\sigma^e = -1$ but $\zeta^i/\zeta^e \neq -1$). In this case, although (0.11) can be uniquely solved, we can have some regularity losses.
- *the super-critical case* $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$ (corresponding to $\sigma^i/\sigma^e = \zeta^i/\zeta^e = -1$) Here, the regularity losses are at least as important as the ones in the critical case. In some situations, (0.11) can even be ill-posed.

Remark 0.1. In the following we focus on the regularity of the traces $(u^i|_{\Gamma}, u^e|_{\Gamma})$. Indeed, since the change of sign of (0.11) only appears in the transmission conditions and not in the volume equations, one has the standard regularity result: for $(u^i|_{\Gamma}, u^e|_{\Gamma}) \in H^s(\Gamma)^2$, one gets $(u^i, u^e) \in H_{\text{loc}}^{s+1/2}(\Omega^i) \times H_{\text{loc}}^{s+1/2}(\Omega^e)$.

0.3 The case where the negative material is a ball or a disk

We consider now that Ω^i is a disk (in 2d) or a ball (in 3d) of radius $R > 0$ centred at the origin (see Figure 2). As mentioned before, since Ω^i is bounded, the radiation condition is simply the Sommerfeld radiation condition (0.10). Thus the transmission problem (0.11) rewrites

$$\begin{cases} \Delta u^\pm + (k^\pm)^2 u^\pm = 0, & \text{in } \Omega^\pm, \\ u^i - u^e = f, & \text{on } \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} u^i - \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^e = g, & \text{on } \Gamma, \\ u^e \text{ satisfies (0.10),} & \text{when } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (0.13)$$



Figure 2 – Geometry of the problem (0.13) for $d = 2$ (left) and $d = 3$ (right)

0.3.1 Reduction to linear systems

Here we deal with Helmholtz equations in geometries with radial symmetries. Using separation of variables (we denote (r, θ) the polar coordinates in 2d and (r, θ, ϕ) the spherical coordinates in 3d), it is well-known (see for instance [72, 170]) that solutions can be expressed as series.

- In Ω^i one has

$$\begin{aligned} u^i(r, \theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{u_n^i}{J_n(k^i R)} J_n(k^i r) \psi_n(\theta), & (d = 2), \\ u^i(r, \theta, \phi) &= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{u_{\ell, m}^i}{j_\ell(k^i R)} j_\ell(k^i r) \psi_{\ell, m}(\theta, \phi), & (d = 3), \end{aligned} \quad (0.14)$$

where J_n (resp. j_ℓ) is the Bessel function (resp. spherical Bessel function) of the first kind of order n (resp. order ℓ), ψ_n the standard Fourier basis ($\psi_0 = 1/\sqrt{2\pi}$ and $\psi_n = e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}$) and $\psi_{\ell, m}$ are the so-called spherical harmonics:

$$\psi_{\ell, m}(\theta, \phi) := \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad m \in \{-\ell, \dots, \ell\}, \quad (0.15)$$

where P_ℓ^m is the associated Legendre polynomial of order (ℓ, m) . Here, u_n^i and $u_{\ell, m}^i$ are the modal coefficients to determine (we have normalised by $J_n(k^i R)$ and $j_\ell(k^i R)$ to simplify the incoming computations).

- In Ω^e one has

$$\begin{aligned} u^e(r, \theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{u_n^e}{H_n(k^e R)} H_n(k^e r) \psi_n(\theta), & (d = 2), \\ u^e(r, \theta, \phi) &= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{u_{\ell, m}^e}{h_\ell(k^e R)} h_\ell(k^e r) \psi_{\ell, m}(\theta, \phi), & (d = 3), \end{aligned} \quad (0.16)$$

where H_n (resp. h_ℓ) is the Hankel function (resp. spherical Hankel function) of first kind of order n (resp. order ℓ). Here, u_n^e and $u_{\ell, m}^e$ are the modal coefficients to determine.

For more details about Bessel and Hankel functions, see Appendix 0.B (also [186, 232]).

Remark 0.2. Notice that the radiation condition of (0.13) is taken into account very simply thanks to the modal decomposition. Indeed, both H_n and h_ℓ verifies (0.10) but this is not the case for the Hankel functions and spherical Hankel functions of the second kind. That is why these do not appear in (0.16).

Since $(\psi_n)_n$ (resp. $(\psi_{\ell,m})_{\ell,m}$) is a Hilbert basis of $L^2(\mathbb{S}^1)$ (resp. $L^2(\mathbb{S}^2)$), plugging (0.14) and (0.16) in the transmission conditions of (0.13) leads to a countable family of 2×2 linear systems. For $d = 2$, we get, for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{A}_n \begin{bmatrix} u_n^i \\ u_n^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad \mathcal{A}_n := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{k^i J_n'(k^i R)}{J_n(k^i R)} & -\kappa \frac{k^e H_n'(k^e R)}{H_n(k^e R)} \end{bmatrix}. \quad (0.17)$$

For $d = 3$, we get for all $\ell \in \mathbb{N}$ and $m \in \{-\ell, \dots, \ell\}$

$$\mathcal{B}_\ell \begin{bmatrix} u_{\ell,m}^i \\ u_{\ell,m}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\ell,m} \\ g_{\ell,m} \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad \mathcal{B}_\ell := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{k^i j_\ell'(k^i R)}{j_\ell(k^i R)} & -\kappa \frac{k^e h_\ell'(k^e R)}{h_\ell(k^e R)} \end{bmatrix}. \quad (0.18)$$

The unique solvability of (0.17)–(0.18) is ensured if the determinants $\mathcal{D}_n^{(2)} := \det \mathcal{A}_n$ and $\mathcal{D}_\ell^{(3)} := \det \mathcal{B}_\ell$ given by

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n^{(2)} &= \frac{k^i J_n'(k^i R)}{J_n(k^i R)} - \kappa \frac{k^e H_n'(k^e R)}{H_n(k^e R)}, & n \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{D}_\ell^{(3)} &= \frac{k^i j_\ell'(k^i R)}{j_\ell(k^i R)} - \kappa \frac{k^e h_\ell'(k^e R)}{h_\ell(k^e R)}, & \ell \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (0.19)$$

never vanish.

Lemma 0.3. *For all $n \in \mathbb{Z}$ and for all $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_n^{(2)} \neq 0$ and $\mathcal{D}_\ell^{(3)} \neq 0$.*

Proof. See Appendix 0.B. □

Thus we can uniquely solve (0.17) and (0.18):

$$\begin{bmatrix} u_n^i \\ u_n^e \end{bmatrix} = (\mathcal{A}_n)^{-1} \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}_n^{(2)}} \begin{bmatrix} -\kappa k^e \frac{H_n'(k^e R)}{H_n(k^e R)} & 1 \\ -k^i \frac{J_n'(k^i R)}{J_n(k^i R)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix}, \quad (d = 2), \quad (0.20)$$

and

$$\begin{bmatrix} u_{\ell,m}^i \\ u_{\ell,m}^e \end{bmatrix} = (\mathcal{B}_\ell)^{-1} \begin{bmatrix} f_{\ell,m} \\ g_{\ell,m} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}_\ell^{(3)}} \begin{bmatrix} -\kappa k^e \frac{h_\ell'(k^e R)}{h_\ell(k^e R)} & 1 \\ -k^i \frac{j_\ell'(k^i R)}{j_\ell(k^i R)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\ell,m} \\ g_{\ell,m} \end{bmatrix}, \quad (d = 3). \quad (0.21)$$

0.3.2 Asymptotic analysis

The u_n^i and u_n^e (resp. the $u_{\ell,m}^i$ and $u_{\ell,m}^e$) are now uniquely determined. We want to know the regularity of the corresponding solutions u^i and u^e given by (0.14) and (0.16). This regularity is linked to the rate of decaying of u_n^e and u_n^i when $n \rightarrow \pm\infty$ (resp. of $u_{\ell,m}^e$ and $u_{\ell,m}^i$ when $\ell \rightarrow +\infty$). Indeed, one has the following characterization of Sobolev spaces for $s \geq 0$ (see e.g. [123]):

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{S}^1) &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{S}^1) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^s |u_n|^2 < +\infty \right\}, \\ H^s(\mathbb{S}^2) &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{S}^2) : \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (1 + \ell^2)^s |u_{\ell,m}|^2 < +\infty \right\}, \end{aligned} \quad (0.22)$$

where $u_n := \langle u, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)}$ and $u_{\ell,m} := \langle \psi, \psi_{\ell,m} \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)}$. These definitions can be extended by duality to negative exponents:

$$\begin{aligned} H^{-s}(\mathbb{S}^1) &= \left\{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)^* : \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^{-s} |\phi_n|^2 < +\infty \right\}, \\ H^{-s}(\mathbb{S}^2) &= \left\{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)^* : \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (1+\ell^2)^{-s} |\phi_{\ell,m}|^2 < +\infty \right\}, \end{aligned} \quad (0.23)$$

where $\phi_n := \phi(\overline{\psi_n}) = \phi(\psi_{-n})$ and $\phi_{\ell,m} := \phi(\overline{\psi_{\ell,m}})$.

In the classical case of a transmission between two positive materials, it is enough to perform an asymptotic at order 0 to be able to conclude. For our problem, it is necessary to go further because the first terms of the asymptotic may cancel. Before doing the asymptotic analysis, the first thing to notice is that, for the 2d case, $J_{-n}(\cdot) = (-1)^n J_n(\cdot)$ and $H_{-n}(\cdot) = (-1)^n H_n(\cdot)$ for all $n \in \mathbb{Z}$ thus one just need to treat the case $n \rightarrow +\infty$. Moreover, we need some asymptotics of Bessel and Hankel functions:

Proposition 0.4. *Let $r > 0$ and $N \in \mathbb{N}^*$. One has the asymptotics when $n \rightarrow +\infty$:*

$$\begin{aligned} J_n(r) &= \frac{r^n}{2^n n!} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k n!}{k!(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \right], \\ J'_n(r) &= \frac{r^{n-1}}{2^n (n-1)!} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (n+2k)(n-1)!}{k!(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \right], \\ H_n(r) &= \frac{-i}{\pi} \frac{2^n (n-1)!}{r^n} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(n-k-1)!}{k!(n-1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \right], \\ H'_n(r) &= \frac{i}{\pi} \frac{2^n n!}{r^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(n-2k)(n-k-1)!}{k!n!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \right], \end{aligned} \quad (0.24)$$

and when $\ell \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} j_\ell(r) &= \frac{r^\ell}{(2\ell+1)!!} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2\ell+1)!!}{k!(2\ell+2k+1)!!} \left(\frac{r^2}{2}\right)^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell^{N+1}}\right) \right], \\ j'_\ell(r) &= \frac{\ell r^{\ell-1}}{(2\ell+1)!!} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (\ell+2k)(2\ell+1)!!}{k!(2\ell+2k+1)!!\ell} \left(\frac{r^2}{2}\right)^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell^{N+1}}\right) \right], \\ h_\ell(r) &= -i \frac{(2\ell-1)!!}{r^{\ell+1}} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(2\ell-2k-1)!!}{k!(2\ell-1)!!} \left(\frac{r^2}{2}\right)^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell^{N+1}}\right) \right], \\ h'_\ell(r) &= i \frac{(\ell+1)(2\ell-1)!!}{r^{\ell+2}} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(\ell+1-2k)(2\ell-2k-1)!!}{k!(\ell+1)(2\ell-1)!!} \left(\frac{r^2}{2}\right)^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell^{N+1}}\right) \right], \end{aligned} \quad (0.25)$$

where $!!$ stands for the double factorial, defined by $0!! = 1$, $p!! = 2 \times 4 \times \dots \times p$ for $p \in \{2, 4, 6, \dots\}$ and $p!! = 1 \times 3 \times \dots \times p$ for $p \in \{1, 3, 5, \dots\}$.

Proof. See Appendix 0.B. □

We can now give the asymptotics of the determinants $\mathcal{D}_n^{(2)}$ and $\mathcal{D}_\ell^{(3)}$:

Proposition 0.5. *One has*

$$\mathcal{D}_n^{(2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1+\kappa}{R} n & \text{if } \kappa \neq -1, \\ R((k^e)^2 - (k^i)^2) n^{-1} & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e \neq k^i, \\ R(k^e)^2 n^{-2} & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e = k^i, \end{cases} \quad (0.26)$$

and

$$\mathcal{D}_\ell^{(3)} \underset{\ell \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1+\kappa}{R} \ell & \text{if } \kappa \neq -1, \\ \frac{-1}{R} & \text{if } \kappa = -1. \end{cases} \quad (0.27)$$

Proof. Plugging (0.24) and (0.25) in the definitions (0.19) of $\mathcal{D}_n^{(2)}$ and $\mathcal{D}_\ell^{(3)}$, one gets the results after tedious but straightforward calculations. \square

Thanks to (0.20) (resp. (0.21)), we can now deduce the asymptotics of u_n^i and u_n^e (resp. of $u_{\ell,m}^i$ and $u_{\ell,m}^e$):

Proposition 0.6. *For $d = 2$, one has*

$$\begin{bmatrix} u_n^i \\ u_n^e \end{bmatrix} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{\kappa+1} \mathcal{M}_{n,\kappa}(0) \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix} & \text{if } \kappa \neq -1, \\ \frac{2}{R[(k^e)^2 - (k^i)^2]} \mathcal{M}_{n,-1}(2) \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix} & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e \neq k^i, \\ \frac{1}{R^2(k^e)^2} \mathcal{M}_{n,-1}(3) \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix} & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e = k^i, \end{cases} \quad (0.28)$$

and for $d = 3$

$$\begin{bmatrix} u_{\ell,m}^i \\ u_{\ell,m}^e \end{bmatrix} \underset{\substack{\ell \rightarrow +\infty \\ -\ell \leq m \leq \ell}}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{\kappa+1} \mathcal{M}_{\ell,\kappa}(0) \begin{bmatrix} f_{\ell,m} \\ g_{\ell,m} \end{bmatrix} & \text{if } \kappa \neq -1, \\ -\mathcal{M}_{\ell,-1}(1) \begin{bmatrix} f_{\ell,m} \\ g_{\ell,m} \end{bmatrix} & \text{if } \kappa = -1, \end{cases} \quad (0.29)$$

where $\mathcal{M}_{m,\kappa}(p)$ is the matrix

$$\mathcal{M}_{m,\kappa}(p) := \begin{bmatrix} \kappa m^p & R m^{p-1} \\ -m^p & R m^{p-1} \end{bmatrix}. \quad (0.30)$$

0.3.3 Conclusion

Thanks to the introduction of the matrix $\mathcal{M}_{m,\kappa}(k)$, it is really easy to read the asymptotics of (u_n^i, u_n^e) and $(u_{\ell,m}^i, u_{\ell,m}^e)$ in term of the ones for (f_n, g_n) and $(f_{\ell,m}, g_{\ell,m})$. For instance, in dimension $d = 2$, both u_n^i and u_n^e are equivalent to $C_1 n^p f_n + C_2 n^{p-1} g_n$ where C_1 and C_2 are non-zero constants. Thus, using the characterisations of Sobolev spaces (0.22) and (0.23), we can give the final result of this section:

Théorème 0.1. *Let $s > 0$ be fixed. For $(f, g) \in \mathbf{H}^{s+p}(\Gamma)$, (0.13) has a unique solution $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma) \in H^s(\Gamma)^2$ where $p \in \mathbb{N}$ is called the order of regularity lost and is given by the Table 1.*

This result is optimal in the sense that if $(f, g) \in H^{s+p}(\Gamma)$ but not in $(f, g) \in H^{s+p+\varepsilon}$ for all $\varepsilon > 0$ then one cannot expect a better regularity than $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma) \in H^s(\Gamma)^2$. We recover the results of [183] and [178] for the dimension $d \geq 3$ when Ω^+ is strictly convex.

Remark 0.7. Actually one can do the same computations in any dimension $d \geq 3$ using generalised spherical harmonics (see [211]) and generalised spherical Bessel and Hankel functions $r^{1-d/2} J_{n+1-d/2}(r)$ and $r^{1-d/2} H_{n+1-d/2}(r)$. One can show that the conclusion of Theorem 0.1 for $d > 3$ are the same as the ones for $d = 3$ (the only particular case is $d = 2$).

One can reinterpret the conclusion of Theorem 0.1 in term of external source, that is to say the original Helmholtz equation (0.4) becomes $\nabla \cdot (\sigma \nabla u) + \omega^2 \zeta u = F$ where $F \in L^2(\Omega^e)$. By standard regularity results, u^{inc} (defined now as the solution of $\Delta u^{\text{inc}} + (k^e)^2 u^{\text{inc}} = F$) has a H^2 regularity, so $(f, g) \in \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)$. Using Theorem 0.1, u has the standard H^2 regularity (outside Γ) for the classical case but is less regular in the other cases. In dimension $d = 2$, u has only a L^2 regularity for the critical case and a H^{-1} regularity for the super-critical case. For $d \geq 3$, u has only a H^1 regularity for both the critical and the super-critical case.

	$d = 2$	$d \geq 3$
standard case $\kappa \neq -1$	$p = 0$	$p = 0$
critical case $\kappa = -1$ and $k^e \neq k^i$	$p = 2$	$p = 1$
super-critical case $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$	$p = 3$	$p = 1$

Table 1 – Values of p that appear in Theorem 0.1 (see Remark 0.7 for $d > 3$).

Remark 0.8. One could argue that these losses of regularity does not matter in practice, since (f, g) often belongs to $C^\infty(\Gamma)^2$ because, from (0.6), $u^{\text{inc}}|_\Gamma$ is smooth by standard regularity results (in the case of an external source $\Delta u^{\text{inc}} + (k^e)^2 u^{\text{inc}} = F$, this is true as soon as the support of F is compactly embedded in Ω^e). As a consequence, $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma)$ belongs to $C^\infty(\Gamma)^2$ too. However, the losses of regularity coming from the change of sign have an impact on numerical methods: the standard H^1 functional framework does not applies here when $\kappa = -1$ thus convergence of standard numerical method (for instance finite elements) are not ensured. We refer to [49] and references therein for more details on these issues. See also the end of Section 0.4.2.3 for a case where $(f, g) \in C^\infty(\Gamma)^2$ is not enough to ensure smoothness of $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma)$.

0.3.4 Numerical validations

In order to verify the asymptotics given in Proposition 0.6, we compute numerically the inverses of the matrices \mathcal{A}_n and \mathcal{B}_ℓ defined in (0.17) and (0.18) using the MATLAB software for $n = \ell = 1, \dots, 100$, $R = 1$. For the standard case, we use $\kappa = -3$ and $k^e = k^i = 2$; for the critical case, we use $\kappa = -1$, $k^e = 1$ and $k^i = 3$ and for the super-critical case, we use $\kappa = -1$ and $k^e = k^i = 2$.

The results are shown in Figure 3 in log-log scale. More precisely we plot (the logarithm of) the values of the entries of $(\mathcal{A}_n)^{-1}$ and $(\mathcal{B}_\ell)^{-1}$ as functions of (the logarithm of) n and ℓ respectively. We recover the claimed results of Proposition 0.6: the slopes of the curves are the same as the values of p in $\mathcal{M}_{n,\kappa}(p)$ and $\mathcal{M}_{\ell,\kappa}(p)$ in each different case.

0.3.5 When the curvature degenerates

One could ask what happens when the radius R tends to $+\infty$, namely when the curvature tends to 0, since it was pointed out in [183] and [178] that the strict convexity of Ω^+ plays a central role. We focus on what happens for the dimension $d = 2$, similar results holds for $d \geq 3$. If one takes directly the limit $R \rightarrow +\infty$ in (0.20) with fixed n , nothing interesting occurs. This is due to the fact that one needs to scale n according to R , otherwise the limit problem could be seen as a zero-frequency problem. More precisely we must impose that the ratio between n and R remains constant. Doing so, one gets the following result:

Proposition 0.9. *Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $R > 0$ be such that the ratio $\xi := n/R$ is fixed and verifies $\xi > \max(k^i, k^e)$. Then one has*

$$\mathcal{D}_n^{(2)}(R) \xrightarrow[n=R\xi]{R \rightarrow +\infty} \sqrt{\xi^2 - (k^i)^2} + \kappa \sqrt{\xi^2 - (k^e)^2}. \quad (0.31)$$

In particular, the limit value in (0.31) is not zero for the standard case $\kappa \neq -1$ and the critical case ($\kappa = -1$ and $k^i \neq k^e$), except maybe for one value of ξ , and vanishes for all $\xi > \max(k^i, k^e)$ in the super-critical case ($\kappa = -1$ and $k^i = k^e$). In this last case, at the limit $R \rightarrow +\infty$, the systems (0.20) become non-invertible.

Proof. Since $\xi > \max(k^i, k^e)$, one could define $\alpha := \text{sech}^{-1}(k^i/\xi)$ and $\beta := \text{sech}^{-1}(k^e/\xi)$. Thus one has

$$\mathcal{D}_n^{(2)}\left(\frac{n}{\xi}\right) = k^i \frac{J'_n(n \text{sech } \alpha)}{J_n(n \text{sech } \alpha)} + \kappa k^e \frac{H'_n(n \text{sech } \beta)}{H_n(n \text{sech } \beta)}. \quad (0.32)$$

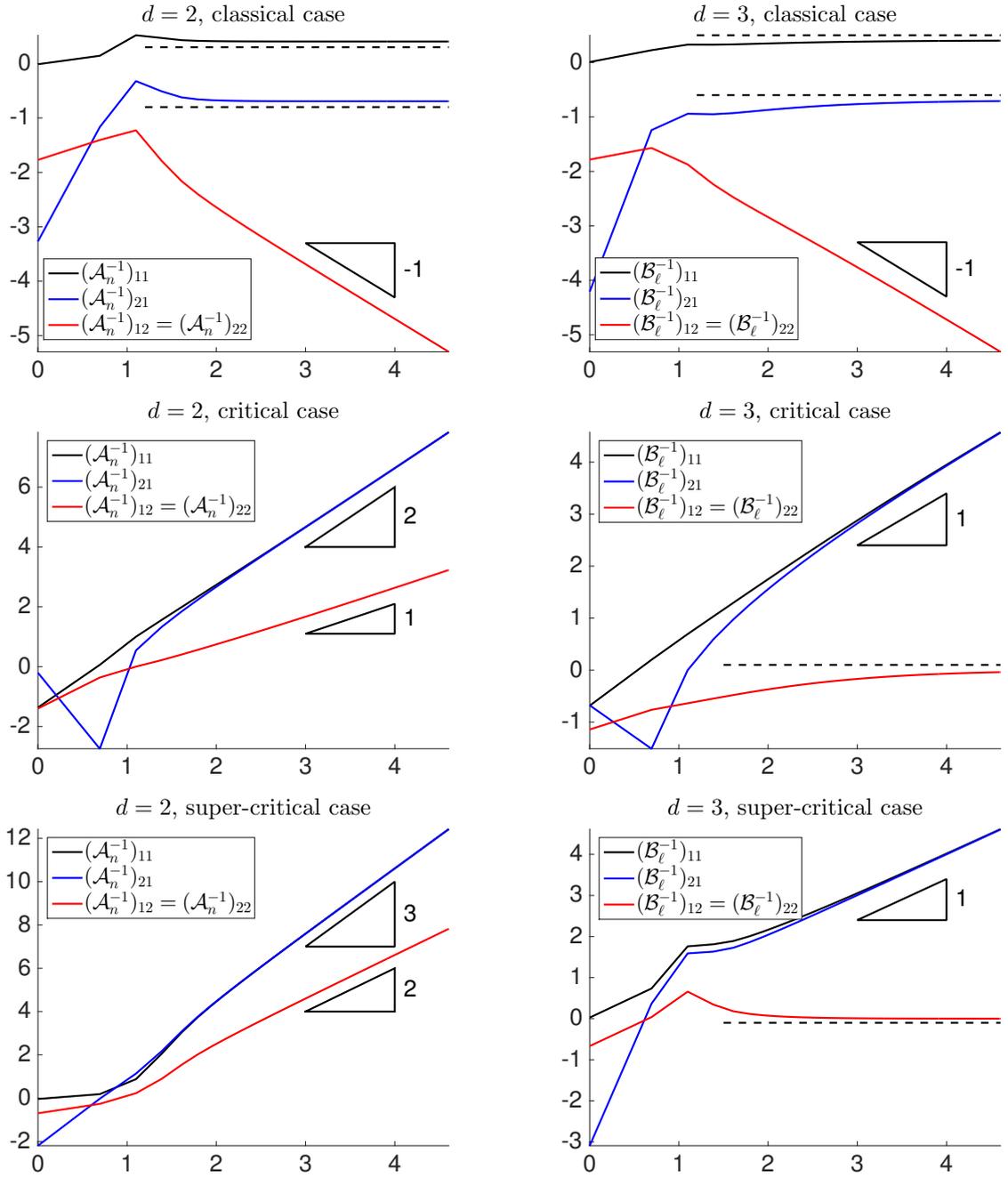


Figure 3 – Plot of the entries of $(\mathcal{A}_n)^{-1}$ and $(\mathcal{B}_\ell)^{-1}$ as functions of n and ℓ respectively, in log-log scale (notice that $(\mathcal{A}_n^{-1})_{12} = (\mathcal{A}_n^{-1})_{22}$ and $(\mathcal{B}_\ell^{-1})_{12} = (\mathcal{B}_\ell^{-1})_{22}$).

Using Debye's expansions (see [186, 232]), one has

$$\begin{aligned} J_n(n \operatorname{sech} \alpha) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n(\tanh \alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi n \tanh \alpha}}, & J'_n(n \operatorname{sech} \alpha) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n(\tanh \alpha - \alpha)} \sqrt{\frac{\sinh 2\alpha}{4\pi n}}, \\ H_n(n \operatorname{sech} \beta) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-ie^{n(\beta - \tanh \beta)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} n \tanh \beta}} & \text{and } H'_n(n \operatorname{sech} \beta) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{in(\beta - \tanh \beta)} \sqrt{\frac{\sinh 2\beta}{\pi n}}. \end{aligned} \quad (0.33)$$

By standard hyperbolic trigonometric identities, one gets

$$\mathcal{D}_n^{(2)}\left(\frac{n}{\xi}\right) = \frac{k^i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sinh 2\alpha \tanh \alpha} + \kappa \frac{k^e}{\sqrt{2}} \sqrt{\sinh 2\beta \tanh \beta} = k^i \sinh \alpha - \kappa k^e \sinh \beta. \quad (0.34)$$

Now, using $\sinh \operatorname{sech}^{-1} z = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$, $z \in (0, 1)$, gives us

$$\sinh \alpha = \sinh \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{k^i}{\xi}\right) = \frac{\sqrt{\xi^2 - (k^i)^2}}{k^i} \quad \text{and} \quad \sinh \beta = \frac{\sqrt{\xi^2 - (k^e)^2}}{k^e}. \quad (0.35)$$

Plugging this in (0.34) gives (0.31). □

Remark 0.10. The variable ξ in Proposition 0.9 plays the role of the Fourier variable of a limit problem that is a transmission problem between two half-planes. The conditions $\xi > \max(k^i, k^e)$ means that we deal with evanescent waves. These facts must be linked to some results of Section 0.4 (see Remark 0.14).

0.4 Some cases with flat interfaces

Proposition 0.9 shows additional difficulties may appear when the curvature of the interface Γ tends to 0, *i.e.* when Γ becomes flat. We shall now investigate more on this case. In order to stay in the pleasant framework of modal decomposition, we deal with waveguides. More precisely, now the dimension is $d \geq 2$ (d can be greater than 3). We define a waveguide $\mathcal{B} := \mathbb{R} \times \Gamma$ where Γ is a non-empty bounded connected open set of \mathbb{R}^{d-1} with Lipschitz boundary.

In the following, $x \in \mathbb{R}$ denotes the variable in the longitudinal direction and $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ the variables in the transverse section.

Remark 0.11. Here we chose not to consider the case where Ω^e and Ω^i are half-spaces in order to avoid technical difficulties (that appear even without changes of sign): the standard technique would be to perform a Fourier transform with respect to \mathbf{y} . But since we are dealing with unbounded domains, solutions are not in L^2 and the radiation conditions to impose are not straightforward any more. It would require to use involved tools like generalised Fourier transforms (beyond the scope of this paper, see for instance [236] that deals with perturbed stratified media or [34] for perturbed open waveguides).

Using separation of variables, one can show that a solution u of the Helmholtz equation $\Delta u + k^2 u = 0$ on \mathcal{B} with some Boundary Conditions (BCs) on $\partial \mathcal{B}$ that does not depend on x (thus it is sufficient to impose them on $\partial \Gamma$) can be expressed as

$$u(x, \mathbf{y}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n e^{u\beta_n^+ x} \psi_n(\mathbf{y}), \quad x \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (0.36)$$

Here, the $(\psi_n)_n$ are the eigenfunctions of the standard eigenvalue problem:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} \psi = \lambda \psi, & \text{in } \Gamma, \\ + \text{ BCs} & \text{on } \partial \Gamma. \end{cases} \quad (0.37)$$

We shall stay rather vague about the boundary conditions, but in order to perform a modal analysis, we have to suppose that they are chosen such that the operator $\Delta_{\mathbf{y}}$ is self-adjoint with compact resolvent [83]. For instance, this is the case for homogeneous Dirichlet or Neumann conditions. We assume that it is the case in the following. Then, the problem (0.37) admits a countable number of non-trivial solutions

(λ_n, ψ_n) where the λ_n are the positive eigenvalues of finite multiplicity tending to $+\infty$ and the associated eigenfunctions $(\psi_n)_n$ form a Hilbert basis of $L^2(\Gamma)$.

The β_n^\pm in (0.36) are solution of $(\beta_n)^2 = k^2 - \lambda_n$. We make the following choices for the square roots: we set, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \beta_n^e &:= \begin{cases} \sqrt{(k^e)^2 - \lambda_n} & \text{if } \lambda_n < (k^e)^2 \\ i\sqrt{\lambda_n - (k^e)^2} & \text{if } \lambda_n > (k^e)^2 \end{cases} \\ \beta_n^i &:= \begin{cases} \sqrt{(k^i)^2 - \lambda_n} & \text{if } \lambda_n < (k^i)^2 \\ -i\sqrt{\lambda_n - (k^i)^2} & \text{if } \lambda_n > (k^i)^2. \end{cases} \end{aligned} \quad (0.38)$$

Remark 0.12. In order to avoid some technical issues that are intrinsic to waveguides but have nothing to do with the changes of sign, we suppose that k^e and k^i are not cut-off wave numbers, that is to say $\beta_n^e \neq 0$ et $\beta_n^i \neq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, or equivalently $(k^i)^2 \neq \lambda_n$ and $(k^e)^2 \neq \lambda_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. This could happen only for a finite numbers of β_n^e and β_n^i and does not change the conclusion of Theorems 0.2 and 0.3 (see also Remark 0.17).

0.4.1 A case where the negative material is unbounded

We first consider the case $\Omega^i = (0, +\infty) \times \Gamma$. Its exterior is then $\Omega^e = (-\infty, 0) \times \Gamma$ (see Figure 4).

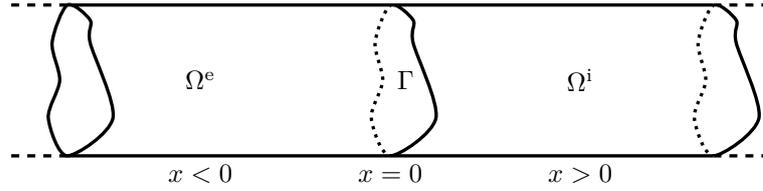


Figure 4 – Geometry of the problem (0.40).

Since Ω^i is not bounded, one need to impose a radiation condition when x tends to $+\infty$ but since Ω^i is a negative material, the “correct” (*i.e.* physically relevant) radiation condition is not the usual one. One can show that, due to the presence of negative coefficients, the radiation condition (0.10) is now (notice the change of sign)

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\mathbf{x}|=R} \left| \frac{\partial}{\partial r} u + ik^i u \right|^2 dr = 0. \quad (0.39)$$

For a justification of this, see the Appendix 0.A (see also [163, 247] for more details).

We look for the following transmission problem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^e + (k^e)^2 u^e = 0, & \text{in } (-\infty, 0) \times \Gamma, \\ \Delta u^i + (k^i)^2 u^i = 0, & \text{in } (0, +\infty) \times \Gamma, \\ u^i - u^e = f, & \text{on } \{0\} \times \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} u^i - \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^e = g, & \text{on } \{0\} \times \Gamma, \\ u^e \text{ verifies (0.10),} & \text{when } x \rightarrow -\infty, \\ u^i \text{ verifies (0.39),} & \text{when } x \rightarrow +\infty, \\ + \text{ BCs} & \text{on } \mathbb{R} \times \partial\Gamma. \end{array} \right. \quad (0.40)$$

0.4.1.1 Reduction to linear systems

We now use the separation of variable (0.36). Taking into account the radiation conditions and the fact that we discard exponentially growing solutions, the solutions of (0.40) are given by

$$\begin{aligned} u^e(x, \mathbf{y}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^e e^{-i\beta_n^e x} \psi_n(\mathbf{y}), & x < 0, \mathbf{y} \in \Gamma, \\ u^i(x, \mathbf{y}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^i e^{-i\beta_n^i x} \psi_n(\mathbf{y}), & x > 0, \mathbf{y} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (0.41)$$

where u_n^e and u_n^i are modal coefficients to determine. The transmission conditions of (0.40) write, using (0.41), as a countable family of 2×2 linear systems:

$$\mathcal{A}_n \begin{bmatrix} u_n^e \\ u_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ -ig_n \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad \mathcal{A}_n := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \kappa\beta_n^e & -\beta_n^i \end{bmatrix}, \quad (0.42)$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Denote $\mathcal{D}_n := \beta_n^i - \kappa\beta_n^e$ the determinants associated to (0.42). Contrary to Section 0.3, these can actually vanish.

Proposition 0.13. *For $\kappa \neq -1$ (standard case) or for $\kappa = -1$ and $k^e \neq k^i$ (critical case), the determinants \mathcal{D}_n do not vanish except perhaps for a finite number of n . But for $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$ (super-critical case), \mathcal{D}_n vanishes for sufficiently large n .*

Proof. Let be $n \in \mathbb{N}$. Recall that we have excluded the cut-off wave numbers, $\beta_n^i \neq 0$ and $\beta_n^e \neq 0$ (or equivalently $\lambda_n \neq (k^i)^2$ and $\lambda_n \neq (k^e)^2$). We distinguish three cases:

1. $\lambda_n < \min((k^i)^2, (k^e)^2)$. Both β_n^i and β_n^e are positive numbers according to (0.38). Thus $\mathcal{D}_n = \beta_n^i - \kappa\beta_n^e \neq 0$ since $\kappa < 0$.
2. $\min((k^i)^2, (k^e)^2) < \lambda_n < \max((k^i)^2, (k^e)^2)$ (can only happens if $k^i \neq k^e$). Among β_n^i and β_n^e there are one non-zero real number and one non-zero imaginary number, so $\mathcal{D}_n \neq 0$.
3. $\lambda_n > \max((k^i)^2, (k^e)^2)$. Using (0.38), one has

$$\mathcal{D}_n = 0 \iff \sqrt{\lambda_n - (k^i)^2} + \kappa\sqrt{\lambda_n - (k^e)^2} = 0. \quad (0.43)$$

If $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$, (0.43) holds. If $\kappa = -1$ and $k^e \neq k^i$, (0.43) does not hold. For the case $\kappa \neq -1$, (0.43) holds if and only if

$$\lambda_n = \frac{\kappa^2(k^e)^2 - (k^i)^2}{\kappa^2 - 1}. \quad (0.44)$$

That means that if such a λ_n exists, it is unique, so there could be only a finite number of n such that $\mathcal{D}_n = 0$ (the multiplicity of λ_n).

This ends the proof. □

When \mathcal{D}_n vanishes, the corresponding system (0.42) has a non-empty kernel of dimension 1 spanned by $(1, 1)^T$. Consequently, the transmission problem (0.40) has a non-empty kernel (in the sense that there are non-trivial solutions of (0.40) for $(f, g) = (0, 0)$). In the standard case, if it is non-empty, that is to say if (0.44) holds, its dimension is finite equal to the multiplicity of the corresponding λ_n . For the super-critical case, the kernel is always of infinite dimension because (0.43) holds as soon as $\lambda_n > \max((k^i)^2, (k^e)^2)$. In both cases, the kernel is spanned by the functions

$$G_n(x, \mathbf{y}) := \psi_n(\mathbf{y}) e^{-i\beta_n^i |x|} = \psi_n(\mathbf{y}) e^{-i\kappa\beta_n^e |x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (0.45)$$

These functions are symmetric with respect to $x = 0$ and evanescent on each side on the interface, *i.e.* they are localised near the interface Γ . Such solutions are called surface plasmons [162].

Remark 0.14. Equation (0.43) is similar to the limit value of (0.31), where λ_n plays the role of ξ^2 . Furthermore, $\lambda_n > \max((k^i)^2, (k^e)^2)$ means that we are dealing with evanescent waves on both side of the interface, as mentioned in Remark 0.10.

0.4.1.2 Asymptotic analysis

Now we investigate the case where the determinant \mathcal{D}_n does not vanish, (*i.e.* not the super-critical case $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$). As done in Section 0.3.2, we link the regularity of the solution (u^e, u^i) to the decay of the modal coefficients (u_n^e, u_n^i) by introducing the space $\mathfrak{H}^s(\Gamma)$, $s \geq 0$, defined as

$$\mathfrak{H}^s(\Gamma) := \left\{ u \in L^2(\Gamma) : \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_n)^s |u_n|^2 < +\infty \right\}, \quad (0.46)$$

where $u_n := \langle u, \psi_n \rangle_{L^2(\Gamma)}$. This definition can be extended by duality to negative exponents:

$$\mathfrak{H}^{-s}(\Gamma) := \left\{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)^* : \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_n)^{-s} |\phi_n|^2 < +\infty \right\}, \quad (0.47)$$

where $\phi_n := \phi(\overline{\psi_n})$. One can characterise these spaces using the interpolation theory between Hilbert spaces (see [121, 159]). This characterisation crucially depends on the dimension but also on the boundary conditions imposed on $\partial\Gamma$. For instance (see [115]), if $\Gamma = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ with homogeneous Neumann conditions $u'(0) = u'(1) = 0$, then

$$\mathfrak{H}^s(\Gamma) = \begin{cases} H^s(\Gamma) & \text{if } 0 \leq s < 3/2, \\ \{u \in H^s(\Gamma) : u'(0) = u'(1) = 0\} & \text{if } 3/2 \leq s < 7/2, \\ \{u \in H^s(\Gamma) : u'(0) = u'(1) = u'''(0) = u'''(1) = 0\} & \text{if } 7/2 \leq s < 11/2, \end{cases} \quad (0.48)$$

and so on: the boundary condition $u^{2n-1}(0) = u^{2n-1}(1) = 0$ appears as soon as it makes sense, *i.e.* as soon as $s \geq (4n - 1)/2$. In other words, the convergence of the series in (0.46) depends not only on the Sobolev regularity of u but also on its behaviour on $\partial\Gamma$. In the following, we will not try to characterise $\mathfrak{H}^s(\Gamma)$ since all the analysis remains the same for all dimension $d \geq 2$ and for any boundary conditions that makes $\Delta_{\mathbf{y}}$ self-adjoint with compact resolvent. Instead we stick with the spaces $\mathfrak{H}^s(\Gamma)$ and just focus on the Sobolev regularity through the asymptotic behaviour of u_n .

We now follow the steps of Section 0.3.2. Solving (0.42) leads to

$$\mathcal{A}_n \begin{bmatrix} u_n^e \\ u_n^i \end{bmatrix} = (\mathcal{A}_n)^{-1} \begin{bmatrix} f_n \\ -ig_n \end{bmatrix} = \frac{-1}{\mathcal{D}_n} \begin{bmatrix} \beta_n^i & 1 \\ \kappa\beta_n^e & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ -ig_n \end{bmatrix}. \quad (0.49)$$

Proposition 0.15. *One has*

$$\mathcal{D}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} i\sqrt{\lambda_n}(1 + \kappa) & \text{if } \kappa \neq -1 \text{ (standard case)} \\ i\frac{(k^e)^2 - (k^i)^2}{2\sqrt{\lambda_n}} & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e \neq k^i \text{ (critical case)}. \end{cases} \quad (0.50)$$

Proof. We can suppose that the λ_n are large enough such that (see (0.38))

$$\begin{aligned} \beta_n^i &= -i\sqrt{\lambda_n - (k^i)^2} = -i\sqrt{\lambda_n} \left[\sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{1/2}{j} \left(\frac{(k^i)^2}{\lambda_n} \right)^j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\lambda_n)^{N+1}}\right) \right], \\ \beta_n^e &= i\sqrt{\lambda_n - (k^e)^2} = i\sqrt{\lambda_n} \left[\sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{1/2}{j} \left(\frac{(k^e)^2}{\lambda_n} \right)^j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\lambda_n)^{N+1}}\right) \right], \end{aligned} \quad (0.51)$$

Then we get

$$\mathcal{D}_n = \kappa\beta_n^e - \beta_n^i = i\sqrt{\lambda_n} \left[(1 + \kappa) - \frac{(k^i)^2 + \kappa(k^e)^2}{2\lambda_n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) \right]. \quad (0.52)$$

It is now easy to conclude: if $\kappa \neq -1$, the first term in the asymptotic does not vanish and we get the desired result. Now if $\kappa = -1$ and $k^i \neq k^e$, this first term vanishes but the not the second one, and the result follows. \square

	$\kappa \neq -1$	$\kappa = -1$
$k^e \neq k^i$	0	2
$k^e = k^i$	0	kernel of infinite dimension

Table 2 – orders of regularity lost solving (0.40).

We can now give the asymptotics of u_n^i and u_n^e :

Proposition 0.16. *One has*

$$\begin{bmatrix} u_n^i \\ u_n^e \end{bmatrix} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{1+\kappa} \mathcal{M}_{n,\kappa}(0) \begin{bmatrix} f_n \\ -ig_n \end{bmatrix} & \text{if } \kappa \neq -1 \\ \frac{2}{(k^e)^2 - (k^i)^2} \mathcal{M}_{n,-1}(2) \begin{bmatrix} f_n \\ -ig_n \end{bmatrix} & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e \neq k^i \end{cases} \quad (0.53)$$

where $\mathcal{M}_{n,\kappa}(p)$ is the matrix

$$\mathcal{M}_{n,\kappa}(p) := \begin{bmatrix} \kappa(\lambda_n)^{p/2} & (\lambda_n)^{(p-1)/2} \\ -(\lambda_n)^{p/2} & (\lambda_n)^{(p-1)/2} \end{bmatrix}. \quad (0.54)$$

Proof. Combine (0.49), (0.50) and (0.51). □

0.4.1.3 Conclusion

As we did in Section 0.3, by gathering the results and using the characterisations (0.46) and (0.47), we can conclude:

Théorème 0.2. *Let $s > 0$ and consider the transmission problem (0.40). Then*

- if $\kappa \neq -1$ (standard case), for $(f, g) \in \mathfrak{H}^s(\Gamma) \times \mathfrak{H}^{s-1}(\Gamma)$, (0.40) has a unique solution $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma) \in \mathfrak{H}^s(\Gamma)^2$ (no order of regularity lost), except in the exceptional situation where (0.43) holds; it has a kernel of finite dimension equal to the multiplicity of the corresponding λ_n spanned by the evanescent functions (0.45);
- if $\kappa = -1$ and $k^e \neq k^i$ (critical case), for $(f, g) \in \mathfrak{H}^{s+2}(\Gamma) \times \mathfrak{H}^{s+1}(\Gamma)$, (0.40) has a unique solution $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma) \in \mathfrak{H}^s(\Gamma)^2$ (2 orders of regularity lost);
- if $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$ (super-critical case), (0.40) has a kernel of infinite dimension spanned by the evanescent functions (0.45) for all n such that $\lambda_n > \max((k^i)^2, (k^e)^2)$.

These results are summarised in Table 2. We have a strongly ill-posed problem for the super-critical case $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$ (for instance it escapes the Fredholm framework). We can also reinterpret the results in terms of volume source as we done at the end of Section 0.3.3 for the standard and the critical cases.

Remark 0.17. As claimed before, excluding cut-off wave numbers does not change the conclusion of the Theorem 0.2. Indeed, it would eventually just add a finite numbers of elements to the kernel.

0.4.2 A case where the negative material is bounded

The previous situation is in some sense the “worst” we can encounter. Let us take a look to a case where Ω^i is bounded. For instance, consider $\Omega^i = (0, 2L)$, with $L > 0$, so that $\Omega^e = (-\infty, -0) \cup (2L, +\infty)$. For this problem, it is more convenient to decompose the solution as the sum of two functions that are respectively symmetric and skew-symmetric (with respect to $x = L$). Doing so, our problem boils down to the study of two problems with $\Omega^i = (0, L)$ and $\Omega^e = (-\infty, 0)$ (see Figure 5), with the addition of an homogeneous Dirichlet condition (resp. homogeneous Neumann condition) at $x = L$ corresponding to the skew-symmetric part (resp. symmetric part). In the following, we focus on the Dirichlet case, however all the conclusions still hold for the Neumann case, thus for the original problem $\Omega^i = (0, 2L)$.

The transmission problem we look for is (see Figure 5)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^e + (k^e)^2 u^e = 0, & \text{in } (-\infty, 0) \times \Gamma, \\ \Delta u^i + (k^i)^2 u^i = 0, & \text{in } (0, L) \times \Gamma, \\ u^i - u^e = f, & \text{on } \{0\} \times \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} u^i - \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^e = g, & \text{on } \{0\} \times \Gamma, \\ u^i = 0, & \text{on } \{L\} \times \Gamma, \\ u^e \text{ verifies (0.10),} & \text{when } |\mathbf{x}| \rightarrow -\infty, \\ + \text{BCs} & \text{on } \mathbb{R} \times \Gamma. \end{array} \right. \quad (0.55)$$

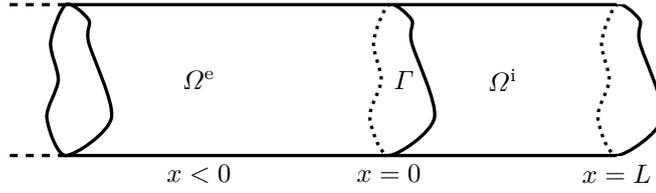


Figure 5 – Geometry of the problem (0.55).

0.4.2.1 Reduction to linear systems

Following the same steps as before, we look for solutions under the form

$$\begin{aligned} u^e(x, \mathbf{y}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^e e^{-i\beta_n^e x} \psi_n(\mathbf{y}), & x < 0, \mathbf{y} \in \Gamma, \\ u^i(x, \mathbf{y}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(u_{n,+}^i e^{i\beta_n^i x} + u_{n,-}^i e^{-i\beta_n^i x} \right) \psi_n(\mathbf{y}), & x \in (0, L), \mathbf{y} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (0.56)$$

where β_n^i et β_n^e are defined by (0.38). The transmissions conditions of (0.55) and the Dirichlet boundary condition at $x = L$ leads to a countable family of 3×3 linear systems:

$$\mathcal{A}_n \begin{bmatrix} u_n^e \\ u_{n,+}^i \\ u_{n,-}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{where } \mathcal{A}_n := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \kappa \beta_n^e & \beta_n^i & -\beta_n^i \\ 0 & e^{i\beta_n^i L} & e^{-i\beta_n^i L} \end{bmatrix}. \quad (0.57)$$

The determinants \mathcal{D}_n associated to (0.57) are

$$\mathcal{D}_n := -2\beta_n^i \cos(\beta_n^i L) + 2i\kappa\beta_n^e \sin(\beta_n^i L). \quad (0.58)$$

Proposition 0.18. *For all $n \in \mathbb{N}$, one has $\mathcal{D}_n \neq 0$ except perhaps for a finite number of n .*

Proof. Since we excluded cut-off wave numbers, $\beta_n^i \neq 0$ and $\beta_n^e \neq 0$. Notice that $\cos(\beta_n^i L)$ and $\sin(\beta_n^i L)$ cannot vanish simultaneously. We distinguish 3 cases:

1. $\lambda_n < \min((k^i)^2, (k^e)^2)$. Both β_n^i and β_n^e are real according to (0.38). Thus $\mathcal{D}_n \neq 0$.
2. $\min((k^i)^2, (k^e)^2) < \lambda_n < \max((k^i)^2, (k^e)^2)(k^i)^2$ (can only happens if $k^i \neq k^e$). There are two possibilities:
 - $k^e > k^i$, so $(k^i)^2 < \lambda_n < (k^e)^2$. According to (0.38), β_n^i is purely imaginary whereas β_n^e is real, so $-2\beta_n^i \cos(\beta_n^i L)$ is purely imaginary and $2i\kappa\beta_n^e \sin(\beta_n^i L)$ is real, thus $\mathcal{D}_n \neq 0$.

- $k^e < k^i$, so $(k^e)^2 < \lambda_n < (k^i)^2$. According to (0.38) and (0.58), the equation $\mathcal{D}_n = 0$ becomes

$$\sqrt{(k^i)^2 - \lambda_n} \cos\left(\sqrt{(k^i)^2 - \lambda_n}\right) + 2\kappa\sqrt{\lambda_n - (k^e)^2} \sin\left(\sqrt{(k^i)^2 - \lambda_n}\right) = 0. \quad (0.59)$$

Seen as an equation of unknown λ_n , (0.59) could only have a finite number of solutions in $((k^e)^2, (k^i)^2)$ because its left hand-side defines a non-zero holomorphic function on the ball centred in $((k^i)^2 + (k^e)^2)/2$ of radius $(k^e)^2 - (k^i)^2$.

3. $\lambda_n > \max((k^i)^2, (k^e)^2)$. According to (0.38) and (0.58), the equation $\mathcal{D}_n = 0$ becomes

$$\sqrt{\lambda_n - (k^i)^2} \cosh\left(\sqrt{\lambda_n - (k^i)^2}\right) + \kappa\sqrt{\lambda_n - (k^e)^2} \sinh\left(\sqrt{\lambda_n - (k^i)^2}\right) = 0. \quad (0.60)$$

Again, seen as an equation in λ_n , (0.59) could only have a finite number of solutions in $I = (\max((k^i)^2, (k^e)^2), +\infty)$. In each bounded subset of I , it could have only a finite number of zero (again because the left hand-side of (0.59) defines a non-zero holomorphic function on the half-space $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > \max((k^i)^2, (k^e)^2)\}$) and for λ_n large enough \mathcal{D}_n does not vanish (see the asymptotics of Proposition 0.19).

This ends the proof. \square

When \mathcal{D}_n vanishes, the corresponding system (0.57) has a non-empty kernel of dimension 1 spanned by $(2i \sin(\beta_n^i L), -e^{i\beta_n^i L}, e^{i\beta_n^i L})^T$. Consequently, the transmission problem (0.55) has a non-empty kernel of finite dimension, spanned by

$$G_n(x, \mathbf{y}) := \begin{cases} 2i \sin(\beta_n^i L) \psi_n(\mathbf{y}) e^{-i\beta_n^e |x|} & \text{for } x < 0, \mathbf{y} \in \Gamma, \\ 2i \psi_n(\mathbf{y}) \sin(\beta_n^i (L - x)) & \text{for } x > 0, \mathbf{y} \in \Gamma. \end{cases} \quad (0.61)$$

When (0.59) holds, it means that $(k^e)^2 < \lambda_n < (k^i)^2$ so β_n^e is real whereas β_n^i is purely imaginary. Consequently, the corresponding G_n are evanescent in Ω^e . Thus these functions correspond to the so-called trapped modes (in the sense that G_n is localised in the bounded domain Ω^i). Notice that they could exist without change of sign: (0.59) can hold even when $\kappa > 0$ (see [158] for more details about trapped modes). When (0.60) holds, since $\lambda_n > \max((k^i)^2, (k^e)^2)$, both β_n^i and β_n^e are purely imaginary, thus the corresponding G_n is evanescent of each side of the interface (surface plasmons). Such solution cannot exist when $\kappa > 0$, *i.e.* without changes of sign.

0.4.2.2 Asymptotic analysis

Following the same steps as in the previous section, when $\mathcal{D}_n \neq 0$ we can first solve (0.57):

$$\begin{bmatrix} u_n^e \\ u_{n,+}^i \\ u_{n,-}^i \end{bmatrix} = (\mathcal{A}_n)^{-1} \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad (\mathcal{A}_n)^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}_n} \begin{bmatrix} 2\beta_n^i \cos(\beta_n^i L) & 2i \cos(\beta_n^i L) & -2\beta_n^i \\ -\kappa\beta_n^e e^{-i\beta_n^i L} & -e^{-i\beta_n^i L} & \kappa\beta_n^e - \beta_n^i \\ \kappa\beta_n^e e^{i\beta_n^i L} & e^{i\beta_n^i L} & -\kappa\beta_n^e - \beta_n^i \end{bmatrix}. \quad (0.62)$$

We now compute the asymptotic of \mathcal{D}_n :

Proposition 0.19. *One has*

$$\mathcal{D}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} i(1 + \kappa)\sqrt{\lambda_n} e^{L\sqrt{\lambda_n}} & \text{if } \kappa \neq -1, \\ i \frac{(k^e)^2 - (k^i)^2}{2} \frac{1}{\lambda_n} e^{L\sqrt{\lambda_n}} & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e \neq k^i, \\ 2i\sqrt{\lambda_n} e^{-L\sqrt{\lambda_n}} & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e = k^i. \end{cases} \quad (0.63)$$

Proof. The first two cases are obtained exactly like the ones of Proposition 0.26. For $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$, notice that $\mathcal{D}_n = 2\beta_n^e e^{i\beta_n^e L} = -2\beta_n^i e^{-i\beta_n^i L}$ (for n large enough). The result in this case is thus straightforward. \square

Finally, one gets the asymptotics of the modal coefficients:

Proposition 0.20. *One has*

$$\begin{bmatrix} u_n^e \\ u_{n,+}^i \\ u_{n,-}^i \end{bmatrix} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{1+\kappa} \mathcal{M}_{n,\kappa,1}(0) \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{if } \kappa \neq -1, \\ \frac{2}{(k^e)^2 - (k^i)^2} \mathcal{M}_{n,-1,2}(2) \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e \neq k^i, \\ \frac{1}{2} e^{2L\sqrt{\lambda_n}} \mathcal{M}_{n,-1,3}(0) \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{if } \kappa = -1 \text{ and } k^e = k^i, \end{cases} \quad (0.64)$$

where $\mathcal{M}_{n,\kappa,j}(p)$ is the matrix

$$\mathcal{M}_{n,\kappa,j}(p) := \begin{bmatrix} -1 & -i(\lambda_n)^{(p-1)/2} & 2e^{-L\sqrt{\lambda_n}} \\ -\kappa(\lambda_n)^{p/2} e^{-2L\sqrt{\lambda_n}} & i(\lambda_n)^{(p-1)/2} e^{-2L\sqrt{\lambda_n}} & \delta_j e^{-2L\sqrt{\lambda_n}} \\ \kappa(\lambda_n)^{p/2} & -i(\lambda_n)^{(p-1)/2} & (1-\kappa)e^{-L\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix}, \quad (0.65)$$

with

$$\delta_j = \begin{cases} (1+\kappa) & \text{if } j = 1 \ (\kappa \neq -1), \\ \frac{(k^e)^2 - (k^i)^2}{2} & \text{if } j = 2 \ (\kappa = -1 \text{ and } k^e \neq k^i), \\ 0 & \text{if } j = 3 \ (\kappa = -1 \text{ and } k^e = k^i). \end{cases} \quad (0.66)$$

0.4.2.3 Conclusion

Notice that, in the super-critical case $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$, one gets a factor $e^{2L\sqrt{\lambda_n}}$ in front of $\mathcal{M}_{n,-1,3}(0)$. Thus we need to introduce the following weighted spaces analogous to (0.46) for $s > 0$ and $L \geq 0$:

$$\mathfrak{G}_L^s(\phi) := \left\{ u \in L^2(\phi) : \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{2L\sqrt{\lambda_n}} (1 + \lambda_n)^s |u_n|^2 < +\infty \right\}. \quad (0.67)$$

Notice that we have the following inclusions for $s' \geq s > 0$ and $L' \leq L \leq 0$:

$$\mathfrak{G}_L^{s'}(\Gamma) \subset \mathfrak{G}_L^s(\Gamma) \quad \text{and} \quad \mathfrak{G}_{L'}^s(\Gamma) \subset \mathfrak{G}_L^s(\Gamma). \quad (0.68)$$

The condition $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{2L\sqrt{\lambda_n}} (1 + \lambda_n)^s |u_n|^2 < +\infty$ is restrictive because it imposes an exponential decay of the modal coefficients of the functions belonging to $\mathfrak{G}_L^s(\Gamma)$. We can extend the definition of $\mathfrak{G}_L^s(\Gamma)$ by duality to negative exponents:

$$\mathfrak{G}^{-s}(\Gamma) := \left\{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)^* : \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{2L\sqrt{\lambda_n}} (1 + \lambda_n)^{-s} |\phi_n|^2 < +\infty \right\}. \quad (0.69)$$

It is now possible to conclude:

Théorème 0.3. *Let $s > 0$ and consider the transmission problem (0.55):*

- if $\kappa \neq -1$ (standard case), for $(f, g) \in \mathfrak{H}^s(\Gamma) \times \mathfrak{H}^{s-1}(\Gamma)$, (0.55) admits a unique solution $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma) \in \mathfrak{H}^s(\Gamma)^2$ (no order of regularity lost);
- if $\kappa = -1$ and $k^e \neq k^i$ (critical case), for $(f, g) \in \mathfrak{H}^{s+2}(\Gamma) \times \mathfrak{H}^{s+1}(\Gamma)$, (0.55) has a unique solution $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma) \in \mathfrak{H}^s(\Gamma)^2$ (2 orders of regularity lost);
- if $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$ (super-critical case), for $(f, g) \in \mathfrak{G}_L^s(\Gamma) \times \mathfrak{G}_L^{s-1}(\Gamma)$, (0.55) has a unique solution $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma) \in \mathfrak{H}^s(\Gamma)^2$ ("infinite" order of regularity lost);

	$\kappa \neq -1$	$\kappa = -1$
$k^e \neq k^i$	0	2
$k^e = k^i$	0	∞

Table 3 – orders of regularity lost solving (0.55).

except in the exceptional situations when (0.59) or (0.60) holds. In this case, it has a kernel of finite dimension spanned by the evanescent functions (0.61) (trapped modes or evanescent modes).

Notice that Remark 0.17 still holds in this situation. These results are summarised in Table 3. We can also reinterpret the results in term of volume source as we done at the end of Sections 0.3.3 and 0.4.1.3 for the standard and the critical cases.

For the super-critical case, the concluding observation of Remark 0.8 when the source F is compactly supported in Ω^e does not hold any more. Indeed, one can have $f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ without having $f \in \mathfrak{G}_L^s(\Gamma)$. Denote by $d(S, \Gamma)$ the Hausdorff distance between the support S of F and the interface Γ , and denote by h the trace of u^{inc} on $\Gamma_F := \{-d(S, \Gamma)\} \times \Gamma$ located at $x = -d(S, \Gamma)$. Then u^{inc} is the outgoing solution of the problem $\Delta u^{\text{inc}} + (k^e)^2 u^{\text{inc}} = 0$ on $(-d(S, \Gamma), +\infty) \times \Gamma$ with the condition $u^{\text{inc}} = h$ on Γ_F . It can be given explicitly:

$$u^{\text{inc}}(x, \mathbf{y}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n e^{i\beta_n^e(x+d(S, \Gamma))} \psi_n(\mathbf{y}). \quad (0.70)$$

where $h_n = \langle h, \psi_n \rangle_{L^2(\Gamma)}$. It means that the modal coefficients f_n of $f = u^{\text{inc}}|_\Gamma$ satisfy $f_n = h_n e^{i\beta_n^e d(S, \Gamma)}$ so using (0.38) one gets

$$e^{2L\sqrt{\lambda_n}} f_n = e^{2L\sqrt{\lambda_n}} e^{i\beta_n^e d(S, \Gamma)} h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{(2L-d(S, \Gamma))\sqrt{\lambda_n}} h_n. \quad (0.71)$$

Suppose now that $h \in \mathfrak{H}^s(\Gamma)$, $s > 0$. If $d(S, \Gamma) \geq 2L$, (0.71) combined with (0.46) and (0.67) gives $f_n \in \mathfrak{G}_L^s(\Gamma)$. In a similar way, one has also $g \in \mathfrak{G}_L^{s-1}(\Gamma)$. Thus, using Theorem 0.3, (0.55) is well-posed and we get $(u^i|_\Gamma, u^e|_\Gamma) \in \mathfrak{H}^s(\Gamma)^2$. Now if $d(S, \Gamma) < 2L$, coming back to (0.64) and using (0.71), one can see that the modal coefficients u_n^e , $u_{n,+}^i$ and $u_{n,-}^i$ are growing exponentially. This means that the corresponding $u^e|_\Gamma$ and $u^i|_\Gamma$ are not even distributions on Γ of finite order. In other words, the condition $(f, g) \in \mathfrak{G}_L^s(\Gamma) \times \mathfrak{G}_L^{s-1}(\Gamma)$ in Theorem 0.3 is truly restrictive since it imposes that the source F must be supported far away from the interface Γ , at a distance at least $2L$.

0.5 Discussion and prospects

Even if our analysis was able to finely characterise the loses of regularity of the considered problems, it is inevitably limited to particular geometries for which separation of variables is possible. For more general domains, when Ω^i is bounded, only partial results have been proved, for $d \geq 3$ and when Ω^i is strictly convex in [183] and [178]. This approach can also handle the case $d = 2$ with $k^e \neq k^i$ (critical case) but seems to fail irremediably when Ω^i is not strictly convex for $d \geq 3$ and when $k^e = k^i$ (super-critical case) for $d = 2$. It appears that we need some new idea to tackle these two cases.

Another interesting problem is to deal with the full Maxwell equations (for $d = 3$) instead of the Helmholtz equation. When $\kappa = -1$, very few has been done for these equations when involving sign-changing coefficients, even for smooth interfaces or simple geometries. Let us mention the paper [30] where the authors use results on scalar problems with sign-changing coefficients to deduce results on the full Maxwell equations. This approach could be certainly used in other situations.

To conclude, let us mention that tremendous difficulties appear when the interface is not smooth any more (when it has corners for instance). In this case, in order to have well-posedness in H^1 , the contrasts must lie outside an interval called the critical interval that contains $\{-1\}$. If they do not (but are different of -1), solutions exhibit strongly oscillating behaviour near the corners (see [29, 31]). One has to add some radiation conditions at the corners and to change the functional framework to recover well-posedness (as we did in this paper for the critical and super-critical cases). It is now well understood for $d = 2$ but, as mentioned before, for $d = 3$ (Maxwell equations) there is a lot to investigate, due to

the fact that the geometries in 3d can be much more complex than in 2d (it can have corners, edges, conical points, etc.). Finally, to our knowledge, the case where the contrasts are equal to -1 when the interface is not smooth has never been investigated.

0.A Appendix: justification of the radiation conditions for negative materials

In this Section, we justify that the “correct” (*i.e.* physically relevant) radiation condition in media for which the coefficients are negative is (0.39) instead of (0.10).

For simplicity, we restrict ourselves to the dimension $d = 1$, but one can proceed similarly for higher dimensions. The method consists in using the limiting absorption principle [93]. It characterised the “correct” solution as the limit, when the dissipation tends to 0, of the unique solution of the same problem when the medium is absorbing, *i.e.* the coefficients have a non-zero imaginary part.

More precisely, consider the Helmholtz equation $u'' + k^2 u = 0$ where $k := \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$ is a fixed wave number with $(\varepsilon, \mu) := (\varepsilon^e, \mu^e)$ or $(\varepsilon, \mu) := (\varepsilon^i, \mu^i)$. We want to determine what is the radiation condition to impose when x tends to $+\infty$ (the case $-\infty$ is analogous). Suppose that the background medium is slightly absorbing, so that one has a permittivity ε_η and a permeability μ_γ which are now complex numbers:

$$\varepsilon_\eta := \varepsilon + i\eta \quad \text{and} \quad \mu_\gamma := \mu + i\gamma, \quad (0.72)$$

where $\eta > 0$ and $\gamma > 0$ represent the absorption terms (see Remark 0.21). We now define the corresponding wave number $k_{\eta, \gamma}$ such that $k_{\eta, \gamma} = (\omega^2 \varepsilon_\eta \mu_\gamma)^{1/2}$, where we choose for the square root the one which has \mathbb{R}_+ for the branch cut (this choice is arbitrary, another choice would lead to the same results):

$$z^{1/2} := \sqrt{|z|} e^{i \arg z / 2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*, \quad \arg z \in (0, 2\pi). \quad (0.73)$$

The solutions $u_{\eta, \gamma}$ of the Helmholtz equation $u''_{\eta, \gamma} + (k_{\eta, \gamma})^2 u_{\eta, \gamma} = 0$ are given by

$$u_{\eta, \gamma}(x) = A e^{i k_{\eta, \gamma} x} + B e^{-i k_{\eta, \gamma} x}, \quad (0.74)$$

for some constants A and B . Since the imaginary part of $k_{\eta, \gamma}$ is always positive (see (0.73)), $e^{i k_{\eta, \gamma} x}$ is bounded when x tends to $+\infty$ but $e^{-i k_{\eta, \gamma} x}$ is not. So one must impose $B = 0$, and doing so one gets $u_{\eta, \gamma}(x) = A e^{i k_{\eta, \gamma} x}$. Moreover, using $\varepsilon_\eta \mu_\gamma = (\varepsilon \mu - \eta \gamma) + i(\varepsilon \gamma + \mu \eta)$, the imaginary part of $\varepsilon_\eta \mu_\gamma$ is positive when $(\varepsilon, \mu) = (\varepsilon^e, \mu^e)$ and negative when $(\varepsilon, \mu) = (\varepsilon^i, \mu^i)$. We obtain, according to (0.73), that

$$\operatorname{Re} k_{\eta, \gamma} > 0 \quad \text{if } (\varepsilon, \mu) = (\varepsilon^e, \mu^e) \quad \text{and} \quad \operatorname{Re} k_{\eta, \gamma} < 0 \quad \text{if } (\varepsilon, \mu) = (\varepsilon^i, \mu^i). \quad (0.75)$$

Thus, we get

$$\lim_{\eta, \gamma \rightarrow 0} k_{\eta, \gamma} = \begin{cases} k^e & \text{if } (\varepsilon, \mu) = (\varepsilon^e, \mu^e), \\ -k^i & \text{if } (\varepsilon, \mu) = (\varepsilon^i, \mu^i), \end{cases} \quad (0.76)$$

and this implies

$$\lim_{\eta, \gamma \rightarrow 0} e^{-i k_{\eta, \gamma} x} = \begin{cases} e^{-i k^e x} & \text{if } (\varepsilon, \mu) = (\varepsilon^e, \mu^e), \\ e^{i k^i x} & \text{if } (\varepsilon, \mu) = (\varepsilon^i, \mu^i). \end{cases} \quad (0.77)$$

Classically, $e^{-i k^e x}$ verifies the Sommerfeld radiation condition (0.10) but $e^{i k^i x}$ does not. Nevertheless this last quantity satisfies the “reversed” condition (0.39). This justifies the radiation conditions used in (0.40).

Remark 0.21. The choice of the sign for the imaginary part of ε_η and μ_γ is linked to the time convention $e^{-i\omega t}$. Indeed, under reasonable physical assumptions (passivity and causality) and with this convention, it is possible to show that ε_η and μ_γ (as function of ω) are necessarily Herglotz functions, *i.e.* analytical functions of the upper half-plane with positive imaginary parts (see for instance [181]).

0.B Appendix: Bessel and Hankel functions

Recall (see *e.g.* [186,232]) that the Bessel functions are defined as the solutions of the ODE

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (r^2 - \nu^2)y = 0, \quad (0.78)$$

where $\nu \in \mathbb{C}$ is a parameter (in our case an integer or half an integer). Equation (0.78) admits two linearly independent solutions J_ν (Bessel function of the first kind) and Y_ν (Bessel function of the second kind) defined by

$$J_\nu(r) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad r \geq 0 \quad (0.79)$$

where Γ is the Gamma function and by

$$Y_\nu(r) := \frac{J_\nu(r) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(r)}{\sin(\nu\pi)}, \quad r > 0. \quad (0.80)$$

This last expression has to be understood as the limit value when $\nu = n \in \mathbb{Z}$: $Y_n = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu$. The spherical Bessel functions j_ν and y_ν are defined using the Bessel functions:

$$j_\nu(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{\nu+1/2}(r) \quad \text{and} \quad y_\nu(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} Y_{\nu+1/2}(r). \quad (0.81)$$

We also define the Hankel (reps.spherical Hanekl) function of the first kind $H_n := J_n + iY_n$ (resp. $h_\ell = j_\ell + iy_\ell$).

The linear independence of J_ν and Y_ν can be specified through the Wronskian formula: for all $\nu \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, one has (the derivatives are w.r.t. r)

$$J_\nu(r)Y'_\nu(r) - J'_\nu(r)Y_\nu(r) = \frac{2}{\pi r}. \quad (0.82)$$

Recall that we first want to prove Lemma 0.3. Actually we can prove the more general result:

Lemma 0.22. *Let $\alpha, \beta > 0$ and $\lambda \in \mathbb{R}^*$. For any $\nu > 0$ such that α is not a zero of J_ν and β is not a zero of H_ν , one has*

$$\frac{J'_\nu(\alpha)}{J_\nu(\alpha)} + \lambda \frac{H'_\nu(\beta)}{H_\nu(\beta)} \neq 0. \quad (0.83)$$

Proof. Let $\nu > 0$ fixed. By contradiction, suppose that there exist $\alpha, \beta > 0$ and $\lambda \in \mathbb{R}^*$ such that the left hand-side of (0.83) is zero. Taking its imaginary part and using the fact that $H_\nu = J_\nu + iY_\nu$ one gets

$$\frac{J_\nu(\beta)Y'_\nu(\beta) - J'_\nu(\beta)Y_\nu(\beta)}{J_\nu(\beta)^2 + Y_\nu(\beta)^2} = 0. \quad (0.84)$$

This contradicts the Wronskian formula (0.82). □

Now we want to prove the asymptotics (0.24) and (0.25). We start with a lemma concerning J_ν .

Lemma 0.23. *Assume $\nu \in \mathbb{R}^*$ and $r > 0$. Then*

$$J_\nu(r) = \frac{r^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 1)}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\nu + 1)^{N+1}}\right) \right]. \quad (0.85)$$

Proof. From (0.79), one gets

$$J_\nu(r) = \frac{r^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 1)}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} + \sum_{k \geq N+1} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu)}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \right]. \quad (0.86)$$

Since $\Gamma(k + \nu + 1)/\Gamma(\nu + 1) \geq (\nu + 1)^{N+1}$ for $k \geq N + 1$, by denoting R_N the second sum of (0.86), one has

$$|R_N| \leq \frac{1}{(\nu + 1)^{N+1}} \sum_{k \geq N+1} \frac{1}{k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}. \quad (0.87)$$

Observing that this series is convergent, one gets (0.85). \square

We can already deduce some results from this lemma. For the asymptotic of $J_n(r)$ in (0.24), one just need to take $\nu = n \in \mathbb{N}^*$ in (0.85) (since $\Gamma(n + 1) = n!$). For $j_\ell(r)$, recall that $j_\ell(r) = \sqrt{\pi/(2r)}J_{\ell+1/2}(r)$, so taking $\nu = \ell + 1/2$, $\ell \in \mathbb{N}$ in (0.85) and using

$$\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2\ell - 1)!!}{2^\ell}, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (0.88)$$

gives the asymptotic of $j_\ell(r)$ in (0.25). The asymptotics for $J'_n(r)$ and $j'_\ell(r)$ are deduced easily from the ones of $J_n(r)$ and $j_\ell(r)$. Concerning the Hankel functions H_n and h_ℓ , we first need the ones for Y_n and y_ℓ . For the last, it is straightforward: using $y_\ell(r) = (-1)^{\ell+1} \sqrt{\pi/(2r)}J_{-(\ell+1/2)}(r)$ and taking $\nu = -(\ell + 1/2)$ in (0.85) lead to

$$y_\ell(r) = -\frac{(2\ell - 1)!!}{r^{\ell+1}} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(2\ell - 2k - 1)!!}{k!} \frac{1}{(2\ell - 1)!!} \left(\frac{r^2}{2}\right)^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell^{N+1}}\right) \right]. \quad (0.89)$$

To deduce the result for h_ℓ in (0.25), it suffices to notice that j_ℓ is negligible compared to y_ℓ , so $h_\ell(r) \sim iy_\ell(r)$ when ℓ tends to $+\infty$ so the asymptotic of $h_\ell(r)$ in (0.25) is directly given by (0.89) and the ones for $h'_\ell(r)$ are deduced easily from them.

For the asymptotic of Y_n , we cannot do it directly. We have to use that

$$Y_n(r) = \frac{2}{\pi} \left[\log\left(\frac{r}{2}\right) + \gamma \right] - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1-k)!}{k!} \left(\frac{2}{r}\right)^{n-2k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+n} [\psi(k+n) + \psi(k)], \quad (0.90)$$

where

$$\psi(k) := \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \quad \text{and} \quad \gamma := \lim_{k \rightarrow +\infty} (\psi(k) - \log(k)) \approx 0,5772 \dots, \quad (0.91)$$

are respectively the partial sums of the harmonic series and the Euler-Mascheroni constant. First notice that the first term of (0.90) does not depend on n , so $2[\log(r/2) - \gamma]/\pi = \mathcal{O}(1)$. The third term is bounded with respect to n too, because $\psi(n+k) = \log(n+k) + \gamma + \mathcal{O}(1/n)$ (see for instance [75]) and $r^n \log(k+n)/(n+k)!$ is bounded. Thus we get from (0.90)

$$Y_n(r) = \frac{1}{\pi} \frac{2^n (n-1)!}{r^n} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(n-k-1)!}{k!(n-1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \right]. \quad (0.92)$$

To deduce the result for H_n in (0.24), it suffices to notice that J_n is negligible compared to Y_n , so the asymptotic of H_n in (0.25) is directly given by (0.89). The ones for $H'_n(r)$ are then deduced easily.

0.C Appendix: the one-dimensional case

This section is not present in the publication [229].

Cette section n'est pas présente dans la publication [229].

0.C.1 The case where the negative material is a half-line

We consider the case where Ω^i is a half-line: $\Omega^i = (0, +\infty)$, its exterior is then $\Omega^e = (-\infty, 0)$ (see Figure 6). We look for the following transmission problem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u^e)''(x) + (k^e)^2 u^e(x) = 0, & x < 0, \\ (u^i)''(x) + (k^i)^2 u^i(x) = 0, & x > 0, \\ u^i(0) - u^e(0) = f, \\ (u^i)'(0) - \kappa(u^e)'(0) = g, \\ u^e \text{ verifies (0.10),} & \text{when } x \rightarrow -\infty, \\ u^i \text{ verifies (0.39),} & \text{when } x \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (0.93)$$

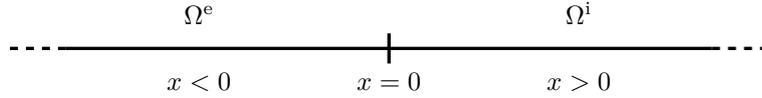


Figure 6 – Geometry of the problem (0.93).

In Ω^e when x tends to $-\infty$, $e^{-ik^e x}$ verifies (0.10) but $e^{ik^e x}$ does not, and in Ω^i , when x tends to $+\infty$, $e^{-ik^i x}$ verifies (0.39) but $e^{ik^i x}$ does not. So we deduce $u^e(x) = Ae^{-ik^e x}$ and $u^i(x) = Be^{-ik^i x}$ where A and B are constants to determine. Thus the transmission conditions of (0.93) lead to solving the 2×2 linear system

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -k^i & \kappa k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ -ig \end{bmatrix}. \quad (0.94)$$

Its determinant is $\kappa k^e - k^i$ which never vanished since $\kappa < 0$. We can now conclude on the well-posedness of (0.93):

Proposition 0.24. *The problem (0.93) is well-posed for all $\kappa < 0$ and $k^e, k^i > 0$.*

Remark 0.25. The radiation condition plays a central role here. If we use (0.10) instead of (0.39) in Ω^i , we would have $u^i(x) = Be^{ik^i x}$ instead, and the determinant of (0.94) would be equal to $\kappa k^e + k^i$ which vanishes when $\kappa = -1$ and $k^e = k^i$ (super-critical case) and so (0.93) would be ill-posed.

Remark 0.26. In the classical case without change of sign we would have kept the outgoing wave on Ω^i : $u^i(x) = u^i_+ e^{ik^i x}$, $x > 0$. The determinant of the system would have been equal to $-\kappa k^e - k^i$ which never vanishes since in this case $\kappa > 0$.

0.C.2 The case where the negative material is a segment

We consider now $\Omega^i = (0, L)$ and $\Omega^e = (-\infty, 0)$ (see Figure 7), with the addition of an homogeneous Dirichlet condition at $x = L$ corresponding to the symmetric part (resp. skew-symmetric part). We look for the transmission problem

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u^e)''(x) + (k^e)^2 u^e(x) = 0, & x \in (-\infty, 0), \\ (u^i)''(x) + (k^i)^2 u^i(x) = 0, & x \in (0, L), \\ u^i(0) - u^e(0) = f, \\ (u^i)'(0) - \kappa(u^e)'(0) = g, \\ u^i(L) = 0, \\ u^e \text{ verifies (0.10),} & \text{when } x \rightarrow -\infty. \end{array} \right. \quad (0.95)$$

Proposition 0.27. *The transmission problem (0.95) is well-posed for all $\kappa < 0$ and $k^e, k^i > 0$.*



Figure 7 – Geometry of the problem (0.95)

Proof. On $(-\infty, 0)$, using the radiation condition (0.10), we get $u^e(x) = Ae^{-ik^e x}$. Since $\Omega^i = (0, L)$ is bounded, we look for $u^i = Be^{ik^i x} + Ce^{-ik^i x}$ (no radiation condition). The transmission conditions at $x = 0$ and the Dirichlet condition at $x = L$ of (0.95) lead to the 3×3 system

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \kappa k^e & k^i & -k^i \\ 0 & e^{ik^i L} & e^{-ik^i L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ -ig \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (0.96)$$

Its determinant $-2k^i \cos(k^i L) + 2i\kappa k^e \sin(k^i L)$ never vanishes, so (0.96) is always invertible. Therefore (0.95) is well-posed. \square

Première partie

Propagation d'ondes transitoires
dans les milieux dispersifs

CONTENU DE CETTE PARTIE

Chapitre 1 : généralités sur les modèles dispersifs en électromagnétisme Nous y présentons la notion de milieu dispersif dans le contexte de l'électromagnétisme et plus particulièrement dans le cadre des équations de Maxwell (ce genre de milieu permet de modéliser les métamatériaux en autorisant la permittivité et la perméabilité à devenir négatives sur certaines plages de fréquences). Dans un premier temps, nous présentons les équations de Maxwell dans un contexte assez général, où la permittivité et la perméabilité peuvent dépendre de la fréquence (dispersion). Nous donnons ensuite quelques exemples fondamentaux de modèles dispersifs comme le modèle de Drude ou le modèle de Lorentz. Enfin, nous discutons des formes admissibles pour la permittivité et la perméabilité. Nous verrons notamment que le modèle de Lorentz généralisé est d'une certaine manière « universel », c'est-à-dire qu'il représente une très grande classe de modèles dispersifs. Dans un deuxième temps, nous nous focalisons sur le modèle de Lorentz généralisé en domaine temporel dont nous fournissons une étude mathématique : cadre fonctionnel, identité d'énergie et caractère bien posé. Dans un troisième et dernier temps, nous analysons les propriétés dispersives des modèles considérés via la méthode d'analyse par ondes planes. En particulier, nous insistons sur la notion d'ondes inverses en expliquant en quoi elles sont liées au fait que la permittivité et la perméabilité puissent être négatives. Nous finissons ce chapitre sur une discussion sur la notion d'indice de réfraction négatif et pourquoi les métamatériaux peuvent être utilisés pour réaliser des lentilles parfaites.

Chapitre 2 : schémas numériques pour le modèle de Lorentz généralisé Nous développons dans ce chapitre des schémas numériques afin de simuler la propagation des ondes pour le modèle de Lorentz généralisé. Notre objectif est de construire des schémas robustes, dans le sens où la condition de stabilité de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) ne dépend pas des paramètres du modèle de Lorentz et est la même que celle du schéma qui correspond au vide, ce qui est extrêmement utile pour les problèmes de transmission. Notre approche couple une approche classique concernant la discrétisation en espace (ici des différences finies sur des grilles décalées) avec une discrétisation judicieusement choisie pour la partie en temps. Nous présentons tout d'abord une méthode de discrétisation en temps relativement indépendante de la discrétisation en espace pour le modèle de Lorentz qui admet la même condition CFL que celle du vide, basée sur une méthode de différence finie (schéma de Yee temporel). Ensuite, nous nous concentrons à décrire la discrétisation en espace, elle aussi basée sur une méthode de différences finies sur des grilles décalées. Enfin, nous présenterons quelques expériences numériques utilisant le cas particulier du modèle de Drude pour mettre en évidence la présence d'ondes inverses et d'indices de réfraction négatifs (simulation d'une lentille parfaite).

Chapitre 3 : perfectly matched layers classiques et extension au modèle de Drude Ce court chapitre a deux objectifs. Le premier est de rappeler la construction des couches absorbantes parfaitement adaptées, perfectly matched layers (PMLs) en anglais (une des méthodes existantes pour tronquer artificiellement en un domaine borné un problème posé dans un domaine infini) pour les systèmes hyperboliques non dispersifs, de donner un critère nécessaire de stabilité et d'illustrer celui-ci sur quelques

exemples. Le deuxième est d'appliquer cette construction classique des PMLs au modèle de Drude et de faire des expériences numériques pour constater leur instabilité.

Chapitre 4 : analyse des PMLs pour une classe de milieux dispersifs et application aux métamatériaux à indice négatif Ce chapitre a pour but d'analyser plus en profondeur la question de la stabilité des PMLs pour les milieux dispersifs et plus particulièrement pour les métamatériaux. Nous proposons et analysons la stabilité de PMLs très générales utilisant un nouveau changement de variable et ceci pour une large classe de milieux dispersifs. Nous donnons un critère nécessaire de stabilité pour de tels modèles. Pour les équations de Maxwell dispersives décrites au chapitre 1 (et donc pour les métamatériaux à indice négatif), cette analyse est complétée en donnant des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. Nous concluons alors en proposant des nouvelles PMLs stables qui satisfont ces critères et illustrons numériquement leur efficacité.

Chapitre 5 : exploration numérique du principe d'amplitude limite entre un diélectrique et un matériau de Drude Le but du dernier chapitre de cette partie est d'explorer numériquement les répercussions en régime temporel du fait que les problèmes de transmission avec changements de signe (en régime fréquentiel) sont parfois mal posés (chapitre 0). Nous étudions dans ce chapitre un problème de transmission entre un demi-plan constitué de vide et un demi-plan rempli d'un matériau de Drude (l'étude théorique faite dans [50] démontre notamment une croissance linéaire de la solution dans les cas critiques où le problème de transmission avec changements de signe correspondant est mal posé). Après avoir rappelé la notion de principe d'amplitude limite et les résultats théoriques obtenus dans [50], nous utilisons les méthodes numériques développées dans les chapitres précédents (schémas temporels robustes et PMLs stables) qui confirment bien ces résultats théoriques.

CHAPITRE

1

GÉNÉRALITÉS SUR LES MODÈLES DISPERSIFS EN ÉLECTROMAGNÉTISME

Sommaire

1.1	Modèles pour les milieux dispersifs	30
1.1.1	Les équations de Maxwell	30
1.1.2	Exemples de modèles pour la permittivité	31
1.1.3	Formes admissibles pour la permittivité et la perméabilité	32
1.2	Le modèle de Lorentz généralisé	36
1.2.1	Du régime fréquentiel au régime temporel	37
1.2.2	Identité d'énergie	39
1.2.3	Caractère bien posé	39
1.3	Analyse des propriétés dispersives	40
1.3.1	Rappels d'analyse par ondes planes	40
1.3.2	Application aux modèles dispersifs	43
1.A	Annexe : fonctions de Herglotz	47
1.B	Annexe : démonstration de la proposition 1.6	49

Ce chapitre, à caractère introductif, a pour but de présenter et d'expliquer la notion de milieu dispersif dans le contexte de l'électromagnétisme et plus particulièrement dans le cadre des équations de Maxwell. La dispersion caractérise les milieux où la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dépend de la fréquence de l'onde, ce qui n'est pas le cas pour des milieux simples comme le vide. En particulier, de tels modèles ne peuvent être locaux en temps et seront décrits plus aisément dans le régime fréquentiel plutôt que temporel. Tout au long de ce chapitre, nous nous attachons à faire des aller-retours entre ces deux régimes afin de mettre en évidence les liens de cause à effet entre les deux.

L'étude des milieux dispersifs rentre parfaitement dans le cadre de cette thèse puisqu'ils permettent (entre autres choses) de modéliser des métamatériaux en autorisant les constantes électromagnétiques comme la permittivité et la perméabilité à devenir négatives sur certaines plages de fréquences. L'étude faite dans ce chapitre montre même que tout modèle raisonnable de métamatériau (du point de vue de la physique) est nécessairement dispersif : un modèle dans le domaine temporel dont la permittivité et/ou la perméabilité serait négative à toutes les fréquences violerait des principes physiques fondamentaux comme la causalité ou la passivité.

Ce chapitre s'organise comme suit : dans un premier temps, nous présentons les équations de Maxwell dans un contexte assez général, où la permittivité et la perméabilité peuvent dépendre de la fréquence. Nous donnons ensuite quelques exemples fondamentaux de modèles dispersifs comme le modèle de Drude ou le modèle de Lorentz. Enfin, nous discutons des formes admissibles pour la permittivité et la perméabilité. Nous constatons, via des principes physiques fondamentaux et la théorie des fonctions de Herglotz, que le modèle de Lorentz généralisé est d'une certaine manière « universel », c'est-à-dire qu'il représente une très grande classe de modèles dispersifs. Dans un deuxième temps, nous nous focalisons sur le modèle de Lorentz généralisé en domaine temporel dont nous fournissons une étude mathématique : cadre fonctionnel, identité d'énergie et caractère bien posé. Dans un troisième et dernier temps, nous analysons les propriétés dispersives des modèles que nous avons considérés via la méthode d'analyse par ondes planes. En particulier, nous insistons sur la notion d'ondes inverses en expliquant en quoi elles sont liées au fait que la permittivité et la perméabilité puissent être négatives. Nous finissons ce chapitre sur une discussion sur la notion d'indice de réfraction négatif.

1.1 Modèles pour les milieux dispersifs

1.1.1 Les équations de Maxwell

Les contenus de cette section ainsi que de la suivante sont tout à fait classiques. Nous renvoyons aux ouvrages de référence [124, 147, 225] pour plus de détails.

Dans ce qui suit, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ désigne la variable d'espace et $t \geq 0$ la variable temporelle. Introduisons les champs électromagnétiques suivants :

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \text{ le champ électrique;} & & \bullet \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \text{ le champ magnétique;} \\ \bullet \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \text{ l'induction électrique;} & & \bullet \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \text{ l'induction magnétique.} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dans leur forme la plus générale et en absence de source, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \\ \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\nabla \times \mathbf{X}$ désigne le rotationnel d'un champ vectoriel \mathbf{X} .

Afin de clore les équations (1.2), il faut ajouter des relations dites de constitution qui relient \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} et \mathbf{E} . Il est bien plus commode de les exprimer dans le régime fréquentiel plutôt que dans le régime temporel. Plus précisément, cela correspond à chercher des solutions sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}, & \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}, & \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ est la fréquence.

Dans le cadre des milieux linéaires, locaux (en espace) et isotropes, les relations de constitution s'expriment simplement par

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{x}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega), \\ \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}, \omega) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega), \end{cases} \quad (1.4)$$

où $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) \in \mathbb{C}$ et $\mu(\mathbf{x}, \omega) \in \mathbb{C}$ désignent respectivement la permittivité et la perméabilité du milieu considéré, au point \mathbf{x} et à la fréquence ω . Il est alors possible d'écrire les équations de Maxwell (1.2) dans le régime fréquentiel :

$$\begin{cases} -i\omega \varepsilon(\mathbf{x}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) = \nabla \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega), \\ -i\omega \mu(\mathbf{x}, \omega) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = -\nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega). \end{cases} \quad (1.5)$$

Remarque 1.1. Dans notre cas, ε et μ sont des scalaires, ce qui traduit l'isotropie des milieux considérés. De manière plus générale pour des milieux anisotropes, ε et μ peuvent être des tenseurs d'ordre 2, représentés par des matrices 3×3 .

Remarque 1.2. Il est possible de considérer des modèles plus généraux que (1.4). Par exemple, dans les milieux dits chiraux $\hat{\mathbf{D}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ dépendent linéairement à la fois de $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$. Il existe également des milieux non linéaires pour lesquels $\hat{\mathbf{D}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ dépendent des puissances de $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$, des milieux non-locaux, etc.

À titre d'exemple, dans le vide, $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon_0$ et $\mu(\mathbf{x}, \omega) = \mu_0$, où ε_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide. Dans ce cas, les équations de Maxwell (1.2) s'écrivent simplement

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}, \\ \partial_t \mathbf{H} = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Dans le cas où ε et μ sont des constantes indépendantes de ω , le milieu correspondant est qualifié de diélectrique. Dans le cas contraire où au moins l'une de ces deux quantités dépend de ω , le milieu est dit dispersif.

1.1.2 Exemples de modèles pour la permittivité

Nous donnons quelques exemples de modèles pour la permittivité couramment utilisés. Il est utile dès ce stade d'introduire la polarisation électrique \mathbf{P} définie par

$$\mathbf{P} := \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.7)$$

où ε_0 est la permittivité du vide, ainsi que la magnétisation \mathbf{M} définie par

$$\mathbf{M} := \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.8)$$

où μ_0 est la perméabilité du vide. Remarquons que dans le cas du vide avec $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon_0$ et $\mu(\mathbf{x}, \omega) = \mu_0$, nous avons nécessairement $\mathbf{P} = \mathbf{M} = 0$. En d'autres termes \mathbf{P} et \mathbf{M} caractérisent la réponse dispersive du milieu considéré.

Dès maintenant, pour simplifier notre discours nous ne considérons plus que des milieux homogènes, c'est-à-dire que la permittivité ε et la perméabilité μ ne dépendent plus de la variable d'espace \mathbf{x} : $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon(\omega)$ et $\mu(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\omega)$. Tout ce qui suit pourrait être étendu à des milieux hétérogènes.

1.1.2.1 Le modèle de Drude

Ce modèle qui est l'un des plus simples que l'on puisse trouver provient de la description des mouvements microscopiques des électrons [124, chapitre 4]. Dans ce modèle, le déplacement d'un électron de masse m , de charge e , dont la position à l'instant t est notée $\mathbf{x}(t)$, soumis à un champ électrique \mathbf{E} est régi par une simple équation de type masse-ressort :

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -e\mathbf{E}, \quad (1.9)$$

où $\gamma \geq 0$ est un terme d'amortissement. En passant en régime fréquentiel, le déplacement en fréquence $\hat{\mathbf{x}}$ vérifie

$$\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \frac{e/m}{\omega^2 + i\gamma\omega} \hat{\mathbf{E}}(\omega). \quad (1.10)$$

En notant N le nombre d'électrons par unité de volume, la polarisation \mathbf{P} définie par (1.7) vérifie $\mathbf{P} = -Ne\mathbf{x}$ ce qui donne

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega) = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}}(\omega) - \frac{Ne^2}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \hat{\mathbf{E}}(\omega). \quad (1.11)$$

La relation de constitution (1.4) étant $\hat{\mathbf{D}}(\omega) = \varepsilon(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\omega)$, nous obtenons finalement

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \right), \quad (1.12)$$

où $\omega_p > 0$ est la fréquence plasma telle que $\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$.

1.1.2.2 Le modèle de Lorentz

Il s'agit d'un enrichissement du modèle de Drude (1.12) qui prend de plus en compte les interactions des électrons avec une particule chargée via une force de rappel de la forme $-m\omega_0\mathbf{x}$. En appliquant le même raisonnement que celui pour le modèle de Drude, nous aboutissons à

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} \right). \quad (1.13)$$

1.1.3 Formes admissibles pour la permittivité et la perméabilité

Le but de cette partie est de montrer que les modèles de type Lorentz (1.13) sont en quelque sorte « universels ». Plus précisément, nous énonçons une série d'hypothèses physiques très simples qui imposent à la permittivité $\varepsilon(\omega)$ et la perméabilité $\mu(\omega)$ une forme bien particulière. Cette section s'inspire directement d'ouvrages de physique (par exemple [124, chapitre 7] et [147, chapitre 4]) ainsi que d'ouvrages ayant un point de vue plus mathématique (voir [181, chapitre 1], [135, chapitre 19] et [53]).

Nous notons $\mathbb{C}_+^* := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ le demi-plan supérieur ouvert et $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$ le demi-plan supérieur fermé.

1.1.3.1 Principes physiques

Voici les hypothèses physiques que nous faisons sur les matériaux considérés, caractérisés par une permittivité ε et une perméabilité μ .

- Le matériau est linéaire, local (en espace), isotrope et invariant en temps. Cela implique une relation entre le champ électrique \mathbf{E} et la polarisation \mathbf{P} définie par (1.7) (resp. le champ magnétique et la magnétisation M définie par (1.8)) sous la forme d'un produit de convolution [37] :

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_e(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau \quad \text{et} \quad \mathbf{M}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_m(\tau) \mathbf{H}(t - \tau) d\tau, \quad (1.14)$$

où $\chi_e \in \mathbb{R}$ (resp. $\chi_m \in \mathbb{R}$) est la susceptibilité électrique (resp. susceptibilité magnétique). Ces produits de convolution traduisent l'inertie électromagnétique du milieu, il n'y a pas de « réponse instantanée de la matière ». En d'autres termes, la relation en temps entre \mathbf{P} et \mathbf{E} (et donc \mathbf{D} et \mathbf{E}) d'une part, et entre \mathbf{M} et \mathbf{H} (et donc \mathbf{B} et \mathbf{H}) d'autre part, sont non locales en temps.

- Notre milieu doit vérifier le principe de causalité (« les effets ne peuvent précéder les causes »), ce qui se traduit par $\chi_e(\tau) = 0$ et $\chi_m(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$. Ainsi, (1.14) devient

$$\mathbf{P}(t) = \int_0^{+\infty} \chi_e(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau \quad \text{et} \quad \mathbf{M}(t) = \int_0^{+\infty} \chi_m(\tau) \mathbf{H}(t - \tau) d\tau. \quad (1.15)$$

- Nous supposons enfin que notre milieu est passif. De manière informelle, cela signifie qu'en l'absence de source, il n'y a pas de production d'énergie électromagnétique. Le point délicat est de définir ce qu'est cette énergie. Pour les milieux non dispersifs comme le vide, il est bien connu que la densité d'énergie est donnée par $(\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 + \mu_0|\mathbf{H}|^2)/2$. Cependant, pour les milieux dispersifs l'expression de l'énergie est bien plus complexe (voir par exemple l'article [242] ou les ouvrages [124, 147]). Ceci est dû à la réponse non instantanée du milieu (non locale en temps). Nous ne rentrerons pas davantage dans les détails, nous nous contenterons d'utiliser cette caractérisation des milieux passifs :

$$\int_{-\infty}^T \mathbf{E}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}(t) dt \leq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^T \mathbf{H}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t) dt \leq 0, \quad \text{pour tout } T \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

1.1.3.2 Implications dans le régime fréquentiel

En passant dans le régime fréquentiel, (1.15) devient simplement $\hat{\mathbf{P}}(\omega) = \hat{\chi}_e(\omega)\hat{\mathbf{E}}(\omega)$ et $\hat{\mathbf{M}}(\omega) = \hat{\chi}_m(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)$, ce qui, puisque $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0\mathbf{H}$, nous donne

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \hat{\chi}_e(\omega) \quad \text{et} \quad \mu(\omega) = \mu_0 + \hat{\chi}_m(\omega) \quad (1.17)$$

Les principes physiques énoncés plus haut sur χ_e et χ_m se transposent donc sur $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$.

Principe de réalité Remarquons tout d'abord que puisque χ_e et χ_m sont à valeurs réelles, nous avons la propriété de symétrie

$$\hat{\chi}_e(\omega) = \overline{\hat{\chi}_e(-\bar{\omega})} \quad \text{et} \quad \hat{\chi}_m(\omega) = \overline{\hat{\chi}_m(-\bar{\omega})}, \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{C}^+. \quad (1.18)$$

En particulier, $\hat{\chi}_e$ et $\hat{\chi}_m$ sont paires sur l'axe réel.

Causalité Afin de traduire l'hypothèse de causalité, mentionnons le théorème de Titchmarsh [221, p. 125–129] :

Théorème 1.3 (Titchmarsh). *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si elle satisfait l'une des trois conditions ci-dessous, alors elle les satisfait toutes :*

1. la fonction f est causale : $f(t) = 0$ pour presque tout $t < 0$;
2. la transformée de Fourier \hat{f} de f vérifie pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$

$$f(\omega) = \lim_{\eta \searrow 0} F(\omega + i\eta), \quad (1.19)$$

où F est une fonction analytique définie sur \mathbb{C}_+^* qui est de carré intégrable sur toute ligne parallèle à l'axe réel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega + i\eta)|^2 d\omega < +\infty \quad \text{pour tout } \eta > 0. \quad (1.20)$$

3. Les fonctions $\text{Re } \hat{f}$ et $\text{Im } \hat{f}$ vérifient les formules de Plemelj valables pour tout $\omega \in \mathbb{C}_+ :$

$$\text{Re } \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } \hat{f}(\xi)}{\xi - \omega} d\xi \quad \text{et} \quad \text{Im } \hat{f}(\omega) = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } \hat{f}(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \quad (1.21)$$

où \mathcal{P} désigne la valeur principale de Cauchy.

Remarque 1.4. En toute rigueur, les intégrales intervenant dans les formules de Plemelj (1.21) ne sont pas bien définies pour $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Ces intégrales sont à comprendre comme l'extension à $L^2(\mathbb{R})$ de l'opérateur $u \mapsto \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - \omega} d\xi$, appelé *transformée de Hilbert* et défini par exemple sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, de la même manière que la transformée de Fourier s'étend de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$. Nous renvoyons à l'ouvrage [135] pour plus de détails.

Il est physiquement raisonnable de considérer que les fonctions χ_e et χ_m sont de carré intégrable. Ces dernières étant causales, le théorème de Titchmarsh 1.3 montre que leurs transformées de Fourier $\hat{\chi}_e$ et $\hat{\chi}_m$ sont des fonctions analytiques sur \mathbb{C}_+^* . Cela implique que les fonctions $\omega \mapsto \varepsilon(\omega)$ et $\omega \mapsto \mu(\omega)$ sont analytiques dans \mathbb{C}_+^* .

Passivité L'hypothèse de passivité (1.16) se traduit dans le régime fréquentiel en utilisant la formule de Plancherel, la relation $\hat{\mathbf{D}}(\omega) = \varepsilon(\omega)\hat{\mathbf{E}}(\omega)$ et $\hat{\mathbf{B}}(\omega) = \mu(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)$ par

$$\text{Im } \omega \varepsilon(\omega) \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{Im } \omega \mu(\omega) \geq 0. \quad (1.22)$$

Les propriétés d'analyticité, de passivité (1.22) et de symétrie (1.18) peuvent se résumer simplement en utilisant la notion de fonction de Herglotz. Ce sont des fonctions holomorphes du demi-plan supérieur

ouvert \mathbb{C}_+^* à valeurs dans le demi-plan supérieur fermé \mathbb{C}^+ (pour plus de détails, voir l'annexe 1.A). Ainsi, nous pouvons affirmer que les fonctions $h_e : \omega \mapsto \omega\varepsilon(\omega)$ et $h_m : \omega \mapsto \omega\mu(\omega)$ sont des fonctions de Herlgoltz symétriques.

Nous allons notamment nous servir de la formule de représentation (1.108) présentée dans l'annexe 1.A. Pour une fonction de Herlgoltz symétrique h , le paramètre β intervenant dans (1.108) est donné par le comportement à l'infini de $h(\omega)/\omega$ d'après (1.105). D'un point de vue physique, cela correspond au comportement à haute fréquence. Puisque $h_e(\omega)/\omega = \varepsilon(\omega)$ et $h_m(\omega)/\omega = \mu(\omega)$, nous pouvons faire l'hypothèse que les β correspondants valent respectivement ε_0 et μ_0 , la permittivité et la perméabilité magnétique du vide. En effet, la matière étant extrêmement lacunaire à très petite échelle, il est raisonnable d'affirmer qu'une onde électromagnétique à très haute fréquence (donc de très petite longueur d'onde) ne voit et n'interagit pas avec la matière et donc que le milieu réagit comme le vide.

Nous avons finalement le résultat suivant : il existe deux mesures de Borel paires ν_e et ν_m vérifiant $\int_{\mathbb{R}} d\nu_e(\xi)/(1+\xi^2) < +\infty$ et $\int_{\mathbb{R}} d\nu_m(\xi)/(1+\xi^2) < +\infty$ telles que

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu_e(\xi)}{\omega^2 - \xi^2} \quad \text{et} \quad \mu(\omega) = \mu_0 - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu_m(\xi)}{\omega^2 - \xi^2}, \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{C}_+^*. \quad (1.23)$$

De plus, d'après la formule de Plemelj (1.21) et la symétrie (1.18), la permittivité ε vérifie les formules

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\xi \operatorname{Im} \varepsilon(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi, \\ \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \varepsilon(\xi) - \varepsilon_0}{\xi^2 - \omega^2} d\xi, \end{cases} \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{C}_+. \quad (1.24)$$

appelées relations de Kramers-Kronig qui relient donc la partie réelle et la partie imaginaire de ε . Bien entendu, nous avons les mêmes relations pour μ :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \mu(\omega) - \mu_0 = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\xi \operatorname{Im} \mu(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi, \\ \operatorname{Im} \mu(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \mu(\xi) - \mu_0}{\xi^2 - \omega^2} d\xi, \end{cases} \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{C}_+. \quad (1.25)$$

1.1.3.3 Discussion sur les mesures

Grâce à la représentation (1.23), la donnée de deux mesures de Borel paires ν_e et ν_m telles que $\int_{\mathbb{R}} d\nu_e(\xi)/(1+\xi^2) < +\infty$ et $\int_{\mathbb{R}} d\nu_m(\xi)/(1+\xi^2) < +\infty$ définit complètement la permittivité ε et la perméabilité μ . Les propriétés électromagnétiques de notre milieu sont donc totalement décrites par ces deux mesures.

Rappelons maintenant le théorème de décomposition des mesures de Borel [196, p. 22-23] :

Théorème 1.5. *Soit ν une mesure de Borel sur \mathbb{R} . Elle admet la décomposition unique*

$$\nu = \nu_{\text{pp}} + \nu_{\text{ac}} + \nu_{\text{sing}} \quad (1.26)$$

où ν_{pp} , ν_{ac} et ν_{sing} sont des mesures telles que :

- ν_{pp} est une mesure purement ponctuelle, c'est-à-dire une somme (éventuellement infinie) de masses de Dirac ;
- ν_{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\mathbf{x}$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f localement intégrable telle que $d\nu_{\text{ac}} = f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.
- ν_{sing} est une mesure singulièrement continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), c'est-à-dire que tous les singletons ont une mesure nulle et qu'il existe un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ tel que $\nu_{\text{sing}}(E) = 0$ alors que $\mathbb{R} \setminus E$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

Ainsi, nous pouvons décomposer les mesures ν_e et ν_m de (1.23) en $\nu_e = \nu_{e,pp} + \nu_{e,ac} + \nu_{e,sing}$ et $\nu_m = \nu_{m,pp} + \nu_{m,ac} + \nu_{m,sing}$ où nous avons repris les notations de (1.26). À ce stade, il est nécessaire de faire des choix de modèles.

- Tout d'abord, les mesures singulièrement continues sont des objets relativement pathologiques. Un exemple typique est la mesure associée à la fonction de Cantor, fonction qui est non constante, continue, croissante et dont la dérivée existe et s'annule presque partout [196, p. 20-21]. Ces mesures sont généralement considérées comme n'ayant pas de réalité physique (voir également [197, chapitres 6 à 10] pour une analyse plus complète). Nous considérons donc que $\nu_{e,sing} = 0$ et $\nu_{m,sing} = 0$ dans la suite.
- Ensuite, nous faisons l'hypothèse que ν_e et ν_m n'ont pas de partie absolument continue : $\nu_{e,acc} = 0$ et $\nu_{m,acc} = 0$. Ce choix n'est pas motivé par des considérations physiques ou mathématiques mais seulement par un choix de modèle. En particulier, nous verrons que les modèles de Drude (1.12) et (1.13) vérifient cette hypothèse en l'absence d'absorption ($\gamma = 0$).
- Enfin, pour des raisons essentiellement liées aux considérations de mise en œuvre numérique, nous ferons l'hypothèse que la somme des masses de Dirac de $\nu_{e,pp}$ et $\nu_{m,pp}$ sont des sommes finies.

Finalement, les mesures ν_e et ν_m , en prenant en compte ces deux hypothèses, sont simplement des sommes finies de masses de Dirac. En prenant de plus en compte la parité, nous obtenons donc à partir de (1.23) les expressions suivantes :

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \sum_{j=1}^{n_e} \frac{\Omega_{j,e}^2}{\omega^2 - \omega_{j,e}^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mu(\omega)}{\mu_0} = 1 - \sum_{k=1}^{n_m} \frac{\Omega_{k,m}^2}{\omega^2 - \omega_{k,m}^2}, \quad (1.27)$$

valables pour tout $\omega \in \mathbb{C}_+^*$.

1.1.3.4 Passage à la limite

Le but est maintenant de comprendre ce qu'il se passe lorsque ω se rapproche de l'axe réel, c'est-à-dire quand $\text{Im}\omega$ tend vers 0, les dénominateurs présents dans (1.27) pouvant s'annuler pour $\omega = \pm\omega_{j,e}$ et $\omega = \pm\omega_{k,m}$. La bonne manière d'interpréter ce passage à la limite est en fait au sens des distributions (voir par exemple [220]) et nous avons le résultat suivant :

Proposition 1.6. *La permittivité ε et la perméabilité μ données par (1.27) convergent, lorsque $\text{Im}\omega$ tend vers 0, respectivement vers*

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{n_e} \left[\mathcal{P} \frac{\Omega_{j,e}^2}{\omega^2 - \omega_{j,e}^2} + \frac{i\pi\Omega_{j,e}^2}{2\omega_{j,e}} (\delta(\omega + \omega_{j,e}) - \delta(\omega - \omega_{j,e})) \right], \quad (1.28)$$

et vers

$$\mu(\omega) = \mu_0 - \mu_0 \sum_{k=1}^{n_m} \left[\mathcal{P} \frac{\Omega_{k,m}^2}{\omega^2 - \omega_{k,m}^2} + \frac{i\pi\Omega_{k,m}^2}{2\omega_{k,m}} (\delta(\omega + \omega_{k,m}) - \delta(\omega - \omega_{k,m})) \right], \quad (1.29)$$

les convergences ayant lieu au sens des distributions. Ici, $\delta(\omega - a)$ représente la distribution de Dirac au point $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Voir l'annexe 1.B. □

1.1.3.5 Discussion sur l'absorption

Les formules (1.28) et (1.29) montrent que ε et μ ont nécessairement une partie imaginaire non nulle lorsque $\omega = \pm\omega_{j,e}$ et $\omega = \pm\omega_{k,m}$, autrement dit le milieu correspondant est nécessairement absorbant à ces fréquences. Une autre manière de le voir est d'utiliser les relations de Kramers-Kronig (1.24) et (1.25), les parties imaginaires de ε et μ ne peuvent être nulles sans que leur partie réelle le soit.

Nous allons cependant dans la suite négliger ces termes, pour obtenir les formes finales (en omettant également les valeurs principales) :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \sum_{j=1}^{n_e} \frac{\Omega_{j,e}^2}{\omega^2 - \omega_{j,e}^2} \right) \quad \text{et} \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \sum_{k=1}^{n_m} \frac{\Omega_{k,m}^2}{\omega^2 - \omega_{k,m}^2} \right). \quad (1.30)$$

Ces modèles généralisent celui de (1.13) dans le cas sans absorption ($\gamma = 0$).

Bien évidemment, puisque que nous avons négligé l'absorption, une telle permittivité ε et une telle perméabilité μ ne vérifient plus les relations de Kramers-Kronig (1.24) et (1.25) et donc violent la causalité. Cependant, nous pouvons donner une justification physique que ce choix n'est pas si absurde. Considérons seulement ε , le cas μ se traitant de la même manière. La première chose est de remarquer que la partie imaginaire de ε donnée par (1.28) n'est pas nulle seulement lorsque $\omega = \pm\omega_{j,e}$ pour un certain $j \in \{1, \dots, n_e\}$. Or la conductivité électrique σ_e du milieu correspondant est donnée par

$$\sigma_e(\omega) := \frac{\text{Im } \omega \varepsilon \omega}{\pi}, \quad \text{pour } \omega \in \mathbb{C}_+^*. \quad (1.31)$$

Il n'est pas difficile de montrer à partir de (1.28) que, lorsque $\text{Re } \omega = \pm\omega_{j,e}$, $\sigma_e(\omega)$ tend vers l'infini lorsque $\text{Im } \omega$ tend vers 0. En d'autres termes, le milieu se comporte comme un conducteur parfait aux fréquences $\pm\omega_{j,e}$ et le champ électrique correspondant $\hat{\mathbf{E}}$ est donc nul. Maintenant, si nous considérons le modèle (1.30) qui est *a priori* invalide, il est clair que ε prend des valeurs infinies lorsque $\omega = \pm\omega_{j,e}$. D'après les équations de Maxwell (1.5), nous avons donc nécessairement $\hat{\mathbf{E}} = 0$, ce qui rejoint les conclusions précédentes. En d'autres termes, prendre en compte ou non la partie imaginaire de ε dans (1.28) ne change rien, le champ électrique $\hat{\mathbf{E}}$ étant toujours nul aux fréquences $\pm\omega_{j,e}$ (les seules fréquences où la partie imaginaire n'est pas nulle). Cela justifie donc le choix de négliger la partie imaginaire.

1.2 Le modèle de Lorentz généralisé

À partir de maintenant, nous allons donc nous concentrer sur des modèles du type (1.30) appelés modèles de Lorentz généralisés. Nous considérons donc une permittivité ε et une perméabilité μ de la forme

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \sum_{j=1}^{n_e} \frac{\Omega_{j,e}^2}{\omega^2 - \omega_{j,e}^2} \right) \quad \text{et} \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \sum_{k=1}^{n_m} \frac{\Omega_{k,m}^2}{\omega^2 - \omega_{k,m}^2} \right), \quad (1.32)$$

où $\varepsilon_0 > 0$ (resp. $\mu_0 > 0$) est la permittivité (resp. la perméabilité) du vide, où les $\Omega_{j,e}$ (resp. $\Omega_{k,m}$) sont des constantes réelles non nulles et où les $\omega_{j,e}$ (resp. $\omega_{k,m}$) sont des constantes réelles deux-à-deux distinctes.

Nous considérons également le cas simple du modèle de Drude

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \right) \quad \text{et} \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega^2} \right), \quad (1.33)$$

correspondant à $n_e = n_m = 1$ et $\omega_{1,e} = \omega_{1,m} = 0$ dans (1.32).

Pour le modèle de Lorentz généralisé (1.32), bien que rien ne l'impose *a priori*, nous faisons l'hypothèse que $\omega_{j,e} \neq 0$ et $\omega_{k,m} \neq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n_e\}$ et $k \in \{1, \dots, n_m\}$ pour des raisons de concision ; le cas contraire nous obligerait à faire de nombreuses distinctions de cas qui alourdiraient inutilement notre propos (voir par ailleurs les remarques 1.7 et 1.18). Le cas où ces quantités sont nulles est traité dans le cas du modèle de Drude (1.33).

La particularité des modèles (1.32) est qu'ils peuvent admettre des plages de fréquences sur lesquelles à la fois la permittivité ε et la perméabilité μ sont négatives, ce qui donne lieu à des phénomènes propagatifs intéressants, comme la présence d'ondes inverses et un indice de réfraction négatif (voir section 1.3). À titre d'exemple, le modèle de Drude (1.33) possède trois régimes (voir la figure 1.1) :

1. Un régime où $|\omega| < \min(\Omega_e, \Omega_m)$, dans ce cas à la fois $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont négatives.
2. Un régime où $\min(\Omega_e, \Omega_m) < \omega < \max(\Omega_e, \Omega_m)$ (qui ne peut exister que si $\Omega_e \neq \Omega_m$). Dans ce cas $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont de signe opposé. En particulier, nous verrons qu'il n'y a pas d'ondes propagatives sur cette plage de fréquence (que nous appelons *band gap* ou tout simplement *gap*).
3. Un régime où $|\omega| > \max(\Omega_e, \Omega_m)$ et dans ce cas à la fois $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont positives : le milieu se comporte comme un diélectrique classique. En particulier, nous avons

$$\varepsilon(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \mu(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} \mu_0. \quad (1.34)$$

En d'autres termes le milieu se comporte comme le vide à haute fréquence.

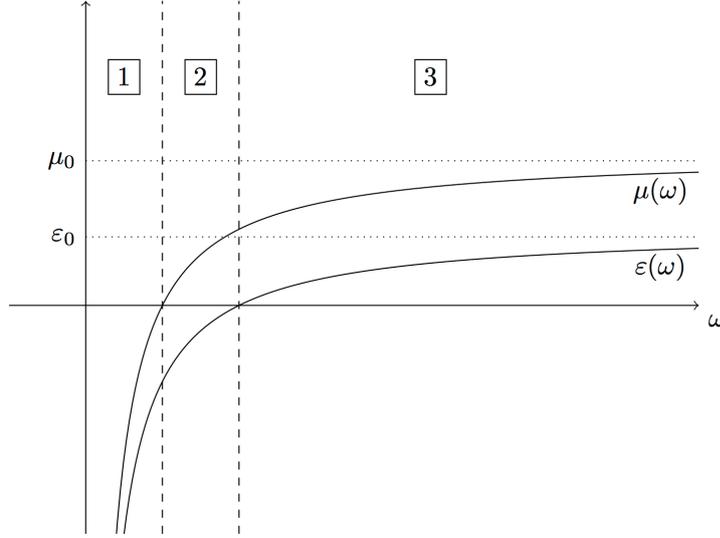


FIGURE 1.1 – Illustration des trois régimes possibles pour le modèle de Drude (1.33) dans le cas $\Omega_e > \Omega_m$. Régime 1 : $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0$. Régime 2 : $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ de signe opposé. Régime 3 : $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) > 0$.

1.2.1 Du régime fréquentiel au régime temporel

Donnons maintenant dans le régime temporel les équations de Maxwell correspondant au modèle de Lorentz généralisé (1.32), qui est donné dans le régime fréquentiel.

De la première ligne de la relation de constitution (1.4), en utilisant (1.32), nous obtenons

$$\hat{\mathbf{D}} = \varepsilon(\omega)\hat{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\hat{\mathbf{E}} - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{n_e} \frac{\Omega_{j,e}^2}{\omega^2 - \omega_{j,e}^2} \hat{\mathbf{E}}. \quad (1.35)$$

Introduisons alors les n_e champs auxiliaires \mathbf{P}_j définis par

$$(\omega_{j,e}^2 - \omega^2)\hat{\mathbf{P}}_j = \hat{\mathbf{E}}, \quad (j = 1, \dots, n_e), \quad (1.36)$$

de telle sorte que

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \mathbf{P}_j, \quad (j = 1, \dots, n_e). \quad (1.37)$$

Revenir en temps à partir de la relation (1.36) est immédiat. Cela conduit à une équation différentielle ordinaire du second ordre en temps de type oscillateur harmonique

$$(\partial_{tt}^2 + \omega_{j,e}^2)\mathbf{P}_j = \mathbf{E}, \quad (j = 1, \dots, n_e). \quad (1.38)$$

Il est évidemment possible de faire la même chose pour μ , ce qui conduit à l'introduction de n_m champs auxiliaires \mathbf{M}_k vérifiant

$$(\partial_{tt}^2 + \omega_{k,m}^2)\mathbf{M}_k = \mathbf{H}, \quad (k = 1, \dots, n_m), \quad (1.39)$$

et

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \sum_{k=0}^{n_m} \Omega_{k,m}^2 \mathbf{M}_k, \quad (k = 1, \dots, n_m). \quad (1.40)$$

En revenant aux équations de Maxwell (1.2) combinées avec (1.37), (1.36) et (1.40), nous obtenons finalement le modèle de Lorentz généralisé dans le domaine temporel

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{E} + \sum_{j=1}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \partial_t \mathbf{P}_j = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}, \\ \partial_t \mathbf{H} + \sum_{k=1}^{n_m} \Omega_{k,m}^2 \partial_t \mathbf{M}_k = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \\ (\partial_{tt}^2 + \omega_{j,e}^2) \mathbf{P}_j - \mathbf{E} = 0, \quad (j = 1, \dots, n_e), \\ (\partial_{tt}^2 + \omega_{k,m}^2) \mathbf{M}_k - \mathbf{H} = 0, \quad (k = 1, \dots, n_m). \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Il est utile de réécrire le système (1.41) sous la forme d'un système du premier ordre. Pour ce faire, introduisons de nouveaux champs auxiliaires \mathbf{J}_j et \mathbf{K}_k définis par

$$\mathbf{J}_j = \partial_t \mathbf{P}_j, \quad (j = 1, \dots, n_e) \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_k = \partial_t \mathbf{M}_k, \quad (k = 1, \dots, n_m). \quad (1.42)$$

Nous pouvons alors réécrire (1.41) sous la forme du système du premier ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{E} + \sum_{j=1}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \mathbf{J}_j = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}, \\ \partial_t \mathbf{H} + \sum_{k=1}^{n_m} \Omega_{k,m}^2 \mathbf{K}_k = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{J}_j + \omega_{j,e}^2 \mathbf{P}_j - \mathbf{E} = 0, \quad (j = 1, \dots, n_e), \\ \partial_t \mathbf{P}_j - \mathbf{J}_j = 0, \\ \partial_t \mathbf{K}_k + \omega_{k,m}^2 \mathbf{M}_k - \mathbf{H} = 0, \quad (k = 1, \dots, n_m), \\ \partial_t \mathbf{M}_k - \mathbf{K}_k = 0. \end{array} \right. \quad (1.43)$$

La dimension de ce système est $3(2 + 2n_e + 2n_m)$.

Dans le cas plus simple du modèle de Drude (1.33), les champs \mathbf{P} et \mathbf{M} ne sont plus nécessaires et nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{E} + \Omega_e^2 \mathbf{J} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}, \\ \partial_t \mathbf{H} + \Omega_m^2 \mathbf{K} = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{J} - \mathbf{E} = 0, \\ \partial_t \mathbf{K} - \mathbf{H} = 0, \end{array} \right. \quad (1.44)$$

qui est de dimension 12.

Remarque 1.7. L'hypothèse $\omega_{j,e} \neq 0$ et $\omega_{k,m} \neq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n_e\}$ et $k \in \{1, \dots, n_m\}$ pour le modèle de Lorentz généralisé (1.32) se traduit ici par le nombre d'inconnues. En effet, si certains $\omega_{j,e}$ et $\omega_{k,m}$ étaient nuls, les champs \mathbf{P}_j et \mathbf{M}_k correspondants dans (1.43) ne seraient plus nécessaires. C'est pour cela que le système de Drude (1.44) a seulement 12 inconnues et non $3(2 + 2 + 2) = 18$ car il n'y a pas besoin d'introduire des champs \mathbf{P} et \mathbf{M} .

1.2.2 Identité d'énergie

Avant de s'intéresser au caractère bien posé du système (1.43), nous établissons formellement une identité d'énergie. En particulier, cela montre que le système (1.43) n'est pas dissipatif, ce qui est lié au fait que ε et μ donnés par (1.32) sont réels. Ce point sera approfondi lors de l'étude des propriétés dispersives à la section 1.3.

Proposition 1.8. *Toute solution de (1.43) vérifie l'identité d'énergie*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m) = 0, \quad (1.45)$$

où nous avons posé

$$\begin{cases} \mathcal{E}_e = \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 (|\mathbf{J}_j|^2 + \omega_{j,e}^2 |\mathbf{P}_j|^2), \\ \mathcal{E}_m = \int_{\mathbb{R}^3} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \mu_0 \sum_{k=1}^{n_m} \Omega_{k,m}^2 (|\mathbf{K}_k|^2 + \omega_{k,m}^2 |\mathbf{M}_k|^2). \end{cases} \quad (1.46)$$

Démonstration. En multipliant (au sens du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3) la première ligne de (1.43) par \mathbf{E} , la seconde par \mathbf{H} , en sommant les deux égalités obtenues et en intégrant sur \mathbb{R}^3 , nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \right) = \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0 \sum_{j=0}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \mathbf{J}_j \cdot \mathbf{E} + \int_{\mathbb{R}^3} \mu_0 \sum_{k=0}^{n_m} \Omega_{k,m}^2 \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}, \quad (1.47)$$

les termes contenant des rotationnels se compensant grâce à une intégration par parties. De plus, en utilisant la troisième et quatrième lignes de (1.43), nous avons

$$\mathbf{J}_j \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J}_j \cdot (\partial_t \mathbf{J}_j + \omega_{j,e}^2 \mathbf{P}_j) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\mathbf{J}_j|^2 + \omega_{j,e}^2 |\mathbf{P}_j|^2). \quad (1.48)$$

En faisant la même chose pour la cinquième et sixième ligne de (1.43), nous obtenons bien (1.45). \square

1.2.3 Caractère bien posé

Pour étudier le système (1.43), il est tout d'abord nécessaire de se donner un cadre fonctionnel. Notons $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) := L^2(\mathbb{R}^3)^3$ l'espace de Hilbert des champs de vecteurs de \mathbb{R}^3 de carré intégrable et considérons l'espace $\mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathbb{R}^3)$ des champs à rotationnel de carré intégrable

$$\mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathbb{R}^3) := \{ \mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) : \nabla \times \mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \}. \quad (1.49)$$

C'est un espace de Hilbert muni de la norme $\| \cdot \|_{\text{rot}}$ définie par

$$\| \mathbf{X} \|_{\text{rot}} := \| \mathbf{X} \|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \| \nabla \times \mathbf{X} \|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (1.50)$$

Nous notons \mathcal{H} l'espace de Hilbert produit associé aux $2 + 2n_e + 2n_m$ inconnues de (1.43) défini par

$$\mathcal{H} := \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \left(\prod_{j=1, \dots, n_e} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \right)^2 \times \left(\prod_{k=1, \dots, n_m} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \right)^2 = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)^{2+2n_e+2n_m}. \quad (1.51)$$

Nous munissons \mathcal{H} de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ issue de l'identité d'énergie (1.46) :

$$\| \mathbf{U} \|_{\mathcal{H}} := \sqrt{\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m}, \quad \mathbf{U} \in \mathcal{H}, \quad (1.52)$$

où \mathcal{E}_e et \mathcal{E}_m sont définis par (1.46), avec

$$\mathbf{U} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}, (\mathbf{J}_j)_{j=1, \dots, n_e}, (\mathbf{P}_j)_{j=1, \dots, n_e}, (\mathbf{K}_k)_{k=1, \dots, n_m}, (\mathbf{M}_k)_{k=1, \dots, n_m})^T. \quad (1.53)$$

Nous pouvons alors réécrire (1.43) sous la forme d'un problème d'évolution auquel nous pouvons également ajouter une source \mathbf{F} et une condition initiale \mathbf{U}_0 :

$$\begin{cases} \mathbf{U}'(t) = \mathbb{A}\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t), \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \end{cases} \quad (1.54)$$

où $\mathbf{U} \in \mathcal{H}$ est le vecteur des inconnues défini par (1.53) et où \mathbb{A} est l'opérateur non borné dans \mathcal{H} défini par

$$\mathbb{A}\mathbf{U} := \begin{bmatrix} \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H} - \sum_{j=0}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \mathbf{J}_j \\ -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - \sum_{k=0}^{n_m} \Omega_{k,m}^2 \mathbf{K}_k \\ (\mathbf{E} - \omega_{j,e}^2 \mathbf{P}_j)_{j=1,\dots,n_e} \\ (\mathbf{J}_j)_{j=1,\dots,n_e} \\ (\mathbf{H} - \omega_{k,m}^2 \mathbf{M}_k)_{k=1,\dots,n_m} \\ (\mathbf{K}_k)_{k=1,\dots,n_m} \end{bmatrix}, \quad (1.55)$$

de domaine $D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H}$ donné par

$$D(\mathbb{A}) := \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathbb{R}^3) \times \left(\prod_{j=1,\dots,n_e} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \right)^2 \times \left(\prod_{k=1,\dots,n_m} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \right)^2. \quad (1.56)$$

Grâce à ce cadre fonctionnel, nous pouvons maintenant montrer le caractère bien posé de notre problème (1.54).

Théorème 1.9. *Soit $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A})$ et soit $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$. Alors le problème (1.54) admet une unique solution*

$$\mathbf{U} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(\mathbb{A})). \quad (1.57)$$

De plus, nous avons l'estimation d'énergie

$$\sqrt{(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m)(t)} \leq \sqrt{(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m)(0)} + \int_0^t \|\mathbf{F}(s)\|_{\mathcal{H}} ds, \quad (1.58)$$

où \mathcal{E}_e et \mathcal{E}_m sont définies par (1.46) et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ par (1.52).

La démonstration du théorème 1.9 rentre dans le cadre de la théorie des équations d'évolutions linéaires et est tout à fait standard. Il est par exemple possible d'utiliser le théorème de Hille-Yosida (voir par exemple [43, chapitre 7], [96, chapitre 7] ou encore [189]). La rédaction rigoureuse de cette démonstration nécessiterait des développements techniques fastidieux sans introduire de nouveauté essentielle, nous nous en abstenons donc dans ce manuscrit.

1.3 Analyse des propriétés dispersives

Nous souhaitons maintenant décrire plus finement les propriétés dispersives des milieux que nous étudions. Un outil privilégié pour cela est l'analyse par ondes planes. Soulignons que cette méthode n'est valable que pour les milieux homogènes, c'est-à-dire les milieux tels que la permittivité et la perméabilité ne dépendent pas du point de l'espace considéré.

1.3.1 Rappels d'analyse par ondes planes

1.3.1.1 Perturbation d'ordre zéro de systèmes hyperboliques

Nous renvoyons le lecteur à [140, 141] pour plus de détails sur la méthode d'analyse par ondes planes (parfois appelée analyse de Kreiss), dont nous rappelons ici les principales lignes.

Considérons un système d'inconnue \mathbf{U} de dimension d , posé en dimension n d'espace, qui est une perturbation d'ordre zéro d'un système hyperbolique :

$$\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + B\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\ell=1}^n A_\ell \partial_{x_\ell} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1.59)$$

où les A_ℓ et B sont des matrices $d \times d$ supposées constantes. Insistons sur le fait que la présence de la matrice B traduit le caractère dispersif des milieux considérés.

L'hyperbolicité du système non perturbé correspondant à $B = 0$ se traduit par le fait que pour tout $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\sum_{\ell=1}^n A_\ell k_\ell$ a des valeurs propres réelles. Cette propriété peut également s'interpréter comme la caractérisation de la non-dissipativité (c'est-à-dire l'absence d'absorption). Dans le cas d'un système de la forme (1.59), nous pouvons donner la définition suivante :

Définition 1.10. Le système (1.59) est dit *non-dissipatif* si pour tout $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\sum_{\ell=1}^n A_\ell k_\ell - iB$ a des valeurs propres réelles.

Il est possible de vérifier que le système de Lorentz généralisé (1.43) peut s'écrire sous la forme (1.59) et qu'il est non-dissipatif. Ce résultat est bien sûr à relier à la conservation d'énergie (1.45) comme nous allons le voir.

1.3.1.2 Ondes planes

L'analyse par ondes planes du système (1.59) consiste à rechercher des solutions sous la forme d'ondes planes harmoniques, c'est-à-dire sous la forme

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0 e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t)}, \quad (1.60)$$

où $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur d'amplitude, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'onde et $\omega \in \mathbb{C}$ la fréquence.

En injectant (1.60) dans (1.59), il est facile de voir qu'une onde plane est solution de (1.59) si, et seulement si, elle vérifie la relation de dispersion

$$F(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad \text{avec} \quad F(\mathbf{k}, \omega) := \det \left(-i\omega I_d + B - i \sum_{\ell=1}^n A_\ell \mathbf{k}_\ell \right), \quad (1.61)$$

où I_d est la matrice identité de dimension $d \times d$.

La relation de dispersion (1.61) est une équation polynomiale en ω de degré d paramétrée par \mathbf{k} . Elle admet donc d branches de solutions $\omega_j(\mathbf{k})$, $j = 1, \dots, d$, paramétrisées par \mathbf{k} . Celles-ci peuvent être réinterprétées comme les valeurs propres d'une matrice qui dépend polynomialement de \mathbf{k} . En utilisant des résultats bien connus de la théorie des perturbations pour les problèmes spectraux (voir par exemple [134, chapitre II, §1]), il est possible de montrer qu'il existe un façon de numérotter les branches $\omega_j(\mathbf{k})$ telles qu'elles soient analytiques par morceaux par rapport à chacune des variables réelles k_ℓ , $\ell = 1, \dots, n$, séparément.

Un cas particulier important est le cas des systèmes symétrisables qui correspond au cas où il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que toutes les matrices MA_ℓ soient symétriques et la matrice MB soit antisymétrique. Dans ce cas, d'une part nous avons la conservation en temps de l'énergie

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (M\mathbf{U}, \mathbf{U}), \quad (1.62)$$

et d'autre part, toujours en utilisant des résultats de la théorie des perturbations des matrices auto-adjointes (voir [134, chapitre II, §6]), il est possible de montrer que les branches $\omega_j(\mathbf{k})$ sont en fait analytiques partout (plus seulement par morceaux) par rapport à chaque variable k_ℓ , $\ell = 1, \dots, n$, séparément (toujours modulo une numérotation adéquate).

1.3.1.3 Caractère bien posé et stabilité

Rappelons la notion classique de caractère bien posé d'un système de la forme (1.59).

Définition 1.11. Le problème de Cauchy associé à (1.59) est dit *faiblement bien posé* (resp. *fortement bien posé*) si pour toute condition initiale $\mathbf{U}_0 := \mathbf{U}(t=0)$ donnée dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)^d$, $s > 0$ (resp. $s = 0$) il admet une unique solution \mathbf{U} vérifiant

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^d} \leq C e^{\alpha t} \|\mathbf{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^d}, \quad (1.63)$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si cette notion peut être satisfaisante d'un point de vue théorique, elle ne l'est certainement pas du point de vue numérique : l'estimation (1.63) autorise une croissante exponentielle si $\alpha > 0$. Il est alors nécessaire d'introduire la notion suivante.

Définition 1.12. Le problème de Cauchy associé à (1.59) est dit *faiblement stable* (resp. *fortement stable*) s'il est faiblement (resp. fortement) bien posé et que l'estimation (1.63) devient

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^d} \leq C(1+t)^s \|\mathbf{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^d}. \quad (1.64)$$

L'analyse par ondes planes donne une caractérisation beaucoup plus commode de ces deux définitions. En effet, remarquons que (1.60) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0 e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t)} = \mathbf{U}_0 e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \text{Re}(\omega)t} e^{\text{Im}(\omega)t}. \quad (1.65)$$

Nous voyons donc que l'existence de solutions ω dont la partie imaginaire est positive correspond à des ondes planes qui croissent exponentiellement en temps. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Proposition 1.13. *Le problème de Cauchy associé à (1.59) est (faiblement) bien posé si les parties imaginaires de toutes les branches $\omega_j(\mathbf{k})$, $j = 1, \dots, d$ solutions de (1.61) sont bornées supérieurement, c'est-à-dire qu'il existe un $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ nous avons*

$$\text{Im} \omega_j(\mathbf{k}) \leq \kappa. \quad (1.66)$$

De plus, il est (faiblement) stable si elles sont toutes négatives ou nulles, c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\text{Im} \omega_j(\mathbf{k}) \leq 0. \quad (1.67)$$

1.3.1.4 Vitesse de phase et vitesse de groupe

Dans cette partie, nous considérons une branche $\omega(\mathbf{k})$ de solutions de (1.61) qui est donc analytique (au moins par morceaux) par rapport à \mathbf{k} . La famille d'ondes planes (1.60) associée est appelée un *mode*.

En partant de la définition d'une onde plane (1.60), il est naturel de définir sa vitesse comme le rapport $\omega/|\mathbf{k}|$. C'est ce que nous appelons la vitesse de phase :

Définition 1.14. Pour un mode associé à la branche $\omega(\mathbf{k})$, sa *vitesse de phase* $\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k}))$ est définie par

$$\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) := \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}}, \quad (1.68)$$

où $\hat{\mathbf{k}} := \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ est le vecteur unitaire dans la direction \mathbf{k} .

Cependant, la vitesse de phase n'est plus la « bonne » notion de vitesse lorsque nous considérons non plus une seule onde plane mais une superposition d'ondes planes [124]. Pour s'en convaincre, plaçons nous en dimension 1 et considérons un paquet d'ondes planes $U(x, t)$ de la forme

$$U(x, t) = \int_{\mathbb{R}} a(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk, \quad (1.69)$$

où $a(k)$ est la fonction d'amplitude. Supposons que a soit concentrée autour d'un nombre d'onde k_0 , de sorte que nous avons le développement

$$\omega(k) \simeq \omega_0 + (k - k_0)\omega'_0, \quad (1.70)$$

où $\omega_0 := \omega(k_0)$ et $\omega'_0 := \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0)$. Injecter le développement (1.70) dans (1.69) conduit à

$$U(x, t) = e^{it(\omega_0 - k_0\omega'_0)} \int_{\mathbb{R}} a(k) e^{-ik(x - \omega'_0 t)} dk = e^{it(\omega_0 - k_0\omega'_0)} U(x - \omega'_0 t, 0). \quad (1.71)$$

En particulier, nous avons

$$|U(x, t)| = |U(x - \omega'_0 t, 0)|. \quad (1.72)$$

Cela montre que l'enveloppe du paquet d'onde U se déplace à la vitesse $\omega'_0 = \omega'(k_0)$ et non à la vitesse de phase $\omega(k_0)/k_0$.

La discussion précédente motive donc l'introduction de la notion suivante.

Définition 1.15. Pour un mode associé à la branche $\omega(\mathbf{k})$, sa *vitesse de groupe* $\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k}))$ est définie par

$$\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) := \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}). \quad (1.73)$$

Comme discuté plus haut, les branches sont au moins analytiques par morceaux (avec une numérotation adéquate), la vitesse de groupe est donc bien définie presque partout.

Pour des modèles très simples comme l'équation des ondes acoustiques, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales. Cependant pour des modèles plus compliqués elles peuvent être différentes, voire de directions opposées, comme nous allons le voir dans les sections suivantes. Introduisons dès maintenant la notion de modes directs et de modes inverses.

Définition 1.16. Le mode associé à la branche $\omega(\mathbf{k})$ est dite *direct* (resp. *inverse*) si

$$\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) > 0 \quad (\text{resp. } \mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) < 0). \quad (1.74)$$

1.3.2 Application aux modèles dispersifs

Reprenons maintenant nos modèles dispersifs décrits à la section 1.3. Pour des raisons de simplicité de notre propos, nous ferons l'hypothèse que notre milieu est non-dissipatif au sens de la définition 1.10.

En particulier, le modèle de Lorentz généralisé (1.43) est non-dissipatif et peut se mettre sous la forme d'une perturbation d'ordre zéro d'un système hyperbolique (1.59) avec $d = 3(2 + 2n_e + 2n_m)$, $n = 3$. Il est également possible de montrer que ce dernier est symétrisable. L'identité d'énergie (1.62) n'est alors rien d'autre que (1.45).

1.3.2.1 Calcul des solutions de la relation de dispersion

Calculer directement les solutions de la relation de dispersion (1.61) peut s'avérer délicat puisque qu'il s'agit de calculer le déterminant d'une grande matrice. Par exemple, pour le modèle de Lorentz généralisé avec seulement $n_e = n_m = 1$ il faut calculer le déterminant d'une matrice carrée de taille $3(2 + 2 \times 1 + 2 \times 1) = 18$. Il est plus facile de partir des équations de Maxwell harmoniques (1.5). Chercher des solutions de la relation de dispersion (1.61) revient à chercher une fréquence ω et des champs $(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}) \neq (0, 0)$ tels que

$$\begin{cases} -i\omega\varepsilon(\omega)\hat{\mathbf{E}} = i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{H}}, \\ -i\omega\mu(\omega)\hat{\mathbf{H}} = -i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}. \end{cases} \quad (1.75)$$

Cela n'est possible que si ω est solution de

$$\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega) [\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega) - |\mathbf{k}|^2]^2 = 0. \quad (1.76)$$

Nous pouvons donc distinguer deux types de solutions.

Premièrement, nous avons les solutions de $\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = 0$, ce qui correspond alors à des champs électriques $\hat{\mathbf{E}}$ ou des champs magnétiques $\hat{\mathbf{H}}$ à rotationnel nul. Les modes correspondants ne sont pas propagatifs mais statiques car les solutions ne dépendent pas de \mathbf{k} .

Maintenant, si $\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega) \neq 0$, nous sommes ramenés à une équation appelée relation de dispersion réduite :

$$\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = |\mathbf{k}|^2. \quad (1.77)$$

Puisque cette relation apparaît au carré dans (1.76), chaque solution ω de (1.77) est en fait solution double de la relation de dispersion d'origine (1.61). Les modes correspondants sont propagatifs.

Remarque 1.17. Les solutions de la relation de dispersion réduite (1.77) dépendent seulement de la norme $|\mathbf{k}|$ de \mathbf{k} . C'est une conséquence de l'isotropie des milieux considérés, ε et μ étant des scalaires et non des tenseurs.

Pour le modèle de Lorentz généralisé, il y a donc $2 + 2n_e + 2n_m$ modes non propagatifs : 2 pour $\omega = 0$, $2n_e$ pour $\varepsilon(\omega) = 0$ et $2n_m$ pour $\mu(\omega) = 0$. La relation de dispersion réduite (1.77) dans ce cas est une équation polynomiale en ω de degré $2 + 2n_e + n_m$. Puisque cette relation apparaît avec un carré dans la relation de dispersion générale (1.61), nous retrouvons bien $3(2 + 2n_e + 2n_m)$ solutions (en comptant les modes propagatifs et les modes non propagatifs), qui est bien la dimension du système (1.43).

Remarque 1.18. L'hypothèse que les $\omega_{j,e}$ et les $\omega_{k,m}$ ne sont pas nuls intervient ici. En effet, si ce n'était pas le cas, $\omega = 0$ serait un pôle au moins double de $\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$ donc $\omega = 0$ ne serait pas solution de $\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = 0$. Il y aurait donc moins de modes statiques. Ce fait est à rapprocher de la remarque 1.7.

Dans le cas simple du modèle de Drude (1.33), il est relativement aisé de faire les calculs explicitement. Calculons tout d'abord les solutions non propagatives, c'est-à-dire les solutions de $\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = 0$. Nous sommes dans le cas particulier où $\omega = 0$ est un pôle (quadruple) de $\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$ donc $\omega = 0$ n'est pas solution (voir la remarque ci-dessus). Nous avons donc seulement quatre solutions $\omega = \pm\Omega_e$ et $\omega = \pm\Omega_m$. Ensuite, la relation de dispersion réduite (1.77) se réduit à l'équation polynomiale $P_{\mathbf{k}}(\omega) = 0$, où $P_{\mathbf{k}}$ est le polynôme de degré 4 défini par

$$P_{\mathbf{k}} := X^4 - (\Omega_e^2 + \Omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2)X^2 + \Omega_e^2\Omega_m^2 = 0, \quad (1.78)$$

où $c := 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

Proposition 1.19. *Pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$, le polynôme $P_{\mathbf{k}}$ défini par (1.78) admet 4 racines distinctes $\pm\omega_j(\mathbf{k})$, $j = 1, 2$ qui dépendent uniquement de $|\mathbf{k}|$ et sont données par*

$$\begin{cases} \pm\omega_1(\mathbf{k}) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\Omega_e^2 + \Omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2 + \Sigma(|\mathbf{k}|)}, \\ \pm\omega_2(\mathbf{k}) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\Omega_e^2 + \Omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2 - \Sigma(|\mathbf{k}|)}, \end{cases} \quad (1.79)$$

où $\Sigma(|\mathbf{k}|) := \sqrt{(\Omega_e^2 - \Omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2)^2 + 4\Omega_e^2\Omega_m^2}$.

Démonstration. En définissant $W = \omega^2$, l'équation $P_{\mathbf{k}}(\omega) = 0$ se réduit à $W^2 - (\Omega_e^2 + \Omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2)W + \Omega_e^2\Omega_m^2 = 0$. Le discriminant de cette dernière équation est $\Sigma(|\mathbf{k}|)^2$. Par conséquent ses deux solutions sont réelles et données par

$$W_1 = \frac{\Omega_e^2 + \Omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2 + \Sigma(|\mathbf{k}|)}{2} \quad \text{et} \quad W_2 = \frac{\Omega_e^2 + \Omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2 - \Sigma(|\mathbf{k}|)}{2}. \quad (1.80)$$

Il est clair que $W_1 > 0$. En remarquant que le produit W_1W_2 de cette équation quadratique est donné par $\Omega_e^2\Omega_m^2 > 0$, nous avons nécessairement $W_2 > 0$. Prendre les racines carrées de W_1 et W_2 donne alors le résultat. \square

Nous avons donc bien 4 solutions correspondant à des modes non propagatifs et $4 \times 2 = 8$ solutions correspondant à des modes propagatifs, ce qui donne bien 12 solutions c'est-à-dire la dimension du système (1.44).

1.3.2.2 Présence d'ondes inverses

Maintenant que les modes sont calculés, nous cherchons à comprendre leurs comportements, notamment à travers leurs vitesses de phase et de groupe. À ce stade, il est utile d'introduire l'ensemble \mathcal{S} , appelé spectre, des valeurs atteintes par les solutions de (1.77) :

$$\mathcal{S} := \bigcup_{\omega \text{ sol. de (1.77)}} \{\omega(\mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (1.81)$$

Considérons maintenant $\omega(\mathbf{k}) \in \mathcal{S}$ une branche de solutions de la relation de dispersion réduite (1.77). En différentiant cette dernière par rapport à \mathbf{k} , nous obtenons

$$\left. \frac{d}{d\omega} [\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega)] \right|_{\omega=\omega(\mathbf{k})} \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) = 2\mathbf{k}. \quad (1.82)$$

Nous avons donc

$$\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) = \frac{\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} \frac{1}{\mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k}))}, \quad (1.83)$$

où \mathfrak{D} est la fonction définie par

$$\mathfrak{D}(\omega) := \frac{1}{2\omega} \frac{d}{d\omega} [\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega)]. \quad (1.84)$$

Nous obtenons donc

$$\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) = \mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k}))^{-1}. \quad (1.85)$$

En particulier, en utilisant la définition 1.16 (1.85) implique que le mode associé à $\omega(\mathbf{k})$ est direct (resp. inverse) lorsque $\mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k})) > 0$ (resp. $\mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k})) < 0$) :

Proposition 1.20. *Un milieu caractérisé par sa permittivité ε et sa perméabilité μ admet des modes inverses si, et seulement si*

$$\{\omega \in \mathcal{S} : \mathfrak{D}(\omega) < 0\} \neq \emptyset. \quad (1.86)$$

Dans le cas simple du modèle de Drude (1.33), la fonction \mathfrak{D} se calcule aisément :

$$\mathfrak{D}(\omega) := \frac{1}{c^2 \omega^4} (\omega^4 - \Omega_e^2 \Omega_m^2). \quad (1.87)$$

Nous avons donc

$$\{\omega \in \mathcal{S} : \mathfrak{D}(\omega) < 0\} = (-\min(\Omega_e, \Omega_m), \min(\Omega_e, \Omega_m)) \neq \emptyset. \quad (1.88)$$

Le modèle de Drude admet donc des modes inverses. Remarquons que l'ensemble $\{\omega \in \mathcal{S} : \mathfrak{D}(\omega) < 0\}$ coïncide avec l'ensemble des ω tels que $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ soient simultanément négatives. Ce n'est pas un hasard comme nous allons le voir à la section suivante.

1.3.2.3 Propriété de croissance

En développant l'expression (1.84) de la fonction \mathfrak{D} , nous obtenons

$$\mathfrak{D}(\omega) = \mu(\omega) \frac{d}{d\omega} [\omega \varepsilon(\omega)] + \varepsilon(\omega) \frac{d}{d\omega} [\omega \mu(\omega)]. \quad (1.89)$$

Nous constatons que le signe de la dérivée de $\omega \varepsilon(\omega)$ et de $\omega \mu(\omega)$ joue un rôle prépondérant dans le signe de \mathfrak{D} . Introduisons la définition suivante :

Définition 1.21. Un milieu caractérisé par sa permittivité ε et sa perméabilité μ possède la *propriété de croissance* si

$$\frac{d}{d\omega} [\omega \varepsilon(\omega)] > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\omega} [\omega \mu(\omega)] > 0. \quad (1.90)$$

Proposition 1.22. *Tous les modèles de Lorentz généralisés (1.32) vérifient*

$$\frac{d}{d\omega} [\omega \varepsilon(\omega)] > \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\omega} [\omega \mu(\omega)] > \mu_0. \quad (1.91)$$

En particulier, ils possèdent la propriété de croissance (1.90).

Démonstration. Considérons uniquement le cas de ε , le cas μ se traitant exactement de la même manière. Il suffit de remarquer que

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{j,e}^2} \right) = -\frac{\omega_{j,e}^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \omega_{j,e}^2)^2}, \quad (j = 1, \dots, n_e), \quad (1.92)$$

pour conclure que

$$\frac{d}{d\omega} [\omega \varepsilon(\omega)] = \varepsilon_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \frac{\omega_{j,e}^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \Omega_{j,e}^2)^2} \right) > \varepsilon_0. \quad (1.93) \quad \square$$

Remarque 1.23. Il est en fait possible de montrer que tous les matériaux tels que ε et μ soient causales, passives et symétriques vérifient la propriété de croissance (et même (1.91)). Il s'agit d'une conséquence des formules de Kramer-Kronig (1.24) et il est également possible de retrouver ce résultat par des considérations énergétiques (voir [147, §61 et §64]).

Grâce à (1.89) et la propriété de croissance (1.90), nous pouvons spécifier le résultat de la proposition 1.20 :

Proposition 1.24. *Un milieu caractérisé par sa permittivité ε et sa perméabilité μ et vérifiant la propriété de croissance (1.90) admet des ondes inverses si, et seulement si*

$$\{\omega \in \mathcal{S} : \varepsilon(\omega) < 0 \text{ et } \mu(\omega) < 0\} \neq \emptyset. \quad (1.94)$$

Par conséquent, pour le modèle de Lorentz généralisé, il suffit qu'il existe une plage de fréquence pour laquelle ε et μ sont simultanément négatives pour que nous ayons des ondes inverses.

Remarque 1.25. Dans le cas (qui semble hypothétique, voir la remarque 1.23) d'un matériau ne vérifiant pas la propriété de croissance, la caractérisation (1.94) n'est plus valable. Considérons par exemple un milieu défini par

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^2 \quad \text{et} \quad \mu(\omega) = \mu_0. \quad (1.95)$$

Le produit $\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$ coïncide avec celui pour le modèle de Drude (1.33) avec $\Omega_e = \Omega_m = \omega_p$. Par conséquent, la fonction \mathfrak{D} est la même dans les deux cas. Notre milieu admet donc des ondes inverses car nous avons toujours

$$\{\omega \in \mathcal{S} : \mathfrak{D}(\omega) < 0\} = (-\min(\Omega_e, \Omega_m), \min(\Omega_e, \Omega_m)) \neq \emptyset. \quad (1.96)$$

Pourtant ε et μ sont toujours des quantités positives. Il est facile de vérifier qu'ici la propriété de croissance n'est plus vérifiée car

$$\frac{d}{d\omega} [\omega \varepsilon(\omega)] = \varepsilon_0 \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)\omega^2 + 3\omega_p^2}{\omega^4}, \quad (1.97)$$

est négatif pour $\omega^2 < \omega_p^2$.

1.3.2.4 Vocabulaire des métamatériaux, indice négatif

Terminons ce chapitre par quelques remarques de vocabulaire et sur la conséquence de la présence d'ondes inverses. Dans la communauté physicienne et chez les ingénieurs, un milieu pour lequel il existe une plage de fréquence sur laquelle à la fois ε et μ sont négatifs est appelé métamatériau doublement négatif (*double negative metamaterial*, DNG, en anglais).

Comme nous l'avons constaté à la proposition 1.24, tout matériau vérifiant la propriété de croissance (ce qui est une hypothèse extrêmement raisonnable, voir la proposition 1.22 et la remarque 1.23) admet donc des modes inverses. C'est pourquoi les DNG sont parfois appelés milieux à ondes inverses (*backward wave media* en anglais).

Si ces matériaux ont déclenché un vif intérêt dans la communauté scientifique, c'est parce qu'ils autorisent des indices de réfraction négatifs [228, 247]. En effet, l'indice de réfraction n d'un milieu caractérisé par sa permittivité ε et sa perméabilité μ est défini par [124, 147] :

$$n(\omega) = \lim_{\eta \searrow 0} \sqrt{\varepsilon(\omega + i\eta)\mu(\omega + i\eta)}, \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.98)$$

où \sqrt{z} est la détermination de la racine carrée telle que

$$\text{Im } \sqrt{z} > 0, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+. \quad (1.99)$$

Avec une telle convention, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$ nous avons

$$\lim_{\eta \searrow 0} \sqrt{x^2 + i\eta} = |x| \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \searrow 0} \sqrt{x^2 - i\eta} = -|x| < 0. \quad (1.100)$$

En utilisant la formule de Taylor, il vient

$$\varepsilon(\omega + i\eta)\mu(\omega + i\eta) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega) + i\eta [\varepsilon(\omega)\mu'(\omega) + \mu(\omega)\varepsilon'(\omega)] + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (1.101)$$

À l'instar de la propriété de croissance (1.90), il est possible de montrer que $\varepsilon'(\omega) > 0$ et $\mu'(\omega) > 0$ pour $\omega > 0$ (au moins pour le modèle de Lorentz généralisé et les matériaux décrits à la remarque 1.23). Par conséquent, si $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ ont le même signe, alors la partie imaginaire de $\varepsilon(\omega + i\eta)\mu(\omega + i\eta)$ a ce même signe d'après (1.101). En utilisant (1.100), nous avons donc $n(\omega) > 0$ (resp. $n(\omega) < 0$) si à la fois $\varepsilon(\omega) > 0$ et $\mu(\omega) > 0$ (resp. $\varepsilon(\omega) < 0$ et $\mu(\omega) < 0$), c'est-à-dire que nous sommes en présence d'une onde directe (resp. inverse).

Pour cette raison, les métamatériaux doublement négatifs sont aussi appelés métamatériaux à indice négatif (*negative index metamaterial*, *NIM* en anglais). Une des conséquences les plus spectaculaires de cet indice de réfraction négatif est l'« inversion » des lois de Snell-Descartes qui décrivent en termes géométriques le comportement d'une onde à l'interface de deux milieux d'indices de réfraction n_1 et n_2 . Plus précisément, nous avons

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (1.102)$$

où θ_1 (resp. θ_2) est l'angle de l'onde incidente (resp. réfractée) par rapport à la normale à l'interface au point d'incidence. Lorsque n_1 et n_2 sont tous les deux positifs, l'onde réfractée est de l'autre côté de la normale par rapport à l'onde incidente. Mais lorsque n_1 et n_2 sont de signes opposés, l'onde réfractée est du même côté (voir la figure 1.2). Une application possible est la conception de lentilles plates [190] qui autoriseraient une refocalisation parfaite permettant de s'affranchir de la limite de diffraction des lentilles classiques (voir la figure 1.3).

1.A Annexe : fonctions de Herglotz

Cette annexe a pour but de définir les fonctions de Herglotz et de présenter quelques unes de leurs propriétés. Nous renvoyons le lecteur à [198] pour un panorama complet sur ces fonctions.

Définition 1.26. Une *fonction de Herglotz* est une fonction holomorphe du demi-plan supérieur ouvert \mathbb{C}_+^* à valeurs dans le demi-plan supérieur fermé \mathbb{C}^+ .

Herglotz considéra plutôt des fonctions définies sur le disque unité [118]. Nevanlinna a étendu ces résultats à des fonctions définies sur le demi-plan supérieur via des techniques de transformations conformes [174]. C'est pour cela que les fonctions de Herglotz sont parfois appelées fonctions de Nevanlinna.

Un cas particulier important pour notre propos est le cas des fonctions de Herglotz symétriques.

Définition 1.27. Soit h une fonction de Herglotz. Elle est dite *symétrique* lorsque

$$h(z) = -\bar{h}(-\bar{z}), \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}_+^*. \quad (1.103)$$

Le principal résultat de cette théorie est le théorème de représentation suivant :

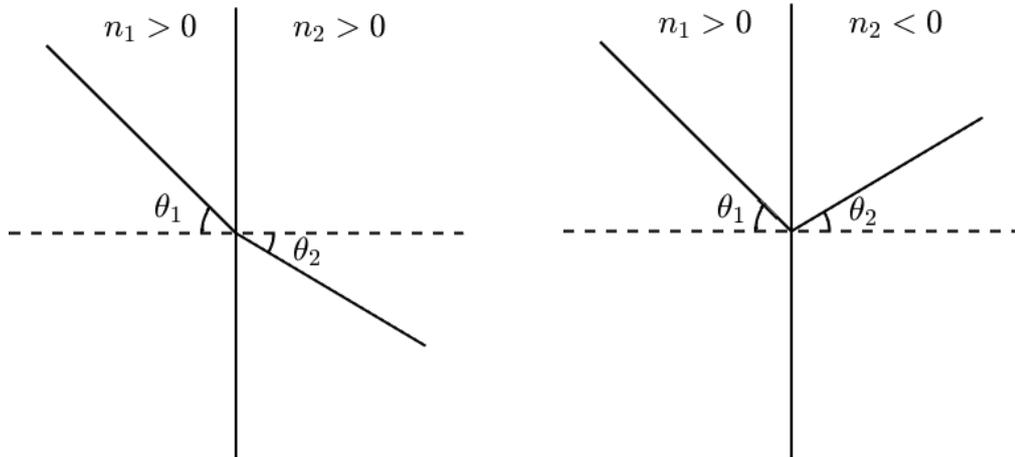


FIGURE 1.2 – Lois de Snell-Descartes décrivant la réfraction d'une onde entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 . À gauche, le cas classique $n_1, n_2 > 0$ et à droite le cas d'un indice négatif $n_2 < 0$ (la normale entre les deux milieux est indiquée en pointillé).

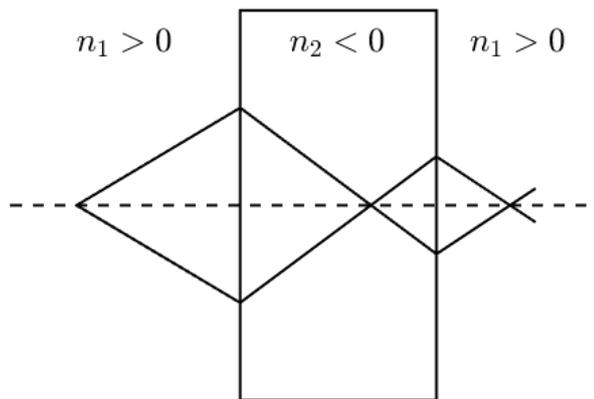


FIGURE 1.3 – Schéma descriptif d'une lentille plate, l'indice négatif n_2 permet une refocalisation parfaite.

Théorème 1.28 (Nevanlinna). Une fonction $h: \mathbb{C}_+^* \rightarrow \mathbb{C}_+$ est de Herglotz si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ et ν une mesure de Borel vérifiant $\int_{\mathbb{R}} d\nu(\xi)/(1 + \xi^2) < +\infty$ tels que

$$h(z) = \alpha + \beta z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{\xi}{1 + \xi^2} \right) d\nu(\xi), \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}_+^*. \quad (1.104)$$

Il est possible de montrer que α , β et ν dans la représentation (1.104) sont uniques et caractérisables :

Proposition 1.29. Soit h une fonction de Herglotz. Les paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ ainsi que la mesure de Borel ν dans la représentation (1.104) de h sont uniques. De plus, ces quantités sont données par $\alpha = \operatorname{Re} h(i)$, par

$$\beta = \lim_{\substack{z \in \mathcal{S}(\theta) \\ |z| \rightarrow +\infty}} \frac{h(z)}{z}, \quad \text{pour tout } \theta \in (0, \pi), \quad (1.105)$$

où $\mathcal{S}(\theta)$ est le secteur angulaire défini par

$$\mathcal{S}(\theta) := \{z \in \mathbb{C} : \theta \leq \arg z \leq \pi - \theta\}; \quad (1.106)$$

et par

$$\nu((\lambda_1, \lambda_2]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1 + \delta}^{\lambda_2 + \delta} \operatorname{Im} h(\lambda + i\varepsilon) d\lambda, \quad (1.107)$$

pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-\infty \leq \lambda_1 < \lambda_2 < +\infty$ (formule d'inversion de Stieltjes).

Pour les fonctions de Herglotz symétriques, la représentation (1.104) se simplifie :

Proposition 1.30. Soit h une fonction de Herglotz symétrique. La représentation (1.104) s'écrit

$$h(z) = \beta z + \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{\xi^2 - z^2} d\nu(\xi), \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}_+^* \quad (1.108)$$

et de plus la mesure de Borel ν est paire : $\nu(-\xi) = \nu(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

1.B Annexe : démonstration de la proposition 1.6

Considérons seulement le cas de la permittivité ε , le cas de la perméabilité μ étant identique. Par linéarité et par le fait que

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_{j,e}^2} = \frac{1}{2\omega_{j,e}} \left(\frac{1}{\omega - \omega_{j,e}} - \frac{1}{\omega + \omega_{j,e}} \right), \quad (1.109)$$

il suffit pour démontrer la proposition 1.6 de démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.31. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\eta > 0$ et soit T_η la distribution réelle associée à la fonction localement intégrable $\xi \in \mathbb{R} \mapsto 1/((\xi + i\eta) - a) \in \mathbb{C}$. Alors nous avons la limite suivante au sens des distributions :

$$\lim_{\eta \searrow 0} T_\eta = \mathcal{P} \frac{1}{\xi - a} - i\pi\delta_a. \quad (1.110)$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle T_\eta, \phi \rangle &= \int_{|\xi - a| > \varepsilon} \frac{\phi(\xi)}{(\xi + i\eta) - a} d\xi + \int_{|\xi - a| \leq \varepsilon} \frac{\phi(\xi) - \phi(a)}{(\xi + i\eta) - a} d\xi + \int_{|\xi - a| \leq \varepsilon} \frac{\phi(a)}{(\xi + i\eta) - a} d\xi \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (1.111)$$

D'après le théorème de convergence dominée, nous obtenons pour la première intégrale

$$\lim_{\eta \searrow 0} I_1 = \int_{|\xi - a| > \varepsilon} \frac{\phi(\xi)}{\xi - a} d\xi. \quad (1.112)$$

Pour I_2 , en faisant un développement de Taylor $\phi(\xi) - \phi(a) = (\xi - a)\phi'(a) + \mathcal{O}((\xi - a)^2)$ nous obtenons

$$\lim_{\eta \searrow 0} I_2 = \phi'(a) \int_{|\xi-a| \leq \varepsilon} 1 \, d\xi + \int_{|\xi-a| \leq \varepsilon} \mathcal{O}(\xi - a) \, d\xi = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.113)$$

Enfin, pour I_3 , un calcul direct montre que

$$I_3 = -2i\phi(a) \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) \xrightarrow{\eta \searrow 0} -i\pi\phi(a). \quad (1.114)$$

Finalement, nous avons

$$\lim_{\eta \searrow 0} \langle T_\eta, \phi \rangle = \int_{|\xi-a| > \varepsilon} \frac{\phi(\xi)}{\xi - a} \, d\xi - i\pi\phi(a) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.115)$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons bien le résultat annoncé. \square

CHAPITRE

2

SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR LE MODÈLE DE LORENTZ GÉNÉRALISÉ

Sommaire

2.1 Construction des schémas numériques	52
2.1.1 Discrétisation en temps	52
2.1.2 Discrétisation en espace	56
2.2 Illustration des propriétés dispersives du modèle de Drude	57
2.2.1 Ondes directes, ondes inverses et band gap	58
2.2.2 Indice de réfraction négatif et lentille plate	59
2.A Annexe : démonstration du théorème 2.3	62

Nous souhaitons dans ce chapitre développer une méthode numérique efficace afin de simuler la propagation des ondes pour le modèle de Lorentz généralisé (1.43), en particulier illustrer les propriétés dispersives décrites au chapitre précédent comme la présence d'ondes inverses et la possibilité d'avoir des indices de réfraction négatif.

Contrairement à certains schémas pour le modèle de Lorentz déjà étudiés dans la littérature (voir par exemple [156]), notre but ici est d'obtenir un schéma numérique robuste, c'est-à-dire que sa condition de stabilité de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) est la même que pour celle du vide, donc indépendante des paramètres du modèle de Lorentz. Cela permet notamment de ne pas pénaliser les temps de calculs lors de la résolution de problèmes où plusieurs milieux, dispersifs et non dispersifs, sont présents (ce qui est le cas pour nos problèmes de transmission).

Notre approche couplera donc une approche classique concernant la discrétisation en espace (nous allons utiliser des différences finies sur des grilles décalées mais d'autres choix comme des éléments finis mixtes ou une méthode de Galerkin discontinue auraient été possibles) avec une discrétisation judicieusement choisie pour la partie en temps, basée sur des différences finies (méthodes de type *Finite Difference Time Domain* [144, 213]).

Ce chapitre s'organise comme suit : nous présentons tout d'abord une méthode de discrétisation en temps relativement indépendante de la discrétisation en espace pour le système de Lorentz (1.43) qui admet la même condition CFL que celle du vide et basée sur une méthode de différence finie (schéma de Yee temporel). Ensuite, nous nous concentrons à décrire la discrétisation en espace, elle aussi basée sur une méthode de différences finies sur des grilles décalées. Enfin, nous présentons quelques expériences numériques utilisant le cas particulier du modèle de Drude (1.44) pour mettre en évidence la présence d'ondes inverses et d'indices de réfraction négatifs.

2.1 Construction des schémas numériques

Pour des raisons de simplicité de discours et de mise en œuvre informatique, nous avons choisi de nous placer en dimension 2 d'espace, contrairement au chapitre précédent où nous considérons la dimension 3. De manière complètement arbitraire, nous avons choisi le cas où le champ électrique est un champ vectoriel de taille 2 : $\mathbf{E} = (E_x, E_y)^T$ et le champ H est un champ scalaire (mais tout ce qui suit s'adapte sans problème au cas où c'est le champ magnétique qui est vectoriel et le champ électrique qui est scalaire). Par conséquent, les champs auxiliaires \mathbf{J}_j et \mathbf{P}_j seront également vectoriels de taille 2, et les champs auxiliaires K_k et M_k seront scalaires. Enfin, introduisons l'opérateur rotationnel vectoriel $\nabla \times \cdot$, qui s'applique à un champ scalaire X , défini par

$$\nabla \times X := \begin{bmatrix} \partial_y X \\ -\partial_x X \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

ainsi que l'opérateur rotationnel scalaire $\nabla \times \cdot$, qui s'applique à un champ $\mathbf{X} = (X_x, X_y)^T$ vectoriel de taille 2, défini par

$$\nabla \times \mathbf{X} := \partial_x X_y - \partial_y X_x. \quad (2.2)$$

Dans ce cadre, le système (1.43) posé en dimension 3 devient en dimension 2 le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{E} + \sum_{j=1}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \mathbf{J}_j = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times H, \\ \partial_t H + \sum_{k=1}^{n_m} \Omega_{k,m}^2 K_k = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{J}_j + \omega_{j,e}^2 \mathbf{P}_j - \mathbf{E} = 0, \quad (j = 1, \dots, n_e), \\ \partial_t \mathbf{P}_j - \mathbf{J}_j = 0, \\ \partial_t K_k + \omega_{k,m}^2 M_k - H = 0, \quad (k = 1, \dots, n_m), \\ \partial_t M_k - K_k = 0. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Ce système, de dimension $2(1 + 2n_e) + (1 + 2n_m)$, hérite de toutes les propriétés mathématiques et dispersives du système originel (1.43) : il est bien posé, vérifie une identité d'énergie analogue à (1.45), peut admettre des ondes inverses, etc.

Le système (2.3) étant posé dans tout l'espace \mathbb{R}^2 , nous allons nous restreindre à un domaine $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ borné et nous considérons des conditions de conducteur parfait sur la frontière $\partial\mathcal{O}$ (supposée régulière) :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \quad (2.4)$$

Avec ce choix, le rotationnel vectoriel et le rotationnel scalaire sont adjoints.

Remarque 2.1. Depuis le début du manuscrit, nous avons considéré des matériaux homogènes, c'est-à-dire que les $\Omega_{j,e}$, $\omega_{j,e}$, $\Omega_{k,m}$ et $\omega_{k,m}$ sont des constantes. Cependant, tout ce qui va suivre pourrait s'adapter sans peine au cas où ces quantités dépendent de l'espace. Notamment, la discrétisation en temps que nous allons présenter est valable pour des matériaux hétérogènes.

2.1.1 Discrétisation en temps

Dans cette partie, nous nous intéressons à la discrétisation en temps du système (2.3). Pour le moment, nous restons volontairement vagues sur la méthode numérique utilisée pour la discrétisation en espace. Nous supposons que nous disposons d'une formulation variationnelle de (2.3) dans des espaces fonctionnels adéquats et nous considérons alors le même problème dans des espaces d'approximation de dimension finie qui sont construits sur un maillage de taille typique h , paramètre d'approximation qui est amené à tendre vers 0. Nous supposons simplement que les approximations des champs \mathbf{E} , \mathbf{J}_j et \mathbf{P}_j d'une part, H , K_k et M_k d'autre part, sont construits sur les mêmes espaces d'approximations V_e^h et V_m^h respectivement.

Typiquement, nous pourrions utiliser une méthode d'éléments finis mixte [26, 127], une méthode de type Galerkin discontinue [7, 119], une méthode de différences finies comme le schéma de Yee sur des grilles spatiales décalées [213, 243] (comme ce sera le cas dans la suite), etc. Ces méthodes produisent toutes un système semi-discrétisé en espace de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_e^h \partial_t E^h + \sum_{j=1}^{n_e} \mathbb{M}_{\Omega_{j,e}^2}^h J_j^h = \varepsilon_0^{-1} \mathbb{K}^h H^h, \\ \mathbb{M}_m^h \partial_t H^h + \sum_{k=1}^{n_m} \mathbb{M}_{\Omega_{k,m}^2}^h K_k^h = -\mu_0^{-1} (\mathbb{K}^h)^\top E^h, \\ \mathbb{M}_e^h \partial_t J_j^h + \mathbb{M}_{\omega_{j,e}^2}^h P_j^h - \mathbb{M}_e^h E^h = 0, & (j = 1, \dots, n_e), \\ \mathbb{M}_e^h \partial_t P_j^h - \mathbb{M}_e^h J_j^h = 0, \\ \mathbb{M}_m^h \partial_t K_k^h + \mathbb{M}_{\omega_{k,m}^2}^h M_k^h - \mathbb{M}_m^h H^h = 0, & (k = 1, \dots, n_m), \\ \mathbb{M}_m^h \partial_t M_k^h - \mathbb{M}_m^h K_k^h = 0. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Ci-dessus, X^h désigne indifféremment le vecteur des degrés de liberté associé à l'approximation d'un champ scalaire X ou d'un champ vectoriel \mathbf{X} . Par exemple, E^h est le vecteur des degrés de liberté correspondant à $\mathbf{E}^h \in V_e^h$, approximation du champ vectoriel \mathbf{E} , et H^h correspond à l'approximation du champ scalaire H . Nous avons également noté :

- \mathbb{M}_e^h (resp. \mathbb{M}_m^h) la matrice de masse correspondant à l'approximation de l'identité de V_e^h (resp. V_m^h) ;
- $\mathbb{M}_{\Omega_{j,e}^2}^h$ et $\mathbb{M}_{\omega_{j,e}^2}^h$ les matrices de masse correspondant à l'approximation de la multiplication par $\Omega_{j,e}^2$ et $\omega_{j,e}^2$ dans V_e^h ;
- $\mathbb{M}_{\Omega_{k,m}^2}^h$ et $\mathbb{M}_{\omega_{k,m}^2}^h$ les matrices de masse correspondant à l'approximation de la multiplication par $\Omega_{k,m}^2$ et $\omega_{k,m}^2$ dans V_m^h ;
- \mathbb{K}^h la matrice de rigidité correspondant à l'approximation du rotationnel vectoriel envoyant V_m^h sur V_e^h , sa transposée $(\mathbb{K}^h)^\top$ envoyant V_e^h sur V_m^h est alors la matrice d'approximation du rotationnel scalaire.

Remarque 2.2. Dans le cas où le milieu est homogène, les matrices $\mathbb{M}_{\Omega_{j,e}^2}^h$ et $\mathbb{M}_{\omega_{j,e}^2}^h$ (resp. $\mathbb{M}_{\Omega_{k,m}^2}^h$ et $\mathbb{M}_{\omega_{k,m}^2}^h$) sont juste des multiples de \mathbb{M}_e^h (resp. \mathbb{M}_m^h). Cependant, nous construisons nos schémas en temps dans un cadre plus général où le milieu peut être hétérogène (voir la remarque 2.1), et dans ce cas ces matrices ne sont plus simplement des multiples de \mathbb{M}_e^h ou \mathbb{M}_m^h .

De manière tout à fait analogue à la conservation de l'énergie (1.45), nous pouvons montrer la conservation de l'énergie semi-discrète

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_e^h + \mathcal{E}_m^h) = 0, \quad (2.6)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_e^h = \varepsilon_0 \mathbb{M}_e^h E^h \cdot E^h + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{n_e} \mathbb{M}_{\Omega_{j,e}^2}^h (J_j^h \cdot J_j^h + \mathbb{M}_{\omega_{j,e}^2}^h P_j^h \cdot P_j^h), \\ \mathcal{E}_m^h = \mu_0 \mathbb{M}_m^h H^h \cdot H^h + \mu_0 \sum_{k=1}^{n_m} \mathbb{M}_{\Omega_{k,m}^2}^h (K_k^h \cdot K_k^h + \mathbb{M}_{\omega_{k,m}^2}^h M_k^h \cdot M_k^h), \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où \cdot désigne le produit scalaire euclidien usuel.

2.1.1.1 Schémas aux différences finies sur des grilles décalées

Dans l'optique de produire un schéma en temps efficace, nous voulons que d'une part celui-ci redonne le schéma standard de Yee en temps correspondant au vide, c'est-à-dire lorsque $\Omega_{j,e} = 0$ et $\Omega_{j,m} = 0$

pour tout $j = 1, \dots, n_e$ et $k = 1, \dots, n_m$; et d'autre part qu'il soit stable sous la même condition de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) que celle correspondante au cas du vide. La technique standard pour ce faire est de coupler le schéma de Yee en temps classique sur des grilles décalées [213, 243] avec des schémas implicite les termes d'ordre 0, typiquement avec un schéma de type Crank-Nicholson. Cette approche est relativement classique et a déjà été utilisée dans le contexte des milieux dispersifs et des métamatériaux, voir par exemple [23, 193]. Introduisons un pas de temps $\Delta t > 0$. Pour un vecteur de degré de liberté X^h , notons $X^{h,n+\delta}$ son approximation au temps $t^{n+\delta} = (n+\delta)\Delta t$ avec $\delta = 0$ ou $\delta = 1/2$.

Considérons tout d'abord à titre d'exemple les équations de Maxwell dans le vide

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times H, \\ \partial_t H = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Le système semi-discrétisé correspondant est alors

$$\begin{cases} \mathbb{M}_e^h \partial_t E^h = \varepsilon_0^{-1} \mathbb{K}^h H^h, \\ \mathbb{M}_m^h \partial_t H^h = -\mu_0^{-1} (\mathbb{K}^h)^\top E^h. \end{cases} \quad (2.9)$$

Le schéma de Yee en temps est alors donné par [213, 243] :

$$\begin{cases} \mathbb{M}_e^h \frac{E^{h,n+1} - E^{h,n}}{\Delta t} = \varepsilon_0^{-1} \mathbb{K}^h H^{h,n+\frac{1}{2}}, \\ \mathbb{M}_m^h \frac{H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\mu_0^{-1} (\mathbb{K}^h)^\top E^{h,n}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ainsi, le champ électrique E^h vit sur la grille $\{n\Delta t\}$ alors que le champ électrique H^h vit sur la grille $\{(n+1/2)\Delta t\}$.

Comme annoncé plus haut, nous allons rendre implicite les termes d'ordre 0 intervenant dans (2.3). Par exemple, considérons seulement la première équation de (2.3) dans le cas d'un pôle simple ($n_e = 1$) :

$$\partial_t \mathbf{E} + \Omega_e^2 \mathbf{J} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times H, \quad (2.11)$$

dont la version semi-discrétisée est

$$\mathbb{M}_e^h \partial_t E^h + \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h J^h = \varepsilon_0^{-1} \mathbb{K}^h H^h. \quad (2.12)$$

Ici, il pourrait sembler naturel que J^h vive sur la même grille temporelle que celle de $\partial_t E^h$ et H^h , c'est-à-dire $\{(n+1/2)\Delta t\}$. Nous allons en fait faire un autre choix : J^h va vivre sur la même grille temporelle que celle de E^h , c'est-à-dire $\{n\Delta t\}$. Nous devons alors rendre le terme en J^h ci-dessus implicite. Pour ce faire, nous utilisons un schéma de type Crank-Nicholson faisant intervenir la moyenne de J^h à l'instant n et à l'instant $n+1$, ce qui donne :

$$\mathbb{M}_e^h \frac{E^{h,n+1} - E^{h,n}}{\Delta t} + \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h \frac{J^{h,n} + J^{h,n+1}}{2} = \varepsilon_0^{-1} \mathbb{K}^h H^{h,n+\frac{1}{2}}. \quad (2.13)$$

En suivant cette démarche, nous pouvons donc donner le schéma de Yee en temps du système (2.3)

que nous considérons dans la suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_e^h \frac{E^{h,n+1} - E^{h,n}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{n_e} \mathbb{M}_{\Omega_{j,e}^2}^h \frac{J_j^{h,n} + J_j^{h,n+1}}{2} = \varepsilon_0^{-1} \mathbb{K}^h H^{h,n+\frac{1}{2}}, \\ \mathbb{M}_m^h \frac{H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \sum_{k=1}^{n_m} \mathbb{M}_{\Omega_{k,m}^2}^h \frac{K_k^{h,n+\frac{1}{2}} + K_k^{h,n-\frac{1}{2}}}{2} = -\mu_0^{-1} (\mathbb{K}^h)^\top E^{h,n}, \\ \mathbb{M}_e^h \frac{J_j^{h,n+1} - J_j^{h,n}}{\Delta t} + \mathbb{M}_{\omega_{j,e}^2}^h \frac{P_j^{h,n} + P_j^{h,n+1}}{2} = \mathbb{M}_e^h \frac{E^{h,n} + E^{h,n+1}}{2}, \quad (j = 1, \dots, n_e), \\ \mathbb{M}_e^h \frac{P_j^{h,n+1} - P_j^{h,n}}{\Delta t} = \mathbb{M}_e^h \frac{J_j^{h,n} + J_j^{h,n+1}}{2}, \\ \mathbb{M}_m^h \frac{K_k^{h,n+\frac{1}{2}} - K_k^{h,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \mathbb{M}_{\omega_{k,m}^2}^h \frac{M_k^{h,n+\frac{1}{2}} + M_k^{h,n-\frac{1}{2}}}{2} = \mathbb{M}_m^h \frac{H^{h,n+\frac{1}{2}} + H^{h,n-\frac{1}{2}}}{2}, \quad (k = 1, \dots, n_m), \\ \mathbb{M}_m^h \frac{M_k^{h,n+\frac{1}{2}} - M_k^{h,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \mathbb{M}_m^h \frac{K_k^{h,n+\frac{1}{2}} + K_k^{h,n-\frac{1}{2}}}{2}. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Remarquons que les champs E^h , J_j^h et P_j^h vivent sur la grille temporelle $\{n\Delta t\}$ et les champs H^h , K_k^h et M_k^h sur la grille $\{(n+1/2)\Delta t\}$. Tous les termes d'ordre 0 ont bien été rendus implicites, à chaque fois en prenant la moyenne aux instants n et $n+1$ pour les champs E^h , J_j^h et P_j^h , ainsi que la moyenne aux instants $n-1/2$ et $n+1/2$ pour les champs H^h , K_k^h et M_k^h .

Comme annoncé dans nos objectifs, la condition de stabilité de Courant–Friedrichs–Lewy (condition CFL) du schéma (2.14) n'est rien d'autre que la condition CFL classique du schéma de Yee en temps correspondant au vide. En particulier, elle ne dépend pas des constantes $\Omega_{j,e}$, $\Omega_{k,m}$, $\omega_{j,e}$ et $\omega_{k,m}$:

Théorème 2.3. *La condition de stabilité de Courant–Friedrichs–Lewy du système (2.14) est*

$$\frac{c\Delta t}{2} \|\mathbb{K}^h\| \leq 1, \quad (2.15)$$

où $c := 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ est la vitesse de la lumière dans le vide et où nous avons défini

$$\|\mathbb{K}^h\| := \sup_{(U^h, V^h)} \frac{\mathbb{K}^h U^h \cdot V^h}{|U^h|_e |V^h|_m}, \quad (2.16)$$

avec

$$|U^h|_e := (\mathbb{M}_e^h U^h \cdot U^h)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad |V^h|_m := (\mathbb{M}_m^h V^h \cdot V^h)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

Démonstration. Voir l'annexe 2.A. □

2.1.1.2 Discussion sur le coût de calcul supplémentaire

Bien que l'implication des termes d'ordre 0 permette d'avoir la condition CFL (2.15) qui est la même que celle du vide, ce qui constitue un avantage indéniable, nous pouvons légitimement nous inquiéter du coût de calcul supplémentaire induit. En effet, le schéma (2.14) nécessite *a priori* la résolution à chaque pas de temps de nombreux systèmes linéaires faisant intervenir des matrices de masse. À titre d'exemple, considérons seulement la partie électrique de (2.14) dans le cas d'un seul pôle ($n_e = 1$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_e^h \frac{E^{h,n+1} - E^{h,n}}{\Delta t} + \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h \frac{J^{h,n} + J^{h,n+1}}{2} = \varepsilon_0^{-1} \mathbb{K}^h H^{h,n+\frac{1}{2}}, \\ \mathbb{M}_e^h \frac{J^{h,n+1} - J^{h,n}}{\Delta t} = \mathbb{M}_e^h \frac{E^{h,n} + E^{h,n+1}}{2}. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Les expressions de $E^{h,n+1}$ et $J^{h,n+1}$ sont alors données par

$$\begin{cases} E^{h,n+1} = \left(\mathbb{M}_e^h + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h \right)^{-1} \left[\left(\mathbb{M}_e^h - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h \right) E^{h,n} - \Delta t \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h J^{h,n} + \varepsilon_0^{-1} \Delta t \mathbb{K}^h H^{h,n+\frac{1}{2}} \right], \\ J^{h,n+1} = \left(\mathbb{M}_e^h + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h \right)^{-1} \left[\left(\mathbb{M}_e^h - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h \right) J^{h,n} + \Delta t \mathbb{M}_e^h E^{h,n} + \varepsilon_0^{-1} \frac{\Delta t^2}{2} \mathbb{K}^h H^{h,n+\frac{1}{2}} \right]. \end{cases} \quad (2.19)$$

Il faudrait donc inverser à chaque pas de temps deux systèmes linéaires du type $(\mathbb{M}_e^h + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h)U = b$ (sans compter ceux pour la partie magnétique).

Fort heureusement, il est possible de rendre ce coût négligeable grâce aux techniques de condensation de masse, *mass lumping* en anglais (voir par exemple [69, 70, 105]). Il s'agit de méthodes permettant d'obtenir des matrices de masse diagonales, dont l'inversion est alors quasi-immédiate (il suffit simplement de prendre les inverses des éléments diagonaux). Il existe de nombreuses façons d'obtenir de telles matrices de masse, en utilisant par exemple des règles de quadrature adaptées pour les éléments finis. À noter que la méthode de différences finies que nous allons utiliser dans la suite conduit naturellement à des matrices de masse diagonales.

Ce faisant, le calcul à chaque pas de temps de (2.19) n'est pas très couteux : il suffit de calculer au préalable avant le début de la boucle temporelle (*preprocessing*) l'inverse de la matrice $\mathbb{M}_e^h + \Delta t^2/4\mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h$, qui est diagonale. Ainsi, (2.19) ne nécessite que des produits matrices-vecteurs faisant intervenir des matrices diagonales, à l'exception de \mathbb{K}^h , qui de toute façon est déjà présente même dans le cas du vide.

En conclusion, nos schémas ne sont pas coûteux en temps de calcul à condition d'avoir utilisé une technique de condensation de masse afin d'obtenir des matrices de masse diagonales. Mentionnons cependant que les systèmes du type (2.3) ont un nombre d'inconnues qui peut être élevé si n_e et/ou n_m est grand (et encore plus en dimension 3). Le coût en terme de mémoire peut alors devenir un problème.

2.1.2 Discrétisation en espace

Nous avons choisi d'utiliser la méthode classique des différences finies pour la discrétisation spatiale, basée sur des grilles décalées [213, 243]. Combinée avec la discrétisation en temps décrite dans la section précédente, cela nous donne un schéma de type Yee adapté aux modèles de Lorentz généralisés.

Plus précisément, donnons-nous deux pas d'espace $\Delta x, \Delta y > 0$. Dans la suite, n , α et β désigneront des entiers relatifs. Notons $X_{\alpha+\delta_x, \beta+\delta_y}^{n+\delta_t}$ la valeur d'un champ scalaire X au temps $(n + \delta_t)\Delta t$ et au point $((\alpha + \delta_x)\Delta x, (\beta + \delta_y)\Delta y)$, où δ_t, δ_x et δ_y sont égaux à 0 ou à 1/2. Les différents champs $\mathbf{E} = (E_x, E_y)^T$, $\mathbf{J}_j = (J_{j,x}, J_{j,y})^T$, $\mathbf{P}_j = (P_{j,x}, P_{j,y})^T$, H , K_k et M_k intervenant dans (2.3) sont alors discrétisés sur différentes grilles décalées :

- les champs E_x , $J_{j,x}$ et $P_{j,x}$ sont discrétisés sur les grilles $\{n\Delta t\}$, $\{(\alpha + 1/2)\Delta x\}$ et $\{\beta\Delta y\}$;
- les champs E_y , $J_{j,y}$ et $P_{j,y}$ sont discrétisés sur la grille $\{n\Delta t\}$, $\{\alpha\Delta x\}$ et $\{(\beta + 1/2)\Delta y\}$;
- les champs H , K_k et M_k sont discrétisés sur la grille $\{(n+1/2)\Delta t\}$, $\{(\alpha+1/2)\Delta x\}$ et $\{(\beta+1/2)\Delta y\}$.

Avec ce choix, les opérateurs différentiels ∂_x et ∂_y sont approximés par

$$(\partial_x X)_{\alpha+\delta_x, \beta+\delta_y}^{n+\delta_t} \simeq \frac{X_{\alpha+\delta_x+\frac{1}{2}, \beta+\delta_y}^{n+\delta_t} - X_{\alpha+\delta_x-\frac{1}{2}, \beta+\delta_y}^{n+\delta_t}}{\Delta x}, \quad (2.20)$$

pour un champ X discrétisé sur la grille $\{(n + \delta_t)\Delta t\}$, $\{(\alpha + \delta_x + 1/2)\Delta x\}$ et $\{(\beta + \delta_y)\Delta y\}$, ainsi que

$$(\partial_y Y)_{\alpha+\delta_x, \beta+\delta_y}^{n+\delta_t} \simeq \frac{Y_{\alpha+\delta_x, \beta+\delta_y+\frac{1}{2}}^{n+\delta_t} - Y_{\alpha+\delta_x, \beta+\delta_y-\frac{1}{2}}^{n+\delta_t}}{\Delta y}, \quad (2.21)$$

pour un champ Y discrétisé sur la grille $\{(n + \delta_t)\Delta t\}$, $\{(\alpha + \delta_x)\Delta x\}$ et $\{(\beta + \delta_y + 1/2)\Delta y\}$. Quant à elles, les matrices de masse sont simplement égales à l'identité multipliée par la constante correspondante. Par exemple, $\mathbb{M}_{\Omega_{j,e}^2}^h = \Omega_{j,e}^2 I$ (pour des matériaux homogènes).

Finalement, en combinant la discrétisation en temps (2.14) avec la discrétisation en espace décrite ci-dessus, nous obtenons un schéma de Yee adapté pour les modèles de Lorentz généralisés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1} - (E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \frac{(J_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n + (J_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1}}{2} = \mu_0^{-1} \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \\ \frac{(E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{n_e} \Omega_{j,e}^2 \frac{(J_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n + (J_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1}}{2} = -\mu_0^{-1} \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{\alpha-\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \\ \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \sum_{k=1}^{n_m} \Omega_{k,m}^2 \frac{(K_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (K_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \\ = \varepsilon_0^{-1} \left[\frac{(E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+1}^n - (E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n}{\Delta y} - \frac{(E_y)_{\alpha+1,\beta+\frac{1}{2}}^n - (E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right], \\ \frac{(J_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1} - (J_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n}{\Delta t} + \omega_{j,e}^2 \frac{(P_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n + (P_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1}}{2} = \frac{(E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n + (E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1}}{2}, \\ \frac{(J_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1} - (J_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \omega_{j,e}^2 \frac{(P_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n + (P_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1}}{2} = \frac{(E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n + (E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1}}{2}, \\ \frac{(P_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1} - (P_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n}{\Delta t} = \frac{(J_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n + (J_{j,x})_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1}}{2}, \\ \frac{(P_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1} - (P_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = \frac{(J_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n + (J_{j,y})_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1}}{2}, \\ \frac{(K_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (K_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \omega_{k,m}^2 \frac{(M_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + (M_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} = \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2}, \\ \frac{(M_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (M_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(K_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^n + (K_k)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+1}}{2}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Nous pouvons spécifier la condition CFL (2.15) dans le cas particulier du schéma (2.22) :

Théorème 2.4. *La condition de stabilité de Courant–Friedrichs–Lewy du schéma (2.22) est*

$$c\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \leq 1. \quad (2.23)$$

En particulier, lorsque $\Delta x = \Delta y = h$, la condition (2.23) devient $c\Delta t/\Delta x \leq \sqrt{2}/2$.

Démonstration. Ce théorème se déduit immédiatement du théorème 2.3 en utilisant le résultat classique suivant (voir par exemple [213]) :

$$\frac{\|\mathbb{K}^h\|}{2} = \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}, \quad (2.24)$$

où \mathbb{K}^h est la matrice associée à la discrétisation du rotationnel scalaire par (2.20) et (2.21). \square

2.2 Illustration des propriétés dispersives du modèle de Drude

Nous mettons maintenant en œuvre le schéma ci-dessus afin d'illustrer les propriétés dispersives qui ont été décrites au chapitre précédent. Nous souhaitons notamment mettre en évidence la présence d'ondes

inverses et la possibilité d'obtenir des indices de réfractons négatifs.

Nous nous concentrons dans cette partie sur le cas particulier du modèle de Drude (1.33)–(1.44). Le schéma correspondant s'obtient également comme un cas particulier de (2.22) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1} - (E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n}{\Delta t} + \Omega_e^2 \frac{(J_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n + (J_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1}}{2} = \mu_0^{-1} \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \\ \frac{(E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \Omega_e^2 \frac{(J_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n + (J_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1}}{2} = -\mu_0^{-1} \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{\alpha-\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \\ \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \Omega_m^2 \frac{(K)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (K)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \\ = \varepsilon_0^{-1} \left[\frac{(E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+1}^n - (E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n}{\Delta y} - \frac{(E_y)_{\alpha+1,\beta+\frac{1}{2}}^n - (E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right], \\ \frac{(J_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1} - (J_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n}{\Delta t} = \frac{(E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n + (E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^{n+1}}{2}, \\ \frac{(J_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1} - (J_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = \frac{(E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n + (E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^{n+1}}{2}, \\ \frac{(K)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (K)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2}. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

2.2.1 Ondes directes, ondes inverses et band gap

Rappelons que le modèle de Drude (1.33) admet trois régimes aux comportements bien distincts (voir la figure 1.1) :

1. le régime $|\omega| < \min(\Omega_e, \Omega_m)$ où à la fois $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont négatives : présence d'ondes inverses ;
2. le régime $\min(\Omega_e, \Omega_m) < |\omega| < \max(\Omega_e, \Omega_m)$ (qui ne peut exister que si $\Omega_e \neq \Omega_m$) où $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont de signe opposé : pas de propagation d'ondes (band gap) ;
3. le régime $|\omega| > \max(\Omega_e, \Omega_m)$ où à la fois $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont positives : présence d'ondes directes.

Nos premières expériences visent à représenter ces trois régimes. Tout d'abord, nous adimensionnons notre problème de sorte que $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ (la vitesse des ondes dans le vide est donc $c = 1$, la vitesse des ondes dans le milieu de Drude étant alors nécessairement inférieure). Nous considérons comme paramètres pour le modèle de Drude $\Omega_e = 4$ et $\Omega_m = 2$ et nous prenons comme domaine de calcul $\mathcal{O} := (-10, 10)^2$. Tous les champs sont nuls à l'instant $t = 0$ et nous ajoutons une source de la forme $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}) \sin(\omega^* t)$ où g est une fonction dont le support est inclus dans la boule unité $B(0, 1)$. Le choix de la fréquence d'excitation ω^* va permettre de nous placer dans les différents régimes décrits ci-dessus. Plus précisément, la source agit sur le champ magnétique (le champ scalaire), c'est-à-dire que la troisième ligne de (2.25) devient

$$\begin{aligned} & \frac{H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \Omega_m^2 \frac{(K)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (K)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \\ & = \varepsilon_0^{-1} \left[\frac{(E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta+1}^n - (E_x)_{\alpha+\frac{1}{2},\beta}^n}{\Delta y} - \frac{(E_y)_{\alpha+1,\beta+\frac{1}{2}}^n - (E_y)_{\alpha,\beta+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right] \\ & \quad + g \left(\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \Delta y \right) \sin(\omega^* n \Delta t), \end{aligned} \quad (2.26)$$

où g est la gaussienne radiale définie par

$$g(x, y) = e^{-50(x^2+y^2)}, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.27)$$

À noter que pour $x^2 + y^2 = 1$, nous avons $g(x, y) = e^{-50} \simeq 1,9287 \times 10^{-22}$ qui est bien inférieur à la précision machine de 10^{-16} , nous pouvons donc considérer que g est d'un point de vue numérique à support compact inclus dans $B(0, 1)$.

Nous avons choisi pour l'analyse de prendre des conditions de conducteur parfait (2.4) sur le bord $\partial\mathcal{O}$. Cependant, avec un tel choix, nous aurions nécessairement des réflexions des ondes sur la frontière qui viendraient parasiter la visualisation des résultats. Nous avons choisi ici d'anticiper et d'utiliser les couches absorbantes parfaitement adaptées (perfectly matched layers), qui sont décrites et analysées plus précisément dans les deux chapitres suivants, pour la présentation des résultats (nous aurions pu également prendre un domaine de calcul très grand et stopper la simulation avant que les ondes atteignent les bords).

La figure 2.1 montre quelques instantanés du champ H à différents instants pour trois valeurs de ω^* :

1. $\omega^* = 1 < 2 = \min(\Omega_e, \Omega_m)$, nous constatons la présence d'ondes inverses, qui donnent l'illusion de revenir vers le centre parce que la vitesse de phase pointe vers l'intérieur du domaine alors que la vitesse de groupe pointe bien vers l'extérieur ;
2. $\omega^* = 3 \in (2, 4) = (\min(\Omega_e, \Omega_m), \max(\Omega_e, \Omega_m))$, il n'y a pas de propagation d'onde (band gap) ;
3. $\omega^* = 5 > 4 = \max(\Omega_e, \Omega_m)$, nous sommes en présence d'ondes directes, le milieu se comporte comme un diélectrique classique.

Il est malheureusement assez difficile de distinguer les différents types d'ondes sur des instantanés. Pour palier cela, nous invitons le lecteur à regarder en ligne les vidéos correspondantes aux instantanés de la figure 2.1 sur ma chaîne Youtube "Valentin Vinoles"¹, vidéo « Wave propagation in negative index metamaterial »².

2.2.2 Indice de réfraction négatif et lentille plate

Finissons ce chapitre en illustrant la possibilité d'obtenir des indices de réfraction négatifs comme cela a été décrit au chapitre précédent, section 1.3.2.4, en simulant la lentille plate décrite à la figure 1.3. Notre domaine de simulation est $\mathcal{O}_g \cup \mathcal{O}_\ell \cup \mathcal{O}_d$, avec $\mathcal{O}_g = (-10, 0) \times (-10, 10)$ le milieu à gauche de la lentille correspondant au vide (sur lequel nous avons les équations de Maxwell classiques), $\mathcal{O}_\ell = (0, 10) \times (-10, 10)$ le milieu correspondant à la lentille rempli d'un matériau de Drude avec $\Omega_e = \Omega_m = 6\sqrt{2} \simeq 8,49$ et $\mathcal{O}_d = (10, 20) \times (-10, 10)$ le milieu à droite de la lentille, lui aussi rempli correspondant au vide. Nous imposons une source de la forme $f(\mathbf{x}, t) = g(x+5, y) \sin(\omega^* t)$ où g est donnée par (2.27) (il s'agit donc d'une gaussienne radiale en espace centrée en $(-5, 0)$) et où $\omega^* = 6$, de telle sorte que $\varepsilon(\omega^*) = \mu(\omega^*) = -1$, ce qui correspond à un indice de réfraction négatif égal à -1 dans la lentille \mathcal{O}_ℓ , l'indice de réfraction étant égal à 1 dans \mathcal{O}_g et \mathcal{O}_d . La figure 2.2 montre quelques instantanés du champ H à différents instants. Nous observons bien une refocalisation de l'onde à la fois dans le matériau de Drude et à droite dans le vide. Nous constatons donc que \mathcal{O}_ℓ agit bien comme une lentille plate, conformément au schéma décrit par la figure 1.3.

Une nouvelle fois, nous invitons le lecteur à regarder en ligne la vidéo « Negative refraction in metamaterials making perfect lenses »³ correspondant à la figure 2.2.

¹accessible à l'adresse <https://www.youtube.com/user/dota2Val>

²https://www.youtube.com/watch?v=64_LV0rEGt4

³<https://www.youtube.com/watch?v=FmPmEB4xUKk>

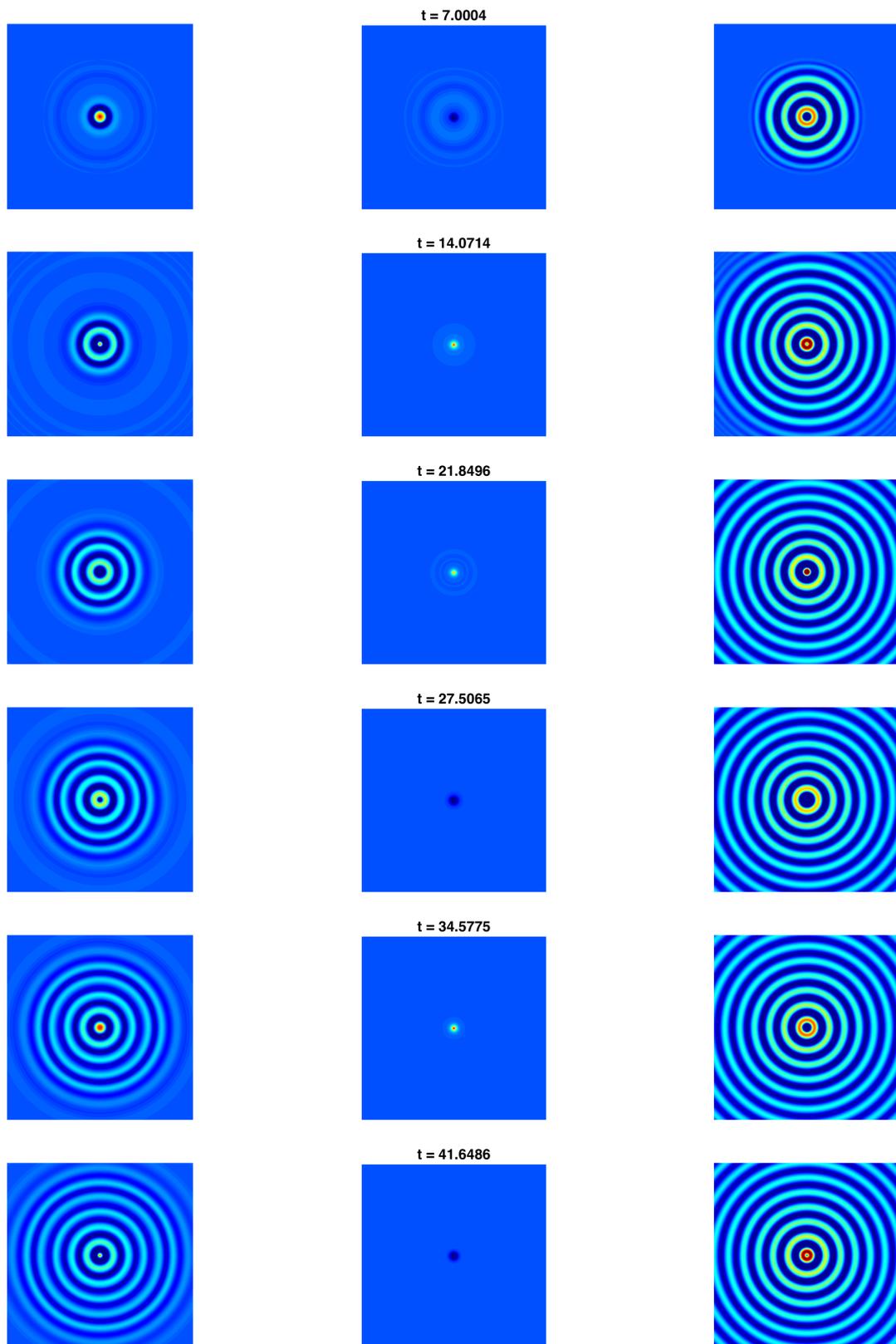


FIGURE 2.1 – Instantanés du champ H à différents instants pour trois valeurs de ω^* : $\omega^* = 1$ (à gauche, ondes inverses), $\omega^* = 3$ (au milieu, band gap) et $\omega^* = 5$ (à droite, ondes directes).

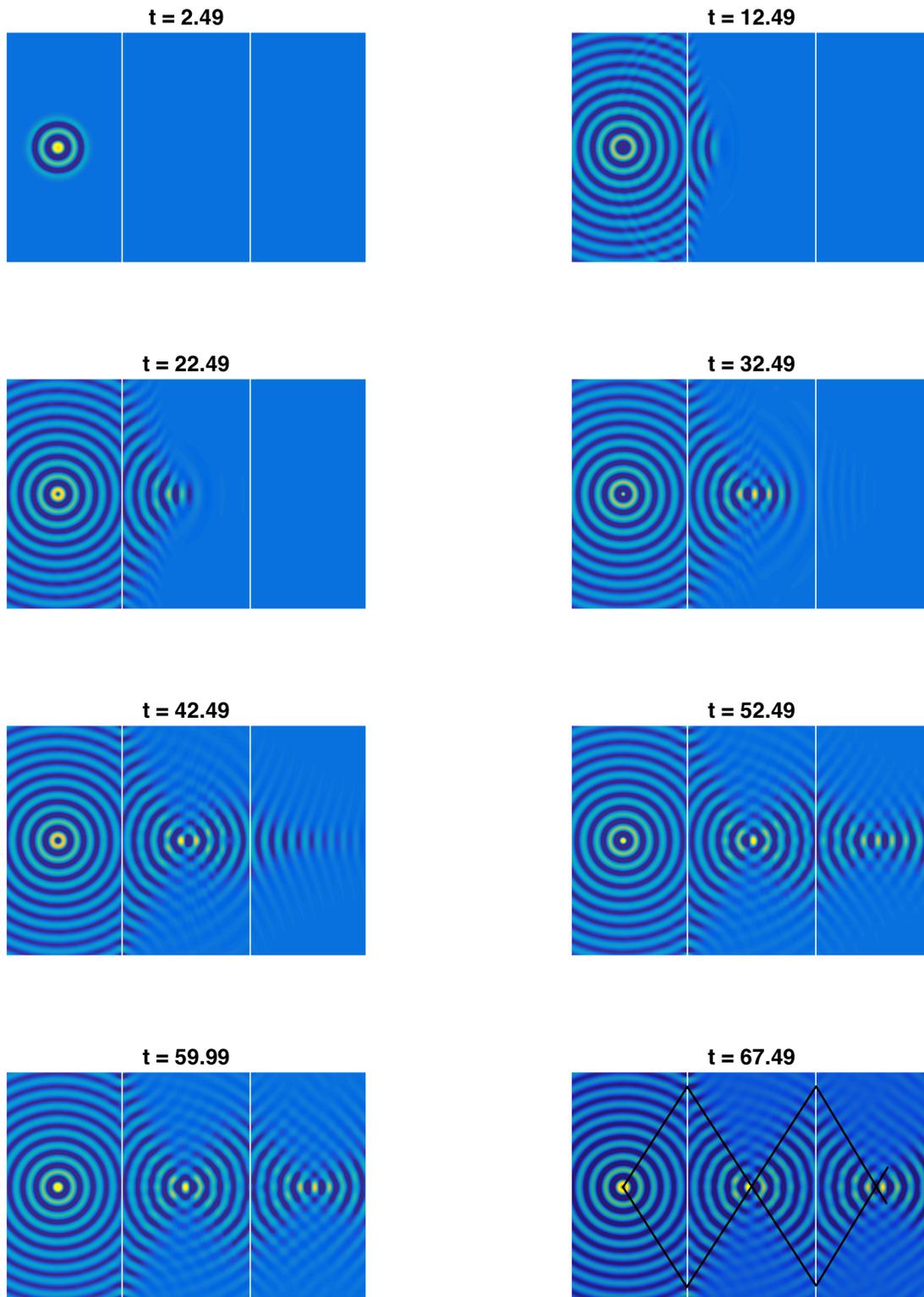


FIGURE 2.2 – Instantanés du champ H à différents instants. Nous avons superposé sur le dernier les rayons comme sur la figure 1.3.

2.A Annexe : démonstration du théorème 2.3

Pour des raisons de simplicité, nous considérons uniquement le cas où ε et μ n'ont qu'un seul pôle : $m_e = m_m = 1$ (les indices j et k sont donc omis dans la suite). La démonstration s'adapte sans problème au cas général. Prenons le produit scalaire de première ligne de (2.22) avec $\Delta t(E^{h,n} + E^{h,n+1})$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_e^h E^{h,n+1} \cdot E^{h,n+1} - \mathbb{M}_e^h E^{h,n} \cdot E^{h,n} + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h (J^{h,n} + J^{h,n+1}) \cdot (E^{h,n} + E^{h,n+1}) \\ = \Delta t \varepsilon_0^{-1} \mathbb{K}^h H^{h,n+1/2} \cdot (E^{h,n} + E^{h,n+1}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Remarquons maintenant qu'en prenant le produit scalaire de la troisième ligne de (2.22) avec $\Delta t(J^{h,n} + J^{h,n+1})$ nous pouvons ré-exprimer le troisième terme de (2.28) comme

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h (J^{h,n} + J^{h,n+1}) \cdot (E^{h,n} + E^{h,n+1}) = \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h J^{h,n+1} \cdot J^{h,n+1} - \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h J^{h,n} \cdot J^{h,n} \\ + \frac{\Delta t}{2} \underbrace{\mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h (\mathbb{M}_e^h)^{-1} \mathbb{M}_{\omega_e^2}^h (P^{h,n} + P^{h,n+1})}_{:= \mathbb{M}_{*,e}^h} \cdot (J^{h,n} + J^{h,n+1}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

De même, en prenant le produit scalaire de la quatrième ligne de (2.22) avec $\Delta t(P^{h,n} + P^{h,n+1})$, nous obtenons une ré-écriture du dernier terme de (2.29) sous la forme

$$\frac{\Delta t}{2} \mathbb{M}_{*,e}^h (P^{h,n} + P^{h,n+1}) \cdot (J^{h,n} + J^{h,n+1}) = \mathbb{M}_{*,e}^h P^{h,n+1} \cdot P^{h,n+1} - \mathbb{M}_{*,e}^h P^{h,n} \cdot P^{h,n}. \quad (2.30)$$

Finalement, en regroupant les égalités (2.28), (2.29) et (2.30), nous obtenons l'égalité

$$\mathcal{E}_e^{n+1} - \mathcal{E}_e^n = \frac{\Delta}{2\varepsilon_0} \mathbb{K}^h H^{h,n+1/2} \cdot (E^{h,n} + E^{h,n+1}), \quad (2.31)$$

où \mathcal{E}_e^n est l'énergie électrique discrète définie par

$$\mathcal{E}_e^n := \mathbb{M}_e^h E^{h,n} \cdot E^{h,n} + \mathbb{M}_{\Omega_e^2}^h J^{h,n} \cdot J^{h,n} + \mathbb{M}_{*,e}^h P^{h,n} \cdot P^{h,n}. \quad (2.32)$$

Nous procédons de même pour la partie magnétique et obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}_m^{n-\frac{1}{2}} &= -\frac{\Delta t}{2\mu_0} (\mathbb{K}^h)^\top E^{h,n} \cdot (H^{h,n+\frac{1}{2}} + H^{h,n-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{\Delta}{2\mu_0} \mathbb{K}^h (H^{h,n+\frac{1}{2}} + H^{h,n-\frac{1}{2}}) \cdot E^{h,n}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

où $\mathcal{E}_m^{n+\frac{1}{2}}$ est l'énergie magnétique discrète définie par

$$\mathcal{E}_m^{n+\frac{1}{2}} := \mathbb{M}_m^h H^{h,n+\frac{1}{2}} \cdot H^{h,n+\frac{1}{2}} + \mathbb{M}_{\Omega_m^2}^h K^{h,n+\frac{1}{2}} \cdot K^{h,n+\frac{1}{2}} + \mathbb{M}_{*,m}^h M^{h,n+\frac{1}{2}} \cdot M^{h,n+\frac{1}{2}}, \quad (2.34)$$

où nous avons posé $\mathbb{M}_{*,m}^h := \mathbb{M}_{\Omega_m^2}^h (\mathbb{M}_m^h)^{-1} \mathbb{M}_{\omega_m^2}^h$. Définissons maintenant l'énergie totale discrète \mathcal{E}^n par

$$\mathcal{E}^n := \mathcal{E}_e^n + \frac{1}{2} (\mathcal{E}_m^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{E}_m^{n-\frac{1}{2}}). \quad (2.35)$$

Après quelques calculs, nous obtenons que

$$\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n = \frac{c\Delta t}{4} \left[\mathbb{K}^h (H^{h,n+\frac{3}{2}} - H^{h,n+\frac{1}{2}}) \cdot E^{h,n+1} - \mathbb{K}^h (H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}) \cdot E^{h,n} \right], \quad (2.36)$$

qui peut se ré-écrire

$$\tilde{\mathcal{E}}^{n+1} = \tilde{\mathcal{E}}^n \quad \text{où} \quad \tilde{\mathcal{E}}^n := \mathcal{E}^n + \frac{c\Delta t}{4} \mathbb{K}^h (H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}) \cdot E^{h,n}. \quad (2.37)$$

Le problème est donc ramené à l'étude de la positivité de $\tilde{\mathcal{E}}^n$. Nous pouvons commencer par la majoration

$$\frac{c\Delta t}{4} \left| \mathbb{K}^h (H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}) \cdot E^{h,n} \right| \leq \frac{c\Delta t}{4} \|\mathbb{K}^h\| \times |H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}|_m \times |E^{h,n}|_e. \quad (2.38)$$

De plus, puisque tous les termes intervenant dans la définition de \mathcal{E}^n sont positifs, nous pouvons effectuer la minoration

$$\mathcal{E}^n \geq \frac{1}{2} |E^{h,n}|_e^2 + \frac{1}{4} \left(|H^{h,n+\frac{1}{2}}|_m^2 + |H^{h,n-\frac{1}{2}}|_m^2 \right), \quad (2.39)$$

ce qui entraîne que

$$\tilde{\mathcal{E}}^n \geq \frac{1}{2} |E^{h,n}|_e^2 + \frac{1}{4} \left(|H^{h,n+\frac{1}{2}}|_m^2 + |H^{h,n-\frac{1}{2}}|_m^2 - c\Delta t \|\mathbb{K}^h\| \times |H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}|_m \times |E^{h,n}|_e \right). \quad (2.40)$$

En utilisant la règle du parallélogramme, nous obtenons

$$\tilde{\mathcal{E}}^n \geq \frac{1}{4} |H^{h,n+\frac{1}{2}} + H^{h,n-\frac{1}{2}}|_m^2 + \Lambda^n, \quad (2.41)$$

où nous définissons

$$\Lambda^n := |E^{h,n}|_e^2 + \frac{\Delta t^2}{4} \left| \frac{H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right|_m^2 - \frac{c\Delta t^2}{2} \|\mathbb{K}^h\| \times \left| \frac{H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right|_m \times |E^{h,n}|_e. \quad (2.42)$$

L'expression ci-dessus est une forme quadratique en $|E^{h,n}|_e$ et $|(H^{h,n+\frac{1}{2}} - H^{h,n-\frac{1}{2}})/\Delta t|_m$ de discriminant

$$\frac{\Delta t^4}{4} \|\mathbb{K}^h\| - \Delta t^2 = \Delta t^2 \left(\frac{c\Delta t}{2} \|\mathbb{K}^h\| - 1 \right), \quad (2.43)$$

qui est négatif (et donc $\tilde{\mathcal{E}}^n$ est positive) si, et seulement si, la condition (2.15) est vérifiée.

CHAPITRE

3

PERFECTLY MATCHED LAYERS CLASSIQUES ET EXTENSION AU MODÈLE DE DRUDE

Sommaire

3.1 Rappels sur les PMLs classiques	65
3.1.1 Construction des PMLs classiques pour des milieux non dispersifs	66
3.1.2 Stabilité des systèmes obtenus	68
3.1.3 Interprétation géométrique du critère de stabilité	68
3.2 Extension au modèle de Drude	71
3.2.1 Construction des PMLs classiques pour le modèle de Drude	71
3.2.2 Expérience numérique	73

Ce court chapitre a deux objectifs. Le premier est de rappeler la construction des couches absorbantes parfaitement adaptées – *perfectly matched layers (PMLs)* en anglais – pour les systèmes hyperboliques non dispersifs, de donner un critère nécessaire de stabilité et d’illustrer celui-ci sur quelques exemples. Le deuxième est d’appliquer cette construction classique des PMLs au modèle de Drude et de faire des expériences numériques pour constater leur instabilité.

Ce chapitre a fait l’objet d’une partie de la publication suivante :

- [19] Éliane Bécache, Patrick Joly, Maryna Kachanovska, and Valentin Vinoles. Perfectly matched layers in negative index metamaterials and plasmas. *ESAIM : Proceedings and Surveys*, 50 :113–132, 2015.

3.1 Rappels sur les PMLs classiques

Pour faire des simulations numériques sur des problèmes posés en milieux non bornés, il faut tronquer artificiellement le domaine de calcul (un exemple typique est la diffraction d’une onde incidente par un objet, comme une onde radar par un avion). Une méthode couramment utilisée est celle des conditions aux bords absorbantes (*absorbing boundary conditions*, ABCs en anglais) qui consiste à coupler le modèle mathématique utilisé à l’intérieur du domaine avec une ou plusieurs conditions aux bords qui peuvent faire intervenir des opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels. Pour plus de détails, nous renvoyons

à [94, 113].

L'autre méthode qui va nous intéresser dans la suite est l'utilisation de couches absorbantes parfaitement adaptées, que nous appelons plutôt Perfectly Matched Layers dans la suite (abrégié en PMLs). L'idée est non pas l'utilisation de conditions aux bords mais l'ajout d'une couche entourant le domaine de calcul qui va absorber les ondes. L'intérêt majeur de cette méthode est qu'elle ne produit aucune réflexion parasite vers l'intérieur du domaine, c'est pourquoi les couches sont qualifiées de parfaitement adaptées (perfectly matched).

Les PMLs ont été introduites dans l'article pionnier [22] dans le cadre des équations de Maxwell pour un diélectrique en dimension 3 et ont été analysées et généralisées à d'autres modèles par de nombreux auteurs. Citons notamment la réinterprétation des PMLs comme un changement de variable complexe [58, 218]. Nous renvoyons à [128] pour une introduction détaillée à cette méthode et aux références qu'elle contient, ainsi qu'à [133] qui présente à la fois les PMLs et les ABCs. Nous allons maintenant donner les grandes lignes de la construction des PMLs dites classiques, c'est-à-dire celles qui ont été introduites dans [22].

3.1.1 Construction des PMLs classiques pour des milieux non dispersifs

Partons d'un système hyperbolique classique d'inconnue \mathbf{U} de dimension d , posé en dimension 2 d'espace, de la forme

$$\partial_t \mathbf{U}(x, y, t) = A_x \partial_x \mathbf{U}(x, y, t) + A_y \partial_y \mathbf{U}(x, y, t), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

où A_x et A_y sont des matrices réelles supposées constantes. Cela correspond aux systèmes (1.59) étudiés au chapitre 2 avec $n = 2$ et $B = 0$. En particulier, nous pouvons utiliser l'analyse par ondes planes décrite à la section 1.3.1. Rappelons que l'hyperbolicité de (3.1) se traduit par le fait que pour tout $(k_x, k_y) \in \mathbb{R}^n$, la matrice $k_x A_x + k_y A_y$ a des valeurs propres réelles.

3.1.1.1 Changement de variable complexe

Décrivons maintenant comment construire la PML classique dans la direction x , la direction y se traitant de manière analogue. Nous considérons que le milieu physique se trouve dans le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ et que la PML se trouve dans le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Tout d'abord, effectuons une transformée de Fourier en temps dans (3.1) ce qui conduit à l'équation de Helmholtz généralisée

$$-i\omega \widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \omega) = A_x \partial_x \widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \omega) + A_y \partial_y \widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \omega). \quad (3.2)$$

Les variables d'espaces x et y sont *a priori* réelles. Nous faisons dans la suite l'hypothèse que $\widehat{\mathbf{U}}$ s'étend analytiquement pour $x \in \mathbb{C}$, ce qui peut être justifié dans de nombreux cas. Cette fonction vérifie toujours (3.2) pour $X \in \mathbb{C}$:

$$-i\omega \widehat{\mathbf{U}}(X, y, \omega) = A_x \partial_x \widehat{\mathbf{U}}(X, y, \omega) + A_y \partial_y \widehat{\mathbf{U}}(X, y, \omega). \quad (3.3)$$

Construire une PML consiste à considérer la solution pour $x > 0$ le long d'un autre chemin dans le plan complexe que celui le long de l'axe réel, défini par un changement de variable $X(x) \in \mathbb{C}$ avec $x \in \mathbb{R}$. La fonction \mathbf{V} définie par

$$\mathbf{V}(x, y, t) = \mathbf{U}(X(x), y, t), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

coïncide avec \mathbf{U} dans le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ pour tout $t \geq 0$ dès lors que

$$X(x) = x, \quad \text{pour } x < 0. \quad (3.5)$$

Cette propriété assure donc le caractère parfaitement adapté (perfectly matched) entre \mathbf{U} et \mathbf{V} . La fonction \mathbf{V} satisfait l'équation

$$-i\omega \widehat{\mathbf{V}}(x, y, \omega) = A_x \alpha(x) \partial_x \widehat{\mathbf{V}}(X, y, \omega) + A_y \partial_y \widehat{\mathbf{V}}(X, y, \omega), \quad (3.6)$$

où nous avons introduit

$$\alpha(x) := \left(\frac{\partial X}{\partial x}(x) \right)^{-1}, \quad (3.7)$$

qui correspond au changement de variable

$$X(x) = \int_0^x \frac{1}{\alpha(\xi)} d\xi. \quad (3.8)$$

La PML classique correspond au choix [58, 128]

$$\frac{1}{\alpha(\xi)} = 1 + \frac{\sigma(\xi)}{-i\omega}, \quad (3.9)$$

ou de manière équivalente

$$X(x) = x + \frac{1}{-i\omega} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi, \quad (3.10)$$

où σ est une fonction d'amortissement qui satisfait

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0, \\ \sigma(x) > 0 & \text{pour } x > 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

3.1.1.2 Revenir en temps

En combinant (3.6) et (3.9), nous obtenons l'équation (en notant abusivement \mathbf{U} à la place de \mathbf{V})

$$-i\omega \widehat{\mathbf{U}} = \left(1 + \frac{\sigma(x)}{-i\omega} \right)^{-1} A_x \partial_x \widehat{\mathbf{U}} + A_y \partial_y \widehat{\mathbf{U}}. \quad (3.12)$$

La présence du terme en $1/(-i\omega)$ nous empêche de revenir en temps directement. Pour y remédier, il existe deux méthodes.

La première consiste à effectuer un *splitting* de la solution [22] :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^x + \mathbf{U}^y, \quad (3.13)$$

où \mathbf{U}^x et \mathbf{U}^y sont solutions du système

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}^x = A_x \partial_x (\mathbf{U}^x + \mathbf{U}^y), \\ \partial_t \mathbf{U}^y = A_y \partial_y (\mathbf{U}^x + \mathbf{U}^y), \end{cases} \iff \begin{cases} -i\omega \widehat{\mathbf{U}}^x = A_x \partial_x (\widehat{\mathbf{U}}^x + \widehat{\mathbf{U}}^y), \\ -i\omega \widehat{\mathbf{U}}^y = A_y \partial_y (\widehat{\mathbf{U}}^x + \widehat{\mathbf{U}}^y). \end{cases} \quad (3.14)$$

Il y a équivalence entre ce système et le système initial (3.1) à condition que les conditions initiales soient également splittées d'une manière compatible avec (3.13). Le changement de variable (3.9) nous donne alors

$$\begin{cases} -i\omega \widehat{\mathbf{U}}^x = \left(1 + \frac{\sigma(x)}{-i\omega} \right)^{-1} A_x \partial_x (\widehat{\mathbf{U}}^x + \widehat{\mathbf{U}}^y), \\ -i\omega \widehat{\mathbf{U}}^y = A_y \partial_y (\widehat{\mathbf{U}}^x + \widehat{\mathbf{U}}^y), \end{cases} \quad (3.15)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}^x + \sigma(x) \mathbf{U}^x = A_x \partial_x (\mathbf{U}^x + \mathbf{U}^y), \\ \partial_t \mathbf{U}^y = A_y \partial_y (\mathbf{U}^x + \mathbf{U}^y). \end{cases} \quad (3.16)$$

La seconde consiste à introduire une inconnue auxiliaire [244] à l'instar de ce qui a été fait pour le modèle de Lorentz généralisé au chapitre 1. Nous pouvons écrire (3.12) sous la forme

$$-i\omega \widehat{\mathbf{U}} + \sigma(x) \widehat{\mathbf{U}} = A_x \alpha(x) \partial_x \widehat{\mathbf{U}} + A_y \partial_y \left[\left(1 + \frac{\sigma(x)}{-i\omega} \right) \widehat{\mathbf{U}} \right], \quad (3.17)$$

ce qui est possible car σ ne dépend pas de y . En introduisant alors un champ auxiliaire \mathbf{V} défini par

$$-i\omega\widehat{\mathbf{V}} + \sigma(x)\widehat{\mathbf{V}} = -i\omega\widehat{\mathbf{U}}, \quad (3.18)$$

nous obtenons en revenant en temps

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \sigma(x)\mathbf{U} = A_x \partial_x \mathbf{U} + A_y \partial_y \mathbf{V}, \\ \partial_t \mathbf{V} + \sigma(x)\mathbf{V} = \partial_t \mathbf{U}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Les deux systèmes (3.16) et (3.19) sont équivalents.

3.1.2 Stabilité des systèmes obtenus

D'un point de vue numérique, il est primordial que les systèmes (3.16) et (3.19) soient stables au sens de la définition 1.12 dans le cadre de l'analyse par ondes planes. Dans cette section, nous supposons donc que σ est constant. Rappelons que la relation de dispersion du système (3.1) est donnée par

$$F(k_x, k_y, \omega) = 0, \quad \text{avec} \quad F(\mathbf{k}, \omega) := \det(\omega I_d + A_x k_x + k_y A_y). \quad (3.20)$$

Le changement de variable (3.10) la transforme en

$$F\left(k_x \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega}\right)^{-1}, k_y, \omega\right) = 0. \quad (3.21)$$

Pour étudier la stabilité des systèmes (3.16) et (3.19), il faut donc analyser le signe de la partie imaginaire des solutions de la relation de dispersion (3.21) (vue comme une équation en ω).

Puisque nous considérons dans cette section des systèmes non dispersifs, la fonction F définissant la relation de dispersion (3.20) est homogène par rapport à ω , k_x et k_y . Cette propriété est utilisée de façon cruciale dans [17] pour établir un critère nécessaire de stabilité haute fréquence : analyser le signe de la partie imaginaire des solutions pour des petites valeurs de σ revient dans ce cas à faire l'analyse pour des grands nombres d'onde \mathbf{k} .

Théorème 3.1 (critère nécessaire de stabilité haute fréquence). *Une condition nécessaire de stabilité pour le système (3.16) (ou de manière équivalente (3.19)) est que toutes les solutions $\omega(\mathbf{k})$ de la relation de dispersion d'origine (3.20) soient des modes directs dans la direction x , c'est-à-dire*

$$(\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{e}_x) (\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{e}_x) \geq 0, \quad (3.22)$$

pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$.

Nous dirons qu'un système non dispersif est *stable à hautes fréquences* si (3.22) est vérifiée.

3.1.3 Interprétation géométrique du critère de stabilité

Le critère peut s'interpréter géométriquement. Puisque la fonction F définie dans (3.20) est homogène, nous pouvons tracer la courbe de lenteur, c'est-à-dire l'ensemble des $\mathbf{s} := \mathbf{k}/\omega$, les vecteurs lentes, tels que

$$F\left(\frac{\mathbf{k}}{\omega}, 1\right) = F(\mathbf{s}, 1) = 0. \quad (3.23)$$

Remarquons que le vecteur lenteur \mathbf{s} est colinéaire à la vitesse de phase $\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k}))$ et pointe dans la même direction. De plus, il est facile de voir que la vitesse de groupe est orthogonale à la courbe de lenteur (3.23). Par conséquence, la condition (3.22), qui peut s'écrire

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_x) (\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{e}_x) \geq 0, \quad (3.24)$$

pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, exprime le fait que, le long de la courbe de lenteur, le vecteur lenteur et la vitesse de groupe sont orientés de la même façon par rapport à la direction x . Cela nous donne une façon simple et visuelle de vérifier la condition (3.22) (voir la Figure 3.1).

Appliquons ce critère à quelques modèles d'équations d'ondes.

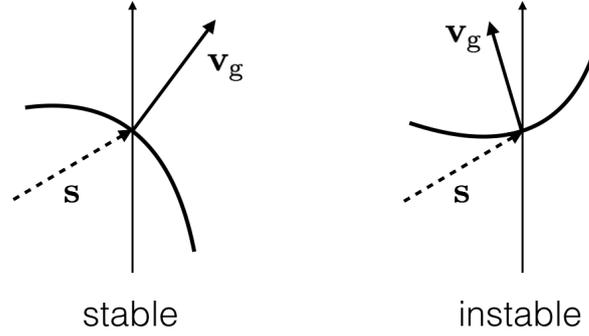


FIGURE 3.1 – À gauche le vecteur lenteur \mathbf{s} et la vitesse de groupe \mathbf{v}_g sont orientés de la même façon par rapport à la direction x (stable). À droite le vecteur lenteur \mathbf{s} et la vitesse de groupe \mathbf{v}_g ne sont pas orientés de la même façon par rapport à la direction x (instable).

- *Équation des ondes isotrope / équations de Maxwell isotropes.* Ce modèle est décrit par un système pression/vitesse du premier ordre

$$\begin{cases} \partial_t p = \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \partial_t \mathbf{u} = \nabla p, \end{cases} \quad (3.25)$$

où p est la pression et \mathbf{u} la vitesse. Pour ce modèle, la courbe de lenteur principale est simplement un cercle. Le critère géométrique est évidemment vérifié (voir la figure 3.2), donc les PMLs sont stables à hautes fréquences. Une analyse plus profonde montre qu'elles sont en fait stables (pas seulement à hautes fréquences). C'est aussi le cas pour les équations de Maxwell isotropes dans un diélectrique. Nous renvoyons le lecteur à [18] pour plus de détails.

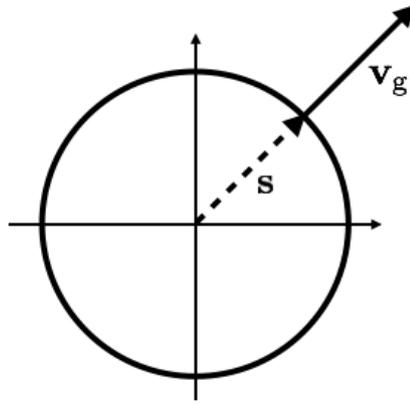


FIGURE 3.2 – Courbe de lenteur pour l'équation des ondes isotropes. Le critère géométrique est satisfait en tout point de la courbe.

- *Équation des ondes anisotropes / équations de Maxwell anisotropes.* Ce modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t p = \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \partial_t \mathbf{u} = A \nabla p, \end{cases} \quad (3.26)$$

où A est une matrice 2×2 symétrique définie positive :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad a > 0, \quad b > 0 \text{ et } ac - b^2 > 0. \quad (3.27)$$

La courbe de lenteur principale de ce modèle est une ellipse centrée en l'origine. Par conséquent, dès lors que les axes de l'ellipse ne sont pas parallèles aux axes x et y , c'est-à-dire dès que $b \neq 0$, le critère géométrique n'est plus satisfait (voir la figure 3.3). C'est aussi le cas pour les équations de Maxwell anisotropes dans un diélectrique. Nous renvoyons le lecteur à [87] pour la construction de PMLs stables dans ce contexte.

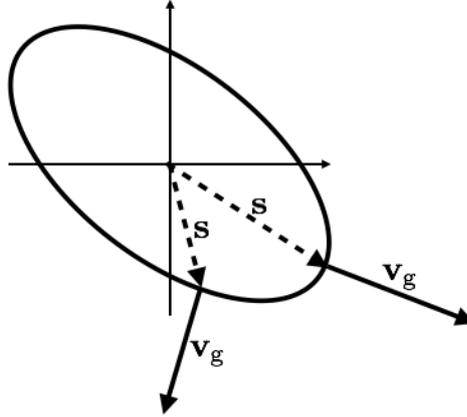


FIGURE 3.3 – Courbe de lenteur pour l'équation des ondes anisotrope. Le critère géométrique n'est pas satisfait pour le couple $(\mathbf{s}, \mathbf{v}_g)$ de gauche.

- *Équations d'Euler linéarisées (aéroacoustique)*. Ce modèle décrit une onde acoustique dans un flux uniforme subsonique (ici parallèle à la direction x pour simplifier) ayant un nombre de Mach $M \in [0, 1)$ et est donné par le système

$$\begin{cases} \partial_t p + M \partial_x p = \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \partial_t \mathbf{u} + M \partial_x \mathbf{u} = \nabla p, \end{cases} \quad (3.28)$$

où p est la pression et \mathbf{u} la vitesse. La courbe de lenteur principale est ici une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes x et y , mais centrée en $(M/(1 - M^2), 0)$. Par conséquent, le critère géométrique n'est plus vérifié dès que $M \neq 0$ (voir la figure 3.4). Nous renvoyons à [88] pour une analyse plus complète et la construction de PMLs stables pour ce modèle.

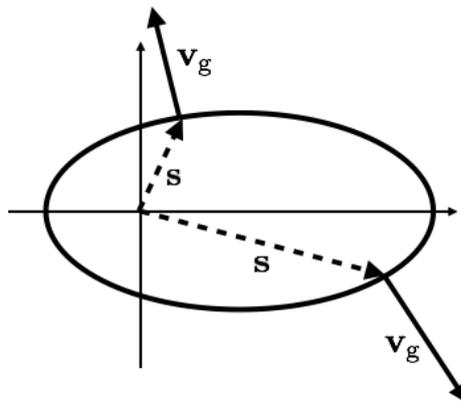


FIGURE 3.4 – Courbe de lenteur pour les équations d'Euler linéarisées. Le critère géométrique n'est pas satisfait pour le couple $(\mathbf{s}, \mathbf{v}_g)$ du haut.

- *Élastodynamique.* Nous considérons ici une formulation vitesse-contrainte

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} = \nabla \cdot \sigma, \\ \partial_t \sigma = C \varepsilon(\mathbf{u}), \end{cases} \quad (3.29)$$

où \mathbf{u} est la vitesse, σ le tenseur des contraintes, ε et C les tenseurs du quatrième ordre des coefficients élastodynamiques. En 2D, la courbe de lenteur principale est constituée de deux branches, une correspondant aux ondes P et l'autre aux ondes S. Il est possible de montrer que seules les ondes S peuvent donner lieu à des instabilités hautes fréquences. La courbe de lenteur correspondant aux ondes S peut avoir des allures très différentes en fonction des coefficients de C (voir la figure 3.5), le critère géométrique peut donc être vérifié ou non. La stabilité des PMLs classiques dépend donc fortement des propriétés du milieu considéré. À notre connaissance, la construction de PMLs stables pour le modèle élastodynamique général couvrant tous les cas possibles est encore à ce jour un problème ouvert. Nous renvoyons à [17, 71] pour une analyse plus complète.

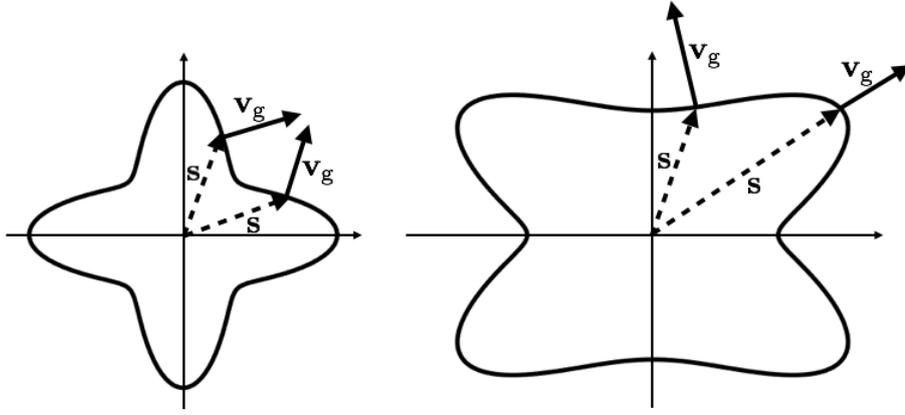


FIGURE 3.5 – Courbe de lenteur des ondes S pour deux matériaux orthotropes. Le critère géométrique est satisfait en tout point de la courbe pour celle de gauche, mais pas pour celle de droite.

3.2 Extension au modèle de Drude

Lors du chapitre 2 nous avons étudié en détails le modèle de Drude (1.33) dont le système temporel correspondant est donné par (1.44). Nous avons notamment vu que ce modèle produit tout le temps des ondes inverses (voir la section 1.3.2.2). Par analogie avec l'étude des PMLs classiques pour les milieux non dispersifs qui a été faite dans la section précédente, nous pouvons légitimement nous attendre à ce que les PMLs classiques soient instables pour le modèle de Drude, et par extension à tous les modèles dispersifs présentant des ondes inverses. Nous allons le montrer numériquement dans la suite de ce chapitre, l'analyse sera faite au chapitre suivant. Nous renvoyons également à notre publication [19] pour plus de détails.

3.2.1 Construction des PMLs classiques pour le modèle de Drude

Le système temporel correspondant au modèle de Drude est donné par (1.33). Comme au chapitre précédent, pour simplifier notre discours nous allons nous placer en dimension 2 mais tout ce qui suit reste valable en dimension 3. Nous considérons donc le système

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} + \Omega_e^2 \mathbf{J} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times H, \\ \partial_t H + \Omega_m^2 K = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{J} - \mathbf{E} = 0, \\ \partial_t K - H = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

avec $\mathbf{E} = (E_x, E_y)^\top$. Il est aussi utile de considérer ce système dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{cases} -i\omega\varepsilon(\omega)\widehat{\mathbf{E}} = \nabla \times \widehat{H}, \\ -i\omega\mu(\omega)\widehat{H} = -\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Pour construire les PMLs classiques pour ce système, nous suivons les étapes suivantes, assez proches de ce qui a été fait à la section 3.1.1.

1. Nous passons dans le domaine fréquentiel et nous *splittons* l'inconnue scalaire H en $H = H^x + H^y$ de telle sorte que la deuxième équation de (3.31) est remplacée par les deux équations

$$\begin{cases} -i\omega\mu(\omega)\widehat{H}^x = \partial_y \widehat{E}_x, \\ -i\omega\mu(\omega)\widehat{H}^y = -\partial_x \widehat{E}_y, \end{cases} \quad (3.32)$$

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de *splitter* le champ électrique \mathbf{E} .

2. Nous faisons le changement de variable (3.10) à la fois en x et en y , ce qui revient formellement à faire les substitutions

$$\partial_x \longrightarrow \left(1 + \frac{\sigma_x}{-i\omega}\right)^{-1} \partial_x \quad \text{et} \quad \partial_y \longrightarrow \left(1 + \frac{\sigma_y}{-i\omega}\right)^{-1} \partial_y, \quad (3.33)$$

et nous utilisons le modèle de Drude (1.33) dans (3.31) tout en utilisant (3.32). Nous obtenons donc

$$\begin{cases} -i\omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\right) \widehat{\mathbf{E}}_x = \left(1 + \frac{\sigma_y}{-i\omega}\right)^{-1} \partial_y H \\ -i\omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\right) \widehat{\mathbf{E}}_y = -\left(1 + \frac{\sigma_x}{-i\omega}\right)^{-1} \partial_x H \\ -i\omega\mu_0 \left(1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega^2}\right) \widehat{H}^x = \left(1 + \frac{\sigma_y}{-i\omega}\right)^{-1} \partial_y \widehat{E}_x, \\ -i\omega\mu_0 \left(1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega^2}\right) \widehat{H}^y = -\left(1 + \frac{\sigma_x}{-i\omega}\right)^{-1} \partial_x \widehat{E}_y, \end{cases} \quad (3.34)$$

3. Comme pour revenir en temps pour le modèle de Drude sans PMLs, nous introduisons les premières primitives en temps J_x, J_y, K^x et K^y ainsi que les secondes P_x, P_y, M^x et M^y de E_x, E_y, H^x et H^y respectivement (remarquons que les indices x ou y indiquent les composantes d'un champ vectoriel comme $\mathbf{E} = (E_x, E_y)^\top$ mais que les exposants x ou y indiquent un *splitting* artificiel comme $H = H^x + H^y$).

4. Nous revenons en temps et nous obtenons le système de PMLs classiques pour le modèle de Drude :

$$\begin{cases} \partial_t E_x + \sigma_y + \Omega_e^2 J_x + \sigma_y \Omega_e^2 P^x = \varepsilon_0^{-1} \partial_y (H^x + H^y), \\ \partial_t E_y + \sigma_x + \Omega_e^2 J_y + \sigma_x \Omega_e^2 P^y = -\varepsilon_0^{-1} \partial_x (H^x + H^y), \\ \partial_t H^x + \sigma_y H^x + \Omega_m^2 K^x + \sigma_y \Omega_m^2 M^x = \mu_0^{-1} \partial_y E_x, \\ \partial_t H^y + \sigma_x H^y + \Omega_m^2 K^y + \sigma_x \Omega_m^2 M^y = -\mu_0^{-1} \partial_x E_y, \\ \partial_t J_x - E_x = 0, \\ \partial_t P_x - J_x = 0, \\ \partial_t J_y - E_y = 0, \\ \partial_t P_y - J_y = 0, \\ \partial_t K^x - H^x = 0, \\ \partial_t M^x - P^x = 0, \\ \partial_t K^y - H^y = 0, \\ \partial_t M^y - P^y = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

En prenant $\sigma_x > 0$ et $\sigma_y = 0$ (resp. $\sigma_x = 0$ et $\sigma_y > 0$), cela nous donne des PMLs dans la direction x (resp. y). Le cas $\sigma_x > 0$ et $\sigma_y > 0$ permet de traiter les coins.

3.2.2 Expérience numérique

Nous effectuons maintenant une simulation numérique permettant de mettre en avant le caractère intrinsèquement instable du système (3.35). Comme lors du chapitre précédent, nous considérons que $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Le domaine de calcul sera $\mathcal{O} := (-20, 20)$ et les paramètres du modèle de Drude seront pris égaux à $\Omega_e = \Omega_m = 2$. Tous les champs sont nuls à l'instant $t = 0$ et nous ajoutons une source de la forme $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x})h(t)$ où g est la gaussienne radiale définie par

$$g(x, y) = e^{-50(x^2+y^2)}, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.36)$$

et où h est une impulsion en temps définie par

$$h(t) = -10(t-1)e^{-5(t-1)^2}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (3.37)$$

Ce choix pour h n'est pas anodin : il permet de couvrir un large spectre de fréquence ce qui permet d'avoir la présence simultanée d'ondes directes et d'ondes inverses. La largeur des PMLs est $L = 3$ de sorte que le domaine de calcul est bien $\mathcal{O} = (-20, 20)$ mais le domaine physique est seulement $(-17, 17)$. Pour réduire les réflexions numériques (qui n'existent pas au niveau continu) entre le milieu physique et les PMLs, les fonctions d'amortissement σ_x et σ_y seront prises croissantes quadratiquement [128]. Sur le bord du domaine de calcul $\partial\mathcal{O}$, nous prendrons une condition de conducteur parfait : $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$, où \mathbf{n} est la normale sortante à $\partial\mathcal{O}$. Le schéma numérique utilisé suit exactement le même principe que les schémas décrits au chapitre précédent, en utilisant des différences finies en espace et en temps, sur des grilles décalées. Nous avons rendus implicites tous les termes d'ordre 0, y compris les termes en facteur de σ_x ou σ_y dans (3.35).

La figure 3.6 montre quelques instantanés du champ H au cours du temps. Une nouvelle fois, nous invitons le lecteur à visionner en ligne la vidéo correspondante¹. Nous observons clairement des instabilités. Nous insistons sur le fait qu'elles ne proviennent pas du schéma numérique mais du fait que le système (3.35) est instable au niveau continu. Une façon de s'en convaincre est de raffiner le maillage ou de réduire le nombre CFL et d'observer que les instabilités sont toujours présentes. Un point important à souligner, en accord avec la section précédente, est que ce sont les ondes inverses qui sont responsables des instabilités. En effet nous pouvons voir que les ondes directes, les plus rapides, sont bien absorbées par les PMLs mais dès lors que les ondes inverses, plus lentes, atteignent la PML, des instabilités se produisent. La figure 3.7 illustre ce fait en traçant le logarithme de l'énergie $\|\mathbf{E}\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|H\|_{L^2(\mathcal{O})}^2$ au cours du temps.

¹« Failure of classical Perfectly Matched Layers (PMLs) for negative index metamaterials », <https://www.youtube.com/watch?v=z6FzBCx40MY>, chaîne Youtube "Valentin Vinoles" <https://www.youtube.com/user/dota2Val>

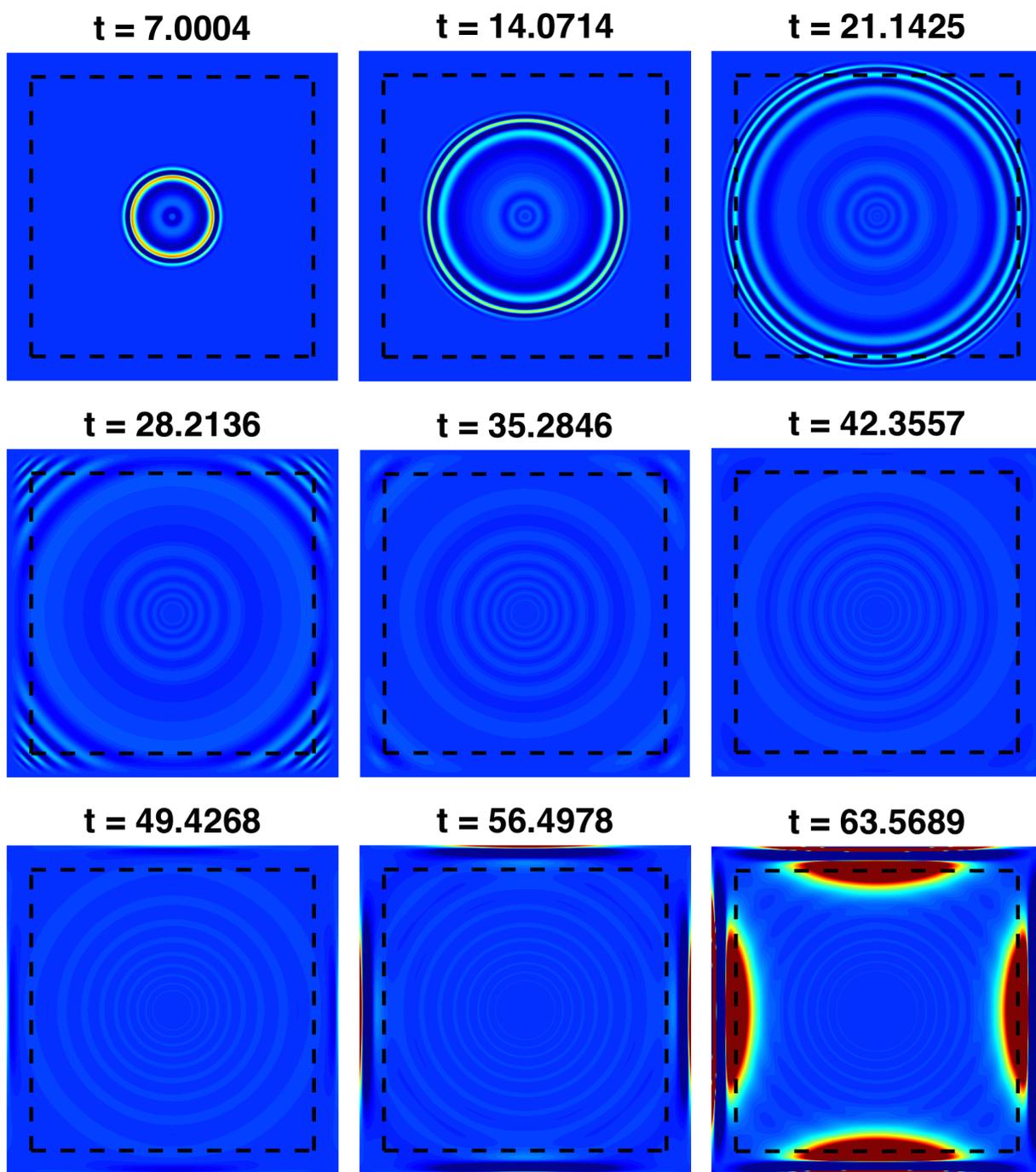


FIGURE 3.6 – Instantanés du champ H à différents instants.

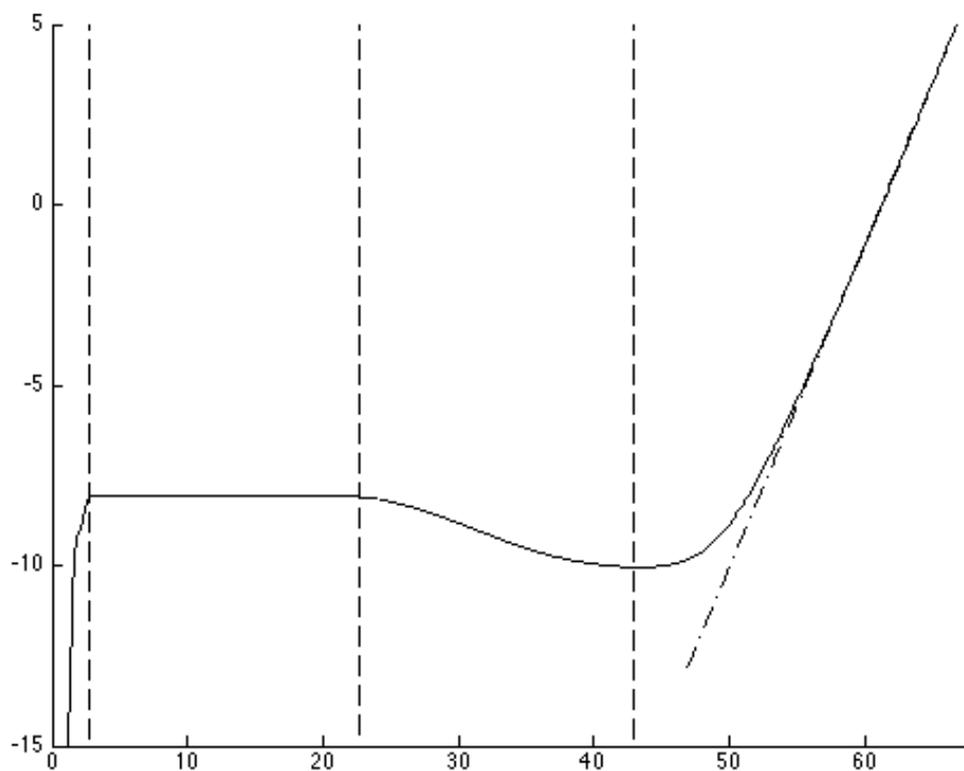


FIGURE 3.7 – Logarithme de l'énergie $\|\mathbf{E}\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|H\|_{L^2(\mathcal{O})}^2$ au cours du temps. De $t = 0$ à $t \simeq 3$ l'énergie croît en raison de la source h . Ensuite l'énergie est conservée jusqu'à l'instant $t \simeq 22$ quand les ondes directes, les plus rapides, atteignent la PML et l'énergie commence à décroître. Mais après $t \simeq 40$, les ondes inverses arrivent à la PML et l'énergie augmente exponentiellement.

CHAPITRE

4

ANALYSE DES PMLs POUR UNE CLASSE DE MILIEUX DISPERSIFS ET APPLICATION AUX MÉTAMATÉRIAUX À INDICE NÉGATIF

Sommaire

4.1	Introduction	78
4.2	Isotropic dispersive media	79
4.2.1	The mathematical models	79
4.2.2	Analysis of dispersive properties	83
4.3	Classical PMLs and their instabilities for the Drude model	89
4.3.1	Construction of classical PMLs for the Drude model	89
4.3.2	A numerical experiment of classical PMLs for the Drude model	90
4.4	Construction and analysis of PML models for a class of dispersive systems	90
4.4.1	A class of first order dispersive hyperbolic systems	92
4.4.2	New generalised PMLs for dispersive models	93
4.4.3	Modal stability analysis of the generalised PML model	96
4.5	Application to isotropic dispersive Maxwell equations	101
4.5.1	Description of the set $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$	101
4.5.2	Reinterpretation of the necessary condition (4.111) for isotropic dispersive Maxwell models satisfying the growing property	102
4.5.3	Necessary and sufficient stability conditions for isotropic dispersive Maxwell models satisfying the growing property	103
4.5.4	Extension of the necessary and sufficient stability conditions for general isotropic dispersive Maxwell models	106
4.6	Design of Stable PMLs for isotropic dispersive media	107
4.6.1	The case of the Drude model	107
4.6.2	The case of generalized Lorentz materials	107
4.6.3	A general construction process for optimal stable PMLs	109

Ce chapitre a pour but d'analyser plus en profondeur la question de la stabilité des PMLs pour les milieux dispersifs et plus particulièrement pour les métamatériaux. Non seulement nous voulons montrer

que les PMLs classiques sont instables pour les métamatériaux dès que nous sommes en présence d'ondes inverses, mais nous souhaitons également construire des PMLs qui sont stables et prouver leur stabilité. Ce chapitre fait l'objet de la publication suivante, soumise à *Mathematics of Computation*, dont nous reprenez ici le texte intégral (en anglais) :

- [20] Éliane Bécache, Patrick Joly, and Valentin Vinoles. On the analysis of perfectly matched layers for a class of dispersive media and application to negative index metamaterials. Submitted to *Mathematics of Computation*.

Dans ce qui suit, nous proposons et analysons la stabilité de PMLs très générales utilisant un nouveau changement de variable et ceci pour une large classe de milieux dispersifs. Nous donnons un critère nécessaire de stabilité pour de tels modèles. Pour les équations de Maxwell dispersives décrites au chapitre 1 (et donc pour les métamatériaux), cette analyse est complétée en donnant des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. Nous concluons alors en proposant des nouvelles PMLs stables qui satisfont ces critères et montrons numériquement leur efficacité.

Remarque 4.1. Dans ce qui suit, la convention pour la définition des ondes planes est différente de celle choisie dans le reste du manuscrit. Plus précisément, la définition (1.60) $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0 e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t)}$ utilisée dans les chapitres précédents est remplacée par $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{k})}$ (en d'autres termes à l'opérateur différentiel ∂_t correspond maintenant $i\omega$ au lieu de $-i\omega$ comme c'était le cas précédemment). Cela ne change évidemment rien à l'analyse, seuls quelques signes sont inversés. Citons notamment le critère de stabilité (1.67) qui devient ici $\text{Im } \omega_j(\mathbf{k}) \geq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ et le changement de variable pour les PMLs classiques (3.10) devient

$$X(x) = x + \frac{1}{i\omega} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi. \quad (4.1)$$

Toutes les notations et conventions ainsi que leurs conséquences sont précisées dans le corps du chapitre.

4.1 Introduction

One of the hardest difficulties to simulate wave propagation in unbounded domains is to construct artificial boundary conditions which absorb the outgoing waves without reflecting them into the computational domain. A widely used technique to do so is the so-called Perfectly Matched Layer (PML) [128] first proposed by Bérenger [22] for the 3D Maxwell equations. The method consists in surrounding the computational domain by an absorbing layer (the PML) which generates no reflection inside it. Even if they are very effective in many cases, PMLs can exhibit instabilities for some equations because of backward waves, which are waves whose phase and group velocities point in "opposite" directions with respect to the interface. For non-dispersive media, Bécache *et al.* in [17] established a necessary (but not sufficient) criterion of stability: classical PMLs are stable only if there is no backward wave. This is always the case for isotropic media but not for all anisotropic ones. For some of them (*e.g.* anisotropic acoustic equations [87], aeroacoustics [88]), new stable PLMs have been successfully proposed but, to our knowledge, the case of anisotropic elastic waves remains open [17].

The case of dispersive systems has been much less studied. A very important example of such media are metamaterials, *i.e.* artificial composite materials having extraordinary electromagnetic properties. In particular, Negative Index Metamaterials (NIMs), also called left-handed media or double negative metamaterials, have negative permittivity and permeability at some frequencies due to microscopic resonating structures [209]. Since the 1990s, NIMs are the subject of active researches due to their promising applications as superlens, cloaking, improved antenna, etc [78]. The fact is that, even in isotropic media, NIMs naturally support backward waves (at least in some range of frequencies), which leads to anticipate difficulties with PMLs, by analogy with what occurs with non dispersive media.

PMLs in NIMs have already been studied by the physicists community [76, 79, 90, 161, 207]. To our knowledge, in [79], Cummer was the first to notice that classical PMLs fail in NIMs and gave a physical explanation related to the presence of backward waves. He proposed stable PMLs for a particular case of Drude materials corresponding to $\omega_e = \omega_m$ (see (4.13) in Section 4.2.1.3 for more details). This work

was extended in [90, 207] to the general case $\omega_e \neq \omega_m$. In all these works the instability of PMLs was observed through numerical or explained by arguments coming from the physics.

The goal of this paper is to bring a mathematical eye to the question of the stability of PMLs for NIMs and also to generalise the construction of stable PMLs for a much larger class of dispersive electromagnetic media than the Drude ones. Let us mention a first paper [19] by the authors in which we have already claimed some of the results of the present article, in particular how to construct stable PMLs for the Drude model, but without any proof (we also extended our method to a simple plasma model).

The outline of the article is as follows. In Section 4.2, we present the class of mathematical models that we consider in this paper for isotropic dispersive electromagnetic media and give their main mathematical properties (Section 4.2.1) as well as an analysis of dispersion phenomena (Section 4.2.2), introducing in particular the definition of backward modes and negative index. In Section 4.3, which can be seen as a motivation of the rest of the paper, we focus on the Drude model for which we construct the classical PMLs (Section 4.3.1) and illustrate the instability of classical PMLs through numerical simulations (Section 4.3.2). Sections 4.4 and 4.5 contain the main results of this paper. In Section 4.4 we consider the question of PMLs for non-dissipative dispersive first order hyperbolic systems. These are presented in Section 4.4.1 and generalize the models of Section 4.2. In Section 4.4.2, we propose generalised PMLs for such systems and initiate their stability analysis (the main issue of this paper) in Section 4.4.3. In particular, we derive two necessary stability conditions in Sections 4.4.3.4 and 4.4.3.5. In Section 4.5, we come back to dispersive isotropic Maxwell equations and complete, in this case, the stability analysis initiated in Section 4.4.3. We obtain a necessary and sufficient stability condition (Theorems 4.35 and 4.40) for our generalised PMLs. Finally, in Section 4.6, we construct stable PMLs for Drude materials (Section 4.6.1, with numerical illustration), for generalised Lorentz materials (Section 4.6.2) and propose a procedure to construct stable PMLs for general models in Section 4.6.3.

4.2 Isotropic dispersive media

In this section, we consider a general class of mathematical models for the propagation of electromagnetic waves in dispersive, isotropic non-dissipative 2D media. The restriction to the 2D case is really non essential and adopted only for simplicity.

4.2.1 The mathematical models

4.2.1.1 The Maxwell equations

We consider the two dimensional Maxwell equations in the Transverse Electric (TE) mode in the free space [124]:

$$\begin{cases} \partial_t D_x = \partial_y H, \\ \partial_t D_y = -\partial_x H, \\ \partial_t B = \partial_y E_x - \partial_x E_y, \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{curl} H, \\ \partial_t B = -\mathbf{curl} \mathbf{E}, \end{cases} \quad (4.2)$$

where $\mathbf{E} := (E_x, E_y)^T$ and $\mathbf{D} := (D_x, D_y)^T$ are the electric field and the electric induction, H and B the magnetic field and the magnetic induction. Here we use the differential operators $\mathbf{curl} \mathbf{u} := \partial_x u_y - \partial_y u_x$ and $\mathbf{curl} u := (\partial_y u, -\partial_x u)^T$. To close this system, one must add some constitutive relations which link \mathbf{E} and \mathbf{D} on the one hand, H and B on the other hand. Classically, constitutive relations for dispersive models are described in the frequency domain and relate the time Fourier transforms of the fields (we adopt for the Fourier transform the convention that transforms the time derivative ∂_t into the multiplication by $i\omega$):

$$\widehat{\mathbf{D}}(\omega, \cdot) = \varepsilon(\omega, \cdot) \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \cdot) \quad \text{and} \quad \widehat{B}(\omega, \cdot) = \mu(\omega, \cdot) \widehat{H}(\omega, \cdot), \quad (4.3)$$

where $\varepsilon(\omega, x, y)$ and $\mu(\omega, x, y)$ are respectively the permittivity and the permeability at the point (x, y) and frequency ω . In the rest of the paper, we shall restrict our presentation to homogeneous media, that is to say to the case where $\varepsilon(\omega, x, y) = \varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega, x, y) = \mu(\omega)$. This is not restrictive as far as the question of PMLs is concerned, PMLs are used in homogeneous regions. However, the reader will observe that a large part of this section still applies to heterogeneous media.

In the frequency domain, (4.2) becomes after eliminating \mathbf{D} and B thanks to (4.3):

$$\begin{cases} i\omega \varepsilon(\omega) \widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{curl} \widehat{H}, \\ i\omega \mu(\omega) \widehat{H} = -\mathbf{curl} \widehat{\mathbf{E}}. \end{cases} \quad (4.4)$$

When ε and μ do not depend on the frequency ω , the medium is a standard dielectric one, otherwise it is a so-called *dispersive medium*.

4.2.1.2 Admissible forms of the permittivity and the permeability

Even though the content of this section has to be considered as rather formal from the mathematical point of view, it is worth mentioning that mathematical properties of $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ are usually required in order to ensure the well-posedness and physical soundness of the evolution problem corresponding to (4.4). In particular, in order to preserve the causality of the constitutive laws (4.3) and the fact that the electric and magnetic fields in time domain are real valued, one must impose that

$$\varepsilon(\omega) \text{ and } \mu(\omega) \text{ are Fourier transforms of real and causal distributions.} \quad (4.5)$$

In particular, $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ can be extended to the complex plane as analytic functions in the lower half-plane $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \leq 0\}$. In the following, we shall also assume that

$$\text{for } \omega \in \mathbb{R}, \varepsilon(\omega) \text{ and } \mu(\omega) \text{ are real valued,} \quad (4.6)$$

which in practice amounts to consider non dissipative media (we shall give a more precise definition in the next section). In many cases, dispersive media are also (slightly) dissipative but we are convinced that the question of PMLs is more difficult for non dissipative media.

Finally we shall also assume that both $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ have a finite limit at high frequency: there exist two real numbers $\varepsilon^\infty > 0$ and $\mu^\infty > 0$ such that

$$\varepsilon(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \varepsilon^\infty \quad \text{and} \quad \mu(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \mu^\infty. \quad (4.7)$$

In other words, such media behave as a standard dielectric medium at high frequency and, from the mathematical point of view, the model in time that corresponds to (4.4) can be seen as a lower order perturbation of classical Maxwell equations associated to $(\varepsilon^\infty, \mu^\infty)$.

For the simplicity of our analysis, but also because it already covers a large class of models of the literature, we shall restrict ourselves to local dispersive media in the sense that $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ are rational fractions. Doing so, if one takes into account (4.5), (4.6) and (4.7), one must impose that:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) \text{ and } \mu(\omega) \text{ are real, even rational fractions of } \omega \\ \text{with a constant entire part and real poles.} \end{aligned} \quad (4.8)$$

The justification of the terminology "local" is due to the fact that, when coming back to the time domain from (4.3), the relationship between \mathbf{E} and \mathbf{D} (resp. H and B) can be expressed in terms of ordinary differential equations, modulo the introduction of auxiliary unknowns.

In what follows, we shall restrict ourselves to dispersive media satisfying (4.8). In these cases, the evolution problem corresponding to (4.4) can be rewritten as the standard Maxwell equations coupled to ordinary differential equations. Indeed, the relationships (4.3) actually have to be understood in the sense

$$Q_e(i\omega) \widehat{\mathbf{D}}(\omega, \cdot) = P_e(i\omega) \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \cdot) \quad \text{and} \quad Q_m(i\omega) \widehat{B}(\omega, \cdot) = P_m(i\omega) \widehat{H}(\omega, \cdot), \quad (4.9)$$

where $\varepsilon(\omega) = P_e(i\omega)/Q_e(i\omega)$ and $\mu(\omega) = P_m(i\omega)/Q_m(i\omega)$, with P_e and Q_e real polynomials of degree $2M_e$, P_m and Q_m real polynomials of degree $2M_m$ such that

$$P_e P_m \text{ and } Q_e Q_m \text{ are coprime.} \quad (4.10)$$

We also introduce the following notations:

$$P_{em} := P_e P_m \quad \text{and} \quad Q_{em} := Q_e Q_m. \quad (4.11)$$

In the time domain, (4.9) becomes a system of ordinary differential equations

$$Q_e(\partial_t) \mathbf{D} = P_e(\partial_t) \mathbf{E} \quad \text{and} \quad Q_m(\partial_t) B = P_m(\partial_t) H. \quad (4.12)$$

Remark 4.1. Condition (4.10) is not restrictive since it always can be satisfied up to a change of unknowns.

We give below two examples of such models.

4.2.1.3 The Drude model

One of the simplest local dispersive medium is the Drude one that corresponds to

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right) \quad \text{and} \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\omega^2}\right), \quad (4.13)$$

where $\varepsilon_0 > 0$ and $\mu_0 > 0$ are the permittivity and the permeability of the vacuum, and $\omega_e > 0$ and $\omega_m > 0$ are the electric and the magnetic plasma frequencies. Both functions $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ have a changing sign as illustrated by Figure 4.1.

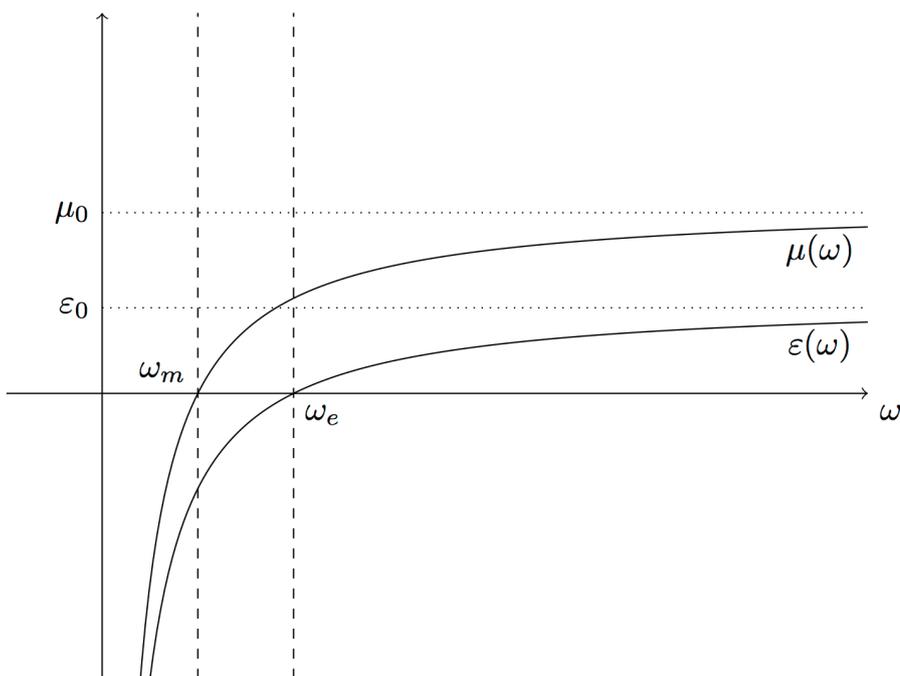


Figure 4.1 – Plot of $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ defined by the Drude model (4.13)

The Drude model is widely used to describe the permittivity in metals [124, §7.5]. For the permeability, the Drude model can be thought as a simplification of more complicated models which describe artificial magnetism in resonating structures [190, 247]. A derivation of this model can be found in [182] (see also [38, 41] for mathematical justifications based on high-contrast homogenization). Let us emphasize that, despite its simplicity, the Drude model (4.13) already contains all the difficulties to construct stable PMLs. That is why we consider this model as our privileged toy problem.

To write the Drude model in the time domain, we first substitute (4.13) into (4.4):

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \left(i\omega \widehat{\mathbf{E}} + \frac{\omega_e^2}{i\omega} \widehat{\mathbf{E}} \right) = \mathbf{curl} \widehat{H}, \\ \mu_0 \left(i\omega \widehat{H} + \frac{\omega_m^2}{i\omega} \widehat{H} \right) = -\mathbf{curl} \widehat{\mathbf{E}}. \end{cases} \quad (4.14)$$

We now introduce auxiliary fields $\mathbf{J} := (J_x, J_y)^T$ and K (called the induced electric and magnetic currents) which are the primitives in time of the fields \mathbf{E} and H :

$$i\omega \widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{E}} \quad \text{and} \quad i\omega \widehat{K} = \widehat{H}. \quad (4.15)$$

We obtain the TE first-order system for the Drude model in the time domain

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} + \omega_e^2 \mathbf{J} = \varepsilon_0^{-1} \mathbf{curl} H, \\ \partial_t \mathbf{J} - \mathbf{E} = 0, \\ \partial_t H + \omega_m^2 K = -\mu_0^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \\ \partial_t K - H = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

4.2.1.4 Generalized Lorentz models

A generalization of the Drude model (4.13) is the generalized Lorentz materials corresponding to :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \sum_{j=1}^{M_e} \frac{\omega_{e,j}^2}{\omega^2 - \Omega_{e,j}^2} \right) \quad \text{and} \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \sum_{k=1}^{M_m} \frac{\omega_{m,k}^2}{\omega^2 - \Omega_{m,k}^2} \right). \quad (4.17)$$

The reader will easily check that the Drude model (4.13) is a particular case of (4.17) with $M_e = M_m = 1$ and $\Omega_{e,1} = \Omega_{m,1} = 0$. The time domain model corresponding to (4.17) can be written as follows (using auxiliary unknowns as we did for the Drude model, we omit the details)

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} + \sum_{j=1}^{M_e} \omega_{e,j}^2 \mathbf{J}_j = \varepsilon_0^{-1} \mathbf{curl} H, \\ \partial_t \mathbf{J}_j + \Omega_{e,\ell}^2 \mathbf{P}_j - \mathbf{E} = 0, \quad \partial_t \mathbf{P}_j - \mathbf{J}_j = 0, \quad (1 \leq j \leq M_e), \\ \partial_t H + \sum_{k=1}^{M_m} \omega_{m,k}^2 K_k = -\mu_0^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \\ \partial_t K_k + \Omega_{m,k}^2 R_k - H = 0, \quad \partial_t R_k - K_k = 0, \quad (1 \leq k \leq M_m). \end{cases} \quad (4.18)$$

Note that the spatial differential operators only apply to the electric and magnetic fields \mathbf{E} and H and not to the auxiliary fields. We also remark that the unknowns of this system take values in \mathbb{R}^m with $m = 2M_m + 4M_e + 3$ (at least when all the $\Omega_{e,j}$ and $\Omega_{m,k}$ do not vanish, otherwise some of the unknowns are not necessary, as in the Drude model).

Remark 4.2. For the generalized Lorentz models, the fields \mathbf{D} and B can be recovered by

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E} + \sum_{j=1}^{M_e} \omega_{e,j}^2 \mathbf{P}_j \right) \quad \text{and} \quad B = \mu_0 \left(H + \sum_{k=1}^{M_m} \omega_{e,k}^2 R_k \right). \quad (4.19)$$

The well-posedness of the system (4.18) is a simple application of one of the classical theories for linear evolution equations like the Hille-Yosida's theory [96] (the details are left to the reader). Moreover, one can easily establish the following energy identity

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m) = 0, \quad (4.20)$$

where

$$\begin{cases} \mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M_e} \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon_0 \omega_{e,j}^2 (|\mathbf{J}_j|^2 + \Omega_{m,j}^2 |\mathbf{P}_j|^2) \\ \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_0 |H|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M_m} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_0 \omega_{m,k}^2 (|K_k|^2 + \Omega_{m,k}^2 |R_k|^2). \end{cases} \quad (4.21)$$

Remark 4.3. It has been shown (see *e.g.* [220]) that, modulo an adequate generalization that would consist in the fact that the indexes j and k in (4.17) and (4.18) become continuous real variables, the sum becoming an integral with respect to a given positive measure, the generalised Lorentz models are representative of all causal and passive electromagnetic materials. Note that such materials are in general no longer local dispersive materials in the sense of Definition (4.8).

4.2.1.5 Growing property

One has a very useful property of the generalised Lorentz models (4.17) that we call “growing property” in the following.

Definition 4.4. A local dispersive material in the sense of Definition (4.8) possesses the *growing property* if the functions $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ satisfy

$$\frac{d}{d\omega}(\omega \varepsilon(\omega)) > 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{d\omega}(\omega \mu(\omega)) > 0, \quad (4.22)$$

for all the frequencies ω that are not a pole of ε or μ .

The interest of this property will be emphasized in Section 4.2.2 (Theorem 4.20 and Proposition 4.19) and even more in Sections 4.5 and 4.6. As claimed, the generalised Lorentz models (4.17) verify the growing property:

Proposition 4.5. *All generalised Lorentz models (4.17) possess the growing property (4.22).*

Proof. It suffices to remark that

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_{e,j}^2} \right) = \frac{\omega_{e,j}^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \Omega_{e,j}^2)^2}, \quad j \in \{1, \dots, M_e\}, \quad (4.23)$$

to conclude that

$$\frac{d}{d\omega}(\omega \varepsilon(\omega)) = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{M_e} \Omega_e^2 \frac{\omega_{e,j}^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \Omega_{e,j}^2)^2} > 0. \quad (4.24)$$

The same holds for $\mu(\omega)$. □

Remark 4.6. One can wonder whether local dispersive materials satisfying the growing property (4.22) are reduced to generalised Lorentz materials. We did not investigate this question.

4.2.2 Analysis of dispersive properties

4.2.2.1 Modal analysis

The dispersion properties of (4.2)–(4.3) are classically analysed through the notion of harmonic plane waves.

Definition 4.7. For a given wave vector $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, a *plane wave* is a solution $\mathbf{u} = (\mathbf{E}, H, \mathbf{B}, D)^T$ of (4.2)–(4.3) (or more rigorously (4.2)–(4.12)) under the form

$$u(\mathbf{x}, t) = \widehat{\mathbf{U}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (4.25)$$

where $\widehat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^6 \setminus \{0\}$ is the amplitude vector and $\omega \in \mathbb{C}$ the frequency.

Introducing the set \mathcal{F} of forbidden frequencies defined as

$$\mathcal{F} := \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \text{ is a pole of } \varepsilon(\omega) \mu(\omega)\}, \quad (4.26)$$

it is easy to see using (4.10) that the existence of a plane wave implies $\omega \in \mathcal{O}$ where \mathcal{O} is the set of admissible frequencies:

$$\mathcal{O} := \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}. \quad (4.27)$$

For $\omega \in \mathcal{O}$, one sees from (4.4) that a plane wave should satisfy the dispersion relation

$$\omega \varepsilon(\omega) (\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) - |\mathbf{k}|^2) = 0, \quad (4.28)$$

therefore either $\omega \varepsilon(\omega) = 0$, which corresponds to non-propagative waves associated to curl-free electric fields, or ω and \mathbf{k} must satisfy the reduced dispersion relation

$$\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) = |\mathbf{k}|^2. \quad (4.29)$$

Remark 4.8. The zeroes of $\varepsilon(\omega)$ play here a particular role because we consider a 2D model. In 3D, $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ would play a symmetric role.

Remark 4.9. For a local dispersive model satisfying (4.8), the dispersion relation (4.29) can be rewritten as a polynomial equation of degree $M := 2(M_e + M_m + 1)$ with respect to ω , where M_e (resp. M_m) is the degree of the denominator of $\varepsilon(\omega)$ (resp. $\mu(\omega)$) (at least in the case where $\omega = 0$ is not a pole of ε or μ). When adding the $2M_e + 1$ non-propagative modes, one recovers $m = 2M_m + 4M_e + 3$ modes, corresponding to the number of unknowns of the original system (see for instance (4.18) for the generalised Lorentz system). However these non-propagative modes, labelled as ω_j , $M + 1 \leq j \leq m$, will not play any role in what follows, since they do not depend on \mathbf{k} . Concerning the solutions $\omega_j(\mathbf{k})$, $1 \leq j \leq M$ of (4.29), they actually only depends on $|\mathbf{k}|$: $\omega_j(\mathbf{k}) = \omega_j(|\mathbf{k}|)$. These can be reinterpreted as the eigenvalues of a matrix that depends polynomially on $|\mathbf{k}|$. As a consequence of well known results from perturbation theory for spectral problems (see *e.g.* [134, chapter II, §1]), it is known that these functions can be renumbered to form M branches of solutions which are piecewise smooth functions of $|\mathbf{k}|$, *i.e.* on an open subset of \mathbb{R}^2 that only excludes a discrete set of circles.

4.2.2.2 Non dissipative models

Definition 4.10. The dispersive model associated to the constitutive laws (4.3) is said to be *non dissipative* if all the solutions $\omega_j(\mathbf{k})$ of (4.29) are real valued. By opposition, the medium is called *dissipative* if $\text{Im } \omega_j(\mathbf{k}) > 0$ for some j and \mathbf{k} .

In the sequel, we will consider only local dispersive model in the sense of (4.8) that are non dissipative. In other words, the set \mathcal{O} of admissible frequencies (4.27) satisfies

$$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}. \quad (4.30)$$

As told before, even if dispersive media are often dissipative, we are convinced that the question of PMLs is more difficult for non dissipative media.

For the Drude model (4.13), we can check explicitly that it is non dissipative. Indeed, injecting (4.13) in (4.29) shows that, for a given wave vector \mathbf{k} , ω has to be a zero of the polynomial

$$P_{\mathbf{k}}(\omega) := \omega^4 - (\omega_e^2 + \omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2)\omega^2 + \omega_e^2\omega_m^2. \quad (4.31)$$

where $c := 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ is the speed of light in the vacuum.

Proposition 4.11. *For all wave vectors $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$, the polynomial $P_{\mathbf{k}}$ given by (4.31) has 4 real distinct zeros $\pm\omega_j(\mathbf{k})$, $j = 1, 2$ depending only on $|\mathbf{k}|$ and given by*

$$\begin{cases} \pm\omega_1(\mathbf{k}) := \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega_e^2 + \omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2 + \Sigma(|\mathbf{k}|)}, \\ \pm\omega_2(\mathbf{k}) := \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega_e^2 + \omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2 - \Sigma(|\mathbf{k}|)}, \end{cases} \quad (4.32)$$

where $\Sigma(|\mathbf{k}|) := \sqrt{(\omega_e^2 - \omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2)^2 + 4\omega_m^2c^2|\mathbf{k}|^2}$.

Proof. By defining $W = \omega^2$, the dispersion relation is the quadratic equation $W^2 - (\omega_e^2 + \omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2)W + \omega_e^2\omega_m^2 = 0$. The discriminant of this equation is actually $\Sigma(|\mathbf{k}|)^2$. Thus the two solutions are real and given by

$$W_1 = \frac{\omega_e^2 + \omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2 + \Sigma(|\mathbf{k}|)}{2} \quad \text{and} \quad W_2 = \frac{\omega_e^2 + \omega_m^2 + c^2|\mathbf{k}|^2 - \Sigma(|\mathbf{k}|)}{2}. \quad (4.33)$$

It is clear that $W_1 > 0$. Notice that the product W_1W_2 of the zeros of this quadratic equation is also equal to $\omega_e^2\omega_m^2 > 0$, then necessarily $W_2 > 0$. Taking the square roots of W_1 and W_2 gives the result. \square

Remark 4.12. In a different way, the non dissipativity of the Drude model is also a consequence of the energy conservation result (4.20)–(4.21). For the same reason, all generalised Lorentz models (4.17) are also non dissipative. As a matter of fact, the solutions $\omega_j(\mathbf{k})$ of (4.29) can be interpreted as the eigenvalues of an hermitian matrix (see also Section 4.4.1, case of symmetrisable systems) depending polynomially on $|\mathbf{k}|^2$. We also know that in this case (see [134, chapter II, §6]), the functions $\omega_j(\mathbf{k})$ are – provided an adequate numbering – smooth functions (analytic in fact) over all \mathbb{R}^2 .

4.2.2.3 Phase and group velocities

Definition 4.13. A family $\omega_j(|\mathbf{k}|)$ of solution of (4.29) indexed by \mathbf{k} that is smooth with respect to \mathbf{k} (see Remark 4.12) is called a *branch*. The associated plane waves (4.25) are called *modes*.

Definition 4.14. For a mode associated to a branch $\omega(\mathbf{k})$, its *phase and group velocities* $\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k}))$ and $\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k}))$ are defined as

$$\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) := \frac{\omega(|\mathbf{k}|)}{|\mathbf{k}|} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) := \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) = \omega'(|\mathbf{k}|) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (4.34)$$

Note that, since we consider isotropic media, the phase and group velocities are collinear. In a dielectric material, in which ε and μ do not depend on ω , they are always equal but for more general models these quantities are different: this characterizes dispersive effects. Moreover, the scalar product of the two vectors can be positive (as in a non dispersive medium) or negative. This leads us to distinguish two cases:

Definition 4.15. For a given wave vector \mathbf{k} , a plane wave associated to $\omega(\mathbf{k})$ is called *forward* if

$$\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) > 0, \quad (4.35)$$

or equivalently $\omega(|\mathbf{k}|) \omega'(|\mathbf{k}|) > 0$, and *backward* if

$$\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) < 0, \quad (4.36)$$

or equivalently $\omega(|\mathbf{k}|) \omega'(|\mathbf{k}|) < 0$.

A mode associated to a branch $\omega(\mathbf{k})$ will be called *forward* (resp. *backward*) if for all \mathbf{k} , the plane wave associated to $\omega(\mathbf{k})$ is forward (resp. backward).

4.2.2.4 Negative index

Thanks to Definition 4.15, we can give a precise definition of a Negative Index Metamaterial (NIM). We refer to Remark 4.21 for a justification of the denomination and further discussion.

Definition 4.16. A *Negative Index Metamaterial* (NIM) is a local dispersive medium (in the sense of (4.8)) for which backward modes exist.

One can easily characterize NIMs only in terms of properties of the functions $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$. More precisely let us introduce, for $\omega \in \mathcal{O}$ (the set of admissible frequencies, see (4.30)) the following function:

$$\mathfrak{D}(\omega) := \frac{1}{2\omega} \frac{d}{d\omega} (\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega)) = \mu(\omega) \frac{d}{d\omega} (\omega \varepsilon(\omega)) + \varepsilon(\omega) \frac{d}{d\omega} (\omega \mu(\omega)). \quad (4.37)$$

Note that, from the properties (4.8) of ε and μ , $\mathfrak{D}(\omega)$ is an even function, strictly positive as soon as ω is large enough.

Lemma 4.17. *A mode is forward (resp. backward) when $\mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k})) > 0$ (resp. $\mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k})) < 0$).*

Proof. The differentiation of (4.29) with respect to \mathbf{k} leads to the fact that for any branch $\omega(\mathbf{k})$ one has (as soon as $\mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k})) \neq 0$)

$$\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) = \frac{\mathbf{k}}{\omega(|\mathbf{k}|)} \frac{1}{\mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k}))}, \quad (4.38)$$

which implies

$$\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) = \mathfrak{D}(\omega(\mathbf{k}))^{-1}. \quad (4.39)$$

□

Let us now introduce the spectrum \mathcal{S} of the medium as the set of *propagative frequencies*, namely the range of admissible frequencies ω which are attained by all the branches of solution $\omega_j(\mathbf{k})$ of (4.29):

$$\mathcal{S} := \bigcup_{j=1}^M \{\omega_j(\mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2\}, \quad (4.40)$$

and \mathcal{G} , the set of *non propagative frequencies* (also called *gap*):

$$\mathcal{G} := \mathcal{O} \setminus \mathcal{S}. \quad (4.41)$$

If $\omega \in \mathcal{O}$ and $\varepsilon(\omega)\mu(\omega) > 0$, one can find \mathbf{k} such that (4.29) holds. Thus $\omega = \omega_j(\mathbf{k})$ for some j . This leads to the following characterizations:

$$\mathcal{S} = \{\omega \in \mathcal{O} : \varepsilon(\omega)\mu(\omega) > 0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{G} = \{\omega \in \mathcal{O} : \varepsilon(\omega)\mu(\omega) \leq 0\}. \quad (4.42)$$

Note that, since $\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$ is continuous in $\mathbb{R} \setminus \mathcal{F}$, \mathcal{S} (resp. \mathcal{G}) is an open (resp. closed) subset of $\mathbb{R} \setminus \mathcal{F}$.

Joining Definition 4.16, Lemma 4.17 and (4.40), we obtain the following characterization of NIMs (the straightforward proof is left to the reader):

Theorem 4.18. *A local dispersive material (in the sense of (4.8)) is a NIM (in the sense of the Definition 4.16) if, and only if,*

$$\mathcal{N} := \mathcal{S} \cap \{\omega \in \mathcal{O} : \mathfrak{D}(\omega) < 0\} \neq \emptyset. \quad (4.43)$$

In the sequel, \mathcal{N} will be (abusively) referred as the set of *negative frequencies*, $\mathcal{P} := \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}$ being by definition the set of *positive frequencies*.

Let us take for example the Drude model (4.13). This is indeed a NIM since the function $|\mathbf{k}| \mapsto \omega_1(|\mathbf{k}|)$ is increasing while $|\mathbf{k}| \mapsto \omega_2(|\mathbf{k}|)$ is decreasing (see Proposition 4.11) as illustrated by Figure 4.2. As a consequence, according to Definition 4.15, the two modes associated to $\pm\omega_1(\mathbf{k})$ are forward for any \mathbf{k} while the two modes associated to $\pm\omega_2(\mathbf{k})$ are backward for any \mathbf{k} . This is confirmed by Theorem 4.18.

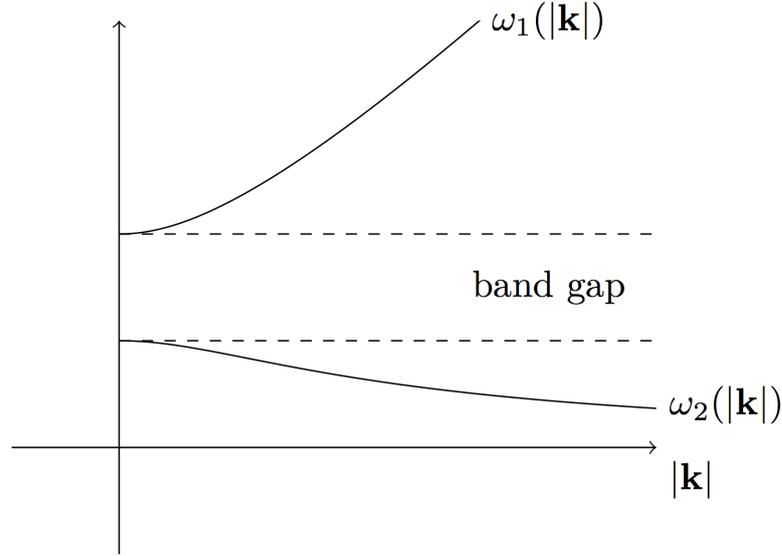


Figure 4.2 – the modes ω_1 and ω_2 in terms of $|\mathbf{k}|$

Indeed, denoting $\omega_- := \min\{\omega_e, \omega_m\}$ and $\omega_+ := \max\{\omega_e, \omega_m\}$ one has

$$\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\omega_e, \pm\omega_m\} \quad \text{and} \quad \mathcal{G} = (-\omega_+, -\omega_-) \cup (\omega_-, \omega_+). \quad (4.44)$$

On the other hand, one easily computes that

$$\mathfrak{D}(\omega) = \frac{\omega^4 - \omega_e^2 \omega_m^2}{c^2 \omega^4}, \quad (4.45)$$

so that $\mathcal{N} = (-\omega_-, \omega_-) \neq \emptyset$.

One can wonder whether a NIM is nothing but a material for which $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ become both negative. In fact, as far as our definition of NIM is retained, the two things are decorrelated: a dispersive

medium may be a NIM even though $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ remain positive. Let us take an example of such a medium (that however escapes to the class of generalised Lorentz materials (4.17)):

$$\varepsilon(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 \quad \text{and} \quad \mu(\omega) = 1. \quad (4.46)$$

The spectrum of this material is $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ while the function \mathfrak{D} is the same as for the Drude model with $\omega_e = \omega_m = \omega_0$. As a consequence, $\mathcal{N} = (-\omega_0, \omega_0) \neq \emptyset$ thus this material is a NIM.

However, for generalised Lorentz materials, or more generally for any material that satisfies the growing property (4.22), we have the following proposition.

Proposition 4.19. *For any local dispersive material (in the sense of (4.8)) possessing the growing property (4.22), one has for all $\omega \in \mathcal{S}$*

$$\varepsilon(\omega) \mathfrak{D}(\omega) > 0 \quad \text{and} \quad \mu(\omega) \mathfrak{D}(\omega) > 0. \quad (4.47)$$

Proof. Observe that

$$\varepsilon(\omega) \mathfrak{D}(\omega) = [\varepsilon(\omega)\mu(\omega)] \left[\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon(\omega)) \right] + [\varepsilon(\omega)^2] \left[\frac{d}{d\omega}(\omega\mu(\omega)) \right], \quad (4.48)$$

and that all quantities inside brackets are positive when ω belongs to \mathcal{S} . The same holds for μ . \square

As a consequence of this property, we have the result:

Theorem 4.20. *For any local dispersive material (in the sense of (4.8)) possessing the growing property (4.22), one has*

$$\mathcal{N} = \{\omega \in \mathcal{S} : \varepsilon(\omega) < 0 \text{ and } \mu(\omega) < 0\}. \quad (4.49)$$

In other words, this medium is a NIM if, and only if, $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ become both negative.

Proof. From Theorem 4.18, the material is a NIM if and only if $\mathcal{N} \neq \emptyset$, *i.e.* there exists some $\omega \in \mathcal{O}$ such that $\varepsilon(\omega)\mu(\omega) > 0$ and $\mathfrak{D}(\omega) < 0$. From Proposition 4.19, a material possessing the growing property (4.22) satisfies (4.47), which implies that $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ become negative simultaneously. \square

Remark 4.21. The terminology “negative index” comes from the physics. The refraction index n of a dispersive medium is defined as $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$ where this quantity is to be understood as the limit of $\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$ when $\text{Im}\omega$ tends to 0. One can show that $n(\omega)$ is actually negative when both $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ are negative. As a consequence, if one is looking at the reflection-transmission of a plane wave across a plane interface between the vacuum and a negative material, the usual Snell-Descartes law is inverted. We refer to [228, 247] for more details and to our previous article [19] for an illustration of the effects of the negativity of refraction indexes.

4.2.2.5 Numerical illustration of backward and forward modes

The coexistence of backward and forward waves for the Drude model (4.13) can be nicely illustrated with time domain numerical experiments. The numerical simulations that we present have been obtained with a quite standard FDTD scheme for (4.16) inspired from the Yee scheme for Maxwell equations. The only point – and the only difference with what is done in [156] for instance – is due to the fact that we use an implicit time discretization for the ODEs governing \mathbf{J} and K (see [23, 193] for similar approaches). The advantage of this choice is that the CFL stability condition of the scheme is independent of the parameters of the Drude model (ω_e, ω_m).

The computational domain is the square $\Omega = [-20, 20]^2$. We choose $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ so that the speed of light is normalized: $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 1$ and we take $\omega_e = \omega_m = 2$. All the fields are zeros at the initial time $t = 0$ and we add at the right hand side of (4.16) (the one for H) a source term $f(x, y, t) = g(|x - y|)h(t)$ where the spatial function is quite localized (see Figure 4.3) and $h(t)$ is the derivative of a Gaussian pulse, that possesses a large spectrum of frequencies,

$$g(r) = e^{-5r^2} \quad \text{and} \quad h(t) = -20(t - 1)e^{-10(t-1)^2}. \quad (4.50)$$

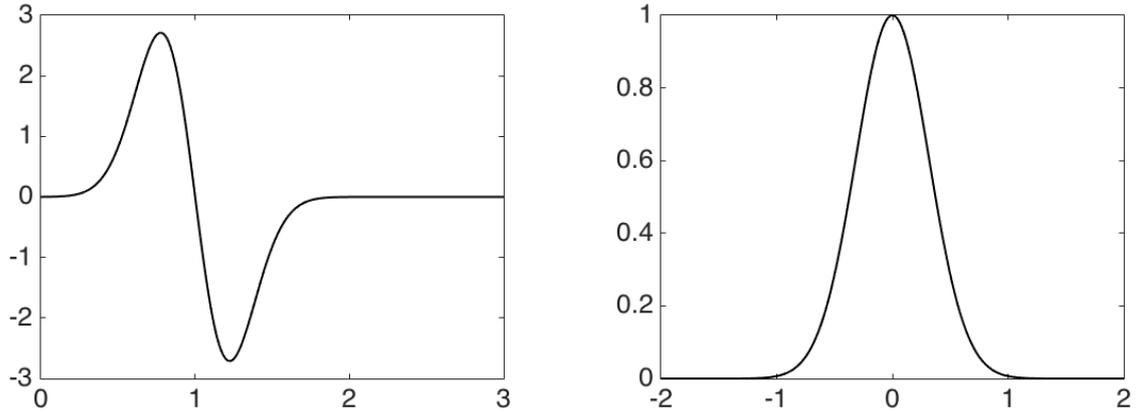


Figure 4.3 – the Gaussian pulse $h(t)$ (left) and the Gaussian $g(r)$ (right)

The duration of the experiment is chosen in such a way that the solution does not reach the boundary of Ω . The space steps used are $\Delta x = \Delta y = 0.05$ and the time step Δt is chosen to respect the CFL condition of the scheme: $\Delta t = \Delta x/\sqrt{2} = 0.05/\sqrt{2}$.

In the Figure 4.4, we compare the propagation in the Drude medium with the propagation in the vacuum by showing snapshots of the field H at different times. The huge dispersion of the Drude model is clearly visible through the spreading of the propagated signal and the multiplication of the wavefronts due to different velocities. Which is difficult to distinguish with snapshots, but obvious on a movie, is that the wave can be separated into two parts: we have tried to image this on figure 4.4 by introducing an artificial dotted circle that varies in time. The wave inside the circle – the slowest one – seems to be convergent and is interpreted as the superposition of backward waves (this is the meaning of the white arrows on the picture), while the one outside the circle, the fastest one, is divergent and interpreted as the superposition of forward waves.

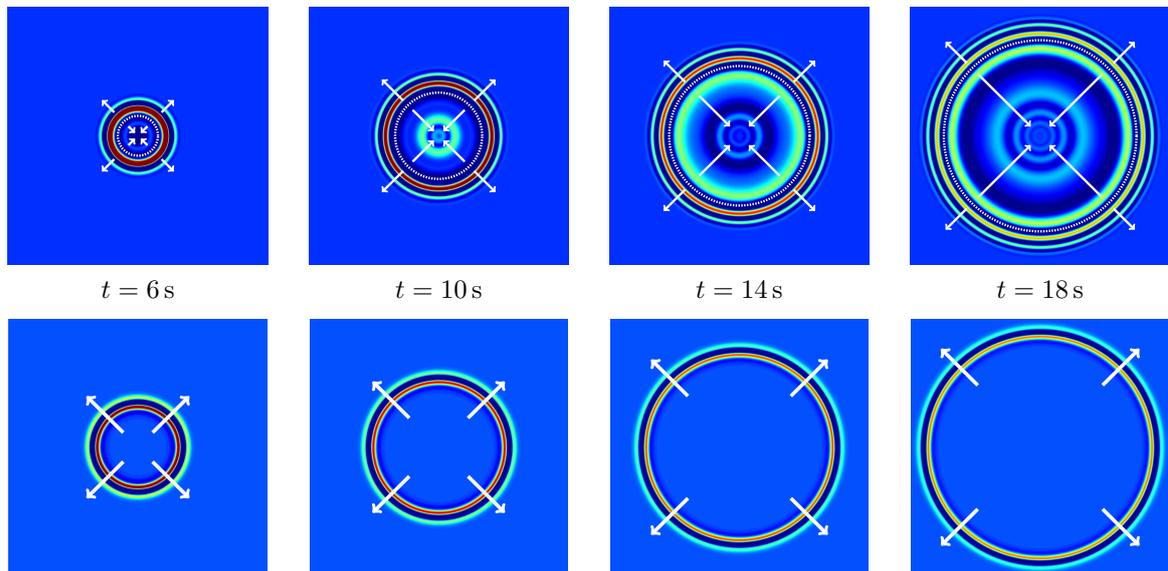


Figure 4.4 – Snapshots of the field H at different times t . Top pictures correspond to a Drude material with $\omega_e = \omega_m = 2$, bottom pictures to the vacuum ($\omega_e = \omega_m = 0$).

4.3 Classical PMLs and their instabilities for the Drude model

In this section, we construct the so-called classical Perfectly Matched Layers (PMLs) for the Drude model. Then we perform some numerical experiments and notice that the obtained PML system is unstable. For an introduction to Perfectly Matched Layers, we refer to [128].

4.3.1 Construction of classical PMLs for the Drude model

Classical Perfectly Matched Layers (PMLs) were first introduced by Bérenger for the 3D Maxwell equations [22]. By classical PMLs for the Drude model, we simply mean the result of the direct extension of the construction of Bérenger – the split field method – to the case where ε and μ are frequency dependent. The first step is to use the standard splitting of the field H in two fields $H = H^x + H^y$ [18] in order to write (4.2) coupled with (4.3) as a system in which, for each equation, only derivatives with respect to one of the space variable (x or y) appears:

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon(\omega)\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{curl}(\widehat{H}^x + \widehat{H}^y), \\ i\omega\mu(\omega)\widehat{H}^x = \partial_y\widehat{E}_x, \\ i\omega\mu(\omega)\widehat{H}^y = -\partial_x\widehat{E}_y. \end{cases} \quad (4.51)$$

To see that this system is “equivalent” to the original Maxwell system (4.2) with (4.3), one can observe that the original Maxwell system is recovered from the sum of the last two equations. Then, the PML system is obtained by adding zero order “damping terms” to each equation of (4.51). An elegant way to construct these terms – in the direction x for instance – is to perform a change of variables in the complex plane [58] (using the fact that we can extend the solution to the complex plane $x \in \mathbb{C}$ by analyticity):

$$x \longrightarrow x + \frac{1}{i\omega} \int_0^x \sigma_x(s) ds, \quad (4.52)$$

in the frequency domain, where $\sigma_x \geq 0$ is the damping factor in the x -direction (a function which depends only on x). This change of variable is equivalent to replace ∂_x by

$$\partial_x \longrightarrow \left(1 + \frac{\sigma_x}{i\omega}\right)^{-1} \partial_x. \quad (4.53)$$

Of course, one can also construct a PML in the y -direction with the change of variable

$$\partial_y \longrightarrow \left(1 + \frac{\sigma_y}{i\omega}\right)^{-1} \partial_y, \quad (4.54)$$

where $\sigma_y \geq 0$ the damping term in the y direction which depends only on y .

Injecting (4.13) in (4.51) and using the changes of variable (4.53) and (4.54) leads to

$$\begin{cases} (i\omega + \mathfrak{S})\widehat{\mathbf{E}} + \omega_e^2 \frac{\widehat{\mathbf{E}}}{i\omega} + \omega_e^2 \mathfrak{S} \frac{\widehat{\mathbf{E}}}{-\omega^2} = \varepsilon_0^{-1} \mathbf{curl}(\widehat{H}^x + \widehat{H}^y), \\ (i\omega + \sigma_y)\widehat{H}^x + \omega_m^2 \frac{\widehat{H}^x}{i\omega} + \sigma_y \omega_m^2 \frac{\widehat{H}^x}{-\omega^2} = \mu_0^{-1} \partial_y \widehat{E}_x, \\ (i\omega + \sigma_x)\widehat{H}^y + \omega_m^2 \frac{\widehat{H}^y}{i\omega} + \sigma_x \omega_m^2 \frac{\widehat{H}^y}{-\omega^2} = -\mu_0^{-1} \partial_x \widehat{E}_y, \end{cases} \quad (4.55)$$

with $\mathfrak{S} := \text{diag}(\sigma_y, \sigma_x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. In order to go back to the time domain, we introduce the primitives in time \mathbf{J} , K^x and K^y of \mathbf{E} , E_y , H^x and H^y , as in Section 4.2.1.3, as well as primitives in time \mathbf{P} , M^x and M^y of the above functions (called the electric and magnetic polarisations), namely

$$\begin{aligned} i\omega\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{E}}, \quad i\omega\widehat{\mathbf{P}} = \widehat{\mathbf{J}}, \quad i\omega\widehat{K}^x = \widehat{H}^x, \quad i\omega\widehat{M}^x = \widehat{K}^x, \\ i\omega\widehat{K}^y = \widehat{H}^y \quad \text{and} \quad i\omega\widehat{M}^y = \widehat{K}^y. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Finally, we get the classical Perfectly Matched Layers system for the Drude model

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} + \mathfrak{S} \mathbf{E} + \omega_e^2 \mathbf{J} + \omega_e^2 \mathfrak{S} \mathbf{P} = \varepsilon_0^{-1} \mathbf{curl}(H^x + H^y), \\ \partial_t \mathbf{J} - \mathbf{E} = 0, \quad \partial_t \mathbf{P} - \mathbf{J} = 0, \\ \partial_t H^x + \sigma_y H^x + \omega_e^2 K^x + \sigma_y \omega_m^2 M^x = \mu_0^{-1} \partial_y E_x, \\ \partial_t K^x - H^x = 0, \quad \partial_t M^x - K^x = 0, \\ \partial_t H^y + \sigma_x H^y + \omega_m^2 K^y + \sigma_x \omega_m^2 M^y = -\mu_0^{-1} \partial_x E_y, \\ \partial_t K^y - H^y = 0, \quad \partial_t M^y - K^y = 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

This system can handle PMLs in both x direction ($\sigma_x \neq 0$ and $\sigma_y = 0$) and y direction ($\sigma_x = 0$ and $\sigma_y \neq 0$), and also for corner domains ($\sigma_x \neq 0$ and $\sigma_y \neq 0$).

4.3.2 A numerical experiment of classical PMLs for the Drude model

We now perform a numerical simulation using the system (4.57). We use exactly the same parameters and sources as in Section 4.2.2.5 but we add a surrounding PML around the computational domain of width $L = 3$ so that the total computational domain is still $\Omega = [-20, 20]^2$ but the physical domain is now $[-17, 17]^2$. In order to reduce numerical reflections at the interface between the physical domain and the PML, the damping terms σ_x and σ_y are taking continuous: a classical choice is to take a quadratic function $\sigma_x(x) = \sigma(x)$ and $\sigma_y(y) = \sigma(y)$ where σ is defined by

$$\sigma(\tau) = \begin{cases} (\tau - 17)^2 & \text{if } \tau \geq 17, \\ (\tau + 17)^2 & \text{if } \tau \leq -17, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.58)$$

The FDTD scheme used here is based exactly on the same idea as in Section 4.2.2.5. The Figure 4.5 shows snapshots of the field H at different times. We clearly observe instabilities. One can check that these are not numerical instabilities: one can refine the mesh and/or reduce the time step and get the same phenomena. The boundary conditions at the end of the PMLs do not matter either. The instabilities come from the model (4.57) itself.

One can notice that the experiment suggests that the backward waves are responsible of the instabilities. Indeed, the forward waves – the faster ones – are well absorbed by the PML but as soon as the backward waves reach the PML, the solution grows exponentially in time. The Figure 4.6 illustrates this statement by plotting in log-log scale the energy $\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$ defined by (4.21). More precisely, one can deduce from the Proposition 4.11 that the group velocity of the forward modes $\mathbf{v}_{\mathbf{g}}(\omega_{\pm 1})$ is bounded by $c = 1$ but the group velocity of the backward modes $\mathbf{v}_{\mathbf{g}}(\omega_{\pm 2})$ is bounded by $c/2 = 0.5$. That is why instabilities can only occur after a time $t = 17/0.5 = 34$ s.

4.4 Construction and analysis of PML models for a class of dispersive systems

We now want to explain why the classical PMLs are unstable for the Drude model. For linear wave propagation in non dispersive – but possibly anisotropic – media, it has been shown in [17] that the presence of backward waves, due to anisotropy, gives rise to instabilities. It seems that it is still the case for NIMs as it was observed in the previous section and pointed out in several papers from the physicist community [79, 161].

In this section, we aim at extending the result of [17] (valid for non dispersive systems) to a class of dispersive systems, described in Section 4.4.1. These models contain in particular the isotropic dispersive Maxwell models considered in Section 4.2. We shall consider – this is not restrictive of course – a PML in the x -direction, involving a single damping coefficient denoted σ (instead of σ_x in Section 4.3). In fact, we propose to introduce and analyse a new class of PML models (Section 4.4.2) obtained by a generalisation of the classical complex change of variable (4.52) that, in addition to the damping coefficient σ , involves

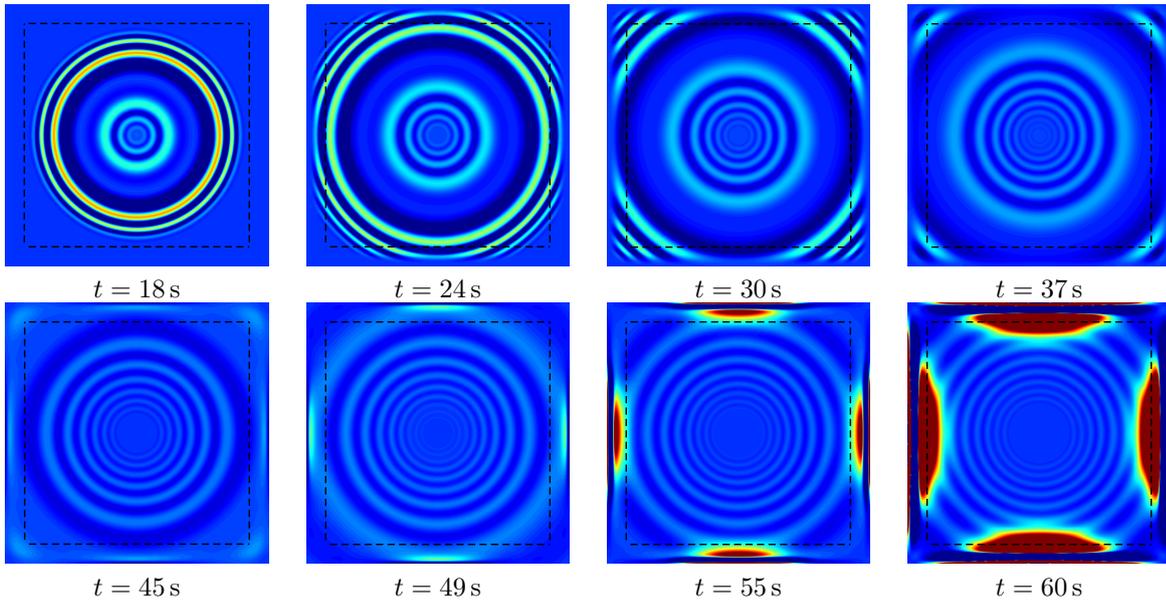


Figure 4.5 – Snapshots of the field H at different times t .

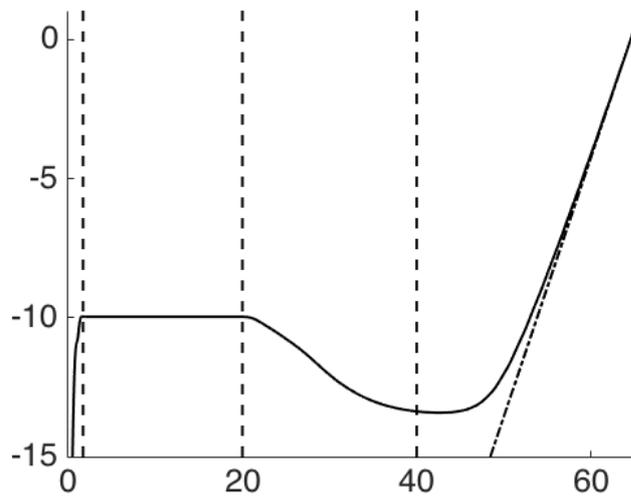


Figure 4.6 – Logarithm of the energy $\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$ defined by (4.21).

a new ingredient, namely a real valued function of the frequency $\chi(\omega)$ to be determined in practice (the choice $\chi(\omega) = 1$ giving the classical PML model). Such a generalization appears to be useful to propose an alternative to classical PMLs when these are unstable.

Finally, in Section 4.4.3, we provide a preliminary stability analysis for these new PML models. In particular, we establish a necessary stability condition (Proposition 4.29) which generalizes the one given in [17]. This allows us to explain the instabilities of classical PMLs and will help in designing new stable PMLs in the next Section 4.5 for the isotropic dispersive Maxwell models.

We have to emphasize that our stability analysis will be performed through a modal analysis, thus limited to constant coefficients. Rigorously speaking, our analysis cannot be applied for situations of practical interest where the damping coefficient σ (or σ_x or σ_y) in the PMLs must depend on the space variable (in particular it has to be 0 in the physical domain and strictly positive inside the PML region). Nevertheless, we think that this relative weakness does not affect the interest of our analysis for the following reasons:

- The case of constant coefficients is a particular case of non constant coefficients and thus deserves to be studied anyway. Moreover, one can hardly expect that a model that leads to instability in the constant coefficients case becomes stable when used with variable coefficients.
- There are numerical evidences, as we shall see in Section 4.6.1, that our analysis provides the good answers even in the non constant coefficients case.
- Even in the case of non dispersive media, there are very few results on the stability (we speak here of stability and not only well-posedness) of PML models with non constant σ (at the exception of [88] for the wave equation).

4.4.1 A class of first order dispersive hyperbolic systems

Consider a general 2D hyperbolic system with a zero order perturbation of the form

$$\partial_t \mathbf{u} + B\mathbf{u} = A_x \partial_x \mathbf{u} + A_y \partial_y \mathbf{u}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (4.59)$$

where the unknown \mathbf{u} takes values in \mathbb{R}^m and A_x , A_y and B are real constant $m \times m$ matrices. The hyperbolic nature of the unperturbed system ($B = 0$) is equivalent to assuming that:

$$\text{for all } (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2, \quad k_x A_x + k_y A_y \text{ has real eigenvalues.} \quad (4.60)$$

Next, we express the fact that the perturbed system is non dissipative.

Definition 4.22. The dispersive system (4.59) is said to be *non-dissipative* if

$$\text{for all } (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2, \quad k_x A_x + k_y A_y - iB \text{ has real eigenvalues.} \quad (4.61)$$

Looking at $|\mathbf{k}| \rightarrow +\infty$, (4.61) implies (4.60), *i.e.* the hyperbolicity of the unperturbed system. Definition (4.22) is justified by the Fourier analysis that permits to study the stability in terms of plane waves that are solutions of (4.59) of the form

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \widehat{\mathbf{U}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (4.62)$$

where $\widehat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^m$ is the amplitude vector, $\mathbf{k} = (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$ the wave vector and $\omega \in \mathbb{C}$ the angular frequency. It is easy to check that ω and \mathbf{k} must satisfy the so-called dispersion relation

$$F(\omega, k_x, k_y) = 0, \quad (4.63)$$

where F is a polynomial in ω of order m defined by

$$F(\omega, k_x, k_y) = \det(i\omega I + B + ik_x A_x + ik_y A_y), \quad (4.64)$$

which is nothing, up to a multiplicative coefficient, but the characteristic polynomial of $k_x A_x + k_y A_y - iB$. As a consequence, (4.63) admits m branches of solutions $\omega_j(\mathbf{k})$, $j = 1, \dots, m$ that is to say the eigenvalues

of $k_x A_x + k_y A_y - iB$ repeated with their multiplicity which are continuous and piecewise analytic functions of k_x and k_y respectively (see for instance [134, chapter II, §1]).

Considering a family of plane wave solutions (a mode) associated to a smooth branch $\omega(\mathbf{k}) = \omega_j(\mathbf{k})$, as an extension of the Definition 4.14, its group and phase velocities are defined by

$$\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) := \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) := \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}). \quad (4.65)$$

The main difference with the isotropic case is that these two vectors are not necessarily collinear.

A particular case of non dissipative systems is the symmetrisable systems which corresponds to the case where it exists a symmetric positive definite matrix $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ such that MA_x and MA_y are symmetric and MB is skew symmetric. Under condition (4.61), using Fourier analysis, it is then possible, for instance, to obtain polynomial (in time) bounds on the L^2 -norm (in space) of the solution of the Cauchy problem associated to (4.59) (see [141]). These bounds are even uniform in time in the case of symmetrisable systems. Indeed, one has the conservation in time of the energy:

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (M\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (4.66)$$

where (\cdot, \cdot) denotes the inner product in \mathbb{R}^m . In this case, the perturbation theory for self-adjoint analytic families of matrices (see for instance [134, chapter II, §6]) even asserts that the functions $\omega_j(\mathbf{k})$ can be chosen in such a way that they are analytic functions of k_x and k_y (separately) everywhere.

One can see that the Drude model (4.16) is a particular case of such systems and is non-dissipative. Indeed, it can be written under the form (4.59) with $\mathbf{u} = (E_x, J_x, E_y, J_y, H, K)^T$,

$$A_x = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_0^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \omega_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

One easily checks that this system is symmetrisable with the diagonal matrix

$$M = \text{diag}(\varepsilon_0, \varepsilon_0 \omega_e^2, \varepsilon_0, \varepsilon_0 \omega_e^2, \mu_0, \mu_0 \omega_m^2), \quad (4.68)$$

and the energy (4.66) is nothing but $\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$ in (4.21). More generally, it is not difficult, although tedious, to show that the generalised Lorentz model (4.18) is also symmetrisable and non-dissipative.

4.4.2 New generalised PMLs for dispersive models

From now on, we will only consider dispersive systems of the form (4.59) that are non-dissipative, *i.e.* they satisfy (4.61). What follows only concerns PMLs in the x -direction, but everything can easily be adapted to PMLs in the y -direction. As announced in the introduction of this section, we consider a new change of variable that generalises (4.52) under the form

$$x \longrightarrow X(\omega, x) := x + \frac{\chi(\omega)}{i\omega} \int_0^x \sigma(s) ds, \quad (4.69)$$

where the damping function σ is non-negative and χ is a real-valued function of ω . In the frequency domain, the corresponding PML model, *i.e.* the equation satisfied by

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y, \omega) := \mathcal{F}\mathbf{u}(X(\omega, x), y, \omega), \quad (4.70)$$

where $\mathcal{F}\mathbf{u}$ is the time Fourier transform of \mathbf{u} , extended analytically to complex values of x , is simply obtained by changing

$$\partial_x \longrightarrow \left(1 + \frac{\sigma\chi(\omega)}{i\omega}\right)^{-1} \partial_x, \quad (4.71)$$

in the frequency version of the original system (4.59). We obtain

$$i\omega \hat{\mathbf{u}} + B \hat{\mathbf{u}} = \left(1 + \frac{\sigma\chi(\omega)}{i\omega}\right)^{-1} A_x \partial_x \hat{\mathbf{u}} + A_y \partial_y \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.72)$$

In what follows, we shall restrict ourselves to functions $\chi(\omega)$ that mimic (4.17): they are of the form

$$\chi(\omega) = 1 + \sum_{\ell=1}^N \frac{b_\ell}{a_\ell^2 - \omega^2}, \quad (4.73)$$

where a_ℓ and b_ℓ are non-zero real constants such that $0 < a_1^2 < a_2^2 < \dots < a_N^2$. Notice that χ is chosen to fulfil the following criteria:

- At high frequencies, the system becoming non dispersive (in the sense that the functions $\omega_j(\mathbf{k})$ behave more and more as functions which are homogeneous of degree 1), there is no reason that χ varies with ω for large ω so a natural criterion is that $\chi(\omega)$ tends to 1 when ω tends to $+\infty$.
- For practical reasons linked to numerical simulations, the function $\chi(\omega)$ should be the symbol of a local operator in time (*i.e.* expressed with the help of differential operators and inverse of differential operators) which means that $\chi(\omega)$ should be a rational fraction in ω .
- In order to ensure that the solutions of the time dependent problems remain real-valued, the operator of symbol $\chi(\omega)$ should be real (in the sense that it transforms real valued functions into real valued functions).
- The poles of $\chi(\omega)$ must be real. This last criterion is more mathematical and related to the stability of the corresponding evolution problem.

We shall also use in the following analysis the equivalent expression of χ :

$$\chi(\omega) = 1 + \frac{P_\chi(\omega)}{Q_\chi(\omega)}, \quad (4.74)$$

where

$$P_\chi(\omega) = \sum_{\ell=1}^N b_\ell \prod_{p \neq \ell} (a_p^2 - \omega^2) \quad \text{and} \quad Q_\chi(\omega) = \prod_{\ell=1}^N (a_\ell^2 - \omega^2), \quad (4.75)$$

and we will denote by $\pm z_\ell$, $\ell = 1, \dots, N$, the zeros of χ .

Using (4.69) and coming back to the time domain, we are going to show that (4.72) can be rewritten as an augmented first order system of the form

$$\partial_t \mathbf{u}_a + \tilde{B} \mathbf{u}_a + \sigma \tilde{S} \mathbf{u}_a = \tilde{A}_x \partial_x \mathbf{u}_a + \tilde{A}_y \partial_y \mathbf{u}_a, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, \quad (4.76)$$

in which the new "augmented" unknown \mathbf{u}_a takes values in \mathbb{R}^{m_a} , and \tilde{B} , \tilde{S} , \tilde{A}_x and \tilde{A}_y are $m_a \times m_a$ real matrices. The dimension m_a can be decomposed as $m_a = m + m_{\text{ex}}$ so \mathbf{u}_a can be seen as $\mathbf{u}_a = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\text{ex}})^T$ where

- \mathbf{u} , with values in \mathbb{R}^m , is the inverse time Fourier transform of $\hat{\mathbf{u}}$ defined by (4.70): it corresponds to the original solution in the region where σ is 0.
- \mathbf{u}_{ex} , with values in $\mathbb{R}^{m_{\text{ex}}}$, is a vector of extra auxiliary variables.

More precisely, defining

$$i\omega \widehat{\mathbf{d}} := \sigma \chi(\omega) \widehat{\mathbf{u}}, \quad (4.77)$$

the equation (4.72) can be rewritten

$$(i\omega + B)(\widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{d}}) = A_x \partial_x \widehat{\mathbf{u}} + A_y \partial_y (\widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{d}}). \quad (4.78)$$

From the expression (4.73) of χ , we deduce that

$$\chi(\omega) \widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{u}} + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \widehat{\mathbf{u}}_\ell, \quad (4.79)$$

where the $\widehat{\mathbf{u}}_\ell$ are defined by

$$(a_\ell^2 - \omega^2) \widehat{\mathbf{u}}_\ell = \widehat{\mathbf{u}}, \quad \ell = 1, \dots, N. \quad (4.80)$$

Using the above, (4.77) gives

$$i\omega \widehat{\mathbf{d}} = \sigma \left(\widehat{\mathbf{u}} + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \widehat{\mathbf{u}}_\ell \right), \quad (4.81)$$

so that (4.78) can be rewritten as

$$i\omega \widehat{\mathbf{u}} + B(\widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{d}}) + \sigma \left(\widehat{\mathbf{u}} + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \widehat{\mathbf{u}}_\ell \right) = A_x \partial_x \widehat{\mathbf{u}} + A_y \partial_y \widehat{\mathbf{u}} + A_y \partial_y \widehat{\mathbf{d}}. \quad (4.82)$$

With (4.79), (4.80), (4.81) and (4.82), we finally obtain the system:

$$\begin{cases} i\omega \widehat{\mathbf{u}} + B(\widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{d}}) + \sigma \left(\widehat{\mathbf{u}} + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \widehat{\mathbf{u}}_\ell \right) = A_x \partial_x \widehat{\mathbf{u}} + A_y \partial_y \widehat{\mathbf{u}} + A_y \partial_y \widehat{\mathbf{d}}, \\ i\omega \widehat{\mathbf{d}} - \sigma \left(\widehat{\mathbf{u}} + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \widehat{\mathbf{u}}_\ell \right) = 0, \\ i\omega \widehat{\mathbf{u}}_\ell = \widehat{\mathbf{v}}_\ell, \quad i\omega \widehat{\mathbf{v}}_\ell + a_\ell^2 \widehat{\mathbf{u}}_\ell - \widehat{\mathbf{u}} = 0, \quad (\ell = 1, \dots, N), \end{cases} \quad (4.83)$$

where (4.80) was decomposed into the two last equations of (4.82) thanks to the introduction of the $\widehat{\mathbf{v}}_\ell$ in order to get a first-order system in time. Indeed, (4.83) gives in the time domain the following system:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + B(\mathbf{u} + \mathbf{d}) + \sigma \left(\mathbf{u} + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \mathbf{u}_\ell \right) = A_x \partial_x \mathbf{u} + A_y \partial_y \mathbf{u} + A_y \partial_y \mathbf{d}, \\ \partial_t \mathbf{d} - \sigma \left(\mathbf{u} + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \mathbf{u}_\ell \right) = 0, \\ \partial_t \mathbf{u}_\ell - \mathbf{v}_\ell = 0, \quad \partial_t \mathbf{v}_\ell + a_\ell^2 \mathbf{u}_\ell - \mathbf{u} = 0, \quad (\ell = 1, \dots, N). \end{cases} \quad (4.84)$$

This is an augmented system of the form (4.76) with $m_a = m + (2N + 1)m$ (thus $m_{\text{ex}} = (2N + 1)m$) and $\mathbf{u}_a = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\text{ex}})^\top$ where $\mathbf{u}_{\text{ex}} = (\mathbf{d}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)^\top$.

Remark 4.23. Let us emphasize that there is not a unique way to write the augmented system (4.76) from (4.72)–(4.73) (even not a unique choice for the dimension m_a) because there are several possible choices for the additional auxiliary unknowns. In particular, this type of formulation is an alternative to the split-form of PMLs, as it is done in the original work of Bérenger [22] or as in Section 4.4. The one chosen here in (4.84) appears more convenient to us for the mathematical analysis but the conclusions are valid for any equivalent reformulation of this system.

and finally $\Omega_{\text{PML}}(\mathbf{k}, \sigma)$ the set of the solutions $\omega \notin \mathcal{A} \cup \Omega_c(\sigma)$ of the so-called PML dispersion relation defined by

$$(\omega, \mathbf{k}) \in \Omega_{\text{PML}}(\mathbf{k}, \sigma) \iff F_{\text{PML}}(\omega, \mathbf{k}, \sigma) = 0, \quad (4.93)$$

where F_{PML} is defined by

$$\begin{aligned} F_{\text{PML}}(\omega, \mathbf{k}, \sigma) &:= F(\omega, k_x f(\omega)^{-1}, k_y) \\ &= \det(i\omega I + B + ik_x f(\omega)^{-1} A_x + ik_y A_y), \end{aligned} \quad (4.94)$$

with F given by (4.64) (coming from the dispersion relation (4.63) of the original system (4.59)) and f is defined in (4.92).

Lemma 4.26. *The set $\Omega(\mathbf{k}, \sigma)$ can be decomposed as the disjoint union*

$$\Omega(\mathbf{k}, \sigma) = \begin{cases} \Omega_{\text{PML}}(\mathbf{k}, \sigma) \cup \Omega_c(\sigma) \cup \mathcal{E}(\mathbf{k}) & \text{if } \text{Ker } k_x A_x \neq \{0\} \\ \Omega_{\text{PML}}(\mathbf{k}, \sigma) \cup \mathcal{E}(\mathbf{k}) & \text{if } \text{Ker } k_x A_x = \{0\} \end{cases} \quad (4.95)$$

where $\Omega_{\text{PML}}(\mathbf{k}, \sigma)$ and $\Omega_c(\sigma)$ are defined by (4.93) and (4.92), and where $\mathcal{E}(\mathbf{k}) \subset \mathbb{R}$ is a set of real additional modes (described in the proof).

Proof. Adding the first two equations of (4.90) leads to the equivalent system:

$$\begin{cases} (i\omega + B)(\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{D}}) + ik_x A_x \widehat{\mathbf{U}} + ik_y A_y \widehat{\mathbf{U}} + ik_y A_y \widehat{\mathbf{D}} = 0, \\ i\omega \widehat{\mathbf{D}} - \sigma \left(\widehat{\mathbf{U}} + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \widehat{\mathbf{U}}_\ell \right) = 0, \\ -\omega^2 \widehat{\mathbf{U}}_\ell + a_\ell^2 \widehat{\mathbf{U}}_\ell = \widehat{\mathbf{U}}, \quad (\ell = 1, \dots, N). \end{cases} \quad (4.96)$$

We next distinguish three cases:

1. $\omega \notin \mathcal{A} \cup \{0\}$. The last two equations of (4.96) give $\widehat{\mathbf{U}}_\ell = \widehat{\mathbf{U}}/(a_\ell^2 - \omega^2)$ and $i\omega \widehat{\mathbf{D}} = \sigma \chi(\omega) \widehat{\mathbf{U}}$. Substituting this into the first equation of (4.96), we obtain using $f(\omega)$ defined in (4.92)

$$(i\omega + B)f(\omega) \widehat{\mathbf{U}} + ik_x A_x \widehat{\mathbf{U}} + ik_y f(\omega) A_y \widehat{\mathbf{U}} = 0. \quad (4.97)$$

Since we look for non trivial solutions, $\widehat{\mathbf{U}} \neq 0$. If $\omega \notin \Omega_c(\sigma)$, $f(\omega) \neq 0$ thus $(i\omega + B) \widehat{\mathbf{U}} = -ik_x f(\omega)^{-1} A_x \widehat{\mathbf{U}} - ik_y A_y \widehat{\mathbf{U}}$, i.e. $\omega \in \Omega_{\text{PML}}(\mathbf{k}, \sigma)$. Now if $\omega \in \Omega_c(\sigma)$, then $k_x A_x \widehat{\mathbf{U}} = 0$, i.e. $\text{Ker } k_x A_x \neq \{0\}$.

2. $\omega \in \mathcal{A}$: $\omega^2 = a_\ell^2$ for one $\ell \in \{1, \dots, N\}$. One easily checks from (4.96) that $\widehat{\mathbf{U}} = 0$, $\widehat{\mathbf{U}}_k = 0$ for $k \neq \ell$ and

$$(\pm a_\ell I + iB - k_y A_y) \widehat{\mathbf{D}} = 0, \quad \widehat{\mathbf{U}}_\ell = \frac{\pm i a_\ell}{\sigma b_\ell} \widehat{\mathbf{D}}. \quad (4.98)$$

This is possible only if $\pm a_\ell$ is an eigenvalue of $iB - k_y A_y$ (otherwise $\widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{U}}_\ell = 0$). In this case, $\pm a_\ell \in \mathcal{E}(\mathbf{k}) \neq \emptyset$.

3. $\omega^2 = 0$. From (4.96), $\widehat{\mathbf{U}}_\ell = \widehat{\mathbf{U}}/a_\ell^2$ thus

$$\chi(0) \widehat{\mathbf{U}} = \left(1 + \sum_{\ell=1}^N \frac{b_\ell}{a_\ell^2} \right) \widehat{\mathbf{U}} = 0. \quad (4.99)$$

If $\chi(0) \neq 0$, then $\widehat{\mathbf{U}} = 0$ and we get a non trivial solution only if $\text{ker}(B + ik_y A_y) \neq \{0\}$ (so in this case $0 \in \mathcal{E}(\mathbf{k})$). If now $\chi(0) = 0$, then the second equation of (4.96) is just $0 = 0$ and the first equation reads

$$B(\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{D}}) + ik_x A_x \widehat{\mathbf{U}} + ik_y A_y \widehat{\mathbf{U}} + ik_y A_y \widehat{\mathbf{D}} = 0. \quad (4.100)$$

So if this equation has non trivial solutions, then $0 \in \mathcal{E}(\mathbf{k}) \neq \emptyset$. \square

For the application to the dispersive models considered in Section 4.2, the reader will easily check that we are in the case $\text{Ker } A_x \neq \{0\}$, so the set $\Omega_c(\sigma)$ has to be taken into account. We will restrict ourselves to this case in the following. Since $\mathcal{E}(\mathbf{k}) \subset \mathbb{R}$, according to Lemma 4.26 and Definition 4.25, the analysis can be reduced to the following criterion: the family of PML models (4.76) is uniformly stable, if and only if, for all $\sigma \geq 0$ one has

$$\Omega_c(\sigma) \cup \Omega_{\text{PML}}(\sigma) \subset \mathbb{C}^+, \quad (4.101)$$

where

$$\Omega_{\text{PML}}(\sigma) := \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2} \Omega_{\text{PML}}(\mathbf{k}, \sigma). \quad (4.102)$$

4.4.3.3 Guideline for the stability analysis

Before going into details of the analysis of these sets, we first describe the type of arguments that will be used several times in the rest of the paper. Each branch $\omega(\mathbf{k}, \sigma)$ of solutions of the augmented dispersion relation (4.86) composing the sets of (4.101) is continuous with respect to σ and verifies $\omega(\mathbf{k}, 0) \in \mathbb{R}$ for all $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$. In order to prove uniform stability, we aim to show one of the following assertions holds:

1. $\omega(\mathbf{k}, \sigma) \in \mathbb{R}$ for all $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ and for all $\sigma \geq 0$ (therefore it belongs to \mathbb{C}^+);
2. $\omega(\cdot, \sigma)$ is not real for $\sigma > 0$ and belongs to \mathbb{C}^+ for small $\sigma > 0$.

In the last case, since the imaginary part of $\omega(\cdot, \sigma)$ cannot change sign because of the continuity of $\omega(\cdot, \sigma)$ with respect to σ , we can conclude that $\omega(\mathbf{k}, \sigma) \in \mathbb{C}^+$ for all $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ and for all $\sigma \geq 0$.

4.4.3.4 Study of the set $\Omega_c(\sigma)$

The set $\Omega_c(\sigma)$ is completely independent of the original physical domain and only depends on $\chi(\omega)$. We now look for the necessary and sufficient condition for the inclusion $\Omega_c(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$. The first thing to notice is that Definition (4.92) of $\Omega_c(\sigma)$ can be rewritten, using the expression (4.74) of χ , as a polynomial equation in ω of degree $2N + 1$, namely

$$(i\omega + \sigma)Q_\chi(\omega) + \sigma P_\chi(\omega) = 0. \quad (4.103)$$

It admits $2N + 1$ solutions, denoted by $\omega_\ell^c(\sigma)$ ($\ell = -N, \dots, N$), that are smooth (in particular continuous) functions of σ . We now follow the guideline of Section 4.4.3.3.

Lemma 4.27. *For $\sigma > 0$, the solutions of (4.103) cannot be real, except for the case $\chi(0) = 0$ for which $\omega = 0$ is the only real root of multiplicity 1.*

Proof. Assume that $(i\omega + \sigma)Q_\chi(\omega) + \sigma P_\chi(\omega)$ has a real root ω . Then, since P_χ and Q_χ have real coefficients, taking the imaginary part leads to $\omega Q_\chi(\omega) = 0$, so $\omega = 0$ or $Q_\chi(\omega) = 0$ (note that $Q_\chi(0) \neq 0$ since the a_ℓ do not vanish). Now taking the real part gives $(Q_\chi + P_\chi)(\omega) = 0$. If $Q_\chi(\omega) = 0$, then $\omega = a_\ell$ or $-\omega = a_\ell$ for one $\ell \in \{1, \dots, N\}$, but $P_\chi(\pm a_\ell) \neq 0$, which contradicts $(Q_\chi + P_\chi)(\omega) = 0$. If now $\omega = 0$, then $(Q_\chi + P_\chi)(0) = 0$ that can be written, since $Q_\chi(0) \neq 0$, as $Q_\chi(0)[1 + P_\chi(0)/Q_\chi(0)] = Q_\chi(0)\chi(0) = 0$. So this is absurd, except when $\chi(0) = 0$. But in this case it is easy to see that the constant term of $(i\omega + \sigma)Q_\chi(\omega) + \sigma P_\chi(\omega)$ is $\sigma Q_\chi(0)\chi(0) = 0$ and the first order term in ω is $iQ_\chi(0) \neq 0$, i.e. $\omega = 0$ is a root of multiplicity 1. \square

It is then sufficient to study the sign of the imaginary part of the $\omega_\ell^c(\sigma)$, $\ell = -N, \dots, N$, for small $\sigma > 0$ to conclude.

Proposition 4.28 (necessary and sufficient condition for $\Omega_c(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$). *The two following statements are equivalent:*

1. for all $\sigma > 0$, one has $\Omega_c(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$;
2. the function χ defined by (4.73) verifies

$$\chi(0) = 1 + \sum_{\ell=1}^N \frac{b_\ell}{a_\ell^2} \geq 0, \quad \text{and} \quad b_\ell < 0 \text{ for all } \ell \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.104)$$

Proof. For $\sigma = 0$, (4.103) becomes $i\omega Q_\chi(\omega) = 0$ whose solutions are $\omega = 0$ and $\omega = \pm a_\ell$, $1 \leq \ell \leq N$. By continuity, it implies that we can number the ω_ℓ^c such that

$$\lim_{\sigma \searrow 0} \omega_0^c(\sigma) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\sigma \searrow 0} \omega_{\pm\ell}^c(\sigma) = \pm a_\ell. \quad (4.105)$$

For each branch of solution $\omega^c(\sigma)$ (we omit here the subscript), using a Taylor expansion and denoting $\omega_* := \omega^c(0) \in \mathbb{R}$, one gets

$$\omega^c(\sigma) = \omega_* + [(\omega^c)'(0)]\sigma + \mathcal{O}(\sigma^2), \quad (4.106)$$

which implies that $\text{Im} \omega^c(\sigma) = \sigma \text{Im}(\omega^c)'(0) + \mathcal{O}(\sigma^2)$. Injecting (4.106) into (4.103) and using $i\omega_* Q_\chi(\omega_*) = 0$ leads, by identifying the first order term in σ , to

$$(i\omega_* Q_\chi'(\omega_*) + i Q_\chi(\omega_*)) (\omega^c)'(0) + P_\chi(\omega_*) + Q_\chi(\omega_*) = 0. \quad (4.107)$$

- For $\omega^c(\sigma) = \omega_\ell^c(\sigma)$, $\ell \neq 0$, one has $\omega_* = \pm a_\ell$, therefore $Q_\chi(\omega_*) = 0$ and (4.107) gives

$$(\omega_\ell^c)'(0) = \frac{-P_\chi(\pm a_\ell)}{\pm i a_\ell Q_\chi'(\pm a_\ell)} = -i \frac{b_\ell}{2a_\ell^2}, \quad (4.108)$$

whose imaginary part is positive, if and only if, $b_\ell < 0$.

- For $\omega^c(\sigma) = \omega_0^c(\sigma)$ one has $\omega_* = 0$ so, since $Q_\chi(0) \neq 0$, (4.107) becomes $(\omega_0^c)'(0) = i(1 + P_\chi(0)/Q_\chi(0)) = i\chi(0)$. If $\chi(0) \neq 0$, it is clear that $\text{Im} \omega_j^c(0) > 0$ if, and only if, $\chi(0) > 0$. If $\chi(0) = 0$, Lemma 4.27 showed that $\omega_0(\sigma) = 0 \in \mathbb{C}^+$ for all $\sigma \geq 0$. \square

4.4.3.5 Study of the set $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$

We are now interested in the set $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$, *i.e.* the solutions of (4.93). More precisely we will study a particular subset of $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$: observing that, for fixed $\omega \notin \Omega_c(\sigma)$ and $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, $F_{\text{PML}}(\omega, \mathbf{k}, \sigma)$ tends to $F(\omega, k_x, k_y)$ when σ tends to 0 (where F is defined by (4.64) and F_{PML} by (4.93)). By continuity, there exists m branches of solutions of (4.93), let us say by convention the m first ones $\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)$, $1 \leq j \leq m$, the so-called ‘‘physical branches’’, such that

$$\lim_{\sigma \searrow 0} \omega_j(\mathbf{k}, \sigma) = \omega_j(\mathbf{k}), \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4.109)$$

where the $\omega_j(\cdot)$ are the solutions of the original dispersion relation (4.63). In what follows we make the assumption that these are simple:

$$\omega_j(\mathbf{k}) \neq \omega_m(\mathbf{k}), \quad \text{for all } m \neq j \text{ and for all } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.110)$$

However, we think that the following result remains valid without this assumption.

Proposition 4.29. *Under assumption (4.110), a necessary condition for $\Omega_{\text{PML}}(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$ for all $\sigma > 0$ (thus for the uniform stability of the PML model (4.76)) is that for all $j \in \{1, \dots, m\}$ and for all $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, one has*

$$\mathbf{v}_{g,x}(\omega_j(\mathbf{k})) \mathbf{v}_{p,x}(\omega_j(\mathbf{k})) \chi(\omega_j(\mathbf{k})) \geq 0. \quad (4.111)$$

where $\mathbf{v}_p(\omega_j(\mathbf{k}))$ and $\mathbf{v}_g(\omega_j(\mathbf{k}))$ are the phase and group velocities (4.65) and the subscript x refers to their x component.

Proof. We work with any branch $\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)$ satisfying (4.109). Using $\omega_j(\mathbf{k}, 0) = \omega_j(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}$ and the Taylor expansion for small values of $\sigma > 0$

$$\omega_j(\mathbf{k}, \sigma) = \omega_j(\mathbf{k}, 0) + \sigma \frac{\partial \omega_j}{\partial \sigma}(\mathbf{k}, 0) + \mathcal{O}(\sigma^2), \quad (4.112)$$

the uniform stability condition (4.88) implies in particular that

$$\text{Im} \frac{\partial \omega_j}{\partial \sigma}(\mathbf{k}, 0) \geq 0, \quad \text{for all } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.113)$$

The quantity $\partial\omega_j/\partial\sigma$ can be computed using the implicit function theorem. More precisely, injecting (4.112) into (4.93), using $F(\omega_j(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = 0$ and looking at the $\mathcal{O}(\sigma)$ term leads to

$$\frac{\partial\omega_j}{\partial\sigma}(\mathbf{k}, 0) \frac{\partial F}{\partial\omega}(\omega_j(\mathbf{k}), \mathbf{k}) + \frac{ik_x \chi(\omega_j(\mathbf{k}))}{\omega_j(\mathbf{k})} \frac{\partial F}{\partial k_x}(\omega_j(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = 0, \quad (4.114)$$

that is to say

$$\frac{\partial\omega_j}{\partial\sigma}(\mathbf{k}, 0) = -i \left(\frac{\partial F}{\partial\omega}(\omega_j(\mathbf{k}), \mathbf{k}) \right)^{-1} \frac{k_x \chi(\omega_j(\mathbf{k}))}{\omega_j(\mathbf{k})} \frac{\partial F}{\partial k_x}(\omega_j(\mathbf{k}), \mathbf{k}). \quad (4.115)$$

By definition of the phase and group velocities (4.65), we have

$$\mathbf{v}_{p,x}(\omega_j(\mathbf{k})) = \frac{k_x}{|\mathbf{k}|} \frac{\omega_j(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}, \quad (4.116)$$

and

$$\mathbf{v}_{g,x}(\omega_j(\mathbf{k})) = - \left(\frac{\partial F}{\partial\omega}(\omega_j(\mathbf{k}), \mathbf{k}) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial k_x}(\omega_j(\mathbf{k}), \mathbf{k}), \quad (4.117)$$

where the second identity is obtained by using the implicit function theorem to the dispersion relation (4.63) seen as an equation in ω . Finally, we obtain

$$\frac{\partial\omega_j}{\partial\sigma}(\mathbf{k}, 0) = i v_{p,x}(\omega_j(\mathbf{k})) v_{g,x}(\omega_j(\mathbf{k})) \chi(\omega_j(\mathbf{k})) \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_j(\mathbf{k})^2}, \quad (4.118)$$

from which it is easy to conclude. \square

For classical PMLs corresponding to $\chi(\omega) = 1$, Proposition 4.29 can be interpreted through a directional version of the notion of backward mode (that differs from the Definition 4.15 only for anisotropic media):

Definition 4.30. For a given vector $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$, a mode $\omega(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}$ is a *forward mode* in the direction \mathbf{n} if $(\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{n}) > 0$ and a *backward mode* in the direction \mathbf{n} if $(\mathbf{v}_p(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_g(\omega(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{n}) < 0$.

Thus classical PML models can be uniformly stable only if the original model does not support backward modes in the direction x . This generalizes the result of [17] to dispersive media. In particular, classical PMLs can not be stable for the Drude model.

Remark 4.31. The reader will easily realize that, when $|\mathbf{k}|$ tends to $+\infty$, one recovers the stability criterion of classical PMLs for the non dispersive hyperbolic system corresponding to $B = 0$. In other words, the introduction of the function $\chi(\omega)$ cannot produce a stable PML when the classical PML for the non dispersive system already fails to be stable, due to particular anisotropy effects as it occurs for instance in elastodynamics [17]. It may help to only solve the stability problems due to dispersive effects (*i.e.* the presence of B).

4.4.3.6 Summary of the results

Let us now recap the stability results that we obtained:

1. a necessary and sufficient condition for the uniform stability of the PML system (4.76) is that $\Omega_c(\sigma) \cup \Omega_{\text{PML}}(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$ for all $\sigma \geq 0$;
2. the condition $\Omega_c(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$ is equivalent to (4.104);
3. a necessary condition to ensure that $\Omega_{\text{PML}}(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$ is given by (4.111).

It is now natural to look for sufficient conditions to ensure that $\Omega_{\text{PML}}(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$. This is possible in the case of isotropic dispersive Maxwell equations, which was our original motivation (see Section 4.2) and is precisely the object of the next section.

4.5 Application to isotropic dispersive Maxwell equations

In this section, we pursue our analysis of the generalised PML models introduced in Section 4.4.2 in the particular case of isotropic dispersive Maxwell equations of the Section 4.2 that enter the framework of Section 4.4.1. We have seen in Section 4.4.3 that (4.104) is a necessary and sufficient condition for $\Omega_c(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$. According to (4.101), it remains to seek for the conditions to ensure $\Omega_{\text{PML}}(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$. Proposition 4.29 gives a necessary condition (4.111) for $\Omega_{\text{PML}}(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$, by analysing a particular subset of $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$, the m ‘‘physical’’ branches $\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)$, for small values of σ (see Section 4.4.3.5). In order to obtain a necessary and sufficient stability condition, it remains to:

1. describe all the branches $\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)$ of $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$, for $j \in \{1, \dots, m_a\}$ (in particular for $j \in \{m+1, \dots, m_a\}$)
2. show that each branch $\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)$ for $j \in \{1, \dots, m_a\}$, stays in the upper complex plane \mathbb{C}^+ for all values of σ (not only small).

In the two next Sections 4.5.1 and 4.5.2, we describe the set $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$ and express the necessary stability condition obtained in Section 4.4.2 in this context. In Section 4.5.3, we establish necessary and sufficient conditions for the uniform stability of PMLs in the case of isotropic dispersive Maxwell models satisfying the growing property (4.22). We finally extend in Section 4.5.4 the necessary and sufficient conditions to general isotropic dispersive Maxwell models.

4.5.1 Description of the set $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$.

We start here by identifying the m_a branches $\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)$ of $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$, for $j \in \{1, \dots, m_a\}$ and $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$. According to (4.94), the PML dispersion equation is obtained from the one of the original system (4.28), as follows:

$$\omega \varepsilon(\omega) \left(\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) - \left(1 + \frac{\sigma \chi(\omega)}{i\omega} \right)^{-2} k_x^2 - k_y^2 \right) = 0 \quad (4.119)$$

First note that the size of the original Maxwell system is $m = 2M_m + 4M_e + 3$ (see remark 4.9), corresponding to $M = 2(M_e + M_m + 1) := 2\widetilde{M}$ solutions of the dispersion relation (4.29) and $2M_e + 1$ non-propagative modes corresponding to the zeros of $\omega \varepsilon(\omega)$ (labelled as ω_j , $M + 1 \leq j \leq m$). We can easily see that these last modes do not play any role since they do not depend on \mathbf{k} and they are not changed by the presence of the PML. Therefore, there remains the branches satisfying

$$(\sigma \chi(\omega) + i\omega)^2 (\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) - k_y^2) = -\omega^2 k_x^2. \quad (4.120)$$

This last equation must be read as a polynomial equation: indeed remind that $\varepsilon(\omega) = P_e(\omega)/Q_e(\omega)$, $\mu(\omega) = P_m(\omega)/Q_m(\omega)$ and $\chi(\omega) = 1 + P_\chi(\omega)/Q_\chi(\omega)$ are rational fractions, using $P_{em} = P_e P_m$, $Q_{em} = Q_e Q_m$, then (4.120) can be rewritten as

$$\begin{aligned} & [\sigma(P_\chi + Q_\chi)(\omega) + i\omega Q_\chi(\omega)]^2 [\omega^2 P_{em}(\omega) - k_y^2 Q_{em}(\omega)] \\ & + \omega^2 k_x^2 Q_\chi^2 Q_{em}(\omega) = 0. \end{aligned} \quad (4.121)$$

This is a polynomial equation in ω of degree $2(\widetilde{M} + 2N + 1)$. Seen as a polynomial equation in $i\omega$ (remember that $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ and $\chi(\omega)$ are even functions of ω), (4.121) has real coefficients so ω is a solution of (4.121) if, and only if, $-\bar{\omega}$ is a solution of (4.121). When σ tends to 0, (4.121) becomes

$$\omega^2 Q_\chi^2(\omega) [\omega^2 P_{em}(\omega) - Q_{em}(\omega)(k_x^2 + k_y^2)] = 0, \quad (4.122)$$

that we can write formally under the form

$$\omega^2 Q_\chi^2(\omega) (\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) - |\mathbf{k}|^2) = 0, \quad (4.123)$$

where one recognizes the dispersion relation (4.29) of the original equation. These two equations (4.122) and (4.123) show that the $2(\widetilde{M} + 2N + 1)$ branches of solutions of (4.121) can be labelled as follows:

- We first denote $\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)$ and $-\overline{\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)}$ where $1 \leq j \leq \widetilde{M}$ the $M = 2\widetilde{M}$ “physical” branches of solutions such that

$$\lim_{\sigma \searrow 0} \omega_j(\mathbf{k}, \sigma) = \lim_{\sigma \searrow 0} \overline{\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)} = \omega_j(\mathbf{k}), \quad (1 \leq j \leq \widetilde{M}), \quad (4.124)$$

where $\pm\omega_j(\mathbf{k})$, $1 \leq j \leq \widetilde{M}$ are the M solutions of the reduced dispersion relation (4.29).

- We denote by $\widetilde{\omega}_{\pm\ell}(\mathbf{k}, \sigma)$ and $-\overline{\widetilde{\omega}_{\pm\ell}(\mathbf{k}, \sigma)}$, where $1 \leq \ell \leq N$, the $4N$ branches such that:

$$\lim_{\sigma \searrow 0} \widetilde{\omega}_{\pm\ell}(\mathbf{k}, \sigma) = \lim_{\sigma \searrow 0} \overline{\widetilde{\omega}_{\pm\ell}(\mathbf{k}, \sigma)} = \pm a_\ell, \quad (1 \leq \ell \leq N). \quad (4.125)$$

- The 2 remaining branches are denoted $\widetilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma)$ and $-\overline{\widetilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma)}$; they verify

$$\lim_{\sigma \searrow 0} \widetilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma) = \lim_{\sigma \searrow 0} \overline{\widetilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma)} = 0. \quad (4.126)$$

Using the fact that z and $-\bar{z}$ have the same imaginary part, proving that $\Omega_{\text{PML}}(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$ amounts to proving that for all $\sigma > 0$ one has

$$\begin{aligned} (1) \quad & \omega_j(\mathbf{k}, \sigma) \in \mathbb{C}^+ \quad \text{for all } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 \text{ and for all } j \in \{1, \dots, \widetilde{M}\}; \\ (2) \quad & \widetilde{\omega}_{\pm\ell}(\mathbf{k}, \sigma) \in \mathbb{C}^+ \quad \text{for all } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 \text{ and for all } \ell \in \{1, \dots, N\}; \\ (3) \quad & \widetilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma) \in \mathbb{C}^+. \end{aligned} \quad (4.127)$$

4.5.2 Reinterpretation of the necessary condition (4.111) for isotropic dispersive Maxwell models satisfying the growing property

From now on we assume the growing property (4.22) to be satisfied unless otherwise specified. The necessary condition (4.111) is equivalent to say that the m branches of solutions $\omega_j(\mathbf{k}, \sigma)$ go to \mathbb{C}^+ for small $\sigma > 0$, for $j = 1, \dots, m$. Since the non-propagative modes do not play any role, this is equivalent to restrict this condition to $j = 1, \dots, M$ (or to $j = 1, \dots, \widetilde{M}$, see the previous section).

Proposition 4.32. *For isotropic dispersive Maxwell models satisfying the growing property (4.22), the necessary stability condition (4.111) is equivalent to*

$$\mathfrak{D}(\omega) \chi(\omega) > 0, \quad \text{for all } \omega \in \mathcal{S}. \quad (4.128)$$

Proof. First notice that, as a consequence of (4.47) where the growing property (4.22) is used, $\mathfrak{D}(\omega) \neq 0$ for all $\omega \in \mathcal{S}$. Therefore, from (4.38), the necessary condition (4.111) is equivalent to

$$k_x^2 \mathfrak{D}(\omega_j(\mathbf{k})) \chi(\omega_j(\mathbf{k})) \geq 0, \quad (4.129)$$

for all $j = 1, \dots, \widetilde{M}$. We can show in the following lemma 4.33 that in the case $k_x = 0$, the M physical branches are real for all σ and do not play any role in the necessary stability condition. Therefore (4.129) becomes equivalent to

$$\mathfrak{D}(\omega) \chi(\omega) \geq 0, \quad \text{for all } \omega \in \mathcal{S}. \quad (4.130)$$

Since $\mathfrak{D}(\omega) \neq 0$, the left hand side could vanish only if χ could have a zero in \mathcal{S} . We use Lemma 4.34 to show that this is not possible and conclude the proof. \square

We now give and prove the two lemmas used in the previous proof.

Lemma 4.33. *In the case $k_x = 0$, the solutions of equation (4.121) for all $k_y \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$, are given by:*

1. $\omega_j(0, k_y, \sigma) = \omega_j(0, k_y) \in \mathbb{R}$ for all $j \in \{1, \dots, \widetilde{M}\}$, where the $\pm\omega_j$ are the solutions of the original dispersion relation (4.29);

2. $\tilde{\omega}_\ell(0, k_y, \sigma) = \omega_\ell^c(\sigma) \in \Omega_c(\sigma)$ for all $\ell \in \{-N, \dots, N\}$, where the $\omega_\ell^c(\sigma)$ are the elements of set $\Omega_c(\sigma)$ defined by (4.92) and these solutions are in \mathbb{C}^+ if and only if (4.104) holds.

Proof. For $k_x = 0$, (4.121) is equivalent to

$$(i) \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) - k_y^2 = 0 \text{ or } (ii) ((i\omega + \sigma)Q_\chi(\omega) + \sigma P_\chi(\omega))^2 = 0. \quad (4.131)$$

The equation (i) clearly corresponds to the original dispersion relation for $k_x = 0$, whose solutions are real (this gives (1)). We recognize in the equation (ii) the characterization (4.103) of $\Omega_c(\sigma)$ whose solutions are the $\omega_\ell^c(\sigma)$. We conclude using Proposition 4.28 (this gives (2)). \square

Lemma 4.34. *Assume that the growing property (4.22) to be satisfied. If (4.128) holds then all the zeros and poles of χ are in the gap:*

$$\pm a_\ell \in \mathcal{G} \text{ and } \pm z_\ell \in \mathcal{G} \quad \text{for all } \ell \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.132)$$

Proof. We first notice that \mathcal{S} is an open set of \mathbb{R} composed of the union of open intervals I_j of \mathbb{R} . On each of them, (4.47) (satisfied since we assume (4.22)) shows that ε , μ and \mathfrak{D} have the same constant sign. In particular, \mathfrak{D} does not change sign in each I_j . Since all the zeros and poles of χ are simple, if one of them was inside one of the I_j , it would mean that χ changes sign inside this interval, which contradicts (4.128). \square

4.5.3 Necessary and sufficient stability conditions for isotropic dispersive Maxwell models satisfying the growing property

We are able to establish necessary and sufficient stability conditions for the PMLs introduced in Section 4.4.2. This is the main result of this section:

Theorem 4.35. *For the isotropic dispersive Maxwell model of Section 4.2 satisfying the growing property (4.22), a necessary and sufficient condition for the uniform stability (Definition 4.25) of the PML model (4.76) associated to the function $\chi(\omega)$ given by (4.73) is*

$$\mathfrak{D}(\omega) \chi(\omega) > 0 \quad \text{for all } \omega \in \mathcal{S}, \quad (4.133a)$$

$$\chi(0) \geq 0 \quad \text{and} \quad b_\ell < 0 \quad \text{for all } \ell \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.133b)$$

We already know that (4.133b) is a necessary and sufficient condition to ensure $\Omega_c(\sigma) \subset \mathbb{C}^+$ (Section 4.4.3.4) for all $\sigma \geq 0$. Moreover in Section 4.5.2 we saw that (4.133a) is a necessary condition. Thus it remains to show that (4.133a)–(4.133b) are sufficient.

In the rest of this section, we assume that (4.22), (4.133a) and (4.133b) hold. The proof reduces to show that all the branches of $\Omega_{\text{PML}}(\sigma)$ have a positive imaginary part. To do so, we want to follow the guideline given in Section 4.4.3.3 but as we will see the cases $k_x = 0$ and $k_y = 0$ play particular roles. We will do the analysis for \mathbf{k} belonging to each of the four quadrants $\Lambda_\pm^\pm := \mathbb{R}_\pm^* \times \mathbb{R}_\pm^*$ delimited by $k_x = 0$ and $k_y = 0$. More precisely we will follow these steps:

- (step 1) we seek for real solutions when $\sigma > 0$ (Lemma 4.36): it cannot happen except when $k_x k_y = 0$ or $\chi(0)Q_{em}(0) = 0$;
- (step 2) we show that for all $\sigma > 0$ and for all \mathbf{k} in each of the four quadrants Λ_\pm^\pm , either a branch $\omega(\mathbf{k}, \sigma)$ is equal to zero (corresponding to the case $\chi(0)Q_{em}(0) = 0$) or $\text{Im } \omega(\mathbf{k}, \sigma) \neq 0$ and keeps a constant sign (Lemma 4.37);
- (step 3) an asymptotic analysis (Lemmas 4.38 and 4.39) shows that $\text{Im } \omega(\mathbf{k}, \sigma)$ is actually positive for small $\sigma \geq 0$ and for all \mathbf{k} in each of the four quadrants Λ_\pm^\pm ;
- (step 4) we conclude by a continuity argument: since the imaginary parts of all the branches $\omega(\mathbf{k}, \sigma)$ are positive for all $\sigma \geq 0$ and for all \mathbf{k} in each of the four quadrants Λ_\pm^\pm , by continuity with respect to \mathbf{k} , it implies that these are positive for all $\sigma \geq 0$ and for all $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$.

We start by seeking the real solutions of (4.121) (step 1):

Lemma 4.36. *Let $\sigma > 0$ be fixed. Then (4.121) has a real solution if and only if $k_y Q_{em}(0)\chi(0) = 0$ (that corresponds to the solution $\omega = 0$) or $k_x = 0$.*

Proof. First, we start to check if $\omega = 0$ can be a solution of (4.121). Taking $\omega = 0$ directly gives $-\sigma^2 k_y^2 (P_\chi + Q_\chi)(0) Q_{em}(0)$. Since $\sigma \neq 0$ and $Q_\chi(0) \neq 0$ (because the a_ℓ are not zero), it shows that $\omega = 0$ is a solution only if $Q_{em}(0) = 0$, $k_y = 0$ or $\chi(0) = Q_\chi(0)^{-1} (P_\chi + Q_\chi)(0) = 0$. Now, assume that $\omega \in \mathbb{R}$ is a real solution of (4.121). Since all the polynomials involved have real coefficients, identifying real and imaginary part leads to

$$\begin{aligned} (\omega^2 P_{em}(\omega) - k_y^2 Q_{em}(\omega)) \left[\sigma^2 (P_\chi + Q_\chi)^2(\omega) - \omega^2 Q_\chi^2(\omega) \right] \\ + \omega^2 k_x^2 Q_\chi^2 Q_{em}(\omega) = 0, \end{aligned} \quad (4.134)$$

and

$$\omega Q_\chi(\omega) \left(\omega^2 P_{em}(\omega) - k_y^2 Q_{em}(\omega) \right) \left[Q_\chi(\omega) + P_\chi(\omega) \right] = 0. \quad (4.135)$$

We need to distinguish two cases:

- (a) $\omega^2 k_x^2 Q_\chi^2 Q_{em}(\omega) \neq 0$. Then (4.134) implies $\omega^2 P_{em}(\omega) - k_y^2 Q_{em}(\omega) \neq 0$. From (4.135) one has $Q_\chi(\omega) + P_\chi(\omega) = 0$, because $\omega Q_\chi(\omega) \neq 0$. This means that $\chi(\omega) = 0$, therefore Lemma 4.34 implies that $\omega \in \mathcal{G}$. On the other hand, (4.134) implies in this case $\omega^2 P_{em}(\omega) - Q_{em}(\omega)[k_y^2 + k_x^2] = 0$, i.e. $\omega \in \mathcal{S}$. This case is thus impossible, since $\mathcal{G} \cap \mathcal{S} = \emptyset$.
- (b) $\omega^2 k_x^2 Q_\chi^2 Q_{em}(\omega) = 0$. Then either (i) $k_x = 0$, (ii) $\omega = 0$ (which is possible only if $k_y Q_{em}(0)\chi(0) = 0$) or (iii) $Q_\chi^2(\omega) Q_{em}(\omega) = 0$. It is easy to check (using the same kind of arguments than in (a)) that the last case (iii) is impossible. \square

Thanks to this results, we can deduce that the imaginary parts of the solutions do not change sign on each of the four quadrants Λ_\pm^\pm for all $\sigma > 0$, thus the sign is given by an asymptotic analysis for small $\sigma > 0$ (step 2):

Lemma 4.37. *Let $\mathbf{k} \mapsto \omega(\mathbf{k}, \sigma)$ be any branches of solution of (4.121). Then, for all $\sigma > 0$ and for all \mathbf{k} in one of the four quadrants Λ_\pm^\pm , either $\omega(\mathbf{k}, \sigma) = 0$ (possible only if $\chi(0)Q_{em}(0) = 0$) or $\text{Im } \omega(\mathbf{k}, \sigma)$ keeps a non-zero constant sign.*

Proof. By continuity of $\omega(\mathbf{k}, \sigma)$ with respect to \mathbf{k} and σ , if its imaginary part changes sign on one of the Λ_\pm^\pm it means that there exists $\mathbf{k}^* \in \Lambda_\pm^\pm$ and σ^* such that $\omega(\mathbf{k}^*, \sigma^*) \in \mathbb{R}$. From Lemma 4.36, this is possible only if $Q_{em}(0)\chi(0) = 0$. If $Q_{em}(0)\chi(0) \neq 0$, we immediately deduce that $\text{Im } \omega(\mathbf{k}, \sigma)$ keeps a non-zero constant sign. Assume now that $Q_{em}(0)\chi(0) = 0$. Actually, we detail the proof for $\chi(0) = 0$, the proof being similar for $Q_{em}(0) = 0$. Since χ only depends on ω^2 , one can factorise $\chi(\omega) = \omega^2 \tilde{\chi}(\omega)$ and we assume that $\tilde{\chi}(0) \neq 0$. It is easy to show in this case that if ω satisfies (4.121), then it cannot be a zero of Q_χ : from Lemma 4.34 it would imply that $\omega \in \mathcal{G}$, on the other hand (4.121) would imply $\omega^2 P_{em}(\omega) - k_y^2 Q_{em}(\omega) = 0$ which implies that $\omega \in \mathcal{S}$. But $\omega \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ is impossible. Therefore, we can divide by $Q_\chi(\omega)$ in (4.121):

$$\omega^2 \left([\sigma \omega \tilde{\chi}(\omega) + i]^2 [\omega^2 P_{em}(\omega) - k_y^2 Q_{em}(\omega)] + k_x^2 Q_{em}(\omega) \right) = 0. \quad (4.136)$$

We deduce that $\omega(\mathbf{k}, \sigma) = 0$ is a solution of order 2. The other branches satisfy

$$[\sigma \omega \tilde{\chi}(\omega) + i]^2 [\omega^2 P_{em}(\omega) - k_y^2 Q_{em}(\omega)] + k_x^2 Q_{em}(\omega) = 0. \quad (4.137)$$

With similar arguments that used in the proof of Lemma 4.36, we can easily show that this equation cannot have real solution, therefore the other branches do not cross the real axis. \square

We then have to perform an asymptotic analysis for small σ to conclude (step 3). We already know from Proposition 4.32 that (4.133a) ensures that the ‘‘physical’’ branches (4.127)-(1) have a positive imaginary part for small $\sigma > 0$. Thus it remains to analyse the other branches (4.127)-(2) and (4.127)-(3), this is the object of the two following lemmas.

Lemma 4.38. *Assume (4.133b). Then for small values of $\sigma > 0$ and for all \mathbf{k} in one of the four quadrants Λ_{\pm}^{\pm} , one has $\tilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma) \in \mathbb{C}^+$.*

Proof. First notice that, according to the proof of Lemma 4.37, if $\chi(0) = 0$, we have $\tilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma) = 0$ for all $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ and $\sigma > 0$. We assume now that $\chi(0) \neq 0$. Injecting the Taylor expansion

$$\tilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma) = \underbrace{\tilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma)}_{=0} + \sigma \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial \sigma}(\mathbf{k}, 0) + \mathcal{O}(\sigma^2), \quad (4.138)$$

for small values of $\sigma > 0$ into (4.121) gives (after easy computation)

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial \sigma}(\mathbf{k}, 0) = \frac{\chi(0)k_y}{|\mathbf{k}|^2}(ik_y \pm k_x). \quad (4.139)$$

Notice that $|\mathbf{k}| \neq 0$ on Λ_{\pm}^{\pm} . We deduce

$$\text{Im } \tilde{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma) \underset{\sigma \rightarrow 0}{\sim} \sigma \frac{k_y^2 \chi(0)}{|\mathbf{k}|^2}, \quad (4.140)$$

which is clearly a positive quantity since $k_y \neq 0$ and (4.133b) is satisfied. \square

Lemma 4.39. *Assume (4.133b). Then for small values of $\sigma > 0$ and for all \mathbf{k} in one of the four quadrants Λ_{\pm}^{\pm} , one has $\tilde{\omega}_{\pm\ell}(\mathbf{k}, \sigma) \in \mathbb{C}^+$ for all $\ell \in \{1, \dots, N\}$.*

Proof. We only treat the case where $\tilde{\omega}_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma)$ tends to a_{ℓ} when $\sigma \rightarrow 0$, the case where it tends to $a_{-\ell}$ is similar. From Lemma 4.37, we know that, for $\sigma > 0$, $\tilde{\omega}_{\pm\ell}(\mathbf{k}, \sigma)$ is not real, thus this is not a pole of $\chi(\omega)$ or $\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$: we can work with (4.120) instead of (4.121). The idea is then to get an approximation of this equation when ω is close to a_{ℓ} , and to deduce from this approximate equation the behaviour of $\tilde{\omega}_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma)$ when σ is small. When ω tends to a_{ℓ} , $\omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega)$ tends to $D_{\ell} := a_{\ell}^2 \varepsilon(a_{\ell}) \mu(a_{\ell})$ and $\chi(\omega) \sim b_{\ell}/2a_{\ell}(a_{\ell} - \omega)$. As a consequence, an approximate equation for (4.120) is

$$\left(\sigma \frac{b_{\ell}}{2a_{\ell}(a_{\ell} - \omega)} + ia_{\ell} \right)^2 (D_{\ell} - k_y^2) + a_{\ell}^2 k_x^2 = 0. \quad (4.141)$$

If (4.133b) holds then $a_{\ell} \in \mathcal{G}$ (using Lemma 4.34) *i.e.* $\varepsilon(a_{\ell})\mu(a_{\ell}) \leq 0$ or equivalently $D_{\ell} \leq 0$. Since $D_{\ell} - k_y^2 < 0$ (because $k_y \neq 0$), we get

$$\left(\sigma \frac{b_{\ell}}{2a_{\ell}(a_{\ell} - \omega)} + ia_{\ell} \right) = \pm X_{\ell} \quad \text{with} \quad X_{\ell} = \sqrt{\frac{a_{\ell}^2 k_x^2}{k_y^2 - D_{\ell}}}, \quad (4.142)$$

that is to say

$$\omega = a_{\ell} - \frac{\sigma b_{\ell}}{2a_{\ell}(\pm X_{\ell} - ia_{\ell})}. \quad (4.143)$$

In particular, since X_{ℓ} is real we have

$$\text{Im } \omega \underset{\omega \rightarrow a_{\ell}}{\sim} -\frac{\sigma b_{\ell}}{2(X_{\ell}^2 + a_{\ell}^2)}. \quad (4.144)$$

Then we conclude that $\text{Im } \omega > 0$ for small $\sigma > 0$ since $b_{\ell} < 0$. \square

We can now conclude the proof of Theorem 4.35 (step 4). Combining Lemma 4.37 with Proposition 4.32 and Lemmas 4.38–4.39 shows that the imaginary parts of the branches $\omega(\mathbf{k}, \sigma)$ of solutions of (4.121) are positive for all $\sigma \geq 0$ and for all \mathbf{k} in each of the four quadrants Λ_{\pm}^{\pm} . By continuity, this implies that these are positive for all $\sigma \geq 0$ and for all $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$. Theorem 4.35 is proven.

4.5.4 Extension of the necessary and sufficient stability conditions for general isotropic dispersive Maxwell models

We will now discuss briefly what happens to Theorem 4.35 when the growing property (4.22) is not satisfied any more. Two of the key points of the previous proof are Lemma 4.34 and the fact that $\mathfrak{D}(\omega) \neq 0$ for all $\omega \in \mathcal{S}$. If the growing property does not hold, these two might not be true any more so one must add additional assumptions to ensure stability. Doing so, we have the following result that extends Theorem 4.35:

Theorem 4.40. *Consider an isotropic dispersive Maxwell model of Section 4.2 such that $\mathfrak{D}(\omega) \neq 0$ for all $\omega \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{A}$. A necessary and sufficient condition for the uniform stability (Definition 4.25) of the PML model (4.76) associated to the function $\chi(\omega)$ given by (4.73) is*

$$\mathfrak{D}(\omega) \chi(\omega) > 0 \quad \text{for all } \omega \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{A}, \quad (4.145a)$$

$$a_{\pm\ell} \in \mathcal{G} \quad \text{for all } \ell \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.145b)$$

$$z_{\pm\ell} \in \mathcal{G} \quad \text{for all } \ell \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.145c)$$

$$\chi(0) \geq 0 \quad \text{and} \quad b_\ell < 0 \quad \text{for all } \ell \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.145d)$$

Notice that we recover Theorem 4.35 if the growing property (4.22) holds, because in this case $\mathfrak{D}(\omega) \neq 0$ for all $\omega \in \mathcal{O}$ and (4.145a) implies (4.145b)–(4.145c) using Lemma 4.34.

The additional conditions (4.145b)–(4.145c) allow us to “bypass” Lemma 4.34. Doing so, we can follow exactly the same steps of the proof of Theorem 4.35, using (4.145b)–(4.145c) instead of Lemma 4.34 when needed. That shows that the four conditions (4.145) are sufficient and the conditions (4.145a)–(4.145d) are necessary. It remains to show that (4.145b)–(4.145c) are necessary. This is the object of the two following lemmas that conclude the proof of Theorem 4.40.

Lemma 4.41. *If it exists $\ell \in \{1, \dots, N\}$ such that $a_\ell \notin \mathcal{G}$, then the imaginary part of one of the corresponding branches $\tilde{\omega}_{\pm\ell}(k_x, k_y, \sigma)$ has the sign of b_ℓ for all \mathbf{k} in each quadrant Λ_{\pm}^{\pm} with k_y small enough and $\sigma > 0$ small enough. In particular, it is negative if (4.145d) holds.*

Proof. The beginning of the proof is the same as in the proof of Lemma 4.39. In particular, (4.141) still holds. Now if $a_\ell \notin \mathcal{G}$, it means that $\varepsilon(a_\ell)\mu(a_\ell) > 0$, i.e. $D_\ell > 0$. Taking k_y small enough such that $D_\ell - k_y^2 > 0$, (4.142) becomes

$$X_\ell = i \tilde{X}_\ell, \quad \tilde{X}_\ell = \frac{|k_x a_\ell|}{(D_\ell - k_y^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.146)$$

At the end, we obtain the equivalent of (4.144) in our case:

$$\text{Im } \omega \underset{\omega \rightarrow a_\ell}{\sim} - \frac{\sigma b_\ell}{2a_\ell(a_\ell \pm \tilde{X}_\ell)}. \quad (4.147)$$

Since $a_\ell < \tilde{X}_\ell$, one of the two last quantities has the same sign of b_ℓ . \square

Lemma 4.42. *Let $\sigma > 0$ be fixed. If there exists $\ell \in \{1, \dots, N\}$ such that $z_\ell \notin \mathcal{G}$, then there exists $j \in \{1, \dots, M\}$ such that the imaginary part of $\omega_j(\cdot, \sigma)$ changes sign.*

Proof. Recall that $z_\ell \notin \mathcal{G}$ means that $\varepsilon(z_\ell)\mu(z_\ell) > 0$. We only treat the case $z_\ell \neq 0$, the case $z_\ell = 0$ is similar. Setting $k_x^* = z_\ell \sqrt{\varepsilon(z_\ell)\mu(z_\ell)}$, we have $z_\ell^2 \varepsilon(z_\ell)\mu(z_\ell) = k_x^*$. It shows that z_ℓ is a solution of (4.121) (since $\chi(z_\ell) = 0$) for $\mathbf{k}^* = (k_x^*, 0)$. In particular, there exists $j \in \{1, \dots, M\}$ such that $\omega_j(\mathbf{k}^*, \sigma) = z_\ell$. Let study the behaviour of $\omega(k_x) := \omega_j(k_x, 0, \sigma)$ near k_x^* (we omit the dependence in j and σ). One has

$$\omega(k_x) = z_\ell + \frac{d\omega}{dk_x}(k_x^*)(k_x - k_x^*) + \mathcal{O}[(k_x - k_x^*)^2]. \quad (4.148)$$

To show that the imaginary part of ω changes sign when $k_x - k_x^*$ does, it is sufficient to show that $\text{Im}(d\omega/dk_x)(k_x^*) \neq 0$. Injecting the above expansion into (4.121) and using $\chi(z_\ell) = 0$ and $z_\ell^2 \varepsilon(z_\ell)\mu(z_\ell) = k_x^*$ gives, after some computations,

$$\text{Im} \frac{d\omega}{dk_x}(k_x^*) = 2\sigma \frac{\chi'(z_\ell)}{z_\ell} \frac{(k_x^*)^3}{|Z(z_\ell)|^2} \quad (4.149)$$

where

$$Z(\omega) := \omega \mathfrak{D}(\omega) - 2i \sigma (k_x^*)^2 \frac{\chi'(\omega)}{\omega}. \quad (4.150)$$

Since $z_\ell \neq 0$, one has $k_x^* = z_\ell^2 \varepsilon(z_\ell) \mu(z_\ell) \neq 0$. Moreover, since the zeros of χ are simple (in the case $z_\ell \neq 0$), $\chi'(z_\ell) \neq 0$. So $|Z(z_\ell)| \neq 0$ and $\text{Im}(d\omega/dk_x)(k_x^*) \neq 0$. \square

4.6 Design of Stable PMLs for isotropic dispersive media

We consider in this last section the construction of a function $\chi(\omega)$ fulfilling (4.133) (or (4.145)). Such a function is certainly non unique, as we shall see, and one should privilege, for computational reasons, the ones that minimize N in (4.73), that is to say the number of additional unknowns.

4.6.1 The case of the Drude model

The Drude model is a particular case of an isotropic dispersive Maxwell model satisfying the growing property (4.22). According to the Theorem 4.35, we propose to construct a stable PML by choosing a function χ satisfying $\mathfrak{D}(\omega)\chi(\omega) > 0$ for all $\omega \in \mathcal{S}$, where we have seen that

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-, \quad \mathcal{S}_- = [-\omega_-, \omega_-], \quad \mathcal{S}_+ = \mathbb{R} \setminus (-\omega_+, \omega_+). \quad (4.151)$$

For the Drude model, $\mathfrak{D}(\omega)$, given by (4.45) satisfies $\mathfrak{D}(\omega) > 0$ in \mathcal{S}_+ and $\mathfrak{D}(\omega) < 0$ in \mathcal{S}_- . We thus need $\chi(\omega) > 0$ in \mathcal{S}_+ and $\chi(\omega) < 0$ in \mathcal{S}_- which is achieved by picking $\omega_* \in [\omega_-, \omega_+]$ and taking

$$\chi(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_*^2}{\omega^2}\right)^{-1}. \quad (4.152)$$

Finally, we simply have to check (4.133b): one has $\chi(\omega) = 1 - \omega_*^2/(\omega_*^2 - \omega^2)$ that corresponds to (4.73) with $N = 1$, $a_1 = \omega_*$ and $b_1 = -\omega_*^2 < 0$. Notice that we are in the limit case $\chi(0) = 0$.

Remark 4.43. One particular choice consists in choosing $\omega_* = \omega_e$ or $\omega_* = \omega_m$ which amounts to take $\chi(\omega) = \varepsilon_0/\varepsilon(\omega)$ or $\chi(\omega) = \mu_0/\mu(\omega)$ (this choice is used for instance in [79, 90, 207]). This is in fact a particular case of a more general result (see Section 4.6.2). Such a choice is imposed automatically when $\omega_e = \omega_m$.

We performed a numerical simulation to illustrate the stability of the new PML. More precisely, we reproduced exactly the same experiment as in Section 4.3.2 (same parameters, same source, etc.) and choose here $\omega_* = \omega_e$ (however the same conclusions as below were also observed with other choices of ω_* between ω_e and ω_m). As expected, and contrary to what was observed in Section 4.3.2, the solution does not blow up stable during the whole computation with a final time of $T = 250$ s. The stability is confirmed by the Figure 4.8 where we show the evolution of the energy $\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$ defined by (4.21). The Figure 4.7 shows some snapshots of the field H at different times which shows that the PMLs works well: both forward and backward waves are well absorbed. This is confirmed by a comparison with numerical computations done with a larger computational domain.

4.6.2 The case of generalized Lorentz materials

The following result is a generalization of the Remark 4.43 for generalized Lorentz materials.

Theorem 4.44. *For generalized Lorentz materials (4.17), the following two natural choices lead to a stable PML:*

$$\chi(\omega) = \varepsilon_0/\varepsilon(\omega) \quad \text{or} \quad \chi(\omega) = \mu_0/\mu(\omega). \quad (4.153)$$

Proof. First, notice that the generalized Lorentz model is an isotropic dispersive Maxwell model satisfying the growing property (4.22). We leave as an exercise for the reader to prove that the functions χ given by (4.153) are of the form (4.73) with $N = M_e$ for the first choice, $N = M_e$ for the second one. Obviously (4.133a) holds. It also satisfies the criterion (4.133b): the key point is to remark that all poles and zeroes of $\varepsilon(\omega)$ or $\mu(\omega)$ are real and interlace along the real axis. \square

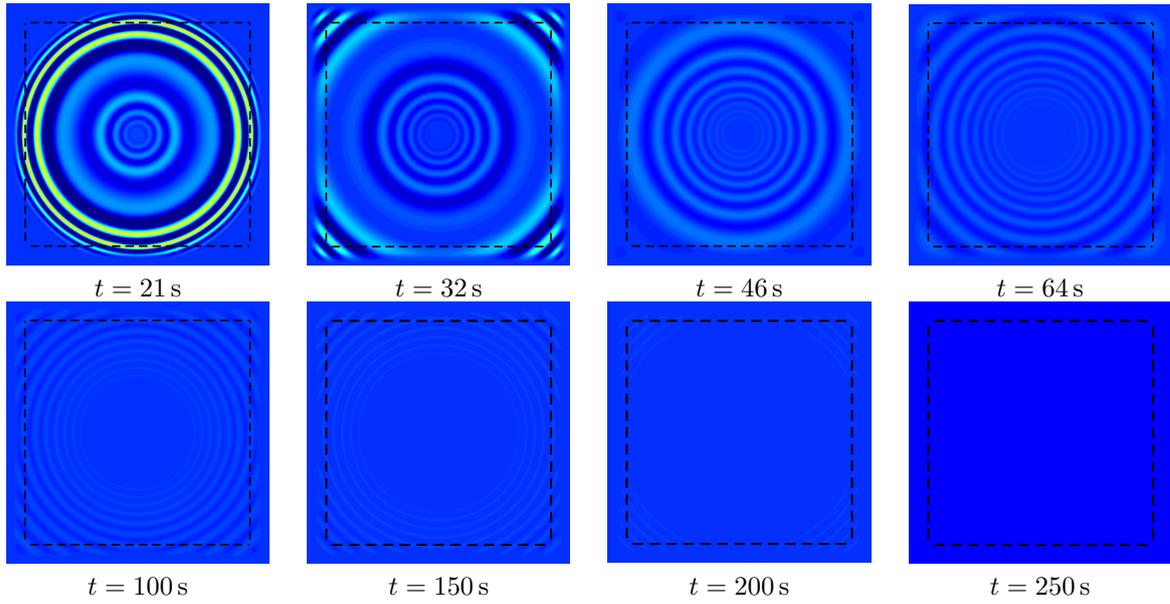


Figure 4.7 – Some snapshots of the field H at different times t for the case $\omega_e = \omega_m$.

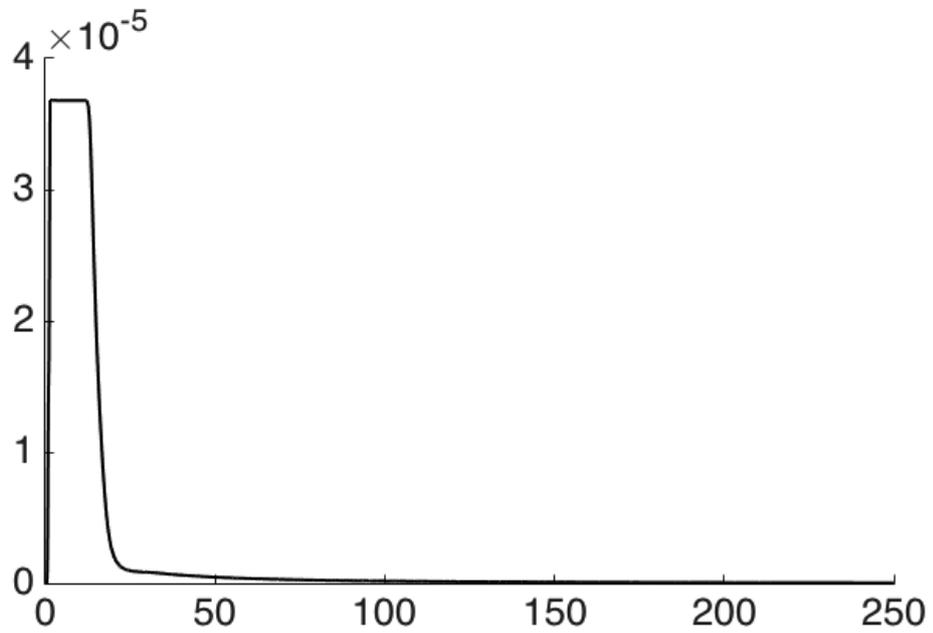


Figure 4.8 – the energy $\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$ defined by (4.21). As soon as the waves reach the PML, they are well absorbed and the energy is decaying, both for forward and backward waves.

Between the two possibilities offered by (4.153), one should obviously choose the one that minimizes N , that is to say the number of additional unknown functions for the time domain PML model. Moreover, there is no reason a priori to state that one of the two choices (4.153) is optimal in terms of the minimization the number N ; it is even not so difficult, by applying the construction process that we describe in the next section, to find particular examples for which an optimal choice is none of them.

Remark 4.45. Noticing that the set of rational functions χ of the form (4.73) satisfying (4.133) is convex, a stable PML is also obtained with

$$\chi(\omega) = \theta \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(\omega)} + (1 - \theta) \frac{\mu_0}{\mu(\omega)}, \quad \text{for any } \theta \in [0, 1]. \quad (4.154)$$

4.6.3 A general construction process for optimal stable PMLs

We propose a procedure for the construction of a stable PML for a general dispersive medium based on the properties of the function $\mathfrak{D}(\omega)$, in the sense that χ verifies (4.145). This construction is moreover supposed to be minimal in the sense that the number of poles $2N$ of the rational function χ is minimal.

4.6.3.1 Case where the number of changes of sign of $\mathfrak{D}(\omega)$ in $\mathcal{S} \cap \mathbb{R}^+$ is even.

We suppose that the number of changes of sign of $\mathfrak{D}(\omega)$ inside the set $\mathcal{S} \cap \mathbb{R}^+$ is equal to $2M$. Since $\mathfrak{D}(\omega) > 0$ for large ω , we assume that there exists $2M$ numbers $0 < \omega_1 < \dots < \omega_{2M}$ such that (with the convention $\omega_0 = 0$ and $\omega_{2M+1} = +\infty$)

$$(-1)^\ell \mathfrak{D}(\omega) > 0 \quad \text{in} \quad (\omega_\ell^2, \omega_{\ell+1}^2) \cap \mathcal{S}, \quad (0 \leq \ell \leq 2M). \quad (4.155)$$

The reader will easily realize if the number M is fixed, there may exist some flexibility in the choice of the ω_ℓ if there are spectral gaps ($\mathcal{G} \neq \emptyset$). A good choice for the function $\chi(\omega)$ is then:

$$\chi(\omega) = \prod_{\ell=1}^M \left(1 - \frac{\omega_{2\ell-1}^2}{\omega^2}\right) \prod_{\ell=1}^M \left(1 - \frac{\omega_{2\ell}^2}{\omega^2}\right)^{-1}. \quad (4.156)$$

By construction χ satisfies (4.145a). It is a rational fraction in ω^2 , with M simple zeros (the $\omega_{2\ell-1}^2$) and M simple poles ($\omega_{2\ell}^2$). Moreover it tends to 1 at infinity. Consequently, it admits a decomposition of the form

$$\chi(\omega) = 1 + \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell}{\omega_{2\ell}^2 - \omega^2}, \quad (4.157)$$

i.e. $a_\ell = \omega_{2\ell}$ referring to (4.73). The stability conditions (4.145d) is satisfied, since

$$\chi(0)^{-1} = \left(\prod_{\ell=1}^M \omega_{2\ell-1}^2\right) \left(\prod_{\ell=1}^M \omega_{2\ell}^2\right)^{-1} > 0, \quad (4.158)$$

Finally, we observe that

$$b_\ell = \lim_{\omega^2 \rightarrow \omega_{2\ell}^2} (\omega_{2\ell}^2 - \omega^2) \chi(\omega) = - \prod_{p=1}^M (\omega_{2\ell}^2 - \omega_{2p-1}^2) \prod_{p \neq \ell} (\omega_{2\ell}^2 - \omega_{2p}^2)^{-1}, \quad (4.159)$$

which allows us to conclude that $b_\ell < 0$ since

$$\#\{k : \omega_{2\ell}^2 < \omega_{2k-1}^2\} = M - \ell \quad \text{and} \quad \#\{k : \omega_{2\ell}^2 < \omega_{2k}^2\} = M - \ell. \quad (4.160)$$

It also shows that (4.145b) is satisfied. The remaining condition (4.145c) is less obvious. That is why we shall restrict ourselves to the following result:

Theorem 4.46. *Assume that the ω_ℓ , $1 < \ell < 2M$, are chosen in such a way that (4.155) is satisfied. If in addition $\varepsilon(\omega_{2\ell}) \mu(\omega_{2\ell}) \leq 0$, $1 \leq \ell \leq M$, the PML model associated to the function $\chi(\omega)$ given by (4.73) is stable. Moreover, this additional condition is automatically satisfied for materials possessing the growing property (4.22).*

4.6.3.2 Case where the number of changes of sign of $\mathfrak{D}(\omega)$ in $\mathcal{S} \cap \mathbb{R}^+$ is odd.

In this case, there exists $2M + 1$ numbers $0 < \omega_1 < \cdots < \omega_{2M+1}$ such that (with the convention $\omega_0 = 0$ and $\omega_{2M+2} = +\infty$)

$$(-1)^{(\ell+1)} \mathfrak{D}(\omega) > 0 \quad \text{in} \quad (\omega_{2\ell}^2, \omega_{2\ell+1}^2) \cap \mathcal{S}, \quad (0 \leq \ell \leq 2M + 1). \quad (4.161)$$

Then, the reader will easily check that a good choice, in the sense that a result similar to the Theorem 4.46 still holds, for the function $\chi(\omega)$ is then :

$$\chi(\omega) = \prod_{\ell=1}^M \left(1 - \frac{\omega_{2\ell}^2}{\omega^2}\right) \prod_{\ell=0}^M \left(1 - \frac{\omega_{2\ell+1}^2}{\omega^2}\right)^{-1}. \quad (4.162)$$

CHAPITRE

5

EXPLORATION NUMÉRIQUE DU PRINCIPE D'AMPLITUDE LIMITE ENTRE UN DIÉLECTRIQUE ET UN MATÉRIAU DE DRUDE

Sommaire

5.1	Le problème de transmission	112
5.1.1	Les équations de Maxwell dans chaque demi-plan	112
5.1.2	Réécriture sous la forme d'une équation de Schrödinger	113
5.2	Principe d'amplitude limite : rappels et application au problème de transmission	113
5.2.1	Le principe d'amplitude limite	113
5.2.2	Validité du PAL pour le problème de transmission	114
5.3	Validations numériques des résultats théoriques	116
5.3.1	Démarche et méthodes numériques	116
5.3.2	Le cas critique : résonances d'interface et battements	117
5.3.3	Le cas non-critique : vérification du PAL	119

À ce stade, nous avons enfin tous les outils dont nous avons besoin pour étudier un problème de transmission en régime temporel entre un demi-plan constitué de diélectrique et un demi-plan constitué d'un matériau de type modèle de Drude (1.33) : des schémas numériques robustes et des couches absorbantes parfaitement adaptées qui sont stables.

Le but de ce chapitre est donc d'explorer numériquement ce problème de transmission. Notamment, nous allons essayer de comprendre les répercussions sur notre problème de transmission, posé dans le domaine temporel, du fait que le problème correspondant dans le domaine fréquentiel est parfois mal posé, comme nous l'avons vu au chapitre 0. L'étude théorique de ce problème a déjà été faite dans la thèse [50] (les premiers résultats étaient déjà présents dans [108]) et va faire l'objet de deux publications [51, 52] dont je suis contributeur pour le second :

[51] Maxence Cassier, Christophe Hazard and Patrick Joly. Spectral theory for Maxwell's equations at the interface of a metamaterial. Part I: Generalized Fourier transform. Submitted.

[52] Maxence Cassier, Christophe Hazard, Patrick Joly and Valentin Vinoles. Spectral theory for Maxwell's equations at the interface of a metamaterial. Part II: Limiting absorption and limiting amplitude principles. In preparation.

Dans une première section, nous décrivons précisément le problème de transmission que nous allons simuler. Dans une deuxième, nous faisons des rappels sur le principe d'amplitude limite et rappeler les résultats théoriques présents dans [50, 51, 52]. Dans une troisième et dernière partie, nous montrons des simulations numériques confirmant ces résultats théoriques.

5.1 Le problème de transmission

5.1.1 Les équations de Maxwell dans chaque demi-plan

Plaçons-nous en dimension 2 d'espace et considérons les deux demi-plans ouverts $\mathcal{O}^\pm := \mathbb{R}_\pm^* \times \mathbb{R}$ ainsi que leur frontière commune $\Gamma := \{0\} \times \mathbb{R}$. Nous notons $\mathbf{n} := \mathbf{e}_1$ la normale sortante par rapport à \mathcal{O}^- (rentrante par rapport à \mathcal{O}^+). Dans le demi-plan \mathcal{O}^- , nous supposons que nous sommes en présence du vide, c'est-à-dire que nous considérons les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t H = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + f, \\ \partial_t \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times H, \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{O}^-, \quad (5.1)$$

où f est une source extérieure et où nous rappelons que $\nabla \times X = (\partial_y X, -\partial_x X)^\top$ et $\nabla \times \mathbf{X} := \partial_x X_y - \partial_y X_x$. Comme lors des chapitres précédents, nous avons considéré que le champ H est scalaire et que le champ électrique $\mathbf{E} = (E_x, E_y)^\top$ est vectoriel, mais nous aurions tout aussi bien pu faire le choix inverse. Dans le demi-plan \mathcal{O}^+ , nous supposons que le milieu suit le modèle de Drude, nous considérons donc les équations (1.44) réécrites ici en dimension 2 :

$$\begin{cases} \partial_t H + \Omega_m^2 K = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{E} + \Omega_e^2 \mathbf{J} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times H, \\ \partial_t K - H = 0, \\ \partial_t \mathbf{J} - \mathbf{E} = 0, \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{O}^+. \quad (5.2)$$

Aux équations (5.1) et (5.2), nous ajoutons les conditions de transmission classiques

$$[H]_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad [\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_\Gamma = 0, \quad (5.3)$$

où comme dans le reste du manuscrit nous notons $[\cdot]_\Gamma$ pour le saut à travers Γ (notons que $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{E} \times \mathbf{e}_1 = E_y$).

Nous pouvons réécrire notre problème sous la forme du problème de transmission

$$\begin{cases} \partial_t H + \Omega_m^2 \Pi K = -\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + f, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \partial_t \mathbf{E} + \Omega_e^2 \Pi \mathbf{J} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times H, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \partial_t K - R H = 0, & \text{dans } \mathcal{O}^+, \\ \partial_t \mathbf{J} - \mathbf{R} \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \mathcal{O}^+, \\ [H]_\Gamma = 0, \\ [\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

où Π (resp. $\mathbf{\Pi}$) est l'opérateur d'extension par 0 d'une fonction scalaire (resp. vectorielle) définie sur \mathcal{O}^+ à l'espace \mathbb{R}^2 et où R (resp. \mathbf{R}) est l'opérateur de restriction d'une fonction scalaire (resp. vectorielle) définie sur l'espace \mathbb{R}^2 à \mathcal{O}^+ .

5.1.2 Réécriture sous la forme d'une équation de Schrödinger

Réécrivons (5.4) sous la forme d'une équation de Schrödinger

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + iA\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (5.5)$$

où $\mathbf{U} := (H, \mathbf{E}, J, \mathbf{K})^\top$, $\mathbf{F} := (f, 0, 0, 0)^\top$ et où A est l'hamiltonien défini par

$$A := i \begin{bmatrix} 0 & -\mu_0^{-1} \nabla \times \cdot & \Omega_m^2 \Pi & 0 \\ \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \cdot & 0 & 0 & \Omega_e^2 \mathbf{P}i \\ R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

C'est un opérateur non borné qui agit sur l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\mathcal{O}^+) \times L^2(\mathcal{O}^+)^2, \quad (5.7)$$

qui est muni du produit scalaire

$$(\mathbf{U}, \mathbf{U}')_{\mathcal{H}} := \mu_0 (H, H')_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \varepsilon_0 (\mathbf{E}, \mathbf{E}')_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \mu_0 \Omega_m^2 (K, K')_{L^2(\mathcal{O}^+)} + \varepsilon_0 \Omega_e^2 (\mathbf{J}, \mathbf{J}')_{L^2(\mathcal{O}^+)}. \quad (5.8)$$

Le domaine $D(A)$ de A est donné par

$$D(A) := H^1(\mathbb{R}^2) \times \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathcal{O}^+) \times L^2(\mathcal{O}^+)^2, \quad (5.9)$$

avec $\mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathbb{R}^2) = \{\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2 : \nabla \times \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$. Notons que les conditions de transmission (5.3) sont automatiquement satisfaites dès lors que $(H, \mathbf{E}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathbb{R}^2)$.

Une première observation démontrée dans [50, 51] et qui justifie d'avoir choisi ce cadre fonctionnel, est la suivante :

Proposition 5.1. *L'opérateur $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est auto-adjoint.*

En combinant cette proposition avec le théorème de Hille-Yosida [189], nous obtenons le caractère bien posé de l'équation de Schrödinger (5.5) :

Proposition 5.2. *Soit $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$. L'équation de Schrödinger (5.5) avec les conditions initiales $\mathbf{U}(0) = 0$ admet une unique solution $\mathbf{U} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(A))$ donnée par la formule de Duhamel*

$$\mathbf{U}(t) = \int_0^t e^{-iA(t-s)} \mathbf{F}(s) ds, \quad (5.10)$$

où $(e^{-iA \cdot})$ est le groupe d'opérateurs unitaires engendré par A .

Comme conséquence de la formule de Duhamel (5.10), nous pouvons voir que si $t \mapsto \|\mathbf{F}(t)\|_{\mathcal{H}}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ (ce qui est le cas dans les sections suivantes car nous considérons des sources harmoniques en temps), alors

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq t \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|\mathbf{F}(s)\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (5.11)$$

puisque $e^{-iA(t-s)}$ est unitaire. Cela signifie que \mathbf{U} ne peut pas croître plus vite que linéairement en temps.

5.2 Principe d'amplitude limite : rappels et application au problème de transmission

5.2.1 Le principe d'amplitude limite

Le principe d'amplitude limite [91], parfois abrégé en PAL, fait le lien entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel et énonce que le comportement en temps long d'une solution d'une équation de type

onde dans le régime temporel soumise à une excitation harmonique de fréquence ω^* doit « converger » vers la solution de l'équation correspondante dans le régime fréquentiel, à la fréquence ω^* .

Par exemple, si nous considérons l'équation des ondes posée dans l'espace libre \mathbb{R}^d

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \Delta u = g(x)e^{-i\omega^*t}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad (5.12)$$

où g est un terme source (dépendant uniquement de l'espace), alors $u(\cdot, t) - e^{-i\omega^*t}\hat{u}(\cdot, \omega^*)$ converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, où $\hat{u}(\cdot, \omega)$ est la solution de l'équation de Helmholtz (c'est-à-dire le problème dans le régime fréquentiel qui correspond à l'équation des ondes)

$$-\omega^2\hat{u} - \Delta\hat{u} = g, \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad (5.13)$$

avec la condition de radiation d'ondes sortantes. À noter que cela est vrai pour n'importe quelles conditions initiales.

Pour de nombreux problèmes (incluant des problèmes de transmission) en acoustique, électromagnétisme ou élastodynamique, ce principe est vérifié et une littérature abondante est consacrée à ces problèmes (voir par exemple [91, 92, 93, 120, 168, 169, 235, 236]). Il existe cependant des cas où ce principe tombe en défaut. Un obstacle possible est que l'équation en régime fréquentiel associée soit mal posée. Prenons pour exemple toujours l'équation des ondes, mais cette fois-ci posée dans un domaine B borné de frontière régulière ∂B , avec des conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} - \Delta u = g(\mathbf{x})e^{-i\omega^*t}, & \text{dans } B, \\ u = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases} \quad (5.14)$$

L'équation de Helmholtz associée est

$$\begin{cases} -\omega^2\hat{u} - \Delta\hat{u} = g & \text{dans } B, \\ \hat{u} = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases} \quad (5.15)$$

Or cette équation est mal posée pour une quantité dénombrable de fréquences ω_n qui correspondent aux racines des valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur B (sauf pour celles où g est orthogonale aux fonctions propres associées). Il est possible de montrer, par un calcul explicite, que si la fréquence d'excitation ω^* est choisie égale à l'une des fréquences ω_n , alors la solution u de (5.14) croît linéairement en temps. Même dans le cas où $\omega^* \neq \omega_n$ pour tout n , alors u reste borné mais il va rester des traces quand t tend vers $+\infty$ des ω_n (la solution aura des oscillations à la fois à la fréquence d'excitation ω^* mais aussi aux fréquences ω_n). Ainsi, le principe d'amplitude limite n'est pas vérifié. Ce phénomène de croissance linéaire en temps est qualifié de *résonance*.

Nous pourrions alors faire le raisonnement suivant : c'est parce que le domaine est borné que l'énergie reste « piégée », donc que le principe d'amplitude limite est vérifié dès que le domaine n'est plus borné, ce qui permet à l'énergie de « s'échapper ». Cela est faux. Par exemple, nous observons des phénomènes de résonances dans les guides d'ondes aux fréquences de coupure qui mettent en défaut le principe d'amplitude limite : nous pouvons avoir une croissance de la solution en $\mathcal{O}(\log t)$ pour les guides plans et en $\mathcal{O}(t^{1/2})$ pour les guides cylindriques [239, 240].

5.2.2 Validité du PAL pour le problème de transmission

La question que nous nous posons est alors de savoir si le principe d'amplitude limite pour notre problème de transmission (5.4) est vérifiée dans le cas où nous avons une source f harmonique en temps : $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x})e^{-i\omega^*t}$ avec $\omega^* > 0$ donné.

Essayons maintenant de voir quelle serait l'équation en régime fréquentiel associée à notre problème. En régime harmonique, les équations de Maxwell (5.1) dans \mathcal{O}^- deviennent (en oubliant la source pour le moment)

$$\begin{cases} -i\omega\hat{H} = -\mu_0^{-1}\nabla \times \hat{\mathbf{E}}, \\ -i\omega\hat{\mathbf{E}} = \varepsilon_0^{-1}\nabla \times \hat{H}, \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{O}^-, \quad (5.16)$$

et dans \mathcal{O}^+ , (5.2) devient

$$\begin{cases} -i\omega\hat{H} + \Omega_m^2\hat{K} = -\mu_0^{-1}\nabla \times \hat{\mathbf{E}}, \\ -i\omega\hat{\mathbf{E}} + \Omega_e^2\hat{\mathbf{J}} = \varepsilon_0^{-1}\nabla \times \hat{H}, \\ -i\omega\hat{K} - \hat{H} = 0, \\ -i\omega\hat{\mathbf{J}} - \hat{\mathbf{E}} = 0, \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{O}^+, \quad (5.17)$$

que nous pouvons réécrire en éliminant les champs \hat{K} et $\hat{\mathbf{J}}$ sous la forme

$$\begin{cases} -i\omega\varepsilon(\omega)\hat{H} = -\mu_0^{-1}\nabla \times \hat{\mathbf{E}}, \\ -i\omega\mu(\omega)\hat{\mathbf{E}} = \varepsilon_0^{-1}\nabla \times \hat{H}, \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{O}^+, \quad (5.18)$$

où ε et μ suivent le modèle de Drude

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}. \quad (5.19)$$

Nous constatons donc qu'à ω fixé, nous sommes en présence d'un problème de transmission qui peut présenter des changements de signe, car $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont négatifs lorsque $\omega < \min(\Omega_e, \Omega_m)$ est assez petit. Or nous avons étudié des problèmes similaires lors du chapitre 0 et nous avons constaté qu'ils étaient mal posés lorsque nous avions simultanément $\varepsilon(\omega) = -1$ et $\mu(\omega) = -1$. Or $\varepsilon(\omega) = -1$ (resp. $\mu(\omega) = -1$) si, et seulement si, $\omega = \Omega_e/\sqrt{2}$ (resp. $\omega = \Omega_m/\sqrt{2}$). Nous ne pouvons donc avoir $\varepsilon(\omega) = \mu(\omega) = -1$ seulement si $\Omega_e = \Omega_m$. Si c'est le cas, nous noterons ω^c la fréquence correspondante, dite *fréquence critique*, définie par

$$\omega^c := \frac{\Omega_e}{\sqrt{2}} = \frac{\Omega_m}{\sqrt{2}}, \quad (\text{dans le cas où } \Omega_e = \Omega_m). \quad (5.20)$$

Bien que le problème que nous considérons dans ce chapitre ne soit pas exactement le même que celui étudié dans le chapitre 0 (nous avons considéré des problèmes dans des guides d'ondes pour s'affranchir de difficultés techniques liées au fait que la direction y n'est pas bornée), par analogie nous pouvons nous attendre à des difficultés du même type. Nous qualifierons donc le cas $\Omega_e \neq \Omega_m$ de *cas non-critique* et le cas $\Omega_e = \Omega_m$ de *cas critique*.

Présentons alors le résultat principal de [50] (voir également [51, 52]). Par souci de concision, l'énoncé ne porte que sur le champ H mais les résultats sont également valides pour les autres champs \mathbf{E} , K et \mathbf{J} et pour simplifier nous supposons que les conditions initiales sont toutes nulles.

Théorème 5.3. *Considérons le problème d'évolution (5.4) avec une source harmonique de la forme $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x})e^{-i\omega^*t}$. Dans le cas non-critique $\Omega_e \neq \Omega_m$, le principe d'amplitude limite est vérifié : il existe un champ $H_{\omega^*}(\cdot) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que*

$$H(\cdot, t) = H_{\omega^*}(\cdot)e^{-i\omega^*t} + o(1), \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty \text{ dans } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2). \quad (5.21)$$

Dans le cas critique $\Omega_e = \Omega_m$, le principe d'amplitude limite n'est jamais vérifié. Plus précisément :

- si $\omega^* \neq \omega^c$, il existe trois champs $H_{\omega^*}, H_{\pm\omega^c} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$H(\cdot, t) = H_{\omega^*}(\cdot)e^{-i\omega^*t} + \sum_{\pm} H_{\pm\omega^c}(\cdot)e^{\pm i\omega^c t} + o(1), \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty \text{ dans } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2); \quad (5.22)$$

- si $\omega^* = \omega^c$ (définie par (5.20)), il existe un champ $H_{\omega^c} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$H(\cdot, t) = t H_{\omega^c}^p(\cdot) e^{-i\omega^c t} + o(t), \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty \text{ dans } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2). \quad (5.23)$$

Remarque 5.4. Nous ne donnons pas ici les caractérisations exactes des trois champs H_ω et $H_{\pm\omega^*}$ intervenant dans (5.22) (par contre nous donnons celle de $H_{\omega^c}^p$, voir (5.24)). Elles sont décrites dans [50, 51, 52] grâce à une représentation quasi-explicite de la solution \mathbf{U} de (5.5) via la notion de vecteurs propres généralisés.

La croissance linéaire en temps dans le cas (5.23) correspond au phénomène de résonance discuté à la section précédente. Ici, le champ $H_{\omega^c}^p$ intervenant dans le terme linéaire en t de (5.23) appartient à $L^2(\mathbb{R}^2)$ et est localisé près de l'interface Γ , dans le sens où il est exponentiellement décroissant de part et d'autre de Γ dans la direction x . Plus précisément, il s'écrit sous la forme suivante [50, 51, 52] :

$$H_{\omega^c}^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\mathbf{k}| > k_c} \langle g, W_{\mathbf{k}, \omega^c} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} W_{\mathbf{k}, \omega^c} d\mathbf{k}, \quad (5.24)$$

où $k_c := \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega^c$ est le nombre d'onde critique et où $W_{\mathbf{k}, \omega^c}$ sont des plasmons d'interface de la forme

$$W_{\mathbf{k}, \omega^c} := A(k) e^{-\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \varepsilon_0 \mu_0 (\omega^c)^2} |x|} \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (5.25)$$

où $A(\mathbf{k})$ est une fonction d'amplitude que nous ne détaillerons pas (voir [50, 51, 52]). Cette expression est bien sûr à rapprocher de l'expression (0.45) des éléments du noyau dans le cas super-critique du chapitre 0 (cas de l'interface plane dans le cas où le matériau négatif n'est pas borné). La présence d'exponentielles en x décroissantes de part et d'autre de l'interface dans l'expression (5.24) ci-dessus montre bien que $H_{\omega^c}^p$ est localisé près de l'interface Γ . Ce champ correspond donc à un plasmon de surface. La localisation près de l'interface fait que nous qualifions la résonance associée à $H_{\omega^c}^p$ de *résonance d'interface*.

5.3 Validations numériques des résultats théoriques

Nous utilisons maintenant tout l'arsenal des méthodes numériques développées dans les chapitres précédents pour valider les conclusions du théorème 5.3.

Dans toute la suite, nous allons considérer que $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ et que la source f de (5.4) est harmonique en temps : $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}) e^{-i\omega^* t}$ avec $\omega^* > 0$. Sauf mention explicite du contraire, nous prendrons pour g une gaussienne en espace centrée en $(-1, 0)$:

$$g(x, y) = e^{-25(x+1)^2 - 25y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.26)$$

qui est donc concentrée dans le vide \mathcal{O}^- .

5.3.1 Démarche et méthodes numériques

Le problème continu (5.4) est posé dans tout l'espace \mathbb{R}^2 qui est non borné. Sous l'hypothèse que le support en espace de la source f est borné, nous pouvons tronquer artificiellement le problème grâce aux PMLs. Plus précisément, nous allons considérer $\mathcal{O}^- = (-10, 0) \times (-10, 10)$ et $\mathcal{O}^+ = (0, 10) \times (-10, 10)$, l'interface Γ entre ces deux domaines étant donc $\Gamma = \{0\} \times (-10, 10)$. Nous allons alors entourer les deux domaines \mathcal{O}^\pm par des PMLs :

- autour du vide \mathcal{O}^- , nous allons utiliser les PMLs classiques décrites au chapitre 3 qui sont stables pour les équations de Maxwell dans le vide [18].
- autour du matériau de Drude \mathcal{O}^+ , nous allons bien entendu utiliser nos nouvelles PMLs stables construites et étudiées au chapitre précédent. Plus précisément, nous ferons le choix $\chi(\omega) = 1/\varepsilon(\omega) = (1 - \Omega_e^2/\omega^2)^{-1}$ (voir la section 4.6.1).

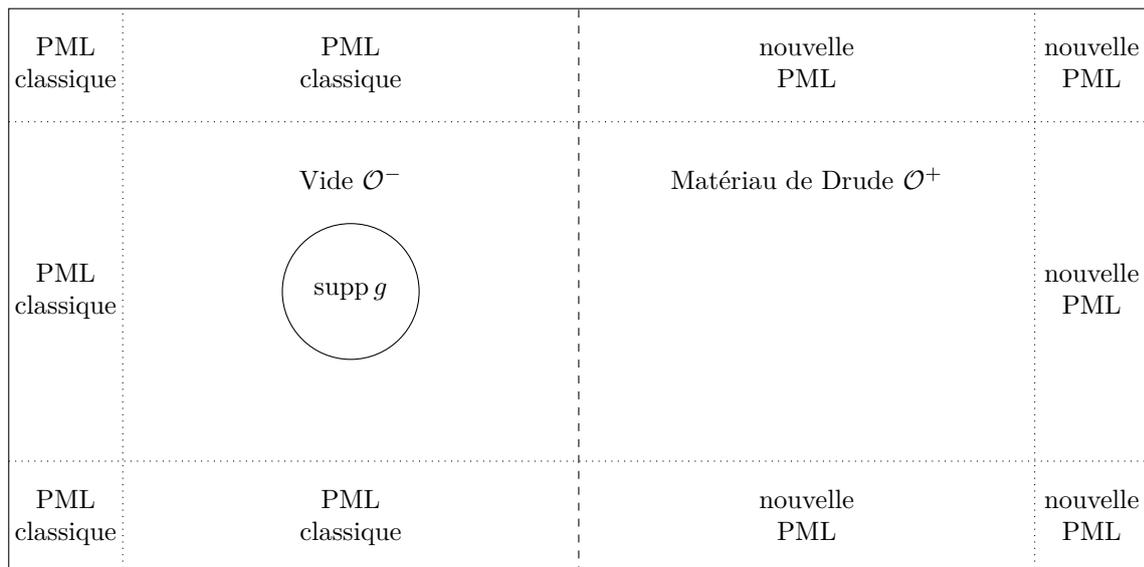


FIGURE 5.1 – Géométrie du problème après troncature par des PMLs (PML classique : $\chi(\omega) = 1$, nouvelles PMLs : $\chi(\omega) = 1/\varepsilon(\omega)$).

La situation est résumée à la figure 5.1.

Nous prenons pour largeur de PMLs $L = 2$ et nous prenons une absorption σ définie comme dans (4.58) afin de minimiser les réflexions numériques aux interfaces entre \mathcal{O}^\pm et les PMLs.

Remarque 5.5. L'analyse que nous avons effectuée pour nos nouvelles PMLs ne traitait que le cas d'un milieu de Drude correspondant à tout l'espace. De même, l'analyse de stabilité faite dans [18] pour les PMLs classiques dans le vide est également valable uniquement dans l'espace libre. En toute rigueur, nous n'avons pas montré la stabilité pour notre problème. À notre connaissance, la question de la stabilité des PMLs pour des milieux stratifiés, même sans dispersion (par exemple pour l'équation des ondes dans deux demi-plans avec une célérité des ondes différentes) n'a jamais été analysée. Cependant, nous pouvons constater qu'en pratique cela ne semble pas poser de problème.

Enfin, en ce qui concerne les schémas numériques, nous utilisons bien entendu ceux développés et analysés au chapitre 2.

5.3.2 Le cas critique : résonances d'interface et battements

Commençons par étudier le cas critique $\Omega_e = \Omega_m$ en considérant $\Omega_e = \Omega_m = 3$.

5.3.2.1 Résonance d'interface

Dans un premier temps, nous considérons que la fréquence ω de la source est égale à la fréquence critique $\omega^* = \Omega_e/\sqrt{2} \simeq 2,1213$ et nous nous attendons donc à constater une croissance linéaire en temps de la solution d'après (5.23). C'est bien le cas, comme le montre les différents instantanés du champ H au cours du temps de la figure 5.2 et surtout la figure 5.3 qui représente l'évolution au cours du temps du champ H au point $(0, 0)$ situé sur l'interface. Nous constatons bien une croissance linéaire en temps.

Remarque 5.6. Différents tests numériques ont montré qu'il était nécessaire de placer la source près de l'interface Γ afin de constater effectivement cette croissance linéaire. Ce n'est pas étonnant : le champ $H_{\omega_c}^p$ est une somme de fonctions exponentiellement décroissantes dans la direction x , nous les excitons d'autant mieux que g est proche de Γ .

Afin de confirmer que c'est bien le champ $H_{\omega_c}^p$ qui est le terme correspondant à la croissance linéaire, nous allons prendre une source g différente de telle sorte que le champ $H_{\omega_c}^p$ correspondant soit nul. D'après la formule (5.24) il suffit de considérer une source g impaire en x , puisque les $W_{\mathbf{k}, \omega_c}$ sont paires en x .

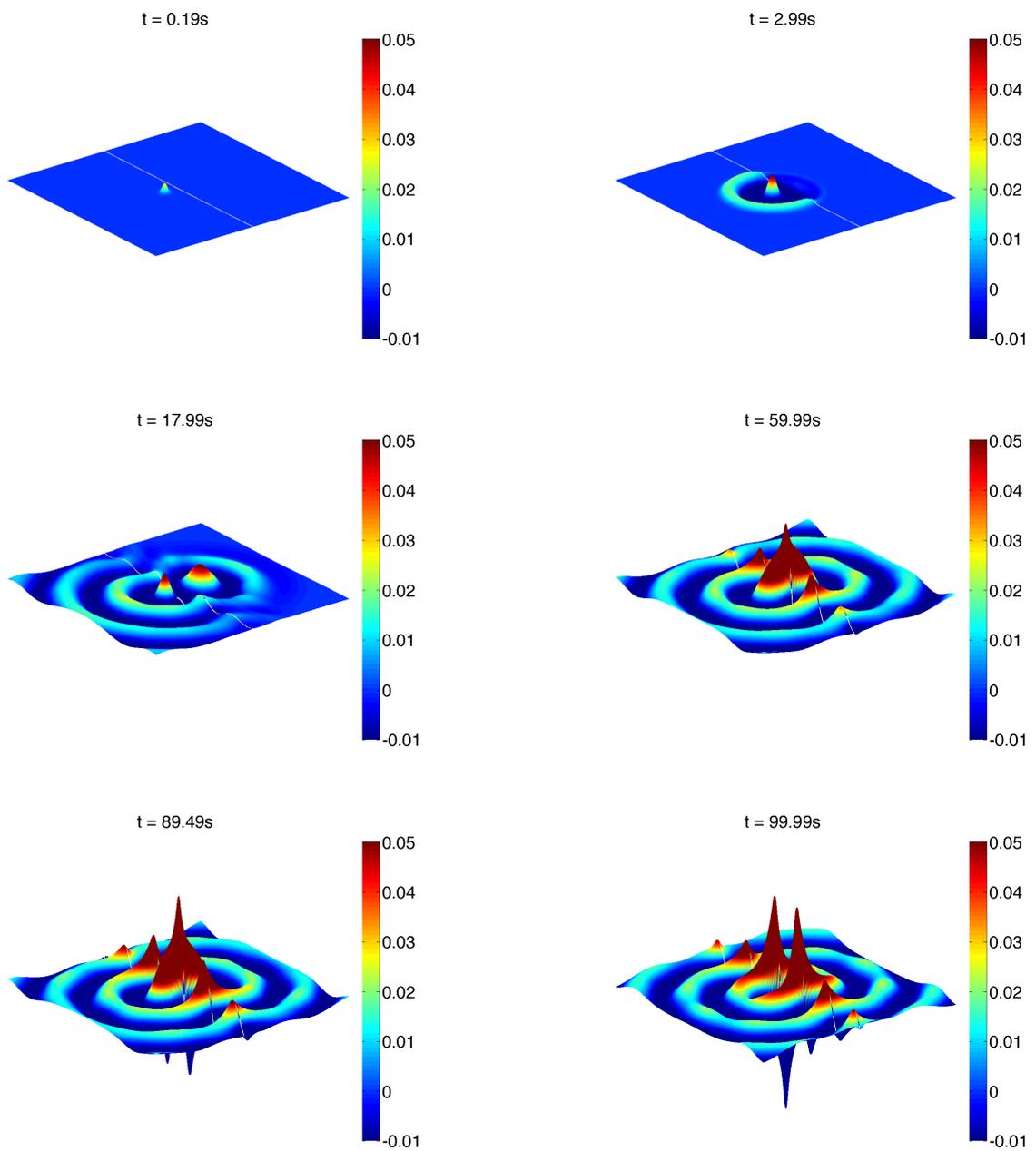


FIGURE 5.2 – Quelques instantanés du champ H à différents instants pour $\Omega_e = \Omega_m = 3$ et une fréquence d'excitation $\omega = \omega^* \simeq 2,1213$ (résonance d'interface).

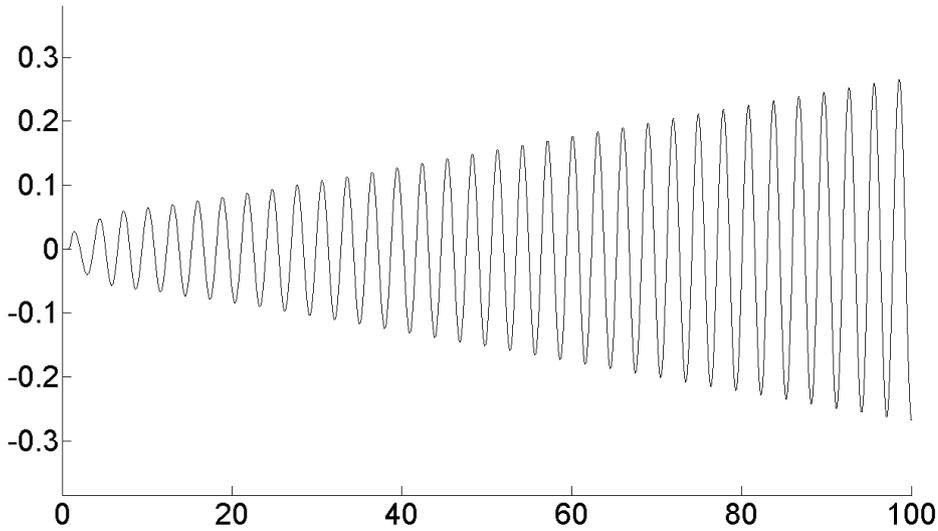


FIGURE 5.3 – Évolution au cours du temps du champ H au point $(0, 0)$ situé sur l'interface correspondant à la figure 5.2 (résonance d'interface).

Nous allons donc effectuer la même simulation que précédemment mais avec cette fois-ci une source g de la forme

$$g(x, y) = e^{-25(x+1)^2 - 25y^2} - e^{-25(-x+1)^2 - 25y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.27)$$

qui est bien impaire en x . Les différents instantanés du champ H au cours du temps sont représentés à la figure 5.4 et la figure 5.5 trace l'évolution au cours du temps du champ H au point $(0, 0)$ situé sur l'interface. Nous constatons alors qu'il n'y a pas de croissance linéaire. Dans ce cas précis, le principe d'amplitude limite est vérifié.

5.3.2.2 Phénomène de battement

Nous allons maintenant nous placer à une fréquence ω^* différente de la fréquence critique ω^c en prenant $\omega^* = \omega^c + 0,5 \simeq 2,6213$. Nous reprenons la source (5.26) et nous effectuons la même simulation que précédemment. Les différents instantanés du champ H au cours du temps sont représentés à la figure 5.6 et la figure 5.7 trace l'évolution au cours du temps du champ H au point $(0, 0)$ situé sur l'interface. La solution reste bornée en temps mais présente un phénomène de battement typique de la superposition de deux ondes sinusoïdales de fréquences différentes. Ici, ces deux fréquences sont ω^* et ω^c comme annoncé par (5.22). Pour le confirmer, nous avons tracé le spectre fréquentiel à la figure 5.8 du signal de la figure 5.7, nous avons bien deux pics correspondant aux fréquences $\omega^* \simeq 2,6213$ et $\omega^c \simeq 2,1213$. Le principe d'amplitude limite n'est pas vérifié.

5.3.3 Le cas non-critique : vérification du PAL

Nous nous plaçons maintenant dans le cas non-critique $\Omega_e \neq \Omega_m$ en considérant $\Omega_e = 3$ et $\Omega_m = 4$ avec une fréquence d'excitation $\omega^* = 2,7$. Nous nous attendons à ce que le principe d'amplitude limite soit vérifié, comme l'affirme l'équation (5.21). Cela est confirmé par la simulation et nous pouvons le constater grâce aux instantanés du champ H au cours du temps (sur la figure 5.9) et sur l'évolution au cours du temps du champ H au point $(0, 0)$ situé sur l'interface (figure 5.10). Nous avons également tracé le spectre fréquentiel du signal de la figure 5.10 (figure 5.11), nous avons bien un pic unique à la fréquence correspondant à $\omega^* = 2,7$. Le principe d'amplitude limite est bien vérifié.

Remarque 5.7. Nous observons la présence d'un plasmon de surface bien visible sur les instantanés de la figure 5.9. Cela n'est possible que si la fréquence d'excitation est comprise entre la fréquence critique

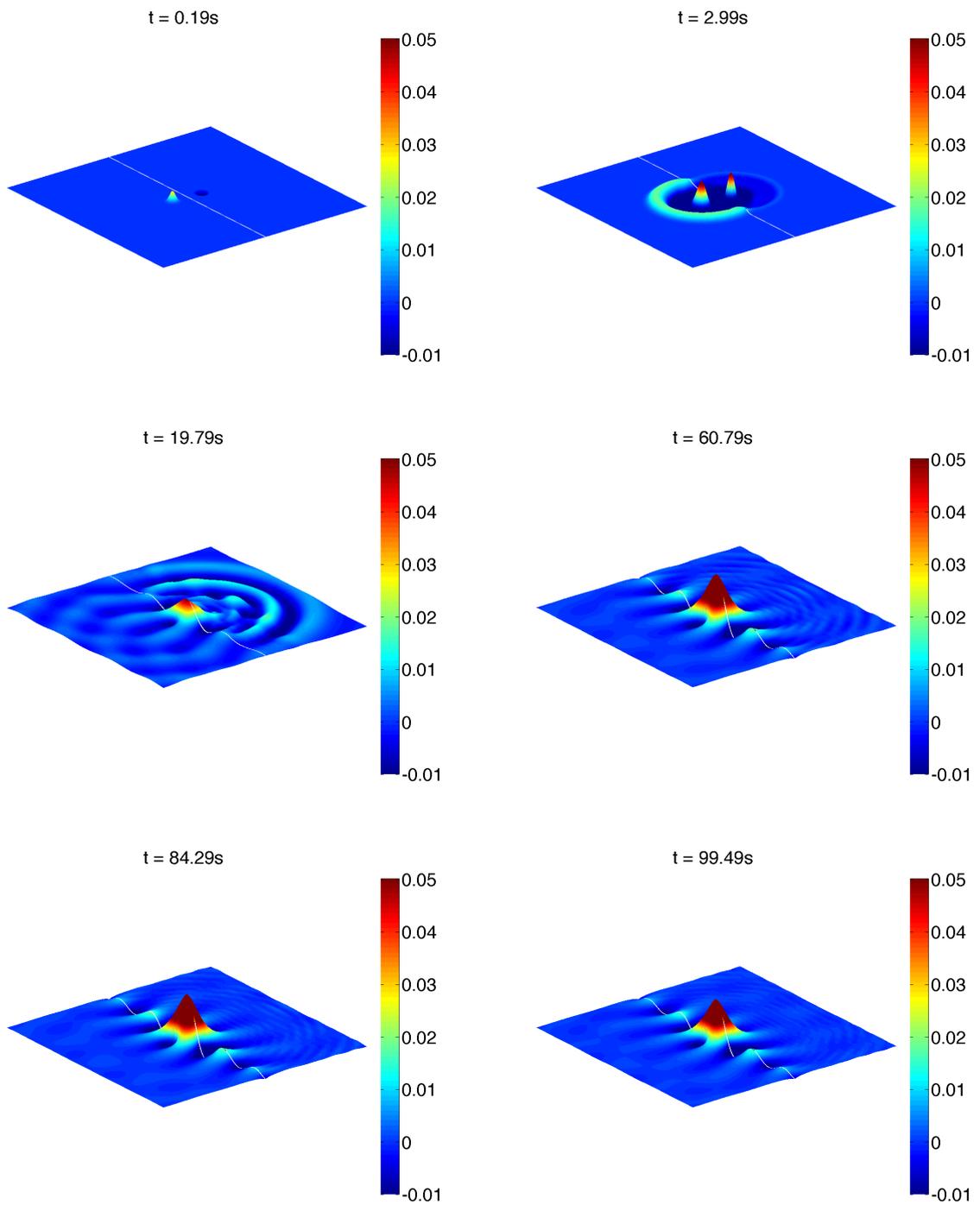


FIGURE 5.4 – Quelques instantanés du champ H à différents instants pour $\Omega_e = \Omega_m = 3$ et une fréquence d'excitation $\omega = \omega^* \simeq 2,1213$ (source antisymétrique).

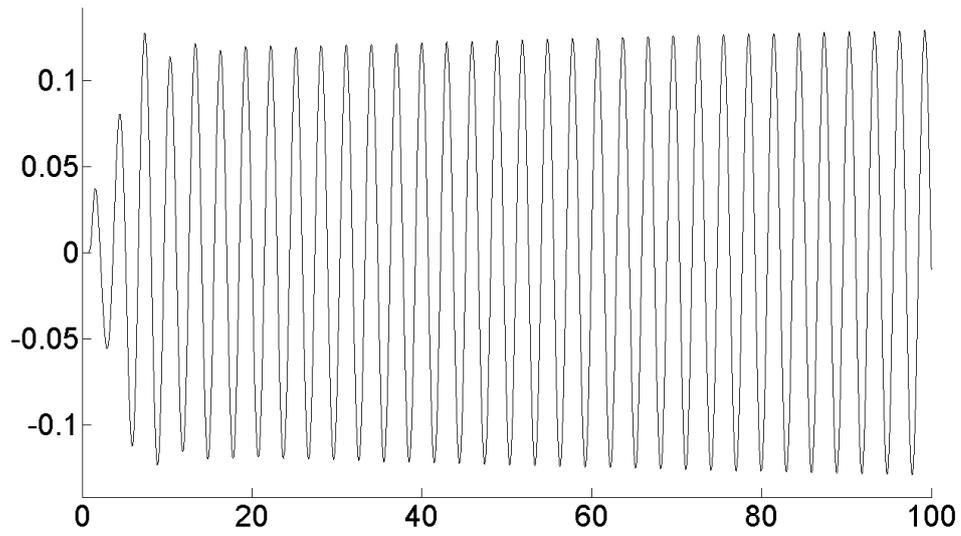


FIGURE 5.5 – Évolution au cours du temps du champ H au point $(0, 0)$ situé sur l'interface correspondant à la figure 5.4 (source antisymétrique).

$\omega^* = \Omega_e \Omega_m / \sqrt{\Omega_e^2 + \Omega_m^2} \simeq 2, 4$ et la fréquence plasmon $\Omega_e / \sqrt{2} \simeq 2.8$. Pour plus de détails, nous renvoyons à [50, 51, 52].

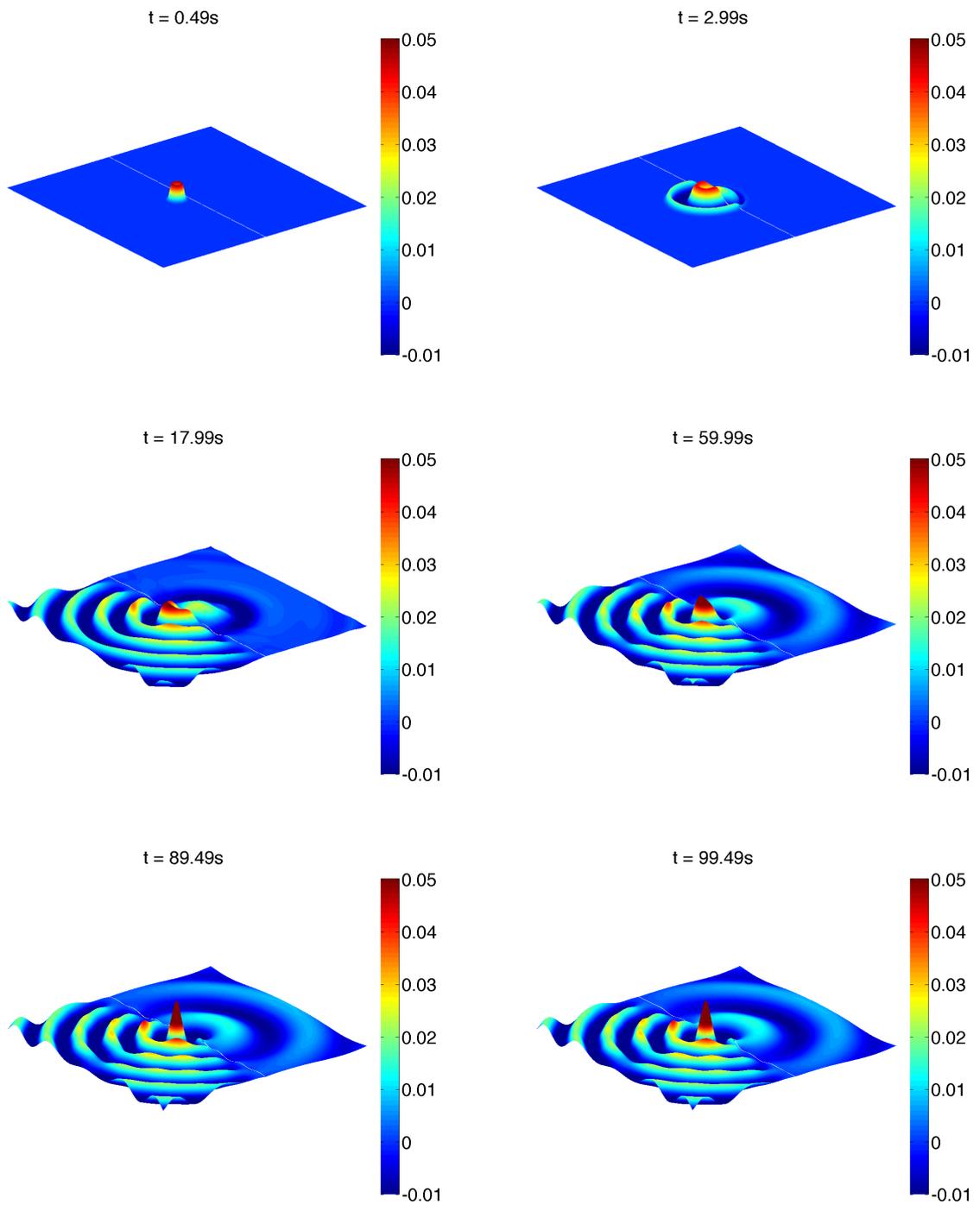


FIGURE 5.6 – Quelques instantanés du champ H à différents instants pour $\Omega_e = \Omega_m = 3$ et une fréquence d'excitation $\omega = \omega^* + 0,5 \simeq 2,6213$ (phénomène de battement).

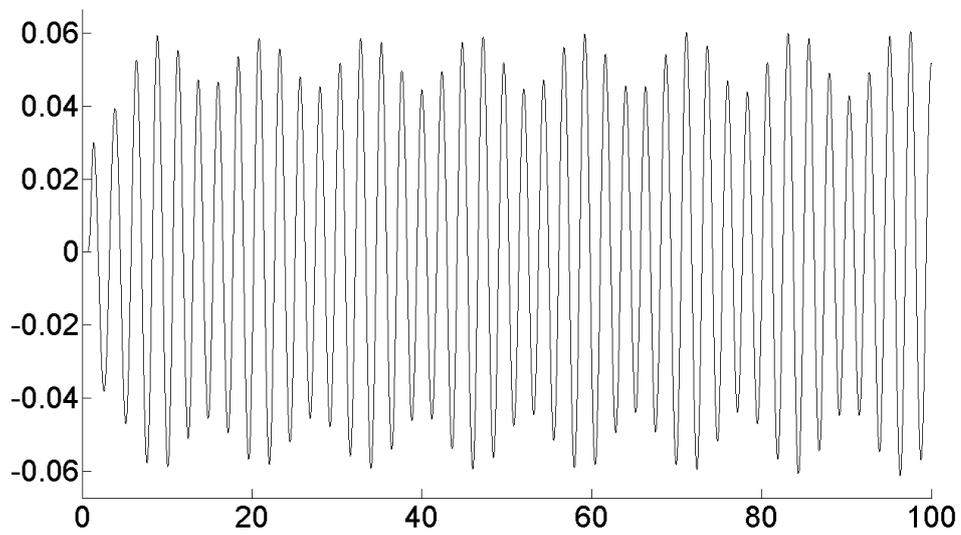


FIGURE 5.7 – Évolution au cours du temps du champ H au point $(0, 0)$ situé sur l'interface correspondant à la figure 5.6 (phénomène de battement).

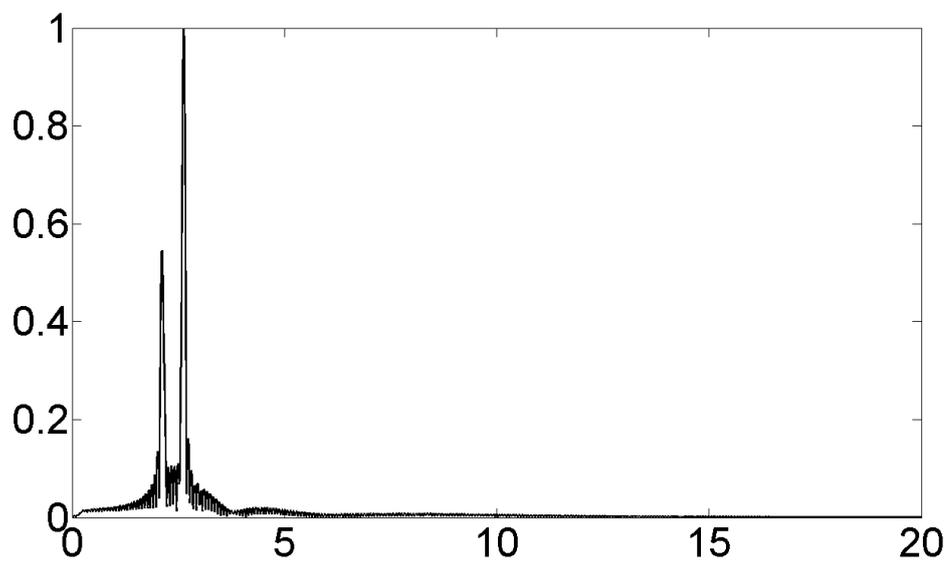


FIGURE 5.8 – Spectre fréquentiel correspondant au signal de la figure 5.7 (phénomène de battement).

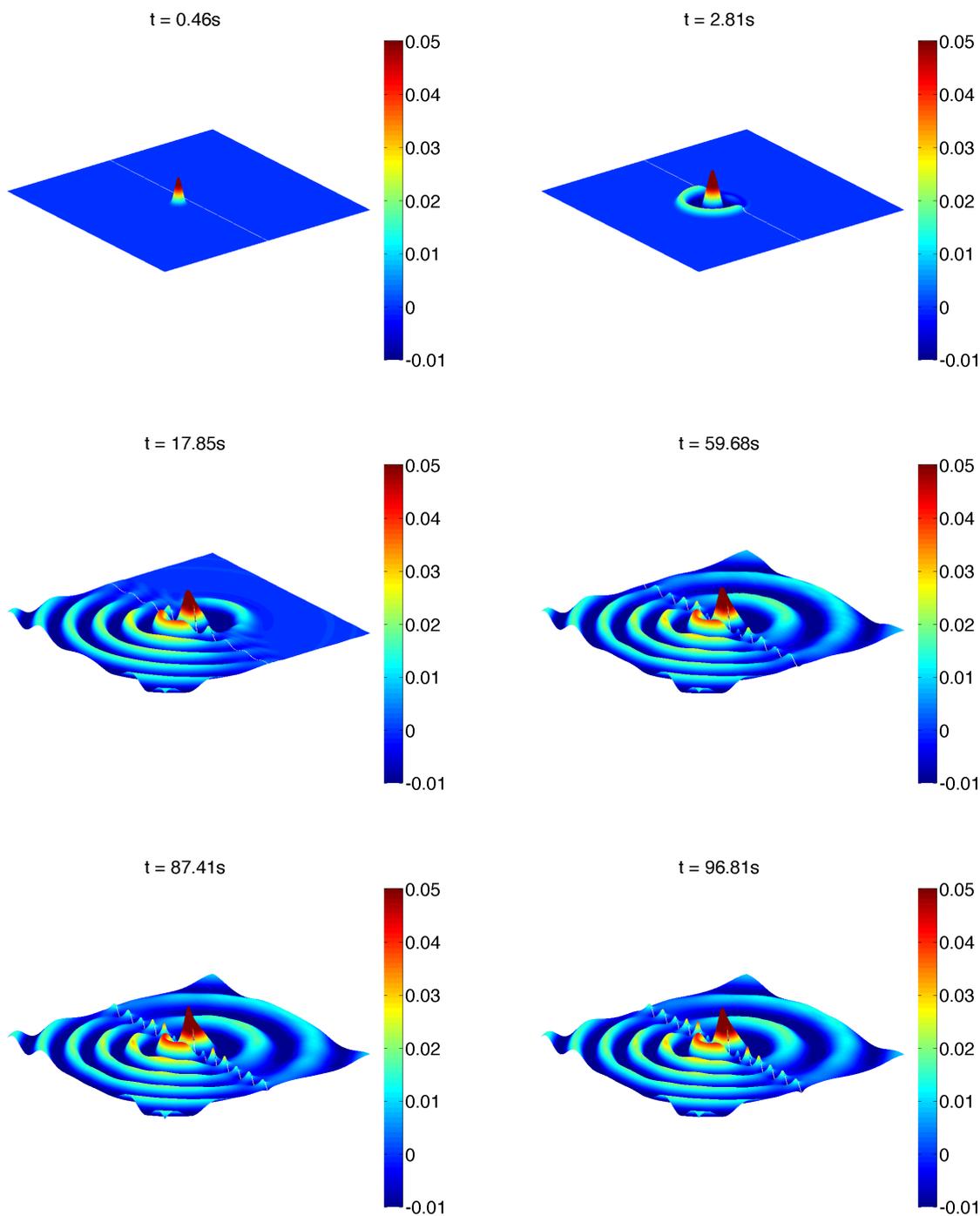


FIGURE 5.9 – Quelques instantanés du champ H à différents instants pour $\Omega_e = 3$ et $\Omega_m = 4$ et une fréquence d'excitation $\omega = 2,7$ (PAL vérifié).

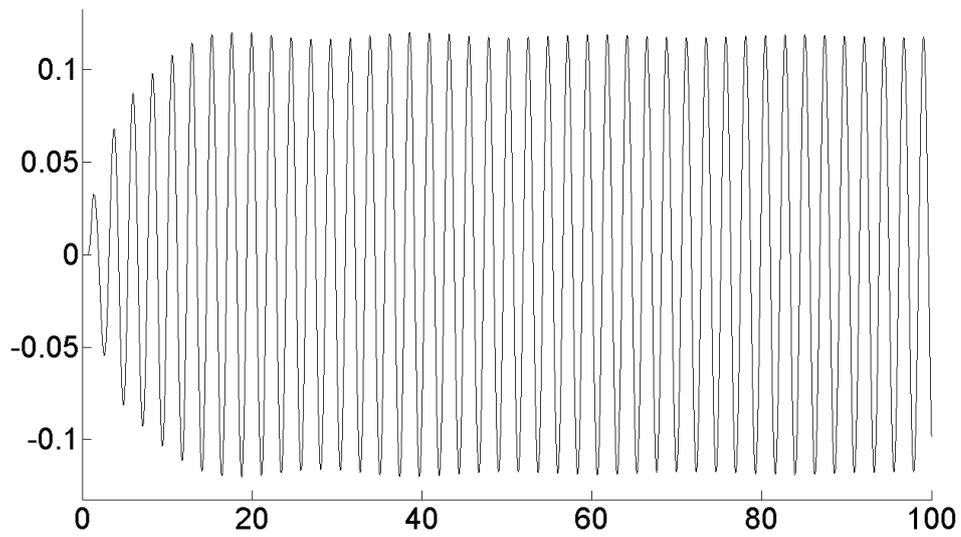


FIGURE 5.10 – Évolution au cours du temps du champ H au point $(0, 0)$ situé sur l'interface correspondant à la figure 5.9 (PAL vérifié).

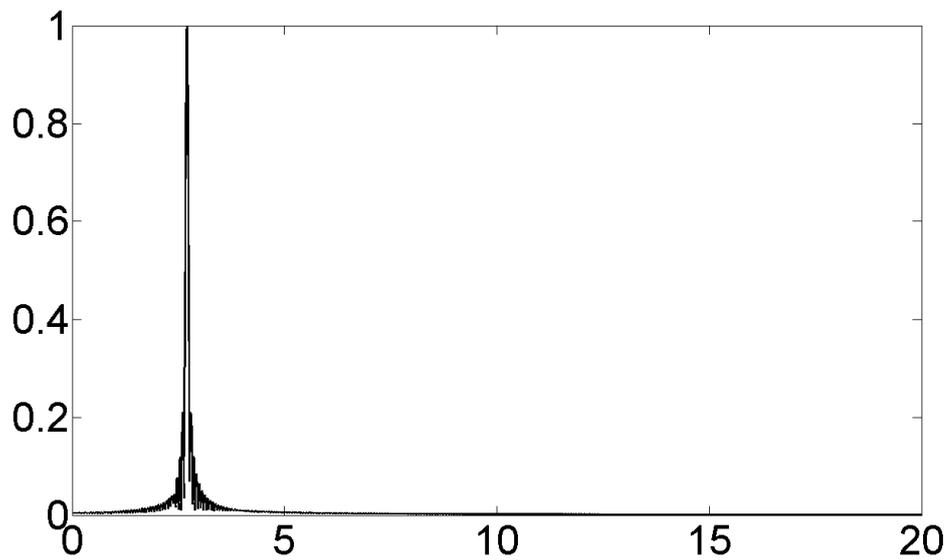


FIGURE 5.11 – Spectre fréquentiel correspondant au signal de la figure 5.10 (PAL vérifié).

Deuxième partie

Analyse asymptotique pour des
problèmes de transmission en régime
harmonique : milieux périodiques
classiques et à fort contraste

CONTENU DE CETTE PARTIE

Chapitre 6 : rappels sur l'homogénéisation et introduction du problème de transmission

Ce chapitre a d'abord pour but de rappeler les bases de la théorie de l'homogénéisation double-échelle (cette théorie vise à remplacer un milieu périodique de « petite » période par un milieu homogène « équivalent » pour lequel les calculs numériques sont bien moins coûteux). Ensuite, nous rappelons les phénomènes de couches limites, montrant que l'homogénéisation classique décrit de manière peu précise le comportement de la solution en présence de bords. Nous présentons quelques-unes de ces difficultés, accompagnées de simulations numériques. Enfin, nous présentons le problème de transmission entre un demi-plan homogène et un demi-plan périodique que nous allons étudier dans les prochains chapitres. Nous dérivons un modèle homogénéisé « naïf » et constatons que la construction de conditions de transmission effective souffre des mêmes difficultés que la construction de conditions aux bords effectives vue précédemment. Nous mettons ce phénomène plus en avant en détaillant les résultats principaux de [47] qui à notre connaissance est la seule publication traitant de problèmes de transmission en homogénéisation. Enfin, nous présentons quelques simulations numériques confirmant le fait que l'homogénéisation classique ne permet pas de donner des approximations satisfaisantes de la solution exacte, à la fois proche de l'interface et dans la partie homogène.

Chapitre 7 : développements asymptotiques raccordés appliqués au problème de transmission

Ce chapitre vise à mieux décrire le comportement de la solution de notre problème de transmission, à la fois à l'interface mais également dans la partie homogène. Pour cela, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés. Celle-ci consiste à effectuer des développements asymptotiques, qui peuvent être de natures différentes, dans plusieurs zones, ces développements devant coïncider sur des zones intermédiaires dites zones de raccord. Dans notre cas, nous introduisons deux développements asymptotiques différents de chaque côté de l'interface, appelé champs lointains. Nous utilisons également un troisième développement près de l'interface, appelé champ proche. Dans un premier temps, nous présentons les différents développements asymptotiques, les équations et les conditions de raccord (formelles) vérifiées par les différents termes de ces développements. Dans un deuxième temps, nous nous concentrons sur les problèmes vérifiés par les termes de champ proche, posés dans une bande infinie. Leur étude passe par un cadre fonctionnel non standard (théorie de Kondratiev et transformée de Floquet-Bloch dans les espaces à poids). Nous construisons ensuite les trois premiers termes de champ proche, ce qui nous permet ensuite d'en déduire les conditions de transmission sur l'interface vérifiées par les termes de champ lointain. Enfin, nous effectuons une analyse d'erreur entre la solution exacte et une combinaison des différents termes de champ lointain et de champ proche, qui confirme l'efficacité de notre approche.

Chapitre 8 : construction et analyse d'un modèle approché d'ordre 1

Nous construisons un modèle approché qui fait seulement intervenir les termes de champ lointain du chapitre précédent, mais seulement les termes de champ lointain qui vérifient alors des conditions de transmissions non standard faisant intervenir des opérateurs différentiels le long de l'interface de type Laplace-Beltrami. Ce modèle approché converge alors vers la solution exacte, dès lors que l'erreur est mesurée dans un domaine

n'intersectant pas l'interface. Nous discutons notamment de la stabilité de notre modèle approché, point clé permettant d'obtenir des estimations d'erreur. Notamment, le modèle approché le plus naturel est potentiellement mal posé. C'est pourquoi nous utilisons la technique dite du décalage géométrique pour construire un autre modèle approché. Nous montrons alors qu'il est bien posé grâce à une formulation variationnelle adaptée et qu'il converge bien vers la solution exacte en fournissant des estimations d'erreur.

Chapitre 9 : méthodes numériques et validations Ce chapitre vise d'une part à décrire les méthodes numériques dont nous avons besoin pour résoudre les problèmes que nous avons rencontrés tout au long de cette partie et d'autre part à illustrer numériquement l'efficacité de notre modèle approché décrit au chapitre précédent. Notamment, nous décrivons comment traiter deux difficultés majeures : le problème de transmission n'est pas borné et la présence de coefficients périodiques (pour le calcul de la solution exacte). Pour traiter cette première difficulté, nous utilisons la transformée de Floquet-Bloch et pour la seconde nous construisons des opérateurs Dirichlet-to-Neumann spécifiques. Nous nous attachons également à décrire précisément comment calculer les erreurs L^2 et H^1 entre la solution exacte et la solution homogénéisée. Ensuite nous expliquons comment calculer les problèmes de profil (issus des problèmes de champ proche du chapitre 7) puis nous expliquons comment calculer la solution du problème approché du chapitre précédent, notamment comment gérer les conditions de transmission d'ordre élevé. Enfin, nous présentons quelques expériences numériques validant la pertinence de notre modèle approché.

Chapitre 10 : extension à l'homogénéisation à fort contraste Nous présentons dans ce dernier chapitre une extension de l'homogénéisation appelée homogénéisation à fort contraste. Celle-ci autorise les coefficients périodiques à dégénérer lorsque la taille de la période tend vers 0. En les choisissant soigneusement, l'homogénéisation de ces problèmes peut alors conduire à des coefficients homogénéisés négatifs. Nous présentons ici un cas relativement simple d'une équation scalaire en dimension 2. Ce chapitre a trois objectifs. Le premier est de présenter et de faire des rappels sur la théorie de l'homogénéisation à fort contraste et en particulier de montrer que cela peut conduire à des coefficients homogénéisés négatifs. Le second est d'étendre à ce nouveau cas les conditions de transmission d'ordre élevé que nous avons établi dans le cadre classique. En particulier, nous voulons comprendre l'influence de la fréquence sur ces conditions. Enfin, pour boucler ce manuscrit, nous allons appliquer nos nouvelles conditions de transmission aux problèmes de transmission avec changements de signes étudié au chapitre 0 et constater qu'elles permettent d'éviter les pertes de régularité et le caractère mal posé des problèmes.

CHAPITRE

6

RAPPELS SUR L'HOMOGENÉISATION ET INTRODUCTION DU PROBLÈME DE TRANSMISSION

Sommaire

6.1 Homogénéisation classique de l'équation de Helmholtz dans l'espace libre	132
6.1.1 Présentation du problème périodique	132
6.1.2 La méthode des développements à deux échelles	133
6.1.3 Résultats de convergence	138
6.2 Homogénéisation classique de l'équation de Helmholtz dans un domaine borné	143
6.2.1 Le problème des conditions aux bords	143
6.2.2 Résultats numériques	144
6.3 Homogénéisation d'un problème de transmission entre un demi-plan homogène et un demi-plan périodique	147
6.3.1 Présentation du problème de transmission	147
6.3.2 Homogénéisation naïve du problème et expériences numériques	147
6.3.3 Présentation des résultats principaux de [47]	149
6.3.4 Expériences numériques	149
6.A Annexe : matrices homogénéisées explicites	155
6.B Annexe : démonstration de la proposition 6.7 via les ondes de Bloch	156

Dans un premier temps (section 6.1), ce chapitre a pour but de rappeler un certain nombre de résultats classiques de la théorie de l'homogénéisation qui sont utiles dans la suite. L'idée de cette théorie est la suivante. La résolution numérique d'équations aux dérivées partielles dans des milieux complexes, dont l'échelle caractéristique est très petite devant la taille du domaine peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul. En effet, les méthodes de résolution classiques (différences finies, éléments finis, volumes finis, etc.) nécessitent des maillages dont la taille caractéristique des mailles doit être de l'ordre de grandeur de cette petite échelle caractéristique. Quand celle-ci est très petite devant la longueur d'onde, le milieu périodique « doit » se comporter comme un milieu homogène équivalent. C'est la théorie de l'homogénéisation qui justifie l'existence d'un tel milieu. Ainsi, remplacer le milieu périodique par ce milieu homogène effectif rend les calculs bien moins coûteux.

Ensuite (section 6.2), ce chapitre se concentre sur les phénomènes de couches limites. La théorie dite classique de l'homogénéisation décrit de manière peu précise le comportement de la solution en présence de bords (ou d'interfaces comme cela sera le cas dans la suite de ce manuscrit). Il s'agit là d'un problème maintenant bien connu et qui a fait l'objet de nombreux travaux, notamment dans le cas de bords avec conditions de Dirichlet homogènes (voir les références de la section 6.2.1). Nous présentons quelques-unes de ces difficultés, accompagnées de simulations numériques.

Dans un troisième temps (section 6.3), nous allons présenter le problème de transmission entre un demi-plan homogène et un demi-plan périodique que nous allons étudier dans les prochains chapitres. Nous dérivons un modèle homogénéisé « naïf » d'ordre 0 et constatons que la construction de conditions de transmission effective souffre des mêmes difficultés que la construction de conditions aux bords effectives vue dans la première partie. Nous mettons ce phénomène plus en avant en détaillant les résultats principaux de [47] qui à notre connaissance est la seule publication traitant de problèmes de transmission en homogénéisation. Enfin, nous présentons quelques simulations numériques confirmant le fait que l'homogénéisation classique ne permet pas de donner des approximations satisfaisantes de la solution exacte, à la fois proche de l'interface et dans la partie homogène.

6.1 Homogénéisation classique de l'équation de Helmholtz dans l'espace libre

Dans cette thèse, nous nous focalisons sur l'homogénéisation de milieux périodiques (bien que d'autres cas soient envisageables). Cette théorie, du point de vue mathématique, bénéficie d'une littérature extrêmement abondante. Nous renvoyons notamment le lecteur aux ouvrages classiques [13, 21, 64, 125, 184, 200] ainsi qu'au cours introductif [3] pour plus de détails. Cette section a pour objectif de faire des rappels sur la théorie de l'homogénéisation basée sur les développements à deux échelles et ne contient à ce titre presque aucun résultat nouveau ni de démonstration. Mentionnons cependant le résultat de la proposition 6.7 portant sur la nullité du symbole de deux opérateurs, résultat étonnamment peu présent dans la littérature. Nous donnons alors deux preuves indépendantes, une tirée de [171] et une originale basée sur l'homogénéisation par ondes de Bloch.

6.1.1 Présentation du problème périodique

Modélisons un milieu périodique en dimension d en nous donnant une (petite) période $\delta > 0$, une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille $d \times d$ et une fonction ρ . Les entrées a_{ij} et la fonction ρ sont supposées 1-périodiques selon toutes les directions. Pour plus de concision, nous dirons qu'elles sont Y -périodiques, où $Y := (0, 1)^d$ est l'hypercube unité que nous appellerons cellule dans la suite. Il est alors immédiat que les fonctions $a_{ij}(\cdot/\delta)$ et $\rho(\cdot/\delta)$ sont δ -périodiques selon toutes les directions.

La théorie classique de l'homogénéisation fait l'hypothèse que A est coercive et ρ positive : il existe des constantes $\lambda, \Lambda, c, C > 0$ telles que pour tout $\mathbf{y} \in Y$ et $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ on ait

$$\lambda|\boldsymbol{\xi}|^2 \leq a_{ij}(\mathbf{y})\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \text{et} \quad c \leq \rho(y) \leq C. \quad (6.1)$$

Nous utilisons ici la convention de sommation d'Einstein des indices répétés. Remarquons qu'en particulier $A \in L^\infty(\mathbb{R})^{d \times d}$ et $\rho \in L^\infty(\mathbb{R})$.

L'équation que nous étudions est l'équation de Helmholtz associée à ce milieu périodique, d'inconnue u_δ , définie par

$$-\nabla \cdot \left[A \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \nabla u_\delta(\mathbf{x}) \right] - \omega^2 \rho \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) u_\delta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (6.2)$$

où f est un terme source et où $\omega \in \mathbb{C}$ est une fréquence telle que $\text{Im } \omega^2 > 0$. Nous avons alors le résultat classique suivant concernant le caractère bien posé du problème (6.2) (voir par exemple [126]) :

Proposition 6.1. *Pour $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)$, l'équation (6.2) admet une unique solution $u_\delta \in H^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant*

$$\|u_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}, \quad (6.3)$$

où C est une constante indépendante de δ .

Remarque 6.2. Le choix $\text{Im } \omega^2 > 0$ assure l'existence et l'unicité du problème (6.2) et a pour interprétation physique que le milieu est absorbant. Montrer le caractère bien posé de (6.2) dans le cas $\text{Im } \omega^2 = 0$, c'est-à-dire un cas sans absorption, s'avère beaucoup plus compliqué. Il faudrait notamment soit passer par le principe d'amplitude limite soit par la dérivation de conditions de radiation, questions difficiles et seulement partiellement résolues dans les milieux périodiques. Nous renvoyons à la conclusion de ce manuscrit pour une discussion plus approfondie et des références.

Le but de l'homogénéisation est de décrire le comportement asymptotique de la solution u_δ de (6.2) lorsque $\delta \rightarrow 0$ via un développement du type

$$u_\delta = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots \quad (6.4)$$

dont les termes u_0, u_1 , etc. dépendent simplement de la période δ .

6.1.2 La méthode des développements à deux échelles

À partir d'ici, nous allons développer des calculs essentiellement formels qui seront justifiés *a posteriori* par des résultats de convergence. Ceux-ci se basent sur la méthode des développements à deux échelles qui est tout à fait standard en homogénéisation (voir par exemple [21, 64]). Elle se base sur l'idée que la solution u_δ de (6.2) possède un comportement différent à deux échelles : d'une part un comportement macroscopique lié à la variable \mathbf{x} dite *lente* et d'autre part un comportement microscopique lié à la variable $\mathbf{y} := \mathbf{x}/\delta$ dite *rapide*. Ainsi, la méthode des développements à deux échelles postule un développement, couramment appelé *ansatz* dans la littérature, de u_δ sous la forme

$$u_\delta(\mathbf{x}) = u_0\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) + \delta u_1\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) + \delta^2 u_2\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) + \dots \quad (6.5)$$

où les u_n sont des fonctions Y -périodiques par rapport à la variable rapide $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\delta$. La figure 6.1 représente une fonction $u_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ montrant les deux échelles.

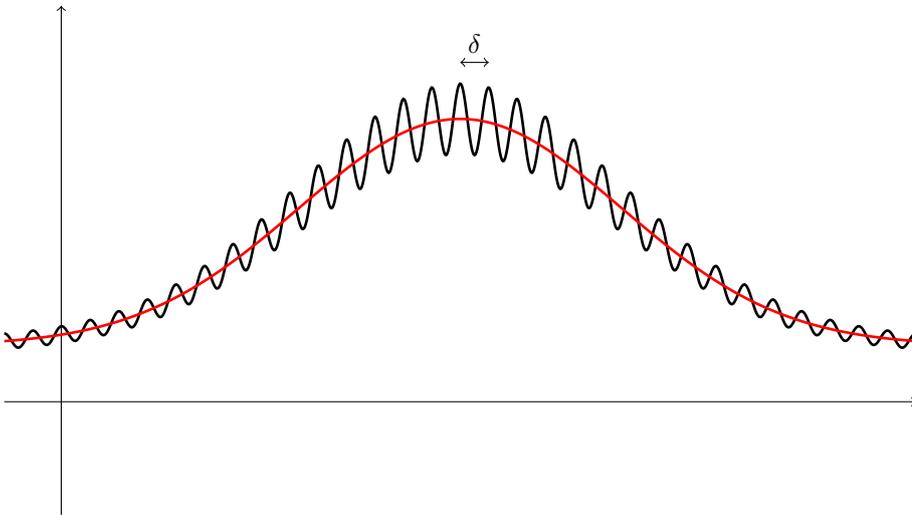


FIGURE 6.1 – Allure générale en dimension $d = 1$ d'une fonction $u_n(x, x/\delta)$ (en noir). Les deux échelles spatiales sont présentes : les oscillations rapides à l'échelle rapide $y = x/\delta$ et le comportement macroscopique moyen à l'échelle lente x (en rouge).

Afin de caractériser ces fonctions u_n , injectons l'*ansatz* (6.5) dans l'équation de départ (6.2). Pour ce faire, introduisons l'opérateur L_δ lié à (6.2) défini par

$$L_\delta v := -\nabla \cdot \left[A \left(\frac{\cdot}{\delta} \right) \nabla v \right] - \omega^2 \rho \left(\frac{\cdot}{\delta} \right) v. \quad (6.6)$$

En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \right] = \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (6.7)$$

nous pouvons réécrire l'opérateur L_δ sous la forme

$$L_\delta = \delta^{-2} L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} + \delta^{-1} L_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} + L_{\mathbf{x}, \mathbf{x}}, \quad (6.8)$$

où nous définissons

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} := -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ L_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} := -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \\ L_{\mathbf{x}, \mathbf{x}} := -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \omega^2 \rho(\mathbf{y}) \text{id}. \end{cases} \quad (6.9)$$

En injectant (6.5) dans (6.2) et en identifiant les termes en facteur des mêmes puissances de δ , nous obtenons alors la cascade d'équations

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} u_0 &= 0 \\ L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} u_1 + L_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} u_0 &= 0 \\ L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} u_2 + L_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} u_1 + L_{\mathbf{x}, \mathbf{x}} u_0 &= f \\ L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} u_3 + L_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} u_2 + L_{\mathbf{x}, \mathbf{x}} u_1 &= 0 \\ &\vdots \\ L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} u_{n+2} + L_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} u_{n+1} + L_{\mathbf{x}, \mathbf{x}} u_n &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.10)$$

Il s'agit d'équations en la variable rapide \mathbf{y} posées dans la cellule unité $Y = (0, 1)^d$ où la variable lente \mathbf{x} joue le rôle d'un paramètre dans le second membre.

Remarque 6.3. À ce stade, nous avons désolidarisé \mathbf{x} et \mathbf{y} et les traitons comme deux variables indépendantes, bien qu'elles soient en fait liées par la relation $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\delta$. Insistons sur le fait que ces calculs sont formels et seront justifiés *a posteriori*.

Pour étudier les équations (6.10), il est utile d'introduire $H_{\#}^1(Y)$ le sous-espace fermé de $H^1(Y)$ constitué des fonctions de $H^1(Y)$ qui sont Y -périodiques. Notons

$$\langle u \rangle_Y := \int_Y u, \quad (6.11)$$

la moyenne d'une fonction u sur Y et introduisons

$$\dot{H}_{\#}^1(Y) := \{u \in H_{\#}^1(Y) : \langle u \rangle_Y = 0\}, \quad (6.12)$$

le sous-espace fermé de $H_{\#}^1(Y)$ constitué des fonctions à moyenne nulle.

6.1.2.1 Développement à l'ordre 0

La première équation de (6.10) est simplement $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pour $\mathbf{y} \in Y$ où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ apparaît comme un paramètre (voir la remarque 6.3). Il est possible de montrer que toute solution dans $H_{\#}^1(Y)$ de cette équation est nécessairement constante (voir la proposition 6.4). Par conséquent, u_0 est indépendante de \mathbf{y} :

$$u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{u}_0(\mathbf{x}), \quad (6.13)$$

où \hat{u}_0 est une fonction indépendante de la variable rapide \mathbf{y} .

6.1.2.2 Développement à l'ordre 1

En utilisant (6.13), la deuxième équation de (6.10) devient

$$L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}(\mathbf{y}) \quad \text{dans } Y. \quad (6.14)$$

Constatons alors que \mathbf{x} joue le rôle d'un paramètre dans cette équation, qui est de plus linéaire en $\partial \hat{u}_0 / \partial x_j$. Introduisons donc w_1, \dots, w_d les d uniques solutions des d problèmes de cellules du premier ordre définis par

$$w_j \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \quad \text{telle que} \quad L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}w_j = \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}. \quad (6.15)$$

L'équation ci-dessus est bien entendu à comprendre au sens faible : trouver $w_j \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ telle que $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_j, \psi) = -\int_Y a_{ij} \partial_{y_i} \bar{\psi}$ pour tout $\psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$, où $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}$ est la forme bilinéaire associée à $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}$ définie par

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\phi, \psi) := \int_Y a_{k\ell} \partial_{y_k} \phi \partial_{y_\ell} \bar{\psi}, \quad (\phi, \psi) \in \dot{H}_{\#}^1(Y). \quad (6.16)$$

Pour démontrer le caractère bien posé de cette formulation variationnelle, nous disposons du résultat suivant :

Proposition 6.4 (alternative de Fredholm). *Soit $F \in H^{-1}(Y)$. L'équation*

$$u \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \quad \text{telle que} \quad L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}u = F, \quad (6.17)$$

admet une unique solution si, et seulement si, la relation de compatibilité

$$\langle F, 1 \rangle_{H^{-1}(Y) \times H^1(Y)} = 0, \quad (6.18)$$

est vérifiée.

Le problème (6.15) rentre bien dans ce cadre car $\langle \partial_{y_i} a_{ij}, 1 \rangle_{H^{-1}(Y) \times H^1(Y)} = 0$ par périodicité.

Nous pouvons donc écrire u_1 sous la forme

$$u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x_j}(\mathbf{x}) w_j(\mathbf{y}) + \hat{u}_1(\mathbf{x}), \quad (6.19)$$

où \hat{u}_1 est une fonction indépendante de \mathbf{y} . Remarquons que \hat{u}_1 correspond à la partie moyennée de u_1 sur Y , puisque $\langle u_1 \rangle_Y = \hat{u}_1$ car $\langle w_j \rangle_Y = 0$.

6.1.2.3 Développement à l'ordre 2

La troisième équation de (6.10) est

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}u_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_1}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_0(\mathbf{x}) \right) + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) \hat{u}_0(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad \text{dans } Y. \quad (6.20)$$

D'après la proposition 6.4, pour que (6.20) admette une solution $u_2 \in H_{\#}^1(Y)$, il faut que le second membre vérifie la relation de compatibilité (6.18). Cette condition, combinée avec (6.19), implique que \hat{u}_0 est solution de l'équation homogénéisée

$$-\nabla \cdot [A^* \nabla \hat{u}_0(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (6.21)$$

où $A^* = (a_{ij}^*)$ est la matrice homogénéisée définie par

$$a_{ij}^* := \left\langle a_{ij}(\mathbf{y}) + a_{ik}(\mathbf{y}) \frac{\partial w_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) \right\rangle_Y. \quad (6.22)$$

et où $\rho^* := \langle \rho \rangle_Y$. Les propriétés de la matrice A et de la fonction ρ se retrouvent dans celles de la matrice homogénéisée A^* et du coefficient homogénéisé ρ^* [21] :

Proposition 6.5. *La matrice homogénéisée A^* est définie positive et ρ^* est strictement positif. De plus, si A est symétrique alors A^* l'est aussi.*

Cette proposition étant extrêmement importante dans la suite, nous en livrons la démonstration même si ce résultat n'est pas nouveau et bien connu :

Démonstration. Le résultat pour ρ^* est immédiat à partir de (6.1). En ce qui concerne A^* , remarquons tout d'abord que nous avons $A^* = \mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_j + y_j, w_i + y_i)$ avec $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}$ définie par (6.16) (ce qui montre immédiatement que A^* est symétrique si A l'est puisque dans ce cas $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}$ est symétrique). En effet, la formulation variationnelle de (6.15) est équivalente à $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_j + y_j, \psi) = 0$ pour tout $\psi \in \dot{H}_\#^1(Y)$. En prenant $\psi = w_i \in \dot{H}_\#^1(Y)$ comme fonction test, nous avons donc

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_j + y_j, w_i + y_i) = \mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_j + y_j, y_i) = a_{ij}^*. \quad (6.23)$$

Le caractère défini positif de A^* s'ensuit. En effet, d'après (6.1) nous avons

$$a_{ij}^* \xi_i \xi_j = \mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\xi_i(w_i + y_i), \xi_j(w_j + y_j)) \geq \lambda \int_Y \sum_{k=1}^d (\partial_{y_k} \zeta)^2, \quad (6.24)$$

avec $\zeta := \xi_i(w_i + y_i)$ donc A^* est positive. De plus, $a_{ij}^* \xi_i \xi_j = 0$ si, et seulement si, $\partial_{y_k} \zeta = 0$ pour tout k , c'est-à-dire $\zeta = c$ avec c une constante. Autrement dit $\xi_i y_i = c - \xi_i w_i$ est Y -périodique, *i.e.* $\xi_i = 0$ pour tout i . Cela montre donc que A^* est définie. \square

Remarquons par contre que si A est diagonale (ou même scalaire), il n'y a aucune raison que A^* le soit, et ce n'est en général pas le cas. Autrement dit l'homogénéisation d'un milieu isotrope peut conduire à des milieux anisotropes. Nous présentons en annexe 6.A quelques situations où la matrice A^* est explicite. En particulier, le cas stratifié, c'est-à-dire que a est indépendant d'une des variables y_j , est décrit.

Maintenant pour expliciter u_2 , remarquons comme nous l'avions fait pour u_1 que cette équation est linéaire en $\partial_{x_i x_j}^2 \hat{u}_0(\mathbf{x})$ et $\hat{u}_0(\mathbf{x})$ (\mathbf{x} joue toujours le rôle d'un paramètre). Introduisons alors θ_{ij} les d^2 uniques solutions des problèmes de cellules du deuxième ordre définis par

$$\theta_{ij} \in \dot{H}_\#^1(Y) \quad \text{telle que} \quad L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \theta_{ij} = a_{ij} + a_{ik} \frac{\partial w_j}{\partial y_k} + \frac{\partial}{\partial y_k} (a_{ki} w_j) - a_{ij}^*, \quad (6.25)$$

ainsi que γ la solution du problème de cellule

$$\gamma \in \dot{H}_\#^1(Y) \quad \text{telle que} \quad L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \gamma = \rho - \rho^*. \quad (6.26)$$

Les problèmes (6.25) et (6.26) sont bien posés car ils vérifient bien la relation de compatibilité de (6.4).

Nous pouvons donc, en injectant (6.19) et (6.21) dans (6.20), écrire u_2 sous la forme

$$u_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \theta_{ij}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) w_j(\mathbf{y}) + \omega^2 \hat{u}_0(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{y}) + \hat{u}_2(\mathbf{x}), \quad (6.27)$$

où \hat{u}_2 est une fonction dépendant uniquement de \mathbf{x} correspondant à la partie moyennée en \mathbf{y} de u_2 .

Remarque 6.6. Les différents problèmes de cellules (6.15), (6.25) et (6.26) ne dépendent pas de ω . Ce n'est plus le cas pour l'homogénéisation à fort contraste présentée au chapitre 10.

6.1.2.4 Développement à l'ordre 3

Considérer la relation de compatibilité de la quatrième équation de (6.10) conduit à l'équation homogénéisée suivante :

$$-\nabla \cdot [A^* \nabla \hat{u}_1] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1 = \omega^2 \gamma_i^* \partial_{x_i} \hat{u}_0 + c_{ijk}^* \frac{\partial^3 \hat{u}_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \quad (6.28)$$

où (γ_i^*) est un tenseur d'ordre 1 défini par

$$\gamma_i^* = \langle a_{ij} \partial_{y_j} \gamma + \rho w_i \rangle_Y, \quad (6.29)$$

et où (c_{ijk}^*) est un tenseur d'ordre 3 défini par

$$c_{ijk}^* = \left\langle a_{ij}(\mathbf{y}) w_k(\mathbf{y}) + a_{k\ell}(\mathbf{y}) \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial y_\ell} \right\rangle_Y. \quad (6.30)$$

Les deux opérateurs $c_{ijk}^* \partial_{x_i x_j x_k}^3$ et $\gamma_i^* \partial_{x_i}$ sont assez désagréables. D'ailleurs, dans la littérature ce terme \hat{u}_1 suscite peu d'intérêt et est souvent supposé nul sans plus de justification. La proposition suivante montre qu'en fait ces opérateurs n'interviennent pas dans la suite lorsque A est symétrique et nous permettra de montrer que \hat{u}_1 est effectivement nul (car nous sommes en l'absence de bords ou d'interface).

Proposition 6.7. *Supposons A symétrique. Alors les symboles des opérateurs $c_{ijk}^* \partial_{x_i x_j x_k}^3$ et $\gamma_i^* \partial_{x_i}$ sont nuls.*

Ce résultat est de manière surprenante très peu présent dans la littérature sur l'homogénéisation. Pour $c_{ijk}^* \partial_{x_i x_j x_k}^3$, il en existe une dans [171] que nous rappelons juste ci-dessous (voir également [5]). Nous en livrerons également une originale, basée sur l'homogénéisation par ondes de Bloch dans l'annexe 6.B. En ce qui concerne $\gamma_i^* \partial_{x_i}$, il s'agit à notre connaissance d'un résultat nouveau (bien qu'immédiat).

Démonstration. Commençons par γ_i^* . En utilisant $w_i \in \dot{H}_\#^1(Y)$ comme fonction test dans la formulation variationnelle de (6.26) nous obtenons $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\gamma, w_i) = \int_Y (\rho - \rho^*) w_i$ ($\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}$ est définie par (6.16)). D'autre part, en utilisant la symétrie de A (qui implique celle de $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}$) et $\gamma \in \dot{H}_\#^1(Y)$ comme fonction test dans la formulation variationnelle de (6.15) pour w_i , nous avons $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\gamma, w_i) = \mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_i, \gamma) = - \int_Y a_{ji} \partial_{y_j} \gamma$. Nous avons donc

$$\gamma_i^* = \int_Y a_{ij} \partial_{y_j} \gamma + \rho w_i = -\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\gamma, w_i) + \mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\gamma, w_i) + \rho^* \int_Y w_i = \rho^* \int_Y w_i = 0, \quad (6.31)$$

car w_i est à moyenne nulle. Traitons maintenant le cas de c_{ijk}^* . Nous allons montrer que

$$c_{ijk}^* = \int_Y a_{i\ell} \left(w_k \frac{\partial w_j}{\partial y_\ell} - w_j \frac{\partial w_k}{\partial y_\ell} \right), \quad (6.32)$$

En utilisant $\theta_{ij} \in \dot{H}_\#^1(Y)$ comme fonction test dans la formulation faible du problème de cellule du premier ordre (6.15) pour w_k , nous obtenons

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_k, \theta_{ij}) = - \int_Y a_{\ell k} \partial_{y_\ell} \theta_{ij} = - \int_Y a_{k\ell} \partial_{y_\ell} \theta_{ij}. \quad (6.33)$$

Maintenant, en utilisant $w_k \in \dot{H}_\#^1(Y)$ comme fonction test dans la formulation faible du problème de cellule du second ordre (6.15) pour θ_{ij} , nous obtenons (le terme en a_{ij}^* disparaît car w_k est à moyenne nulle)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\theta_{ij}, w_k) &= \int_Y a_{ij} w_k + \int_Y a_{i\ell} \partial_{y_\ell} w_j w_k - \int_Y a_{\ell i} w_j \partial_{y_\ell} w_k \\ &= \int_Y a_{ij} w_k + \int_Y a_{i\ell} \partial_{y_\ell} w_j w_k - \int_Y a_{i\ell} w_j \partial_{y_\ell} w_k. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Par symétrie, nous avons $\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_k, \theta_{ij}) = \mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\theta_{ij}, w_k)$ donc soustraire (6.33) à (6.34) donne bien (6.32). Pour conclure, il suffit de remarquer que (6.32) implique que $c_{ijk}^* = -c_{ikj}^*$ ce qui implique $c_{ijk}^* \xi_i \xi_j \xi_k = 0$ d'où le résultat. \square

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où A est symétrique. En utilisant la proposition 6.7, les termes dans le membre de droite s'annulent puisque les dérivées partielles commutent, nous obtenons alors que

$$\gamma_i^* \partial_{x_i} \hat{u}_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_{ijk}^* \frac{\partial^3 \hat{u}_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = 0. \quad (6.35)$$

En vertu de (6.28), \hat{u}_1 est solution de l'équation homogénéisée

$$-\nabla \cdot [A^* \nabla \hat{u}_1] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1 = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (6.36)$$

Cela implique donc que \hat{u}_1 est identiquement nul :

$$\hat{u}_1 = 0. \quad (6.37)$$

Insistons sur le fait que \hat{u}_1 soit nul est spécifique au fait que nous nous sommes placés dans tout l'espace \mathbb{R}^d . Nous allons voir qu'en présence de bords (ou d'interfaces), l'*ansatz* de départ (6.5) n'est plus valide ce qui rend l'analyse bien plus délicate.

À ce stade, nous pourrions continuer les calculs *ad nauseam* : nous pourrions donner une expression explicite de u_3 qui ferait intervenir des problèmes de cellule du troisième ordre, puis nous pourrions moyenner l'équation en u_4 pour obtenir l'équation vérifiée par \hat{u}_2 (voir par exemple [13, 233]), puis donner une expression explicite de u_4 , etc. Nous allons nous concentrer sur les trois premiers termes dans la suite.

6.1.3 Résultats de convergence

Maintenant que nous avons obtenu les premiers termes de l'*ansatz* (6.5), il est nécessaire de s'assurer de la convergence de u_δ vers ce développement lorsque δ tend vers 0. Cela justifie donc *a posteriori* les calculs formels que nous avons effectués jusqu'ici. Il existe de nombreuses méthodes pour cela. Citons, sans être exhaustif, la méthode de la convergence double-échelle [2, 175, 245], la méthode des fonctions tests oscillantes [64, 215] ou encore la *periodic unfolding method* [62, 63]. Il existe aussi une théorie stochastique de l'homogénéisation [137, 188] et une théorie variationnelle de l'homogénéisation appelée Γ -convergence [42, 82]. Enfin, mentionnons qu'il existe une version très générale de l'homogénéisation permettant de traiter des cas où il n'y a pas d'hypothèse particulière sur le milieu considéré, comme la périodicité ou l'ergodicité dans un contexte probabiliste, appelée G -convergence (et sa généralisation la H -convergence), voir [125, 184, 217].

6.1.3.1 Convergence double-échelle

La convergence double-échelle est une généralisation de la notion de convergence faible qui permet de traiter avec simplicité et élégance les problèmes d'homogénéisation périodique [2, 175, 245].

Définition 6.8. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Une suite de fonctions (u_δ) dans $L^2(\Omega)$ converge double-échelle vers $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, C_{\#}^\infty(Y))$ nous avons

$$\int_{\Omega} u_\delta(\mathbf{x}) \phi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_Y u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (6.38)$$

La convergence double-échelle possède beaucoup de propriétés, notamment le théorème de compacité qui assure que de toute suite de fonctions (u_δ) bornée dans $L^2(\Omega)$, il est possible d'extraire une sous-suite qui converge double-échelle vers une limite $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$.

Grâce à cette notion, il est possible de montrer le résultat de convergence suivant [2] :

Théorème 6.9. *Sous certaines hypothèses techniques sur A (voir [2]), la suite (u_δ) des solutions de (6.2) converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers $\hat{u}_0(\mathbf{x})$ solution de (6.21) et la suite (∇u_δ) converge double-échelle vers $\nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0 + \nabla_{\mathbf{y}} u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ où $u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est définie par (6.19) (avec $\hat{u}_1 = 0$). De plus, nous avons la convergence forte*

$$\left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[\hat{u}_0(\mathbf{x}) + \delta u_1\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \right] \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad (6.39)$$

6.1.3.2 Vitesse de convergence

Malheureusement, la méthode de la convergence double-échelle décrite précédemment ne fournit pas d'informations sur la vitesse de convergence. Il est en fait possible de donner des estimations d'erreur plus fines, modulo des hypothèses de régularité sur les problèmes de cellules [21, 64, 125].

Théorème 6.10. Soit $(u_\delta)_\delta$ la famille des solutions de (6.2). Supposons que $\mathbf{w} \in W^{1,\infty}(Y)^d$, $\Theta \in W^{1,\infty}(Y)^{d \times d}$, $\gamma \in W^{1,\infty}(Y)$ et que $\hat{u}_0 \in H^4(\mathbb{R}^d)$. Nous avons les estimations d'erreur suivantes :

- À l'ordre 0

$$\begin{aligned} \|u_\delta(\mathbf{x}) - \hat{u}_0(\mathbf{x})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \mathcal{O}(\delta), \\ \|u_\delta(\mathbf{x}) - \hat{u}_0(\mathbf{x})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &= \mathcal{O}(1), \end{aligned} \quad (6.40)$$

où \hat{u}_0 est la solution de (6.21).

- À l'ordre 1

$$\begin{aligned} \left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[\hat{u}_0(\mathbf{x}) + \delta u_1 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \mathcal{O}(\delta^2), \\ \left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[\hat{u}_0(\mathbf{x}) + \delta u_1 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \right] \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &= \mathcal{O}(\delta), \end{aligned} \quad (6.41)$$

où u_1 est définie par (6.19) (avec $\hat{u}_1 = 0$).

- À l'ordre 2

$$\begin{aligned} \left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[\hat{u}_0(\mathbf{x}) + \delta u_1 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) + \delta^2 u_2 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \mathcal{O}(\delta^2), \\ \left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[\hat{u}_0(\mathbf{x}) + \delta u_1 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) + \delta^2 u_2 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \right] \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &= \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned} \quad (6.42)$$

où u_2 est définie par (6.27) toujours avec $\hat{u}_1 = 0$ et où nous avons considéré également que $\hat{u}_2 = 0$.

Remarque 6.11. L'estimation (6.40) en norme H^1 n'est pas surprenante. En effet, \hat{u}_0 ne dépend pas de la variable rapide et ne saurait donc prendre en compte les oscillations à l'échelle δ de la solution exacte u_δ .

Remarque 6.12. L'estimation (6.42) en norme L^2 est seulement en δ^2 et non δ^3 car nous avons négligé $\hat{u}_2 = 0$, ce qui n'est en toute rigueur pas le cas. Prendre correctement cette partie moyennée en compte rétablirait une estimation en δ^3 attendue.

Remarque 6.13. Ces résultats ne sont certainement pas optimaux concernant les hypothèses de régularité. Par exemple, nous renvoyons aux articles de Birman et Suslina [24, 25] où est démontrée la convergence en ε en norme L^2 de (6.41) avec des hypothèses minimales sur la régularité de a .

6.1.3.3 Simulations numériques

Nous vérifions numériquement maintenant les estimations d'erreur (6.40), (6.41) et (6.42) en dimension $d = 2$. Afin de s'affranchir de la difficulté de faire des simulations dans tout l'espace \mathbb{R}^2 , nous considérons un domaine de calcul Ω rectangulaire dont la longueur et la largeur sont des multiples entiers de la période δ et nous prendrons des conditions aux bords périodiques. Ce choix assure alors les mêmes estimations d'erreur que (6.40), (6.41) et (6.42). Les simulations numériques ont été réalisées avec le logiciel **FreeFem++** [116], en utilisant une méthode d'éléments finis standard pour la résolution des équations homogénéisées et l'équation exacte. Nous renvoyons à chapitre 9, section 9.1 pour une explication sur la résolution numérique des problèmes de cellule (6.15), (6.25) et (6.26).

Pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$, considérons une période $\delta = 1/N$ et $\Omega = (0, 1)^2$. Nous prenons comme terme source $f(x_1, x_2) = \cos(4\pi x_1) \cos(4\pi x_2)$ sur Ω et les coefficients périodiques sont définis par $A(\mathbf{y}) = a(\mathbf{y})I_2$ avec $a(y_1, y_2) = 2 + \sin(2\pi y_1) \sin(2\pi y_2)$ (voir la figure 6.2) et par $\rho(\mathbf{y}) = 1$. Enfin, la fréquence est $\omega = 1 + 0,01i$. Nous avons alors calculé la solution exacte u_δ de (6.2) sur un maillage extrêmement raffiné pour plusieurs valeurs de δ , puis nous avons calculé la solution \hat{u}_0 de l'équation homogénéisée (6.21). Nous avons également calculé les deux solutions des problèmes de cellules (6.15) et les quatre solutions des problèmes de cellules (6.25) (notons que $\gamma = 0$ pour $\rho = 1$ dans (6.26)).

La figure 6.3 montre la partie réelle de la solution exacte u_δ , les parties réelles des approximations u_0 , $u_0 + \delta u_1$ et $u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$ à l'ordre 0, à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de u_δ (avec $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = 0$) pour $N = 4$, c'est-à-dire $\delta = 1/4$ et montre également la différence entre la solution exacte et les différentes approximations (dans la même échelle de valeurs). Nous constatons bien qualitativement que ces différences diminuent

avec l'ordre, et que l'erreur est répartie de façon uniforme dans tout le domaine. En particulier, u_0 retranscrit bien le comportement macroscopique de la solution exacte mais pas les petites oscillations qui ne se retrouvent qu'à partir de l'ordre 1. Enfin, la figure 6.4 montre les courbes de convergence correspond à (6.40), (6.41) et (6.42) en échelle log-log. Nous retrouvons bien les résultats théoriques annoncés.

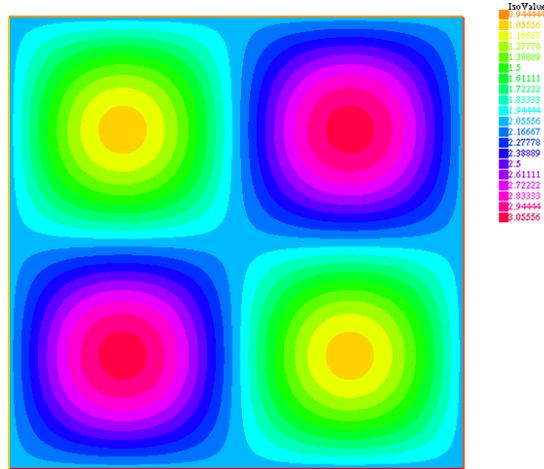


FIGURE 6.2 – Le coefficient périodique $a(y_1, y_2) = 2 + \sin(2\pi y_1) \sin(2\pi y_2)$ pour $(y_1, y_2) \in Y$.

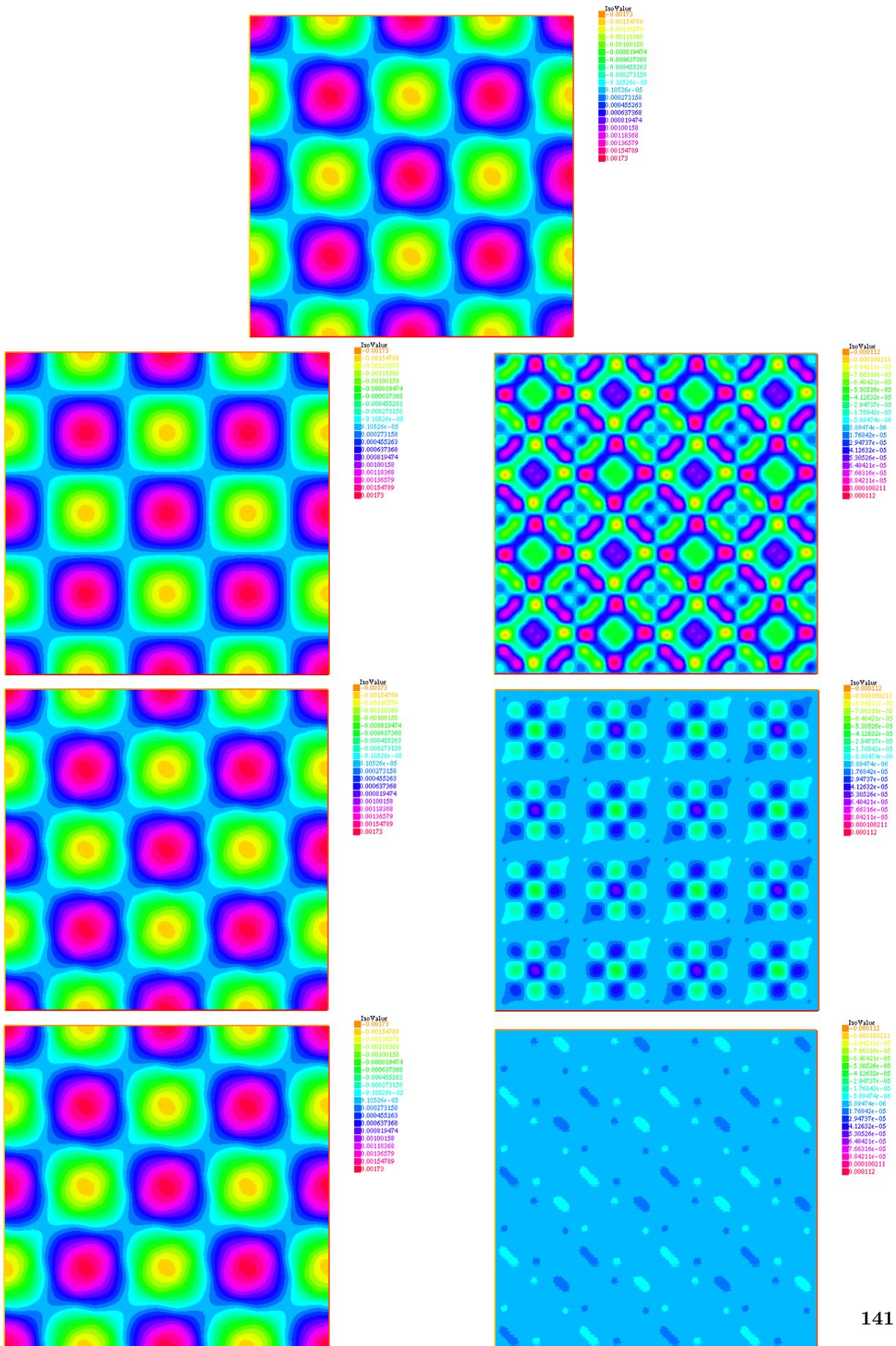


FIGURE 6.3 – Parties réelles de la solution exacte u_δ (en haut), des approximations u_0 , $u_0 + \delta u_1$ et $u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$ (colonne de gauche de haut en bas) puis des différences $u_\delta - u_0$, $u_\delta - (u_0 + \delta u_1)$ et $u_\delta - (u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2)$ (colonne de droite de haut en bas) pour $\delta = 1/4$.

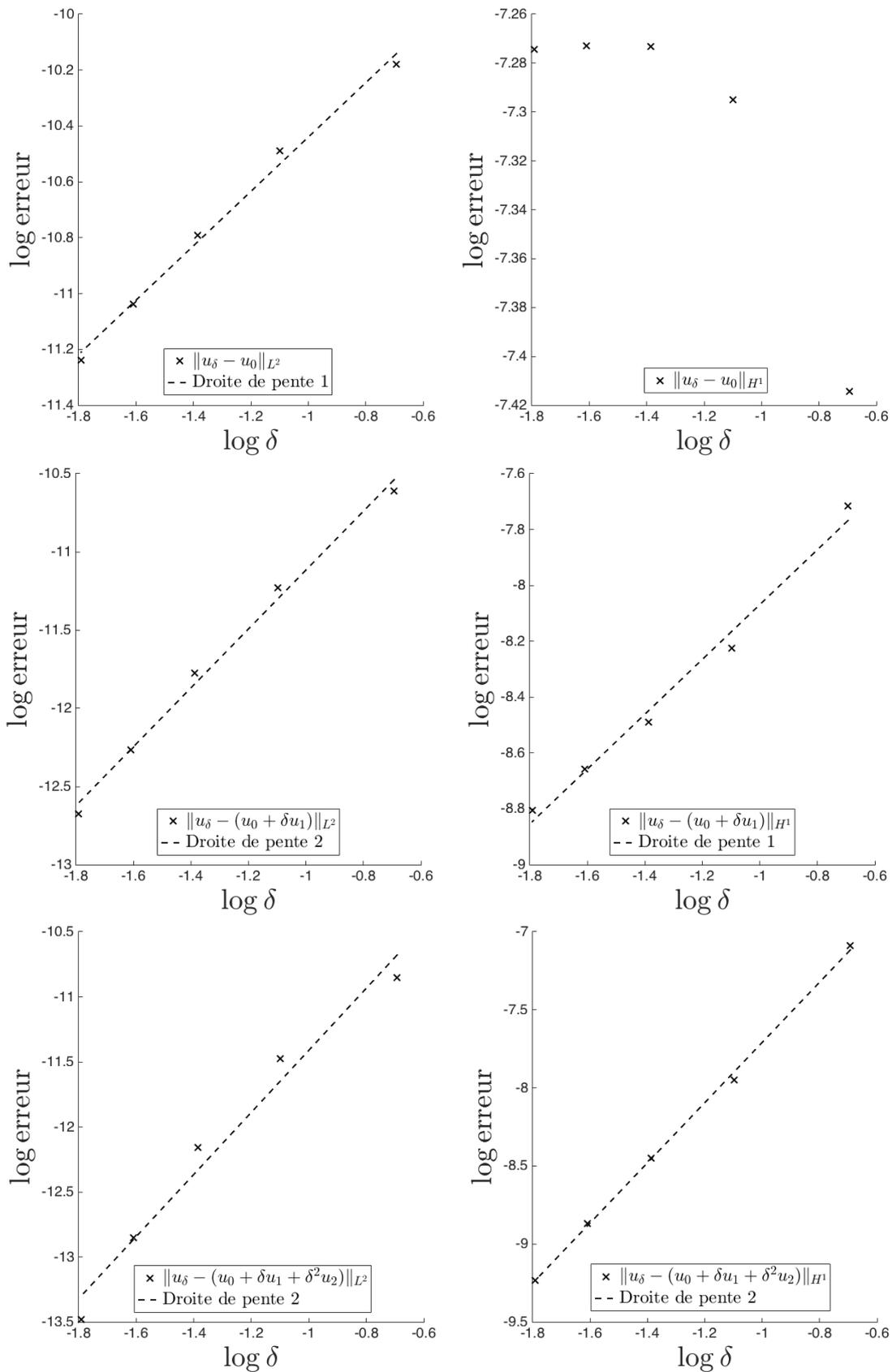


FIGURE 6.4 – Courbes de convergence en échelle log-log de l'erreur L^2 (à gauche) et H^1 (à droite) entre la solution exacte u_δ et u_0 (en haut), $u_0 + \delta u_1$ (au milieu) et $u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$ (en bas).

6.2 Homogénéisation classique de l'équation de Helmholtz dans un domaine borné

La situation que nous avons vue dans la section précédente était idéale en terme d'erreur d'approximation. En effet, dès lors que nous sommes en présence de bords ou d'interfaces, les ordres d'approximations sont moins bons.

6.2.1 Le problème des conditions aux bords

Pour mieux comprendre pourquoi, considérons la même équation que (6.2), mais posée cette fois-ci dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné non vide dont la frontière $\partial\Omega$ est régulière, à laquelle nous ajoutons des conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left[A \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \nabla u_\delta(\mathbf{x}) \right] - \omega^2 \rho \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) u_\delta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \text{dans } \Omega \\ u_\delta = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.43)$$

Ce problème est bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (rappelons que $\text{Im } \omega^2 > 0$).

Si nous suivons la même démarche qu'à la section précédente en considérant l'*ansatz* (6.5), nous obtenons les mêmes résultats (6.13), (6.19) et (6.27). Cependant, en ce qui concerne les équations homogénéisées pour \hat{u}_0 et \hat{u}_1 , la situation diffère. En effet, nous avons toujours les équations homogénéisées volumiques (6.21) et (6.36) (toujours avec un second membre nul si a est symétrique), posées cette fois-ci dans Ω . Il faut alors ajouter des conditions aux bords sur $\partial\Omega$. La démarche la plus naturelle est d'injecter l'*ansatz* (6.5) dans la condition de Dirichlet $u_\delta = 0$ sur $\partial\Omega$ et d'identifier les puissances de δ , ce qui conduit à $u_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Plus particulièrement :

- À l'ordre 0, nous obtenons $\hat{u}_0 = 0$, ce qui est attendu : nous retrouvons à l'ordre 0 la condition de Dirichlet homogène. Nous avons donc pour \hat{u}_0 l'équation homogénéisée

$$\begin{cases} -\nabla \cdot [A^* \nabla \hat{u}_0(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \text{dans } \Omega \\ \hat{u}_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.44)$$

- À l'ordre 1, la situation est bien moins limpide. En effet, d'après (6.19), nous nous retrouvons avec la relation

$$\hat{u}_1(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (6.45)$$

dont le sens n'est pas très clair : le terme de gauche ne dépend que de la variable lente \mathbf{x} alors que le terme de droite est oscillant et fait intervenir la variable rapide $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\delta$.

6.2.1.1 Point bibliographique

Cette situation montre que l'*ansatz* (6.5) n'est pas correct près des bords. Ce phénomène est connu depuis longtemps (voir par exemple le livre de référence [21] dont la première édition date de 1978), a fait l'objet d'une littérature abondante et continue à être un sujet actif de recherche (voir par exemple l'introduction de [107] pour un aperçu).

Des preuves rigoureuses de convergence en présence de bords ont été possible grâce à l'ajout de termes supplémentaires dans l'*ansatz* (6.5), appelés *correcteurs de bords* (boundary correctors) qui ont été introduits en premier lieu par Moskow, Santosa and Vogelius [171, 201].

Cependant, ces correcteurs sont solutions de problèmes posés dans le milieu périodique originel, et non dans le milieu homogénéisé. La question de l'homogénéisation de ces correcteurs eux-mêmes afin d'obtenir des conditions aux bords effectives est une question très difficile. Par exemple, [201] montre que pour des domaines polygonaux avec des pentes rationnelles (incluant le cas de la dimension 1), la suite

des valeurs de ces correcteurs de bords admet plusieurs valeurs d'adhérence quand δ tend vers 0. Allaire et Amar dans [4] proposent une correction dans le cas où la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω est constituée de droites qui coïncident avec la période δ ; ces résultats ont été généralisés à des domaines polygonaux puis à des domaines quelconques par Gérard-Varet et Masmoudi dans [106, 107]. Citons également les papiers [202, 227] de Sarkis et Versieux adoptant un point de vue plus numérique ainsi que des travaux récents de Onofrei et Vernescu [187] ainsi que ceux de Prange [195].

À notre connaissance, quasiment rien n'a été publié jusqu'à présent pour des problèmes de transmissions, ce qui justifie d'autant plus l'étude qui sera faite au chapitre suivant. Mentionnons cependant que des travaux récents sur ce sujet ont été réalisés par Cakoni, Guzina et Moskow qui ont fait l'objet d'une publication venant d'être acceptée [47]. Nous détaillons davantage les résultats qu'ils ont obtenus lors de la section 6.3.

6.2.1.2 Vitesse de convergence

Il est tout de même possible de calculer la solution \hat{u}_0 de (6.44) et de considérer

$$u_1\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) = \partial_{x_j} \hat{u}_0(\mathbf{x}) w_j\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right), \quad (6.46)$$

où le terme \hat{u}_1 est donc négligé. Ce faisant, nous avons quand même convergence de $\hat{u}_0 + \delta u_1$ vers u_δ en norme H^1 , mais l'estimation d'erreur obtenue est moins bonne que celle de (6.41) (nous reprenons ici les mêmes hypothèses de régularité que celles du théorème 6.10) :

$$\left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[u_0(\mathbf{x}) + \delta u_1\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\delta^{1/2}), \quad (6.47)$$

Ce résultat est classique, voir par exemple [21, 64]. Notons également que cette estimation reste valable quel que soit le choix de la fonction \hat{u}_1 , puisque le terme $\delta \hat{u}_1(\mathbf{x})$ est plus petit que $\delta^{1/2}$ en norme H^1 . L'erreur commise en $\delta^{1/2}$ est en fait concentrée sur le bord $\partial\Omega$ du domaine (voir en particulier les simulations numériques ci-après). Si nous mesurons l'erreur seulement sur un domaine $D \subset\subset \Omega$,

$$\left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[u_0(\mathbf{x}) + \delta u_1\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \right] \right\|_{H^1(D)} = \mathcal{O}(\delta). \quad (6.48)$$

Ce résultat est prouvé dans [8, 9] en supposant quelques hypothèses de régularité sur a et Ω . Nous pourrions alors nous en contenter, mais nous aurions à l'ordre suivant

$$\left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[\hat{u}_0(\mathbf{x}) + \delta u_1\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) + \delta^2 u_2\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \right] \right\|_{H^1(D)} = \mathcal{O}(\delta), \quad (6.49)$$

et cela quel que soit le choix de \hat{u}_2 . Bien entendu nous avons toujours

$$\left\| u_\delta(\mathbf{x}) - \left[\hat{u}_0(\mathbf{x}) + \delta u_1\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) + \delta^2 u_2\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\delta^{1/2}), \quad (6.50)$$

D'une certaine manière, l'estimation (6.47) « bloque » la convergence pour les ordres supérieurs. Cela montre l'importance de comprendre plus en détails le comportement de u_δ près de $\partial\Omega$.

6.2.2 Résultats numériques

Concluons ce chapitre par quelques résultats numériques pour illustrer ce phénomène de couches limites. Nous reprenons exactement les mêmes paramètres de simulations que dans le cas précédent, mais en rajoutant donc une condition de Dirichlet homogène pour u_δ et \hat{u}_0 sur $\partial\Omega$ et prenons $f = 1$ partout.

La figure 6.5 montre la partie réelle de la solution exacte u_δ , les parties réelles des approximations u_0 et $u_0 + \delta u_1$ (avec $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = 0$) ainsi que la différence $u_\delta - (u_0 + \delta u_1)$ pour $N = 4$, c'est-à-dire $\delta = 1/4$. Nous voyons que $u_0 + \delta u_1$ ne vérifie pas la condition de Dirichlet homogène au bord et que l'erreur se concentre sur le bord du domaine en regardant la différence $u_\delta - (u_0 + \delta u_1)$ (contrairement à la section 6.1 où l'erreur était répartie uniformément dans tout le domaine). La figure 6.6 montre les courbes de convergence correspondant à (6.47), (6.48), (6.49) et (6.50) en échelle log-log. Nous retrouvons bien les résultats théoriques annoncés, notamment la convergence en $\delta^{1/2}$ en norme H^1 .

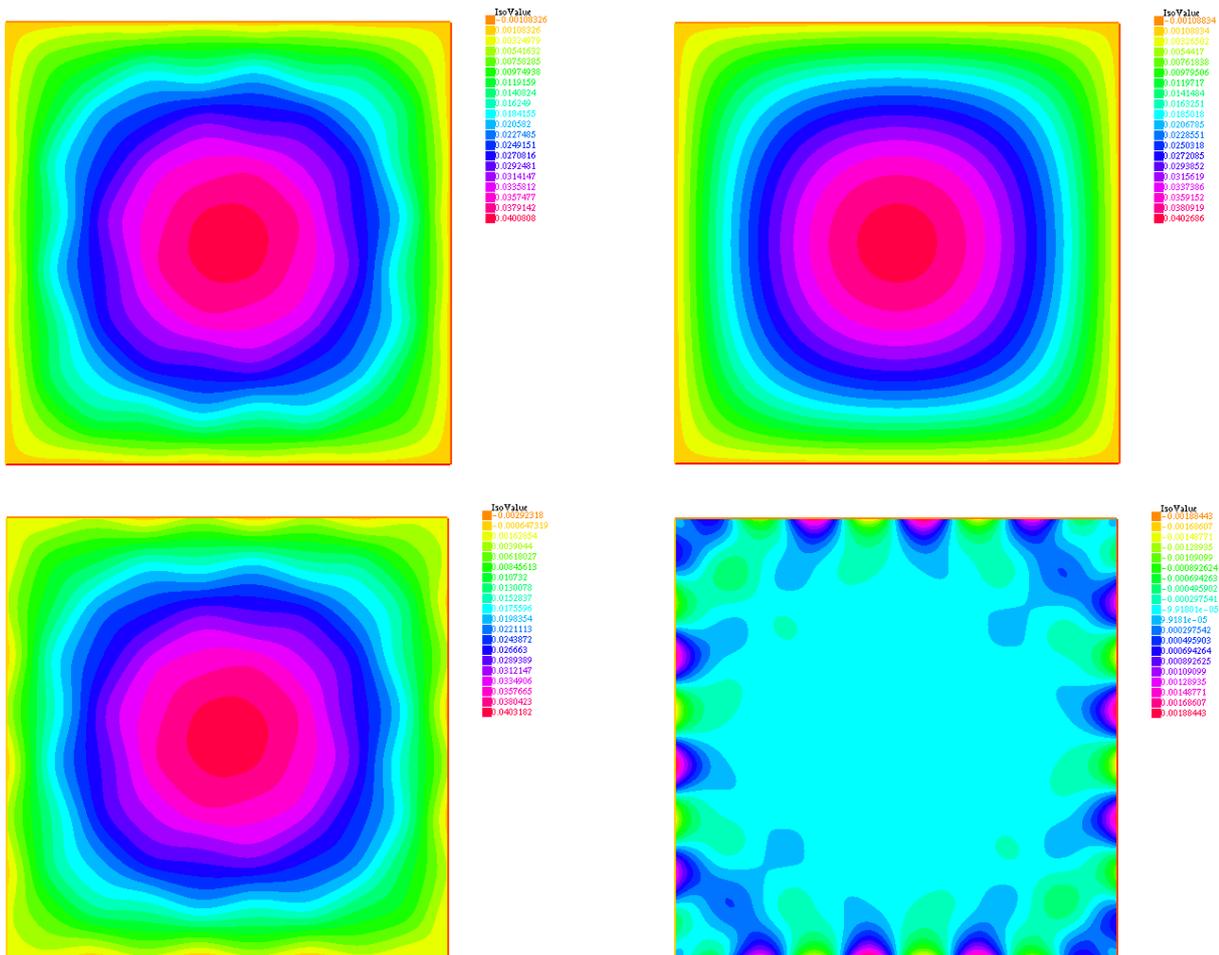


FIGURE 6.5 – Parties réelles de la solution exacte u_δ (en haut à gauche) et des approximations u_0 (en haut à droite), $u_0 + \delta u_1$ (en bas à gauche) et de la différence $u_\delta - (u_0 + \delta u_1)$ (en bas à droite) pour $\delta = 1/4$.

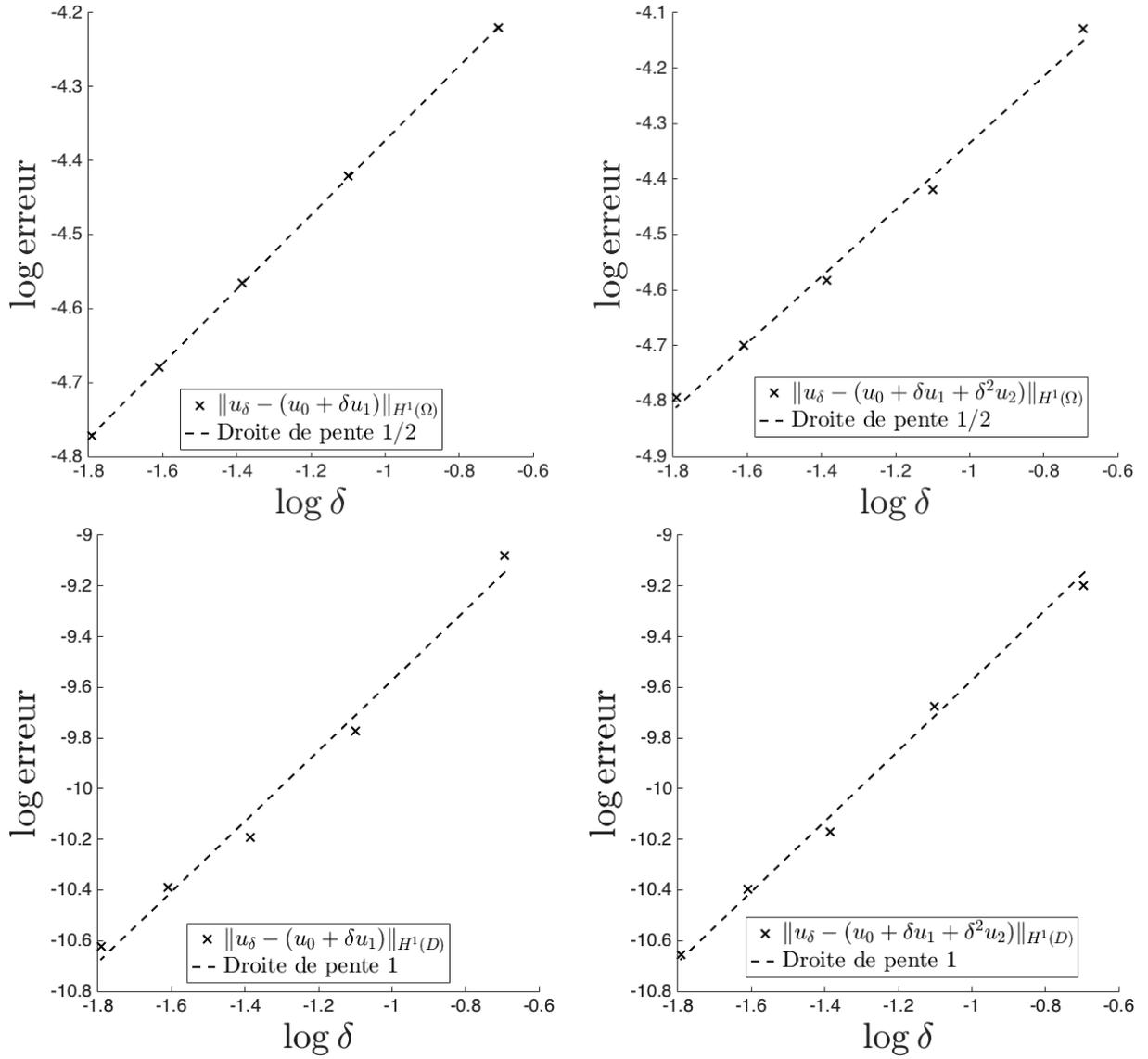


FIGURE 6.6 – Courbes de convergence en échelle log-log correspondant respectivement à (6.47) (en haut à gauche), (6.50) (en haut à droite), (6.48) (en bas à gauche) et (6.49) (en bas à droite).

6.3 Homogénéisation d'un problème de transmission entre un demi-plan homogène et un demi-plan périodique

Présentons maintenant le problème de transmission qui va nous intéresser dans la suite.

6.3.1 Présentation du problème de transmission

Nous considérons un problème de transmission entre deux demi-plans $\Omega^\pm := \mathbb{R}_\pm^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ séparés par une interface $\Gamma := \{0\} \times \mathbb{R}$. Le demi-plan de gauche Ω^- représente le milieu homogène et Ω^+ le milieu périodique destiné à être homogénéisé (voir la figure 6.7). Comme lors des sections précédentes, afin de modéliser les deux milieux nous nous donnons un petit paramètre $\delta > 0$ et deux fonctions a et ρ telles que

- sur Ω^- , ce sont des constantes : $a(\mathbf{x}) = a_0 > 0$ et $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^-$;
- sur Ω^+ , ce sont des fonctions Y -périodiques vérifiant les hypothèses de coercivité suivante : il existe des constantes $\lambda, \Lambda, c, C > 0$ (indépendantes de δ) telles que pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^+$ on ait

$$\lambda \leq a(\mathbf{x}) \leq \Lambda \quad \text{et} \quad c \leq \rho(\mathbf{x}) \leq C. \quad (6.51)$$

Remarque 6.14. Contrairement aux sections précédentes, nous considérons ici que a est une fonction scalaire plutôt qu'une matrice A . Il s'agit d'hypothèses visant à simplifier les calculs à venir dans les chapitres suivants qui sont déjà très lourds. Toute la théorie développée dans la suite pourrait s'étendre sans problème au cas où a serait une matrice. Nous renvoyons également à la conclusion de ce manuscrit pour une discussion plus approfondie sur les généralisations possibles de notre étude.

Le problème de transmission que nous regardons est alors le suivant :

$$-\nabla \cdot \left[a \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \nabla u_\delta(\mathbf{x}) \right] - \omega^2 \rho \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) u_\delta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (6.52)$$

où $f \in L^2(\mathbb{R})$ est un terme source à support compact inclus dans Ω^- et où $\omega \in \mathbb{C}$ est une fréquence telle que $\text{Im} \omega^2 > 0$ (voir la remarque 6.2 pour une discussion sur cette hypothèse). Nous avons alors le résultat classique concernant le caractère bien posé du problème (6.2) (voir par exemple [126]) : il admet une unique solution $u_\delta \in H^1(\mathbb{R})$ qui vérifie l'estimation

$$\|u_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad (6.53)$$

où C est une constante indépendante de δ .

Notons que les conditions de transmissions à travers Γ du problème (6.52) sont classiques et s'écrivent

$$[u_\delta]_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad [a(\cdot/\delta) \nabla u_\delta \cdot \mathbf{e}_1]_\Gamma = 0, \quad (6.54)$$

où $[\cdot]_\Gamma$ désigne le saut d'une quantité à travers Γ .

Remarque 6.15. Le choix de notre modèle entraîne une hypothèse très forte : l'interface Γ coïncide pour tout $\delta > 0$ avec le bord gauche des cellules de périodicité δY . Nous verrons dans les chapitres qui viennent que cela nous permettra de dériver des conditions de transmission qui dépendent simplement de δ , évitant ainsi les problèmes décrits dans [201] où la suite des correcteurs lorsque δ tend vers 0 admet plusieurs valeurs d'adhérence. Notons tout de même que cette hypothèse n'est pas absurde du point de vue des applications, surtout pour les métamatériaux (voir la figure 1 de l'introduction générale).

6.3.2 Homogénéisation naïve du problème et expériences numériques

Comme nous l'avons mentionné lors du point bibliographique, il n'existe pas à notre connaissance des travaux publiés concernant l'homogénéisation de problèmes de transmission (en tout cas d'un point de vue mathématique), à l'exception notable de [47] venant d'être accepté, dont nous détaillons les résultats

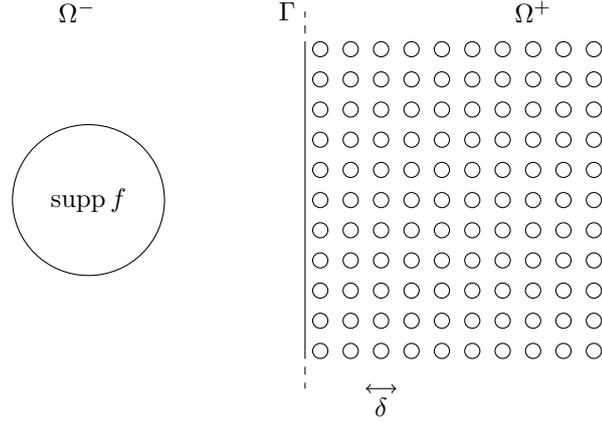


FIGURE 6.7 – La géométrie du problème de transmission

principaux à la section suivante.

Dans un premier temps, essayons de construire un problème homogénéisé « naïf », c'est-à-dire un modèle à l'ordre 0 dont \hat{u}_0 serait solution. En suivant ce qui a été fait dans les sections précédentes, il paraît naturel de remplacer dans le demi-plan périodique à droite Ω^+ les fonctions a et ρ par la matrice homogénéisée A^* et le coefficient homogénéisé ρ^* , c'est-à-dire que nous considérons que \hat{u}_0 est solution de l'équation homogénéisée dans Ω^+ :

$$-\nabla \cdot [A^* \nabla \hat{u}_0(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{dans } \Omega^+. \quad (6.55)$$

Le demi-plan à gauche Ω^- étant homogène, il n'y a *a priori* aucune raison de changer les valeurs a_0 et ρ_0 des fonctions a et ρ qui sont constantes. Nous considérons donc que l'équation (6.52) ne change pas dans Ω^- :

$$-a_0 \Delta \hat{u}_0(\mathbf{x}) - \omega^2 \rho_0 \hat{u}_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \text{dans } \Omega^-. \quad (6.56)$$

Nous devons compléter ces deux équations par des conditions de transmission. Le choix le plus naturel est alors de considérer le pendant homogénéisé de (6.54), c'est-à-dire

$$[\hat{u}_0]_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad [A_0^* \nabla \hat{u}_0 \cdot \mathbf{e}_1]_\Gamma = 0, \quad (6.57)$$

où nous avons défini

$$A_0^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} a_0 I_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-, \\ A^* & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+. \end{cases} \quad (6.58)$$

En définissant de même

$$\rho_0^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-, \\ \rho^* & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+, \end{cases} \quad (6.59)$$

nous pouvons réécrire de manière compacte notre modèle à l'ordre 0 : trouver $\hat{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$-\nabla \cdot [A_0^* \nabla \hat{u}_0(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho_0^* \hat{u}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (6.60)$$

Notons à ce stade que l'obtention des conditions de transmission (6.57) par le calcul n'a rien d'évident. En effet, injecter l'*ansatz* (6.5) dans les conditions de transmission exacte (6.54) conduit bien à l'ordre 0 pour les traces à $[u_0]_\Gamma = 0$. Cependant, pour les flux nous nous retrouvons, toujours à l'ordre 0, à gauche de Γ avec $a_0 \nabla u_0 \cdot \mathbf{e}_1$ et à droite de Γ avec $a(\cdot/\delta) \nabla \hat{u}_0 \cdot \mathbf{e}_1$, qui n'est pas exactement la deuxième condition de (6.57) en raison du terme oscillant $a(\cdot/\delta)$. Cette difficulté se retrouve également aux ordres supérieurs, à la fois sur la condition portant sur les traces et la condition portant sur les flux.

6.3.3 Présentation des résultats principaux de [47]

Décrivons maintenant les résultats principaux présents dans l'article [47] qui à notre connaissance est le premier et le seul à avoir traité des problèmes de transmission en homogénéisation.

Dans un premier temps, les auteurs considèrent un domaine D borné quelconque (assez régulier et simplement connexe) rempli d'un matériau périodique (qui correspond à notre demi-plan Ω^+) et traitent un problème de transmission similaire à (6.52). Ils cherchent alors à dériver des approximations de la solution exacte u_δ comme nous l'avons fait. Voici les résultats qui sont établis.

- L'approximation \hat{u}_0 d'ordre 0 est bien solution du modèle naïf que nous avons présenté à la section précédente : elle vérifie (6.60) avec les conditions de transmission (6.57).
- Pour construire une approximation d'ordre 1, les correcteurs classiques sont ajoutés dans D : $u_1(\mathbf{x}) = \nabla \hat{u}_0(\cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}/\delta) \mathbf{1}_D(\mathbf{x})$. Comme nous l'avons vu, l'ajout de ces correcteurs fait que les conditions de transmission vérifiées par u_1 ne sont pas claires. Un correcteur d'interface θ_δ (appelé *boundary corrector* dans l'article) est alors introduit afin de compenser la différence, de telle sorte que

$$\|u_\delta - (\hat{u}_0 + \delta u_1 + \delta \theta_\delta)\|_{H^1(B_R)} = \mathcal{O}(\delta), \quad (6.61)$$

où la constante dans le \mathcal{O} est indépendante de δ et où B_R est une boule de rayon $R > 0$ incluant D . Cette estimation est alors utilisée pour montrer que

$$\|u_\delta - (\hat{u}_0 + \delta u_1)\|_{H^1(B_R)} = \mathcal{O}(\delta^{1/2}), \quad (6.62)$$

ce qui confirme que $\hat{u}_0 + \delta u_1$ n'est pas une très bonne approximation de u_δ près de l'interface (erreur en $\delta^{1/2}$ au lieu de δ). À noter que le correcteur θ_δ vit dans le milieu périodique et est aussi, voire davantage, difficile à calculer que la solution exacte.

- Un nouveau correcteur est alors introduit pour l'ordre 2, ce qui permet alors de montrer qu'en fait l'estimation (6.61) peut être améliorée en

$$\|u_\delta - (\hat{u}_0 + \delta u_1 + \delta \theta_\delta)\|_{H^1(B_R)} = \mathcal{O}(\delta^{3/2}), \quad (6.63)$$

en modifiant la définition de θ_δ afin qu'il corrige les conditions de transmission à l'ordre 2.

Dans un deuxième temps, les auteurs s'intéressent à caractériser la limite de θ_δ lorsque δ tend vers 0 dans le cas particulier où D est un rectangle qui est choisi de telle sorte que sa frontière coupe le milieu périodique de la même façon quel que soit δ , pour éviter les problèmes que nous avons décrit à la remarque 6.15. Il est alors démontré que θ_δ converge fortement dans L^2_{loc} vers une limite θ_* . Cette dernière est caractérisée par un problème de transmission posé cette fois-ci dans le milieu homogénéisé (contrairement à θ_δ qui vérifie un problème de transmission dans le milieu périodique). Cependant, aucune estimation d'erreur entre u_δ et $\hat{u}_0 + \delta u_1 + \delta \theta_*$ n'est donnée.

6.3.4 Expériences numériques

Nous allons maintenant faire quelques simulations numériques pour montrer que l'homogénéisation classique n'est pas satisfaisante. Plus précisément, nous allons calculer numériquement la solution exacte u_δ , la solution homogénéisée u_0 ainsi que les approximations

$$u_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \partial_{x_j} u_0(\mathbf{x}) \cdot w_j(\mathbf{x}/\delta) & \text{dans } \Omega^+, \end{cases} \quad (6.64)$$

et

$$u_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \partial_{x_j x_k} u_0(\mathbf{x}) \cdot \theta_{jk}(\mathbf{x}/\delta) & \text{dans } \Omega^+, \end{cases} \quad (6.65)$$

Mentionnons d'emblée que la résolution numérique du problème homogénéisé (6.60) et surtout du problème exact (6.52) est délicate, principalement pour deux raisons : nous sommes en domaine non

borné et que nous sommes en présence de coefficients périodiques, difficultés qui s'additionnent dans Ω^+ pour l'équation exacte (6.52). Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes numériques spécifiques. Celles-ci font l'objet du chapitre 9, nous ne les détaillons pas ici. Nous nous contentons de montrer les différents résultats.

Fixons tout d'abord quelques paramètres. Dans toute la suite, nous prendrons $a_0 = 1$ (la valeur dans Ω^- de a) et $\rho = 1$ (ainsi $\rho^* = 1$ et $\rho_0^* = 1$ sur tout \mathbb{R}^2). Nous prenons comme source f une gaussienne très localisée et centrée en $(-0.2, 0.5)$:

$$f(x_1, x_2) = e^{-100(x_1+0.2)^2 - 100(x_2-0.5)^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.66)$$

Enfin nous considérons comme fréquence $\omega = 2 + 0,01i$.

La première expérience numérique consiste à prendre un coefficient a régulier mais qui n'est pas symétrique :

$$a(y_1, y_2) = (2 + \sqrt{2} \sin 2\pi y_1)(4 + \sqrt{2} \sin 2\pi y_2), \quad (y_1, y_2) \in Y. \quad (6.67)$$

Ce coefficient est représenté à la figure 6.8. Ensuite, pour $\delta = 1$, nous avons représenté à la figure 6.9 la partie réelle de la solution exacte u_δ ainsi que les parties réelles des approximations $u_0 + \delta u_1$ et $u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$. Qualitativement, nous voyons donc que l'homogénéisation a l'air de marcher (même pour une valeur de δ grande). Ensuite, nous avons représenté à la figure 6.10 les parties réelles des différences $u_\delta - u_0$ et $u_\delta - (u_0 + \delta u_1)$ pour plusieurs valeurs de δ . Nous voyons ainsi que l'erreur diminue avec δ , mais qu'elle reste significative près de l'interface Γ et dans le milieu homogène Ω^- , ce qui confirme que l'homogénéisation classique n'arrive pas à décrire correctement le comportement de la solution près de l'interface (cela sera encore plus visible sur la prochaine expérience). Cela montre aussi un autre phénomène spécifique aux problèmes de transmission : l'homogénéisation classique décrit également mal le comportement de la solution dans le milieu homogène. Enfin, à la figure 6.11, nous avons tracé en échelle log-log l'erreur H^1 entre u_δ et $u_0 + \delta u_1$ pour plusieurs valeurs de δ . Nous retrouvons bien la convergence (6.62) en $\delta^{1/2}$ de [47].

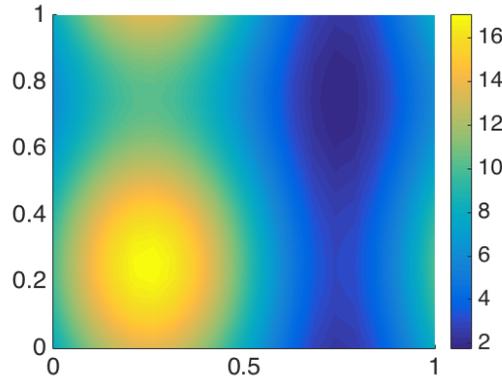


FIGURE 6.8 – Le coefficient périodique $(2 + \sqrt{2} \sin 2\pi y_1)(4 + \sqrt{2} \sin 2\pi y_2)$ pour $(y_1, y_2) \in Y$.

La deuxième expérience numérique consiste à prendre un coefficient périodique moins régulier que le précédent :

$$a(y_1, y_2) = 2 + \mathbf{1}_{y_1+y_2>1}(y_1, y_2), \quad (y_1, y_2) \in Y, \quad (6.68)$$

(plus exactement a est prolongé par périodicité sur tout \mathbb{R}^2). Ce coefficient est représenté à la figure 6.12. L'une des conséquences de ce choix est que le milieu homogénéisé effectif est beaucoup plus anisotrope que lors de l'expérience précédente. Nous avons représenté à la figure 6.13 les parties réelles des différences $u_\delta - u_0$ et $u_\delta - (u_0 + \delta u_1)$ pour plusieurs valeurs de δ . Cela confirme les conclusions de l'expérience précédente, en accentuant même le fait que l'approximation n'est pas bonne proche de l'interface Γ .

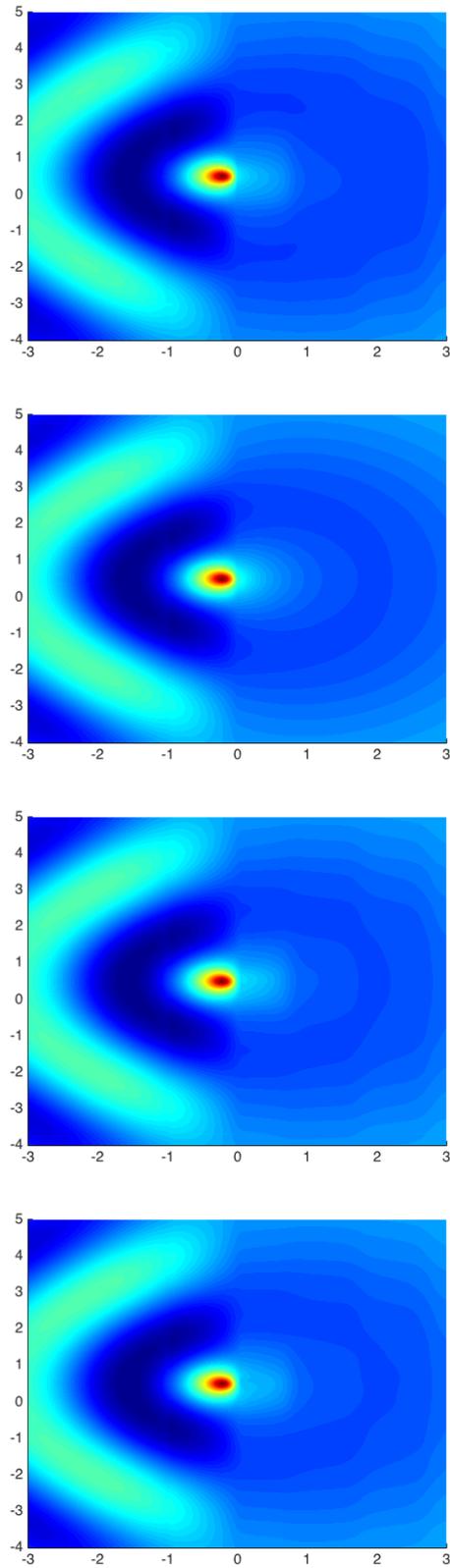


FIGURE 6.9 – Parties réelles de la solution exacte u_δ et des approximations u_0 , $u_0 + \delta u_1$ et $u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$ pour $\delta = 1$ (de haut en bas).

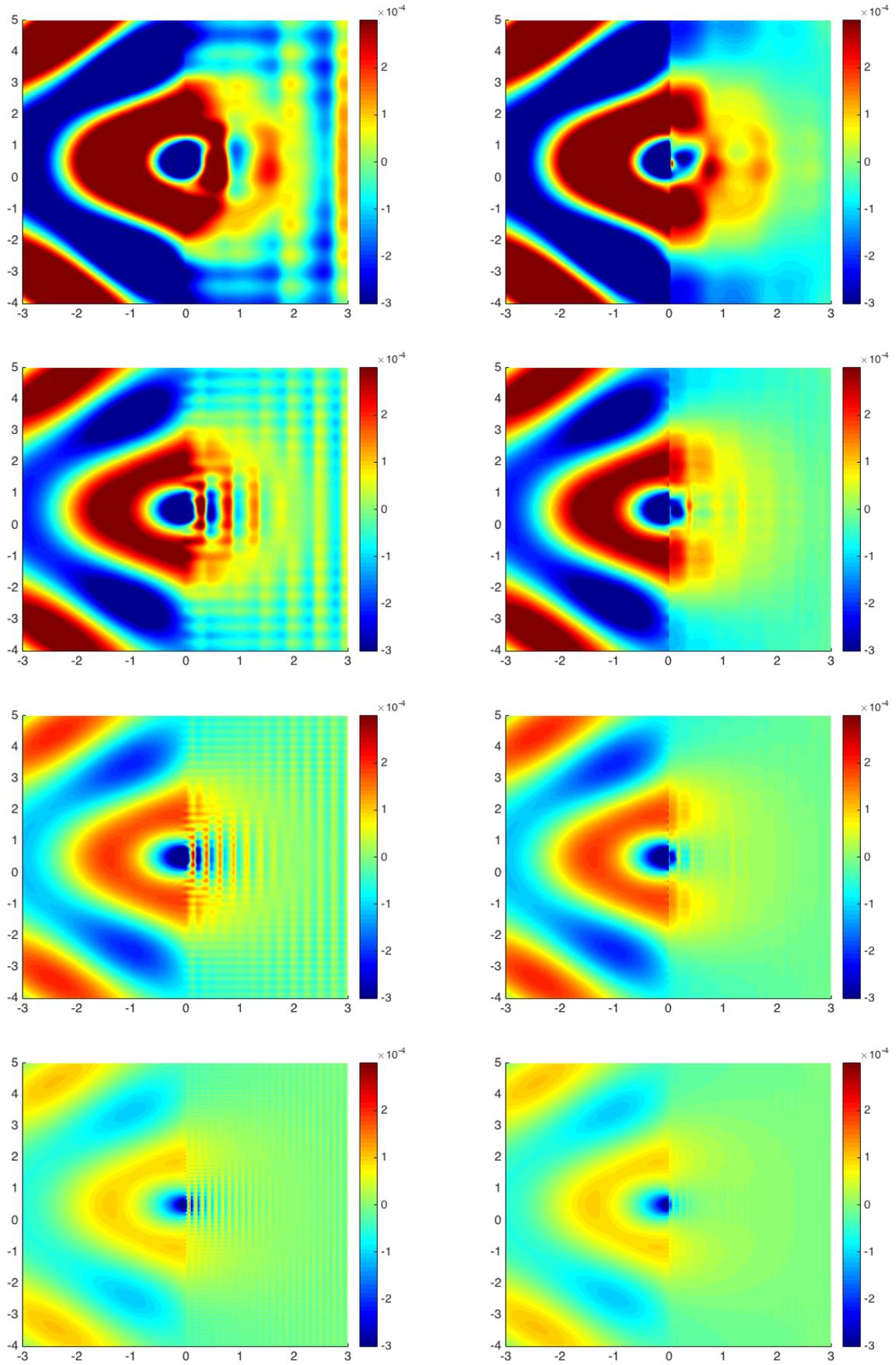


FIGURE 6.10 – Parties réelles de la différence $u_\delta - u_0$ (colonne de gauche) et $u_\delta - (u_0 + \delta u_1)$ (colonne de droite) pour $\delta \in \{1, 0.5, 0.25, 0.125\}$ (de haut en bas).

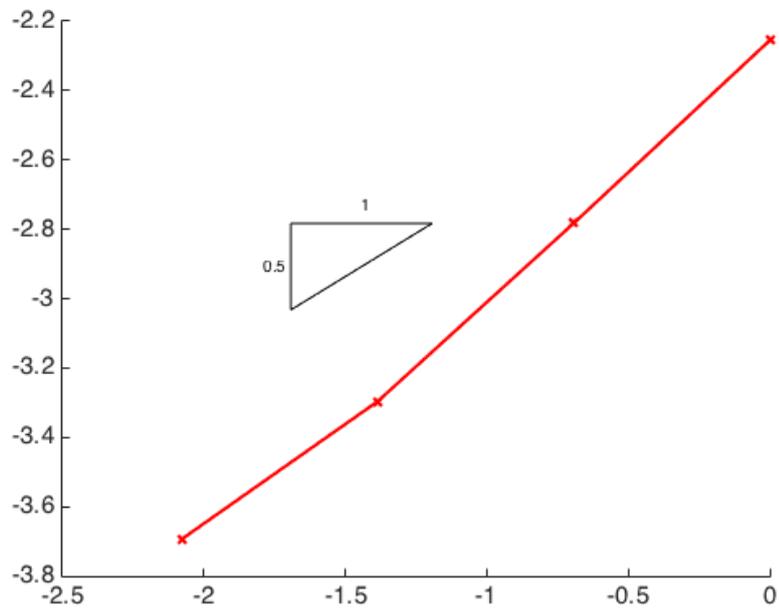


FIGURE 6.11 – Courbe de convergence en échelle log-log de l'erreur H^1 entre la solution exacte u_δ et $u_0 + \delta u_1$.

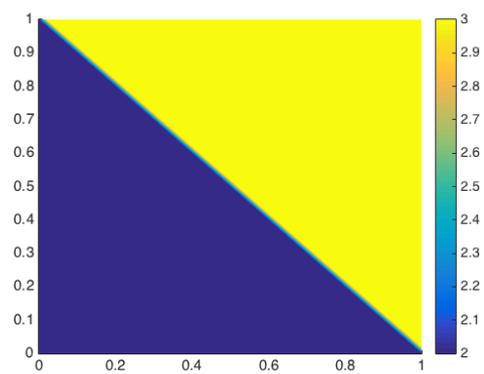


FIGURE 6.12 – Le coefficient $a(y_1, y_2) = 2 + \mathbf{1}_{y_1+y_2>1}(y_1, y_2)$ pour $(y_1, y_2) \in Y$.

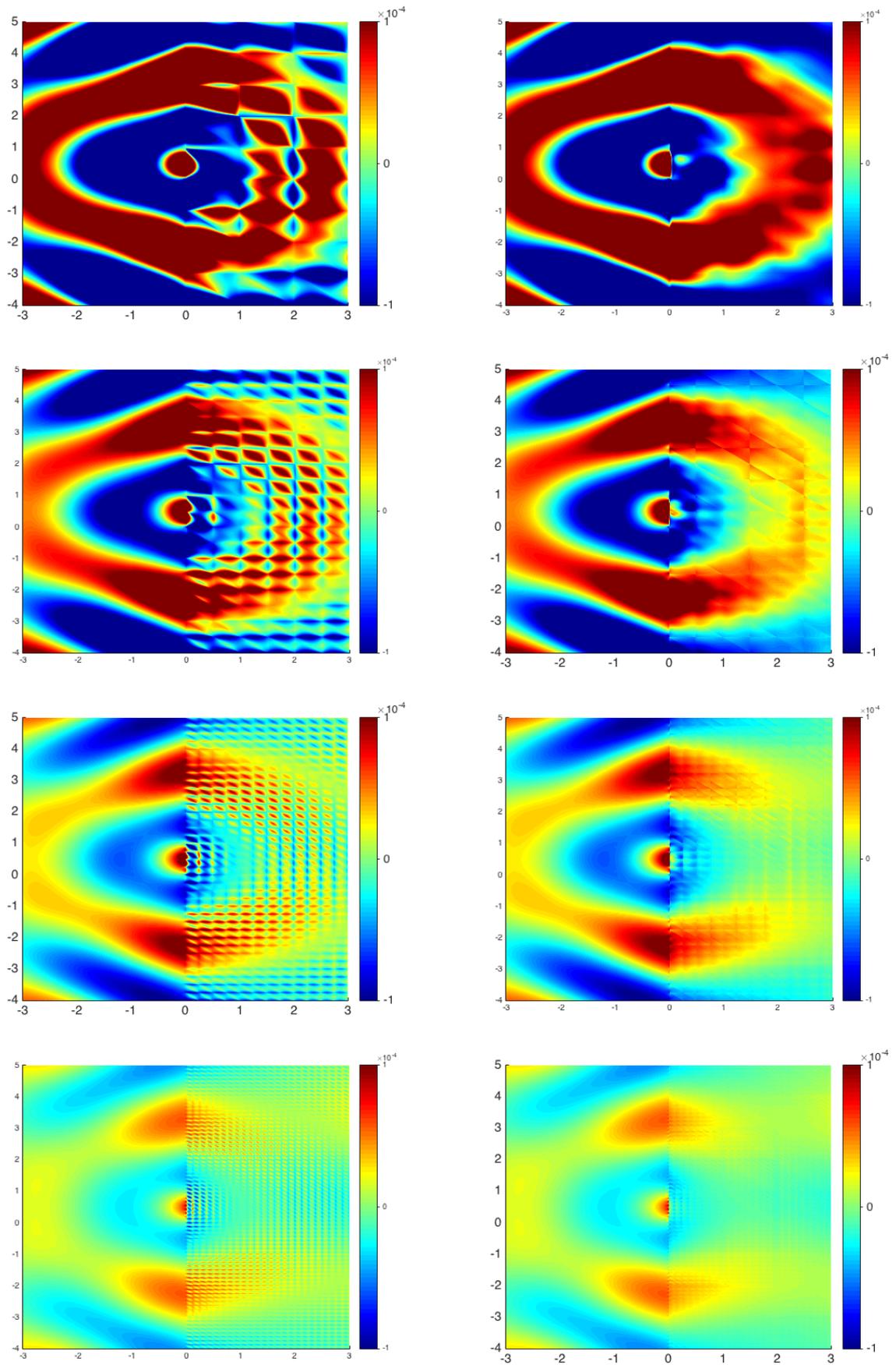


FIGURE 6.13 – Parties réelles de la différence $u_\delta - u_0$ (colonne de gauche) et $u_\delta - (u_0 + \delta u_1)$ (colonne de droite) pour $\delta \in \{1, 0.5, 0.25, 0.125\}$ (de haut en bas).

6.A Annexe : matrices homogénéisées explicites

Nous présentons ici quelques situations où la matrice homogénéisée A^* définie par (6.22) est explicite. Ces exemples sont tirés de [64, 125].

- En dimension $d = 1$, $A^* = \langle 1/A \rangle^{-1}$. Par exemple pour $A(y) = \alpha + \beta \sin(2\pi y)$ avec $\alpha > \beta > 0$, nous obtenons $a^* = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.
- En dimension $d = 2$, pour un milieu stratifié dans la direction y_1 , c'est-à-dire que les a_{ij} ne dépendent que de y_1 , nous avons

$$\begin{cases} a_{11}^* = \langle 1/a_{11} \rangle^{-1}, \\ a_{12}^* = a_{11}^* \left\langle \frac{a_{12}}{a_{11}} \right\rangle, \\ a_{21}^* = a_{11}^* \left\langle \frac{a_{21}}{a_{11}} \right\rangle, \\ a_{22}^* = \langle a_{22} \rangle + \frac{a_{12}^* a_{21}^*}{a_{11}^*} - \left\langle \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \right\rangle. \end{cases} \quad (6.69)$$

En particulier, pour $\alpha_1 > \beta_1 > 0$ et $\alpha_2 > \beta_2 > 0$ et en prenant

$$\begin{cases} a_{11}(\mathbf{y}) = \alpha_1 + \beta_1 \sin(2\pi y_1), \\ a_{12}(\mathbf{y}) = a_{21}(\mathbf{y}) = 0, \\ a_{22}(\mathbf{y}) = \alpha_2 + \beta_2 \sin(2\pi y_1), \end{cases} \quad (6.70)$$

nous obtenons

$$A^* = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1^2 - \beta_1^2} & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

- Toujours en dimension $d = 2$, considérons un damier défini par $A(\mathbf{y}) = a(\mathbf{y})I_2$ avec

$$a(\mathbf{y}) := \begin{cases} c_1 & \text{pour } y_1 \leq 0.5 \text{ et } y_2 \leq 0.5 \\ c_2 & \text{pour } y_1 \leq 0.5 \text{ et } y_2 > 0.5 \\ c_1 & \text{pour } y_1 > 0.5 \text{ et } y_2 \leq 0.5 \\ c_2 & \text{pour } y_1 > 0.5 \text{ et } y_2 > 0.5 \end{cases} \quad (6.72)$$

avec $c_1, c_2 > 0$. Alors $A^* = \sqrt{c_1 c_2} I_2$.

- En dimension d quelconque, considérons A à variable séparées $A(\mathbf{y}) = a_1(y_1)a_2(y_2)\cdots a_d(y_d)I_d$ où les a_i sont 1-périodiques. Alors $A^* = \text{diag}(a_1^*, \dots, a_d^*)$ avec

$$a_i^* = \left(\int_0^1 a_i \right)^{-1} \left\langle \frac{a_1 a_2 \cdots a_d}{a_i} \right\rangle. \quad (6.73)$$

Par exemple, en dimension $d = 2$, pour $\alpha_1 > \beta_1 > 0$ et $\alpha_2 > \beta_2 > 0$ et en prenant

$$\begin{cases} a_1(\mathbf{y}) = \alpha_1 + \beta_1 \sin(2\pi y_1), \\ a_2(\mathbf{y}) = \alpha_2 + \beta_2 \sin(2\pi y_2), \end{cases} \quad (6.74)$$

nous obtenons

$$A^* = \begin{bmatrix} \alpha_2 \sqrt{\alpha_1^2 - \beta_1^2} & 0 \\ 0 & \alpha_1 \sqrt{\alpha_2^2 - \beta_2^2} \end{bmatrix}. \quad (6.75)$$

6.B Annexe : démonstration de la proposition 6.7 via les ondes de Bloch

Comme nous l'avons vu, le résultat de la proposition 6.7 est peu présent dans la littérature sur l'homogénéisation. Nous en avons donné une démonstration directement inspirée de [5, 171] mais nous en avons trouvé une autre qui utilise des résultats sur l'homogénéisation par ondes de Bloch.

L'homogénéisation par ondes de Bloch est une approche alternative à la technique des développements à deux échelles permettant de retrouver la plupart des résultats classiques présentés dans ce chapitre, dont la proposition 6.7. Cette approche n'est valable que lorsque la matrice A est symétrique, ce que nous supposons dans cette partie. Nous renvoyons le lecteur à [6, 73, 74, 241] pour plus de détails sur cette méthode.

Pour $\eta \in \mathbb{R}^N$, considérons $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}^\eta$ l'opérateur de décalage défini par

$$L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}^\eta := - \left(\frac{\partial}{\partial y_j} + i\eta_j \right) \left[a_{jk}(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} + i\eta_k \right) \right], \quad (6.76)$$

c'est-à-dire défini de manière faible par

$$\langle L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}^\eta u, v \rangle_{H^{-1}(Y) \times H^1(Y)} = \int_Y a_{jk}(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} + i\eta_j \right) u(\mathbf{y}) \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y_k} + i\eta_k \right) v(\mathbf{y})} \, d\mathbf{y}, \quad (6.77)$$

pour tout $(u, v) \in H_{\sharp}^1(Y)^2$.

Par symétrie, cet opérateur est auto-adjoint et a de plus une résolvante compacte. Il admet donc une suite de valeurs propres $(\lambda_n^\eta)_{n \geq 1}$ de multiplicité finie et il existe une famille vecteurs propres $(\phi_n^\eta)_{n \geq 1}$ dans $H_{\sharp}^1(Y)$ associés tels que

$$\begin{cases} \lambda_1^\eta \leq \lambda_2^\eta \leq \dots \leq \lambda_n^\eta \leq \dots \rightarrow +\infty \\ (\phi_n^\eta)_{n \geq 1} \text{ est une base orthonormée de } L(Y). \end{cases} \quad (6.78)$$

Concentrons-nous sur la première valeur propre λ_1^η . Nous disposons du résultat de régularité suivant.

Proposition 6.16. *Il existe un voisinage \mathcal{O} de $\eta = 0$ tel que λ_1^η est analytique pour $\eta \in \mathcal{O}$ et il existe un vecteur propre correspondant ϕ_1^η tel que $\eta \in \mathcal{O} \mapsto \phi_1^\eta \in H_{\sharp}^1(Y)$ est analytique.*

Nous considérons donc dans la suite le vecteur propre ϕ_1^η associé à λ_1^η qui est régulier.

Il est clair en prenant $\eta = 0$ dans (6.77) que $\phi_1^\eta|_{\eta=0} = 1$. Nous pouvons aussi montrer que $\lambda_1^\eta = \lambda_1^{-\eta}$ donc toutes ses dérivées d'ordre impair s'annule en $\eta = 0$: pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha|$ est impair nous avons

$$\partial^\alpha \lambda_1^\eta|_{\eta=0} = 0. \quad (6.79)$$

L'étape suivante est de dériver l'équation $(L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\phi_1^\eta = 0$ par rapport à η . Il est utile à ce stade d'écrire l'opérateur de shift $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}\eta$ défini par (6.76) de manière quadratique :

$$L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}\eta = L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} + i\eta_j L_j + \eta_j \eta_k a_{jk}, \quad (6.80)$$

où

$$L_j \phi := a_{jk}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y_k} + \frac{\partial}{\partial y_k} (a_{jk}(y) \phi). \quad (6.81)$$

Premier ordre Dérivons une première fois $(L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\phi_1^\eta = 0$. Nous obtenons

$$\partial_j (L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\phi_1^\eta + (L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_j \phi_1^\eta = 0. \quad (6.82)$$

Puisque $\partial_j \lambda_1^\eta|_{\eta=0} = 0$ d'après (6.79), évaluer (6.82) en $\eta = 0$ conduit à $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}\partial_j \phi_1^\eta|_{\eta=0} = i\partial_{y_k} a_{jk}(y)$. Nous reconnaissons alors le premier problème de cellule (6.15), donc $\partial_j \phi_1^\eta|_{\eta=0} = iw_j$ à une constante près. Il est possible de montrer que cette constante n'intervient pas dans la suite, nous la négligeons donc.

Deuxième ordre Nous obtenons

$$\partial_{jk}(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\phi_1^\eta + \partial_j(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_k\phi_1^\eta + \partial_k(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_j\phi_1^\eta + (L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_{jk}\phi_1^\eta = 0. \quad (6.83)$$

Puisque $\partial_{jk}L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta = 2a_{jk}(y)$, effectuer le produit scalaire au sens L^2 de (6.83) avec ϕ_1^η en $\eta = 0$ et utiliser les résultats précédents conduit à

$$\partial_{ij}\lambda_1^\eta|_{\eta=0} = 2 \int_Y a_{jk}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_Y (L_j w_k + L_k w_j) \, d\mathbf{y} = a_{jk}^* + a_{kj}^* = 2a_{jk}^*, \quad (6.84)$$

par symétrie. En revenant à (6.83), prendre $\eta = 0$ fournit

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\partial_{jk}\phi_1^\eta|_{\eta=0} &= 2(a_{jk} - a_{jk}^*) + L_j w_k + L_k w_j \\ &= 2 \left[a_{jk} - a_{jk}^* + a_{jk}(y) \frac{\partial\phi}{\partial y_k} + \frac{\partial}{\partial y_k} (a_{jk}(y)\phi) \right], \end{aligned} \quad (6.85)$$

en utilisant de nouveau la symétrie des a_{ij} et le fait que $L_j w_k = L_k w_j$. C'est l'équation des problèmes de cellules du deuxième ordre (6.25) (à un facteur 2 près), donc $\partial_{ij}\phi_1^\eta|_{\eta=0} = 2\theta_{ij}$ toujours à une constante près qui n'intervient pas dans la suite et que nous négligerons.

Troisième ordre Nous obtenons

$$\begin{aligned} &\partial_{jkl}(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\phi_1^\eta \\ &+ \partial_{jk}(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_\ell\phi_1^\eta + \partial_{k\ell}(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_j\phi_1^\eta + \partial_{\ell j}(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_k\phi_1^\eta \\ &+ \partial_j(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_{k\ell}\phi_1^\eta + \partial_k(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_{\ell j}\phi_1^\eta + \partial_\ell(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_{jk}\phi_1^\eta \\ &+ (L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_{jkl}\phi_1^\eta = 0. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Une nouvelle fois, prendre le produit scalaire de l'équation ci-dessus avec ϕ_1^η en $\eta = 0$ et utiliser $\partial_{jk}L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta = 0$ ainsi que $\partial_{ijk}\lambda_1^\eta|_{\eta=0}$ (d'après (6.79)) donne

$$\begin{aligned} &\underbrace{\langle \partial_{jk}(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_\ell\phi_1^\eta, \phi_1^\eta \rangle + \langle \partial_{k\ell}(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_j\phi_1^\eta, \phi_1^\eta \rangle + \langle \partial_{\ell j}(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_k\phi_1^\eta, \phi_1^\eta \rangle}_{=\mathcal{A}(j,k,\ell)} \\ &+ \underbrace{\langle \partial_j(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_{k\ell}\phi_1^\eta, \phi_1^\eta \rangle + \langle \partial_k(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_{\ell j}\phi_1^\eta, \phi_1^\eta \rangle + \langle \partial_\ell(L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta - \lambda_1^\eta)\partial_{jk}\phi_1^\eta, \phi_1^\eta \rangle}_{=\mathcal{B}(j,k,\ell)} = 0. \end{aligned} \quad (6.87)$$

En utilisant $\partial_{jk}L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta = 2a_{jk}$, $\partial_{jk}\lambda_1^\eta|_{\eta=0} = 2a_{jk}^*$ et $\partial_j\phi_1^\eta|_{\eta=0} = iw_j$ nous obtenons

$$\mathcal{A}(j, k, \ell) = 2i \int_Y [a_{jk}w_\ell + a_{k\ell}w_j + a_{\ell j}w_k] \, d\mathbf{y}, \quad (6.88)$$

car la moyenne des w_i est nulle. En utilisant maintenant $\partial_jL_{\mathbf{y},\mathbf{y}}^\eta|_{\eta=0} = iL_j$, $\partial_j\lambda_1^\eta|_{\eta=0} = 0$ et $\partial_{jk}\phi_1^\eta|_{\eta=0} = 2\theta_{jk}$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(j, k, \ell) &= 2i \int_Y [L_j\theta_{k\ell} + L_k\theta_{\ell j} + L_\ell\theta_{jk}] \, d\mathbf{y} \\ &= 2i \int_Y \left[a_{jm} \frac{\partial\theta_{k\ell}}{\partial y_m} + a_{km} \frac{\partial\theta_{\ell j}}{\partial y_m} + a_{\ell m} \frac{\partial\theta_{jk}}{\partial y_m} \right] \, d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Im}(\mathcal{A}(j, k, \ell) + \mathcal{B}(j, k, \ell)) &= \int_Y \left[a_{jk}w_\ell + a_{\ell m} \frac{\partial\theta_{jk}}{\partial y_m} + a_{k\ell}w_j + a_{jm} \frac{\partial\theta_{k\ell}}{\partial y_m} + a_{\ell j}w_k + a_{km} \frac{\partial\theta_{\ell j}}{\partial y_m} \right] \, d\mathbf{y} \\ &= c_{jkl} + c_{k\ell j} + c_{\ell k j}. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Or $\mathcal{A}(j, k, \ell) + \mathcal{B}(j, k, \ell) = 0$ d'après (6.87). Nous avons donc

$$c_{jkl} + c_{k\ell j} + c_{\ell k j} = 0, \quad (6.91)$$

pour tout $(i, j, k) \in \{1, \dots, N\}^3$, ce qui implique bien le résultat de la proposition 6.7.

CHAPITRE

7

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDÉS APPLIQUÉS AU PROBLÈME DE TRANSMISSION

Sommaire

7.1	Méthodologie et dérivation des équations	160
7.1.1	Le problème de transmission	160
7.1.2	Termes de champ lointain homogène	161
7.1.3	Termes de champ lointain périodique	162
7.1.4	Termes de champ proche	163
7.1.5	Conditions de raccord formelles	164
7.2	Étude des problèmes vérifiés par les termes de champ proche	166
7.2.1	Cadre variationnel standard et espaces à poids	167
7.2.2	Transformée de Floquet-Bloch dans les espaces à poids	169
7.2.3	Famille d'opérateurs dépendants de la variable de Floquet-Bloch	173
7.2.4	Comportements à l'infini	177
7.2.5	Caractère bien posé dans les espaces à poids	179
7.3	Construction des trois premiers termes de champ proche	181
7.3.1	Construction du terme d'ordre 0	182
7.3.2	Construction du terme d'ordre 1	182
7.3.3	Construction du terme d'ordre 2	184
7.4	Construction des termes de champ lointain	189
7.4.1	Cadre fonctionnel pour les problèmes de champ lointain	189
7.4.2	Problème pour les termes de champ lointain d'ordre 0	190
7.4.3	Problème pour les termes de champ lointain d'ordre 1	191
7.5	Analyse d'erreur	191
7.5.1	Stabilité	192
7.5.2	Consistance	193
7.5.3	Erreur de champ lointain	193
7.5.4	Erreur de raccord	196
7.5.5	Erreur de champ proche	197

7.5.6 Conclusion, corollaire et conjecture	198
7.A Annexe : faisceaux d'opérateurs dépendant polynomialement d'un paramètre	199
7.B Annexe : quelques démonstrations	201

Avec ce chapitre, nous rentrons dans le cœur de cette partie du manuscrit. Rappelons (voir le chapitre précédent, section 6.3) que nous nous intéressons à un problème de transmission entre deux demi-plans, l'un étant un milieu homogène et l'autre un milieu périodique. Puisque la théorie classique de l'homogénéisation ne permet pas de décrire précisément ce qu'il se passe à l'interface entre les deux milieux, nous allons donc devoir recourir à une autre méthode pour analyser plus finement les phénomènes à l'interface.

La technique que nous allons utiliser est celle des développements asymptotiques raccordés. Celle-ci consiste à effectuer des développements asymptotiques, qui peuvent être de natures différentes, dans plusieurs zones, ces développements devant coïncider sur des zones intermédiaires dites zones de raccord. Dans notre cas, nous allons introduire deux développements asymptotiques différents de chaque côté de l'interface. Du côté du milieu périodique, nous utilisons bien entendu les développements double-échelle de l'homogénéisation classique vus au chapitre précédent. Nous effectuons également un troisième développement près de l'interface. Ces trois développements devront alors coïncider sur deux zones de raccord.

Nos travaux diffèrent donc de ceux présents dans [47] et décrits à la section 6.3.3. Nous ne cherchons pas à construire des correcteurs d'interface mais plusieurs développements asymptotiques dans des zones différentes. Notamment, il y a deux nouveautés dans notre approche : (1) un développement asymptotique proche de l'interface et (2) un développement asymptotique dans le milieu homogène.

Signalons tout de même que tout ce qui va être développé dans la suite grâce aux développements asymptotiques raccordés aurait aussi pu l'être en utilisant la méthode des développements multi-échelles (ces deux méthodes sont en fait « équivalentes », voir par exemple [224] où ces deux méthodes sont comparées).

La méthode des développements asymptotiques a d'abord été développée par Van Dyke pour des problèmes de perturbations en mécanique des fluides [226] et a depuis fait l'objet de très nombreux travaux, que ce soit pour la formaliser et l'étudier (voir par exemple les ouvrages [122, 165]) ou l'utiliser pour des problèmes de mathématiques appliquées. Sans être exhaustif, mentionnons quelques travaux proches de notre thématique, comme la dérivation de conditions limites approchées pour la diffraction par un obstacle fortement conducteur ou recouvert d'une couche mince conductrice [15, 48, 110, 111, 112] ou la diffraction d'ondes par des fentes, des fils minces ou des petits obstacles [66, 130, 131, 132, 164]. Enfin les travaux concernant la diffraction par un obstacle rugueux ou recouvert par une couche mince périodique [1, 54, 194] ou les conditions de transmission approchées pour la diffraction par des couches minces (périodiques ou non) [67, 84, 85, 86, 203] sont assez proches dans l'esprit de ce que nous allons faire.

L'étude que nous allons poursuivre se divise en trois chapitres. Celui-ci, le premier, est consacré à l'étude des différents développements asymptotiques que nous allons considérer, à leur raccord et à analyser l'erreur entre ces développements et la solution exacte. Le second est consacré à la dérivation de conditions de transmission d'ordre élevé. Enfin, le troisième est dévolu au calcul numérique de ces conditions et de la solution approchée.

7.1 Méthodologie et dérivation des équations

7.1.1 Le problème de transmission

Nous reprenons exactement le problème de transmission du chapitre précédent, section 6.3.1. Rappelons juste ici qu'il s'agit d'un problème de transmission entre deux demi-plans $\Omega^\pm := \mathbb{R}_\pm^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ séparés par une interface $\Gamma := \{0\} \times \mathbb{R}$ qui s'écrit

$$-\nabla \cdot \left[a \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \nabla u_\delta(\mathbf{x}) \right] - \omega^2 \rho \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) u_\delta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (7.1)$$

où $f \in L^2(\mathbb{R})$ est un terme source à support compact inclus dans Ω^- et où a et ρ sont des fonctions décrites à la section 6.3.1 (voir également la figure 6.7).

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il n'est pas possible d'utiliser le développement asymptotique double-échelle de l'homogénéisation qui serait valide dans tout le domaine. Nous allons donc introduire plusieurs développements asymptotiques de la solution u_δ dans différentes zones. Tout d'abord, nous allons reprendre le développement double-échelle qui décrira le comportement de la solution loin de l'interface à droite. Nous l'appelons *champ lointain périodique*. Nous introduisons également un autre développement asymptotique qui décrit le comportement de la solution loin de l'interface à gauche qui ne fera intervenir qu'une seule échelle. Nous l'appelons *champ lointain homogène*. Enfin, un dernier développement asymptotique est également introduit afin de décrire le comportement de la solution proche de l'interface Γ . Nous l'appelons *champ proche*. Bien entendu, ce développement ne dépendra pas de la même façon de la variable longitudinale x_1 et de la variable transverse x_2 . Nous renvoyons à la figure 7.1 pour visualiser les différentes zones de ces développements. Enfin, comme tous ces développements sont censés décrire le comportement d'une seule et même fonction, ils doivent vérifier des conditions de raccord dans des zones intermédiaires.

Nous allons maintenant décrire précisément les trois développements asymptotiques et nous allons donner les équations vérifiées par les différents termes de ces développements. Insistons sur le fait que ces calculs seront formels (notamment au niveau des inversions série/dérivée) et notre démarche sera justifiée *a posteriori* par une estimation d'erreur.

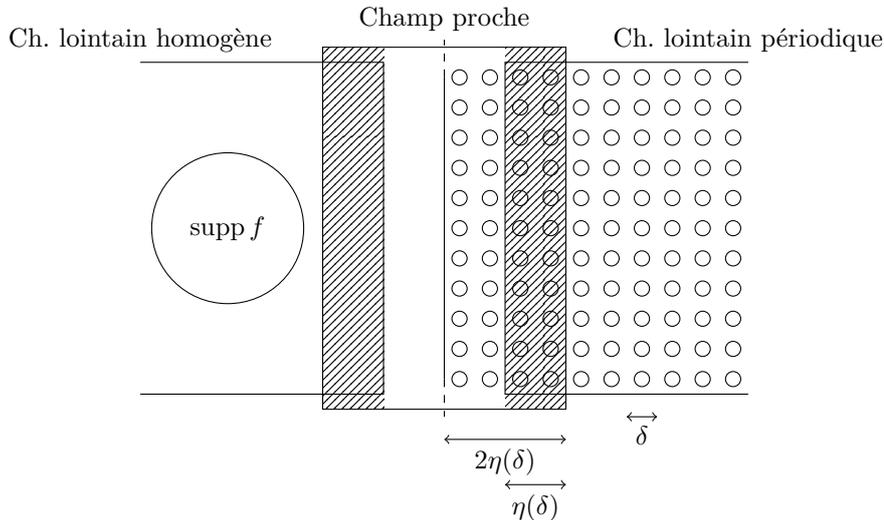


FIGURE 7.1 – Les différentes zones de champ lointain, de champ proche et de raccords (en hachuré)

7.1.2 Termes de champ lointain homogène

Comme annoncé plus haut, nous allons introduire un développement dans la zone homogène Ω_- . Dans cette zone, loin de l'interface (nous préciserons dans une section ultérieure ce que l'on entend par « loin »), nous postulons un simple développement en puissance entière de la forme

$$u_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k u_k^-(\mathbf{x}), \quad u_k^- \in H^1(\Omega^-). \quad (7.2)$$

Pour $k \geq 0$, la fonction u_k^- est appelée *terme de champ lointain homogène à l'ordre k* .

En substituant u_δ dans (7.1) par (7.2) puis en identifiant (formellement) les puissances de δ , nous

obtenons directement la famille d'équations

$$-a_0 \Delta u_k^- - \omega^2 \rho_0 u_k^- = \begin{cases} f & \text{pour } k = 0, \\ 0 & \text{pour } k \geq 1, \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_-. \quad (7.3)$$

Ces équations ne suffisent évidemment pas à déterminer entièrement les u_k^- : il manque des conditions sur Γ qui seront fournies par les conditions de raccord.

Nous supposons que chacun de ces termes est suffisamment régulier proche de l'interface, ce qui sera justifié *a posteriori*.

7.1.3 Termes de champ lointain périodique

La zone périodique Ω^+ relève de la théorie de l'homogénéisation décrite au chapitre précédent. Nous faisons donc l'*ansatz* classique dans la méthode d'homogénéisation double-échelle :

$$u_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k u_k^+ \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right), \quad u_k^+ \in H^1(\Omega^+ \times Y), \quad (7.4)$$

où les u_k^+ sont périodiques par rapport à la variable rapide $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\delta$. L'*ansatz* ci-dessus vaudra uniquement loin de l'interface (ici encore, la notion de « loin » sera précisée plus tard). Pour $k \geq 0$, la fonction u_k^+ est qualifiée de *terme de champ lointain périodique à l'ordre k*.

L'étude de ces différents termes a déjà été faite au chapitre précédent pour les trois premiers termes u_0^+ , u_1^+ et u_2^+ . Rappelons ici les principaux résultats.

- Le champ u_0^+ ne dépend pas de la variable rapide \mathbf{y} : $u_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{u}_0^+(\mathbf{x})$. Le champ \hat{u}_0^+ est solution de l'équation homogénéisée (voir (6.21)) donnée par

$$-\nabla \cdot [A^* \nabla \hat{u}_0^+(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+, \quad (7.5)$$

où $\rho^* = \int_Y \rho$ et où $A^* = (a_{ij}^*)$ est la matrice homogénéisée définie par (6.22) et qui, puisque a est une fonction scalaire, s'écrit plus simplement ici comme

$$a_{ij}^* = \int_Y a(\mathbf{y}) (\partial_{y_i} w_j(\mathbf{y}) + \delta_{ij}) \, d\mathbf{y}, \quad (7.6)$$

où les w_j sont les deux solutions des problèmes de cellules (6.15) s'écrivant ici

$$w_j \in \dot{H}_\#^1(Y) \quad \text{telle que} \quad L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} w_j = \partial_{y_j} a. \quad (7.7)$$

Ici, $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} u = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (a \nabla_{\mathbf{y}} u)$. Rappelons que la matrice homogénéisée A^* est symétrique définie positive et que $\rho^* > 0$ (voir la proposition 6.5).

- Le champ u_1^+ s'écrit

$$u_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{y}) + \hat{u}_1^+(\mathbf{x}), \quad (7.8)$$

avec $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ et où \hat{u}_1^+ le champ moyenné indépendant de \mathbf{y} solution de l'équation homogénéisée

$$-\nabla \cdot [A^* \nabla \hat{u}_1^+(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1^+(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+. \quad (7.9)$$

Le fait que le second membre de cette équation soit nul est justifié par la proposition 6.7.

- Le champ u_2^+ s'écrit

$$u_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\Theta(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0^+(\mathbf{x})) + \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_1^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{y}) + \omega^2 \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{y}) + \hat{u}_2^+(\mathbf{x}), \quad (7.10)$$

où \hat{u}_2^+ est le champ moyenné de u_2 indépendant de \mathbf{y} , où $\Theta = (\theta_{ij})$ avec θ_{ij} sont les quatre solutions des problèmes de cellules (6.25) s'écrivant ici

$$\theta_{ij} \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \quad \text{telle que} \quad L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\theta_{ij} = a\partial_{y_j}w_i + \partial_{y_j}(aw_i) + \delta_{ij}a - a_{ij}^*, \quad (7.11)$$

et où γ est solution du problème de cellule

$$\gamma \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \quad \text{telle que} \quad L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\gamma = \rho - \rho^*, \quad (7.12)$$

Remarque 7.1. Puisque a est scalaire, nous avons $\theta_{12} = \theta_{21}$.

Les deux équations homogénéisées (7.5) et (7.9) ne suffisent pas à déterminer entièrement les termes de champ lointain périodique \hat{u}_0^+ , \hat{u}_1^+ et \hat{u}_2^+ , il manque des conditions sur Γ qui seront fournies grâce aux conditions de raccord.

Nous supposons que chacun de ces termes est suffisamment régulier proche de l'interface, ce qui sera justifié *a posteriori*.

Remarque 7.2. Nous ne donnons pas l'équation homogénéisée pour le champ moyenné \hat{u}_2^+ car nous n'allons faire que l'étude à l'ordre 1 dans la suite.

7.1.4 Termes de champ proche

Proche de l'interface Γ (la notion de « proche » sera précisée plus tard), nous cherchons à approcher le champ exact u_δ en postulant un développement de la forme

$$u_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k U_k \left(x_2, \frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta} \right), \quad (7.13)$$

où les U_k sont 1-périodiques par rapport à la troisième variable $y_2 = x_2/\delta$ mais pas par rapport à la deuxième variable $y_1 = x_1/\delta$. Ainsi, ces fonctions vivent sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,1)$ en les identifiant à leur restriction à une période. Pour $k \geq 0$, la fonction U_k est appelée *terme de champ proche à l'ordre k* .

Injectons maintenant le développement en champ proche (7.13) de u_δ dans l'équation (7.1). Nous obtenons alors des calculs très proches de ceux effectués pour le champ lointain périodique, formellement cela revient à remplacer l'opérateur $\nabla_{\mathbf{x}}$ par $(0, \partial_{x_2})^T$ car les termes de champ proche sont indépendants de x_1 . En d'autres termes, la règle de dérivation (6.7) devient ici

$$\nabla \left[v \left(x_2, \frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta} \right) \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_{x_2} v \end{bmatrix} (x_2, \mathbf{y}) + \frac{1}{\delta} \nabla_{\mathbf{y}} v (x_2, \mathbf{y}). \quad (7.14)$$

Nous obtenons alors une cascade d'équations proches de (6.10) :

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U_0 &= 0 \\ L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U_1 + \tilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}U_0 &= 0 \\ L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U_2 + \tilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}U_1 + \tilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}U_0 &= 0 \\ &\vdots \\ L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U_{n+2} + \tilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}U_{n+1} + \tilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}U_n &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7.15)$$

où nous définissons

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}u := -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (a\nabla_{\mathbf{y}}u), \\ \tilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}u := -\partial_{x_2}(a\partial_{y_2}u) - \partial_{y_2}(a\partial_{x_2}u), \\ \tilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}u := -\partial_{x_2}^2 u - \omega^2 \rho u. \end{cases} \quad (7.16)$$

Aux équations (7.15), il faut ajouter une condition : les U_k sont 1-périodiques par rapport à y_2 . Ainsi, ces équations sont posées dans la bande infinie $B := \mathbb{R} \times (0, 1)$, en considérant que x_2 joue le rôle d'un paramètre.

Le cadre fonctionnel adéquat pour les équations de (7.15) n'est pas évident à définir. Nous allons en fait voir qu'il est nécessaire d'autoriser des comportements croissants des U_k lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$ afin de pouvoir effectuer le raccord. Comme pour les termes de champ lointain, les équations (7.15) ne suffisent pas à caractériser entièrement les différents termes, les conditions manquantes seront fournies grâce aux conditions de raccord.

7.1.5 Conditions de raccord formelles

Nous avons défini à ce stade trois développements asymptotiques, pour l'instant indépendants, de la solution. Puisqu'ils décrivent le comportement d'une seule et unique fonction u_δ , nous devons faire coïncider ces différents développements dans des zones de raccord. Il y en aura deux : une à gauche de l'interface qui fera coïncider le champ lointain homogène et le champ proche et une à droite de l'interface qui fera coïncider le champ lointain périodique et le champ proche. Pour les champs lointains, ces zones de raccord correspondent à des zones où \mathbf{x} est proche de Γ , c'est-à-dire x_1 proche de 0. Pour le champ proche, ces zones correspondent par contre à des zones où x_1/δ est grand.

Afin de formaliser ceci, introduisons une fonction $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\eta(\delta) \xrightarrow[\delta \searrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\eta(\delta)}{\delta} \xrightarrow[\delta \searrow 0]{} +\infty. \quad (7.17)$$

La zone de champ proche est alors définie par $(-2\eta(\delta), 2\eta(\delta))$ et les deux zones de raccord à gauche et à droite respectivement par $(-2\eta(\delta), -\eta(\delta))$ et $(\eta(\delta), 2\eta(\delta))$. Les propriétés (7.17) expriment bien le fait que les zones de raccord vont correspondre, pour le champ proche à des zones où $y_1 = x_1/\delta$ est grand, et pour les champs lointains à des zones où x_1 est petit (proche de 0).

7.1.5.1 Développement des termes de champ lointain au voisinage de l'interface

Puisque les zones de raccord sont proches de Γ , nous devons comprendre le comportement des termes de champ lointain au voisinage de cette interface. En supposant que les termes de champ lointain sont assez réguliers proche de Γ , nous allons bien entendu utiliser des développements de Taylor.

Pour les termes de champ lointain homogène dans Ω^- avec x_1 proche de Γ nous avons

$$\begin{aligned} u_0^-(\mathbf{x}) + \delta u_1^-(\mathbf{x}) + \delta^2 u_2^-(\mathbf{x}) &= u_0^-|_\Gamma(x_2) + x_1 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma(x_2) + \frac{x_1^2}{2} \partial_{x_1 x_1}^2 u_0^-|_\Gamma(x_2) + \mathcal{O}(x_1^3) \\ &+ \delta [u_1^-|_\Gamma(x_2) + x_1 \partial_{x_1} u_1^-|_\Gamma(x_2) + \mathcal{O}(x_1^2)] \\ &+ \delta^2 [u_2^-|_\Gamma(x_2) + \mathcal{O}(x_1)]. \end{aligned} \quad (7.18)$$

En substituant $x_1 = \delta y_1$ et en regroupant les puissances de δ , nous obtenons

$$u_0^-(\mathbf{x}) + \delta u_1^-(\mathbf{x}) + \delta^2 u_2^-(\mathbf{x}) = q_0^-(x_2) + \delta q_1^-(x_2, y_1) + \delta^2 [q_2^-(x_2, y_1) + \mu_2^-(x_2, y_1)] + \mathcal{O}(\delta^3), \quad (7.19)$$

où nous avons posé

$$\begin{cases} q_0^-(x_2) := u_0^-|_\Gamma(x_2), \\ q_1^-(x_2, y_1) := u_1^-|_\Gamma(x_2) + y_1 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma(x_2), \\ q_2^-(x_2, y_1) := u_2^-|_\Gamma(x_2) + y_1 \partial_{x_1} u_1^-|_\Gamma(x_2) \\ \mu_2^-(x_2, y_1) := \frac{y_1^2}{2} \partial_{x_1 x_1}^2 u_0^-|_\Gamma(x_2). \end{cases} \quad (7.20)$$

Pour les termes de champ lointain périodique, nous avons également, en considérant dans un premier temps seulement les termes moyennés :

$$\begin{aligned} \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) + \delta \hat{u}_1^+(\mathbf{x}) + \delta^2 \hat{u}_2^+(\mathbf{x}) &= \hat{u}_0^+|_{\Gamma}(x_2) + x_1 \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_{\Gamma}(x_2) + \frac{x_1^2}{2} \partial_{x_1}^2 \hat{u}_0^+|_{\Gamma}(x_2) + \mathcal{O}(x_1^3) \\ &+ \delta [\hat{u}_1^+|_{\Gamma}(x_2) + x_1 \partial_{x_1} \hat{u}_1^+|_{\Gamma}(x_2) + \mathcal{O}(x_1^2)] \\ &+ \delta^2 [\hat{u}_2^+|_{\Gamma}(x_2) + \mathcal{O}(x_1)]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Or les termes de champ lointain périodique vérifient

$$\begin{aligned} u_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta u_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta^2 u_2^+(\mathbf{x}) &= \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) + \delta [\nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{y}) + \hat{u}_1^+(\mathbf{x})] \\ &+ \delta^2 [\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\Theta(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0^+(\mathbf{x})) + \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_1^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{y}) \\ &+ \omega^2 \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{y}) + \hat{u}_2^+(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

En utilisant le développement ci-dessus et la substitution $x_1 = \delta y_1$, nous obtenons donc

$$\begin{aligned} u_0^+(\mathbf{x}) + \delta u_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta^2 u_2^+(\mathbf{x}) &= q_0^+(x_2) + \delta [q_1^+(x_2, \mathbf{y}) + \mu_1^+(\mathbf{y}, x_2)] \\ &+ \delta^2 [q_2^+(x_2, \mathbf{y}) + \mu_2^+(\mathbf{y}, x_2)] + \mathcal{O}(\delta^3), \end{aligned} \quad (7.23)$$

où nous avons posé

$$\begin{cases} q_0^+(x_2) := \hat{u}_0^+|_{\Gamma}(x_2), \\ q_1^+(x_2, \mathbf{y}) := \hat{u}_1^+|_{\Gamma}(x_2) + (y_1 + w_1(\mathbf{y})) \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_{\Gamma}(x_2), \\ \mu_1^+(x_2, \mathbf{y}) := \partial_{x_2} \hat{u}_0^+|_{\Gamma}(x_2) w_2(\mathbf{y}), \\ q_2^+(x_2, \mathbf{y}) := \hat{u}_2^+|_{\Gamma}(x_2) + (y_1 + w_1(\mathbf{y})) \partial_{x_1} \hat{u}_1^+|_{\Gamma}(x_2), \\ \mu_2^+(\mathbf{y}, x_2) := w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_2} \hat{u}_1^+|_{\Gamma}(x_2) + \left[\frac{y_1^2}{2} + y_1 w_1(\mathbf{y}) + \theta_{11}(\mathbf{y}) \right] \partial_{x_1 x_1}^2 \hat{u}_0^+|_{\Gamma} \\ \quad + (2\theta_{12}(\mathbf{y}) + y_1 w_2(\mathbf{y})) \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^+|_{\Gamma} + \theta_{22}(\mathbf{y}) \partial_{x_2 x_2}^2 \hat{u}_0^+|_{\Gamma} \\ \quad + \omega^2 \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{y}). \end{cases} \quad (7.24)$$

Remarquons que nous avons utilisé le fait que $\theta_{12} = \theta_{21}$ (d'où la présence du terme en $2\theta_{12}$ dans μ^+).

7.1.5.2 Raccordement formel

Si nous voulons que le développement en champ lointain homogène et en champ proche coïncident, il faut nécessairement que le comportement pour x_1 petit des termes de champ lointain homogène donné par (7.19) coïncide avec le comportement lorsque x_1/δ est grand des termes de champ proche. Plus précisément, en identifiant (formellement) les puissances de δ de (7.13) et (7.19), nous devons donc imposer que

$$\begin{cases} U_0(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} q_0^-(x_2), \\ U_1(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} q_1^-(x_2, y_1), \\ U_2(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} q_2^-(x_2, y_1) + \mu_2^-(x_2, y_1), \end{cases} \quad (7.25)$$

où q_0^- , q_1^- , q_2^- et μ_2^- sont définis par (7.20). En particulier, nous voyons qu'il est nécessaire d'autoriser pour les termes de champ proche des comportements polynomialement croissants lorsque y_1 tend vers $-\infty$.

En faisant de même pour le comportement pour x_1 petit des termes de champ lointain périodique donné par (7.23), nous devons imposer que

$$\begin{cases} U_0(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} q_0^+(x_2), \\ U_1(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} q_1^+(x_2, y_1) + \mu_1^+(\mathbf{y}, x_2) \\ U_2(x_1, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} q_2^+(x_2, y_1) + \mu_2^+(\mathbf{y}, x_2), \end{cases} \quad (7.26)$$

où q_0^+ , q_1^+ , μ_1^+ , q_2^+ et μ_2^+ sont définis par (7.24). De même que précédemment, cela montre la nécessité d'autoriser pour les termes de champ proche des comportements polynômialement croissants, mais également oscillants (dus à la présence de termes dépendant des problèmes de cellule) lorsque y_1 tend vers $+\infty$.

À ce stade, il faut donc donner un cadre fonctionnel pour traiter les équations de termes de champ proche (7.15) qui autorise ces comportements croissants à l'infini pour les termes de champ proche. C'est l'objet de la section suivante.

7.1.5.3 Développement global de la solution

Terminons cette section en expliquant comment proposer un développement global de u_δ . Nous introduisons trois fonctions de troncature $\psi^\pm, \chi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe \mathcal{C}^∞ où

$$\psi^+(t) := \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 2, \\ 0 & \text{pour } t \leq 1, \end{cases} \quad \psi^-(t) := \begin{cases} 1 & \text{pour } t \leq -2, \\ 0 & \text{pour } t \geq -1, \end{cases} \quad \text{et } \chi := 1 - (\psi^- + \psi^+). \quad (7.27)$$

Ces fonctions sont représentées sur la figure 7.2.

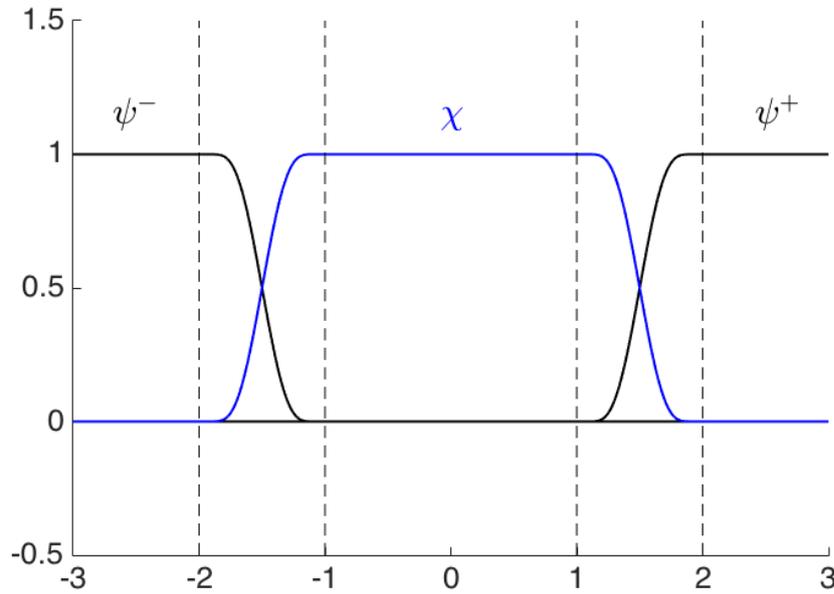


FIGURE 7.2 – Les fonctions ψ^\pm (en noir) et la fonction χ (en bleu).

Le développement global de u_δ est alors donné par

$$u_\delta(\mathbf{x}) = \psi_\delta^-(x_1) \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k u_k^-(\mathbf{x}) + \chi_\delta(x_1) \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k U_k \left(x_2, \frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta} \right) + \psi_\delta^+(x_1) \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k u_k^+ \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right), \quad (7.28)$$

avec $\psi_\delta^\pm(x_1) := \psi^\pm(x_1/\eta(\delta))$ et $\chi_\delta(x_1) := \chi(x_1/\eta(\delta))$.

7.2 Étude des problèmes vérifiés par les termes de champ proche

Nous souhaitons maintenant étudier les équations (7.15) caractérisant les termes de champ proche U_k . Dans celles-ci, la variable x_2 joue le rôle d'un paramètre, c'est pourquoi les problèmes que nous étudions dans cette section ne la font pas intervenir. Nous nous concentrons donc ici sur des problèmes de la

forme : « trouver u périodique par rapport à y_2 tel que $-\nabla \cdot (a\nabla u) = g$ » posés dans la bande infinie $B = \mathbb{R} \times (0, 1)$ (voir la figure 7.3). Comme nous l'avons vu lors du raccord formel à la section 7.1.5, nous souhaitons notamment caractériser le comportement à l'infini de telles solutions.

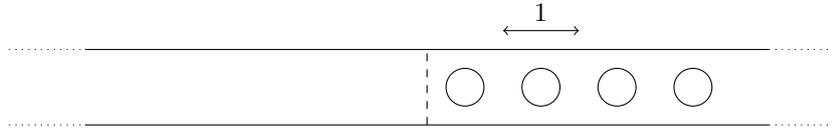


FIGURE 7.3 – La géométrie du problème dans la bande B

Remarquons ici tout de suite une difficulté propre à notre problème. Dans des travaux précédents concernant les couches minces (par exemple [54, 67, 84, 85, 86]), le milieu considéré est homogène en dehors d'un domaine borné. Dans ce cas, il est possible de faire des calculs complètement analytiques, par exemple en développant la solution en série de Fourier. Dans notre cas, le coefficient a est périodique dans toute la partie droite. Nous ne pouvons donc nous plus attendre à une représentation explicite, ce qui va nous obliger à recourir à des outils plus théoriques.

Cette section étant relativement longue et dense, nous annonçons son plan : dans la section 7.2.1, nous allons donner les espaces fonctionnels qui nous serviront pour attaquer le problème (espaces à poids). À la section 7.2.2, nous allons présenter la transformée de Floquet-Bloch, transformée adaptée aux problèmes avec des coefficients périodiques, et son adaptation aux espaces à poids qui nous permet de réduire notre problème à une famille de problèmes dépendant d'un paramètre ξ . La section suivante 7.2.3 étudie ces problèmes, notamment le comportement des solutions autour $\xi = 0$. Cela permet alors de caractériser précisément le comportement à l'infini des solutions du problème $-\nabla \cdot (a\nabla u) = g$, ce qui est fait à la section 7.2.4. Enfin, la dernière section 7.2.5 présente des résultats d'existence et d'unicité qui seront utiles pour construire rigoureusement les termes de champ proche dans la suite.

7.2.1 Cadre variationnel standard et espaces à poids

Une première question naturelle à propos des problèmes (7.15) est de savoir s'ils sont bien posés. Il existe un cadre variationnel relativement standard pour les problèmes de cette forme pour lequel des résultats d'existence-unicité des solutions sont déjà établis.

Nous définissons l'espace fonctionnel $\mathcal{V}(B)$ comme un espace de Sobolev à poids s'interprétant comme l'espace des fonctions de $H_{\text{loc}}^1(B)$ bornées en $y_1 = \pm\infty$ et périodiques par rapport à y_2 . Plus précisément, $\mathcal{V}(B)$ est défini comme le complété de l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(B)$ à support compact en y_1 et 1-périodique en y_2 pour la norme à poids

$$\|v\|_{\mathcal{V}(B)}^2 := \int_B |\nabla v(\mathbf{y})|^2 + \frac{|v(\mathbf{y})|^2}{1 + |\mathbf{y}|^2} d\mathbf{y}, \quad (7.29)$$

qui en fait donc un espace de Banach.

Grâce à l'inégalité de Hardy [199, §7.1.1], nous pouvons montrer que, pour toute forme linéaire $\Phi: \mathcal{V}(B) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\Phi(1) = 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in \mathcal{V}(B)$ nous ayons

$$\|v\|_{\mathcal{V}(B)}^2 \leq |\Phi(v)|^2 + C \int_B |\nabla v|^2 d\mathbf{y}. \quad (7.30)$$

En particulier, $(u, v) \mapsto \Phi(u)\Phi(\bar{v}) + \int_B a\nabla u \cdot \nabla \bar{v} d\mathbf{y}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{V}(B)$ équivalent au produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}(B)}$. Le théorème de Riesz appliqué à ce produit scalaire fournit un résultat d'existence et d'unicité :

Lemme 7.3. *Soit $\Phi: \mathcal{V}(B) \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que $\Phi(1) = 1$. Pour tout $g \in \mathcal{V}(B)^*$, il existe un unique élément $u \in \mathcal{V}(B)$ tel que $\Phi(u)\Phi(v) + \int_B a\nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{y} = \langle g, v \rangle$ pour tout $v \in \mathcal{V}(B)$ vérifiant*

$\Phi(u) = \langle g, 1 \rangle$. En particulier, si $\langle g, 1 \rangle = 0$, alors il existe un unique élément $u \in \mathcal{V}(B)$ tel que $\Phi(u) = 0$ et $\int_B a \nabla u \nabla v \, d\mathbf{y} = \langle g, v \rangle$ pour tout $v \in \mathcal{V}(B)$.

Malheureusement, ce cadre variationnel est trop restrictif parce qu'il ne permet pas de considérer des solutions qui ne sont pas bornées à l'infini. Or nous avons vu lors du raccord formel (section 7.1.5) que les terme de champ proche doivent pouvoir croître à l'infini. Il faut donc considérer un cadre fonctionnel plus large.

Dans cette optique, nous nous servons de la théorie de Kondratiev [139] utilisant des espaces à poids. Introduisons donc pour $k \in \{0, 1\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ les espaces $V_\beta^k(B)$ définis comme les complétés de l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(B)$ à support compact en y_1 et 1-périodique en y_2 pour les normes à poids

$$\begin{cases} \|u\|_{V_\beta^0(B)}^2 := \|e^{-2\pi\beta y_1} u(\mathbf{y})\|_{L^2(B)}^2, \\ \|u\|_{V_\beta^1(B)}^2 := \|e^{-2\pi\beta y_1} u(\mathbf{y})\|_{L^2(B)}^2 + \|e^{-2\pi\beta y_1} \nabla u(\mathbf{y})\|_{L^2(B)}^2. \end{cases} \quad (7.31)$$

Nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_\beta^0}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_\beta^1}$ les produits scalaires canoniques associés respectivement à $\|\cdot\|_{V_\beta^0(B)}$ et $\|\cdot\|_{V_\beta^1(B)}$:

$$\langle u, v \rangle_{V_\beta^0} := \langle e^{-2\pi\beta y_1} u(\mathbf{y}), e^{-2\pi\beta y_1} v(\mathbf{y}) \rangle_{L^2(B)}, \quad (u, v) \in V_\beta^1(B)^2, \quad (7.32)$$

et

$$\langle u, v \rangle_{V_\beta^1} := \langle e^{-2\pi\beta y_1} u(\mathbf{y}), e^{-2\pi\beta y_1} v(\mathbf{y}) \rangle_{L^2(B)} + \langle e^{-2\pi\beta y_1} \nabla u(\mathbf{y}), e^{-2\pi\beta y_1} \nabla v(\mathbf{y}) \rangle_{L^2(B)}, \quad (u, v) \in V_\beta^1(B)^2, \quad (7.33)$$

qui font donc de $V_\beta^k(B)$ des espaces de Hilbert.

Pour $\beta > 0$, l'espace $V_\beta^k(B)$ représente l'espace des fonctions qui sont

- autorisées à croître quand y_1 tend vers $+\infty$ mais pas plus vite que $e^{2\pi\beta|y_1|}$;
- évanescents quand y_1 tend vers $-\infty$ au moins aussi vite que $e^{-2\pi\beta|y_1|}$.

Pour $\beta < 0$, les rôles en $+\infty$ et $-\infty$ sont inversés.

Nous avons également besoin de considérer l'espace dual $V_\beta^k(B)^*$ de $V_\beta^k(B)$ que nous munissons de la norme du dual :

$$\|g\|_{V_\beta^k(B)^*} := \sup_{v \in V_\beta^k(B) \setminus \{0\}} \frac{|\langle g, v \rangle|}{\|v\|_{V_\beta^k(B)}}, \quad g \in V_\beta^k(B)^*. \quad (7.34)$$

Intuitivement, l'espace $V_\beta^k(B)^*$ est constitué de fonctions peu régulières qui ont le même comportement à l'infini que les fonctions de $V_{-\beta}^k(B)$. Par exemple, les fonctions $L^2(B)$ à support compact sont dans $V_\beta^k(B)^*$ et interviennent souvent dans la suite.

Les espaces $V_\beta^k(B)$ font jouer un rôle différents aux comportements quand y_1 tend vers $-\infty$ et quand y_1 tend vers $+\infty$. En particulier, nous n'avons pas d'inclusions entre $V_\beta^k(B)$ et $V_{\beta'}^k(B)$ pour des β et β' différents. Pour $\beta > 0$, nous considérons alors

- l'espace $V_\beta^k(B) + V_{-\beta}^k(B)$ constitué de fonctions autorisées à croître à l'infini mais pas plus vite que $e^{+2\pi\beta|y_1|}$ lorsque $|y_1|$ tend vers $+\infty$;
- l'espace $V_\beta^k(B) \cap V_{-\beta}^k(B)$ représente les fonctions évanescents au voisinage de l'infini tendant vers 0 au moins aussi vite que $e^{-2\pi\beta|y_1|}$ lorsque $|y_1|$ tend vers $+\infty$.

Ainsi, ce sera dans l'espace $V_\beta^k(B) + V_{-\beta}^k(B)$ que nous cherchons les différents termes de champ proche, puisqu'il autorise bien des comportements polynomiaux à l'infini.

7.2.2 Transformée de Floquet-Bloch dans les espaces à poids

À l'origine, la théorie de Kondratiev s'intéresse aux problèmes dans des géométries singulières comme des coins [139, chapitre 6] et fait ainsi un usage intensif de la transformée de Mellin. Pour notre problème, nous devons la remplacer par une autre transformée appelée transformée de Floquet-Bloch adaptée à la structure partiellement périodique de la bande B . Mentionnons que cette approche a déjà été utilisée dans [172, 173]. La transformée de Flochet-Bloch est un outil standard pour les problèmes faisant intervenir des coefficients périodiques. Cette transformée a déjà été intensivement utilisée pour traiter des problèmes dans des cadres variationnels classiques comme H^1 , mais pas dans nos espaces à poids $V_\beta^k(B)$. Nous allons donc d'une part rappeler la construction de cette transformée dans les espaces classiques $L^2(B)$ et $H^1(B)$ (nous renvoyons également le lecteur à l'ouvrage de référence [143] ainsi qu'à [99, 103]) et expliquer comment l'étendre à nos espaces à poids.

7.2.2.1 Transformée de Floquet-Bloch dans L^2 , extension à $V_\beta^0(B)$

Commençons par définir la transformée de Floquet-Bloch, ou plus précisément la transformée de Floquet-Bloch partielle en y_1 , sur un espace de fonctions très régulières comme $\mathcal{D}_{\sharp,2}(B)$, l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact et 1-périodique selon y_2 . Cette transformation associe à une fonction définie sur la bande $B = \mathbb{R} \times (0, 1)$ (de deux variables) une fonction définie sur $K := (0, 1) \times (0, 1) \times (-1/2, 1/2) = Y \times (0, 1)$ (de trois variables).

Définition 7.4. Soit $u \in \mathcal{D}_{\sharp,2}(B)$. La transformée de Floquet-Bloch (partielle en y_1) de u , notée $\mathfrak{F}(u)$, est la fonction de $L^2(K)$ définie par

$$\mathfrak{F}(u)(y_1, y_2, \xi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(y_1 + n, y_2) e^{2i\pi\xi(y_1+n)}, \quad (y_1, y_2) \in Y, \xi \in (-1/2, 1/2). \quad (7.35)$$

Notons que cette définition a bien un sens puisque la somme ci-dessus est finie, le support de u étant compact.

Nous souhaitons alors étendre la transformée de Floquet-Bloch à $L^2(B)$, en utilisant le fait que $\mathcal{D}_{\sharp,2}(B)$ est dense dans $L^2(B)$. Avant de le faire, nous introduisons des espaces qui sont utiles dans la suite. Pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|_X)$, nous notons $L^2(I, X)$ l'espace des fonctions u définies sur $X \times I$ telles que

$$\|u\|_{L^2(I, X)}^2 := \int_I \|u(\cdot, t)\|_X^2 dt < +\infty. \quad (7.36)$$

Dans la suite, nous considérons uniquement $I := (-1/2, 1/2)$.

Nous avons alors le résultat classique suivant (voir par exemple [99, 103, 143]).

Proposition 7.5. *La transformée de Floquet-Bloch se prolonge en une isométrie de $L^2(B)$ à $L^2(I, L^2(Y))$. En particulier, nous avons la formule de Parseval*

$$\langle u, v \rangle_{L^2(B)} = \langle \mathfrak{F}(u), \mathfrak{F}(v) \rangle_{L^2(I, L^2(Y))} := \int_{-1/2}^{1/2} \langle \mathfrak{F}(u)(\cdot, \xi), \mathfrak{F}(v)(\cdot, \xi) \rangle_{L^2(Y)} d\xi, \quad (7.37)$$

valable pour tout $(u, v) \in L^2(B)^2$, ainsi que la formule d'inversion

$$u(y_1 + n, y_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathfrak{F}u(y_1, y_2, \xi) e^{-2i\pi\xi(y_1+n)} d\xi, \quad (y_1, y_2) \in Y, n \in \mathbb{Z}, \quad (7.38)$$

valable pour tout $u \in L^2(B)$.

Remarque 7.6. La série dans (7.35) converge normalement dans $L^2(Y)$.

La proposition suivante énonce quelques propriétés qui montrent que la transformée de Floquet-Bloch est un outil adapté à la résolution de problèmes faisant intervenir des coefficients périodiques.

Proposition 7.7 (voir [99, 103, 143]). *La transformée de Floquet-Bloch possède les propriétés suivantes :*

- Elle commute avec la multiplication par une fonction périodique : si μ est une fonction $L^\infty(B)$ 1-périodique par rapport à sa première variable, alors

$$\mathfrak{F}(\mu u)(y_1, y_2, \xi) = \mu(y_1, y_2) \mathfrak{F}(u)(y_1, y_2, \xi), \quad (y_1, y_2) \in Y, \quad (7.39)$$

pour tout $u \in L^2(B)$.

- Elle diagonalise les opérateurs de translation $\tau_p: u \in L^2(B) \mapsto u(\cdot + p, \cdot) \in L^2(B)$ avec $p \in \mathbb{Z}$:

$$\mathfrak{F}(\tau_p u)(y_1, y_2, \xi) = e^{2i\pi\xi p} \mathfrak{F}(u)(y_1, y_2, \xi), \quad (y_1, y_2) \in Y, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (7.40)$$

pour tout $u \in L^2(B)$.

Expliquons maintenant comment étendre la transformée de Floquet-Bloch à l'espace $V_\beta^0(B)$. Considérons donc $u \in V_\beta^0(B)$. Par définition de cet espace, la fonction

$$\tilde{u}: \mathbf{y} \in B \mapsto e^{-2\pi\beta y_1} u(\mathbf{y}), \quad (7.41)$$

est dans $L^2(B)$. Nous pouvons donc considérer sa transformée de Floquet-Bloch $\mathfrak{F}(\tilde{u}) \in L^2(I, L^2(Y))$. Cela nous permet donc de définir la transformée de Floquet-Bloch $\mathfrak{F}(u)$ de u .

Définition 7.8. Soit $u \in V_\beta^0(B)$. La transformée de Floquet-Bloch de u est définie comme la fonction $\mathfrak{F}u \in L^2(I + i\beta, L^2(Y))$ vérifiant

$$\mathfrak{F}(u)(\cdot, \xi + i\beta) := \mathfrak{F}(\tilde{u})(\cdot, \xi), \quad \text{pour tout } \xi \in I, \quad (7.42)$$

où $\tilde{u} \in L^2(B)$ est défini par (7.41).

Il est alors immédiat que la transformée de Floquet-Bloch vérifie les propriétés suivantes :

- La transformée de Floquet-Bloch est une isométrie de $V_\beta^0(B)$ dans $L^2(I + i\beta, L^2(Y))$. En particulier, nous avons la formule de Parseval

$$\langle u, v \rangle_{V_\beta^0(B)} = \langle \mathfrak{F}(u), \mathfrak{F}(v) \rangle_{L^2(I + i\beta, L^2(Y))} := \int_{-1/2 + i\beta}^{1/2 + i\beta} \langle \mathfrak{F}(u)(\cdot, \xi), \mathfrak{F}(v)(\cdot, \xi) \rangle_{L^2(Y)} d\xi, \quad (7.43)$$

valable pour tout $(u, v) \in V_\beta^0(B)^2$.

- Nous avons la formule d'inversion

$$u(y_1 + n, y_2) = \int_{-1/2 + i\beta}^{1/2 + i\beta} \mathfrak{F}u(y_1, y_2, \xi) e^{-2i\pi\xi(y_1 + n)} d\xi, \quad (y_1, y_2) \in Y, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7.44)$$

valable pour tout $u \in V_\beta^0(B)$.

7.2.2.2 Transformée de Floquet-Bloch dans $H_{\sharp, 2}^1(B)$, extension à $V_\beta^1(B)$

Puisque nous considérons des conditions périodiques en y_2 , introduisons $H_{\sharp, 2}^1(B)$ le sous-espace de $H^1(B)$ constitué des fonctions qui sont 1-périodiques dans la direction y_2 . Intéressons-nous maintenant à la restriction de la transformée de Floquet-Bloch à $H_{\sharp, 2}^1(B)$, vu comme un sous-espace de $L^2(B)$.

Proposition 7.9 (voir [99, 103, 143]). *La transformée de Floquet-Bloch a les propriétés suivantes :*

- Pour $u \in H^1(B)$, nous avons la règle de dérivation

$$\mathfrak{F}(\nabla u)(\xi) = (\nabla - 2i\pi\xi \mathbf{e}_1) \mathfrak{F}(u)(\xi), \quad \xi \in (-1/2, 1/2). \quad (7.45)$$

- Elle réalise une isométrie entre $H_{\sharp,2}^1(B)$ et $L^2(I, H_{\sharp}^1(Y))$ (rappelons que $H_{\sharp}^1(Y)$ est le sous-espace de $H^1(Y)$ constitué des fonctions Y -périodiques), nous avons en particulier la formule de Parseval

$$\langle u, v \rangle_{H^1(B)} = \langle \mathfrak{F}(u), \mathfrak{F}(v) \rangle_{L^2(I, H_{\sharp}^1(Y))} := \int_{-1/2}^{1/2} \langle \mathfrak{F}(u)(\cdot, \xi), \mathfrak{F}(v)(\cdot, \xi) \rangle_{H_{\xi}^1(Y)} d\xi, \quad (7.46)$$

valable pour tout $(u, v) \in V_{\beta}^1(B)^2$ où nous définissons

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{H_{\xi}^1(Y)} := \langle \hat{u}(\cdot, \xi), \hat{v}(\cdot, \xi) \rangle_{L^2(Y)} + \langle (\nabla - 2i\pi\xi\mathbf{e}_1)\hat{u}(\cdot, \xi), (\nabla - 2i\pi\xi\mathbf{e}_1)\hat{v}(\cdot, \xi) \rangle_{L^2(Y)}, \quad (7.47)$$

pour tout $(\hat{u}, \hat{v}) \in L^2(I, H_{\sharp}^1(Y))$.

Remarque 7.10. Pour $u \in H^1(B)$, la série dans (7.35) converge normalement dans $H^1(B)$.

Remarque 7.11. Le produit scalaire (7.47) définit de manière canonique un espace $H_{\xi}^1(Y)$. Cet espace dépend de la variable ξ mais il faut avoir en tête qu'à ξ fixé, l'appartenance à $H_{\xi}^1(Y)$ est équivalente à l'appartenance à $H_{\sharp}^1(Y)$. Notamment, nous avons pour $g \in H_{\xi}^1(B)^*$

$$\|g\|_{H_{\xi}^1(B)^*} = \sup_{v \in H_{\xi}^1(B) \setminus \{0\}} \frac{|\langle g, v \rangle_{H_{\xi}^1(B)^* \times H_{\xi}^1(B)}|}{\|v\|_{H_{\xi}^1(B)}} = \sup_{v \in H_{\sharp}^1(B) \setminus \{0\}} \frac{|\langle g, v \rangle_{H_{\xi}^1(B)^* \times H_{\xi}^1(B)}|}{\|v\|_{H_{\xi}^1(B)}}. \quad (7.48)$$

L'extension de la transformée de Floquet-Bloch à $V_{\beta}^0(B)$ (et donc à son sous-espace $V_{\beta}^1(B)$) définie par la définition 7.8 implique alors de manière immédiate qu'elle réalise une isométrie entre $V_{\beta}^1(B)$ et $L^2(I + i\beta, H_{\sharp}^1(Y))$. Nous avons en particulier la formule de Parseval

$$\langle u, v \rangle_{V_{\beta}^1(B)} = \langle \mathfrak{F}(u), \mathfrak{F}(v) \rangle_{L^2(I + i\beta, H_{\sharp}^1(Y))} := \int_{-1/2 + i\beta}^{1/2 + i\beta} \langle \mathfrak{F}(u)(\cdot, \xi), \mathfrak{F}(v)(\cdot, \xi) \rangle_{H_{\xi}^1(Y)} d\xi, \quad (7.49)$$

valable pour tout $(u, v) \in V_{\beta}^1(B)^2$.

7.2.2.3 Transformée de Floquet-Bloch dans $H^{-1}(B)$, extension à $V_{\beta}^1(B)^*$

Soit $g \in H^{-1}(B)$ où $H^{-1}(B) := H^1(B)^*$ est le dual de $H^1(B)$. L'application

$$\hat{h} \in L^2(I, H_{\sharp}^1(Y)) \mapsto \langle g, \mathfrak{F}^{-1}(\hat{h}) \rangle_{H^{-1}(B) \times H^1(B)}, \quad (7.50)$$

est une forme linéaire continue. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $\hat{g} \in L^2(I, H_{\sharp}^1(Y)^*)$ tel que

$$\langle g, \mathfrak{F}^{-1}(\hat{h}) \rangle_{H^{-1}(B) \times H^1(B)} = \langle \hat{g}, \hat{h} \rangle_{L^2(I, H_{\sharp}^1(Y)^*) \times L^2(I, H_{\sharp}^1(Y))} = \int_{-1/2}^{1/2} \langle \hat{g}(\xi), \hat{h}(\xi) \rangle_{H_{\sharp}^1(Y)^*, H_{\sharp}^1(Y)} d\xi, \quad (7.51)$$

pour tout $\hat{h} \in L^2(I, H_{\sharp}^1(Y))$. Nous définissons alors la transformée de Floquet-Bloch de $g \in H^{-1}(B)$ par

$$\mathfrak{F}(g) = \hat{g}, \quad (7.52)$$

qui définit donc un élément de $L^2(I, H_{\sharp}^1(Y)^*)$.

Remarque 7.12. Pour $u \in H^{-1}(B)$, la série dans (7.35) converge normalement dans $H_{\sharp}^1(B)^*$.

En prenant le supremum sur h dans (7.51) et en se servant de la formule de Parseval, il est possible de montrer la proposition suivante.

Proposition 7.13 (voir [99, 103, 143]). *La transformée de Floquet-Bloch est une isométrie de $H^{-1}(B)$ dans $L^2(I, H_{\sharp}^{-1}(Y)^*)$. En particulier, nous avons la formule de Parseval*

$$\|g\|_{H^{-1}(B)}^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \|\mathfrak{F}g(\cdot, \xi)\|_{H_{\sharp}^1(Y)^*}^2 d\xi, \quad (7.53)$$

valable pour tout $g \in H^{-1}(B)$.

Expliquons maintenant comment étendre la transformée de Floquet-Bloch à $V_\beta^1(B)^*$. Tout d'abord, remarquons que $g \in V_\beta^1(B)^*$ si, et seulement si, $e^{2\pi\beta y_1} g \in H^{-1}(B)$, où $e^{2\pi\beta y_1} g$ est la forme linéaire définie par

$$\langle e^{2\pi\beta y_1} g, v \rangle_{H^{-1}(Y) \times H^1(Y)} := \langle g, e^{2\pi\beta y_1} v \rangle_{V_\beta^1(B)^* \times V_\beta^1(B)}, \quad \text{pour tout } v \in H_{\#,2}^1(Y). \quad (7.54)$$

Nous définissons alors la transformée de Floquet-Bloch de $g \in V_\beta^1(B)^*$ comme l'élément de $L^2(I - i\beta, H_{\#,1}^1(Y)^*)$ tel que

$$\mathfrak{F}(g)(\xi - i\beta) := \mathfrak{F}(e^{2\pi\beta y_1} g)(\xi), \quad \text{pour tout } \xi \in I. \quad (7.55)$$

La proposition suivante est alors immédiate.

Proposition 7.14. *La transformée de Floquet-Bloch est un isomorphisme de $V_\beta^1(B)^*$ dans $L^2(I - i\beta, H_{\#,1}^1(Y)^*)$. En particulier, nous avons la formule de Parseval*

$$\|g\|_{V_\beta^1(B)^*}^2 = \int_{-1/2-i\beta}^{1/2-i\beta} \|\widehat{\mathfrak{F}g(\cdot, \xi)}\|_{H_\xi^1(Y)^*}^2 d\xi, \quad (7.56)$$

valable pour tout $g \in V_\beta^1(B)^*$.

7.2.2.4 Restriction du support et calcul analytique

Comme nous l'avons vu, il n'y a pas d'inclusions entre $V_\beta^k(B)$ et $V_{\beta'}^k(B)$ pour des β et β' différents ce qui empêche tout espoir de pouvoir faire du calcul différentiel par rapport à la variable de Floquet-Bloch ξ . Cependant, cela devient possible si nous considérons seulement des fonctions dont le support est inclus dans $B_+ := \mathbb{R}_+ \times (0, 1)$. Cela ne sera pas tellement gênant : comme expliqué dans l'introduction de cette section, c'est surtout la partie périodique à droite de B qui pose problème dans l'analyse, la partie homogène à gauche se traitant de manière analytique.

Considérons donc $u \in V_\beta^1(B)$ dont le support est inclus dans B_+ , avec $\beta > 0$ (u est donc autorisée à croître quand y_1 tend vers $+\infty$ mais pas plus vite que $e^{2\pi\beta y_1}$). Nous notons $u \in V_\beta^1(B_+)$. Nous avons les résultats suivants.

Lemme 7.15. *Soit $u \in V_\beta^1(B_+)$. Alors $u \in V_{\beta'}^1(B_+)$ pour tout $\beta' \geq \beta$.*

Démonstration. En écrivant $e^{-2\pi\beta' y_1} = e^{-2\pi\beta y_1} e^{-2\pi(\beta' - \beta) y_1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_B |e^{-2\pi\beta' y_1} u(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} &\leq \int_{B_+} |e^{-2\pi\beta y_1} u(\mathbf{y})|^2 |e^{-2\pi(\beta' - \beta) y_1}|^2 d\mathbf{y} \\ &\leq C \|u\|_{V_\beta^0(B)}^2 < +\infty, \end{aligned} \quad (7.57)$$

puisque $\beta' - \beta \geq 0$, donc $u \in V_{\beta'}^0(B)$. En faisant le même raisonnement sur les dérivées nous avons bien $u \in V_{\beta'}^1(B)$. \square

Nous pouvons donc définir $\mathfrak{F}(u)(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im } \xi \geq \beta$. Nous disposons alors du résultat de régularité suivant.

Proposition 7.16. *Soit $u \in V_\beta^1(B_+)$. Alors $\mathfrak{F}(u)$ est analytique dans le demi-plan $\{\text{Im } \xi > \beta\} := \{\xi \in \mathbb{C} : \text{Im } \xi > \beta\}$ à valeurs dans $L^2(Y)$.*

Cette proposition se déduit immédiatement du corollaire du théorème de Morera suivant :

Corollaire 7.17. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions définie sur $\{\text{Im } \xi > \beta\}$ à valeurs dans $L^2(Y)$ telle que $u(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(z)$ converge dans $L^2(Y)$ pour tout $z \in \{\text{Im } \xi > \beta\}$. Si u_n est analytique sur $\{\text{Im } \xi > \beta\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si pour tout compact K inclus dans $\{\text{Im } \xi > \beta\}$, la série*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in K} \|u_n(z)\|_{L^2(Y)}^2, \quad (7.58)$$

converge, alors u est analytique sur $\{\text{Im } \xi > \beta\}$ à valeurs dans $L^2(Y)$.

Démonstration. Par convergence dominée il est clair que u est continue sur K . D'après le théorème de Morera (voir [199, théorème 10.17]), il suffit de montrer que pour tout triangle $\Delta \subset K$, $\int_{\partial\Delta} \|u(z)\|_{L^2(Y)}^2 dz = 0$. Nous avons

$$\int_{\partial\Delta} \|u(z)\|_{L^2(Y)}^2 dz = \int_{\partial\Delta} \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(z) \right\|_{L^2(Y)}^2 dz = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \int_{\partial\Delta} u_n(z) dz \right\|_{L^2(Y)}^2 = 0, \quad (7.59)$$

car $\int_{\partial\Delta} u_n(z) dz = 0$ d'après le théorème de Cauchy puisque $u_n(\cdot)$ est analytique sur K . Les inversions séries-intégrales se justifient simplement par convergence dominée (u_n est borné sur le compact $\partial\Delta$). \square

Nous pouvons étendre ce genre de propriétés aux éléments de $V_\eta^1(B)^*$ dont le support est aussi inclus dans B_+ . Pour de tels $g \in V_\eta^1(B)^*$, nous noterons $g \in V_\eta^1(B_+)^*$ (dans la suite nous utilisons souvent $\eta = -\beta$).

Nous disposons également d'un lemme analogue au lemme 7.15 et d'une caractérisation concrète de la transformée de Floquet-Bloch qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 7.18. *Soit $g \in V_\eta^1(B_+)^*$. Alors $g \in V_{\beta'}^1(B_+)^*$ pour tout $\eta' \geq -\eta$ et de plus nous avons*

$$\langle \mathfrak{F}(g)(\xi), v \rangle_{H_\#^1(Y)^* \times H_\#^1(Y)} = \langle g, \overline{e^{2i\pi\xi y_1} v} \rangle_{V_\eta^1(B)^* \times V_\eta^1(B)}, \quad (7.60)$$

pour tout $v \in H_\#^1(Y)$ et pour tout $\xi \in \{\text{Im } \xi > -\eta\}$.

Démonstration. Le fait que $g \in V_{\eta'}^1(B)^*$ pour tout $\eta' \geq -\eta$ se démontre de la même façon que le lemme 7.15. Soit $v \in H_\#^1(Y)$ et $\xi \in \{\text{Im } \xi > -\eta\}$. Par convergence normale de la série dans (7.35), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(g)(\xi), v \rangle_{H_\#^1(Y)^* \times H_\#^1(Y)} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle g(y_1 + n, y_2) e^{2i\pi\xi(n+y_1)}, v \rangle_{H_\#^1(Y)^* \times H_\#^1(Y)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle g(y_1 + n, y_2), \overline{v e^{2i\pi\xi(n+y_1)}} \rangle_{H_\#^1(Y)^* \times H_\#^1(Y)} \\ &= \langle g, \overline{e^{2i\pi\xi y_1} v} \rangle_{V_\eta^1(B)^* \times V_\eta^1(B)}. \end{aligned} \quad (7.61) \quad \square$$

Nous pouvons alors en déduire l'analogie de la proposition 7.16.

Proposition 7.19. *Soit $g \in V_\eta^1(B_+)^*$. Alors $\mathfrak{F}(g)$ est analytique sur $\{\text{Im } \xi > -\eta\}$ à valeurs dans $H_\#^1(Y)^*$.*

Démonstration. Soit $\xi \in \{\text{Im } \xi > -\eta\}$ et $h \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(\xi + h) > -\eta$. Il suffit alors de remarquer que d'après (7.60), nous avons

$$\left\langle \frac{\mathfrak{F}(g)(\xi + h) - \mathfrak{F}(g)(\xi)}{h}, v \right\rangle_{H_\#^1(Y)^* \times H_\#^1(Y)} = \left\langle g, \frac{e^{2i\pi(\xi+h)y_1} - e^{2i\pi\xi y_1}}{h} v \right\rangle_{V_\eta^1(B)^* \times V_\eta^1(B)}, \quad (7.62)$$

pour tout $v \in H_\#^1(Y)$ et que le membre de droite converge dans $V_\eta^1(B)$ lorsque h tend vers 0. \square

7.2.3 Famille d'opérateurs dépendants de la variable de Floquet-Bloch

Rappelons que nous voulons étudier des problèmes du type $-\nabla \cdot (a\nabla u) = g$ avec $u \in V_\beta^1(B_+)$. Bien entendu, nous souhaitons appliquer la transformée de Floquet-Bloch à cette équation.

7.2.3.1 Réduction à une famille d'opérateurs dépendants de ξ

Soit $\beta > 0$ et soit $u \in V_\beta^1(B_+)$. Considérons $-\nabla \cdot (a\nabla u)$ qui définit une forme linéaire continue sur $V_{-\beta}^1(B)$ par

$$\langle -\nabla \cdot (a\nabla u), v \rangle_{V_{-\beta}^1(B)^* \times V_{-\beta}^1(B)} := \int_B a(\mathbf{y}) \nabla u(\mathbf{y}) \cdot \overline{\nabla v(\mathbf{y})} d\mathbf{y}, \quad v \in V_{-\beta}^1(B), \quad (7.63)$$

puisque $\int_B a(\mathbf{y}) \nabla u(\mathbf{y}) \cdot \nabla \overline{v(\mathbf{y})} \, d\mathbf{y} \leq C \|e^{-\beta y_1} \nabla u\|_{L^2(B)} \|e^{\beta y_1} \nabla v\|_{L^2(B)} \leq C \|u\|_{V_\beta^1(B_+)} \|v\|_{V_{-\beta}^1(B_+)}$. Remarquons immédiatement que $\text{supp } g \subset B_+$ puisque $\text{supp } u \subset B_+$.

Nous avons alors la proposition suivante qui donne explicitement la transformée de Floquet-Bloch de $-\nabla \cdot (a \nabla u) \in V_{-\beta}^1(B_+)^*$.

Proposition 7.20. *Soit $u \in V_\beta^1(B_+)$. Alors pour tout $\xi \in \{\text{Im } \xi > \beta\}$ et pour tout $v \in H_\#^1(Y)$ nous avons*

$$\langle \mathfrak{F}(-\nabla \cdot (a \nabla u))(\xi), v \rangle_{H_\#^1(Y)^*, H_\#^1(Y)} = \int_Y a(\mathbf{y}) (\nabla - 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) \mathfrak{F}(u)(\mathbf{y}, \xi) \cdot (\nabla + 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) \overline{v(\mathbf{y})} \, d\mathbf{y}. \quad (7.64)$$

Démonstration. Soit $\xi \in \{\text{Im } \xi > \beta\}$ et $v \in H_\#^1(Y)$. D'après (7.60) (avec $\eta = -\beta$), nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(-\nabla \cdot (a \nabla u))(\xi), v \rangle_{H_\#^1(Y)^*, H_\#^1(Y)} &= \left\langle -\nabla \cdot (a \nabla u), e^{2i\pi \xi y_1} v \right\rangle_{V_{-\beta}^1(B)^*, V_{-\beta}^1(B)} \\ &= \int_B a(\mathbf{y}) \nabla u(\mathbf{y}) \cdot \nabla [e^{2i\pi \xi y_1} v(\mathbf{y})] \, d\mathbf{y}, \\ &= \int_B a(\mathbf{y}) \nabla u(\mathbf{y}) \cdot [e^{2i\pi \xi y_1} (\nabla + 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) \overline{v(\mathbf{y})}] \, d\mathbf{y}, \\ &= \int_B a(\mathbf{y}) e^{2i\pi \xi y_1} \nabla u(\mathbf{y}) \cdot (\nabla + 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \\ &= \int_B a(\mathbf{y}) (\nabla - 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) [e^{2i\pi \xi y_1} u(\mathbf{y})] \cdot (\nabla + 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (7.65)$$

où les deux dernières égalités s'obtiennent en utilisant

$$\nabla [e^{2i\pi \xi y_1} w] = e^{2i\pi \xi y_1} \nabla w + 2i\pi \xi e^{2i\pi \xi y_1} w \mathbf{e}_1. \quad (7.66)$$

En découpant alors la bande B en $B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} Y + n\mathbf{e}_1$ et puisque v est Y -périodique, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(-\nabla \cdot (a \nabla u))(\xi), v \rangle_{H_\#^1(Y)^*, H_\#^1(Y)} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_Y a(\mathbf{y}) (\nabla - 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) [e^{2i\pi \xi (y_1 + n)} u(y_1 + n, y_2)] \cdot (\nabla + 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) \overline{v(\mathbf{y})} \, d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Enfin, en utilisant le théorème de convergence dominée, nous pouvons intervertir la somme et l'intégrale, ce qui fait bien apparaître la transformée de Floquet-Bloch de u :

$$\langle \mathfrak{F}(-\nabla \cdot (a \nabla u))(\xi), v \rangle_{H_\#^1(Y)^*, H_\#^1(Y)} = \int_Y a(\mathbf{y}) (\nabla - 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) \mathfrak{F}(u)(\mathbf{y}, \xi) \cdot (\nabla + 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) \overline{v(\mathbf{y})} \, d\mathbf{y}, \quad (7.68)$$

ce qui achève la démonstration. \square

A priori, pour un $u \in V_\beta^1(B_+)$ quelconque, $-\nabla \cdot (a \nabla u) \in V_{-\beta}^1(B_+)$, c'est-à-dire que $\nabla \cdot (a \nabla u)$ croît exponentiellement quand y_1 tend vers $+\infty$. Cependant, comme nous allons le voir quand nous appliquerons les résultats de cette section aux équations vérifiées par les termes de champ proche dans la section 7.3, les seconds membres seront exponentiellement décroissants. C'est pourquoi à partir de maintenant, nous supposons que $g \in V_\beta^1(B_+)^* \subset V_{-\beta}^1(B_+)^*$ et nous nous intéressons alors à l'équation

$$\text{trouver } u \in V_\beta^1(B_+) \text{ telle que } -\nabla \cdot (a \nabla u) = g \text{ avec } g \in V_\beta^1(B_+)^* \text{ donné.} \quad (7.69)$$

En appliquant la transformée de Floquet-Bloch à cette équation et en utilisant la proposition précédente, elle peut alors s'écrire

$$\mathcal{A}(\xi) \mathfrak{F}(u)(\xi) = \mathfrak{F}(g)(\xi), \quad \text{pour tout } \xi \in \{\text{Im } \xi > \beta\}, \quad (7.70)$$

où $\mathcal{A}(\xi)$ est l'opérateur continu de $H_\#^1(Y)$ dans $H_\#^1(Y)^*$ défini par

$$\langle \mathcal{A}(\xi)v, w \rangle_{H_\#^1(Y)^* \times H_\#^1(Y)} = \int_Y a(\mathbf{y}) (\nabla - 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) v(\mathbf{y}) \cdot (\nabla + 2i\pi \xi \mathbf{e}_1) \overline{w(\mathbf{y})} \, d\mathbf{y}, \quad (7.71)$$

pour tout $(v, w) \in H_\#^1(Y)$.

7.2.3.2 Étude des propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}(\xi)$

Nous savons d'une part d'après le lemme 7.16 que $\mathfrak{F}(u)$ est analytique sur $\{\text{Im } \xi > \beta\}$ et d'autre part d'après le lemme 7.19 (avec $\eta = \beta$ et non plus $\eta = -\beta$) que $\mathfrak{F}(g)$ est analytique sur $\{\text{Im } \xi > -\beta\}$ (et non seulement sur $\{\text{Im } \xi > \beta\}$ si nous avons seulement supposé que $g \in V_{-\beta}^1(B_+)^*$). Comme nous allons le voir dans la suite, \mathcal{A} est analytique sur tout \mathbb{C} donc $\xi \mapsto \mathcal{A}(\xi)\mathfrak{F}(u)(\xi)$ est analytique sur $\{\text{Im } \xi > \beta\}$. Ainsi, $\mathfrak{F}(u)$ est analytique sauf aux points où \mathcal{A} n'est pas inversible. Ces points étant isolés (comme nous allons le voir plus bas), cela montre en fait que $\mathfrak{F}(u)$ est méromorphe dans la bande $\{\text{Im } \xi > \beta\} \cap \{\text{Im } \xi > -\beta\}$.

Commençons par lister quelques-unes des propriétés de \mathcal{A} .

1. Tout d'abord, étudions $\mathcal{A}(0)$. Nous avons, pour tout $(v, w) \in H_{\sharp}^1(Y)$,

$$\langle \mathcal{A}(0)v, w \rangle_{H_{\sharp}^1(Y)^* \times H_{\sharp}^1(Y)} = \int_Y a(\mathbf{y}) \nabla v(\mathbf{y}) \cdot \nabla \bar{w}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \quad (7.72)$$

C'est donc l'opérateur associé à la formulation variationnelle de problèmes du type $-\nabla \cdot (a \nabla u) = h$ posé sur Y avec des conditions périodiques. C'est donc un opérateur de type Fredholm d'indice 0 dont le noyau est de dimension 1 et engendré par les constantes.

2. Pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathcal{A}(\xi) - \mathcal{A}(0)$ est compact, puisque pour tout $(v, w) \in H_{\sharp}^1(Y)$,

$$\langle (\mathcal{A}(\xi) - \mathcal{A}(0))v, w \rangle_{H_{\sharp}^1(Y)^* \times H_{\sharp}^1(Y)} = (2\pi)^2 \xi^2 \langle v, w \rangle_{L^2(Y)} + 2i\pi \xi (\langle v \mathbf{e}_1, \nabla w \rangle_{L^2(Y)} - \langle \nabla v, w \mathbf{e}_1 \rangle_{L^2(Y)}), \quad (7.73)$$

et que chacun de trois termes est compact. Par conséquent, $\mathcal{A}(\xi) = \mathcal{A}(0) + (\mathcal{A}(\xi) - \mathcal{A}(0))$ étant la somme d'un opérateur compact et d'un opérateur de type Fredholm, il est de type Fredholm et ceci pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

3. L'application $\xi \mapsto \mathcal{A}(\xi)$ est analytique sur \mathbb{C} , puisque $\mathcal{A}(\xi)$ dépend simplement de ξ , de manière quadratique. En particulier, une conséquence de l'analyticité est que l'indice de $\mathcal{A}(\xi)$ est constant (voir par exemple [138, §A.8]), donc $\mathcal{A}(\xi)$ est d'indice 0 pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.
4. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\xi)$ est auto-adjoint. En effet, pour tout $(v, w) \in H_{\sharp}^1(Y)$ nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(\xi)v, w \rangle_{H_{\sharp}^1(Y)^* \times H_{\sharp}^1(Y)} &= \int_Y a(\mathbf{y}) \overline{(\nabla + 2i\pi\xi \mathbf{e}_1) \bar{v}(\mathbf{y})} \cdot \overline{(\nabla - 2i\pi\xi \mathbf{e}_1) w(\mathbf{y})} \, d\mathbf{y} \\ &= \int_Y a(\mathbf{y}) (\nabla - 2i\pi\xi \mathbf{e}_1) w(\mathbf{y}) \cdot (\nabla + 2i\pi\xi \mathbf{e}_1) \bar{v}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \overline{\langle \mathcal{A}(\xi)w, v \rangle_{H_{\sharp}^1(Y)^* \times H_{\sharp}^1(Y)}}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

En particulier, nous retrouvons le fait qu'il est d'indice 0 pour $\xi \in \mathbb{R}$.

5. Toujours pour $\xi \in \mathbb{R}$, nous avons pour $u \in H_{\sharp}^1(Y)$

$$\langle \mathcal{A}(\xi)v, v \rangle_{H_{\sharp}^1(Y)^* \times H_{\sharp}^1(Y)} = \int_Y a(\mathbf{y}) |(\nabla - 2i\pi\xi \mathbf{e}_1)v(\mathbf{y})|^2 \, d\mathbf{y}. \quad (7.75)$$

Par coercivité de a , cela montre que $\mathcal{A}(\xi)$ est injectif pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$ et donc inversible puisqu'il est de type Fredholm d'indice 0.

Gr ce à toutes ces propriétés, nous pouvons en déduire le résultat suivant qui découle directement du théorème de Steinberg [212].

Proposition 7.21. *Il existe $\gamma > 0$ tel que $\mathcal{A}(\xi)$ est inversible sur le rectangle $[-1/2, 1/2] \times [-\gamma, \gamma]$ sauf en $\xi = 0$ où il admet une valeur propre de multiplicité 1.*

7.2.3.3 Étude de l'inverse de $\mathcal{A}(\xi)$ autour de $\xi = 0$

Nous étudions maintenant plus en détails $\mathcal{A}(\xi)^{-1}$, notamment près de $\xi = 0$. Cette étude rentre dans le cadre des faisceaux d'opérateurs (*operator pencils*) dépendant polynomialement d'un paramètre. Nous renvoyons à l'annexe 7.A ainsi qu'au chapitre 5 de [139] et aux références qu'il contient pour plus de détails.

Les outils pour étudier le comportement de $\mathcal{A}(\xi)$ autour de $\xi = 0$ sont les chaînes de Jordan. Rappelons (voir annexe 7.A ou [139, §5.1.1]) qu'une chaîne de Jordan de taille $m + 1$ associée à $\xi \mapsto \mathcal{A}(\xi)$ en $\xi = 0$ est une suite $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m) \in H_{\sharp}^1(Y)^{m+1}$ telle que

$$\sum_{q=0}^{\sigma} \frac{1}{q!} \partial_{\xi}^q \mathcal{A}(0) \phi_{\sigma-q} = 0, \quad (7.76)$$

pour tout $\sigma \in \{0, \dots, m\}$. Donnons sans plus attendre la description précise des chaînes de Jordan associées à $\mathcal{A}(\xi)$ en $\xi = 0$, qui font le lien avec la théorie de l'homogénéisation.

Proposition 7.22. *L'application $\xi \mapsto \mathcal{A}(\xi)$ admet une chaîne de Jordan (ϕ_0, ϕ_1) en $\xi = 0$ de taille 2, où $\phi_0 \equiv 1$ est la fonction constante sur Y et où $\phi_1 := -2i\pi w_1$ avec w_1 la solution du problème de cellule (7.7), mais n'admet pas de chaîne de Jordan de taille 3 en $\xi = 0$.*

Démonstration. Il est clair que les constantes sont dans le noyau de $\mathcal{A}(0)$ donc que ϕ_0 (ou n'importe quel multiple de ϕ_0) est une chaîne de Jordan de taille 1, c'est-à-dire $\mathcal{A}(0)\phi_0 = 0$. Remarquons ensuite que

$$\langle \partial_{\xi} \mathcal{A}(0)v, w \rangle = 2i\pi \int_Y a(\mathbf{y}) \mathbf{e}_1 \cdot (\bar{w} \nabla v - v \nabla \bar{w}) \, d\mathbf{y}, \quad (7.77)$$

pour tout $(v, w) \in H_{\sharp}^1(Y)^2$. Pour chercher une chaîne de Jordan de taille 2, il faut trouver $\phi_1 \in H_{\sharp}^1(Y)$ solution de $\mathcal{A}(0)\phi_1 = -\partial_{\xi} \mathcal{A}(0)\phi_0$, c'est-à-dire

$$\int_Y a(\mathbf{y}) \nabla \phi_1(\mathbf{y}) \cdot \nabla \bar{v}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 2i\pi \int_Y a(\mathbf{y}) \mathbf{e}_1 \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{y}, \quad (7.78)$$

pour tout $v \in H_{\sharp}^1(Y)$. Nous reconnaissons la formulation variationnelle du problème de cellule (7.7) (à une constante multiplicative près dans le second membre et sans la contrainte de la moyenne nulle), dont une solution particulière est $\phi_1 = -2i\pi w_1$ (les autres solutions sont obtenues en ajoutant une constante). Finalement, (ϕ_0, ϕ_1) est une chaîne de Jordan de taille 2. Nous avons même démontré que (ψ_0, ψ_1) est une chaîne de Jordan de taille 2 si, et seulement si, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\psi_0 = \alpha\phi_0$, et $\psi_1 = \alpha\phi_1 + \beta\phi_0$.

Supposons maintenant par l'absurde que $\mathcal{A}(\xi)$ admette en $\xi = 0$ une chaîne de Jordan de taille 3, c'est-à-dire qu'il existe $\phi_2 \in H_{\sharp}^1(Y)$ telle que $\mathcal{A}(0)\phi_2 + \partial_{\xi} \mathcal{A}(0)\phi_1 + (1/2)\partial_{\xi}^2 \mathcal{A}(0)\phi_0 = 0$. Comme

$$\langle \partial_{\xi}^2 \mathcal{A}(0)v, w \rangle = (2\pi)^2 \int_Y a(\mathbf{y}) v(\mathbf{y}) \bar{w}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (7.79)$$

pour tout $(v, w) \in H_{\sharp}^1(Y)^2$, nous avons donc

$$\int_Y a(\mathbf{y}) \nabla \phi_2(\mathbf{y}) \cdot \nabla \bar{v}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + 2i\pi \int_Y a(\mathbf{y}) \mathbf{e}_1 \cdot (\bar{v} \nabla \phi_1 - \phi_1 \nabla \bar{v}) \, d\mathbf{y} + (2\pi)^2 \int_Y a(\mathbf{y}) \phi_0(\mathbf{y}) \bar{v}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \quad (7.80)$$

pour tout $v \in H_{\sharp}^1(Y)$. En prenant $v = \phi_0 \equiv 1$ et en se rappelant que $\phi_1 = -2i\pi w_1$, nous obtenons

$$\int_Y a(\mathbf{y}) (\partial_{y_1} w_1 + 1) \, d\mathbf{y} = 0. \quad (7.81)$$

Nous reconnaissons ici le coefficient a_{11}^* de la matrice homogénéisée A^* (voir (7.6)). Comme $a_{11}^* \neq 0$ car A^* est définie positive (voir la proposition 6.5), il y a contradiction : $\mathcal{A}(\xi)$ ne peut admettre une chaîne de Jordan de taille 3 en $\xi = 0$. \square

Remarque 7.23. L'apparition de termes issus de l'homogénéisation dans les chaînes de Jordan est à rapprocher des calculs par ondes de Bloch qui ont été effectués dans l'annexe 6.B. En effet, ces calculs sont extrêmement similaires à ceux effectués dans la démonstration ci-dessus.

La connaissance des chaînes de Jordan nous permet alors de décrire précisément la forme de $\mathcal{A}(\xi)$ autour de son pôle $\xi = 0$ grâce au théorème 7.60 (voir également le théorème 5.1.1 dans [139]) :

Proposition 7.24. *Il existe un voisinage \mathcal{O} de $\xi = 0$ sur lequel nous avons*

$$\mathcal{A}(\xi)^{-1} = \xi^{-2}\Pi_0 + \xi^{-1}\Pi_1 + H(\xi), \quad (7.82)$$

pour tout $\xi \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, où Π_0 et Π_1 sont des opérateurs continus de $H_{\sharp}^1(Y)^*$ dans $H_{\sharp}^1(Y)$ définis par

$$\Pi_0 h = \langle h, \phi_0 \rangle \phi_0 \quad \text{et} \quad \Pi_1 h = \langle h, \phi_0 \rangle \phi_1 + \langle h, \phi_1 \rangle \phi_0, \quad (7.83)$$

pour tout $h \in H_{\sharp}^1(Y)^*$ et où $\xi \mapsto H(\xi)$ est une fonction analytique au voisinage de $\xi = 0$, et à valeur dans les opérateurs de $H_{\sharp}^1(Y)$ dans $H_{\sharp}^1(Y)^*$ continus.

7.2.4 Comportements à l'infini

Grâce à l'étude qui vient d'être faite, nous pouvons décrire précisément le comportement lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$ des solutions des problèmes (7.69).

Nous avons vu apparaître un poids particulier γ dans l'énoncé de la proposition 7.21. Introduisons alors un cadre fonctionnel à poids dépendant de ce nombre en définissant, pour $k \in \{0, 1\}$, les espaces suivants :

$$V_{\pm}^k(B) := V_{+\gamma}^k(B) + V_{-\gamma}^k(B) \quad \text{et} \quad V_{-}^k(B) := V_{+\gamma}^k(B) \cap V_{-\gamma}^k(B), \quad (7.84)$$

que nous avons déjà présentés à la fin de la section 7.2.1. Rappelons que l'espace $V_{\pm}^k(B)$ doit être interprété comme l'ensemble des fonctions admettant (potentiellement) un comportement croissant lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$, mais avec une croissance qui ne peut être plus rapide que $e^{2\pi\gamma|y_1|}$. À l'inverse, les éléments de $V_{-}^k(B)$ doivent être compris comme des fonctions tendant vers 0 lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$ au moins aussi rapidement que $e^{-2\pi\gamma|y_1|}$ (fonctions évanescentes). Nous avons en particulier les inclusions $V_{-}^1(B) \subset \mathcal{V}(B) \subset V_{+}^1(B)$, où $\mathcal{V}(B)$ est défini par (7.29).

Munissons respectivement ces deux espaces des normes

$$\begin{cases} \|u\|_{V_{\pm}^0(B)}^2 := \|e^{\mp 2\pi\gamma|y_1|} u(\mathbf{y})\|_{L^2(B)}^2, & u \in V_{\pm}^0(B), \\ \|u\|_{V_{\pm}^1(B)}^2 := \|e^{\mp 2\pi\gamma|y_1|} u(\mathbf{y})\|_{L^2(B)}^2 + \|e^{\mp 2\pi\gamma|y_1|} \nabla u(\mathbf{y})\|_{L^2(B)}^2, & u \in V_{\pm}^1(B), \end{cases} \quad (7.85)$$

qui leur confèrent une structure d'espace de Banach. Nous avons également à considérer les espaces duaux, notés $V_{\pm}^k(B)^*$, équipés des normes duales naturelles. Remarquons que $V_{+}^k(B)^* = V_{\gamma}^k(B)^* \cap V_{-\gamma}^k(B)^*$, et $V_{-}^k(B)^* = V_{\gamma}^k(B)^* + V_{-\gamma}^k(B)^*$ (voir par exemple [166, lemme B.4])

Enfin, introduisons l'espace

$$W(B) := \{u \in V_{+}^1(B) : \nabla \cdot (a \nabla u) \in V_{+}^1(B)^*\}. \quad (7.86)$$

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 7.25. *Il existe quatre formes linéaires $\ell_D^{\pm}, \ell_N^{\pm} : W(B) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout élément $u \in W(B)$ nous avons*

$$\begin{cases} \tilde{u}_{+}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{y}) - \ell_D^{+}(u) - \ell_N^{+}(u) (y_1 + w_1^+(\mathbf{y})) / a_{11}^* \in V_{-\gamma}^1(B), \\ \tilde{u}_{-}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{y}) - \ell_D^{-}(u) - \ell_N^{-}(u) y_1 / a_0 \in V_{+\gamma}^1(B), \end{cases} \quad (7.87)$$

où a_{11}^* est le coefficient correspondant à la matrice homogénéisée A^* définie par (7.6) et où a_0 est la valeur constante de a dans Ω_- . De plus, les deux décompositions induites par ces quatre formes linéaires sont continues pour la norme naturelle de $W(B)$: il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\ell_D^\pm(u)| + |\ell_N^\pm(u)| + \|\tilde{u}_\pm\|_{V_{\mp\gamma}^1(B)} \leq C (\|u\|_{V_+^1(B)} + \|\nabla \cdot (a\nabla u)\|_{V_+^1(B)^*}), \quad (7.88)$$

pour tout $u \in W(B)$.

Démonstration. La démonstration pour le cas y_1 tendant vers $-\infty$ est une application directe du chapitre 5 de [139] (voir également [67] pour une preuve détaillée) et peut-être vu comme un cas particulier d'un milieu périodique constant, nous nous concentrons donc sur le cas y_1 tendant vers $+\infty$. Puisque le résultat du théorème dépend uniquement du comportement de $u(\mathbf{y})$ lorsque y_1 tend vers $+\infty$, nous pouvons supposer sans nuire à la généralité que $\text{supp } u \subset \mathbb{R}_+ \times (0, 1)$. Ainsi, nous sommes ramenés à la situation de la section précédente, avec $g := -\nabla \cdot (a\nabla u) \in V_+^1(B)^*$, ce qui nous permet d'utiliser d'une part la transformée de Floquet-Bloch et d'autre part d'utiliser les résultats sur $\mathfrak{F}(\xi)$. Rappelons que $\mathfrak{F}(u)(\xi)$ est analytique pour $\text{Im } \xi > \gamma$ et que $\mathfrak{F}(g)(\xi)$ est analytique pour $\text{Im } \xi > -\gamma$. De plus, nous avons $\mathfrak{F}(u)(\xi) = \mathcal{A}(\xi)^{-1}\mathfrak{F}(g)(\xi)$ dès que $\text{Im } \xi > \gamma$. D'après la formule d'inversion (7.44) appliquée en $\beta = \gamma$, nous avons

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) &= \int_{-1/2+i\gamma}^{1/2+i\gamma} \mathfrak{F}(u)(\mathbf{y}, \gamma) e^{-2i\pi\xi y_1} d\xi \\ &= \int_{-1/2+i\gamma}^{1/2+i\gamma} \mathcal{A}(\xi)^{-1}\mathfrak{F}(g)(\xi) e^{-2i\pi\xi y_1} d\xi. \end{aligned} \quad (7.89)$$

Considérons les segments I_\pm et J_\pm ainsi que le chemin d'intégration donnés à la figure 7.4. Le théorème des résidus implique alors que

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma} \mathcal{A}(\xi)^{-1}\mathfrak{F}(g)(\xi) e^{-2i\pi\xi y_1} d\xi + \text{Res}_{\xi=0} \{ \mathcal{A}(\xi)^{-1}\mathfrak{F}(g)(\xi) e^{-2i\pi\xi y_1} \} \\ &= \int_{-1/2-i\gamma}^{1/2-i\gamma} \mathcal{A}(\xi)^{-1}\mathfrak{F}(g)(\xi) e^{-2i\pi\xi y_1} d\xi + \text{Res}_{\xi=0} \{ \mathcal{A}(\xi)^{-1}\mathfrak{F}(g)(\xi) e^{-2i\pi\xi y_1} \}, \end{aligned} \quad (7.90)$$

car les intégrales le long des lignes horizontales J_\pm se compensent. D'après la proposition 7.24, nous avons au voisinage de $\xi = 0$ la représentation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\xi)^{-1}\mathfrak{F}(g)(\xi) &= \frac{\Pi_0\mathfrak{F}(g)(\xi)}{\xi^2} + \frac{\Pi_1\mathfrak{F}(g)(\xi)}{\xi} + H(\xi) \\ &= \frac{c_0(\xi)}{\xi^2} - 2i\pi \frac{c_0(\xi)w_1 + c_1(\xi)}{\xi} + H(\xi), \end{aligned} \quad (7.91)$$

où nous avons défini $c_0(\xi) := \langle \mathfrak{F}(g)(\xi), 1 \rangle$ et $c_1(\xi) := \langle \mathfrak{F}(g)(\xi), w_1 \rangle$ de sorte que $\Pi_0\mathfrak{F}(g)(\xi) = \langle \mathfrak{F}(g)(\xi), \phi_0 \rangle = c_0(\xi)$ et

$$\begin{aligned} \Pi_1\mathfrak{F}(g)(\xi) &= \langle \mathfrak{F}(g)(\xi), \phi_0 \rangle \phi_1 + \langle \mathfrak{F}(g)(\xi), \phi_1 \rangle \phi_0 \\ &= -2i\pi w_1 \langle \mathfrak{F}(g)(\xi), 1 \rangle - 2i\pi \langle \mathfrak{F}(g)(\xi), w_1 \rangle \\ &= -2i\pi(c_0(\xi)w_1 + c_1(\xi)). \end{aligned} \quad (7.92)$$

Puisque $H(\xi)$ est analytique en $\xi = 0$, le résidu de (7.90) se décompose donc en deux parties : d'une part

$$\text{Res}_{\xi=0} \left\{ \frac{e^{-2i\pi\xi y_1} c_0(\xi)}{\xi^2} \right\} = -2i\pi y_1 c_0(0) + c_0'(0), \quad (7.93)$$

et d'autre part

$$\text{Res}_{\xi=0} \left\{ \frac{e^{-2i\pi\xi y_1} (c_0(\xi)w_1 + c_1(\xi))}{\xi^2} \right\} = c_0(0)w_1 + c_1(0). \quad (7.94)$$

Finalement, nous obtenons, en revenant à (7.90),

$$u(\mathbf{y}) = \tilde{u}_+(\mathbf{y}) - 2i\pi[c_0'(0) + c_1(0)] - 2i\pi(y_1 + w_1)c_0(0), \quad (7.95)$$

où nous avons posé

$$\tilde{u}_+(\mathbf{y}) := \int_{-1/2-i\gamma}^{1/2-i\gamma} \mathcal{A}(\xi)^{-1} \mathfrak{F}(g)(\xi) e^{-2i\pi\xi y_1} d\xi. \quad (7.96)$$

En définissant $\ell_D^+(u) := -2i\pi[c'_0(0) + c_1(0)]$ et $\ell_N^+(u) := -2i\pi c_0(0)a_{11}^*$, nous retrouvons bien la décomposition (7.87). Il est en fait possible de donner une expression explicite des constantes c_0 , $c'_0(0)$ et $c_1(0)$ et nous trouvons ainsi que $\ell_D^+(u) = -2i\pi\langle g, 1 \rangle$ et $\ell_N^+(u) = -2i\pi\langle g, y_1 + w_1 \rangle a_{11}^*$. Cela montre directement le résultat de continuité annoncé pour $\ell_D^+(u)$ et $\ell_N^+(u)$.

Il reste à démontrer le résultat de continuité pour \tilde{u}_+ . Remarquons tout d'abord que $\tilde{u} \in V_{-\gamma}^1(B)$. En effet, $\xi \mapsto e^{-2i\pi\xi y_1} \mathcal{A}(\xi)^{-1} \mathfrak{F}(g)(\xi)$ appartient à $L^2(I - i\gamma, H_{\sharp}^1(Y))$. La caractérisation (7.60) montre alors que $\tilde{u} \in V_{-\gamma}^1(B)$. De plus, puisque $\xi \mapsto \mathcal{A}(\xi)^{-1}$ est analytique au voisinage de $I - i\gamma$, nous avons la majoration uniforme

$$C := \sup_{\xi \in (I - i\gamma)} \|\mathcal{A}(\xi)^{-1}\|_{H_{\sharp}^1(Y) \rightarrow H_{\sharp}^1(Y)^*} < +\infty, \quad (7.97)$$

de sorte que, en appliquant l'identité de Parseval (7.46), nous obtenons

$$\|\tilde{u}\|_{V_{-\gamma}^1(B)}^2 = \int_{-1/2-i\gamma}^{1/2-i\gamma} \|\mathcal{A}(\xi)^{-1} \hat{g}(\xi)\|_{H_{\xi}^1(Y)}^2 d\xi \leq C \int_{-1/2-i\gamma}^{1/2-i\gamma} \|\hat{g}(\xi)\|_{H_{\xi}^1(Y)^*}^2 d\xi = C \|g\|_{V_{\gamma}^1(B)^*}^2. \quad (7.98) \quad \square$$

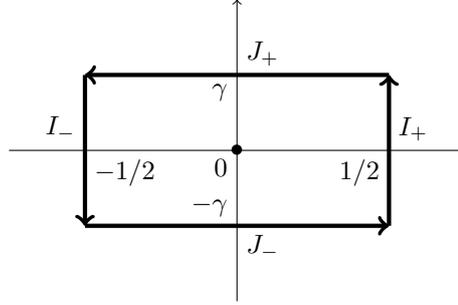


FIGURE 7.4 – Segments I_{\pm} et J_{\pm} ainsi que le chemin d'intégration utilisés dans la démonstration du théorème 7.25

Le théorème 7.25 fournit donc le comportement quand y_1 tend vers $\pm\infty$ des fonctions de $W(B)$. En particulier, elles ont un comportement linéaire lorsque y_1 tend vers ∞ et un comportement linéaire plus oscillant (donné par le terme en w_1) lorsque y_1 tend vers $+\infty$. Les fonctionnelles ℓ_D^{\pm} peuvent être interprétées comme les traces en $y_1 = \pm\infty$ (D pour Dirichlet), tandis que les fonctions ℓ_N^{\pm} peuvent être comprises comme des flux en $y_1 = \pm\infty$ (N pour Neumann). D'ailleurs nous disposons d'une formule de type formule de Green faisant intervenir ces fonctionnelles comme des termes de bord à l'infini :

Proposition 7.26. *Soient $(u, v) \in W(B)^2$. Alors*

$$\langle -\nabla \cdot (a\nabla u), v \rangle + \sum_{\sigma=\pm} \sigma \ell_N^{\sigma}(u) \ell_D^{\sigma}(v) = \langle -\nabla \cdot (a\nabla v), u \rangle + \sum_{\sigma=\pm} \sigma \ell_N^{\sigma}(v) \ell_D^{\sigma}(u), \quad (7.99)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $W(B)^*$ et $W(B)$.

Démonstration. Voir l'annexe 7.B. □

7.2.5 Caractère bien posé dans les espaces à poids

Nous pouvons maintenant enfin fournir une généralisation du résultat du lemme 7.3 aux espaces $V_{\pm}^1(B)$. Nous souhaitons donc résoudre des problèmes de la forme : « trouver $u \in V_{\pm}^1(B)$ tel que $-\nabla \cdot (a\nabla u) = g$ où $g \in V_{\pm}^1(B)^*$ ».

Remarquons immédiatement qu'il n'y a pas unicéité de la solution car les fonctions constantes (qui sont bien dans $V_+^1(B)$) sont des solutions non-triviales du problème homogène. Il faut donc imposer des conditions supplémentaires permettant d'assurer l'unicéité, grâce aux fonctionnelles ℓ_D^\pm et ℓ_N^\pm . Nous définissons

$$\langle \ell_X(u) \rangle := \frac{\ell_X^+(u) + \ell_X^-(u)}{2} \quad \text{et} \quad [\ell_X(u)] := \ell_X^+(u) - \ell_X^-(u) \quad \text{pour } X = D, N, \quad (7.100)$$

qui peuvent être vues comme la moyenne et le saut des flux à l'infini. Ces quantités apparaîtront naturellement dans le résultat d'existence-unicéité que nous allons établir dans la suite ainsi que dans les calculs des sections suivantes.

Remarque 7.27. Nous avons $\langle \ell_D(1) \rangle = 1$ et $\langle \ell_N(1) \rangle = 0$.

Nous avons vu que les constantes sont des solutions non triviales du problème homogène. Nous pouvons en construire une autre qui est linéairement indépendante des constantes, en remarquant que pour $y_1 < 0$, l'équation $-\nabla \cdot (a\nabla u)$ devient simplement $-a_0\Delta u$ dont une solution non triviale (dans $V_{+\gamma}^1(B)$) est y_1 ; et que pour $y_1 > 0$, a est périodique et une solution non triviale (dans $V_{-\gamma}^1(B)$) de $-\nabla \cdot (a\nabla u)$ est donnée par $y_1 + w_1$ d'après (7.7).

Proposition 7.28. *Il existe une unique fonction $\mathcal{N} \in V_+^1(B)$ satisfaisant $-\nabla \cdot (a\nabla \mathcal{N}) = 0$ ainsi que les conditions à l'infini $\langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle = 0$ et $\langle \ell_N(\mathcal{N}) \rangle = 1$.*

Démonstration. Nous nous ramenons au cadre variationnel classique du lemme 7.3 en retranchant les termes non-évanescents. Définissons

$$\phi(y) = \psi_-(y_1) \frac{y_1}{a_0} + \psi_+(y_1) \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*} \in V_+^1(B), \quad (7.101)$$

où ψ^\pm sont des fonctions de troncature définies par (7.27). D'après la discussion ci-dessus juste avant l'énoncé de la proposition, $g := -\nabla \cdot (a\nabla \phi)$ est à support compact inclus dans $\{\mathbf{y} \in B : 1 \leq |y_1| \leq 2\}$, donc $g \in \mathcal{V}(B)^*$. Appliquons alors le lemme 7.3. Comme forme linéaire Φ sur $\mathcal{V}(B)$, nous prenons $\langle \ell_D(\cdot) \rangle$ (nous avons bien $\langle \ell_D(1) \rangle = 1$). De plus, nous avons $\langle g, 1 \rangle = \langle a\nabla \phi, \nabla 1 \rangle = 0$. D'après le lemme 7.3, il existe une unique fonction $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{V}(B)$ telle que $-\nabla \cdot (a\nabla \mathcal{N}_0) = g$ et $\Phi(\mathcal{N}_0) = \langle \ell_D(\mathcal{N}_0) \rangle = 0$. Définissons alors $\mathcal{N} := \phi + \mathcal{N}_0$. Il est clair que cette fonction convient par construction (en remarquant que $\langle \ell_D(\phi) \rangle = 0$) et l'unicéité est une conséquence de l'unicéité de la solution dans le lemme 7.3. \square

Dans la suite, nous faisons référence à \mathcal{N} comme fonction profil, ou simplement profil. Remarquons que contrairement aux constantes, cette fonction dépend des caractéristiques des milieux Ω^\pm .

Il y a donc (au moins) deux fonctions linéairement indépendantes 1 et \mathcal{N} solutions non triviales du problème homogène. Notons qu'elles satisfont les identités

$$\langle \ell_D(1) \rangle = 1, \quad [\ell_D(1)] = 0, \quad \langle \ell_N(1) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad [\ell_N(1)] = 0 \quad (7.102)$$

ainsi que

$$\langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle = 0, \quad [\ell_D(\mathcal{N})] \neq 0, \quad \langle \ell_N(\mathcal{N}) \rangle = 1 \quad \text{et} \quad [\ell_N(\mathcal{N})] = 0. \quad (7.103)$$

(a priori)

Nous pouvons en fait montrer que l'espace des solutions du problème homogène est engendré par ces deux fonctions.

Proposition 7.29. *Soit $u \in V_+^1(B)$ telle que $-\nabla \cdot (a\nabla u) = 0$. Alors $u = \langle \ell_D(u) \rangle + \langle \ell_N(u) \rangle \mathcal{N}$.*

Démonstration. Soit $v := u - \langle \ell_D(u) \rangle - \langle \ell_N(u) \rangle \mathcal{N}$. Par construction, $-\nabla \cdot (a\nabla v) = 0$ et $\langle \ell_D(v) \rangle = \langle \ell_N(v) \rangle = 0$. En appliquant la formule de Green (7.99) à 1 et v d'une part et à \mathcal{N} et v d'autre part et en prenant en compte les identités (7.102) et (7.103), nous obtenons $[\ell_D(v)] = [\ell_N(v)] = 0$ d'où $\ell_D^\pm(v) = \ell_N^\pm(v) = 0$. Par le théorème 7.25, $v \in V_\gamma^1(B) \cap V_{-\gamma}^1(B) \subset \mathcal{V}(B)$, donc v est une solution variationnelle du problème homogène au sens du lemme 7.3. Par unicéité, nous avons bien $v = 0$. \square

Le résultat précédent suggère donc d'imposer $\langle \ell_D(\cdot) \rangle$ et $\langle \ell_N(\cdot) \rangle$ comme conditions afin de garantir l'unicité du problème. Ce faisant, nous obtenons notre résultat principal d'existence-unicité :

Théorème 7.30. *Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $g \in V_+^1(B)^*$, il existe une unique fonction $u \in V_+^1(B)$ satisfaisant*

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = g, \quad \langle \ell_D(u) \rangle = \alpha \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(u) \rangle = \beta. \quad (7.104)$$

De plus il y a continuité de la solution de ce problème par rapport aux données : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{V_+^1(B)} \leq C (|\alpha| + |\beta| + \|g\|_{V_+^1(B)^*}). \quad (7.105)$$

Démonstration. L'unicité de la solution est une conséquence directe du lemme 7.29. En considérant une nouvelle inconnue $u - \langle \ell_D(u) \rangle - \langle \ell_N(u) \rangle \mathcal{N}$ au lieu de u , nous pouvons supposer sans nuire à la généralité que $\alpha = \beta = 0$ et il faut alors montrer qu'il existe $u \in V_+^1(B)$ telle que $-\nabla \cdot (a\nabla u) = g$, $\langle \ell_D(u) \rangle = 0$ et $\langle \ell_N(u) \rangle = 0$. Nous suivons la démarche de la démonstration de la proposition 7.28 en considérant la fonction

$$\phi(\mathbf{y}) := -\psi_-(y_1) \frac{y_1}{2a_0} + \psi_+(y_1) \frac{y_1 + w_1^1(\mathbf{y})}{2a_{11}^*}. \quad (7.106)$$

Alors $\phi \in V_+^1(B)$ et $h := -\nabla \cdot (a\nabla \phi) \in V_+^1(B)^*$. Par ailleurs, $\ell_D^\pm(\phi) = 0$, $\langle \ell_N(\phi) \rangle = 0$ et $[\ell_N(\phi)] = 1$. Enfin, en appliquant la formule de Green (7.99) à ϕ et 1, nous avons $\langle h, 1 \rangle = 1$. Posons alors $g_* = g - \langle g, 1 \rangle h$ de sorte que $\langle g_*, 1 \rangle = 0$. Comme de plus $g_* \in V_+^1(B)^* \subset \mathcal{V}(B)^*$, d'après le lemme 7.3, il existe un unique $u \in \mathcal{V}(B)$ tel que $-\nabla \cdot (a\nabla u) = g$ et $\langle \ell_D(u) \rangle = 0$ avec une dépendance continue par rapport à g . Pour conclure, il suffit de poser

$$u := u + \langle g, 1 \rangle \phi, \quad (7.107)$$

qui vérifie par construction $-\nabla \cdot (a\nabla u) = g$. La dépendance continue de u vis-à-vis de g est alors une conséquence de la dépendance continue de u par rapport à g , ainsi que de la continuité des fonctionnelles ℓ_D^\pm et ℓ_N^\pm donnée par le théorème 7.25. \square

Concluons cette partie en donnant deux formules explicites pour les sauts de ℓ_D^\pm et ℓ_N^\pm .

Lemme 7.31. *Pour tout $u \in W(B)$, nous avons*

$$[\ell_N(u)] = \langle \nabla \cdot (a\nabla u), 1 \rangle \quad \text{et} \quad [\ell_D(u)] = [\ell_D(\mathcal{N})] \langle \ell_N(u) \rangle + \langle \nabla \cdot (a\nabla u), \mathcal{N} \rangle. \quad (7.108)$$

Démonstration. Il s'agit d'une application directe de la formule de Green (7.99) appliquée d'une part à u et à 1 et d'autre part à u et à \mathcal{N} , en utilisant les identités (7.102) et (7.103). \square

Nous appelons parfois relations de compatibilité les relations (7.108), de manière abusive (car elles sont des conséquences de la formule de Green (7.99) et ne sont pas des conditions nécessaires d'existence pour (7.104)).

7.3 Construction des trois premiers termes de champ proche

Nous disposons maintenant d'un cadre fonctionnel rigoureux pour donner un sens aux équations de champ proche (7.15) qui autorise les comportements croissants qui sont nécessaires afin de pouvoir imposer les conditions de raccord (7.25) et (7.26).

Dans cette section nous construisons rigoureusement les trois premiers termes de champ proche U_0 , U_1 et U_2 , en utilisant bien entendu les résultats de la section précédente. Dans celle-ci, nous n'avons pas considéré la variable x_2 qui apparaît comme un paramètre dans les équations (7.15). Afin de l'inclure de nouveau, nous allons chercher les termes de champ proche dans l'espace $C^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$, c'est-à-dire l'espace des fonctions $U: (x_2, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times B \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour presque tout $\mathbf{y} \in B$, $U(\cdot, \mathbf{y}) \in C^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $x_2 \in \mathbb{R}^2$, $U(x_2, \cdot) \in V_+^1(B)$.

Dans cette section, nous supposons que les termes liés aux champs lointains apparaissant dans (7.25) et (7.25) seront réguliers par rapport à la variable x_2 , ce qui sera vérifié *a posteriori* dans la section suivante.

7.3.1 Construction du terme d'ordre 0

La première équation de (7.15) avec les premières conditions de raccord (7.25) et (7.26) nous donne alors une condition nécessaire et suffisante pour que U_0 existe.

Proposition 7.32. *Il existe un unique $U_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$ solution de*

$$-\nabla \cdot (a \nabla U_0) = 0, \quad \text{dans } B, \quad (7.109)$$

ayant les comportements

$$\begin{cases} U_0(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} u_0^-|_\Gamma(x_2), \\ U_0(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} \hat{u}_0^+|_\Gamma(x_2), \end{cases} \quad (7.110)$$

si, et seulement si,

$$u_0^-|_\Gamma(x_2) = \hat{u}_0^+|_\Gamma(x_2), \quad \text{pour tout } x_2 \in \Gamma. \quad (7.111)$$

Si c'est le cas, U_0 est donnée par (7.113).

Démonstration. Supposons qu'un tel $U_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$ existe. Pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$, puisque $U_0(x_2, \cdot)$ est solution de l'équation homogène (7.109) d'après le lemme 7.29, nous avons $U_0(x_2, \cdot) = \langle \ell_D(U_0) \rangle(x_2) + \langle \ell_N(U_0) \rangle(x_2) \mathcal{N}(\cdot)$. De plus, les comportements (7.110) impliquent que

$$\langle \ell_D(U_0) \rangle = \frac{u_0^-|_\Gamma + \hat{u}_0^+|_\Gamma}{2} \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(U_0) \rangle = 0. \quad (7.112)$$

Nous avons alors $U(x_2, \cdot) = \langle \ell_D(U_0) \rangle(x_2)$ qui est constant par rapport à \mathbf{y} . Cela implique alors immédiatement que $[\ell_D(U_0)](x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$, ce qui implique donc directement (7.111). Réciproquement, si (7.111) est vérifiée, alors il est immédiat que $U_0(x_2, \cdot) = u_0^-|_\Gamma(x_2) = \hat{u}_0^+|_\Gamma(x_2)$ est bien solution de (7.109). L'unicité est alors une conséquence immédiate du théorème 7.30. \square

Remarque 7.33. Nous aurions pu ici, comme nous allons le faire dans la suite, utiliser la deuxième relation de compatibilité pour en déduire que $[\ell_D(U_0)] = [\ell_D(\mathcal{N})] \langle \ell_N(U_0) \rangle + \langle 0, \mathcal{N} \rangle = 0$ au lieu d'utiliser le fait que U_0 est constant par rapport à \mathbf{y} .

Dans la suite, nous supposons donc que la condition (7.111) est vérifiée. Il s'agit là d'une condition de transmission classique à travers Γ qui exprime simplement le fait que les traces sur Γ des champs lointains à l'ordre 0 se raccordent. Par souci de simplification, nous noterons $u_0|_\Gamma := \hat{u}_0^+|_\Gamma = u_0^-|_\Gamma$, de sorte que U_0 s'écrit de manière explicite

$$U_0(x_2, \mathbf{y}) = u_0|_\Gamma(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in B. \quad (7.113)$$

En particulier, ce terme est constant par rapport à \mathbf{y} .

7.3.2 Construction du terme d'ordre 1

Continuons alors la construction de nos termes de champ proche. La deuxième équation de (7.15) est $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} U_1 = -\tilde{L}_{\mathbf{y}, \mathbf{x}} U_0 = \partial_{x_2} u_0|_\Gamma \partial_{y_2} a$ en utilisant l'expression explicite (7.113) de U_0 . En considérant également les deuxièmes conditions de raccord (7.25) et (7.26), nous avons le résultat suivant.

Proposition 7.34. *Il existe un unique $U_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$ solution de*

$$-\nabla \cdot (a \nabla U_1) = \partial_{x_2} u_0|_\Gamma \partial_{y_2} a, \quad \text{dans } B, \quad (7.114)$$

ayant les comportements

$$\begin{cases} U_1(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} u_1^-|_\Gamma(x_2) + y_1 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma(x_2), \\ U_1(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} \hat{u}_1^+|_\Gamma(x_2) + (y_1 + w_1(\mathbf{y})) \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma(x_2) + \partial_{x_2} u_0|_\Gamma(x_2) w_2(\mathbf{y}), \end{cases} \quad (7.115)$$

si, et seulement si,

$$(A^* \nabla \hat{u}_0^+) \cdot \mathbf{n} - a_0 \nabla u_0^- \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (7.116)$$

et

$$\hat{u}_1^+|_\Gamma - u_1^-|_\Gamma = C_1 \frac{(A^* \nabla \hat{u}_0^+) \cdot \mathbf{n} + a_0 \nabla u_0^- \cdot \mathbf{n}}{2} + C_2 \partial_{x_2} u_0|_\Gamma, \quad (7.117)$$

où les C_j sont des constantes définies par (7.124). Si c'est le cas, U_1 est donné par (7.125).

La démonstration de cette proposition se fait en plusieurs étapes.

Réduction à une équation homogène. Remarquons tout d'abord que la présence du terme $\partial_{y_2} a$ dans (7.114) est gênante. En effet, puisque a est une fonction oscillante pour $y_1 > 0$, $\partial_{y_2} a$ n'appartient pas à $V_+^1(B)^*$ (elle n'est pas évanescente) et l'équation (7.114) ne rentre pas dans le cadre du théorème 7.30 (à x_2 fixé). De même, la présence du terme $\partial_{x_2} u_0|_\Gamma w_2(\mathbf{y})$ dans (7.115) pourrait poser des problèmes puisque ce comportement ne correspond pas à ceux donnés dans le théorème 7.25.

À ce stade, il faut donc trouver une solution particulière pour se ramener au cas que nous pouvons traiter. Nous pouvons remarquer que pour $y_1 < 0$, $\partial_{y_2} a = 0$ donc une solution correspondante est simplement la solution nulle et que pour $y_1 > 0$, l'équation $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} U = \partial_{y_2} a$ est la même que celle du problème de cellule (7.7) dont une solution est $U = w_2$. Ainsi, $\partial_{y_2} a - L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(\psi^+ w_2)$, où ψ^+ est la fonction de troncature définie par (7.27), est à support compact donc appartient à $V_+^1(B)$. Nous pouvons donc introduire une nouvelle fonction profil $\mathcal{P}_1 \in V_+^1(B)$, similaire à \mathcal{N} , définie par la proposition suivante :

Proposition 7.35. *Il existe une unique solution $\mathcal{P}_1 \in V_+^1(B)$ du problème*

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \mathcal{P}_1 = \partial_{y_2} a - L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(\psi^+ w_2), \\ \langle \ell_D(\mathcal{P}_1) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(\mathcal{P}_1) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.118)$$

où ψ^+ est la fonction de troncature définie par (7.27). De plus, les quantités $[\ell_D(\mathcal{P}_1)]$ et $[\ell_N(\mathcal{P}_1)]$ ne dépendent pas de la fonction de troncature ψ^+ et nous avons la formule explicite

$$[\ell_N(\mathcal{P}_1)] = -a_{12}^*. \quad (7.119)$$

Démonstration de la proposition 7.35. L'existence et l'unicité de \mathcal{P}_1 sont simplement données par le théorème 7.30, le second membre de l'équation (7.118) ayant été construit pour être dans $V_+^1(B)$. En ce qui concerne les résultats sur $[\ell_D(\mathcal{P}_1)]$ et $[\ell_N(\mathcal{P}_1)]$, voir l'annexe 7.B. \square

Par construction, nous avons $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(\psi^+ w_2 + \mathcal{P}_1) = \partial_{y_2} a$, c'est-à-dire que $\psi^+ w_2 + \mathcal{P}_1$ est une solution particulière de (7.114), à la constante $\partial_{x_2} u_0|_\Gamma$ près. Posons donc $V_1 := U_1 - (\psi^+ w_2 + \mathcal{P}_1) \partial_{x_2} u_0|_\Gamma$. Par construction, V_1 est solution de l'équation homogène $-\nabla \cdot (a \nabla V_1) = 0$. En ce qui concerne son comportement à l'infini, nous avons alors

$$\begin{cases} V_1(x_2, y_{1,2}) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} [u_1^-|_\Gamma(x_2) + \partial_{x_2} u_0|_\Gamma \ell_D^-(\mathcal{P}_1)] + y_1 [\partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma(x_2) + \partial_{x_2} u_0|_\Gamma \ell_N^-(\mathcal{P}_1)], \\ V_1(x_2, y_{1,2}) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} [\hat{u}_1|_\Gamma(x_2) + \partial_{x_2} u_0|_\Gamma \ell_D^+(\mathcal{P}_1)] + (y_1 + w_1(\mathbf{y})) [\partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma(x_2) + \partial_{x_2} u_0|_\Gamma \ell_N^+(\mathcal{P}_1)]. \end{cases} \quad (7.120)$$

Notons que le terme en $\partial_{x_2} u_0|_\Gamma w_2(\mathbf{y})$ présent dans (7.115) n'apparaît plus. Nous nous sommes donc ramenés à la situation d'une équation homogène, comme précédemment pour U_0 .

Sens direct. Supposons donc qu'il existe un tel $U_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$. Alors nous avons vu qu'il existe $V_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$ solution de l'équation homogène $-\nabla \cdot (a \nabla V_1) = 0$ et ayant les comportements (7.120). Nous pouvons donc écrire que $V_1(x_2, \cdot) = \langle \ell_D(V_1) \rangle(x_2) + \langle \ell_N(V_0) \rangle(x_2) \mathcal{N}(\cdot)$ en utilisant le lemme 7.29. De

plus, les comportements (7.120) impliquent que

$$\begin{cases} \langle \ell_D(V_1) \rangle = \frac{u_1^-|_\Gamma + \hat{u}_1^+|_\Gamma}{2} \\ [\ell_D(V_1)] = \hat{u}_1^+|_\Gamma - u_1^-|_\Gamma + \partial_{x_2} u_0|_\Gamma [\ell_D(\mathcal{P}_1)], \\ \langle \ell_N(V_1) \rangle = \frac{a_0 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma + a_{11}^* \hat{\partial}_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma}{2}, \\ [\ell_N(V_1)] = a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma - a_0 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma - a_{12}^* \partial_{x_2} u_0|_\Gamma. \end{cases} \quad (7.121)$$

Utilisons alors les relations de compatibilité (7.108). La première s'écrit simplement $[\ell_N(V_1)] = 0$, c'est-à-dire

$$a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma + a_{12}^* \partial_{x_2} \hat{u}_0^+|_\Gamma - a_0 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma = 0. \quad (7.122)$$

Cette condition est exactement (7.116), en faisant apparaître les dérivées normale par rapport à Γ .

La deuxième s'écrit $[\ell_D(V_1)] = [\ell_D(\mathcal{N})] \langle \ell_N(V_1) \rangle$, c'est-à-dire

$$\frac{a_0 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma + a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma}{2} [\ell_D(\mathcal{N})] + \partial_{x_2} u_0|_\Gamma [\ell_D(\mathcal{P}_1)] = \hat{u}_1^+|_\Gamma - u_1^-|_\Gamma. \quad (7.123)$$

Cette condition est exactement (7.117), en faisant apparaître le flux $(A^* \nabla \hat{u}_0^+) \cdot \mathbf{n}$ et en posant

$$\begin{cases} C_1 := [\ell_D(\mathcal{N})], \\ C_2 := [\ell_D(\mathcal{P}_1)] - \frac{a_{12}^*}{2} [\ell_D(\mathcal{N})]. \end{cases} \quad (7.124)$$

Sens indirect. Supposons maintenant que (7.116) et (7.117) soient vérifiées. Alors

$$U_1(x_2, \mathbf{y}) = \langle \ell_D(V_1) \rangle(x_2) + \langle \ell_N(V_1) \rangle(x_2) \mathcal{N}(\mathbf{y}) + (\psi^+(y_1) w_2(\mathbf{y}) + \mathcal{P}_1(\mathbf{y})) \partial_{x_2} u_0|_\Gamma(x_2), \quad (7.125)$$

est solution par construction de V_1 et \mathcal{P}_1 , avec $\langle \ell_D(V_1) \rangle$ et $\langle \ell_N(V_1) \rangle$ donnés par (7.121). L'unicité est alors une conséquence directe de l'unicité de V_1 , conséquence du théorème 7.30.

Cela achève la démonstration de la proposition 7.34. Nous supposerons dans la suite que (7.116) et (7.117) sont satisfaites. Notons que la condition (7.116) exprime simplement le fait que les flux sur Γ des champs lointains à l'ordre 0 se raccordent. Il s'agit là d'une condition de transmission tout-à-fait classique. La condition (7.117) exprime quant à elle un saut non-homogène des traces des champs lointains à l'ordre 1.

7.3.3 Construction du terme d'ordre 2

Attaquons-nous maintenant à U_2 . La troisième équation de (7.15) est $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} U_2 = -\tilde{L}_{\mathbf{y}, \mathbf{x}} U_1 - \tilde{L}_{\mathbf{x}, \mathbf{x}} U_0$. En utilisant les formes explicites (7.113) et (7.125), nous obtenons l'équation vérifiée par U_2 :

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} U_2 &= \partial_{x_2} \alpha_1 \partial_{y_2} a \\ &\quad + \partial_{x_2} \beta_1 (\partial_{y_2} (a \mathcal{N}) + a \partial_{y_2} \mathcal{N}) \\ &\quad + \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma (\partial_{y_2} (a(\psi^+ w_2 + \mathcal{P}_1)) + a \partial_{y_2} (\psi^+ w_2 + \mathcal{P}_1) + a), \\ &\quad + \omega^2 u_0|_\Gamma \rho, \end{aligned} \quad (7.126)$$

avec $\alpha_1 := \langle \ell_D(V_1) \rangle$ et $\beta_1 := \langle \ell_N(V_1) \rangle$ définis par (7.121), c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \frac{u_1^-|_\Gamma + \hat{u}_1^+|_\Gamma}{2}, \quad (7.127)$$

et

$$\beta_1 = \frac{a_0 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma + a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma}{2}. \quad (7.128)$$

Proposition 7.36. *Il existe un unique $U_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$ solution de (7.126) ayant les comportements*

$$\begin{cases} U_2(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} q_2^-(x_2, y_1) + \mu_2^-(x_2, y_1), \\ U_2(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} q_2^+(x_2, y_1) + \mu_2^+(\mathbf{y}, x_2), \end{cases} \quad (7.129)$$

où q_2^\pm et μ_2^\pm sont définis par (7.20) et (7.24), et donnés par (7.155) si, et seulement si,

$$(A^* \nabla \hat{u}_1^+) \cdot \mathbf{n} - a_0 \nabla u_1^- \cdot \mathbf{n} = C_3 \partial_{x_2} \frac{(A^* \nabla \hat{u}_0^+) \cdot \mathbf{n} + a_0 \nabla u_0^- \cdot \mathbf{n}}{2} + C_4 \partial_{x_2}^2 u_0|_\Gamma + \omega^2 C_5 u_0|_\Gamma. \quad (7.130)$$

où les C_j sont des constantes définies par (7.151), et

$$\begin{aligned} \hat{u}_2^+|_\Gamma - u_2^-|_\Gamma &= C_1 \frac{(A^* \nabla \hat{u}_1^+) \cdot \mathbf{n} + a_0 \nabla u_1^- \cdot \mathbf{n}}{2} + C_2 \partial_{x_2} \frac{u_1^-|_\Gamma + \hat{u}_1^+|_\Gamma}{2} \\ &+ D_1 \partial_{x_2} \frac{(A^* \nabla \hat{u}_0^+) \cdot \mathbf{n} + a_0 \nabla u_0^- \cdot \mathbf{n}}{2} + D_2 \partial_{x_2}^2 u_0|_\Gamma + \omega^2 D_3 u_0|_\Gamma. \end{aligned} \quad (7.131)$$

où les C_j et les D_j sont des constantes définies par (7.124) et (7.154).

Pour démontrer cette proposition, nous suivons exactement la même démarche que pour la proposition 7.34. En particulier, nous construisons des solutions particulières pour nous ramener au cadre du théorème 7.30. Pour construire U_1 , nous avons utilisé l'équation $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} w_2 + \partial_{y_2} a$ du problème de cellule (7.7) et nous avons besoin d'identités similaires dans la suite :

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(w_2) + \partial_{y_2} a = 0, \\ L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \left(\frac{y_1^2}{2} + y_1 w_1(\mathbf{y}) + \theta_{11}(\mathbf{y}) \right) = -a_{11}^*, \\ L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(2\theta_{12}(\mathbf{y}) + y_1 w_2(\mathbf{y})) = a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} w_1 + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y}) w_1) + y_1 \partial_{y_2} a(\mathbf{y}) - 2a_{12}^*, \\ L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \theta_{22} = a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} w_2 + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y}) w_2) + a(\mathbf{y}) - a_{22}^*, \end{cases} \quad (7.132)$$

valables pour tout $y_1 \geq 0$ et pour tout $y_2 \in (0, 1)$. Ces identités se démontrent sans difficulté en revenant aux définitions des problèmes de cellules (7.7) et (7.11) et en se servant des symétries $\theta_{12} = \theta_{21}$ et $a_{12}^* = a_{21}^*$ pour la troisième identité.

L'équation (7.126) comporte quatre termes que nous allons regarder séparément.

Premier terme L'équation $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} U = \partial_{y_2} a$ a pour solution $U = \psi^+ w_2 + \mathcal{P}_1$, il s'agit là de la même équation que pour l'ordre 1.

Nous faisons l'étude de la quatrième partie maintenant car elle est plus simple que les deux autres restantes et permet de comprendre la démarche.

Quatrième terme Considérons l'équation $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} U = \rho$. Pour $y_1 < 0$, il s'agit simplement de $-\Delta U = \rho_0$ dont une solution est $-\rho_0 y_1^2 / (2a_0)$. Pour $y_1 > 0$, en combinant le problème de cellule (7.12) qui a γ pour solution et la deuxième identité de (7.132), nous trouvons comme solution particulière $\gamma + (y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}) / a_{11}^*$. Nous pouvons donc introduire un profil \mathcal{P}_2^3 comme nous l'avons fait pour \mathcal{P}_1 , d'après la proposition suivante :

Proposition 7.37. *Il existe une unique solution $\mathcal{P}_2^3 \in V_+^1(B)$ du problème*

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \mathcal{P}_2^3 = \rho - \left[L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \left(\psi^- \frac{\rho_0 y_1^2}{2a_0} \right) + L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \left(\psi^+ \left(\gamma + \frac{y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}}{a_{11}^*} \right) \right) \right], \\ \langle \ell_D(\mathcal{P}_2^3) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(\mathcal{P}_2^3) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.133)$$

De plus, les quantités $[\ell_D(\mathcal{P}_2^3)]$ et $[\ell_N(\mathcal{P}_2^3)]$ ne dépendent pas du choix des fonctions de troncature ψ^- et ψ^+ .

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 7.35. \square

Finalement, une solution particulière de $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \rho$ est donnée par

$$\mathfrak{U}_2^3 := \psi^- \frac{\rho_0 y_1^2}{2a_0} + \psi^+ \left(\gamma + \frac{y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}}{a_{11}^*} \right) + \mathcal{P}_2^3. \quad (7.134)$$

Deuxième terme Regardons maintenant l'équation $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \partial_{y_2}(a\mathcal{N}) + a\partial_{y_2}\mathcal{N}$. Il n'est pas possible de trouver une solution particulière directement, mais seulement au comportement évanescents de \mathcal{N} près (ce qui n'a pas d'importance, puisque les fonctions évanescents sont dans $V_+^1(B)^*$, comme celles à support compact). Plus précisément, le comportement lorsque y_1 tend vers $-\infty$ de \mathcal{N} est donné par $[\ell_D(\mathcal{N})]/2 + y_1/a_0$ et lorsque y_1 tend vers $+\infty$ par $[\ell_D(\mathcal{N})]/2 + (y_1 + w_1)/a_{11}^*$. En injectant ces comportements dans $\partial_{y_2}(a\mathcal{N}) - a\partial_{y_2}\mathcal{N}$, nous nous retrouvons avec 0 pour $y_1 \leq 0$ et

$$L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2} \partial_{y_2} a + \frac{1}{a_{11}^*} [a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} w_1 + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y}) w_1) + y_1 \partial_{y_2} a(\mathbf{y})], \quad (7.135)$$

pour $y_1 \geq 0$ dont une solution particulière est

$$\frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2} w_2 + \frac{1}{a_{11}^*} [2\theta_{12} + y_1 w_2 - 2a_{12}^*(y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11})], \quad (7.136)$$

d'après les identités (7.132). Définissons alors un nouveau profil.

Proposition 7.38. *Il existe une unique solution $\mathcal{P}_2^1 \in V_+^1(B)$ du problème*

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\mathcal{P}_2^1 = -L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left[\psi^+ \left(\frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2} w_2 + \frac{1}{a_{11}^*} [2\theta_{12} + y_1 w_2 - 2a_{12}^*(y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11})] \right) \right] \\ \quad + \partial_{y_2}(a\mathcal{N}) - a\partial_{y_2}\mathcal{N}, \\ \langle \ell_D(\mathcal{P}_2^1) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(\mathcal{P}_2^1) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.137)$$

De plus, les quantités $[\ell_D(\mathcal{P}_2^1)]$ et $[\ell_N(\mathcal{P}_2^1)]$ ne dépendent pas du choix des fonctions de troncature ψ^- et ψ^+ .

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 7.35. \square

Finalement, une solution particulière de $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \partial_{y_2}(a\mathcal{N}) - a\partial_{y_2}\mathcal{N}$ est donnée par

$$\mathfrak{U}_1^2 := \psi^+ \left(\frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2} w_2 + \frac{1}{a_{11}^*} [2\theta_{12} + y_1 w_2 + 2a_{12}^*(y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11})] \right) + \mathcal{P}_2^1. \quad (7.138)$$

Troisième terme Enfin, regardons l'équation $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \partial_{y_2}(a(\psi^+ w_2 + \mathcal{P}_1)) + a\partial_{y_2}(\psi^+ w_2 + \mathcal{P}_1) + a$. Elle se décompose en deux morceaux. Le premier est identique au cas précédent, avec \mathcal{P}_1 à la place de \mathcal{N} : une solution particulière de $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \partial_{y_2}(a\mathcal{P}_1) + a\partial_{y_2}\mathcal{P}_1$ est donnée par

$$\psi^+ \left(\frac{[\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{2} w_2 + \frac{[\ell_N(\mathcal{P}_1)]}{2a_{11}^*} [2\theta_{12} + y_1 w_2 + 2a_{12}^*(y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11})] \right) + \mathcal{Q}_1, \quad (7.139)$$

où \mathcal{Q}_1 est l'unique solution dans $V_+^1(B)$ du problème

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\mathcal{Q}_1 = -L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left[\psi^+ \left(\frac{[\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{2} w_2 + \frac{[\ell_N(\mathcal{P}_1)]}{2a_{11}^*} [2\theta_{12} + y_1 w_2 + 2a_{12}^*(y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11})] \right) \right] \\ \quad + \partial_{y_2}(a\mathcal{P}_1) + a\partial_{y_2}\mathcal{P}_1, \\ \langle \ell_D(\mathcal{Q}_1) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(\mathcal{Q}_1) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.140)$$

La deuxième partie est $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \partial_{y_2}(a\psi^+w_2) + a\partial_{y_2}(\psi^+w_2) + a$. Pour $y_1 \leq 0$ on a simplement $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = a_0$ qui a pour solution $-y_1^2/2$ et à droite $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \partial_{y_2}(aw_2) + a\partial_{y_2}w_2 + a$ qui a pour solution

$$\theta_{22} + \frac{a_{22}^*}{a_{11}^*}(y_1^2/2 + y_1w_1 + \theta_{11}), \quad (7.141)$$

d'après la dernière identité de (7.132). Introduisons donc \mathcal{Q}_2 l'unique solution dans $V_+^1(B)$ de

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\mathcal{Q}_2 = -L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left[\psi^- \frac{y_1^2}{2} + \psi^+ \left(\theta_{22} + \frac{a_{22}^*}{a_{11}^*}(y_1^2/2 + y_1w_1 + \theta_{11}) \right) \right] \\ \quad + \partial_{y_2}(a\psi^+w_2) + a\partial_{y_2}(\psi^+w_2) + a, \\ \langle \ell_D(\mathcal{Q}_2) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(\mathcal{Q}_2) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.142)$$

Finalement, une solution de $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}U = \partial_{y_2}(a(\psi^+w_2 + \mathcal{P}_1) + a\partial_{y_2}(\psi^+w_2 + \mathcal{P}_1))$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_2^2 := \psi^+ & \left(\frac{[\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{2} w_2 + \frac{[\ell_N(\mathcal{P}_1)]}{2a_{11}^*} [2\theta_{12} + y_1w_2 + 2a_{12}^*(y_1^2/2 + y_1w_1 + \theta_{11})] \right) \\ & \psi^- \frac{y_1^2}{2} + \psi^+ \left(\theta_{22} + \frac{a_{22}^*}{a_{11}^*}(y_1^2/2 + y_1w_1 + \theta_{11}) \right) + \mathcal{P}_2^2, \end{aligned} \quad (7.143)$$

avec $\mathcal{P}_2^2 := \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$. Résumons la situation :

Proposition 7.39. *Il existe une unique solution \mathcal{Q}_1 (resp. \mathcal{Q}_2) au problème (7.140) (resp. (7.142)) ce qui définit de manière unique un profil $\mathcal{P}_2^2 = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$. De plus, les quantités $[\ell_D(\mathcal{P}_2^2)]$ et $[\ell_N(\mathcal{P}_2^2)]$ ne dépendent pas du choix des fonctions de troncature ψ^- et ψ^+ .*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 7.35. \square

Fin du calcul Définissons V_2 par

$$\begin{aligned} V_2(x_2, \mathbf{y}) = & U_2(x_2, \mathbf{y}) - \partial_{x_2}\alpha_1(x_2)(\psi^+(y_1)w_2(\mathbf{y}) + \mathcal{P}_1(\mathbf{y})) \\ & - \partial_{x_2}\beta_1(x_2)\mathfrak{U}_2^1(\mathbf{y}) \\ & - \partial_{x_2x_2}^2 u_0|_{\Gamma}(x_2)\mathfrak{U}_2^2(\mathbf{y}) \\ & - \omega^2 u_0|_{\Gamma}(x_2)\mathfrak{U}_2^3(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (7.144)$$

où \mathfrak{U}_2^1 , \mathfrak{U}_2^2 et \mathfrak{U}_2^3 sont définies respectivement par (7.138), (7.143) et (7.134). Par construction V_1 est solution de l'équation homogène $-\nabla \cdot (a\nabla V_2) = 0$ dans B . La question est maintenant de déterminer quel est son comportement en $y_1 = \pm\infty$.

Lors de la construction de U_1 , nous avons vu que le terme en $\partial_{x_2}u_0|_{\Gamma}w_2(\mathbf{y})$ présent dans (7.115) n'apparaissait plus dans (7.120) par construction. Ici, nous retrouvons le même phénomène : tous les termes qui ne sont pas des termes constants, linéaires en y_1 ou en w_1 dans le comportement (7.129) de U_2 en $y_1 = \pm\infty$ n'apparaîtront plus dans le comportement de V_1 en $y_1 = \pm\infty$.

- Regardons tout d'abord les termes en facteur de θ_{22} . Dans le comportement (7.129) de U_2 , ce terme est $\partial_{x_2x_2}^2 u_0|_{\Gamma}$. Pour le comportement de V_2 , d'après (7.144), seul \mathfrak{U}_2^2 contient un terme en θ_{22} , qui est également $\partial_{x_2x_2}^2 u_0|_{\Gamma}$.
- Maintenant examinons les termes en facteur de w_2 . Du côté du comportement (7.129) de U_2 , nous avons $\partial_{x_2}\hat{u}_1^+|_{\Gamma}$. Pour le comportement de V_2 , d'après (7.144), le terme en facteur est $\partial_{x_2}\alpha_1 + \beta_1[\ell_D(\mathcal{N})]/2 + \partial_{x_2x_2}^2 u_0|_{\Gamma}[\ell_D(\mathcal{P}_1)]/2$. Pour s'apercevoir qu'il s'agit de la même quantité, il suffit simplement de dériver la seconde identité de (7.122) par rapport à x_2 et d'utiliser les définitions (7.127) et (7.128) de α_1 et β_1 .
- Maintenant, étudions les termes en facteur de $2\theta_{12} + y_1w_1$. Pour le comportement (7.129) de U_2 , nous avons $\partial_{x_1x_2}^2 \hat{u}_0^+|_{\Gamma}$. Du côté du comportement de V_2 , d'après (7.144), nous avons $(\partial_{x_2}\beta_1 + \partial_{x_2x_2}^2 u_0|_{\Gamma}[\ell_N(\mathcal{P}_1)]/2)/a_{11}^*$ en facteur. Comme précédemment, il suffit simplement de dériver par rapport à x_2 la seconde identité de (7.123) pour voir qu'il s'agit bien là de la même quantité.

- Regardons alors les termes en $y_1^2/2$. Pour le comportement (7.129) de U_2 , nous avons $\partial_{x_1 x_1}^2 u_0^-|_\Gamma$. En ce qui concerne le comportement de V_2 , d'après (7.144), nous avons $u_0|_\Gamma \omega^2/a_0 + \partial_{x_2 x_2}^2 u_0^-|_\Gamma$. Il s'agit bien là de la même quantité car u_0^- est solution dans Ω^- de l'équation $-a_0 \Delta u_0^- - \omega^2 u_0^- = f$ (voir (7.3)) donc il suffit de prendre la trace sur Γ de cette équation pour constater qu'il s'agit bien là de la même quantité.
- Exactement de la même façon, nous pouvons montrer que les termes en $y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}$ et en γ présents d'une part dans le comportement (7.129) de U_2 et dans le comportement de V_2 sont les mêmes, en utilisant le fait que \hat{u}_0^+ est solution de l'équation homogénéisée (7.5) et en prenant la trace sur Γ de cette équation.

Finalement, le comportement de V_2 en $y_1 = \pm\infty$ est donné par

$$\begin{cases} \langle \ell_D(V_2) \rangle = \frac{u_2^-|_\Gamma + \hat{u}_2^+|_\Gamma}{2} - \langle \ell_D(\partial_{x_2} \alpha_1 \mathcal{P}_1 + \partial_{x_2} \beta_1 \mathcal{P}_2^1 + \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma \mathcal{P}_2^2 + \omega^2 u_0|_\Gamma \mathcal{P}_2^3) \rangle, \\ \ell_D(V_2) = \hat{u}_2^+|_\Gamma - u_2^-|_\Gamma - [\ell_D(\partial_{x_2} \alpha_1 \mathcal{P}_1 + \partial_{x_2} \beta_1 \mathcal{P}_2^1 + \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma \mathcal{P}_2^2 + \omega^2 u_0|_\Gamma \mathcal{P}_2^3)], \\ \langle \ell_N(V_2) \rangle = \frac{a_0 \partial_{x_1} u_1^-|_\Gamma + a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_1^+|_\Gamma}{2} - \langle \ell_N(\partial_{x_2} \alpha_1 \mathcal{P}_1 + \partial_{x_2} \beta_1 \mathcal{P}_2^1 + \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma \mathcal{P}_2^2 + \omega^2 u_0|_\Gamma \mathcal{P}_2^3) \rangle, \\ \ell_N(V_2) = a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_1^+|_\Gamma - a_0 \partial_{x_1} u_1^-|_\Gamma - [\ell_N(\partial_{x_2} \alpha_1 \mathcal{P}_1 + \partial_{x_2} \beta_1 \mathcal{P}_2^1 + \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma \mathcal{P}_2^2 + \omega^2 u_0|_\Gamma \mathcal{P}_2^3)]. \end{cases} \quad (7.145)$$

Maintenant que nous sommes ramenés à la situation précédente, nous pouvons raisonner comme lors de la construction de U_1 .

Sens direct. Supposons donc qu'il existe un $U_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$ solution de (7.126) et ayant les comportements (7.129). Nous avons vu qu'il existe $V_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, V_+^1(B))$ solution de l'équation homogène $-\nabla \cdot (a \nabla V_2) = 0$ et ayant les comportements (7.145). Utilisons alors les relations de compatibilité (7.108).

- La première relation de compatibilité s'écrit ici simplement $[\ell_N(V_V)] = 0$, c'est-à-dire, en utilisant $[\ell_N(\mathcal{P}_1)] = -a_{12}^*$, sous la forme

$$a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_1^+|_\Gamma - a_0 \partial_{x_1} u_1^-|_\Gamma = -a_{12}^* \partial_{x_2} \alpha_1 + \partial_{x_2} \beta_1 [\ell_N(\mathcal{P}_2^1)] + \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma [\ell_N(\mathcal{P}_2^2)] + \omega^2 u_0|_\Gamma [\ell_N(\mathcal{P}_2^3)]. \quad (7.146)$$

Nous pouvons transformer $\partial_{x_2} \alpha_1$ de la façon suivante : nous savons d'une part d'après (7.122) que

$$\beta_1 [\ell_D(\mathcal{N})] + \partial_{x_2} u_0|_\Gamma [\ell_D(\mathcal{P}_1)] = \hat{u}_1^+|_\Gamma - u_1^-|_\Gamma, \quad (7.147)$$

d'où

$$u_1^-|_\Gamma = \partial_{x_2} \hat{u}_1^+|_\Gamma - \partial_{x_2} \beta_1 [\ell_D(\mathcal{N})] - \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma [\ell_D(\mathcal{P}_1)]. \quad (7.148)$$

Nous avons donc, d'après (7.127),

$$\partial_{x_2} \alpha_1 = \frac{\partial_{x_2} u_1^-|_\Gamma + \partial_{x_2} \hat{u}_1^+|_\Gamma}{2} = \partial_{x_2} \hat{u}_1^+|_\Gamma - \partial_{x_2} \beta_1 \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2} - \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma \frac{[\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{2}. \quad (7.149)$$

Enfin, en utilisant (7.128), nous obtenons

$$\begin{aligned} a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_1^+|_\Gamma + a_{12}^* \partial_{x_2} \hat{u}_1^+|_\Gamma - a_0 \partial_{x_1} u_1^-|_\Gamma &= C_3 \partial_{x_2} \frac{a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma + a_{12}^* \partial_{x_2} \hat{u}_0^+|_\Gamma + a_0 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma}{2} \\ &\quad + C_4 \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma + \omega^2 C_5 u_0|_\Gamma, \end{aligned} \quad (7.150)$$

en définissant

$$\begin{cases} C_3 := [\ell_N(\mathcal{P}_2^1)] + a_{12}^* \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2}, \\ C_4 := [\ell_N(\mathcal{P}_2^2)] + a_{12}^* \frac{[\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{2} - (a_{12}^*)^2 \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{4} + a_{12}^* \frac{[\ell_N(\mathcal{P}_2^1)]}{2}, \\ C_5 := [\ell_N(\mathcal{P}_2^3)]. \end{cases} \quad (7.151)$$

En faisant apparaître les flux, (7.150) n'est rien d'autre que (7.130).

- La deuxième relation de compatibilité s'écrit ici simplement $[\ell_D(V_1)] = [\ell_D(\mathcal{N})]\langle \ell_N(V_2) \rangle$, c'est-à-dire, en utilisant le fait que $\langle \ell_N(\mathcal{P}_2^j) \rangle = 0$ pour $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \hat{u}_2^+|_\Gamma - u_2^-|_\Gamma &= [\ell_D(\mathcal{P}_1)]\partial_{x_2}\alpha_1 + \partial_{x_2}\beta_1[\ell_D(\mathcal{P}_2^1)] + \partial_{x_2x_2}^2u_0|_\Gamma[\ell_D(\mathcal{P}_2^2)] + \omega^2u_0|_\Gamma[\ell_D(\mathcal{P}_2^3)] \\ &\quad + [\ell_D(\mathcal{N})]\frac{a_0\partial_{x_1}u_1^-|_\Gamma + a_{11}^*\partial_{x_1}\hat{u}_1^+|_\Gamma}{2}. \end{aligned} \quad (7.152)$$

Nous pouvons faire le même genre de manipulation que pour la première relation de compatibilité et nous obtenons après quelques calculs que

$$\begin{aligned} \hat{u}_2^+|_\Gamma - u_2^-|_\Gamma &= C_1 \frac{a_{11}^*\partial_{x_1}\hat{u}_1^+|_\Gamma + a_{12}^*\partial_{x_2}\hat{u}_1^+|_\Gamma + a_0\partial_{x_1}u_1^-|_\Gamma}{2} \\ &\quad + C_2\partial_{x_2}\frac{u_1^-|_\Gamma + \hat{u}_1^+|_\Gamma}{2} \\ &\quad + D_1\partial_{x_2}\frac{a_{11}^*\partial_{x_1}\hat{u}_0^+|_\Gamma + a_{12}^*\partial_{x_2}\hat{u}_0^+|_\Gamma + a_0\partial_{x_1}u_0^-|_\Gamma}{2} \\ &\quad + D_2\partial_{x_2x_2}^2u_0|_\Gamma + \omega^2D_3u_0|_\Gamma, \end{aligned} \quad (7.153)$$

où C_1 et C_2 sont définies par (7.124) et où nous avons définis

$$\begin{cases} D_1 := [\ell_D(\mathcal{P}_2^1)] + \frac{[\ell_D(\mathcal{N})][\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{2}, \\ D_2 := [\ell_D(\mathcal{P}_2^2)] - \frac{[\ell_D(\mathcal{P}_1)]^2}{2} - a_{12}^*\frac{[\ell_D(\mathcal{N})][\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{4} + a_{12}^*\frac{[\ell_D(\mathcal{P}_2^1)]}{2}, \\ D_3 := [\ell_D(\mathcal{P}_2^3)]. \end{cases} \quad (7.154)$$

En faisant apparaître les flux, (7.153) n'est rien d'autre que (7.131).

Sens indirect. Supposons maintenant que (7.130) et (7.131) sont vérifiées. Alors

$$\begin{aligned} U_2(x_2, \mathbf{y}) &= V_2(x_2, \mathbf{y}) + \partial_{x_2}\alpha_1(x_2)(\psi^+(y_1)w_2(\mathbf{y}) + P_1(\mathbf{y})) \\ &\quad + \partial_{x_2}\beta_1(x_2)\mathfrak{U}_2^1(\mathbf{y}) \\ &\quad + \partial_{x_2x_2}^2u_0|_\Gamma(x_2)\mathfrak{U}_2^2(\mathbf{y}) \\ &\quad + \omega^2u_0|_\Gamma(x_2)\mathfrak{U}_2^3(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (7.155)$$

est solution de (7.126) par construction de V_2 et des \mathcal{P}_2^j , avec $\langle \ell_D(V_2) \rangle$ et $\langle \ell_N(V_2) \rangle$ donnés par (7.145) et α_1, β_1 par (7.127) et (7.128). L'unicité est alors une conséquence directe de l'unicité de V_2 , conséquence du théorème 7.30.

Cela achève la démonstration de la proposition 7.36. Nous supposons dans la suite que (7.130) et (7.131) sont satisfaites.

7.4 Construction des termes de champ lointain

Nous avons construit nos trois premiers termes de champ proche U_0, U_1 et U_2 en supposant que les conditions (7.111), (7.116), (7.117), (7.130) et (7.131) sont satisfaites. Ces conditions sont des conditions de transmissions à travers Γ portant sur les termes de champ lointain. Cela va nous permettre de définir les problèmes vérifiées par ces derniers et ainsi les construire rigoureusement.

Dans un premier temps, définissons un cadre fonctionnel pour les problèmes de champ lointain.

7.4.1 Cadre fonctionnel pour les problèmes de champ lointain

Pour déterminer les termes de champ lointain, nous avons besoin de résoudre des problèmes du type

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^*\nabla u) - \omega^2\rho_0^*u = F, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [u]_\Gamma = g, \\ [A_0^*\nabla u \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = h, \end{cases} \quad (7.156)$$

où $[\cdot]_\Gamma$ désigne le saut à travers Γ , où $\mathbf{n} := \mathbf{e}_1$ et où nous avons défini

$$A_0^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} a_0 I_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-, \\ A^* & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+, \end{cases} \quad \text{et} \quad \rho_0^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-, \\ \rho^* & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+. \end{cases} \quad (7.157)$$

Proposition 7.40. *Supposons $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dont le support est compact et inclus dans Ω^- et que $(g, h) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Alors le problème (7.156) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega^-) \cap H^1(\Omega^+)$ qui dépend continûment des données :*

$$\|u\|_{H^1(\Omega^-)} + \|u\|_{H^1(\Omega^+)} \leq C (\|F\|_{L^2(\Omega^-)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}). \quad (7.158)$$

Démonstration. Considérons un relèvement $G \in H^1(\Omega^+)$ de la fonction g que nous prolongeons par 0 dans Ω^- . La fonction $U = u - G$ est alors solution du problème variationnel

$$\int_{\mathbb{R}^2} A_0^* \nabla U \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} U \bar{v} = L(v), \quad (7.159)$$

pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ où L est la forme linéaire définie par

$$\int_{\mathbb{R}^2} F \bar{v} + \int_{\mathbb{R}^2} A_0^* \nabla G \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} G \bar{v} + \langle h, v \rangle - \langle A_0^* \nabla G \cdot \mathbf{n}, v \rangle, \quad (7.160)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Par des majorations standards et par le théorème de trace, la forme linéaire L est continue. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lax-Milgram pour conclure. \square

7.4.2 Problème pour les termes de champ lointain d'ordre 0

Nous savons que le terme de champ lointain homogène u_0^- est solution de (7.3) et que le terme de champ lointain périodique \hat{u}_0^+ est solution de l'équation homogénéisée (7.5). En ajoutant les conditions de transmissions (7.111) et (7.116), nous obtenons le problème

$$\begin{cases} -a_0 \Delta u_0^- - \omega^2 \rho_0^* u_0^- = f, & \text{dans } \Omega^-, \\ -\nabla \cdot (A^* \nabla \hat{u}_0^+) - \omega^2 \hat{u}_0^+ = 0, & \text{dans } \Omega^+, \\ \hat{u}_0^+|_\Gamma - u_0^-|_\Gamma = 0, \\ (A^* \nabla \hat{u}_0^+) \cdot \mathbf{n} - a_0 \nabla u_0^- \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad (7.161)$$

que nous écrivons sous la forme

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_0) - \omega^2 \rho_0^* u_0 = f, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [u_0]_\Gamma = 0, \\ [A_0^* \nabla u_0]_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (7.162)$$

en utilisant (7.157).

La proposition suivante est alors immédiate en utilisant la proposition (7.40).

Proposition 7.41. *Il existe une unique solution $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ du problème (7.162).*

Cela détermine donc bien les termes de champ lointain à l'ordre 0 de manière unique, avec $u_0^- = u_0|_{\Omega^-}$ et $\hat{u}_0^+ = u_0|_{\Omega^+}$.

Le problème (7.162) vérifié par les termes de champ lointain à l'ordre 0 fait donc intervenir les conditions classiques de transmission (continuité des traces et des flux au niveau de l'interface), comme nous pouvions nous y attendre. En effet, nous avons déjà rencontré ce modèle homogénéisé lors de la section 6.3.2 où nous l'avions construit de manière naïve.

Notons également que puisque le support de f est compact et inclus dans Ω^- , par des résultats standards de régularité u_0 est régulière près de Γ . En particulier, nous avons $u_0|_\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ dans un voisinage $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ de Γ . Cela justifie donc *a posteriori* l'hypothèse de régularité que nous avons utilisée pour construire les termes de champ proche.

7.4.3 Problème pour les termes de champ lointain d'ordre 1

Nous savons que le terme de champ lointain homogène u_1^+ est solution de (7.3) et que le terme de champ lointain périodique \hat{u}_1^+ est solution de l'équation homogénéisée (7.5). En ajoutant les conditions de transmission (7.117) et (7.130), nous obtenons le problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_1) - \omega^2 \rho_0^* u_1 = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [u_1]_\Gamma = C_1 \langle A_0^* \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma + C_2 \partial_{x_2} u_0|_\Gamma, \\ [A_0^* \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = C_3 \partial_{x_2} \langle A_0^* \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma + C_4 \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma + \omega^2 C_5 u_0|_\Gamma, \end{cases} \quad (7.163)$$

où A_0^* et ρ_0^* sont définies par (7.157) et les constantes C_j sont définies par (7.124) et (7.151).

Une simple application de la proposition (7.40) permet alors de montrer la proposition suivante (par régularité de u_0 près de Γ les seconds membres de (7.163) sont réguliers).

Proposition 7.42. *Il existe une unique solution dans $u_1 \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ du problème (7.163).*

Cela détermine donc bien les termes de champ lointain à l'ordre 1 de manière unique, avec $u_1^- = u_1|_{\Omega^-}$ et $\hat{u}_1^+ = u_0|_{\Omega^+}$.

Le problème (7.163) vérifié par les termes de champ lointain à l'ordre 0 fait donc intervenir les conditions de transmission avec des sauts de traces et de flux non-homogènes.

Nous ne pouvons pas donner le problème vérifié par les termes de champ lointain u_2^- et \hat{u}_2^+ d'ordre 2 car nous ne disposons seulement que d'une condition portant sur le saut des traces (donnée par (7.117)) et il nous manque une condition portant sur le saut des flux, qui nous serait donnée par la construction du terme U_3 de champ proche, ce que nous n'avons pas fait. Nous nous contentons donc d'avoir construit le modèle (7.163) approché d'ordre 1. Notons cependant qu'il n'y a aucun obstacle, si ce n'est la complexité des calculs, pour poursuivre la construction des différents termes de champ proche et de champ lointain.

Remarque 7.43. Les constantes C_j sont indépendantes de ω .

7.5 Analyse d'erreur

Nous avons donc construit les trois premiers termes de champ proche U_0 , U_1 et U_2 à la section 7.3 ainsi que les deux premiers termes de champ lointain u_0 et u_1 à la section 7.4. Notons par contre que nous n'avons pas construit le terme de champ lointain d'ordre 2.

Remarque 7.44. Dans la suite, nous supposons que les termes de champ lointain d'ordre 2 u_0^- et \hat{u}_2^- ont été construits, car cela va faciliter nos calculs. Cela ne sera pas gênant pour notre résultat principal (théorème 7.45) puisque ce terme est d'ordre δ^2 . Notons qu'il n'y a aucun obstacle théorique à sa construction : nous savons que \hat{u}_2^+ est solution d'une équation homogénéisée avec un second membre non nul dans Ω^- (voir par exemple [13, 233]) et que u_2^- est solution de (7.3) dans Ω^+ . En ce qui concerne les conditions de transmission, nous avons déjà établi (7.131) portant sur les traces. Pour obtenir celle sur les flux, nous aurions besoin de construire le terme de champ proche U_3 , ce que nous n'avons pas fait. Cependant, il n'y a aucun obstacle pour le faire car notre démarche de construction des termes de champ proche peut s'étendre à tout ordre, la seule difficulté étant la lourdeur des calculs qui deviennent assez inextricables.

Nous pouvons donc à ce stade proposer l'approximation suivante, en suivant les idées de la section 7.1.5 :

$$\tilde{u}_{2,\delta}(\mathbf{x}) = \psi_\delta^-(x_1) \sum_{k=0}^2 \delta^k u_k^-(\mathbf{x}) + \chi_\delta(x_1) \sum_{k=0}^2 \delta^k U_k \left(x_2, \frac{x_1}{\delta} \right) + \psi_\delta^+(x_1) \sum_{k=0}^2 \delta^k u_k^+ \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right). \quad (7.164)$$

avec $\psi_\delta^\pm(x_1) := \psi^\pm(x_1/\eta(\delta))$ et $\chi_\delta(x_1) := \chi(x_1/\eta(\delta))$, où ψ^\pm et χ sont les fonctions de troncatures définies

par (7.27) et où nous avons

$$\begin{cases} u_0^-(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})|_{\Omega^-}, \\ u_1^-(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})|_{\Omega^-}, \\ u_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta) = u_0|_{\Omega^+}(\mathbf{x}) = \hat{u}_0^+(\mathbf{x}), \\ u_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta) = \nabla \hat{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}/\delta) + \hat{u}_1(\mathbf{x}), \quad \hat{u}_1(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})|_{\Omega^+}, \\ u_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta) = \nabla \mathbf{x} [\Theta(\mathbf{x}/\delta) \nabla \hat{u}_0^+(\mathbf{x})] + \nabla \hat{u}_1^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}/\delta) + \omega^2 \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}/\delta) + \hat{u}_2^+(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (7.165)$$

avec $\mathbf{w} = (w_2, w_2)^\top$, $\Theta = (\theta_{ij})$ et γ les solutions respectives des problèmes de cellule (7.7), (7.11) et (7.12) (voir la remarque 7.44 pour u_2^- et \hat{u}_2^+).

Remarquons que les expressions du type $u_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta)$ et $U_n(x_2, x_1/\delta, x_2/\delta)$ dans (7.164) ne sont pas rigoureusement définies. En effet, nous avons construit les u_n^+ (resp. U_n) comme des fonctions de la variable rapide \mathbf{y} sur Y (resp. sur B) avec x_2 jouant le rôle d'un paramètre, c'est-à-dire que \mathbf{x} et \mathbf{y} (resp. x_2 et (y_1, y_2)) sont considérées comme des variables séparées. Nous reconstruisons donc des fonctions via les immersions $\tau_\delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times Y$ définie par $\tau(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta \bmod 1)$ et $\mathcal{T}_\delta: B \rightarrow \mathbb{R} \times B$ définie par $\mathcal{T}_\delta(x_1, x_2) = (x_2, x_1/\delta, x_2/\delta \bmod 1)$. Ainsi, il faut donc comprendre $u_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta)$ (resp. $U_n(x_2, x_1/\delta, x_2/\delta)$) dans (7.164) au sens de $\tau_\delta^* u_n^+(\mathbf{x})$ (resp. $\mathcal{T}_\delta^* U_n(x_1, x_2)$). Notons que nous avons les identités

$$\nabla(\tau_\delta^* u) = \frac{1}{\delta} \tau_\delta^*(\nabla_{\mathbf{y}} u) + \tau_\delta^*(\nabla_{\mathbf{x}} u), \quad (7.166)$$

et

$$\partial_{x_1}(\mathcal{T}_\delta^* U) = \frac{1}{\delta} \mathcal{T}_\delta^*(\partial_{y_1} U) \quad \text{et} \quad \partial_{x_2}(\mathcal{T}_\delta^* U) = \frac{1}{\delta} \mathcal{T}_\delta^*(\partial_{y_2} U) + \mathcal{T}_\delta^*(\partial_{x_2} U). \quad (7.167)$$

La question est maintenant de savoir si $\tilde{u}_{2,\delta}$ approche correctement la solution exacte u_δ . Nous allons montrer le résultat suivant qui est le résultat principal de cette section :

Théorème 7.45. *Supposons les hypothèses de régularité suivantes vérifiées : $\hat{u}_0^+ \in H^4(\Omega^+)$, $\hat{u}_1^+ \in H^3(\Omega^+)$ et $\hat{u}_2^+ \in H^2(\Omega^+)$ (voir la remarque 7.44) et que toutes les solutions des différents problèmes de cellule soient dans $W^{1,\infty}(Y)$. Alors nous avons l'estimation d'erreur suivante*

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \delta^{3/2}, \quad (7.168)$$

où C est une constante positive indépendante de δ .

La suite de cette section est consacrée à la démonstration de ce théorème. Dans toute cette section C désigne une constante générique positive servant dans les majorations et qui peut changer d'une ligne à l'autre. Sauf mention explicite du contraire, C est indépendant de δ .

7.5.1 Stabilité

La coercivité du problème initial (7.1) nous permet de montrer la stabilité du problème, c'est-à-dire la dépendance continue de la solution vis-à-vis de δ , et que la constante de continuité reste bornée quand δ tend vers 0. Plus précisément, introduisons la forme bilinéaire associée à (7.1)

$$\Lambda_\delta(u, v) := \int_{\mathbb{R}^2} \left(a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \nabla u \cdot \nabla v - \omega^2 \rho\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) u v \right) d\mathbf{x}, \quad (u, v) \in H^1(\mathbb{R}^2)^2, \quad (7.169)$$

qui vérifie donc $\Lambda_\delta(u, u) \geq C \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2$. Nous obtenons, si $u \neq 0$, que

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{C} \frac{\Lambda_\delta(u, u)}{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}} \leq \frac{1}{C} \sup_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \frac{|\Lambda_\delta(u, v)|}{\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}}. \quad (7.170)$$

Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 7.46. *Le problème (7.1) est bien posé. De plus, il existe deux constantes positives C et δ_0 indépendante de δ telles que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ on ait*

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \sup_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \frac{|\Lambda_\delta(u, v)|}{\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}}. \quad (7.171)$$

Cette proposition montre donc qu'il suffit d'estimer $\Lambda_\delta(u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}, v)$ pour en déduire une estimation sur $\|u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$.

7.5.2 Consistance

Nous avons pour tout $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et pour $\zeta = \psi^\pm$ ou $\zeta = \chi$

$$\Lambda_\delta(\zeta u, v) = \Lambda_\delta(u, \zeta \bar{v}) + \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) u \nabla \zeta \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \bar{v} \nabla \zeta \cdot \nabla u \, d\mathbf{x}. \quad (7.172)$$

Nous obtenons donc après quelques manipulations algébriques en injectant (7.164) dans $\Lambda_\delta(u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}, v)$ que

$$\Lambda_\delta(u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}, v) = \mathcal{E}_{\text{CL}}(v) + \mathcal{E}_{\text{R}}(v) + \mathcal{E}_{\text{CP}}(v), \quad (7.173)$$

où \mathcal{E}_{CL} est l'erreur de champ lointain, qui mesure la différence entre la solution approchée et la solution exacte loin de l'interface, définie par

$$\mathcal{E}_{\text{CL}}(v) := \int_{\mathbb{R}^2} f \bar{v} \, d\mathbf{x} - \sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(u_n^-, \psi_\delta^- v) - \sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\tau_\delta^* u_n^+, \psi_\delta^+ v), \quad (7.174)$$

où \mathcal{E}_{R} est l'erreur de raccord, qui mesure le décalage entre les termes de champ proche et de champ lointain dans les deux zones de raccord, définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{R}}(v) := & \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) (u_n^- - \mathcal{T}_\delta^* U_n) \nabla \bar{v} \cdot \nabla \psi_\delta^- \, d\mathbf{x} - \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \bar{v} \nabla \psi_\delta^- \cdot \nabla (u_n^- - \mathcal{T}_\delta^* U_n) \, d\mathbf{x} \\ & + \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) (\tau_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n) \nabla \bar{v} \cdot \nabla \psi_\delta^+ \, d\mathbf{x} - \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \bar{v} \nabla \psi_\delta^+ \cdot \nabla (\tau_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (7.175)$$

et où \mathcal{E}_{CP} est l'erreur de champ proche, qui mesure à quel point le champ proche vérifie l'équation de Helmholtz initiale, définie par

$$\mathcal{E}_{\text{CP}}(v) := \sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\mathcal{T}_\delta^* U_n, \chi_\delta v). \quad (7.176)$$

Nous allons analyser chacune de ces trois erreurs séparément.

7.5.3 Erreur de champ lointain

L'erreur de champ lointain est en fait causée par le processus d'homogénéisation dans la partie droite, l'erreur de champ lointain dans la partie gauche étant nulle.

Proposition 7.47 (Erreur de champ lointain). *Supposons les hypothèses de régularité du théorème 7.45 vérifiées. Alors nous avons*

$$|\mathcal{E}_{\text{CL}}(v)| \leq C \delta^2 \eta(\delta)^{-1/2} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \quad (7.177)$$

où C est une constante positive indépendante de δ .

Remarque 7.48. Pour établir cette estimation d'erreur, nous avons besoin d'avoir construit u_3^+ (sans sa partie moyennée \tilde{u}_3^+). Cela ne pose aucun problème et relève de l'homogénéisation classique, nous

renvoyons par exemple à [13] pour une présentation de l'homogénéisation à tout ordre. Plus précisément, nous avons

$$\begin{aligned} u_3^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i,j,k=1}^2 \partial_{x_i x_j x_k}^2 \hat{u}_0(\mathbf{x}) W_{ijk}(\mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\Theta(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_1^+(\mathbf{x})) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_2^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{y}) + \omega^2 \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \cdot \gamma^2(\mathbf{y}) \\ &\quad + \omega^2 \hat{u}_1^+(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (7.178)$$

où les W_{ijk} et $\gamma^2 = (\gamma_1^2, \gamma_1^2)$ sont des problèmes de cellule similaires à ceux que nous avons déjà rencontrés. En particulier, le fait que $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_3^+ + L_{\mathbf{x},\mathbf{y}} u_2^+ + L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_1^+ = 0$ intervient dans la démonstration.

Démonstration. Commençons par la partie de champ lointain homogène. Par construction $\Lambda_\delta(u_n^-, \psi_\delta^- v) = 0$ pour $n = 1, 2$. De plus comme le support de f est compact et inclus dans Ω^- , $\psi_\delta^+ f = f$ pour δ assez petit, d'où

$$\Lambda_\delta(u_0^-, \psi_\delta^- v) = \int_{\mathbb{R}^2} f \psi_\delta^- v, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} f v d\mathbf{x}. \quad (7.179)$$

Nous avons donc

$$\mathcal{E}_{\text{CL}}(v) := \int_{\mathbb{R}^2} f v d\mathbf{x} - \sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(u_n^-, \psi_\delta^- v) - \sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\tau_\delta^* u_n^+, \psi_\delta^+ v) = - \sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\tau_\delta^* u_n^+, \psi_\delta^+ v), \quad (7.180)$$

c'est-à-dire que l'erreur de champ lointain homogène est nulle. Considérons maintenant les termes de champ lointain périodique. Nous avons

$$\sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\tau_\delta^* u_n^+, \psi_\delta^+ v) = \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{x}/\delta) \nabla(\tau_\delta^* u_n^+) \cdot \nabla(\psi_\delta^+ v) d\mathbf{x} \quad (7.181)$$

$$- \omega^2 \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}/\delta) (\tau_\delta^* u_n^+) (\psi_\delta^+ v) d\mathbf{x}. \quad (7.182)$$

Or, en utilisant $a(\mathbf{x}/\delta) = \tau_\delta^* a(\mathbf{y})$, l'identité (7.166) et $\psi_\delta^+ = 0$ sur Γ nous obtenons (il n'y a pas de termes de bord car ψ_δ^+ est nulle sur Γ)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{x}/\delta) \nabla(\tau_\delta^* u_n^+) \cdot \nabla(\psi_\delta^+ v) d\mathbf{x} &= \frac{1}{\delta^2} \langle \tau_\delta^* \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_n^+), \psi_\delta^+ v \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \langle \tau_\delta^* [\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u_n^+) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_n^+)], \psi_\delta^+ v \rangle \\ &\quad + \langle \tau_\delta^* \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u_n^+), \psi_\delta^+ v \rangle. \end{aligned} \quad (7.183)$$

Nous avons également

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}/\delta) (\tau_\delta^* u_n^+) (\psi_\delta^+ v) d\mathbf{x} = \langle \tau_\delta^* [\rho(\mathbf{y}) u_n^+], \psi_\delta^+ v \rangle. \quad (7.184)$$

Il apparaît ainsi les opérateurs définis dans la cascade d'équations (6.10) :

$$\sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\tau_\delta^* u_n^+, \psi_\delta^+ v) = \sum_{n=0}^2 \delta^n \left[\frac{1}{\delta^2} \langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_n^+, \psi_\delta^+ v \rangle + \frac{1}{\delta} \langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{x},\mathbf{y}} u_n^+, \psi_\delta^+ v \rangle + \langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_n^+, \psi_\delta^+ v \rangle \right]. \quad (7.185)$$

En réordonnant les termes et en utilisant les équations $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_0^+ = 0$, $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_1^+ + L_{\mathbf{x},\mathbf{y}} u_0^+ = 0$, $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_2^+ + L_{\mathbf{x},\mathbf{y}} u_1^+ + L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_0^+ = 0$ et $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_3^+ + L_{\mathbf{x},\mathbf{y}} u_2^+ + L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_1^+ = 0$ (voir la remarque 7.48 pour cette dernière égalité) nous obtenons finalement

$$\sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\tau_\delta^* u_n^+, \psi_\delta^+ v) = \delta \langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_3^+, \psi_\delta^+ v \rangle + \delta^2 \langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_2^+, \psi_\delta^+ v \rangle. \quad (7.186)$$

Analysons ces deux termes séparément. Tout d'abord, montrons que $\tau_\delta^* L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_2^+$ est borné dans $L^2(\Omega^+)$ indépendamment de δ . Rappelons que (voir (7.10))

$$u_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\Theta(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0^+(\mathbf{x})) + \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_1^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{y}) + \omega^2 \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{y}) + \hat{u}_2^+(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in Y. \quad (7.187)$$

Pour que $L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_2^+$ soit borné dans $L^2(\Omega^+ \times Y)$, il suffit que $\hat{u}_0^+ \in H^4(\Omega^+)$, $\hat{u}_1^+ \in H^3(\Omega^+)$, $\hat{u}_2^+ \in H^2(\Omega^+)$, $\gamma \in L^\infty(Y)$, $w_j \in L^\infty(Y)$ et $\theta_{ij} \in L^\infty(Y)$ pour $i, j = 1, 2$. Si c'est le cas, nous avons bien

$$\delta^2 |\langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_2^+, \psi_\delta^+ v \rangle| \leq C \|\psi_\delta^+ v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = C \delta^2 \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}. \quad (7.188)$$

Analysons maintenant le terme $\langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_3^+, \psi_\delta^+ v \rangle$. En utilisant (7.166), nous avons

$$\langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_3^+, \psi_\delta^+ v \rangle = \delta \langle -\nabla \cdot [\tau_\delta^* a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+] + \tau_\delta^* \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+], \psi_\delta^+ v \rangle. \quad (7.189)$$

Le second terme $\langle \tau_\delta^* \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+], \psi_\delta^+ v \rangle$ se traite comme le terme $\tau_\delta^* L_{\mathbf{x},\mathbf{x}} u_2^+$ ci-dessus. En particulier, d'après (7.178), ce terme est borné dans $L^2(\Omega^+)$ dès que toutes les solutions des différents problèmes de cellules sont dans $W^{1,\infty}(Y)$ et dès que $\hat{u}_0^+ \in H^4(\Omega^+)$, $\hat{u}_1^+ \in H^3(\Omega^+)$ et $\hat{u}_2^+ \in H^2(\Omega^+)$. Nous avons donc

$$|\langle \tau_\delta^* \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+], \psi_\delta^+ v \rangle| \leq C \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}. \quad (7.190)$$

Il reste alors à examiner le terme $\langle \nabla \cdot [\tau_\delta^* a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+], \psi_\delta^+ v \rangle$. En faisant une intégration par parties, nous obtenons (il n'y a pas de termes de bord car ψ_δ^+ est nulle sur Γ)

$$\langle \nabla \cdot [\tau_\delta^* a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+], \psi_\delta^+ v \rangle = \int_{\Omega^+} \tau_\delta^* [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+](\mathbf{x}) \cdot \overline{\nabla(\psi^+(x_1) \delta v(\mathbf{x}))} \, d\mathbf{x}. \quad (7.191)$$

Nous avons déjà vu que le terme $\tau_\delta^* [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+]$ est borné dans $L^2(\Omega^+)$. Nous avons donc

$$|\langle \nabla \cdot [\tau_\delta^* a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+], \psi_\delta^+ v \rangle| \leq C \|\nabla(\psi_\delta^+ v)\|_{L^2(\Omega^+)}. \quad (7.192)$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme 7.49 ci-dessous pour conclure que

$$|\langle \nabla \cdot [\tau_\delta^* a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u_3^+], \psi_\delta^+ v \rangle| \leq C \eta(\delta)^{-1/2} \|v\|_{H^1(\Omega^+)}. \quad (7.193)$$

Finalement, en combinant les estimations (7.190) et (7.193), nous obtenons à partir de (7.189) que $\langle \tau_\delta^* L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} u_3^+, \psi_\delta^+ v \rangle \leq C \delta \eta(\delta)^{-1/2} \|v\|_{H^1(\Omega^+)}$. En combinant cette dernière estimation avec (7.188) dans (7.186), nous obtenons bien (7.177). \square

Lors de la démonstration ci-dessus, nous avons eu besoin d'utiliser le lemme suivant, qui est classique dans la littérature sur les développements asymptotiques raccordés [84, 164, 223].

Lemme 7.49. *Pour tout $v \in H^1(\Omega^+)$, nous avons*

$$\|\nabla(\psi_\delta^+ v)\|_{L^2(\Omega^+)} \leq C \eta(\delta)^{-1/2} \|v\|_{H^1(\Omega^+)}, \quad (7.194)$$

où C est une constante positive indépendante de δ et où $\psi_\delta^+ = \psi^+(\cdot/\eta(\delta))$ avec ψ^+ la fonction de troncature définie par (7.27).

Démonstration. Nous avons $\nabla(\psi_\delta^+ v) = \psi_\delta^+ \nabla v + v \nabla \psi_\delta^+$. Le premier terme se majore facilement en norme L^2 par $\|v\|_{H^1(\Omega^+)}$ puisque ψ_δ^+ est borné sur Ω^+ , concentrons-nous donc sur le deuxième terme. Puisque $\nabla \psi_\delta^+ = \eta(\delta)^{-1} \nabla \psi^+(\cdot/\eta(\delta))$ et que $\nabla \psi^+$ est borné sur Ω^+ et à support dans $\mathcal{B} := [\eta(\delta), 2\eta(\delta)] \times \mathbb{R}$, nous avons

$$\|v \nabla \psi_\delta^+\|_{L^2(\Omega^+)}^2 \leq \frac{C}{\eta(\delta)^2} \int_{\mathcal{B}} |v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leq \frac{C}{\eta(\delta)} \int_{\mathcal{B}} \frac{|v(\mathbf{x})|^2}{\eta(\delta)} \, d\mathbf{x} \leq \frac{C}{\eta(\delta)} \int_{\mathcal{B}} \frac{|v(\mathbf{x})|^2}{x_1} \, d\mathbf{x} \quad (7.195)$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité de Hardy [199, §7.1.1] pour obtenir

$$\|v \nabla \psi_\delta^+\|_{L^2(\Omega^+)}^2 \leq \eta(\delta)^{-1} \|v\|_{L^2(\Omega^+)}^2 \leq \eta(\delta)^{-1} \|v\|_{H^1(\Omega^+)}^2, \quad (7.196)$$

ce qui achève la démonstration. \square

7.5.4 Erreur de raccord

Concentrons-nous maintenant sur l'erreur de raccord \mathcal{E}_R .

Proposition 7.50 (Erreur de raccord). *Supposons les hypothèses de régularité du théorème 7.45 vérifiées. Alors nous avons*

$$|\mathcal{E}_R(v)| \leq C \left(\eta(\delta)^2 + \eta(\delta)^{-1/2} e^{-2\pi\gamma\eta(\delta)/\delta} \right) \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \quad (7.197)$$

où C est une constante positive indépendante de δ .

Démonstration. L'erreur de raccord \mathcal{E}_R définie par (7.175) contient quatre sommes. Nous allons estimer seulement la troisième car l'estimation des trois autres est quasiment similaire (les deux premières sont encore plus simples car elles ne font pas intervenir la variable rapide \mathbf{y}). Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \nabla v \cdot \nabla \psi_\delta^+(\tau_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n) \, d\mathbf{x} \right| &\leq C \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \psi_\delta^+\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\| \sum_{n=0}^2 \delta^n (\tau_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n) \right\|_{L^2(C_\eta)} \\ &\leq C \eta(\delta)^{-1} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \left\| \sum_{n=0}^2 \delta^n (\tau_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n) \right\|_{L^2(C_\eta)}, \end{aligned} \quad (7.198)$$

où $C_\eta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \eta(\delta) < x_1 < 2\eta(\delta)\}$ est la zone de raccord à droite de Γ et où nous avons utilisé $\|\nabla \psi_\delta^+\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta(\delta)^{-1} \|\nabla \psi^+\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Il reste donc à estimer le terme $\|\sum_{n=0}^2 \delta^n (\tau_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n)\|_{L^2(C_\eta)}$. D'une part le comportement des termes de champ lointain périodique u_n est donné par (7.23) lorsque $\eta(\delta)$ devient petit, et les termes de champ proche U_n ont été construits de telle sorte que leur comportement quand $y_1 \rightarrow +\infty$ se raccorde avec ceux des u_n^+ près de l'interface Γ . Plus précisément, à chaque n , tous les termes oscillants présents dans u_n^+ se compensent avec ceux présents dans U_n ainsi que tous les termes polynomiaux d'ordre inférieur ou égal à $2 - n$. Ainsi, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\hat{u}_n^+(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{2-n} \frac{x_1^k}{k!} (\partial_{x_1}^k \hat{u}_n^+)_{|\Gamma}(x_2) + \int_0^{x_1} \frac{t^{2-n}}{(2-n)!} \partial_{x_1}^{3-n} \hat{u}_n^+(t, x_2) \, dt, \quad (7.199)$$

nous obtenons

$$\sum_{n=0}^2 \delta^n (\tau_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n) = \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_0^{x_1} \frac{t^{2-n}}{(2-n)!} \tau_\delta^* [\partial_{x_1}^{3-n} \hat{u}_n^+(t, x_2, \mathbf{y})] \, dt + \sum_{n=1}^2 \delta^n \mathcal{T}_\delta^* \mathfrak{U}_n, \quad (7.200)$$

où les \mathfrak{U}_n sont des fonctions évanescents par rapport à y_1 , 1-périodiques par rapport à y_2 et de carré intégrable par rapport à x_2 : $(x_2, \mathbf{y}) \mapsto \mathfrak{U}_n(x_2, \mathbf{y}) \in L^2(\mathbb{R}) \times V_-^1(B)$. Le premier terme de la somme ci-dessus peut se majorer comme suit, en utilisant le fait que les \hat{u}_n^+ sont des quantités bornées indépendamment de δ dans C_η :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_0^{x_1} \frac{t^{2-n}}{(2-n)!} \tau_\delta^* [\partial_{x_1}^{3-n} \hat{u}_n^+(t, x_2, \mathbf{y})] \, dt \right\|_{L^2(C_\eta)} &\leq C \sum_{n=0}^2 \delta^n \eta(\delta)^{3-n} \\ &\leq C \eta(\delta)^3. \end{aligned} \quad (7.201)$$

Le second terme de la somme fait intervenir des fonctions $\mathfrak{U}_n \in L^2(\mathbb{R}) \times V_-^1(B)$ évanescents. En particulier, nous avons pour $y_1 > 0$

$$|\mathfrak{U}_n(x_2, \mathbf{y})| \leq I(x_2) e^{-2\pi\gamma y_1}, \quad (7.202)$$

où I est une fonction de carré intégrable. Cela implique la majoration (C_η est de largeur égale à η dans la direction \mathbf{e}_1) :

$$\|\mathcal{T}_\delta^* \mathfrak{U}_n\|_{L^2(C_\eta)} \leq C \eta(\delta)^{1/2} e^{-2\pi\gamma\eta(\delta)/\delta}. \quad (7.203)$$

Nous avons donc

$$\left\| \sum_{n=0}^2 \delta^n (\tau_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n) \right\|_{L^2(C_\eta)} \leq C \left(\eta(\delta)^3 + \eta(\delta) e^{-2\pi\gamma\eta(\delta)/\delta} \sum_{n=0}^2 \delta^n \right) \leq C \left(\eta(\delta)^3 + \eta(\delta) e^{-2\pi\gamma\eta(\delta)/\delta} \right), \quad (7.204)$$

d'où finalement

$$\left| \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \nabla v \cdot \nabla \psi_\delta^+(\mathcal{T}_\delta^* u_n^+ - \mathcal{T}_\delta^* U_n) d\mathbf{x} \right| \leq C \left(\eta(\delta)^2 + \eta(\delta)^{-1/2} e^{-2\pi\gamma\eta(\delta)/\delta} \sum_{n=0}^2 \delta^n \right). \quad (7.205)$$

Les trois autres termes de \mathcal{E}_R se traitent de la même façon. \square

7.5.5 Erreur de champ proche

Il reste maintenant à estimer l'erreur de champ proche \mathcal{E}_{CP} .

Proposition 7.51. *Supposons les hypothèses de régularité du théorème 7.45 vérifiées. Alors nous avons*

$$|\mathcal{E}_{CP}(v)| \leq C \delta^{-1} \eta(\delta)^3 \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \quad (7.206)$$

où C est une constante positive indépendante de δ .

Démonstration. Le début du raisonnement est similaire à celui de la démonstration de la proposition 7.47 pour l'erreur de champ lointain dans la partie périodique. Nous avons

$$\sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\mathcal{T}_\delta^* U_n, \chi_\delta v) = \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{x}/\delta) \partial_{x_1}(\mathcal{T}_\delta^* U_n) \partial_{x_1}(\chi_\delta v) d\mathbf{x} \quad (7.207)$$

$$+ \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{x}/\delta) \partial_{x_2}(\mathcal{T}_\delta^* U_n) \partial_{x_2}(\chi_\delta v) d\mathbf{x} \quad (7.208)$$

$$- \sum_{n=0}^2 \delta^n \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \rho(\mathbf{x}/\delta) (\mathcal{T}_\delta^* U_n) (\chi_\delta v) d\mathbf{x}. \quad (7.209)$$

Remarquons que $a(\mathbf{x}/\delta) = \mathcal{T}_\delta^* a(\mathbf{y})$ et $\rho(\mathbf{x}/\delta) = \mathcal{T}_\delta^* \rho(\mathbf{y})$. En utilisant les identités (7.167), nous obtenons pour la première intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{x}/\delta) \partial_{x_1}(\mathcal{T}_\delta^* U_n) \partial_{x_1}(\chi_\delta U_n) d\mathbf{x} = \frac{1}{\delta^2} \langle \mathcal{T}_\delta^* \partial_{y_1}(a(\mathbf{y}) \partial_{y_1} U_n), \chi_\delta v \rangle. \quad (7.210)$$

et pour la deuxième

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{x}/\delta) \partial_{x_2}(\mathcal{T}_\delta^* U_n) \partial_{x_2}(\chi_\delta U_n) d\mathbf{x} &= \frac{1}{\delta^2} \langle \mathcal{T}_\delta^* \partial_{y_2}(a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_n), \chi_\delta v \rangle \\ &+ \frac{1}{\delta} \langle \mathcal{T}_\delta^* \partial_{y_2}(a(\mathbf{y}) \partial_{x_2} U_n) + \partial_{x_2}(a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_n), \chi_\delta v \rangle \\ &+ \langle \mathcal{T}_\delta^* [\partial_{x_2}(a(\mathbf{y}) \partial_{x_2} U_n) + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) U_n], \chi_\delta v \rangle. \end{aligned} \quad (7.211)$$

Remarquons que puisque $\chi(y_1)$ est nulle pour $|y_2| \geq 2$, les termes de bord disparaissent et ne posent donc pas de problème. Nous retrouvons ainsi la cascade d'équations (7.15) :

$$\sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\mathcal{T}_\delta^* U_n, \chi_\delta v) = \sum_{n=0}^2 \delta^n \left[\frac{1}{\delta^2} \langle \mathcal{T}_\delta^* L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} U_n, \chi_\delta v \rangle + \frac{1}{\delta} \langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} U_n, \chi_\delta v \rangle + \langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} U_n, \chi_\delta v \rangle \right]. \quad (7.212)$$

En réordonnant les termes et en utilisant le fait que $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} U_0 = 0$, $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} U_1 = -\widetilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} U_0$ et $L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} U_2 = -\widetilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} U_1 - \widetilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} U_0$, nous obtenons finalement

$$\sum_{n=0}^2 \delta^n \Lambda_\delta(\mathcal{T}_\delta^* U_n, \chi_\delta v) = \delta \langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} U_1, \chi_\delta v \rangle + \delta \langle \mathcal{T}_\delta^* (\widetilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} U_2), \chi_\delta v \rangle + \delta^2 \langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} U_2, \chi_\delta v \rangle. \quad (7.213)$$

Commençons par examiner le terme en U_1 . D'après la formule explicite (7.125), nous pouvons écrire que U_1 est une somme de produits de fonctions

$$U_1(x_2, \mathbf{y}) = \sum_{\ell=1}^N I_\ell(x_2) J_\ell(\mathbf{y}), \quad (7.214)$$

où les $I_\ell(x_2)$ sont de classe C^∞ et de carré intégrable ainsi que leurs dérivées car α_1 , β_1 et $u_0|_\Gamma$ le sont, comme traces sur Γ des solutions (et de leurs dérivées normales) des problèmes approchés (7.162) et (7.163) et où J_ℓ sont des fonctions périodiques en y_2 et évanescents ou oscillantes et/ou polynomialement croissantes d'ordre au plus 1. Nous avons donc des majorations du type

$$|J_\ell(\mathbf{y})| \leq C(1 + |y_1|). \quad (7.215)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}_\delta^* a \partial_{x_2 x_2} U_1, \chi_\delta v \rangle| &\leq C \sum_{\ell=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} \left| a \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \partial_{x_2 x_2}^2 I(x_2) (\chi_\delta v) \right| \left(1 + \frac{|x_1|}{\delta} \right) d\mathbf{x} \\ &\leq C \|a\|_\infty \|\partial_{x_2 x_2}^2 I\|_{L^2(S_\eta)} \|v\|_{L^2(S_\eta)} \sup_{|x_1| < 2\eta(\delta)} \left(1 + \frac{|x_1|}{\delta} \right). \end{aligned} \quad (7.216)$$

Puisque a est borné, nous pouvons majorer $\|a\|_\infty \leq C$. Nous avons de plus la majoration $\|\partial_{x_2 x_2}^2 I\|_{L^2(S_\eta)} \leq C\eta(\delta)^{1/2}$ en utilisant le fait que la largeur de S_η est d'ordre η et que I et ∂_{x_2} est de carré intégrable. De même, nous avons $\|v\|_{L^2(S_\eta)} \leq C\eta^{1/2} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$. Nous avons donc

$$\langle \mathcal{T}_\delta^* a \partial_{x_2 x_2} U_1, \chi_\delta v \rangle \leq C \frac{\eta(\delta)^2}{\delta} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}. \quad (7.217)$$

En procédant de même,

$$|\langle \mathcal{T}_\delta^* \omega^2 \rho U_1, \chi_\delta v \rangle| \leq C \frac{\eta(\delta)^2}{\delta} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}. \quad (7.218)$$

Finalement, en regroupant (7.216) et (7.218), nous obtenons

$$|\langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L_{\mathbf{x}, \mathbf{x}}} U_1, \chi_\delta v \rangle| \leq C \frac{\eta(\delta)^2}{\delta} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}. \quad (7.219)$$

Il reste maintenant à estimer les termes $\langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L_{\mathbf{x}, \mathbf{x}}} U_2, \chi_\delta v \rangle$ et $\langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}} U_1, \chi_\delta v \rangle$. Ces deux termes se traitent de la même façon que précédemment, sauf que contrairement à U_1 , les fonctions J_ℓ dans la décomposition (7.214) correspondant à U_2 font intervenir des termes en y_1^2 au lieu de y_1 . Par conséquent, (7.215) devient $|J_\ell(\mathbf{y})| \leq C(1 + |y_1^2|)$. En suivant alors le même raisonnement qu'avant, nous obtenons

$$\begin{cases} |\langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L_{\mathbf{x}, \mathbf{x}}} U_2, \chi_\delta v \rangle| \leq C \frac{\eta(\delta)^3}{\delta^2} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \\ |\langle \mathcal{T}_\delta^* \widetilde{L_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}} U_1, \chi_\delta v \rangle| \leq C \frac{\eta(\delta)^3}{\delta^2} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}. \end{cases} \quad (7.220)$$

Nous obtenons bien le résultat (7.206) en combinant (7.219) et (7.220) dans (7.213) et en utilisant le fait que $\eta(\delta)^3/\delta$ est le terme prépondérant dans ces trois estimations. \square

7.5.6 Conclusion, corollaire et conjecture

Fin de la démonstration du théorème 7.45. Rappelons que d'après (7.171), nous avons

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \sup_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \frac{|\Lambda_\delta(u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}, v)|}{\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}} = C \sup_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{E}_{\text{CL}}(v)| + |\mathcal{E}_{\text{R}}(v)| + |\mathcal{E}_{\text{CP}}(v)|}{\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}}. \quad (7.221)$$

En utilisant les propositions 7.47, 7.50 et 7.51, nous avons donc

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \left[\delta^2 \eta(\delta)^{-1/2} + \eta(\delta)^2 + \eta(\delta)^{-1/2} e^{-2\pi\gamma\eta(\delta)/\delta} + \delta^{-1} \eta(\delta)^3 \right]. \quad (7.222)$$

Il faut donc choisir à ce stade une fonction $\eta(\delta)$ judicieuse, qui doit également vérifier (7.17). Ici, nous proposons

$$\eta(\delta) = K\delta |\ln \delta|^{1/3}, \quad (7.223)$$

où $K > 0$ est une constante (indépendante de δ). L'intérêt de cette constante K est que nous pouvons la choisir assez grande de sorte que $\eta(\delta)^{-1/2} e^{-2\pi\gamma\eta(\delta)/\delta} = \mathcal{O}(\delta^{3/2})$. Nous avons également $\delta^2 \eta(\delta)^{-1/2} = \mathcal{O}(\delta^{3/2})$ et $\delta^{-1} \eta(\delta)^3 = \mathcal{O}(\delta^{3/2})$, ce qui achève la démonstration du théorème 7.45. \square

Nous disposons d'un corollaire du théorème 7.45 où l'erreur est mesurée non pas sur tout \mathbb{R}^2 mais sur un domaine Ω_r évitant l'interface Γ , ce qui permet d'obtenir une estimation d'erreur portant seulement sur les termes de champ lointain (puisque que pour δ assez petit Ω_r et la zone de champ proche seront disjointes).

Plus précisément, introduisons pour $r > 0$ le domaine Ω_r défini par

$$\Omega_r := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| > r\}. \quad (7.224)$$

ainsi que $\Omega_r^\pm := \Omega_r \cap \Omega^\pm$.

Le corollaire suivant est alors immédiat, en remarquant que pour δ assez petit, $\tilde{u}_{n,\delta}$ coïncide avec les premiers termes du développement en champ lointain dans Ω_r^\pm (c'est le cas dès lors que $\text{supp } \chi_\delta \cap \Omega_r = \emptyset$).

Corollaire 7.52 (du théorème 7.45). *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 7.45, nous avons*

$$\|u_\delta - (u_0^- + \delta u_1^-)\|_{H^1(\Omega_r^-)} + \|u_\delta - (u_0^+ + \delta u_1^+ + \delta^2 u_2^+)\|_{H^1(\Omega_r^+)} \leq C\delta^{3/2}, \quad (7.225)$$

où C est une constante positive indépendante de δ .

Il nous semble que l'estimation d'erreur ci-dessus n'est pas optimale. En effet, si nous avions construit $\tilde{u}_{3,\delta}$, ce qui nécessiterait d'avoir construit le terme U_3 de champ proche (ce que nous n'avons pas fait mais comme nous l'avons dit lors de la remarque 7.44, il n'y a aucun obstacle pour le faire car notre démarche de construction des termes de champ proche peut s'étendre à tout ordre). Nous aurions alors une estimation d'erreur similaire à celle du théorème 7.45 :

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{3,\delta}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\delta^{5/2}, \quad (7.226)$$

ce qui nous permet de conjecturer le résultat suivant :

Conjecture 7.53. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 7.45, nous avons*

$$\|u_\delta - (u_0^- + \delta u_1^-)\|_{H^1(\Omega_r^-)} + \|u_\delta - (u_0^+ + \delta u_1^+ + \delta^2 u_2^+)\|_{H^1(\Omega_r^+)} \leq C\delta^2, \quad (7.227)$$

où C est une constante positive indépendante de δ .

7.A Annexe : faisceaux d'opérateurs dépendant polynomialement d'un paramètre

Le but de cette annexe est de rappeler quelques définitions et résultats de la théorie de Kondratiev, en particulier la description des pôles des faisceaux d'opérateurs (en anglais *operator pencils*) dépendant polynomialement d'un paramètre via la notion de chaînes de Jordan. Nous nous sommes directement inspirés du chapitre 5 de [139] auquel nous renvoyons pour plus de détails. Dans la suite, $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ désignent deux espaces de Banach.

Définition 7.54. Un faisceau d'opérateurs dépendant polynomialement du paramètre λ est un opérateur $\mathfrak{U}(\lambda)$ de X dans Y de la forme

$$\mathfrak{U}(\lambda) = \sum_{\ell=0}^L A_\ell \lambda^\ell, \quad (7.228)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et où les A_ℓ sont des opérateurs continus de X dans Y .

Dans la suite, le terme « faisceau d'opérateurs » signifiera faisceau d'opérateurs dépendant polynomialement d'un paramètre.

L'adjoint $\mathfrak{U}^*(\lambda)$ d'un faisceau d'opérateurs est donné par

$$\mathfrak{U}^*(\lambda) = \sum_{\ell=0}^L (A_\ell)^* \lambda^\ell, \quad (7.229)$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{U}(\lambda)^*$ est défini par $\langle \phi, \mathfrak{U}^*(\lambda)\chi \rangle_{X, X^*} = \langle \mathfrak{U}(\bar{\lambda})\phi, \chi \rangle_{Y, Y^*}$ pour tout $\phi \in X$ et $\chi \in Y^*$.

Définition 7.55. Un nombre complexe λ_0 est dit *valeur propre* d'un faisceau d'opérateurs $\mathfrak{U}(\lambda)$ si $\text{Ker } \mathfrak{U}(\lambda_0) \neq \{0\}$ et un vecteur propre associé à λ_0 désigne n'importe quel élément non nul de cet ensemble. La dimension de $\text{Ker } \mathfrak{U}(\lambda_0)$ est appelé multiplicité géométrique de λ_0 .

Définition 7.56. Soit λ_0 une valeur propre de $\mathfrak{U}(\lambda)$ et ϕ_0 un vecteur propre associé à λ_0 . Si ϕ_1, \dots, ϕ_s sont des opérateurs continus de X dans Y tels que

$$\sum_{q=0}^{\sigma} \frac{1}{q!} \frac{d^q \mathfrak{U}}{d\lambda^q}(\lambda_0) \phi_{\sigma-q} = 0, \quad (7.230)$$

pour tout $\sigma \in \{1, \dots, s\}$, alors $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_s)$ est une *chaîne de Jordan associée à λ_0 de taille $s+1$* . La taille maximale des chaînes de Jordan correspondant au vecteur propre ϕ_0 est appelée rang de ϕ_0 .

Définition 7.57. Un faisceau d'opérateurs $\mathfrak{U}(\lambda)$ est un *faisceau d'opérateurs de type Fredholm* si d'une part $\mathfrak{U}(\lambda)$ est un opérateur de type Fredholm pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé et d'autre part si $\mathfrak{U}(\lambda)$ est inversible pour au moins un $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemme 7.58. *Un faisceau d'opérateurs $\mathfrak{U}(\lambda)$ est de type Fredholm si, et seulement si, $\mathfrak{U}^*(\lambda)$ est un faisceau d'opérateurs de type Fredholm et λ_0 est une valeur propre de $\mathfrak{U}(\lambda)$ si, et seulement si, $\bar{\lambda}_0$ est une valeur propre de $\mathfrak{U}^*(\lambda)$. La multiplicité géométrique de λ_0 et $\bar{\lambda}_0$ coïncide.*

Lemme 7.59. *Soit $\mathfrak{U}(\lambda)$ un faisceau d'opérateurs de type Fredholm. Alors son spectre (l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $\mathfrak{U}(\lambda)$ n'est pas inversible) ne contient que des valeurs propres isolées de multiplicité finie.*

Le résultat principal que nous utiliserons dérive du théorème 5.1.1 de [139]. Pour des raisons de simplicité et parce que cela correspond au problème que nous regardons, nous nous contentons de l'énoncer dans le cas où la multiplicité de la valeur propre est égale à 1 et dans le cas où les chaînes de Jordan sont constituées d'opérateurs auto-adjoints

Théorème 7.60. *Soit $\mathfrak{U}(\lambda)$ un faisceau d'opérateurs de type Fredholm défini par (7.228), soit λ_0 une valeur propre associée à $\mathfrak{U}(\lambda)$ de multiplicité (géométrique) égale à 1 et soit ϕ_0 un vecteur propre associé. Supposons que $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_s)$ est une chaîne de Jordan associée à λ_0 de taille $s+1$ où les ϕ_j sont auto-adjoints. Alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{O} de λ_0 tel que*

$$\mathfrak{U}(\lambda)^{-1} = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\Pi_j}{(\lambda - \lambda_0)^{s-j}} + \Gamma(\lambda), \quad (7.231)$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{O} \setminus \{\lambda_0\}$, où les Π_j sont les opérateurs linéaires de Y dans X définis par

$$\Pi_j v = \sum_{\sigma=0}^j \langle v, \phi_\sigma \rangle_{Y, Y^*} \phi_{j-\sigma}, \quad (7.232)$$

pour tout $v \in Y$ et où Γ est holomorphe sur \mathcal{O} .

7.B Annexe : quelques démonstrations

Nous démontrons ici la proposition 7.26 et la proposition 7.35. À chaque fois, il s'agit d'évaluer des quantités du type $\langle -\nabla \cdot (a\nabla u), h \rangle$ pour $u \in W(B)$ et $h \in V_+^1(B)$ (souvent $h = 1$ ou $h = \mathcal{N}$). La démarche est toujours la même. Nous nous donnons une fonction de troncature $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe \mathcal{C}^∞ où $\chi(t) = 1$ pour $|t| \geq 2$ et $\chi(t) = 0$ pour $|t| \leq 1$. Pour $L > 0$, définissons $\chi_L(y_1) := \chi(y_1/L)$ de sorte qu'en utilisant le théorème de convergence dominée, $\chi_L h$ converge h dans $V_+^1(B)$. Ainsi, nous obtenons

$$\langle -\nabla \cdot (a\nabla u), \mathcal{N} \rangle = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_B a\nabla u \cdot (\chi_L h), \mathbf{dy}. \quad (7.233)$$

Les démonstrations utilisent un résultat de convergence faible-* très classique en homogénéisation (voir par exemple [64, théorème 2.6]) :

Proposition 7.61 (propriété de la moyenne). *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment et soit $a \in L^\infty(I)$ une fonction 1-périodique. Alors la suite $(a(\cdot/\delta))$ converge faiblement-* vers $\langle a \rangle := \int_0^1 a$ quand δ tend vers 0 (par valeurs supérieures), c'est-à-dire que pour tout $\phi \in L^1(I)$ nous avons*

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_I a(x/\delta)\phi(x) dx = \langle a \rangle \int_I \phi. \quad (7.234)$$

Commençons par la proposition 7.26 qui concerne la formule de Green généralisée.

Démonstration de la proposition 7.26. Puisque $V_+^1(B) := V_\gamma^1(B) + V_{-\gamma}^1(B)$, il suffit de montrer le résultat d'une part pour $u \in V_\gamma^1(B)$ (auquel cas $\ell_D^+(u) = \ell_N^+(u) = 0$) et d'autre part pour $u \in V_{-\gamma}^1(B)$ (auquel cas $\ell_D^-(u) = \ell_N^-(u) = 0$). Nous allons seulement traiter le cas $u \in V_{-\gamma}^1(B)$, la démonstration pour le cas $u \in V_\gamma^1(B)$ étant similaire mais plus simple. En définissant $g := -\nabla \cdot (a\nabla u)$ et $h := -\nabla \cdot (a\nabla v)$, d'après (7.233), nous avons

$$\langle g, v \rangle - \langle h, u \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_B a\nabla \chi_L \cdot (v\nabla u - u\nabla v) \mathbf{dy}. \quad (7.235)$$

Par conséquent, en utilisant le théorème 7.25, il vient, en notant $s(\mathbf{y}) := (y_1 + w_1(\mathbf{y}))/a_{11}^*$,

$$\langle g, v \rangle - \langle h, u \rangle = [\ell_D^+(v)\ell_N^+(u) - \ell_D^+(u)\ell_N^+(v)] \lim_{L \rightarrow \infty} \int_B a\nabla \chi_L \cdot \nabla s \mathbf{dy}. \quad (7.236)$$

Pour évaluer cette dernière limite, décomposons l'intégrale en deux morceaux puisque $s(\mathbf{y}) = (y_1 + w_1(\mathbf{y}))/a_{11}^*$. Pour l'intégrale en y_1/a_{11}^* , en effectuant un changement de variable $t = y_1/L$, nous obtenons en utilisant la propriété de la moyenne (7.234) :

$$\begin{aligned} \int_B a(\mathbf{y})\nabla(y_1)\nabla\chi_L(\mathbf{y}) \mathbf{dy} &= \int_1^2 \left(\int_0^1 a(Lt, y_2) \mathbf{dy}_2 \right) \chi'(t), dt \\ &\xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_Y a(\mathbf{y}) \mathbf{dy} \int_1^2 \chi'(t) dt = - \int_Y a(\mathbf{y}) \mathbf{dy}. \end{aligned} \quad (7.237)$$

De la même façon, nous obtenons pour l'intégrale en w_1/a_{11}^*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{B_+} a(\mathbf{y})\nabla w_1 \cdot \nabla \chi_L \mathbf{dy} = - \int_Y a(\mathbf{y})\nabla w_1 \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{dy}. \quad (7.238)$$

Finalement, nous obtenons

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_B a\nabla \chi_L \cdot \nabla s \mathbf{dy} = \frac{-1}{a_{11}^*} \int_Y a(\mathbf{y})(1 + \partial_{y_1} w_1) \mathbf{dy} = -1, \quad (7.239)$$

en revenant à la définition (7.6) du coefficient homogénéisé a_{11}^* . En combinant (7.235), (7.236) et (7.239) nous obtenons bien le résultat annoncé. \square

Nous allons maintenant démontrer la proposition 7.35. L'existence et l'unicité de \mathcal{P}_1 ont déjà été établies. En ce qui concerne le fait que $[\ell_D(\mathcal{P}_1)]$ et $[\ell_N(\mathcal{P}_1)]$ ne dépendent pas de ψ^+ , il suffit de considérer une fonction $\zeta \in C^\infty$ à support bornée. Nous avons alors $w_2\zeta \in V_-^1(B)$ donc d'après la formule de Green (7.99) nous avons $\langle L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_2\zeta), \mathcal{N} \rangle = \langle L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_2\zeta), 1 \rangle = 0$. En utilisant les formules de compatibilité (7.108), nous voyons donc bien que l'ajout d'un terme $\langle L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(w_2\zeta) \rangle$ dans le second membre de (7.118) ne change pas les quantités $[\ell_D(\mathcal{P}_1)]$ et $[\ell_N(\mathcal{P}_1)]$. Par conséquent, elles ne dépendent pas du choix de la fonction de troncature ψ^+ .

Démonstration de la formule (7.119). D'après la première relation de compatibilité (7.108) et l'équation (7.118) vérifiée par \mathcal{P}_1 , nous avons $[\ell_N(\mathcal{P}_1)] = -\langle L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\psi^+w_2) + \partial_{y_2}a, 1 \rangle$. En utilisant (7.233) avec $h = 1$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\psi^+w_2) + \partial_{y_2}a, 1 \rangle &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \langle L_{\mathbf{y},\mathbf{y}}(\psi^+w_2) + \partial_{y_2}a, \chi_L \rangle \\ &= \int_B a \nabla(\psi^+w_2) \cdot \nabla \chi_L \, d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (7.240)$$

car le terme en $\partial_{y_2}a$ disparaît après une intégration par parties (χ_L est indépendant de y_2). En remarquant ensuite que pour L assez grand, $\psi^+(\mathbf{y}) = 1$ lorsque $\nabla \chi_L(\mathbf{y}) \neq 0$, nous avons, en utilisant la propriété de la moyenne (7.234),

$$\begin{aligned} \int_B a \nabla(\psi^+w_2) \cdot \nabla \chi_L \, d\mathbf{y} &= \int_B a \nabla(w_2) \cdot \nabla \chi_L \, d\mathbf{y} \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^1 a(Lt, y_2) \frac{\partial w_2}{\partial y_1}(Lt, y_2) \, dy_2 \right) \chi'(t) \, dt \\ &\xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_Y a(\mathbf{y}) \frac{\partial w_2}{\partial y_1}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \int_1^2 \chi'(t) \, dt = a_{12}^*, \end{aligned} \quad (7.241)$$

en reconnaissant l'expression de a_{12}^* dans (7.6). □

CHAPITRE

8

CONSTRUCTION ET ANALYSE D'UN MODÈLE APPROCHÉ D'ORDRE 1

Sommaire

8.1	Quelques propriétés des profils et des constantes C_j	204
8.1.1	Le cas stratifié	204
8.1.2	Le cas a symétrique par rapport à y_2	204
8.1.3	La constante C_5	205
8.1.4	La constante C_1	206
8.2	Construction et analyse du modèle approché d'ordre 1	206
8.2.1	Rappels des résultats obtenus	206
8.2.2	Construction du modèle	207
8.2.3	Formulation variationnelle et caractère potentiellement mal posé	207
8.3	Décalage géométrique	209
8.3.1	Construction du modèle décalé	209
8.3.2	Caractère bien posé du modèle décalé	211
8.3.3	Convergence vers la solution exacte	213

Au chapitre précédent, nous avons construit les trois premiers termes de champ lointain homogène et périodique ainsi que les termes de champ proche puis nous avons proposé une approximation de la solution exacte en recombinaison ces différents termes grâce à des fonctions de troncature (voir (7.28)). Cependant, en pratique, nous ne considérons pas cette reconstruction globale, nous proposons un modèle approché ne faisant plus intervenir les termes de champ proche mais uniquement les termes de champ lointain. Plus précisément, ce modèle vérifie les mêmes équations volumiques que les termes de champ lointain mais a des conditions de transmissions non standards faisant intervenir des opérateurs différentiels le long de l'interface Γ de type Laplace-Beltrami. Ce modèle approché converge alors vers la solution exacte, dès lors que l'erreur est mesurée dans un domaine n'intersectant pas Γ . L'implémentation pratique de ce modèle sera traitée au chapitre suivant.

Dans un premier temps (section 8.1), nous décrivons quelques propriétés des profils \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2^j ($j = 1, 2, 3$) ainsi que des constantes C_j définies par (7.124) et (7.151). Notamment, nous nous intéressons aux cas où les fonctions périodiques a et ρ admettent des symétries. Dans un deuxième temps (section 8.2), nous construisons un problème approché en considérant les équations vérifiées par $u_0 + \delta u_1$. Malheureusement ce problème est potentiellement mal posé. C'est pourquoi dans un troisième temps (section

8.3), nous utilisons la technique dite du décalage géométrique pour construire un autre modèle approché et nous montrons qu'il est bien posé grâce à une formulation variationnelle adaptée. Enfin, nous montrons que ce modèle converge bien en norme H^1 vers la solution exacte et nous précisons les vitesses de convergence. Cela confirme l'efficacité de notre modèle par rapport à l'homogénéisation classique vue au chapitre 6.

8.1 Quelques propriétés des profils et des constantes C_j

Dans cette section, nous faisons quelques commentaires sur les profils \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2^j ($j = 1, 2, 3$) ainsi que les constantes C_j intervenant dans le problème (7.163) vérifié par les termes de champ lointain à l'ordre 1. Ces constantes sont définies par (7.124) et (7.151). En particulier, nous souhaitons présenter des situations où ces profils et ces constantes sont nulles, ce qui simplifie alors les conditions de transmission de notre modèle approché.

8.1.1 Le cas stratifié

Dans cette partie, nous faisons l'hypothèse que a est indépendant de y_2 . Un cas typique est un matériau lamellé où a est constant par morceaux, prenant deux valeurs différentes sur $(0, \ell) \times (0, 1)$ et $(\ell, 1) \times (0, 1)$ respectivement, avec $\ell \in (0, 1)$.

Cette hypothèse a pour conséquence que w_1 ne dépend pas de y_2 et que w_2 est nulle puisque $\partial_{y_2} a = 0$ (voir l'équation (7.7) vérifiée par w_2). Nous avons également $\theta_{12} = \theta_{21} = 0$. Une conséquence de la nullité de w_2 est que $a_{12}^* = a_{21}^* = 0$ (d'après (7.6), voir aussi l'annexe 6.A). Nous en déduisons alors que le profil \mathcal{P}_1 est nul, car $\partial_{y_2} a - L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(\psi^+ w_2) = 0$, ce qui signifie que le second membre de l'équation (7.118) vérifiée par \mathcal{P}_1 est nul. Cela nous donne d'autre part que $C_2 = 0$ d'après (7.124). Enfin, le profil \mathcal{P}_2^1 est nul également, car \mathcal{N} est indépendant de y_2 (puisque w_1 l'est aussi) donc le second membre de l'équation (7.137) vérifiée par \mathcal{P}_2^1 est nul. Nous avons donc $C_3 = 0$ d'après (7.151).

Il n'y a par contre aucune raison que $C_1 = [\ell_D(\mathcal{N})]$ soit nul. Par ailleurs, même si les seconds membres des équations (7.140) et (7.142) se simplifient énormément, \mathcal{P}_2^2 n'a aucune raison d'être nul *a priori*. De même pour le profil \mathcal{P}_2^3 défini par (7.133). Il n'y a donc aucun motif pour que les constantes C_4 et C_5 soient nulles.

Résumons la situation :

Proposition 8.1. *Supposons que a soit indépendant de y_1 . Alors les profils \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2^1 sont nuls et par conséquent $C_2 = C_3 = 0$.*

8.1.2 Le cas a symétrique par rapport à y_2

Dans cette partie, les termes *symétrique* et *antisymétrique* sont à comprendre toujours par rapport à y_2 et à l'axe $y_2 = 1/2$.

Supposons que a et ρ soient symétriques. Dans ce cas, $\partial_{y_2} a$ est antisymétrique. Cela implique donc que w_1 est symétrique et w_2 est antisymétrique. En particulier, $a_{12}^* = a_{21}^* = 0$ d'après (7.6). De même, θ_{11} , θ_{22} et γ sont symétriques alors que θ_{12} et θ_{21} sont antisymétriques.

Notons par ailleurs que si un profil \mathcal{P} est antisymétrique, cela implique forcément que $\ell_N^-(\mathcal{P}) = \ell_N^+(\mathcal{P}) = 0$, puisque les comportements à l'infini $\mathbf{y} \mapsto y_1$ et $\mathbf{y} \mapsto y_1 + w_1(\mathbf{y})$ sont symétriques. Nous pouvons alors, en examinant les seconds membres des équations définissant les profils, dire si ceux-ci sont symétriques ou antisymétriques et en déduire des informations sur le saut des comportements linéaires à l'infini :

Profil \mathcal{P}	symétrie	$[\ell_N(\mathcal{P})]$
1	symétrique	= 0
\mathcal{N}	symétrique	= 0
\mathcal{P}_1	antisymétrique	= 0
\mathcal{P}_2^1	antisymétrique	= 0
\mathcal{P}_2^2	symétrique	$\neq 0$ (<i>a priori</i>)
\mathcal{P}_2^3	symétrique	$\neq 0$ (<i>a priori</i>)

Remarque 8.2. Le fait que $[\ell_N(1)] = 0$ et $[\ell_N(\mathcal{N})] = 0$ est tout le temps vrai, même dans le cas où a n'est pas symétrique.

Nous en déduisons donc que $C_2 = C_3 = 0$ ainsi que $C_4 \neq 0$ et $C_5 \neq 0$ *a priori*. De même, il n'y a pas de raison que $C_1 = [\ell_D(\mathcal{N})]$ soit nul. Résumons la situation :

Proposition 8.3. *Supposons que a soit symétrique. Alors les profils \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2^1 sont antisymétriques et par conséquent $C_2 = C_3 = 0$.*

8.1.3 La constante C_5

Discutons maintenant du cas particulier où la fonction ρ vaut 1 partout, à la fois sur Ω^- et sur Ω^+ . L'équation (7.133) définissant le profil \mathcal{P}_2^3 devient alors

$$\begin{cases} L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \mathcal{P}_2^3 = 1 + \left[L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left(\psi^- \frac{y_1^2}{2a_0} \right) + L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left(\psi^+ \left(\frac{y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}}{a_{11}^*} \right) \right) \right], \\ \langle \ell_D(\mathcal{P}_2^3) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(\mathcal{P}_2^3) \rangle = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Notons que la solution γ du problème de cellule (7.12) n'intervient plus puisqu'elle est nulle.

Nous avons alors la proposition suivante qui montre que la constante C_5 est nulle. Cela implique en particulier que les conditions de transmission (7.163) ne font plus intervenir la fréquence ω .

Proposition 8.4. *Supposons que ρ soit constante égale à 1 sur \mathbb{R}^2 . Alors $C_5 = [\ell_N(\mathcal{P}_2^3)] = 0$.*

Démonstration. Il s'agit d'un calcul dans l'esprit de ceux de l'annexe 7.B et les arguments utilisés sont similaires. Nous avons donc

$$[\ell_N(\mathcal{P}_2^3)] = - \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_B \left\{ 1 + \left[L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left(\psi^- \frac{y_1^2}{2a_0} \right) + L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left(\psi^+ \left(\frac{y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}}{a_{11}^*} \right) \right) \right] \right\} \chi_L. \quad (8.2)$$

Étudions les trois termes du membre de droite séparément. Nous avons d'une part

$$\int_B \chi_L = \int_{-2L}^{2L} \partial_{y_1} \chi_L = - \int_{-2L}^{2L} y_1 \chi_L' = - \int_{-2L}^{-L} y_1 \chi_L' - \int_L^{2L} y_1 \chi_L' := A(y_1) + B(y_1). \quad (8.3)$$

D'autre part, pour L assez grand,

$$\begin{aligned} \int_B L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left(\psi^- \frac{y_1^2}{2a_0} \right) \chi_L &= - \int_B a_0 \Delta \left(\psi^- \frac{y_1^2}{2a_0} \right) \chi_L \\ &= - \int_B \Delta \left(\frac{y_1^2}{2} \right) \chi_L \\ &= \int_{-2L}^{-L} y_1 \chi_L' = -A(y_1). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Enfin, nous avons, toujours pour L assez grand,

$$\begin{aligned} \int_B L_{\mathbf{y},\mathbf{y}} \left(\psi^+ \left(\frac{y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}}{a_{11}^*} \right) \right) \chi_L &= \int_L^{2L} a \partial_{y_1} \frac{y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}}{a_{11}^*} \chi_L' \\ &= \frac{1}{a_{11}^*} \int_L^{2L} a (w_1 + \partial_{y_1} \theta_{11}) \chi_L' + \frac{1}{a_{11}^*} \int_L^{2L} a y_1 (1 + \partial_{y_1} w_1) \\ &:= C(\mathbf{y}) + D(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Nous avons alors, par changement de variable et en utilisant la propriété de la moyenne (7.234),

$$\begin{aligned} C(\mathbf{y}) &= \frac{1}{a_{11}^*} \int_0^1 \int_1^2 a(tL, y_2) (w_1(tL, y_2) + \partial_{y_1} \theta_{11}(tL, y_2)) \chi'(t) dt dy_2 \\ &\xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_Y a(w_1 + \partial_{y_1} \theta_{11}) \int_1^2 \chi' = -c_{111}^* = 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Le fait que $c_{111}^* = 0$ provient de la proposition 6.7. Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} D(\mathbf{y}) &:= \frac{1}{a_{11}^* L} \int_0^1 \int_1^2 a(tL, y_2) (1 + \partial_{y_1} w_1(tL, y_2)) t \chi'(t) dt dy_2 \\ &\underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_{11}^* L} \int_Y a(1 + \partial_{y_1} w_1) \int_1^2 t \chi' = \frac{1}{L} \int_1^2 t \chi' = -B(y_1). \end{aligned} \quad (8.7)$$

En prenant en compte (8.3), (8.5), (8.6) et (8.7) dans (8.2), nous obtenons bien le résultat annoncé. \square

8.1.4 La constante C_1

Terminons cette section en examinant le cas de la constante $C_1 = [\ell_D(\mathcal{N})]$. Comme nous allons le voir dans la suite, le fait que cette constante ne soit pas nulle est primordiale pour établir la formulation variationnelle de notre modèle approché. Malheureusement, dans le cas général nous ne disposons d'aucune formule analytique nous donnant cette constante.

Il existe même des cas non triviaux (c'est-à-dire où a n'est pas une constante partout) pour lesquels $C_1 = 0$. Prenons pour exemple le cas stratifié où a est indépendant de y_2 . Alors la solution w_1 du problème de cellule et le profil \mathcal{N} sont indépendants de y_1 et nous pouvons même donner la forme explicite de \mathcal{N} de chaque côté du guide :

$$\mathcal{N}(y_1) = \begin{cases} \ell_D^-(\mathcal{N}) + \frac{y_1}{a_0} & \text{pour } y_1 < 0, \\ \ell_D^+(\mathcal{N}) + \frac{y_1 + w_1(y_1)}{a^*} & \text{pour } y_1 > 0, \end{cases} \quad (8.8)$$

avec $a^* = \langle a^{-1} \rangle^{-1}$ (voir l'annexe 6.A). Le fait que \mathcal{N} doit être continu en $y_1 = 0$ implique alors que

$$[\ell_D(\mathcal{N})] = -\frac{w_1(0)}{a^*}. \quad (8.9)$$

Nous voyons donc que $C_1 = 0$ si, et seulement si, $w_1(0) = 0$. Or cette situation peut arriver. Par exemple, prenons a qui vaut 1 sur $(0, 1/3)$, 2 sur $(1/3, 2/3)$ et 1 sur $(2/3, 1)$. Il est alors facile de calculer explicitement que

$$w_1(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{5}y, & y \in (0, 1/3), \\ \frac{1}{5} - \frac{2}{5}y, & y \in (1/3, 2/3), \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}y, & y \in (2/3, 1). \end{cases} \quad (8.10)$$

En particulier $w_1(0) = 0$.

8.2 Construction et analyse du modèle approché d'ordre 1

8.2.1 Rappels des résultats obtenus

À l'ordre 0, le champ lointain périodique u_0^+ est simplement sa partie homogénéisée \hat{u}_0^+ . En définissant u_0 tel que $u_0 = u_0^-$ sur Ω^- et $u_0 = \hat{u}_0^+$ sur Ω^+ , u_0 est l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ du problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_0) - \omega^2 \rho_0^* u_0 = f, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [u_0]_\Gamma = 0, \\ [A_0^* \nabla u_0 \cdot \mathbf{e}_1]_\Gamma = 0. \end{cases} \quad (8.11)$$

où A_0^* et ρ_0^* sont définies par (7.157).

À l'ordre 1, le champ lointain périodique u_1^+ vérifie

$$u_1^+(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}/\delta) + \hat{u}_1^+(\mathbf{x}), \quad (8.12)$$

où $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ sont les deux solutions du problème de cellule (7.7). En définissant u_1 tel que $u_1 = u_1^-$ sur Ω^- et $u_1 = \hat{u}_1^+$ sur Ω^+ , u_1 est l'unique solution dans $H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ du problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_1) - \omega^2 \rho_0^* u_1 = 0, & \text{dans } \Omega^- \cup \Omega^+, \\ [u_1]_{\Gamma} = C_1 \langle A_0^* \nabla u_0 \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma} + C_2 \partial_{x_2} u_0|_{\Gamma}, \\ [A_0^* \nabla u_1 \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} = C_3 \partial_{x_2} \langle A_0^* \nabla u_0 \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma} + C_4 \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_{\Gamma} + \omega^2 C_5 u_0|_{\Gamma}, \end{cases} \quad (8.13)$$

où les constantes C_j sont définies par (7.124) et (7.151).

8.2.2 Construction du modèle

Pour obtenir une condition de transmission approchée d'ordre 1, nous allons établir une équation dont la solution est proche des deux premiers termes de champs lointains $u_0 + \delta u_1$. Pour ce faire, nous proposons un problème approché satisfait par ce développement tronqué en négligeant les termes d'ordre δ^2 .

Introduisons la fonction v_1^{δ} correspondant à ce développement d'ordre 1 :

$$v_1^{\delta} := u_0 + \delta u_1. \quad (8.14)$$

Regardons le problème vérifié par v_1^{δ} . Tout d'abord, au niveau de l'équation volumique, en combinant les équations volumiques de (8.11) et (8.13), nous obtenons

$$-\nabla \cdot (A_0^* \nabla v_1^{\delta}) - \omega^2 \rho_0^* v_1^{\delta} = f, \quad \text{dans } \Omega^- \cup \Omega^+. \quad (8.15)$$

Pour les sauts des traces et des flux, nous obtenons, toujours en utilisant (8.11) et (8.13),

$$\begin{cases} [v_1^{\delta}]_{\Gamma} = \delta C_1 \langle A_0^* \nabla v_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma} + \delta C_2 \partial_{x_2} \langle v_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} + \mathcal{O}(\delta^2), \\ [A_0^* \nabla v_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} = \delta C_3 \partial_{x_2} \langle A_0^* \nabla v_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma} + \delta C_4 \partial_{x_2 x_2}^2 \langle v_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} + \omega^2 \delta C_5 \langle v_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} + \mathcal{O}(\delta^2). \end{cases} \quad (8.16)$$

En négligeant les termes en δ^2 , il est alors naturel d'introduire une approximation u_1^{δ} de v_1^{δ} qui vérifie

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_1^{\delta}) - \omega^2 \rho_0^* u_1^{\delta} = f & \text{dans } \Omega^- \cup \Omega^+, \\ [u_1^{\delta}]_{\Gamma} = \delta C_1 \langle A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma} + \delta C_2 \partial_{x_2} \langle u_1^{\delta} \rangle_{\Gamma}, \\ [A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} = \delta C_3 \partial_{x_2} \langle A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma} + \delta C_4 \partial_{x_2 x_2}^2 \langle u_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} + \omega^2 \delta C_5 \langle u_1^{\delta} \rangle_{\Gamma}. \end{cases} \quad (8.17)$$

Pour estimer l'erreur entre $\|u_1^{\delta} - v_1^{\delta}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$, il est nécessaire d'étudier la stabilité du problème (8.17).

8.2.3 Formulation variationnelle et caractère potentiellement mal posé

Pour étudier notre modèle approché (8.17), établissons sa formulation variationnelle. L'espace fonctionnel V naturellement associé à ce problème est

$$V := \{v \in L^2(\mathbb{R}^2) : v|_{\Omega_{\pm}} \in H^1(\Omega_{\pm}) \text{ et } \langle v \rangle_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)\}, \quad (8.18)$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_V := (u, v)_{H^1(\Omega^-)} + (u, v)_{H^1(\Omega^+)} + (\langle u \rangle_{\Gamma}, \langle v \rangle_{\Gamma})_{H^1(\Gamma)}, \quad (8.19)$$

qui en fait un espace de Hilbert. Nous noterons $\|\cdot\|_V$ la norme associée à $(\cdot, \cdot)_V$.

Considérons alors une fonction test $v \in V$ et notons $v_{\pm} := v|_{\Omega^{\pm}}$. Nous avons d'après la première équation de (8.17)

$$\begin{cases} \int_{\Omega^-} a_0 \nabla u_1^{\delta} \cdot \nabla \bar{v}_- - \omega^2 \rho_0 \int_{\Omega^-} u_1^{\delta} \bar{v}_- - \langle (a_0 \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1), v_- \rangle = \int_{\Omega^-} f \bar{v}_-, \\ \int_{\Omega^+} A^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \nabla \bar{v}_+ - \omega^2 \rho^* \int_{\Omega^+} u_1^{\delta} \bar{v}_+ + \langle (A^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1), v_+ \rangle = 0, \end{cases} \quad (8.20)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$. Sommons alors ces deux lignes. En utilisant l'identité algébrique valable pour tout $(a^-, a^+, b^-, b^+) \in \mathbb{C}^4$,

$$a^+ b^+ - a^- b^- = (a^+ - a^-) \frac{b^- + b^+}{2} + (b^+ - b^-) \frac{a^- + a^+}{2}, \quad (8.21)$$

nous obtenons alors

$$\int_{\Omega^- \cup \Omega^+} A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega^- \cup \Omega^+} \rho_0^* u_1^{\delta} \bar{v} + \langle [A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma}, \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma} \rangle + \langle \langle A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma}, [v]_{\Gamma} \rangle = \int_{\Omega^-} f \bar{v}. \quad (8.22)$$

Utilisons maintenant les équations sur Γ de (8.17). En supposant que $C_1 \neq 0$, la première portant sur les traces nous donne

$$\langle [A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma}, \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma} \rangle = \frac{1}{\delta C_1} \int_{\Gamma} [u_1^{\delta}]_{\Gamma} [\bar{v}]_{\Gamma} - \frac{C_2}{C_1} \int_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle u_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} [\bar{v}]_{\Gamma}. \quad (8.23)$$

Remarque 8.5. Nous avons vu à la section 8.1.4 qu'il existe des situations où C_1 peut être nul. Dans ce cas, il est toujours possible de construire une formulation variationnelle de (8.17), mais qui fera intervenir une condition essentielle dans l'espace V . Nous avons choisi ici de ne présenter que le cas $C_1 \neq 0$ car c'est celui-ci qui arrive le plus en pratique. Tout ce qui suit pourrait être étendu au cas $C_1 = 0$.

La seconde équation sur Γ de (8.17) qui concerne les flux peut s'écrire, en utilisant des intégrations par parties et la relation ci-dessus, sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma} &= -\delta C_3 \langle \langle A_0^* \nabla u_1^{\delta} \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma}, \partial_{x_2} [v]_{\Gamma} \rangle - \delta C_4 \int_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle u_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma} + \omega^2 \delta C_5 \int_{\Gamma} \langle u_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma}, \\ &= -\frac{C_3}{C_1} \int_{\Gamma} [u_1^{\delta}]_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma} + \delta \left(\frac{C_2 C_3}{C_1} - C_4 \right) \int_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle u_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma} + \omega^2 \delta C_5 \int_{\Gamma} \langle u_1^{\delta} \rangle_{\Gamma} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Finalement, la formulation variationnelle associée à (8.17) est :

$$\text{trouver } u_1^{\delta} \in V \text{ telle que } b(u_1^{\delta}, v) = \ell(v) \text{ pour tout } v \in V, \quad (8.25)$$

où b et ℓ sont respectivement les formes hermitiennes et linéaires définies pour tout $(u, v) \in V^2$ par

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \int_{\Omega^- \cup \Omega^+} A_0^* \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega^- \cup \Omega^+} \rho_0^* u \bar{v} + \frac{1}{\delta C_1} \int_{\Gamma} [u]_{\Gamma} [\bar{v}]_{\Gamma} - \frac{C_2}{C_1} \int_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle u \rangle_{\Gamma} [\bar{v}]_{\Gamma} \\ &\quad - \frac{C_3}{C_1} \int_{\Gamma} [u]_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma} + \delta \left(\frac{C_2 C_3}{C_1} - C_4 \right) \int_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle u \rangle_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma} + \omega^2 \delta C_5 \int_{\Gamma} \langle u \rangle_{\Gamma} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (8.26)$$

et

$$\ell(v) = \int_{\Omega^-} f \bar{v}. \quad (8.27)$$

Nous aimerions alors montrer que le problème (8.25) est bien posé, ou au moins de type Fredholm, par exemple en montrant que la forme bilinéaire b est coercive. Malheureusement, cela n'est pas toujours vrai. Par exemple, même dans le cas où $C_2 = C_3 = C_5 = 0$, la forme bilinéaire b devient

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \int_{\Omega^- \cup \Omega^+} A_0^* \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega^- \cup \Omega^+} \rho_0^* u \bar{v} \\ &\quad + \frac{1}{\delta C_1} \int_{\Gamma} [u]_{\Gamma} [\bar{v}]_{\Gamma} - \delta C_4 \int_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle u \rangle_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Cependant, le coefficient C_4 peut avoir le mauvais signe, c'est-à-dire que le terme en $-\delta C_4 \int_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle u \rangle_{\Gamma} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\Gamma}$ n'est ni coercif ni compact lorsque C_4 est strictement positive. Ce phénomène est déjà présent dans la littérature existante sur les couches minces (voir par exemple [84, 85]). Ainsi, nous ne pouvons conclure sur le caractère bien posé du problème (8.25). Cela pose des difficultés, même si nous supposons que ce problème admet une solution, aussi bien au niveau de l'analyse d'erreur (pas de stabilité) qu'au niveau numérique (pas d'analyse numérique possible).

De plus, ce genre de problèmes a des répercussions dans le régime temporel. Pour s'en convaincre, nous pouvons regarder l'équation en temps associée à (8.17), avec $C_2 = C_3 = C_5 = 0$ et $f = 0$, ce qui correspond à remplacer formellement $-i\omega$ par ∂_t :

$$\begin{cases} \rho_0^* \partial_{tt}^2 u - \nabla \cdot (A_0^* \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega^- \cup \Omega^+, \\ [u]_{\Gamma} = \delta C_1 \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma}, \\ [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} = \delta C_4 \partial_{x_2}^2 \langle u \rangle_{\Gamma}. \end{cases} \quad (8.29)$$

En multipliant la première ligne du problème ci-dessus par $\partial_t u$ nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega^- \cup \Omega^+} |\partial_t u|^2 + A_0^* \nabla u \cdot u + \frac{1}{\delta C_1} \int_{\Gamma} |[u]_{\Gamma}|^2 - \delta C_4 \int_{\Gamma} |\partial_{x_2} \langle u \rangle|^2 \right) = 0. \quad (8.30)$$

Quand les constantes C_1 et C_4 n'ont pas le bon signe, cette identité n'est plus une identité d'énergie. Le problème peut alors développer des instabilités (voir par exemple le chapitre 4 de [205] pour des observations numériques de ce genre d'instabilité pour des fentes minces).

8.3 Décalage géométrique

Une méthode possible pour pallier ce problème est d'utiliser la méthode dite du décalage géométrique (voir par exemple [84]). L'idée consiste à « écarter » l'interface Γ en une fine bande, les sauts et les moyennes d'une quantité à travers Γ sont alors remplacés par les sauts et les moyennes de cette quantité de chaque côté de cette fine bande. Au vu de la lourdeur des calculs, nous nous contentons de montrer la méthode dans le cas de la section 8.1.2 où a est symétrique, c'est-à-dire que $C_2 = C_3 = 0$ et $a_{12}^* = a_{21}^* = 0$, mais tout ce qui suit pourrait s'adapter sans difficulté au cas général.

8.3.1 Construction du modèle décalé

Considérons donc le domaine $\Omega_{\delta\alpha}$ où Γ a été « écartée » d'une constante $\alpha^- > 0$ à gauche et $\alpha^+ > 0$ à droite :

$$\Omega_{\delta\alpha} := \Omega_{\delta\alpha}^- \cup \Omega_{\delta\alpha}^+, \quad (8.31)$$

avec

$$\Omega_{\delta\alpha}^- := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -\delta\alpha^-\} \quad \text{et} \quad \Omega_{\delta\alpha}^+ := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > \delta\alpha^+\}. \quad (8.32)$$

Nous supposons également que δ est assez petit pour que le support de f soit contenu dans $\Omega_{\delta\alpha}^-$.

Remarque 8.6. Contrairement à [84] où le décalage était le même des deux côtés, c'est-à-dire $\alpha^- = \alpha^+$, nous sommes ici contraints de prendre $\alpha^- \neq \alpha^+$ en raison de l'anisotropie du milieu homogénéisé (même dans le cas $a_{12}^* = a_{21}^* = 0$ nous pouvons avoir $a_{11}^* \neq a_{22}^*$).

Ainsi, les conditions de transmissions ne seront plus écrites comme des moyennes et des sauts à travers Γ , mais entre les deux frontières

$$\Gamma_{\alpha\delta}^{\pm} := \partial\Omega_{\alpha\delta}^{\pm} = \{\pm\alpha^{\pm}\delta\} \times \mathbb{R}. \quad (8.33)$$

Définissons donc, pour toute fonction (suffisamment régulière) u définie dans $\Omega_{\delta\alpha}$, les moyennes et les sauts

$$\langle u \rangle_{\delta\alpha} := \frac{1}{2} \left(u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} + u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} \right) \quad \text{et} \quad [u]_{\delta\alpha} := u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} - u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-}. \quad (8.34)$$

Pour construire les conditions de transmission, nous effectuons tout d'abord un développement de Taylor

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} \delta\alpha^- + \mathcal{O}(\delta^2), \\ u|_{\Gamma} = u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} \delta\alpha^+ + \mathcal{O}(\delta^2), \end{cases} \quad (8.35)$$

d'où

$$\begin{cases} [u]_{\Gamma} = [u]_{\delta\alpha} - \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} \alpha^- + \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} \alpha^+ \right) + \mathcal{O}(\delta^2), \\ \langle u \rangle_{\Gamma} = \langle u \rangle_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\delta). \end{cases} \quad (8.36)$$

En faisant la même chose avec la dérivée par rapport à x_1 , nous obtenons (rappelons que $a_{12}^* = 0$)

$$\begin{cases} [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} = [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} - \delta \left(a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} \alpha^- + a_{11}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} \alpha^+ \right) + \mathcal{O}(\delta^2), \\ \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma} = \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\delta). \end{cases} \quad (8.37)$$

Si maintenant u est solution dans $\Omega_{\delta\alpha}$ de l'équation homogénéisée (8.17), nous avons

$$\begin{cases} -a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \omega^2 \rho_0 u & \text{dans } \Omega_{\delta\alpha}^-, \\ -a_{11}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = a_{22}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \omega^2 \rho^* u & \text{dans } \Omega_{\delta\alpha}^+, \end{cases} \quad (8.38)$$

de sorte que la première ligne de (8.37) devient

$$\begin{aligned} [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} &= [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} + \delta \left(a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} \alpha^- + a_{22}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} \alpha^+ \right) \\ &\quad + \delta \omega^2 \left(\alpha^- \rho_0 u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} + \alpha^+ \rho^* u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} \right) + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Pour faire apparaître la quantité $\partial^2 \langle u \rangle_{\delta\alpha} / \partial x_2^2$ dans (8.39), nous devons donc choisir

$$\alpha^- = \frac{\alpha}{a_0} \quad \text{et} \quad \alpha^+ = \frac{\alpha}{a_{22}^*}, \quad \text{pour } \alpha > 0. \quad (8.40)$$

Ce faisant, en utilisant l'identité algébrique (8.21), nous avons

$$\begin{cases} \alpha^- \rho_0 u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} + \alpha^+ \rho^* u|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} = \alpha \left[\langle u \rangle_{\delta\alpha} \left(\frac{\rho_0}{a_0} + \frac{\rho^*}{a_{22}^*} \right) + [u]_{\delta\alpha} \left(\frac{\rho^*}{2a_{22}^*} - \frac{\rho_0}{2a_0} \right) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^-} \alpha^- + \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_{\delta\alpha}^+} \alpha^+ = \alpha \left[\langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\delta\alpha} \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_{11}^* a_{22}^*} \right) + [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} \left(\frac{1}{2a_{11}^* a_{22}^*} - \frac{1}{2a_0^2} \right) \right]. \end{cases} \quad (8.41)$$

Ainsi, (8.36) et (8.39) deviennent

$$\begin{cases} [u]_{\Gamma} = [u]_{\delta\alpha} - \delta \alpha \left[\langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\delta\alpha} \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_{11}^* a_{22}^*} \right) + [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} \left(\frac{1}{2a_{11}^* a_{22}^*} - \frac{1}{2a_0^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\delta^2), \\ \langle u \rangle_{\Gamma} = \langle u \rangle_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\delta), \\ [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} = [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} + 2\delta \alpha \frac{\partial^2 \langle u \rangle_{\delta\alpha}}{\partial x_2^2} \\ \quad + \delta \alpha \omega^2 \left[\langle u \rangle_{\delta\alpha} \left(\frac{\rho_0}{a_0} + \frac{\rho^*}{a_{22}^*} \right) + [u]_{\delta\alpha} \left(\frac{\rho^*}{2a_{22}^*} - \frac{\rho_0}{2a_0} \right) \right] + \mathcal{O}(\delta^2), \\ \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma} = \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\delta). \end{cases} \quad (8.42)$$

Supposons alors que u vérifie les conditions de transmission de (8.17) (avec $C_2 = C_3 = 0$) :

$$\begin{cases} [u]_{\Gamma} = \delta C_1 \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\Gamma}, \\ [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\Gamma} = \delta C_4 \partial_{x_2 x_2}^2 \langle u \rangle_{\Gamma} + \omega^2 \delta C_5 \langle u \rangle_{\Gamma}. \end{cases} \quad (8.43)$$

En les injectant dans (8.42) nous trouvons dans un premier temps,

$$\begin{cases} [u]_{\delta\alpha} = \delta \left[C_1 + \alpha \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_{11}^* a_{22}^*} \right) \right] \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\delta\alpha} + \delta\alpha [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} \left(\frac{1}{2a_{11}^* a_{22}^*} - \frac{1}{2a_0^2} \right) + \mathcal{O}(\delta^2), \\ [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} = \delta (C_4 - 2\alpha) \partial_{x_2 x_2}^2 \langle u \rangle_{\delta\alpha} + \omega^2 \delta \left[C_5 - \alpha \left(\frac{\rho_0}{2a_0} + \frac{\rho^*}{2a_{22}^*} \right) \right] \langle u \rangle_{\delta\alpha} \\ \quad + \delta\alpha \left(\frac{\rho^*}{2a_{22}^*} - \frac{\rho_0}{2a_0} \right) [u]_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\delta^2). \end{cases} \quad (8.44)$$

Nous avons donc en particulier $[u]_{\delta\alpha} = \mathcal{O}(\delta)$ et $[A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} = \mathcal{O}(\delta)$. En négligeant les termes en $\mathcal{O}(\delta^2)$, nous obtenons

$$\begin{cases} [u]_{\delta\alpha} = \delta \left[C_1 + \alpha \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_{11}^* a_{22}^*} \right) \right] \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\delta^2), \\ [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} = \delta (C_4 - 2\alpha) \partial_{x_2 x_2}^2 \langle u \rangle_{\delta\alpha} + \omega^2 \delta \left[C_5 - \alpha \left(\frac{\rho_0}{2a_0} + \frac{\rho^*}{2a_{22}^*} \right) \right] \langle u \rangle_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\delta^2). \end{cases} \quad (8.45)$$

En appliquant donc tout cela à u_1^{δ} (qui est bien régulière près de Γ), nous obtenons alors notre modèle approché avec décalage géométrique, dont nous notons $u_1^{\delta\alpha}$ l'éventuelle solution :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_1^{\delta\alpha}) - \omega^2 \rho_0^* u_1^{\delta\alpha} = f & \text{dans } \Omega_{\delta\alpha}, \\ [u_1^{\delta\alpha}]_{\delta\alpha} = \delta C_1^{\alpha} \langle A_0^* \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\delta\alpha}, \\ [A_0^* \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} = \delta C_4^{\alpha} \partial_{x_2 x_2}^2 \langle u_1^{\delta\alpha} \rangle_{\delta\alpha} + \omega^2 \delta C_5^{\alpha} \langle u_1^{\delta\alpha} \rangle_{\delta\alpha}, \end{cases} \quad (8.46)$$

où

$$C_1^{\alpha} := C_1 + \alpha \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_{11}^* a_{22}^*} \right), \quad C_4^{\alpha} := C_4 - 2\alpha \quad \text{et} \quad C_5^{\alpha} := C_5 - \alpha \left(\frac{\rho_0}{2a_0} + \frac{\rho^*}{2a_{22}^*} \right). \quad (8.47)$$

8.3.2 Caractère bien posé du modèle décalé

L'intérêt de considérer le problème décalé (8.46) plutôt que (8.17) est qu'il existe une valeur $\alpha_0 \geq 0$ telle que $C_1^{\alpha} > 0$, $C_4^{\alpha} < 0$ et $C_5^{\alpha} < 0$ pour tout $\alpha > \alpha_0$. Ainsi, nous allons être en mesure de prouver le caractère bien posé du problème (8.46) si $\alpha > \alpha_0$, les problèmes de signe constatés à la section 8.2.3 ayant donc disparu.

Remarque 8.7. Avec le décalage, nous avons $C_1^{\alpha} > 0$ pour α assez grand même si $C_1 = 0$. Cela donne donc une autre façon de contourner le problème au lieu d'avoir introduit des conditions essentielles (voir la remarque 8.5).

Nous allons en fait considérer un problème légèrement plus général que (8.46) qui nous est utile dans la suite, en ajoutant des sources $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ et $h \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$ dans les conditions de transmission :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u) - \omega^2 \rho_0^* u = f & \text{dans } \Omega_{\delta\alpha}, \\ [u]_{\delta\alpha} = \delta C_1^{\alpha} \langle A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\delta\alpha} + g, \\ [A_0^* \nabla u \cdot \mathbf{e}_1]_{\delta\alpha} = \delta C_4^{\alpha} \partial_{x_2 x_2}^2 \langle u \rangle_{\delta\alpha} + \omega^2 \delta C_5^{\alpha} \langle u \rangle_{\delta\alpha} + h, \end{cases} \quad (8.48)$$

La formulation variationnelle du problème (8.48) s'obtient exactement de la même manière que dans la section 8.2.3. Définissons l'espace

$$V_{\delta\alpha} := \{v \in L^2(\mathbb{R}^2) : v|_{\Omega_{\alpha\pm\delta}^{\pm}} \in H^1(\Omega_{\alpha\pm\delta}^{\pm}) \text{ et } \langle v \rangle_{\delta\alpha} \in H^1(\mathbb{R})\}, \quad (8.49)$$

où nous avons identifié $\Gamma_{\delta\alpha}^{\pm}$ à \mathbb{R} . Ainsi, la formulation variationnelle associée à (8.48) est :

$$\text{trouver } u \in V_{\delta\alpha} \text{ telle que } b^{\alpha}(u, v) = \ell^{\alpha}(v) \text{ pour tout } v \in V_{\delta\alpha}, \quad (8.50)$$

où b^{α} et ℓ^{α} sont respectivement les formes hermitiennes et linéaires définies pour tout $(u, v) \in V_{\delta\alpha}^2$ par

$$\begin{aligned} b^{\alpha}(u, v) = & \int_{\Omega_{\delta\alpha}} A_0^* \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega_{\delta\alpha}} \rho_0^* u \bar{v} + \frac{1}{\delta C_1^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} [u]_{\delta\alpha} [\bar{v}]_{\delta\alpha} \\ & - \delta C_4^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_2} \langle u \rangle_{\delta\alpha} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\delta\alpha} + \omega^2 \delta C_5^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \langle u \rangle_{\delta\alpha} \langle \bar{v} \rangle_{\delta\alpha}, \end{aligned} \quad (8.51)$$

et

$$\ell^{\alpha}(v) = \int_{\Omega_{\alpha-\delta}^-} f \bar{v} - \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} g [\bar{v}]_{\delta\alpha} + \langle h, \langle \bar{v} \rangle_{\delta\alpha} \rangle_{H^{-1/2}(\mathbb{R}) \times H^{1/2}(\mathbb{R})}. \quad (8.52)$$

Nous munissons alors l'espace $V_{\delta\alpha}$ de la norme

$$\|u\|_{V_{\delta\alpha}}^2 = \|v\|_{H^1(\Omega_{\delta\alpha})}^2 + \frac{1}{\delta C_1^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |[u]_{\delta\alpha}|^2 - \delta C_4^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |\partial_{x_2} \langle u \rangle_{\delta\alpha}|^2 - \omega^2 \delta C_5^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |\langle u \rangle_{\delta\alpha}|^2. \quad (8.53)$$

Il s'agit bien d'une norme pour $\alpha > \alpha_0$, puisqu'alors $C_1^{\alpha} > 0$, $C_4^{\alpha} < 0$ et $C_5^{\alpha} < 0$.

Remarque 8.8. Le choix de la norme (8.53) peut paraître surprenant au premier abord car elle fait intervenir des termes qui dégénèrent ou explosent lorsque δ tend vers 0. Il est vrai qu'elle est introduite uniquement pour rendre le problème (8.50) coercif, avec une constante de coercivité indépendante de δ (voir la proposition 8.9 plus bas avec $h = g = 0$). Cependant, cela n'aura pas d'impact dans la suite, car nous avons seulement besoin que la norme $\|\cdot\|_{V_{\delta\alpha}}$ contrôle la norme H^1 loin de l'interface (grâce à la présence du terme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_{\delta\alpha})}^2$ dans (8.53)). Nous sommes donc en mesure de donner une estimation d'erreur finale en norme H^1 (et non dans la norme de $V_{\delta\alpha}$) dans un domaine n'intersectant pas l'interface (section 8.3.3).

Proposition 8.9. *Soit $\alpha > \alpha_0$. Il existe une unique solution $u \in V_{\delta\alpha}$ du problème variationnel (8.50) qui vérifie de plus*

$$\|u\|_{H^1(\Omega_{\delta\alpha})} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega_{\delta\alpha})} + \delta^{-1/2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^{-1/2} \|h\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \right), \quad (8.54)$$

où C est une constante positive indépendante de δ et de α .

En particulier, cette proposition montre que (8.17) admet une unique solution $u_1^{\alpha\delta} \in V_{\delta\alpha}$ (correspondant au cas $h = g = 0$).

Démonstration. Il s'agit ici d'appliquer le théorème de Lax-Milgram. Tout d'abord il est clair que b^{α} et ℓ^{α} sont continues pour la norme $\|\cdot\|_{V_{\delta\alpha}}$. La seule difficulté est de montrer que b^{α} est coercive sur $V_{\delta\alpha}$. Soit $u \in V_{\delta\alpha}$. Nous avons

$$\text{Im } b^{\alpha}(u, u) = -\text{Im } \omega^2 \left(\int_{\Omega_{\delta\alpha}} |u|^2 - \delta C_5^{\alpha} \int_{\Gamma} |\langle u \rangle_{\Gamma}|^2 \right) \leq 0, \quad (8.55)$$

puisque $\text{Im } \omega^2 > 0$ et $C_5^{\alpha} < 0$ (car $\alpha > \alpha_0$). Nous avons également

$$\text{Re } b^{\alpha}(u, u) = \int_{\Omega_{\delta\alpha}} A_0^* \nabla u \cdot \overline{\nabla u} + \frac{1}{\delta C_1^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |[u]_{\delta\alpha}|^2 - \delta C_4^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |\partial_{x_2} \langle u \rangle_{\delta\alpha}|^2 + \frac{\text{Re } \omega^2}{\text{Im } \omega^2} \text{Im } b^{\alpha}(u, u) \geq 0. \quad (8.56)$$

Ainsi, en utilisant ces deux relations, (8.53) peut s'écrire

$$\|u\|_{V_{\delta\alpha}}^2 = \text{Re } b^{\alpha}(u, u) - \frac{\text{Re } \omega^2}{\text{Im } \omega^2} \text{Im } b^{\alpha}(u, u) - \frac{1}{\text{Im } \omega^2} \text{Im } b^{\alpha}(u, u). \quad (8.57)$$

En utilisant alors le fait que $\text{Im } \omega^2 > 0$ et $\text{Im } b^\alpha(u, u) < 0$, nous obtenons $\|u\|_{V_{\delta\alpha}}^2 \leq C|b^\alpha(u, u)|$ donc b^α est coercive et sa constante de coercivité est indépendante de δ et de α . Le théorème de Lax-Milgram donne alors l'existence et l'unicité de la solution $u \in V$ de (8.50), qui vérifie de plus

$$\|u_1^\delta\|_{V_{\delta\alpha}}^2 \leq C\|\ell\|_{(V_{\delta\alpha})^*}, \quad (8.58)$$

où $(V_{\delta\alpha})^*$ est le dual de $V_{\delta\alpha}$. D'une part il est clair d'après (8.53) que $\|u\|_{V_{\delta\alpha}} \geq \|u\|_{H^1(\Omega_{\delta\alpha})}$. Il reste donc à estimer $\|\ell\|_{(V_{\delta\alpha})^*}$. Nous avons, d'après (8.52),

$$|\ell(u)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega_{\delta\alpha})}\|u\|_{L^2(\Omega_{\delta\alpha})} + \delta^{-1}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\|[u]_{\delta\alpha}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|h\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R})}\|\langle u \rangle_{\delta\alpha}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}. \quad (8.59)$$

D'après (8.53), nous avons directement $\|u\|_{L^2(\Omega_{\delta\alpha})}^2 \leq C\|u\|_{V_{\delta\alpha}}^2$ et $\|[u]_{\delta\alpha}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C\delta\|u\|_{V_{\delta\alpha}}^2$. Pour obtenir une estimation de $\|\langle u \rangle_{\delta\alpha}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$, c'est moins direct car la quantité apparaissant naturellement dans (8.53) est la norme $H^1(\mathbb{R})$ de $\langle u \rangle_{\delta\alpha}$ plutôt que sa norme $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Il faut alors se servir de l'inégalité d'interpolation [216]

$$\|\langle u \rangle_{\delta\alpha}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 \leq \|\langle u \rangle_{\delta\alpha}\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\langle u \rangle_{\delta\alpha}\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad (8.60)$$

et des estimations $\|\langle u \rangle_{\delta\alpha}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C\delta^{-1}\|u\|_{V_{\delta\alpha}}^2$ et $\|\langle u \rangle_{\delta\alpha}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\delta^{-1}\|u\|_{V_{\delta\alpha}}^2$ qui s'obtiennent directement à partir de (8.53) pour conclure que $\|\langle u \rangle_{\delta\alpha}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 \leq C\delta^{-1}\|u\|_{V_{\delta\alpha}}^2$. Finalement, en regroupant toutes ces estimations dans (8.59), nous obtenons bien (8.54). \square

Remarque 8.10. La démonstration repose de manière cruciale sur le fait que $\text{Im } \omega^2 > 0$ et la constante de coercivité de a dégénère lorsque $\text{Im } \omega^2$ tend vers 0. Cela laisse envisager des difficultés lorsque $\text{Im } \omega^2 = 0$. Ce cas est discuté plus en détails lors de la conclusion du manuscrit.

8.3.3 Convergence vers la solution exacte

Nous avons donc bien construit un modèle approché (8.46) qui admet donc une unique solution $u_1^{\alpha\delta} \in V_{\alpha\delta}^1$. Il reste maintenant à vérifier qu'elle approche bien la solution exacte u_δ et à étudier la vitesse de convergence. Bien entendu, comme c'était déjà le cas pour l'homogénéisation classique sans bord ou sans interface, pour avoir une bonne approximation dans H^1 de la solution du problème de départ, il faut rajouter des correcteurs oscillants dans Ω^+ . Nous considérons donc

$$u_1^{\alpha\delta}(\mathbf{x}) + \delta\nabla u_1^{\alpha\delta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta)\nabla u_1^{\delta\alpha}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \Omega^+, \quad (8.61)$$

où $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ sont les deux solutions du problème de cellule (7.7) et où $\Theta = (\theta_{ij})$ sont les quatre solutions des problèmes de cellules (7.11).

Malheureusement, nous ne pouvons espérer que la solution $u_1^{\alpha\delta}$ (8.61) approche correctement u_δ au niveau de l'interface Γ , car cette approximation ne prend plus en compte les termes de champ proche mais seulement leurs effets par l'intermédiaire des nouvelles conditions de transmission (c'était déjà le cas même avant d'avoir fait le décalage géométrique). Pour avoir une approximation satisfaisante au niveau de Γ , il faudrait construire et considérer les termes de champ proche.

Nous nous plaçons donc légèrement en dehors de l'interface avec le domaine Ω_r défini par (7.224). Ainsi, nous avons notre résultat final d'estimation d'erreur entre la solution exacte u_δ et la solution $u_1^{\delta\alpha}$ de notre modèle décalé approché d'ordre 1.

Théorème 8.11. *Soit u_δ la solution du problème exact (7.1) et soit $u_1^{\delta\alpha}$ la solution du problème (8.46). Sous les mêmes hypothèses que le théorème 7.45, nous avons*

$$\|u_\delta - u_1^{\delta\alpha}\|_{H^1(\Omega_r^-)} + \|u_\delta - (u_1^{\delta\alpha} + \delta\nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\cdot/\delta)) + \delta^2(\nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta)\nabla u_1^{\delta\alpha}])\|_{H^1(\Omega_r^+)} \leq C\delta^{3/2}, \quad (8.62)$$

où C est une constante positive indépendante de δ , où $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ sont les deux solutions du problème de cellule (7.7) et où $\Theta = (\theta_{ij})$ sont les quatre solutions des problèmes de cellules (7.11).

Démonstration. Notons $v_1^{\delta\alpha}$ qui vaut $u_1^{\delta\alpha}$ sur $\Omega_{\delta\alpha}^-$ et $u_1^{\delta\alpha} + \delta\nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\cdot/\delta)$ sur $\Omega_{\delta\alpha}^+$. Comme dans la preuve du corollaire 7.52, nous considérons δ assez petit pour que d'une part $\tilde{u}_{1,\delta}$ coïncide avec les deux premiers termes du développements en champs lointains $u_0^\pm + \delta u_1^\pm$ dans Ω^- et Ω^+ respectivement et que d'autre part $\Omega_r \subset \Omega_{\delta\alpha}$. Par inégalité triangulaire, nous avons

$$\|u_\delta - u_1^{\delta\alpha}\|_{H^1(\Omega_r^-)} + \|u_\delta - (u_1^{\delta\alpha} + \delta\nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\cdot/\delta))\|_{H^1(\Omega_r^+)} \leq \|u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}\|_{H^1(\Omega_r)} + \|\tilde{u}_{2,\delta} - v_1^{\delta\alpha}\|_{H^1(\Omega_r)}. \quad (8.63)$$

D'après le corollaire 7.52, $\|u_\delta - \tilde{u}_{2,\delta}\|_{H^1(\Omega_r)} \leq C\delta$. Il reste donc à estimer le second terme, que nous écrivons

$$\|\tilde{u}_{1,\delta} - v_1^{\delta\alpha}\|_{H^1(\Omega_r)} = \|(u_0^- + \delta u_1^-) + (u_0^- + \delta u_1^+) - v_1^\delta\|_{H^1(\Omega_r)}, \quad (8.64)$$

ce qui est licite puisque δ a été choisi assez petit. Posons alors $d := (u_0^- + \delta u_1^-) + (u_0^+ + \delta u_1^+) - v_1^\delta$. Il est alors facile de vérifier que d est solution de (8.48) avec $f = 0$, $g = \mathcal{O}(\delta^2)$ et $h = \mathcal{O}(\delta^2)$. Il suffit alors d'utiliser la relation de continuité (8.54) pour conclure que $\|d\|_{H^1(\Omega_r)} \leq C\delta^{3/2}$, ce qui achève la démonstration. \square

Comme nous l'avions fait à la section 7.5.6 du chapitre 7, nous proposons la conjecture suivante basée sur la conjecture 7.53 :

Conjecture 8.12. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 8.11, nous avons*

$$\|u_\delta - u_1^{\delta\alpha}\|_{H^1(\Omega_r^-)} + \|u_\delta - (u_1^{\delta\alpha} + \delta\nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\cdot/\delta) + \delta^2\nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta)\nabla u_1^{\delta\alpha}])\|_{H^1(\Omega_r^+)} \leq C\delta^2, \quad (8.65)$$

où C est une constante positive indépendante de δ , où $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ sont les deux solutions du problème de cellule (7.7) et où $\Theta = (\theta_{ij})$ sont les quatre solutions des problèmes de cellules (7.11).

CHAPITRE

9

MÉTHODES NUMÉRIQUES ET VALIDATIONS

Sommaire

9.1	Résolution des problèmes de cellule et calcul de la matrice homogénéisée	216
9.1.1	Problèmes de cellule du premier ordre	216
9.1.2	Calcul de la matrice homogénéisée	217
9.1.3	Problèmes de cellule du second ordre	217
9.2	Calcul de la solution exacte	218
9.2.1	Utilisation de la transformée de Floquet-Bloch	218
9.2.2	Discrétisation du paramètre de Floquet-Bloch	219
9.2.3	Opérateurs DtN dans un guide d'ondes homogène	220
9.2.4	Opérateurs DtN dans un guide d'onde périodique	222
9.2.5	Résolution du problème intérieur à ξ fixé	224
9.2.6	Reconstruction de la solution à gauche et à droite	225
9.3	Calcul des solutions homogénéisées (conditions de transmission classiques)	225
9.3.1	Calcul de la solution homogénéisée d'ordre 0	225
9.3.2	Calcul du gradient de la solution homogénéisée	226
9.3.3	Calcul de l'erreur entre la solution exacte et les solution homogénéisées (conditions de transmission classiques)	227
9.4	Calcul des profils et des constantes C_j	229
9.4.1	Calcul de \mathcal{N}	230
9.4.2	Calcul de \mathcal{P}_1	232
9.4.3	Problèmes d'interface : vers un calcul plus simple des profils et des constantes	233
9.5	Calcul de la solution avec conditions de transmission d'ordre élevé	234
9.5.1	Réduction du domaine de calcul	234
9.5.2	Formulation variationnelle	235
9.5.3	Résolution en pratique	236
9.6	Expériences numériques avec les nouvelles conditions de transmission	237
9.A	Annexe : calcul analytique d'un produit scalaire	238
9.B	Annexe : démonstration de la proposition 9.10	244

Ce chapitre vise d'une part à décrire les méthodes numériques dont nous avons besoin pour résoudre les problèmes que nous avons rencontrés tout au long de cette partie et d'autre part à illustrer numériquement l'efficacité de notre modèle approché décrit au chapitre précédent.

À la section 9.1, nous décrivons comment résoudre les différents problèmes de cellule et comment calculer les coefficients de la matrice homogénéisée. À la section 9.2, nous expliquons comment calculer la solution exacte, qui est utile pour les comparaisons qualitatives et le tracé des courbes d'erreur. Notamment, nous décrivons comment traiter deux difficultés majeures : le domaine de calcul n'est pas borné et que nous sommes en présence de coefficients périodiques. Pour traiter cette première difficulté, nous utilisons la transformée de Floquet-Bloch et pour la seconde nous construisons des opérateurs Dirichlet-to-Neumann spécifiques. À la section 9.3, nous montrons comment calculer les solutions de l'équation homogénéisée avec des conditions de transmission classiques. et comment calculer les erreurs L^2 et H^1 entre la solution exacte et la solution homogénéisée. La section 9.4 suivante explique comment calculer les fonctions profils et les constantes C_j intervenant dans les nouvelles conditions de transmission. Puis la section 9.5 explique comment calculer la solution du problème approché du chapitre précédent, notamment comment gérer les conditions de transmission d'ordre élevé. Enfin, la section 9.6 présente quelques expériences numériques validant nos résultats.

Soulignons le fait que nous présentons ici différentes méthodes numériques mais nous ne ferons pas l'analyse numérique de ces méthodes, il s'agit d'une des perspectives de cette thèse.

Dans tout ce chapitre, afin de simplifier les calculs qui sont déjà lourds, nous ferons l'hypothèse que $\rho = 1$ partout (cas décrit à la section 8.1.3 du chapitre précédent). Ainsi, nous avons $\rho_0^* = 1$ partout également et $C_5 = [\ell_N(\mathcal{P}_1^3)] = 0$.

9.1 Résolution des problèmes de cellule et calcul de la matrice homogénéisée

9.1.1 Problèmes de cellule du premier ordre

Rappelons la formulation variationnelle des problèmes de cellule du premier ordre (7.7) : trouver $w_j \in \dot{H}_\#^1(Y)$ telle que

$$\int_Y a(\mathbf{y}) \nabla w_j \cdot \nabla \bar{v} = - \int_Y a(\mathbf{y}) \partial_{y_j} \bar{v}, \quad (9.1)$$

pour tout $v \in \dot{H}_\#^1(Y)$. Afin de prendre en compte la contrainte d'être à moyenne nulle, nous utilisons classiquement un multiplicateur de Lagrange [11, 26, 44]. Ainsi, la formulation variationnelle ci-dessus est équivalente à : trouver $(w_j, \lambda_j) \in H_\#^1(Y) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \int_Y a(\mathbf{y}) \nabla w_j \cdot \nabla \bar{v} + \lambda_j \int_Y \bar{v} = - \int_Y a(\mathbf{y}) \partial_{y_j} \bar{v}, \\ \mu \int_Y w_j = 0, \end{cases} \quad \text{pour tout } (v, \mu) \in H_\#^1(Y) \times \mathbb{R}. \quad (9.2)$$

Ce problème est bien posé car (1) la forme bilinéaire $(u, v) \mapsto \int_Y a \nabla u \cdot \nabla v$ est coercive sur $\text{Ker } C$ avec $C: v \in H_\#^1(Y) \mapsto \int_Y v \in \mathbb{R}$ et (2) il vérifie la condition inf-sup : il suffit de montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ il existe $v_\mu \in H_\#^1(Y)$ tel que $\int_Y v_\mu = \mu$ et $\|v_\mu\|_{H^1(Y)} \leq \gamma^{-1} |\mu|$ (voir par exemple [16, proposition 2.4]) ; il suffit de prendre $\gamma = 1$ et $v_\nu = \mu$ partout puisque $|Y| = 1$.

Pour résoudre numériquement (9.2), nous considérons un maillage triangulaire de Y auquel nous associons l'espace V^h d'approximation \mathbb{P}^1 dont nous notons $(\phi_k)_{1 \leq k \leq N}$ les éléments de la base canonique (les ϕ_j valent 1 sur un sommet et 0 sur les autres). La périodicité est prise en compte grâce à la méthode de pseudo-élimination [61], nous considérons donc dans la suite que toutes les matrices et vecteurs ont été pseudo-éliminés afin de prendre en compte cette contrainte. Nous devons assembler la matrice de rigidité

$\mathbb{K} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, et trois vecteurs colonnes $\mathbf{C}, \mathbf{F}^j \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, 2$, définis par

$$\mathbb{K}_{k,\ell} := \int_Y a(\mathbf{y}) \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_k, \quad \mathbf{C}_k = \int_Y \phi_k \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_k^j := - \int_Y a(\mathbf{y}) \partial_{y_j} \phi_k, \quad (9.3)$$

pour tout $1 \leq k, \ell \leq N$. Les intégrales intervenant dans les calculs de \mathbb{K} et \mathbb{F} sont calculées grâce à une formule de quadrature de Gauss-Lobato à 7 points qui est d'ordre 5. Pour calculer \mathbf{C} , au lieu de le faire directement, nous allons calculer la matrice de masse $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M}_{k,\ell} := \int_Y \phi_\ell \phi_k, \quad \text{pour tout } 1 \leq k, \ell \leq N, \quad (9.4)$$

car elle nous sera utile pour le calcul des problèmes de cellule du second ordre. Nous avons alors $\mathbf{C} = \mathbb{M}\mathbf{1}$ avec $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)^T$. Notons que les intégrales intervenant dans le calcul de \mathbb{M} sont calculées exactement (sans avoir recours à une formule de quadrature, voir par exemple [61]).

Nous nous sommes donc ramenés à la résolution du système linéaire de taille $(N+1) \times (N+1)$ suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

avec $\mathbf{W}_j = (\mathbf{w}_j^h, \lambda_j^h)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$ (\mathbf{w}_j^h est le vecteur correspondant à l'approximation de w_j dans V^h). Ce système est inversible car il vérifie l'analogie discret de la condition inf-sup.

9.1.2 Calcul de la matrice homogénéisée

Une fois les vecteurs \mathbf{w}_j^h , $j = 1, 2$ calculés, nous pouvons en déduire une approximation $A_h^* = (a_{ij,h}^*)$ de la matrice homogénéisée $A^* = (a_{ij}^*)$ grâce à la formule

$$a_{ij}^* = \int_Y a(\mathbf{y}) (\partial_{y_j} w_i + \delta_{ij}). \quad (9.6)$$

Plus précisément, nous avons besoin de calculer $\int_Y a$. Nous pourrions le faire directement mais nous allons introduire une nouvelle matrice de masse $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{A}_{k\ell} := \int_Y a \phi_k \phi_\ell, \quad (9.7)$$

pour tout $1 \leq k, \ell \leq N$, qui nous sera utile dans la suite (les intégrales sont toujours calculées avec la même formule de quadrature). Nous avons également besoin d'assembler les matrices $\mathbb{K}^j \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, définies par

$$\mathbb{K}_{k,\ell}^j := \int_Y a(\mathbf{y}) \phi_\ell \partial_{y_j} \phi_k, \quad (9.8)$$

pour tout $1 \leq k, \ell \leq N$. Finalement, nous avons

$$a_{ij,h}^* = \mathbb{K}^j \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{1} + \mathbb{A} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}. \quad (9.9)$$

9.1.3 Problèmes de cellule du second ordre

Rappelons la formulation faible du problème de cellule (6.25) : trouver $\theta_{ij} \in \dot{H}_\#^1(Y)$ telle que

$$\int_Y a(\mathbf{y}) \nabla \theta_{ij} \cdot \nabla \bar{v} = \int_Y a(\partial_{y_j} w_i) \bar{v} - \int_Y a w_i \partial_{y_j} \bar{v} + \delta_{ij} \int_Y a \bar{v} - a_{ij}^* \int_Y \bar{v}, \quad (9.10)$$

pour tout $v \in \dot{H}_\#^1(Y)$. Nous voyons donc que ce problème se résout exactement de la même manière que les problèmes de cellule d'ordre 1 que nous avons étudiés à la section 9.1.1, seul le second membre

change. Pour calculer numériquement ce dernier, nous avons déjà calculé toutes les matrices dont nous avons besoin. En introduisant les vecteurs $\mathbf{F}^{ij} \in \mathbb{R}^N$, $i, j = 1, 2$, définis par

$$\mathbf{F}^{ij} := \mathbb{K}^j \mathbf{w}_i^h - (\mathbb{K}^j)^\top \mathbf{w}_i^h + \delta_{ij} \mathbb{A} \mathbf{1} - a_{ij}^* \mathbb{M} \mathbf{1}, \quad (9.11)$$

nous sommes ramenés à la résolution des quatre systèmes linéaires

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^\top & 0 \end{bmatrix} \Theta_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.12)$$

avec $\Theta_{ij} = (\theta_{ij}^h, \lambda_{ij}^h)^\top$ (θ_{ij} est le vecteur correspondant à l'approximation de θ_{ij} dans V^h).

9.2 Calcul de la solution exacte

Nous souhaitons maintenant calculer la solution $u_\delta \in H^1(\mathbb{R}^2)$ du problème exacte (7.1), c'est-à-dire

$$-\nabla \cdot \left[a \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \nabla u_\delta(\mathbf{x}) \right] - \omega^2 u_\delta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (9.13)$$

Rappelons que nous avons supposé que $\rho = 1$ partout.

Les deux difficultés principales pour calculer numériquement u_δ sont le fait que nous sommes en domaine non borné et que nous avons des coefficients périodiques. Pour traiter la première difficulté, nous utilisons le fait que le problème est périodique dans la direction x_2 parallèle à l'interface Γ . Nous pouvons alors appliquer la transformée de Floquet-Bloch dans cette direction et nous ramener à une famille de problèmes indépendants, posés dans une bande et où la variable de Floquet-Bloch joue le rôle d'un paramètre. Pour traiter la deuxième difficulté, nous utilisons des opérateurs Dirichlet-to-Neumann (DtN), dans une demi-bande homogène et dans une demi-bande périodique, afin que la famille de problèmes soit posée en domaine borné. La construction des opérateurs DtN en milieu homogène est classique, nous la rappelons à la section 9.2.3. La construction des opérateurs DtN en milieu périodique est moins standard et est décrite à la section 9.2.4.

9.2.1 Utilisation de la transformée de Floquet-Bloch

Dans un premier temps, nous appliquons une transformée de Floquet-Bloch dans la direction x_2 , transformée qui est adaptée à la résolution de problèmes avec des coefficients périodiques. (nous renvoyons à la section 7.2.2 pour plus de détails sur cette transformée et des références). Nous allons en fait plutôt considérer une version légèrement différente de cette transformée :

$$\hat{u}(x_1, x_2, \xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(x_1, x_2 + n\delta) e^{i\xi n\delta}, \quad x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, \delta), \xi \in (0, 2\pi/\delta). \quad (9.14)$$

La raison de considérer cette version de la transformée de Floquet-Bloch plutôt que celle utilisée à la section 7.2.2 vient du fait qu'elle ne modifie pas les opérateurs différentiels : $\widehat{\nabla} u = \nabla \hat{u}$. Ainsi la structure de l'équation que nous souhaitons résoudre n'est pas modifiée et les matrices éléments finis sont assemblées une fois pour toute. Cependant, \hat{u} n'est plus une fonction périodique de x_2 mais une fonction ξ -quasipériodique dans la direction x_2 , c'est-à-dire que $\hat{u}_\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \hat{u}_\delta(\delta, \cdot, 0)$ et $\partial_{x_1} \hat{u}_\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} \hat{u}_\delta(\delta, \cdot, 0)$. Nous nous retrouvons alors avec un domaine borné dans la direction x_2 mais il faut alors résoudre une famille de problèmes paramétrée par la variable de Floquet-Bloch $\xi \in (0, 2\pi/\delta)$ (voir la figure 9.1) :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left[a \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \nabla \hat{u}_\delta(\xi, \mathbf{x}) \right] - \omega^2 \hat{u}_\delta(\xi, \mathbf{x}) = \hat{f}(\xi, \mathbf{x}), & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, \delta), \xi \in (0, 2\pi), \\ \hat{u}_\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \hat{u}_\delta(\delta, \cdot, 0), \\ \partial_{x_1} \hat{u}_\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} \hat{u}_\delta(\delta, \cdot, 0), \end{cases} \quad (9.15)$$

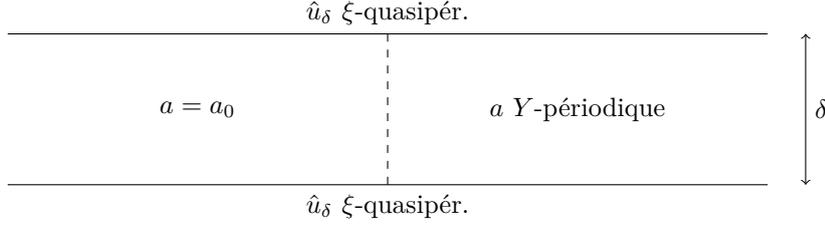


FIGURE 9.1 – Réduction du problème de \mathbb{R}^2 à B avec des conditions ξ -quasipériodiques.

Dans la suite, pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la forme $(a, b) \times (0, \delta)$ avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$, nous noterons $H_\xi^1(\Omega)$ le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui sont ξ -quasipériodiques. De même, nous noterons $H_\xi^{1/2}(0, \delta)$ l'espace des traces sur $\{0\} \times (0, \delta)$ des fonctions de $H_\xi^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))$.

Il reste toujours à régler le problème venant du fait que $\mathbb{R} \times (0, \delta)$ n'est pas borné dans la direction x_1 . Nous allons pour cela construire des opérateurs Dirichlet-to-Neumann (DtN), aussi appelé opérateurs de Poincaré–Steklov, qui permettent de tronquer artificiellement le domaine de calcul.

9.2.2 Discrétisation du paramètre de Floquet-Bloch

Pour revenir à l'inconnue originelle u_δ à partir de la famille $\hat{u}_\delta(\xi, \cdot)$ paramétrée par $\xi \in [0, 2\pi/\delta)$, il faut utiliser la transformée de Floquet-Bloch inverse, qui s'écrit ici

$$u_\delta(x_1, x_2 + n\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi/\delta} \hat{u}_\delta(\xi, x_1, x_2) e^{in\xi\delta} d\xi, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in (0, \delta), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9.16)$$

Le choix de n permet donc de reconstruire u_δ dans la bande $\mathbb{R} \times (\delta n, \delta(n+1))$. En pratique, l'intégrale ci-dessus doit être discrétisée. Nous utilisons la formule des trapèzes, qui s'écrit ici

$$\int_0^{2\pi/\delta} \hat{u}_\delta(\xi, x_1, x_2) e^{in\xi\delta} d\xi \simeq \sum_{j=1}^{N_\xi} \Delta\xi \hat{u}_\delta(\xi_j, x_1, x_2) e^{in\xi_j\delta}, \quad (9.17)$$

avec N_ξ le nombre de points de discrétisation, $\Delta\xi := 2\pi/\delta N_\xi$ le pas de discrétisation et $\xi_j := j\delta\Delta\xi$ les points de discrétisation.

Remarque 9.1. La fonction $\xi \mapsto e^{in\xi\delta} \hat{u}_\delta(\xi, \cdot)$ étant périodique par rapport à ξ , la formule des trapèzes est exponentiellement convergente quand N_ξ tend vers $+\infty$ [237].

Nous définissons donc une approximation u_{δ, N_ξ} de u_δ en posant

$$u_{\delta, N_\xi}(x_1, x_2 + n\delta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_\xi} \Delta\xi \hat{u}_\delta(\xi_j, x_1, x_2) e^{in\xi_j\delta}, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in (0, \delta), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9.18)$$

La question qui se pose alors est de mesurer l'erreur entre u_δ et u_{δ, N_ξ} . Cette problématique a été traitée en profondeur dans la thèse [68] (plus particulièrement dans la section 2.2 chapitre 2 et section 3.3 chapitre 3) dont nous rappelons les grandes lignes. Tout d'abord, remarquons que $u_{\delta, N_\xi} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de

$$-\nabla \cdot \left[a \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \nabla u_{\delta, N_\xi}(\mathbf{x}) \right] - \omega^2 u_{\delta, N_\xi}(\mathbf{x}) = f_{\delta, N_\xi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (9.19)$$

où f_{δ, N_ξ} est définie à partir de f comme dans (9.17). Notons également que u_{δ, N_ξ} est δN_ξ -périodique selon x_2 (cela se voit immédiatement à partir de la définition (9.17)). Définissons alors le domaine

$$\Omega_{N_\xi} := \mathbb{R} \times ([-\delta N_\xi/2], [-\delta N_\xi/2]), \quad (9.20)$$

de sorte que u_{δ, N_ξ} appartient au sous-espace de $H^1(\Omega_{\delta N_\xi})$ des fonctions périodiques selon leur seconde variable. En ce qui concerne f_{N_ξ} , il faut avoir en tête que f est à support compact et que nous avons le lemme suivant, qui est un résultat intermédiaire dans la démonstration de [68, théorème 2.7 pages 68–71].

Lemme 9.2. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est à support compact dans $\Omega_{\delta N_\xi}$, alors $f_{\delta N_\xi} = f$ dans $\Omega_{\delta N_\xi}$.*

Cela montre donc que la différence $e := u - u_{n_\xi}$ est solution dans $H^1(\Omega_{\delta N_\xi})$ de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left[a \left(\frac{\cdot}{\delta} \right) \nabla e(\mathbf{x}) \right] - \omega^2 e(\cdot) = 0, & \text{dans } \Omega_{\delta N_\xi}, \\ e|_{\Gamma_{\delta N_\xi}^+} - e|_{\Gamma_{\delta N_\xi}^-} = u|_{\Gamma_{\delta N_\xi}^+} - u|_{\Gamma_{\delta N_\xi}^-}, \\ a(\cdot/\delta) \nabla e \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{\delta N_\xi}^+} - a(\cdot/\delta) \nabla e \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{\delta N_\xi}^-} = a(\cdot/\delta) \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{\delta N_\xi}^+} - a(\cdot/\delta) \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{\delta N_\xi}^-}, \end{cases} \quad (9.21)$$

où $\Gamma_{\delta N_\xi}^\pm := \mathbb{R} \times \{[\pm \delta N_\xi/2]\}$ (voir [68, théorème 2.7 pages 68–69] pour un calcul détaillé). Nous voulons alors montrer que e est « petit ». Pour cela, nous disposons des deux résultats suivants. Le premier estime la décroissance de la fonction u_δ et montre donc que si N_ξ est grand, les traces et traces normales de u intervenant dans (9.21) vont être petites, ce qui permet d'en déduire le deuxième résultat.

Proposition 9.3 ([68, théorème 2.10 page 77]). *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ à support compact. Alors il existe un $\tau' > 0$ tel que l'unique solution $u_\delta \in H^1(\mathbb{R}^2)$ de (9.13) satisfasse $e^{\tau'|\cdot|} u_\delta(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et de plus $\tau' < 2\alpha$ où α est la constante de coercivité associée au problème (9.13).*

Remarquons que la condition $e^{\gamma|\cdot|} u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\gamma > 0$, signifie que u est évanescence avec un taux de décroissance au moins égal à γ .

Proposition 9.4 ([68, théorème 2.11 page 81]). *Soit e la solution du problème (9.21). Alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\|e\|_{H^1(\Omega_{N_\xi})} \leq C e^{-\tau' \lfloor \delta N_\xi/2 \rfloor} \|e^{\tau'|\cdot|} u_\delta(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \quad (9.22)$$

pour N_ξ assez grand tel que le support de f soit compact et inclus dans $\delta\Omega_{N_\xi}$, où $\tau' > 0$ est donné par la proposition 9.3.

La proposition 9.4 montre donc que l'erreur de discrétisation de la variable de Floquet-Bloch est exponentiellement décroissante en N_ξ . Ces estimations restent valables même après discrétisation en espace, comme cela est montré dans [68, section 3.3, chapitre 3].

9.2.3 Opérateurs DtN dans un guide d'ondes homogène

Ici, nous considérons le problème (9.15) à ξ fixé. Nous omettrons donc de l'écrire dans la suite de cette section.

La construction d'opérateurs DtN dans des milieux homogènes de type guides d'ondes (c'est notre cas ici) est extrêmement classique. Nous renvoyons à [113, 114, 152] pour plus de détails. Nous allons en rappeler les grandes lignes qui se basent sur la séparation de variables (voir le chapitre 0 section 0.4 pour une approche similaire).

Pour $L > 0$ fixé, considérons le problème : trouver $u \in H_\xi^1(\Omega)$, $\Omega = (-\infty, -L) \times (0, \delta)$, solution de

$$\begin{cases} -a_0 \Delta u_\phi - \omega^2 u_\phi = 0, & \text{sur } \Omega, \\ u_\phi(-L, \cdot) = \phi, \\ \hat{u}_\phi(\cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} u_\phi(\cdot, 0), \\ \partial_{x_1} u_\phi(\cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} u_\phi(\cdot, 0), \end{cases} \quad (9.23)$$

avec $\phi \in H_\xi^{1/2}(0, \delta)$ donné. Voir la figure 9.2.

En décomposant sur la base orthonormée $(\psi_n^\xi : x_2 \mapsto e^{-i(2n\pi/\delta + \xi)x_2})_{n \in \mathbb{Z}}$ du sous-espace des fonctions $L^2(0, \delta)$ qui sont k -quasipériodiques, la solution u_ϕ de (9.23) s'écrit

$$u_\phi(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\beta_n(x_1 + L)} \langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0, \delta)} \psi_n^\xi(x_2), \quad (9.24)$$

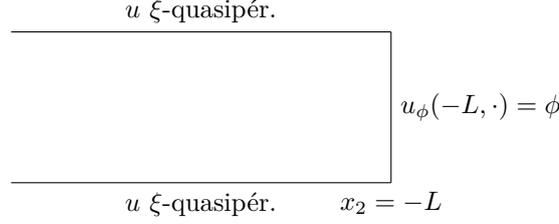


FIGURE 9.2 – Géométrie du problème (9.23).

où β_n est choisi tel que $\beta_n^2 + (2\pi/\delta + \xi)^2 = \omega^2/a_0$ et $\text{Im } \beta_n > 0$. Nous notons alors $\Lambda^{\text{hom}}\phi$ la dérivée normale de u_ϕ sur $\{-L\} \times (0, \delta)$:

$$\Lambda^{\text{hom}}\phi := a_0 \partial_x u_\phi(-L, \cdot) = a_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} i\beta_n \langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0, \delta)} \psi_n^\xi(x_2), \quad (9.25)$$

Il s'agit là de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann associé au problème (9.23) puisqu'à une donnée $\phi \in H_\xi^{1/2}(0, \delta)$ sur le bord (Dirichlet), il associe la trace normale (Neumann) dans $H_\xi^{-1/2}(0, \delta)$ de la solution de (9.23).

À cet opérateur Λ^{hom} , nous associons une forme bilinéaire sur $H_\xi^{1/2}(0, \delta)^2$, toujours notée Λ^{hom} et définie par

$$\Lambda^{\text{hom}}(\phi_1, \phi_2) = \langle \Lambda^{\text{hom}}\phi_1, \phi_2 \rangle_{H^{-1/2}(0, \delta) \times H^{1/2}(0, \delta)} = a_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} i\beta_n \langle \phi_1, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0, \delta)} \langle \psi_n^\xi, \phi_2 \rangle_{L^2(0, \delta)}, \quad (9.26)$$

pour tout $(\phi_1, \phi_2) \in H_\xi^{1/2}(0, \delta)^2$. Notons que cette forme bilinéaire n'est pas locale : même si ϕ_1 et ϕ_2 ont des supports disjoints, $\Lambda^{\text{hom}}(\phi_1, \phi_2) \neq 0$ *a priori*.

En pratique, la série infinie ci-dessus doit bien entendu être tronquée ($e^{i\beta_n(x_1+L)}$ est d'autant plus décroissant que $|n|$ est grand). Si ω^2 était réel, nous ne pourrions négliger les modes propagatifs (au sens où β_n est réel) et l'expérience montre que prendre 5 modes évanescents (au sens où β_n est imaginaire pur) en plus est satisfaisant. Dans notre cas, ω^2 a une partie imaginaire non nulle, mais nous allons garder cette règle. En pratique, nous considérons donc les modes d'ordre n inférieurs ou égaux (en valeur absolue) à

$$n_0 := \lfloor \omega\delta/2\pi \rfloor + 5. \quad (9.27)$$

Nous pouvons alors discrétiser $H^{1/2}(0, \delta)$ par des éléments finis \mathbb{P}^1 en subdivisant de manière régulière $[0, \delta]$ en m points, ce qui donne des mailles de taille $h := 1/(m-1)$ (une nouvelle fois nous ne discrétisons pas $H_\xi^{1/2}(0, \delta)$ directement car nous prenons en compte la condition de ξ -quasipériodicité par pseudo-élimination). Notons ϕ_k l'élément \mathbb{P}^1 qui vaut 1 sur le sommet k et 0 sur les autres. Nous pouvons alors calculer la matrice $\mathbb{L}^{\text{hom}} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ associée à la forme bilinéaire Λ^{hom} :

$$\mathbb{L}_{k\ell}^{\text{hom}} := \Lambda^{\text{hom}}(\phi_k, \phi_\ell), \quad (9.28)$$

pour tout $1 \leq k, \ell \leq m$ (la somme intervenant dans (9.26) est tronquée comme expliqué ci-dessus). Il est en fait possible de calculer analytiquement cette matrice, ce qui évite le recours à une formule de quadrature. Nous renvoyons à l'annexe 9.A pour les formules exactes. À noter que cette matrice est pleine puisque la forme bilinéaire Λ^{hom} n'est pas locale.

Remarque 9.5. En pratique, nous calculons plutôt, à chaque $n \in \{-n_0, \dots, n_0\}$ fixé, la matrice $\mathbb{P}_n \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ définie par

$$(\mathbb{P}_n)_{k\ell} := \langle \phi_k, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0, \delta)} \langle \psi_n^\xi, \phi_\ell \rangle_{L^2(0, \delta)}, \quad (9.29)$$

pour tout $1 \leq k, \ell \leq m$, que nous pouvons calculer analytiquement (voir l'annexe 9.A), puis

$$\mathbb{L}^{\text{hom}} = a_0 \sum_{n=-n_0}^{n_0} i\beta_n \mathbb{P}_n. \quad (9.30)$$

Ces matrices nous seront utiles lors du calcul de l'erreur (section 9.3.3).

9.2.4 Opérateurs DtN dans un guide d'onde périodique

La construction d'opérateurs DtN dans les milieux périodiques est bien plus délicate que pour les milieux homogènes car la séparation de variables n'est plus possible. Cette question a notamment fait l'objet de la thèse [99] et des publications [100, 101, 102, 104, 129]. Nous allons ici également en rappeler les grandes lignes.

Considérons alors l'analogie du problème (9.25) dans la partie périodique : nous cherchons $u_\phi \in H_\xi^1(\Omega)$, $\Omega := (L, +\infty) \times (0, \delta)$, solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot a(\mathbf{x}/\delta) \nabla u_\phi(x_1, x_2) - \omega^2 u_\phi(x_1, x_2) = 0, & x_1 \in L, x_2 \in (0, \delta), \\ u_\phi(L, \cdot) = \phi, \\ \hat{u}_\phi(\cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} u_\phi(\cdot, 0), \\ \partial_{x_1} u_\phi(\cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} u_\phi(\cdot, 0), \end{cases} \quad (9.31)$$

où $L \geq 0$ (pas nécessairement le même qu'à la section précédente). Voir la figure 9.3.

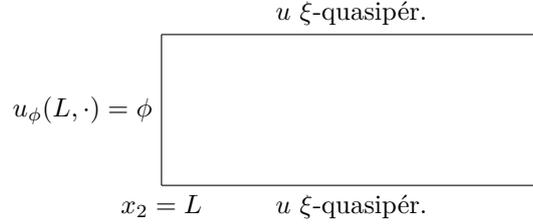


FIGURE 9.3 – Géométrie du problème (9.31).

Le calcul de l'opérateur DtN périodique passe par la résolution de problèmes de cellule sur Y analogues à ceux rencontrés dans l'homogénéisation. Posons tout d'abord Γ^j les bords gauche et droit de Y (c'est-à-dire $\Gamma_0 := \{0\} \times (0, \delta)$ et $\Gamma_1 := \{1\} \times (0, \delta)$). Nous cherchons alors $e^j(\phi)$, $j = 0, 1$, dans $H_\xi^1(Y)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot a(\cdot/\delta) \nabla e^0(\phi) - \omega^2 e^0(\phi) = 0, & \text{dans } Y, \\ e^0(\phi)|_{\Gamma_0} = \phi, \\ e^0(\phi)|_{\Gamma_1} = 0, \\ e^0(\phi)(\cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} e^0(\phi)(\cdot, 0), \\ \partial_{x_1} e^0(\phi)(\cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} e^0(\phi)(\cdot, 0), \\ -\nabla \cdot a(\cdot/\delta) \nabla e^1(\phi) - \omega^2 e^1(\phi) = 0, & \text{dans } Y, \\ e^1(\phi)|_{\Gamma_0} = 0, \\ e^1(\phi)|_{\Gamma_1} = \phi, \\ e^1(\phi)(\cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} e^1(\phi)(\cdot, 0), \\ \partial_{x_1} e^1(\phi)(\cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} e^1(\phi)(\cdot, 0), \end{cases} \quad (9.32)$$

pour $\phi \in H_\xi^{1/2}(0, \delta)$ donné. Voir la figure 9.4.

Une simple application du théorème de Lax-Milgram montre l'existence et l'unicité et la continuité par rapport à ϕ de ces problèmes. Les e^j peuvent être donc être vus comme des opérateurs continus de $H_\xi^{1/2}(0, \delta)$ dans $H_\xi^1(Y)$ auxquels nous associons les formes bilinéaires sur $H_\xi^{1/2}(0, \delta) \times H_\xi^1(Y)$, toujours notées e^j , définies par

$$e^j(\phi, v) = \int_Y e^j(\phi) \bar{v}, \quad (9.33)$$

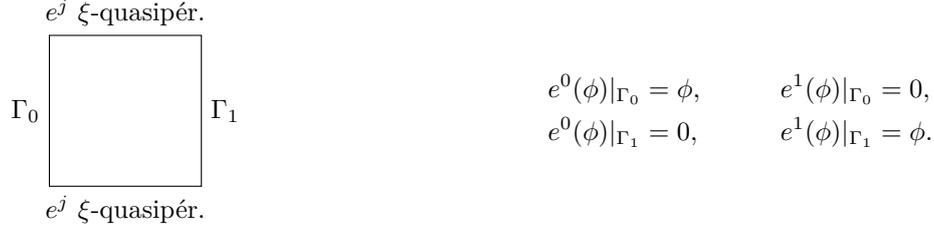


FIGURE 9.4 – Géométrie des problèmes de cellule (9.32).

pour tout $(\phi, v) \in H_\xi^{1/2}(0, \delta) \times H_\xi^1(Y)$.

Nous définissons alors les DtN périodiques locaux $T^{ij}\phi$ par

$$T^{ij}\phi := (-1)^j a(\cdot/\delta) \partial_x e^i(\phi)|_{\Gamma_j}, \quad (9.34)$$

qui sont donc des opérateurs continus de $H_\xi^{1/2}(Y)$ dans $H_\xi^{-1/2}(Y)$, auxquels nous associons les formes bilinéaires sur $H_\xi^{1/2}(Y)^2$, toujours notées T^{ij} , définies par

$$\begin{aligned} T^{ij}(\phi_1, \phi_2) &:= \langle (-1)^j a(\cdot/\delta) \partial_x e^i(\phi_1)|_{\Gamma_j}, \phi_2 \rangle_{H^{-1/2}(Y) \times H^{1/2}(Y)} \\ &= \int_Y a(\cdot/\delta) \nabla e^i(\phi_1) \cdot \tilde{\phi}_2 + \nabla \cdot (a(\cdot/\delta) \nabla e^i(\phi_1) \cdot \tilde{\phi}_2) \\ &= \int_Y a(\cdot/\delta) \nabla e^i(\phi_1) \cdot \tilde{\phi}_2 - \omega^2 \int_Y e^i(\phi_1) \cdot \tilde{\phi}_2, \end{aligned} \quad (9.35)$$

pour $(\phi_1, \phi_2) \in H_\xi^{1/2}(Y)^2$, où $\tilde{\phi}_2$ est un relèvement sur Y de ϕ_2 nul sur le bord opposé à Γ^j .

Il est possible de montrer que la solution u_ϕ de (9.31) vérifie

$$u_\phi|_{Y+j\mathbf{e}_1} = e^0(R^{j-1}\phi) + e^0(R^j\phi), \quad j \geq 1, \quad (9.36)$$

où R est un opérateur compact de $H_\xi^{1/2}(Y)$ dans lui-même appelé opérateur de propagation, défini par $R\phi := u_\phi(\delta, \cdot)$. De plus, il est l'unique solution de rayon spectral strictement plus petit que 1 de l'équation de Riccati

$$T^{10}X^2 + (T^{00} + T^{11})X + T^{01} = 0, \quad (9.37)$$

où l'inconnue X est cherchée dans l'espace des opérateurs linéaires de $H_\xi^{1/2}(Y)$ dans lui-même. Nous définissons alors l'opérateur DtN périodique Λ^{per} par

$$\Lambda^{\text{per}}\phi := -\partial_{x_1} u_\phi(L, \cdot) = T^{00}(\phi) + T^{10}(R\phi), \quad (9.38)$$

auquel nous associons la forme bilinéaire sur $H_\xi^{1/2}(Y)^2$, toujours notée Λ^{per} , définie par

$$\Lambda^{\text{per}}(\phi_1, \phi_2) := T^{00}(\phi_1, \phi_2) + T^{10}(R\phi_1, \phi_2), \quad (9.39)$$

pour $(\phi_1, \phi_2) \in H_\xi^{1/2}(Y)^2$.

Expliquons maintenant comment faire d'un point de vue pratique. La résolution des problèmes de cellule (9.32) se fait de manière analogue à celle des problèmes de cellule de l'homogénéisation expliquée à la section 9.1. En particulier, nous nous donnons le même maillage, le même espace d'approximation \mathbb{P}^1 de dimension N , les mêmes fonctions de base, etc. Nous n'avons plus de contrainte sur la moyenne et la condition de ξ -quasipériodicité est prise en compte par méthode de pseudo-élimination. Les conditions de Dirichlet sur les bords Γ_j (qu'elles soient homogènes ou non) sont également gérées par la méthode de

pseudo-élimination.

Maintenant que nous pouvons calculer $e^j(\phi)$, considérons la même discrétisation de $H_\xi^{1/2}(0, \delta)$ par des éléments finis \mathbb{P}^1 que pour la construction du DtN homogène. Pour chaque élément ϕ_k de la base, $k = 1, \dots, m$, nous calculons numériquement les solutions $e^j(\phi_k)$, $j = 1, 2$ correspondantes. Cela nous donne donc deux matrices rectangulaires $\mathbb{E}^j \in \mathcal{M}_{m,N}(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$. Nous calculons ensuite les matrices $\mathbb{T}^{ij} = (T^{ij}(\phi_k, \phi_\ell)) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ associées aux formes bilinéaires T^{ij} grâce à (9.35) (en pratique nous prolongeons ϕ_2 par 0 sur tous les sommets n'appartenant pas à Γ^j).

Nous avons les matrices \mathbb{T}^{ij} , nous pouvons alors calculer $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, l'unique solution de rayon spectral strictement plus petit que 1 de l'équation de Riccati

$$\mathbb{T}^{10}\mathbb{X}^2 + (\mathbb{T}^{00} + \mathbb{T}^{11})\mathbb{X} + \mathbb{T}^{01} = 0, \quad (9.40)$$

analogue discret de (9.37), d'inconnue $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Pour résoudre en pratique cette équation quadratique (non-linéaire), nous utilisons une méthode de Newton modifiée pour prendre en compte la contrainte sur le rayon spectral [99]. Une fois la matrice \mathbb{R} obtenue, nous pouvons donc calculer la matrice $\mathbb{L}^{\text{per}} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ associée à la forme bilinéaire Λ^{per} :

$$\mathbb{L}^{\text{per}} := \mathbb{T}^{00} + \mathbb{T}^{10}\mathbb{R}. \quad (9.41)$$

Cette matrice est aussi pleine, comme l'est \mathbb{L}^{hom} .

9.2.5 Résolution du problème intérieur à ξ fixé

Grâce aux opérateurs DtN, nous pouvons alors tronquer le domaine de calcul pour résoudre (9.15). Considérons un domaine $\Omega^{\text{int}} := (-L_1, L_2) \times (0, \delta)$ où $L_1 > 0$ est choisi de telle sorte que le support de f soit inclus dans Ω^{int} et où $L_2 \geq 0$. Par définition des opérateurs DtN, le problème (9.15) est équivalent à résoudre

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left[a \left(\frac{\cdot}{\delta} \right) \nabla \hat{u}_\delta(\xi, \cdot) \right] - \omega^2 \hat{u}_\delta(\xi, \cdot) = \hat{f}(\xi, \cdot), & \text{dans } \Omega^{\text{int}}, \\ -a_0 \partial_x \hat{u}_\delta(\xi, -L_1, \cdot) + \Lambda^{\text{hom}} \hat{u}_\delta(\xi, -L_1, \cdot) = 0, \\ a(L_2, \cdot / \delta) \partial_x \hat{u}_\delta(\xi, L_2, \cdot) + \Lambda^{\text{per}} \hat{u}_\delta(\xi, L_2, \cdot) = 0, \\ \hat{u}_\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \hat{u}_\delta(\xi, \cdot, 0), \\ \partial_{x_1} \hat{u}_\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} \hat{u}_\delta(\xi, \cdot, 0). \end{cases} \quad (9.42)$$

Voir la figure 9.5.

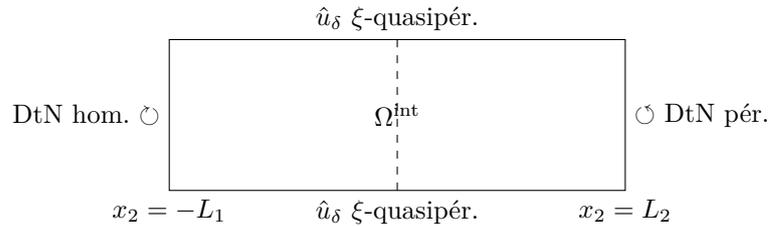


FIGURE 9.5 – Géométrie du problème (9.42).

La formulation variationnelle de ce problème est : trouver $\hat{u}_\delta \in H_\xi^1(\Omega^{\text{int}})$ telle que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{\text{int}}} a \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \nabla \hat{u}_\delta(\xi, \mathbf{x}) \cdot \nabla \bar{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega^{\text{int}}} \hat{u}_\delta(\xi, \mathbf{x}) \bar{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \Lambda^{\text{hom}}(\hat{u}_\delta(\xi, -L_1, \cdot), v) + \Lambda^{\text{per}}(\hat{u}_\delta(\xi, L_2, \cdot), v) = \int_{\Omega^{\text{int}}} f \bar{v}, \end{aligned} \quad (9.43)$$

pour tout $v \in H_\xi^1(\Omega^{\text{int}})$.

Pour résoudre en pratique ce problème, nous prenons un maillage triangulaire de Ω^{int} et nous considérons l'espace d'approximation \mathbb{P}^1 associé comme nous l'avons fait jusqu'à présent. Il faut alors assembler les matrices de masse \mathbb{M} et de rigidité \mathbb{K} définies par

$$\mathbb{K}_{k\ell} := \int_{\Omega^{\text{int}}} a\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_\ell \, d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathbb{M}_{k\ell} := \int_{\Omega^{\text{int}}} \phi_k \phi_\ell \, d\mathbf{x} \quad (9.44)$$

pour tout $1 \leq k, \ell \leq N$ (calculées toujours par la même formule de quadrature), les deux matrices \mathbb{L}^{hom} et \mathbb{L}^{per} associées respectivement aux formes bilinéaires Λ^{hom} et Λ^{per} et définies par (9.28) et (9.41) ainsi que le vecteur \mathbb{F} défini par $\mathbb{F}_k := \int_{\Omega^{\text{int}}} f \phi_k$ pour tout $1 \leq k \leq N$. Nous nous sommes donc ramenés à la résolution du système linéaire

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{L}^{\text{hom}} + \mathbb{L}^{\text{per}}) \mathbf{U} = \mathbb{F}. \quad (9.45)$$

À noter que la matrice \mathbb{L}^{hom} (resp. \mathbb{L}^{per}) est pleine, mais seulement pour les indices k et ℓ tels que les fonctions de base ϕ_k et ϕ_ℓ correspondantes vivent sur le bord gauche (resp. droit) de Ω^{int} .

9.2.6 Reconstruction de la solution à gauche et à droite

A ce stade, nous avons donc une approximation de $\hat{u}(\xi, \cdot)$ à ξ fixé. Il faut donc reconstruire la solution u_δ . Tout d'abord, à ξ fixé, nous pouvons reconstruire $\hat{u}(\xi, \cdot)$, qui n'a été calculée que sur $\Omega^{\text{int}} = (-L_1, L_2) \times (0, \delta)$, sur un domaine arbitrairement grand Ω de la forme $(-L'_1, L'_2) \times (0, \delta)$ avec $L'_1 \geq L_1$ et $L'_2 \geq L_2$. Plus précisément :

- Pour reconstruire à gauche, nous récupérons tout d'abord la trace $\phi_{L_1}(\xi) \in H_\xi^{1/2}(0, \delta)$ de $\hat{u}(\xi, \cdot)$ sur le bord : $\phi_{L_1}(\xi) := \hat{u}(\xi, -L_1, \cdot)$. Par construction, $\hat{u}(\xi, \cdot)$ est solution de (9.23) s'écrit donc

$$\hat{u}(\xi, x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\beta_n(x_1 + L_1)} \langle \phi_{L_1}(\xi), \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0, \delta)} \psi_n^\xi(x_2). \quad (9.46)$$

Cette formule permet donc de reconstruire la solution sur $(-\infty, -L_1) \times (0, \delta)$. En pratique, nous tronquons la série pour $|n| \leq n_0$ comme expliqué à la section 9.2.3. Remarquons également que les produits scalaires présents dans (9.46) se calculent de manière exacte en décomposant ϕ sur la base (ϕ_k) , comme c'était le cas pour la matrice Λ^{hom} (voir l'annexe 9.A)

- Pour reconstruire à droite, nous utilisons la formule de propagation (9.36). D'un point de vue pratique, nous récupérons tout d'abord la trace $\phi_{L_2, h}(\xi)$ sur le bord droit de l'approximation de $\hat{u}(\xi, L_2, \cdot)$, puis nous utilisons la version discrète de la formule de propagation (9.36), qui s'écrit

$$\hat{u}_h^j(\xi) = \mathbb{E}^0(\mathbb{R}^j \phi_{L_2, h}(\xi)) + \mathbb{E}^1(\mathbb{R}^{j+1} \phi_{L_2, h}(\xi)), \quad (9.47)$$

où les matrices \mathbb{E}^j , $j = 1, 2$ et la matrice \mathbb{R} ont été introduites à la section 9.2.4. Ainsi, $\hat{u}_h^j(\xi)$ sera le vecteur de l'approximation de $\hat{u}(\xi, \cdot)$ sur $(L_2 + j, L_2 + j + 1) \times (0, \delta)$.

À ce stade nous avons mis en place tous les outils pour résoudre numériquement le problème (9.13). Nous montrerons des résultats d'expériences numériques lors de la section 9.6.

9.3 Calcul des solutions homogénéisées (conditions de transmission classiques)

9.3.1 Calcul de la solution homogénéisée d'ordre 0

Rappelons que la solution homogénéisée u_0 d'ordre 0 est solution de

$$-\nabla \cdot [A_0^* \nabla u_0(\mathbf{x})] - \omega^2 u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (9.48)$$

où nous rappelons que A_0^* vaut $a_0 I_2$ dans le demi-plan à gauche Ω^- et A^* la matrice homogénéisée dans le demi-plan à droite Ω^+ . Nous imposons les conditions de transmission classiques

$$[u_0]_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad [A_0^* \nabla u_0 \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = 0. \quad (9.49)$$

Pour résoudre ce problème, nous avons fait le choix d'utiliser les mêmes méthodes que celles utilisées à la section 9.2 pour résoudre le problème exact (9.13), c'est-à-dire que nous traitons le demi-plan Ω^+ comme un milieu Y -périodique, bien qu'il s'agisse d'un milieu homogène anisotrope. L'intérêt d'utiliser ici la transformée de Floquet-Bloch, alors que nous pourrions utiliser la transformée de Fourier *a priori* plus adaptée à un milieu homogène, est que nous introduisons la même erreur liée à la discrétisation du paramètre de Floquet-Bloch ξ pour la solution exacte u_δ et la solution homogénéisée u_0 . De plus, nous verrons à la section 9.3.3 que le calcul de l'erreur entre ces deux solutions s'en trouve grandement facilité.

Nous pourrions alors être tentés de construire un opérateur DtN à droite en utilisant la séparation de variable pour traiter le milieu homogénéisé comme nous l'avons fait pour le milieu homogène à gauche (section 9.2.3). Malheureusement cette tâche n'est pas si aussi aisée qu'elle n'y paraît en raison de l'anisotropie du milieu homogénéisé. La construction d'opérateurs de Dirichlet-to-Neumann dans les guides d'ondes anisotropes a été analysée dans [222] et montre, dans le cas de conditions aux bords de type Neumann ou Dirichlet, la nécessité de considérer une frontière artificielle « oblique » au lieu d'une frontière droite comme c'est le cas pour les milieux isotropes. Cependant, cela paraît incompatible avec les conditions de ξ -quasipériodicité. Afin de s'affranchir de cette difficulté, nous allons donc considérer notre milieu homogénéisé comme un milieu δY -périodique et calculer l'opérateur DtN périodique associé.

En particulier, avec ce choix de méthode, tout ce qui a été décrit dans la section 9.2 précédente reste valable et nous pouvons alors calculer numériquement la solution de (9.48).

9.3.2 Calcul du gradient de la solution homogénéisée

Dans cette section, nous souhaitons rajouter les correcteurs d'ordre 1 et d'ordre 2 dans la partie homogénéisée, c'est-à-dire que nous considérons

$$u_1(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \delta \nabla u_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}/\delta) + \delta^2 \nabla \cdot (\Theta(\mathbf{x}/\delta) \nabla u_0(\mathbf{x})), \quad (9.50)$$

où $\mathbf{w} = (w_2, w_2)^T$ et $\Theta = (\theta_{ij})$ les solutions respectives des problèmes de cellule (7.7) et (7.11) (bien entendu nous considérons que $w_j = 0 = \theta_{ij}$ dans Ω^-).

Remarquons que puisque la transformée de Floquet-Bloch commute avec les fonctions périodiques et laisse invariant les gradients (avec notre choix spécifique de transformée de Floquet-Bloch, voir la section 9.2.1), nous avons

$$\widehat{u}_1(\xi, \mathbf{x}) = \widehat{u}_0(\xi, \mathbf{x}) + \delta \nabla \widehat{u}_0(\xi, \mathbf{x}) \cdot \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}/\delta) \\ w_2(\mathbf{x}/\delta) \end{bmatrix}, \quad (9.51)$$

D'un point de vue numérique, le calcul du gradient dans (9.51) pose un certain nombre de problèmes. En effet, le gradient d'une fonction calculée par une méthode d'éléments finis de Lagrange \mathbb{P}^1 par morceaux vit naturellement dans l'espace d'approximation \mathbb{P}^0 par morceaux (les fonctions constantes par mailles). Ainsi, les approximations des deux termes de la somme de (9.50) ne vivent pas dans le même espace d'approximation, ce qui rend déjà le calcul approché de la norme L^2 délicat. La situation est encore pire lorsque nous souhaitons calculer la norme H^1 , car il faudrait alors considérer le gradient de u_1 , c'est-à-dire dériver deux fois u_0 . Or il est bien entendu impossible de calculer d'un point de vue numérique le gradient d'une fonction \mathbb{P}^0 , une telle fonction n'étant pas continue aux niveaux des arêtes. À noter que ce problème se pose encore si nous augmentons l'ordre d'approximation en \mathbb{P}^k , $k \geq 2$: les gradients des fonctions \mathbb{P}^k ne sont pas continus aux niveaux des arêtes, même si k est strictement plus grand que 1.

Une solution qui semble naturelle serait de considérer des éléments finis qui assurent la continuité des gradients, comme les éléments finis d'Hermite [95]. Cependant, ces éléments étant plus difficiles à

mettre en œuvre que les éléments finis de Lagrange standards, nous avons décidé d'utiliser une méthode de projection que nous allons décrire brièvement.

9.3.2.1 Méthode de projection

Soit u une fonction quelconque et régulière sur un domaine Ω borné dont nous avons calculé une approximation par éléments finis \mathbb{P}^1 :

$$u \simeq \sum_j u_j \phi_j, \quad (9.52)$$

Nous approximons alors $v := \partial_{x_1} u$ par

$$\partial_{x_1} u \simeq \sum_j u_j \partial_{x_1} \phi_j. \quad (9.53)$$

À priori, l'approximation de $\partial_{x_1} u$ ci-dessus est une approximation \mathbb{P}^0 et non \mathbb{P}^1 , même si u est très régulière. Nous allons donc projeter cette approximation sur l'espace d'approximation \mathbb{P}^1 en cherchant une approximation $v = \sum_j v_j \phi_j$ dans \mathbb{P}^1 de $\partial_{x_1} u$ solution du système linéaire

$$\sum_j v_j \int_{\Omega} \phi_\ell \phi_j = \sum_j u_j \int_{\Omega} \phi_\ell \partial_{x_1} \phi_j, \quad \text{pour tout } \ell. \quad (9.54)$$

Nous n'avons pas une analyse d'erreur rigoureuse de l'erreur commise par cette méthode. Cependant, des tests numériques (toujours avec des fonctions très régulières) suggèrent que l'erreur est en $\mathcal{O}(h)$ où h est la taille typique des mailles. Dans le cas d'un maillage structuré, il semble même que l'erreur est en $\mathcal{O}(h^2)$.

Cela nous donne donc une méthode de calcul de l'approximation de $\nabla \hat{u}_0$, au moins sur le domaine intérieur $\Omega^{\text{int}} = (-L_1, L_2) \times (0, \delta)$. Nous pouvons ensuite reconstruire l'approximation à gauche et à droite de Ω^{int} en suivant exactement la même démarche qu'à la section 9.2.6.

9.3.3 Calcul de l'erreur entre la solution exacte et les solution homogénéisées (conditions de transmission classiques)

Nous avons donc maintenant une méthode pour calculer une approximation $u_{\delta,h}$ de la solution exacte u_δ de (9.13) ainsi qu'une approximation $u_{0,h}$ de la solution homogénéisée u_0 d'ordre 0 de (9.48). Nous allons maintenant expliquer comment nous calculons l'erreur entre ces deux quantités. En particulier, nous allons voir que l'erreur sera calculée non pas sur les solutions directement mais sur leur transformée de Floquet-Bloch, ce qui justifiera le choix d'avoir utilisé cette transformée pour le calcul de u_0 alors qu'elle n'était pas nécessaire *a priori*.

9.3.3.1 Calcul de l'erreur en norme L^2

Tout d'abord, par inégalité triangulaire et en utilisant la proposition 9.4, il existe une constante $C \geq 0$ et un constante $\tau > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \|u_\delta - u_0\|_{L^2(\Omega_{\delta N_\xi})} &\leq \|u_{\delta, N_\xi} - u_{0, N_\xi}\|_{L^2(\Omega_{N_\xi})}^2 + \|u_\delta - u_{\delta, N_\xi}\|_{L^2(\Omega_{\delta N_\xi})}^2 + \|u_0 - u_{0, N_\xi}\|_{L^2(\Omega_{\delta N_\xi})}^2 \\ &\leq \|u_{\delta, N_\xi} - u_{0, N_\xi}\|_{L^2(\Omega_{N_\xi})}^2 + C e^{-\tau[\delta N_\xi/2]}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Concentrons-nous maintenant sur le terme $\|u_{\delta, N_\xi} - u_{0, N_\xi}\|_{L^2(\Omega_{N_\xi})}^2$. En utilisant la formule de Parseval, nous avons alors

$$\|u_{\delta, N_\xi} - u_{0, N_\xi}\|_{L^2(\Omega_{\delta N_\xi})}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi/\delta} \|\hat{u}_{\delta, N_\xi}(\cdot, \xi) - \hat{u}_{0, N_\xi}(\cdot, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))}^2. \quad (9.56)$$

Cette intégrale est alors approximée par la formule des trapèzes, en utilisant la même discrétisation que (9.17)

$$\|u_{\delta, N_\xi} - u_{0, N_\xi}\|_{L^2(\Omega_{\delta, N_\xi})}^2 \simeq \frac{\Delta\xi}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_\xi} \|\hat{u}_{\delta, N_\xi}(\cdot, \xi_j) - \hat{u}_{0, N_\xi}(\cdot, \xi_j)\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))}^2. \quad (9.57)$$

Comme nous l'avons vu à la section (9.2.2), les estimations (9.22) restent valables après discrétisation en espace. Nous avons alors

$$\|u_{\delta, h} - u_{0, h}\|_{L^2(\Omega_{\delta, N_\xi})}^2 \leq \frac{\Delta\xi}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_\xi} \|\hat{u}_{\delta, h, N_\xi}(\cdot, \xi_j) - \hat{u}_{0, h, N_\xi}(\cdot, \xi_j)\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))}^2 + Ce^{-\tau[\delta N_\xi/2]}. \quad (9.58)$$

Ainsi, l'erreur L^2 dans le domaine de départ est contrôlée par la norme dans le domaine de Floquet-Bloch, avec une erreur exponentiellement petite en N_ξ .

Cependant, les normes L^2 ci-dessus sont encore prises sur le domaine $\mathbb{R} \times (0, \delta)$ n'est pas borné. Rappelons que u_0 et u_δ sont exponentiellement décroissantes (voir la proposition 9.3) donc nous pouvons tronquer ce domaine assez loin et nous le découpons en trois parties $\mathcal{O}^- \cup \Omega^{\text{int}} \cup \mathcal{O}^+$ avec $\mathcal{O}^- := (-N^-, -L) \times (0, \delta)$, $\Omega^{\text{int}} = (-L, 0) \times (0, \delta)$ et $\mathcal{O}^+ := (0, N^+) \times (0, \delta)$ avec $N^\pm \geq 0$ choisi assez grand. Nous avons alors, en posant $v := \hat{u}_{\delta, h, N_\xi}(\cdot, \xi_j) - \hat{u}_{0, h, N_\xi}(\cdot, \xi_j)$,

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))}^2 \simeq \|v\|_{L^2(\mathcal{O}^-)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega^{\text{int}})}^2 + \|v\|_{L^2(\mathcal{O}^+)}^2, \quad (9.59)$$

l'erreur commise étant exponentiellement décroissante en N^\pm par évanescence de v . Nous pouvons alors calculer ces trois quantités de manière indépendante. Pour \mathcal{O}^\pm , nous utiliserons bien entendu les mêmes idées que pour la reconstruction à gauche et à droite présentées à la section 9.2.6.

- Sur Ω^{int} , pour calculer numériquement la norme L^2 il suffit d'utiliser la matrice de masse du problème intérieur (9.42).
- Sur \mathcal{O}^- , nous utilisons la formule de représentation

$$v(x_1, x_2) \simeq \sum_{n=-n_0}^{n=+n_0} e^{i\beta_n(x_1+L)} \langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0, \delta)} \psi_n^\xi(x_2), \quad (9.60)$$

où ϕ désigne la trace de v sur $\{-L\} \times (0, \delta)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\mathcal{O}^-)}^2 &= \sum_{n=-n_0}^{n=+n_0} \left| \langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0, \delta)} \right|^2 \int_{-L-N^-}^{-L} e^{2\text{Re}(i\beta_n)(x_1+L)} dx_1 \\ &= \sum_{n=-n_0}^{n=+n_0} \left| \langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0, \delta)} \right|^2 \frac{1 - e^{-2N^- \text{Re}(i\beta_n)}}{2\text{Re}(i\beta_n)}. \end{aligned} \quad (9.61)$$

À noter que $\text{Re}(i\beta_n) \neq 0$ car $\text{Im}\omega^2 > 0$. Pour calculer cette quantité, nous avons donc besoin des matrices introduites à la remarque 9.5 et des coefficients β_n . En particulier le calcul de $\|v\|_{L^2(\mathcal{O}^-)}$ se fait analytiquement (voir l'annexe 9.A).

- Sur \mathcal{O}^+ , nous avons, en notant ϕ la trace de v sur $\{0\} \times (0, \delta)$

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\mathcal{O}^+)}^2 &= \sum_{j=0}^{N^+-1} \|v\|_{L^2((j, j+1) \times (0, \delta))}^2 \\ &= \sum_{j=0}^{N^+-1} \|e^0(R^j \phi) + e^1(R^{j+1} \phi)\|_{L^2(Y)}^2. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Pour calculer cette quantité, nous avons donc besoin de la matrice de masse des problèmes de cellule (9.31) ainsi que des matrices \mathbb{E}^i , $i = 1, 2$ et \mathbb{R} .

Ainsi, l'erreur L^2 entre u_δ et u_0 se calcule facilement puisqu'elle ne nécessite que des objets que nous avons déjà calculés auparavant.

9.3.3.2 Calcul de l'erreur en norme H^1

Le calcul de l'erreur H^1 suit exactement les mêmes idées que celle de l'erreur L^2 . Nous voulons mesurer l'erreur H^1 entre $u_{\delta,h}$ et $u_{0,h} + \delta u_{1,h}$, approximation de u_1 défini par (9.50). En suivant les mêmes idées que pour la norme L^2 , nous avons

$$\|u_{\delta,N_\xi} - u_{1,N_\xi}\|_{H^1(\Omega_{N_\xi})}^2 \simeq \sum_{j=1}^{N_\xi} \|\hat{u}_{\delta,N_\xi}(\cdot, \xi_j) - \hat{u}_{0,N_\xi}(\cdot, \xi_j)\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0,\delta))}^2, \quad (9.63)$$

où l'erreur commise est une nouvelle fois exponentiellement décroissante en N^\pm . Nous effectuons alors le même découpage que dans (9.59) et nous calculons la norme H^1 sur chacun des trois domaines séparément. Nous allons expliquer comment calculer la semi-norme $\|\nabla \cdot\|_{L^2}$, puisque nous avons déjà vu comment calculer la norme L^2 .

- Sur Ω^{int} , il suffit d'utiliser la matrice de rigidité du problème intérieur (9.42).
- Sur \mathcal{O}^- , d'après la formule de représentation avec ϕ la trace de $v = u_\delta - u_1$ sur $\{-L\} \times (0, \delta)$ nous avons

$$v(x_1, x_2) \simeq \sum_{n=-n_0}^{n=+n_0} e^{i\beta_n(x_1+L)} \langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0,\delta)} \psi_n^\xi(x_2), \quad (9.64)$$

donc

$$\partial_{x_1} v(x_1, x_2) \simeq \sum_{n=-n_0}^{n=+n_0} i\beta_n e^{i\beta_n(x_1+L)} \langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0,\delta)} \psi_n^\xi(x_2), \quad (9.65)$$

d'où

$$\|\partial_{x_1} v\|_{H^1(\mathcal{O}^-)}^2 = \sum_{n=-n_0}^{n=+n_0} |i\beta_n|^2 |\langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0,\delta)}|^2 \frac{1 - e^{-2N^- \text{Re}(i\beta_n)}}{2 \text{Re}(i\beta_n)}. \quad (9.66)$$

Nous avons également

$$\partial_{x_2} v(x_1, x_2) \simeq \sum_{n=-n_0}^{n=+n_0} -i(2n\pi + \xi) e^{i\beta_n(x_1+L)} \langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0,\delta)} \psi_n^\xi(x_2), \quad (9.67)$$

puisque $\psi_n^\xi(x_2) = e^{-i(2n\pi + \xi)x_2}$, de sorte que

$$\|\partial_{x_2} v\|_{H^1(\mathcal{O}^-)}^2 = \sum_{n=-n_0}^{n=+n_0} |2n\pi + \xi|^2 |\langle \phi, \psi_n^\xi \rangle_{L^2(0,\delta)}|^2 \frac{1 - e^{-2N^- \text{Re}(i\beta_n)}}{2 \text{Re}(i\beta_n)}. \quad (9.68)$$

- Sur \mathcal{O}^+ , nous avons, en notant ϕ la trace de v sur $\{0\} \times (0, \delta)$

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{O}^+)}^2 &= \sum_{j=0}^{N^+-1} \|\nabla v\|_{L^2((j,j+1) \times (0,\delta))}^2 \\ &= \sum_{j=0}^{N^+-1} \|\nabla [e^0(R^j \phi) + e^1(R^{j+1} \phi)]\|_{L^2(\mathcal{Y})}^2. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Il suffit alors d'utiliser la matrice de rigidité des problèmes de cellule (9.31)

9.4 Calcul des profils et des constantes C_j

Nous allons maintenant expliquer comment calculer numériquement les différentes fonctions profils ainsi que les constantes C_j qui interviennent dans les conditions de transmission d'ordre élevé.

9.4.1 Calcul de \mathcal{N}

Rappelons que \mathcal{N} est défini comme l'unique solution dans $V_+^1(B)$, $B = \mathbb{R} \times (0, 1)$, de

$$-\nabla \cdot (a \nabla \mathcal{N}) = 0, \quad \langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle = 1. \quad (9.70)$$

9.4.1.1 Réduction à un domaine borné

Comme B est infini, nous nous restreignons à un domaine borné B_0 incluant $\Gamma := \{0\} \times (0, 1)$ (typiquement $B_0 = (-1, 1) \times (0, 1)$). Nous notons B_0^\pm les extérieurs gauche et droit de B_0 (voir la figure 9.6). Pour ce faire,

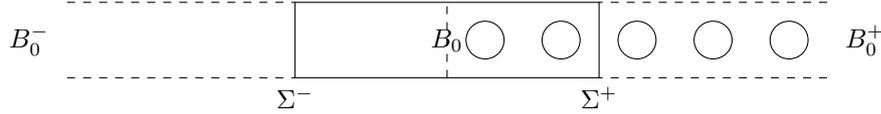


FIGURE 9.6 – Géométrie pour les problèmes de la section 9.4.

nous utilisons une nouvelle fois des opérateurs Dirichlet-to-Neumann. Nous abandonnons l'espace $V_+^1(B)$ qui était utile d'un point de vue théorique mais qui s'avère peu pratique d'un point de vue numérique. Nous nous ramenons plutôt au cadre variationnel classique de l'espace $\mathcal{V}(B)$ décrit à la section 7.2.1 et retranchant les parties linéaires, comme nous l'avons fait pour démontrer l'existence de \mathcal{N} (proposition 7.28) ou le théorème d'existence-unicité 7.30. Définissons ζ par

$$\zeta(\mathbf{y}) := \psi^-(y_1) \frac{y_1}{a_0} + \psi^+(y_1) \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_1^*}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in B, \quad (9.71)$$

avec ψ^\pm les fonctions de troncature définies par (7.27) et w_1 la solution du problème de cellule (7.7). Nous savons qu'il existe une fonction \mathcal{N}_0 dans $\mathcal{V}(B)$, unique à une constante près, telle que

$$\int_B a \nabla \mathcal{N}_0 \cdot \bar{v} = \langle -L_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \zeta, v \rangle, \quad (9.72)$$

pour tout $v \in \mathcal{V}(B)$ en utilisant le lemme 7.3, puisque $\langle -L_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \zeta, 1 \rangle = 0$. Pour calculer \mathcal{N}_0 , nous allons restreindre le problème (9.72) à B_0 en utilisant des opérateurs Dirichlet-to-Neumann similaires à ceux introduits aux sections 9.2.3 et 9.2.4. Nous noterons Σ^\pm les bords à gauche et à droite de B_0 (voir la figure 9.6).

Introduisons Λ^- l'opérateur de $H^{1/2}(\Sigma^-)$ dans $H^{-1/2}(\Sigma^-)$ définie par

$$\Lambda^- \phi := a_0 \partial_{y_1} U^-(\phi) \in H^{-1/2}(\Sigma^-), \quad \phi \in H^{1/2}(\Sigma^-), \quad (9.73)$$

où $U^-(\phi)$ est l'unique solution dans $\mathcal{V}(B_0^-)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta U^-(\phi) = 0, & \text{dans } B_0^-, \\ U^-(\phi) = \phi, & \text{sur } \Sigma^-, \end{cases} \quad (9.74)$$

Le caractère bien posé de ce problème est une simple application de l'inégalité de Hardy (voir par exemple [199, §7.1.1]). Grâce à la séparation des variables, de manière analogue à ce qui a été fait à la section 9.2.3 pour construire Λ^{hom} , il est possible de montrer que

$$U^-(\phi)(y_1, y_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \phi, \psi_n \rangle_{L^2(\Sigma^-)} \psi_n(y_2) e^{2|n|\pi(y_1 + L^-)}, \quad (9.75)$$

avec $\psi_n(y_1) := e^{2in\pi y_2}$, d'où

$$\Lambda^- \phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2|n|\pi \langle \phi, \psi_n \rangle_{L^2(\Sigma^-)} \psi_n. \quad (9.76)$$

En pratique, nous devons tronquer cette série (voir la section 9.2.3) et nous pouvons calculer analytiquement ces produits scalaires (voir l'annexe 9.A).

En ce qui concerne la partie périodique, nous définissons Λ^+ l'opérateur de $H^{1/2}(\Sigma^+)$ dans $H^{-1/2}(\Sigma^+)$ définie par

$$\Lambda^+ \phi := -a \partial_{y_1} U^+(\phi) \in H^{-1/2}(\Sigma^+), \quad \phi \in H^{1/2}(\Sigma^+), \quad (9.77)$$

où $U^+(\phi)$ est l'unique solution dans $\mathcal{V}(B_0^+)$ du problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla U^-(\phi)) = 0, & \text{dans } B_0^+, \\ U^+(\phi) = \phi, & \text{sur } \Sigma^+, \end{cases} \quad (9.78)$$

dont le caractère bien posé se montre de la même façon que celui de (9.74). De manière concrète, l'opérateur Λ^+ se calcule de manière similaire à l'opérateur Λ^{per} de la section 9.2.4, en résolvant des problèmes de cellule, en calculant des opérateurs DtN locaux puis en calculant la solution d'une équation de Riccati.

Remarque 9.6. Nous avons $\Lambda^\pm 1 = 0$.

Avec l'introduction de ces deux opérateurs Λ^\pm , la solution \mathcal{N}_0 de (9.72) est solution, à une constante additive près, de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla \mathcal{N}_0) = -L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \zeta, & \text{dans } B_0, \\ -a_0 \partial_{y_1} \mathcal{N}_0 + \Lambda^- \mathcal{N}_0 = 0, & \text{sur } \Sigma^-, \\ a \partial_{y_1} \mathcal{N}_0 + \Lambda^+ \mathcal{N}_0 = 0, & \text{sur } \Sigma^+. \end{cases} \quad (9.79)$$

En utilisant le fait que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \zeta$, cela montre que \mathcal{N} est solution, à une constante additive près, dans $H^1(B_0)$ du problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla \mathcal{N}) = 0, & \text{dans } B_0, \\ -a_0 \partial_{y_1} \mathcal{N} + \Lambda^- \mathcal{N} = -1, & \text{sur } \Sigma^-, \\ a \partial_{y_1} \mathcal{N} + \Lambda^+ \mathcal{N} = \frac{a}{a_{11}^*} (1 + \partial_{y_1} w_1)|_{\Sigma^+} + \frac{1}{a_{11}^*} \Lambda^+(y_1 + w_1), & \text{sur } \Sigma^+. \end{cases} \quad (9.80)$$

Pour montrer le caractère bien posé de cette équation, nous utilisons le résultat qui suit.

Proposition 9.7. *Soit $f \in H^{-1}(B_0)$ et soit $g^\pm \in H^{-1/2}(\Sigma^\pm)$. Il existe une solution $U \in H^1(B_0)$, unique à une constante additive près, de l'équation*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla U) = f, & \text{dans } B_0, \\ -a_0 \partial_{y_1} U + \Lambda^- U = g^-, & \text{sur } \Sigma^-, \\ a \partial_{y_1} U + \Lambda^+ U = g^+, & \text{sur } \Sigma^+. \end{cases} \quad (9.81)$$

si, et seulement si, la condition de compatibilité suivante est satisfaite :

$$\langle g^+, 1 \rangle_{\Sigma^+} + \langle g^-, 1 \rangle_{\Sigma^-} + \langle f, 1 \rangle_{H^{-1} \times H^1} = 0, \quad (9.82)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma^\pm}$ désigne le crochet de dualité sur $H^{-1/2}(\Sigma^\pm) \times H^{1/2}(\Sigma^\pm)$.

Démonstration. La démonstration est quasiment la même que celle pour le lemme 7.3. Nous allons chercher une solution U à moyenne nulle, c'est-à-dire que nous prendrons comme forme linéaire $\Phi(U) = |B_0|^{-1} \int_{B_0} U$. La formulation variationnelle de (9.81) est : trouver $U \in H^1(B_0)$ telle que

$$\int_{B_0} a \nabla U \cdot \nabla V + \langle \Lambda^- U, V \rangle_{\Sigma^-} + \langle \Lambda^+ U, V \rangle_{\Sigma^+} = \int_{B_0} f V + \langle g^-, V \rangle_{\Sigma^-} + \langle g^+ U, V \rangle_{\Sigma^+}, \quad (9.83)$$

pour tout $V \in H^1(B_0)$. Ainsi, la condition de compatibilité de ce problème est bien (9.82). Pour conclure, il faut alors remarquer que la forme bilinéaire

$$(U, V) \in H^1(B_0)^2 \mapsto \Phi(U)\Phi(V) + \int_{B_0} a \nabla U \cdot \nabla V + \langle \Lambda^- U, V \rangle_{\Sigma^-} + \langle \Lambda^+ U, V \rangle_{\Sigma^+}, \quad (9.84)$$

est bien continue (les Λ^\pm sont continus) et coercive (car les Λ^\pm sont positifs, c'est immédiat pour Λ^- et voir [99] pour Λ^+). \square

Lemme 9.8. *Le problème (9.80) admet une solution $\mathcal{N} \in H^1(B_0)$, unique à une constante près.*

Démonstration. D'après la proposition 9.7, pour montrer que (9.80) est bien posé il faut et il suffit de montrer que

$$\left\langle \frac{a}{a_{11}^*}(1 + \partial_{y_1} w_1)|_{\Sigma^+} + \frac{1}{a_{11}^*} \Lambda^+(y_1 + w_1), 1 \right\rangle_{\Sigma^+} = 1. \quad (9.85)$$

Le deuxième terme est nul car Λ^+ est symétrique :

$$\langle \Lambda^+(y_1 + w_1), 1 \rangle_{\Sigma^+} = \langle y_1 + w_1, \Lambda^+ 1 \rangle_{\Sigma^+} = 0. \quad (9.86)$$

Pour le premier, nous savons que w_1 est solution de $-\nabla \cdot (a \nabla (y_1 + w_1)) = 0$ sur Y donc en multipliant cette équation par y_1 et en intégrant sur Y nous obtenons (puisque $\nabla y_1 = \mathbf{e}_1$)

$$\int_Y a(1 + \partial_{y_1} w_1) = \int_0^1 a(1, y_2)(1 + \partial_{y_1} w_1|_{y_1=1}). \quad (9.87)$$

Il suffit alors de remarquer que le membre de gauche est égal à a_{11}^* et le membre de droite à $\langle a(1 + \partial_{y_1} w_1), 1|_{\Sigma^+} \rangle$. Ainsi nous avons

$$\langle a(1 + \partial_{y_1} w_1), 1|_{\Sigma^+} \rangle = a_{11}^*, \quad (9.88)$$

et donc (9.85) est bien vérifié. \square

Ainsi, (9.80) est bien posé et nous avons alors déterminé \mathcal{N} , à une constante près. Cette constante va être fixée en utilisant la condition $\langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle = 0$ que nous n'avons toujours pas utilisée.

Soit donc \mathcal{N} la solution de (9.80) (fixons temporairement à la constante, par exemple en imposant $\int_{B_0} \mathcal{N} = 0$). Pour le moment, cette fonction n'a été construite que sur B_0 . Nous construisons alors une fonction \mathfrak{N} sur toute la bande B , en prenant $\mathfrak{N} = \mathcal{N}$ dans B_0 et en définissant

$$\mathfrak{N} = U^- \left(\phi^- + \frac{y_1|_{\Sigma^-}}{a_0} \right) + \frac{y_1}{a_0}, \quad \text{dans } B_0^-, \quad (9.89)$$

où $\phi^- := \mathcal{N}|_{\Sigma^-}$ et

$$\mathfrak{N} = U^+ \left(\phi^+ + \frac{(y_1 + w_1)|_{\Sigma^+}}{a_{11}^*} \right) + \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*}, \quad \text{dans } B_0^+, \quad (9.90)$$

où $\phi^+ := \mathcal{N}|_{\Sigma^+}$. Rappelons que $U^-(\phi^-)$ est défini par (9.75) et $U^+(\phi^+)$ est définie comme l'unique solution dans $\mathcal{V}(B_0^+)$ de (9.75).

Par construction, nous aurons bien $\mathfrak{N} \in V_+^1(B)$ vérifiant $-\nabla \cdot (a \nabla \mathfrak{N})$ et $\langle \ell_N(\mathfrak{N}) \rangle = 1$, par contre il n'y a aucune raison pour que $\langle \ell_D(\mathfrak{N}) \rangle = 0$. Cela impose donc

$$\mathcal{N} = \mathfrak{N} - \langle \ell_D(\mathfrak{N}) \rangle. \quad (9.91)$$

9.4.2 Calcul de \mathcal{P}_1

Nous voulons maintenant calculer le profil \mathcal{P}_1 , défini par la proposition 7.35. Nous pouvons suivre exactement la même démarche que pour \mathcal{N} . Nous avons donc que \mathcal{P}_1 est solution dans $H^1(B_0)$ de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla \mathcal{P}_1) = \partial_{y_2} a, & \text{dans } B_0, \\ -a_0 \partial_{y_1} \mathcal{P}_1 + \Lambda^- \mathcal{P}_1 = -\ell_N^-(\mathcal{P}_1), & \text{sur } \Sigma^-, \\ a \partial_{y_1} \mathcal{P}_1 + \Lambda^+ \mathcal{P}_1 = (a \partial_{y_1} + \Lambda^+) \left(\ell_N^+(\mathcal{P}_1) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + w_2 \right), & \text{sur } \Sigma^+. \end{cases} \quad (9.92)$$

Lemme 9.9. *Le problème (9.92) admet une solution $\mathcal{P}_1 \in H^1(B_0)$, unique à une constante près.*

Démonstration. D'après la proposition 9.7, ce problème est bien posé à une constante près si, et seulement si,

$$\langle -\ell_N^-(\mathcal{P}_1), 1 \rangle_{\Sigma^-} + \left\langle (a\partial_{y_1} + \Lambda^+) \left(\ell_N^+(\mathcal{P}_1) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + w_2 \right), 1 \right\rangle_{\Sigma^-} + \langle \partial_{y_2} a, 1 \rangle_{H^{-1} \times H^1} = 0. \quad (9.93)$$

Le premier terme est simplement $\ell_N^-(\mathcal{P}_1)$ et le troisième est clairement nul. Le deuxième se simplifie en utilisant le fait que Λ^+ est symétrique et que $\Lambda^+ 1 = 0$ en

$$\ell_N^+(\mathcal{P}_1) \left\langle \left(a\partial_{y_1} \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} \right), 1 \right\rangle_{\Sigma^+} + \langle a\partial_{y_1} w_2, 1 \rangle_{\Sigma^+}. \quad (9.94)$$

Or le premier crochet vaut 1 d'après (9.88). Exactement de la même manière, nous pouvons également montrer que le deuxième crochet vaut a_{12}^* . Finalement, (9.93) s'écrit simplement

$$\ell_N^+(\mathcal{P}_1) - \ell_N^-(\mathcal{P}_1) = -a_{12}^*. \quad (9.95)$$

Nous retrouvons ainsi le résultat (7.119) de la proposition 7.35. Ainsi, (9.93) est vérifié. \square

Soit donc \mathcal{P}_1 la solution de (9.92) (une nouvelle fois nous fixons temporairement la constante). Nous construisons ensuite une fonction \mathfrak{P}_1 sur toute la bande B , en prenant $\mathfrak{P}_1 = \mathcal{P}_1$ dans B_0 et en définissant

$$\mathfrak{P}_1 = U^- \left(\phi^- - \frac{a_{12}^* y_1 |_{\Sigma^-}}{2 a_0} \right) - \frac{a_{12}^* y_1}{2 a_0}, \quad \text{dans } B_0^-, \quad (9.96)$$

où $\phi^- := \mathcal{P}_1|_{\Sigma^-}$ et

$$\mathfrak{N} = U^+ \left(\phi^+ - \frac{a_{12}^*}{2a_{11}^*} (y_1 + w_1)|_{\Sigma^+} + w_2|_{\Sigma^+} \right) - \frac{a_{12}^*}{2a_{11}^*} (y_1 + w_1) + w_2, \quad \text{dans } B_0^+, \quad (9.97)$$

où $\phi^+ := \mathcal{P}_1|_{\Sigma^+}$. Finalement, nous obtenons

$$\mathcal{P}_1 = \mathfrak{P}_1 - \langle \ell_D(\mathfrak{P}_1) \rangle. \quad (9.98)$$

9.4.3 Problèmes d'interface : vers un calcul plus simple des profils et des constantes

9.4.3.1 Problèmes d'interface

En pratique, nous n'allons pas résoudre exactement les problèmes (9.80) et (9.92). En effet, dans notre cas, il est possible de tout ramener à un problème sur l'interface $\Sigma_0 := \{0\} \times (0, 1)$:

- Pour \mathcal{N} , nous résolvons le problème : trouver $\mathcal{N} \in H^{1/2}(\Sigma)$ tel que

$$(\Lambda^- + \Lambda^+) \mathcal{N} = 1 + \frac{a}{a_{11}^*} (1 + \partial_{y_1} w_1)|_{\Sigma^+} + \frac{1}{a_{11}^*} \Lambda^+ w_1 + 1. \quad (9.99)$$

- Pour \mathcal{P}_1 , nous obtenons

$$(\Lambda^- + \Lambda^+) \mathcal{P}_1^0 = (a\partial_{y_1} + \Lambda^+) \left(\ell_N^+(\mathcal{P}_1) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + w_2 \right) \Big|_{\Sigma^+} + \frac{a_{12}^*}{2}. \quad (9.100)$$

Une fois ces deux problèmes résolus, nous pouvons alors reconstruire les fonctions \mathfrak{N} et \mathfrak{P}_1 correspondantes sur toute la bande B , exactement comme nous l'avons fait précédemment. En pratique, nous reconstruisons seulement sur un domaine fini, mais suffisamment loin pour que la partie évanescence de \mathfrak{N} et celle de \mathfrak{P}_1 soient négligeables là où la reconstruction s'arrête. Il suffit alors de retirer la partie linéaire, c'est-à-dire y_1/a_0 (resp. $-a_{12}^* y_1/(2a_0)$) à gauche et $(y_1 + w_1)/a_{11}^*$ (resp. $-a_{12}^* (y_1 + w_1)/(2a_{11}^*)$) à droite pour \mathfrak{N} (resp. \mathfrak{P}_1) pour récupérer deux valeurs, qui par définition sont $\ell_D^\pm(\mathfrak{N})$ (resp. $\ell_D^\pm(\mathfrak{P}_1)$). Nous avons alors

$$[\ell_D(\mathcal{N})] = [\ell_D(\mathfrak{N})] \quad \text{et} \quad [\ell_D(\mathcal{P}_1)] = [\ell_D(\mathfrak{P}_1)]. \quad (9.101)$$

Nous en déduisons immédiatement les valeurs de C_1 et C_2 puisque $C_1 = [\ell_D(\mathcal{N})]$ et $C_2 := [\ell_D(\mathcal{P}_1)] - a_{12}^* [\ell_D(\mathcal{N})]/2$ (voir 7.124).

9.4.3.2 Calcul des constantes restantes

Il reste maintenant à calculer les profils \mathcal{P}_2^j , $j = 1, 2, 3$ et les constantes C_k pour $k = 3, 4$. Nous allons en fait montrer qu'il n'est pas nécessaire de calculer ces profils pour en déduire les constantes. Rappelons que nous nous sommes placés dans le cas où $\rho = 1$ partout, de sorte que $C_5 = 0$ (voir la section 8.1.3).

Il est possible de montrer les identités suivantes (démontrées dans l'annexe 9.B).

Proposition 9.10. *Nous avons*

$$[\ell_N \mathcal{P}_2^1] = -a_{12}^* \ell_D^+(\mathcal{N}) - \frac{1}{a_{11}^*} \left[\int_Y a(\mathbf{y}) [2\partial_{y_1} \theta_{12} + w_2 - y_1 \partial_{y_2} w_1] d\mathbf{y} + \frac{a_{12}^*}{2} \right. \\ \left. + \int_{B^+} \partial_{y_2} (a \tilde{\mathcal{N}}^+) + a \partial_{y_2} \tilde{\mathcal{N}}^+ + a_0 \int_{B^-} 2\partial_{y_2} \tilde{\mathcal{N}}^- \right], \quad (9.102)$$

où $\tilde{\mathcal{N}}^\pm$ sont les « parties évanescentes » de \mathcal{N} (voir l'annexe 9.B pour une définition précise). Nous avons également

$$[\ell_N \mathcal{P}_2^2] = -a_{12}^* \ell_D^+(\mathcal{P}_1) + \frac{a_{12}^*}{2a_{11}^*} \left[\int_Y a(\mathbf{y}) [\partial_{y_1} \theta_{12} + w_2 - y_1 \partial_{y_2} w_2 + y_1 - a \partial_{y_1} \theta_{22}] d\mathbf{y} + \frac{a_{22}^*}{2} \right. \\ \left. + \int_{B^+} \partial_{y_2} (a \tilde{\mathcal{P}}_1^+) + a \partial_{y_2} \tilde{\mathcal{P}}_1^+ + a_0 \int_{B^-} 2\partial_{y_2} \tilde{\mathcal{P}}_1^- \right], \quad (9.103)$$

où $\tilde{\mathcal{P}}_1$ est la « partie évanescence » de \mathcal{P}_1 .

Nous en déduisons alors facilement les constantes C_3 et C_4 grâce aux égalités (7.151) :

$$\begin{cases} C_3 = [\ell_N(\mathcal{P}_2^1)] + a_{12}^* \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2}, \\ C_4 = [\ell_N(\mathcal{P}_2^2)] + a_{12}^* \frac{[\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{2} - (a_{12}^*)^2 \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{4} + a_{12}^* \frac{[\ell_N(\mathcal{P}_2^1)]}{2}. \end{cases} \quad (9.104)$$

9.5 Calcul de la solution avec conditions de transmission d'ordre élevé

9.5.1 Réduction du domaine de calcul

Il reste maintenant à décrire comment calculer numériquement la solution du modèle approché avec les conditions de transmission d'ordre élevé (8.46) que nous rappelons ici :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_1^{\delta\alpha}) - \omega^2 u_1^{\delta\alpha} = f & \text{dans } \Omega_{\delta\alpha}, \\ [u_1^{\delta\alpha}]_{\delta\alpha} = \delta C_1^\alpha \langle A_0^* \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\delta\alpha}, \\ [A_0^* \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{n}]_{\delta\alpha} = \delta C_4^\alpha \partial_{x_2}^2 \langle u_1^{\delta\alpha} \rangle_{\delta\alpha}, \end{cases} \quad (9.105)$$

où les constantes C_j^α sont définies par (8.47) et donc se calculent immédiatement à partir du calcul des constantes C_j décrit à la section précédente.

Comme nous l'avons fait pour le calcul de la solution exacte (section 9.2) ou de la solution homogénéisée (section 9.3), la première étape consiste à effectuer une transformée de Floquet-Bloch (voir la section 9.2.1) dans la direction x_2 pour se ramener à la famille de problèmes indexés par le paramètre $\xi \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot)) - \omega^2 \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) = \hat{f}(\xi, \cdot) & \text{dans } B_{\delta\alpha}, \\ [\hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot)]_{\delta\alpha} = \delta C_1^\alpha \langle A_0^* \nabla \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\delta\alpha} + \delta C_2^\alpha \partial_{x_2} \langle \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \rangle_{\delta\alpha}, \\ [A_0^* \nabla \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \cdot \mathbf{n}]_{\delta\alpha} = \delta C_3^\alpha \langle A_0^* \nabla \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\delta\alpha} + \delta C_4^\alpha \partial_{x_2}^2 \langle \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \rangle_{\delta\alpha}, \\ \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot, 0), \\ \partial_{x_1} \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot, 0), \end{cases} \quad (9.106)$$

avec $B_{\delta\alpha} = \Omega_{\delta\alpha} \cap B$.

La deuxième consiste à tronquer le domaine à gauche et à droite à l'aide d'opérateurs DtN : Λ^{hom} à gauche (section 9.2.3) et Λ^{ani} (pour anisotrope) à droite, construit comme un DtN périodique de la section 9.2.4 (voir la section 9.3.1 pour une justification de ce choix). Nous sommes alors ramenés au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot)) - \omega^2 \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) = \hat{f}(\xi, \cdot) \\ [\hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot)]_{\delta\alpha} = \delta C_1^\alpha \langle A_0^* \nabla \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\delta\alpha} + \delta C_2^\alpha \partial_{x_2} \langle \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \rangle_{\delta\alpha}, \\ [A_0^* \nabla \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \cdot \mathbf{n}]_{\delta\alpha} = \delta C_3^\alpha \langle A_0^* \nabla \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\delta\alpha} + \delta C_4^\alpha \partial_{x_2 x_2}^2 \langle \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot) \rangle_{\delta\alpha}, \\ -a_0 \partial_x \hat{u}_\delta^1(\xi, -L_1, \cdot) + \Lambda^{\text{hom}} \hat{u}_\delta^1(\xi, -L_1, \cdot) = 0, \\ A^* \nabla \cdot \hat{u}_\delta(\xi, L_2, \cdot) \mathbf{n} + \Lambda^{\text{ani}} \hat{u}_\delta(\xi, L_2, \cdot) = 0, \\ \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot, 0), \\ \partial_{x_1} \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot, \delta) = e^{i\xi\delta} \partial_{x_1} \hat{u}_1^\delta(\xi, \cdot, 0), \end{array} \right. \quad \text{dans } B_{\delta\alpha}^{\text{int}}, \quad (9.107)$$

avec $B_{\delta\alpha}^{\text{int}} = B_{\delta\alpha} \cap \Omega^{\text{int}}$ (voir la figure 9.7).

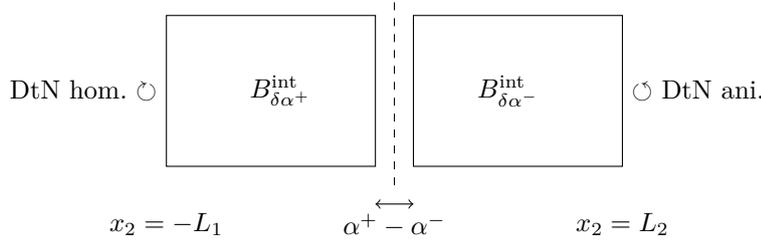


FIGURE 9.7 – Géométrie du problème (9.107).

9.5.2 Formulation variationnelle

En suivant la démarche de la section 8.2.3, nous pouvons donner la formulation variationnelle du problème (9.107). Introduisons donc l'espace

$$V_{\delta\alpha,\xi}^{\text{int}} := \{v \in L^2(B_{\delta\alpha}^{\text{int}}) : v \in H_\xi^1(B_{\delta\alpha}^{\text{int}-}) \cap H_\xi^1(B_{\delta\alpha}^{\text{int}+}) \text{ et } \langle v \rangle_{\delta\alpha} \in H_\xi^1(0, \delta)\}, \quad (9.108)$$

de sorte que la formulation variationnelle associée à (9.107) est :

$$\text{trouver } \hat{u}_1^\delta \in V_{\delta\alpha,\xi}^{\text{int}} \text{ telle que } B(u_1^\delta, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V_{\delta\alpha,\xi}^{\text{int}}, \quad (9.109)$$

où bB et L sont respectivement les formes hermitiennes et linéaires définies pour tout $(u, v) \in (V_{\delta\alpha,\xi}^{\text{int}})^2$ par

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{B_{\delta\alpha}^{\text{int}}} A_0^* \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{B_{\delta\alpha}^{\text{int}}} u \bar{v} + \Lambda^{\text{hom}}(u, v) + \Lambda^{\text{ani}}(u, v) \\ &+ \frac{1}{\delta C_1^\alpha} \int_0^\delta [u]_{\delta\alpha} [\bar{v}]_{\delta\alpha} - \frac{C_3^\alpha}{C_1^\alpha} \int_0^\delta [u]_{\delta\alpha} \langle \bar{v} \rangle_{\delta\alpha} \\ &+ \delta \left(\frac{C_\alpha^2 C_\alpha^3}{2} - C_4^\alpha \right) \int_0^\delta \partial_{x_2} \langle u \rangle_{\delta\alpha} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\delta\alpha} - \frac{C_2^\alpha}{C_1^\alpha} \int_0^\delta \langle u \rangle_{\delta\alpha} [\bar{v}]_{\delta\alpha}, \end{aligned} \quad (9.110)$$

et

$$L(v) = \int_{B_{\delta\alpha}^{\text{int}-}} f \bar{v}. \quad (9.111)$$

9.5.3 Résolution en pratique

Expliquons maintenant comment résoudre en pratique (9.109). Examinons donc les termes de (9.110). Les intégrales volumiques portant sur $B_{\delta\alpha}^{\text{int}}$ se calculent facilement en utilisant des matrices de masses et de rigidité standards (de même pour le calcul de (9.111)). Nous avons déjà expliqué en pratique comment calculer les matrices associées aux DtN Λ^{hom} et Λ^{ani} (sections 9.2.3 et 9.2.4). Il reste donc à calculer les termes faisant intervenir $[u]_{\delta\alpha}$ et $\langle u \rangle_{\delta\alpha}$.

Pour cela, nous allons supposer que nous disposons de deux maillages structurés de $B_{\delta\alpha}^{\text{int}-}$ et $B_{\delta\alpha}^{\text{int}+}$ respectivement construits de telle sorte que le bord droit de $B_{\delta\alpha}^{\text{int}-}$ soit maillé de la même façon que le bord gauche de $B_{\delta\alpha}^{\text{int}+}$. Nous avons donc deux maillages structurés avec $N_x^- \times N_y$ et $N_x^+ \times N_y$ points (voir la figure 9.8).

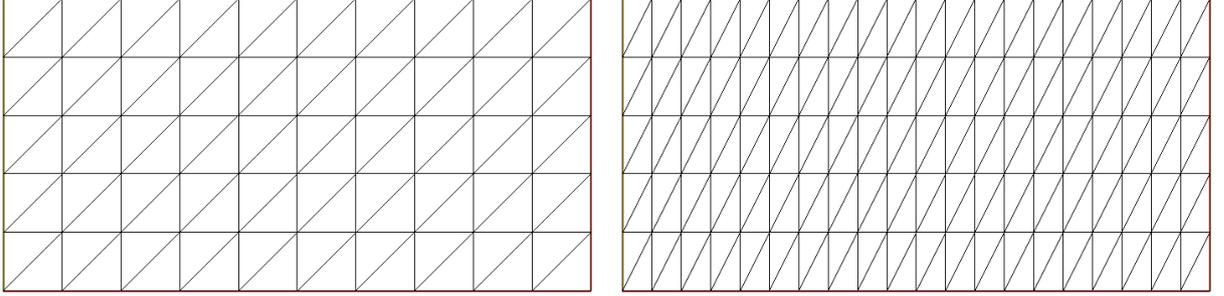


FIGURE 9.8 – Exemple de maillages de $B_{\delta\alpha}^{\text{int}-}$ et $B_{\delta\alpha}^{\text{int}+}$ dont les bords verticaux se correspondent (ici $N_x^- = 11$, $N_x^+ = 21$ et $N_y = 6$).

Nous nous donnons maintenant une numérotation globale sur les deux maillages, de telle sorte que les sommets situés sur le bord droit de $B_{\delta\alpha}^{\text{int}-}$ sont numérotés de $N - N_y + 1$ à N et les sommets situés sur le bord gauche de $B_{\delta\alpha}^{\text{int}+}$ sont numérotés de $N + 1$ à $N + N_y$. En notant ϕ_j la fonction de base correspondant au sommet j , nous avons alors

$$\langle \phi_j \rangle_{\delta\alpha} = \phi_j, \quad \text{pour tout } j \in \{N - N_y + 1, N + N_y\}, \quad (9.112)$$

et

$$[\phi_j]_{\delta\alpha} = \begin{cases} -w_j/2 & \text{pour } j \in \{N - N_y + 1, N\}, \\ w_j/2 & \text{pour } j \in \{N + 1, N + N_y\}. \end{cases} \quad (9.113)$$

Ainsi, nous pouvons alors construire les matrices qui correspondent aux différents termes de la forme bilinéaire (9.110).

- Pour les formes bilinéaires $(u, v) \mapsto \int_0^\delta \partial_{x_2} \langle u \rangle_{\delta\alpha} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\delta\alpha}$ et $(u, v) \mapsto \int_0^\delta \langle u \rangle_{\delta\alpha} \langle \bar{v} \rangle_{\delta\alpha}$, nous construisons respectivement les matrices $\mathbb{D}\mathbb{D}, \mathbb{M}\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{N_y}(\mathbb{R})$ définies pour tout $(i, j) \in \{N - N_y + 1, N + N_y\}^2$ par

$$\mathbb{D}\mathbb{D}_{ij} = \int_0^\delta \partial_{x_2} \langle \phi_j \partial_{x_2} \rangle_{\delta\alpha} \langle \phi_i \rangle_{\delta\alpha} = \frac{1}{4} \int_0^\delta \partial_{x_2} \phi_j \partial_{x_2} \phi_i, \quad (9.114)$$

et

$$\mathbb{M}\mathbb{M}_{ij} = \int_0^\delta \langle \phi_j \rangle_{\delta\alpha} \langle \phi_i \rangle_{\delta\alpha} = \frac{1}{4} \int_0^\delta \phi_j \phi_i. \quad (9.115)$$

- Pour la forme bilinéaire $(u, v) \mapsto \int_0^\delta [u]_{\delta\alpha} \partial_{x_2} \langle \bar{v} \rangle_{\delta\alpha}$, nous construisons la matrice $\mathbb{S}\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{N_y}(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in \{N - N_y + 1, N + N_y\}^2$ par

$$\mathbb{S}\mathbb{D}_{ij} = \int_0^\delta [\phi_j]_{\delta\alpha} \langle \phi_i \rangle_{\delta\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^\delta \phi_j \partial_{x_2} \phi_i & \text{si } j \in \{N - N_y + 1, N\}, \\ -\frac{1}{2} \int_0^\delta \phi_j \partial_{x_2} \phi_i & \text{si } j \in \{N + 1, N + N_y\}. \end{cases} \quad (9.116)$$

- Pour la forme $(u, v) \mapsto \int_0^\delta \partial_{x_2} \langle u \rangle_{\delta\alpha} [\bar{v}]_{\delta\alpha}$, la matrice $\mathbb{DS} \in \mathcal{M}_{N_y}(\mathbb{R})$ correspondant est simplement la transposée de la matrice $\mathbb{SD} : \mathbb{DS} = \mathbb{SD}^T$.
- Pour la forme bilinéaire $(u, v) \mapsto \int_0^\delta [u]_{\delta\alpha} [\bar{v}]_{\delta\alpha}$, nous construisons la matrice $\mathbb{SS} \in \mathcal{M}_{N_y}(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in \{N - N_y + 1, N + N_y\}^2$ par

$$\mathbb{SM}_{ij} = \int_0^\delta [\phi_j]_{\delta\alpha} [\phi_i]_{\delta\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^\delta \phi_j \phi_i & \text{si } (i, j) \in \{N - N_y + 1, N\}^2 \\ & \text{ou si } (i, j) \in \{N + 1, N + N_y\}^2, \\ -\frac{1}{2} \int_0^\delta \phi_j \phi_i & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.117)$$

Nous avons donc à ce stade décrit comment construire les matrices correspondant à tous les termes de la forme bilinéaire (9.110), nous pouvons ainsi calculer numériquement la solution du problème (9.107). Ensuite, la reconstruction de la fonction à gauche et à droite puis sur tout $\Omega_{\delta\alpha}$ se fait exactement comme cela est expliqué aux sections 9.2.6 et 9.2.2.

Remarque 9.11. Les matrices \mathbb{MM} , \mathbb{DD} , \mathbb{SD} , \mathbb{DS} et \mathbb{SS} peuvent toutes être calculées analytiquement.

9.6 Expériences numériques avec les nouvelles conditions de transmission

Nous avons donc maintenant tous les outils pour calculer

- la solution u_δ du problème exact (9.13) ;
- la solution u_0 de l'équation homogénéisée (9.48) ainsi que les correcteurs :

$$u_0(\mathbf{x}) + \delta \nabla u_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_0(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (9.118)$$

où $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ sont les deux solutions du problème de cellule (7.7) et où $\Theta = (\theta_{ij})$ sont les quatre solutions des problèmes de cellules (7.11) (bien entendu \mathbf{w} et Θ doivent être considérés comme nul dans Ω^-).

- la solution $u_1^{\delta\alpha}$ du problème approché décalé (9.105) ainsi que les correcteurs :

$$u_1^{\delta\alpha}(\mathbf{x}) + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_1^{\delta\alpha}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \Omega^- \cup \Omega^+. \quad (9.119)$$

Cela nécessite le calcul des constantes C_j apparaissant dans (9.105) qui lui-même repose sur le calcul des profils \mathcal{N} et \mathcal{P}_1 .

Nous allons reprendre les paramètres de la section 6.3.4 du chapitre 6. Rappelons que nous avons pris $a_0 = 1$ (la valeur dans Ω^- de a) et $\rho = 1$ (ainsi $\rho^* = 1$ et $\rho_0^* = 1$ sur tout \mathbb{R}^2). Nous prenons comme source f une gaussienne très localisée et centrée en $(-0.2, 0.5)$:

$$f(x_1, x_2) = e^{-100(x_1+0.2)^2 - 100(x_2+0.5)^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (9.120)$$

Enfin nous considérons comme fréquence $\omega = 2 + 0,01i$.

En ce qui concerne le paramètre α intervenant dans le décalage géométrique, il est apparu qu'en pratique considérer que $\alpha = 0$, c'est-à-dire ne pas effectuer de décalage, ne pose aucun problème pour le calcul numérique de $u_1^{\delta\alpha}$ et que l'ajout du décalage ne change rien et n'améliore pas la précision du modèle. Nous considérerons donc $\alpha = 0$ dans la suite.

La première expérience numérique consiste à prendre un coefficient a régulier mais qui n'est pas symétrique (voir la figure 6.8) :

$$a(y_1, y_2) = (2 + \sqrt{2} \sin 2\pi y_1)(4 + \sqrt{2} \sin 2\pi y_2), \quad (y_1, y_2) \in Y. \quad (9.121)$$

Nous avons tout d'abord représenté à la figure 9.10 les profils \mathcal{N} et \mathcal{P}_1 . Nous voyons ici clairement le comportement linéaire (et oscillant à droite). Ensuite, nous avons représenté à la figure 9.9 la partie réelle de solution exacte u_δ et la partie réelle de la solution approchée u_1^δ (sans correcteur) pour $\delta = 0, 5$. De manière qualitative, cela semble correspondre. Afin de confirmer que nos nouvelles conditions de transmission sont plus efficaces, nous avons tracé à la figure 9.11 la différence entre la partie réelle de la solution exacte u_δ et

- d'une part la solution homogénéisée u_0 (ordre 0), puis cette solution avec les correcteurs d'ordre 1 : $u_0 + \delta \nabla u_0 \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\cdot}{\delta} \right)$ et enfin avec les correcteurs d'ordre 2 : $u_0 + \delta \nabla u_0 \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\cdot}{\delta} \right) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_0]$;
- d'autre part la solution du problème approché $u_1^{\delta\alpha}$ (ordre 0), puis cette solution avec les correcteurs d'ordre 1 : $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\cdot}{\delta} \right)$ et enfin avec les correcteurs d'ordre 2 : $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\cdot}{\delta} \right) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_1^{\delta\alpha}]$;

et ceci pour $\delta = 0, 25$. En ce qui concerne la solution homogénéisée u_0 , nous voyons que l'ajout de correcteurs n'améliore pas la précision du modèle près de l'interface et dans la partie homogène Ω^- . En revanche, pour la solution du problème approché $u_1^{\delta\alpha}$, nous voyons une amélioration considérable dans la partie homogène Ω^- et comme attendu l'ajout des correcteurs améliore le modèle dans la partie droite Ω^+ .

Il est donc clair que, de manière qualitative, notre modèle approché fonctionne comme attendu. Nous souhaitons maintenant calculer des courbes d'erreur pour confirmer le résultat du théorème 8.11 voire la conjecture 8.12. Malheureusement, nous nous sommes heurtés à des difficultés numériques pour établir ces courbes, nous avons des phénomènes ressemblant à des verrouillages numériques, où l'erreur semble atteindre un palier lorsque δ devient trop petit. Nous avons représenté une telle courbe à la figure 9.12. L'explication que nous pouvons avancer (sans justification mathématique) est que l'erreur entre l'approximation $u_{\delta,h}$ de la solution exacte et de l'approximation $u_{\text{app},h}$ de la solution approchée $u_1^{\delta\alpha}$ (avec les correcteurs d'ordre 2) doit vérifier

$$\|u_{\delta,h} - u_{1,h}^{\delta\alpha}\|_{H^1} = \mathcal{O} \left(\delta^{3/2} + \frac{h}{\delta} + h \right), \quad (9.122)$$

et que la présence du facteur h/δ pénalise grandement la convergence. Or ici nous avons effectué nos calculs à h/δ fixé, ce qui expliquerait les courbes observées. Nous discutons des remèdes possibles lors de la conclusion de ce manuscrit.

La deuxième expérience numérique consiste à prendre un coefficient périodique moins régulier que le précédent (voir la figure 6.12

$$a(y_1, y_2) = 2 + \mathbf{1}_{y_1+y_2>1}(y_1, y_2), \quad (y_1, y_2) \in Y. \quad (9.123)$$

Rappelons qu'avec ce choix, le milieu homogénéisé effectif est beaucoup plus anisotrope que lors de l'expérience précédente. Nous avons tout d'abord représenté à la figure 9.14 les profils \mathcal{N} et \mathcal{P}_1 . Nous voyons ici clairement le comportement linéaire (et oscillant à droite). Ensuite, la 9.11 montre la différence entre la partie réelle de la solution exacte u_δ et d'une part u_0 , $u_0 + \delta \nabla u_0 \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\cdot}{\delta} \right)$ et $u_0 + \delta \nabla u_0 \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\cdot}{\delta} \right) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_0]$ et d'autre part $u_1^{\delta\alpha}$, $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\cdot}{\delta} \right)$ et $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w} \left(\frac{\cdot}{\delta} \right) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_1^{\delta\alpha}]$. Cela confirme les conclusions de l'expérience précédente, Nous voyons également que l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée $u_1^{\delta\alpha}$ est concentrée proche de l'interface Γ ce qui n'est pas surprenant : nous n'avons pas pris en compte les termes de champ proche.

9.A Annexe : calcul analytique d'un produit scalaire

La construction de l'opérateur de DtN homogène Λ^{hom} (section 9.2.3) ou de Λ^+ (section 9.4.1), la reconstruction à gauche (section 9.2.6) ou encore le calcul de l'erreur (section 9.3.3), nous avons eu besoin

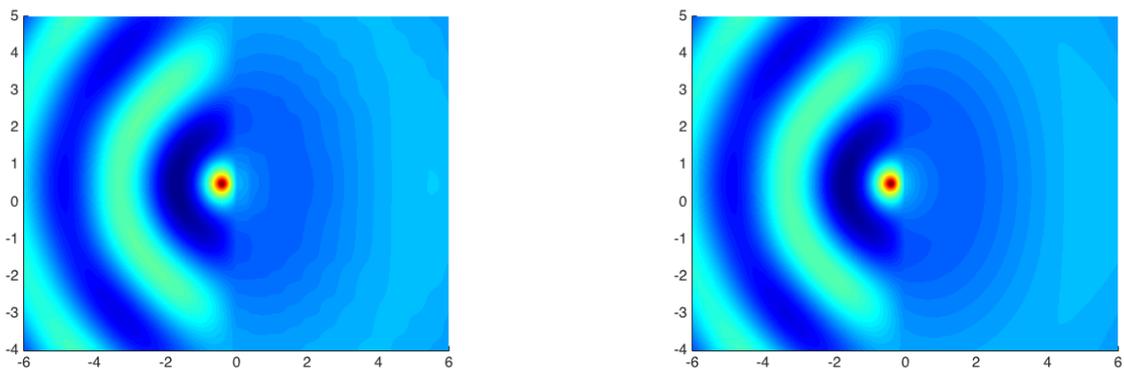


FIGURE 9.9 – Parties réelles de la solution exacte u_δ et de l'approximation u_1^δ pour $\delta = 0,5$.

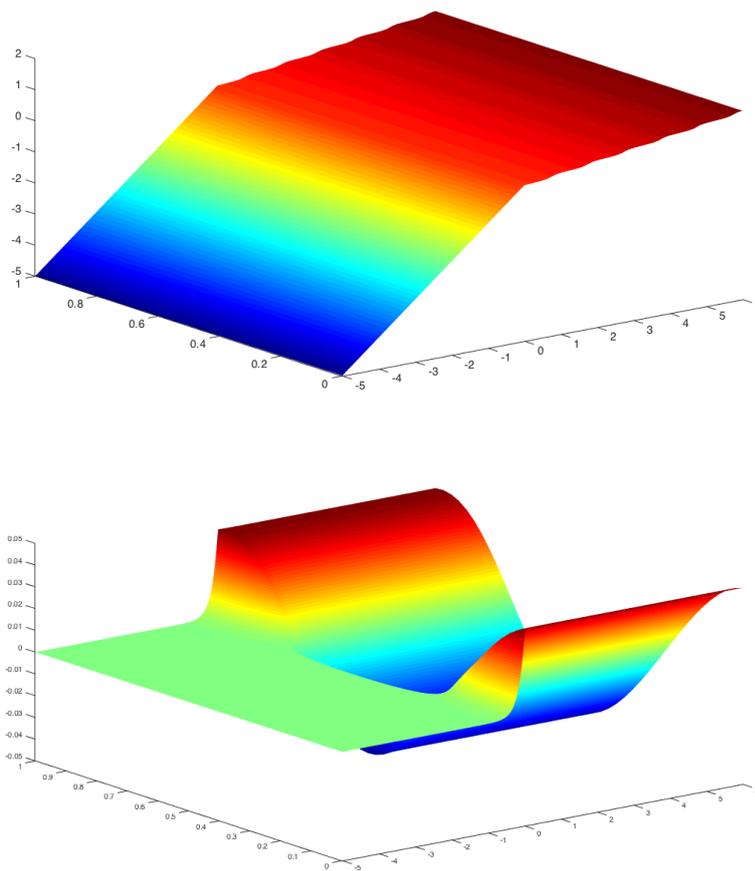


FIGURE 9.10 – Les profils \mathcal{N} et \mathcal{P}_1 .

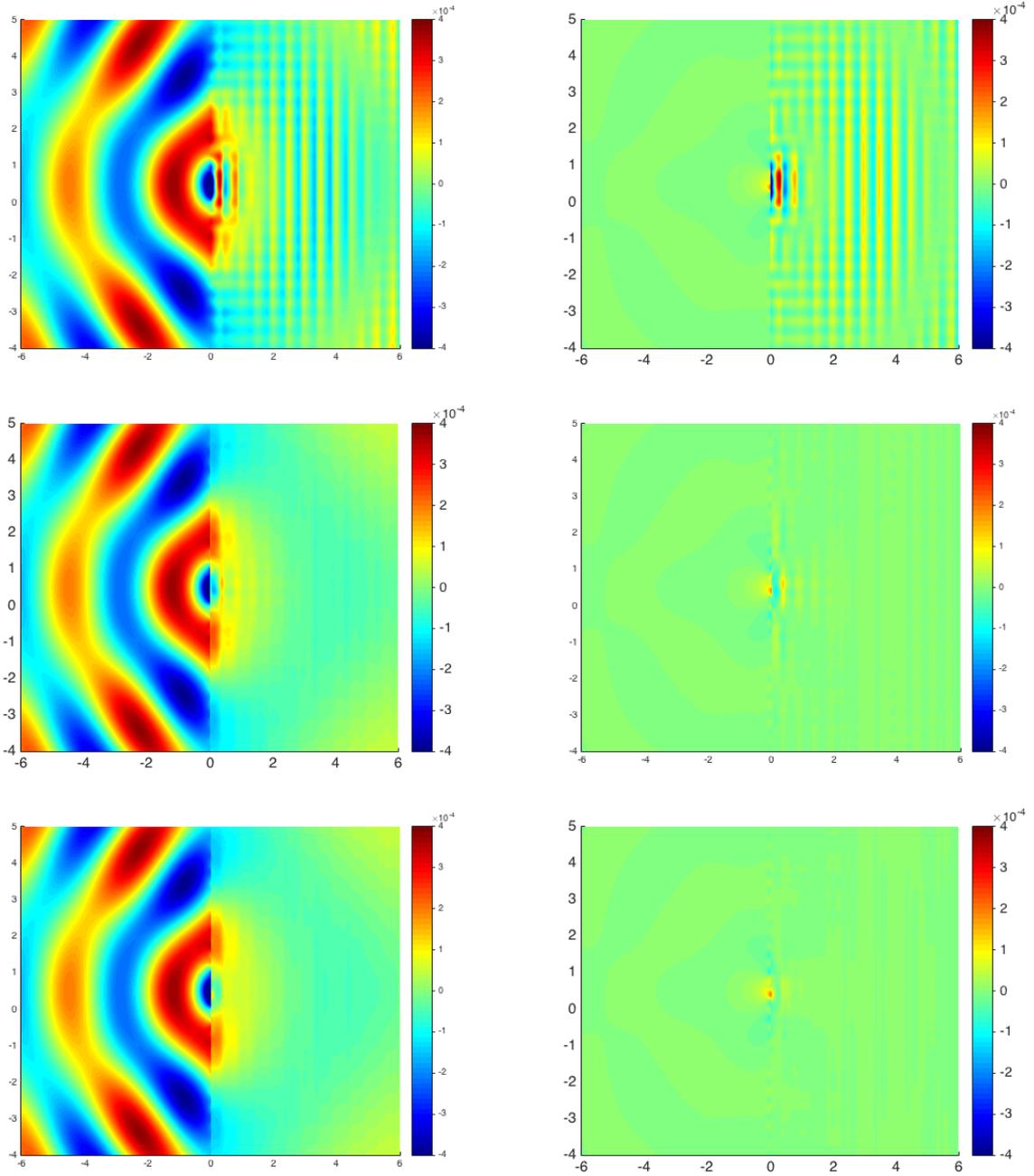


FIGURE 9.11 – Différence pour $\delta = 0,25$ entre la partie réelle de la solution exacte u_δ et d'une part u_0 , $u_0 + \delta \nabla u_0 \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta})$ et $u_0 + \delta \nabla u_0 \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta}) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_0^0]$ (colonne de gauche de haut en bas) et d'autre part $u_1^{\delta\alpha}$, $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta})$ et $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta}) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_1^{\delta\alpha}]$ (colonne de droite de haut en bas).

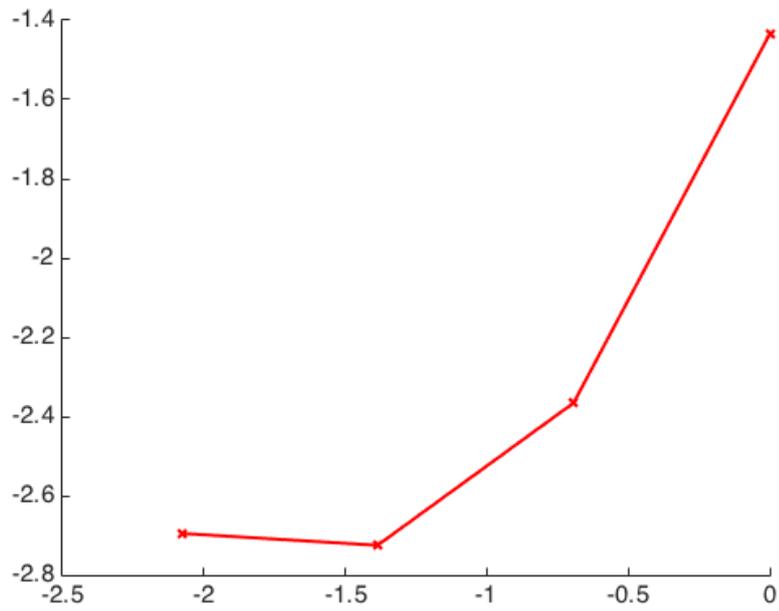


FIGURE 9.12 – Courbe de convergence en échelle log-log de l'erreur H^1 entre la solution exacte $u_1^{\delta\alpha}$ et $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta})$ en fonction de δ .

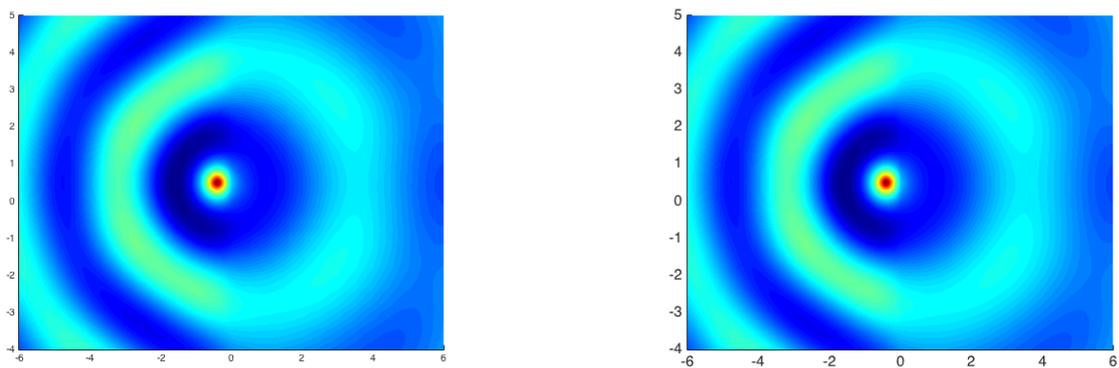


FIGURE 9.13 – Parties réelles de la solution exacte u_δ et de l'approximation $u_1^{\delta\alpha}$ pour $\delta = 0, 5$.

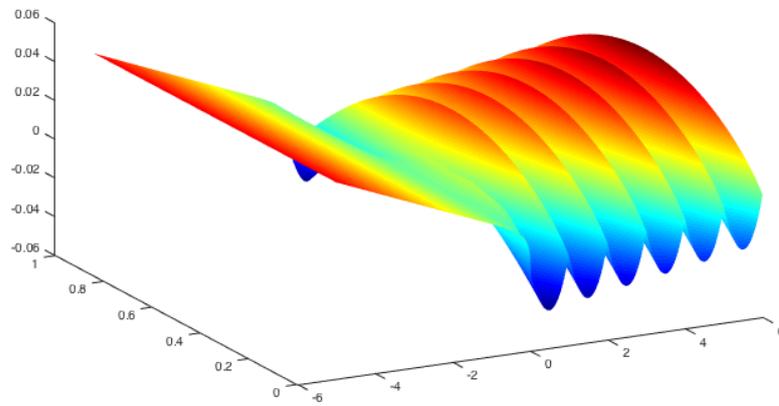
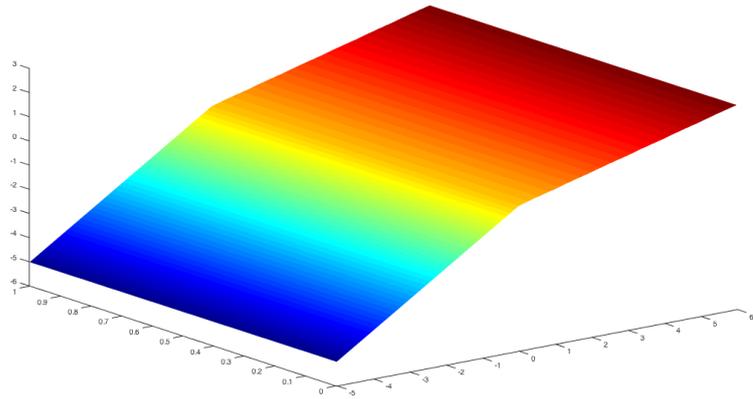


FIGURE 9.14 – Les profils \mathcal{N} et \mathcal{P}_1 .

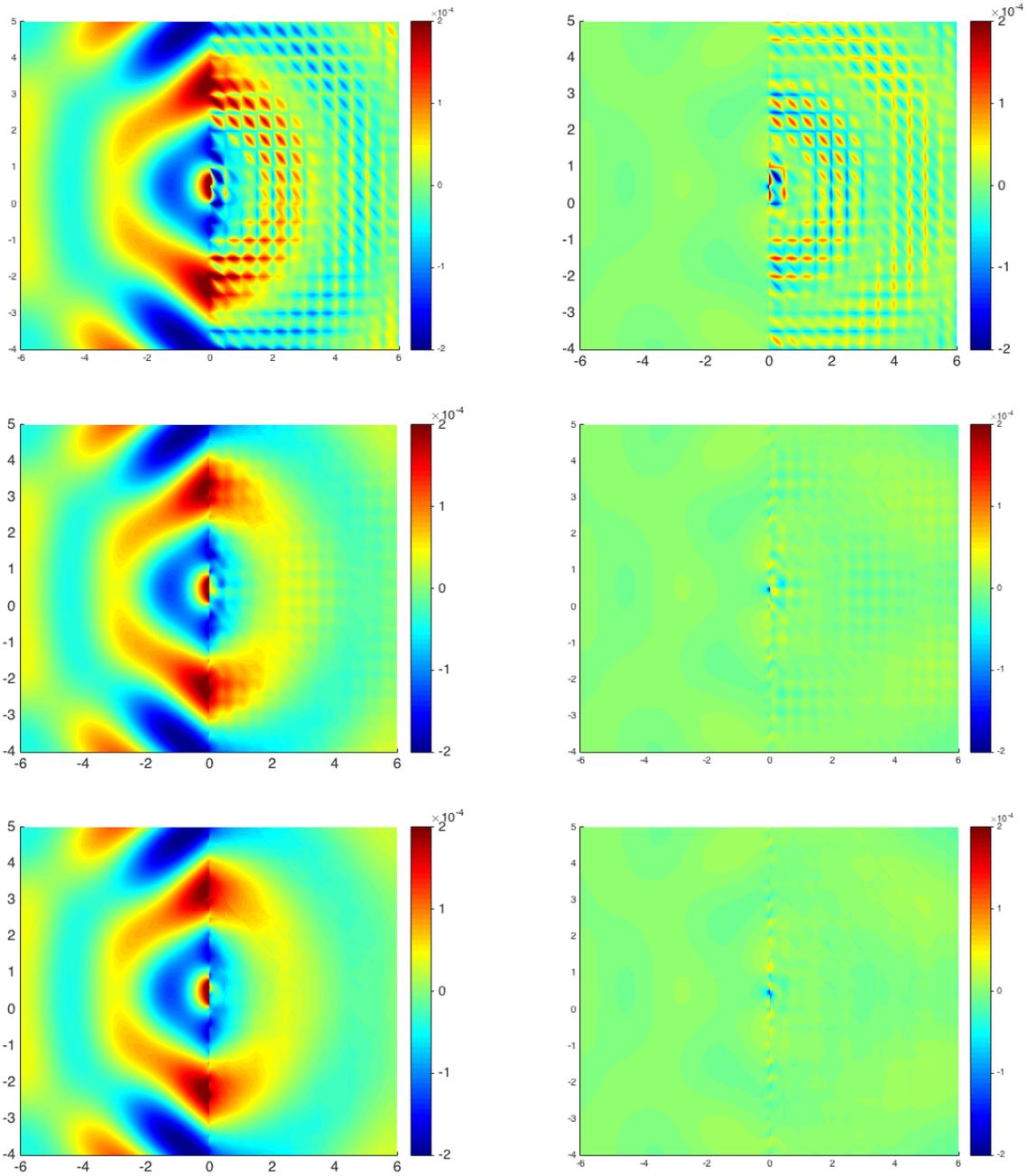


FIGURE 9.15 – Différence pour $\delta = 0,25$ entre la partie réelle de la solution exacte u_δ et d'une part u_0 , $u_0 + \delta \nabla u_0 \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta})$ et $u_0 + \delta \nabla u_0 \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta}) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_0]$ (colonne de gauche de haut en bas) et d'autre part $u_1^{\delta\alpha}$, $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta})$ et $u_1^{\delta\alpha} + \delta \nabla u_1^{\delta\alpha} \cdot \mathbf{w}(\frac{\cdot}{\delta}) + \delta^2 \nabla \cdot [\Theta(\cdot/\delta) \nabla u_1^{\delta\alpha}]$ (colonne de droite de haut en bas).

de calculer des quantités du type

$$\langle \psi_n^\xi, \phi_j \rangle_{L^2(0,1)}, \quad (9.124)$$

où $\psi_n^\xi(x_2) = e^{-i(2n\pi+\xi)x_2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $\xi \in [0, 2\pi)$ et où ϕ_j est la j -ième fonction de base de la discrétisation \mathbb{P}_1 de $H^{1/2}(0,1)$ (sur la grille régulière en subdivisant de manière régulière $[0, 1]$ en intervalles de taille h , les points de discrétisation étant $y_\ell := \ell h$, $\ell = 0, \dots, m$). Il est en fait possible de calculer exactement ces produits scalaires.

Par définition, ϕ_j est la fonction affine par morceaux qui vaut 1 sur y_j et 0 sur y_ℓ , $\ell \neq j$. Supposons pour l'instant que $j \neq 0$ et que $j \neq N$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^\xi, \phi_j \rangle_{L^2(0,1)} &= \int_{y_j-h}^{y_j+h} \phi_j(y) e^{+i(2n\pi+\xi)y} dy \\ &= \int_{y_j-h}^{y_j} \frac{y - (y_j - h)}{h} e^{+i(2n\pi+\xi)y} dy + \int_{y_j}^{y_j+h} \frac{(y_j + h) - y}{h} e^{+i(2n\pi+\xi)y} dy. \end{aligned} \quad (9.125)$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{y_j-h}^{y_j} \frac{y - (y_j - h)}{h} e^{+i(2n\pi+\xi)y} dy &:= \left[\frac{y - (y_j - h)}{h} \frac{e^{+i(2n\pi+\xi)y}}{+i(2n\pi + \xi)} \right]_{y_j-h}^{y_j} - \frac{1}{h} \int_{y_j-h}^{y_j} \frac{e^{+i(2n\pi+\xi)y}}{+i(2n\pi + \xi)} dy \\ &= \frac{e^{+i(2n\pi+\xi)y_j}}{+i(2n\pi + \xi)} + \frac{1}{h} \frac{1}{(2n\pi + \xi)^2} \left[e^{+i(2n\pi+\xi)y_j} - e^{+i(2n\pi+\xi)(y_j-h)} \right]. \end{aligned} \quad (9.126)$$

En faisant la même chose pour le second terme de (9.125) nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^\xi, \phi_j \rangle_{L^2(0,1)} &= \frac{1}{h} \frac{1}{(2n\pi + \xi)^2} e^{+i(2n\pi+\xi)y_j} \left[1 - e^{-i(2n\pi+\xi)y_j} - \left(e^{+i(2n\pi+\xi)h} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{h} \frac{1}{(2n\pi + \xi)^2} e^{+i(2n\pi+\xi)y_j} [2 - 2 \cos(2n\pi + \xi)h], \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (9.127)$$

Pour $j = 0$, en appliquant la même démarche, nous avons

$$\langle \psi_n^\xi, \phi_0 \rangle_{L^2(0,1)} = \frac{-1}{i(2n\pi + \xi)} - \frac{1}{h} \frac{1}{(2n\pi + \xi)^2} \left[e^{+i(2n\pi+\xi)h} - 1 \right], \quad (9.128)$$

et pour $j = N$

$$\langle \psi_n^\xi, \phi_N \rangle_{L^2(0,1)} = \frac{e^{+i(2n\pi+\xi)}}{+i(2n\pi + \xi)} + \frac{1}{h} \frac{1}{(2n\pi + \xi)^2} \left[e^{+i(2n\pi+\xi)} - e^{-i(2n\pi+\xi)(h-1)} \right]. \quad (9.129)$$

Enfin, dans le cas particulier où $n = \xi = 0$, nous avons, lorsque $j \neq 0$ et que $j \neq N$,

$$\langle \psi_n^\xi, \phi_j \rangle_{L^2(0,1)} = \int_{y_j-h}^{y_j} \frac{y - (y_j - h)}{h} dy + \int_{y_j}^{y_j+h} \frac{(y_j + h) - y}{h} dy = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h, \quad (9.130)$$

et lorsque $j = 0$ ou $j = N$,

$$\langle \psi_n^\xi, \phi_0 \rangle_{L^2(0,1)} = \langle \psi_n^\xi, \phi_N \rangle_{L^2(0,1)} = \frac{h}{2}. \quad (9.131)$$

9.B Annexe : démonstration de la proposition 9.10

Nous allons seulement démontrer la première identité (9.102) de la proposition 9.10, la deuxième (9.103) se démontrant de la même façon. Tout d'abord, nous définissons $\tilde{\mathcal{N}}^\pm$ à partir de \mathcal{N} en retranchant ses parties linéaires et constantes :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{N}}^-(\mathbf{y}) = \mathcal{N} - \frac{y_1}{a_0} - \ell_D^-(\mathcal{N}), & \mathbf{y} \in B^-, \\ \tilde{\mathcal{N}}^+(\mathbf{y}) = \mathcal{N} - \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} - \ell_D^+(\mathcal{N}), & \mathbf{y} \in B^+. \end{cases} \quad (9.132)$$

Maintenant, à partir de l'équation (7.137), et en suivant les idées de la section 9.4.3, nous pouvons montrer que \mathcal{P}_2^2 est solution de

$$(\Lambda^- + \Lambda^+) \mathcal{P}_2^2 = (a \partial_{y_1} + \Lambda^+) g^+ |_{\Sigma^+} - (-a_0 \partial_{y_1} + \Lambda^-) g^- |_{\Sigma^-}, \quad (9.133)$$

avec

$$\begin{cases} g^+ = \frac{\ell_N^+(\mathcal{P}_2^2)}{a_{11}^*} (y_1 + w_1) + \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2} w_2 + \frac{1}{a_{11}^*} [2\theta_{12} + y_1 w_2 - 2a_{12}^* (y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11})] + F^+ \\ g^- = \frac{\ell_N^-(\mathcal{P}_2^2)}{a_0} y_1 + F^-, \end{cases} \quad (9.134)$$

avec F^\pm solutions dans B^\pm de $L_{\mathbf{y}, \mathbf{y}} F^\pm = \partial_{y_2} (a \tilde{\mathcal{N}}^\pm) + a \partial_{y_2} \tilde{\mathcal{N}}^\pm$. Le problème (9.133) admet une solution à une constante près si, et seulement si, $\langle g^-, 1 \rangle_{\Sigma^-} + \langle g^+, 1 \rangle_{\Sigma^+} = 0$. Cela implique donc, en utilisant $\langle a(y_1 + w_1), 1 \rangle_{\Sigma^+} = a_{11}^*$ (voir (9.88)) et le fait que $y_1 = 0$ sur Σ^+ , que

$$[\ell_N(\mathcal{P}_2^2)] = - \int_{\Sigma^-} \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2} \partial_{y_1} w_2 + \frac{1}{a_{11}^*} [2\partial_{y_1} \theta_{12} + w_2 - 2a_{12}^* (w_1 + \partial_{y_1} \theta_{11})] - \int_{\Sigma^+} a \partial_{y_1} F^+ + \int_{\Sigma^-} a_0 \partial_{y_1} F^-. \quad (9.135)$$

Examinons les différents termes de l'égalité ci-dessus.

- De la même manière que nous avons montré (9.88), nous pouvons montrer que $\langle a(w_1 + \partial_{y_1} \theta_{11}), 1 \rangle_{\Sigma^+} = c_{111}^* = 0$ (voir la proposition 6.7) et $\langle a \partial_{y_1} w_2, 1 \rangle_{\Sigma^+} = a_{12}^*$.

- Nous avons

$$\int_{\Sigma^+} a \partial_{y_1} F^+ = - \int_{B_+} \nabla \cdot (a \nabla F^+) = - \int_{B_+} \partial_{y_2} (a \tilde{\mathcal{N}}^+) + a \partial_{y_2} \tilde{\mathcal{N}}^+, \quad (9.136)$$

et de même nous montrons que

$$\int_{\Sigma^-} a_0 \partial_{y_1} F^- = -a_0 \int_{B_-} \partial_{y_2} \tilde{\mathcal{N}}^-. \quad (9.137)$$

- Il reste donc à traiter le terme $\int_{\Sigma^+} a(2\partial_{y_1} \theta_{12} + w_2)$. Nous allons le couper en deux :

$$\int_{\Sigma^+} a(2\partial_{y_1} \theta_{12} + w_2) = \int_{\Sigma^+} a(\partial_{y_1} \theta_{12} + w_2) + \int_{\Sigma^+} a \partial_{y_1} \theta_{12}. \quad (9.138)$$

Pour le premier, rappelons que d'après (7.11) nous avons

$$-\nabla \cdot (a \nabla \theta_{12}) = a \partial_{y_1} w_2 + \partial_{y_1} (a w_2) - a_{12}^*. \quad (9.139)$$

En multipliant cette égalité par y_1 et en intégrant sur Y nous obtenons

$$\int_Y a \partial_{y_1} \theta_{12} - \int_{\Sigma^+} a \partial_{y_1} \theta_{12} = \int_Y a y_1 \partial_{y_1} w_2 - \int_Y a w_2 + \int_{\Sigma^+} a w_2 - \frac{a_{12}^*}{2}. \quad (9.140)$$

Or $\int_Y a y_1 \partial_{y_1} w_2 - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^+} a \partial_{y_1} w_2 = 0$ donc finalement

$$\int_{\Sigma^+} a(\partial_{y_1} \theta_{12} + w_2) = \int_Y a(\partial_{y_1} \theta_{12} + w_2). \quad (9.141)$$

Enfin, pour calculer $\int_{\Sigma^+} a \partial_{y_1} \theta_{12}$ en utilisant la même démarche que précédemment nous trouvons

$$\int_{\Sigma^+} a \partial_{y_1} \theta_{12} = \int_Y a \partial_{y_1} \theta_{12} - \int_Y a y_1 \partial_{y_2} w_1 + \frac{a_{12}^*}{2}. \quad (9.142)$$

En combinant tous ces termes, nous retrouvons bien (9.102).

CHAPITRE

10

EXTENSION À L'HOMOGENÉISATION À FORT CONTRASTE

Sommaire

10.1 Rappels sur l'homogénéisation à fort contraste	248
10.1.1 Le problème périodique initial	248
10.1.2 Développements asymptotiques à deux échelles	249
10.1.3 Un coefficient homogénéisé négatif	252
10.1.4 Le problème de la convergence	254
10.2 Extension des développements asymptotiques	255
10.2.1 Le problème de transmission	255
10.2.2 Champs lointains et champ proche	255
10.2.3 Conditions de raccord	257
10.2.4 Construction des premiers termes de champ proche	258
10.2.5 Construction des modèles approchés	260
10.3 Application des nouvelles conditions de transmission aux problèmes de transmission avec changements de signes	261

Depuis le début de ce manuscrit, nous avons considéré l'homogénéisation dans un cadre classique, dans lequel les coefficients périodiques du problème initial vérifient les propriétés usuelles de coercivité, etc. (uniformément par rapport à la taille de la période, voir par exemple (6.51)). Ce cadre ne peut donner lieu à des coefficients homogénéisés négatifs (A^* est définie positive et ρ^* est strictement positif, voir la proposition 6.5). Le cadre classique n'est donc sans doute pas le bon pour l'étude des métamatériaux.

Nous présentons donc dans ce dernier chapitre une extension de l'homogénéisation appelée homogénéisation à fort contraste. Celle-ci autorise les coefficients périodiques à dégénérer lorsque la taille de la période tend vers 0 (plus de coercivité uniforme). En les choisissant soigneusement, l'homogénéisation de ces problèmes peut alors conduire à des coefficients homogénéisés négatifs. Nous présentons ici un cas relativement simple d'un problème scalaire 2d d'une équation de Helmholtz (similaire à [12, 39, 245]) mais de nombreux travaux ont étendu cette méthode aux équations de Maxwell dans des géométries plus complexes [38, 41, 145, 146].

Ce chapitre a trois objectifs. Le premier (section 10.1) est de présenter et de faire des rappels sur la théorie de l'homogénéisation à fort contraste (dans le cas 2d avec l'équation de Helmholtz) et en particulier de montrer que cela peut conduire à des coefficients homogénéisés négatifs. Le second (section 10.2) est

d'étendre à ce nouveau cas les conditions de transmission d'ordre élevé que nous avons établies dans le cadre classique. En particulier, nous voulons comprendre l'influence de la fréquence sur les constantes C_j (alors qu'elles n'en dépendaient pas dans le cadre classique). Enfin, pour boucler ce manuscrit, à la section 10.3 nous allons appliquer nos nouvelles conditions de transmission aux problèmes de transmission avec changement de signe étudié au chapitre 0 et constater qu'elles permettent d'éviter les pertes de régularité et le caractère mal posé des problèmes.

Nous insistons sur le fait que tout ce qui sera dit dans les sections 10.2 et 10.3 est seulement prospectif et formel, sans aucune justification ni démonstration.

10.1 Rappels sur l'homogénéisation à fort contraste

10.1.1 Le problème périodique initial

Nous considérons une inclusion de référence $\Omega^I \subset Y \subset \mathbb{R}^d$ telle que $\partial Y \cap \overline{\Omega^I} = \emptyset$ et telle que l'extérieur Ω^E de l'inclusion définie par $\Omega^E := Y \setminus \overline{\Omega^I}$ soit connexe. Nous notons Γ la frontière de Ω^I , que nous considérerons régulière, et \mathbf{n} la normale sortante à Ω^I (donc rentrante pour Ω^E). Pour un petit paramètre $\delta > 0$, nous construisons par périodicité une grille d'inclusion

$$\Omega_\delta^I := \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^d} \delta \Omega^I + \delta(n, m). \quad (10.1)$$

Nous définissons également Γ_δ la frontière de Ω_δ^I , \mathbf{n}_δ la normale sortante associée ainsi que l'extérieur de ces inclusions par $\Omega_\delta^E := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\delta^I}$. Voir la figure 10.1.

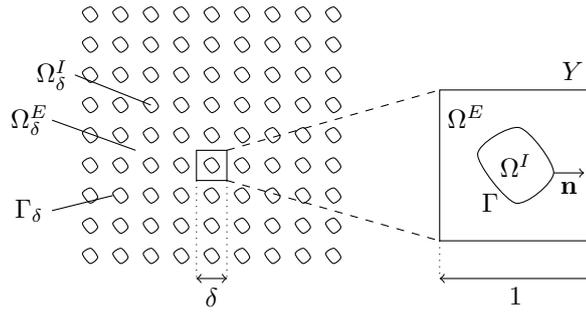


FIGURE 10.1 – La géométrie du problème à fort contraste.

Nous considérons une fonction périodique a_δ définie de la façon suivante :

$$a_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_\delta^E, \\ \delta^2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_\delta^I, \end{cases} \quad (10.2)$$

La présence du facteur δ^2 est cruciale et correspond au fait que nous souhaitons que la longueur d'onde à l'intérieur des inclusions soit à la même échelle afin de pouvoir avoir des résonances internes. Tout autre choix comme un facteur en δ^α , $\alpha \neq 2$, ne conduirait à aucun phénomène intéressant.

Remarque 10.1. Nous pourrions considérer des modèles plus complexes où a est variable sur Ω_δ^E et Ω_δ^I au lieu de prendre des valeurs constantes.

Nous nous intéressons alors à l'homogénéisation du problème

$$-\nabla \cdot (a_\delta \nabla u_\delta) - \omega^2 u_\delta = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad (10.3)$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ est une fréquence telle que $\text{Im } \omega^2 > 0$ (les conclusions de la remarque 6.2 sont toujours valides dans ce cas).

Remarque 10.2. En dimension $d = 2$, la structure ainsi définie correspondrait par exemple à un milieu composé d'un diélectrique dans laquelle sont plongées des tiges parallèles infiniment longues et de très forte permittivité. Dans le cas d'une onde électromagnétique incidente polarisée selon $H_{||}$, le champ u_δ serait alors le champ magnétique, a_δ représenterait l'inverse de la permittivité du milieu et la perméabilité serait égale à 1 partout.

10.1.2 Développements asymptotiques à deux échelles

Suivant la théorie de l'homogénéisation classique, nous allons postuler un *ansatz* suivant l'esprit du développement à deux échelles mais séparé sur chacune des deux zones :

$$u_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^E(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta) & \text{sur } \Omega_\delta^E, \\ \sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^I(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta) & \text{sur } \Omega_\delta^I, \end{cases} \quad (10.4)$$

où les u_n^E et u_n^I sont des fonctions qui sont Y -périodiques par rapport à la variable rapide $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\delta$.

Toujours en suivant la démarche de l'homogénéisation classique, en injectant (10.4) dans (10.3), nous obtenons deux cascades d'équations. La première, posée pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_\delta^E \times \Omega^E$, vaut

$$\left| \begin{array}{l} -\partial_{y_i y_i}^2 u_0^E = 0, \\ -\partial_{y_i y_i}^2 u_1^E = 2\partial_{x_i y_i}^2 u_0^E, \\ -\partial_{y_i y_i}^2 u_2^E = 2\partial_{x_i y_i}^2 u_1^E + (\partial_{x_i x_i}^2 + \omega^2)u_0^E, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (10.5)$$

et la seconde, posée pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_\delta^I \times \Omega^I$, vaut

$$\left| \begin{array}{l} -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)u_0^I = 0, \\ -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)u_1^I = 2\partial_{x_i y_i}^2 u_0^I, \\ -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)u_2^I = 2\partial_{x_i y_i}^2 u_1^I + \partial_{x_i x_i}^2 u_0^I, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (10.6)$$

Remarquons que la présence du facteur δ^2 dans Ω_δ^I implique la présence de ω^2 dès la première équation de la seconde cascade.

Les conditions de transmission du problème (10.3) s'écrivent

$$[u_\delta]_\delta = 0 \quad \text{et} \quad [a_\delta \nabla u_\delta \cdot \mathbf{n}_\delta]_\delta = 0, \quad (10.7)$$

où $[\cdot]_\delta$ désigne le saut à travers Γ_δ . En injectant (10.4) dans la première, nous obtenons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^E = u_n^I, \quad \text{sur } \Gamma_\delta \times \Gamma, \quad (10.8)$$

et dans la seconde, en remarquant que $\mathbf{n}_\delta(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}/\delta) = \mathbf{n}(\mathbf{y})$, nous obtenons une nouvelle cascade d'équations posée sur $\Gamma_\delta \times \Gamma$:

$$\left| \begin{array}{l} \partial_{y_i} u_0^E n_i = 0, \\ \partial_{y_i} u_1^E n_i = -\partial_{x_i} u_0^E n_i, \\ \partial_{y_i} u_2^E n_i = -\partial_{x_i} u_1^E n_i + \partial_{y_i} u_0^I n_i, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (10.9)$$

avec $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$.

Pour étudier les équations (10.5), il est utile comme nous l'avons fait pour l'homogénéisation classique d'introduire le sous-espace $H_{\sharp}^1(\Omega^E)$ (resp. $\dot{H}_{\sharp}^1(\Omega^E)$) des fonctions de $H^1(\Omega^E)$ qui sont Y -périodiques (resp. qui sont Y -périodiques et à moyenne nulle). Nous noterons $\langle \cdot \rangle_E$ (resp. $\langle \cdot \rangle_I$ et $\langle \cdot \rangle_{\Gamma}$) la moyenne sur Ω^E (resp. Ω^I et Γ).

Nous disposons également de l'analogue de la proposition 6.4 pour les équations (10.5) qui nous donne une nouvelle relation de compatibilité :

Proposition 10.3. *Soit $F \in L^2(\Omega^E)$ et $G \in L^2(\Gamma)$. L'équation*

$$\begin{cases} u \in \dot{H}_{\sharp}^1(\Omega^E), \\ -\partial_{y_i y_i}^2 u = F & \text{sur } \Omega^E, \\ \partial_{y_i} u n_i = G & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (10.10)$$

admet une unique solution si, et seulement si, $\langle F \rangle_E = -\langle G \rangle_{\Gamma}$.

10.1.2.1 Développement à l'ordre 0

À l'extérieur D'après (10.5) et (10.9), nous cherchons $u_0^E \in H_{\sharp}^1(\Omega^E)$ telle que

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 u_0^E = 0 & \text{sur } \Omega^E, \\ \partial_{y_i} u_0^E n_i = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.11)$$

Cela implique que u_0^E est indépendante de la variable rapide \mathbf{y} :

$$u_0^E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{u}_0^E(\mathbf{x}), \quad (10.12)$$

où \hat{u}_0^E est une fonction de la variable lente \mathbf{x} uniquement .

À l'intérieur D'après (10.6), (10.8) et (10.12), l'équation vérifiée par u_0^I est

$$\begin{cases} -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)u_0^I = 0 & \text{sur } \Omega^I, \\ u_0^I = \hat{u}_0^E & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.13)$$

Par linéarité de ce problème, nous pouvons écrire

$$u_0^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{u}_0^E(\mathbf{x})\eta_{\omega}^0(\mathbf{y}), \quad (10.14)$$

où η_{ω}^0 est solution du problème

$$\begin{cases} -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)\eta_{\omega}^0 = 0 & \text{sur } \Omega^I, \\ \eta_{\omega}^0 = 1 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.15)$$

Nous discuterons plus en détails du caractère bien posé de cette équation plus tard et nous donnerons une expression explicite de η_{ω}^0 lorsque c'est possible. Supposons dans un premier temps que η_{ω}^0 existe et est unique.

Remarque 10.4. Il est remarquable que le terme u_0^I correspondant au terme d'ordre 0 de l'ansatz de u_{δ} sur Ω_{δ}^I dépende de la variable rapide \mathbf{y} et de la fréquence ω de façon non linéaire. Ce phénomène n'était pas présent dans l'homogénéisation classique (le terme d'ordre 0 était indépendant de δ et la dépendance en ω n'apparaissait qu'à l'ordre 2 sur u_2 et ce de façon linéaire).

10.1.2.2 Développement à l'ordre 1

À l'extérieur D'après (10.5), (10.9) et (10.12), l'équation vérifiée par $u_1^E \in H_{\#}^1(\Omega^E)$ est

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 u_1^E = 0 & \text{sur } \Omega^E, \\ \partial_{y_i} u_0^E n_i = -\partial_{x_i} \hat{u}_0^E n_i & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.16)$$

Par linéarité de ce problème par rapport à \hat{u}_0^E , nous pouvons écrire que

$$u_1^E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{x_i} \hat{u}_0^E(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{y}) + \hat{u}_1^E(\mathbf{x}), \quad (10.17)$$

où \hat{u}_1^E est une fonction de la variable lente \mathbf{x} uniquement correspondant à la partie moyennée de u_1^E sur Ω^E et où les w_i sont les d solutions des d problèmes de cellules

$$\begin{cases} w_j \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega^E), \\ -\partial_{y_i y_i}^2 w_j = 0 & \text{sur } \Omega^E, \\ \partial_{y_i} w_j n_i = -n_j & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.18)$$

À l'intérieur D'après (10.6), (10.8) et (10.17), l'équation vérifiée par u_1^I est

$$\begin{cases} -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2) u_1^I = 2\partial_{x_i} \hat{u}_0^E \partial_{y_i} \eta_{\omega}^0 & \text{sur } \Omega^I, \\ u_1^I = \partial_{x_i} \hat{u}_0^E w_i + \hat{u}_1^I, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.19)$$

En exploitant la linéarité de ce problème par rapport à $\partial_{x_i} \hat{u}_0^E$ et en réutilisant la solution η_{ω}^0 du problème (10.15), nous pouvons écrire

$$u_1^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{x_i} \hat{u}_1^E(\mathbf{x}) \eta_{\omega, i}^1(\mathbf{y}) + \hat{u}_1^E(\mathbf{x}) \eta_{\omega}^0(\mathbf{y}), \quad (10.20)$$

où les $\eta_{\omega, j}^1$ sont les d solutions des d problèmes

$$\begin{cases} -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2) \eta_{\omega, j}^1 = \partial_{y_j} \eta_{\omega}^0 & \text{sur } \Omega^I, \\ \eta_{\omega, j}^1 = w_j & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.21)$$

10.1.2.3 Développement à l'ordre 2

Nous effectuons les calculs uniquement pour u_2^E car nous n'aurons pas besoin de u_2^I . D'après (10.5), (10.9) et (10.12) et (10.14), l'équation vérifiée par $u_2^E \in H_{\#}^1(\Omega^E)$ est

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 u_2^E = 2\partial_{x_i y_i}^2 u_1^E + (\partial_{x_i x_i}^2 + \omega^2) \hat{u}_0^E & \text{sur } \Omega^E, \\ \partial_{y_i} u_2^E n_i = (\hat{u}_0^E \partial_{y_i} \eta_{\omega}^0 - \partial_{x_i} u_1^E) n_i & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.22)$$

En écrivant la relation de compatibilité de l'équation ci-dessus et en utilisant (10.17), nous obtenons après quelques calculs fastidieux mais sans grande difficulté que \hat{u}_0^E est solution de l'équation homogénéisée

$$-\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (A^* \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_0^E) - \omega^2 \mu^*(\omega) \hat{u}_0^E = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^d, \quad (10.23)$$

où $A^* = (a_{ij}^*)$ est la matrice homogénéisée définie par

$$a_{ij}^* := \langle \delta_{ij} + \partial_{y_i} w_j \rangle_E, \quad (10.24)$$

et où $\mu^*(\omega)$ est le coefficient homogénéisé défini par

$$\mu^*(\omega) := \langle 1 \rangle_E + \langle \eta_{\omega}^0 \rangle_I, \quad (10.25)$$

dont nous donnerons une expression plus explicite dans la suite.

Remarque 10.5. La matrice homogénéisée A^* est la même que celle obtenue lors de l'homogénéisation des milieux perforés avec condition de Neumann homogène [125]. En particulier elle est symétrique définie positive.

Nous pouvons alors donner exactement l'équation vérifiée par $u_2^E \in H_{\#}^1(\Omega^E)$ en utilisant (10.22), (10.17) et (10.23) :

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 u_2^E = (2\partial_{y_i} w_j + \delta_{ij} - a_{ij}^*) \partial_{x_i x_j}^2 \hat{u}_0^E + \omega^2 (\mu^*(\omega) - 1) \hat{u}_0^E & \text{sur } \Omega^E, \\ \partial_{y_i} u_2^E n_i = (\hat{u}_0^E \nabla_{\mathbf{y}} \eta_{\omega}^0 - \partial_{x_i x_j}^2 \hat{u}_0^E w_j + \partial_{x_i} \hat{u}_1^E) n_i & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.26)$$

Toujours en exploitant la linéarité, nous pouvons écrire

$$u_2^E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{x_i x_j}^2 \hat{u}_0^E(\mathbf{x}) \theta_{ij}(\mathbf{y}) + \partial_{x_i} \hat{u}_1^E(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{y}) + \omega^2 \hat{u}_0^E(\mathbf{x}) \gamma_{\omega}^0(\mathbf{y}) + \hat{u}_2^E(\mathbf{x}), \quad (10.27)$$

où \hat{u}_2^E est une fonction de la variable lente \mathbf{x} uniquement correspondant à la partie moyennée de u_2^E sur Ω^E , où les $\theta_{\ell m}$ sont les d^2 solutions des d^2 problèmes de cellules

$$\begin{cases} \theta_{ij} \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega^E), \\ -\partial_{y_i y_i}^2 \theta_{\ell m} = 2\partial_{y_m} w_{\ell} + \delta_{\ell m} - a^* \ell m & \text{sur } \Omega^E, \\ \partial_{y_i} \theta_{\ell m} n_i = -w_{\ell} n_m & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (10.28)$$

et où γ_{ω} est la solution du problème de cellule

$$\begin{cases} \gamma \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega^E), \\ -\partial_{y_i y_i}^2 \gamma_{\omega} = 1 - \mu^*(\omega) & \text{sur } \Omega^E, \\ \partial_{y_i} \gamma_{\omega} n_i = \partial_{y_i} \eta_{\omega}^0 n_i & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (10.29)$$

10.1.2.4 Développement à l'ordre 3

Exactement de la même manière que nous avons procédé pour l'homogénéisation classique, considérer la relation de compatibilité de la quatrième équation de (10.5) permet de montrer que \hat{u}_1^E est solution de la même équation homogénéisée (10.23) que \hat{u}_0^E :

$$-\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (A^* \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_1^E) - \omega^2 \mu^*(\omega) \hat{u}_1^E = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^d. \quad (10.30)$$

Remarque 10.6. En toute rigueur nous avons également des termes au second membre faisant intervenir des dérivées d'ordre 1 et 3 de \hat{u}_0^E dans l'équation ci-dessus, mais nous pouvons montrer comme cela a été fait grâce à la proposition 6.7 pour l'homogénéisation classique que ces termes sont en fait nuls.

10.1.3 Un coefficient homogénéisé négatif

Nous avons considéré $\text{Im } \omega^2 > 0$ pour des raisons essentiellement techniques (voir la remarque 6.2). Tous les calculs formels que nous avons effectués sont encore valables lorsque $\text{Im } \omega^2 = 0$ et nous allons considérer que nous sommes dans ce cas là dans la suite car il s'agit là du cas le plus difficile et le plus intéressant en ce qui concerne le coefficient homogénéisé $\mu^*(\omega)$.

Il existe des plages de fréquences ω sur lesquelles le coefficient homogénéisé $\mu^*(\omega)$ prend des valeurs négatives, bien que le coefficient correspondant dans l'équation exacte (10.3) soit égal à 1. Commençons par étudier si (10.15) est bien posé et donner une expression plus explicite de la solution η_{ω}^0 de (10.15) quand elle existe. En considérant $\zeta := \eta_{\omega}^0 - 1$, ce problème est équivalent à

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 \zeta = \omega^2 \zeta + \omega^2 & \text{sur } \Omega^I, \\ \zeta = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.31)$$

Notons $(\lambda_n \phi_n)_{n \geq 1}$ la suite des éléments propres comptés avec multiplicité du problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 \phi_n = \lambda_n \phi_n & \text{sur } \Omega^I, \\ \phi_n = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.32)$$

et notons $\sigma := \cup_n \lambda_n$ l'ensemble des valeurs propres. En supposant que ζ est dans $L^2(\Omega^I)$, nous avons la décomposition

$$\zeta = \sum_{n \geq 1} \langle \zeta, \phi_n \rangle_{L^2(\Omega^I)} \phi_n, \quad (10.33)$$

et en injectant celle-ci dans l'équation volumique de (10.31) et en prenant le produit scalaire L^2 avec ϕ_m , nous obtenons

$$\lambda_m \langle \zeta, \phi_m \rangle_{L^2(\Omega^I)} = \omega^2 \langle \zeta, \phi_m \rangle_{L^2(\Omega^I)} + \omega^2 \langle \phi_m \rangle_I, \quad (10.34)$$

($\langle \phi_n \rangle_I = \langle 1, \phi_n \rangle_{L^2(\Omega^I)}$ est la moyenne de ϕ_n sur Ω^I). Nous devons alors distinguer deux cas. Si $\omega^2 \notin \sigma$, alors nous obtenons

$$\langle \zeta, \phi_m \rangle_{L^2(\Omega^I)} = \frac{\omega^2 \langle \phi_m \rangle_I}{\lambda_m - \omega^2}. \quad (10.35)$$

Si maintenant $\omega^2 = \lambda_m \in \sigma$, nous obtenons $\langle \phi_m \rangle_I = 0$, c'est-à-dire que ϕ_m est à moyenne nulle. Cela montre que (10.31) est résoluble si, et seulement si, ω^2 n'est égal à aucun des λ_n ou si $\omega^2 = \lambda_n$ avec la fonction propre ϕ_n associée ayant une moyenne nulle. Dans le premier cas, (10.31) admet une unique solution et dans le second ζ est défini modulo une fonction propre ϕ_n à moyenne nulle associée à λ_n , cependant $\langle \zeta \rangle_I$ est bien uniquement déterminée dans ce cas.

Remarque 10.7. Bien entendu, si nous avons $\text{Im } \omega^2 > 0$, le problème (10.31) serait toujours bien posé.

Supposons que $\omega^2 \notin \sigma$. Nous pouvons alors donner l'expression explicite de ζ et donc de η_ω^0 :

$$\eta_\omega^0(\mathbf{y}) = 1 - \omega^2 \sum_{n \geq 1} \frac{\langle \phi_n \rangle_I}{\omega^2 - \lambda_n} \phi_n(\mathbf{y}). \quad (10.36)$$

En prenant la moyenne sur Ω^I , nous obtenons alors l'expression du coefficient homogénéisé $\mu^*(\omega)$:

$$\mu^*(\omega) = \langle 1 \rangle_E + \langle \eta_\omega^0 \rangle_I = 1 - \omega^2 \sum_{n \geq 1} \frac{\langle \phi_n \rangle_I^2}{\omega^2 - \lambda_n}. \quad (10.37)$$

Comme nous l'avons remarqué précédemment, si $\omega^2 = \lambda_m \in \sigma$ et que la fonction propre ϕ_n correspondante est à moyenne nulle, alors ζ n'est définie qu'à un facteur $C\phi_n$ près mais sa moyenne $\langle \zeta \rangle_I$ ne sera pas affectée. Nous pouvons donc étendre la définition de la fonction $\mu^*(\omega)$ de la façon suivante. Notons N l'ensemble des indices n tels que la fonction propre ϕ_n associée à la valeur propre λ_n ne soit pas à moyenne nulle et supposons que $\omega^2 \notin \{\lambda_n : n \in N\}$. Nous avons alors

$$\mu^*(\omega) = 1 - \omega^2 \sum_{n \in N} \frac{\langle \phi_n \rangle_I^2}{\omega^2 - \lambda_n}. \quad (10.38)$$

Remarque 10.8. Le fait qu'une fonction propre soit à moyenne nulle n'est pas stable vis-à-vis d'une petite perturbation de Ω^I (voir par exemple [117] et les références que cet article contient).

Le coefficient $\mu^*(\omega)$ prend des valeurs négatives sur une infinité de bande de fréquences (voir la figure 10.2). En effet, nous avons $\mu^*(\lambda_n^2, \lambda_{n+1}^2) = \mathbb{R}$. Nous pouvons en donner une expression complètement explicite en dimension $d = 2$ dans le cas où Ω^I est une boule de rayon $R \in (0, 1/2) \subset \mathbb{R}^2$. Dans ce cas, si $\omega^2 \notin \sigma$, c'est-à-dire que ωR n'est pas un zéro de J_0 , où J_0 est la première fonction de Bessel de première espèce, alors η_ω^0 est une fonction radiale dépendant uniquement de $r := |\mathbf{y}|$ donnée par

$$\eta_\omega^0 = \frac{J_0(\omega r)}{J_0(\omega R)}. \quad (10.39)$$

En utilisant le fait que $\langle \eta_\omega^0 \rangle_I = \omega^{-2} \langle -\Delta \eta_\omega^0, 1 \rangle_I = -\omega^{-2} \int_\Gamma \nabla \eta_\omega^0 \cdot \mathbf{n}$, nous obtenons

$$\mu^*(\omega) = -\frac{2\pi J_0'(\omega R)}{\omega J_0(\omega R)}. \quad (10.40)$$

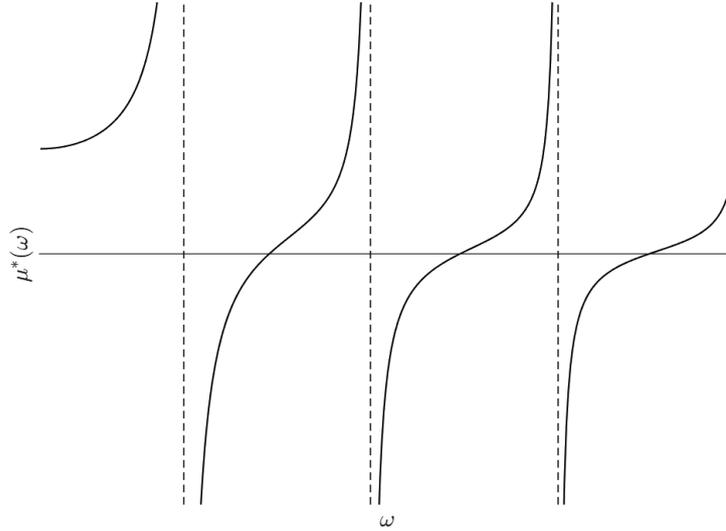


FIGURE 10.2 – Allure typique du coefficient homogénéisé $\mu^*(\omega)$ en fonction de ω .

Remarque 10.9. D'un point de vue physique, si a_δ représente l'inverse de la permittivité alors μ^* représente la perméabilité effective. Nous voyons donc que l'homogénéisation de ce milieu a créé un magnétisme artificiel puisque pour le modèle exact la perméabilité est égale à 1. De plus, l'expression (10.38) est à rapprocher de celle du modèle de Lorentz (1.32). L'homogénéisation à fort contraste permet donc de justifier mathématiquement ce genre de modèle. Cependant, la configuration que nous avons choisie ne permet pas d'avoir une permittivité négative, puisque la matrice homogénéisée A^* que nous avons obtenue est symétrique définie positive. Il faudrait alors se tourner vers des milieux et des géométries plus complexes et considérer les équations de Maxwell pour obtenir à la fois une permittivité et une perméabilité négative (voir par exemple [41, 145, 146]).

10.1.4 Le problème de la convergence

La question centrale est alors de savoir si la solution u_δ du problème exacte (10.3) converge vers la solution du problème homogénéisé (10.23). La principale difficulté tient au fait que dans Ω^I le premier terme du développement u_0^I donné par (10.14) fait intervenir la variable rapide \mathbf{y} . En particulier, lorsque δ tend vers 0, la solution u_δ oscille de plus en plus fortement dans les inclusions. Comme ce phénomène intervient dès l'ordre 0, l'amplitude de ces oscillations ne diminue pas avec δ (contrairement aux oscillations dues aux solutions w_i des problèmes de cellules intervenant à l'ordre 1 pour l'homogénéisation classique). Cela semble un obstacle à des convergences en norme de la solution exacte vers la solution homogénéisée. Notamment, il n'existe pas à notre connaissance des résultats sur la convergence forte en norme H^1 ou même L^2 (mentionnons cependant l'article récent [56] qui montre une convergence en $\mathcal{O}(\delta)$ de la résolvante pour la norme d'opérateur). Ce point resterait à éclaircir et à étudier plus en profondeur mais nous n'avons pas poursuivi de recherche dans cette direction. Mentionnons également que les simulations numériques sont délicates pour le calcul de la solution exacte, le fait que le coefficient a dégénère en $\mathcal{O}(\delta^2)$ fait exploser les constantes dans les estimations de convergence des méthodes numériques (comme les éléments finis) et la convergence est alors très mauvaise.

Il est cependant possible de montrer des résultats de convergence faible [39, 245]. Par exemple, en dimension $d = 2$, si nous considérons un domaine $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ tel que a_δ soit donné par (10.2) sur Ω et vaille 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$, une onde incidente u^i et le problème de diffraction

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_\delta \nabla u_\delta) - \omega^2 u_\delta = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2, \\ u_\delta - u^i \text{ est sortante} & \text{quand } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (10.41)$$

alors nous avons le résultat suivant :

Théorème 10.10 (voir [39]). *Supposons que $\omega^2 \notin \{\lambda_n : n \in N\}$. Alors la suite de solutions u_δ du problème (10.41) est uniformément bornée dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et converge double-échelle vers u_0 lorsque δ tends vers 0, où u_0 est définie par*

$$u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} u(\mathbf{x})\eta_\omega^0(\mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \end{cases} \quad (10.42)$$

où η_ω^0 est définie par (10.15) (que nous prolongeons par 1 en dehors de Ω_δ^I) et où u est l'unique solution dans $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (Au) - \omega^2 \mu(\omega)u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2, \\ u - u^i \text{ est sortante} & \text{quand } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (10.43)$$

où A vaut A^* définie par (10.24) sur \mathcal{O} et I_2 ailleurs et où $\mu(\omega)$ vaut $\mu^*(\omega)$ définie par (10.38) sur \mathcal{O} et 1 ailleurs.

10.2 Extension des développements asymptotiques

Le but de cette section est d'étendre, de manière formelle et prospective et sans aucune justification mathématique rigoureuse, les calculs qui ont été effectués au chapitre 6 pour l'homogénéisation classique à l'homogénéisation fort contraste.

10.2.1 Le problème de transmission

Nous considérons le même problème de transmission que dans les chapitres précédents, sauf que les coefficients périodiques dans Ω^+ auront le comportement à fort contraste décrit à la section précédente.

Plus précisément, nous considérons toujours les deux demi-plans $\Omega^\pm : \mathbb{R}_\pm^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ séparés par l'interface $\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}$. Le demi-plan Ω^- est rempli d'un milieu homogène, toujours représenté par une constante $a_0 > 0$. Le demi-plan Ω^+ est rempli du milieu à fort contraste décrit à la section 10.1.1 (avec $d = 2$). Nous considérons donc une fonction a_δ qui est constante égale à 1 sur Ω^- et qui est définie par (10.2) sur Ω^+ .

Remarque 10.11. Nous avons pris a égale à 1 dans Ω^- qui coïncide donc avec la valeur de a en dehors des inclusions dans Ω_δ^E . Cela vise à simplifier les calculs, mais nous pourrions sans problème étendre au cas où a vaut une valeur constante $a_0 \neq 1$ dans Ω^- . De même, la remarque 10.1 est toujours valable ici.

Nous nous intéressons alors à l'homogénéisation du problème

$$-\nabla \cdot (a_\delta \nabla u_\delta) - \omega^2 u_\delta = f, \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad (10.44)$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ est une fréquence telle que $\text{Im } \omega^2 > 0$ et où $f \in L^2(\mathbb{R})$ est un terme source à support compact inclus dans Ω^- .

10.2.2 Champs lointains et champ proche

Nous suivons alors la démarche du chapitre 7. Nous effectuons des développements asymptotiques différents dans les trois zones qui sont exactement les mêmes que précédemment (voir la figure 7.1).

10.2.2.1 Champ lointain homogène

Nous faisons le même *ansatz* que (7.2) :

$$u_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k u_k^-(\mathbf{x}), \quad u_k^- \in H^1(\Omega^-). \quad (10.45)$$

En l'injectant dans (10.44) et en identifiant les puissances de δ , nous trouvons exactement les mêmes équations que (7.3) :

$$-\Delta u_k^- - \omega^2 u_k^- = \begin{cases} f & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \geq 1. \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_-. \quad (10.46)$$

Bien entendu, il manque des conditions sur Γ que nous donnerons plus loin.

10.2.2.2 Champ lointain périodique

Dans Ω^+ , nous allons bien entendu utiliser le même double *ansatz* que dans la section 10.1.2 :

$$u_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^E(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta) & \text{sur } \Omega_\delta^E, \\ \sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^I(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta) & \text{sur } \Omega_\delta^I, \end{cases} \quad (10.47)$$

où les u_n^E et u_n^I sont des fonctions qui sont Y -périodiques par rapport à la variable rapide $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\delta$. Les termes u_n^E et u_n^I vérifient donc les équations décrites à la section 10.1.2.

10.2.2.3 Champ proche

En reprenant les idées du chapitre 7 et ce qui a été fait à la section (10.1.2), il est naturel de proposer un *ansatz* pour le champ proche de la forme

$$u_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \delta^n U_n^E \left(x_2, \frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta} \right) & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\delta^I, \\ \sum_{n \geq 0} \delta^n U_n^I \left(x_2, \frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta} \right) & \text{sur } \Omega_\delta^I, \end{cases} \quad (10.48)$$

où les U_n^E et U_n^I sont des fonctions qui sont 1-périodiques par rapport à la troisième variable $y_2 = x_2/\delta$ mais pas par rapport à la deuxième variable $y_1 = x_1/\delta$.

Contrairement aux termes de champ proche $U_n(x_2, \cdot)$ qui vivent dans la bande $B = \mathbb{R} \times (0, 1)$ pour $x_2 \in \mathbb{R}$, les termes $U_n^E(x_2, \cdot)$ vivent dans B^E , la bande privée des inclusions :

$$B^E := B \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\Omega^I + n\mathbf{e}_1) \right), \quad (10.49)$$

et les termes $U_n^I(x_2, \cdot)$ dans les inclusions $B^I := B \setminus \overline{B^E}$. Nous notons $\Gamma_B := \partial B^I$ les frontières des inclusions.

En injectant l'*ansatz* (10.48) dans (10.44), nous obtenons les équations vérifiées par les différents termes de champ proche : pour les termes U_n^E , celles-ci sont posées sur B^E (avec $x_2 \in \mathbb{R}$ comme paramètre) :

$$\left| \begin{array}{l} -\partial_{y_i y_i}^2 U_0^E(x_2, \mathbf{y}) = 0, \\ -\partial_{y_i y_i}^2 U_1^E(x_2, \mathbf{y}) = 2\partial_{x_2 y_2}^2 U_0^E(x_2, \mathbf{y}), \\ -\partial_{y_i y_i}^2 U_2^E(x_2, \mathbf{y}) = 2\partial_{x_2 y_2}^2 U_1^E(x_2, \mathbf{y}) + (\partial_{x_2}^2 + \omega^2)U_0^E(x_2, \mathbf{y}), \\ \vdots \end{array} \right. \quad (10.50)$$

et pour les termes U_n^I , celles-ci sont posées sur B^I (avec $x_2 \in \mathbb{R}$ comme paramètre) :

$$\left| \begin{array}{l} -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)U_0^I = 0, \\ -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)U_1^I = 2\partial_{x_2}^2 U_0^I, \\ -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)U_2^I = 2\partial_{x_2}^2 U_1^I + \partial_{x_2}^2 U_0^I, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (10.51)$$

Nous avons également les conditions de transmissions

$$U_n^E(x_2, \mathbf{y}) = U_n^I(x_2, \mathbf{y}), \quad \text{pour } \mathbf{y} \in \Gamma_B, \quad (10.52)$$

ainsi que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{y_i} U_0^E(x_2, \mathbf{y}) n_i = 0, \\ \partial_{y_i} U_1^E(x_2, \mathbf{y}) n_i = -\partial_{x_2} U_0^E(x_2, \mathbf{y}) n_2, \\ \partial_{y_i} U_2^E(x_2, \mathbf{y}) n_i = -\partial_{x_2} U_1^E(x_2, \mathbf{y}) n_2 + \partial_{y_i} U_0^I(x_2, \mathbf{y}) n_i, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (10.53)$$

10.2.3 Conditions de raccord

Les conditions de raccord formelles se traitent exactement de la même façon que lors de la section 7.1.5 du chapitre 7.

Pour les termes de champ lointain homogène dans Ω^- avec x_1 proche de Γ nous avons

$$u_0^-(\mathbf{x}) + \delta u_1^-(\mathbf{x}) + \delta^2 u_2^-(\mathbf{x}) = q_0^-(x_2) + \delta q_1^-(x_2, y_1) + \delta^2 [q_2^-(x_2, y_1) + \mu_2^-(x_2, y_1)] + \mathcal{O}(\delta^3), \quad (10.54)$$

où nous avons posé

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0^-(x_2) := u_0^-|_{\Gamma}(x_2), \\ q_1^-(x_2, y_1) := u_1^-|_{\Gamma}(x_2) + y_1 \partial_{x_1} u_0^-|_{\Gamma}(x_2), \\ q_2^-(x_2, y_1) := u_2^-|_{\Gamma}(x_2) + y_1 \partial_{x_1} u_1^-|_{\Gamma}(x_2) \\ \mu_2^-(x_2, y_1) := \frac{y_1^2}{2} \partial_{x_1 x_1}^2 u_0^-|_{\Gamma}(x_2). \end{array} \right. \quad (10.55)$$

Pour les termes de champ lointain périodique nous avons

$$u_0^E(\mathbf{x}) + \delta u_1^E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta^2 u_2^E(\mathbf{x}) = q_0^E(x_2) + \delta [q_1^E(x_2, \mathbf{y}) + \mu_1^E(\mathbf{y}, x_2)] + \delta^2 [q_2^+(x_2, \mathbf{y}) + \mu_2^E(\mathbf{y}, x_2)], \quad (10.56)$$

où nous avons posé

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0^E(x_2) := \hat{u}_0^E|_{\Gamma}(x_2), \\ q_1^E(x_2, \mathbf{y}) := \hat{u}_1|_{\Gamma}(x_2) + (y_1 + w_1(\mathbf{y})) \partial_{x_1} \hat{u}_0^E|_{\Gamma}(x_2), \\ \mu_1^E(x_2, \mathbf{y}) := \partial_{x_2} \hat{u}_0^E|_{\Gamma}(x_2) w_2(\mathbf{y}), \\ q_2^E(x_2, \mathbf{y}) := \hat{u}_2^E|_{\Gamma}(x_2) + (y_1 + w_1(\mathbf{y})) \partial_{x_1} \hat{u}_1^E|_{\Gamma}(x_2), \\ \mu_2^E(\mathbf{y}, x_2) := w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_2} \hat{u}_1^E|_{\Gamma}(x_2) + \left[\frac{y_1^2}{2} + y_1 w_1(\mathbf{y}) + \theta_{11}(\mathbf{y}) \right] \partial_{x_1 x_1}^2 \hat{u}_0^+|_{\Gamma} \\ \quad + (2\theta_{12}(\mathbf{y}) + y_1 w_2(\mathbf{y})) \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^E|_{\Gamma} + \theta_{22}(\mathbf{y}) \partial_{x_2 x_2}^2 \hat{u}_0^E|_{\Gamma} \\ \quad + \omega^2 \hat{u}_0^E(\mathbf{x}) \gamma_{\omega}^0(\mathbf{y}). \end{array} \right. \quad (10.57)$$

Ainsi, les conditions de raccord formelles sont

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} q_0^-(x_2), \\ U_1(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} q_1^-(x_2, y_1), \\ U_2(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} q_2^-(x_2, y_1) + \mu_2^-(x_2, y_1), \end{array} \right. \quad (10.58)$$

où q_0^- , q_1^- , q_2^- et μ_2^- sont définies par (10.55), et

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} q_0^E(x_2), \\ U_1(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} q_1^E(x_2, y_1) + \mu_1^E(\mathbf{y}, x_2) \\ U_2(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} q_2^E(x_2, y_1) + \mu_2^E(\mathbf{y}, x_2), \end{array} \right. \quad (10.59)$$

où q_0^+ , q_1^+ , μ_1^+ , q_2^+ et μ_2^+ sont définies par (10.57).

10.2.4 Construction des premiers termes de champ proche

10.2.4.1 Cadre fonctionnel pour les problèmes de champ proche

Cadre fonctionnel pour les équations (10.50) Comme au chapitre 7, nous devons nous donner un cadre fonctionnel qui autorise les comportements croissants pour les termes U_n^E quand y_1 tend vers $\pm\infty$. Nous définissons alors $V_+^1(B^E)$ exactement de la même manière que $V_+^1(B)$ est défini (en remplaçant simplement B par B^E). Nous avons également besoin d'introduire l'espace $V_+^{1/2}(\Gamma_B)$, l'espace des traces des fonctions de $V_+^1(B)$ sur Γ_B .

Nous étudions alors des problèmes du type : trouver $U \in V_+^1(B^E)$ tel que

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 U = g & \text{dans } B^E, \\ \partial_{y_i} U n_i = h & \text{sur } \Gamma_B, \end{cases} \quad (10.60)$$

où $g \in V_+^1(B^E)^*$ et $h \in V_+^{1/2}(\Gamma_B)^*$ sont donnés.

Nous introduisons également l'espace $W(B^E)$, analogue de l'espace $W(B)$, défini de la façon suivante

$$W(B) := \{u \in V_+^1(B^E) : \partial_{y_i y_i}^2 u \in V_+^1(B^E)^* \text{ et } \partial_{y_i} u n_i \in V_+^{1/2}(\Gamma_B)^*\}. \quad (10.61)$$

Nous conjecturons alors le résultat suivant, analogue du théorème 7.25 dans le cas du fort contraste.

Conjecture 10.12. *Soit $U \in W(B^E)$. Alors il existe quatre constantes $\ell_D^\pm(U)$ et $\ell_N^\pm(U)$ décrivant le comportement de U quand y_1 tend vers $\pm\infty$:*

- pour y_1 tendant vers $-\infty$,

$$U(y_1, y_2) = \ell_D^-(U) + \ell_N^-(U)y_1 + \text{terme évanescent}, \quad (10.62)$$

- pour y_1 tendant vers $+\infty$,

$$U(y_1, y_2) = \ell_D^+(U) + \ell_N^+(U)(y_1 + w_1^*(\mathbf{y}))/a_{11}^* + \text{terme évanescent}, \quad (10.63)$$

où a_{11}^* est le coefficient homogénéisé défini par (10.24) et où w_1 est la solution du problème de cellule (10.18).

À partir de là, il est possible de dérouler toute la théorie développée au chapitre 7. Nous pouvons notamment conjecturer que la formule de Green (7.99) est toujours valable, que les conditions de compatibilité (7.108) sont toujours vérifiées et que les solutions de l'équation homogène

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 U = 0 & \text{dans } B^E, \\ \partial_{y_i} U n_i = 0 & \text{sur } \Gamma_B, \end{cases} \quad (10.64)$$

$-\partial_{y_i y_i}^2 U = 0$ forment un espace de dimension 2, engendré par 1 et la fonction \mathcal{N}^E défini comme l'unique solution dans $V_+^1(B^E)$ de (10.64) telle que $\langle \ell_D(\mathcal{N}^E) \rangle = 0$ et $\langle \ell_N(\mathcal{N}^E) \rangle = 1$. Enfin, nous pouvons conjecturer l'analogie du théorème d'existence-unicité 7.30.

Conjecture 10.13. *Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $g \in V_+^1(B^E)^*$ et $h \in V_+^{1/2}(\Gamma_B)^*$, il existe une unique fonction $u \in V_+^1(B^E)$ satisfaisant*

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 U = g & \text{dans } B^E, \\ \partial_{y_i} U n_i = h & \text{sur } \Gamma_B, \end{cases} \quad (10.65)$$

ainsi que

$$\langle \ell_D(u) \rangle = \alpha \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(u) \rangle = \beta. \quad (10.66)$$

Cadre fonctionnel pour les équations (10.51) Pour les termes de champ proche U_n^I , puisque B^I est constitué d'inclusions déconnectées les unes des autres, il suffit simplement de considérer comme cadre fonctionnel

$$V_I := \bigcup_{n=1}^{+\infty} H^1(\Omega^I + n\mathbf{e}_1). \quad (10.67)$$

Ainsi, nous avons des problèmes du type : trouver $U \in V_I$ tel que

$$\begin{cases} -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)U = g & \text{dans } B^I, \\ U = h & \text{sur } \Gamma_B, \end{cases} \quad (10.68)$$

où $g \in (V_I)^*$ et $h \in V_+^{1/2}(\Gamma_B)^*$ sont donnés. Nous savons que ce problème est bien posé si, et seulement si, ω^2 n'est pas égale à l'une des valeurs propres du problème (10.32).

10.2.4.2 Construction des termes

Ordre 0 D'après (10.50) et (10.53), nous cherchons donc $U_0^E \in V_+^1(B^E)$ solution de l'équation homogène (10.64) et ayant les comportements à l'infini

$$\begin{cases} U_0^E(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} u_0^-|_{\Gamma}(x_2), \\ U_0^E(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} \hat{u}_0^E|_{\Gamma}(x_2). \end{cases} \quad (10.69)$$

d'après (10.58) et (10.59). En suivant la même démarche que dans le chapitre 7, section (7.3.1), cela nous donne qu'un tel U_0^E existe si, et seulement si,

$$u_0^-|_{\Gamma}(x_2) = \hat{u}_0^E|_{\Gamma}(x_2). \quad (10.70)$$

Si c'est le cas, U_0^E est donnée par

$$U_0^E(x_2, \mathbf{y}) = u_0|_{\Gamma}(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in B^E. \quad (10.71)$$

avec $u_0|_{\Gamma} := u_0^E|_{\Gamma} = u_0^-|_{\Gamma}$.

Par conséquent, U_0^I , d'après (10.51) (10.52), vérifie

$$\begin{cases} -(\partial_{y_i y_i}^2 + \omega^2)U_0^I = 0 & \text{dans } B^I, \\ U_0^I = u_0|_{\Gamma} & \text{sur } \Gamma_B, \end{cases} \quad (10.72)$$

Ce problème admet une unique solution dans V^I si, et seulement si, ω^2 n'est pas égale à l'une des valeurs propres du problème (10.32). Dans ce cas, U_0^I est explicitement donnée par

$$U_0^I(x_2, \mathbf{y}) = u_0|_{\Gamma}(x_2)\eta_{\omega}^0(\mathbf{y}), \quad x_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in B^I, \quad (10.73)$$

où η_{ω}^0 est l'unique solution de (10.15) (voir (10.36) pour une représentation explicite).

Ordre 1 D'après (10.50), (10.53) et (10.71), nous cherchons U_1^E solution de

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 U_1^E = 0 & \text{dans } B^E, \\ \partial_{y_i} U_1^E = -u_0|_{\Gamma}(x_2)n_i & \text{sur } \Gamma_B. \end{cases} \quad (10.74)$$

et ayant les comportements à l'infini

$$\begin{cases} U_1^E(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow -\infty}{\sim} u_1^-|_{\Gamma}(x_2) + y_1 \partial_{x_1} u_0^-|_{\Gamma}(x_2), \\ U_1^E(x_2, y_1, y_2) \underset{y_1 \rightarrow +\infty}{\sim} \hat{u}_1^E|_{\Gamma}(x_2) + (y_1 + w_1(\mathbf{y})) \partial_{x_1} \hat{u}_0^E|_{\Gamma}(x_2) + \partial_{x_2} u_0|_{\Gamma}(x_2) w_2(\mathbf{y}). \end{cases} \quad (10.75)$$

En suivant la même démarche que dans le chapitre 7, section (7.3.2), nous devons introduire un profil $\mathcal{P}_1^E \in V_+^1(B^E)$ défini comme l'unique solution dans $V_+^1(B^E)$ de

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 \mathcal{P}_1^E = \partial_{y_i y_i}^2 (\psi^+ w_2) & \text{dans } B^E, \\ \partial_{y_i} U n_i = 0 & \text{sur } \Gamma_B. \end{cases} \quad (10.76)$$

vérifiant $\langle \ell_D(\mathcal{P}_1^E) \rangle = 0$ et $\langle \ell_N(\mathcal{P}_1^E) \rangle = 0$, où ψ^+ est la fonction de troncature définie par (7.27) et où w_2 est la solution du problème de cellule (10.18). Il est également possible de montrer que $[\ell_N(\mathcal{P}_1^E)] = -a_{12}^*$, où a_{11}^* est le coefficient homogénéisé défini par (10.24).

En utilisant cette fonction profil, nous pouvons montrer qu'il existe un tel unique $U_1^E \in V_+^1(B^E)$ solution de (10.74) et vérifiant (10.75) si, et seulement si,

$$(A^* \nabla \hat{u}_0^E) \cdot \mathbf{n} - a_0 \nabla u_0^- \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (10.77)$$

et

$$\hat{u}_1^E|_\Gamma - u_1^-|_\Gamma = C_1 \frac{(A^* \nabla \hat{u}_0^E) \cdot \mathbf{n} + a_0 \nabla u_0^- \cdot \mathbf{n}}{2} + C_2 \partial_{x_2} u_0|_\Gamma, \quad (10.78)$$

avec $C_1 := [\ell_D(\mathcal{N})]$ et $C_2 := [\ell_D(\mathcal{P}_1)] - \frac{a_{12}^*}{2} [\ell_D(\mathcal{N})]$. Dans ce cas, U_1^E est explicitement donnée par

$$U_1^E(x_2, \mathbf{y}) = \alpha_1(x_2) + \beta_1(x_2) \mathcal{N}(\mathbf{y}) + (\psi^+(y_1) w_2(\mathbf{y}) + \mathcal{P}_1^E(\mathbf{y})) \partial_{x_2} u_0|_\Gamma(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in B^E, \quad (10.79)$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{u_1^-|_\Gamma + \hat{u}_1^+|_\Gamma}{2} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \frac{a_0 \partial_{x_1} u_0^-|_\Gamma + a_{11}^* \partial_{x_1} \hat{u}_0^+|_\Gamma}{2}. \quad (10.80)$$

Remarque 10.14. Nous n'allons pas construire U_2^I car nous n'en n'avons pas besoin dans la suite.

Ordre 2 Nous ne rentrons pas dans les détails pour la construction de U_2^E , nous avons déjà vu lors de la construction de U_0^E et U_1^E que la démarche était extrêmement similaire à celle suivie lors du chapitre 7. Contentons-nous de donner l'une des conditions d'existence de U_2^E qui va nous donner la dernière condition de transmission dont nous aurons besoin :

$$(A^* \nabla \hat{u}_1^+) \cdot \mathbf{n} - a_0 \nabla u_1^- \cdot \mathbf{n} = C_3 \partial_{x_2} \frac{(A^* \nabla \hat{u}_0^+) \cdot \mathbf{n} + a_0 \nabla u_0^- \cdot \mathbf{n}}{2} + C_4 \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma + \omega^2 C_5(\omega) u_0|_\Gamma, \quad (10.81)$$

où les C_j sont des constantes définies par

$$\begin{cases} C_3 := [\ell_N(\mathcal{P}_2^1)] + a_{12}^* \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{2}, \\ C_4 := [\ell_N(\mathcal{P}_2^2)] + a_{12}^* \frac{[\ell_D(\mathcal{P}_1)]}{2} - (a_{12}^*)^2 \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{4} + a_{12}^* \frac{[\ell_N(\mathcal{P}_2^1)]}{2}, \\ C_5(\omega) := [\ell_N(\mathcal{P}_2^3)] + [\ell_N(\mathcal{S}(\omega))], \end{cases} \quad (10.82)$$

où les profils \mathcal{P}_2^j , $j \in \{1, 2, 3\}$, sont des profils similaires à \mathcal{P}_1 définie par (10.76) que nous ne détaillons pas et où le profil $(\mathcal{S}(\omega))$ est défini comme l'unique solution dans $V_+^1(B^E)$ de

$$\begin{cases} -\partial_{y_i y_i}^2 \mathcal{S}(\omega) = \partial_{y_i y_i}^2 \left[\psi^+ \left(\gamma_\omega^0 + \omega^2 (\mu^*(\omega) - 1) \frac{y_1^2/2 + y_1 w_1 + \theta_{11}}{a_{11}^*} \right) \right] & \text{dans } B^E, \\ \partial_{y_i} \mathcal{S}(\omega) n_i = 0 & \text{sur } \Gamma_B. \end{cases} \quad (10.83)$$

Nous voyons que ce profil dépend de manière non linéaire de ω , au contraire de tous les profils que nous avons rencontrés jusque ici qui n'en dépendent pas.

10.2.5 Construction des modèles approchés

Comme nous l'avons fait à la section 7.4 du chapitre 7, nous pouvons maintenant donner les équations vérifiées par les termes de champ lointain.

10.2.5.1 Modèle approché d'ordre 0

Nous savons que le terme de champ lointain homogène u_0^- est solution de (10.46) et que le terme de champ lointain périodique \hat{u}_0^+ est solution de l'équation homogénéisée (10.23). En ajoutant les conditions de transmission (10.70) et (10.77), nous obtenons le problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_0) - \omega^2 \mu_0^*(\omega) u_0 = f, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [u_0]_\Gamma = 0, \\ [A_0^* \nabla u_0]_\Gamma = 0. \end{cases} \quad (10.84)$$

où

$$A_0^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} I_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-, \\ A^* & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+, \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu_0^*(\omega)(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-, \\ \mu^*(\omega) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+. \end{cases} \quad (10.85)$$

Cela détermine donc bien les termes de champ lointain à l'ordre 0 de manière unique, avec $u_0^- = u_0|_{\Omega^-}$ et $\hat{u}_0^E = u_0|_{\Omega^+}$.

Le problème (10.84) est à rapprocher du problème (7.162) et fait intervenir les conditions classiques de transmission (continuité des traces et des flux au niveau de l'interface), comme nous pouvions nous y attendre.

10.2.5.2 Modèle approché d'ordre 1

En raisonnant de même à l'ordre 1, nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_0^* \nabla u_1) - \omega^2 \mu_0^*(\omega) u_1 = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [u_1]_\Gamma = C_1 \langle A_0^* \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma + C_2 \partial_{x_2} u_0|_\Gamma, \\ [A_0^* \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = C_3 \partial_{x_2} \langle A_0^* \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma + C_4 \partial_{x_2 x_2}^2 u_0|_\Gamma + \omega^2 C_5(\omega) u_0|_\Gamma. \end{cases} \quad (10.86)$$

Cela détermine donc bien les termes de champ lointain à l'ordre 1 de manière unique, avec $u_1^- = u_1|_{\Omega^-}$ et $\hat{u}_1^E = u_1|_{\Omega^+}$.

Le modèle approché d'ordre 1 (10.86) est bien entendu extrêmement proche du modèle (7.163), la seule différence étant le fait que la constante C_5 dépend maintenant de la fréquence ω alors qu'elle n'en dépendait pas dans le cas de l'homogénéisation classique. À l'instar de ce coefficient $\mu^* \omega$, nous faisons la conjecture que cette constante va prendre toutes les valeurs réelles lorsque $\text{Re } \omega^2$ parcourt \mathbb{R}_+ (et bien sûr ne sera pas définie pour $\omega^2 = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$). Cela laisse présager un certain nombre de difficultés qui seront discutées dans la conclusion de ce manuscrit.

10.3 Application des nouvelles conditions de transmission aux problèmes de transmission avec changements de signes

Dans cette ultime section, nous montrons que l'ajout des nouvelles conditions de transmission permet de régulariser les problèmes avec changements de signes du chapitre 0. Plus précisément, considérons le même problème de transmission qu'à la section 0.4.1 avec la géométrie de la figure 4 :

$$\begin{cases} \Delta u^+ + (k^+)^2 u^+ = 0, & \text{dans } (-\infty, 0) \times \Gamma, \\ \Delta u^- + (k^-)^2 u^- = 0, & \text{dans } (0, +\infty) \times \Gamma, \\ u^- - u^+ = f, & \text{on } \{0\} \times \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} u^- - \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^+ = g, & \text{dans } \{0\} \times \Gamma, \\ u^+ \text{ est sortante,} & \text{when } x \rightarrow -\infty, \\ u^- \text{ est rentrante,} & \text{when } x \rightarrow +\infty, \\ + \text{ C.B.} & \text{on } \mathbb{R} \times \partial\Gamma. \end{cases} \quad (10.87)$$

où C.B. veut dire « Conditions aux Bords »(dont le choix est décrit au début de la section 0.4).

Dans les deux sections précédentes, nous avons vu, bien que cela reste encore largement à l'état de conjecture, que la dérivation de conditions de transmission d'ordre élevé reste possible dans le cadre de l'homogénéisation à fort contraste. Nous allons donc considérer le même problème que (10.87) mais avec des conditions de transmissions copiées sur celles du problème (8.46) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^+ + (k^+)^2 u^+ = 0, & \text{dans } (-\infty, 0) \times \Gamma, \\ \Delta u^- + (k^-)^2 u^- = 0, & \text{dans } (0, +\infty) \times \Gamma, \\ u^- - u^+ = C_1 \frac{\partial_{\mathbf{n}} u^- + \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^+}{2} + f, & \text{on } \{0\} \times \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} u^- - \kappa \partial_{\mathbf{n}} u^+ = C_2 \partial_{yy}^2 \frac{u^- + u^+}{2} + C_3 \frac{u^- + u^+}{2} + g, & \text{dans } \{0\} \times \Gamma, \\ u^+ \text{ est sortante,} & \text{quand } x \rightarrow -\infty, \\ u^- \text{ est rentrante,} & \text{quand } x \rightarrow +\infty, \\ + \text{ C.B.} & \text{on } \mathbb{R} \times \partial\Gamma. \end{array} \right. \quad (10.88)$$

En suivant la démarche de la section 0.4.1, nous effectuons les décompositions modales

$$\left\{ \begin{array}{ll} u^+(x, \mathbf{y}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^+ e^{-i\beta_n^+ x} \psi_n(\mathbf{y}), & x < 0, \mathbf{y} \in \Gamma, \\ u^-(x, \mathbf{y}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^- e^{-i\beta_n^- x} \psi_n(\mathbf{y}), & x > 0, \mathbf{y} \in \Gamma, \end{array} \right. \quad (10.89)$$

où les coefficients modaux u_n^+ et u_n^- sont à déterminer. Les conditions de transmission de (10.88) se traduisent alors par une famille de systèmes linéaires qui s'écrivent pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous la forme

$$\mathcal{A}_n \begin{bmatrix} u_n^+ \\ u_n^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_n := \begin{bmatrix} -1 + \frac{i\kappa C_1}{2} \beta_n^+ & 1 + \frac{iC_1}{2} \beta_n^- \\ i\kappa \beta_n^+ + \frac{C_2 \lambda_n}{2} - \frac{C_3}{2} & -i\beta_n^- + \frac{C_2 \lambda_n}{2} - \frac{C_3}{2} \end{bmatrix}, \quad (10.90)$$

où nous avons utilisé le fait que $\partial_{yy}^2 \psi_n = -\lambda_n \psi_n$.

Le déterminant de la matrice \mathcal{A}_n vaut

$$\det \mathcal{A}_n = C_2 \lambda_n \left(\frac{i\kappa C_1}{4} (\beta_n^- + \kappa \beta_n^+) - 1 \right) - i \left(\frac{\kappa C_1 C_3}{4} + 1 \right) (\beta_n^- + \kappa \beta_n^+) + C_3. \quad (10.91)$$

Concentrons-nous sur la situation du cas super-critique $\kappa = -1$ et $k^+ = k^i$. Le cas du chapitre 0, c'est-à-dire pour le cas où $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, le déterminant s'annule pour tous les $\lambda_n > \max((k^-)^2, (k^+)^2)$. Nous avons ici (en utilisant les expressions (0.38))

$$\det \mathcal{A}_n = \frac{C_1 C_2}{2} \lambda_n \sqrt{\lambda_n - (k^+)^2} - C_2 \lambda_n - \frac{C_1 C_3}{2} \sqrt{\lambda_n - (k^+)^2}. \quad (10.92)$$

Il est alors clair que ce déterminant ne va pas s'annuler pour tout λ_n , sauf dans le cas où $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. En particulier, si $C_1 C_2 \neq 0$, nous avons le comportement asymptotique

$$\det \mathcal{A}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} = \frac{C_1 C_2}{2} (\lambda_n)^{3/2}. \quad (10.93)$$

Il semble donc que l'ajout de nouvelles conditions de transmission font que le problème ne présente plus de noyau de dimension infini. Nous n'avons pas eu le temps de pousser plus loin les investigations, nous discutons lors de la conclusion des perspectives qu'ouvrent ce travail préliminaire.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à des problèmes de transmission entre diélectriques et métamatériaux, c'est-à-dire des milieux présentant des propriétés électromagnétiques inhabituelles comme des constantes (permittivité, perméabilité) effectives négatives à certaines fréquences. Ces milieux sont souvent construits comme des assemblages périodiques de micro-structures résonantes et dans ce cas la théorie de l'homogénéisation permet de justifier mathématiquement ces propriétés effectives.

Lors d'un chapitre préliminaire, le chapitre 0, nous avons menés des calculs analytiques pour des problèmes de transmission dont les coefficients changent de signe (par exemple pour modéliser la diffraction d'une inclusion constituée de métamatériaux) en régime harmonique et dans des géométries à variables séparables. Ces calculs révèlent dans des cas dits critiques (quand les rapports des coefficients de part et d'autre de l'interface entre les deux milieux sont égaux à -1) des difficultés mathématiques : les solutions n'ont pas la régularité standard, voire le problème est mal posé.

Dans une première partie, nous avons étudié les répercussions de ces difficultés dans le domaine temporel pour lequel les métamatériaux sont modélisés par des modèles dispersifs (par exemple le modèle de Drude ou celui de Lorentz). Nous avons montré en quoi le modèle de Lorentz est « universel » et nous avons détaillé les propriétés dispersives de ce modèle. D'un point de vue numérique, nous avons proposé un schéma de discrétisation robuste, dans le sens où sa condition CFL ne dépend pas des paramètres physiques du modèle (même CFL que le schéma correspondant au vide). Ce schéma a permis d'illustrer certaines propriétés dispersives du modèle, comme la présence d'ondes inverses ou d'un indice de réfraction négative. Mais la principale difficulté réside dans la construction de conditions absorbantes. La méthode qui a été retenue ici est celle des *Perfectly Matched Layers* (PMLs). Comme les PMLs classiques sont instables pour ces modèles du fait de la présence d'ondes inverses, nous avons proposé une nouvelle classe de PMLs pour lesquelles nous avons mené une analyse de stabilité. Cette dernière a permis de construire des PMLs stables. Elles ont été ensuite utilisées pour simuler le comportement en temps long d'un problème de transmission ; nous avons alors illustré le fait que le principe d'amplitude limite peut être mis en défaut en raison de résonances d'interface.

La deuxième partie de cette thèse a eu pour but de pallier ces phénomènes d'interface en régime harmonique en revenant sur le processus d'homogénéisation classique, pour un milieu dissipatif. Pour des problèmes de transmission, il est connu que les modèles issus de cette méthode perdent en précision du fait de la présence de couches limites à l'interface. Nous avons alors proposé un modèle enrichi au niveau de l'interface. Plus précisément, en combinant la méthode d'homogénéisation double-échelle et celle des développements asymptotiques raccordés, nous avons construit des conditions de transmission non standards faisant intervenir des opérateurs différentiels le long de l'interface de type Laplace-Beltrami.

Le calcul de ces conditions nécessite la résolution de problèmes de cellule et de problèmes non standards posés dans des bandes périodiques infinies, ce qui a nécessité le développement de méthodes numériques spécifiques. Une analyse d'erreur confirme l'amélioration de la précision du modèle et des simulations numériques illustrent l'efficacité de ces nouvelles conditions. Enfin, cette démarche a été reproduite formellement dans le cas des matériaux à fort contraste se comportant comme des métamatériaux. Nous avons montré que ces nouvelles conditions permettent de régulariser le problème de transmission dans les cas critiques.

Perspectives du chapitre 0

Lors du chapitre 0, nous avons précisé un certain nombre de résultats sur les problèmes de transmission avec changements de signes déjà existants en menant des calculs analytiques via une approche modale dans des géométries simples (comme des disques, des boules, des guides d'ondes). Nous avons notamment mis en avant des phénomènes de pertes de régularité des solutions (par rapport au cas classique des problèmes de transmission sans changement de signe) et le fait que ces problèmes peuvent être mal posés.

Cependant, notre analyse est inévitablement limitée à des géométries particulières pour lesquelles la séparation des variables est possible. Pour les domaines plus généraux, quand Ω^- (l'inclusion de matériau négatif) est bornée, seuls des résultats partiels ont été établis (en dimensions supérieures ou égale à trois et pour des domaines Ω^- strictement convexes) en utilisant des techniques d'équations intégrales [183]. Cette approche peut également s'étendre au cas de la dimension 2 dans le cas critique mais semble échouer irrémédiablement lorsque Ω^- n'est pas strictement convexe (en dimension 3) et dans le cas super-critique en dimension 2. Il semble que nous ayons besoin de nouvelles idées pour aborder ces deux cas.

Un autre problème intéressant est de considérer les équations de Maxwell à la place de l'équation de Helmholtz. Lorsque $\kappa = -1$, peu de résultats ont été établis pour ces équations, même pour les interfaces régulières ou des géométries simples. Citons tout de même [30] où les auteurs utilisent des problèmes scalaires (équation de Helmholtz) pour en déduire des résultats sur des problèmes vectoriels (équations de Maxwell). Cette approche pourrait certainement être utilisée dans d'autres situations.

Mentionnons également que d'énormes difficultés apparaissent lorsque l'interface n'est pas régulière (en présence de coins, par exemple). Dans ce cas, pour que les problèmes soient bien posés dans le cadre H^1 classique, les contrastes doivent se trouver en dehors d'un intervalle appelé l'intervalle critique qui contient $\{-1\}$. S'ils se trouvent dans cet intervalle critique (mais sont différents de -1), les solutions présentent un comportement fortement oscillant au voisinage des coins [29, 31]. Il faut alors ajouter des conditions de rayonnement aux coins et changer le cadre fonctionnel pour récupérer le caractère bien posé du problème (comme nous l'avons fait au chapitre 0 pour les cas critiques et super-critiques). Cela est maintenant bien compris en dimension 2, mais, comme mentionné précédemment, pour la dimension 3 (équations de Maxwell), il reste énormément de travaux à effectuer, en raison du fait que les géométries de $3d$ peuvent être beaucoup plus complexes qu'en dimension 2 (il peut y avoir des coins, des arêtes, des pointes coniques, etc.). Enfin, à notre connaissance, le cas où les contrastes sont égaux à -1 lorsque l'interface n'est pas régulière n'a jamais été étudié.

Perspectives de la partie I

Dans un premier temps, nous souhaitons faire un code de calcul plus performant que celui que nous avons pour le moment. Notamment, il serait souhaitable d'utiliser une discrétisation en espace de type éléments finis au lieu de différences finies afin de ne plus être limité à des géométries cartésiennes.

Cela nous permettra alors d'explorer la validité du principe d'amplitude limite dans les géométries que nous avons traitées au chapitre 0 et même d'autres cas plus compliqués, notamment lorsque la courbure n'est plus strictement positive, cas qui n'est pas traité par la théorie pour le moment. Le cas d'interfaces non régulières présentant des coins est aussi un cas très intéressant, qui numériquement risque d'être très

délicat car les solutions sont extrêmement oscillantes au voisinage des coins [29].

Bien que nous ayons réglé le cas des PMLs pour les métamatériaux à indice négatif, il reste énormément de situations où la construction de PMLs stables reste un problème ouvert, par exemple en élastodynamique (même dans dispersion). Le cas des plasmas est également intéressant et mélange les difficultés liées à l'anisotropie et à la dispersion. Notre publication [19] traite du cas simple 2d mais le cas 3d est beaucoup plus difficile et devrait faire l'objet de publications de la part de Maryna Kachanovska (co-auteure de [19]).

Enfin, il serait intéressant de considérer des modèles plus généraux que les modèles de Lorentz, par exemple en considérant des mesures avec une partie continue. Extrêmement peu de résultats sont disponibles sur ce genre de modèles, et encore moins sur la question des PMLs pour ces milieux. Une idée qui semble naturelle est d'approximer la partie continue de la mesure par une somme finie de Dirac afin de se ramener aux cas des modèles de Lorentz mais cela reste à explorer et à étudier rigoureusement.

Perspectives de la partie II

Quelques finalisations

Il reste quelques points que nous n'avons pas eu le temps de traiter et que nous comptons traiter le plus rapidement possible. Au niveau théorique, nous voulons démontrer la conjecture 7.53 qui fournit une erreur optimale en δ^2 . Pour cela, nous avons besoin de calculer le terme U_3 de champ proche. Notre méthode de construction pouvant s'étendre à tout ordre, nous n'attendons pas de difficultés particulières si ce n'est la complexité des calculs. Au niveau numérique, notre priorité est d'obtenir des courbes d'erreur en s'affranchissant de ce phénomène de palier que nous avons constaté. Nous souhaitons ensuite faire des campagnes de tests plus approfondis pour tester l'influence des divers paramètres comme la fréquence ω . Enfin, nous voulons faire l'analyse d'erreur rigoureuse de notre méthode.

Généralisations immédiates

Notre approche peut sans difficulté s'étendre au cas où a est un tenseur d'ordre 2 représenté par une matrice 2×2 au lieu d'un scalaire. Il serait aussi possible de se placer en dimension quelconque supérieure ou égale à 2 (toujours avec l'équation de Helmholtz (7.1)) et dans ce cas les opérateurs ∂_{x_2} intervenant dans les nouvelles conditions de transmission seraient remplacés par des laplaciens surfaciques sur Γ .

Notre méthode couplant les développements asymptotiques pourrait également s'adapter sans aucun problème aux situations suivantes :

- Nous pourrions considérer un problème de transmission entre deux demi-plans périodiques, à condition que les périodiques de chaque côté soient les mêmes (voir la figure 10.3).
- Au lieu de coefficients périodiques, nous pourrions considérer une géométrie périodique de type milieu perforé, par exemple avec conditions de Neumann au bord des trous (l'homogénéisation des domaines perforés avec des conditions de Dirichlet au bord des trous est beaucoup plus délicate, voir par exemple [65]).
- Nous aurions pu placer entre les deux demi-plans une couche mince de l'ordre de δ sur laquelle a et ρ peuvent varier, à condition que ces deux quantités restent Y -périodiques dans la direction x_2 et vérifient toujours les hypothèses de coercivité (6.51) (voir la figure 10.3). L'effet de la couche mince est alors pris en compte par les couches limites U_n .
- Au lieu d'un problème de transmission, nous aurions pu traiter le cas d'un problème avec bords, c'est-à-dire que nous considérons juste le demi-plan périodique Ω^+ et nous imposons sur le bord $\Gamma = \partial\Omega^+$ une condition aux limites, par exemple une condition de Dirichlet $u_\delta = 0$ ou une condition de Neumann $a(\mathbf{x}/\delta)\nabla u_\delta \cdot \mathbf{e}_1 = 0$. À noter que nous retrouvons ainsi des résultats ayant été établis

par ailleurs, par exemple nous obtenons les termes appelés *boundary tails* dans [4] dans le cas de la condition de Dirichlet.

- Enfin, nous pourrions considérer le cas de plusieurs interfaces, par exemple avec deux demi-plans homogènes encadrant une bande de milieu périodique (voir la figure 10.3). Dans ce cas, il faut effectuer des développements de couches limites différents au niveau de chaque interface.

Bien entendu, ces différentes généralisations peuvent être mélangées entre elles, par exemple nous pourrions considérer un problème de transmission entre un milieu périodique et un milieu perforé, séparés par une couche mince.

Enfin, nous pourrions aussi monter en ordre dans notre modèle approché. *A priori* notre méthode peut s'étendre à tout ordre et permet de construire des modèles approchés d'ordre arbitrairement élevé. Il faudrait cependant trouver une façon ingénieuse de mener les calculs, en gérant les récurrences des différents termes, pour éviter que les calculs ne deviennent inextricables.

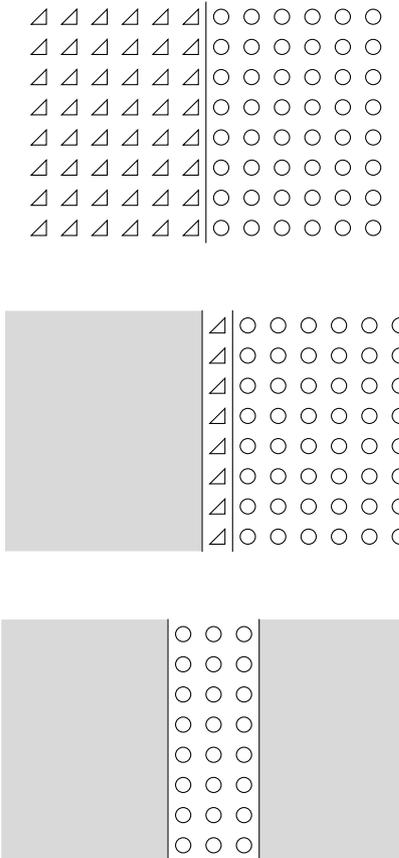


FIGURE 10.3 – Géométries des généralisations de notre problème (le gris correspond à un milieu homogène). En haut : transmission entre deux milieux périodiques. Au milieu : rajout d'une couche mince périodique. En bas , le cas de deux interfaces (deux demi-plans homogènes encadrant une bande de milieu périodique).

Extensions à plus long terme

Une hypothèse fondamentale de notre approche est d'avoir des demi-plans dont la frontière épouse la périodicité. Ainsi, si le demi-plan périodique est « tourné » d'un angle θ (voir la figure 10.4), à moins de situations très particulières où les coefficients resteraient périodiques, notre méthode ne s'applique plus directement. Cependant, il est peut-être possible de l'adapter en faisant dépendre les profils \mathcal{P}_1 ,

\mathcal{P}_2^k , etc. explicitement de la variable \mathbf{x} (contrairement à notre cas où ils n'en dépendaient pas). Cela aura donc un énorme impact sur le coût de calcul car (1) il faudrait calculer autant de profils que de points de discrétisation en \mathbf{x} , (2) les équations des profils seraient posées dans tout l'espace et non une bande infinie. Nous pourrions aussi peut-être étudier le cas d'un domaine périodique dont la frontière est un polygone convexe, comme c'est fait dans [106]. Deux situations plus générales sont le cas d'un coin ou même d'une frontière quelconque (voir la figure 10.4). Dans le premier cas, très peu de travaux ont déjà été faits, même en dehors du contexte périodique (par exemple même pour le cas simple d'une couche mince délimitant un quart de plan) et il faudra sans doute du temps avant de pouvoir attaquer le problème avec des coefficients périodiques. Dans le second cas, nous pourrions sans doute nous inspirer de [107] pour essayer d'adapter notre méthode.

Une autre généralisation intéressante serait de considérer les équations de Maxwell, l'analyse deviendrait alors sans doute plus complexe en raison des problèmes de compacité [234].

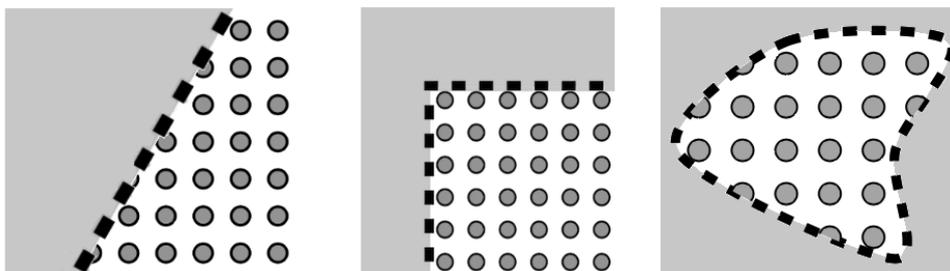


FIGURE 10.4 – Trois configurations qui ne peuvent être traitées directement par notre approche.

Quand l'absorption est nulle

Quand $\text{Im } \omega^2 = 0$, nous ne pouvons plus nous contenter de chercher des solutions du problème exact (7.1) (et également des problèmes homogénéisés) dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ car les solutions ne décroissent plus suffisamment vite. Si nous nous plaçons dans $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ nous perdons l'unicité des solutions. Il existe deux manières de procéder pour retrouver l'unicité :

1. Définir la solution du problème sans absorption ($\text{Im } \omega^2 = 0$) comme la limite du problème avec absorption ($\text{Im } \omega^2 > 0$) quand l'absorption tend vers 0 (quand $\text{Im } \omega^2$ tend vers 0) : c'est le principe d'absorption limite [93]. Cependant, il faut d'une part donner un cadre précis et rigoureux pour définir en quel sens la limite est prise et d'autre part démontrer que cette limite existe.
2. Rajouter des conditions de radiation à l'infini. En milieu homogène (possiblement anisotrope), les « bonnes » conditions sont connues, il s'agit des conditions de radiation de Sommerfeld [46, 72]. Pour des milieux plus compliqués, les conditions de radiation peuvent être difficiles voire impossibles à obtenir. Enfin, une fois qu'elles sont déterminées, il faut donner un cadre fonctionnel adapté pour lequel le problème sans absorption avec les conditions de radiation admet une unique solution.

Malheureusement pour les milieux périodiques, établir le principe d'absorption limite et obtenir les conditions de radiation sont des questions très difficiles, qui sont seulement partiellement résolues. Citons les articles [103, 173] qui traitent de ces questions pour les guides d'ondes. Pour les problèmes périodiques dans l'espace libre (et *a fortiori* pour les demi-espaces), il s'agit encore de problèmes ouverts. C'est une première réelle difficulté. Nous verrons cependant au chapitre suivant que nous pouvons prendre dans les simulations numériques la limite quand $\text{Im } \omega^2$ tend vers 0 et que cela ne semble pas poser de problème particulier, bien que nous n'ayons aucun argument théorique pour justifier le procédé.

Contrairement au problème exact faisant intervenir des coefficients périodiques, les problèmes homogénéisés sont posés dans des milieux homogènes. Nous pouvons donc essayer d'écrire des conditions de

radiation. Ce genre d'approche a déjà fait l'objet de travaux, citons notamment les thèses [80, 219] ainsi que les articles [35, 36, 81], pour des milieux isotropes. Il faudrait alors étendre ces études aux milieux anisotropes. L'une des difficultés est de montrer qu'il n'existe pas d'ondes de surface, c'est-à-dire des ondes qui sont confinées au voisinage de l'interface Γ et qui mettraient en défaut l'unicité. Des calculs formels semblent montrer, qu'à l'instar du cas isotrope, il n'existe pas de telles ondes, mais il faudrait l'établir rigoureusement. Enfin, il serait nécessaire de trouver un cadre fonctionnel adapté (par exemple des espaces à poids adéquats comme c'est le cas dans [219]).

Enfin, une dernière difficulté lorsque $\text{Im}\omega^2 = 0$ est la perte de coercivité dans la formulation variationnelle (8.50) lorsque nous considérons le modèle approché (8.46) avec les nouvelles conditions de transmission. En effet, nous avons utilisé de manière cruciale le fait que $\text{Im}\omega^2 > 0$ pour montrer la coercivité de la forme bilinéaire b^α et ainsi montrer que (8.50) était bien posé. Quand $\text{Im}\omega^2 = 0$, b^α n'est plus coercive, ce qui rend *de facto* l'analyse plus délicate.

Extensions dans le cas du fort contraste

Notre étude sur le cas du fort contraste au chapitre 10 est très préliminaire. Dans un premier temps, il faudrait rendre rigoureux nos calculs, en démontrant les différentes conjectures que nous avons énoncées. Ensuite, il reste toujours le problème de la notion de convergence pour le fort contraste qui reste à éclaircir (même sans bord ou interface).

Le modèle que nous avons étudié est très simple (scalaire 2d) et ne permet pas d'obtenir des coefficients négatifs à la fois dans la partie principale et dans la partie compacte de l'équation homogénéisée. Il faudrait alors se tourner vers des milieux et des géométries plus complexes et considérer les équations de Maxwell pour obtenir à la fois une permittivité et une perméabilité négatives (voir par exemple [41, 145, 146]).

De même, les calculs modaux avec les nouvelles conditions de transmission doivent être approfondis. Nous avons vu qu'il n'y a plus de noyau de dimension infini (dans le cas d'une interface plane), mais il faudrait notamment vérifier que les pertes de régularité ne sont plus présentes avec les nouvelles conditions de transmission. Il serait également intéressant de voir s'il est possible d'étendre les techniques d'équations intégrales comme dans [77, 183] avec nos nouvelles conditions de transmission.

Une perspective commune aux deux parties

Enfin, une extension de nos travaux qui ferait le lien entre nos deux parties serait de considérer un modèle en temps faisant intervenir les nouvelles conditions de transmission afin de voir si le principe d'amplitude limite est toujours vérifié dans ce cas. Il faudrait notamment gérer des conditions de transmission qui font intervenir des dérivées en temps, puisque nos nouvelles conditions de transmission font intervenir la fréquence ω .

BIBLIOGRAPHY

- [1] T. Abboud and H. Ammari. Diffraction at a curved grating. tm and te cases, homogenization. In *Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, volume 77, page 439. SIAM, 1995.
- [2] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6):1482–1518, 1992.
- [3] G. Allaire. A brief introduction to homogenization and miscellaneous applications. In *ESAIM: Proceedings*, volume 37, pages 1–49. EDP Sciences, 2012.
- [4] G. Allaire and M. Amar. Boundary layer tails in periodic homogenization. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 4:209–243, 1999.
- [5] G. Allaire, M. Briane, and M. Vanninathan. A comparison between two-scale asymptotic expansions and bloch wave expansions for the homogenization of periodic structures. *SeMA Journal*, pages 1–23, 2016.
- [6] G. Allaire and C. Conca. Bloch wave homogenization and spectral asymptotic analysis. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 77(2):153–208, 1998.
- [7] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 39(5):1749–1779, 2002.
- [8] M. Avellaneda and F.-H. Lin. Compactness methods in the theory of homogenization. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 40(6):803–847, 1987.
- [9] M. Avellaneda and F.-H. Lin. Homogenization of elliptic problems with lp boundary data. *Applied Mathematics and Optimization*, 15(1):93–107, 1987.
- [10] K. Aydin, V. E. Ferry, R. M. Briggs, and H. A. Atwater. Broadband polarization-independent resonant light absorption using ultrathin plasmonic super absorbers. *Nature communications*, 2:517, 2011.
- [11] I. Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3):179–192, 1973.
- [12] N. O. Babych, I. V. Kamotski, and V. P. Smyshlyaev. Homogenization of spectral problems in bounded domains with doubly high contrasts. arXiv preprint arXiv:0711.2405, 2007.

- [13] N. S. Bakhvalov and G. Panasenko. *Homogenisation: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] B. Bala, M. Rahim, and N. Murad. Bandwidth enhancement metamaterial antenna based on transmission line approach. *Microwave and Optical Technology Letters*, 57(1):252–256, 2015.
- [15] N. Bartoli and A. Bendali. Robust and high-order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer. *IMA journal of applied mathematics*, 67(5):479–508, 2002.
- [16] E. Bécache, P. Ciarlet Jr., C. Hazard, and E. Lunéville. *La méthode des éléments finis: de la théorie à la pratique. II Compléments*. Presses de l’ENSTA, 2010.
- [17] É. Bécache, S. Fauqueux, and P. Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, 188(2):399–433, 2003.
- [18] É. Bécache and P. Joly. On the analysis of bérenger’s perfectly matched layers for maxwell’s equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 36(1):87–119, 2002.
- [19] É. Bécache, P. Joly, M. Kachanovska, and V. Vinoles. Perfectly matched layers in negative index metamaterials and plasmas. *ESAIM: Proceedings and Surveys*, 50:113–132, 2015.
- [20] É. Bécache, P. Joly, and V. Vinoles. On the analysis of perfectly matched layers for a class of dispersive media and application to negative index metamaterials. Submitted to Mathematics of Computation.
- [21] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 374. American Mathematical Soc., 2011.
- [22] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2):185–200, 1994.
- [23] B. Bidégaray-Fesquet. Stability of fd-td schemes for maxwell-debye and maxwell-lorentz equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5):2551–2566, 2008.
- [24] M. Birman and T. Suslina. Second order periodic differential operators. threshold properties and homogenization. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 15(5):639–714, 2004.
- [25] M. Birman and T. Suslina. Homogenization with corrector term for periodic elliptic differential operators. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 17(6):897–973, 2006.
- [26] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed finite element methods and applications*, volume 44. Springer, 2013.
- [27] A. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr, and C.-M. Zwölf. Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(6):1912–1919, 2010.
- [28] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, and P. Ciarlet Jr. Mesh requirements for the finite element approximation of problems with sign-changing coefficients. 2016.
- [29] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and P. Ciarlet Jr. T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(06):1363–1387, 2012.
- [30] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and P. Ciarlet Jr. T-coercivity for the maxwell problem with sign-changing coefficients. *Communications in Partial Differential Equations*, 39(6):1007–1031, 2014.

- [31] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and X. Claeys. Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(09):1629–1662, 2013.
- [32] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr, and C. M. Zwölf. Two-and three-field formulations for wave transmission between media with opposite sign dielectric constants. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 204(2):408–417, 2007.
- [33] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr, and C. M. Zwölf. A new compactness result for electromagnetic waves: application to the transmission problem between dielectrics and metamaterials. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(09):1605–1631, 2008.
- [34] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, G. Dakhia, C. Hazard, and L. Chorfi. Diffraction by a defect in an open waveguide: a mathematical analysis based on a modal radiation condition. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(3):677–693, 2009.
- [35] A.-S. Bonnet-Ben Dhia and A. Tillequin. A generalized mode matching method for scattering problems with unbounded obstacles. *Journal of Computational Acoustics*, 9(04):1611–1631, 2001.
- [36] A.-S. Bonnet-Ben Dhia and A. Tillequin. A limiting absorption principle for scattering problems with unbounded obstacles. *Mathematical methods in the applied sciences*, 24(14):1089–1111, 2001.
- [37] J.-M. Bony. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Editions Ecole Polytechnique, 2000.
- [38] G. Bouchitté, C. Bourel, and D. Felbacq. Homogenization of the 3d maxwell system near resonances and artificial magnetism. *Comptes Rendus Mathématique*, 347(9):571–576, 2009.
- [39] G. Bouchitté and D. Felbacq. Homogenization near resonances and artificial magnetism from dielectrics. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(5):377–382, 2004.
- [40] G. Bouchitté and B. Schweizer. Cloaking of small objects by anomalous localized resonance. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 63(4):437–463, 2010.
- [41] G. Bouchitté and B. Schweizer. Homogenization of maxwell’s equations in a split ring geometry. *Multiscale Modeling & Simulation*, 8(3):717–750, 2010.
- [42] A. Braides. *Gamma-convergence for Beginners*, volume 22. Clarendon Press, 2002.
- [43] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [44] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- [45] S. Brulé, E. Javelaud, S. Enoch, and S. Guenneau. Experiments on seismic metamaterials: Molding surface waves. *Physical review letters*, 112(13):133901, 2014.
- [46] F. Cakoni and D. Colton. *Qualitative methods in inverse scattering theory: An introduction*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [47] F. Cakoni, B. B. Guzina, and S. Moskow. On the homogenization of a scalar scattering problem for highly oscillating anisotropic media. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48(4):2532–2560, 2016.
- [48] G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge, and G. Vial. Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. *Asymptotic Analysis*, 50(1, 2):121–173, 2006.
- [49] C. Carvalho. *Étude mathématique et numérique de structures plasmoniques avec coins*. PhD thesis, École Polytechnique, 2015.

- [50] M. Cassier. *Étude de deux problèmes de propagation d'ondes transitoires: 1) Focalisation spatio-temporelle en acoustique; 2) Transmission entre un diélectrique et un métamatériau*. PhD thesis, École Polytechnique, 2014.
- [51] M. Cassier, C. Hazard, and P. Joly. Spectral theory for Maxwell's equations at the interface of a metamaterial. part I: Generalized Fourier transform. Submitted.
- [52] M. Cassier, C. Hazard, P. Joly, and V. Vinoles. Spectral theory for Maxwell's equations at the interface of a metamaterial. part II: Limiting absorption and limiting amplitude principles. In preparation.
- [53] M. Cessenat. *Mathematical methods in electromagnetism. Linear theory and applications*, volume 41 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific Publishing, 1996.
- [54] M. Chamaillard. *Conception, analyse et approximation numérique de conditions aux limites approchées pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par des obstacles revêtus de couches minces ferromagnétiques*. PhD thesis, Université de Paris-Saclay, 2016.
- [55] H. Chen, C. Chan, and P. Sheng. Transformation optics and metamaterials. *Nature materials*, 9(5):387–396, 2010.
- [56] K. D. Cherednichenko and S. Cooper. Resolvent estimates for high-contrast elliptic problems with periodic coefficients. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 219(3):1061–1086, 2016.
- [57] L. Chesnel. *Étude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux*. PhD thesis, École Polytechnique, 2012.
- [58] W. C. Chew and W. H. Weedon. A 3d perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and optical technology letters*, 7(13):599–604, 1994.
- [59] B. Choudhury and R. Jha. A review of metamaterial invisibility cloaks. *Computers, Materials & Continua*, 33(3):275–303, 2013.
- [60] E. T. Chung and P. Ciarlet Jr. Scalar transmission problems between dielectrics and metamaterials: T-coercivity for the discontinuous galerkin approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 239:189–207, 2013.
- [61] P. Ciarlet Jr and E. Lunéville. *La méthode des éléments finis: de la théorie à la pratique. I Concepts généraux*. Presses de l'ENSTA, 2009.
- [62] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. Periodic unfolding and homogenization. *Comptes Rendus Mathématique*, 335(1):99–104, 2002.
- [63] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. The periodic unfolding method in homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 40(4):1585–1620, 2008.
- [64] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to homogenization*, volume 17 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, 1999.
- [65] D. Cioranescu and F. Murat. A strange term coming from nowhere. In *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, pages 45–93. Springer, 1997.
- [66] X. Claeys. *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d'ondes par des fils minces*. PhD thesis, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2008.
- [67] X. Claeys and B. Delourme. High order asymptotics for wave propagation across thin periodic interfaces. *Asymptotic Analysis*, 83(1-2):35–82, 2013.
- [68] J. Coatléven. *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'ondes en milieu périodique*. PhD thesis, École Polytechnique, 2011.

- [69] G. Cohen. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [70] G. Cohen, P. Joly, J. E. Roberts, and N. Tordjman. Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(6):2047–2078, 2001.
- [71] F. Collino and C. Tsogka. Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66(1):294–307, 2001.
- [72] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93. Springer Science & Business Media, 2012.
- [73] C. Conca, R. Orive, and M. Vanninathan. On burnett coefficients in periodic media. *Journal of mathematical physics*, 47(3):032902, 2006.
- [74] C. Conca and M. Vanninathan. Homogenization of periodic structures via bloch decomposition. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 57(6):1639–1659, 1997.
- [75] J. H. Conway and R. Guy. *The book of numbers*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [76] D. Correia and J.-M. Jin. 3d-fdtd-pml analysis of left-handed metamaterials. *Microwave and optical technology letters*, 40(3):201–205, 2004.
- [77] M. Costabel and E. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 106(2):367–413, 1985.
- [78] T. J. Cui, D. R. Smith, and R. Liu. *Metamaterials: theory, design, and applications*. Springer, 2010.
- [79] S. A. Cummer. Perfectly matched layer behavior in negative refractive index materials. *Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE*, 3(1):172–175, 2004.
- [80] P.-M. Cutzach. *Influence d’une interface plane sur la diffraction des ondes acoustiques et électromagnétiques par un obstacle*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 1997.
- [81] P.-M. Cutzach and C. Hazard. Existence, uniqueness and analyticity properties for electromagnetic scattering in a two-layered medium. *Mathematical methods in the applied sciences*, 21(5):433–461, 1998.
- [82] G. Dal Maso. *An introduction to Γ -convergence*, volume 8. Springer Science & Business Media, 2012.
- [83] E. B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42. Cambridge University Press, 1996.
- [84] B. Delourme. *Modèles et asymptotiques des interfaces fines et périodiques en électromagnétisme*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2010.
- [85] B. Delourme, H. Haddar, and P. Joly. Approximate models for wave propagation across thin periodic interfaces. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 98(1):28–71, 2012.
- [86] B. Delourme, H. Haddar, and P. Joly. On the well-posedness, stability and accuracy of an asymptotic model for thin periodic interfaces in electromagnetic scattering problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(13):2433–2464, 2013.
- [87] É. Demaldent and S. Imperiale. Perfectly matched transmission problem with absorbing layers: Application to anisotropic acoustics in convex polygonal domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96(11):689–711, 2013.
- [88] J. Diaz and P. Joly. A time domain analysis of pml models in acoustics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(29):3820–3853, 2006.

- [89] Y. Ding, Z. Liu, C. Qiu, and J. Shi. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Physical review letters*, 99(9):093904, 2007.
- [90] X. Dong, X. Rao, Y. Gan, B. Guo, and W. Yin. Perfectly matched layer-absorbing boundary condition for left-handed materials. *Microwave and Wireless Components Letters, IEEE*, 14(6):301–303, 2004.
- [91] D. M. Èidus. The principle of limit amplitude. *Russian Mathematical Surveys*, 24(3):97, 1969.
- [92] D. M. Èidus. The limiting absorption and amplitude principles for the diffraction problem with two unbounded media. *Communications in Mathematical Physics*, 107(1):29–38, 1986.
- [93] D. M. Èidus and C. D. Hill. On the principle of limiting absorption. Technical report, DTIC Document, 1963.
- [94] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5):1765–1766, 1977.
- [95] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [96] L. C. Evans. *Partial differential equations. Graduate studies in mathematics*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [97] N. Fang, H. Lee, C. Sun, and X. Zhang. Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens. *Science*, 308(5721):534–537, 2005.
- [98] P. Fernandes and M. Raffetto. Well-posedness and finite element approximability of time-harmonic electromagnetic boundary value problems involving bianisotropic materials and metamaterials. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19(12):2299–2335, 2009.
- [99] S. Fliss. *Étude mathématique et numérique de la propagation des ondes dans des milieux périodiques localement perturbés*. PhD thesis, École Polytechnique, 2009.
- [100] S. Fliss. A dirichlet-to-neumann approach for the exact computation of guided modes in photonic crystal waveguides. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(2):B438–B461, 2013.
- [101] S. Fliss and P. Joly. Exact boundary conditions for time-harmonic wave propagation in locally perturbed periodic media. *Applied Numerical Mathematics*, 59(9):2155–2178, 2009.
- [102] S. Fliss and P. Joly. Wave propagation in locally perturbed periodic media (case with absorption): Numerical aspects. *Journal of Computational Physics*, 231(4):1244–1271, 2012.
- [103] S. Fliss and P. Joly. Solutions of the time-harmonic wave equation in periodic waveguides: asymptotic behaviour and radiation condition. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 219(1):349–386, 2016.
- [104] S. Fliss, D. Klindworth, and K. Schmidt. Robin-to-robin transparent boundary conditions for the computation of guided modes in photonic crystal waveguides. *BIT Numerical Mathematics*, 55(1):81–115, 2015.
- [105] I. Fried and D. S. Malkus. Finite element mass matrix lumping by numerical integration with no convergence rate loss. *International Journal of Solids and Structures*, 11(4):461–466, 1975.
- [106] D. Gérard-Varet and N. Masmoudi. Homogenization in polygonal domains. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 13(5):1477–1503, 2011.
- [107] D. Gérard-Varet and N. Masmoudi. Homogenization and boundary layers. *Acta mathematica*, pages 1–46, 2012.

- [108] B. Gralak and D. Maystre. Negative index materials and time-harmonic electromagnetic field. *Comptes Rendus Physique*, 13(8):786–799, 2012.
- [109] S. Guenneau, A. Movchan, G. Pétursson, and S. A. Ramakrishna. Acoustic metamaterials for sound focusing and confinement. *New Journal of physics*, 9(11):399, 2007.
- [110] H. Haddar and P. Joly. Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings. *Journal of computational and applied mathematics*, 143(2):201–236, 2002.
- [111] H. Haddar, P. Joly, and H.-M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles: the scalar case. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15(08):1273–1300, 2005.
- [112] H. Haddar, P. Joly, and H.-M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles: the case of maxwell’s equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(10):1787–1827, 2008.
- [113] T. Hagstrom. Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Acta numerica*, 8:47–106, 1999.
- [114] I. Harari, I. Patlashenko, and D. Givoli. Dirichlet-to-neumann maps for unbounded wave guides. *Journal of Computational Physics*, 143(1):200–223, 1998.
- [115] C. Hazard and E. Lunéville. An improved multimodal approach for non-uniform acoustic waveguides. *IMA journal of applied mathematics*, 73(4):668–690, 2008.
- [116] F. Hecht. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4):251–266, 2012.
- [117] R. Hempel and K. Lienau. Spectral properties of periodic media in the large coupling limit: Properties of periodic media. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(7-8):1445–1470, 2000.
- [118] G. Herglotz. Über potenzreihen mit positivem, reellen teil im einheitskreis. *Leipziger Berichte*, 63:501–511, 1911.
- [119] J. Hesthaven and T. Warburton. Discontinuous galerkin methods for the time-domain maxwell’s equations. *ACES Newsletter*, 19(EPFL-ARTICLE-190449):10–29, 2004.
- [120] J. S. Hubert. *Vibration and coupling of continuous systems: asymptotic methods*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [121] D. Huet. *Décomposition spectrale et opérateurs*, volume 16. Presses universitaires de France, 1976.
- [122] A. Il’In. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.*, volume 8 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1992.
- [123] R. J. Iorio Jr and V. de Magalhães Iorio. *Fourier analysis and partial differential equations*, volume 70. Cambridge University Press, 2001.
- [124] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [125] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [126] P. Joly. *Introduction à l’analyse mathématique de la propagation d’ondes en régime harmonique*. École polytechnique, Département de Mathématiques appliquées, 1998.
- [127] P. Joly. Variational methods for time-dependent wave propagation problems. In *Topics in computational wave propagation*, pages 201–264. Springer, 2003.

- [128] P. Joly. An elementary introduction to the construction and the analysis of perfectly matched layers for time domain wave propagation. *SeMA Journal*, 57(1):5–48, 2012.
- [129] P. Joly, J.-R. Li, and S. Fliss. Exact boundary conditions for periodic waveguides containing a local perturbation. *Commun. Comput. Phys*, 1(6):945–973, 2006.
- [130] P. Joly and A. Semin. Construction and analysis of improved kirchoff conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots. In *ESAIM: proceedings*, volume 25, pages 44–67. EDP Sciences, 2008.
- [131] P. Joly and S. Tordeux. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots i: The asymptotic expansion. *Multiscale Modeling & Simulation*, 5(1):304–336, 2006.
- [132] P. Joly and S. Tordeux. Matching of asymptotic expansions for waves propagation in media with thin slots ii: The error estimates. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 42(2):193–221, 2008.
- [133] P. Joly and C. Tsogka. Numerical methods for treating unbounded media. In N. A. Kampanis, V. Dougalis, and J. A. Ekaterinaris, editors, *Effective computational methods for wave propagation*. CRC Press, 2008.
- [134] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*, volume 132. Springer Science & Business Media, 1995.
- [135] F. W. King. *Hilbert transforms*, volume 2. Cambridge University Press, 2009.
- [136] R. V. Kohn, J. Lu, B. Schweizer, and M. I. Weinstein. A variational perspective on cloaking by anomalous localized resonance. *Communications in Mathematical Physics*, 328(1):1–27, 2014.
- [137] S. M. Kozlov. Averaging of random operators. *Matematicheskii Sbornik*, 151(2):188–202, 1979.
- [138] V. Kozlov and V. Maz'ya. *Differential equations with operator coefficients: with applications to boundary value problems for partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [139] V. A. Kozlov, V. Maz'ya, and J. Rossmann. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*. Number 52. AMS Bookstore, 1997.
- [140] H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 23(3):277–298, 1970.
- [141] H.-O. Kreiss and J. Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, volume 47. SIAM, 1989.
- [142] R. S. Kshetrimayum. A brief intro to metamaterials. *IEEE Potentials*, 23(5):44–46, 2004.
- [143] P. A. Kuchment. *Floquet theory for partial differential equations*, volume 60. Birkhäuser, 2012.
- [144] K. S. Kunz and R. J. Luebbers. *The finite difference time domain method for electromagnetics*. CRC press, 1993.
- [145] A. Lamacz and B. Schweizer. Effective maxwell equations in a geometry with flat rings of arbitrary shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 45(3):1460–1494, 2013.
- [146] A. Lamacz and B. Schweizer. A negative index meta-material for maxwell's equations. arXiv preprint arXiv:1509.00708, 2015.
- [147] L. D. Landau, J. S. Bell, M. J. Kearsley, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz, and J. B. Sykes. *Electrodynamics of continuous media*, volume 8. Elsevier, 1984.
- [148] N. Landy, S. Sajuyigbe, J. Mock, D. Smith, and W. Padilla. Perfect metamaterial absorber. *Physical review letters*, 100(20):207402, 2008.

- [149] H. Lee, Y. Xiong, N. Fang, W. Srituravanich, S. Durant, M. Ambati, C. Sun, and X. Zhang. Realization of optical superlens imaging below the diffraction limit. *New Journal of Physics*, 7(1):255, 2005.
- [150] S. H. Lee, C. M. Park, Y. M. Seo, Z. G. Wang, and C. K. Kim. Acoustic metamaterial with negative density. *Physics letters A*, 373(48):4464–4469, 2009.
- [151] S. H. Lee, C. M. Park, Y. M. Seo, Z. G. Wang, and C. K. Kim. Acoustic metamaterial with negative modulus. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 21(17):175704, 2009.
- [152] M. Lenoir and A. Tounsi. The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(4):729–752, 1988.
- [153] U. Leonhardt. Optical conformal mapping. *Science*, 312(5781):1777–1780, 2006.
- [154] J. Li. A literature survey of mathematical study of metamaterials. *International journal of numerical analysis and modeling*, 13(2):230–243, 2016.
- [155] J. Li and C. Chan. Double-negative acoustic metamaterial. *Physical Review E*, 70(5):055602, 2004.
- [156] J. Li and A. Wood. Finite element analysis for wave propagation in double negative metamaterials. *Journal of Scientific Computing*, 32(2):263–286, 2007.
- [157] W. Li and J. Valentine. Metamaterial perfect absorber based hot electron photodetection. *Nano letters*, 14(6):3510–3514, 2014.
- [158] C. M. Linton and P. McIver. Embedded trapped modes in water waves and acoustics. *Wave motion*, 45(1):16–29, 2007.
- [159] J. L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2012.
- [160] X. Liu, T. Starr, A. F. Starr, and W. J. Padilla. Infrared spatial and frequency selective metamaterial with near-unity absorbance. *Physical review letters*, 104(20):207403, 2010.
- [161] P.-R. Loh, A. F. Oskooi, M. Ibanescu, M. Skorobogatiy, and S. G. Johnson. Fundamental relation between phase and group velocity, and application to the failure of perfectly matched layers in backward-wave structures. *Physical Review E*, 79(6):065601, 2009.
- [162] S. A. Maier. *Plasmonics: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [163] G. D. Malyuzhinets. A note on the radiation principle. *Zhurnal technicheskoi fiziki*, 21(8):940–942, 1951.
- [164] S. Marmorat. *Modèles asymptotiques et simulation numérique pour la diffraction d’ondes par des petites hétérogénéités*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2015.
- [165] V. Maz’Ya, S. Nazarov, and B. Plamenevskij. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, volume 1. Birkhäuser, 2012.
- [166] W. C. H. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge university press, 2000.
- [167] G. W. Milton and N.-A. P. Nicorovici. On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 462, pages 3027–3059. The Royal Society, 2006.
- [168] K. Morgenröther and P. Werner. On the principles of limiting absorption and limit amplitude for a class of locally perturbed waveguides. part 1: Time-independent theory. *Mathematical methods in the applied sciences*, 10(2):125–144, 1988.

- [169] K. Morgenröther and P. Werner. On the principles of limiting absorption and limit amplitude for a class of locally perturbed waveguides. part 2: Time-dependent theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 11(1):1–25, 1989.
- [170] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill, 1953.
- [171] S. Moskow and M. Vogelius. First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. a convergence proof. *Proceedings-Royal Society of Edinburgh A*, 127:1263–1300, 1997.
- [172] S. A. Nazarov. Elliptic boundary value problems with periodic coefficients in a cylinder. *Izvestiya: Mathematics*, 18(1):89–98, 1982.
- [173] S. A. Nazarov. Umov-mandelstam radiation conditions in elastic periodic waveguides. *Sbornik: Mathematics*, 205(7):953, 2014.
- [174] R. H. Nevanlinna. Asymptotische entwicklungen beschränkter funktionen und das stieltjessche momentproblem. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 18(A):1–53, 1922.
- [175] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20(3):608–623, 1989.
- [176] H.-M. Nguyen. Asymptotic behavior of solutions to the helmholtz equations with sign changing coefficients. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(9):6581–6595, 2015.
- [177] H.-M. Nguyen. Cloaking via anomalous localized resonance. a connection between the localized resonance and the blow up of the power for doubly complementary media. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(1):41–46, 2015.
- [178] H.-M. Nguyen. Limiting absorption principle and well-posedness for the helmholtz equation with sign changing coefficients. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2016.
- [179] X. Ni, Z. J. Wong, M. Mrejen, Y. Wang, and X. Zhang. An ultrathin invisibility skin cloak for visible light. *Science*, 349(6254):1310–1314, 2015.
- [180] S. Nicaise and J. Venel. A posteriori error estimates for a finite element approximation of transmission problems with sign changing coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(14):4272–4282, 2011.
- [181] H. M. Nussenzveig. *Causality and dispersion relations*. Academic Press, 1972.
- [182] S. O’Brien and J. B. Pendry. Photonic band-gap effects and magnetic activity in dielectric composites. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 14(15):4035, 2002.
- [183] P. Ola. Remarks on a transmission problem. *Journal of mathematical analysis and applications*, 196(2):639–658, 1995.
- [184] O. A. Oleinik, A. Shamaev, and G. Yosifian. *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, volume 2. Elsevier, 2009.
- [185] G. Oliveri and M. Raffetto. A warning about metamaterials for users of frequency-domain numerical simulators. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 56(3):792–798, 2008.
- [186] F. W. Olver. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge University Press, 2010.
- [187] D. Onofrei and B. Vernescu. Asymptotic analysis of second-order boundary layer correctors. *Applicable Analysis*, 91(6):1097–1110, 2012.
- [188] G. C. Papanicolaou, S. S. Varadhan, et al. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. *Random fields*, 1:835–873, 1979.

- [189] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [190] J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical review letters*, 85(18):3966, 2000.
- [191] J. B. Pendry. Negative refraction. *Contemporary Physics*, 45(3):191–202, 2004.
- [192] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith. Controlling electromagnetic fields. *science*, 312(5781):1780–1782, 2006.
- [193] P. G. Petropoulos. Stability and phase error analysis of fd-td in dispersive dielectrics. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 42(1):62–69, 1994.
- [194] J.-R. Poirier, A. Bendali, and P. Borderies. Impedance boundary conditions for the scattering of time-harmonic waves by rapidly varying surfaces. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 54(3):995–1005, 2006.
- [195] C. Prange. Asymptotic analysis of boundary layer correctors in periodic homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 45(1):345–387, 2013.
- [196] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics: Vol.: 1.: Functional Analysis*. Academic Press, 1972.
- [197] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics: Vol.: 4.: Analysis of Operators*. Academic Press, 1978.
- [198] M. Rosenblum and J. Rovnyak. *Topics in Hardy classes and univalent functions*. Birkhäuser, 2012.
- [199] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [200] E. Sánchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer, 1980.
- [201] F. Santosa and M. Vogelius. First-order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53(6):1636–1668, 1993.
- [202] M. Sarkis and H. Versieux. Convergence analysis for the numerical boundary corrector for elliptic equations with rapidly oscillating coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(2):545–576, 2008.
- [203] K. Schmidt. *High-order numerical modelling of highly conductive thin sheets*. PhD thesis, Citeseer, 2008.
- [204] D. Schurig, J. Mock, B. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. Starr, and D. Smith. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314(5801):977–980, 2006.
- [205] A. Semin. *Propagation d’ondes dans des jonctions de fentes minces*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2010.
- [206] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz. Experimental verification of a negative index of refraction. *science*, 292(5514):77–79, 2001.
- [207] Y. Shi, Y. Li, and C.-H. Liang. Perfectly matched layer absorbing boundary condition for truncating the boundary of the left-handed medium. *Microwave and optical technology letters*, 48(1):57–63, 2006.
- [208] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Physical review letters*, 84(18):4184, 2000.
- [209] D. R. Smith, J. B. Pendry, and M. C. K. Wiltshire. Metamaterials and negative refractive index. *Science*, 305(5685):788–792, 2004.
- [210] L. Solymar and E. Shamonina. *Waves in metamaterials*. Oxford University Press, 2009.

- [211] E. M. Stein and G. L. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, volume 1. Princeton university press, 1971.
- [212] S. Steinberg. Meromorphic families of compact operators. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 31(5):372–379, 1968.
- [213] A. Taflove and S. C. Hagness. *Computational electrodynamics*. Artech house publishers, 2000.
- [214] A. Taflove and S. C. Hagness. *Computational electrodynamics*. Artech house, 2005.
- [215] L. Tartar. Compensated compactness and applications to partial differential equations. In *Nonlinear analysis and mechanics, Heriot-Watt symposium*, volume 4, pages 136–211. Pitman, 1979.
- [216] L. Tartar. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2007.
- [217] L. Tartar. *The general theory of homogenization: a personalized introduction*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2009.
- [218] F. L. Teixeira and W. C. Chew. General closed-form pml constitutive tensors to match arbitrary bianisotropic and dispersive linear media. *Microwave and Guided Wave Letters, IEEE*, 8(6):223–225, 1998.
- [219] A. Tillequin. *Une méthode de raccordement modal généralisée pour les problèmes de jonction de guides d’ondes*. PhD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin, 2001.
- [220] A. Tip. Linear dispersive dielectrics as limits of drude-lorentz systems. *Physical Review E*, 69(1):016610, 2004.
- [221] E. C. Titchmarsh. *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Oxford University Press, 1948.
- [222] A. Tonnoir. Dirichlet-to-neumann operator for diffraction problems in stratified anisotropic acoustic waveguides. *Comptes Rendus Mathématique*, 354(4):383–387, 2016.
- [223] S. Tordeux. *Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes*. PhD thesis, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2004.
- [224] S. Tordeux, G. Vial, and M. Dauge. Matching and multiscale expansions for a model singular perturbation problem. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(10):637–642, 2006.
- [225] J. G. Van Bladel. *Electromagnetic fields*, volume 19. John Wiley & Sons, 2007.
- [226] M. Van Dyke. *Perturbation methods in fluid mechanics*, volume 8. Academic Press, 1964.
- [227] H. Versieux and M. Sarkis. Numerical boundary corrector for elliptic equations with rapidly oscillating periodic coefficients. *Communications in numerical methods in engineering*, 22(6):577–589, 2006.
- [228] V. G. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of epsilon and mu. *Soviet physics uspekhi*, 10(4):509, 1968.
- [229] V. Vinoles. Regularity results for transmission problems with sign-changing coefficients: a modal approach. Submitted to IMA Journal of Applied Mathematics.
- [230] A. Vora, J. Gwamuri, N. Pala, A. Kulkarni, J. M. Pearce, and D. Ö. Güney. Exchanging ohmic losses in metamaterial absorbers with useful optical absorption for photovoltaics. *Scientific reports*, 4, 2014.
- [231] Y. Wang, T. Sun, T. Paudel, Y. Zhang, Z. Ren, and K. Kempa. Metamaterial-plasmonic absorber structure for high efficiency amorphous silicon solar cells. *Nano letters*, 12(1):440–445, 2011.
- [232] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge university press, 1995.

- [233] A. Wautier and B. B. Guzina. On the second-order homogenization of wave motion in periodic media and the sound of a chessboard. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 78:382–414, 2015.
- [234] C. Weber and P. Werner. A local compactness theorem for maxwell’s equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2(1):12–25, 1980.
- [235] R. Weder. Spectral analysis of strongly propagative systems. *J. Reine Angew. Math*, 354:95–122, 1984.
- [236] R. Weder. *Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media*, volume 87. Springer Science & Business Media, 2012.
- [237] J. A. C. Weideman. Numerical integration of periodic functions: A few examples. *The American mathematical monthly*, 109(1):21–36, 2002.
- [238] D. H. Werner and D.-H. Kwon. *Transformation electromagnetics and metamaterials*. Springer, 2015.
- [239] P. Werner. Resonance phenomena in cylindrical waveguides. *Journal of mathematical analysis and applications*, 121(1):173–214, 1987.
- [240] P. Werner. Resonance phenomena in local perturbations of parallel-plane waveguides. *Mathematical methods in the applied sciences*, 19(10):773–823, 1996.
- [241] C. H. Wilcox. Theory of bloch waves. *Journal d’analyse mathématique*, 33(1):146–167, 1978.
- [242] A. D. Yaghjian. Internal energy, q-energy, poynting’s theorem, and the stress dyadic in dispersive material. *Antennas And Propagation, IEEE Transactions On*, 55(6):1495–1505, 2007.
- [243] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag*, 14(3):302–307, 1966.
- [244] L. Zhao and A. C. Cangellaris. A general approach for the development of unsplit-field time-domain implementations of perfectly matched layers for fdtd grid truncation. *Microwave and Guided Wave Letters, IEEE*, 6(5):209–211, 1996.
- [245] V. V. Zhikov. On an extension of the method of two-scale convergence and its applications. *Sbornik: Mathematics*, 191(7):973, 2000.
- [246] R. W. Ziolkowski. Metamaterial-based antennas: Research and developments. *IEICE transactions on electronics*, 89(9):1267–1275, 2006.
- [247] R. W. Ziolkowski and E. Heyman. Wave propagation in media having negative permittivity and permeability. *Physical review E*, 64(5):056625, 2001.
- [248] R. W. Ziolkowski and A. D. Kipple. Application of double negative materials to increase the power radiated by electrically small antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(10):2626–2640, 2003.
- [249] C. Zwölf. *Méthodes variationnelles pour la modélisation des problèmes de transmission d’onde électromagnétique entre diélectrique et méta-matériau*. PhD thesis, Université Versailles-Saint-Quentin, 2008.

Résumé en français. Nous nous intéressons à des problèmes de transmission entre diélectriques et métamatériaux, c'est-à-dire des milieux présentant des propriétés électromagnétiques inhabituelles comme des constantes effectives négatives à certaines fréquences. Ces milieux sont souvent construits comme des assemblages périodiques de micro-structures résonantes et dans ce cas la théorie de l'homogénéisation permet de justifier mathématiquement ces propriétés effectives. Dans une partie préliminaire, en régime harmonique et dans des géométries à variables séparables, des calculs analytiques sont menés. Ils révèlent dans des cas dits critiques des difficultés mathématiques : les solutions n'ont pas la régularité standard, voire le problème est mal posé.

La première partie étudie ces problèmes de transmission en régime temporel pour lequel les métamatériaux sont modélisés par des modèles dispersifs (par exemple le modèle de Drude ou celui de Lorentz). Les difficultés résident dans le choix d'un schéma de discrétisation mais surtout dans la construction de conditions absorbantes. La méthode retenue ici est celle des *Perfectly Matched Layers* (PMLs). Comme les PMLs classiques sont instables pour ces modèles du fait de la présence d'ondes inverses, nous proposons une nouvelle classe de PMLs pour lesquelles nous menons une analyse de stabilité. Cette dernière permet de construire des PMLs stables. Elles sont ensuite utilisées pour simuler le comportement en temps long d'un problème de transmission ; nous illustrons alors le fait que le principe d'amplitude limite peut être mis en défaut en raison de résonances d'interface.

La deuxième partie vise à pallier ces phénomènes d'interface en régime harmonique en revenant sur le processus d'homogénéisation classique, pour un milieu dissipatif. Pour des problèmes de transmission, il est connu que les modèles issus de cette méthode perdent en précision du fait de la présence de couches limites à l'interface. Nous proposons un modèle enrichi au niveau de l'interface. En combinant la méthode d'homogénéisation double-échelle et celle des développements asymptotiques raccordés, nous construisons des conditions de transmission non standards faisant intervenir des opérateurs différentiels le long de l'interface de type Laplace-Beltrami. Le calcul de ces conditions nécessite la résolution de problèmes de cellule et de problèmes non standards posés dans des bandes périodiques infinies. Une analyse d'erreur confirme l'amélioration de la précision du modèle et des simulations numériques illustrent l'efficacité de ces nouvelles conditions. Enfin, cette démarche est reproduite formellement dans le cas des matériaux à fort contraste se comportant comme des métamatériaux. Nous montrons alors que ces nouvelles conditions permettent de régulariser le problème de transmission dans les cas critiques.

Mots clés : métamatériaux, problèmes de transmission, modèles dispersifs, modèles de Drude et de Lorentz, couches absorbantes parfaitement adaptées (perfectly matched layers), schémas numériques stables, homogénéisation, couches limites, développements asymptotiques raccordés

Abstract in english. We are interested in transmission problems between dielectrics and metamaterials, that is to say media with unusual electromagnetic properties such as negative constants at some frequencies. These media are often made of periodic assemblies of resonant micro-structures and in this case the homogenization theory can justify mathematically these effective properties. A preliminary part deals with these problems in the harmonic domain and in geometry with separation of variables. Analytical computations are done and reveal in the so-called critical cases some mathematical difficulties: the solutions do not have the standard regularity and the problem can even be ill-posed.

The first part examines these transmission problems in the time domain for which metamaterials are modelled by dispersive models (Drude model or Lorentz model for instance). The difficulties reside in the choice of a discretization scheme but especially in the construction of absorbing conditions. The method used here is the use of Perfectly Matched Layers (PMLs). Since classical PMLs are unstable for these models due to the presence of backward waves, we propose a new class of PMLs for which we conduct a stability analysis. The latter allows us to build stable PMLs. They are then used to simulate the long-time behaviour of a transmission problem; we illustrate the fact that the limit amplitude principle can be faulted because of interface resonances.

The second part aims to overcome these phenomena by coming back to the classical homogenization in the harmonic domain, for dissipative media. For transmission problems, it is known that models resulting from this method lose accuracy due to the presence of boundary layers at the interface. We propose an enriched model at the interface: by combining the method of two-scale homogenization and that of matched asymptotic expansions, we build non-standard transmission conditions involving tangential derivatives along the interface (Laplace-Beltrami operators). This requires to solve cell problems and non-standard problems in infinite periodic bands. An error analysis confirms the improvement of the accuracy of the model and numerical simulations show the effectiveness of these new conditions. Finally, this approach is formally reproduced in the case of high contrast materials which behave like metamaterials. We show that these new conditions regularise the transmission problem in the critical cases.

Keywords: metamaterials, transmission problems, dispersive models, Drude and Lorentz models, perfectly matched layers, stable numeric schemes, homogenization, boundary layers, matched asymptotic expansions
