



Étude du comportement mécanique de sphères creuses composites sous sollicitations dynamiques. Application à un bouclier de choc à l'oiseau

Arthur Core

► To cite this version:

Arthur Core. Étude du comportement mécanique de sphères creuses composites sous sollicitations dynamiques. Application à un bouclier de choc à l'oiseau. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2016. Français. NNT : 2016ENAM0039 . tel-01445246

HAL Id: tel-01445246

<https://pastel.hal.science/tel-01445246>

Submitted on 24 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2016-ENAM-0039

École Doctorale n° 432: Science des Métiers de l'ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité "Mécanique et Matériaux"

Présentée et soutenue publiquement par

Arthur CORÉ

Ingénieur INSA Lyon

le 7 novembre 2016

**Étude du comportement mécanique de sphères creuses
composites sous sollicitations dynamiques. Application à un
bouclier de choc à l'oiseau.**

Directeurs de thèse: **Philippe Viot**

Co-encadrement de la thèse: **Jean-Benoît KOPP et Frédéric DAU**

Jury

M. François HILD, Directeur de recherche, CNRS, LMT-Cachan
M. Christophe FOND, Professeur des Universités, ICube, Université de Strasbourg
M. Mohamed GUESSASMA, Maître de Conférences (HDR), LTI, UPJV
M. Christophe BOUVET, Professeur des Universités, ICA, ISAE-SUPAERO
M. Philippe VIOT, Professeur d'Universités, I2M, Arts et Métiers ParisTech
M. Jean-Benoît KOPP Maître de Conférences, I2M, Arts et Métiers ParisTech
M. Frédéric DAU, Maître de Conférence, I2M, Arts et Métiers ParisTech
M. Jean-Luc Charles Maître de Conférences, I2M, Arts et Métiers ParisTech
Mme Valia FASCIO Ingénieur - Docteur, ATECA SA, Montauban

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Invité

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein de l'École des Arts et Métiers ParisTech sur le campus de Bordeaux et à l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M). À ce titre, je souhaite remercier Éric Arquis, directeur de l'I2M et Monsieur Thierry Palin-Luc, directeur du département DUMAS.

Ces recherches se placent dans le cadre du projet FUI SAMBA et pour cette raison je tiens à remercier les différents partenaires industriels et universitaires avec qui j'ai pu échanger sur mes travaux. Je remercie tout particulièrement Valia Fascio d'ATECA SA et Gilles Andrieu de Stelia Aerospace pour avoir assisté à ma soutenance de thèse et pour les différentes réunions fructueuses que nous avons pu mener ensemble.

Merci à Monsieur Mohamed Guessasma et Monsieur Christophe Fond pour avoir rapporté sur mon manuscrit. Merci à Monsieur François Hild d'avoir présidé le jury et aux autres examinateurs, Christophe Bouvet et à mes encadrants pour leurs conseils et remarques lors de ma présentation.

Bien sûr, cette thèse n'aurait pas été possible sans l'aide de mon équipe encadrante. Frédéric Dau pour sa disponibilité pendant ces trois ans et ses conseils avisés. Philippe Viot qui m'a fait confiance et m'a permis de mener des recherches originales tout en m'apportant des critiques constructives régulièrement. Jean-Benoît Kopp pour sa présence soutenue, ses remarques, son ouverture d'esprit et sa franchise qui sont autant d'éléments qui m'ont permis d'atteindre les objectifs de ce travail de thèse. Enfin, Jean-Luc Charles pour son aide sur la méthode des éléments discrets et pour son assistance pour la partie enseignement.

Puisque la thèse est un aboutissement de huit années universitaires, je tiens aussi à remercier tous mes professeurs de l'IUT Génie Mécanique et Productique de Bordeaux et ceux de l'INSA Lyon qui m'ont inculqué les sciences des matériaux et la mécanique. En particulier, je désire remercier mon directeur de Master Recherche, Alain Combescure, qui m'a orienté sur ce sujet de recherche.

Merci à la Team-Granoo pour les nombreux cafés DEM où nous avons pu échanger sur cet outil. Je remercie en particulier Jérémie Girardot, Mohamed Jebahi et Ivan Iordanoff pour leur expertise dans ce domaine et leurs précieux conseils.

Durant ces trois années, j'ai eu l'occasion d'enseigner aux étudiants du Bachelor Arts et Métiers, merci pour votre attention et pour votre comportement exemplaire. C'était un plaisir de vous faire cours.

J'adresse un grand remerciement aux personnes qui m'ont apporté un soutien technique sans qui la partie expérimentale n'aurait pas été possible. Merci à Tony Maublanc pour m'avoir formé et aidé lors de mon arrivée. Merci à Jean-Luc Barou et à Élodie Kopp pour leur aide et leurs conseils sur le matériel expérimental. Merci à Jonathan Merzeau d'avoir réparé à plusieurs reprises les barres d'Hopkinson (La dernière était la bonne!). Merci à Jérémie Béga pour la partie micrographie. Je tiens à remercier aussi Michel Castaings, du département APY, pour les mesures d'ultrasons. Enfin, j'adresse également mes remerciements à Arthur Langlois qui lors de son stage de 2^e année m'a grandement aidé à la mise en place de l'essai de tir au canon.

Je veux également remercier tous les collègues, Mesdames Marinette Roy, Annie Artal, Catherine Froustey, Sandra Guérard, Sonia Senut, Florence Duville et Madalina Calamaz

et Messieurs Christophe Lemaire, Mohamed El May, Romain Jouhaud, Nicolas Saintiers, Charles Brugger, Étienne Prulière, Mathieu Lassère.

On ne fait pas une thèse tout seul, je remercie donc tous mes amis doctorants et post doctorants avec qui j'ai partagé mon bureau, effectué des pauses café, joué au volley... Merci à David, Lucien, Sondes, Héloïse, Pablo G, Pablo W, Helmi, Kévin, Moubarak, Simon, Luis, Pietro, Lorenzo, Bastien, Mohand, Adrien, Roman, Ilan, Khalil, Benjamin, Danh, Alexander et Nicolas.

Au cours de cette thèse, j'ai eu la chance d'être soutenu par tous mes amis. Merci à certains d'être venus assister à ma soutenance et merci à tous pour ces bons moments. Je ne me risquerais pas à tous les citer pour ne pas en oublier.

Je remercie bien évidemment ma famille qui m'a soutenu et épaulé tout au long de ce parcours. Merci tout simplement d'être vous et d'être là.

Après tous ces mercis, il en reste un. Merci Camille d'avoir partagé mon quotidien durant ces trois années, merci pour ta patience et tes encouragements. Tu es pour beaucoup dans l'aboutissement de mes travaux.

Table des matières

Liste des figures	2
Liste des tableaux	2
1 Introduction générale	2
1.1 Références	7
2 État de l'art	8
2.1 Introduction	10
2.2 Matériaux cellulaires pour l'absorption des chocs	10
2.2.1 Généralités sur les matériaux cellulaires	10
2.2.2 Sphères creuses	16
2.2.3 Mise en évidence des mécanismes de dissipation d'énergie	22
2.3 La rupture dynamique	26
2.3.1 Objectifs	26
2.3.2 Notions de mécanique de la rupture	26
2.3.3 Application en régime dynamique	30
2.3.4 Méthodes numériques pour la propagation de fissure	35
2.4 Conclusions	39
2.5 Références	40
3 Caractérisation et modélisation d'une sphère creuse en compression uni-axiale	49
3.1 Introduction	51
3.2 Essais de compressions quasi-statique et dynamique sur sphères creuses	51
3.2.1 Moyens expérimentaux	51
3.2.2 Essais en régime quasi-statique	52
3.2.3 Essais dynamiques	54
3.3 Méthode des éléments discrets	56
3.3.1 Mise en œuvre	56
3.3.2 Modélisation discrète d'un milieu continu	62
3.4 Identification des paramètres du modèle	65
3.4.1 Essais de caractérisation du matériau constitutif	65
3.4.2 Calibration numérique	68
3.5 Résultats numériques	75
3.5.1 Construction d'une sphère creuse en éléments discrets	75
3.5.2 Sphères creuses en compression uni-axiale	77
3.5.3 Impact d'une sphère creuse à grande vitesse	79
3.6 Conclusions	82
3.7 Références	82

4	Estimation du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique sur sphère creuse	86
4.1	Introduction	88
4.2	Mesure de la position de la pointe de fissure sur sphères creuses	88
4.3	Rupture dynamique sur plaque par la méthode des éléments discrets	91
4.3.1	Solutions numériques de la littérature	91
4.3.2	Mise en place du modèle de rupture sur plaque	93
4.3.3	Méthode par zone de rupture (fracture process zone)	99
4.4	Application à la rupture dynamique sur sphère creuse	102
4.4.1	Mise en place du modèle	102
4.4.2	Énergie de frottement	106
4.4.3	Application du facteur de correction dynamique	106
4.5	Prise en compte numérique du taux de restitution d'énergie critique	107
4.5.1	Poutres cohésives endommageables	107
4.5.2	Chemin de fissuration	111
4.5.3	Premiers résultats sur sphère creuse	112
4.5.4	Perspectives pour la prise en compte de la vitesse de fissuration	113
4.6	Conclusion	114
4.7	Références	115
5	Modélisation multi-sphères	119
5.1	Introduction	120
5.2	Modèle micro-macro	120
5.2.1	Exemple d'application : colonne de sphères creuses	120
5.2.2	Limites	122
5.3	Vers un modèle macroscopique	123
5.3.1	Méthodologie	123
5.3.2	Sollicitations dans un assemblage de sphères creuses	124
5.3.3	Essais numériques et expérimentaux	129
5.4	Conclusion	133
5.5	Références	133
6	Conclusions générales et perspectives	136
6.1	Conclusions générales	137
6.2	Perspectives	138
6.2.1	A l'échelle de la fissure	139
6.2.2	A l'échelle d'une sphère creuse	140
6.2.3	A l'échelle de plusieurs de sphères creuses	141
6.3	Références	144

Liste des figures

1.1	Boeing 737 impacté	2
1.2	Accidents causés par des impacts d'oiseau	3
1.3	Parties de l'avion touchées lors d'un impact	4
1.4	Radôme d'Airbus A320	4
1.5	Solutions candidates	5
2.1	Exemples de matériaux cellulaires	11
2.2	Exemples de treillis	12
2.3	Classification des matériaux cellulaires	12
2.4	Propriétés mécaniques des mousses et des solides	13
2.5	Courbe contrainte déformation d'un matériau cellulaire	13
2.6	Differents comportements mécaniques des matériaux cellulaires	14
2.7	Modèles de comportement de mousses	16
2.8	Modélisation éléments finis d'une mousse	17
2.9	Représentation des paramètres géométriques de deux sphères creuses en contact	17
2.10	Évolution de la résistance à rupture spécifique en fonction de différents assemblages de sphères creuses métalliques	18
2.11	Essai de compression sur sphères creuses in situ	19
2.12	Modélisation éléments finis de sphères creuses	19
2.13	Compression dynamique d'une sphère creuse métallique	19
2.14	Éprouvette de sphères creuses ATECA polymères à gradient de densité	20
2.15	Exemples de sphères creuses ATECA	21
2.16	Zoom sur un assemblage de sphères creuses ATECA en polymère	21
2.17	Distribution en diamètre et épaisseur d'un lot de sphères creuses	22
2.18	Essais de compression sur Nid d'abeille et sphères creuses	23
2.19	Énergie dissipée lors d'une compression dynamique de différentes solutions de nida	23
2.20	Essais d'impact au choc mou sur un assemblage de sphères creuses	24
2.21	Éprouvette avant et après un essai de compression dynamique sur un nid d'abeille / sphères creuses	24
2.22	Essais d'impact au choc mou sur des sphères creuses collées	25
2.23	Essais d'impact sur sphères creuses libres	25
2.24	Modes d'ouvertures de fissure : I, II et III	27
2.25	Approche de Griffith par un bilan énergétique	28
2.26	Définition des axes (x, y) et des coordonnées polaires (r, θ) au voisinage de la pointe de fissure	29
2.27	Plaque semi-infinie fissurée en son centre et chargée uniformément suivant l'axe y	31

2.28 Évolution du facteur de correction dynamique sur plaque semi-infinie . . .	33
2.29 Essai DCB (Double Cantilever Beam) pour l'estimation de l'énergie de rupture du bois (Western hemlock)	34
2.30 Évolution du facteur de correction dynamique sur plaque semi-infinie . . .	34
2.31 Méthodes expérimentales pour l'estimation du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique	35
2.32 Évolution du facteur d'intensité des contraintes avec la vitesse de propagation $\dot{a}$ pour la résine Araldite B	35
2.33 XFEM : enrichissements ajoutés à la méthode des éléments finis	37
2.34 Propagation d'une fissure par la méthode des éléments discrets	39
3.1 Mise en place d'un essai de compression quasi-statique sur sphère creuse .	52
3.2 Roue inertielle	52
3.3 Essais de compression quasi-statique sur sphères creuses : réponses force - déplacement	53
3.4 Rupture brutale par propagation d'une fissure sur une sphère creuse (A) lors d'un essai de compression quasi-statique	54
3.5 Essais de compression dynamique sur sphères creuses : réponse force - déplacement	54
3.6 Rupture brutale par propagation d'une fissure sur une sphère creuse (B) lors d'un essai de compression dynamique	55
3.7 Essais de compression quasi-statique et dynamique sur sphères creuses, représentation de la dispersion des résultats	55
3.8 Comparaison de différentes méthodes numériques en termes de capacité à reproduire la rupture d'une roche	56
3.9 Architecture de la plate-forme <i>Granoo</i>	57
3.10 Liaison cohésive de type poutre	59
3.11 Remplissage aléatoire d'un cube d'éléments discrets	61
3.12 Influence du module de Young macroscopique E_μ sur les paramètres macroscopiques E_M et μ_M	62
3.13 Influence du rayon adimensionné microscopique r_μ sur les paramètres macroscopiques E_M et μ_M	63
3.14 Principe de renfermement d'une fissure en éléments discrets	63
3.15 Modélisation de la rupture à l'aide du tenseur viriel	64
3.16 Modélisation de la rupture à l'aide du tenseur viriel	65
3.17 Illustration d'un essai d'indentation de silice suivant deux modèles de rupture	65
3.18 Mesure de la relation contrainte - déformation du matériau constitutif et estimation du module de Young	66
3.19 Essais de compression sur éprouvette cylindrique à différentes vitesses de déformation et températures	67
3.20 Représentation de la surface de réponse de la loi de Ree-Eyring par rapport aux données expérimentales	69
3.21 Éprouvettes cylindriques d'éléments discrets composées de 750, 5 500 et 35 000 éléments discrets	70
3.22 Calibration élastique du matériau constitutif	70
3.23 Construction d'une éprouvette cylindrique en éléments discrets <i>surfaccée</i> . .	71
3.24 Champs de déplacement des éléments discrets d'une face d'une éprouvette cylindrique lors d'un essai de compression	72

3.25 Calibration à rupture : essais de compression pour différentes valeurs du critère de rupture	72
3.26 Résultats des essais de compression numériques pour les critères en contrainte principale et hydrostatique	73
3.27 Éprouvettes de compression post mortem	73
3.28 Essais de compression sur éprouvettes numériques pour différentes vitesses de sollicitation	75
3.29 Sphères creuses de même géométrie ayant 1, 2 et 4,2 éléments dans l'épaisseur et respectivement 632, 2 300 et 10 676 éléments au total	76
3.30 Plaque circulaire encastrée soumise à une force ponctuelle en son centre . .	76
3.31 Résultats d'une plaque circulaire en éléments discrets encastrée soumise à une force ponctuelle en son centre	77
3.32 Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques de compression uni-axiale d'une sphère creuse	78
3.33 Rupture dynamique d'une sphère creuse (B) en compression quasi-statique en fonction du temps	78
3.34 Observation de l'amorçage multiple sur une sphère creuse de type B soumise à un essai de compression uni-axiale à une vitesse de $13,2 \text{ m.s}^{-1}$. .	79
3.35 Mise en évidence expérimentale et numérique de la présence de micro cracks avant la rupture principale	80
3.36 Présentation des moyens expérimentaux pour les essais balistiques au canon	81
3.37 Écrasement d'une sphère creuse (B) lancée à une vitesse de 124 m.s^{-1} contre une plaque rigide	81
4.1 Mesure des coordonnées de la pointe de fissure sur une sphère creuse	89
4.2 Estimation de la vitesse moyenne de propagation de fissure sur une sphère creuse de type B	90
4.3 Principe de mesure de la vitesse des ondes transversales à l'aide de deux transducteurs	91
4.4 Techniques de rupture dynamique pour la phase de <i>génération</i> par la méthode des éléments finis	93
4.5 Mise en évidence des énergies misent en jeu lors d'un essai de rupture . . .	96
4.6 Schéma d'une plaque prés-contrainte et <i>découpée</i> numériquement	97
4.7 Bilan d'énergies lors de la tension, stabilisation puis découpe d'une plaque	97
4.8 Rupture numérique dynamique d'une plaque à $0.01 c_r$	97
4.9 Premiers résultats du calcul du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique sur un essai de rupture sur plaque	98
4.10 Facteur de correction dynamique en fonction de la vitesse de propagation de fissure	99
4.11 Technique de découpe par zone de rupture : endommagement progressif des poutres	100
4.12 Comparaison de 3 schémas numériques d'endommagement des poutres . .	100
4.13 Facteur de correction dynamique en fonction de la vitesse de propagation de fissure pour différentes longueurs de zone de rupture	101
4.14 Calcul du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique sur un essai de rupture sur plaque en fonction de la longueur de fissure normalisée	102
4.15 Bilan d'énergie lors de la compression, stabilisation et rupture dynamique ($0,1 c_r$) d'une sphère creuse de type B	102

4.16	Propagation d'une rupture dynamique ($0,02 c_r$) sur une sphère creuse de type B	103
4.17	Évolution de l'énergie de rupture cumulée lors de la propagation d'une fissure au sein d'une sphère creuse	104
4.18	Facteur de correction dynamique global d'une sphère creuse en fonction de la position angulaire du sommet de fissure à différentes vitesses de propagation	105
4.19	Facteur de correction dynamique en fonction de la vitesse de propagation de la fissure sur sphère creuse pour différentes épaisseurs de coque	105
4.20	Analyse numérique de l'influence du frottement des surfaces rompues sur sphère creuse	106
4.21	Comportement bilinéaire en traction et cisaillement des contacts en DEM .	108
4.22	Décomposition de l'énergie de rupture en énergie de déformation moyenne sur les poutres lors de la propagation d'une fissure en mode I sur sphère creuse à $0,1c_r$	108
4.23	Modèle cohésif multi-déplacements	109
4.24	Forces de traction et de flexion et moments appliqués à une poutre en fonction des déplacement et de l'angle de rotation normalisés	110
4.25	Essai de traction sur une éprouvette cylindrique DEM	110
4.26	Bilan d'énergie d'un essai de traction sur une éprouvette cylindrique DEM .	111
4.27	Modèle de rupture par éléments discrets à l'aide du tenseur viriel et des poutres endommageables	112
4.28	Essai numérique de compression d'une sphère creuse en utilisant le modèle de rupture à poutres endommageables	112
4.29	Part de l'énergie de rupture lors d'un essai de compression sur sphère creuse pour deux valeur de taux de restitution d'énergie critique	113
4.30	Vitesse de déformation moyenne suivant la direction de la contrainte principale maximale dans la zone de rupture en fonction de la vitesse de fissuration	114
4.31	Exemple de propagation de fissure sinusoïdale dans une plaque précontrainte	115
5.1	Modélisation micro-macro de la compression de 7 sphères creuses ($r_t = 0,3$) dans une cellule cylindrique	120
5.2	Étude de l'influence du nombre de sphères creuses ($r_t = 0,3$) lors de la compression dans une cellule cylindrique	121
5.3	Modélisation micro-macro de la compression de 2 sphères creuses ($r_t = 0,08$) dans une cellule cylindrique	122
5.4	Étude de l'influence du nombre de sphères creuses de type B ($r_t = 0,08$) lors de la compression dans une cellule cylindrique	122
5.5	Modèle de rupture d'un grain basé sur le tenseur des contraintes	124
5.6	Méthodologie de modélisation multi-échelle pour la compression de sphères creuses	125
5.7	Essai de compression numérique sur un amas de 10 000 éléments contenus dans un cylindre	126
5.8	Résultat de l'essai de compression numérique sur un amas de 10 000 éléments contenus dans un cylindre	126
5.9	Histogramme 3D de l'orientation des contacts sur un amas de 10 000 éléments contenus dans un cylindre, avant compression	127

5.10	Histogramme 3D de l'orientation des contacts sur un amas de 10 000 éléments contenus dans un cylindre, avant compression à 10 % de déformation longitudinale	127
5.11	Évolution de la force de contact moyenne sur un élément dans un amas de 10 000 éléments contenus dans un cylindre	128
5.12	Exemples de géométries numériques de compression multi-contacts	128
5.13	Montage de l'essai pyramidal ($\eta = 0,8$) sur la roue inertielle	129
5.14	Réponse force - déplacement d'une sphère creuse de type B sous compression quasi-statique	130
5.15	Réponse force - déplacement d'une sphère creuse de type B sous compression dynamique	130
5.16	Observation des fissures entre les points de contacts lors de l'essai de compression pyramidal ($\eta = 0,8$)	131
5.17	Écrasement d'une sphère creuse sous compression dynamique : expérimental et numérique	132
5.18	Rupture d'une sphère creuse de type B pour différents chargements	132
5.19	Courbes force - déplacement de l'écrasement d'une sphère creuse de type B pour différents supports de chargement ($\eta = 0,33$ à $\eta = 1$)	133
6.1	Essai de compression uni-axiale quasi-statique sur du polystyrène expansé (30 kg.m^{-3})	140
6.2	Essai de compression uni-axial dynamique ($\nu \approx 2 \text{ m.s}^{-1}$) sur une sphère creuse double couche de type B	141
6.3	Modélisation du ménisque reliant les sphères creuses	142
6.4	Modélisation DEM d'une cellule de nid d'abeilles	142
6.5	Analyse paramétrique : évolution de la rigidité d'une sphère creuse en compression uni-axiale avec le rapport r/t	143
6.6	Compression confinée de 5000 sphères creuses libres	143
6.7	Impact d'un cylindre (diamètre 40 mm, hauteur 60 mm) de gélatine à 40 m.s^{-1} sur une surface plane : modélisation DEM et essai expérimental	144

Liste des tableaux

3.1	Synthèse des résultats de compression quasi-statique et dynamique sur sphères creuses	56
3.2	Application du schéma d'intégration <i>Verlet Vitesse</i> pour les positions linéaire et vitesses de translation d'un élément discret	59
3.3	Synthèse des paramètres du modèle Ree-Eyring identifiés	69
3.4	Paramètres élastiques macroscopiques (données expérimentales) et microscopiques (numériques, calibrées)	71
3.5	Synthèse des résultats numériques de compression sur sphères creuses . . .	78
4.1	Synthèse de la mesure des vitesses de propagation de fissure et première estimation de G_{Idc} , moyenne des résultats de chaque type d'essai	91
4.2	Synthèse de la mesure des vitesses de propagation de fissure et nouvelle estimation de G_{Idc} , moyenne des résultats de chaque type d'essai	107

Chapitre 1

Introduction générale

« *Captain : Got any ideas ?*

F/O : Actually not. »

Captain Chesley B 'Sully' Sullenberger III and F/O Jeff Skiles, flying an unpowered A320 over New York after suffering a bird strike that disabled both engines, they glided perfectly into the Hudson river with no loss of life. US Airways flight 1549, 15 January 2009.

30 août 2012. Un Boeing 737 de la compagnie United Airlines entre en collision avec un oiseau alors qu'il atterrit à l'aéroport de Denver. Le choc laisse un énorme trou dans la carlingue de l'appareil, visible sur la figure 1.1. L'équipage déclare une situation d'urgence à la tour de contrôle, rapportant des problèmes sur les stabilisateurs horizontaux et les sondes de vitesse.

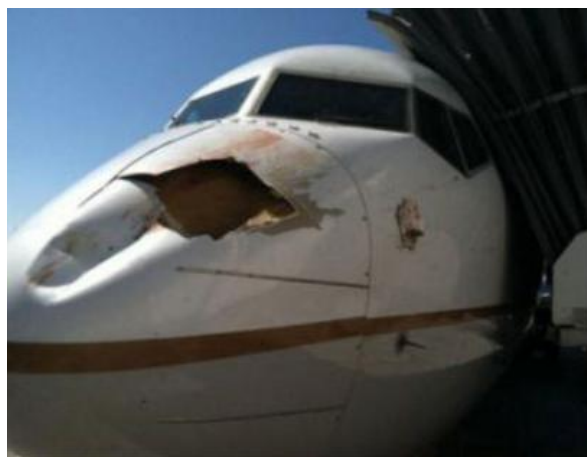


FIGURE 1.1 – Boeing 737 impacté

Le risque aviaire en aéronautique (bird strike en anglais) est une menace croissante pour l'aviation civile. Les chocs provoqués par la rencontre avec un oiseau peuvent compromettre la sécurité des voyageurs et les dégâts causés entraînent des coûts de réparation importants (ANDERSON et collab. [2015]). En 2010, à l'échelle internationale, 7 400 impacts d'oiseaux ont été recensés et 15 à 20 % des impacts ont causé des dommages

à la structure. Sur les 20 dernières années, cela a entraîné de nombreux accidents coûtant la vie à plus de 200 personnes (Figure 1.2). Le coût des diverses réparations a été estimé à plusieurs centaines de millions de dollars par an pour l'aviation civile.

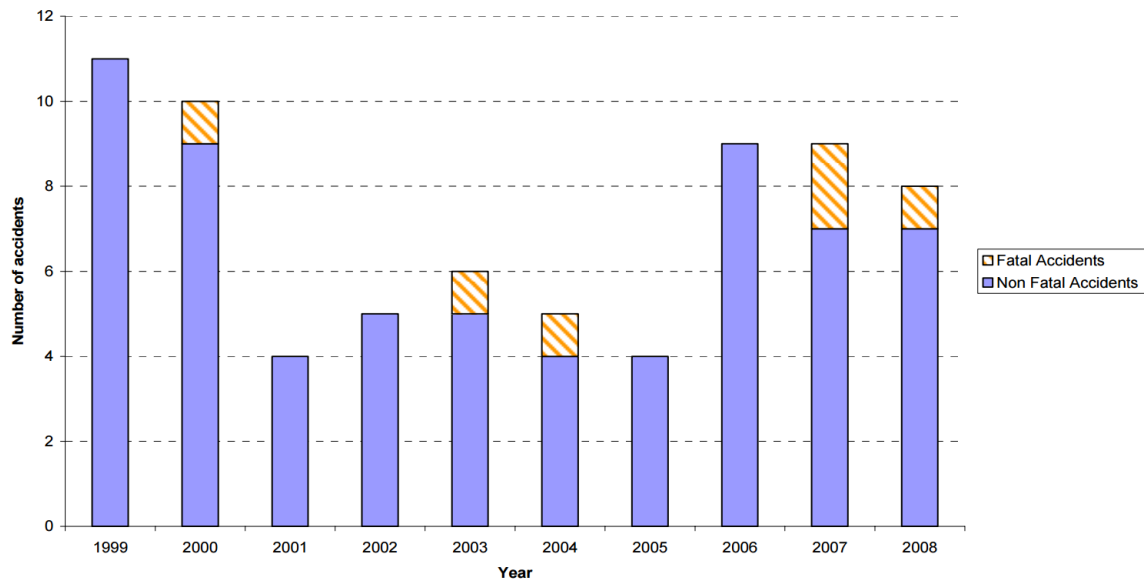


FIGURE 1.2 – Nombre d'accidents causés par des impacts d'oiseau entre 1999 et 2008 à l'échelle mondiale MARAGAKIS [2009]

La résistance à l'impact d'oiseaux sur des structures aéronautiques est donc devenue une priorité forte pour les avionneurs et les constructeurs d'aérostructures car :

- Le trafic aérien est en constante augmentation et donc la probabilité d'impact augmente.
- Il y a un impact négatif sur le public, sur la sécurité et la fiabilité des avions lorsqu'il y a un atterrissage d'urgence dû à un choc.
- Il y a une anticipation d'une augmentation des exigences de certification : justification aux multiples impacts, augmentation de la masse des oiseaux à justifier (la masse de certains grands oiseaux peuvent dépasser la masse maximale de certification).

Afin de prévenir des nouveaux accidents, l'Agence Européenne de la Sécurité Aérienne MARAGAKIS [2009], la Federal Aviation Administration DOLBEER et WRIGHT [2008] ou encore l'International Bird Strike Committee THORPE [2010] diffusent régulièrement des études sur les chocs à l'oiseau. Il est alors possible de connaître les parties de l'avion les plus souvent touchées (Figure 1.3) et les énergies d'impact mises en jeu (en fonction de la masse de l'oiseau et de la vitesse de l'avion) afin de dimensionner les structures impactées en conséquence.

Il est ainsi possible de voir qu'une proportion importante des chocs a lieu à l'avant de l'avion THORPE [2010], le pare-brise faisant référence à la surface vitrée et au nez de l'avion. Ce dernier est constitué d'un radôme de protection de l'antenne et joue aussi un rôle aérodynamique (voir Figure 1.4). Afin de ne pas bloquer ou atténuer le signal de l'antenne et de ne pas être trop lourd, les matériaux employés sont légers, fins et non métalliques. Une protection supplémentaire est donc nécessaire afin de prévenir les dégâts que pourrait causer un choc à cet endroit. En effet, la certification impose que l'avion puisse continuer à voler et atterrir en toute sécurité après une rencontre

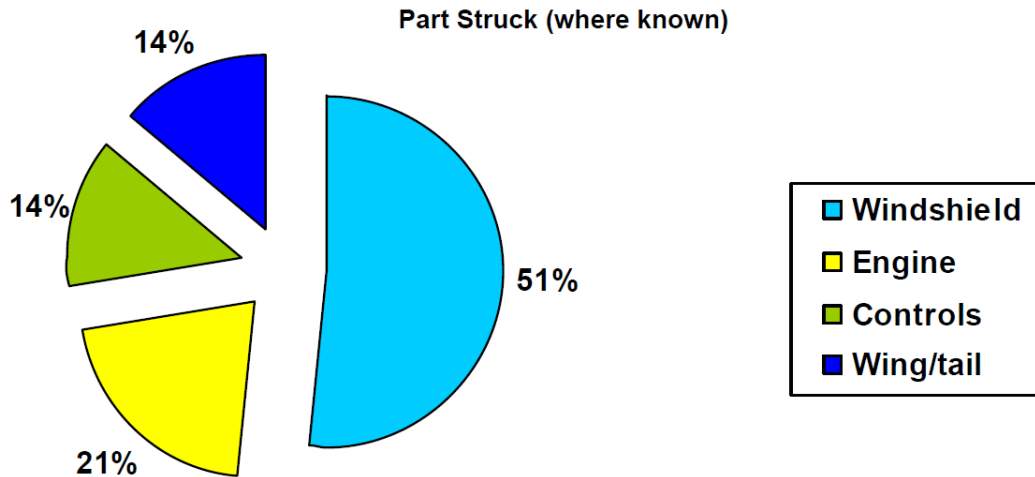


FIGURE 1.3 – Parties de l'avion les plus touchées par les impacts d'oiseaux THORPE [2010]

avec un oiseau d'une masse maximale de 1,81 kg et d'une vitesse relative de VC (vitesse de croisière) au niveau de la mer ou 0,85 VC à 8000 pieds (environ 175 m.s^{-1} pour un Airbus A320) d'après EASA [2012]. Les impacts peuvent avoir lieu à des températures très différentes : de -40°C à $+80^\circ\text{C}$. Les constructeurs ont mis en place depuis quelques années des boucliers permettant de protéger les pilotes et l'électronique du tableau de bord. De l'ordre du m^2 , ces panneaux d'une dizaine de centimètres d'épaisseur et d'une dizaine de kilogrammes absorbent les énergies d'impact en se déformant, voir Figure 1.4. Ils représentent une pièce importante du nez de l'avion et un secteur de niche où les innovations peuvent permettre de remporter des appels d'offres.



FIGURE 1.4 – Radôme d'Airbus A320 (levé)

C'est dans cet objectif que le projet SAMBA (Shock Absorber Material for Birdshield Application) a vu le jour. Porté par Stelia, filiale d'Airbus Group, il vise notamment à :

- Proposer un concept de structure de bouclier industriel à base d'une nouvelle technologie différente offrant des performances globales meilleures.
- Établir de nouveaux modèles prédictifs de boucliers avec des codes d'analyse en dynamique rapide (Abaqus/Explicit par exemple).
- Développer une méthode d'essai standard d'impact.
- Réduire le coût du bouclier significativement de 20 % à 30 %.

- Obtenir un gain de masse global de 10 % à 20 %.
- Automatiser le procédé de fabrication du bouclier et diminuer le nombre d'interventions.

Outre l'Institut d'Ingénierie et de Mécanique de Bordeaux où est réalisée cette thèse, plusieurs partenaires industriels et académiques ont rejoint le projet afin d'apporter chacun leur expertise en fabrication, caractérisation ou modélisation. On retrouve ainsi des grands groupes, des PME et deux laboratoires :

Stelia Aerospace : Porteur du projet, coordinateur technique et suivi de chaque partenaire.

AirbusGroup Innovations : centre de recherche d'Airbus Group participe aux travaux de SAMBA en tant qu'expert en analyse structures et matériaux.

Hutchinson : concepteur de boucliers au choc à l'oiseau pour les Dassault Falcon et fournisseur de matériaux, ils apportent leur expertise dans l'industrialisation des solutions retenues.

Le CEDREM : société de prestation de services dans le domaine de la simulation numérique et plus particulièrement des phénomènes physiques dynamiques à dominante impact, choc et explosion.

NIMITECH : développement de pièces composites et fournisseur de matériaux absorbeurs de chocs.

ATECA : expert dans les procédés de fabrication de matériaux spéciaux pour l'aéronautique, notamment des sphères creuses.

ESTEVE : première entreprise en Midi-Pyrénées à mettre en œuvre la technologie de fusion laser de poudre d'aluminium.

Institut Clément Ader : recherche sur les structures sandwichs.

Plusieurs solutions technologiques sont proposées par les différents partenaires du projet. Le nid d'abeille aluminium, actuellement utilisé dans la majorité des boucliers Airbus est maintenant talonné par les matériaux composites. Avec un coût de production en baisse et une connaissance accrue de leur comportement sous sollicitations dynamiques, leur usage est croissant. Parmi ce type de matériau on retrouve par exemple les pliages composites [HEIMBS et collab. \[2010\]](#), étudiés lors du projet CELPACT (Cellular Structures for Impact Performance) [ALASTAIR \[2006\]](#), un matériau à base d'agréats de silice noyés dans une résine et développé par NIMITECH ou encore les sphères creuses développées par ATECA (figure 1.5).

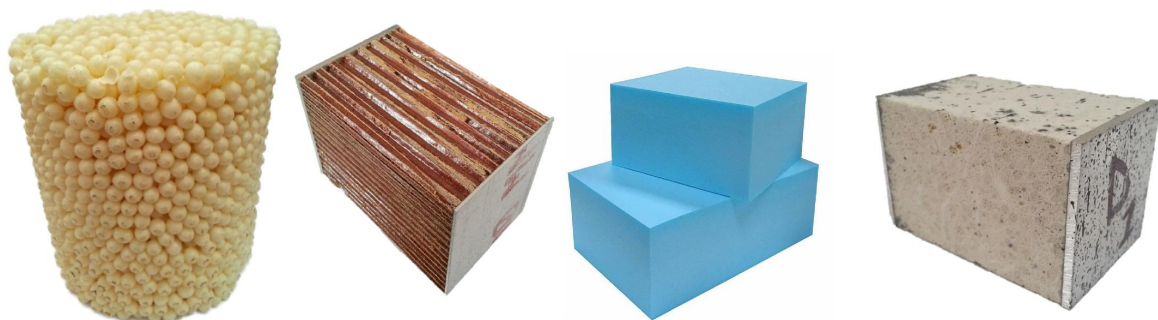


FIGURE 1.5 – Solutions candidates, de gauche à droite : sphères creuses, nid d'abeille Nomex, mousse polystyrène extrudée, SPRC

C'est sur cette dernière solution technologique, les sphères creuses composites que porte ce travail de thèse. Développées récemment, les sphères creuses à matrice polymère sont plus légères que celles en métal. Pourtant, peu d'études portent sur le comportement à l'impact de telles structures qui dissipent une grande partie de l'énergie libre par fissuration. Le processus original de fabrication (les sphères sont progressivement enroulées dans la résine) empêche la caractérisation sur des structures classiques habituellement utilisées pour estimer le taux de restitution d'énergie critique (G_{Ic}) du matériau. Des essais directement sur les sphères creuses sont donc nécessaires.

Cette étude vise à estimer l'énergie dissipée lors de l'écrasement de sphères creuses polymères sous sollicitation quasi-statique (5 mm.min^{-1}) puis dynamique ($\approx 1,5 \text{ m.s}^{-1}$). Un modèle numérique permettant d'optimiser ce type de structure est ensuite proposé.

Dans le chapitre 2, une étude bibliographique vient introduire la structure de type sphère creuse dans la famille des matériaux cellulaires utilisés pour l'absorption des chocs. Des essais préliminaires sur un assemblage de sphères creuses permettent de mettre en évidence leurs mécanismes de dissipation d'énergie et notamment l'énergie de création de surface. On donnera donc des notions de mécanique de la rupture utiles dans ces travaux de recherche.

Le chapitre 3 propose une première analyse du comportement mécanique d'une sphère creuse en compression uni-axiale. Des essais sont menés en régimes quasi-statiques et dynamiques afin d'évaluer l'influence de la vitesse de sollicitation. L'influence de l'épaisseur des sphères creuses sera étudiée. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de la méthode numérique par éléments discrets. Cette méthode s'appuie sur la plate-forme "Gran00", outil développé au laboratoire I2M. Après une description de la particularité et des avantages de cette méthode, notamment vis à vis des méthodes "classiques" comme les éléments finis, la modélisation du comportement élastique-fragile d'une sphère creuse est décrite. Une première approche reposant sur un critère de rupture en contrainte est utilisée.

Le chapitre 4 présente une démarche originale pour estimer le taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique du matériau basée sur la MELR (Mécanique Élastique Linéaire de la Rupture). La position de la pointe de fissure en fonction du temps est mesurée lors de la rupture d'une sphère ; les vitesses de propagation importantes caractérisent la présence d'effets inertiels au sein de la structure. Afin d'estimer ces derniers, une méthode numérique par éléments discrets est proposée après avoir été validée sur un cas connu de la littérature. La connaissance de l'énergie nécessaire à la propagation de fissure en régime dynamique du matériau étudié permet finalement de corriger le modèle numérique. Un critère de rupture prenant en compte l'énergie de création de surface peut être maintenant employé.

Le dernier chapitre est une ouverture vers la modélisation d'un assemblage de sphères creuses. Deux modèles sont présentés, un permettant la modélisation d'un nombre réduit de sphères creuses et l'autre pour la modélisation de plusieurs milliers de sphères creuses. Dans le deuxième cas, des essais multi-sphères sont réalisés à l'aide du modèle développé dans les chapitres précédents. En effet, lors de la sollicitation d'un assemblage de sphères creuses, les sollicitations sur chacune des sphères ne sont pas uni-axiales mais multi-axiales et les contacts sont de type sphère-sphère et non sphère-plan. Des modélisations et des essais expérimentaux seront proposés et comparés.

Ce travail est le premier à s'intéresser au comportement fragile de sphères creuses à l'échelle d'une seule sphère. Par conséquent, cette échelle que l'on peut qualifier de mésoscopique tient une place prépondérante dans ce travail de thèse. Des travaux sont toujours en cours afin d'utiliser ces résultats pour une modélisation à une plus grande

échelle comme ce qui est décrit dans le dernier chapitre.

1.1 Références

- ALASTAIR, J. 2006, «CELPACT : Cellular concept structure», http://cordis.europa.eu/result/rcn/47362_fr.html. 5
- ANDERSON, A., D. S. CARPENTER, M. J. BEGIER, B. F. BLACKWELL, T. L. DeVULT et S. A. SHWIFF. 2015, «Modeling the cost of bird strikes to us civil aircraft», *Transportation Research Part D : Transport and Environment*, vol. 38, p. 49–58. 2
- DOLBEER, R. A. et S. E. WRIGHT. 2008, «Wildlife strikes to civil aircraft in the united states 1990–2007», . 3
- EASA. 2012, «Compliance with cs-25 bird strike requirements», URL https://www.easa.europa.eu/system/files/dfu/certification-docs-certification-memorandum-'final'-EASA-CM-S-001-Issue-01_Compliance-with-CS-25-bird-strike-requirements_PUBL.pdf. 4
- HEIMBS, S., J. CICHOSZ, M. KLAUS, S. KILCHERT et A. JOHNSON. 2010, «Sandwich structures with textile-reinforced composite foldcores under impact loads», *Composite structures*, vol. 92, n° 6, p. 1485–1497. 5
- MARAGAKIS, I. 2009, «Bird population trends and their impact on aviation safety 1999-2008», . 3
- THORPE, J. 2010, «Update on fatalities and destroyed civil aircraft due to bird mstrikes with appendix for 2008 & 2009», dans *Proceedings of the International Bird Strike Committee*, vol. 29, p. 1–9. 3, 4

Chapitre 2

État de l'art

« It is clear that there is some difference between ends : some ends are energeia (energy), while others are products which are additional to the energeia. »

The first description of the concept of energy, by Aristotle

Sommaire

2.1 Introduction	10
2.2 Matériaux cellulaires pour l'absorption des chocs	10
2.2.1 Généralités sur les matériaux cellulaires	10
2.2.1.1 Définition	10
2.2.1.2 Propriétés mécaniques en compression	12
2.2.1.3 Modélisation	15
2.2.2 Sphères creuses	16
2.2.2.1 Définition	16
2.2.2.2 Les sphères creuses dans la littérature	17
2.2.2.3 Sphères creuses ATECA	20
2.2.3 Mise en évidence des mécanismes de dissipation d'énergie	22
2.2.3.1 Essais d'impacts préliminaires sur coupon de bouclier	22
2.2.3.2 Observations post mortem	24
2.3 La rupture dynamique	26
2.3.1 Objectifs	26
2.3.2 Notions de mécanique de la rupture	26
2.3.2.1 Modes de propagation	26
2.3.2.2 Critère de Griffith	27
2.3.2.3 Facteur d'intensité des contraintes	29
2.3.3 Application en régime dynamique	30
2.3.3.1 Propagation dynamique et bilan d'énergie	30
2.3.3.2 Méthodes expérimentales	33
2.3.4 Méthodes numériques pour la propagation de fissure	35
2.3.4.1 Méthodes continues par éléments finis	36
2.3.4.2 Méthodes discrètes	37

2.4 Conclusions	39
2.5 Références	40

2.1 Introduction

Afin de situer le cadre scientifique de ces travaux de thèse, il est utile de présenter dans un premier temps les matériaux cellulaires, famille de matériaux à laquelle appartiennent les sphères creuses. Après une description générale et une explication des mécanismes de dissipation d'énergie de ces matériaux, le cas particulier des sphères creuses sera introduit. Fournies par la société ATECA, les sphères creuses polymères présentent un comportement fragile et la rupture du matériau est un des principaux mécanismes pour l'absorption d'énergie. C'est pour cette raison que la dernière partie de cet état de l'art est consacrée à la mécanique de la rupture et notamment à la rupture dynamique. Ce cas particulier nécessite la prise en compte de la vitesse de fissuration pour l'estimation des énergies de rupture à partir d'essais expérimentaux. Un point sera fait sur les méthodes numériques actuelles permettant de simuler la propagation de fissures en régime dynamique.

2.2 Matériaux cellulaires pour l'absorption des chocs

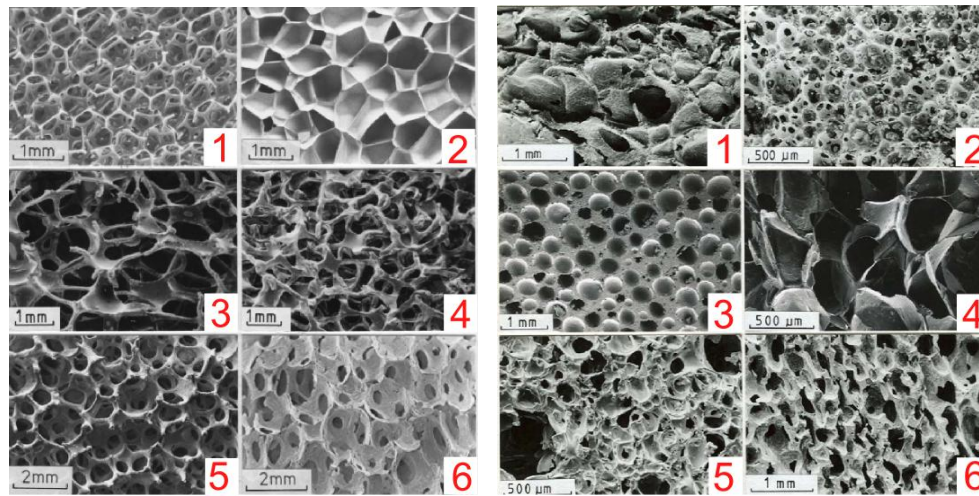
On appelle choc la rencontre plus ou moins violente et brusque de deux ou plusieurs corps. Ces corps, dont un au moins est en mouvement, subissent des déformations lorsqu'ils entrent en contact. Lors d'un choc élastique parfait, la somme des énergies cinétiques des corps est conservée après le contact, il n'y a pas eu de dissipation d'énergie. Les déformations sont généralement faibles et les forces de répulsion sont très importantes. Or, dans le cas de structures de protection au choc (casque, pare-choc, bouclier à oiseau), l'objectif est de limiter la force perçue par la personne ou la structure. Plusieurs mécanismes permettent un écrasement progressif de la structure protectrice limitant la force de contact : déformation réversible ou permanente, frottements, rupture. On peut noter qu'il est aussi possible de dissiper une partie de l'énergie d'impact par la déformation du projectile. Certains blindages balistiques sont revêtus d'une fine couche de céramique de dureté très élevée fragmentant les balles [WILKINS et collab. \[1969\]](#). Nous nous placerons cependant ici dans le cas où un amortissement du projectile est recherché. Ainsi, les matériaux cellulaires présentent de bonnes propriétés d'absorption de chocs et sont bien adaptés lorsqu'une solution légère est recherchée.

2.2.1 Généralités sur les matériaux cellulaires

2.2.1.1 Définition

En 1665, le mot cellule est utilisé pour la première fois par [HOOKE \[1665\]](#) pour définir la micro architecture d'un matériau, le liège. Présente dans le milieu végétal et animal, cette architecture sera ensuite copiée par l'homme avec notamment les mousses synthétiques. Un matériau cellulaire est donc un solide poreux composé de cellules pouvant être fermées ou ouvertes. Étant composé principalement d'air, de 70 % à 99.99 % pour les derniers matériaux cellulaires développés, il présente une faible densité. Le matériau qui constitue la paroi des cellules est appelé matériau constitutif. Il peut être de type métallique, polymère, céramique, composite... Le livre de [GIBSON et ASHBY \[1999\]](#) est une référence dans le domaine mais nous pouvons aussi citer un des premiers ouvrages traitant des matériaux cellulaires : [THOMPSON et collab. \[1942\]](#). [MUSTIN \[1968\]](#) a étudié les matériaux cellulaires en tant que matériau d'emballage pour le transport d'objets fragiles. [SHUTOV \[2013\]](#); [SUH et SKOCHDOPOLE \[1980\]](#) présentent des exemples

de mousses polymères. Une des premières études des mousses métalliques est effectuée par DAVIES et ZHEN [1983].



(a) Polyuréthane (1), Polyéthylène (2), (b) Pain (1), Meringue (2), Aero (3), Chips Nickel (3), Cuivre (4), Zirconium (5), (4), Malteser® (5), Gateau (6) Mullite (6)

FIGURE 2.1 – Exemples de matériaux cellulaires techniques à gauches et comestibles à droite GIBSON et ASHBY [1999]

Parmi les familles de matériaux cellulaires, nous pouvons citer :

Les matériaux cellulaires naturels : liège, os, éponge, nid d'abeilles...

Certains produits alimentaires : pain, meringue, Malteser® voir la figure 2.1b.

Les mousses polymères : polypropylène, polystyrène... Elles comportent des cellules fermées ou ouvertes, sont relativement peu chères et utilisées abondamment dans l'industrie. On introduit du gaz dans un monomère liquide, le mélange gonfle puis refroidit pour laisser la structure de la mousse, figure 2.1a.

Les mousses métalliques : en aluminium le plus souvent, fabriquées par injection de gaz ou par ajout d'un agent moussant dans le métal en fusion, figure 2.1a.

Les nids abeilles industriels : en aluminium ou polymère, ils sont largement utilisés en aéronautique. Leur structure est bi-dimensionnelle et leur comportement mécanique est très anisotrope.

Les treillis : pouvant être métalliques ou en polymère, ils commencent à se démocratiser avec l'arrivée des imprimantes 3D, figure 2.2.

Les sphères creuses : métalliques, polymères ou céramiques, plusieurs brevets ont été déposés ces dernières années pour leur fabrication. Elles sont récemment étudiées.

La taille et la forme des cellules font partie des caractéristiques essentielles des matériaux cellulaires puisque leurs propriétés en dépend fortement. Leur taille varie du micromètre à quelques centimètres généralement. Il est possible d'observer dans certains cas des différences importantes de tailles de cellules. Le matériau ne devient pas nécessairement anisotrope mais la dispersion peut entraîner de fortes localisations sous sollicitations mécaniques VIOT et collab. [2010].

La forme des cellules dépend essentiellement du processus d'élaboration. On peut faire la différence entre les formes régulières dans les cas des treillis par exemple et les formes aléatoires dans le cas d'une mousse classique. En effet, une fabrication

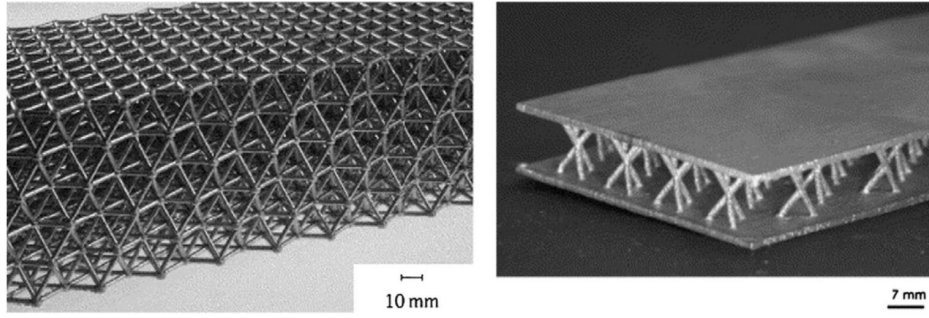


FIGURE 2.2 – Treillis octaédrique à gauche [DESHPANDE et collab. \[2001\]](#) et structure sandwich à treillis régulier à droite [WADLEY et collab. \[2003\]](#)

par moussage ne permet pas d'obtenir une structure microscopiquement contrôlée comme c'est le cas avec la fabrication additive [ROSEN \[2007\]](#). Enfin, l'arrangement des cellules entre elles joue aussi un rôle sur l'aspect visuel et le comportement du matériau [SILVA et collab. \[1995\]](#). Il est possible de résumer les principales caractéristiques géométriques des matériaux cellulaires sur la figure 2.3. La stochasticité traduit ici des formes irrégulières et ou un arrangement aléatoire. Les sphères creuses qui seront détaillées plus tard dans ce chapitre viennent combler ici l'espace inoccupé au centre de cette classification. Les cellules sont des sphères creuses présentant une porosité fermée mais leur organisation génère une porosité ouverte à l'extérieure [FALLET \[2008\]](#). De plus, elles peuvent avoir une même géométrie mais leur assemblage peut générer un réseau aléatoire ce qui les place à mi-chemin entre une structure périodique et stochastique.

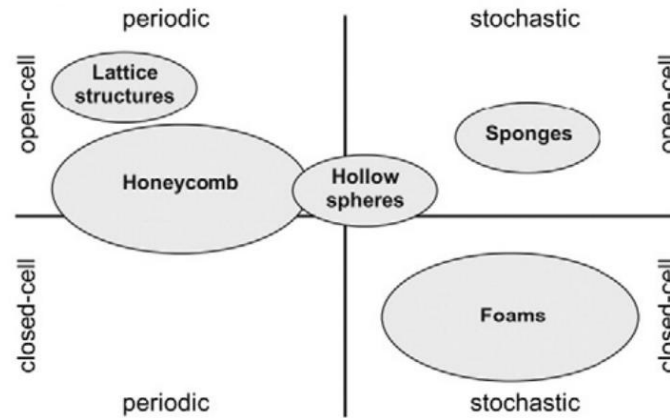


FIGURE 2.3 – Classification des matériaux cellulaires [REHME \[2010\]](#)

2.2.1.2 Propriétés mécaniques en compression

Une des principales caractéristiques des matériaux cellulaires permettant a priori d'évaluer son comportement en compression est la densité relative notée ρ_r . Elle est définie comme le rapport de la densité du matériau cellulaire ρ_{cel} sur la densité du matériau constitutif ρ_{co} .

$$\rho_r = \rho_{cel} / \rho_{co} \quad (2.1)$$

La section suivante propose un modèle simple du comportement mécanique de matériau cellulaire dépendant de la densité relative (pour peu que l'on connaisse les caractéristiques du matériau constitutif).

Les matériaux cellulaires présentent une faible densité (densité relative faible) et des caractéristiques mécaniques relativement intéressantes. La figure 2.4 présente un ordre de grandeur du module de Young et de la résistance à la compression de mousses et solides. Les plages des propriétés mécaniques sont fortement élargies par les matériaux cellulaires.

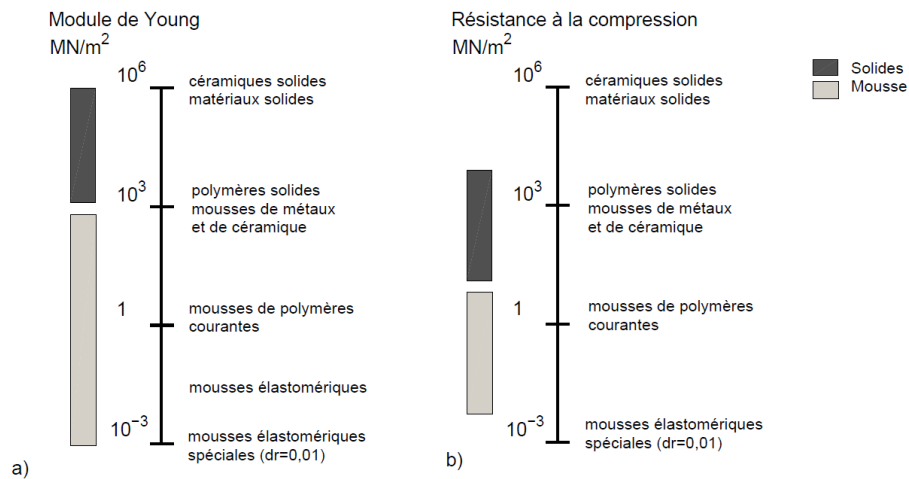


FIGURE 2.4 – Ordres de grandeurs des valeurs de modules de Young (a) et résistance à la compression (b) de mousses et solides GIBSON et ASHBY [1999]

De par ces nouvelles propriétés mécaniques, ils sont aujourd'hui beaucoup utilisés dans l'industrie. Leur rigidité et leur résistance spécifiques permettent par exemple de rigidifier des panneaux sandwichs en jouant le rôle d'un matériau d'âme. Une de leurs applications, qui est recherchée ici, est l'absorption d'énergie en cas de choc. Leur plage de déformation est grande et constante compte tenu de la déformation nécessaire pour « fermer » toutes les cellules en cas d'écrasement. L'énergie absorbée pour tout type de matériau peut être calculée à partir de la courbe force déplacement et correspond à l'aire sous la courbe.

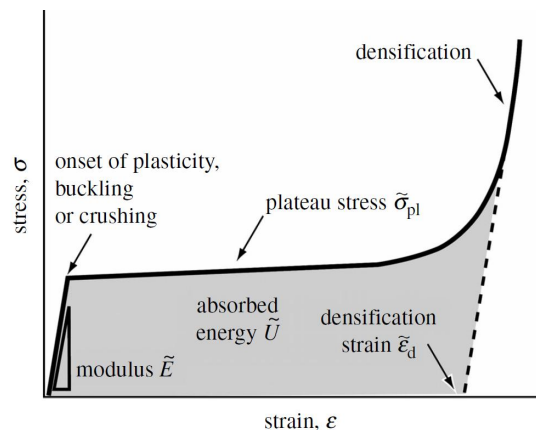


FIGURE 2.5 – Courbe contrainte déformation typique d'un matériau cellulaire ASHBY [2006]

Il est possible de décrire le comportement macroscopique en compression des

matériaux cellulaires en 3 phases à partir de la courbe contrainte-déformation de la figure 2.5 :

Phase élastique : caractérisée par une pente linéaire ou quasi-linéaire, l'élasticité est principalement due à la flexion des cellules. Cependant, il est possible d'observer des endommagements (plasticité, micro fissures...) localisés. Il est alors nécessaire de mesurer le module de Young macroscopique par un essai de décharge.

Phase plateau : la raideur macroscopique devient faible voir nulle pour certains matériaux cellulaires (nid d'abeille par exemple). La plage de déformation du domaine plateau est importante. Les cellules s'effondrent progressivement et leur résistance à l'écrasement peut être dépendante de la vitesse de compression. Ce phénomène peut avoir pour cause la compression de l'air contenu dans les cellules (si cellules fermées), la sensibilité du matériau constitutif à la vitesse de déformation ou encore des effets de micro-inertie. C'est principalement dans cette phase que peut être mis en évidence le comportement microscopique des matériaux cellulaires qui peut être :

- Élastomérique : les cellules se déforment par micro-flambement élastique des parois. Le comportement est réversible, la mousse revient à son état initial lors de la décharge, figure 2.6 (a)
- Élasto-plastique : Le matériau s'endommage de manière permanente. Les parois ou les arêtes des cellules flambent plastiquement, figure 2.6 (b)
- Fragile : les cellules se fissurent rapidement lors de la compression. Le plateau de compression présente une irrégularité où chaque pic local correspond à l'écrasement dynamique d'une cellule. Plus le nombre de cellules est important et plus cette irrégularité s'efface, figure 2.6 (c)

Phase de densification : toutes les cellules se sont effondrées, la densité relative tend vers 1 et le comportement mécanique tend vers celui du matériau constitutif. La contrainte devient donc très importante, la plage de déformation est généralement faible.

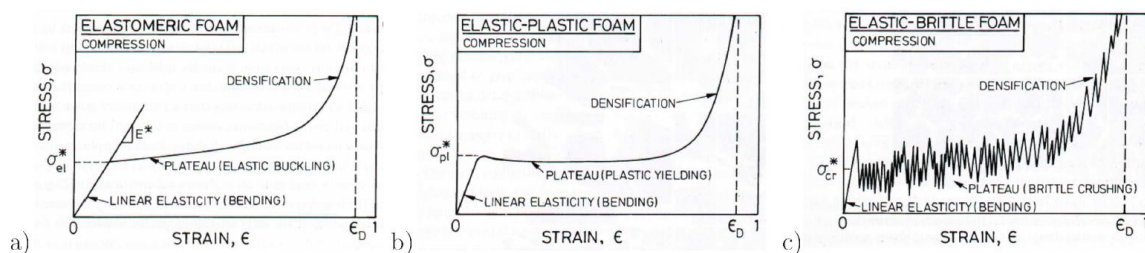


FIGURE 2.6 – Courbes contrainte déformation en compression pour différents comportements caractéristiques des matériaux cellulaires : élastique (a), élasto-plastique (b) et fragile (c) GIBSON et ASHBY [1999]

Deux choses essentielles sont à retenir ici pour l'usage des matériaux cellulaires comme absorbeur d'énergie au choc.

D'une part, leur comportement mécanique autorise une absorption d'énergie importante pour une contrainte modérée. Il est possible de représenter le diagramme d'énergie AVALLE et collab. [2001] permettant, pour une même valeur d'énergie absorbée par le matériau de connaître la contrainte maximale. Ainsi, l'utilisation d'un matériau

cellulaire permet de fortement réduire la contrainte maximale par rapport au matériau constitutif massif et donc de limiter les dommages sur la structure à protéger.

D'autre part, un matériau cellulaire fragile qui, au premier abord, peut n'apparaître pas forcément comme la meilleure solution pour la protection au choc peut présenter un bon comportement macroscopique et une énergie spécifique dissipée équivalente à une mousse élastomérique ou élasto-plastique. La part d'énergie liée à la déformation élastique (réversible) ou plastique reste limitée mais d'autres mécanismes de dissipation d'énergie spécifique ou non à ce comportement entrent en jeu : rupture du matériau (création de surface), frottement (solide et fluide) et effets inertiels. L'aérogel de silice est un exemple prometteur de matériaux cellulaire fragile [BHEEKHUN et collab. \[2013\]](#) tout comme les sphères creuses polymères qui seront détaillées plus tard dans ce chapitre.

2.2.1.3 Modélisation

Plusieurs modèles simulant le comportement mécanique des matériaux cellulaires ont été proposés dans la littérature. Une rapide présentation de ces modèles et de leurs intérêts permet de situer la méthodologie qui sera entreprise dans cette thèse.

Une des approches consiste à établir des lois de comportement phénoménologiques à partir d'essais macroscopiques. On s'intéresse ici au comportement global du matériau sans modéliser le comportement à l'échelle de la cellule. Le matériau est considéré homogène et comporte une phase élastique, un plateau et une phase de densification régies par un tenseur de déformation ou de contrainte. Dans le cas des mousses, la contrainte hydrostatique est par exemple largement utilisée [NEILSEN et collab. \[1987\]](#). Ces modèles comportent des constantes identifiées à l'aide d'essais expérimentaux spécifiques simples (compression simple ou confinée, cisaillement...) [SONG et collab. \[2005\]](#) ou multi-axiaux [DESHPANDE et FLECK \[2001\]](#). Une dépendance à la vitesse de déformation du matériau peut être mise en place [ZHANG et collab. \[1998\]](#). Facile à implémenter dans des logiciels de type éléments finis, ils s'adaptent à différents types de matériaux cellulaires : mousses métalliques [DESHPANDE et FLECK \[2000\]](#), mousses polymériques [ZHANG et collab. \[1998\]](#), nid d'abeilles [HEIMBS et collab. \[2006\]](#)... Néanmoins, ces modèles ne peuvent prédire le comportement mécanique lors d'un changement de la microstructure limitant l'optimisation micro architecturale du matériau cellulaire.

Des modèles analytiques ont été développés afin d'obtenir très rapidement un ordre de grandeur des principales caractéristiques mécaniques du matériau. Le modèle le plus utilisé à ce jour repose sur les travaux de Gibson et Ashby ([GIBSON et ASHBY \[1999\]](#) et figure 2.7). Des modèles plus complexes ont été développés depuis [JANUS-MICHALSKA et PEÇHERSKI \[2003\]](#) et appliqués à différents types de matériaux cellulaires comme le bois [PERSSON \[2000\]](#). Le modèle de Gibson et Ashby est basé sur une cellule cubique comportant un réseau d'arêtes, la théorie des poutres nous renseigne sur la déformation de la cellule en fonction de la contrainte appliquée. À partir de la densité relative du matériau cellulaire, de la présence de cellules ouvertes ou fermées et des caractéristiques mécaniques du matériau constitutif, le comportement peut être évalué. Par exemple, dans le cas de cellules ouvertes, nous obtenons :

$$E_r = C_1 \rho_r^2 \quad (2.2)$$

$$\sigma_r = C_2 \rho_r^{3/2} \quad (2.3)$$

avec E_r le rapport du module de Young du matériau cellulaire et constitutif et σ_r le rapport de limite d'élasticité. C_1 et C_2 sont deux constantes qui seront identifiées expérimentalement. Il est possible d'étendre ces modèles pour des comportements élastiques, plastiques ou fragiles, figure 2.7 et des formes de cellules différentes.

Les modèles d'homogénéisation qui s'appuient aussi sur des études analytiques considèrent le matériau cellulaire comme un milieu homogène équivalent, dans le cas de mousses [EBINGER et collab. \[2005\]](#); [HARDENACKE et HOHE \[2009\]](#) et de nid d'abeilles [LEE et collab. \[1996\]](#) par exemple. Ces modèles, bien que robustes et très efficaces ne permettent pas d'obtenir une grande précision car ils ne prennent en compte qu'un nombre limité de paramètres.

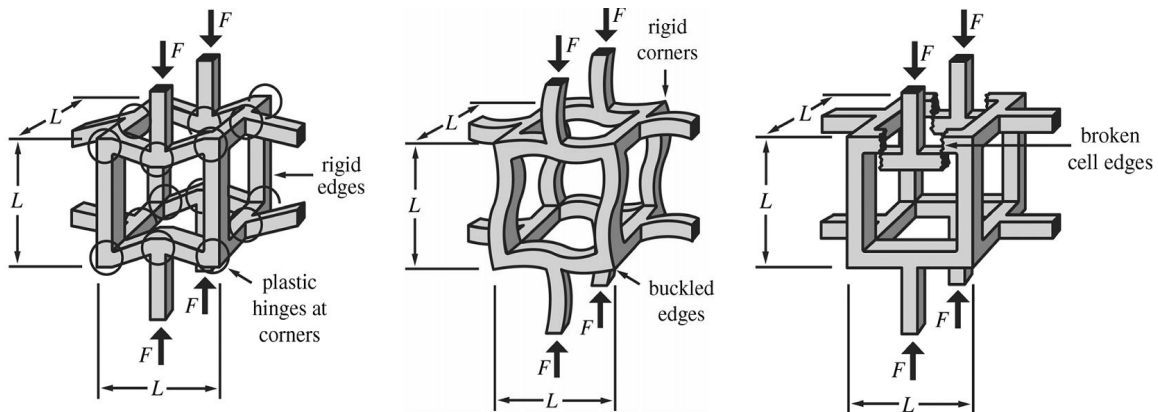


FIGURE 2.7 – Modèle analytique du comportement mécanique de différentes mousses à cellules ouvertes [ASHBY \[2006\]](#)

Enfin, les modèles numériques sont de plus en plus utilisés pour comprendre et prédire l'écrasement des cellules à une échelle micro puis le comportement à une échelle supérieure. Nous n'entrerons pas dans les détails ici car ce sujet sera abordé dans le cas des sphères creuses dans la suite de ce chapitre. Nous pouvons néanmoins citer quelques applications des modèles numériques : l'écrasement d'une cellule de nid d'abeille [AMINANDA et collab. \[2005\]](#), l'étude de la courbure des cellules sur la réponse mécanique [SIMONE et GIBSON \[1998\]](#), l'écrasement de cellules simplifiées d'une mousse métallique... Il est possible de reconstruire la géométrie réelle de plusieurs cellules en utilisant des techniques de découpes successives de l'échantillon [MICHAILIDIS et collab. \[2010\]](#) ou de tomographie par rayon X ([JEON et collab. \[2010\]](#); [SHEN et collab. \[2006\]](#); [YOUSSEF et collab. \[2005\]](#)). Une fois la géométrie obtenue, le modèle peut être maillé par des éléments coques (dans le cas de paroi de cellules fines), solide ou poutres. La figure 2.8 présente un modèle de mousse métallique maillée en éléments tétraèdres, obtenu par tomographie à rayon X.

2.2.2 Sphères creuses

2.2.2.1 Définition

Les structures ou matériaux cellulaires de sphères creuses sont constitués d'un arrangement de cellules sphériques en contact. Les sphères peuvent être libres entre elles et dans ce cas, l'arrangement peut évoluer lors d'une sollicitation mécanique. Elles peuvent être aussi liées par un contact solide. Les dimensions observées pour le diamètre vont de 0,5 mm à 30 mm pour des épaisseurs variant de 10 μm à 2000 μm . Comme son nom l'indique, l'intérieur de la cellule contient de l'air ou du vide. Toutefois, il est aussi

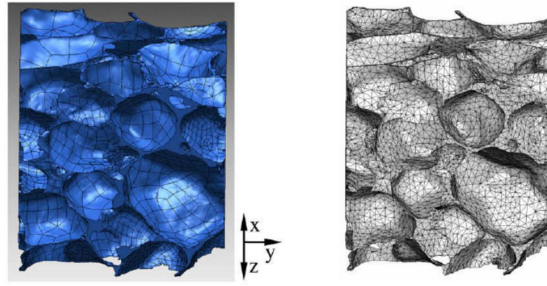


FIGURE 2.8 – Modélisation éléments finis d'une mousse issue d'une tomographie à rayons X [JEON et collab. \[2010\]](#)

possible de produire des sphères "double couches" présentant une coque rigide et un cœur de type mousse. Cette éventualité ne sera pas abordée ici mais des études sont en cours pour étudier cette nouvelle structure. Nous considérons donc les sphères creuses comme un matériau cellulaire à porosité mixte, un volume fermé à l'intérieur des cellules mais ouvert à l'extérieur de celles-ci.

Les sphères creuses présentent de nombreux avantages dans le cas de protections aux chocs. Outre leur comportement mécanique qui sera abordé par la suite, elles peuvent s'insérer facilement dans différents types de structures : tubes, nida, pare-choc, casque. Il est possible de réaliser des moulages afin d'obtenir des formes complexes d'un assemblage de sphères creuses liées entre elles. Enfin, afin de répondre à une application spécifique il est possible de choisir les paramètres adaptés afin de créer un matériau sur mesure. Les paramètres suivant interviennent sur le comportement des sphères creuses :

1. Le matériau constitutif
2. Le diamètre et l'épaisseur, que l'on posera comme le rapport épaisseur t sur le rayon moyen de la sphère creuse r : $r_t = t/r$, figure 2.9.
3. La forme et la taille du ménisque reliant deux sphères dans le cas où il existe. On utilisera le rapport de la largeur du ménisque r_b sur le rayon moyen r ou l'angle de recouvrement du ménisque θ , figure 2.9.
4. L'arrangement des sphères entre elles (aléatoire ou ordonné)

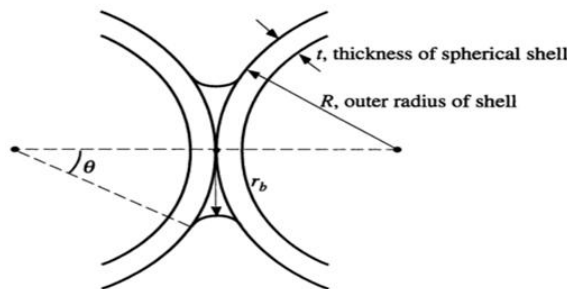


FIGURE 2.9 – Représentation des paramètres géométriques de deux sphères creuses en contact

2.2.2.2 Les sphères creuses dans la littérature

Les premières recherches sur les sphères creuses se sont basées sur la théorie des milieux continus afin de résoudre des cas de chargements simples et sur une seule sphère. Le cas de sphères sous pression interne ou externe a été abordé par [ABEYARATNE et](#)

HORGAN [1984]. Le cas d'un chargement uni-axial est étudié par WAN et collab. [1998], ils montrent que la contrainte circonférentielle est positive (traction), loin des points de contact.

Deux brevets concernant la fabrication de sphères creuses métalliques ont été déposés dans les années 80 : BLOTTIERE et collab. [1985]; JAECKEL [1982]. Quelques années supplémentaires ont été nécessaires pour que l'utilisation industrielle des sphères creuses soit envisagée. L'étude du comportement des sphères creuses en tant que matériau cellulaire est donc assez récente, une dizaine d'années pour la majorité des résultats.

Même si la tenue structurelle et l'amortissement des chocs restent une de leurs applications principales, on peut souligner d'autres intérêts des sphères creuses comme l'isolation phonique GASSER [2003] ou thermique FIEDLER et collab. [2008].

Des premières études numériques basées sur la méthode des éléments finis ont été menées sur un assemblage ordonné de sphères creuses métalliques. Tout d'abord sur un assemblage cubique simple (C) SANDERS et GIBSON [2003b] puis cubique centré (CC) et cubique face centrée (CFC) SANDERS et GIBSON [2003a], une partie des résultats est représentée sur la figure 2.10. En termes de limite élastique spécifique, les assemblages de sphères creuses ordonnées se placent à mi-chemin entre un matériau cellulaire à porosités ouvertes et fermées (par rapport au modèle analytique de Gibson et Ashby). Un nombre de contacts entre sphères de plus en plus important (6, 8 et 12 respectivement pour les réseaux CS, CC et CFC) augmente la rigidité et la limite élastique spécifique de l'assemblage final, figure 2.10.

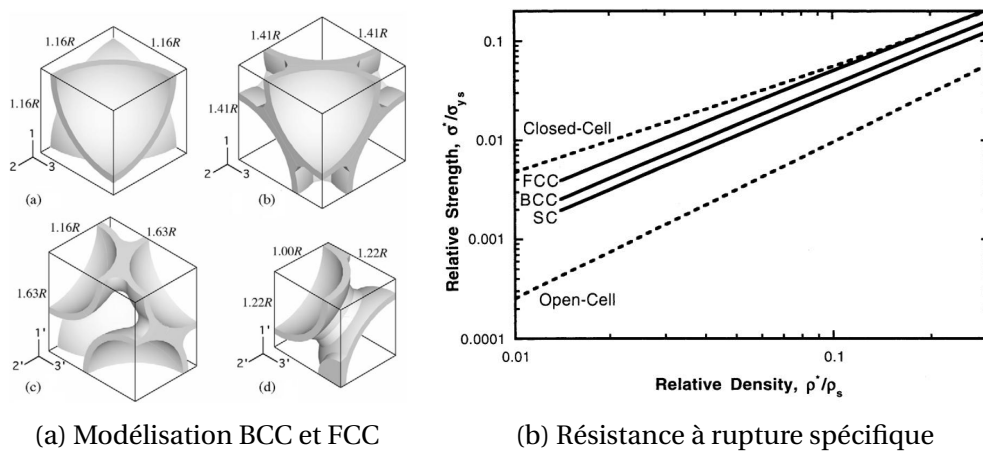


FIGURE 2.10 – Évolution de la résistance à rupture spécifique en fonction de différents assemblages de sphères creuses métalliques SANDERS et GIBSON [2003a]

Des travaux récents se sont intéressés à l'utilisation de sphères creuses en nickel pour le matériau d'âme de structures sandwichs CATY [2008]; FALLET [2008]; LHUISSIER [2009]. Des sphères creuses de différents diamètres (1,5 à 3 mm), épaisseurs (45 à 100 μm) et fournisseurs (ATECA et PLANSEE) ont été étudiées. Une analyse multi-échelle a été conduite : modélisation éléments finis du contact entre deux sphères puis modélisation discrète d'un assemblage de sphères creuses pour de petites déformations. Des essais de compression in situ par tomographie à rayons X ont permis de mettre en évidence les mécanisme de déformation d'une structure composée de sphères creuses, voir la figure 2.11.

Dans la thèse de CATY [2008], la tomographie a été utilisée afin de reproduire numériquement un arrangement aléatoire de sphères creuses, illustré sur la figure 2.12.

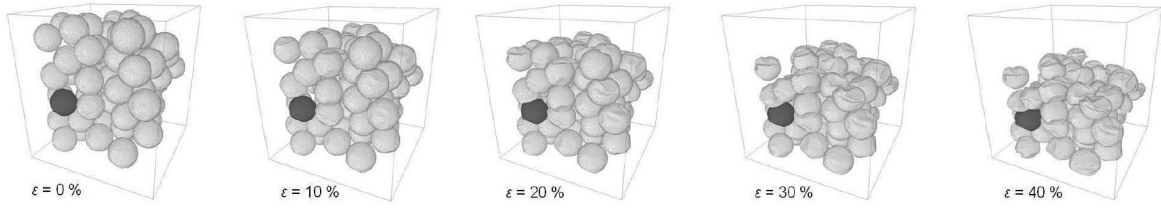


FIGURE 2.11 – Essai de compression sur un assemblage de sphères creuses métalliques in situ par tomographie à rayons X [FALLET \[2008\]](#)

Des essais de fatigue ont été conduits menant à une estimation de la durée de vie d'une structure de sphères creuses soumises à un chargement cyclique.

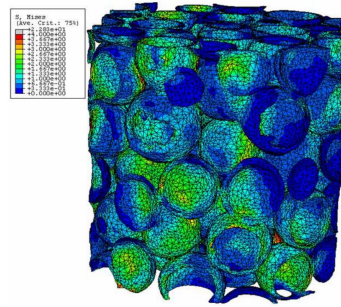


FIGURE 2.12 – Contrainte de Von-Mises sur un assemblage de sphères creuses en compression modélisées par éléments finis issue d'une tomographie à rayon X [CATY \[2008\]](#)

Le cas d'une seule sphère creuse en compression uni-axiale a été étudié expérimentalement et numériquement, dans un premier temps en quasi-statique [LIM et collab. \[2002\]](#) puis en dynamique, figure 2.13. Une augmentation de la rigidité apparente liée à la vitesse de déformation des sphères creuses a notamment été mise en évidence. À très haute vitesse d'impact, plus de 100 m.s^{-1} , un phénomène de micro inertie des parois apparaît engendrant une oscillation importante de la réponse et une force à rupture plus élevée.

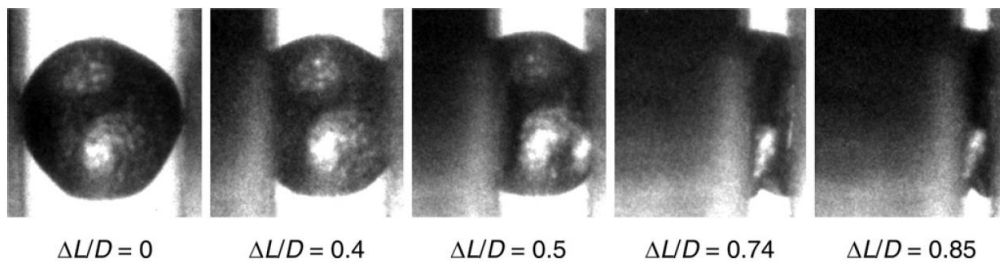


FIGURE 2.13 – Compression dynamique d'une sphère creuse métallique à une vitesse de 2 m.s^{-1} [LI et collab. \[2012\]](#)

Cette augmentation de force à rupture a été tirée à profit pour concevoir des arrangements à gradient de densité permettant une meilleure absorption des chocs. En plaçant des sphères de densité relative plus importante du côté de l'impact, l'énergie totale dissipée est supérieure et la force maximale inférieure pendant l'écrasement du matériau.

Les arrangements de sphères creuses métalliques ont donc été largement étudiés. Un recueil des différentes études est regroupé dans un ouvrage *Multifunctional metallic*

hollow sphere structures : manufacturing, properties and application par AUGUSTIN [2009].

Parmi les autres matériaux constitutifs, nous retrouvons les sphères creuses céramiques 3M; COCHRAN [1998]. Les applications concernent majoritairement l'intégration de ces micro sphères dans des résines en tant que charge. Elles sont aussi employées pour la fabrication de structures réfractaires SARGEANT [1991].

Concernant les sphères creuses polymères, leur utilisation est encore plus récente et peu d'information peut être trouvée à leur sujet. Les sphères creuses sont d'ailleurs pour la plupart issues de la société ATECA. Des essais, où les sphères creuses jouent le rôle de cœur d'une structure sandwich ont été entrepris permettant de mettre en évidence le potentiel de ces sphères creuses pour l'absorption des chocs RAHMÉ et collab. [2012]. Comme dans le cas des sphères creuses métalliques, l'utilisation d'un gradient de densité a montré une influence sur la réponse à des sollicitations dynamiques HOHE et collab. [2012]; ZENG et collab. [2010]. Toutefois, ces recherches ont été menées sur le comportement global des sphères creuses, l'identification des modes de ruine et des mécanismes de dissipation d'énergie à l'échelle de la sphères n'ont pas été étudiés dans le cas d'un matériau constitutif supposé fragile. Les études les plus proches concernent l'étude du comportement en compression de plaque de plâtre, où les cellules du matériaux sont de forme sphériques et sont fragiles BOUTERF et collab. [2017].

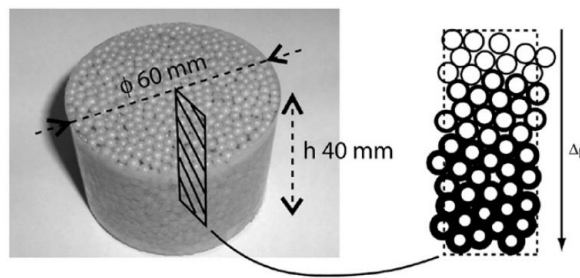


FIGURE 2.14 – Éprouvette de sphères creuses ATECA polymères à gradient de densité ZENG et collab. [2010]

2.2.2.3 Sphères creuses ATECA

Les sphères creuses étudiées dans cette thèse proviennent de la société ATECA (Montauban), partenaire du projet SAMBA. Pionnière dans la recherche et la production de sphères creuses, un premier brevet est déposé en 1985 pour les sphères métalliques BLOTTIERE et collab. [1985] et en 1994 pour les sphères polymères BLOTTIERE et collab. [1994].

Plusieurs types de sphères creuses ont été produits (figure 2.15), présentant chacun des caractéristiques propres.

Ce travail de thèse vise à étudier le comportement mécanique de sphères creuses composites (résine époxyde SICOMIN® et charges micrométriques, visibles sur l'image par microscope de la figure 2.16 car elles ont une densité relative inférieure aux sphères creuses métalliques et présentent un bon potentiel pour l'absorption des chocs jusqu'ici encore peu exploité.

Le procédé de fabrication des sphères creuses polymères se distingue de celui des sphères creuses métalliques qui utilise un procédé électrochimique (dépôt chimique sur un mandrin de polystyrène expansé d'une fine couche de cuivre afin de rendre la surface conductrice puis électrolyse au tonneau). Dans le cas d'une résine thermodurcissable,

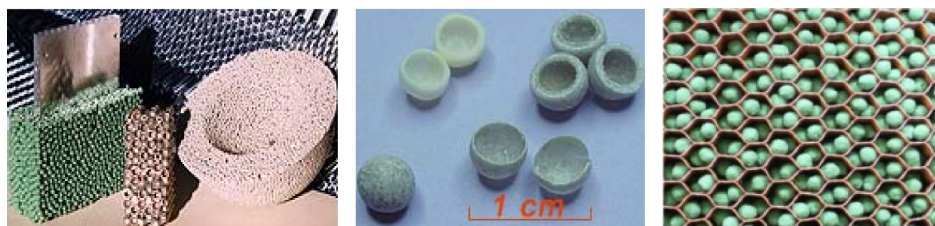


FIGURE 2.15 – Exemples de sphères creuses ATECA, de gauche à droite : moulages de différentes géométries, sphères creuses céramiques et polymères, incorporation de sphères creuses dans un nid d'abeilles (brevet [SIMON et collab. \[2015\]](#))

le procédé consiste à recouvrir un mandrin en polystyrène en étapes successives. La résine et les charges sont ajoutées au fur et à mesure que l'on mélange le tout dans un récipient jusqu'à obtenir l'épaisseur voulue. Les sphères sont ensuite placées dans un four afin de polymériser la résine. Un dernier cycle de chauffe, au-delà de la température de fusion du polystyrène, fait fondre celui-ci et permet d'obtenir des sphères creuses. Un ajout de résine pendant la dernière étape conduit à la création d'un ménisque au contact de chaque sphère et à la solidarisation de celles-ci. La maîtrise de la quantité de résine ajoutée va permettre de contrôler la largeur du ménisque.

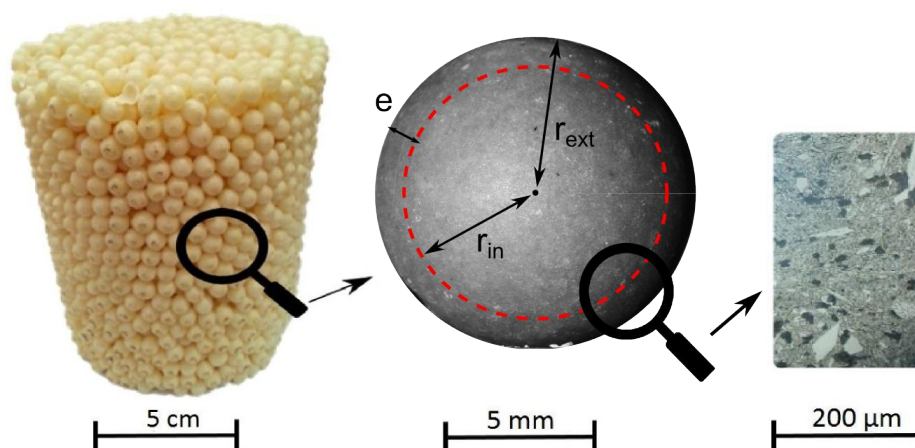


FIGURE 2.16 – Zoom sur un assemblage de sphères creuses ATECA en polymère : échelle macroscopique, mésoscopique et microscopique

Le diamètre intérieur des sphères est dépendant du diamètre du mandrin. Dans la pratique, les mandrins utilisés vont de 1 à 30 mm de diamètre environ. Le diamètre moyen des sphères produites, de fine épaisseur, est donc sensiblement identique. Le rapport r_t minimum est d'environ 0,04 alors que le rapport maximum observé est d'environ 0,1-0,15. Une épaisseur trop importante fait perdre l'intérêt de la faible densité relative de ce matériau cellulaire.

Concernant la dispersion en diamètre et épaisseur d'un lot de sphères, la figure 2.17 détaille les mesures effectuées sur un lot d'une cinquantaine de sphères de diamètre moyen 6,47 mm et d'épaisseur moyenne 167 μm soit un rapport r_t d'environ 0,052. L'écart type en diamètre est de l'ordre de 0,12 mm soit un coefficient de variation de 2 %, ce qui reste faible. En effet, des études antérieures [CATY \[2008\]](#) ont montré un coefficient de variation du diamètre variant de 5 à 10 % pour des sphères creuses métalliques. Le coefficient de variation de l'épaisseur est lui, beaucoup plus important, près de 20 % mais toujours inférieur aux sphères creuses métalliques (20 à 50 %).

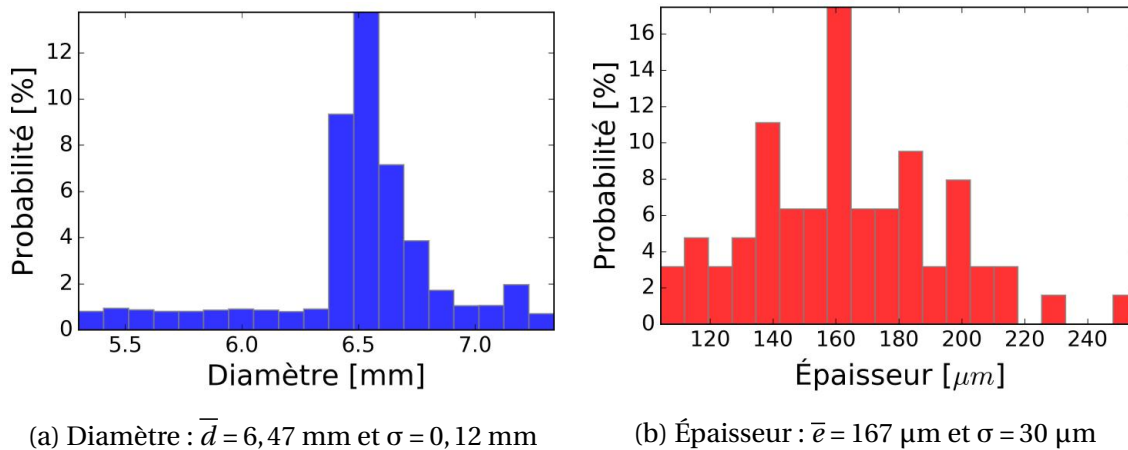


FIGURE 2.17 – Distribution en diamètre et épaisseur d'un lot de sphères creuses (donnée ATECA)

Comme nous l'avons vu dans la littérature sur les sphères creuses, plusieurs outils, notamment des lois de changement d'échelles analytiques ont été proposés pour estimer le comportement des sphères creuses. Toutefois, ces lois ne concernent que le domaine élastique ou le domaine plastique pour de faibles déformations et pour des matériaux ductiles. Dans notre cas, le matériau constitutif, de la famille des thermdurcissables, a un comportement fragile et aucune étude n'a été effectuée sur ce type de sphère. La fragilité de ce matériau peut être définie par la propagation d'une fissure sans arrêt sous contrainte mécanique. La prochaine partie présente des essais préliminaires, à l'échelle d'un assemblage de sphères afin de mettre en évidence les modes de ruines et les mécanismes de dissipation d'énergie de ces nouvelles sphères creuses.

2.2.3 Mise en évidence des mécanismes de dissipation d'énergie

2.2.3.1 Essais d'impacts préliminaires sur coupon de bouclier

Dans le cadre du projet SAMBA, plusieurs solutions technologiques intégrant les sphères creuses ont été proposées : structure sandwich avec une âme de sphères creuses libres ou collées, sphères incluses dans un nid d'abeille aluminium, structure multi-étages sphères / mousses.

Des essais préliminaires ont été réalisés sur différentes architectures et pour différentes sollicitations. Ils permettent ainsi de mettre en évidence la participation des sphères creuses dans l'absorption d'énergie, d'analyser en temps réel la ruine de la structure et d'obtenir des résultats qualitatifs sur les mécanismes de dissipation d'énergie.

Une première solution étudiée consiste à intégrer des sphères creuses dans un nid d'abeilles aluminium. Le diamètre extérieur des sphères est légèrement inférieur au diamètre des cellules du nida de sorte que l'on ait une colonne de sphères par cellules. Les essais sur cette structure ont été conduits sur une tour de chute afin de réaliser une compression supposée dynamique de la structure. Les éprouvettes ont été dimensionnées pour une énergie d'impact de l'ordre de 400 J avec une vitesse d'impact de 5 à 6 m.s⁻¹ (hauteur de chute de 1,5 m) et une masse de 23 kg. Bien que loin des conditions réelles de vitesse, cette expérience nous offre de premiers résultats dynamiques. Un capteur laser est utilisé afin de suivre le déplacement de l'impacteur. Un capteur de force piézoélectrique (Kistler 9061A) est placé entre l'impacteur et la masse tombante. Une caméra rapide (Photron APX-RS) filme l'écrasement de l'éprouvette à une fréquence de 10 000 images par seconde. Les éprouvettes sont des parallélépipèdes de 110 mm de

côté et 50 mm de hauteur. Elles sont constituées d'une âme (nida et sphères creuses) et de deux peaux aluminium de 2 mm pour la face impactée et 0,8 mm pour la face arrière. Compte tenu de la sollicitation uni-axiale, les peaux ont très peu d'influence. Elles ont été mises en place afin de tester l'échantillon dans les mêmes conditions que le bouclier actuel. Cinq types d'éprouvettes sont testés, une sans sphères creuses et 4 avec des remplissages différents allant de 68 kg.m^{-3} de sphères creuses à 152 kg.m^{-3} . La répétabilité des résultats est vérifiée en utilisant 3 éprouvettes pour chaque type de remplissage.

La figure 2.18 nous montre l'écrasement progressif d'un nida contenant des sphères creuses de densité 107 kg.m^{-3} . La vitesse mesurée lors de l'impact est de $5,7 \pm 0,1 \text{ m.s}^{-1}$

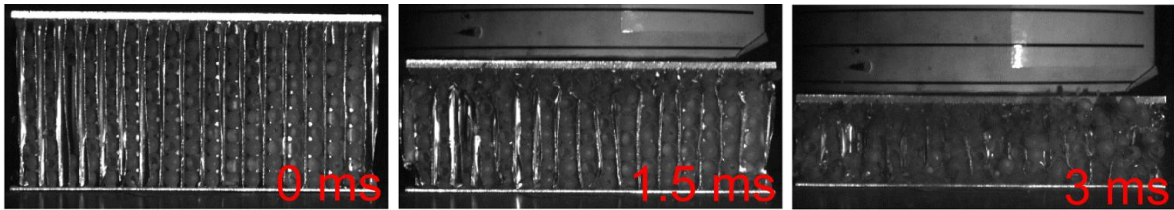


FIGURE 2.18 – Essais de compression dynamique sur un Nid d'abeille aluminium rempli de sphères creuses à une vitesse $v \approx 6 \text{ m.s}^{-1}$ ($\Delta t = 1,5 \text{ ms}$)

L'énergie dissipée lors de la compression de la structure est calculée en intégrant la courbe de force en fonction du déplacement. En se plaçant avant la phase de densification, à un écrasement de la structure équivalent, il est possible de comparer les énergies dissipées pour les différentes configurations 2.19. L'ajout de sphères creuses dans la structure nida augmente bien l'énergie dissipée pour un écrasement identique. On observe aussi très peu de dispersion.

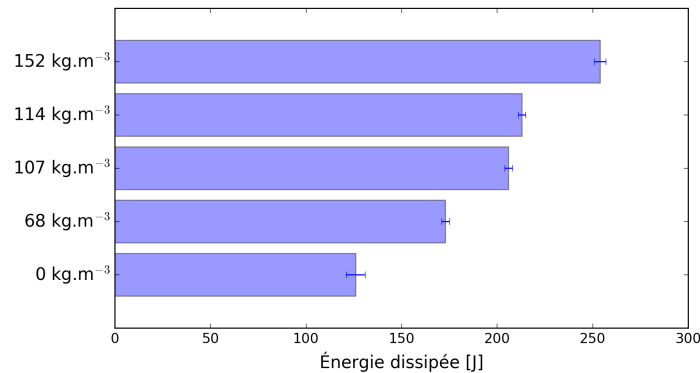


FIGURE 2.19 – Énergie dissipée à $\Delta L/L_0 = 0,6$ de la structure nida sous compression dynamique pour différents remplissages de sphères creuses, de 0 kg.m^{-3} (vide) à 152 kg.m^{-3}

La deuxième solution étudiée propose de n'utiliser que des sphères creuses pour l'âme du bouclier. Afin de s'approcher au mieux d'un impact à l'oiseau, il a été décidé de réaliser des tirs de gélatine à l'aide d'un canon à air comprimé. De diamètre 45 mm, le canon permet de lancer des projectiles de 80-100 g à environ 50 m.s^{-1} lorsque celui-ci est alimenté par de l'air sous pression à 60 bar. Une gélatine d'un indice de Bloom de 300 (quantification de la résistance à l'enfoncement d'une solution de gélatine) est utilisée et sa concentration massique est de 10 %. Deux caméras rapides sont utilisées, une perpendiculaire à l'impact (Photron APX-RS) à partir de laquelle il est possible de mesurer la position de l'impacteur en fonction du temps et donc de calculer la vitesse

d'impact. La deuxième caméra (Photron SA5) se trouve à 45° par rapport à la direction du canon et nous offre une vue d'ensemble de l'impact. La fréquence d'échantillonnage est de 42 000 images par seconde pour les deux caméras.

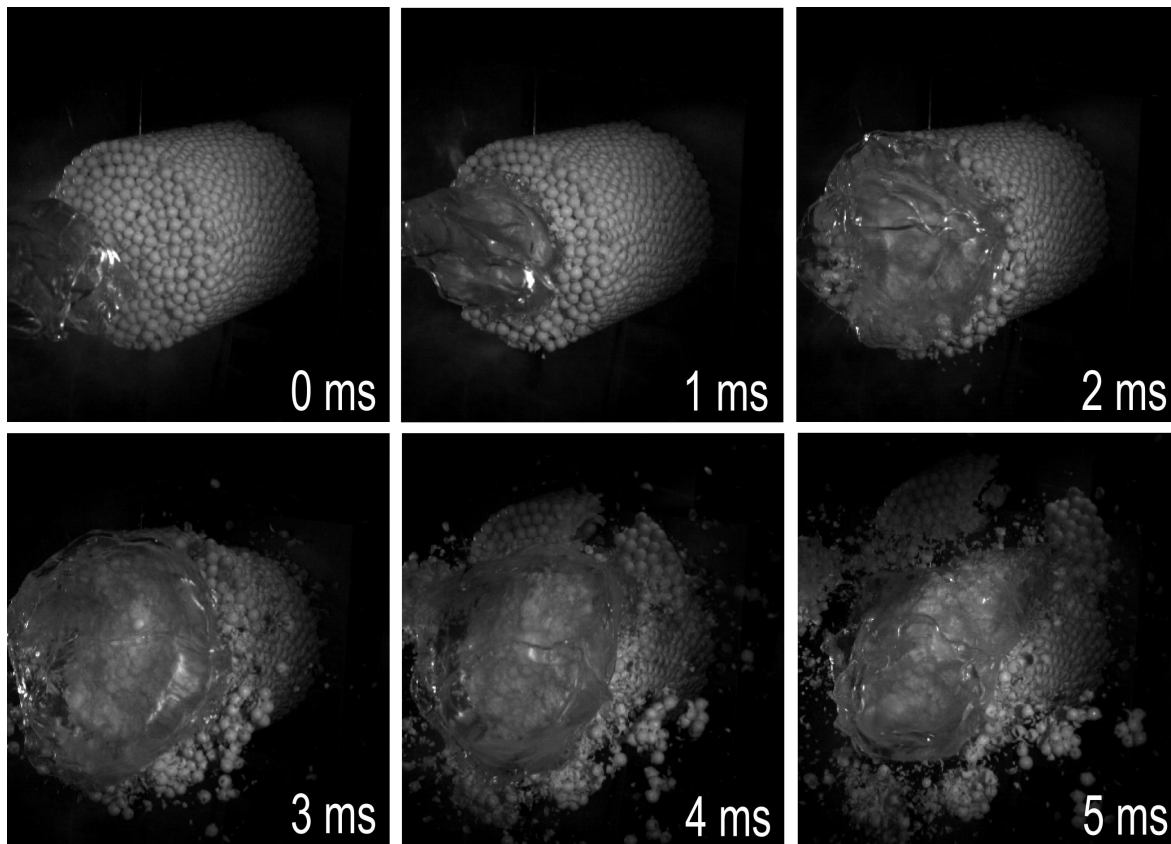


FIGURE 2.20 – Essais d'impact au choc mou sur un assemblage de sphères creuses polymères collées à une vitesse $v \approx 50 \text{ m.s}^{-1}$

Dans le cas des essais sur les sphères libres, plusieurs solutions ont été proposées afin de contenir les sphères avant et après l'impact. La technique consistant à incorporer les sphères dans un sac fermé transparent a été concluante et nous a permis d'observer facilement les éprouvettes post mortem.

La figure 2.20 nous montre l'impact de la gélatine sur une structure de sphères creuses collées. La vitesse moyenne d'impact relevée est de $51 \pm 9 \text{ m.s}^{-1}$ pour une dizaine d'essais.

2.2.3.2 Observations post mortem



FIGURE 2.21 – Éprouvette avant et après un essai de compression dynamique $v \approx 5,7 \text{ m.s}^{-1}$ sur un nid d'abeilles rempli de sphères creuses

Les éprouvettes ont été observées après avoir été sollicitées. Lorsqu'elles remplissent un nida (figure 2.21), chaque colonne de sphères s'écrase indépendamment les unes des autres car les parois en aluminium se déforment sans se rompre. Les sphères creuses interagissent donc seulement avec les parois de la cellule et les autres sphères de la cellule. La rupture des sphères est visible après impact où l'on peut voir que les sphères sont rentrées les unes dans les autres et qu'elles se sont fissurées à plusieurs endroits. La vidéo de l'essai met aussi en évidence le souffle de l'impact qui évacue une partie des fragments des sphères creuses fissurées.

Dans le cas des essais au canon, le constat est le même. Un zoom sur les éprouvettes après impact nous montre une multitude de sphères fissurées, dans le cas des sphères collées sur la figure 2.22 ou libres sur la figure 2.23. Les sphères collées présentent pour la plupart une rupture située au niveau de la zone de collage.

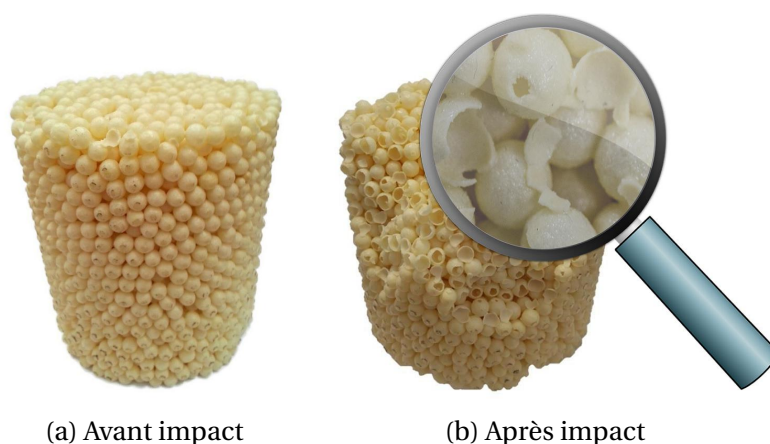


FIGURE 2.22 – Essais d'impact au choc mou sur des sphères creuses collées

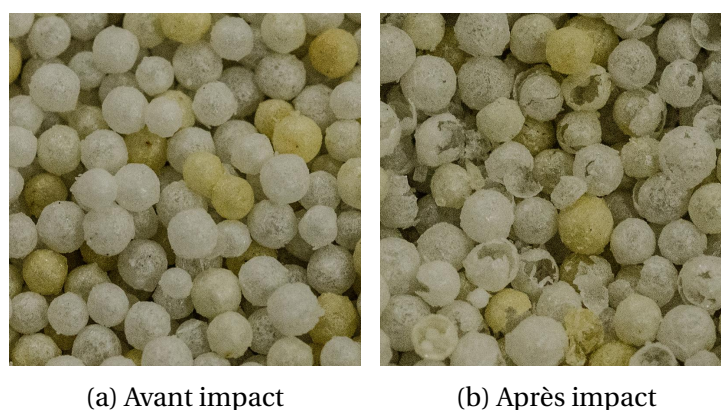


FIGURE 2.23 – Essais d'impact au choc mou sur des sphères creuses libres

Ces essais ont fait ressortir un comportement mécanique de type fragile du matériau constitutif : rupture par fissuration, pas ou peu de déformation plastique. Même s'il n'est pas possible avec ces essais de quantifier l'énergie dissipée par la rupture des sphères creuses, la part de ce mécanisme de dissipation semble qualitativement importante. La résine époxyde peut d'ailleurs être considérée comme fragile (propagation d'une fissure sans arrêt pour un taux de restitution d'énergie constant) à température ambiante KAUSCH [2012] et est sujette à la rupture dynamique. Une approche de modélisation à l'échelle de la cellule est nécessaire afin de pouvoir prédire le comportement de sphères

creuses fragiles incorporées dans différentes structures. Cette approche implique la prise en compte de l'énergie de rupture du matériau.

2.3 La rupture dynamique

2.3.1 Objectifs

Cette partie a pour but de présenter les notions de mécanique de la rupture appliquée à la propagation de la fissure en régime dynamique utiles au cours de cette thèse. Le matériau constitutif des sphères creuses sera considéré parfaitement élastique fragile. Nous nous placerons donc dans le cadre du formalisme de la Mécanique Élastique Linéaire de la Rupture (MELR). La rupture dynamique représente une branche de la mécanique de la rupture dans laquelle l'énergie associée aux effets dynamiques générée par la propagation de fissure devient non négligeable par rapport aux autres énergies : énergie élastique, énergie de rupture et autres énergies dissipées (frottement, amortissement).

Les notions essentielles de la rupture d'un matériau fragile en régime quasi-statique seront tout d'abord exposées. Puis ces notions seront étendues dans le cas d'un régime de propagation dynamique de la fissure. Ensuite, des méthodes expérimentales permettant d'estimer le taux de restitution d'énergie critique d'un matériau sont présentées. Enfin, une brève description de quelques méthodes numériques continues ou discrètes adaptées à la propagation de fissure en régime dynamique est donnée.

2.3.2 Notions de mécanique de la rupture

2.3.2.1 Modes de propagation

Dans un matériau, la rupture est un mécanisme physique qui est responsable de la séparation irréversible de la matière en deux ou plusieurs parties distinctes. Une fissure, définie comme une discontinuité surfacique de la matière est créée. Le champ de déplacement subit une discontinuité et on observe, proche de la pointe de fissure, une intensification des contraintes. La rupture brutale d'un matériau peut être décomposée en deux étapes, l'amorçage de la fissure et la propagation de celle-ci. La rupture s'amorce en général sur un défaut dans le matériau (rayure, fissure pré-existante, bulle d'air). La fissure peut se propager suivant 3 modes différents en fonction du chargement appliqué sur le matériau ou la structure. Ces 3 modes, visibles sur la figure 2.24 sont :

- Mode I : ouverture → la contrainte de traction est normale au plan de fissure
- Mode II : cisaillement → la contrainte de cisaillement agit parallèlement au plan de la fissure et est perpendiculaire au front de fissure
- Mode III : cisaillement hors plan ou vissage → la contrainte de cisaillement agit parallèlement au plan de la fissure et est parallèle au front de fissure

Le mode I est généralement le plus critique pour le matériau, c'est le mode d'ouverture principalement étudié lors d'essais expérimentaux. C'est ce mode qui sera privilégié dans la suite de ces travaux car il est mis en évidence lors de la rupture de sphères creuses. On notera que la propagation suivant plusieurs modes à la fois est possible et est appelée mode mixte.

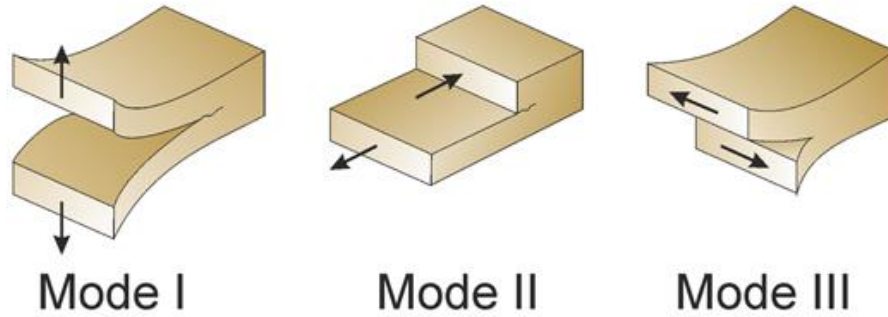


FIGURE 2.24 – Modes d'ouvertures de fissure : I, II et III HUDSON et HARRISON [2000]

2.3.2.2 Critère de Griffith

C'est en 1921 que A. A. Griffith [GRIFFITH \[1921\]](#) aborde pour la première fois l'énergie de rupture d'un matériau. Au courant des dernières recherches de C. E. Inglis [INGLIS \[1913\]](#) concernant le calcul des concentrations de contraintes proches de trous elliptiques, il a l'idée de supposer l'existence de micro fissures au sein du matériau. En effet les calculs de l'état de contrainte en pointes de fissures nous donnent des contraintes infinies. Le matériau subit localement de la plasticité. Un matériau élastique parfait aurait une résistance nulle et casserait sous un chargement infime. À la place d'une approche en contrainte, il propose de caractériser la rupture d'un point de vue énergétique. Un bilan d'énergie peut être fait sur un volume de matériau traversé par une fissure.

L'énergie élastique par unité de volume d'un matériau soumis à une contrainte uniforme est :

$$U^* = \frac{1}{V} \int f \, dx = \int \frac{f}{A} \frac{dx}{L} = \int \sigma \, d\epsilon \quad (2.4)$$

Avec :

- V un volume de matière
- f/A représente la contrainte normale σ suivant l'axe x
- dx/L représente la déformation du matériau ϵ suivant l'axe x

En considérant le matériau élastique linéaire et isotrope ($\sigma = E\epsilon$ avec E le module de Young du matériau), on peut écrire :

$$U^* = \frac{E\epsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.5)$$

Quand une fissure se propage d'une longueur a , la zone du matériau adjacente à la surface créée est relâchée et son énergie élastique est restituée au matériau. Cette énergie peut être visualisée sur la figure 2.25a. Elle correspond à l'énergie élastique contenue dans les deux triangles de largeur a et de hauteur βa . En contrainte plane, $\beta = \pi$. L'énergie totale restituée au matériau U est donc l'énergie élastique par unité de volume multiplié par le volume des deux triangles :

$$U = -\frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 \quad (2.6)$$

L'énergie élastique est restituée sous forme de création de surface. Une énergie par unité de surface peut donc être définie, elle représente la résistance qu'a le matériau à

s'opposer à l'avancée de la fissure. En prenant une dimension normale au plan égal à 1, on peut définir l'énergie de surface S associée à une longueur de fissure a par :

$$S = 2\gamma a \quad (2.7)$$

avec γ l'énergie de surface en J/m^2 et un facteur 2 car deux surfaces sont créées. On peut maintenant faire un bilan d'énergie en considérant que l'énergie totale associée à la fissure est la somme de l'énergie de rupture et de l'énergie élastique restituée lors de l'avancée de la fissure, figure 2.25b.

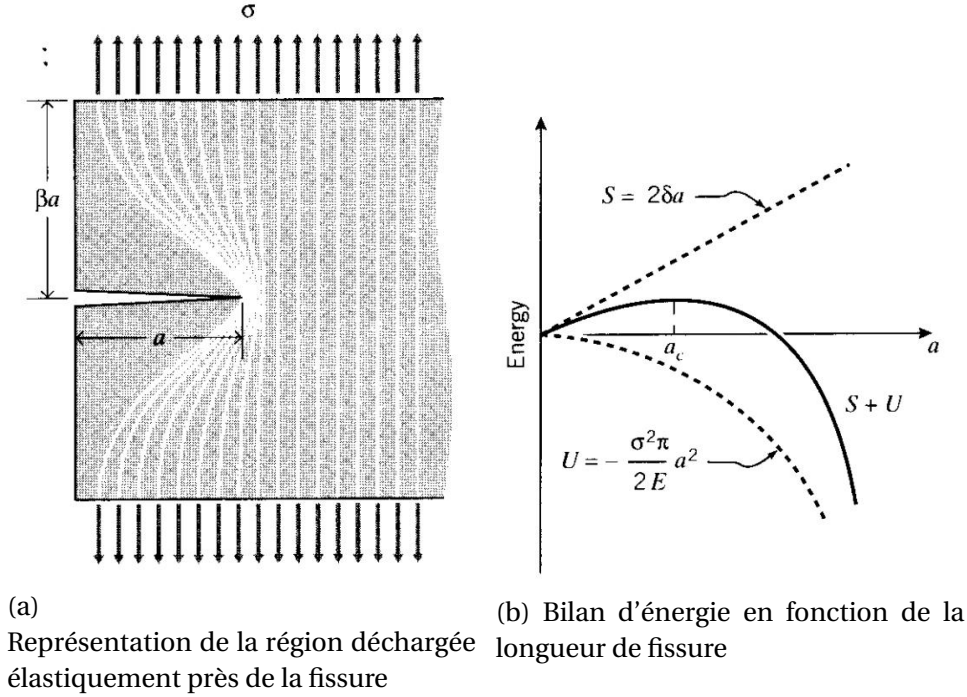


FIGURE 2.25 – Approche de Griffith par un bilan d'énergie ROYLANCE [2001]

Jusqu'au point a_c , la fissure va se propager uniquement si l'énergie disponible augmente. Au delà, la propagation de fissure est brutale et conduit à la ruine de la structure. La longueur a_c peut être obtenue en trouvant le maximum de la fonction $S + U$ issue des équations (2.6) et (2.7), soit lorsque la dérivée de cette fonction s'annule :

$$\frac{\partial(S + U)}{\partial a} = 2\gamma - \frac{\sigma_f^2}{E} \pi a = 0 \quad (2.8)$$

la contrainte maximale σ_f est donc :

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (2.9)$$

L'énergie de création de surface 2γ peut être définie pour les 3 modes de propagation de fissure : G_I , G_{II} et G_{III} avec $G = 2\gamma$. Il faut rappeler que la relation de Griffith est valable uniquement pour une rupture fragile et quasi-statique. Dans le cas d'un matériau ductile, on a $G = 2\gamma + G_p$ avec G_p la dissipation plastique par unité de surface de la fissure. La vitesse de fissuration doit être faible par rapport aux vitesses des ondes de compression et de cisaillement dans le matériau. Dans la partie 2.3.3, la propagation de fissure en dynamique sera abordée et nous prendrons en compte l'énergie cinétique dans le bilan d'énergie.

2.3.2.3 Facteur d'intensité des contraintes

Une autre méthode a été développée pour la propagation de fissures en utilisant les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes. La théorie d'Irwin [IRWIN \[1957\]](#) se base ainsi sur l'analyse des champs mécaniques singuliers proches de la pointe de fissure.

Alors que la zone d'élaboration de la fissure qui se trouve à la pointe de la fissure est caractérisée par des contraintes infinies, il est possible d'estimer les contraintes proches du front de fissure. Appelée zone singulière, les champs de déformations et de contraintes sont continus et peuvent être approximés. Ces champs sont indépendants de la géométrie de la structure et des conditions aux limites. Ils sont caractérisés par un facteur d'intensité des contraintes.

Dans le cas d'une ouverture en mode I en déformation plane, le facteur d'intensité des contraintes K_I (MPa. $\sqrt{m}$) est définie et est de la forme :

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.10)$$

avec α un facteur dépendant de la géométrie de la fissure et de la répartition des contraintes et σ la contrainte normale dans le matériau en l'absence de fissure. K_{Ic} est défini comme le facteur d'intensité des contraintes pour un chargement entraînant la ruine de la structure. Il caractérise la résistance du matériau à la propagation instantanée de fissures.

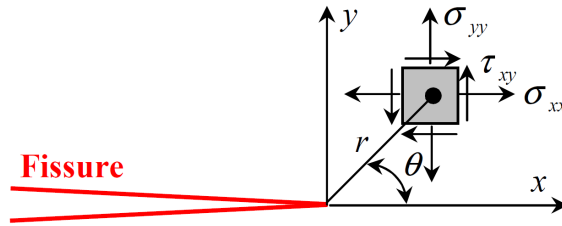


FIGURE 2.26 – Définition des axes (x, y) et des coordonnées polaires (r, θ) au voisinage de la pointe de fissure

En définissant les axes orthonormés (x, y) avec x la direction de propagation de la fissure, figure 2.26, il est possible d'exprimer en un point proche de la fissure et de coordonnées polaires (θ, r) les champs mécaniques asymptotiques pour une ouverture en mode I :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(\theta, r) = K_I \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy}(\theta, r) = K_I \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{yy}(\theta, r) = K_I \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

Il est possible de lier le facteur d'intensité des contraintes critiques K_{Ic} au taux de restitution d'énergie critique G_{Ic} par la relation 2.12 dans le cas d'un état de déformation plane et par la relation 2.13 en contraintes planes :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{E G_{Ic}}{1 - \nu^2}} \quad (2.12)$$

$$K_{Ic} = \sqrt{E G_{Ic}} \quad (2.13)$$

avec ν le coefficient de Poisson du matériau.

2.3.3 Application en régime dynamique

2.3.3.1 Propagation dynamique et bilan d'énergie

Les aspects dynamiques en rupture font partie du formalisme de la *Dynamic Fracture Mechanics* (DFM), cas particulier de la MLR. Un premier sujet de la DFM est l'étude de fissures sujettes à un chargement dynamique évoluant au cours du temps de manière très rapide, du même ordre de grandeur que la vitesse de fissuration (impact à très haute vitesse par exemple). Ce cas est compliqué à traiter mathématiquement, les méthodes numériques deviennent des meilleurs outils pour résoudre ces problèmes.

Le deuxième cas concerne la propagation de fissure en dynamique (typiquement quelques centaines de m.s^{-1} pour les polymères) sous un chargement quasi-statique FOND et SCHIRRE [2001a].

C'est ce deuxième cas qui est présenté ici. Nous mettrons l'accent sur les résultats de la littérature et leurs implications directes dans le cas de matériaux ou structures soumis à la propagation rapide de fissures. On trouvera plus de détails dans les ouvrages de références : *Fracture Mechanics* ANDERSON et ANDERSON [2005], *Dynamic Fracture Mechanics* FREUND [1998] ou encore une revue plus récente *Dynamics of simple cracks* BOUCHBINDER et collab. [2009].

L'idée selon laquelle toute l'énergie serait restituée au matériau sous forme de création de surface lors de la propagation d'une fissure n'est pas toujours vérifiée. L'avancée de la fissure provoque des champs de déformations proches du front de fissure qui même lorsqu'ils sont infimes représentent une énergie cinétique. MOTT [1948] redéfinit la relation de GRIFFITH [1921] en introduisant un terme correspondant à l'énergie cinétique :

$$G - 2\gamma = dT/da \quad (2.14)$$

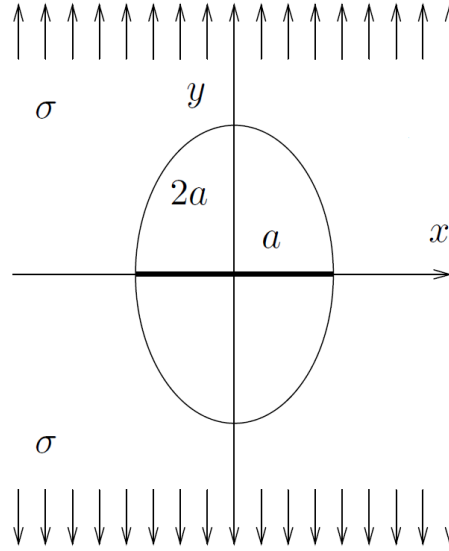
où T est la densité d'énergie cinétique et a la longueur caractéristique de la fissure. En se plaçant dans un domaine de rayon R autour du front de fissure, on peut définir T :

$$T = \frac{1}{2} \rho v^2 \int_R [(\partial u_x / \partial a)^2 + (\partial u_y / \partial a)^2] dx dy \quad (2.15)$$

avec u_x et u_y qui correspondent aux champs de déplacements dans le matériau. Cette relation est très intéressante car elle permet de remonter à la part d'énergie cinétique générée par une fissure. Ainsi, il est possible, en obtenant les champs de déplacements près du front de fissure, de quantifier les effets inertiels. Dans la pratique, la corrélation d'images peut permettre de quantifier ces effets. La rapidité du phénomène impose néanmoins des moyens de mesure sophistiqués (caméra rapide) pour obtenir des résultats avec une précision acceptable.

Par la suite, YOFFE [1951] s'est intéressée à l'effet de la vitesse de propagation de la fissure. Elle a montré que dans le cas d'une fissure se propageant en mode I à vitesse constante dans un milieu élastique et isotrope l'état de contrainte proche du front de fissure est dépendant de la vitesse de fissuration. ROBERTS D.K. [1954] a été le premier à proposer une limite de cette vitesse dépendant des caractéristiques mécaniques du matériau. En effet, l'idée selon laquelle un flux d'énergie se dirigeant vers la pointe de fissure admet une vitesse finie est cohérente et un calcul analytique approché permet de le mettre en évidence.

ROBERTS D.K. [1954] se place dans le cas d'une plaque semi-infinie chargée des deux cotés et présentant une fissure en son centre, d'épaisseur 1, figure 2.27. On applique la


 FIGURE 2.27 – Plaque semi-infinie fissurée en son centre et chargée uniformément suivant l'axe y

même méthode que Griffith, équation (2.6) et (2.7) en définissant l'énergie élastique et l'énergie de rupture :

$$\begin{cases} U^* = 2\pi a^2 \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \rightarrow -\frac{dU^*}{da} = \frac{2\pi a \sigma^2}{E} \\ U = 4a\gamma \rightarrow \frac{dU}{da} = 4\gamma \end{cases} \quad (2.16)$$

Lorsque la fissure s'ouvre, on suppose que le champ de vitesse perpendiculaire à la direction d'ouverture $\dot{u}_y$ est bien plus important que le champs de vitesse ayant la même direction que la fissure $\dot{u}_x$, on néglige donc ce dernier terme. On utilise la proposition de Mott (2.15) :

$$U_k = \frac{1}{2} \rho \int_R (\dot{u}_y)^2 dx dy \quad (2.17)$$

d'autre part, on sait que :

$$\dot{u}_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{du_y}{da} \frac{da}{dt} = \frac{du_y}{da} \dot{a} \quad (2.18)$$

avec $\dot{a}$ la vitesse de fissuration. On suppose que v est indépendant de la longueur de fissure a , à partir de 2.17, on a :

$$U_k = \frac{1}{2} \rho \dot{a}^2 \int_R \left(\frac{du_y}{da} \right)^2 dx dy \quad (2.19)$$

On cherche ensuite à exprimer la densité d'énergie cinétique par rapport à la longueur de fissure :

$$\frac{dU_k}{da} = \frac{1}{2} \rho \dot{a}^2 \int_R \frac{d}{da} \left(\frac{u_y}{da} \right)^2 dx dy \quad (2.20)$$

$$u_y = 2\sqrt{2} \frac{\sigma}{E} \sqrt{a^2 - ax} \rightarrow \frac{u_y}{da} = \sqrt{2} \frac{\sigma}{E} \frac{2a - x}{\sqrt{a^2 - ax}} \quad (2.21)$$

$$\frac{dU_k}{da} = \rho \dot{a}^2 \left(\frac{\sigma}{E} \right)^2 a \int_R \frac{1}{a^3} \frac{x^2 (x - 2a)}{(a - x)^2} dx dy = \rho \dot{a}^2 \left(\frac{\sigma}{E} \right)^2 a k(a) \quad (2.22)$$

Ce résultat fait apparaître une dépendance de la vitesse de fissuration $\dot{a}$ avec la longueur de fissure a . On peut cependant choisir de calculer une valeur approchée de $k(a)$ comme l'a fait numériquement **ROBERTS D.K.** [1954], $k \approx 43$. En reprenant la proposition de Mott (2.14) :

$$\frac{2\pi a\sigma^2}{E} = 4\gamma + \rho \dot{a}^2 \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 ak \rightarrow \dot{a} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sqrt{1 - \frac{2}{\pi a\sigma^2}} \quad (2.23)$$

La vitesse des ondes longitudinales dans le matériau est définie par $c = \sqrt{E/\rho}$, la longueur de fissure critique est $a_c = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}$ et on a $\sqrt{2\pi/k} \approx 0.38$. La vitesse de fissuration admet une vitesse limite $\dot{a}$ de l'ordre de 0.38 et peut donc être approchée par :

$$\dot{a} \approx 0.38c \sqrt{1 - \frac{a}{a_c}} \quad (2.24)$$

D'autres travaux ont montré l'influence d'une augmentation de l'énergie élastique ou une diminution de l'énergie de rupture, jusqu'à tendre vers 0. Par exemple **STROH** [1957] montre que dans ce dernier cas, la vitesse de propagation tend vers la vitesse de propagation d'une perturbation sur une surface libre. Or, les ondes les plus rapides qui se propagent sur une surface libre sont les ondes de Rayleigh, **RAYLEIGH** [1896].

Par la suite, **BROBERG** [1964, 1960], **ATKINSON et ESHELBY** [1968] et **FREUND** [1972] mènent des études plus élaborées (prise en compte du changement de volume, du module et des ondes de cisaillement) vérifiant la limite théorique de la vitesse des ondes de Rayleigh, un résultat approché peut se mettre sous la forme :

$$\frac{G_{IDc}}{G_{I0}} = \left(1 - \frac{\dot{a}}{c_r}\right) \quad (2.25)$$

Le rapport G_{IDc}/G_{I0} est défini comme le facteur de correction dynamique avec G_{IDc} le taux de restitution d'énergie en régime dynamique et G_{I0} le taux de restitution d'énergie critique en régime quasi-statique. Il permet, à partir de la vitesse de fissuration, d'estimer les effets inertiels produits par la propagation d'une fissure en régime dynamique. Ce résultat est représenté sur la figure 2.28. Cette dernière intègre la correction apportée par le coefficient de Poisson du matériau. Toutefois, l'approximation linéaire de cette relation (2.25) suffit en pratique.

De la même façon qu'en quasi-statique, il est possible d'exprimer l'état de contraintes proche du sommet de fissure, on définit alors K_D , le Facteur d'intensité des contraintes dynamique. L'état de contrainte est donc bien dépendant de la vitesse de fissuration :

$$\sigma_{i,j} = \frac{K_D}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta, r, \dot{a}, E, \nu) \quad (2.26)$$

À partir de cette relation, on montre que la direction de la contrainte principale maximale est dépendante de la vitesse de fissuration. Le critère de rupture en contrainte tangentielle maximale prédit ainsi un branchement de la fissure autour de $0.87c_r$. Dans la pratique, le branchement de la fissure intervient vers $0.6c_r$ et est admis comme limite usuelle. **YAVARI et KHEZRZADEH** [2010] comparent les vitesses de propagation maximales de plusieurs études qui confirment une limite vers $0,6c_r$. On trouve des valeurs de $\dot{a}/c_r$ de 0,47 à 0,66 pour le verre (**ANTHONY et collab.** [1970]; **EDGERTON et BARSTOW** [1941]) 0,58 à 0,62 pour le PMMA (**COTTERELL** [1965]; **PAXSON et collab.** [1973]) et 0,33 à 0,45 pour la résine Homalite-100 (**BEEBE** [1967]; **RAVI-CHANDAR et KNAUSS** [1984]).

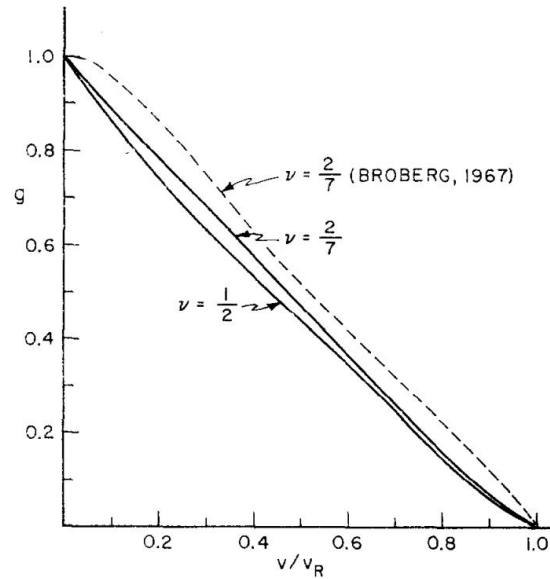


FIGURE 2.28 – Évolution du facteur de correction dynamique sur plaque semi-infinie en fonction de la vitesse de fissuration normalisée par rapport à la vitesse des ondes de Rayleigh dans le matériau. FREUND [1972]

Il est possible de lier le taux de restitution d'énergie critique dynamique G_{IDc} et le facteur d'intensité des contraintes en dynamique K_{ID} pour une ouverture en mode I en déformation plane :

$$G_{IDc} = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{ID}^2 A(\dot{a}) \quad (2.27)$$

avec $A(\dot{a})$ une fonction dépendant de la vitesse de propagation et des vitesses des ondes longitudinales et transversales dans le matériau.

2.3.3.2 Méthodes expérimentales

Les méthodes expérimentales ont pour but de caractériser la résistance du matériau à la propagation de fissure. Les données obtenues par des essais de caractérisation doivent permettre de prédire le comportement du matériau dans un but de dimensionnement structural. Des modèles numériques peuvent aussi être alimentés par ces données matériaux.

Le taux de restitution d'énergie critique est l'un des paramètres les plus recherchés. Il a longtemps été estimé comme un paramètre global couvrant l'amorçage et la propagation d'une fissure. Les essais sur mouton de Charpy (CHARPY [1901]) ne permettent par exemple pas de distinguer l'énergie d'amorçage de l'énergie de propagation de la fissure. La zone de rupture est trop petite pour atteindre un régime permanent de propagation.

Dans le cas d'une propagation quasi-statique, on utilise couramment les essais DCB, figure 2.29. Ils sont cependant souvent limités aux vitesses de propagation lentes car les effets dynamiques générés sont importants lors de la rupture. On trouve néanmoins quelques études de rupture dynamique KANNINEN [1974].

La géométrie de type Compact Tension (CT), utilisée en particulier pour les essais de propagation de fissures de fatigue a aussi été utilisée dans le cas de la rupture dynamique KOBAYASHI et collab. [1980]. L'essai SBS (Strip Band Specimen) où l'on vient précharger une plaque puis propager une fissure a été mis en œuvre récemment avec succès FOND et SCHIRRRER [2001a,b]; KOPP et collab. [2014] et figure 2.30.

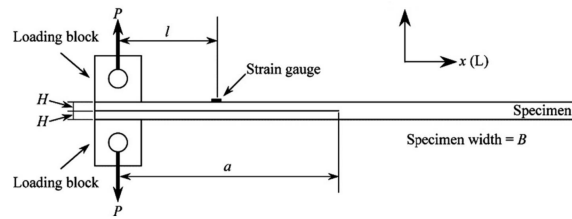


FIGURE 2.29 – Essai DCB (Double Cantilever Beam) pour l'estimation de l'énergie de rupture du bois (Western hemlock) [YOSHIHARA et KAWAMURA \[2006\]](#)

Ces essais nous donnent l'énergie apportée à la structure lors de la propagation instantanée de la fissure ainsi que la position de la pointe de fissure en fonction du temps. Cette dernière information permet de calculer une vitesse moyenne de propagation de la fissure pour estimer les effets inertiels. Le taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique peut ensuite être déduit, il correspond au taux de restitution d'énergie critique en régime quasi-statique auquel est retranché la part des effets inertiels.

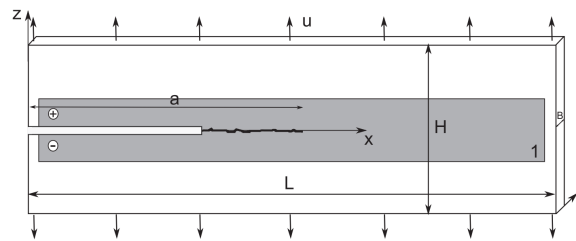


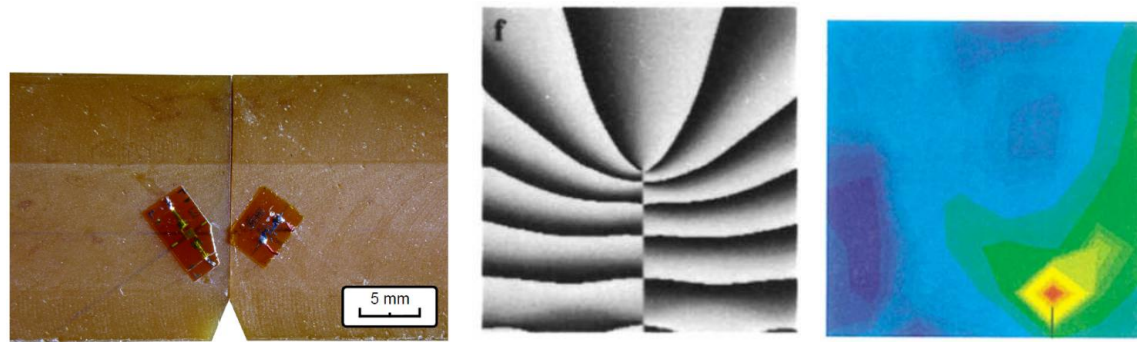
FIGURE 2.30 – Éprouvette SBS (Strip Band Specimen) chargée par un déplacement imposé pour une ouverture en mode I. La partie grisée représente un revêtement conducteur permettant de suivre l'avancée de la fissure. [KOPP et collab. \[2014\]](#)

La mesure de la vitesse est effectuée par l'acquisition en fonction du temps de la résistance du revêtement conducteur ou directement par cinématographie à l'aide d'une caméra rapide.

On soulignera aussi l'emploi de méthodes alternatives, figure 2.31. Puisque le taux de restitution d'énergie est relié à l'état de contrainte proche du front de fissure, il est possible d'aller mesurer ce dernier. Les jauges de déformation ont récemment été employées dans la thèse de [Joudon \[2014\]](#), figure 2.31a. Une analyse d'images par interférométrie a par exemple, été présentée par [Huntley et Benckert \[1993\]](#), figure 2.31b, afin de remonter au champs de contrainte.

Une dernière méthode, très prometteuse, concerne la mesure de l'évolution de la température en pointe de fissure afin de quantifier directement une énergie dissipée [Guduru et collab. \[2001\]](#) et figure 2.31c. Cependant, cette dernière solution implique de disposer de matériel de pointe (les caméras rapides thermiques actuelles possèdent une fréquence d'échantillonnage limitée) et d'estimer très précisément le champs de température dans le matériau et à sa surface lors de l'avancée de la fissure. Cette méthode est tributaire de la connaissance des modes de transfert de chaleur comme la conduction thermique du matériau qui peut être affectée par la rupture brutale.

Pour les matériaux amorphes purs, il a été notamment montré que plus la fissure se propage rapidement, plus le taux de restitution d'énergie critique dynamique est important. Ce phénomène a été mis en évidence dans le cas de différentes résines époxydes : Araldite® ([Dally et collab. \[1985\]](#)) et Hexply®M21 ([Joudon \[2014\]](#)). La figure 2.32 décrit l'augmentation du facteur d'intensité des contraintes (lié au taux de



(a) Jauges de déformation sur un essai de flexion 3 points pour l'estimation des contraintes proches du sommet de fissure **JOUDON [2014]** (b) Analyse du champ de contraintes en pointe de fissure **HUNTLEY et BENCKERT [1993]** (c) Mesure de la température en pointe de fissure **GUDURU et collab. [2001]**

FIGURE 2.31 – Méthodes expérimentales pour l'estimation du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique

restitution d'énergie) en fonction de la vitesse de propagation. **ZHOU et collab. [2005]** proposent une loi simple permettant de prédire l'augmentation du taux de restitution d'énergie dynamique avec la vitesse de propagation.

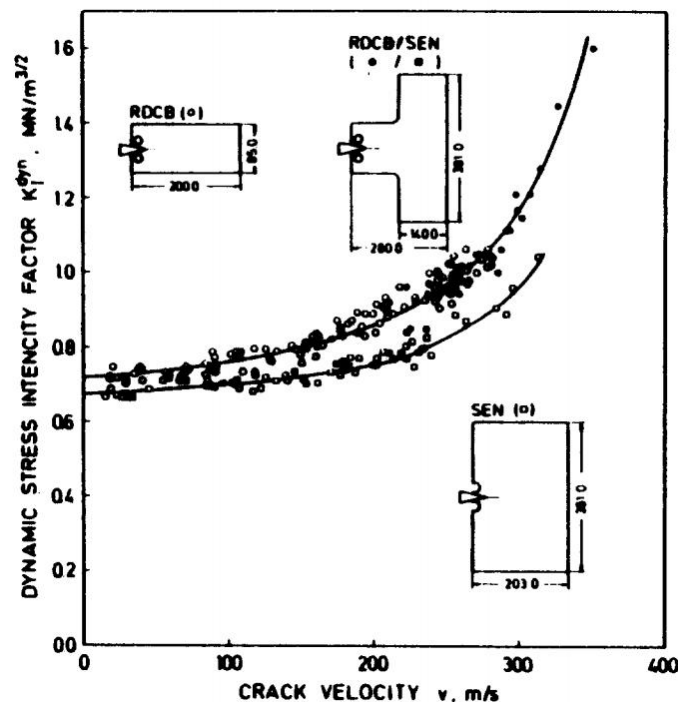


FIGURE 2.32 – Évolution du facteur d'intensité des contraintes avec la vitesse de propagation $\dot{a}$ pour la résine Araldite B **DALLY et collab. [1985]**

2.3.4 Méthodes numériques pour la propagation de fissure

Dans des cas simples de propagation de fissure, les méthodes analytiques permettent d'obtenir des résultats exacts ou approchés avec une bonne précision des principaux paramètres (G et K). Ce n'est cependant pas le cas pour des structures plus complexes,

notamment pour les sphères creuses où une analyse numérique devient indispensable. On peut séparer les méthodes numériques en deux objectifs : l'étude des paramètres liés aux matériaux lors d'une propagation de fissure et la simulation de cette propagation. Dans le premier cas, le chemin et la vitesse de fissuration sont a priori connus, une technique de déboutonnage permet d'ouvrir manuellement la fissure. Cette technique, bien que proposée depuis de nombreuses années en quasi-statique [WATWOOD \[1970\]](#) puis en dynamique par [ATLURI et collab. \[1979\]](#) reste peu développée. Elle est essentiellement réalisée sur des codes numériques de recherche puisque peu de codes commerciaux intègrent cette possibilité. Pourtant, cette méthode indirecte permet de remonter à des caractéristiques du matériau essentielles. Elle fait l'objet du chapitre 3 et nous nous attacherons donc à présenter dans cette partie le deuxième objectif de ces méthodes numériques, à savoir la propagation de fissure en régime dynamique.

Parmi ces méthodes, deux sont couramment utilisées : la méthode des éléments finis et la méthode des éléments discrets. D'autres méthodes existent mais ne seront pas détaillées ici, par exemple des méthodes des éléments aux frontières (Boundary element method [ALIABADI et ROOKE \[1991\]](#)) ou les méthodes particulières de type SPH (Smoothed Particule Hydrodynamics [MAUREL et COMBESCURE \[2008\]](#)). Cette dernière méthode, bien adaptée pour la modélisation des corps mous / fluides, est souvent utilisée pour modéliser l'oiseau lors des essais numériques de chocs à l'oiseau. Pour plus de détails sur les différentes méthodes numériques, on peut se rapporter à un état de l'art récent sur la rupture numérique de [RABCZUK \[2013\]](#).

2.3.4.1 Méthodes continues par éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement dans le cas de la modélisation mécanique des matériaux et structures. À l'origine, la méthode permettait de modéliser seulement le comportement d'une structure en petites déformations. Depuis de nombreuses années, les études visent à modéliser le comportement non linéaire des matériaux : grandes déformations et rupture notamment.

Plusieurs techniques ont vu le jour pour simuler la propagation d'une fissure, parmi celles-ci, on peut noter :

Les méthodes de remaillage : Un maillage fin près du front de fissure est nécessaire afin d'estimer précisément l'état de contrainte. Un raffinement du maillage en cours de simulation autour de la pointe de fissure peut être réalisé en éléments finis [SWENSON et INGRAFFEA \[1988\]](#). Le grand avantage de cette méthode est le nombre réduit d'éléments puisque seul les endroits stratégiques comportent un nombre élevé d'éléments. Pourtant, plusieurs problèmes peuvent être soulevés.

D'une part une simple projection des champs de la solution entre deux maillages n'est pas possible. Les techniques utilisées sont complexes et ne parviennent pas toujours à garantir la conservation d'énergie dans le calcul.

D'autre part, la séparation des éléments peut entraîner des instabilités numériques. Enfin, on perd l'intérêt du remaillage si l'on simule la propagation d'un grand nombre de fissures sur la totalité de notre matériau puisque toutes les zones seront alors raffinées.

Érosion des éléments : Disponible dans la plupart des logiciels de dynamique rapide du commerce, la méthode d'érosion ou *Element deletion method* est facile à mettre en place et donne des résultats rapidement. Cependant, l'enlèvement de matière dans le calcul conduit à une perte d'énergie non maîtrisée (perte de masse et donc d'énergie cinétique). De plus, l'énergie de rupture dépend de la taille des éléments

SONG et collab. [2008]. Des solutions sont proposées mais ne sont pas encore généralisées.

Zones cohésives : Cette méthode consiste à intégrer des éléments d'épaisseur nulle entre des éléments classiques. Dans le cas d'une ouverture en mode I, ces éléments cohésifs ont un comportement élastique endommageable en traction (loi bilinéaires ou éventuellement plus complexe). En ajustant la limite élastique et le déplacement à rupture, ils permettent de contrôler aisément l'énergie dissipée par unité de surface. Il est indispensable de connaître le chemin de fissure a priori. Les zones cohésives sont donc largement utilisées pour modéliser un collage où la zone de rupture est connue mais présente des limites pour les autres applications. En effet, un emploi de ces zones cohésives entre tous les éléments conduit à une rigidité globale inexacte. Des solutions actuelles consistent à introduire dynamiquement ces zones cohésives au moment où la fissure arrive sur un bord d'un élément ZHOU et collab. [2005].

Méthodes des éléments finis étendus (XFEM) :

Méthode récente, initiée par BELYTSCHKO et BLACK [1999], elle vise à s'affranchir des problèmes de singularité rencontrés en pointe de fissure. Le raffinement du maillage ne suffit pas toujours à estimer un état de contrainte cohérent. Comme les champs de contraintes peuvent être estimés analytiquement, l'idée est d'introduire ces équations (2.11) dans la méthode des éléments finis. Les éléments près de la fissure sont enrichis dynamiquement par des fonctions préalablement régularisées, voir figure 2.33. Cette méthode présente de nombreux avantages puisqu'elle prend en compte la singularité liée à la propagation de la fissure. De nombreux travaux ont récemment permis de l'adapter à différentes applications BRABEL [2007]; GRÉGOIRE [2008]; MENOUEILLARD [2007]; NISTOR [2005]; RÉTHORÉ [2005]. On peut néanmoins citer quelques problèmes inhérents à cette méthode, PETERS et HACKL [2005] montrent par exemple que des éléments coupés près de leur frontière peuvent entraîner un problème de singularité de la matrice de rigidité.

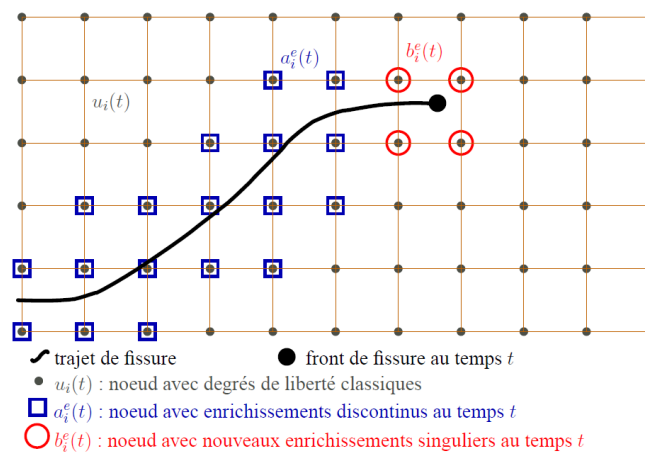


FIGURE 2.33 – XFEM : enrichissement ajoutés à la méthode des éléments finis GRÉGOIRE [2008]

2.3.4.2 Méthodes discrètes

La méthode des éléments discrets (DEM) a initialement été développée pour les milieux granulaires par CUNDALL et STRACK [1979] puis a été couramment utilisée

(CALVETTI [2008]; GUESSASMA et FORTIN [2011]; SIBILLE et collab. [2007]). Son application s'est étendue ces dernières années à d'autres domaines. Il n'existe donc pas une méthode mais plusieurs méthodes dépendantes de l'échelle et du domaine d'analyse. En effet, cette méthode est autant utilisée à l'échelle microscopique (dynamique moléculaire HAILE [1992]), qu'à l'échelle mésoscopique (représentation de domaines continus), qu'à l'échelle macroscopique (représentation des éboulements de roches TANG et collab. [2009] entre autres). Ses applications couvrent aussi la tribologie FILLOT et collab. [2007], la mécanique des fluides JALALI et HYPPÄNEN [2015] et la mécanique des milieux continus FAKHIMI et VILLEGAS [2007]. Le principe reste le même, des éléments généralement sphériques (plusieurs études font aussi état d'éléments discrets de formes plus complexes MATUTTIS et collab. [2000]; VU-QUOC et collab. [2000]) interagissent entre eux par des interactions diverses : contacts, potentiels, ressorts, poutres, adhésion... La majorité de ces codes numériques présente un schéma explicite rendant les calculs entre chaque pas de temps simples et rapides. Dans le cas d'un milieu granulaire où les seules interactions sont des contacts, la position et la vitesse des éléments sont calculées en utilisant la seconde loi de Newton. Une méthode de pénalité est utilisée pour calculer les forces de répulsion de contacts.

La propagation des fissures est réalisée en supprimant les interactions entre les éléments en fonction d'un critère de rupture. La rupture peut être basée sur un critère en contrainte ou en déformation. Les éléments peuvent toujours entrer en contact mais ne sont plus retenus par une interaction et ne transmettent donc pas d'effort en traction. La figure 2.34 illustre la propagation de fissure dans un milieu discret. Cette technique permet la propagation de la fissure dans toutes les directions et entre chaque élément sans modification de maillage ou enrichissant d'éléments. La fissuration est dite naturelle puisque même à l'échelle mésoscopique, elle rappelle la fissuration inter-moléculaire. La rupture par la DEM a été appliquée sur plusieurs matériaux polymères dont le PMMA (KOSTESKI et collab. [2011]), des biopolymères (HEDJAZI et collab. [2012]), le béton (BUTTLAR et YOU [2001]; HENTZ et collab. [2004]; YOU et BUTTLAR [2004]), les roches (JING [2000]) ou encore pour modéliser le sol (CHENG et collab. [2003]; MCDOWELL et HARIRECHE [2002]).

A l'origine non développée pour les milieux continus, l'utilisation d'un réseau de type treillis avec des poutres 3D associé à une calibration des paramètres microscopiques permet quand même de remplir ce rôle, comme expliqué dans l'ouvrage de JEBABI et collab. [2015].

De plus, des techniques de couplage avec d'autres méthodes sont possibles afin d'associer les avantages de différentes techniques. JEBABI et collab. [2013] effectuent par exemple un couplage entre la méthode des éléments discrets et la méthode des éléments naturels (CNEM). Les éléments discrets permettent une étude fine des mécanismes de fissuration alors que la CNEM modélise un domaine de grande taille autour de la zone DEM fortement sollicitée, du temps de calcul est économisé. Le couplage avec la méthode des éléments finis est aussi possible, HADDAD et collab. [2016], où la DEM joue ici le rôle du 3^e corps en tribologie.

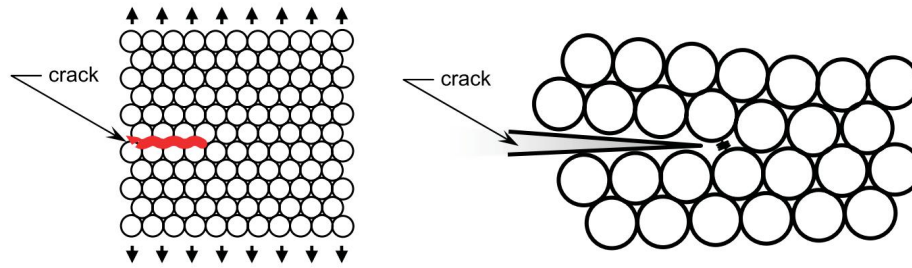


FIGURE 2.34 – Propagation d'une fissure par la méthode des éléments discrets TAVAREZ et PLESHA [2007]

2.4 Conclusions

Ce premier chapitre permet d'exposer les différentes thématiques dans lesquelles s'inscrit ce projet de recherche. L'approche en tant que matériau cellulaire de l'assemblage des sphères creuses nous permet de mettre en évidence les limites d'une caractérisation et d'une modélisation macroscopique. Bien que des lois de micro mécanique (GIBSON et ASHBY [1999]) permettent d'estimer grossièrement le comportement en compression et l'énergie absorbée des sphères creuses ATECA, elles ne parviennent ni à caractériser finement le comportement, ni à analyser l'influence de la vitesse de sollicitation ou encore à optimiser l'architecture de cet assemblage.

Une démarche de modélisation multi-échelles comme dans les travaux de CATY [2008]; FALLET [2008]; LHUISSIER [2009] doit être mise en place. Une étude du comportement mécanique d'une seule sphère creuse est donc nécessaire afin de mettre en place un modèle numérique macroscopique.

Le comportement fragile du matériau constitutif a été mis en évidence par des essais préliminaires. La modélisation d'une sphère creuse ATECA implique la prise en compte de la rupture du matériau. Les modèles analytiques et numériques actuels sur l'écrasement d'une sphère creuse concernent principalement des sphères creuses métalliques. Un nouveau modèle numérique de sphère creuse intégrant la rupture doit être utilisé. Il est pour cela important de caractériser le comportement mécanique du matériau constitutif. Si le module de Young ou la limite élastique peuvent être mesurés via des essais simples de compression, il n'en est pas de même pour le taux de restitution d'énergie. Des essais de rupture doivent être mis en place afin d'estimer l'énergie de rupture. La résine époxyde est sujette à la rupture dynamique et il faut donc quantifier les effets inertiels générés par la rupture. La littérature nous propose plusieurs méthodes expérimentales qui ont avec succès permis une estimation du taux de restitution d'énergie en régime dynamique. Toutefois, ne disposant pas de géométries adaptées à ce type d'estimation, nous proposons de conduire cette étude directement sur une sphère creuse.

Concernant la modélisation, le choix a été porté sur la méthode des éléments discrets pour sa facilité, son originalité, sa flexibilité et pour la présence d'un support technique important au sein du laboratoire. De plus, il est prévu de réaliser des études numériques de l'interaction d'une sphère creuse avec plusieurs de ses voisins afin d'établir une loi de comportement d'une sphère creuse fragile au sein d'un assemblage. Ces essais numériques entraînent une multitude de contacts, des fissurations multiples et la prise en compte des débris. La méthode des éléments discrets, développée à l'origine pour les matériaux granulaires présente ici tout son intérêt.

2.5 Références

«3M microspheres», <http://www.3m.com/>. 20

ABEYARATNE, R. et C. HORGAN. 1984, «The pressurized hollow sphere problem in finite elastostatics for a class of compressible materials», *International journal of solids and structures*, vol. 20, n° 8, p. 715–723. 17

ALIABADI, M. H. et D. ROOKE. 1991, «The boundary element method», *Numerical Fracture Mechanics*, p. 90–139. 36

AMINANDA, Y., B. CASTANIÉ, J.-J. BARRAU et P. THEVENET. 2005, «Experimental analysis and modeling of the crushing of honeycomb cores», *Applied Composite Materials*, vol. 12, n° 3-4, p. 213–227. 16

ANDERSON, T. L. et T. ANDERSON. 2005, *Fracture mechanics : fundamentals and applications*, CRC press. 30

ANTHONY, S., J. CHUBB et J. CONGLETON. 1970, «The crack-branching velocity», *Philosophical Magazine*, vol. 22, n° 180, p. 1201–1216. 32

ASHBY, M. 2006, «The properties of foams and lattices», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 364, n° 1838, p. 15–30. 13, 16

ATKINSON, C. et J. ESHELBY. 1968, «The flow of energy into the tip of a moving crack», *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 4, n° 1, p. 3–8. 32

ATLURI, S., T. NISHIOKA et M. NAKAGAKI. 1979, «Numerical modeling of dynamic and nonlinear crack propagation in finite bodies, by moving singular-elements», *Nonlinear and Dynamic Fracture Mechanics*, p. 37–66. 36

AUGUSTIN, C. 2009, *Multifunctional metallic hollow sphere structures : manufacturing, properties and application*, Springer Science & Business Media. 20

AVALLE, M., G. BELINGARDI et R. MONTANINI. 2001, «Characterization of polymeric structural foams under compressive impact loading by means of energy-absorption diagram», *International Journal of Impact Engineering*, vol. 25, n° 5, p. 455–472. 14

BEEBE, W. M. 1967, *An experimental investigation of dynamic crack propagation in plastic and metals*, thèse de doctorat, California Institute of Technology. 32

BELYTSCHKO, T. et T. BLACK. 1999, «Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 45, n° 5, p. 601–620. 37

BHEEKHUN, N., A. TALIB, A. RAHIM et M. R. HASSAN. 2013, «Aerogels in aerospace : an overview», *Advances in Materials Science and Engineering*, vol. 2013. 15

BLOTTIERE, Y., J. P. BONINO, A. ROUSSET, C. ROSSIGNOL et I. GLOSSAT. 1985, «Procédé de fabrication de corps creux, fermes et continus, corps creux obtenus et installation de mise en oeuvre dans le cas de billes creuses», EP Patent 2.585.373. 18, 20

- BLOTTIERE, Y., P. CHAPUIS et M. VALAUD. 1994, «Hollow spheres manufactured in synthetic materials, manufacturing process and application», URL <http://www.google.com/patents/EP0438352B1?cl=en>, eP Patent 0,438,352. 20
- BOUCHBINDER, E., J. FINEBERG et M. MARDER. 2009, «Dynamics of simple cracks», *arXiv preprint arXiv :0911.0173*. 30
- BOUTERF, A., J. ADRIEN, E. MAIRE, X. BRAJER, F. HILD et S. ROUX. 2017, «Identification of the crushing behavior of brittle foam : From indentation to oedometric tests», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 98, p. 181–200. 20
- BRABEL, B. 2007, *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP*, Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 37
- BROBERG, B. 1964, «On the speed of a brittle crack», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, n° 3, p. 546–547. 32
- BROBERG, K. B. 1960, «The propagation of a brittle crack», *Arkiv Fysik*, vol. 18, n° 2, p. 159–192. 32
- BUTTLAR, W. et Z. YOU. 2001, «Discrete element modeling of asphalt concrete : microfabric approach», *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, , n° 1757, p. 111–118. 38
- CALVETTI, F. 2008, «Discrete modelling of granular materials and geotechnical problems», *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, vol. 12, n° 7-8, p. 951–965. 38
- CATY, O. 2008, *fatigue des empilements de sphères creuses métalliques*, Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 18, 19, 21, 39
- CHARPY, G. 1901, «Note sur l'essai des métaux à la flexion par choc de barreaux entaillés», *Mémoires et comptes rendus de la société des ingénieurs civils de France*, p. 848–877. 33
- CHENG, Y., Y. NAKATA et M. BOLTON. 2003, «Discrete element simulation of crushable soil», *Geotechnique*, vol. 53, n° 7, p. 633–642. 38
- COCHRAN, J. K. 1998, «Ceramic hollow spheres and their applications», *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, vol. 3, n° 5, p. 474–479. 20
- COTTERELL, B. 1965, «Velocity effects in fracture propagation», *Applied Materials Research*, vol. 4, p. 227–232. 32
- CUNDALL, P. A. et O. D. STRACK. 1979, «A discrete numerical model for granular assemblies», *Geotechnique*, vol. 29, n° 1, p. 47–65. 37
- DALLY, J., W. FOURNEY et G. IRWIN. 1985, «On the uniqueness of the stress intensity factor—crack velocity relationship», dans *Dynamic fracture*, Springer, p. 33–42. 34, 35
- DAVIES, G. et S. ZHEN. 1983, «Metallic foams : their production, properties and applications», *Journal of Materials science*, vol. 18, n° 7, p. 1899–1911. 11
- DESHPANDE, V. et N. FLECK. 2000, «Isotropic constitutive models for metallic foams», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, n° 6, p. 1253–1283. 15

- DESHPANDE, V. et N. FLECK. 2001, «Multi-axial yield behaviour of polymer foams», *Acta materialia*, vol. 49, n° 10, p. 1859–1866. [15](#)
- DESHPANDE, V. S., N. A. FLECK et M. F. ASHBY. 2001, «Effective properties of the octet-truss lattice material», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, n° 8, p. 1747–1769. [12](#)
- EBINGER, T., H. STEEB et S. DIEBELS. 2005, «Modeling and homogenization of foams», *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, vol. 12, n° 1, p. 49–63. [16](#)
- EDGERTON, H. et F. BARSTOW. 1941, «Further studies of glass fracture with high-speed photography», *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 24, n° 4, p. 131–137. [32](#)
- FAKHIMI, A. et T. VILLEGAS. 2007, «Application of dimensional analysis in calibration of a discrete element model for rock deformation and fracture», *Rock Mechanics and Rock Engineering*, vol. 40, n° 2, p. 193–211. [38](#)
- FALLET, A. 2008, *Structure et propriétés mécaniques d'empilement aléatoires de sphères creuses : caractérisation et modélisation*, Thèse, Institut Polytechnique de Grenoble. [12](#), [18](#), [19](#), [39](#)
- FIEDLER, T., E. SOLÓRZANO et A. ÖCHSNER. 2008, «Numerical and experimental analysis of the thermal conductivity of metallic hollow sphere structures», *Materials Letters*, vol. 62, n° 8, p. 1204–1207. [18](#)
- FILLOT, N., I. IORDANOFF et Y. BERTHIER. 2007, «Modelling third body flows with a discrete element method—a tool for understanding wear with adhesive particles», *Tribology International*, vol. 40, n° 6, p. 973–981. [38](#)
- FOND, C. et R. SCHIRRER. 2001a, «Dynamic fracture surface energy values and branching instabilities during rapid crack propagation in rubber toughened pmma», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, vol. 329, n° 3, p. 195–200. [30](#), [33](#)
- FOND, C. et R. SCHIRRER. 2001b, «Influence of crack speed on fracture energy in amorphous and rubber toughened amorphous polymers», *Plastics, rubber and composites*, vol. 30, n° 3, p. 116–124. [33](#)
- FREUND, L. 1972, «Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading—i. constant rate of extension», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 20, n° 3, p. 129–140. [32](#), [33](#)
- FREUND, L. B. 1998, *Dynamic fracture mechanics*, Cambridge university press. [30](#)
- GASSER, S. 2003, *Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG. [18](#)
- GIBSON, L. J. et M. F. ASHBY. 1999, *Cellular solids : structure and properties*, Cambridge university press. [10](#), [11](#), [13](#), [14](#), [15](#), [39](#)
- GRÉGOIRE, D. 2008, *Initiation, propagation, arrêt et redémarrage de fissures sous impact*, Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. [37](#)

- GRIFFITH, A. A. 1921, «The phenomena of rupture and flow in solids», *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, vol. 221, p. 163–198. [27](#), [30](#)
- GUDURU, P., A. ZEHNDER, A. ROSAKIS et G. RAVICHANDRAN. 2001, «Dynamic full field measurements of crack tip temperatures», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 68, n° 14, p. 1535–1556. [34](#), [35](#)
- GUESSASMA, M. et J. FORTIN. 2011, «Modélisation d'un milieu discret cohésif par l'approche dynamique des contacts : Application à la rupture d'un matériau cimentaire», dans *10e colloque national en calcul des structures*, p. Clé–USB. [38](#)
- HADDAD, H., M. GUESSASMA et J. FORTIN. 2016, «A dem–fem coupling based approach simulating thermomechanical behaviour of frictional bodies with interface layer», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 81, p. 203–218. [38](#)
- HAILE, J. 1992, *Molecular dynamics simulation*, vol. 18, Wiley, New York. [38](#)
- HARDENACKE, V. et J. HOHE. 2009, «Local probabilistic homogenization of two-dimensional model foams accounting for micro structural disorder», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, n° 5, p. 989–1006. [16](#)
- HEDJAZI, L., C. MARTIN, S. GUESSASMA, G. DELLA VALLE et R. DENDIEVEL. 2012, «Application of the discrete element method to crack propagation and crack branching in a vitreous dense biopolymer material», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, n° 13, p. 1893–1899. [38](#)
- HEIMBS, S., P. MIDDENDORF, M. MAIER et collab.. 2006, «Honeycomb sandwich material modeling for dynamic simulations of aircraft interior components», dans *Proceedings of the 9th international LS-DYNA users conference. Dearborn (MI)*. [15](#)
- HENTZ, S., L. DAUDEVILLE et F. V. DONZÉ. 2004, «Identification and validation of a discrete element model for concrete», *Journal of engineering mechanics*, vol. 130, n° 6, p. 709–719. [38](#)
- HOHE, J., V. HARDENACKE, V. FASCIO, Y. GIRARD, J. BAUMEISTER, K. STÖBENER, J. WEISE, D. LEHMUS, S. PATTOFATTO, H. ZENG et collab.. 2012, «Numerical and experimental design of graded cellular sandwich cores for multi-functional aerospace applications», *Materials & Design*, vol. 39, p. 20–32. [20](#)
- HOOKE, R. 1665, *Micrographia*, Royal Society. [10](#)
- HUDSON, J. A. et J. P. HARRISON. 2000, *Engineering rock mechanics-an introduction to the principles*, Elsevier. [27](#)
- HUNTLEY, J. et L. BENCKERT. 1993, «Measurement of dynamic crack tip displacement field by speckle photography and interferometry», *Optics and lasers in engineering*, vol. 19, n° 4, p. 299–312. [34](#), [35](#)
- INGLIS, C. 1913, «Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners», *Trans. Inst. Naval Arch.* 219. [27](#)
- IRWIN, G. 1957, «Relation of stresses near a crack to the crack extension force», *9th Cong. App. Mech., Brussels*. [29](#)

- JAECKEL, M. 1982, «Verfahren zur herstellung metallischer, insbesondere kugelformiger leichtkorper und zu herstellung von formkorpen mit einschluss solder leichtkorper sowie nach solchen verfahren hergestellte leichtkorper und formkorper», . 18
- JALALI, P. et T. HYPPÄNEN. 2015, «Momentum transport between two granular phases of spherical particles with large size ratio : Two-fluid model versus discrete element method», *Powder Technology*, vol. 273, p. 13–18. 38
- JANUS-MICHALSKA, M. et R. PECHERSKI. 2003, «Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling», *Technische Mechanik*, vol. 23, n° 2-4, p. 234–244. 15
- JEBAHI, M., D. ANDRE, I. TERREROS et I. IORDANOFF. 2015, *Discrete Element Method to Model 3D Continuous Materials*, John Wiley & Sons. 38
- JEBAHI, M., J.-L. CHARLES, F. DAU, L. ILLOUL et I. IORDANOFF. 2013, «3d coupling approach between discrete and continuum models for dynamic simulations (dem-cnem)», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 255, p. 196–209. 38
- JEON, I., T. ASAHINA, K.-J. KANG, S. IM et T. J. LU. 2010, «Finite element simulation of the plastic collapse of closed-cell aluminum foams with x-ray computed tomography», *Mechanics of Materials*, vol. 42, n° 3, p. 227–236. 16, 17
- JING, L. 2000, «Block system construction for three-dimensional discrete element models of fractured rocks», *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 37, n° 4, p. 645–659. 38
- JOUDON, V. 2014, *Caractérisation expérimentale de l'initiation et de la propagation de fissure dans une résine époxy sous chargement dynamique*, Thèse, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis. 34, 35
- KANNINEN, M. 1974, «A dynamic analysis of unstable crack propagation and arrest in the dcb test specimen», *International Journal of Fracture*, vol. 10, n° 3, p. 415–430. 33
- KAUSCH, H.-H. 2012, *Polymer fracture*, vol. 2, Springer Science & Business Media. 25
- KOBAYASHI, A., K. SEO, J. JOU et Y. URABE. 1980, «A dynamic analysis of modified compact-tension specimens using homalite-100 and polycarbonate plates», *Experimental Mechanics*, vol. 20, n° 3, p. 73–79. 33
- KOPP, J.-B., J. SCHMITTBUHL, O. NOEL, J. LIN et C. FOND. 2014, «Fluctuations of the dynamic fracture energy values related to the amount of created fracture surface», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 126, p. 178–189. 33, 34
- KOSTESKI, L., I. ITURRIOZ, R. GALIANO BATISTA et A. P. CISILINO. 2011, «The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics», *Engineering Computations*, vol. 28, n° 6, p. 765–787. 38
- LEE, J., J. CHOI et K. CHOI. 1996, «Application of homogenization fem analysis to regular and re-entrant honeycomb structures», *Journal of Materials Science*, vol. 31, n° 15, p. 4105–4110. 16

- LHUISSIER, P. 2009, *Random hollow spheres stacking: structure, behaviour and integration into sandwich structures*, Thèse, Institut Polytechnique de Grenoble. [18](#), [39](#)
- LI, P., N. PETRINIC et C. SIVIOUR. 2012, «Finite element modelling of the mechanism of deformation and failure in metallic thin-walled hollow spheres under dynamic compression», *Mechanics of Materials*, vol. 54, p. 43–54. [19](#)
- LIM, T.-J., B. SMITH et D. MCDOWELL. 2002, «Behavior of a random hollow sphere metal foam», *Acta Materialia*, vol. 50, n° 11, p. 2867–2879. [19](#)
- MATUTTIS, H., S. LUDING et H. HERRMANN. 2000, «Discrete element simulations of dense packings and heaps made of spherical and non-spherical particles», *Powder technology*, vol. 109, n° 1, p. 278–292. [38](#)
- MAUREL, B. et A. COMBESURE. 2008, «An sph shell formulation for plasticity and fracture analysis in explicit dynamics», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76, n° 7, p. 949–971. [36](#)
- MCDOWELL, G. et O. HARIRECHE. 2002, «Discrete element modelling of soil particle fracture», *GEOTECHNIQUE-LONDON*, vol. 52, n° 2, p. 131–136. [38](#)
- MENOUILLARD, T. 2007, *Dynamique explicite pour la simulation numde propagation de fissure par a méthode des éléments finis étendus*, Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. [37](#)
- MICHAILIDIS, N., F. STERGIOUDI, H. OMAR et D. TSIPAS. 2010, «An image-based reconstruction of the 3d geometry of an al open-cell foam and fem modeling of the material response», *Mechanics of Materials*, vol. 42, n° 2, p. 142–147. [16](#)
- MOTT, N. F. 1948, «Brittle fracture in mild steel plates», *Engineering*. [30](#)
- MUSTIN, G. S. 1968, «Theory and practice of cushion design.», cahier de recherche, DTIC Document. [10](#)
- NEILSEN, M. K., H. S. MORGAN et R. D. KRIEG. 1987, *A phenomenological constitutive model for low density polyurethane foams*, Sandia National Laboratories New Mexico. [15](#)
- NISTOR, I. 2005, *Identification expérimentale et simulation numérique de l'endommagement en dynamique rapide : application aux structures aéronautiques*, Thèse, Institut National Polytechnique de Toulouse. [37](#)
- PAXSON, T., R. LUCAS, B. BROBERG, A. KOBAYASHI et A. ROSENFELD. 1973, «An experimental investigation of the velocity characteristics of a fixed boundary fracture model», dans *Proceedings of an international conference on Dynamic Crack Propagation*, Springer, p. 415–426. [32](#)
- PERSSON, K. 2000, *Micromechanical modelling of wood and fibre properties*, vol. 1013, Lund University. [15](#)
- PETERS, M. et K. HACKL. 2005, «Numerical aspects of the extended finite element method», *PAMM*, vol. 5, n° 1, p. 355–356. [37](#)

- RABCUK, T. 2013, «Computational methods for fracture in brittle and quasi-brittle solids : state-of-the-art review and future perspectives», *ISRN Applied Mathematics*, vol. 2013. 36
- RAHMÉ, P., C. BOUVET, S. RIVALLANT, V. FASCIO et G. VALEMBOS. 2012, «Experimental investigation of impact on composite laminates with protective layers», *Composites Science and Technology*, vol. 72, n° 2, p. 182–189. 20
- RAVI-CHANDAR, K. et W. KNAUSS. 1984, «An experimental investigation into dynamic fracture : I. crack initiation and arrest», *International Journal of Fracture*, vol. 25, n° 4, p. 247–262. 32
- RAYLEIGH, J. W. S. B. 1896, *The theory of sound*, vol. 2, Macmillan. 32
- REHME, O. 2010, *Cellular Design for Laser Freeform Fabrication*, Schriftenreihe Lasertechnik, Cuvillier, ISBN 9783869552736. URL <https://books.google.fr/books?id=urHIYgEACAAJ>. 12
- RÉTHORÉ, J. 2005, *Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : Application à la propagation dynamique des fissures*, Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 37
- ROBERTS D.K., W. A. 1954, «The velocity of brittle fracture», *Engineering*. 30, 32
- ROSEN, D. W. 2007, «Computer-aided design for additive manufacturing of cellular structures», *Computer-Aided Design and Applications*, vol. 4, n° 5, p. 585–594. 12
- ROYLANCE, D. 2001, «Introduction to fracture mechanics», *Massachusetts Institute of Technology, Cambridge*. 28
- SANDERS, W. et L. GIBSON. 2003a, «Mechanics of bcc and fcc hollow-sphere foams», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 352, n° 1, p. 150–161. 18
- SANDERS, W. et L. GIBSON. 2003b, «Mechanics of hollow sphere foams», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 347, n° 1, p. 70–85. 18
- SARGEANT, G. 1991, «Holosphere : a novel ceramic material», *British ceramic. Transactions and journal*, vol. 90, n° 4, p. 132–135. 20
- SHEN, H., S. OPPENHEIMER, D. DUNAND et L. BRINSON. 2006, «Numerical modeling of pore size and distribution in foamed titanium», *Mechanics of materials*, vol. 38, n° 8, p. 933–944. 16
- SHUTOV, F. A. 2013, *Integral/structural polymer foams : technology, properties and applications*, Springer Science & Business Media. 10
- SIBILLE, L., F. NICOT, F. DONZE et F. DARVE. 2007, «Material instability in granular assemblies from fundamentally different models», *International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 31, n° 3, p. 457–481. 38
- SICOMIN[®]. «Sicomin epoxy systems», <http://www.sicomin.com>. 20
- SILVA, M. J., W. C. HAYES et L. J. GIBSON. 1995, «The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 37, n° 11, p. 1161–1177. 12

- SIMON, F., J. BRIAN, V. FASCIO et P. VIÉ. 2015, «Soundproof panel», URL <http://www.google.ch/patents/WO2015117868A1?cl=en>, wO Patent App. PCT/EP2015/051,642. 21
- SIMONE, A. et L. GIBSON. 1998, «The effects of cell face curvature and corrugations on the stiffness and strength of metallic foams», *Acta Materialia*, vol. 46, n° 11, p. 3929–3935. 16
- SONG, B., W. CHEN, T. YANAGITA et D. J. FREW. 2005, «Confinement effects on the dynamic compressive properties of an epoxy syntactic foam», *Composite Structures*, vol. 67, n° 3, p. 279–287. 15
- SONG, J.-H., H. WANG et T. BELYTSCHKO. 2008, «A comparative study on finite element methods for dynamic fracture», *Computational Mechanics*, vol. 42, n° 2, p. 239–250. 37
- STROH, A. N. 1957, «A theory of the fracture of metals», *Advances in Physics*, vol. 6, n° 24, p. 418–465. 32
- SUH, K. et R. SKOCHDOPOLE. 1980, «Encyclopedia of chemical technology, 3rd edn., ed», . 10
- SWENSON, D. et A. INGRAFFEA. 1988, «Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements : theory and applications», *Computational Mechanics*, vol. 3, n° 6, p. 381–397. 36
- TANG, C.-L., J.-C. HU, M.-L. LIN, J. ANGELIER, C.-Y. LU, Y.-C. CHAN et H.-T. CHU. 2009, «The tsaoling landslide triggered by the chi-chi earthquake, taiwan : insights from a discrete element simulation», *Engineering Geology*, vol. 106, n° 1, p. 1–19. 38
- TAVAREZ, F. A. et M. E. PLESHA. 2007, «Discrete element method for modelling solid and particulate materials», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, n° 4, p. 379–404. 39
- THOMPSON, D. W. et collab.. 1942, «On growth and form.», *On growth and form*. 10
- VIOT, P., R. BOUIX, I. IORDANOFF et J. LATAILLADE. 2010, «Deformation localisation modelling of polymer foam microstructure under compression : A new approach by discrete element modelling», *Composite Structures*, vol. 92, n° 2, p. 585–592. 11
- VU-QUOC, L., X. ZHANG et O. WALTON. 2000, «A 3-d discrete-element method for dry granular flows of ellipsoidal particles», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 187, n° 3, p. 483–528. 38
- WADLEY, H. N., N. A. FLECK et A. G. EVANS. 2003, «Fabrication and structural performance of periodic cellular metal sandwich structures», *Composites Science and Technology*, vol. 63, n° 16, p. 2331–2343. 12
- WAN, F. Y., R. D. GREGORY et T. I. MILAC. 1998, «A thick hollow sphere compressed by equal and opposite concentrated axial loads : An asymptotic solution», *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 59, n° 3, p. 1080–1097. 18
- WATWOOD, V. 1970, «The finite element method for prediction of crack behavior», *Nuclear Engineering and Design*, vol. 11, n° 2, p. 323–332. 36

- WILKINS, M., C. CLINE et C. HONODEL. 1969, «Fourth progress report of light armor program.», cahier de recherche, California Univ., Livermore. Lawrence Radiation Lab. 10
- YAVARI, A. et H. KHEZRZADEH. 2010, «Estimating terminal velocity of rough cracks in the framework of discrete fractal fracture mechanics», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 77, n° 10, p. 1516–1526. 32
- YOFFE, E. H. 1951, «The movinf griffith crack», *Philosophical Magazine*. 30
- YOSHIHARA, H. et T. KAWAMURA. 2006, «Mode i fracture toughness estimation of wood by dcb test», *Composites Part A : applied science and manufacturing*, vol. 37, n° 11, p. 2105–2113. 34
- YOU, Z. et W. BUTTLAR. 2004, «Discrete element modeling to predict the modulus of asphalt concrete mixtures», *Journal of Materials in Civil Engineering*, vol. 16, n° 2, p. 140–146. 38
- YOUSSEF, S., E. MAIRE et R. GAERTNER. 2005, «Finite element modelling of the actual structure of cellular materials determined by x-ray tomography», *Acta Materialia*, vol. 53, n° 3, p. 719–730. 16
- ZENG, H., S. PATTOFATTO, H. ZHAO, Y. GIRARD et V. FASCIO. 2010, «Perforation of sandwich plates with graded hollow sphere cores under impact loading», *International journal of impact engineering*, vol. 37, n° 11, p. 1083–1091. 20
- ZHANG, J., N. KIKUCHI, V. LI, A. YEE et G. NUSHOLTZ. 1998, «Constitutive modeling of polymeric foam material subjected to dynamic crash loading», *International journal of impact engineering*, vol. 21, n° 5, p. 369–386. 15
- ZHOU, F., J.-F. MOLINARI et T. SHIOYA. 2005, «A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, n° 9, p. 1383–1410. 35, 37

Chapitre 3

Caractérisation et modélisation d'une sphère creuse en compression uni-axiale

« Debugging is twice as hard as writing the code in the first place. Therefore, if you write the code as cleverly as possible, you are, by definition, not smart enough to debug it. »

Brian W. Kernighan

Sommaire

3.1 Introduction	51
3.2 Essais de compressions quasi-statique et dynamique sur sphères creuses	51
3.2.1 Moyens expérimentaux	51
3.2.2 Essais en régime quasi-statique	52
3.2.3 Essais dynamiques	54
3.3 Méthode des éléments discrets	56
3.3.1 Mise en œuvre	56
3.3.1.1 Workbench Granoo	56
3.3.1.2 Schéma d'intégration temporelle	57
3.3.1.3 Calcul des forces d'interaction	58
3.3.1.4 Création des géométries	60
3.3.2 Modélisation discrète d'un milieu continu	62
3.3.2.1 Domaine élastique	62
3.3.2.2 Critères de rupture	63
3.4 Identification des paramètres du modèle	65
3.4.1 Essais de caractérisation du matériau constitutif	65
3.4.1.1 Essais de compression	65
3.4.1.2 Prise en compte de la vitesse de déformation et de la température	67
3.4.2 Calibration numérique	68
3.4.2.1 Calibration élastique	68
3.4.2.2 Calibration à rupture	71
3.4.2.3 Prise en compte de la vitesse de déformation	73

3.5 Résultats numériques	75
3.5.1 Construction d'une sphère creuse en éléments discrets	75
3.5.2 Sphères creuses en compression uni-axiale	77
3.5.3 Impact d'une sphère creuse à grande vitesse	79
3.6 Conclusions	82
3.7 Références	82

3.1 Introduction

Ce chapitre présente une première démarche visant à caractériser et modéliser le comportement de la sphère creuse en compression uni-axiale. Nous considérons le cas d'une sphère creuse écrasée entre deux plateaux rigides. Ce cas est donc éloigné des sollicitations réelles que subissent les sphères creuses dans un assemblage mais permet une étude précise de l'influence des principaux paramètres (paramètres géométriques et vitesse de sollicitation). La géométrie des sphères et la vitesse de sollicitation ont une influence sur la réponse de la structure que nous détaillerons. Puis, un modèle numérique en éléments discrets permettant de simuler la rupture d'une sphère creuse en compression est proposé. Les particularités du modèle sont d'abord abordées afin d'expliquer l'approche discrète-continue représentant un comportement élastique-fragile du matériau. Un critère de rupture en contrainte provoque l'amorçage et la propagation de fissures au sein du matériau. Les résultats expérimentaux et numériques sont finalement comparés pour différentes vitesses de sollicitation ($8,3 \cdot 10^{-5}$ à $1,5 \text{ m.s}^{-1}$). Des derniers essais d'impacts de sphères creuses sont réalisés à l'aide d'un canon à air comprimé afin d'atteindre des vitesses de sollicitation plus importantes, au-delà de 100 m.s^{-1} .

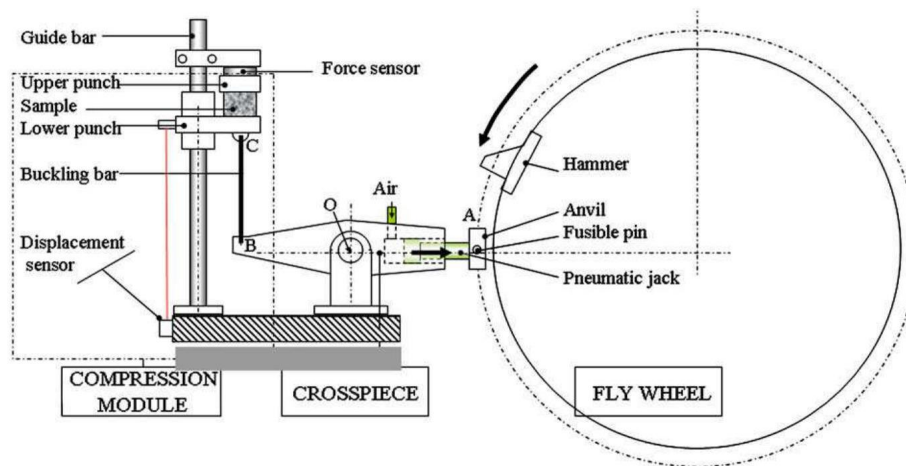
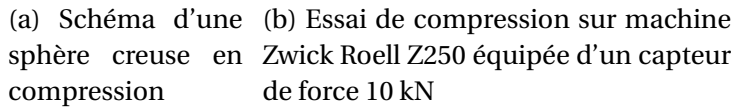
3.2 Essais de compressions quasi-statique et dynamique sur sphères creuses

3.2.1 Moyens expérimentaux

Les essais sont réalisés sur les plus grandes sphères creuses pouvant être fournies par ATECA afin qu'ils soient menés sur le matériel disponible au laboratoire. D'un diamètre moyen de 30 mm, les sphères testées présentent une épaisseur de coque de $0,64 \pm 0,04 \text{ mm}$ (sphères de type A) et de $1,2 \pm 0,06 \text{ mm}$ (sphères de type B). Leurs rapports r_t (épaisseur sur rayon moyen) sont respectivement de 0,043 et 0,08. Leurs masses moyennes respectives sont de $3,22 \pm 0,19 \text{ g}$ et $6,30 \pm 0,3 \text{ g}$. La densité de la résine est de 1880 kg.m^{-3} .

Deux machines d'essais de compression sont utilisées : une machine de compression classique (voir figure 3.1) pour les vitesses de sollicitations quasi-statiques ($v = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$) et une roue inertielle (voir figure 3.2) pour un régime dynamique ($v \approx 1,5 \text{ m.s}^{-1}$). En condition réelle de choc à l'oiseau, la structure peut être amenée à subir des vitesses de sollicitation de l'ordre de 175 m.s^{-1} . La vitesse atteignable avec la roue inertielle, environ 2 m.s^{-1} , est une première étape pour étudier l'influence de la vitesse de sollicitation.

La roue inertielle (figure 3.2) se compose d'une roue en acier possédant un moment d'inertie important (77 kg.m^2), mise en mouvement par un moteur asynchrone. La vitesse de rotation est choisie par l'utilisateur pour une vitesse de sollicitation (par exemple $\omega \approx 12 \text{ rad.s}^{-1}$ donne une vitesse de compression de $v \approx 2 \text{ m.s}^{-1}$). Une fois la vitesse de la roue atteinte, l'opérateur actionne un vérin pneumatique. L'enclume présente sur le levier se déplace vers la roue. Le marteau attaché sur la roue vient frapper l'enclume et provoque la rotation du levier. Ce dernier met en mouvement une barre qui appuie sur le plateau de compression mobile. L'échantillon est écrasé, puis, lorsque le plateau arrive en buté, la barre fait office de fusible et flambe, empêchant la ruine du montage. La grande inertie de la roue permet d'avoir une vitesse de compression constante tout au long de l'essai. La vitesse de compression maximale est de l'ordre de 2 m.s^{-1} . Un capteur de force



2. *Rupture primaire* : une chute brutale de la force est observée pour $\Delta L = 1 - 1,6$ mm, ce qui correspond à la propagation rapide d'une fissure reliant les deux points de contact de la sphère, visible sur la figure 3.4. L'amorçage de la fissure a lieu aléatoirement entre les plateaux supérieur et inférieur. La contrainte circonférentielle est positive (traction), loin des bords, dans le cas d'une sphère creuse en compression [WAN et collab. \[1998\]](#) ce qui entretient la propagation de la fissure. Le mode de rupture privilégié est le mode I, d'ouverture, le plus critique pour le matériau. On observe une longueur de fissure égale à un demi-périmètre pour tous les essais et types de sphères. Le pic de force est atteint juste avant la rupture. La force maximale moyenne pour les sphères A est de 307 ± 46 N et de 752 ± 110 N pour les sphères B pour un déplacement respectif de $1,13 \pm 0,07$ mm et $1,42 \pm 0,17$ mm. Une épaisseur de coque deux fois supérieures conduit à une augmentation moyenne de 2,4 fois la force à rupture.
3. *Ruine complète* : une fois la fissure principale propagée, la force de contact résultante devient quasiment nulle. Lorsque l'essai est poursuivi, les parois de la sphère entrent de nouveau en contact avec les plateaux. Les parois flambent et on observe de nombreuses fissures. La structure se casse en plusieurs fragments. La force de réaction augmente fortement à la fin de l'essai lors de la densification, caractéristique du comportement d'un matériau cellulaire. Cette phase n'est pas visible dans les résultats présentés ici, les essais ayant été stoppés au moment de la rupture primaire.

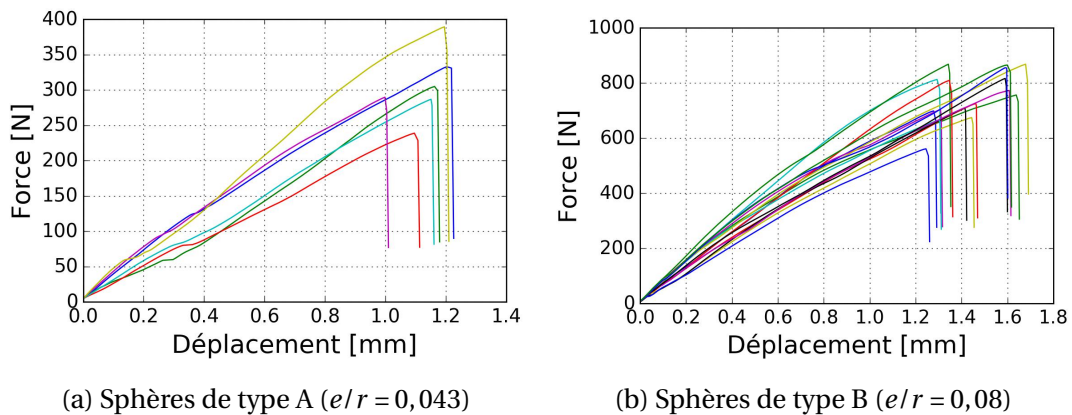


FIGURE 3.3 – Essais de compression quasi-statique ($5 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$) sur sphères creuses : réponses force - déplacement

Une dispersion non négligeable des résultats est à noter. Elle peut avoir trois origines : la dispersion associée aux moyens de mesure, à une vitesse de sollicitation variable (dans le cas du régime dynamique) et à la présence de défauts géométriques. Les deux premières causes dépendent de la machine d'essai, les informations sur les différents composants nous donnent une estimation de ces incertitudes qui sont inférieures au %. La dispersion est donc principalement causée par la présence de défauts au sein de la sphère : épaisseur moyenne différente et épaisseur locale non constante. Le procédé de fabrication entraîne des concentrations plus ou moins importantes de matière et l'amorçage de la fissure en est fortement dépendant.

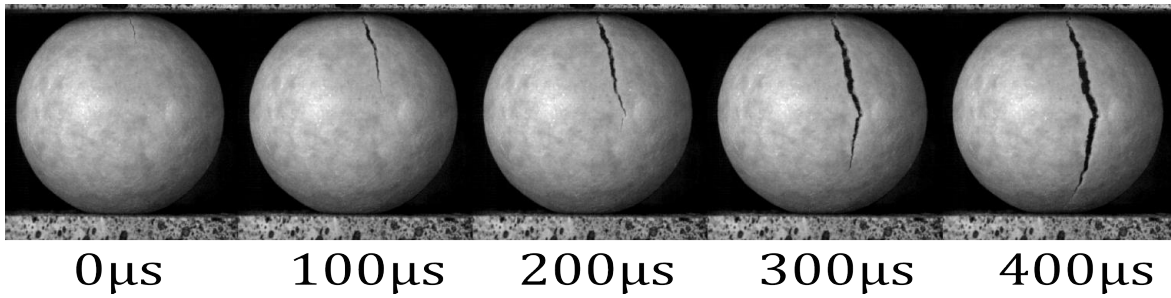


FIGURE 3.4 – Rupture brutale par propagation d'une fissure sur une sphère creuse (A) lors d'un essai de compression quasi-statique

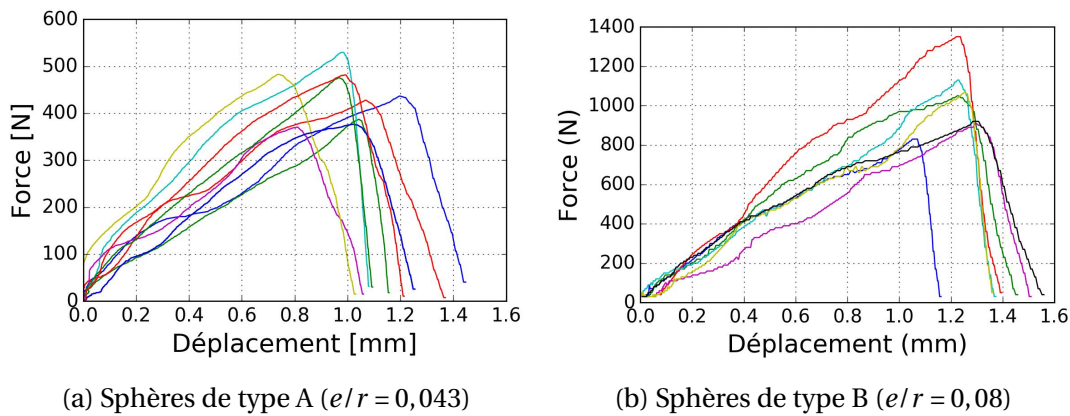


FIGURE 3.5 – Essais de compression dynamique ($\approx 1,5 \text{ m.s}^{-1}$) sur sphères creuses : réponse force - déplacement

3.2.3 Essais dynamiques

Les résultats des essais dynamiques effectués sur la roue inertielle sont présentés sur la figure 3.5. La vitesse d'impact choisie est la vitesse maximale soit 2 m.s^{-1} . Dans les faits, la vitesse réelle mesurée au niveau de l'échantillon est inférieure, due aux jeux et à l'inertie des pièces en mouvement lors de l'impact. Ainsi la vitesse mesurée moyenne est de $1,53 \pm 0,17 \text{ m.s}^{-1}$ lors de la campagne d'essais sur les sphères de type A et de $1,32 \pm 0,18 \text{ m.s}^{-1}$ sur les sphères de type B. Cette vitesse est mesurée sur les 2 premiers mm de compression où a lieu la rupture primaire. La vitesse se stabilise ensuite vers $1,8$ à 2 m.s^{-1} après 2 à 3 mm de course. La course maximale utilisée dans les résultats ci-dessous a été fixée de sorte à stopper l'écrasement quelques millimètres après la première rupture.

Le comportement global de la structure reste similaire à celui observé en quasi-statique : phase élastique, rupture brutale et multi-fissuration jusqu'à densification. La force à rupture augmente avec la vitesse de sollicitation : pour les sphères de type A, la force moyenne passe de $307 \pm 46 \text{ N}$ en quasi-statique à $434 \pm 53 \text{ N}$ en dynamique soit une augmentation de 41 % et pour les sphères de type B de $752 \pm 110 \text{ N}$ à 1037 ± 160 soit une augmentation de 38 %.

La rupture primaire en dynamique est plus aléatoire, l'amorçage de la fissure a toujours lieu à un des deux pôles mais la longueur de fissure est variable. L'énergie élastique stockée au sein de la structure est plus importante qu'en quasi-statique et l'énergie supplémentaire apportée par la compression pendant la fissuration n'est pas négligeable, de l'ordre de 15-20 % par rapport à l'énergie totale. La création de surface lors de la rupture est plus importante. Certaines fissures se propagent sur un méridien entier tandis que certaines branchent. La figure 3.6 illustre un double amorçage (départ de

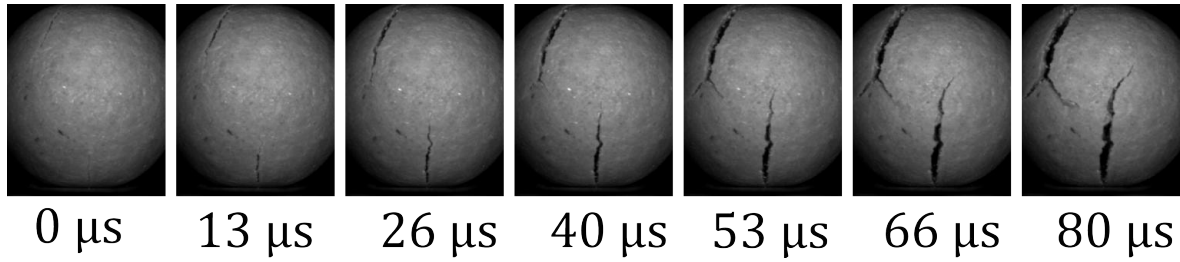


FIGURE 3.6 – Rupture brutale par propagation d'une fissure sur une sphère creuse (B) lors d'un essai de compression dynamique

fissure aux deux pôles) suivi d'un branchement sur une sphère de type B. Le branchement peut avoir trois origines : branchement pour raison inertielle, branchement sur un défaut dans la matière ou changement d'orientation de la contrainte principale d'ouverture de la fissure. Ce type de résultat n'est néanmoins pas représentatif de l'ensemble des résultats. La propagation d'une seule fissure principale reste majoritaire. La vitesse de propagation de fissure, qui sera mesurée précisément dans le prochain chapitre est de l'ordre de la centaine de mètres par seconde. La vitesse des ondes de Rayleigh dans le matériau est calculée à environ 1650 m.s^{-1} par la suite. La vitesse de propagation de fissure est donc bien inférieure aux vitesses rencontrées lors de branchements sur ce type de matériau (environ $0,6c_r$). Les défauts géométriques induits par le procédé de fabrication semblent être à l'origine de ces branchements.

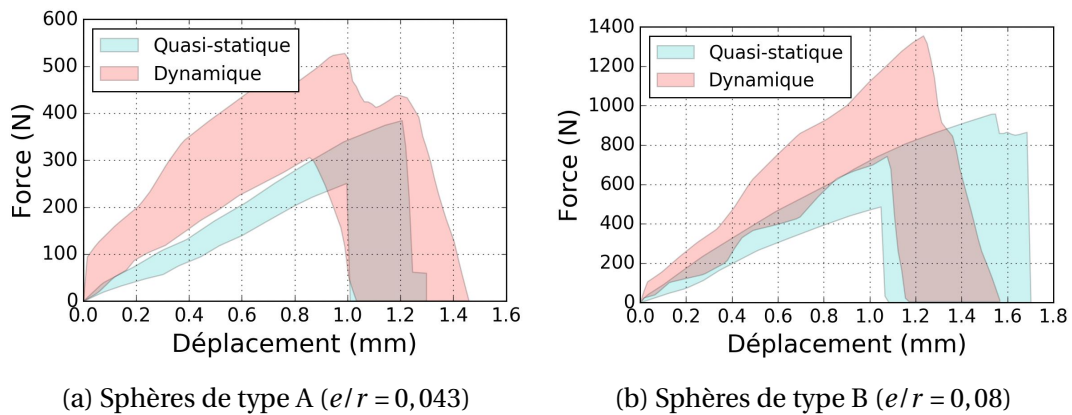


FIGURE 3.7 – Essais de compression quasi-statique (5 mm.min^{-1}) et dynamique ($\approx 1,35 \text{ m.s}^{-1}$) sur sphères creuses, représentation de la dispersion des résultats

Une synthèse des résultats quasi-statique et dynamique est illustrée sur la figure 3.7. Les zones colorées illustrent la dispersion des essais (différence entre les forces inférieures et supérieures des essais). Ils mettent en évidence l'augmentation de la force à rupture et de la rigidité avant rupture de la structure. Les principaux résultats quantitatifs sont répertoriés dans le tableau 3.1. Trois résultats sont donnés : F_r , δ_r et E_r respectivement la force, le déplacement et l'énergie élastique stockée à la rupture primaire de la sphère creuse. Lorsque la vitesse de sollicitation augmente, on observe une augmentation de la force à rupture d'environ 40 % et de l'énergie à rupture d'environ 50 %. Le déplacement à rupture diminue d'environ 15 %. Ces tendances sont aussi observées dans la littérature pour des résines de type époxyde. Pour 4 décades de vitesse de sollicitation GÓMEZ-DEL RÍO et RODRÍGUEZ [2012] observent une augmentation d'environ 30 % de la limite à rupture en compression. GILAT et collab. [2007] montrent des tendances similaires pour différentes résines époxydes soumises à des essais de torsion et de traction.

TABEAU 3.1 – Synthèse des résultats de compression quasi-statique et dynamique sur sphères creuses

Sphère	r_t	v (m.s ⁻¹)	F_r (N)	δ_r (mm)	E_r (J)
A	0,043	$8,3 \cdot 10^{-5}$	307 ± 46	$1,13 \pm 0,07$	$0,18 \pm 0,04$
B	0,08	$8,3 \cdot 10^{-5}$	752 ± 110	$1,42 \pm 0,17$	$0,60 \pm 0,15$
A	0,043	$1,53 \pm 0,17$	434 ± 53	$0,98 \pm 0,12$	$0,31 \pm 0,05$
B	0,08	$1,32 \pm 0,18$	1037 ± 160	$1,22 \pm 0,07$	$0,78 \pm 0,13$

3.3 Méthode des éléments discrets

3.3.1 Mise en œuvre

3.3.1.1 Workbench Granoo

L'outil numérique utilisé dans la suite de cette thèse est basée sur la plate-forme *GranOO*¹ (Granular Object Oriented) qui fournit un atelier de développement C++ mettant en œuvre la Méthode des Éléments Discrets. Cet atelier a été initialement développé pour le travail de thèse de D. André (ANDRÉ [2012]; ANDRE et collab. [2015]), pour fournir un outil de modélisation de l'usinage d'un matériau fragile, la silice. Le modèle numérique devait à la fois simuler le comportement d'un matériau continu, simuler son endommagement et prendre en compte les fragments (3^e corps en tribologie) issus du procédé de doucissage (KAROW [2004]). Pour prendre en compte ces différents phénomènes, la méthode développée se situe entre un modèle de type *lattice* (SCHLANGEN et VAN MIER [1992]) et un modèle *particulaire* (FLEISSNER et collab. [2007]). Les avantages de cette méthode sont illustrés sur la figure 3.8. La partie 3.3.2 traite de cette particularité et la démarche proposée par ANDRÉ [2012] est expliquée.

purpose	FEM	XFEM	DEM	lattice	MD	coupled	multiscale
static	■	■	■	■	■	■	■
dynamic	■	■	■	■	■	■	■
pre-failure	■	■	■	■	■	■	■
post-failure	■	■	■	■	■	■	■
rock material	■	■	■	■	■	■	■
rock mass	■	■	■	■	■	■	■
fracture	■	■	■	■	■	■	■
fragmentation	■	■	■	■	■	■	■

(■ : strong/easy to apply; ■: applicable but with treatment; ■: weak/hard to apply)

FIGURE 3.8 – Comparaison de différentes méthodes numériques en terme de capacité à reproduire la rupture d'une roche KAZERANI [2011]

Afin de répondre aux contraintes d'évolutivité, de sécurité et de performance, le langage de programmation utilisé pour la plate-forme de calcul est C++. L'approche de Programmation Orientée Objet (POO) autorise une modification et l'ajout de modules d'extension (plug-in) par les utilisateurs de la plate-forme. La POO garantit une robustesse importante des bibliothèques logicielles présentes.

La figure 3.9 résume les différentes étapes et données d'entrée et de sortie d'un calcul DEM sur la plate-forme *Granoo* :

Source C++ : cœur du programme, c'est à ce niveau que seront rajoutées de nouvelles fonctions dans ces travaux de recherche : loi de comportement des interactions

1. <http://www.lamef.bordeaux.ensam.fr/granoo/wiki/doku.php>

entre éléments, critère de rupture, sélection de certains éléments.

Compilation : les fichiers sources sont compilés afin d'obtenir un fichier exécutable.

Fichiers d'entrée : ils comprennent une ou plusieurs géométries en éléments discrets préalablement construites par un module spécifique (voir 3.3.1.4) et un fichier XML où sont décrits les paramètres du calcul.

Exécution : la simulation est lancée, le temps de calcul varie de quelques secondes à plusieurs jours suivant le nombre d'éléments et le nombre d'itérations.

Fichiers de sortie : les résultats sauvegardés pendant et à la fin du calcul sous la forme de fichiers *.gdd* contiennent la géométrie à différents pas de temps. Le fichier ASCII *Sensors.txt* est également utilisé pour stocker les données mesurées pendant la simulation par les capteurs numériques que l'utilisateur peut créer en fonction des besoins de sa simulation.

Exploitation : le post-traitement est effectué à l'aide de scripts Python².

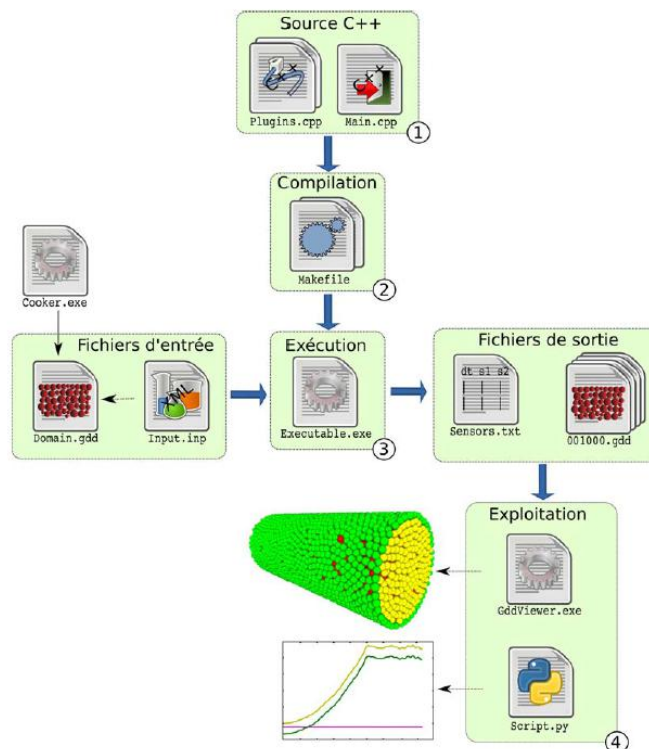


FIGURE 3.9 – Architecture de la plate-forme *Granoo*, issu de ANDRÉ [2012]

3.3.1.2 Schéma d'intégration temporelle

Le calcul de la position, de la vitesse et de l'accélération des éléments discrets est basé sur un schéma d'intégration temporelle explicite. Le temps de calcul dépendant du nombre d'itérations et donc du temps effectif de simulation, le schéma est bien adaptée aux simulations de dynamique rapide. Dans le cas d'essais quasi-statiques, des précautions sont à prendre. Elles sont détaillées à la partie 3.5.2. Parmi les algorithmes de résolution explicite, la technique d'intégration *Verlet vitesse* VERLET [1967] est choisie.

2. <http://www.python.org/>

Stable et rapide, elle est principalement choisie pour sa simplicité par rapport aux autres méthodes d'intégration, voir une comparaison de [ROUGIER et collab. \[2004\]](#).

L'accélération de chaque élément discret est calculée en appliquant le principe fondamental de la dynamique de [NEWTON et collab. \[1833\]](#) :

$$\ddot{\vec{p}} = \frac{\vec{f}}{m} \quad (3.1)$$

avec :

- $\ddot{\vec{p}}$ l'accélération de l'élément discret
- $\vec{f}$ la somme des forces agissant au centre de gravité de l'élément discret
- m la masse de l'élément discret.

La méthode *Verlet vitesse* nous donne ensuite la position et la vitesse d'un élément discret par rapport au pas de temps précédent :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t) + dt \dot{\vec{p}} + \frac{dt^2}{2} \ddot{\vec{p}}(t) \quad (3.2)$$

$$\dot{\vec{p}}(t + dt) = \dot{\vec{p}}(t) + \beta \frac{dt}{2} (\ddot{\vec{p}}(t) + \ddot{\vec{p}}(t + dt)) \quad (3.3)$$

avec :

- t le temps et dt le pas de temps
- $\vec{p}$, $\dot{\vec{p}}$, $\ddot{\vec{p}}$ respectivement le vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération d'un élément discret
- β le facteur d'amortissement numérique.

Le pas de temps appliqué correspond au plus grand pas de temps permettant la stabilité du calcul. La stabilité est assurée lorsque le pas de temps est inférieur à $\frac{1}{2\pi} T_{min}$ (déterminé par [CAMBOU et collab. \[2013\]](#)) avec T_{min} la plus petite période d'oscillation dans le système. Le calcul du pas de temps est donc lié à un calcul de la plus grande pulsation propre d'un système masse - ressort en vibration :

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M_i}{K_i}} \quad (3.4)$$

où M_i et K_i sont les masses et raideurs équivalentes d'une interaction élastique. L'interaction peut être un lien fixe (poutre, ressort) ou un contact éphémère. Le schéma d'intégration est ensuite implémenté numériquement, voir tableau 3.2.

Les rotations des éléments sont aussi prises en compte. Dans ce cas, l'algorithme de résolution reste le même mais les positions, vitesses et accélérations linéaires deviennent des positions, vitesses et accélérations angulaires. Les orientations des éléments discrets sont représentées par des quaternions [MUNJIZA et collab. \[2009\]](#) pour plus de robustesse (problème de *gimbal lock* [HOAG \[1963\]](#) inhérent aux angles d'Euler par exemple).

3.3.1.3 Calcul des forces d'interaction

Les éléments discrets sont liés par divers types d'interactions permanentes : ressorts, potentiels, poutres. Dans ces travaux, nous utiliserons les poutres 3D afin de modéliser le comportement élastique du matériau. Une sphère creuse est composée de centaines à des milliers d'éléments reliés entre eux par une poutre (elle relie les centres de gravité de deux éléments en contact), voir sur la figure 3.10a. Afin de calculer les forces de réaction,

TABEAU 3.2 – Application du schéma d'intégration *Verlet Vitesse* pour les positions linéaire et vitesses de translation d'un élément discret

Require : $\vec{p}(0), \dot{\vec{p}}(0), \ddot{\vec{p}}(0)$
 $t \leftarrow 0$
for all iteration n **do**
 for all discrete element i **do**
 $\vec{p}_i(t + dt) \leftarrow$ Calcul du vecteur position à partir de l'équation (3.2)
 $\vec{f}_i(t + dt) \leftarrow$ Bilan des forces agissant sur l'élément discret i
 $\dot{\vec{p}}_i(t + dt) \leftarrow$ Application du principe fondamental de la dynamique, équation (3.1)
 $\dot{\vec{p}}_i(t + dt) \leftarrow$ Calcul du vecteur vitesse à partir de l'équation (3.3)
 end for $t \leftarrow t + dt$
end for

on applique les lois de la résistance des matériaux associées aux poutres d'Euler-Bernoulli (3.5,3.6,3.7,3.8). La figure 3.10b définit les axes et angles utilisés.

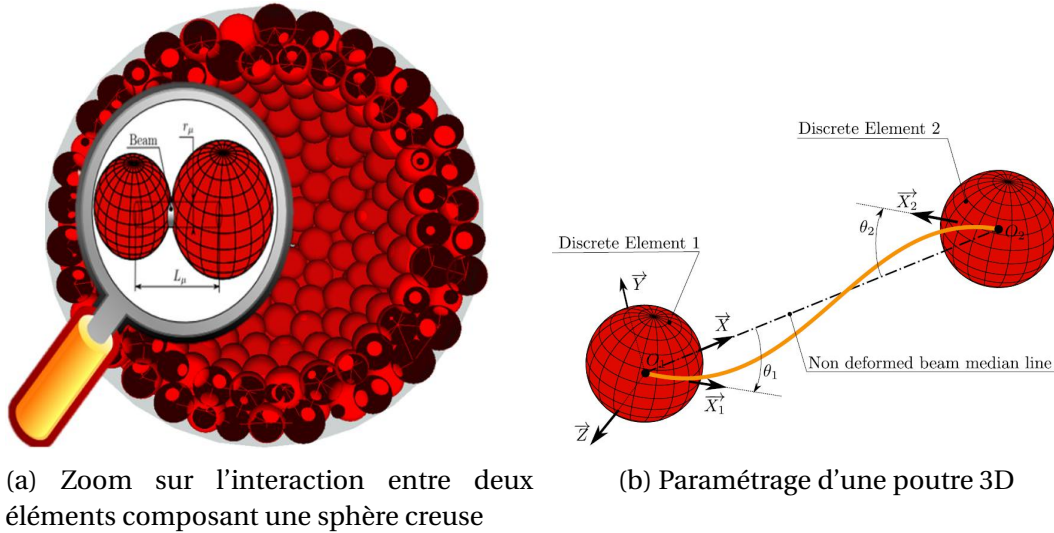


FIGURE 3.10 – Liaison cohésive de type poutre [ANDRÉ \[2012\]](#)

$$\vec{F}_{B/DE_1} = +E_\mu S_\mu \frac{\Delta l_\mu}{l_\mu} \vec{X} - \frac{6E_\mu I_\mu}{l_\mu^2} ((\theta_{2z} + \theta_{1z})\vec{Y} + (\theta_{2y} + \theta_{1y})\vec{Z}) \quad (3.5)$$

$$\vec{F}_{B/DE_2} = -E_\mu S_\mu \frac{\Delta l_\mu}{l_\mu} \vec{X} + \frac{6E_\mu I_\mu}{l_\mu^2} ((\theta_{2z} + \theta_{1z})\vec{Y} - (\theta_{2y} + \theta_{1y})\vec{Z}) \quad (3.6)$$

$$\vec{T}_{B/DE_1} = +\frac{G_\mu I_{0\mu}}{l_\mu} (\theta_{2x} - \theta_{1x})\vec{X} - \frac{2E_\mu I_\mu}{l_\mu} ((\theta_{2y} + \theta_{1y})\vec{Y} - (\theta_{2z} + \theta_{1z})\vec{Z}) \quad (3.7)$$

$$\vec{T}_{B/DE_2} = -\frac{G_\mu I_{0\mu}}{l_\mu} (\theta_{2x} - \theta_{1x})\vec{X} - \frac{2E_\mu I_\mu}{l_\mu} ((\theta_{2y} + \theta_{1y})\vec{Y} - (\theta_{2z} + \theta_{1z})\vec{Z}) \quad (3.8)$$

avec :

— $\vec{F}_{B/DE_1}$ la force d'interaction de la poutre sur l'élément 1

- $\overrightarrow{F_{B/DE_2}}$ la force d'interaction de la poutre sur l'élément 2
- $\overrightarrow{T_{B/DE_1}}$ le moment d'interaction de la poutre sur l'élément 1
- $\overrightarrow{T_{B/DE_2}}$ le moment d'interaction de la poutre sur l'élément 2
- l_μ la longueur initiale de la poutre
- Δl_μ l'allongement de la poutre
- $\overrightarrow{\theta_1}$ le vecteur rotation de la section droite au point O_1
- $\overrightarrow{\theta_2}$ le vecteur rotation de la section droite au point O_2
- S_μ la section de la poutre
- $I_{0\mu}$ le moment quadratique polaire de la poutre
- I_μ le moment quadratique de flexion de la poutre ($I_y = I_z$)
- E_μ le module de Young de la poutre
- G_μ le module de cisaillement de la poutre

Lorsque les éléments ne sont pas liés par une poutre, ils peuvent entrer en contact. Les forces de répulsion de contact sont calculées par une méthode de pénalité. Une distance d'interpénétration est calculée connaissant le centre de gravité des éléments en contact et leurs rayons respectifs. Une raideur de contact, fournie par l'utilisateur, permet de calculer une force de répulsion. Les forces de frottement sont aussi prises en compte et sont basées sur la loi de Coulomb (COULOMB [1821]). La méthode de recherche de contact utilisée dans notre cas, pour un grand nombre d'éléments discrets, repose sur la partition du domaine en plusieurs sous-espaces sur lesquels les paires de contacts vont être recherchés. Le détail de cette méthode est disponible dans la thèse de TERREROS [2013].

3.3.1.4 Création des géométries

Pour simuler correctement un domaine continu à l'aide d'éléments discrets, un arrangement aléatoire et compact des éléments composant la géométrie est nécessaire. ANDRÉ [2012] a montré que plusieurs contraintes de modélisation devaient être respectées :

Isotropie du domaine : elle est caractérisée par la répartition des directions des contacts dans l'espace. Aucune orientation de contact ne doit être privilégiée empêchant ainsi une localisation des déformations ou des fissures. Les arrangements CC ou CFC ne permettent pas d'obtenir un milieu isotrope par exemple et ne sont pas adaptés à la modélisation d'un milieu continu.

Nombre cardinal moyen : il correspond au nombre de contacts moyens par élément. Une valeur proche de 6,2 est attendue dans le cas d'un arrangement compact et aléatoire sans chevauchement d'éléments sphériques à distribution uniforme du rayon GOTOH [1974].

Taux de compaction : il est défini comme le rapport de la somme des volumes des éléments discrets sur le volume de la géométrie dans laquelle ils sont inscrits. On montre que ce rapport est d'environ 0,63 FINNEY [1970].

Un nombre minimum d'éléments est requis afin de satisfaire ces conditions. En général, un minimum de 1 000 éléments suffit à obtenir de premiers résultats cohérents. Un minimum de 10 000 éléments est nécessaire pour obtenir des résultats avec une variation des caractéristiques macroscopiques inférieures à 3 % (ANDRÉ [2012]). De plus,

il est nécessaire d'introduire une légère dispersion des rayons des éléments afin de garantir un meilleur compactage. Nous utilisons la valeur par défaut, déjà validée d'une dispersion uniforme de $\pm 12,5\%$.

Un module a été spécialement développé pour construire des géométries compactes et aléatoires. Il se compose de 3 phases :

1. Phase I : on positionne aléatoirement des éléments dans une géométrie de référence jusqu'à ce que l'on ne puisse plus en insérer (10000 itérations sans ajout) sans que les éléments ne puissent s'interpénétrer. Cette phase est illustrée sur la figure 3.11.
2. Phase II : L'interpénétration est forcée en insérant les éléments un par un. Dans ce cas, les éléments ajoutés chevauchent d'autres éléments. À chaque ajout, le contact est activé ; ce qui a pour effet de réorganiser l'arrangement des éléments autour du nouvel élément. Le système revient à l'équilibre après plusieurs itérations de par l'introduction de contacts dissipatifs. Lorsque l'énergie cinétique du domaine passe en dessous d'une valeur seuil, un nouvel élément est ajouté et le cycle continue. La phase II est stoppée lorsque le nombre cardinal défini par l'utilisateur est atteint.
3. Phase III : cette dernière phase est optionnelle. Elle consiste à diminuer progressivement la rigidité des parois de la géométrie du domaine. Le domaine se *relâche*, les interpénétrations des éléments convergent vers une valeur proche de 0 ($< 10^{-5}\%$ par défaut). Cette phase est obligatoire si le contact entre les éléments est activé par la suite. Le risque est de voir le domaine discret exploser dans les premiers pas de temps de la simulation DEM, du fait des interactions importantes engendrées par les contacts non relaxés existants en fin de phase II.

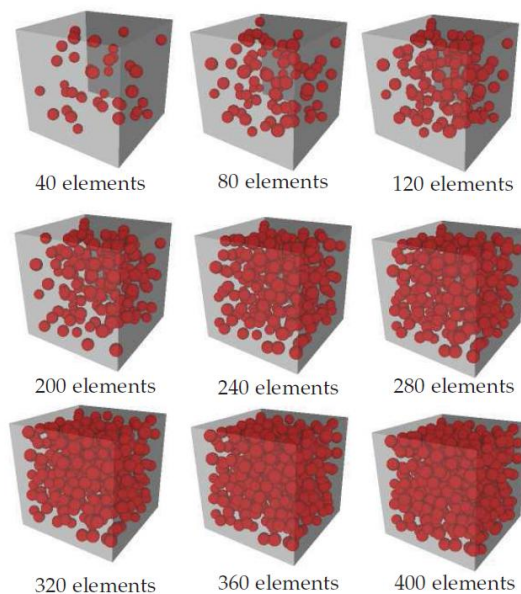


FIGURE 3.11 – Remplissage aléatoire d'un cube d'éléments discrets [JEBABI \[2013\]](#)

Comme ce processus est aléatoire, deux domaines ayant la même géométrie sont statistiquement indépendants car l'arrangement des éléments au sein du domaine n'est a priori pas le même.

3.3.2 Modélisation discrète d'un milieu continu

3.3.2.1 Domaine élastique

Les poutres 3D cohésives sont utilisées afin de traduire un comportement continu élastique du matériau : module d'Young E_M , module de cisaillement G_M et coefficient de Poisson ν_M macroscopiques sont pris en compte. Une étape de calibration nous permet d'obtenir les paramètres microscopiques du modèle. D'après les équations (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8), le nombre de paramètre des poutres 3D peut se réduire à 3 : le module de Young microscopique E_μ , le rayon adimensionné r_μ (défini par 3.9) et le coefficient de Poisson microscopique ν_μ .

$$r_\mu = \frac{r_{poutre}}{(r_1 + r_2)/2} \quad (3.9)$$

avec :

- r_μ le rayon adimensionné
- r_{poutre} le rayon de la poutre
- r_1 et r_2 le rayon des deux éléments discrets reliés par la poutre

ANDRÉ [2012] a montré l'influence de chaque paramètre sur le comportement macroscopique. Le coefficient de Poisson microscopique ν_μ a une influence négligeable (les modes de déformation sollicitant le module de cisaillement : la torsion et le cisaillement sont négligeables devant les déformations de traction, compression et flexion). Sa valeur est fixée à 0,3. Le module de Young macroscopique E_M est relié au module de Young microscopique E_μ et au rayon adimensionné r_μ , figure 3.12a et 3.13a. Le coefficient de Poisson macroscopique ν_M est relié principalement au rayon adimensionné, figure 3.12b et 3.13b.

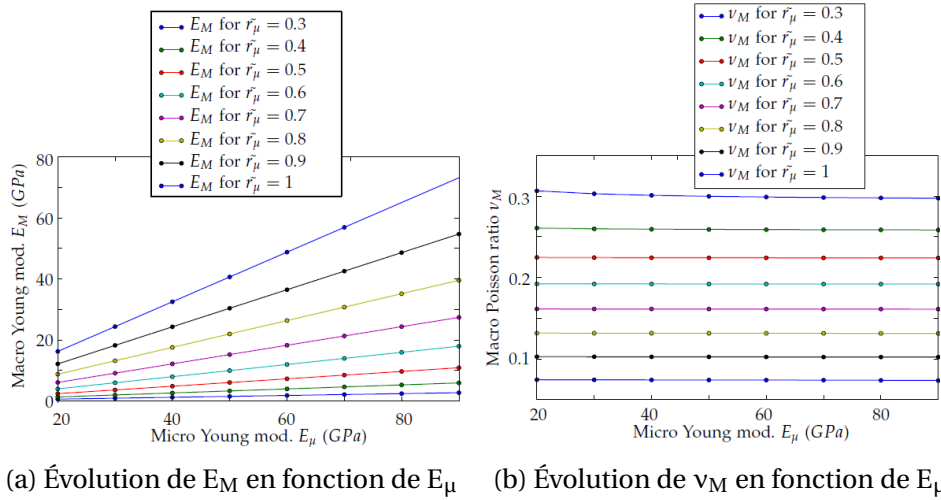


FIGURE 3.12 – Influence du module de Young microscopique E_μ sur les paramètres macroscopiques E_M et ν_M ANDRÉ [2012]

La procédure de calibration consiste à effectuer des essais de sollicitations mécaniques simples (traction ou compression) sur un grand nombre d'éprouvettes numériques pour trouver les paramètres microscopiques. Elle se résume en trois étapes :

1. Étudier la convergence du modèle : la géométrie d'éprouvette choisie, plusieurs raffinements sont effectués (nombre total d'éléments) afin de s'assurer de la précision du modèle.

2. À partir de sollicitations simples, trouver le rayon adimensionné r_μ qui nous donne le coefficient de Poisson macroscopique ν_M recherché. Le rayon adimensionné est calculé à partir de la mesure de la section moyenne de l'éprouvette lors de la traction.
3. Trouver le module de Young microscopique E_μ pour obtenir le module de Young macroscopique E_M du matériau considéré.

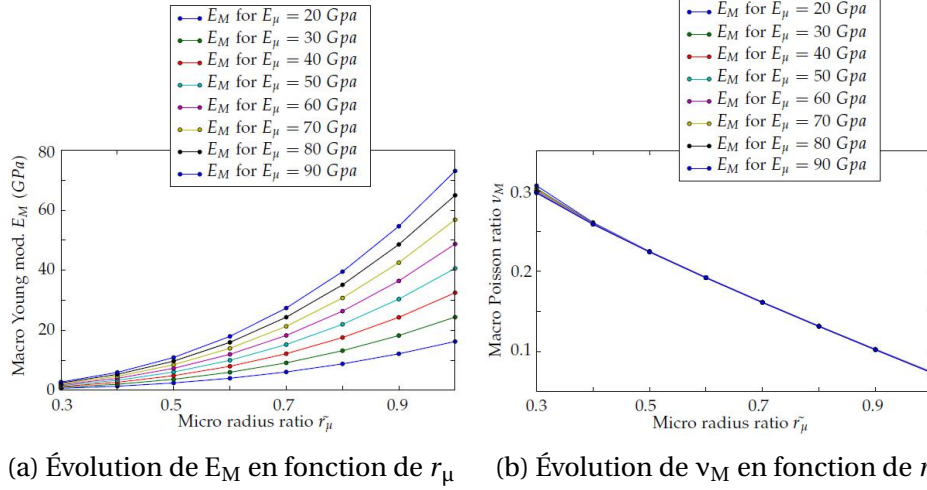


FIGURE 3.13 – Influence du rayon adimensionné microscopique r_μ sur les paramètres macroscopiques E_M et μ_M [ANDRÉ \[2012\]](#)

3.3.2.2 Critères de rupture

La rupture au sein d'un modèle par éléments discrets est prise en compte en cassant les liens entre chaque élément suivant un critère. Les éléments ne sont plus liés et sont libres de s'écarter, créant ainsi la fissure. Il est alors possible de refermer naturellement la fissure en activant les contacts comme on peut le voir sur la figure 3.14.

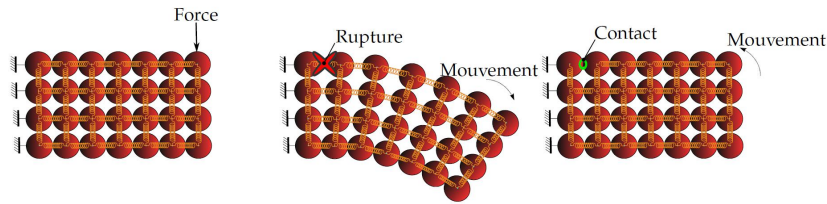


FIGURE 3.14 – Principe de renfermement d'une fissure en éléments discrets [ANDRÉ \[2012\]](#)

Les critères de rupture peuvent être appliqués sur une déformation seuil [CARMONA et collab. \[2008\]](#) ou une contrainte seuil [POTYONDY et CUNDALL \[2004\]](#). Dans le cas des poutres, il est nécessaire de prendre en compte les différentes sollicitations. Le modèle de rupture basé sur la contrainte de Rankine σ_R fait intervenir la contrainte normale σ_{max} et la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} :

$$\sigma_R = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2}) \quad (3.10)$$

Ce critère donne des résultats satisfaisants dans le cas d'essais de traction ou de torsion mais ne parvient pas à modéliser correctement la rupture de matériaux fragiles

en compression. Comme on peut le voir sur la figure 3.17a, JEBABI [2013] montre que les chemins de fissuration ne correspondent pas à ceux observés expérimentalement.

C'est dans ce cadre qu'un critère de rupture basé sur un tenseur des contraintes équivalentes de Cauchy (ou tenseur viriel) a été développé. La contrainte n'est plus calculée sur les poutres mais sur les éléments par l'équation suivante :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{2\Omega_i} \left(\frac{1}{2} \sum_j \vec{r}_{ij} \otimes \vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ij} \otimes \vec{r}_{ij} \right) \quad (3.11)$$

où :

- $\otimes$ est le produit tensoriel de deux vecteurs.
- $\bar{\sigma}_i$ est la contrainte équivalente de Cauchy de l'élément i .
- Ω_i est le volume d'influence de l'élément i (il prend en compte le taux de compaction du domaine).
- $\vec{f}_{ij}$ est la force exercée sur l'élément i par la poutre reliant cet élément i avec un deuxième élément j .
- $\vec{r}_{ij}$ est le vecteur position relatif aux centres des deux éléments i et j dans le repère global.

Le tenseur des contraintes peut être diagonalisé afin de déterminer les 3 contraintes principales :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{B_G} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{B_G} \quad (3.12)$$

Deux critères de rupture, basés sur le tenseur des contraintes de Cauchy peuvent être définis : le critère en contrainte hydrostatique (3.13) et le critère de contrainte principale (3.14). Les critères imposent une rupture locale en traction, les seuils de rupture sont donc positifs :

$$\sigma_{\text{hydrostatic}} = \frac{1}{3} \text{trace}([\sigma]) \quad (3.13)$$

$$\sigma_{\text{principalstress}} = \max(|\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}|) \quad (3.14)$$

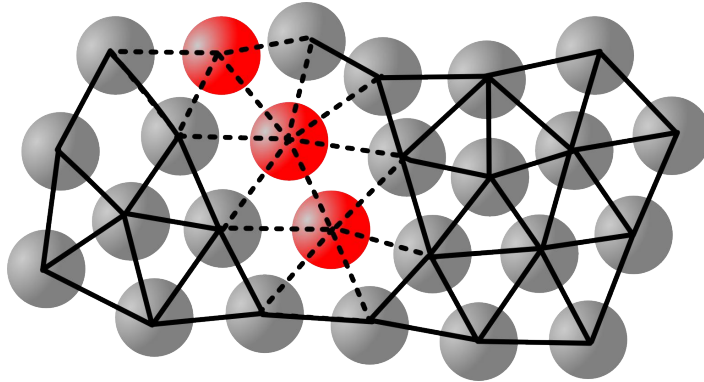


FIGURE 3.15 – Modélisation de la rupture à l'aide du tenseur viriel : les éléments en rouge ont atteint leur limite en contrainte, leurs poutres sont désactivées

Lorsque la contrainte atteint la valeur seuil sur l'élément considéré, il rompt. Toutes les poutres liées à cet élément sont désactivées et ne transmettent plus d'effort comme on

peut le voir sur le schéma 3.16. L'élément rompu est maintenu dans la simulation, il n'y a donc pas de perte de masse et d'énergie cinétique. Il peut entrer en contact avec le reste des éléments, il devient un fragment issu de la rupture. L'énergie élastique contenue dans les poutres désactivées n'est pas restituée sous forme d'énergie cinétique ou d'effort sur les autres éléments, elle constitue une énergie de rupture, irréversible.

Les résultats obtenus sont en accord avec les données expérimentales, comme le montre JEBABI [2013] sur la figure 3.17b pour la silice. Le faciès de rupture, ici un cône de rupture orienté à 45° par rapport à la surface où a lieu l'indentation, est correctement prédit par le critère hydrostatique issu du tenseur viriel.

Toutefois, la valeur du critère ne correspond pas forcément à la valeur mesurée expérimentalement et une étape de calibration reste nécessaire.

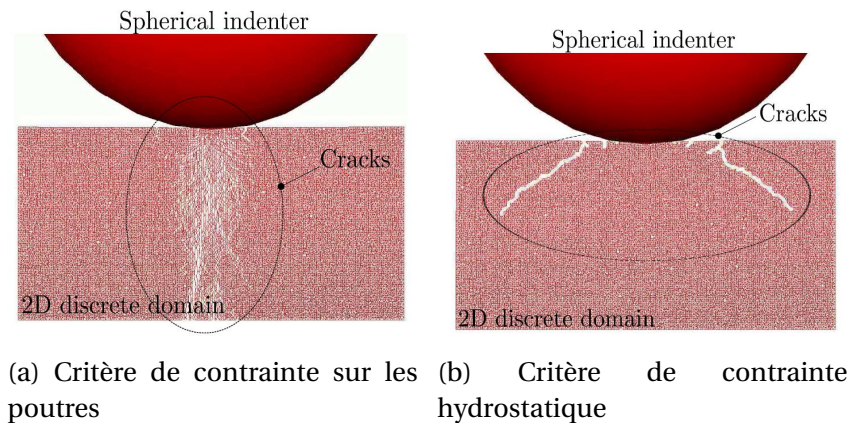


FIGURE 3.16 – Illustration d'un essai d'indentation de silice suivant deux modèles de rupture JEBABI [2013]

3.4 Identification des paramètres du modèle

3.4.1 Essais de caractérisation du matériau constitutif

3.4.1.1 Essais de compression

Dans le but de calibrer numériquement les paramètres du modèle, il est dans un premier temps nécessaire de mesurer expérimentalement le module de Young et la limite à rupture du matériau constitutif. En effet, ces données sont disponibles dans le cas de la résine seule mais n'ont jamais été mesurées pour le matériau composite actuellement utilisé. Compte tenu de la taille micrométrique des charges ajoutées à la résine, le matériau est considéré comme isotrope. Les éprouvettes subissent le même cyclage thermique que les sphères creuses. Des essais de compression sont préférés aux essais de traction pour deux raisons : la fabrication de cylindres de compression est plus aisée, on évite ainsi la présence de défauts trop importants qui pourraient apparaître sur des éprouvettes de traction. Puis, les essais de compression font intervenir un plus grand nombre de mécanismes lors de la rupture : frottement et renfermement de fissure. Ils permettent donc de vérifier la validité du modèle numérique développé dans une situation plus complexe que la traction simple.

Les essais sont conduits sur des éprouvettes cylindriques de 30 mm de diamètre et 20 mm de hauteur. Des jauges de déformations sont placées sur chaque éprouvette suivant la direction de compression. La déformation radiale n'est pas mesurée, le

coefficient de Poisson est supposé proche de la résine seule, soit environ 0,3. Une machine de compression classique est utilisée (Zwick Roell Z250) avec un capteur de force de 250 kN. Le déplacement au niveau des plateaux de compression est issu du déplacement de la traverse qui est corrigé pour tenir compte de la déformation du bâti. La vitesse de compression est fixée à 5 mm.min^{-1} .

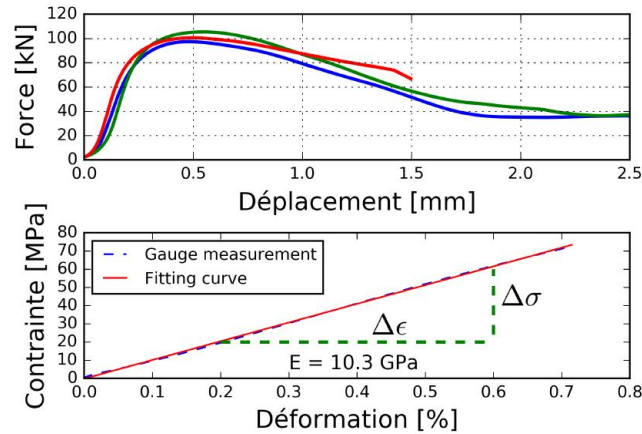


FIGURE 3.17 – Mesure de la relation contrainte - déformation du matériau constitutif (haut) et estimation du module de Young (bas)

La figure 3.18 nous montre le résultat de trois essais de compression sous forme de courbes force - déplacement et contrainte-déformation. Comme attendu dans le cas d'une résine époxyde, le comportement est de type élastique fragile (KAUSCH [2012]). Après la phase élastique, des fissures apparaissent (orientées de 90° à 45° par rapport à la direction de compression, comme illustré sur la figure 3.27) et on observe une chute de force. La force maximale mesurée pour ce type d'éprouvette est de $99 \pm 3 \text{ kN}$. La dispersion reste faible. Le module de Young mesuré est de $10,3 \pm 0,3 \text{ GPa}$, soit trois fois supérieur à celui de la résine seule (SICOMIN®). Les charges, comme il était attendu, ont donc pour effet d'augmenter fortement la rigidité du matériau. Dans le cas où la calibration est directement effectuée, il n'est pas nécessaire d'exprimer la limite de rupture en contrainte puisque la valeur du critère de rupture sera déterminée de sorte à obtenir le même comportement en terme de courbe force - déplacement.

3.4.1.2 Prise en compte de la vitesse de déformation et de la température

Le comportement mécanique de la majorité des polymères dont les résines thermodurcissables dépend du temps ($\dot{\delta}$ vitesse de sollicitation, $\dot{a}$ vitesse de propagation de fissure) et de la température NAIK et collab. [2011]; YOKOYAMA et collab. [2012]. Le matériau constituant les sphères creuses est soumis à des vitesses de déformation importantes, qu'elles soient liées à la rupture dynamique ou à des chargements dynamiques. Aussi, il est important de prédire le comportement du matériau face à des impacts à grande vitesse. De plus, les conditions d'emploi des sphères creuses nécessitent la prise en compte de la température. Une prise en compte numérique de ce comportement est donc souhaitable.

On propose de réaliser des essais de compression sur des éprouvettes cylindriques à différentes vitesses de sollicitation et différentes températures.

La géométrie d'éprouvette choisie est un cylindre de rayon 12,7 mm et hauteur 25,4 mm (norme ASTM D695). Les essais sont réalisés sur une machine de compression

classique (Zwick Roell Z250) équipée d'un capteur 250 kN et d'une enceinte climatique (chauffage par résistance et refroidissement par apport d'azote liquide). Les températures d'essais s'échelonnent de $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $+80\text{ }^{\circ}\text{C}$ par pas de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ces températures sont proches des températures extrêmes rencontrées dans le cas d'un choc à l'oiseau. Les vitesses de sollicitation sont de $5\text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$ et $500\text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$. Les résultats de limite à rupture en fonction de la température sont représentés sur la figure 3.19.

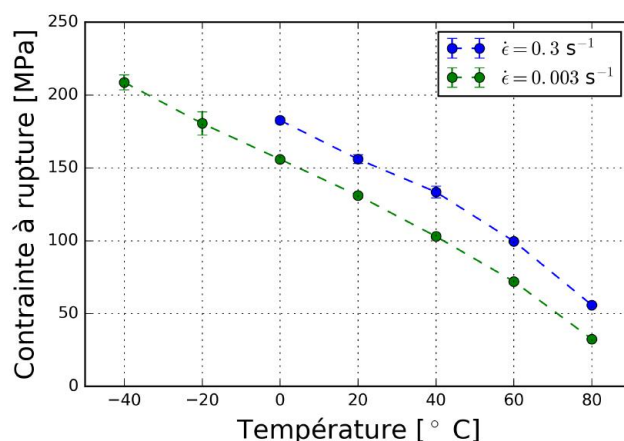


FIGURE 3.18 – Essais de compression sur éprouvette cylindrique à différentes vitesses de déformation ($\dot{\epsilon} = 0.003 - 0.3\text{ s}^{-1}$ et températures ($T = -40$ à $+80\text{ }^{\circ}\text{C}$)

On note que la limite à rupture est fortement dépendante de la température, elle passe en effet de moins de 50 MPa à plus de 200 MPa entre $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ pour une vitesse de sollicitation de $5\text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$. Dans le cas de la sollicitation à une vitesse de $500\text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$, on remarque une baisse de la limite à rupture à $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ (résultats non représentés sur la figure). Ce comportement non attendu pour ce type de matériau peut être expliqué par les moyens de mesure qui sont inadaptés. Lors de l'essai à $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $500\text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$, le temps de compression avant rupture est d'environ 60 ms. Les mors de la machine ont une masse d'une centaine de kilogrammes et la distance entre l'échantillon et le capteur de force est importante, le système n'a pas le temps d'être à l'équilibre. La force à rupture est sous-évaluée.

Compte tenu de la relative grande résistance du matériau, un essai sur la roue inertielle précédemment utilisée n'est pas approprié. La force maximale acceptée par la machine, 2-3 kN nécessiterait une section d'éprouvette trop faible. Il serait cependant souhaitable de poursuivre ces essais sur des barres de Hopkinson afin d'étudier le comportement du matériau à de grandes vitesses de déformation.

Afin de prédire la limite d'écoulement de matériaux polymères, plusieurs lois, phénoménologique ou physique, ont été proposées dans la littérature et notamment pour les résines thermodurcissables BUCKLEY et collab. [2004]; MAYR et collab. [1998]; YOKOYAMA et collab. [2012]. POWELL et EYRING [1944] proposent une loi de comportement physique d'écoulement plastique, appelée couramment loi de Eyring. Validée depuis par BUCKLEY et collab. [2001], la loi originelle considère l'écoulement pur du matériau et l'arrangement des chaînes du polymère comme seul mécanisme entraînant une augmentation de la limite d'écoulement avec la vitesse de déformation. Des essais ultérieurs ont montré qu'à haute vitesse de déformation, d'autres mécanismes ne pouvaient être négligés comme une transformation isotherme adiabatique ou une augmentation de la rigidité. La théorie généralisée de REE et EYRING [1958], équation (3.15), permet d'étendre la plage de validité de la théorie originale de Eyring. Elle a été

appliquée avec succès sur des résines de type époxyde GÓMEZ-DEL RÍO et RODRÍGUEZ [2012] :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{T} &= \frac{4\sqrt{3}k}{V_{0\alpha}v_{0\alpha}} \left(\ln \frac{\sqrt{3}}{2v_{0\alpha}J_{0\alpha}} \dot{\epsilon} + \frac{Q_\alpha}{RT} \right) + \frac{4\sqrt{3}k}{V_{0\beta}v_{0\beta}} \sinh \left[\frac{\sqrt{3}}{4v_{0\beta}J_{0\beta}} \dot{\epsilon} \exp \left(\frac{Q_\beta}{RT} \right) \right]^{-1} \\ &= A_\alpha \left(\ln 2C_\alpha \dot{\epsilon} + \frac{Q_\alpha}{RT} \right) + A_\beta \sinh \left[C_\beta \dot{\epsilon} \exp \left(\frac{Q_\beta}{RT} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec :

- σ_y la limite élastique
- T la température absolue en Kelvin
- $\dot{\epsilon}$ la vitesse de déformation
- k la constante de Boltzmann
- R la constante universelle des gaz parfaits
- $V_{0\alpha}$ et $V_{0\beta}$ les volumes d'activation pour les transitions d'états α et β
- $v_{0\alpha}$ et $v_{0\beta}$ taux de cisaillement élémentaires
- $J_{0\alpha}$ et $J_{0\beta}$ les constantes cinétiques
- $A_{\alpha,\beta}$, $C_{\alpha,\beta}$ et $Q_{\alpha,\beta}$ les énergies d'activation des transitions d'états α et β .

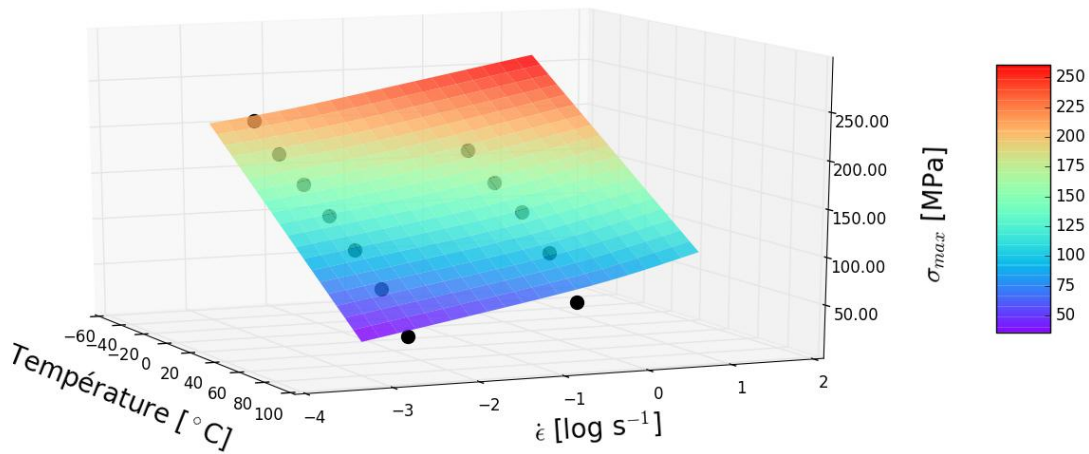


FIGURE 3.19 – Représentation de la surface de réponse de la loi de Ree-Eyring par rapport aux données expérimentales

Les constantes de la loi de Ree-Eyring sont identifiées par une méthode d'optimisation numérique. La méthode de GLAUDELL et collab. [1965] (*Downhill Simplex Method*) est utilisée. Les valeurs initiales sont celles issues de la littérature identifiées pour un matériau similaire GÓMEZ-DEL RÍO et RODRÍGUEZ [2012]. Les deux valeurs de limite élastique à -20 °C et -40 °C et à la vitesse de sollicitation de 500 mm.min⁻¹ ne sont pas prises en compte. Les valeurs identifiées sont indiquées dans le tableau 3.3 et la surface de réponse de la relation contrainte - vitesse - température est présentée sur la figure 3.20.

TABEAU 3.3 – Synthèse des paramètres du modèle Ree-Eyring identifiés

Paramètres	Valeurs	Unités
A_α	0,019	MPa.K ⁻¹
C_α	$1,13 \cdot 10^{-31}$	s ⁻¹
Q_α	230	kJ.mol ⁻¹
A_β	0,010	MPa.K ⁻¹
C_β	$7,06 \cdot 10^{-5}$	s ⁻¹
Q_β	25,99	kJ.mol ⁻¹

3.4.2 Calibration numérique

3.4.2.1 Calibration élastique

La calibration élastique du matériau constitutif est maintenant réalisée suivant la méthode présentée à la partie 3.3.2.1. Des éprouvettes cylindriques (diamètre 30 mm et hauteur 20 mm) en éléments discrets sont construites avec un nombre d'éléments variant de 500 à 35 000. Pour chaque raffinement du maillage discret, 5 éprouvettes sont réalisées afin de quantifier la dispersion.

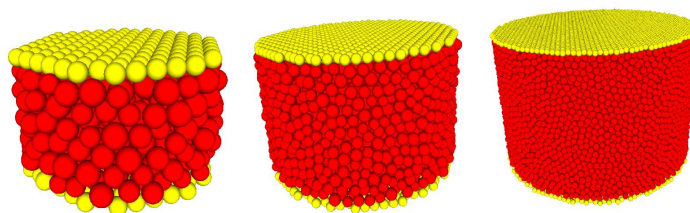


FIGURE 3.20 – Éprouvettes cylindriques d'éléments discrets composées de 750, 5500 et 35000 éléments discrets (de gauche à droite)

Un essai de compression numérique est ensuite mené sur les éprouvettes en appliquant une force progressive sur les deux faces du cylindre, une positive l'autre négative. Le chargement est appliqué uniformément sur les éléments des deux faces. Le pilotage en force est choisi arbitrairement, un déplacement imposé permettrait de retrouver les mêmes résultats. La force est stabilisée à quelques pour-cents de déformation de l'éprouvette. Comme seules les propriétés élastiques sont recherchées, aucune critère de rupture n'a été utilisé. De plus, les frottements ne sont pas pris en compte. La vitesse de chargement est choisie de telle sorte à assurer un chargement quasi-statique : la part d'énergie cinétique est négligeable devant l'énergie élastique. La longueur et le rayon de l'éprouvette sont mesurées lorsque la simulation est stabilisée. Connaissant la force appliquée il est possible de remonter au module de Young et au coefficient de Poisson macroscopique du matériau. Cet essai est répété pour toutes les combinaisons de géométrie et de paramètres microscopiques des poutres.

Dans le cas de la calibration illustrée sur la figure 3.22, on note qu'un nombre de 15 000 éléments minimum est nécessaire pour la convergence du modèle. On fixe arbitrairement une précision de $\pm 2.5 \%$: un modèle comportant 15 000 éléments possède une valeur de rigidité et de coefficient de Poisson à $\pm 2.5 \%$ du modèle à 35 000 éléments supposé convergé.

On peut donc attribuer successivement aux deux paramètres étudiés, le module de Young microscopique E_μ et le rayon adimensionné r_μ , différentes valeurs et réaliser des essais de compression sur la géométrie à 15 000 éléments. En effet, l'analyse paramétrique

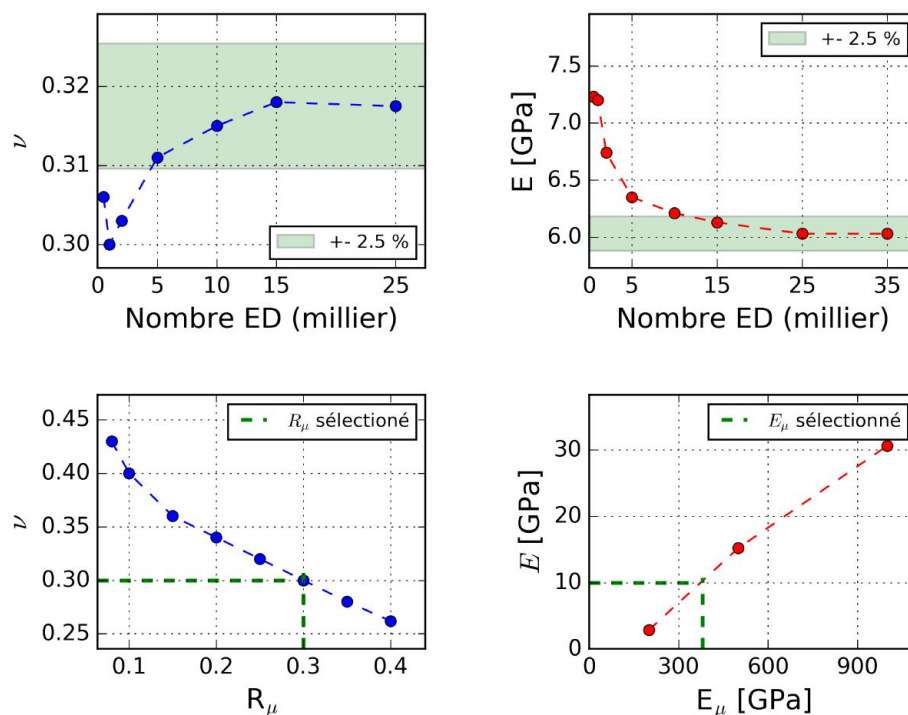


FIGURE 3.21 – Calibration élastique du matériau constitutif

implique un grand nombre de calculs, et le coût CPU deviendrait exorbitant pour des géométries à trop grand nombre d'éléments.

Il est ainsi possible d'identifier les paramètres microscopiques du modèle, voir la figure 3.22.

TABEAU 3.4 – Paramètres élastiques macroscopiques (données expérimentales) et microscopiques (numériques, calibrées)

	Module de Young	coefficient de Poisson	Rayon adimensionné
Macroscopique	$E_M = 10,3 \text{ GPa}$	$\nu_M = 0,3$	aucun
Microscopique	$E_\mu = 356 \text{ GPa}$	$\nu_\mu = 0,3$	$R_\mu = 0,3$

3.4.2.2 Calibration à rupture

La calibration à rupture est dans un premier temps réalisée de manière à reproduire les essais en compression quasi-statique à température ambiante du matériau. La même méthodologie que pour la calibration élastique est menée, plusieurs valeurs de différents critères de rupture sont évaluées. Les éprouvettes numériques sont les mêmes que pour la calibration élastique à un paramètre près. Les deux faces du cylindre sont surfacées numériquement, c'est à dire que les éléments ne sont pas rangés aléatoirement. En effet, les géométries brutes comportent des faces rugueuses liées à la position aléatoire des éléments et à leurs rayons légèrement différents. Lors d'essais préliminaires de compression, réalisés cette fois-ci entre deux plateaux, le module de Young mesuré est apparu être plus faible que celui calibré. La force n'est pas appliquée uniformément sur les faces du cylindre, voir figure 3.24a. Des déformations locales apparaissent en début de compression. Comme la rupture a lieu à une déformation faible, les faces du cylindre n'ont pas le temps de s'adapter aux plateaux pour reprendre tous les efforts

uniformément ce qui diminue la rigidité apparente. De nouvelles géométries ont donc été créées en plaçant des éléments ordonnés de forme hexagonale, de même rayon et même coordonnées suivant l'axe de compression. Cette technique va à l'encontre des conditions d'empilement aléatoires requises pour le modèle mais reste limitée, la zone ordonnée représentant une petite partie de la géométrie totale. Un arrangement surfacé aléatoire conduirait à un taux de compacité trop faible. On obtient finalement une quasi-uniformisation de la force sur les faces du cylindre (malgré quelques éléments récalcitrants, dus au processus de remplissage), figure 3.24b.

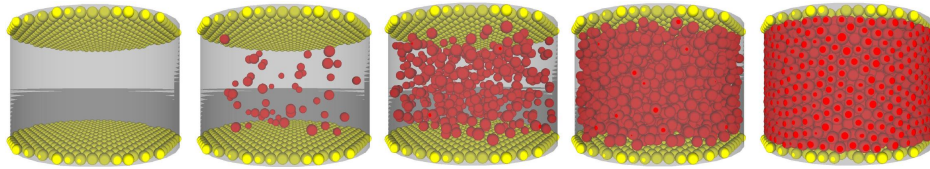


FIGURE 3.22 – Construction d'une éprouvette cylindrique en éléments discrets *surfacée*

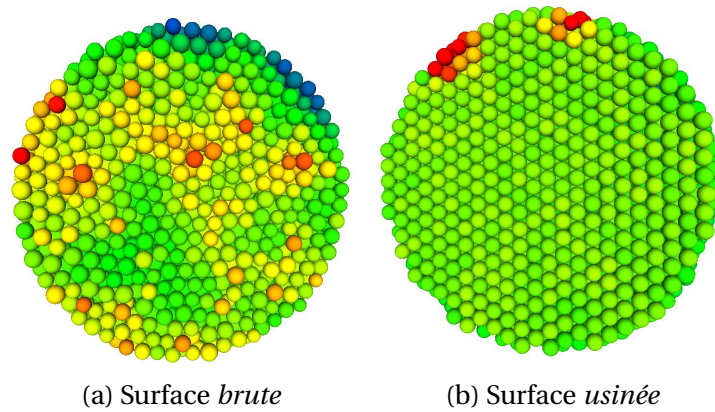


FIGURE 3.23 – Champs de déplacement des éléments discrets d'une face d'une éprouvette cylindrique lors d'un essai de compression

Lors des essais, les contacts entre les éléments sont activés lorsque ceux-ci ne sont pas liés par une poutre ce qui permet la refermeture de fissure. La rigidité de contact est égale à la rigidité des poutres en compression :

$$K_{contact} = \frac{E_{\mu} S}{2 \times r_{poutre}} = \frac{E_{\mu} \pi r_{poutre} (r_{\mu})^2}{2} \quad (3.16)$$

Les coefficients de frottement usuels pour les polymères sont de l'ordre de 0,25 à 0,5, il se situe aux alentours de 0,3 pour l'époxyde sur l'acier KHARRAT et collab. [2006]. Les essais de compression numérique montrent qu'un coefficient de frottement supérieur à 0,1 conduit à une légère augmentation de la force à rupture apparente. Toutefois, la différence entre un coefficient de 0,2 et 0,5 reste minime. Le coefficient de frottement (statique et dynamique) a été fixé à 0,3 dans le reste de cette étude pour le contact époxyde / époxyde et époxyde / acier.

La figure 3.25 donne la force à rupture des essais de compression pour différentes valeurs des deux critères étudiés. On identifie directement les valeurs de ces critères, soit environ 60 MPa pour la contrainte hydrostatique et 230 MPa pour la contrainte principale (valeur expérimentale ≈ 100 kN).

Sur la figure 3.26 est représentée la courbe force - déplacement d'essais numériques et d'un essai expérimental. Le résultat est dans l'ensemble satisfaisant. La reprise d'effort

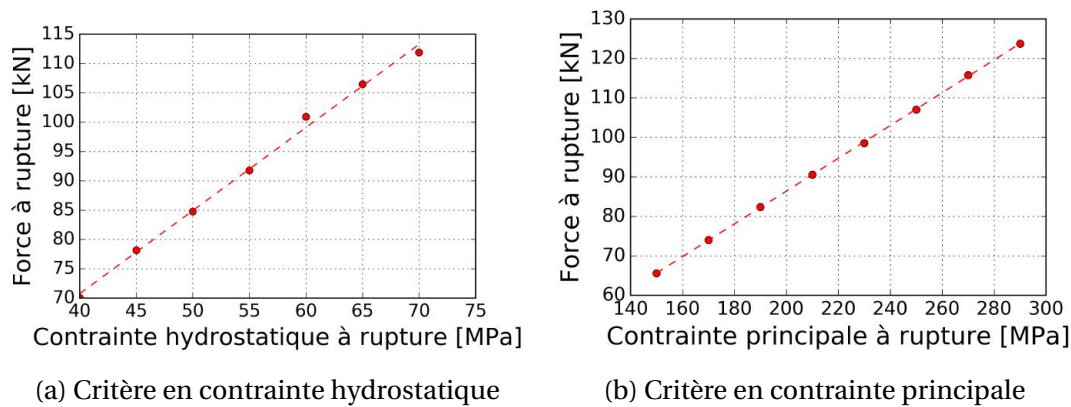


FIGURE 3.24 – Calibration à rupture : essais de compression pour différentes valeurs du critère de rupture

après la rupture du modèle numérique est cependant moins importante. Le modèle de rupture qui impose une désactivation de l'ensemble des poutres reliées à un élément rompu conduit à une perte importante de matière au niveau des zones fissurées. Les éléments libérés de leur liens sont expulsés des surfaces fissurées et limitent la reprise d'efforts. Aucun des deux critères ne se démarque au niveau des résultats quantitatifs.

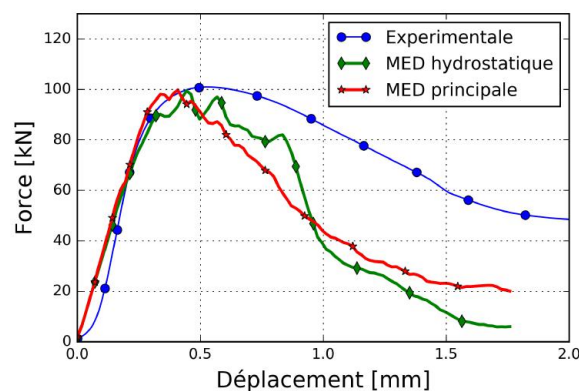


FIGURE 3.25 – Résultats des essais de compression numériques pour les critères en contrainte principale et hydrostatique

Au niveau des résultats qualitatifs, il est possible d'observer les éprouvettes après rupture afin de comparer les faciès de rupture, figure 3.27. Les deux critères parviennent à simuler une rupture du matériau similaire aux essais expérimentaux. Les chemins de fissures, de forme conique, orientés à 45° par rapport à la direction de compression sont correctement prédis par le modèle numérique. Dans le cas du critère en contrainte principale, les chemins de fissures sont plus nets. Dans la suite de ces travaux, le critère en contrainte principale est retenu. Il est d'ailleurs couramment utilisé pour les matériaux fragiles, comme par exemples les roches [HOEK \[1965\]](#); [SCHMIDT et collab. \[1980\]](#). Il peut même être enrichi par la prise en compte des contraintes principales intermédiaires [HANDIN et collab. \[1967\]](#); [MOGI \[1967\]](#).

3.4.2.3 Prise en compte de la vitesse de déformation

Afin de raffiner le modèle et d'intégrer la prise en compte de la vitesse de déformation sur la limite à rupture, il est essentiel de calculer une déformation équivalente sur chaque

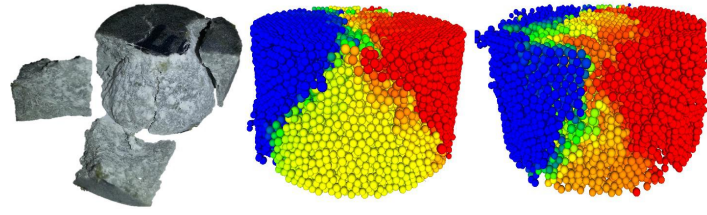


FIGURE 3.26 – Éprouvettes de compression post mortem, de gauche à droite : expérimentale, critère en contrainte principale, contrainte hydrostatique. La couleur représente le déplacement des éléments suivant un axe horizontal (perpendiculaire à la direction de compression)

élément. Cette problématique a souvent été soulevée dans le cadre des modèles éléments discrets puisque le calcul des déformations n'est pas aussi direct que ce qui est fait en modélisation continue de type éléments finis. La théorie classique pour de petites déformations, basée sur une formulation lagrangienne : $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right)$ n'est en effet pas adaptée dans le cas des éléments discrets. Parmi les derniers travaux à ce sujet, [ZHANG et REGUEIRO \[2015\]](#) comparent ainsi différentes méthodes qui ont été proposées ces dernières années. Elles sont pour la majorité basées sur une approche de milieu continu équivalent afin de se ramener à un calcul sur un solide fini dont les sommets sont des éléments discrets par exemple. La triangulation de Delaunay, proposée par [BAGI \[1996\]](#), appliquée depuis en 3D [DURÁN et collab. \[2010\]](#) offre de bons résultats, comme la tessellation de Dirichlet [SATAKE \[2004\]](#). Ces méthodes ont cependant pour inconvénient d'exiger la construction de domaines autour des éléments discrets qui peuvent augmenter considérablement le temps de calcul. Même si des solutions existent (la triangulation dynamique de Delaunay par exemple où le maillage est mis à jour sans être reconstruit entièrement à chaque pas de temps, [DEVILLERS et collab. \[1992\]](#)), la mise en œuvre numérique reste compliquée et reste un travail à part entière.

Une des idées proposée ici est de s'intéresser au calcul d'une déformation équivalente à l'aide du tenseur viriel. Comme l'explique [BAGI \[1996\]](#), même si le tenseur viriel et le tenseur des déformations microscopiques au sein d'un modèle éléments discrets présentent une grande dualité, elle n'est pas complète car les deux tenseurs ne sont pas exprimés sur le même domaine. Le tenseur des déformations est exprimé sur un volume équivalent prenant en compte l'espace inoccupé entre les éléments alors que le tenseur des contraintes représente les contraintes internes à un élément. Dans notre cas, ne nous intéressons pas à la déformation vraie d'un ensemble d'éléments mais nous cherchons à quantifier une vitesse de déformation interne à chaque élément qui prédira sa limite à rupture. On peut souligner par exemple les travaux de [HENTZ et collab. \[2004\]](#) où une vitesse de déformation par interaction est calculée permettant la mise en place d'une limite de contrainte en rupture variable pour le béton. En considérant l'élément déformable, il est possible de calculer ses déformations principales dans les 3 directions principales :

$$\epsilon_I = \frac{1}{E} [\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III})] \quad (3.17)$$

$$\epsilon_{II} = \frac{1}{E} [\sigma_{II} - \nu(\sigma_I + \sigma_{III})] \quad (3.18)$$

$$\epsilon_{III} = \frac{1}{E} [\sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II})] \quad (3.19)$$

La vitesse de déformation est calculée en dérivant la déformation par rapport au temps :

$$\dot{\epsilon}_i(t) = \frac{\epsilon_i(t) - \epsilon_i(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (3.20)$$

avec Δt le pas d'intégration.

La loi de comportement de Ree-Eyring est intégrée au modèle numérique. À chaque pas de temps, la limite à rupture pour chacune des directions principales et pour chaque élément est calculée. Lorsqu'une des contraintes principales d'un éléments discret atteint la limite à rupture associée à sa direction, l'élément rompt.

Des essais de compression numériques ont été menés à plusieurs vitesses de sollicitation pour vérifier la validité du modèle. Des géométries avec un faible nombre d'éléments (2000) ont été testées afin de réduire le temps de calcul et d'atteindre des vitesses de compression les plus faibles possibles. Les résultats ne peuvent donc pas être comparés directement aux résultats expérimentaux. La figure 3.28 présente les résultats de compression d'un modèle indépendant et dépendant de la vitesse de déformation. En dessous d'une vitesse de sollicitation de 10 m.s^{-1} , la force à rupture du modèle indépendant est quasiment constante alors qu'elle évolue suivant la loi de Ree-Eyring pour le modèle dépendant.

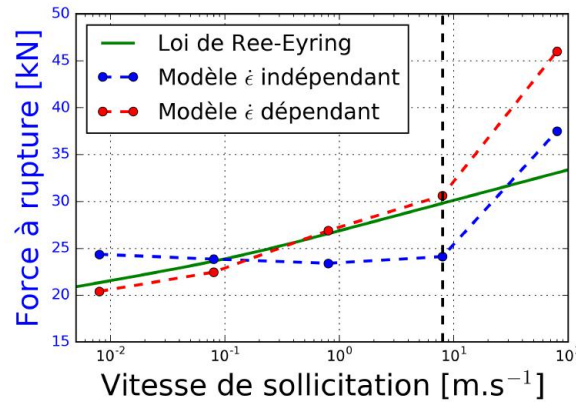


FIGURE 3.27 – Essais de compression sur éprouvettes numériques pour différentes vitesses de sollicitation ($\nu = 0.01 - 100 \text{ m.s}^{-1}$)

À partir de 10 m.s^{-1} on observe une augmentation importante de la limite à rupture, même pour le modèle indépendant. À partir de cette vitesse, l'échantillon n'est plus à l'équilibre dynamique. Le temps minimum peut être calculé à l'aide de l'équation suivante avec E le module de Young du matériau, L la hauteur de l'éprouvette et ρ la masse volumique du matériau.

$$t_{equi} = \sqrt{\frac{\pi^2 \rho L^2}{E}} \quad (3.21)$$

Le temps d'équilibre est de $27 \mu\text{s}$ pour une éprouvette de 20 mm de hauteur. À une vitesse de sollicitation de 10 m.s^{-1} et une déformation à rupture de l'ordre de $1,5-2 \%$, la rupture est atteinte aux environs de $30 \mu\text{s}$. L'équilibre est donc bien atteint pour une vitesse de sollicitation inférieure à 10 m.s^{-1} pour ce type d'éprouvette et de matériau.

Le modèle numérique décrit donc correctement l'évolution de la limite à rupture au sein du matériau. Nous avons fait le choix de ne pas considérer un module de Young variable dans les calculs malgré la dépendance de celui-ci avec la vitesse de déformation

comme JOUDON [2014] le montre pour la résine époxyde. Des travaux menés dans cette direction se sont heurtés à une instabilité du calcul, liée à une évolution trop rapide de ce paramètre. Une solution intermédiaire viserait à utiliser un module d'Young constant pendant le calcul mais variant avec la vitesse de déformation moyenne selon le formalisme d'Eyring BRADLEY et collab. [1997].

3.5 Résultats numériques

3.5.1 Construction d'une sphère creuse en éléments discrets

Comme nous l'avons vu dans la partie 3.3.1.4, les géométries demandent un raffinement de maillage discret suffisamment important afin de respecter les conditions d'isotropie et de compaction. Dans le cas des sphères creuses, la faible épaisseur des parois impose un nombre d'éléments très important, largement supérieur à 100 000 éléments. La figure 3.31 illustre par exemple une même géométrie de sphère creuse avec plusieurs raffinements. Le temps CPU pour créer cette géométrie ($r_t = 0,35$) passe de 4 s avec un élément dans l'épaisseur à 2600 s avec 4,2 éléments dans l'épaisseur. Des épaisseurs plus fines de parois ($r_t < 0,1$), tels que celles observées pour les sphères ATECA, conduiraient à des temps de calcul beaucoup trop importants par rapport aux ressources CPU disponibles au laboratoire si un minimum de 8-10 éléments dans l'épaisseur étaient requis.

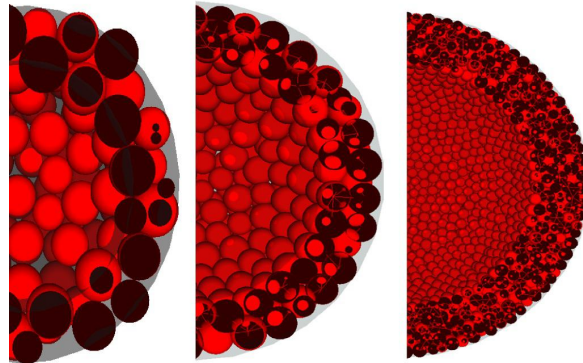


FIGURE 3.28 – Sphères creuses de même géométrie ayant respectivement de gauche à droite 1, 2 et 4,2 éléments dans l'épaisseur et 632, 2 300 et 10 676 éléments au total

Il est donc proposé de diminuer le nombre d'éléments en s'assurant que la bonne rigidité du modèle soit conservée. La rigidité est comparée en fonction du nombre d'éléments dans l'épaisseur. Le modèle est validé sur un essai de flexion d'une plaque circulaire encastree à ces bords et soumise à une force ponctuelle en son centre. Dans le cas de plaques minces, la déflexion au centre de la plaque y_m est donnée par l'équation 3.22 où P est la force ponctuelle, r le rayon de la plaque, t l'épaisseur de la plaque et E le module de Young du matériau, voir figure 3.30b :

$$y_m = \frac{0.217 \times P \times r^2}{E \times t^3} \quad (3.22)$$

La plaque est ensuite construite en éléments discrets avec plusieurs raffinements allant de 1 à 5 éléments dans l'épaisseur. Pour tenir compte de la dispersion des résultats face à la compaction aléatoire des éléments, 5 éprouvettes de chaque sont créées. Pour rester dans les mêmes ordres de grandeur des dimensions des sphères creuses, le

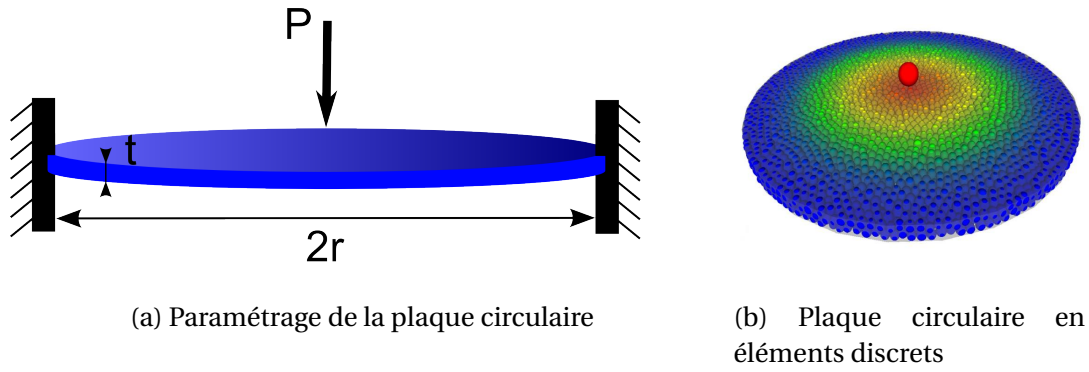


FIGURE 3.29 – Plaque circulaire encastrée soumise à une force ponctuelle en son centre

diamètre de la plaque est de 30 mm et son épaisseur est de 1,2 mm. Les essais sont ensuite menés sur chaque éprouvette, figure 3.30a puis comparés quantitativement au résultat analytique sur la figure 3.31.

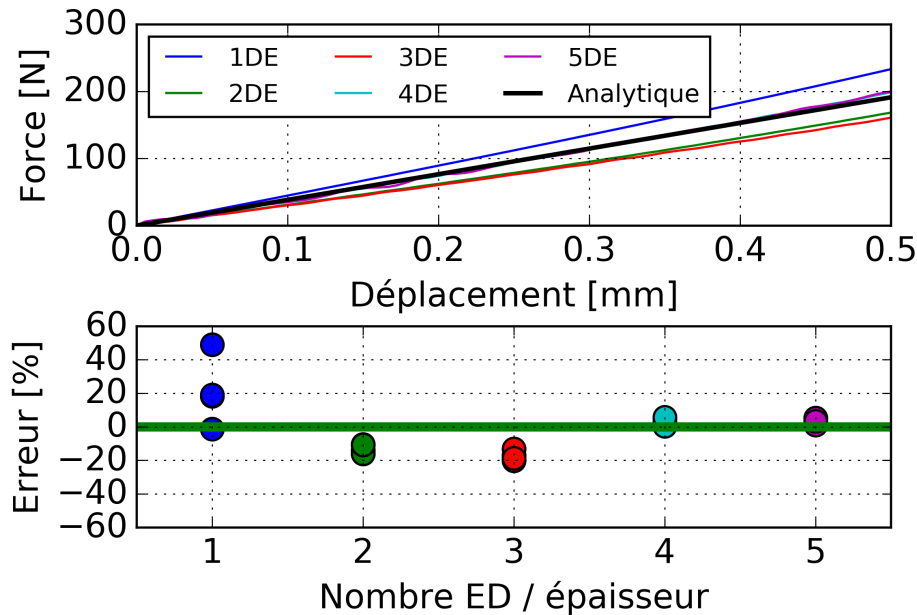


FIGURE 3.30 – Résultats d'une plaque circulaire en éléments discrets encastrée soumise à une force ponctuelle en son centre : comparaison par rapport au résultat analytique et quantification de l'erreur

On montre qu'à partir de deux éléments dans l'épaisseur, la précision moyenne se situe à $\pm 15\%$ par rapport au résultat analytique pour converger à $\pm 5\%$ avec 5 éléments dans l'épaisseur. Cette valeur de deux est un bon compromis entre la précision et le coût CPU et sera retenue dans la suite des travaux.

3.5.2 Sphères creuses en compression uni-axiale

Les essais numériques sur sphères creuses sont menés dans les mêmes conditions que les essais expérimentaux. Pour les essais dynamiques, on impose une vitesse de compression de $1,53 \text{ m.s}^{-1}$ pour les sphères de type A et de $1,32 \text{ m.s}^{-1}$ pour les sphères de type B afin de garder les mêmes conditions que les essais expérimentaux. Il n'est pas possible de réaliser des essais à 5 mm.min^{-1} car le schéma de type explicite conduirait à

un nombre très important d'itérations et donc à un coût de calcul prohibitif. La technique de *mass scaling* consistant à augmenter la densité sur matériau afin d'augmenter le pas de temps et ainsi diminuer la vitesse de sollicitation à nombre d'itération constant, n'est pas employée. Les aspects inertiels lors de la rupture sont influencés par la densité du matériau, les résultats du calcul ne pourraient pas être comparés aux résultats expérimentaux. Des essais numériques à une vitesse de sollicitation d'une décade en dessous sont réalisés pour confirmer la prise en compte de la vitesse de déformation par le modèle numérique. Seul le critère en contrainte principale est utilisé. Les résultats sous forme de courbes force - déplacement sont présentés sur la figure 3.32.

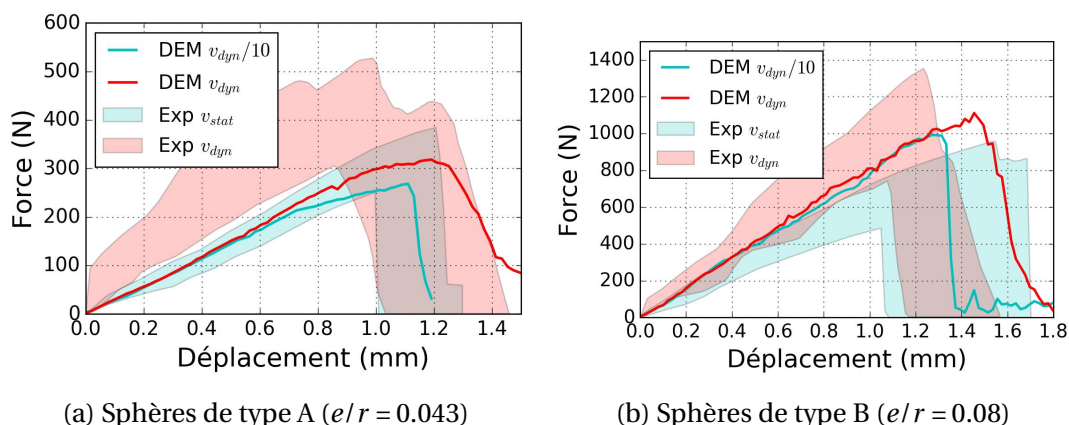


FIGURE 3.31 – Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques de compression d'une sphère creuse

Les forces à rupture déterminées par le modèle numérique sont respectivement de 268 N et 992 N pour les sphères de type A et B à une vitesse $v \approx 0,14 \text{ m.s}^{-1}$ et de 318 N et 1111 N à une vitesse $v \approx 1,4 \text{ m.s}^{-1}$. À une décade de différence, l'augmentation de la force à rupture varie de +12 % et +18 % respectivement pour les sphères A et B. Cette augmentation est accord avec les essais expérimentaux. Les valeurs des forces à rupture, énergie à rupture et leurs écarts avec les résultats expérimentaux en dynamique sont détaillées dans le tableau 3.5. Le modèle numérique ne prend pas en compte l'augmentation de la rigidité avec la vitesse de déformation comme cela a été dit dans la partie précédente, on observe donc une différence notable par rapport aux essais sur ce point.

TABLEAU 3.5 – Synthèse des résultats numériques de compression sur sphères creuses

Sphère	r_t	$v \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	$F_r \text{ (N)}$	Écart (%)	$E_r \text{ (J)}$	Écart (%)
A	0,043	0,153	268	-	0,16	-
B	0,08	0,132	992	-	0,62	-
A	0,043	1,53	318	-27	0,20	-35
B	0,08	1,32	1111	+7	0,82	+5

D'un point de vue qualitatif, le modèle par éléments discrets retranscrit correctement la rupture des sphères creuses. La figure 3.33 illustre la rupture d'une sphère creuse de type B en compression quasi-statique et le modèle numérique associé. La fissure part d'un pôle, en contact avec le plateau de compression (à gauche) et se propage jusqu'à l'autre pôle de manière similaire et une vitesse de propagation proche ($\approx 200 \text{ m.s}^{-1}$).

Dans le cas d'essais dynamiques, les branchements de fissures ou des amorçages multiples ne sont pas observés numériquement à des vitesses de sollicitation de l'ordre

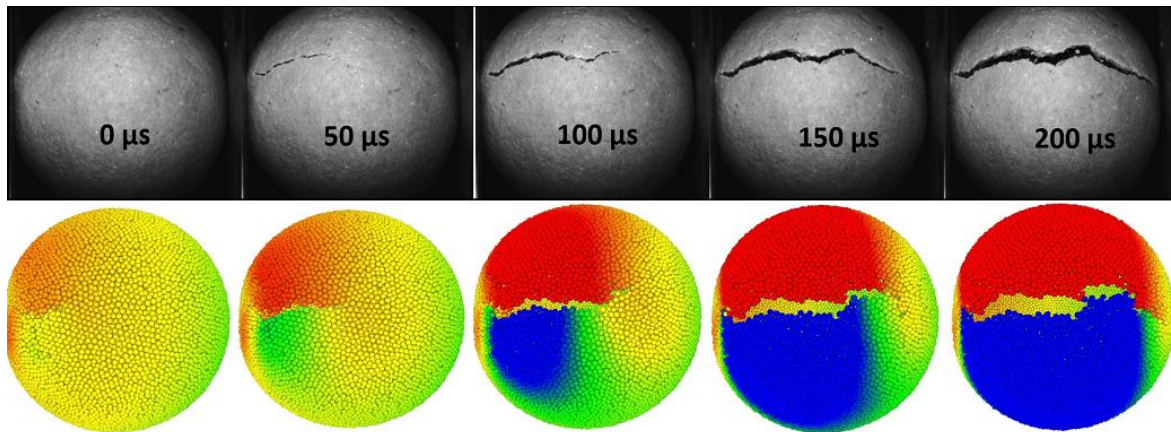


FIGURE 3.32 – Rupture dynamique d'une sphère creuse (B) en compression quasi-statique en fonction du temps

de $1,5 \text{ m.s}^{-1}$. À une décade au dessus, soit une vitesse de sollicitation de $13,2 \text{ m.s}^{-1}$ dans le cas des sphères creuses de type B, le modèle peut reproduire deux amorçages simultanés, voir la figure 3.34.

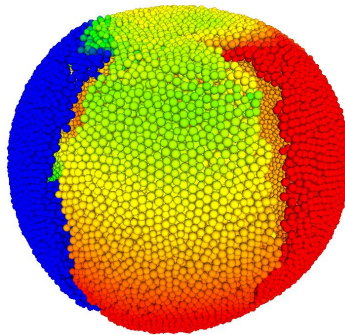


FIGURE 3.33 – Observation de l'amorçage multiple sur une sphère creuse de type B soumise à un essai de compression uni-axiale à une vitesse de $13,2 \text{ m.s}^{-1}$

En plus de la rupture principale, des fissures localisées aux deux points de contact apparaissent lors des essais expérimentaux. Non visibles en dynamique car la résolution de la caméra rapide est insuffisante, ils peuvent être observés en quasi-statique à l'aide de photos de meilleure résolution, figure 3.35a. Ces fissures dissipent une partie de l'énergie mais il n'est pas possible de la quantifier expérimentalement à moins de réaliser une décharge. Le matériel de mesure n'est pas assez fin pour détecter de toutes petites variations d'efforts. Le modèle numérique permet, lui, de les prendre en compte et donc de les quantifier plus facilement. On superpose ainsi sur la figure 3.35b la courbe force déplacement de la compression d'une sphère creuse avec le nombre d'éléments rompus dans la simulation. Lors de la chute brutale de force, le nombre d'éléments rompus augmente fortement. On met cependant en évidence que près de 15 % des éléments sont rompus avant la propagation de la rupture principale. Il est d'ailleurs possible de voir de petites chutes d'effort avant la rupture. Sur la même figure, on montre une géométrie DEM coupée en deux juste avant rupture, le point de contact se situant au milieu. On remarque que les éléments rompus sont localisés aux zones en traction : au point de contact à l'intérieur (figure 3.35b gauche) de la sphère mais plus répandus à l'extérieur (figure 3.35b droite).

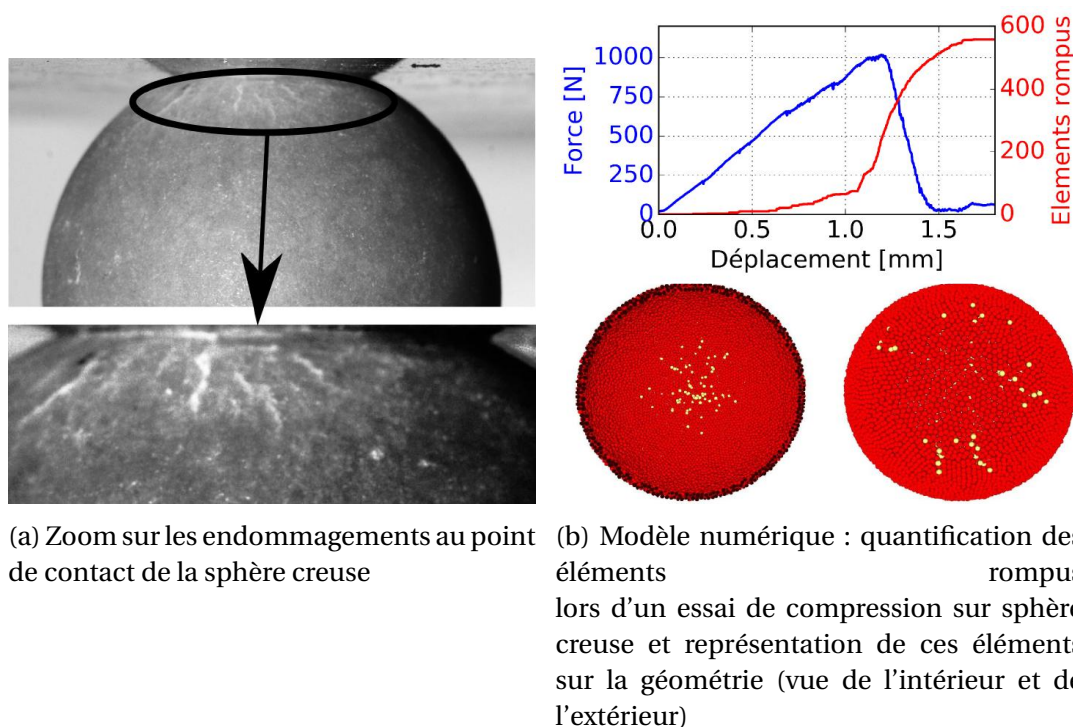


FIGURE 3.34 – Mise en évidence expérimentale et numérique de la présence de micro cracks avant la rupture principale

3.5.3 Impact d'une sphère creuse à grande vitesse

Un dernier essai a été réalisé afin de valider le modèle numérique pour de très grandes vitesses de sollicitation. Un canon à air comprimé a été réalisé au laboratoire, figure 3.36a afin de mener les essais au choc mou présentés dans le chapitre 1. Il est possible d'adapter le diamètre du canon afin de propulser des sphères creuses de diamètre 30 mm. Les essais sont réalisés à une pression maximale de 60 bars. Une caméra rapide (APX-RS) est positionnée perpendiculairement à la trajectoire de la sphère. Elle permet de visualiser l'écrasement et de mesurer la position en fonction du temps de la sphère pour connaître la vitesse d'impact. Compte tenu de la vitesse importante, 150 000 images par seconde sont prises avec un temps de pause réduit à $1/247000 \text{ s}^{-1}$. Un capteur de force de 20 kN (Kistler 9101A) est situé entre le plateau d'impact et le bâti. Toutefois, le moyen de mesure de l'effort mis en place ne permet pas de déterminer précisément la force d'écrasement durant l'essai. Un montage et un post-traitement de type barres de Hopkinson serait nécessaire. L'ordre de grandeur de la force maximale générée par l'impact varie de 5 à 10 kN pour une durée d'écrasement d'environ 200 μs (ces deux valeurs correspondent à ce qui est calculé en DEM).

Une comparaison qualitative de l'impact entre l'expérience et le modèle numérique est effectuée. La figure 3.37 présente un essai d'impact d'une sphère creuse de type B à 124 m.s^{-1} et le modèle DEM associé. Les simulations numériques comportent un essai d'un modèle dépendant à la vitesse de déformation et un modèle non dépendant. Expérimentalement, à partir de 33 μs après impact, plusieurs fissures apparaissent au contact de la sphère et du plateau et se propagent jusqu'au 2/3 du périmètre de la sphère (66 μs). On compte environ 8-10 fissures (valeur basée sur plusieurs essais). Ces lambeaux de sphères cassent ensuite en flexion vers 99 μs . Finalement, le dôme restant vient s'écraser à son tour et se brise en 3-4 morceaux (non visible sur la figure). Le modèle numérique ne prenant pas en compte la vitesse de déformation, il ne parvient

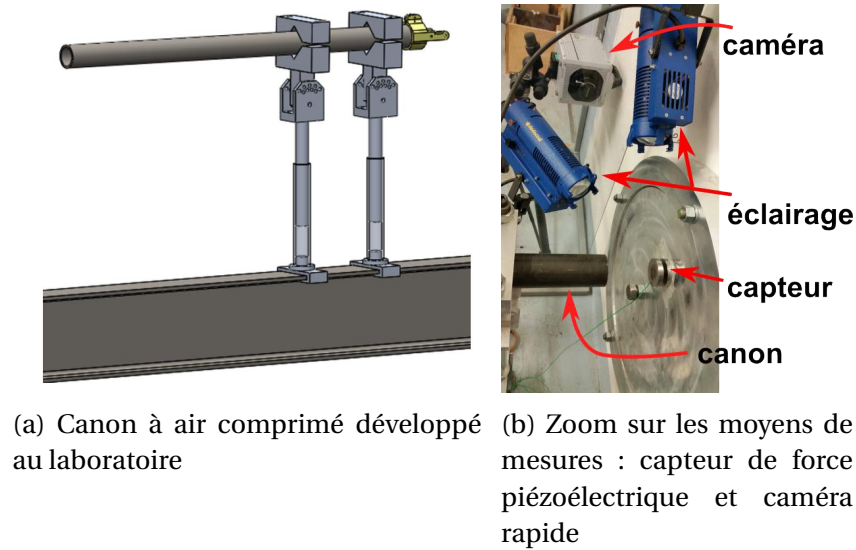


FIGURE 3.35 – Présentation des moyens expérimentaux pour les essais balistiques au canon

pas à représenter correctement l'écrasement de la sphère. La limite de rupture, basée sur la valeur en quasi-statique, intervient beaucoup trop vite et la sphère se détruit entièrement. Le deuxième modèle numérique simule lui fidèlement ce qui est observé expérimentalement. On observe l'amorçage et la propagation de 4 fissures au début de l'impact. Par contre, les lambeaux de sphères ne vont pas se détacher aussi rapidement. Le modèle reproduit donc globalement le bon comportement. Il justifie l'emploi d'une loi de comportement à rupture dépendant de la vitesse de déformation.

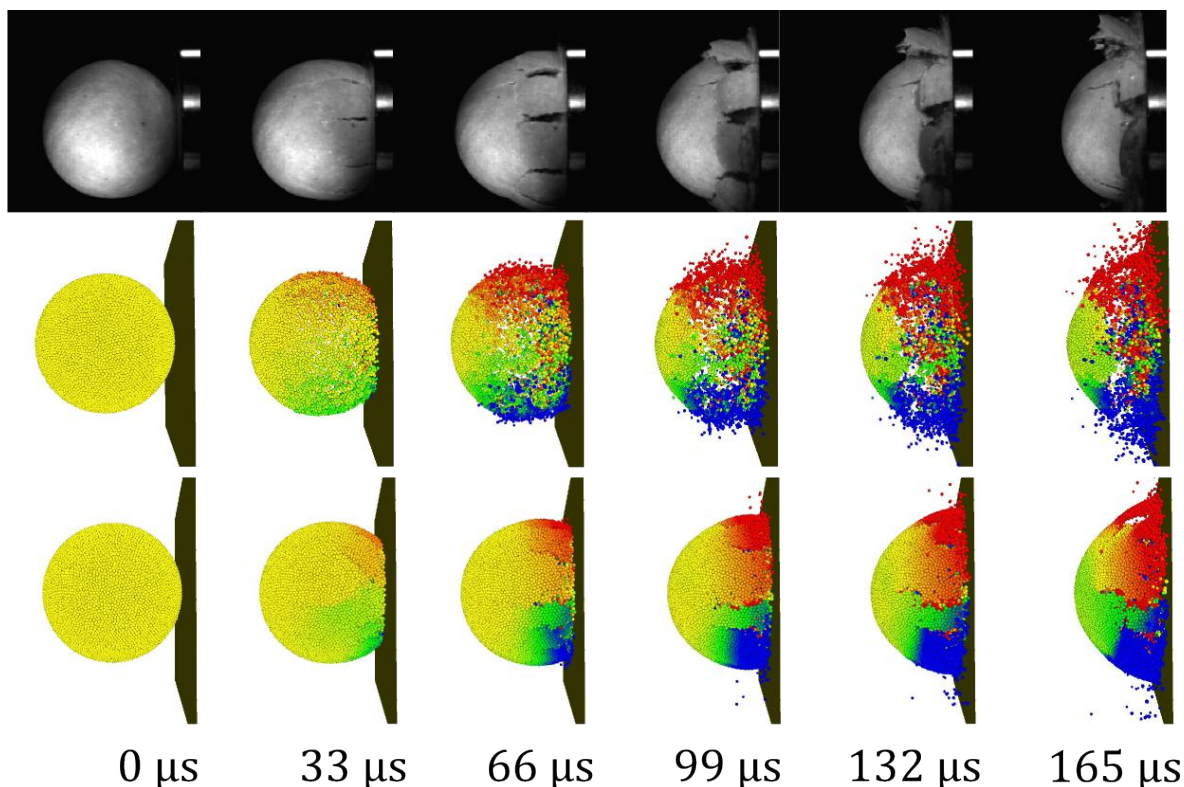


FIGURE 3.36 – Écrasement d'une sphère creuse (B) lancée à une vitesse de 124 m.s^{-1} contre une plaque rigide. De haut en bas : expérimental, modèle numérique indépendant de la vitesse de déformation, modèle numérique dépendant de la vitesse de déformation.

3.6 Conclusions

Ce chapitre propose une première approche de caractérisation et de modélisation d'une sphère creuse en compression uni-axiale. Nous avons montré que pour deux géométries de sphère, la vitesse de sollicitation a une grande influence sur la limite à rupture (+ 40 %) et l'énergie dissipée (+ 30-70 %) de la sphère au cours de l'écrasement. Les essais ont été réalisés à une vitesse relativement faible (2 m.s^{-1}) par rapport aux vitesses d'impact réelles mais permettent de mettre déjà en évidence ce phénomène. Afin de pouvoir justement étudier ces sphères dans des conditions inatteignables expérimentalement, un modèle numérique est nécessaire. La plate-forme de simulation DEM *Gran00* est alors utilisée. Le modèle numérique développé permet de reproduire fidèlement le comportement élastique d'un matériau grâce à l'utilisation de liens cohésifs de type poutre 3D. La rupture du matériau est basée par le calcul d'un tenseur des contraintes sur chaque élément où le critère en contrainte principale est choisi. Les paramètres microscopiques des poutres ont été calibrés à partir des caractéristiques du matériau préalablement mesurées. Comme on observe une forte dépendance de l'époxy avec la vitesse de déformation et la température nous avons choisi d'intégrer un modèle de rupture basé sur la loi de Ree-Eyring dans le modèle numérique. Des essais réalisés de -40°C à $+80^\circ\text{C}$ et à des vitesses de sollicitation de deux décades d'écart ($v = 5$ à 500 mm.min^{-1}) permettent d'identifier les constantes de la loi. Le nouveau modèle traduit correctement l'augmentation de la contrainte à rupture sur des essais de compression classique. Les résultats sur sphères creuses sont ensuite comparés. Bien que l'augmentation de la rigidité avec la vitesse de déformation ne soit pas prise en compte, le modèle reproduit correctement le comportement d'une sphère

creuse fragile. Il met d'ailleurs en évidence le phénomène de micro-fissure à peine perceptible expérimentalement. Finalement, le modèle développé montre une très bonne concordance à très haute vitesse de sollicitation ($> 100 \text{ m.s}^{-1}$) lors des essais d'impact au canon. Un critère en contrainte permet de reproduire fidèlement la rupture d'une sphère creuse fragile en prenant en compte la vitesse de déformation sur un modèle éléments discrets. Nous nous sommes cependant intéressés dans ce chapitre seulement à la réponse macroscopique de la structure. Afin d'améliorer le modèle, une approche par un critère de propagation de fissure en énergie est recommandée. Cette approche est proposée dans le chapitre suivant.

3.7 Références

- ANDRÉ, D. 2012, *Modélisation par éléments discrets des phases débauchage et de doucissage de la silice*, thèse de doctorat, Bordeaux 1. [56](#), [57](#), [59](#), [60](#), [62](#), [63](#)
- ANDRE, D., J.-L. CHARLES et I. IORDANOFF. 2015, *3D Discrete Element Workbench for Highly Dynamic Thermo-mechanical Analysis : Gran00*, John Wiley & Sons. [56](#)
- BAGI, K. 1996, «Stress and strain in granular assemblies», *Mechanics of materials*, vol. 22, n° 3, p. 165–177. [74](#)
- BRADLEY, W., W. CANTWELL et H. H. KAUSCH. 1997, «Viscoelastic creep crack growth : a review of fracture mechanical analyses», *Mechanics of time-dependent materials*, vol. 1, n° 3, p. 241–268. [75](#)
- BUCKLEY, C., P. DOOLING, J. HARDING et C. RUIZ. 2004, «Deformation of thermosetting resins at impact rates of strain. part 2 : constitutive model with rejuvenation», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52, n° 10, p. 2355–2377. [68](#)
- BUCKLEY, C. P., J. HARDING, J. HOU, C. RUIZ et A. TROJANOWSKI. 2001, «Deformation of thermosetting resins at impact rates of strain. part i : Experimental study», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, n° 7, p. 1517–1538. [68](#)
- CAMBOU, B., M. JEAN et F. RADJAI. 2013, *Micromechanics of granular materials*, John Wiley & Sons. [58](#)
- CARMONA, H. A., F. K. WITTEL, F. KUN et H. J. HERRMANN. 2008, «Fragmentation processes in impact of spheres», *Physical Review E*, vol. 77, n° 5, p. 051 302. [63](#)
- COULOMB, C. A. 1821, *Theorie des machines simples : en ayant egard au frottement de leurs parties et a la roideur des cordages*, Bachelier. [60](#)
- DEVILLERS, O., S. MEISER et M. TEILLAUD. 1992, «Fully dynamic delaunay triangulation in logarithmic expected time per operation», *Computational Geometry*, vol. 2, n° 2, p. 55–80. [74](#)
- DURÁN, O., N. KRUYT et S. LUDING. 2010, «Analysis of three-dimensional micro-mechanical strain formulations for granular materials : evaluation of accuracy», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, n° 2, p. 251–260. [74](#)

- FINNEY, J. 1970, «Random packings and the structure of simple liquids. i. the geometry of random close packing», dans *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 319, The Royal Society, p. 479–493. [60](#)
- FLEISSNER, F., T. GAUGELE et P. EBERHARD. 2007, «Applications of the discrete element method in mechanical engineering», *Multibody System Dynamics*, vol. 18, n° 1, p. 81–94. [56](#)
- GILAT, A., R. K. GOLDBERG et G. D. ROBERTS. 2007, «Strain rate sensitivity of epoxy resin in tensile and shear loading», *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 20, n° 2, p. 75–89. [55](#)
- GLAUDELL, R., R. T. GARCIA et J. B. GARCIA. 1965, «Nelder-mead simplex method», *Computer Journal*, vol. 7, p. 308–313. [68](#)
- GOTOH, K. 1974, «Statistical geometrical approach to random packing density of equal spheres», *Nature*, vol. 252, p. 202–205. [60](#)
- HANDIN, J., H. HEARD, et J. MAGOUIRK. 1967, «Effects of the intermediate principal stress on the failure of limestone, dolomite, and glass at different temperatures and strain rates», *Journal of Geophysical Research*, vol. 72, n° 2, p. 611–640. [73](#)
- HENTZ, S., F. V. DONZÉ et L. DAUDEVILLE. 2004, «Discrete element modelling of concrete submitted to dynamic loading at high strain rates», *Computers & structures*, vol. 82, n° 29, p. 2509–2524. [74](#)
- HOAG, D. 1963, «Apollo guidance and navigation : Considerations of apollo imu gimbal lock», *Canbridge : MIT Instrumentation Laboratory*, p. 1–64. [58](#)
- HOEK, E. 1965, «Rock fracture under static stress conditions», cahier de recherche, CSIR. [73](#)
- JEBAHI, M. 2013, *Discrete-continuum coupling method for simulation of laser-induced damage in silica glass*, thèse de doctorat, Bordeaux 1. [61](#), [64](#), [65](#)
- JOUDON, V. 2014, *Caractérisation expérimentale de l'initiation et de la propagation de fissure dans une résine époxy sous chargement dynamique*, Thèse, Université de Valencienne et du Hainaut-Cambresis. [75](#)
- KAROW, H. H. 2004, «Fabrication methods for precision optics», *Fabrication methods for precision optics, by HH Karow. Hoboken, NJ : Wiley-Interscience, 2004.*, vol. 1. [56](#)
- KAUSCH, H.-H. 2012, *Polymer fracture*, vol. 2, Springer Science & Business Media. [66](#)
- KAZERANI, T. 2011, *Micromechanical study of rock fracture and fragmentation under dynamic loads using discrete element method*, thèse de doctorat, ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE. [56](#)
- KHARRAT, M., M. DAMMAK et A. CHARFI. 2006, «Mechanical characterisation of interface for steel/polymer composite using pull-out test : shear-lag and frictional analysis», *J. Mater. Sci. Technol*, vol. 22, n° 4, p. 552–558. [72](#)

- MAYR, A. E., W. D. COOK et G. H. EDWARD. 1998, «Yielding behaviour in model epoxy thermosets—i. effect of strain rate and composition», *Polymer*, vol. 39, n° 16, p. 3719–3724. 68
- MOGI, K. 1967, «Effect of the intermediate principal stress on rock failure», *Journal of Geophysical Research*, vol. 72, n° 20, p. 5117–5131. 73
- MUNJIZA, A., S. M. JOHNSON, J. R. WILLIAMS et B. K. COOK. 2009, «On the application of quaternion-based approaches in discrete element methods», *Engineering Computations*, vol. 26, n° 6, p. 610–620. 58
- NAIK, N., P. J. SHANKAR, V. R. KAVALA, G. RAVIKUMAR, J. R. POTHNIS et H. ARYA. 2011, «High strain rate mechanical behavior of epoxy under compressive loading : Experimental and modeling studies», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 528, n° 3, p. 846–854. 67
- NEWTON, I., D. BERNOULLI, C. MACLAURIN et L. EULER. 1833, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 1, excudit G. Brookman ; impensis TT et J. Tegg, Londini. 58
- POTYONDY, D. et P. CUNDALL. 2004, «A bonded-particle model for rock», *International journal of rock mechanics and mining sciences*, vol. 41, n° 8, p. 1329–1364. 63
- POWELL, R. E. et H. EYRING. 1944, «Mechanism for relaxation theory of viscosity», *Nature*, vol. 154, n° 55, p. 427–428. 68
- REE, T. et H. EYRING. 1958, «The relaxation theory of transport phenomena», *Rheology : theory and applications*, vol. 2, p. 83. 68
- GÓMEZ-DEL RÍO, T. et J. RODRÍGUEZ. 2012, «Compression yielding of epoxy : Strain rate and temperature effect», *Materials & Design*, vol. 35, p. 369–373. 55, 68
- ROUGIER, E., A. MUNJIZA et N. JOHN. 2004, «Numerical comparison of some explicit time integration schemes used in dem, fem/dem and molecular dynamics», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 61, n° 6, p. 856–879. 58
- SATAKE, M. 2004, «Tensorial form definitions of discrete-mechanical quantities for granular assemblies», *International journal of solids and structures*, vol. 41, n° 21, p. 5775–5791. 74
- SCHLANGEN, E. et J. VAN MIER. 1992, «Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures», *Materials and Structures*, vol. 25, n° 9, p. 534–542. 56
- SCHMIDT, R. A. et collab.. 1980, «A microcrack model and its significance to hydraulic fracturing and fracture toughness testing», dans *The 21st US Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*, American Rock Mechanics Association. 73
- SICOMIN®. «Sicommin epoxy systems», <http://www.sicommin.com>. 66
- TERREROS, I. 2013, *Modélisation DEM thermo-mécanique d'un milieu continu : Vers la simulation du procédé FSW*, thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech. 60

- VERLET, L. 1967, «Computer" experiments" on classical fluids. i. thermodynamical properties of lennard-jones molecules», *Physical review*, vol. 159, n° 1, p. 98. [57](#)
- VIOT, P. 2009, «Hydrostatic compression on polypropylene foam», *International Journal of Impact Engineering*, vol. 36, n° 7, p. 975–989. [52](#)
- WAN, F. Y., R. D. GREGORY et T. I. MILAC. 1998, «A thick hollow sphere compressed by equal and opposite concentrated axial loads : An asymptotic solution», *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 59, n° 3, p. 1080–1097. [53](#)
- YOKOYAMA, T., K. NAKAI et N. H. MOHD YATIM. 2012, «High strain-rate compressive properties and constitutive modeling of bulk structural adhesives», *The Journal of Adhesion*, vol. 88, n° 4-6, p. 471–486. [67](#), [68](#)
- ZHANG, B. et R. A. REGUEIRO. 2015, «On large deformation granular strain measures for generating stress–strain relations based upon three-dimensional discrete element simulations», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 66, p. 151–170. [74](#)

Chapitre 4

Estimation du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique sur sphère creuse

« I'm a fracture mechanician, which means that I spend my time breaking things in the laboratory. My wife, Ioanna, who is a psychologist, says this shows there must be something wrong with me. My retort is that at least my specimens, unlike her patients, do not cry when they're subjected to stress. »

A. J. Rosakis

Sommaire

4.1 Introduction	88
4.2 Mesure de la position de la pointe de fissure sur sphères creuses	88
4.3 Rupture dynamique sur plaque par la méthode des éléments discrets	91
4.3.1 Solutions numériques de la littérature	91
4.3.2 Mise en place du modèle de rupture sur plaque	93
4.3.2.1 Bilan d'énergie	93
4.3.2.2 Premiers résultats	96
4.3.2.3 Méthode par amortissement visqueux	98
4.3.3 Méthode par zone de rupture (fracture process zone)	99
4.3.3.1 Schéma numérique d'endommagement	99
4.3.3.2 Longueur de zone de rupture	100
4.3.3.3 Conclusion sur la méthode	101
4.4 Application à la rupture dynamique sur sphère creuse	102
4.4.1 Mise en place du modèle	102
4.4.2 Énergie de frottement	106
4.4.3 Application du facteur de correction dynamique	106
4.5 Prise en compte numérique du taux de restitution d'énergie critique	107
4.5.1 Poutres cohésives endommageables	107
4.5.2 Chemin de fissuration	111

4.5.3 Premiers résultats sur sphère creuse	112
4.5.4 Perspectives pour la prise en compte de la vitesse de fissuration . .	113
4.6 Conclusion	114
4.7 Références	115

4.1 Introduction

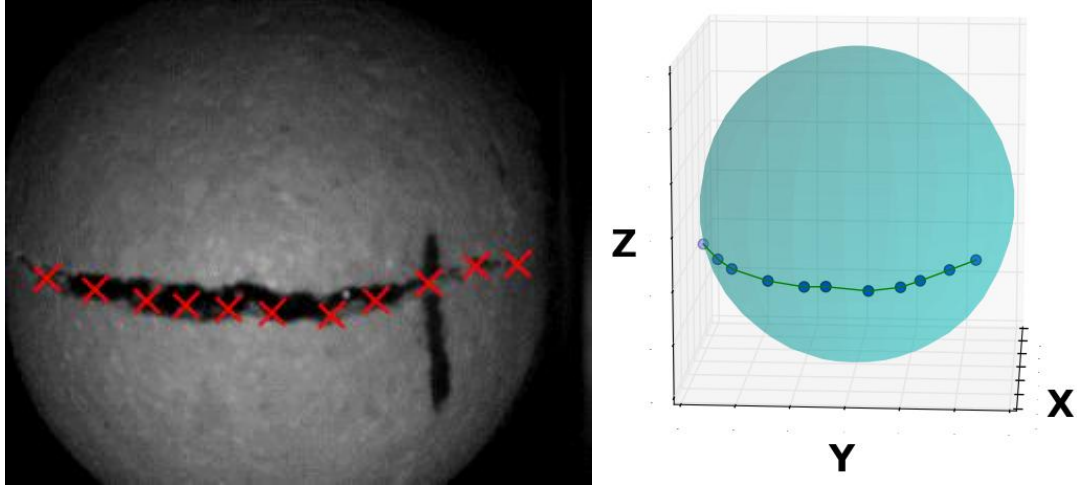
Ce chapitre présente une approche énergétique de la rupture de sphères creuses. La méthodologie développée au chapitre précédent est basée sur l'observation des essais expérimentaux et numériques en terme de réponse force - déplacement. Elle ne s'intéresse donc pas aux énergies mises en jeu lors de la rupture dynamique d'une sphère creuse. Ces énergies doivent être considérées afin de construire un modèle numérique plus prédictif. Un modèle de rupture basé sur un critère énergétique est donc préférable. L'estimation du taux de restitution d'énergie critique dynamique du matériau constitutif doit être réalisée. Ce taux de restitution d'énergie ne peut pas directement être calculé comme l'énergie apportée à la structure au moment de la rupture rapportée à la surface créée. En effet, comme expliqué dans le premier chapitre, un facteur de correction dynamique qui dépend de la vitesse de propagation de la fissure doit être utilisé afin de prendre en compte les effets inertiels.

Tout d'abord, on présente les mesures de la position du sommet de fissure effectuées sur les sphères creuses. Les vitesses de fissuration sont ensuite exprimées par rapport à la vitesse des ondes de Rayleigh dans le matériau. Un modèle numérique par éléments discrets de propagation de fissure conduit ensuite à l'estimation du facteur de correction dynamique. Un modèle de rupture mixte contrainte - énergie est ensuite proposé.

4.2 Mesure de la position de la pointe de fissure sur sphères creuses

La mesure de la position de la pointe de fissure en fonction du temps sur les sphères creuses a été réalisée sur les mêmes essais que ceux présentés au chapitre précédent. Deux caméras rapides ont été utilisées (Photron APX-RS et Photron SA-5), conjointement ou non, suivant leurs disponibilités. En effet, la fissure peut se propager suivant n'importe quelle longitude, hors du champs de la caméra. Le nombre d'essais pleinement exploités est donc inférieur au nombre total d'essais. Une fréquence de 60 000 images par seconde pour une définition de 128x128 pixels a été choisie pour la caméra APX-RS. La fréquence passe à 75 000 images par seconde pour une définition de 320x264 pixels avec la caméra SA-5. Ces réglages offrent les meilleurs compromis pour chaque caméra en termes de précision et de nombre de points de mesure (une dizaine à chaque essai). Un objectif SIGMA 105 mm f/2.8 est monté sur la caméra pour son mode macroscopique qui permet une mise au point à une faible distance et pour sa grande ouverture. Le temps de prise de vue, d'environ 2 secondes, permet un déclenchement manuel, actionné lors du son caractéristique de la propagation de fissure. L'éclairage comprend deux lampes (*Dedocool*) de 250 W chacune qui focalisent un rayon de lumière sur une faible surface. Il est possible d'atteindre près de 2 millions de lux à une distance de 20 cm tout en limitant l'échauffement de l'éprouvette. Des mesures de température à l'aide d'un thermocouple placé à la surface de la sphère creuse permettent de vérifier que les essais ont lieu à température ambiante. Après plusieurs essais de peinture pour augmenter le contraste au niveau du chemin de fissure, la surface des sphères creuses est finalement laissée brute.

La figure 4.1a montre une photo issue d'un essai de compression dynamique sur une sphère creuse (B). L'image est orientée de manière à voir la fissure se propager de gauche à droite. Les croix rouges représentent la pointe de fissure à chaque image ($\Delta t = 13 \mu s$). Les coordonnées dans le plan des positions successives sont relevées manuellement à l'aide du logiciel ImageJ. La différence de luminosité entre la surface de la sphère éclairée



(a) Relevés cumulés des coordonnées dans le plan de la pointe de fissure ($\Delta t = 13 \mu s$) (b) Représentation 3D du chemin de fissure tracé à partir des positions successives de la pointe de fissure

FIGURE 4.1 – Mesure des coordonnées de la pointe de fissure sur une sphère creuse de type B en compression dynamique

et les surface créées par la fissure qui ne le sont pas permet de mettre en évidence le chemin de fissure. Le sommet de fissure se situe dans une zone claire où les bords de la fissure ne se sont pas encore écartés. L'erreur de mesure des coordonnées du sommet de fissure est la même à chaque point et s'annule lorsqu'une distance est calculée. Les coordonnées suivant les deux axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$ exprimées en pixels sont converties en millimètres puis la position hors du plan suivant l'axe $\vec{x}$ (voir figure 4.1b) est calculée à partir de l'équation (4.1) avec r le rayon extérieur de la sphère :

$$x_i = \sqrt{r^2 - y_i^2 - z_i^2} \quad (4.1)$$

La longueur de fissure à chaque instant est calculée à partir de l'abscisse curviligne entre deux points de mesure. La première étape est de passer en coordonnées sphériques en exprimant les coordonnées du sommet de fissure en fonction de θ et φ , voir la figure 4.2a à partir de l'équation (4.2) :

$$\begin{cases} \varphi = \arccos(z/r) \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases} \quad (4.2)$$

La distance entre deux points i et $i+1$ est ensuite calculée par la relation fondamentale de trigonométrie sphérique :

$$d_{i-i+1} = r \arccos[\sin(\phi_i) \sin(\phi_{i+1}) + \cos(\phi_i) \cos(\phi_{i+1}) \cos(\theta_i - \theta_{i-1})] \quad (4.3)$$

La longueur de fissure en fonction du temps est tracée sur la figure 4.2b. La distance parcourue entre chaque pas de temps est proche et on considérera que la vitesse est donc constante. Les relevés cinématographiques sont réalisés sur la surface visible de la sphère. De ce fait, la position du sommet de fissure n'est pas mesurée au niveau des deux pôles qui correspondent au début et à la fin de propagation.

La vitesse de propagation de fissure est exprimée par rapport à la vitesse des ondes de Rayleigh dans le matériau : $\dot{a}/c_r$. La relation donnée par PICHUGIN [2008], équation 4.4 donne la vitesse des ondes de Rayleigh connaissant les vitesses des ondes transverses c_t avec une bonne précision (erreur inférieure à 0,46 %) :

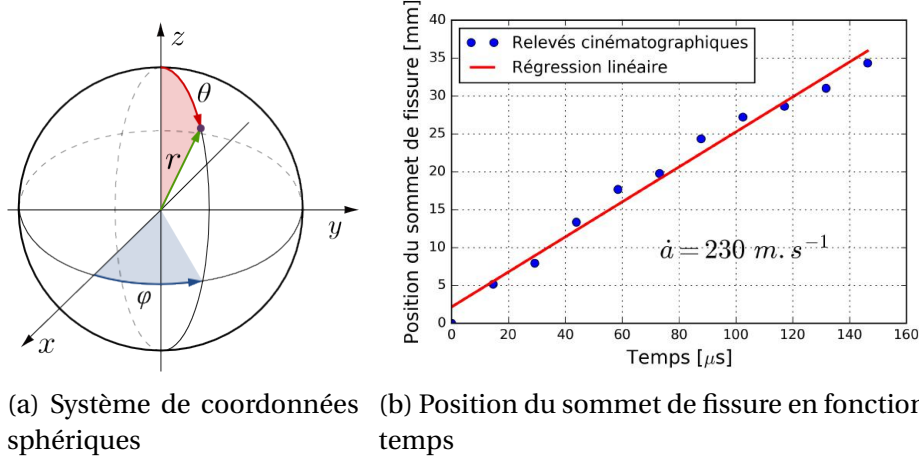


FIGURE 4.2 – Estimation de la vitesse moyenne de propagation de fissure sur une sphère creuse de type B

$$c_r \approx \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu} c_t \quad (4.4)$$

La vitesse des ondes transverses est mesurée à l'aide de deux transducteurs de 1 MHz présentés sur la figure 4.3a. Une éprouvette cylindrique de diamètre 24 mm et de hauteur 10 mm est placée entre les deux transducteurs. Du gel conducteur placé entre l'échantillon et les transducteurs assure une meilleure transmission des ondes ultrasonores. L'amplitude des ondes en fonction du temps est mesurée des deux côtés de l'échantillon (figure 4.3b). La vitesse des ondes est ensuite calculée. L'opération est la même pour les ondes longitudinales et transversales, seuls les transducteurs sont différents.

On relève une vitesse des ondes longitudinales c_l de $3250 \pm 50 \text{ m.s}^{-1}$ et une vitesse des ondes transversales c_t de $1760 \pm 50 \text{ m.s}^{-1}$. La vitesse des ondes de Rayleigh est d'environ $1632 \pm 50 \text{ m.s}^{-1}$. Il est aussi possible de déduire le coefficient de Poisson liant les vitesses des ondes longitudinales et transversales. Une valeur de 0,3 est calculée et correspond à ce qui a été proposé dans le chapitre précédent. Enfin, le module de Young Dynamique E_D peut être calculé :

$$E_D = \rho c_l^2 \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \quad (4.5)$$

Avec ρ la masse volumique du matériau et ν son coefficient de Poisson. Le module de Young dynamique est d'environ 14,75 GPa. L'ordre de grandeur est en accord avec la littérature (BOUDET et collab. [1996]) pour d'autres matériaux polymères.

Le tableau 4.1 présente une synthèse des moyennes des vitesses de fissuration pour chaque type d'essai. En régime de sollicitation quasi-statique, la vitesse de fissuration est d'environ $0,08 c_r$ pour les sphères de type A et $0,12 c_r$ pour les sphères B. La vitesse passe respectivement à $0,09 c_r$ et $0,14 c_r$ en régime de sollicitation dynamique. L'augmentation de la vitesse de propagation avec la vitesse de sollicitation observée ici correspond à ce qui a déjà été montré dans la littérature (ANDERSON et ANDERSON [2005]). Le taux de restitution d'énergie critique quasi-statique G_{I0} est estimé en divisant l'énergie à rupture par la surface créée pour chaque essai. La surface créée est supposée égale à la surface projetée. Pourtant, comme il a été montré par CAMBONIE et collab. [2015]; DALMAS et collab. [2013]; KOPP et collab. [2015, 2014b], dans le cas de propagation rapide de

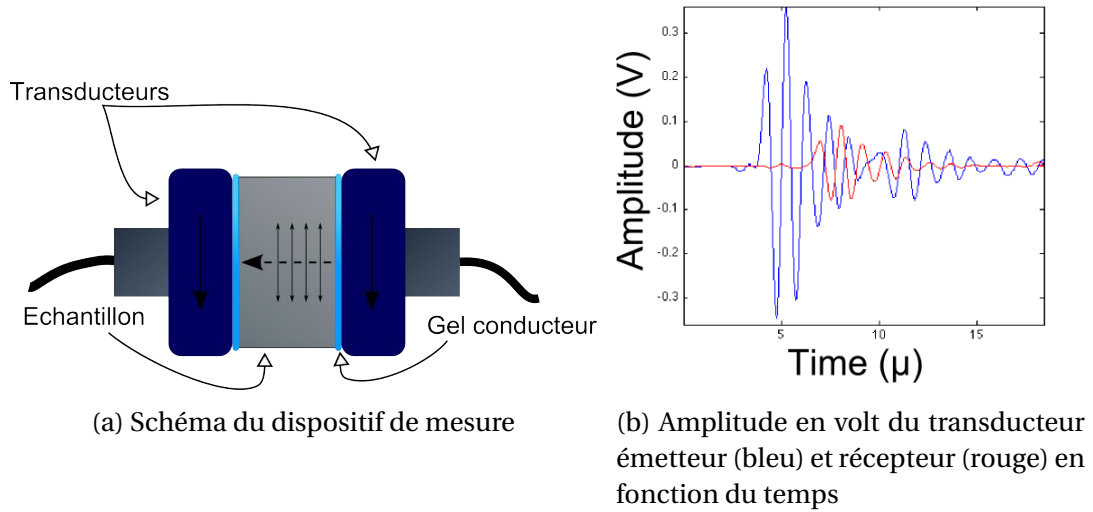


FIGURE 4.3 – Principe de mesure de la vitesse des ondes transversales à l'aide de deux transducteurs

fissures dans des polymères renforcés au choc, une variation de l'énergie de rupture peut être corrélée à l'état de surface. Autrement dit, la surface réelle créée peut être nécessaire pour estimer finement G_{IDc} .

De plus, l'équation (4.6), utilisée pour estimer G_{IDc} n'est valide que dans le cas de la propagation d'une fissure sur plaque semi-infinie. Dans le cas de propagation sur tube, exposé par KOPP et collab. [2014a], le facteur de correction dynamique doit être recalculé analytiquement ou numériquement :

$$G_{IDc} \approx G_{I0} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c_r}\right) \quad (4.6)$$

TABEAU 4.1 – Synthèse de la mesure des vitesses de propagation de fissure et première estimation de G_{IDc}^* , moyenne des résultats de chaque type d'essai

Sphère	r_t	v (m.s ⁻¹)	$\dot{a}/c_r$ (N)	G_{I0} (kJ/m ²)	G_{IDc}^* (kJ/m ²)
A	0,043	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$0,08 \pm 0,01$	$2,7 \pm 0,4$	$2,5 \pm 0,4$
B	0,08	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \pm 0,02$	$4,0 \pm 0,7$	$3,55 \pm 0,65$
A	0,043	$1,53 \pm 0,17$	$0,09 \pm 0,01$	$3,9 \pm 1,2$	$3,5 \pm 1,1$
B	0,08	$1,32 \pm 0,18$	$0,14 \pm 0,02$	$3,4 \pm 0,3$	$2,9 \pm 0,25$

La suite de ce chapitre expose une méthode numérique permettant de calculer le facteur de correction dynamique dépendant de la vitesse de propagation de la fissure dans une sphère creuse.

4.3 Rupture dynamique sur plaque par la méthode des éléments discrets

4.3.1 Solutions numériques de la littérature

La modélisation numérique de la rupture des matériaux peut être divisée en deux objectifs distincts.

Tout d'abord, la phase d'*application* consiste à simuler la propagation d'une fissure dans une structure sans connaître a priori son chemin et sa vitesse. Cet objectif est décrit dans le premier chapitre et concerne la majorité des modèles utilisés aujourd'hui.

Le deuxième objectif est de calculer le taux de restitution d'énergie critique ou le facteur d'intensité des contraintes en connaissant a priori le chemin de fissure et sa vitesse, déterminés expérimentalement. Appelée phase de *génération*, les premiers travaux ont débuté dans les années 70 à l'aide de la méthode des éléments finis (KOBAYASHI et collab. [1976]; YAGAWA et collab. [1977]). Plusieurs procédures ont été développées et sont résumées dans les travaux de NISHIOKA [1997]. Parmi ces procédures, la plupart d'entre elles sont appliquées à l'aide des éléments finis. Les schémas d'intégration sont de type explicite où le pas de temps est gardé très petit. Les trois principales procédures dans le contexte des éléments finis sont :

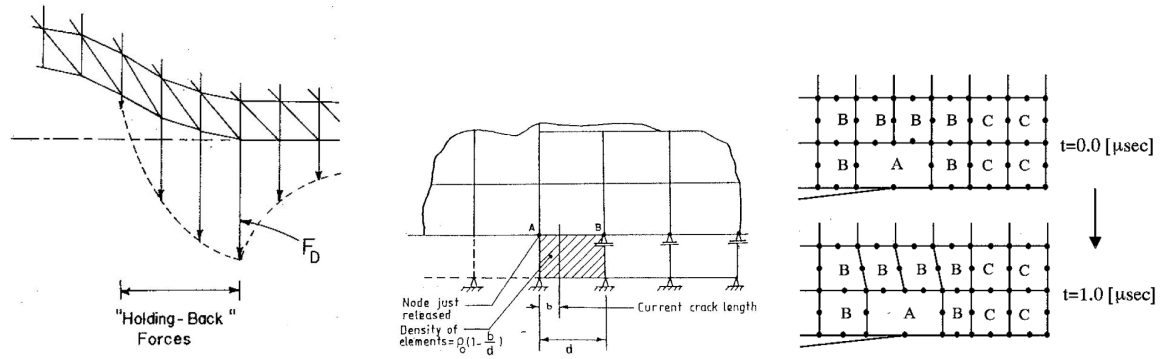
Relâchement des nœuds aux conditions aux limites : un des bords de la fissure se trouve au niveau des conditions aux limites de la structure. Une force de rappel est progressivement relâchée afin d'ouvrir la fissure dans le cas présenté sur la figure 4.4a. La force de rappel diminue progressivement linéairement ou non, dépendant du schéma numérique de relâchement. L'énergie de rupture est calculée à partir de la somme des énergies dissipées à chaque nœud par une intégration de la force par rapport au déplacement. Cette technique a été notamment proposée par KEEGSTRA et collab. [1978]. Des dérivées de cette technique ont été traitées dans la littérature, par exemple par YAGAWA et collab. [1977] où le déplacement en bord de fissure est autorisé progressivement selon une force répartie entre les nœuds.

Zones cohésives : des éléments cohésifs sont ajoutés au modèle et leurs propriétés sont modifiées au passage de la fissure afin de simuler la création d'une nouvelle surface. Basées sur la même technique de relâchement des nœuds, les zones cohésives peuvent être placées au sein de la structure. Il est possible d'utiliser des ressorts ou des éléments 2D et 3D qui voient leur densité (KANNAN et collab. [1993] et figure 4.4b) ou leur rigidité (HSU et ZHAI [1984]; KOSTYLEV et MARGOLIN [1990]) réduite. Comme pour le relâchement des nœuds, la diminution progressive des propriétés peut être linéaire (KOBAYASHI et collab. [1977]) ou non linéaire en supposant un taux de restitution d'énergie constant ou un facteur d'intensité des contraintes constant (MALLUCK et KING [1980]).

Maillage adaptatif : le maillage évolue avec la fissure afin de suivre celle-ci. Le modèle peut être entièrement remaillé et dans ce cas, cela limite l'usage de cette procédure à des géométries infinies donc simples. FREUND et DOUGLAS [1982] analysent par exemple la propagation d'une fissure dans un milieu semi-infini. Une approche locale a ensuite été développée. Nishioka et Atluri ont largement contribué à la mise au point de cette technique (NISHIOKA [1995]; NISHIOKA et ATLURI [1982, 1980]; NISHIOKA et ATLURIT [1984]). La figure 4.4c illustre la procédure : les éléments sont progressivement distordus au passage de la fissure puis le maillage est mis à jour après quelques pas de temps et ainsi de suite. Cette procédure se différencie des deux procédures précédentes de relâchement des nœuds et des zones cohésives car la fissure se propage continuellement et non de manière discrète limitant les instabilités dynamiques.

Les solutions actuelles offrent de bon résultats. Toutefois, il est choisi dans cette étude de s'orienter vers un modèle DEM pour 3 raisons :

1. Le modèle applicatif est basé sur la DEM, les paramètres élastiques ont déjà été calibrés et les géométries créées.



(a) Force de rappel sur le bord de la fissure diminuant graduellement KEEGSTRA et collab. [1993] et collab. [1978] (b) Élément cohésif avec réduction de densité KANNAN [1980] (c) Maillage local mobile pendant la propagation de fissure NISHIOKA et ATLURI [1980]

FIGURE 4.4 – Techniques de rupture dynamique pour la phase de *génération* par la méthode des éléments finis

2. Ces procédures sont essentiellement réalisées sur des codes numériques recherche. La plate-forme Gran00 se prête bien à ces développements. L'utilisation d'un logiciel FEM de type CAST3M® nécessiterait un investissement en temps important afin de maîtriser ce nouvel outil.
3. La DEM présente un avantage indéniable. Chaque poutre représente une zone cohésive, la fissure peut alors se propager dans les directions voulues sans incorporer de nouveaux éléments dans le modèle. Il devient alors facile de générer plusieurs chemins de fissure non rectilignes sur le même modèle sans recréer une nouvelle géométrie.

La suite de ce chapitre détaille les outils numériques mis en œuvre pour réaliser une phase de génération de rupture en DEM.

4.3.2 Mise en place du modèle de rupture sur plaque

4.3.2.1 Bilan d'énergie

Afin d'estimer le taux de restitution d'énergie en mode I, G_I , lors d'un essai numérique, il convient de calculer une énergie dissipée. Deux approches sont possibles dans notre cas. La première est basée sur un bilan d'énergie réalisé à chaque pas de temps prenant en compte les énergies mises en jeu lors de la simulation. À chaque pas du calcul, la fissure avance de Δa et la somme des énergies dans le système diminue. L'énergie perdue correspond à l'énergie de rupture. On peut écrire :

$$G_I = \frac{\Delta W_{ext} - \Delta W_{elas} - \Delta K_{cin} - \Delta W_{diss}}{2b\Delta a} \quad (4.7)$$

avec ΔW_{ext} le travail des forces extérieures, ΔW_{elas} l'énergie élastique, ΔK_{cin} l'énergie cinétique, ΔW_{diss} l'énergie dissipée autre que l'énergie de rupture (amortissement visqueux, amortissement numérique, frottement) et b l'épaisseur de la fissure.

Le calcul de ces énergies a été effectué par ANDRÉ [2012] pour la méthode des éléments discrets. Dans le cas d'un chargement faisant intervenir des déplacements linéaires, le travail des forces extérieures sur les j premiers pas de temps est :

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^j \overrightarrow{\Delta u_i^p} \cdot \overrightarrow{\Delta f_i^p} \quad (4.8)$$

avec :

- $\overrightarrow{\Delta f_i^p}$ le vecteur des forces extérieures appliquées à l'élément discret i
- $\overrightarrow{\Delta u_i}$ le vecteur déplacement de l'élément discret i
- n le nombre total d'éléments discrets
- j le nombre de pas de temps.

L'énergie élastique ΔW_{elas} correspond à l'énergie contenue dans les poutres ainsi que que l'énergie élastique de contact lorsque celui ci est activé :

$$W_{elas} = E_{poutre} + E_{contact} \quad (4.9)$$

L'énergie des poutres peut être divisée en plusieurs énergies associées à chacune des déformations élémentaires :

$$E_{poutre} = E_{traction} + E_{flexion} + E_{torsion} + E_{cisaillement} \quad (4.10)$$

Le calcul des énergies est similaire au calcul du travail des forces extérieures, équation 4.8. La somme est effectuée ici sur l'ensemble des liens cohésifs (i_1 et i_2 étant les deux éléments auxquels est attachée la poutre). On introduit aussi les rotations (θ_x , θ_y et θ_z) et moments (T_x , T_y et T_z) pour la flexion et la torsion :

$$E_{traction} = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^j \Delta u_{i_1x}^p F_{i_1x}^p + \Delta u_{i_2x}^p F_{i_2x}^p \quad (4.11)$$

$$E_{flexion} = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^j \Delta \theta_{i_1y}^p T_{i_1y}^p + \Delta \theta_{i_2y}^p T_{i_2y}^p + \Delta \theta_{i_1z}^p T_{i_1z}^p + \Delta \theta_{i_2z}^p T_{i_2z}^p \quad (4.12)$$

$$E_{torsion} = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^j \Delta \theta_{i_1x}^p T_{i_1x}^p + \Delta \theta_{i_2x}^p T_{i_2x}^p \quad (4.13)$$

$$E_{cisaillement} = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^j \Delta u_{i_1y}^p F_{i_1y}^p + \Delta u_{i_2y}^p F_{i_2y}^p + \Delta u_{i_1z}^p F_{i_1z}^p + \Delta u_{i_2z}^p F_{i_2z}^p \quad (4.14)$$

L'énergie de contact est obtenue en calculant la puissance des contacts à chaque pas de temps et en effectuant une intégration par rapport au temps entre les temps t_1 et t_2 :

$$E_{contact} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{u}}_i \vec{F}_i dt \quad (4.15)$$

avec :

- $\dot{\vec{u}}_i$ le vecteur vitesse de l'élément discret i
- $\vec{F}_i$ le vecteur des forces appliquées par le contact sur l'élément discret i

Le calcul de l'énergie cinétique ΔK_{cin} est réalisé en sommant l'énergie cinétique de tous les éléments :

$$K_{cin} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \quad (4.16)$$

avec :

- n le nombre total d'éléments discrets
- m_i la masse de l'élément discret i
- v_i la norme du vecteur vitesse de l'élément discret i
- I_i l'inertie de l'élément discret i
- ω_i la norme du vecteur de vitesse angulaire de l'élément discret i

L'énergie dissipée ΔW_{diss} peut être liée au frottement des éléments entre eux et à l'amortissement des contacts. Il est aussi possible d'introduire un amortissement de type visqueux au niveau des poutres. L'amortissement est exprimé sous la forme d'un ratio de l'amortissement critique α qui dépend du type d'interaction et des paramètres du modèle (rigidités et masses). Dans le cas des poutres, seules les sollicitations de traction / compression et flexion peuvent être soumises à un amortissement visqueux. On considère que les autres sollicitations sont négligeables. Une force ou un moment d'opposition liés au frottement et à l'amortissement est ajouté à chaque pas de temps sur les éléments ou les liens cohésifs. Dans le cas de l'amortissement visqueux, la force d'opposition est de type :

$$\vec{f} = \dot{\delta} \alpha 2 \sqrt{KM} \vec{n} \quad (4.17)$$

avec :

- α le coefficient d'amortissement
- $\dot{\delta}$ la vitesse relative entre deux éléments en contact ou liés par une poutre
- K la raideur généralisée de l'interaction (contact, flexion ou traction / compression)
- M la masse équivalente des deux éléments de l'interaction
- $\vec{n}$ la direction de l'interaction

Un calcul similaire aux énergies de contact (4.15) est réalisé pour quantifier ces énergies. Enfin, le schéma d'intégration numérique *Verlet Vitesse* est choisi afin de ne pas introduire d'amortissement numérique.

La deuxième approche de calcul de G_I consiste à calculer directement l'énergie de rupture entre deux instants t_1 et t_2 par la méthode de referment de fissure. L'équation est de la forme :

$$G_I = \frac{-1}{2b\Delta a} \int_{\Delta a} T_y(x, t_1) u_y(x, t_2) dx \quad (4.18)$$

avec T_y et u_y respectivement la force de traction et le déplacement perpendiculaire au trajet de fissure suivant l'axe $\vec{x}$. Dans le cas d'éléments discrets reliés par des liens cohésifs au niveau du trajet de fissure, l'énergie de rupture est l'énergie stockée sur chaque élément au moment où il est désactivé. Les poutres 3D du modèle DEM ne se retrouvent pas alignées suivant l'axe $\vec{y}$. À la force de traction s'ajoutent les forces de flexion, torsion et cisaillement et les déplacements correspondants. L'énergie de rupture correspond donc à l'énergie élastique emmagasinée par chacune des poutres se trouvant sur le chemin de fissure calculée par les équations (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14).

Afin de clarifier ces propos, un essai simple de traction sur 5 éléments discrets est mené. Les éléments, de même diamètre sont alignés et reliés par des poutres de même dimension. Comme on peut le voir sur la figure 4.5b, l'élément de gauche est encasté et un déplacement est imposé sur l'élément de droite jusqu'à rupture. Au début du calcul,

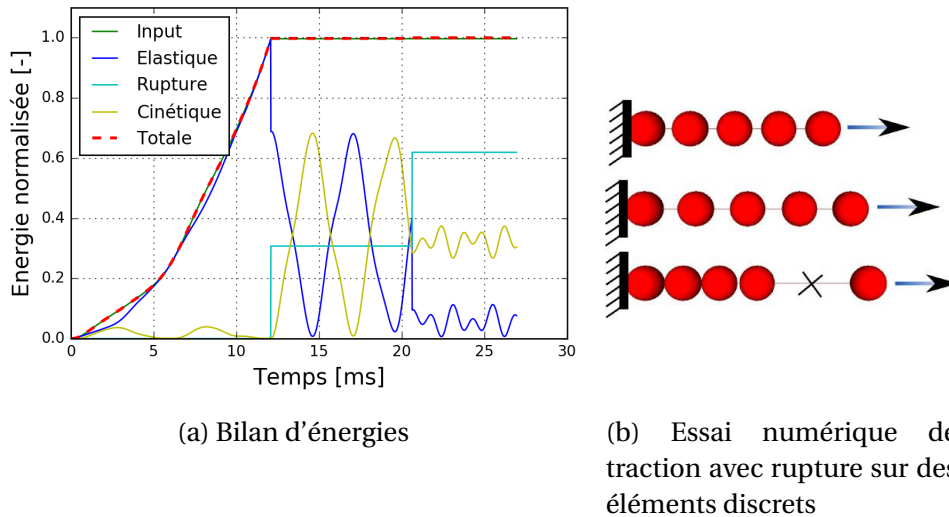


FIGURE 4.5 – Mise en évidence des énergies mises en jeu lors d'un essai de rupture sur un cas simple

l'énergie apportée au système est principalement transférée en énergie élastique et une petite partie est sous la forme d'énergie cinétique. Au moment de la rupture d'une puis de deux poutres, l'énergie de rupture augmente. Elle correspond à l'énergie élastique stockée par ces deux poutres avant rupture. La structure se met à osciller, l'énergie restante dans le système correspond à un échange d'énergie cinétique et élastique. Il s'agit des effets inertiels induit par la rupture. Les deux approches de calcul de G_I présentées précédemment peuvent être utilisées car l'énergie de rupture calculée est identique.

4.3.2.2 Premiers résultats

Afin de valider le modèle DEM, des premiers essais numériques sont menés sur une plaque de longueur 200 mm, de hauteur 40 mm et d'épaisseur 2 mm, voir la figure 4.6. La plaque est constituée de 20 000 éléments et possède deux éléments dans l'épaisseur, comme pour les sphères creuses. Plusieurs géométries ont été construites afin de vérifier que l'arrangement aléatoire des éléments n'entraînait pas une dispersion importante, ce qui est le cas. Une précontrainte est réalisée en imposant un déplacement de 2 mm suivant la hauteur. Les paramètres du modèle sont les mêmes que ceux ayant été calibrés dans le deuxième chapitre. De ce fait, le module de Young utilisé n'est pas le module de Young dynamique mais statique. Les vitesses de fissuration ne pouvant être directement comparées, elles seront à chaque fois exprimées en fonction des vitesses des ondes de Rayleigh. Après la phase de tension (20 000 itérations), le calcul est stabilisé (10 000 itérations). Le bilan d'énergie illustré sur la figure 4.7 permet de confirmer que les effets cinétiques avant la rupture sont négligeables. Il est donc possible de considérer que la mise sous tension se déroule en régime quasi-statique. L'opération de découpe est ensuite réalisée. Dans un premier temps, la découpe consiste à désactiver une par une les poutres intersectant le plan situé au milieu de la plaque à une vitesse constante imposée. La découpe génère une augmentation de l'énergie de rupture et de l'énergie cinétique et une diminution de l'énergie élastique, voir la partie *rupture* de la figure 4.7.

La figure 4.8 représente la plaque avant, pendant et après la rupture. Les couleurs sont associées au déplacement suivant la hauteur de l'éprouvette afin de mettre en évidence le chemin de la fissure.

L'évolution du facteur de correction dynamique G_{IDc}/G_{I0} est tracé sur la figure 4.9

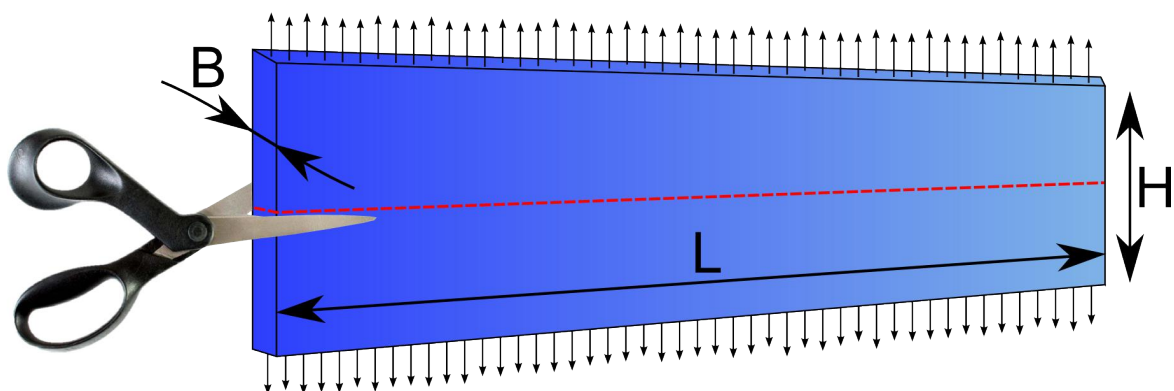


FIGURE 4.6 – Schéma d'une plaque précontrainte et "découpée" numériquement, de longueur $L = 200$ mm, hauteur $H = 40$ mm et d'épaisseur $B = 2$ mm.

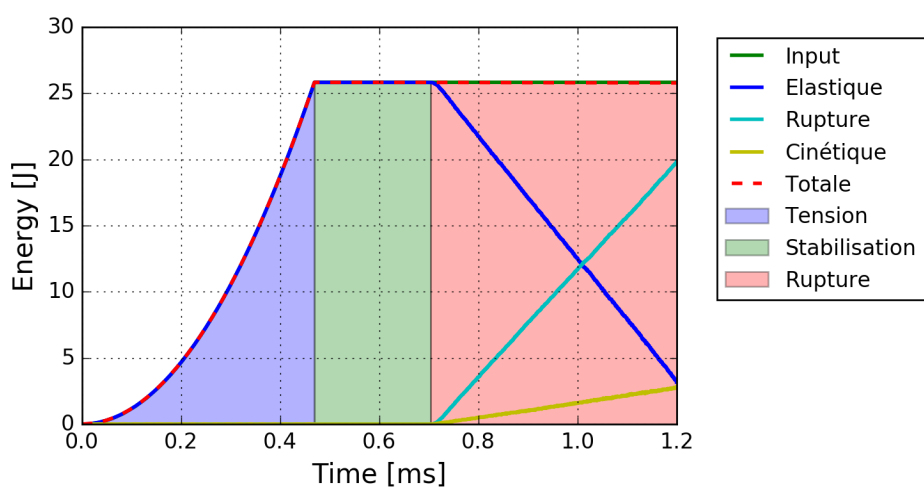


FIGURE 4.7 – Bilan d'énergie lors de la tension, stabilisation puis découpe d'une plaque

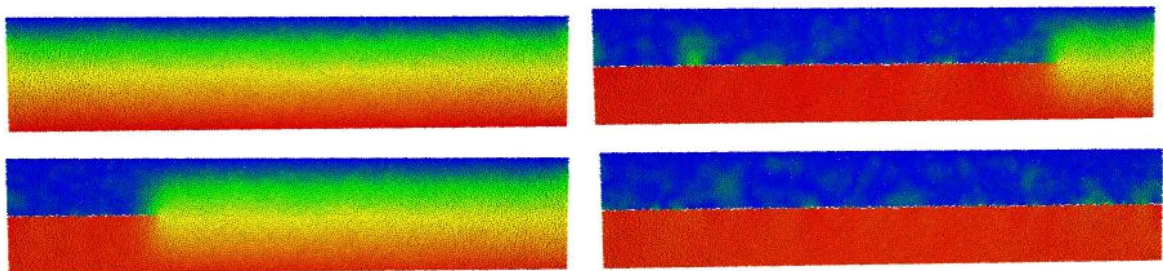


FIGURE 4.8 – Rupture numérique dynamique d'une plaque

pour deux vitesses de propagation différentes et comparé avec le résultat analytique de BROBERG [1960]. On rappelle que le facteur de correction dynamique peut être approximé sous la forme de $1 - \dot{a}/c_r$ dans le cas de la propagation d'une fissure sur une plaque semi-infinie. Pour les deux vitesses de propagation exposées ici, $\dot{a} = 0,06 c_r$ (figure 4.9a) et $\dot{a} = 0,3 c_r$ (figure 4.9b), le calcul se stabilise à environ 10 % de la longueur totale de la plaque. La géométrie est donc adaptée à cette simulation. Pourtant, le facteur de correction dynamique est dans les deux cas trop faible. Les effets inertiels, sont trop présents lors de la rupture. Le problème rencontré est lié à l'instabilité dynamique du calcul provoquée par la coupure brutale des poutres. Le modèle DEM présente donc les mêmes instabilités qu'en FEM. Deux solutions sont alors proposées.

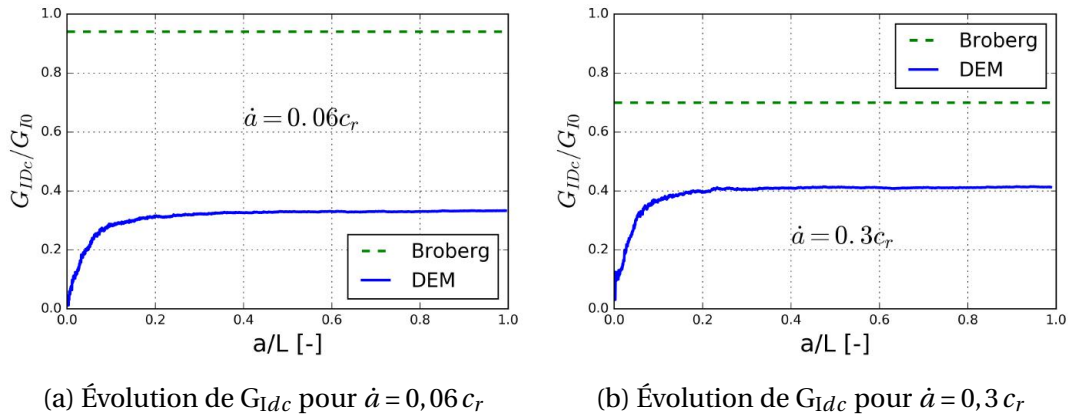


FIGURE 4.9 – Premiers résultats du calcul du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique sur un essai de rupture sur plaque en fonction de la longueur de fissure normalisée

4.3.2.3 Méthode par amortissement visqueux

La première approche proposée pour atténuer ces instabilités dynamiques est l'introduction d'un amortissement visqueux au niveau des poutres. Il est possible, soit de considérer un comportement viscoélastique du matériau (dans ce cas toutes les poutres présentent un amortissement visqueux) soit de considérer que cet amortissement n'est pas physique et qu'il ne permet que de réduire les instabilités liées à la rupture. Dans ce deuxième cas, les poutres visqueuses sont placées au bord de la fissure afin que le reste de la structure ne dissipe pas d'énergie par amortissement.

Le taux de restitution d'énergie G_I est calculé par l'équation 4.7 où la partie ΔW_{diss} n'est plus comptée. L'énergie de rupture est donc composée d'une énergie élastique des liens rompus et d'une énergie dissipée par amortissement visqueux. En effet, après une analyse paramétrique de différentes valeurs du coefficient d'amortissement α , il a été mis en évidence qu'une valeur très faible était nécessaire pour parvenir à des résultats convenables. Une valeur de 0,0002 fois l'amortissement critique dans le cas où toutes les poutres présentent un comportement visqueux et une valeur de 0,005 fois l'amortissement critique dans le cas où les poutres visqueuses sont placées sur le bord de la fissure, suffit. Ces valeurs, très faibles (la valeur préconisée par défaut dans le cas de sollicitations simples sur la plate-forme Gran00 est de 0,01), ont très peu d'influence sur le comportement global de la structure. L'amortissement est donc en grande partie provoqué par des oscillations de très hautes fréquences dues à la rupture instantanée des poutres.

La figure 4.10 présente les résultats obtenus dans le cas où l'ensemble des poutres sont visqueuses (le résultat est similaire dans le cas des poutres visqueuses en bord de fissure).

Par rapport au modèle analytique de Broberg, le modèle DEM par amortissement traduit globalement la chute du facteur de correction dynamique de 1 à 0 entre $0,01 c_r$ et $1 c_r$. Toutefois, la diminution est plus importante entre $0,01 c_r$ et $0,4 c_r$ et moins importante entre $0,4 c_r$ et $0,8 c_r$. À faible vitesse de propagation, ce résultat peut s'expliquer par la présence d'oscillations résiduelles de plus basses fréquences qui sont moins amorties.

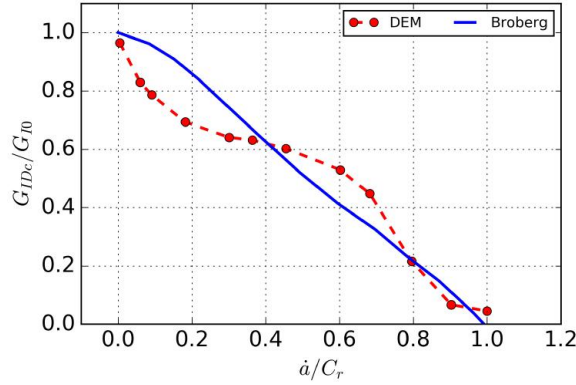


FIGURE 4.10 – Facteur de correction dynamique en fonction de la vitesse de propagation de fissure par une approche d'amortissement visqueux

Cette solution, très simple de mise en place ne permet néanmoins pas de calculer le facteur de correction dynamique directement à partir de l'énergie de rupture issue de l'énergie élastique des liens en pointe de fissure.

4.3.3 Méthode par zone de rupture (fracture process zone)

Une approche par zone de rupture est finalement proposée. Elle s'appuie sur la méthode des zones cohésives largement employées en FEM (HSU et ZHAI [1984]; KOSTYLEV et MARGOLIN [1990]). La figure 4.11 schématise la propagation d'une fissure dans un milieu discret. Au niveau de la zone intacte, les poutres sont de type élastiques. Entre la pointe de fissure réelle (les bords de la fissure ne sont plus liés) et la zone intacte, une zone de rupture est introduite. Dans cette zone de rupture, les poutres perdent progressivement leur rigidité jusqu'à atteindre une rigidité nulle, les poutres sont alors désactivées. Le module de Young est associé à toutes les déformations des poutres : traction, flexion, torsion et cisaillement.

Deux paramètres sont à identifier : la longueur de la zone de rupture et le schéma numérique de dégradation des poutres.

4.3.3.1 Schéma numérique d'endommagement

Plusieurs schémas numériques de dégradation des éléments ont été proposés pour la FEM, voir la partie 4.3.1 dans ce chapitre. Afin de couvrir plusieurs possibilités, les trois solutions suivantes ont été comparées et sont illustrées sur la figure 4.12b.

$$Y_1/Y_2 = 1 - b/l \quad (4.19)$$

$$Y_1/Y_2 = \sqrt{1 - b/l} \quad (4.20)$$

$$Y_1/Y_2 = (1 - b/l)^2 \quad (4.21)$$

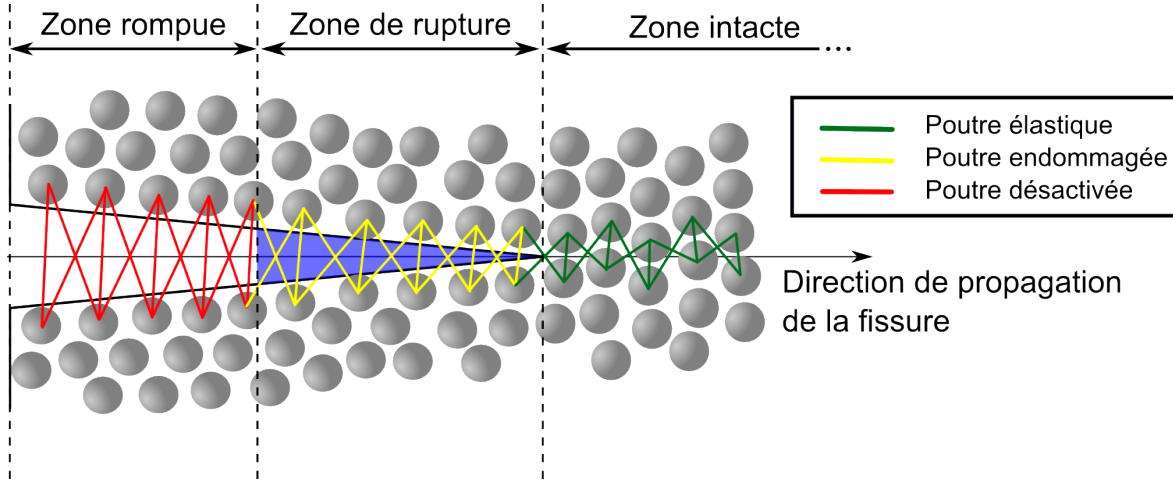
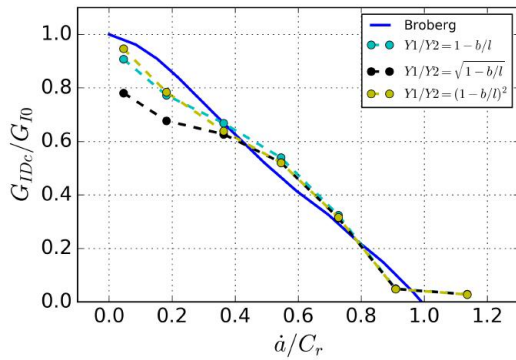


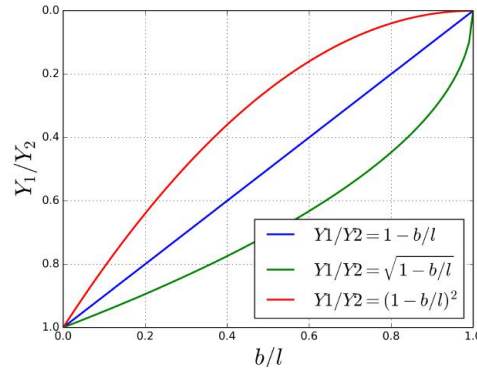
FIGURE 4.11 – Technique de découpe par zone de rupture : endommagement progressif des poutres

Avec :

- Y_1 le module de Young de la poutre au pas de temps courant
- Y_2 le module de Young original de la poutre
- l la longueur de la zone de rupture
- b la distance entre la poutre considérée et le début de la zone de rupture.



(a) Facteur de correction dynamique en fonction de la vitesse de propagation de la fissure pour différents schémas numériques



(b) Schémas numériques : évolution de la rigidité des poutres en fonction de l'avancée de la fissure

FIGURE 4.12 – Comparaison de 3 schémas numériques d'endommagement des poutres

Les résultats sont visibles sur la figure 4.12a. Une décroissance quadratique ou linéaire permet d'obtenir sensiblement les mêmes résultats, proches de la solution analytique. Le troisième schéma qui se traduit par une zone de rupture en moyenne plus rigide ne permet pas au modèle de dissiper assez d'énergie de rupture pour des vitesses de propagation de fissure de $0,05 c_r$ à $0,4 c_r$. Le schéma linéaire est finalement retenu, comme préconisé en FEM par AOKI et collab. [1987].

4.3.3.2 Longueur de zone de rupture

Afin de rendre la longueur de la zone de rupture adimensionnelle, on utilise le rapport $r_l = l/R_{ed}$ avec l la longueur de la zone de rupture et R_{ed} le rayon moyen

des éléments discrets du modèle. Une analyse paramétrique a été menée en utilisant plusieurs longueurs. La figure 4.13 présente les résultats pour des longueurs de 1, 2 et 4 fois le rayon moyen des éléments.

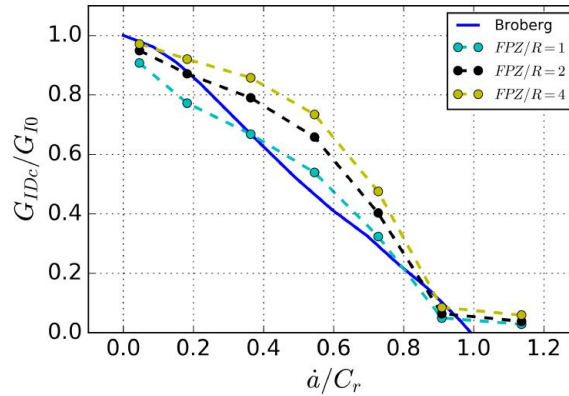


FIGURE 4.13 – Facteur de correction dynamique en fonction de la vitesse de propagation de fissure pour différentes longueurs de zone de rupture

Une longueur équivalente à 1 offre les meilleurs résultats car une longueur plus importante conduit à une énergie dissipée trop importante entre $0,2 c_r$ et $0,8 c_r$. Dans le cas du modèle présenté ici, la zone de rupture a donc une longueur de $0,49 \text{ mm}$ soit environ $0,0024$ fois la longueur de la plaque. À $0,1 c_r$, une poutre met environ 100 itérations à se dégrader contre 10 itération à $1 c_r$ avec cette longueur de zone de rupture. La réduction du pas de temps n'a pas montré d'influence sur les résultats.

4.3.3.3 Conclusion sur la méthode

Un schéma de dégradation linéaire couplé à une longueur de zone de rupture de 1 permet de reproduire les résultats obtenus analytiquement ou par la FEM. On peut cependant remarquer sur la figure 4.14 que le facteur de correction dynamique tend vers 1 et 0 en fonction de la vitesse de propagation sans atteindre ces limites. À une faible vitesse, ce phénomène peut être expliqué par la présence d'effets inertiels résiduels. Les poutres ne sont pas alignées au niveau de la pointe de fissure ce qui conduit à de légères perturbations normales à la plaque entraînant des oscillations de flexion de la plaque. À une vitesse proche de $1 c_r$, les poutres rompues possèdent un minimum d'énergie élastique correspondant à une partie de l'énergie emmagasinée par la tension de la plaque. Une augmentation du nombre d'éléments permet de tendre vers 0.

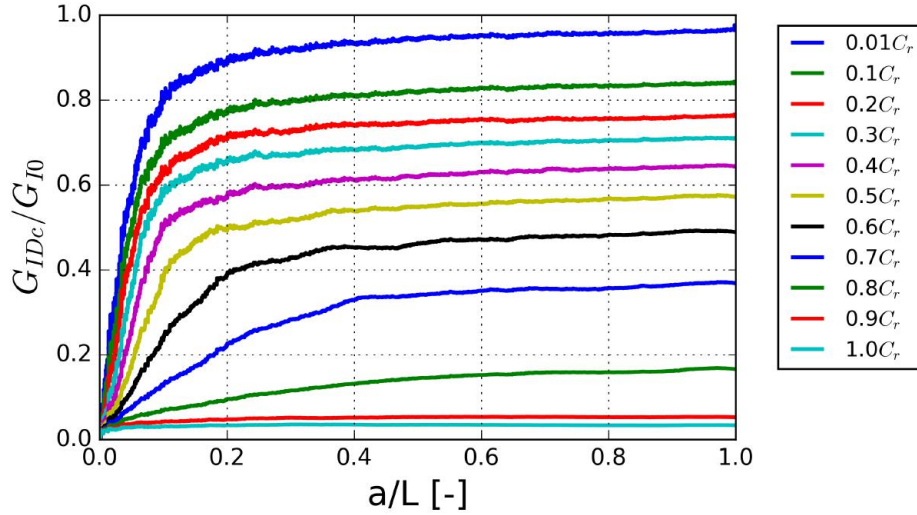


FIGURE 4.14 – Calcul du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique sur un essai de rupture sur plaque en fonction de la longueur de fissure normalisée

4.4 Application à la rupture dynamique sur sphère creuse

4.4.1 Mise en place du modèle

Il est maintenant possible d'appliquer la méthode pour la propagation de fissure sur une sphère creuse en compression uni-axiale. Quelques précautions supplémentaires sont à prendre en considération par rapport aux essais sur plaque. Tout d'abord, l'énergie élastique peut être décomposée en énergie élastique de déformation et en énergie élastique de contact, voir la figure 4.15. La valeur de rigidité de contact est choisie afin de limiter l'énergie de contact tout en évitant les instabilités liées à une rigidité trop importante.

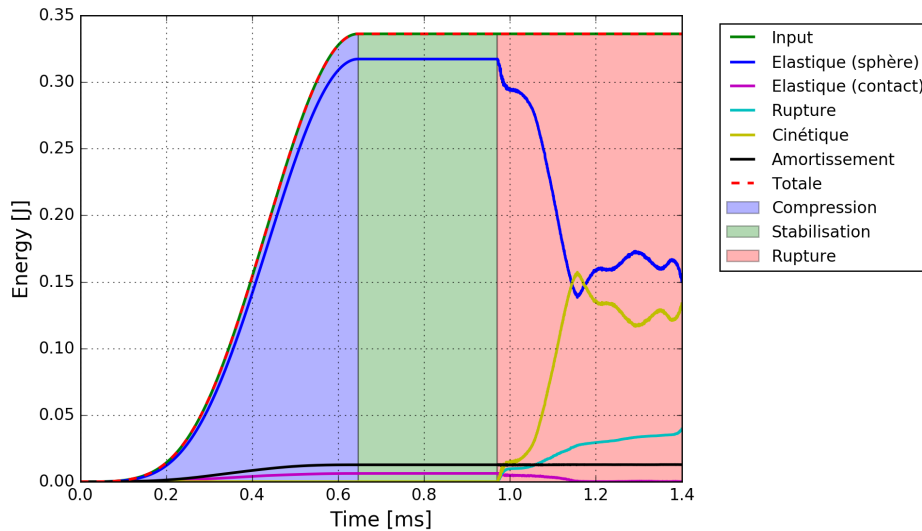


FIGURE 4.15 – Bilan d'énergie lors de la compression, stabilisation et rupture dynamique ($0,1 c_r$) d'une sphère creuse

L'énergie cinétique induite par une mise en compression rapide de la sphère creuse peut amener à une instabilité de la structure avant la rupture. Un coefficient d'amortissement important ($\alpha = 0,5$) est introduit dans le modèle pendant la phase de

compression et de stabilisation puis fixé à 0 lors de la rupture. Il permet de réduire les effets inertiels. La vitesse de déplacement imposée n'est pas constante comme dans le cas de la plaque mais comporte une phase d'accélération et de décélération limitant la mise en mouvement brusque de la structure.

Enfin, les deux éléments situés à l'extrémité de la sphère aux points de contact avec les plateaux de compression sont fixés avec ces mêmes plateaux afin d'éviter la rotation de la sphère lors de la phase de compression ou de rupture. En effet, dans un premier temps, aucun frottement de contact n'est pris en compte dans le modèle.

La rupture d'une sphère creuse à une vitesse de $0,02 c_r$ est représentée sur la figure 4.16. Le code couleur correspond au déplacement perpendiculaire à la propagation de fissure afin de mettre en évidence l'ouverture en mode I de la sphère creuse. La rupture est ici idéalisée : nette, sans branchement et parfaitement rectiligne. Il serait ici possible de réaliser des propagations de fissure suivant le chemin de fissure observé expérimentalement. Une rupture rectiligne est conservée car les chemins de fissures observés ne présentent pas de bifurcation ou de branchement importants dans l'ensemble. Les vitesses de propagation observées de l'ordre de $0,1 c_r$ à $0,15 c_r$ sont éloignées d'un facteur 4 par rapport à la vitesse de propagation de $0,6 c_r$ où intervient théoriquement le branchement pour des raisons inertiels (YOFFE [1951]).

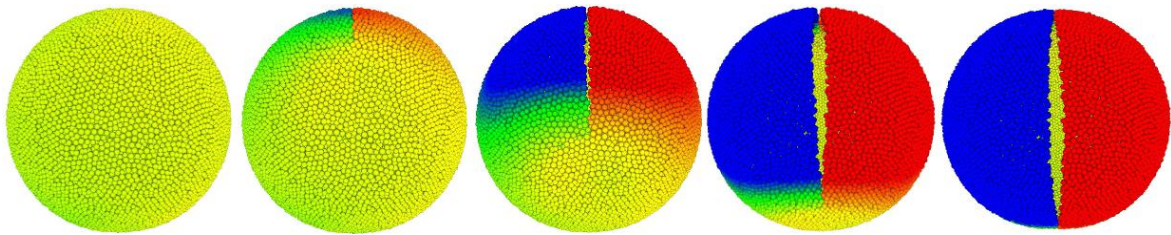


FIGURE 4.16 – Propagation d'une rupture dynamique ($0,02 c_r$) sur une sphère creuse de type B

Des essais de rupture sont conduits à des vitesses de propagation variant de $0,0001 c_r$ à $1 c_r$ et pour des longueurs de fissure de $1/2$ à une fois le périmètre ($0 - 2\pi$) de la sphère creuse. À la différence des essais sur plaque, une vitesse de propagation de $0,0001 c_r$ est nécessaire afin d'atteindre la limite haute (peu d'évolution par rapport à une vitesse de propagation de $0,001 c_r$) du facteur de correction dynamique.

La figure 4.17 présente l'évolution de l'énergie de rupture cumulée pour une fissure allant d'un angle de 0 rad à $\pi \text{ rad}$ sur la sphère creuse. L'énergie de rupture cumulée n'est pas linéaire avant un angle d'environ $3\pi/8$, ce qui veut dire que le taux de restitution d'énergie n'est pas constant. La vitesse de propagation de la fissure ne devrait donc pas être constante sur tout le pourtour de la sphère. De plus, le mode de propagation en mode I n'est pas assuré près des points de contacts. Le cisaillement près des bords implique un mode de propagation mixte de la fissure où il est difficile de quantifier le rôle de chacun des modes. Le suivi de la propagation de fissure par caméra rapide se limite d'ailleurs à la surface visible et il n'est pas possible de remonter à la vitesse de fissuration près de l'amorçage au niveau des points de contacts. La figure 4.18 présente les mêmes résultats mais normalisés par rapport au résultat ayant pour vitesse de propagation $0,0001 c_r$, considéré comme le cas quasi-statique. Cette représentation ne permet pas d'identifier directement le facteur de correction dynamique associé à un mode de propagation en mode I.

Le calcul du facteur de correction dynamique doit donc être réalisé sur la partie linéaire de l'énergie de rupture cumulée. Une régression linéaire est réalisée pour chaque vitesse de fissuration entre $\pi/2$ et $3\pi/4$. La valeur maximale du coefficient directeur de

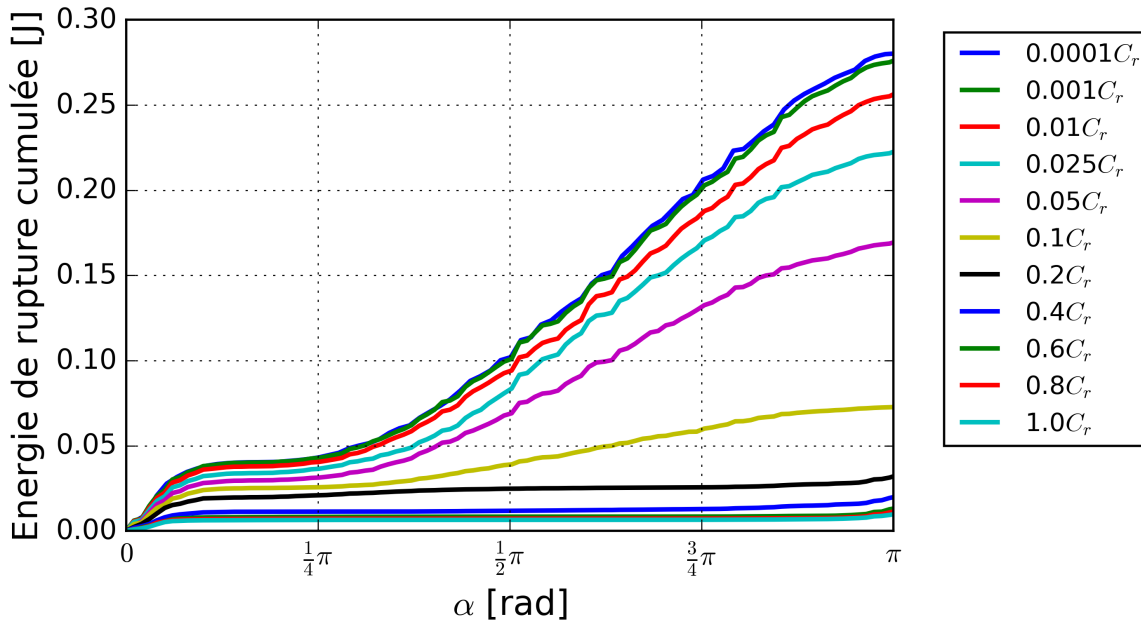


FIGURE 4.17 – Évolution de l'énergie de rupture cumulée lors de la propagation d'une fissure au sein d'une sphère creuse en fonction de la position angulaire du sommet de fissure à différentes vitesses de propagation

la pente est donnée par le régime de propagation supposé quasi-statique. Le facteur de correction dynamique pour chaque vitesse de propagation est estimé en comparant le coefficient directeur de la pente ou l'énergie dissipée par rapport au cas quasi-statique.

Ce post-traitement est effectué pour 3 géométries de sphères différentes ayant un rapport r_t de 0,12 ; 0,08 et 0,043. Les deux derniers rapports concernent respectivement les sphères de type B et A.

Les résultats sont présentés sur la figure 4.19, le facteur de correction dynamique est tracé en fonction des vitesses de fissuration par rapport à la vitesse des ondes de Rayleigh. Un zoom sur la figure permet de s'intéresser à la plage de vitesse observée expérimentalement. La première constatation est que l'évolution du facteur de correction dynamique ne suit pas du tout une décroissance quasi-linéaire comme dans le cas de la plaque. Le taux de restitution d'énergie critique dynamique G_{IDc}^* estimé dans la première partie par le rapport $1 - \dot{a}/c_r$ n'est donc pas adapté dans le cas de sphères creuses. Les effets inertiels générés par la propagation de fissure sur une sphère creuse sont beaucoup plus importants que sur plaque. Une vitesse de propagation supérieure à $0,2 c_r$ implique un facteur de correction dynamique proche de 0 donc une valeur de G_{IDc} proche aussi de 0. Dans ce cas, la vitesse de propagation est limitée bien avant $0,6 c_r$ puisque G_{IDc} ne peut être égal à 0.

Les résultats mettent aussi en évidence l'influence de la géométrie : plus le ratio r_t est faible, plus les effets inertiels sont importants pour une même vitesse de propagation. C'est d'ailleurs pour cela qu'expérimentalement, la vitesse de propagation observée est légèrement supérieure pour les sphères de type B par rapport aux sphères de type A. Pour des vitesses de propagation de $0,1 c_r$ le facteur de correction dynamique est de l'ordre de 0,1 pour les sphères de type A et 0,3 pour les sphères de type B.

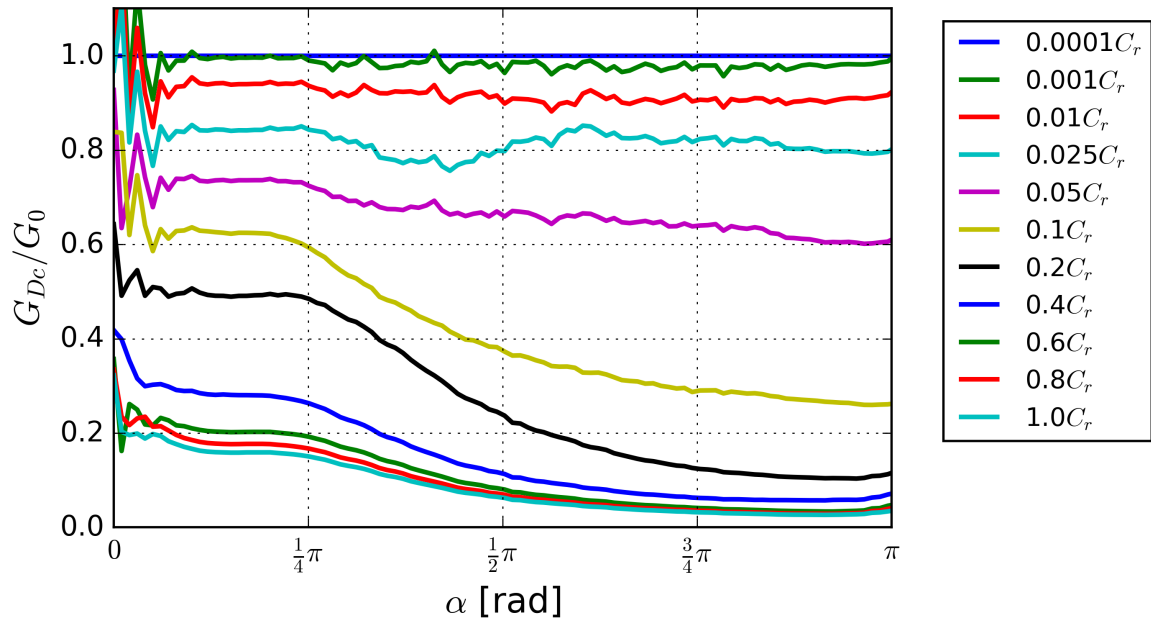


FIGURE 4.18 – Facteur de correction dynamique global d'une sphère creuse en fonction de la position angulaire du sommet de fissure à différentes vitesses de propagation

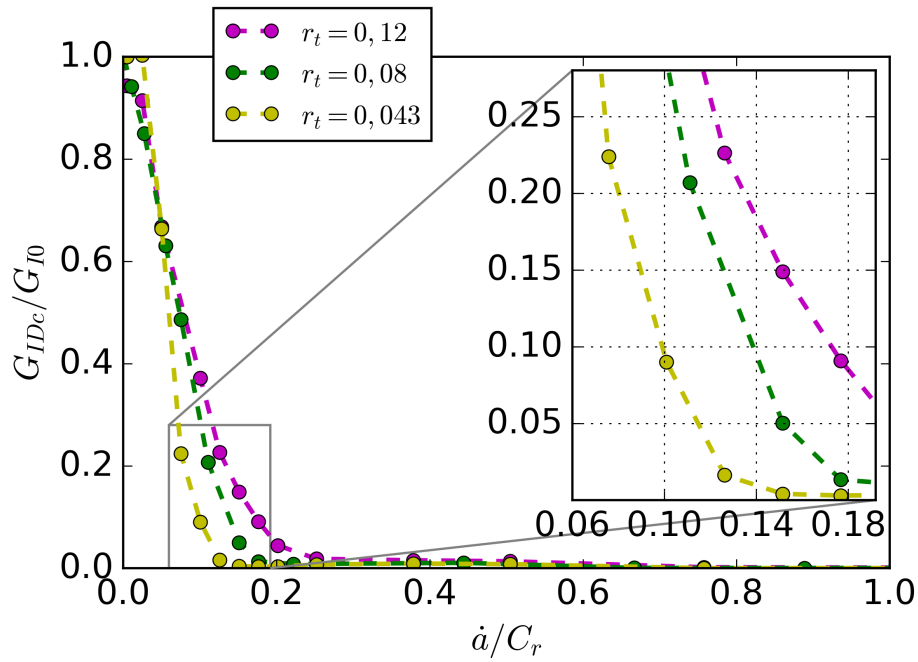


FIGURE 4.19 – Facteur de correction dynamique en fonction de la vitesse de propagation de la fissure sur sphère creuse pour différentes épaisseurs de coque

4.4.2 Énergie de frottement

Les calculs précédents n'intègrent aucune autre dissipation d'énergie que la rupture. Il est possible d'étudier l'influence du frottement entre la sphère et les plateaux ou entre les bords de la fissure. Ces deux possibilités ont été analysées. La figure 4.20 illustre les résultats concernant l'introduction de frottement aux bords de la fissure : un frottement inter-éléments pour des vitesses de propagation de $0,025 c_r$ à $0,35 c_r$. Les résultats pour l'introduction de frottement au niveau des plateaux de compression étant similaires, ils ne sont pas présentés ici.

On observe sur la figure 4.20a que le frottement n'a quasiment aucun impact sur le facteur de correction dynamique. Par contre, si l'on s'intéresse aux autres énergies et notamment aux effets inertiels, le frottement entraîne une diminution de ceux-ci. Plus le temps de simulation est important (et plus la vitesse de propagation est faible) et plus le système va dissiper l'énergie des effets inertiels résiduels par le frottement, voir la figure 4.20b. C'est d'ailleurs ce qui se passe expérimentalement, la sphère oscille avant de se stabiliser après un certain temps, dû entre autres aux différents frottements.

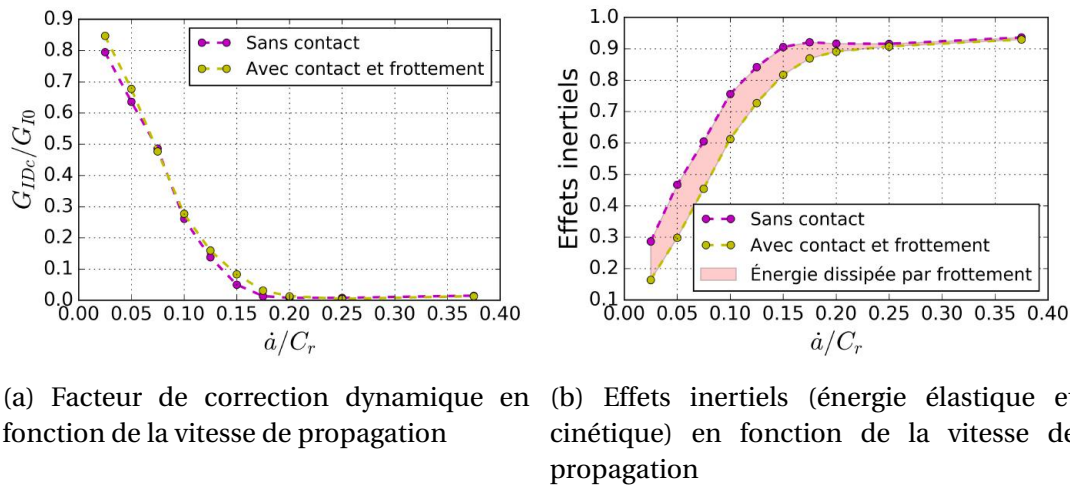


FIGURE 4.20 – Analyse numérique de l'influence du frottement des surfaces rompues sur sphère creuse ($r_t = 0,08$)

4.4.3 Application du facteur de correction dynamique

Le facteur de correction dynamique est appliqué pour les différents essais et une synthèse des résultats est présentée dans le tableau 4.2. Le taux de restitution d'énergie critique dynamique est calculé d'une part avec la relation $1 - \dot{a}/c_r$ (G_{IDc}^*) puis avec les nouvelles relations dépendantes de la géométrie de la sphère creuse (G_{IDc}). Une forte dispersion des résultats est observée ($0,4$ à $0,84 \text{ kJ/m}^2$) alors qu'une unicité des résultats est attendue. En effet, même si le taux de restitution d'énergie critique dynamique est dépendant de la vitesse de fissuration, les vitesses sont assez proches pour ne pas provoquer une variation importante de G_{IDc} . Si cette méthodologie ne permet pas de remonter à une valeur précise de G_{IDc} , elle parvient néanmoins à mettre en évidence la grande part d'effets inertiels lors de la rupture d'une sphère creuse. Elle montre aussi que la dispersion sur la mesure de la position du sommet de fissure (et donc du calcul de la vitesse de propagation) a une grande influence sur le calcul du facteur de correction dynamique. Une erreur de 5 % sur la vitesse de fissuration peut influencer la valeur du facteur de correction dynamique de l'ordre de $\pm 50 \%$ alors que dans le cas de la relation

linéaire du facteur de correction dynamique sur plaque, l'erreur finale sera toujours de 5 %.

La valeur moyenne de G_{IDc} calculée est ici de $550 \pm 200 \text{ J/m}^2$. JOUDON [2014] trouve des valeurs de G_{IDc} de 220 J/m^2 à 800 J/m^2 pour des vitesses de propagation variant de 135 m.s^{-1} à 440 m.s^{-1} sur la résine pure Hexply®M21. Les résines de type époxyde faisant intervenir des charges micrométriques de type silice ont un taux de restitution d'énergie critique estimé entre 100 et 1400 J/m^2 (KOH et collab. [1993]; RAGOSTA et collab. [2005]).

TABEAU 4.2 – Synthèse de la mesure des vitesses de propagation de fissure et nouvelle estimation de G_{IDc} , moyenne des résultats de chaque type d'essai

Sphère	r_t	$v \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	$\dot{a}/c_r \text{ (N)}$	$G_{I0} \text{ (kJ/m}^2\text{)}$	$G_{IDc}^* \text{ (kJ/m}^2\text{)}$	$G_{IDc} \text{ (kJ/m}^2\text{)}$
A	0,043	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$0,08 \pm 0,01$	$2,7 \pm 0,4$	$2,5 \pm 0,4$	$0,45 \pm 0,4$
B	0,08	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \pm 0,02$	$4,0 \pm 0,7$	$3,55 \pm 0,7$	$0,84 \pm 0,5$
A	0,043	$1,53 \pm 0,17$	$0,09 \pm 0,0$	$3,9 \pm 1,2$	$3,5 \pm 1,1$	$0,69 \pm 0,3$
B	0,08	$1,32 \pm 0,18$	$0,14 \pm 0,02$	$3,4 \pm 0,3$	$2,9 \pm 0,25$	$0,4 \pm 0,3$

4.5 Prise en compte numérique du taux de restitution d'énergie critique

4.5.1 Poutres cohésives endommageables

Le modèle de rupture en contrainte offre de bons résultats mais ne permet pas d'introduire l'énergie de rupture comme donnée d'entrée. Une donnée d'entrée plus proche de ce qui se passe physiquement. En effet, la propagation de fissure est liée à la dissipation d'énergie maximale dès que possible. Dans le modèle actuel, lorsqu'un élément atteint sa limite de contrainte en traction, calculée par le tenseur viriel, toutes ses poutres sont désactivées. L'énergie dissipée par la rupture est la somme des énergies des poutres désactivées. Or, un élément peut avoir un nombre variable de poutres et l'énergie de chacune d'entre elles est aussi variable. L'énergie dissipée par la rupture par unité de surface n'est pas connue à l'avance.

Afin de définir directement le taux de restitution d'énergie critique en DEM, de nombreux travaux font état de l'utilisation de liens cohésifs FAKHIMI et WAN [2016]; GUI et collab. [2016]; HENTZ et collab. [2004]; PLESHA [2006]; TAVAREZ et PLESHA [2007]. Ces modèles possèdent au minimum un comportement bilinéaire en traction et parfois aussi en cisaillement, voir la figure 4.21. Lors de la première phase, le contact ou le lien est de type ressort. Lorsque la contrainte ou le déplacement maximal est atteint, la force de traction / cisaillement reste constante ou diminue (dans le cas d'un adoucissement) jusqu'au seuil maximal où le lien est finalement rompu. Ces modèles permettent donc de modéliser la propagation de la fissure en mode mixte : mode I en traction et mode II-III en cisaillement.

Dans le cas du modèle utilisant les poutres 3D, il n'est pas possible de mettre en place directement ces modèles de rupture. En effet, lors d'une propagation de fissure en mode I, les poutres ne se déforment pas seulement en traction mais aussi en flexion, torsion et cisaillement. La répartition des énergies associées à chaque sollicitation dans le cas d'une propagation de fissure sur une sphère creuse est tracée sur la figure 4.22. L'énergie liée à la traction est certes majoritaire dans le bilan total mais il n'est pas possible de négliger l'énergie de flexion. L'énergie de torsion reste très faible et l'énergie de

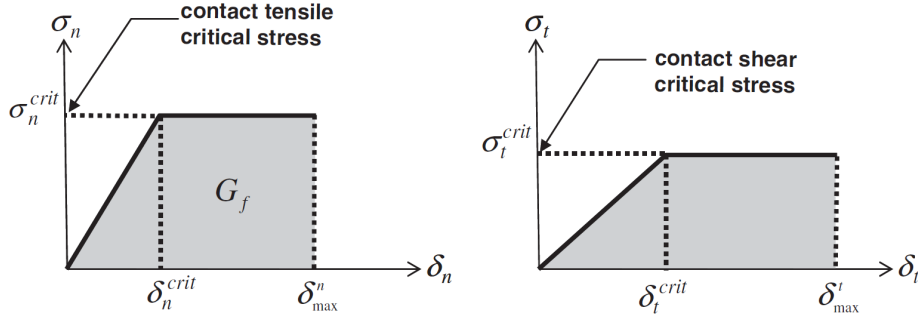


FIGURE 4.21 – Comportement bilinéaire en traction et cisaillement des contacts en DEM TAVAREZ et PLESHA [2007]

cisaillement est négligeable. Cette répartition des énergies a été observée pour différentes vitesses de propagation de fissure, sur sphère creuse ou sur plaque. Elle peut cependant être influencée par les paramètres microscopiques du modèle et notamment le rayon adimensionné des poutres r_μ . Il est donc indispensable de prendre en compte chaque déformation élémentaire dans la mise en œuvre d'un modèle de rupture bilinéaire.

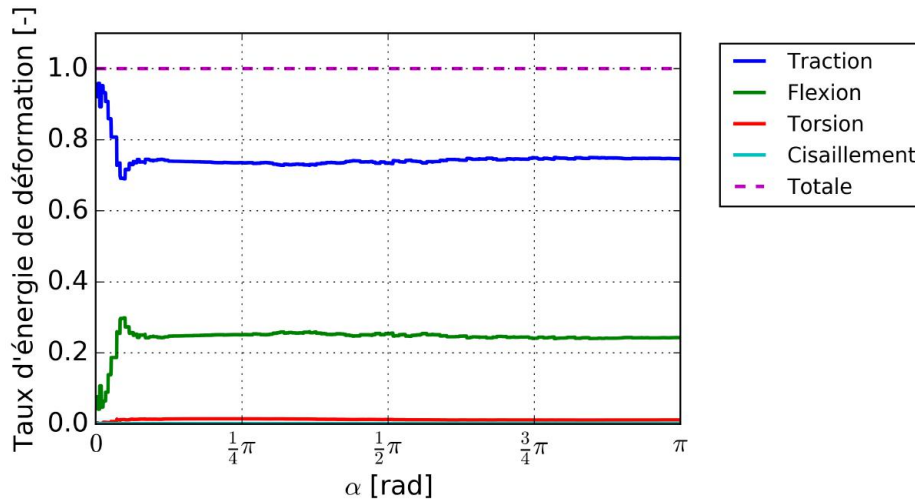


FIGURE 4.22 – Décomposition de l'énergie de rupture en énergie de déformation moyenne sur les poutres lors de la propagation d'une fissure en mode I sur sphère creuse à $0,1c_r$

Le choix a finalement été porté sur un modèle bilinéaire à adoucissement (présenté sur la figure 4.23a) en prenant en compte la traction, flexion et torsion. Lors de la phase d'adoucissement, le module de Young des poutres est progressivement réduit en fonction de l'endommagement de la poutre considérée, voir figure 4.23b. Le module de Young courant Y_2 s'exprime en fonction du module de Young original Y_1 et du taux d'endommagement D :

$$Y_2 = Y_1(1 - D) \quad (4.22)$$

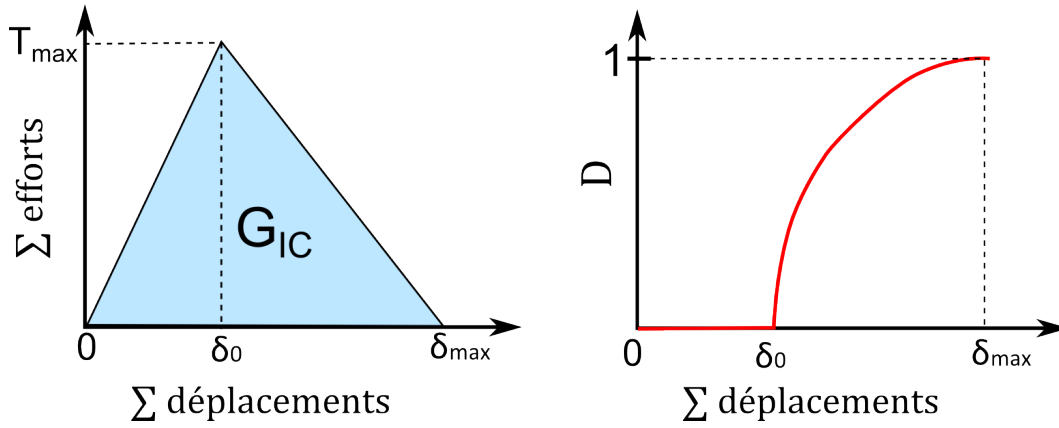
Un taux d'endommagement de 0 indique donc une poutre élastique parfaite et un taux d'endommagement de 1 indique que la poutre est entièrement détruite. Dans le cas d'une sollicitation élémentaire : traction, flexion ou torsion, le taux d'endommagement est calculé de la façon suivante (donné par LIU et collab. [2012] pour la traction) :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \delta < \delta_0 \\ \frac{\delta_{max}(\delta - \delta_0)}{\delta_{max} - \delta_0} & \text{si } \delta_0 \leq \delta \leq \delta_{max} \\ 1 & \text{si } \delta > \delta_{max} \end{cases} \quad (4.23)$$

avec :

- δ le déplacement courant
- δ_0 le déplacement au moment où la poutre est endommagée
- δ_{max} le déplacement maximal, la poutre est désactivée

Dans le cas de la traction, le déplacement est tel que $\delta = l - l_0$ avec l la longueur courante et l_0 la longueur initiale de la poutre. Pour la torsion, on utilise $\delta = \theta_{1_x} + \theta_{2_x}$. Pour la flexion : $\delta = \theta_{1_y} + \theta_{2_y} + \theta_{1_z} + \theta_{2_z}$.



(a) Sommes des efforts en fonction de la somme des déplacements (b) Endommagement D en fonction de la somme des déplacements

FIGURE 4.23 – Modèle cohésif multi-déplacements

Un algorithme est mis en place afin de prendre en compte les spécificités du modèle de poutre 3D. Puisque la limite en contrainte est donnée par l'élément discret auquel sont rattachées plusieurs poutres, la limite en contrainte des différentes sollicitations (traction, flexion et torsion) est différente pour chaque poutre. C'est à dire que lors de la première phase élastique, l'énergie totale par poutre est différente, le déplacement maximal sera donc lui aussi différent :

$$\delta_{max} = 2 \frac{G_{Ic}}{T_{max}} \quad (4.24)$$

Le modèle est validé sur un cas simple : une poutre est reliée à deux éléments discrets, l'un encastré et l'autre auquel sont appliqués des efforts de traction, torsion et flexion. Le résultat est fourni sur la figure 4.24. Le comportement obtenu correspond à ce qui était recherché, le modèle bilinéaire par adoucissement semble donc fonctionner correctement. Le taux de restitution d'énergie est la somme des trois énergies de traction flexion et torsion : $G_{Ic} = G_{flexion} + G_{traction} + G_{torsion}$. Il est possible de modifier les deux paramètres de rupture, le seuil en contrainte principale maximale et le taux de restitution d'énergie afin de faire varier l'allure de la zone cohésive. Il faut noter que le taux de restitution d'énergie minimum du modèle correspond à un comportement élastique fragile parfait, sans adoucissement, qui possède néanmoins une énergie de rupture correspondant à l'aire sous la courbe jusqu'à la limite en contrainte (entre 0 et δ_0 sur la figure 4.23a).

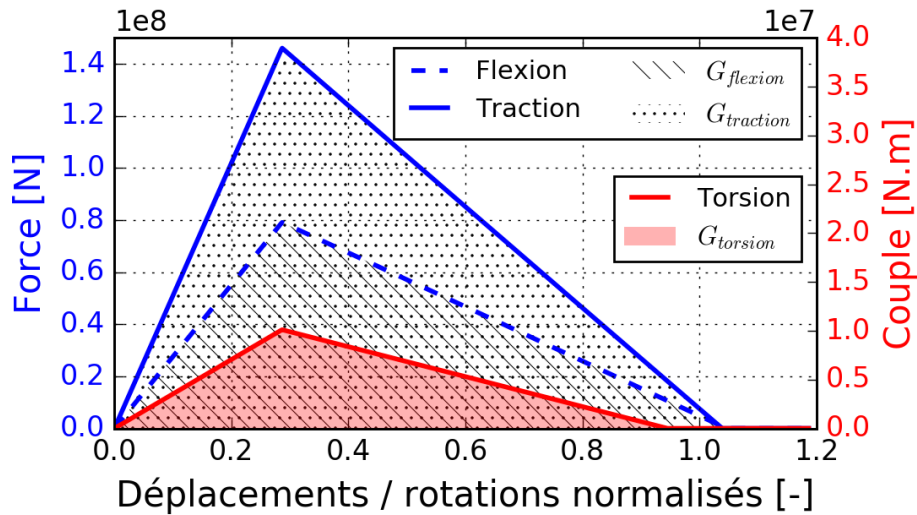


FIGURE 4.24 – Forces de traction et de flexion et moments appliqués à une poutre en fonction des déplacement et de l'angle de rotation normalisés

L'intérêt du modèle est démontré sur un essai de traction sur une éprouvette cylindrique de 1 000 éléments discrets ayant un rapport de longueur sur diamètre de 4. Un côté de l'éprouvette est encasté et un autre est soumis à un déplacement imposé. Le champ de déplacement des éléments discrets avant rupture est visible sur la figure 4.25a. Le chemin de fissure est imposé sur une section située au milieu de l'éprouvette, voir figure 4.25b. Les seules poutres pouvant se rompre intersectent cette section. L'essai de traction est conduit jusqu'à rupture de l'éprouvette. Les résultats du modèle élastique fragile simple (les poutres cassent lorsque l'élément auquel elles sont rattachées atteint le seuil en contrainte) et du modèle bilinéaire (l'énergie de rupture des poutres est plus importante que l'énergie dissipée par le modèle élastique fragile) sont comparés.

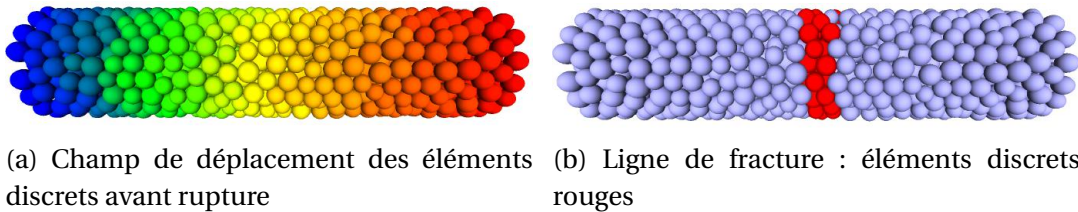


FIGURE 4.25 – Essai de traction sur une éprouvette cylindrique DEM

La figure 4.26 compare les bilans d'énergie des deux modèles. Le premier modèle, élastique fragile, génère une majorité d'effets inertiels lors de la rupture de l'éprouvette : 20 % de l'énergie est dissipée par la rupture et 80 % sous forme d'effets inertiels. Dans le cas du modèle bilinéaire, environ 70 % de l'énergie est dissipée par la rupture et 30 % sous forme d'effets inertiels. Il est possible d'atteindre 100 % de l'énergie dissipée par la rupture en choisissant une valeur appropriée pour G_{Ic} .

De plus, ce deuxième modèle permet de s'affranchir des problèmes de dépendance au maillage (nombre d'éléments). Le problème est similaire à celui rencontré par [DURIEZ et collab. \[2016\]](#) pour la rupture par éléments discrets. Dans notre cas, en supposant une surface de rupture parfaite, plus le nombre d'éléments est important et plus, pour une même contrainte à rupture, l'énergie dissipée par la rupture diminue. Le nombre de poutres intersectant une surface P_S n'est pas directement proportionnel au nombre de poutres dans un volume donné P_V mais est de type :

$$P_S \propto P_V^{2/3} \quad (4.25)$$

Le rapport P_S/P_V diminue donc avec le nombre d'éléments. Le nombre de poutres par unité de volume peut être rapidement calculé, il dépend de la taille des éléments et du nombre de coordination (nombre moyen de liens par élément). Le taux de restitution d'énergie G_{Ic} en J/m^2 est ramené en $J/poutre$ (G_P) lors du calcul et sa valeur dépend du nombre de poutres dans le modèle et de la correction apportée par l'exposant $2/3$. On a finalement :

$$G_P = 2 \frac{G_{Ic}}{P_V^{2/3}} \quad (4.26)$$

Le coefficient 2 prend en compte le fait que 2 surfaces sont créées par la fissure alors qu'il n'y a qu'une seule face de poutres.

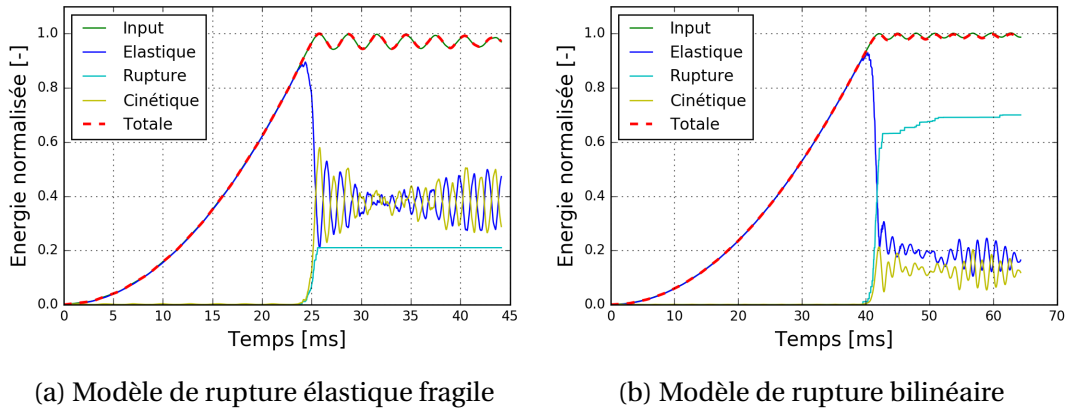


FIGURE 4.26 – Bilan d'énergie d'un essai de traction sur une éprouvette cylindrique DEM

4.5.2 Chemin de fissuration

Les résultats présentés précédemment ont été obtenus à partir de modèles où la rupture ne pouvait avoir lieu qu'au niveau d'une surface de rupture, comme dans le cas d'éléments cohésifs ajoutés à un modèle FEM. Le modèle DEM permet de rendre toutes les poutres cohésives et donc de ne pas imposer de chemin de fissure. L'idée est de garder la limite en contrainte principale sur les éléments qui permet d'orienter efficacement la pointe de fissure [HOEK \[1965\]](#); [SCHMIDT et collab. \[1980\]](#) tout en limitant le nombre de poutres qui peuvent être endommagées. Le modèle original désactive toutes les poutres lorsque la limite en contrainte est atteinte sur un élément. On cherche ici à endommager seulement les poutres situées sur le chemin de fissure.

Deux solutions ont été proposées :

- endommager la poutre se trouvant dans la direction la plus proche de la direction de la contrainte principale
- endommager la poutre reliant deux éléments ayant atteint la limite en contrainte principale

La deuxième solution est privilégiée car elle permet une implantation numérique plus rapide. Des travaux supplémentaires seraient néanmoins nécessaires afin d'établir une comparaison des différentes solutions.

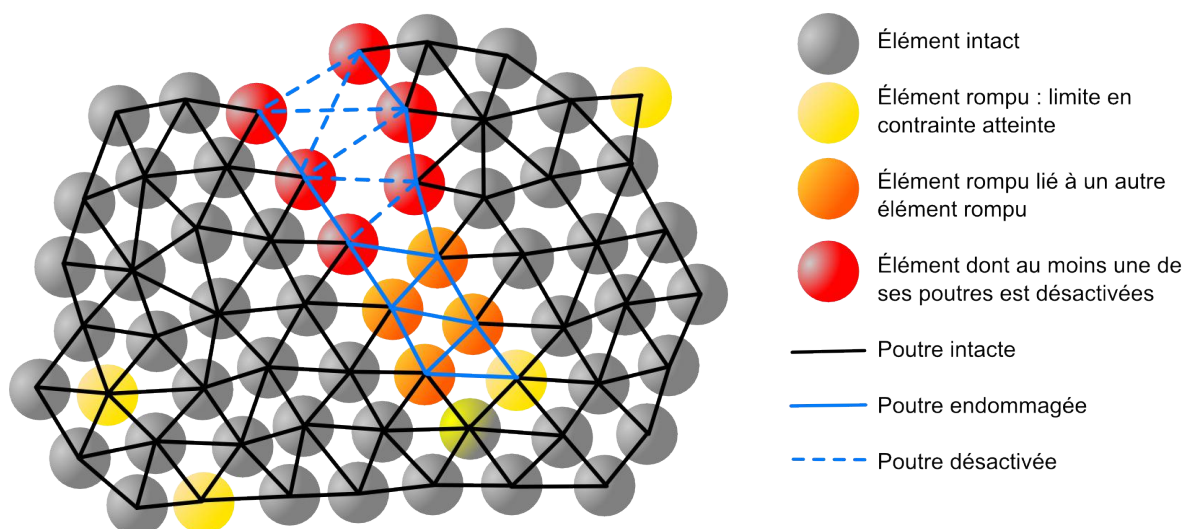


FIGURE 4.27 – Modèle de rupture par éléments discrets à l'aide du tenseur viriel et des poutres endommageables

La solution retenue est présentée sur la figure 4.27. Dans un ensemble d'éléments discrets intacts (gris), certains atteignent leur limite en contrainte principale (jaune) au voisinage du sommet de fissure. Les poutres reliant ces éléments commencent à s'endommager. Leur module de Young diminue en fonction de leurs déplacements suivant chaque sollicitation (traction, flexion et torsion). Lorsque l'énergie accumulée dans chaque poutre atteint la valeur G_p , leur module de Young tend vers 0, elles sont désactivées. Les éléments rouges permettent de mettre en évidence le chemin de fissure. Cette solution a aussi le mérite de libérer peu d'éléments lors de la rupture évitant ainsi une perte importante de matière sur le chemin de fissure comme cela est observé sur le modèle original.

4.5.3 Premiers résultats sur sphère creuse

Le modèle de poutres endommageables est utilisé dans le cadre d'essais de compression uni-axial sur des sphères creuses de type B. La dépendance à la vitesse de déformation n'est pas traitée ici. Les essais sont réalisés à une vitesse suffisamment faible ($0,12 \text{ m.s}^{-1}$) ne provoquant pas d'effets inertiels avant la rupture.

Un essai, sur la figure 4.28, montre la sphère creuse au début de la compression, pendant la rupture et après la rupture. Le chemin de fissure est clairement visible, délimité par les éléments discrets rouges. La rupture semble assez nette même si des micro branchements sont observés.

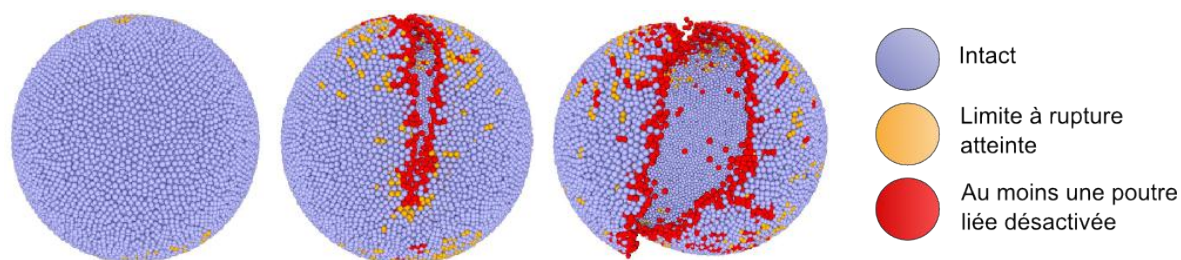


FIGURE 4.28 – Essai numérique de compression d'une sphère creuse en utilisant le modèle de rupture à poutres endommageables

Deux simulations sont comparées sur la figure 4.29, la première possède un taux de restitution d'énergie nul (impliquant un comportement élastique fragile sans phase d'adoucissement) et l'autre un taux de restitution d'énergie G_p de $2 \cdot 10^{-4}$ J/poutre soit environ 350 J/m^2 . La méthodologie de calibration est différente par rapport au chapitre précédent : une fois les valeurs d'énergie de rupture renseignées, la limite en contrainte est identifiée par méthode inverse.

Les conclusions sur le modèle sont contrastées. Le modèle permet effectivement de contrôler l'énergie de rupture et indirectement les effets inertiels induit par la rupture. Dans le cas présent, les essais mettent bien en évidence que deux simulations quasi-identiques en termes de réponse force - déplacement ne sont en fait pas équivalentes. Si un modèle en contrainte permet de reproduire des essais simples de compression d'une sphère creuse, il ne permettra pas forcément de représenter le comportement de la sphère pour d'autres sollicitations plus complexes.

Cependant, l'énergie de rupture effective est bien plus importante que la valeur prévue par le taux de restitution d'énergie renseigné (rapport 2-3). Lorsque le chemin de fissure est libre, la découpe n'est pas nette ni rectiligne. Les micro fissures sont aussi importantes. Le modèle élastique fragile sans adoucissement dissipe lui aussi trop d'énergie alors qu'une énergie dissipée proche de 0 est recherchée.

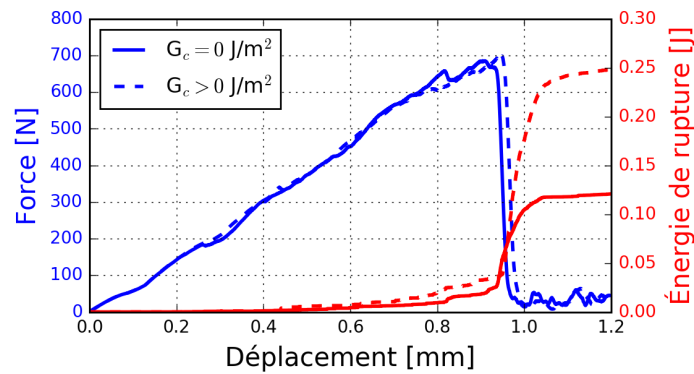


FIGURE 4.29 – Part de l'énergie de rupture lors d'un essai de compression sur sphère creuse pour deux valeur de taux de restitution d'énergie critique

4.5.4 Perspectives pour la prise en compte de la vitesse de fissuration

Le taux de restitution d'énergie critique peut être lié à la vitesse de propagation de la fissure comme cela a été montré dans le premier chapitre. On observe le plus souvent une augmentation du taux de restitution d'énergie dynamique avec la vitesse de fissuration [ZHOU et collab. \[2005\]](#). Mais l'inverse peut aussi se produire, cela a notamment été constaté avec les polymères de type PMMA renforcés aux chocs (ajout de nodules d'élastomères) [FOND et SCHIRRRER \[2001, 2013\]](#); [KOPP et collab. \[2014b\]](#). Les essais de rupture sur sphères creuses ne permettent pas d'avoir une grande plage de vitesse de propagation afin d'étudier $G_{IDc}(\dot{a})$ car la vitesse limite est de l'ordre de $0,2 c_r$. Néanmoins, de premières solutions sont proposées pour prendre en compte numériquement la variation de G_{IDc} .

La vitesse de déformation a été mesurée lors d'un essai de propagation de fissure sur plaque par la méthode de génération de phase détaillée en première partie. La vitesse de déformation moyenne est donnée suivant les trois directions principales, directions liées à l'orientation du tenseur des contraintes et non au repère global. Le calcul de l'état

de contrainte en pointe de fissure prédit néanmoins un alignement de la direction de la contrainte principale avec l'axe perpendiculaire à l'axe de propagation de la fissure en dessous d'une certaine vitesse $\dot{a}$. Les vitesses de déformations sont tracées sur la figure 4.30. Il est dans ce cas possible de lier facilement vitesse de déformation et vitesse de propagation de la fissure, les deux étant quasiment proportionnelles avant $0,6 c_r$. La vitesse de propagation ne se calcule pas aisément numériquement mais la vitesse de déformation est directement accessible. Connaissant l'évolution de G_{IDc} il devient alors possible d'introduire une nouvelle loi dans le modèle.

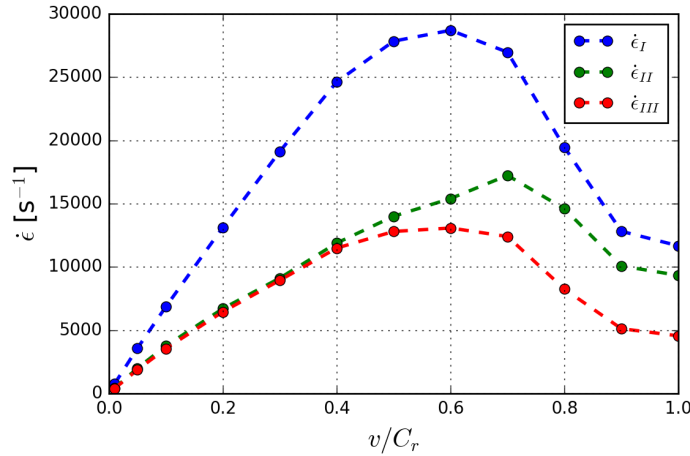


FIGURE 4.30 – Vitesse de déformation moyenne suivant la direction de la contrainte principale maximale dans la zone de rupture en fonction de la vitesse de fissuration

4.6 Conclusion

L'approche mise en place dans ce chapitre a permis d'aborder la rupture sur sphère creuse d'un point de vue énergétique. Les mesures des positions de la pointe de fissure et le calcul des vitesses de propagation ont montré que le taux de restitution d'énergie critique quasi-statique ne pouvait servir de valeur de référence pour le matériau constitutif des sphères. Afin d'estimer le taux de restitution d'énergie critique dynamique des calculs numériques ont été nécessaires, notamment pour prendre en compte les effets inertiels. La méthode des éléments discrets a montré ici sa facilité de mise en œuvre pour la modélisation d'une ouverture manuelle (génération de phase) de fissure sur plaque à différentes vitesses. Le modèle se rapproche des résultats analytiques dans le cas où un schéma de dégradation des poutres linéaire est couplé avec une longueur de zone de rupture de 1 fois le rayon moyen des éléments discrets du modèle. La DEM offre l'avantage de pouvoir générer rapidement, et sur un même modèle, un chemin de fissure complexe. Le même modèle de plaque peut être utilisé pour simuler une propagation sinusoïdale de fissure, voir la figure 4.31. Ces géométries font l'objet d'études récentes comme [CORDISCO et collab. \[2016\]](#) où des phénomènes de "stick-slip" et donc de rupture dynamique sont observés. Il est aussi possible de représenter la rupture dynamique sur des conduite de gaz (forme tubulaire) sous pression qui suit aussi une propagation sinusoïdale [FUJIMOTO et SHIOYA \[2013\]](#); [SHANNON et WELLS \[1974\]](#).

Le modèle est ensuite appliqué sur une sphère creuse afin de quantifier les effets inertiels en fonction de la vitesse de propagation de la fissure. Le facteur de correction dynamique est largement influencé par la géométrie. La structure de sphère creuse génère

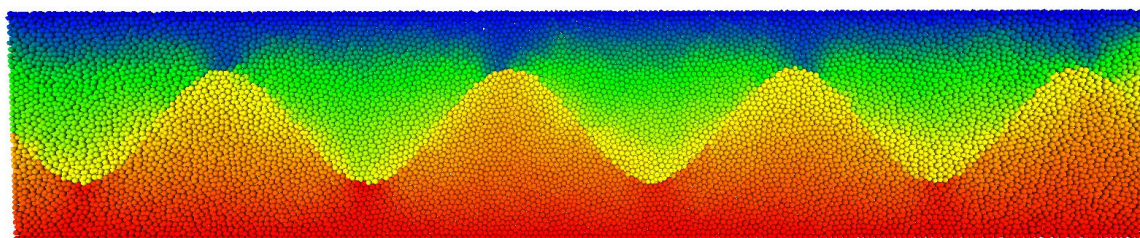


FIGURE 4.31 – Exemple de propagation de fissure sinusoïdale dans une plaque précontrainte

en effet d'importants effets inertiels. À $0,1 c_r$, seulement 30 % de l'énergie disponible est dissipée par la rupture (sphère B) contre 90 % pour la plaque. À $0,15 c_r$ ce pourcentage passe à environ 5 %. Des suppositions sont faites pour traiter le problème : mode de propagation I prépondérant, micro fissuration près-rupture non pris en compte et chemin de fissure rectiligne et net. Les résultats quantitatifs obtenus, même s'ils ne sont pas très précis, donnent une bonne indication de la valeur du taux de restitution d'énergie critique dynamique, d'environ 550 J/m^2 .

L'estimation du taux de restitution d'énergie critique dynamique du matériau constitutif par la rupture dynamique d'une sphère creuse en compression n'est néanmoins pas l'essai le plus pertinent à réaliser. Si le procédé de fabrication le permet, un essai de rupture sur plaque à l'aide d'éprouvettes SBS (Strip Band Specimen) conduirait à un mode de propagation I tout le long de la rupture KOPP et collab. [2014b]. L'amorçage manuel de la fissure d'une éprouvette SBS soumise à une précontrainte variable permettrait d'étudier l'influence de la vitesse de propagation sur le taux de restitution d'énergie. Les essais de flexion 3 points JUDON [2014] ou de Compact Tension (CT) GEHLEN et collab. [1979] peuvent être aussi envisagés.

Une deuxième piste viserait à changer la précontrainte de la sphère creuse afin de limiter les effets de cisaillement aux points de contacts de la sphère. Une uniformisation de la contrainte en traction dans la paroi pourrait être atteinte en mettant la sphère creuse sous pression (insertion d'un ballon par un trou puis mise sous pression).

Enfin, on a montré qu'il était possible de prendre en compte ce taux de restitution d'énergie dans un modèle DEM. Alors que les poutres ne se prêtent pas directement à l'implantation d'un modèle bilinéaire (comportant seulement une force de traction et un déplacement), la prise en compte de tous les déplacements d'une poutre 3D (flexion, traction et torsion) permet de construire un modèle valide. Les essais réalisés lorsqu'un chemin de fissure est déterminé à l'avance donne de très bons résultats : l'énergie de rupture du modèle est contrôlée. Dans le cas d'un chemin de fissure libre, les premiers résultats sont encourageants mais nécessitent encore des travaux d'approfondissement afin de limiter l'énergie dissipée par la rupture qui reste trop importante. L'idée de séparer l'amorçage de la propagation de fissure (diminuer la limite en contrainte après l'amorçage par exemple) est à développer.

4.7 Références

- ANDERSON, T. L. et T. ANDERSON. 2005, *Fracture mechanics : fundamentals and applications*, CRC press. 90
- ANDRÉ, D. 2012, *Modélisation par éléments discrets des phases débauchage et de doucissage de la silice*, thèse de doctorat, Bordeaux 1. 93

- AOKI, S., K. KISHIMOTO et M. SAKATA. 1987, «Finite element computation of dynamic stress intensity factor for a rapidly propagating crack using $\hat{j}$ -integral», *Computational mechanics*, vol. 2, n° 1, p. 54–62. [100](#)
- BOUDET, J., S. CILIBERTO et V. STEINBERG. 1996, «Dynamics of crack propagation in brittle materials», *Journal de Physique II*, vol. 6, n° 10, p. 1493–1516. [90](#)
- BROBERG, K. B. 1960, «The propagation of a brittle crack», *Arkiv Fysik*, vol. 18, n° 2, p. 159–192. [98](#)
- CAMBONIE, T., J. BARES, M. HATTALI, D. BONAMY, V. LAZARUS et H. AURADOU. 2015, «Effect of the porosity on the fracture surface roughness of sintered materials : From anisotropic to isotropic self-affine scaling», *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 91, n° 1. [90](#)
- CORDISCO, F. A., P. D. ZAVATTIERI, L. G. HECTOR et B. E. CARLSON. 2016, «Mode I fracture along adhesively bonded sinusoidal interfaces», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 83, p. 45–64. [114](#)
- DALMAS, D., C. GUERRA, J. SCHEIBERT et D. BONAMY. 2013, «Damage mechanisms in the dynamic fracture of nominally brittle polymers», *International Journal of Fracture*, vol. 184, n° 1-2, p. 93–111. [90](#)
- DURIEZ, J., L. SCHOLTÈS et F.-V. DONZÉ. 2016, «Micromechanics of wing crack propagation for different flaw properties», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 153, p. 378–398. [110](#)
- FAKHIMI, A. et F. WAN. 2016, «Discrete element modeling of the process zone shape in mode I fracture at peak load and in post-peak regime», *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 85, p. 119–128. [107](#)
- FOND, C. et R. SCHIRRER. 2001, «Dynamic fracture surface energy values and branching instabilities during rapid crack propagation in rubber toughened pmma», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, vol. 329, n° 3, p. 195–200. [113](#)
- FOND, C. et R. SCHIRRER. 2013, «Influence of crack speed on fracture energy in amorphous and rubber toughened amorphous polymers», *Plastics, rubber and composites*. [113](#)
- FREUND, L. et A. DOUGLAS. 1982, «The influence of inertia on elastic-plastic antiplane-shear crack growth», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 30, n° 1-2, p. 59–74. [92](#)
- FUJIMOTO, K. et T. SHIOYA. 2013, «4104-wavy crack propagation in internally pressurized glass tube», dans *ICF11, Italy 2005*. [114](#)
- GEHLEN, P., R. HOAGLAND et C. POPELAR. 1979, «A method of extracting dynamic fracture toughness from CT tests», *International Journal of Fracture*, vol. 15, n° 1, p. 69–84. [115](#)
- GUI, Y.-L., H. H. BUI, J. KODIKARA, Q.-B. ZHANG, J. ZHAO et T. RABCUK. 2016, «Modelling the dynamic failure of brittle rocks using a hybrid continuum-discrete element method with a mixed-mode cohesive fracture model», *International Journal of Impact Engineering*, vol. 87, p. 146–155. [107](#)

- HENTZ, S., L. DAUDEVILLE et F. V. DONZÉ. 2004, «Identification and validation of a discrete element model for concrete», *Journal of engineering mechanics*, vol. 130, n° 6, p. 709–719. [107](#)
- HOEK, E. 1965, «Rock fracture under static stress conditions», cahier de recherche, CSIR. [111](#)
- HSU, T. et Z. ZHAI. 1984, «A finite element algorithm for creep crack growth», *Engineering fracture mechanics*, vol. 20, n° 3, p. 521–533. [92](#), [99](#)
- JOUDON, V. 2014, *Caractérisation expérimentale de l'initiation et de la propagation de fissure dans une résine époxy sous chargement dynamique*, Thèse, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis. [107](#), [115](#)
- KANNAN, K., R. K. KUMAR et O. PRABHAKAR. 1993, «Finite element crack growth algorithm for dynamic fracture», *Computational mechanics*, vol. 12, n° 6, p. 349–359. [92](#), [93](#)
- KEEGSTRA, P., J. HEAD et C. TURNER. 1978, «Numerical methods in fracture mechanics», *University College, Swansea*, p. 634–647. [92](#), [93](#)
- KOBAYASHI, A., A. F. EMERY et S. MALL. 1976, «Dynamic-finite-element and dynamic-photoelastic analyses of two fracturing homalite-100 plates», *Experimental Mechanics*, vol. 16, n° 9, p. 321–328. [92](#)
- KOBAYASHI, A., S. MALL, Y. URABE et A. EMERY. 1977, «A numerical dynamic fracture analyses of three wedge-loaded dcb specimens.», cahier de recherche, DTIC Document. [92](#)
- KOH, S.-W., J.-K. KIM et Y.-W. MAI. 1993, «Fracture toughness and failure mechanisms in silica-filled epoxy resin composites : effects of temperature and loading rate», *Polymer*, vol. 34, n° 16, p. 3446–3455. [107](#)
- KOPP, J.-B., J. LIN, J. SCHMITTBUHL et C. FOND. 2014a, «Longitudinal dynamic fracture of polymer pipes», *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, vol. 18, n° 10, p. 1097–1105. [91](#)
- KOPP, J.-B., J. SCHMITTBUHL, O. NOEL et C. FOND. 2015, «A self-affine geometrical model of dynamic rt-pmma fractures : implications for fracture energy measurements», *International Journal of Fracture*, p. 1–12. [90](#)
- KOPP, J.-B., J. SCHMITTBUHL, O. NOEL, J. LIN et C. FOND. 2014b, «Fluctuations of the dynamic fracture energy values related to the amount of created fracture surface», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 126, p. 178–189. [90](#), [113](#), [115](#)
- KOSTYLEV, V. et V. MARGOLIN. 1990, «Fem solution of a dynamic elastoplastic problem of fracture mechanics. 2. supercritical crack propagation», *Strength of Materials*, vol. 22, n° 7, p. 943–953. [92](#), [99](#)
- LIU, X., R. DUDDU et H. WAISMAN. 2012, «Discrete damage zone model for fracture initiation and propagation», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 92, p. 1–18. [108](#)
- MALLUCK, J. et W. KING. 1980, «Fast fracture simulated by conventional finite elements : a comparison of two energy-release algorithms», dans *Crack Arrest Methodology and Applications*, ASTM International. [92](#)

- NISHIOKA, T. 1995, «Recent developments in computational dynamic fracture mechanics», *Dynamic fracture mechanics*(A 96-14151 02-39), Southampton, United Kingdom and Billerica, MA, Computational Mechanics Publications, 1995,, p. 1–60. [92](#)
- NISHIOKA, T. 1997, «Computational dynamic fracture mechanics», *International Journal of Fracture*, vol. 86, n° 1-2, p. 127–159. [92](#)
- NISHIOKA, T. et S. ATLURI. 1982, «Numerical analysis of dynamic crack propagation : generation and prediction studies», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 16, n° 3, p. 303–332. [92](#)
- NISHIOKA, T. et S. N. ATLURI. 1980, «Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies, by moving singular elements—part 1 : Formulation», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, n° 3, p. 570–576. [92](#), [93](#)
- NISHIOKA, T. et S. ATLURIT. 1984, «Path-independent integral and moving isoparametric elements for dynamic crack propagation.», *AIAA journal*, vol. 22, n° 3, p. 409–414. [92](#)
- PICHUGIN, A. 2008, «Approximation of the rayleigh wave speed», . [89](#)
- PLESHA, M. E. 2006, «Discrete element method for modeling penetration», cahier de recherche, DTIC Document. [107](#)
- RAGOSTA, G., M. ABBATE, P. MUSTO, G. SCARINZI et L. MASCIA. 2005, «Epoxy-silica particulate nanocomposites : chemical interactions, reinforcement and fracture toughness», *Polymer*, vol. 46, n° 23, p. 10 506–10 516. [107](#)
- SCHMIDT, R. A. et collab.. 1980, «A microcrack model and its significance to hydraulic fracturing and fracture toughness testing», dans *The 21st US Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*, American Rock Mechanics Association. [111](#)
- SHANNON, R. et A. WELLS. 1974, «Brittle crack propagation in gas filled pipelines—a model study using thin walled unplasticised pvc pipe», *International Journal of Fracture*, vol. 10, n° 4, p. 471–486. [114](#)
- TAVAREZ, F. A. et M. E. PLESHA. 2007, «Discrete element method for modelling solid and particulate materials», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, n° 4, p. 379–404. [107](#), [108](#)
- YAGAWA, G., Y. SAKAI et Y. ANDO. 1977, «Analysis of a rapidly propagating crack using finite elements», dans *Fast Fracture and Crack Arrest*, ASTM International. [92](#)
- YOFFE, E. H. 1951, «The movinf griffith crack», *Philosophical Magazine*. [103](#)
- ZHOU, F., J.-F. MOLINARI et T. SHIOYA. 2005, «A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, n° 9, p. 1383–1410. [113](#)

Chapitre 5

Modélisation multi-sphères

« *It is harder to crack prejudice than an atom.* »

Albert Einstein

Sommaire

5.1 Introduction	120
5.2 Modèle micro-macro	120
5.2.1 Exemple d'application : colonne de sphères creuses	120
5.2.2 Limites	122
5.3 Vers un modèle macroscopique	123
5.3.1 Méthodologie	123
5.3.2 Sollicitations dans un assemblage de sphères creuses	124
5.3.3 Essais numériques et expérimentaux	129
5.4 Conclusion	133
5.5 Références	133

5.1 Introduction

Les sphères creuses ATECA étudiées dans ces travaux de recherche peuvent être utilisées en grand nombre dans le cas du bouclier de choc à l'oiseau. Le modèle numérique DEM associé aux essais expérimentaux sur une sphère creuse permet d'étudier l'influence de la vitesse de sollicitation (d'un régime quasi-statique à dynamique à 175 m.s^{-1}) et des paramètres géométriques (épaisseur des sphères creuses). Ce modèle ne prend cependant pas en compte l'arrangement entre les sphères dans un amas, le frottement entre les sphères, les contacts multiples ou le rôle des débris (fragments de sphères) dans la reprise des efforts.

Le développement d'un modèle appelé macroscopique, prenant en compte plusieurs sphères creuses doit être envisagé. Deux possibilités sont offertes et dépendent du nombre de sphères creuses que l'on souhaite modéliser. Dans le cas d'un nombre réduit de sphères creuses, un modèle *micro-macro* suffit, voir partie 5.2. Il consiste simplement à introduire plusieurs sphères creuses DEM développées précédemment, dans un même calcul. Lorsque le nombre de sphères creuses est trop important, plusieurs centaines ou milliers, l'implantation d'un nouveau modèle, macroscopique, devient obligatoire. L'idée est ici de représenter chaque sphère creuse par un seul élément discret (voir partie 5.3).

5.2 Modèle micro-macro

5.2.1 Exemple d'application : colonne de sphères creuses

Dans le cas du modèle micro-macro, il est possible de s'intéresser à un arrangement de sphères creuses en colonne. Ceci pourrait être comparable à la configuration de type sphères creuses intégrées dans un nid d'abeilles. Les sphères creuses ont pour rôle d'augmenter l'énergie absorbée de la structure initiale. Ce type de solution a déjà été étudiée dans le cas de tubes (AHMAD et THAMBIRATNAM [2009]; HARTE et collab. [2000]; KAVI et collab. [2006]) ou de nida (WANG et collab. [1994]) remplis de mousse. Le cas de sphères métalliques intégrées dans un tube métallique et soumises à une compression quasi-statique a été récemment traité par LUO et collab. [2015]. Les sphères creuses présentent l'intérêt de pouvoir être facilement insérées dans une structure creuse.

Des essais expérimentaux ont été effectués sur ce type de structure et ont été présentés dans le deuxième chapitre. Cette possibilité est présentée sur la figure 5.1, la cellule est modélisée par une paroi cylindrique rigide (non visible sur la figure).

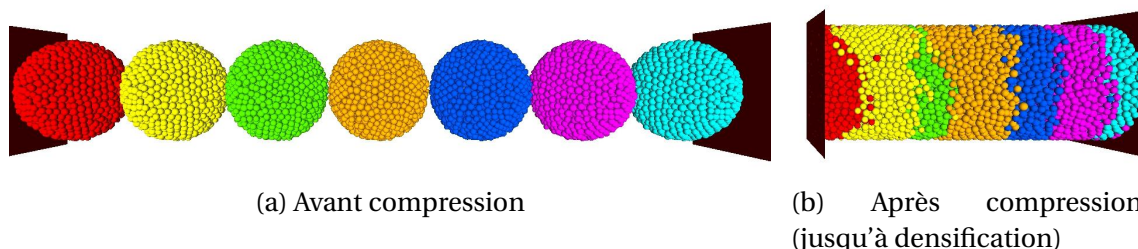


FIGURE 5.1 – Modélisation micro-macro de la compression de 7 sphères creuses ($r_t = 0,3$) dans une cellule cylindrique

Les premiers calculs sont réalisés sur des sphères creuses de 40 mm de diamètre extérieur et d'épaisseur 5,2 mm (soit un rapport r_t d'environ 0,3). Cette géométrie permet de construire des modèles avec un faible nombre d'éléments (≈ 1400) conduisant à de

faibles temps de calculs. La cellule a un diamètre de 44 mm (lors de la fabrication de ce type de structure, le diamètre des cellules est légèrement supérieure au diamètre des sphères afin de faciliter leur incorporation). Les essais numériques sont réalisés à une vitesse faible afin de limiter les effets dynamiques. Pour ces premiers résultats, un modèle de rupture non dépendant de la vitesse de sollicitation est utilisé.

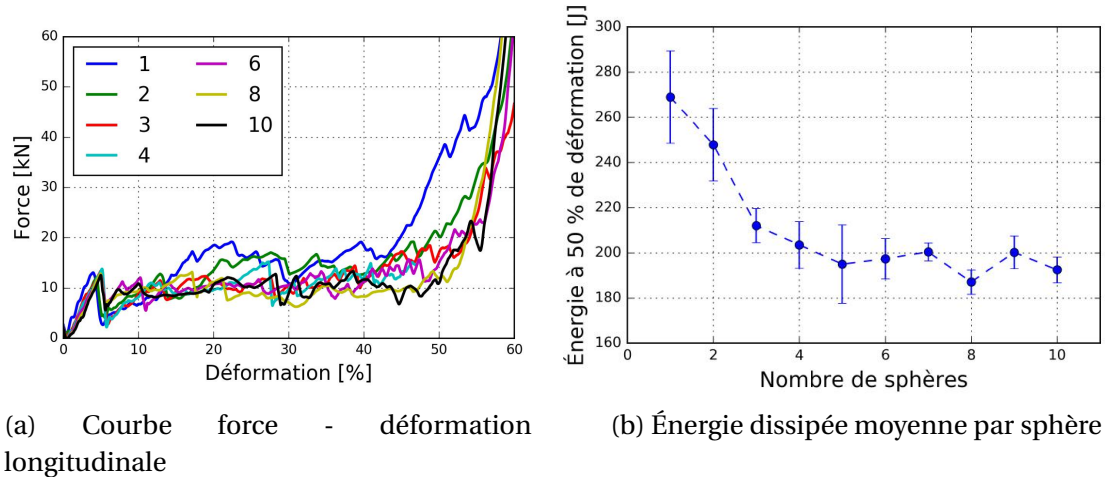


FIGURE 5.2 – Étude de l'influence du nombre de sphères creuses ($r_t = 0,3$) lors de la compression dans une cellule cylindrique

Cette modélisation n'a pour l'instant pas été validée expérimentalement mais semble cohérente. En effet, le modèle présente peu de nouveautés et il est possible de s'appuyer sur les résultats précédemment validés sur une sphère creuse. Lors des essais réalisés sur un coupon de bouclier de nid d'abeilles remplis de sphères creuses, on compte une dizaine de sphères dans l'épaisseur. On observe sur la figure 5.2, l'influence du nombre de sphères sur la force de compression et sur l'énergie dissipée. Plusieurs essais sont réalisés avec le même nombre de sphère mais avec un arrangement des éléments au sein de chaque sphère différent afin de mesurer une dispersion des résultats. La courbe 5.2a définit la force en fonction de la "déformation longitudinale". Le cas d'une seule sphère se démarque des autres résultats par une force en compression lors de la phase de plateau et de densification plus importante. Il ne semble pas y avoir de grandes différences lorsque le calcul est effectué avec un nombre de sphères variant de 2 à 10. L'énergie dissipée par sphère (élastique, rupture, frottement, cinétique) à 50 % de déformation, jusqu'à densification est plus élevée pour un faible nombre de sphères (1, 2 et 3) mais semble se stabiliser entre 4 et 10 sphères (figure 5.2b). La rupture des sphères creuses dans la cellule est progressive : les sphères se fissurent en deux (similaire à ce qui est observé en compression uni-axiale sur une sphère creuse) les unes à la suite des autres. Les sphères creuses s'indentent (figure 5.3b) puis on observe une multi fissuration des principaux fragments avant la densification. L'indentation progressive des sphères (nombre de sphères > 4) demande une force moins importante que la rupture des parois d'une ou de deux sphères en compression uni-axiale confinée.

Il est donc possible de montrer que 4 à 5 sphères suffisent pour reproduire le comportement mécanique d'écrasement d'une multitude de sphères creuses dans une cellule. On propose de valider cette affirmation sur des sphères creuses de type B. Les sphères de diamètre extérieur 31,7 mm et d'épaisseur 1,2 mm ($r_t = 0,08$) sont incorporées dans une cellule cylindrique de 36 mm de diamètre, figure 5.3. La figure 5.4 présente les résultats des courbes force - déformation et l'énergie dissipée par sphères des différents

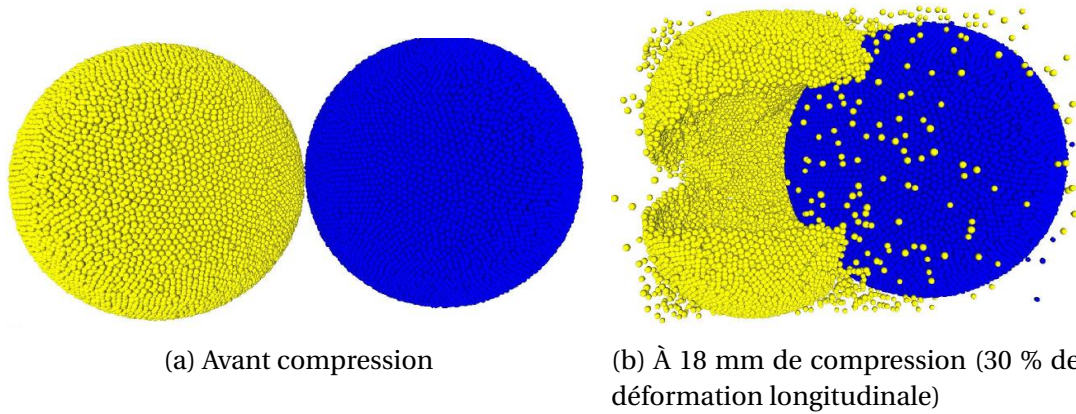


FIGURE 5.3 – Modélisation micro-macro de la compression de 2 sphères creuses de type B ($r_t = 0,08$) dans une cellule cylindrique

arrangements. Ces résultats confirment ce qui a été trouvé précédemment, à partir de 4 sphères creuses dans l'assemblage, le comportement mécanique et l'énergie dissipée par sphère semble converger.

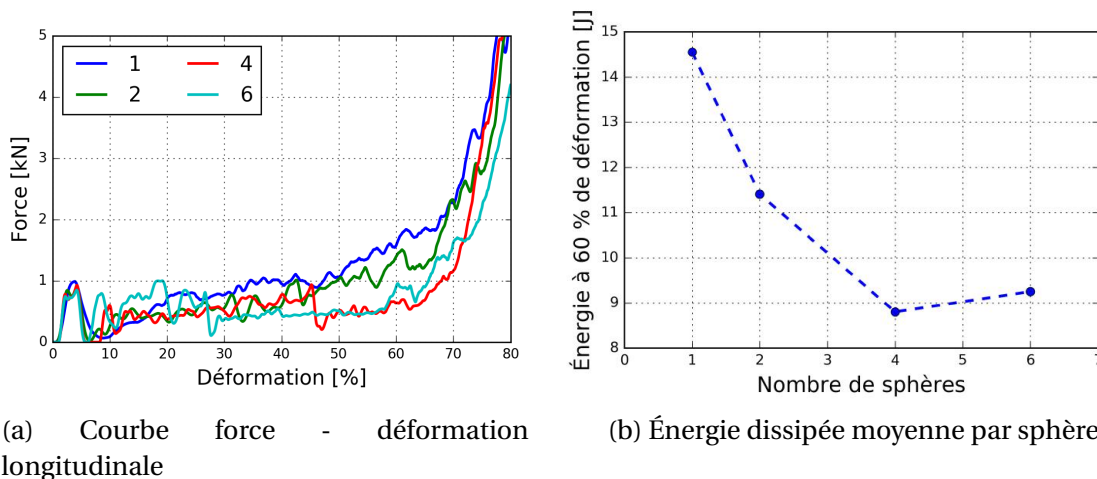


FIGURE 5.4 – Étude de l'influence du nombre de sphères creuses de type B ($r_t = 0,08$) lors de la compression dans une cellule cylindrique

5.2.2 Limites

Des travaux numériques DEM ont été menés en suivant la même méthodologie sur des matériaux granulaires (cailloux, grains de sable). 400 CHENG et collab. [2003]; ROBERTSON et BOLTON [2001] à 1000 WANG et YAN [2011] grains composés eux mêmes d'une cinquantaine d'éléments discrets ont été intégrés. Si 50 éléments suffisent à modéliser un grain de sable (massif et de forme irrégulière), il n'en n'est pas de même pour les sphères creuses. Avec un nombre d'éléments discrets variant de 10 000 à 80 000, les ressources informatiques disponibles ne sont pas suffisantes pour réaliser des calculs contenant plus d'une dizaine de sphères creuses. Il n'est donc pas possible d'atteindre un nombre suffisant de sphères permettant de représenter un volume élémentaire d'un arrangement aléatoire compact (une centaine de sphères au moins). De plus, si l'on souhaite par exemple modéliser un bouclier composé uniquement de sphères creuses,

le nombre total de sphères creuses est bien plus important. Pour un bouclier de 1 m de côtés et 0,1 m d'épaisseur (ordre de grandeur du bouclier actuel), un remplissage compact (63 %) conduit à un nombre de sphères creuses d'environ 4400, 120 000 et 960 000 respectivement pour des sphères creuses de 30, 10 et 5 mm de diamètre. L'objectif de la partie suivante est de proposer une méthodologie conduisant à la modélisation d'un grand nombre de sphères creuses.

5.3 Vers un modèle macroscopique

5.3.1 Méthodologie

Le modèle macroscopique se base une modélisation multi-échelles : on intègre le comportement mécanique d'une sphère creuse dans un lien (poutre, contact) entre deux éléments discrets ou dans l'élément discret lui-même. Il est alors possible de représenter une sphère creuse par un seul élément discret. La première étape est donc de caractériser l'interaction mécanique de plusieurs sphères en contact.

Cette méthodologie a été suivie avec succès dans le cas de sphères creuses métalliques [FALLET \[2008\]](#); [LHUISSIER \[2009\]](#). Un modèle élément fini de deux demi-sphères en contact reliées par un joint de colle est construit. Les sphères sont sollicitées en compression, traction, cisaillement, flexion et torsion afin de calculer une relation liant les paramètres géométriques (diamètre, épaisseur des sphères creuses et taille du joint de colle) à la rigidité suivant la déformation considérée. Le modèle se limite cependant à de faibles déformations, sans prendre en compte la rupture du matériau.

[HARTHONG et collab. \[2009\]](#) conduisent une analyse multi-échelle dans le cas de la compaction de poudres. Une sphère (modèle microscopique) est maillée en éléments finis puis sollicitée. Les essais de compression simple, compression confinée et compression hydrostatique donnent des indications pour la construction d'un modèle DEM macroscopique. Les grands déformations sont dans ce cas étudiées mais le modèle macroscopique n'est pas présenté.

Des travaux ont aussi été conduits sur des grains fragiles représentés par un élément discret. Le tenseur viriel des contraintes est calculé sur chaque grain. Les critères de rupture choisis prennent en compte les contraintes principales, voir la figure 5.5. Des essais expérimentaux ou numériques sur un grain [TSOUNGUI et collab. \[1999\]](#) permettent d'obtenir la valeur de la limite à rupture du matériau. Lors de la rupture du grain, l'élément discret se fragmente en plusieurs autres éléments discrets de taille inférieure. La masse est conservée et les éléments discrets jouant le rôle de fragments peuvent entrer en contact avec les éléments non rompus ([BRUCHMÜLLER et collab. \[2011\]](#); [GUESSASMA et collab. \[2009\]](#); [MCDOWELL et DE BONO \[2013\]](#); [TSOUNGUI et collab. \[1999\]](#)).

L'état de contrainte dans un élément discret peut être défini soit par son degré de triaxialité η , calculé par :

$$\eta = \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}^{VM}} = \frac{\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} \quad (5.1)$$

avec :

- σ_h la contrainte hydrostatique
- σ_{eq}^{VM} la contrainte équivalent de Von Mises
- σ_1, σ_2 et σ_3 les contraintes principales avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

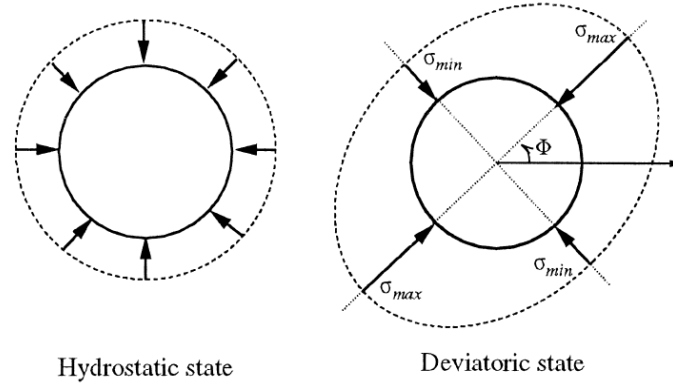


FIGURE 5.5 – Modèle de rupture d'un grain basé sur le tenseur des contraintes TSOUNGUI et collab. [1999]

Soit par l'équation de LEIRIS [1968], qui sera utilisée dans la suite de l'étude :

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sigma_1} \quad (5.2)$$

Cette définition permet comme la première de caractériser l'état de contrainte dans un élément avec $\eta = 0$ pour du cisaillement pur et $\eta = 0,33$ pour de la traction / compression uni-axiale. Une pression hydrostatique induit $\eta = 1$ (contre $\eta \rightarrow \infty$ pour la première définition). Ce degré de triaxialité est préféré car il est directement proportionnel à la contrainte octaédrique utilisée pour la rupture de matériaux fragiles MCDOWELL et DE BONO [2013]. Le degré de triaxialité peut être relié au degré d'anisotropie dans un matériau granulaire.

Les étapes de la modélisation multi-échelles sont présentées sur la figure 5.6. Premièrement, des essais de compression sur un assemblage de milliers de sphères rigides sont réalisés afin d'étudier l'évolution de l'état de contrainte sur chaque élément (1). Des essais numériques, éventuellement validés par des essais expérimentaux, sont conduits sur une sphère creuse (2). Les sollicitations exercées sur cette sphère creuse sont proches de celles observées pour une sphère dans un assemblage. Une analyse paramétrique est menée et permet d'obtenir le comportement de la sphère creuse (limite à rupture en contrainte ou énergie, allure de la courbe force déplacement, observation de la fragmentation) suivant les paramètres géométriques et les conditions aux limites (3). Une loi de comportement au contact et prenant en compte la rupture des éléments permet de modéliser un assemblage de sphères creuses en compression. La phase élastique, le plateau de compression (rupture progressive des sphères) et la densification (reprise d'efforts par les fragments) sont modélisés (4).

Les deux premières étapes sont présentées dans la suite de ce chapitre.

5.3.2 Sollicitations dans un assemblage de sphères creuses

CAO [2011] montre que l'orientation de la direction des forces de contact au sein d'un ensemble d'éléments discrets reste similaire pour des éléments rigides et déformables (les éléments sont maillés par des éléments finis) en compression bi-axiale et en cisaillement. Il paraît donc raisonnable de supposer que l'état de contrainte mesuré sur les éléments discrets rigides soit le même que sur des sphères creuses déformables avant leur rupture.

Plusieurs résultats sont recherchés : l'orientation des contacts, l'intensité des forces de contact (les deux exprimés par le degré de triaxialité ou le degré d'anisotropie qui

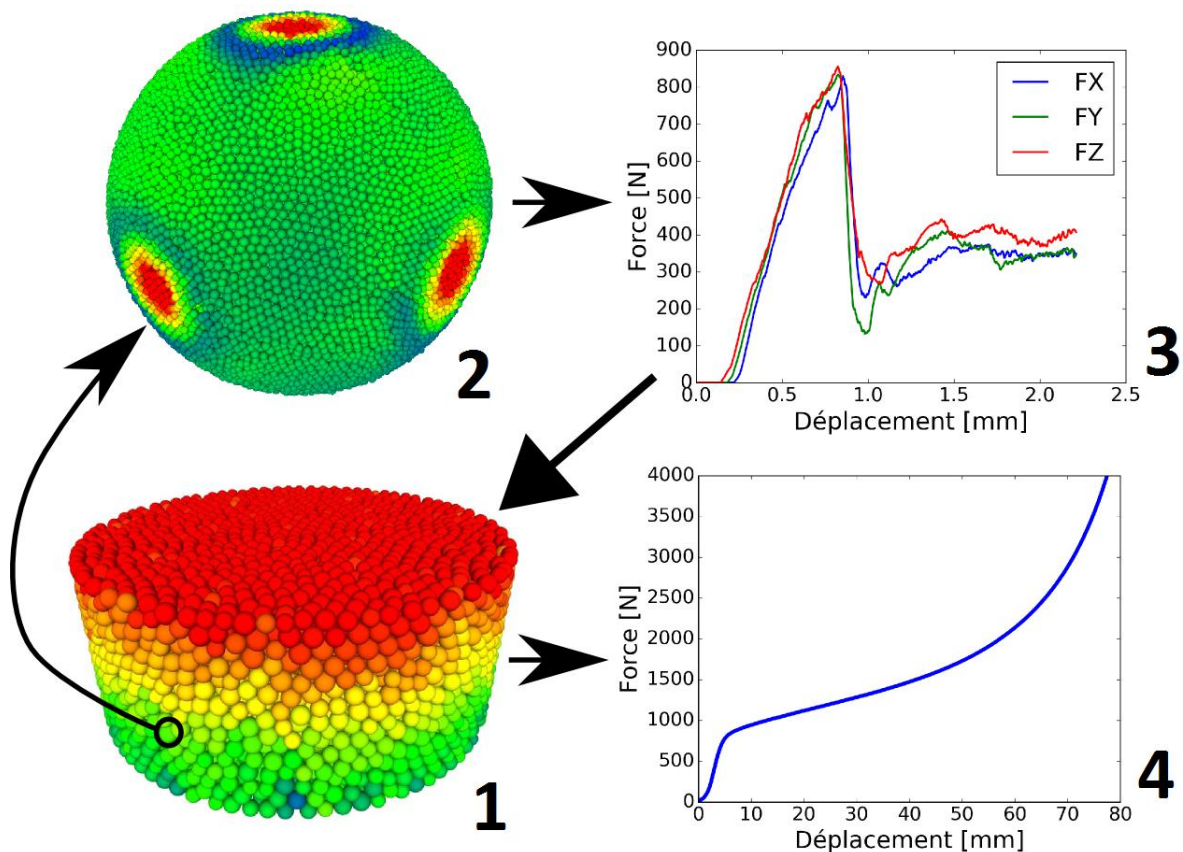


FIGURE 5.6 – Méthodologie de modélisation multi-échelle pour la compression de sphères creuses

lie orientation et intensité des forces) et l'évolution du nombre de coordination. Les études à ce sujet portent sur différentes applications : étude de l'arrangement dans un milieu granulaire 2D sphérique [ROTHENBURG et BATHURST \[1989\]](#) ou polygonales [HOSSEININIA et MIRGHASEMI \[2006\]](#), compaction de poudre 3D [MARTIN et BOUVARD \[2003\]](#) et frittage [MARTIN \[2014\]](#). Ces études mettent notamment en évidence l'influence du frottement entre les éléments et le type de sollicitation (compression ou cisaillement) macroscopique sur l'orientation et les forces au contact.

Dans le cas du bouclier, on considère que la sollicitation en compression uni-axiale reproduit au mieux la sollicitation induite par un impact. Des essais de compression sur des éléments discrets en contact sont menés sur un cylindre de 1 m de diamètre et 1 m de hauteur. Les dimensions sont choisies de sorte à avoir un nombre suffisant d'éléments dans toutes les directions. Les éléments ont un diamètre de 36 mm et sont au nombre de 10 000. Les éléments sont retenus par une paroi cylindrique et deux plateaux de chaque côté, dont un mobile. Dans un premier temps, l'étude porte sur l'arrangement des éléments lors d'une compression uni-axiale en régime quasi-statique. La vitesse de compression est choisie suffisamment faible pour limiter les effets dynamiques. Une dissipation d'énergie par amortissement au contact (coefficient de rebond inférieur à 1) est introduite pour stabiliser le calcul. Deux coefficients de frottement sont utilisés, 0 et 0,3. Le déplacement maximum imposé est de 200 mm soit 20 % de déformation longitudinale. Il est fort probable qu'à 20 % de déformation longitudinale, une partie des sphères ai rompu et que ce modèle ne soit pas valide pour une si grande déformation. Le modèle permet cependant de donner une tendance sur une grande plage de déformation dans le cas où les sphères creuses présentent une limite à rupture plus élevée.

La compression est représentée sur la figure 5.7 à 3 taux de déformation : 0 %, 10 % et

20 %.

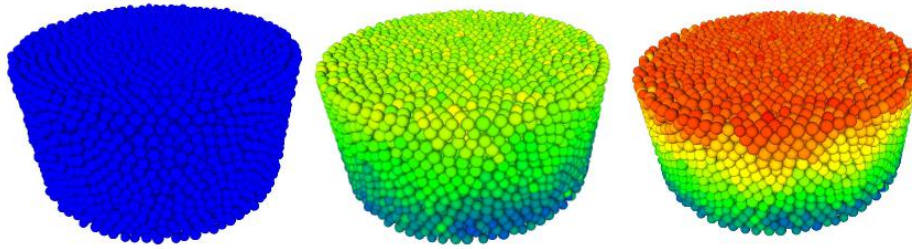


FIGURE 5.7 – Essai de compression numérique sur un amas de sphères (10 000) contenues dans un cylindre. De gauche à droite : 0 %, 10 % et 20 % de déformation longitudinale

L'évolution de la force exercée sur le plateau mobile est présentée sur la figure 5.8a. Après une première phase d'arrangement des éléments (force proche de 0 N) entre 0 et 40 mm de déplacement, la force augmente quasi linéairement. Le frottement a une grande influence puisqu'il double la force de compression à partir de 50 mm de déplacement.

La figure 5.8b montre l'évolution du nombre de coordination moyen par élément. Proche de 6 avant compression, il diminue fortement au début (les éléments s'entre-choc, perdant momentanément leur contact) avant de remonter très vite autour de 6 vers 50 mm (stabilisation des éléments). L'augmentation est ensuite moins importante. Le coefficient de frottement a une légère influence. Les éléments pouvant se déplacer plus facilement, le nombre de coordination moyen est un peu plus élevé si il n'y a pas de frottement.

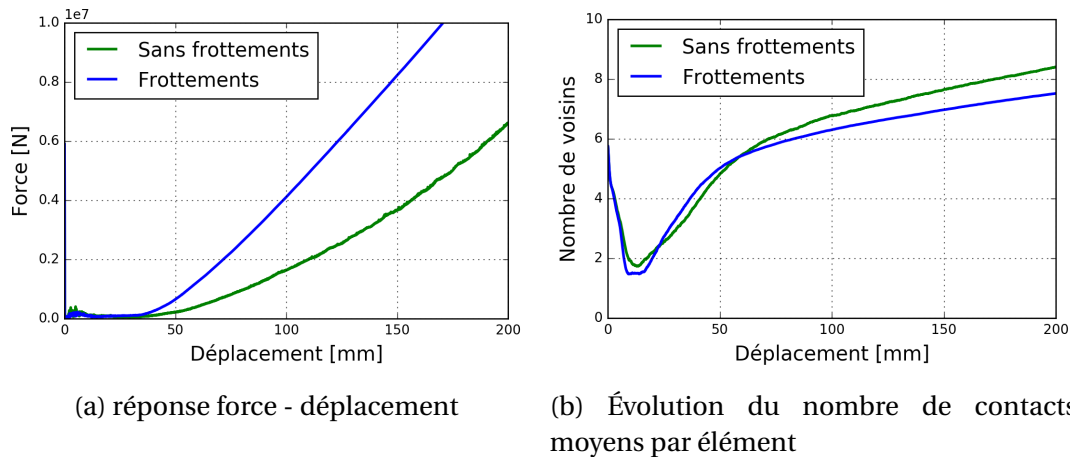


FIGURE 5.8 – Résultat de l'essai de compression numérique sur un amas de 10 000 éléments (diamètre moyen de 36 mm) contenus dans un cylindre (diamètre 1 m, hauteur 1 m). Étude de l'influence du frottement entre les éléments.

La répartition des directions des contacts est représentée par une géode, figure 5.9 dont la construction a été implémentée sur *Granoo* par ANDRÉ [2012]. Ce solide comporte 320 faces de même taille. La direction des contacts de tous les éléments discrets est mesurée. Chaque direction de contact est associée à une face de la géode. La taille des faces de la géode dépend du nombre de contacts sur chaque face. Cet outil offre des résultats plus précis par rapport à la seule utilisation du tenseur viriel. En effet, une égalité des trois contraintes principales ne signifie pas forcément que l'élément subit une contrainte de pression hydrostatique (au sens de pression dans un fluide).

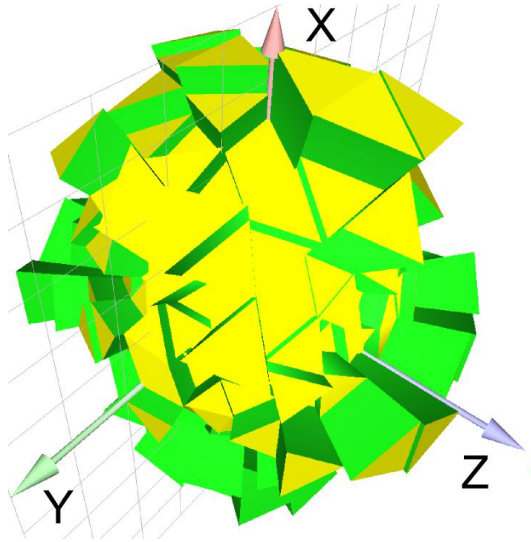


FIGURE 5.9 – Histogramme 3D de l'orientation des contacts sur un amas de 10 000 (diamètre moyen de 36 mm) contenus dans un cylindre (diamètre 1 m, hauteur 1 m), avant compression

Avant compression, l'orientation des contacts est relativement homogène, figure 5.9 (avec $\vec{x}$ l'axe de compression). La géode est ensuite reconstruite à 10 % de déformation dans le cas du modèle sans et avec frottement, figure 5.10. Dans le cas du modèle sans frottement, la majorité des contacts (en nombre, non en intensité) se trouve dans le plan $x0y$. Avec la prise en compte du frottement, les contacts se trouvent en majorité suivant l'axe de compression.

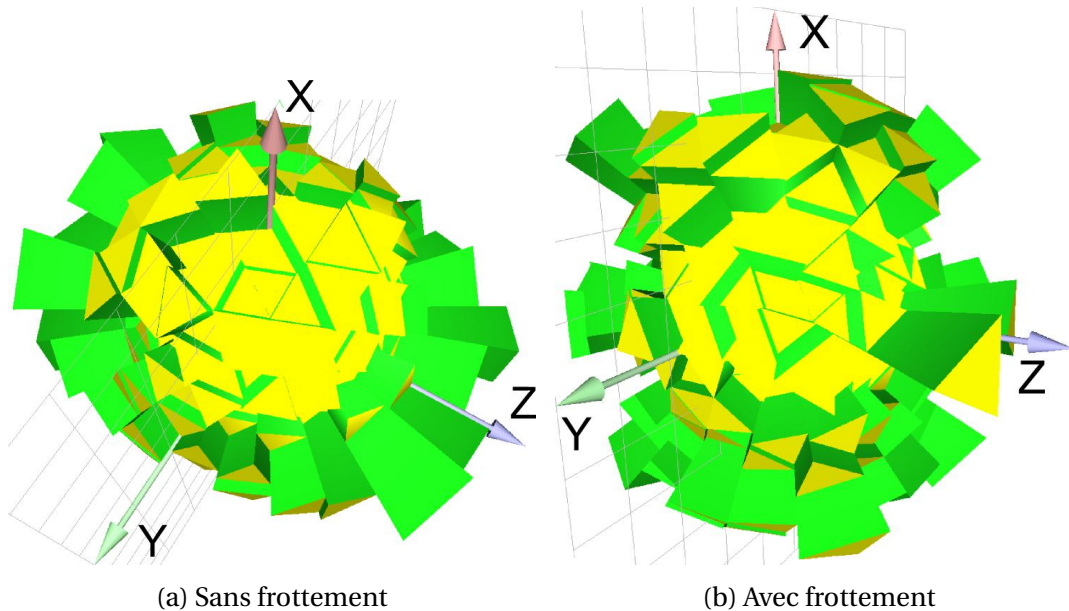


FIGURE 5.10 – Histogramme 3D de l'orientation des contacts sur un amas de 10 000 éléments (diamètre moyen de 36 mm) contenus dans un cylindre (diamètre 1 m, hauteur 1 m) à 10 % de déformation longitudinale

Ce résultat se retrouve lors de l'analyse de l'anisotropie moyenne par élément. Sur la figure 5.11 est tracée l'évolution des forces de contact moyennes suivant les 3 axes principaux. Dans les deux modèles, la force suivant l'axe de compression est la plus importante. Les forces radiales suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont fortement influencées par la présence du frottement. Un glissement parfait autorise un arrangement favorisant une sollicitation

homogène tout autour de l'élément. Les forces radiales sont importantes et proches de la force axiale, entre 0,8 à 0,9 fois la force axiale, soit un degré de triaxialité moyen d'environ 0,9. Lorsque le frottement est activé, les éléments se retrouvent bloqués dans une position. Les efforts sont moins répartis sur les éléments. Les forces radiales sont égales à 0,5 à 0,6 fois la force axiale soit un degré de triaxialité moyen d'environ 0,7.

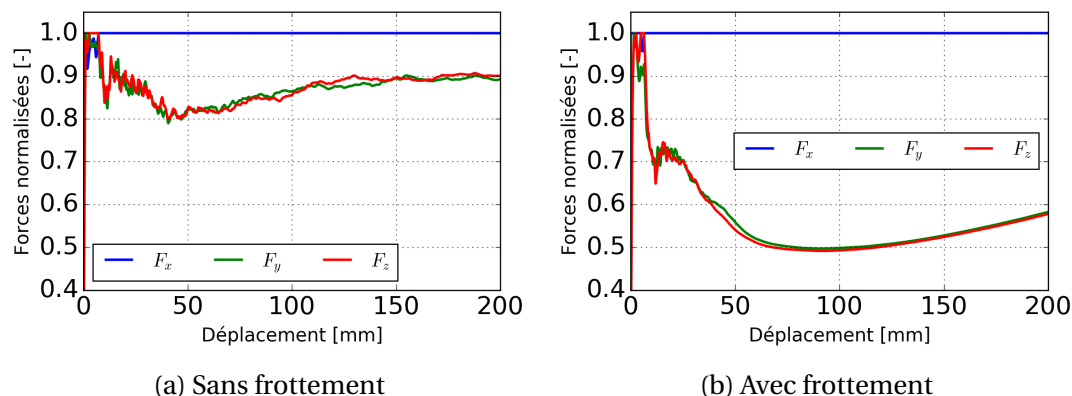


FIGURE 5.11 – Évolution de la force de contact moyenne sur un élément suivant les 3 directions $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ dans un amas de 10 000 éléments (diamètre moyen de 36 mm) contenus dans un cylindre (diamètre 1 m, hauteur 1 m) à 10 % de déformation longitudinale

Les contacts ne sont pas parfaits dans le cas d'un assemblage de sphères creuses. En effet, il y a du frottement au niveau des contacts. La valeur précise du coefficient de frottement n'étant pas connue, les résultats présentés donnent surtout des tendances. Pour une déformation longitudinale de 5 à 10 %, un assemblage de sphères creuses présente un nombre de coordination de 5-6 et un degré de triaxialité d'environ 0,7. Les éléments sur les bords de la géométrie, en contact avec les plateaux ou le cylindre, ont un nombre de coordination et un degré de triaxialité inférieurs.

À partir de ces informations, il est possible de construire des supports numériques ou expérimentaux permettant de réaliser ces chargements. La figure 5.12 présente ainsi 3 supports qui conduisent à un degré de triaxialité différent ($\eta = 0,66 - 0,8 - 1$) sur la sphère creuse avec 6 points de contacts. Il est possible de construire numériquement une infinité de modèles en faisant varier le degré de triaxialité, le nombre de points de contact, la taille des éléments (pour prendre en compte la dispersion des rayons des éléments)... Afin d'examiner seulement le comportement de la sphère creuse et non des supports, les supports sont rigides et ne peuvent donc pas se déformer.

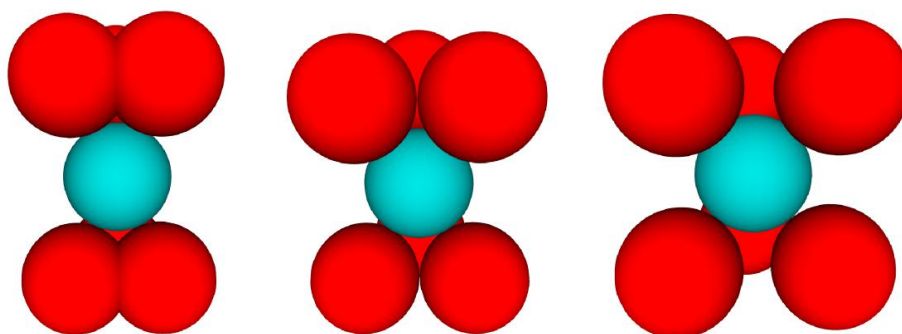


FIGURE 5.12 – Exemples de géométries numériques de compression multi-contacts. La sphère bleue représente la sphère creuse sollicitée. De gauche à droite : $\eta = 0,66 - 0,8 - 1$

Un type de chargement est étudié expérimentalement : l'essai *pyramidal*. L'avantage

de ce type d'essai est qu'il permet de s'affranchir de machines de compression multi-axiales puisque la compression uni-axiale induit des forces radiales sur la sphère creuse. Il correspond au support du milieu sur la figure 5.12. Il permet de solliciter une sphère creuse sous un état de contrainte proche de celui observé dans un arrangement de sphères $\eta = 0,8$. Les sphères du support sont séparées entre elles par une distance égale à deux fois leur rayon. L'angle des forces agissant sur la sphère creuse est d'environ 38° par rapport à l'axe de compression.

L'essai pyramidal est illustré sur la figure 5.13. Les sphères du support sont à l'origine des sphères creuses de même diamètre que la sphère creuse sollicitée. Elles ont été coupées en deux, remplies de résine puis polymérisées afin d'assurer leur intégrité pendant les essais. Aucune dégradation n'a été observée après les essais. Ces demi-sphères sont positionnées dans une plaque (80 mm de côtés et 6 mm d'épaisseur) en aluminium où des alésages du diamètre des sphères ont été effectués afin de maintenir les demi-sphères en place.

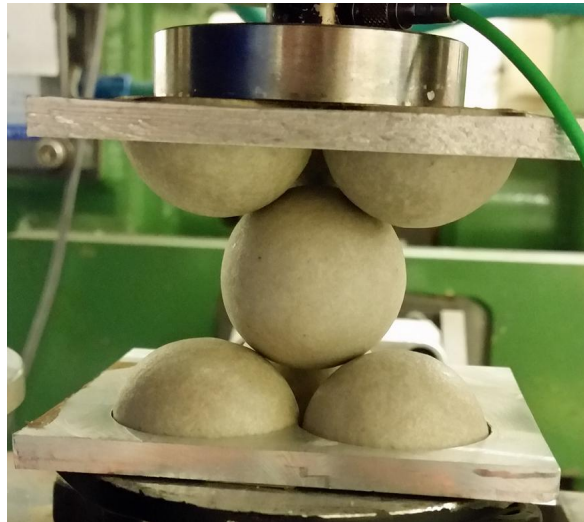


FIGURE 5.13 – Montage de l'essai pyramidal ($\eta = 0,8$) sur la roue inertielle

5.3.3 Essais numériques et expérimentaux

La mise en œuvre des essais expérimentaux reste la même que présentée dans le troisième chapitre. Les essais quasi-statiques sont réalisés sur une machine de compression classique (Zwick Roell Z250 à $v = 5 \text{ mm.min}^{-1}$) et les essais dynamiques sur roue inertielle ($v \approx 2 \text{ m.s}^{-1}$). La force est mesurée par un capteur de force 10 kN en quasi-statique et 20 kN (Kistler 9101A) en dynamique. Le déplacement est mesuré par la position de la traverse (régime quasi-statique) ou par capteur laser (régime dynamique). Une caméra rapide (Photron SA-5, réglée à 75 000 images par seconde) permet de suivre l'écrasement de la sphère sous compression dynamique. Le déplacement maximum en compression a été stoppé lors de la première rupture pour certains essais afin d'observer l'amorçage des premières fissures. Dans les autres cas, le déplacement maximum est fixé à 15 mm. Ce déplacement, plus important que dans le cas d'une sphère creuse en compression uni-axiale simple, permet d'atteindre une vitesse moyenne d'environ 2 m.s^{-1} sur la roue inertielle. Seules les sphères de type B sont testées : diamètre moyen de 30 mm, épaisseur de $1,2 \pm 0,06 \text{ mm}$, rapport $r_t = 0,08$ et masse moyenne de $6,30 \pm 0,3 \text{ g}$.

Les modèles numériques DEM se basent sur un critère en contrainte seule, étudié dans le troisième chapitre. En régime de sollicitation dynamique, le critère de rupture est dépendant de la vitesse de déformation. En régime de sollicitation quasi-statique, la vitesse de sollicitation est choisie afin de ne pas induire d'effets inertiels. La valeur du critère de rupture est fixée et n'est donc pas dépendante de la vitesse de déformation. Un coefficient de frottement de 0,3 est introduit pour le contact entre le support et la sphère creuse.

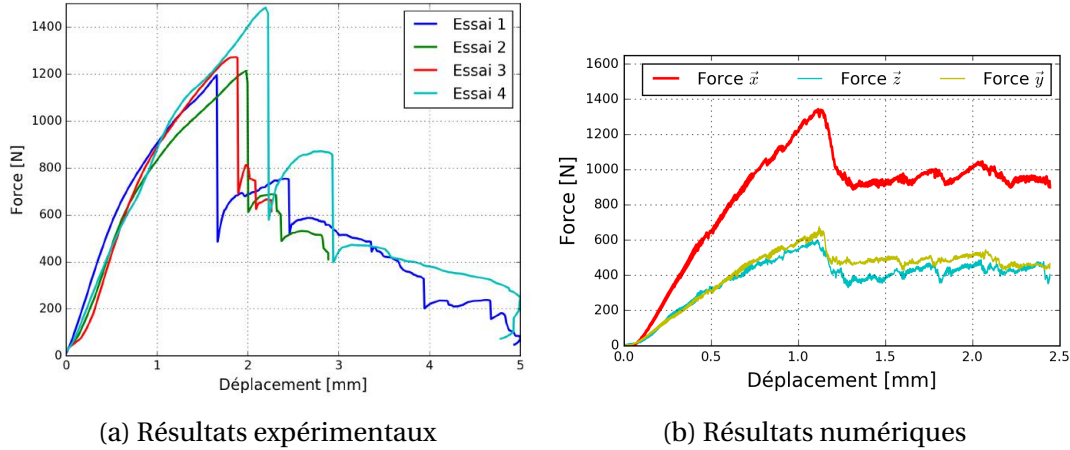


FIGURE 5.14 – Réponse force - déplacement d'une sphère creuse de type B sous compression quasi-statique pyramidale ($\eta = 0,8$)

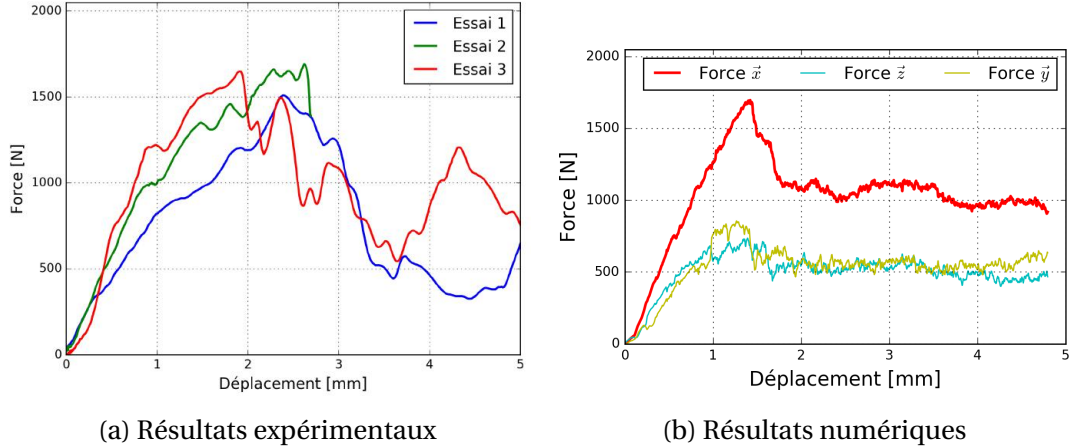


FIGURE 5.15 – Réponse force - déplacement d'une sphère creuse de type B sous compression dynamique ($\nu \approx 2 \text{ m.s}^{-1}$) pyramidale ($\eta = 0,8$)

Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés sur les figures 5.14 en quasi-statique et sur les figures 5.15 en dynamique.

En quasi-statique, le comportement peut être décrit en 3 phases. La première phase, linéaire dans le cas de l'essai de compression uni-axiale, comporte ici un adoucissement avant la première rupture. Ce phénomène peut s'expliquer par la légère indentation du support sur la sphère creuse. Comme on peut le voir sur la figure 5.16a, avant l'apparition de fissures macroscopiques, les contacts sphériques conduisent à des enfoncements locaux. La première rupture intervient ensuite à une force plus élevée que dans le cas de la compression uni-axiale. La force maximale passe en effet de $752 \pm 110 \text{ N}$ à $1289 \pm 132 \text{ N}$ soit une augmentation de 70 %. Les fissures s'amorcent aux points de contacts puis

se propagent entre chaque point de contact horizontalement sur la partie haute et basse (figure 5.16a) et enfin relient les deux niveaux (figure 5.17). La rupture est moins brutale. La reprise d'effort est plus importante après la première rupture.

Dans le cas d'une sollicitation dynamique ($v \approx 1,5 \text{ m.s}^{-1}$), le comportement est similaire mais une plus grande dispersion est observée causée par les effets dynamiques. La force maximale relevée est de $1614 \pm 95 \text{ N}$ soit une augmentation de 55 % par rapport aux essais dynamiques de compression uni-axiale ($1037 \pm 160 \text{ N}$).

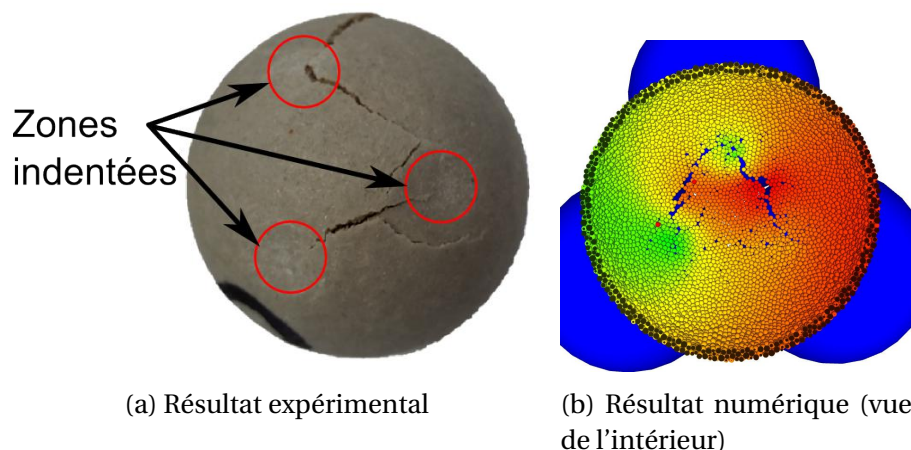


FIGURE 5.16 – Observation des fissures entre les points de contacts lors de l'essai de compression pyramidal ($\eta = 0,8$)

Les courbes forces - déplacements des résultats numériques incluent la force de compression suivant l'axe $\vec{x}$ et les forces radiales suivant les axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$ exercées sur la sphère creuse. Les forces maximales relevées sont de 1367 N en régime quasi-statique et 1703 N en régime dynamique soit respectivement 6 % et 5 % supérieures par rapport aux résultats expérimentaux. Le modèle numérique ne permet cependant pas de reproduire l'indentation locale. Les contraintes locales sont plus importantes que dans le cas d'un contact sphère / plan. Il se peut que les contraintes de cisaillement locales conduisent à une déformation permanente induite par des micro fissures et par la viscoélasticité du matériau. La viscoélasticité n'est pas prise en compte dans le modèle numérique. De plus, le faible nombre d'éléments dans l'épaisseur ne permet pas de modéliser toutes les micro fissures. Le déplacement à la première rupture est donc moins important pour le modèle DEM : il est de 1,15 mm en régime quasi-statique et 1,4 mm en régime dynamique contre respectivement $1,9 \pm 0,2 \text{ mm}$ et $2,3 \pm 0,4$ lors des essais expérimentaux. Les fissures connectant les points de contacts et apparaissant lors de la première chute de force sont correctement prédites par le modèle numérique (figure 5.16 et figure 5.17).

Le modèle numérique permet d'accéder aux forces radiales lors de la compression et ainsi de connaître exactement l'état de contrainte équivalent auquel est soumise la sphère creuse. La force axiale mesurée est le double des forces radiales. Cela conduit à un degré de triaxialité $\eta = 0,66$, inférieur à celui prédit par le montage ($\eta = 0,8$) dû à la déformation de la sphère et aux frottements.

Des essais numériques sont réalisés sur différents supports. La figure 5.18 présente les essais à 3,2 mm de déplacement suivant l'axe de compression. La figure 5.19 montre que le cas $\eta = 0,33$ est le plus critique d'un point de vue de la structure, la force maximale est environ deux fois plus faible que lorsque $\eta > 0,46$. Dans le cas des supports avec $\eta > 0,66$, la sphère creuse ne subit plus une seule rupture primaire mais plusieurs ruptures locales au niveau des points de contacts. Les supports $\eta = 0,8$ et $\eta = 1$ empêchent la sphère de

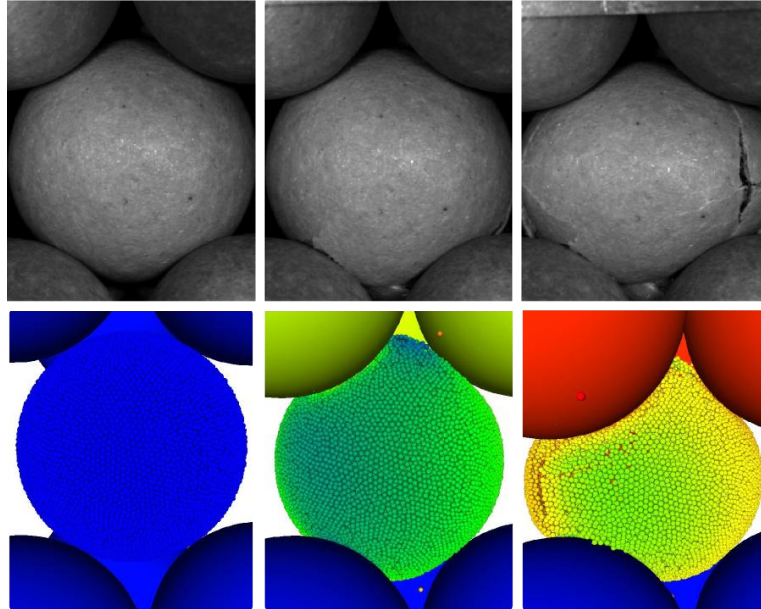


FIGURE 5.17 – Écrasement d'une sphère creuse de type B sous compression dynamique ($v \approx 1,5 \text{ m.s}^{-1}$) pyramidale ($\eta = 0,8$). Images à un intervalle de temps de 0,5 ms

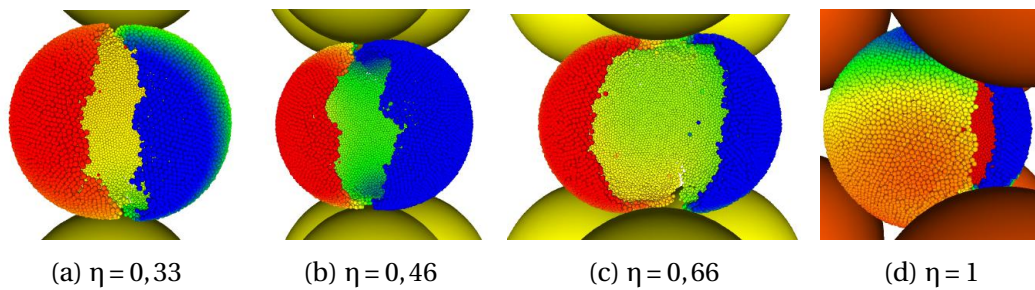


FIGURE 5.18 – Rupture d'une sphère creuse de type B pour différents supports de chargement à 3,2 mm de déplacement en compression ($\eta = 0,33$ à $\eta = 1$)

s'ouvrir trop lorsqu'il y a une rupture, la reprise d'effort est plus importante.

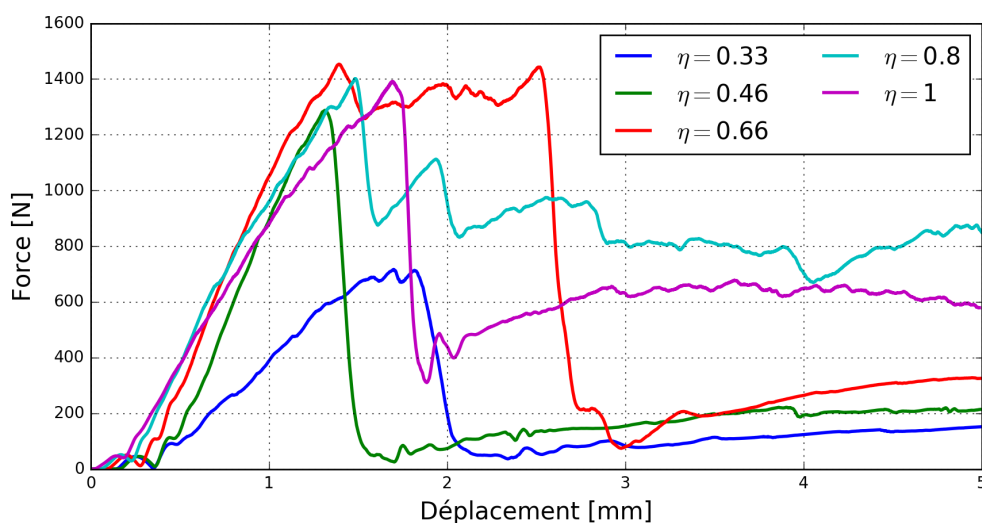


FIGURE 5.19 – Courbes force - déplacement de l'écrasement d'une sphère creuse de type B pour différents supports de chargement ($\eta = 0,33$ à $\eta = 1$)

5.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté deux approches possibles pour traiter la compression d'un ensemble de sphères creuses. Lorsque le volume élémentaire représentatif le permet (colonne de quelques sphères par exemple), le modèle DEM microscopique est directement utilisé. Dans le cas d'une colonne de sphères, le comportement mécanique sous sollicitation de compression uni-axiale reste similaire à partir de 4 à 5 sphères.

Le deuxième modèle nécessite un travail plus important : étude d'un arrangement de sphères en compression pour mesurer l'état de contrainte sur chacune des sphères, analyse paramétrique sur le modèle DEM microscopique puis mise en œuvre du modèle macroscopique. Le travail s'est limité pour l'instant aux deux premières étapes. On a montré qu'une sphère creuse subit des contraintes axiales (direction de compression) et radiales (perpendiculaires à la direction de compression) dépendantes notamment du frottement. Les essais de compression uni-axiale sont critiques pour la sphère creuse et des essais multi-axiaux ont été menés. Le comportement de la sphère creuse est fortement influencé par le type de support sur lequel elle est comprimée.

Ces premiers résultats donnent des indications et doivent être poursuivis pour être pleinement intégrés dans un modèle macroscopique.

5.5 Références

AHMAD, Z. et D. P. THAMBIRATNAM. 2009, «Dynamic computer simulation and energy absorption of foam-filled conical tubes under axial impact loading», *Computers & Structures*, vol. 87, n° 3, p. 186–197. [120](#)

ANDRÉ, D. 2012, *Modélisation par éléments discrets des phases débauchage et de doucissage de la silice*, thèse de doctorat, Bordeaux 1. [126](#)

- BRUCHMÜLLER, J., B. VAN WACHEM, S. GU et K. LUO. 2011, «Modelling discrete fragmentation of brittle particles», *Powder Technology*, vol. 208, n° 3, p. 731–739. [123](#)
- CAO, H.-P. 2011, *Modélisation par éléments discrets rigides et/ou déformables des milieux granulaires et des troisièmes corps solides : Influence du comportement local sur le comportement global*, thèse de doctorat, Lyon, INSA. [124](#)
- CHENG, Y., Y. NAKATA et M. BOLTON. 2003, «Discrete element simulation of crushable soil», *Geotechnique*, vol. 53, n° 7, p. 633–642. [122](#)
- FALLET, A. 2008, *Structure et propriétés mécaniques d'empilement aléatoires de sphères creuses : caractérisation et modélisation*, Thèse, Institut Polytechnique de Grenoble. [123](#)
- GUESSASMA, M., P. COOREVITS, J. FORTIN et E. BELLENGER. 2009, «Analyse numérique de la fragmentation par la med dans un système multi-contacts», . [123](#)
- HARTE, A.-M., N. A. FLECK et M. F. ASHBY. 2000, «Energy absorption of foam-filled circular tubes with braided composite walls», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 19, n° 1, p. 31–50. [120](#)
- HARTHONG, B., J.-F. JÉRIER, P. DORÉMUS, D. IMBAULT et F.-V. DONZÉ. 2009, «Modeling of high-density compaction of granular materials by the discrete element method», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, n° 18, p. 3357–3364. [123](#)
- HOSSEININIA, E. S. et A. MIRGHASEMI. 2006, «Numerical simulation of breakage of two-dimensional polygon-shaped particles using discrete element method», *Powder Technology*, vol. 166, n° 2, p. 100–112. [125](#)
- KAVI, H., A. K. TOKSOY et M. GUDEN. 2006, «Predicting energy absorption in a foam-filled thin-walled aluminum tube based on experimentally determined strengthening coefficient», *Materials & design*, vol. 27, n° 4, p. 263–269. [120](#)
- LEIRIS, M. H. D. 1968, «Mode d'expression du degré de triaxialité des contraintes», *COMMUNAUTÉ EUROPÉENNE DU CHARBON ET DE L'ACIER*. [124](#)
- LHUISSIER, P. 2009, *Random hollow spheres stacking : structure, behaviour and integration into sandwich structures*, Thèse, Institut Polytechnique de Grenoble. [123](#)
- LUO, X., J.-Y. XU, L. NIE, Y. GAO, J. ZHU et W. LI. 2015, «The mechanical behavior of thin-walled tube filled with hollow metal spheres», *Composite Structures*, vol. 133, p. 124–130. [120](#)
- MARTIN, C. et D. BOUVARD. 2003, «Study of the cold compaction of composite powders by the discrete element method», *Acta Materialia*, vol. 51, n° 2, p. 373–386. [125](#)
- MARTIN, S. 2014, *Contribution à la modélisation du frittage en phase solide*, thèse de doctorat, Compiègne. [125](#)
- MCDOWELL, G. R. et J. P. DE BONO. 2013, «On the micro mechanics of one-dimensional normal compression», *Géotechnique*, vol. 63, n° 11, p. 895. [123](#), [124](#)
- ROBERTSON, D. et M. BOLTON. 2001, «Dem simulations of crushable grains and soils», dans *Proceedings of the 4th international conference on micromechanics of powders and grains, Sendai, Japan*, p. 623–626. [122](#)

- ROTHENBURG, L. et R. BATHURST. 1989, «Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials», *Geotechnique*, vol. 39, n° 4, p. 601–614. [125](#)
- TSOUNGUI, O., D. VALLET et J.-C. CHARMET. 1999, «Numerical model of crushing of grains inside two-dimensional granular materials», *Powder technology*, vol. 105, n° 1, p. 190–198. [123](#), [124](#)
- WANG, J. et H. YAN. 2011, «3d dem simulation of crushable granular soils under plane strain compression condition», *Procedia Engineering*, vol. 14, p. 1713–1720. [122](#)
- WANG, Y.-S., F. LEE, C.-C. KUO et K. BARON. 1994, «Foam filled honeycomb and methods for their production», US Patent 5,338,594. [120](#)

Chapitre 6

Conclusions générales et perspectives

*« Research is what I'm doing when I
don't know what I'm doing. »*

Wernher von Braun

Sommaire

6.1 Conclusions générales	137
6.2 Perspectives	138
6.2.1 A l'échelle de la fissure	139
6.2.1.1 Moyens expérimentaux	139
6.2.1.2 Modélisation DEM de la rupture	139
6.2.2 A l'échelle d'une sphère creuse	140
6.2.2.1 Sphères multi-couches	140
6.2.2.2 Prise en compte du collage	141
6.2.3 A l'échelle de plusieurs de sphères creuses	141
6.2.3.1 Modèle micro-macro	141
6.2.3.2 Modèle macroscopique	143
6.3 Références	144

6.1 Conclusions générales

L'objectif du projet initial est la conception d'un bouclier avion de choc à l'oiseau. Ces travaux de thèse se sont intéressés à une des solutions technologiques possibles, fournie par la société ATECA : les sphères creuses composites. Les recherches effectuées sur cette nouvelle structure ont mis en évidence les mécanismes de dissipation d'énergie. En particulier, l'énergie de rupture du matériau, a été estimée. Le modèle numérique issu de ces recherches doit permettre d'optimiser la structure du bouclier.

Le comportement fragile du matériau constitutif conduit à la rupture des sphères creuses sous sollicitations de compression uni-axiale. Les sphères creuses présentent un comportement en compression similaire à celui d'une mousse fragile. Des lois analytiques permettent d'exprimer la rigidité et la limite élastique d'un matériau cellulaire en fonction de sa densité relative et des caractéristiques mécaniques du matériau constitutif. Cependant, cette méthode présente des limites lorsqu'une optimisation de la micro-structure est envisagée. Dans le but d'optimiser les paramètres géométriques d'un assemblage de sphères creuses, il est nécessaire de mener une analyse multi-échelles. On propose donc, dans un premier temps, de s'intéresser au comportement d'une seule sphère creuse.

Des essais de compression uni-axiale sur une seule sphère creuse sont menés en régime quasi-statique (5 mm.min^{-1}) et dynamique ($\approx 1,5 \text{ m.s}^{-1}$). On montre que la vitesse de sollicitation a une influence importante (force à rupture + 40 % et énergie dissipée + 30-70 %).

Un premier modèle numérique, basé sur la méthode des éléments discrets est choisi pour représenter le comportement fragile des sphères creuses. Des essais de compression simple sur le matériau constitutif permettent de mesurer le module de Young et la limite élastique du matériau pour différentes températures (-40°C à $+80^\circ\text{C}$) et différentes vitesses de déformation ($4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ à $4 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$). Le modèle par éléments discrets est ensuite calibré. Le modèle de rupture est basé sur la contrainte principale du tenseur viriel, calculé sur chaque élément. La valeur de la contrainte à rupture est dépendante de la vitesse de déformation et de la température suivant la loi de Ree-Eyring. Le modèle donne de bons résultats et permet d'observer numériquement des micro fissures observées expérimentalement. Des essais d'impact à haute vitesse (125 m.s^{-1}) à l'aide d'un canon à air comprimé sont conduits et les résultats sont comparés avec le modèle numérique. Ce dernier, couplé au modèle de rupture piloté par la loi de Ree-Eyring parvient à représenter fidèlement la rupture d'une sphère soumise à de grandes vitesses de déformations.

On propose ensuite d'estimer le taux de restitution d'énergie critique du matériau afin d'affiner le modèle numérique. Une démarche basée sur la Mécanique Élastique Linéaire de la Rupture est mise en place afin d'estimer les effets inertiels induits par la rupture sur une sphère creuse. La position de la pointe de fissure en fonction du temps est mesurée lors de la propagation d'une fissure sur une sphère creuse. Les vitesses moyennes de propagation sont ensuite calculées. On observe une légère augmentation de la vitesse de propagation entre le régime de sollicitation quasi-statique et dynamique ($0,12$ à $0,14 c_r$). De même, la vitesse de propagation semble augmenter avec l'épaisseur des sphères creuses pour une même vitesse de sollicitation ($0,08$ à $0,12 c_r$). Une simulation de *déboutonnage* numérique est mise en place en DEM afin d'estimer les effets inertiels lors de la rupture. Une zone de rupture d'une longueur égale à une fois le rayon moyen des éléments couplée à un schéma de dégradation progressif des poutres permet de retrouver les résultats analytiques de propagation de fissure sur une plaque semi-infinie.

La méthode est ensuite appliquée à des sphères creuses préalablement précontraintes. On remarque que la structure de sphères creuses génère d'importants effets inertiels. À $0,1 c_r$, trois fois plus d'effets inertiels sont provoqués par la rupture comparés à la propagation d'une fissure sur plaque. On observe aussi une augmentation des effets inertiels avec une diminution de l'épaisseur des sphères creuses pour une même vitesse de propagation. Le taux de restitution d'énergie critique dynamique du matériau est estimé à environ 550 J/m^2 . Les sphères creuses ne sont cependant pas une structure bien adaptées à l'étude de la rupture dynamique et conduisent à des résultats très approchés.

Un critère mixte en contrainte énergie est mis en œuvre sur le modèle numérique. Adapté à la spécificité du modèle DEM et des poutres 3D, il permet de prendre directement en compte une énergie de rupture.

L'approche multi échelles menée nécessite ensuite la construction d'un modèle macroscopique. Deux modèles sont proposés et dépendent du nombre de sphères creuses que l'on souhaite modéliser.

Le premier modèle (appelé micro-macro) consiste à étudier le comportement d'un faible nombre de sphères creuses rangées en colonne. L'écrasement de ces sphères creuses dans une cellule de nid d'abeilles rigides est modélisé. Les résultats (courbes force - déformation longitudinale et énergie dissipée par sphère) convergent à partir d'un nombre réduit de sphères (4 à 5). Le modèle peut donc être facilement utilisé dans le cas de calculs d'optimisation.

Le deuxième modèle présente un intérêt lorsque le nombre de sphères est plus important. Un modèle macroscopique, où chaque sphère est représentée par un élément, doit être développé. On a montré que l'état de contrainte dans un arrangement de sphères creuses pouvait être exprimé par le degré de triaxialité. Dans le cas d'une compression uni-axiale sur cet arrangement, il se situe entre $\eta = 0,9$ et $\eta = 0,66$. Un support expérimental a été réalisé afin de pouvoir charger une sphère creuse suivant l'état de contrainte qu'elle subirait dans un arrangement. La rupture de la sphère a lieu à une force plus importante (le double en régime de sollicitation quasi-statique) que lors d'une compression uni-axiale simple. Des simulations numériques à différents états de contraintes sont menés permettant de mettre en évidence la dépendance du comportement des sphères creuses avec le chargement (intensité et direction des contacts).

Ce travail permet de donner des guides pour le dimensionnement de structures à bases de sphères creuses. Si le modèle micro-macro peut être utiliser rapidement à une fin industrielle, le modèle macroscopique doit encore être implémenté.

6.2 Perspectives

De nombreuses perspectives peuvent être envisagées aux différentes échelles d'études. La pluridisciplinarité de ce travail de recherche (rupture dynamique, matériau cellulaire et granulaire, méthode numérique DEM) et le temps limité ne permettent pas d'approfondir tous les aspects. On propose donc quelques pistes qui doivent mener à une caractérisation et une modélisation fine d'un assemblage de sphères creuses composites.

6.2.1 A l'échelle de la fissure

6.2.1.1 Moyens expérimentaux

Les sphères creuses ne permettent pas d'estimer finement le taux de restitution d'énergie critique du matériau. Le mode de rupture est un mode mixte et dépend de la position du sommet de fissure (cisaillement près des points de contact, ouverture loin des bords). La propagation hors plan de la fissure conduit à des approximations plus importantes que dans le cas d'une propagation plane. Enfin, les micro fissures qui apparaissent avant la rupture primaire dissipent une partie de l'énergie comptabilisée dans le taux de restitution d'énergie.

La fabrication d'éprouvettes plus appropriées pour l'étude de la rupture dynamique nous permettrait d'estimer plus finement le taux de restitution d'énergie. Des essais de rupture dynamique sur des éprouvettes en bandes (SBS : Strip Band Specimen) devraient être réalisés sur le matériau constitutif. Ce type d'essai a été utilisé sur des matériaux polymères par FOND et SCHIRRE [2001a,b]; KOPP et collab. [2014]. La fissure se propage en mode I pur et la vitesse de la pointe de fissure est constante après l'amorçage. Le montage SBS génère très peu d'effets inertiels et permet d'atteindre des vitesses importantes. Suivant la précharge imposée à l'éprouvette avant l'amorçage de la fissure, la vitesse de propagation peut évoluer. Il devient ainsi possible d'estimer le taux de restitution d'énergie critique dynamique à différentes vitesses de propagation de fissure.

6.2.1.2 Modélisation DEM de la rupture

Concernant la modélisation de la rupture, plusieurs points peuvent être approfondis :

Amorçage / propagation : comme cela a été vu dans le chapitre 4, la propagation de rupture basée sur un critère mixte contrainte / énergie peut être encore améliorée. L'énergie de rupture minimale est pilotée par la contrainte maximale (comportement élastique fragile, sans adoucissement). Afin d'atteindre une énergie de rupture plus faible, il conviendrait de dissocier l'amorçage de la propagation de fissure. L'amorçage peut être déclenché par le critère en contrainte mais la propagation doit se faire principalement par un critère énergétique. Un critère de propagation en énergie seule permet de lier directement la création de surface et le taux de restitution d'énergie du matériau suivant le critère de Griffith. L'idée serait de diminuer fortement la limite en contrainte des éléments discrets en pointe de fissure (tout en laissant une contrainte supérieure à 0 pour autoriser la rupture seulement en cas de traction locale). Un élément discret verrait sa limite à rupture diminuée s'il possède des voisins ayant rompu.

Modes mixtes : la rupture a été abordée seulement pour le mode I, le mode d'ouverture. Dans le cas des sphères, le mode mixte joue un rôle non négligeable près des points de contact. La première étape consisterait à estimer le taux de restitution d'énergie en mode II voir III par le biais d'un essai adapté (AYATOLLAHI et collab. [2013]). Le taux de restitution d'énergie critique dynamique pourrait alors être déduit en estimant les effets inertiels générés par la rupture sur une telle structure à l'aide du modèle DEM, comme pour le mode I. Le défi serait ensuite de pouvoir intégrer un critère en mode mixte pour les poutres cohésives où il n'est pas possible d'identifier directement à l'échelle de la poutre le mode de propagation macroscopique.

Prise en compte de la vitesse de propagation : des guides ont été donnés dans le chapitre 4 pour prendre en compte la vitesse de propagation sur le taux de restitution

d'énergie. Des essais expérimentaux doivent être mis en place pour établir une relation liant le taux de restitution d'énergie et la vitesse de propagation de la fissure.

6.2.2 A l'échelle d'une sphère creuse

6.2.2.1 Sphères multi-couches

Lors de la fabrication des sphères creuses, comme évoqué dans le chapitre 2, les sphères contiennent à l'origine une mousse de type polystyrène expansé. Ce noyau est normalement fondu mais peut être laissé intact. Sa présence peut permettre à la structure d'augmenter son énergie spécifique absorbée lors d'un impact. Cette éventualité a été traitée et des essais ont été effectués. Si des travaux, notamment numériques sont encore nécessaires, la caractérisation et la modélisation de sphères multi-couches sont bien avancées.

Des essais de compression uni-axiale ont été menés en quasi-statique et dynamique afin de caractériser le polystyrène expansé pour plusieurs vitesses de déformation ($4\text{e}^{-3} \text{ s}^{-1}$ sur machine de compression classique, 80 s^{-1} sur roue inertielle et 1000 s^{-1} sur barres de Hopkinson). La figure 6.1 illustre un essai de compression quasi-statique.

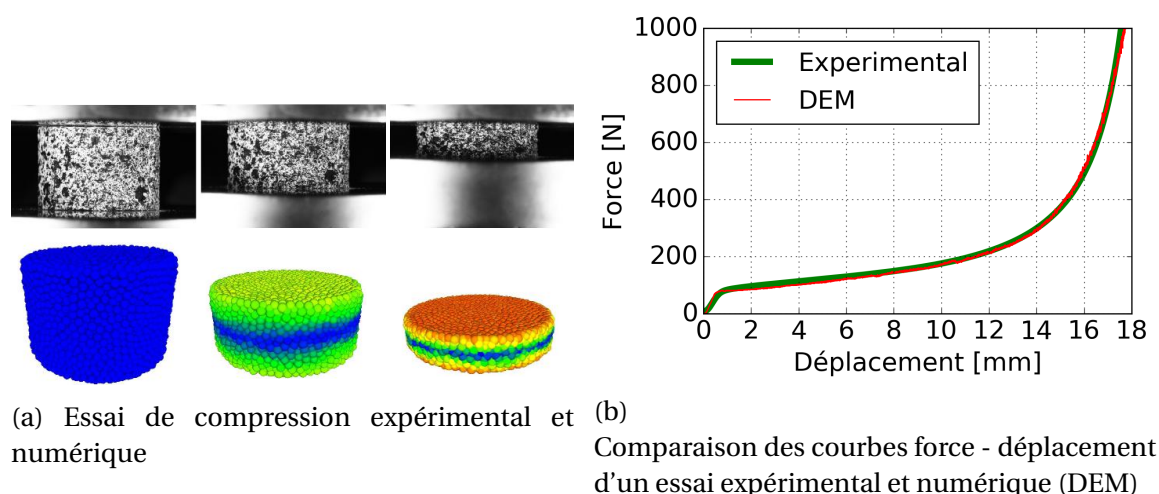
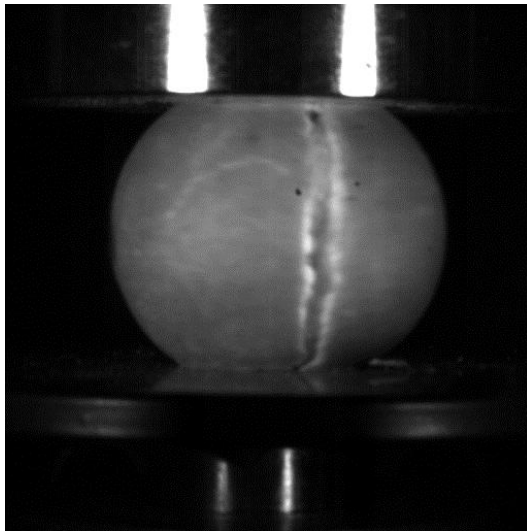


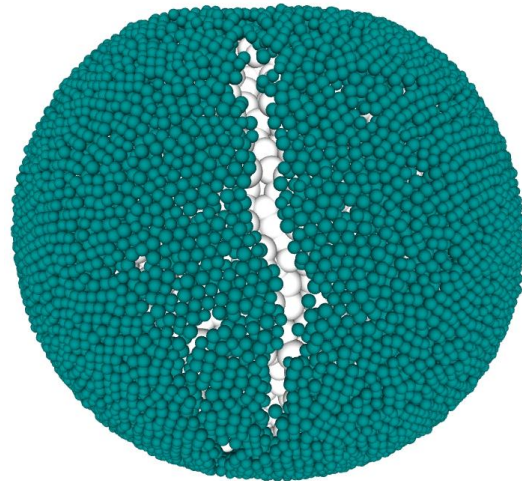
FIGURE 6.1 – Compression uni-axiale quasi-statique sur une éprouvette cylindrique (diamètre 30 mm et hauteur 20 mm) de polystyrène expansé (30 kg.m^{-3})

La méthode des éléments finis est largement utilisée pour modéliser les mousses et plusieurs lois de comportement sont proposées. Cependant, ce type de modèle nécessiterait un couplage éléments discrets - éléments finis. Le choix a été porté sur un modèle DEM permettant de modéliser la phase élastique, le plateau et la phase de densification d'une mousse. En se servant du modèle développé par [JEBABI et collab. \[2013\]](#) pour simuler la densification de la silice, il est possible de l'adapter pour modéliser un comportement de type mousse à grande déformation. Il a été montré qu'un nombre de coordination moyen minimum de 13,2 était requis pour la stabilité du calcul. Le modèle, qui ne sera pas explicité ici, comporte une calibration élastique pour la phase élastique et une identification inverse de paramètres pilotant la phase de plateau et de densification. Les résultats des courbes force - déplacement en compression quasi-statique uni-axiale sont comparés avec les résultats expérimentaux et sont prometteurs, figure 6.1b.

La mousse peut ensuite être intégrée dans une sphère creuse. La méthode consiste ici à remplir une sphère creuse d'un nombre important d'éléments (pour atteindre un nombre de coordination moyen de 13,2), de mettre en mouvement les éléments afin qu'ils



(a) Expérimental, sur roue inertielle



(b) Modélisation DEM

FIGURE 6.2 – Essai de compression uni-axial dynamique ($v \approx 2 \text{ m.s}^{-1}$) sur une sphère creuse double couche de type B

épousent au mieux la "rugosité" de la surface intérieure de la sphère creuse avant de stabiliser le calcul. La sphère creuse peut être ensuite sollicitée en compression uni-axiale, figure 6.2b. Les travaux en cours concernent la prise en compte de la rupture en traction du polystyrène ainsi que de la modélisation de l'interface entre la coque et la mousse.

Des essais expérimentaux ont aussi été conduits avec des sphères double couches, voir la figure 6.2a. Les résultats font état d'une force à rupture similaire mais d'une reprise d'efforts plus importante après la rupture. Des essais multi-sphères doivent encore être menés.

6.2.2.2 Prise en compte du collage

Les assemblages de sphères présentées dans ce travail comportaient uniquement des sphères libres, non collées. Pourtant, il est possible de concevoir de telles structures de sphères creuses maintenues ensemble par un joint de colle ou ménisque, figure 6.3. Présenté rapidement dans le deuxième chapitre, ce cas pourrait être traité par le modèle numérique. Les liaisons peuvent être caractérisées mécaniquement (rigidité et limite à rupture) suivant les directions de sollicitations possibles : traction / compression, flexion, torsion et cisaillement. La prise en compte de la forme et des dimensions du ménisque permettrait d'optimiser les paramètres géométriques des sphères creuses sur une plus grande plage de possibilités. Le collage des sphères autorise aussi une plus grande liberté de conception dans le cas d'un bouclier puisque les sphères n'ont pas besoin d'être contenues dans un récipient.

6.2.3 A l'échelle de plusieurs de sphères creuses

6.2.3.1 Modèle micro-macro

Le modèle micro-macro de compression de plusieurs sphères creuses dans une cellule rigide donne un comportement macroscopique (courbe force - déplacement) en fonction des principaux paramètres : nombre et géométrie des sphères, taille et forme de la cellule. Ce résultat peut être réutilisé dans un modèle éléments finis d'un bouclier où le nid

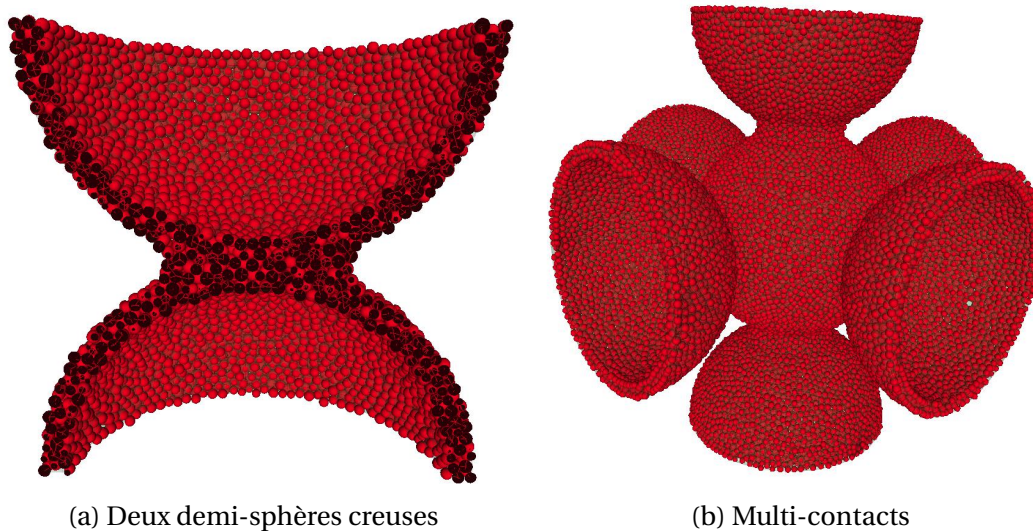


FIGURE 6.3 – Modélisation du ménisque reliant les sphères creuses

d'abeilles et les peaux sont modélisées. Il est possible de rajouter des éléments ayant pour loi de comportement, l'écrasement des sphères creuses dans une cellule. Le remplissage des sphères creuses dans le nida peut être partiel. Le modèle numérique peut donc permettre d'optimiser la position de remplissage des sphères creuses afin d'augmenter l'énergie spécifique absorbée dans le cas d'un choc à l'oiseau.

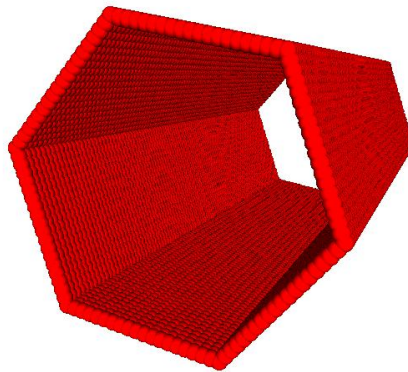


FIGURE 6.4 – Modélisation DEM d'une cellule de nid d'abeilles

Ce modèle présente un couplage faible entre l'écrasement des sphères creuses et l'impact sur le bouclier. En effet, l'écrasement des sphères n'a aucune influence sur les cellules de nida. Sans forcément permettre un couplage fort des sphères creuses dans le bouclier, une première étape serait de prendre en compte la déformation d'une cellule de nida lorsque des sphères creuses sont introduites. La figure 6.4 propose par exemple une modélisation en éléments discrets d'une cellule qui peut se déformer. Des travaux doivent être effectués dans ce sens afin de simuler le comportement d'une cellule de Nida souple par éléments finis ou par éléments discrets.

6.2.3.2 Modèle macroscopique

Des indications ont été données dans le cinquième chapitre concernant le modèle macroscopique d'un assemblage de sphères creuses. Une large campagne d'analyse paramétrique numérique doit être maintenant menée prenant en compte : l'état de contrainte de la sphère creuse, ses dimensions géométriques, la vitesse de sollicitation et la température. La figure 6.5 montre l'évolution de la rigidité d'une sphère creuse de 30 mm de diamètre en compression uni-axiale par rapport au rapport r/t . Ce premier résultat peut permettre de construire la partie linéaire élastique du modèle macroscopique où les rigidité de contact sont associées aux dimensions des sphères creuses.

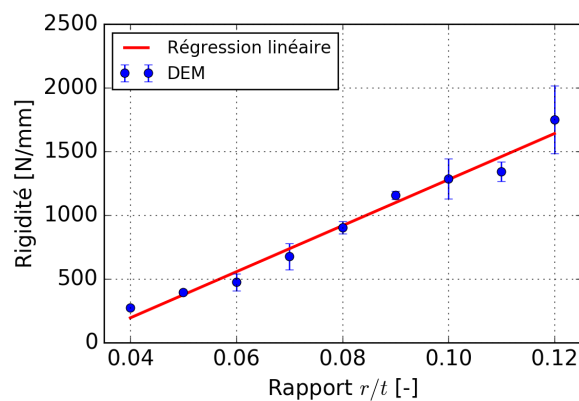


FIGURE 6.5 – Analyse paramétrique : évolution de la rigidité d'une sphère creuse de 30 mm de diamètre en compression uni-axiale avec le rapport r/t

La prise en compte de la rupture, au-delà de la phase purement élastique, est la partie la plus délicate à mettre en place. Plusieurs solutions sont étudiées : contact non linéaire, réduction du rayon des éléments au moment de leur rupture (illustrée sur la figure 6.6), déformation des éléments...

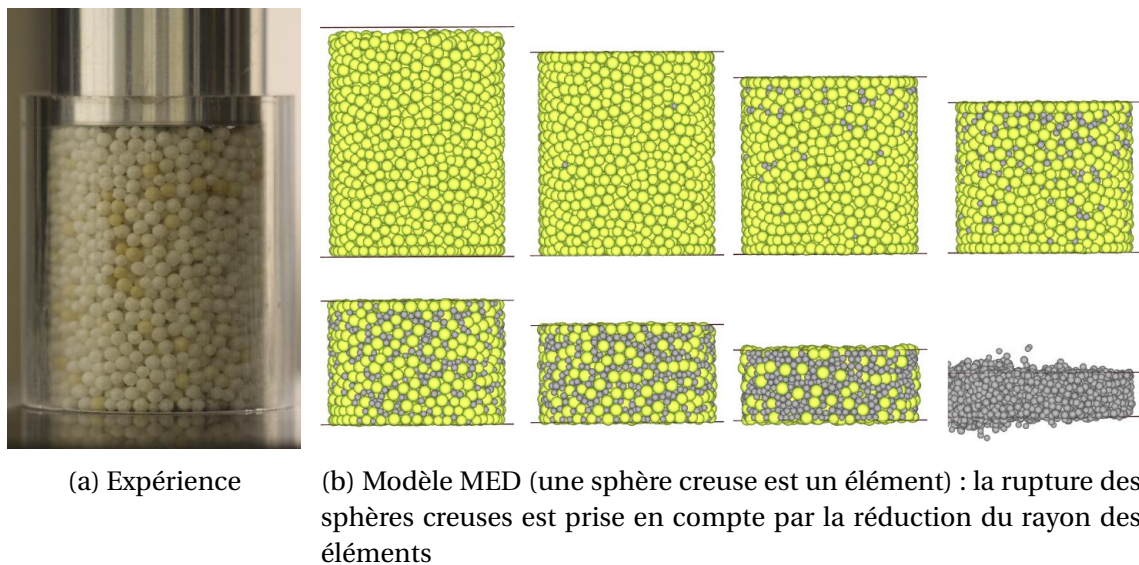


FIGURE 6.6 – Compression confinée de 5000 sphères creuses libres

La dernière partie du travail vise à simuler l'impact au choc mou sur un bouclier ou sur une partie de bouclier. L'impacteur doit être modélisé pour représenter le comportement

de la gélatine à grande vitesse de déformation. Un modèle DEM simple (comportement élastique) est présenté sur la figure 6.7. Il est comparé avec un résultat expérimental de tir sur plaque à une vitesse de 40 m.s^{-1} .

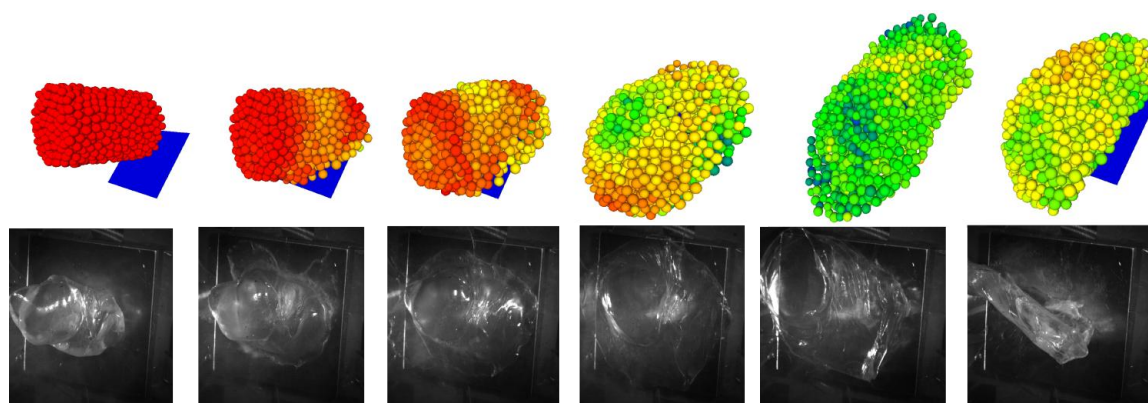


FIGURE 6.7 – Impact d'un cylindre (diamètre 40 mm, hauteur 60 mm) de gélatine à 40 m.s^{-1} sur une surface plane : modélisation DEM et essai expérimental

Le modèle final doit permettre d'optimiser les paramètres microscopiques des sphères creuses pour augmenter l'énergie dissipée et la tenue structurelle du bouclier face à un choc à l'oiseau.

6.3 Références

- AYATOLLAHI, M., M. PAVIER et D. SMITH. 2013, «A new specimen for mode ii fracture tests», dans *ECF14, Cracow 2002*. [139](#)
- FOND, C. et R. SCHIRRER. 2001a, «Dynamic fracture surface energy values and branching instabilities during rapid crack propagation in rubber toughened pmma», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, vol. 329, n° 3, p. 195–200. [139](#)
- FOND, C. et R. SCHIRRER. 2001b, «Influence of crack speed on fracture energy in amorphous and rubber toughened amorphous polymers», *Plastics, rubber and composites*, vol. 30, n° 3, p. 116–124. [139](#)
- JEBAHI, M., D. ANDRÉ, F. DAU, J.-L. CHARLES et I. IORDANOFF. 2013, «Simulation of vickers indentation of silica glass», *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 378, p. 15–24. [140](#)
- KOPP, J.-B., J. SCHMITTBUHL, O. NOEL, J. LIN et C. FOND. 2014, «Fluctuations of the dynamic fracture energy values related to the amount of created fracture surface», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 126, p. 178–189. [139](#)

Étude du comportement mécanique de sphères creuses composites sous sollicitations dynamiques. Application à un bouclier de choc à l'oiseau.

Résumé: Les structures de sphères creuses appartiennent à la famille des matériaux cellulaires qui ont récemment été étudiés pour leurs multiples propriétés. Dans le cas de cette thèse, le but des sphères creuses est de dissiper l'énergie d'impact d'un oiseau sur un cockpit d'avion. Elles sont développées dans le cadre du projet SAMBA (Shock Absorber Material for Birdshield Application) afin d'optimiser leur énergie spécifique absorbée (J.kg^{-1}). Dans un premier temps, des essais quasi-statiques ($v = 5 \text{ mm.min}^{-1}$) et dynamiques ($v = 2 \text{ m.s}^{-1}$) de compression uni-axiale sont conduits à température ambiante sur une seule sphère creuse de diamètre 30 mm. Une propagation rapide de fissures macroscopiques est observée. Le formalisme de la Mécanique Élastique Linéaire de la Rupture (MELR) est utilisé pour estimer le taux de restitution d'énergie critique dynamique $G_{I\text{dc}}$ du matériau constitutif. La position du sommet de fissure est mesurée pendant la propagation de fissure à l'aide d'une caméra rapide. La Méthode des Éléments Discrets (DEM) permet de simuler la rupture dynamique en implémentant une technique de relâchement des nœuds. Le taux de restitution d'énergie $G_{I\text{dc}}$ peut être estimé à partir de l'histoire (position et temps) du sommet de fissure. Le modèle numérique montre que les structures sphériques dissipent une proportion importante de l'énergie par des effets dynamiques. A une même vitesse de propagation, plus l'épaisseur de coque est fine, plus les effets inertiels générés par la rupture sont importants et ce pour une même vitesse de propagation. Le modèle numérique DEM est ensuite employé pour reproduire la rupture dynamique sur une sphère creuse à l'aide d'un critère en contrainte seule ou un critère mixte en contrainte – énergie. Les bons résultats obtenus démontrent la capacité de la DEM à représenter la propagation de fissures en régime dynamique. Finalement, des essais numériques et expérimentaux multi-sphères sont réalisés afin d'évaluer le comportement des sphères creuses au sein d'un assemblage.

Mots clés: Rupture dynamique, Méthode des éléments discrets, Impact, Sphères creuses

Mechanical behavior of composite hollow spheres under dynamic solicitations. Birdshield application.

Abstract: Hollow sphere structure (HSS) belongs to cellular solids that have been studied recently for its multiples properties. In our case, HSS aims to absorb soft impacts energy on an airliner cockpit. HSS is investigated through the SAMBA (Shock Absorber Material for Bird-shield Application) project because of its promises in term of specific energy dissipated (J.kg^{-1}) during impact. First of all, quasi-static and dynamic ($v = 5 \text{ mm.min}^{-1}$ to $v = 2 \text{ m.s}^{-1}$) uniaxial compression tests are conducted at room temperature on a single sphere ($D = 30 \text{ mm}$). Rapid crack propagation (RCP) is observed to be predominant at macroscopic scale. The formalism of Linear Elastic Fracture Mechanics (L.E.F.M.) is therefore used to estimate the dynamic energy release rate $G_{I\text{dc}}$. The crack tip location is measured during the crack propagation using a high speed camera. The Discrete Element Method (DEM) is used to simulate the dynamic fracture by implementing the node release technique. The dynamic energy release rate can be determined using an experimentally measured crack history. In spherical structures the numerical results reveal a high proportion of energy dissipated through inertial effects as well as a dependence of the thickness of the hollow sphere over the range of 0.04 mm to 1.2 mm. The DEM model is then employed to reproduce the RCP according to two failure criterions: a stress criterion and a coupled stress-energy criterion. It reveals to be an interesting way to model the mechanical behavior of brittle materials. Eventually, experimental and numerical multi-spheres tests are performed to evaluate the behavior of brittle hollow spheres within an assembly.

Keywords: Dynamic fracture, Discrete Element Method, Impact, Hollow spheres

