



HAL
open science

Persistence et vitesse d'extinction pour des modèles de populations stochastiques multitypes en temps discret.

Etienne Adam

► **To cite this version:**

Etienne Adam. Persistence et vitesse d'extinction pour des modèles de populations stochastiques multitypes en temps discret.. Probabilités [math.PR]. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLX019 . tel-01476864

HAL Id: tel-01476864

<https://pastel.hal.science/tel-01476864v1>

Submitted on 26 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLX019

THESE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY

préparée à

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE DOCTORALE N°574

Mathématiques Hadamard (EDMH)

Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées

par

Mr. Etienne Adam

Persistence et vitesse d'extinction pour des modèles de
populations stochastiques multitypes en temps discret

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 01 Juillet 2016

Composition du jury :

VINCENT BANSAYE	(École Polytechnique)	Directeur de thèse
JEAN-RENÉ CHAZOTTES	(École Polytechnique)	Directeur de thèse
ARNAUD GUILLIN	(Université de Clermont-Ferrand)	Président du jury
GÖTZ KERSTING	(Goethe Universität)	Examineur
FIMA KLEBANER	(Monash University)	Rapporteur
AMAURY LAMBERT	(Université Pierre et Marie Curie)	Examineur
LAURENT MICLO	(Université Paul Sabatier Toulouse)	Rapporteur
ERIC MOULINES	(École Polytechnique)	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs Vincent Bansaye et Jean-René Chazottes pour leur grande disponibilité et la liberté qu'ils m'ont laissée dans le choix des sujets. Merci pour votre optimisme, vos encouragements et pour avoir essayé de me redonner confiance lors de mes diverses périodes de doute.

Un très grand merci à Laurent Miclo d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Grâce à sa lecture minutieuse, un grand nombre de coquilles ont pu être corrigées. I also warmly thank Fima Klebaner for being a referee despite the language barrier.

Je suis très heureux que Arnaud Guillin, Götz Kersting, Amaury Lambert et Éric Moulines aient accepté de participer à mon jury. Götz, vielen Dank für den Aufenthalt in Frankfurt, für die Besichtigung der Stadt und die Entdeckung des Apfelweins. Merci aussi à Éric pour les discussions sur les chaînes de Markov à espace d'états général.

Je remercie aussi Carl Graham, Lucas Gérin et Igor Kortchemski pour nos quelques discussions mathématiques, François Massol et Sylvain Billard pour mon court séjour à Lille et Sylvie Méléard pour son enthousiasme communicatif à travers la Chaire MMB.

Mille mercis à l'équipe administrative du CMAP, notamment Nasséra, Alexandra et Manoella, pour leur aide, leur patience et leur bonne humeur.

Mes enseignements à l'École Polytechnique ont été un vrai rayon de soleil (surtout lorsque mes travaux de recherche n'avançaient pas autant qu'espéré...). Je souhaite remercier Thierry Bodineau, Florent Benaych-Georges pour ses TP bien ficelés, Aline Lefebvre-Lepot, Linda Guével et surtout Pascale Harinck pour l'organisation impeccable du semestre préparatoire des EV2.

Le travail de thésard est certes plutôt solitaire mais la très bonne ambiance entre doctorants a été pour moi fondamentale. Le bureau 2003 a eu un statut particulier, Florine n'y est sans doute pas pour rien! Merci à Antoine et Jean-Bernard pour avoir supporté mes blagues sur leurs âges, à Gustaw pour sa rage de vaincre lors des matchs du Real Matrice et aussi merci à Vianney pour avoir chanté l'Internationale à mon anniversaire!

Je remercie tout particulièrement Aymeric pour tous les bons moments (je prendrais ma revanche au baby-foot!), Hélène pour ta bonne humeur, les gaufres fourrées lilloises à la pause de 16h et nos discussions dans le RER, Manon pour la création et la capitainerie de la désormais redoutable équipe de foot Real Matrice, ainsi que les membres de l'équipe Alain et Claire, Massil, Lucas, Simona, Luca, Mohammed, Raphaël, Cormac, Alexey... Clément pour la création du séminaire 2.0 (comment ai-je fait pour ne pas y avoir pensé avant?), Ludovic et Benoît pour notre coorganisation du séminaire des doctorants où on a appris plein de trucs chouettes comme les variétés complexes ou l'algèbre tropicale, Jacek pour avoir posé des questions intéressantes lors de ces séminaires alors qu'en tant qu'organisateur je ne savais pas

quoi demander, Antoine pour tes blagues et les bons moments passés à Saint Flour, Gwénaél c'était un plaisir de travailler avec toi pour les EV2, Aline, Tristan et Raphaël pour notre mini groupe de travail, Charline pour nos concours de râleries, ainsi que tous les autres doctorants !

Je remercie aussi mes amis, Bruno, Jehanne pour les petits restos sympas, Barbara, Antonin et Claire, Alexandre et Feiyun, Emmanuel, Maxime, Nicolas, Lian, William et Zélia, pour nos soirées parfois improbables (il faudra qu'on retourne écouter du banjo !) et Jiamin pour nos nombreuses visites de musées et pour ces charmants moments passés ensemble en fin de thèse.

Mes derniers remerciements vont à ma famille, Pierre et Hélène pour les soirées jeux, Marie, Matthieu et Lucie pour les repas à Cachan et bien sûr mes parents pour leur soutien indéfectible.

Table des matières

Introduction	1
Modélisation et stochasticité démographique	1
Modèles déterministes	2
Modèles stochastiques	3
Dynamique de populations structurées	6
Métapopulations	6
Un modèle stochastique de populations structurées	9
Panorama des résultats de cette thèse	13
Résumé des résultats de la thèse	13
Chapitre 1 : Modèles de populations structurées, approximations en grandes populations	14
Chapitre 2 : Critère de persistance pour des modèles de croissance multitypes critiques	17
Chapitre 3 : Convergence en loi d'une transformée du processus dans le cas transient	18
Chapitre 4 : Temps d'extinction et temps d'atteinte de compacts dans le cas récurrent	19
Summary of the results of this thesis	22
Chapter 1 : Structured populations models, large populations approximations	23
Chapter 2 : Persistence criterion for critical multitype stochastic growth models	26
Chapter 3 : Convergence in distribution of a transform of the process in the transient case	27
Chapter 4 : Extinction times and hitting times of compact sets in the recurrent case	28
1 Modèles de populations structurées, approximations en grandes populations	33
1.1 Modèle stochastique de populations structurées	34
1.1.1 Introduction	34
1.1.2 Limite quand la population initiale tend vers l'infini	34
1.1.3 Exemples	39

1.1.4	Comportement en temps long	51
1.2	Processus de Galton-Watson multitype critique avec immigration	55
2	Critère de persistance pour des modèles de croissance multitypes critiques	57
2.1	Modèle de croissance multitype	57
2.1.1	Introduction	57
2.1.2	Critère de croissance infinie	59
2.1.3	Applications	64
2.1.4	Appendice : construction des fonctions de Lyapounov	69
2.1.5	Exemple d'une métapopulation avec deux parcelles	77
3	Convergence en loi d'une transformée du processus dans le cas transient	81
3.1	Limite vers une loi Gamma généralisée	81
3.1.1	Introduction	81
3.1.2	Preuve du théorème 3.1	84
3.1.3	Exemple	91
3.2	Cas non quasi-polynomial	92
3.2.1	Critère de croissance infinie	92
3.2.2	Limite vers un processus de Bessel carré	95
3.2.3	Appendice : preuve des lemmes intermédiaires	99
4	Temps d'extinction et temps d'atteinte de compacts dans le cas récurrent	103
4.1	Deux régimes lents pour les modèles de croissance	104
4.1.1	Introduction et résultats principaux	104
4.1.2	Résultats préliminaires	108
4.1.3	Encadrement polynomial	111
4.1.4	Le cas markovien	114
4.1.5	Exemples	117
4.1.6	Preuve du Lemme 4.4	121
4.1.7	Résultats auxiliaires	123
4.2	Retour sur le modèle de croissance multitype	125
	Perspectives	131
	Preuves des résultats sur les processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration	133
	Outils mathématiques	137
B.1	Propriété de dichotomie	137
B.2	Fonctions de Lyapounov et surmartingales	138

B.3 Méthode des moments	140
B.4 Convergence fonctionnelle	141
Bibliographie	149

Liste des figures

1.1	Loi des grands nombres pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 2000$	41
1.2	Loi des grands nombres pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 2000$	41
1.3	Loi des grands nombres pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 100$	42
1.4	Loi des grands nombres pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 100$	42
1.5	Théorème limite central pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 2000$	43
1.6	Loi des grands nombres pour le modèle de Wright-Fisher	44
1.7	Théorème limite central pour le modèle de Wright-Fisher	44
1.8	Loi des grands nombres pour un modèle sexué	45
1.9	Loi des grands nombres pour un modèle sexué	46
1.10	Théorème limite central pour un modèle sexué	46
1.11	Loi des grands nombres pour le modèle de Nicholson-Bailey	48
1.12	Loi des grands nombres pour le modèle de Nicholson-Bailey	49
1.13	Théorème limite central pour le modèle de Nicholson-Bailey	49
1.14	Exemple d'une trajectoire du système déterministe du modèle LPA.	50
1.15	Théorème limite central pour le modèle LPA	51
3.1	Convergence en loi vers un vecteur de direction déterministe	92
3.2	Convergence en loi vers un vecteur de longueur suivant une loi Gamma	93

Introduction

Cette thèse porte sur l'étude de certains modèles stochastiques de dynamique de populations structurées. Nous considérerons des modèles en temps discret et en dimension finie pour lesquels nous répondrons aux questions suivantes :

1. Lorsque la population initiale tend vers l'infini, notre modèle stochastique converge-t-il vers un modèle déterministe ? Dans l'affirmative, peut-on mesurer l'écart entre le modèle stochastique et le modèle déterministe ?
2. Peut-on donner un critère de persistance/extinction pour les modèles que l'on considère ?
3. Dans le cas où on a persistance, comment doit-on renormaliser notre processus pour avoir un objet limite pertinent et quel est cet objet limite ?
4. Dans le cas où on a extinction avec probabilité un, que peut-on dire sur le temps d'extinction ?

Nous répondrons à la première question pour un modèle que nous introduirons dans le Chapitre 1. Ce modèle stochastique, en temps discret et de dimension finie, tient compte des différentes interactions écologiques possibles entre les individus. Ensuite, nous nous focaliserons sur un cas particulier, mais néanmoins très riche, de ce modèle pour apporter des réponses aux questions suivantes dans les Chapitres 2, 3 et 4.

Cette introduction est structurée en trois parties. Dans la première partie, nous rappelons la notion de stochasticité démographique en dynamique des populations et son importance lorsque l'on s'intéresse à des questions d'extinction de population. Dans une deuxième partie, nous présentons le concept de populations structurées et détaillons en particulier le cas des métapopulations. Nous expliquons ensuite la structure de cette thèse et énonçons les principaux résultats obtenus.

Modélisation en dynamique des populations et stochasticité démographique

Dans cette partie, nous rappelons quelques modèles déterministes à temps discret en une dimension. Nous donnons ensuite une première idée des modèles sto-

chastiques que l'on étudiera dans cette thèse.

Modèles déterministes en temps discret

La dynamique des populations est une branche de l'écologie qui s'intéresse à la variation du nombre d'individus d'une population au cours du temps. Dans toute cette thèse, nous nous intéresserons à des modèles où le temps est discret. Chaque unité de temps peut par exemple représenter une saison, une année ou plus généralement le temps de vie d'une génération d'individus. Un premier modèle naïf consiste à faire à chaque étape de temps, le bilan des naissances et des morts : étant donné x_n le nombre d'individus à la génération n , alors le nombre d'individus à la génération $n + 1$ est égal au bilan des naissances et des morts qui sont toutes les deux proportionnelles à x_n . Si on note b le taux de naissance et d le taux de mort, alors on a $x_{n+1} = x_n + bx_n - dx_n$. On obtient alors une évolution géométrique de la taille de la population, en posant $r = 1 + b - d$, on a $x_n = r^n x_0$ et donc la population croît exponentiellement si $r > 1$, reste constante si $r = 1$ et tend vers 0 exponentiellement si $r < 1$. En 1976, May [55] a proposé un modèle prenant en compte la limitation des ressources. Cette limitation entraîne que la taille de la population ne peut pas dépasser un seuil, appelé capacité biotique. Il y a une compétition entre les individus pour l'accès aux ressources. En notant K la capacité biotique et r le taux de croissance, le modèle que proposa May (que l'on appelle modèle logistique) est le suivant : $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n/K)$. Ce modèle, bien que simple, a de multiples comportements possibles en fonction du paramètre r . En particulier, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être chaotique. Par la suite, différents modèles ont été proposés pour prendre en compte la compétition entre les individus pour l'accès aux ressources. On peut citer en particulier

- le modèle de Ricker [60] : $x_{n+1} = x_n \exp(r(1 - x_n/K))$.
- le modèle de Beverton-Holt [10] : $x_{n+1} = rx_n/(1 + x_n/M)$, avec $M > 0$ et où la capacité biotique K vaut $M(r - 1)$.
- le modèle de Hassell [25] : $x_{n+1} = rx_n/(1 + x_n/M)^c$, avec $M, c > 0$ et où la capacité biotique K vaut $M(r^{1/c} - 1)$.

D'autres interactions que la compétition entre individus sont possibles. On peut penser par exemple aux modèles hôte-parasite, avec le modèle de Nicholson-Bailey [49, p.190].

Les modèles cités ci-dessus sont en temps discret. Notons que les systèmes dynamiques à temps discret à une dimension possèdent une richesse supplémentaire par rapport aux systèmes à temps continu : la possibilité d'avoir un comportement chaotique. Par exemple, pour le modèle logistique, l'équilibre $x^* = K(1 - 1/r)$ est stable si $1 < r < 3$, instable si $r > 3$. De plus, pour $3 < r < r^* \simeq 3.57$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une orbite périodique, de période 2^k où k est d'autant plus grand que r est proche de r^* . Enfin, pour $r > r^*$, le système est chaotique, c'est-à-dire qu'il vérifie ces deux conditions suivantes [29, p.73] :

1. Pour tout $x_0 > 0$ et pour tout $\delta > 0$, il existe x'_0 tel que $|x_0 - x'_0| < \delta$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partant de x'_0 est périodique.
2. Il existe une constante c telle que pour tout x_0 et pour tout $\delta > 0$, il existe x'_0 et n tels que $|x_0 - x'_0| < \delta$ et $|x_n - x'_n| > c$.

On observe le même genre de comportement pour le modèle de Ricker [15, p.243]. On peut aussi remarquer que ces différents modèles ne comptent pas les individus mais des densités de population. Il y a donc une hypothèse intrinsèque : la taille de la population est grande.

Modèles stochastiques

Si l'on regarde des petites populations, les fluctuations sur le nombre d'enfants par individu peuvent avoir un fort effet sur la taille de la population globale. On appelle cet effet la stochasticité démographique. Dans le cas de grandes populations, il y a souvent un effet de type "loi des grands nombres" qui rend ces fluctuations négligeables et donc un modèle déterministe peut être approprié.

Le choix du modèle doit donc se faire selon les questions que se posent le modélisateur. Nous regarderons des modèles individus-centrés, c'est-à-dire que nous nous placerons à l'échelle des individus où les actions locales, comme par exemple le nombre d'enfants d'un individu, peuvent dépendre d'un paramètre global, comme la taille de la population. Nous verrons en particulier comment relier nos modèles stochastiques à des modèles déterministes en temps discret ainsi que leurs différences en étudiant notamment les temps d'extinction.

La plupart des modèles stochastiques que nous considérerons sont markoviens, c'est-à-dire que la taille de la population à la génération $n+1$ ne dépend uniquement de celle à la génération n . Dans beaucoup de modèles de dynamique des populations, l'état 0 est absorbant et accessible en partant de tout autre état, on a donc la propriété de dichotomie suivante [31] dont nous rappelons la démonstration en annexe partie B.1

$$\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty) + \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}, X_k = 0) = 1. \quad (1)$$

Le comportement en temps long des modèles stochastiques peut donc être bien différent de celui des modèles déterministes.

Explicitons les modèles stochastiques que nous étudierons dans cette thèse. Dans cette partie, nous considérons des modèles unidimensionnels. Nous définissons notre processus par récurrence : soit $n \in \mathbb{N}$, étant donné $X_n \in \mathbb{N}$ individus à la génération n , chacun de ces individus donne naissance à un nombre aléatoire d'enfants, on notera $\zeta_{k,n}(X_n)$ le nombre d'enfants du k -ième individu de la génération n . On obtient l'équation suivante

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \zeta_{k,n}(X_n). \quad (2)$$

On considère que les variables aléatoires $(\zeta_{k,n}(x))_{k,n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et leurs lois ne dépendent que de $x \in \mathbb{N}$. Un exemple simple est le processus de Galton-Watson où on considère que les variables $(\zeta_{k,n}(x))_{k,n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et identiquement distribuées (et donc leur loi ne dépend pas de x). On supposera généralement que l'état 0 est absorbant et accessible de tout autre état, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}_x(X_k = 0) > 0$. Ceci implique la propriété de dichotomie (1). Posons $m(x) = \mathbb{E}(\zeta_{1,1}(x))$ et $v(x) = \mathbb{V}\text{ar}(\zeta_{1,1}(x))$. On peut alors réécrire l'équation (2) sous la forme

$$X_{n+1} = X_n m(X_n) + \xi_n,$$

où $\xi_n = \sum_{k=1}^{X_n} \zeta_{k,n}(X_n) - \mathbb{E}(\zeta_{k,n}(X_n))$. On peut remarquer que $\mathbb{E}_x(\xi_1) = 0$ et $\mathbb{E}_x(\xi_1^2) = xv(x)$. Notre modèle stochastique correspond donc au modèle déterministe

$$x_{n+1} = x_n m(x_n) \tag{3}$$

auquel on a ajouté une perturbation stochastique centrée. Cette perturbation peut complètement changer le comportement en temps long du processus. Par exemple, si le processus déterministe défini par (3) converge vers un unique équilibre x^* pour toute valeur de x_0 et que $x \mapsto m(x)$ est continue, alors il existe $M > 0$ tel que si $x > M$ alors $xm(x) < x$. Par conséquent, pour tout $x > M$, $\mathbb{E}_x(X_1) \leq x$ et le lemme de Fatou et la propriété de dichotomie impliquent que $\mathbb{P}(X_n \rightarrow 0) = 1$, la population s'éteint presque-sûrement. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x > M$, $\mathbb{E}_x(X_n) \leq \tilde{x} := \max(x, \sup\{\mathbb{E}_y(X_1), y \leq M\})$ et comme on sait que par la propriété de dichotomie X_n converge vers une variable aléatoire X_∞ à support dans $\{0\} \cap \{\infty\}$, on a par le lemme de Fatou que $\mathbb{E}_x(X_\infty) \leq \tilde{x} < \infty$ et donc $\mathbb{P}(X_\infty = 0) = 1$. Contrairement aux modèles déterministes perturbés stochastiquement qui sont généralement considérés (voir par exemple [52] ou [14]), notre perturbation stochastique $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas identiquement distribuée. De plus, sa variance dépend de X_n . Ceci nous permet d'obtenir un autre phénomène intéressant : le processus déterministe peut tendre vers l'infini alors que le processus stochastique atteint zéro presque-sûrement. Lamperti [50] montra que si $2(m(x) - 1) < v(x)$ et si $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné presque sûrement alors $\mathbb{P}(X_n \rightarrow \infty) = 0$. Höpfner [27] et Klebaner [41] ont relâché la condition " $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné presque sûrement" pour les processus de Galton-Watson état-dépendants lorsque $m(x) = 1 + c/x$ et $v(x) = v + o(1)$. Kersting [36] a ensuite généralisé ces résultats pour des processus satisfaisant

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n, \tag{4}$$

où $g(x) = o(x)$ lorsque x tend vers l'infini. Les marches aléatoires de Bessel, où $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1 | X_n = x) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1 | X_n = x) = 1/2 + \delta/x$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 1$ la marche est réfléchiée en zéro, sont un exemple de processus satisfaisant l'équation (4). Elles ont été notamment étudiées par Lamperti [51], dans le cas où $\mathbb{P}(X_n \rightarrow \infty) = 0$ c'est-à-dire $\delta < 1/4$, qui a déterminé pour

quelles valeurs de p , la valeur de $\mathbb{E}(\tau_A^p)$ était finie ou infinie, où $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \in [0, A]\}$ est le temps d'atteinte du compact $[0, A]$. Ces résultats ont ensuite été généralisés par Aspandiarov et al [5, 6, 7], où notamment un encadrement de la queue de τ_A est donné, puis par Alexander [3], où un équivalent de la queue de τ_0 est donné. Nous donnerons un encadrement de la queue de τ_A dans le Chapitre 4 pour des processus satisfaisant l'équation (4).

Malgré leurs comportements asymptotiques différents, on peut relier le processus stochastique et le processus déterministe. En effet, en faisant tendre la population initiale vers l'infini, on peut montrer que le processus stochastique converge en probabilité vers le processus déterministe sur des intervalles de temps fini. Ceci est vrai même si le processus déterministe a un comportement chaotique. Par contre, les variations du processus déterministe augmentent les fluctuations entre les deux processus à une échelle plus petite. Nous observerons ce phénomène lorsque nous donnerons un théorème limite central dans le Chapitre 1.

On introduit un paramètre d'échelle N que l'on fait tendre vers l'infini. On fait dépendre en N la loi du nombre d'enfants par individu, que l'on note $\zeta_{k,n}^N(x)$. On suppose que $\mathbb{E}(\zeta_{k,n}^N(x)) = m_N(x)$ et que $m_N(\lfloor Nx \rfloor) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} m(x)$ pour tout x . Si X_0/N tend en probabilité vers $x \in \mathbb{R}^+$, alors sur un intervalle de temps borné $[0, T]$, $T < \infty$, le processus stochastique $(X_n^N/N)_{n \in \{0, \dots, T\}}$ converge en probabilité vers le processus déterministe défini par (3).

Aussi, Kersting [37] montra que pour un processus vérifiant l'équation (4) et sous quelques hypothèses supplémentaires, en conditionnant sur l'événement $\{X_n \rightarrow \infty\}$, alors X_n/x_n converge en loi vers une loi Gamma généralisée. Dans certains cas [38], il obtient même la convergence presque-sûre de X_n/x_n vers une limite finie. Dans le Chapitre 3, nous montrerons, pour un processus multidimensionnel, la convergence en loi de X_n/x_n vers une variable aléatoire W . On a donc l'estimation $X_n \simeq x_n W$, l'effet stochastique est multiplicatif. Ceci nous montre que lorsque le processus stochastique est grand, son comportement est très lié à celui du processus déterministe associé. Le lien entre modèle stochastique et modèle déterministe a aussi été étudié dans le cadre des métapopulations (modèle que nous décrirons dans la prochaine partie) par Arrigoni [4].

Nous tenons aussi à souligner que l'espérance du processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne suit pas le système dynamique (3). En effet,

$$\mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{X_1} \zeta_{k,1}(X_1)\right) = \mathbb{E}(X_1 m(X_1)) \neq f \circ f(X_0)$$

où $f : x \mapsto xm(x)$. En fait, les deux suites $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne coïncident que dans les modèles linéaires, c'est-à-dire lorsque le nombre moyen d'enfants par individus est une constante ne dépendant pas de la taille de la population à la génération précédente. Ce cas correspond au cas d'égalité de l'inégalité de Jensen lorsque f est convexe.

En conclusion de cette partie, donnons un exemple de modèle stochastique.

Exemple 1. *On reprend le modèle de Ricker cité plus haut. À la génération n , chacun des X_n individus se reproduit et le k -ième individu, $k \in \{1, \dots, X_n\}$, donne naissance à un nombre aléatoire $\zeta_{k,n}(X_n)$ d'enfants. Les variables $(\zeta_{k,n}(x))_{k,n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et leur loi ne dépend que de $x \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(\zeta_{k,n}(x)) = \exp(r(1 - x/K))$ où r et K sont des constantes positives, K correspondant à la capacité biotique. On introduit un paramètre d'échelle N que l'on fait tendre vers l'infini. On fait désormais dépendre en N la loi du nombre d'enfants par individu, que l'on note $\zeta_{k,n}^N(x)$. On suppose que $\mathbb{E}(\zeta_{k,n}^N(x)) = \exp(r(1 - x/(NK)))$. Si X_0/N tend en probabilité vers $x \in \mathbb{R}^+$, alors sur un intervalle de temps borné $[0, T]$, $T < \infty$, le processus stochastique $(X_n^N/N)_{n \in \{0, \dots, T\}}$ converge en probabilité vers le processus déterministe défini par*

$$x_{n+1} = x_n \exp(r(1 - x_n/K)), \quad x_0 = x.$$

Le comportement en temps long du processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement simple. En effet, si l'on suppose que pour tout $x \in \mathbb{N}^$, $\mathbb{P}(\zeta_{1,1}(x) = 0) > 0$, alors on en déduit la propriété de dichotomie (1). Comme pour $x > K$ on a que $\mathbb{E}_x(X_1) < x$, on en déduit par le lemme de Fatou que $\mathbb{P}(X_n \rightarrow 0) = 1$, la population s'éteint presque-sûrement.*

Dynamique de populations structurées

Dans cette thèse, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas des populations structurées, c'est-à-dire des populations avec un nombre fini de types, avec des interactions entre les différents types. Un type peut correspondre à un génotype, un phénotype, un habitat, etc. On peut même construire des types plus complexes comme par exemple un couple génotype-habitat. Les interactions entre les types peuvent donc être tout aussi variées : cela peut être des mutations, de la compétition, de la prédation, de la migration, etc.

Métapopulations

Dans cette partie, nous détaillons un exemple de populations structurées : les métapopulations. Dans toute cette thèse, nous donnerons un exemple d'application des différents résultats mathématiques pour ces modèles en particulier. Historiquement, le concept de métapopulations a été introduit par Levins dans [53]. Une métapopulation est un ensemble de populations dont l'habitat est fragmenté en de multiples parcelles. Dans son modèle initial, Levins s'intéresse en particulier à l'occupation des parcelles. Au cours du temps, il y peut y avoir deux types d'événements :

- la colonisation d'une parcelle vide,
- l'extinction d'une population sur une parcelle occupée.

En supposant que le nombre de parcelles est infini et que le nombre de parcelles colonisées est proportionnel aux nombres de parcelles vides et de parcelles occupées, on obtient, en notant x la proportion de parcelles occupées, c le taux de colonisation et e le taux d'extinction, l'équation différentielle suivante

$$\frac{dx}{dt} = cx(1 - x) - ex.$$

Si $c > e$, alors cette équation a deux équilibres, 0 qui est instable et $(c - e)/c$ qui est stable et attracteur. Si $c \leq e$, alors 0 est le seul équilibre et est attracteur.

Ce modèle est très simple d'un point de vue mathématique et n'est pas très réaliste [24]. Il a donné lieu à de multiples extensions. En effet, il n'y a aucune distinction entre les différentes parcelles, alors qu'elles peuvent être de qualités différentes et pas nécessairement toutes connectées. Aussi, ce modèle ne tient pas compte de la dynamique sur chacune des parcelles. Pulliam, dans [58], a considéré un modèle avec un ensemble hétérogène de parcelles, où chaque sous-population a sa propre dynamique. En particulier, il différencie les parcelles en deux types : les **puits**, où le taux de reproduction est plus faible que le taux de mortalité et donc sans l'apport de migrants, la population aurait tendance à s'éteindre ; et les **sources**, où au contraire le taux de reproduction est plus élevé que le taux de mortalité. L'apport de migrants venant de parcelles de type source peut permettre de maintenir les parcelles de type puits occupées. On peut alors s'interroger sur l'existence des parcelles de type puits. Si ce sont des habitats défavorables, pourquoi sont-elles occupées ? Dans un modèle proies-prédateurs avec une parcelle où les proies sont présentes, qui est de type source pour les prédateurs, et une parcelle où les proies sont absentes, de type puits pour les prédateurs, Holt [26] montre qu'un taux de migration non nul de la source vers le puits donne une population totale à l'équilibre plus grande que si le taux de migration était nul. Ceci montre que l'existence de parcelles de type puits peut être un avantage pour la population globale.

Comme on l'a vu dans la partie précédente, lorsqu'on s'intéresse à la persistance et l'extinction, on est dans le cas de petites populations et il faut donc prendre en compte la stochasticité démographique. On pourrait donc représenter une métapopulation puits-sources par un processus de Galton-Watson multitype, chaque type correspondant à une parcelle. De plus, déterminer si un processus de Galton-Watson multitype s'éteint presque-sûrement est relativement simple (on pourra consulter par exemple [57]). On obtient alors un critère pour déterminer si la population s'éteint ou pas, et dans le cas où elle ne s'éteint pas, donner la proportion de la population totale qui est dans chacune des parcelles. Plus formellement, en considérant d parcelles, $s_i \geq 0$ le nombre moyen d'enfants par individus de la parcelle i et $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'un enfant né sur la parcelle i migre vers la parcelle j , on obtient pour l'espérance de X_n le vecteur de la taille de la population à la génération n l'équation de récurrence suivante

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)M,$$

où $M = PS$, où $P = (p_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, a\}}$ est la matrice de dispersion (qui est une matrice stochastique) et S est la matrice diagonale des s_i . Si $s_i \leq 1$ alors la parcelle i est un puits, si au contraire $s_i > 1$ alors la parcelle i est une source. Le critère de persistance/extinction revient à regarder le rayon spectral ρ de la matrice M . Si $\rho \leq 1$, alors la métapopulation s'éteint presque-sûrement, si $\rho > 1$ alors la taille de la population peut tendre vers l'infini avec probabilité non nulle. Dans [9], les auteurs proposent une méthode alternative au calcul du rayon spectral pour donner un critère de persistance/extinction car l'interprétation biologique du rayon spectral est malaisée. L'idée est de considérer un marcheur aléatoire partant de la parcelle 1, en notant Z_n sa position au temps n et T le temps de retour à la parcelle 1, qui effectue une marche aléatoire entre les parcelles avec des probabilités de transition données par la matrice P et de comparer la valeur

$$R = s_1 \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{T-1} s_{Z_n} \right)$$

avec 1. Il y a persistance avec probabilité strictement positive si et seulement si $R > 1$. Ce critère permet de séparer l'effet de la dispersion et l'effet de la démographie. Les auteurs étendent ensuite ce résultat pour le cas d'un environnement périodique affectant seulement la reproduction, donc les coefficients s_i , et étant donné un environnement e , le nombre moyen d'enfants par individus de la parcelle i sera $s_i(e)$. En considérant le cas avec deux environnements possibles e_1 et e_2 qui alternent périodiquement, une parcelle est de type puits si $s_i(e_1)s_i(e_2) \leq 1$ et un puits si cette quantité est strictement plus grande que 1. Un phénomène très intéressant des environnements périodiques est que même si toutes les parcelles sont de type puits alors il peut y avoir persistance de la métapopulation (voir la remarque 4 dans [9]).

On peut reprendre les questions posées en début d'introduction dans le cadre des métapopulations et l'on verra notamment l'influence des interactions entre individus :

1. Notre modèle stochastique de métapopulations converge-t-il vers un modèle déterministe lorsque la population initiale tend vers l'infini ? Si oui, à quelle vitesse ?
2. La dispersion, peut elle permettre la persistance d'une métapopulation qui s'éteindrait sans migration ?
3. Dans le cas où on a persistance, à quelle vitesse grandit la population et quel est l'effet de la dispersion sur cette vitesse ?
4. Dans le cas où on a extinction, quel est l'effet de la dispersion sur le temps d'extinction ?

Un modèle stochastique de populations structurées

Dans cette thèse, nous proposons un modèle stochastique en temps discret et en dimension finie tenant compte des interactions possibles entre les individus comme par exemple la compétition. On parle d'état-dépendance, c'est-à-dire que le nombre moyen d'enfants par individu n'est plus constant au cours du temps mais dépend de la taille de la population. Des exemples de processus satisfaisant ces conditions sont les processus de Galton-Watson état-dépendants multitypes. Les processus de Galton-Watson état-dépendants monotypes ont été introduits simultanément par Klebaner dans [41] et par Höpfner dans [27]. Ils ont notamment mis en exergue un cas critique où le comportement asymptotique du processus (persistance ou extinction) dépend de la variance. Dans une série d'articles [42, 48, 44], Klebaner a introduit les processus de Galton-Watson multitypes état-dépendants et a donné des conditions suffisantes pour la persistance et l'extinction de la population. L'idée principale est de se ramener au cas simple type en projetant le processus le long d'une direction. Néanmoins, certains cas ne satisfont aucune de ces conditions et nous donnerons donc un critère dans le Chapitre 2, permettant de déterminer (sauf dans quelques cas très particuliers) si on a extinction presque-sûre de la population ou pas.

Le modèle général que nous introduisons s'écrit sous la forme

$$\mathbf{X}_{n+1} = \sum_{\ell=1}^L F_{\ell}(\mathbf{X}_n) \sum_{j=1}^{F_{\ell}(\mathbf{X}_n)} \zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{X}_n), \quad (5)$$

où L est le nombre d'interactions écologiques, $F_{\ell}(\mathbf{X}_n)$ est le nombre d'événements en un pas de temps pour l'interaction numéro ℓ et les variables aléatoires $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{X}_n)$ correspondent au nombre de naissances pour chacun de ces événements. Les $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k})$ sont des variables aléatoires indépendantes, à valeur dans \mathbb{N}^d , et la loi de $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k})$ ne dépend que de ℓ et \mathbf{k} , c'est-à-dire qu'il existe des variables aléatoires $\zeta_{\ell}(\mathbf{k})$ telles que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{loi}}{=} \zeta_{\ell}(\mathbf{k})$. Comme précédemment, nous pouvons décomposer ce processus sous la forme

$$\mathbf{X}_{n+1} = H(\mathbf{X}_n) + \xi_n \quad (6)$$

où $H(\mathbf{X}_n) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_{n+1} | \mathbf{X}_n) = \sum_{\ell=1}^L F_{\ell}(\mathbf{X}_n) \mathbb{E}(\zeta_{\ell}(\mathbf{X}_n))$ et donc $\mathbb{E}(\xi_n | \mathbf{X}_n) = 0$. On obtient donc un processus déterministe associé à notre processus stochastique satisfaisant l'équation

$$\mathbf{x}_{n+1} = H(\mathbf{x}_n).$$

Nous montrerons en particulier la convergence en probabilité du processus stochastique vers ce processus déterministe lorsque la population initiale tend vers l'infini et nous quantifierons aussi les écarts entre ces deux processus par un théorème limite central, généralisant ainsi les travaux précédents [63, 45]. Pour déterminer le comportement en temps long du processus, on peut se ramener à la dimension

1, en cherchant par exemple un vecteur à coordonnées positives \mathbf{u} tel qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, si $\|\mathbf{x}\| > K$ alors on a $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_1 \mathbf{u}) \leq \mathbf{x} \mathbf{u}$. Ceci revient à chercher une fonction de Lyapounov linéaire. Si en plus de cette fonction de Lyapounov, $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété de dichotomie, alors on conclut que $\mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}, \mathbf{X}_k = 0) = 1$ par le lemme de Fatou. Nous nous intéresserons surtout au cas où $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit une équation de type linéaire perturbée, c'est-à-dire

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n, \quad (7)$$

où M est une matrice irréductible à coefficients positifs et $g : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est une fonction telle que $\|g(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}\|)$ lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend vers l'infini. Ceci est un cas particulier de l'équation (5) lorsque par exemple

- $L = d$
- $F_\ell(\mathbf{x}) = x_\ell$, pour tout $\ell \in \{1, \dots, d\}$
- $\mathbb{E}(\zeta_\ell(\mathbf{x})) = \mathbf{c}_\ell + \mathbf{r}_\ell(\mathbf{x})$, pour tout $\ell \in \{1, \dots, d\}$

avec \mathbf{c}_ℓ des vecteurs à coordonnées positives et \mathbf{r}_ℓ des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}_+^d telles que $x_\ell \mathbf{r}_\ell(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$, lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend vers l'infini. Le comportement en temps long du processus est principalement caractérisé par le rayon spectral ρ de la matrice M . Si $\rho < 1$, alors en prenant \mathbf{u} un vecteur propre à droite de M associé à ρ , on peut trouver $K > 0$ tel que si $\|\mathbf{x}\| > K$, alors on a $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_1 \mathbf{u}) \leq \mathbf{x} \mathbf{u}$. Si $\rho > 1$, et en supposant de plus qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(|\xi_1 \mathbf{u}|^{1+\delta}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^\delta)$, où \mathbf{u} désigne encore un vecteur propre à droite de M associé à ρ , et en supposant aussi que \mathbf{X}_n peut sortir de tout compact avec probabilité non nulle, alors on montrera que $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$.

Le cas $\rho = 1$ n'a été que partiellement étudié [32, 42, 48, 44]. Le but de cette thèse est principalement de complètement déterminer le comportement en temps long de \mathbf{X}_n lorsque $\rho = 1$. Nous verrons en particulier que les quantités $g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u}$ et $\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathbf{X}_n)$ interviennent pour déterminer si $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$ ou $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$. Si $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$, nous montrerons une limite en loi d'une transformée de \mathbf{X}_n . Enfin, lorsque $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$, nous déterminerons à quelle vitesse \mathbf{X}_n atteint des ensembles compacts de la forme $\{\mathbf{x} \mathbf{u} \leq A\}$, c'est-à-dire nous donnerons un encadrement de la queue du temps d'atteinte de ces ensembles compacts, en nous inspirant des travaux d'Aspandiarov et al [5, 6, 7] qui ont traité certains cas en dimension 1. Dans certains cas, ceci nous permettra aussi de donner un encadrement de la queue du temps d'extinction de \mathbf{X}_n .

Le modèle (7) est particulièrement adapté à l'étude des métapopulations. En effet, reprenons le modèle de [9] ci-dessus, on fait désormais dépendre le nombre moyen d'enfants par individu de la taille de la population, c'est-à-dire on pose $s_i(\mathbf{x})$ le nombre moyen d'enfants d'un individu de la parcelle i lorsque la taille de la population est égal au vecteur \mathbf{x} . On suppose que $s_i(\mathbf{x}) = s_i + r_i(\mathbf{x}_i)$, où s_i est une constante positive et $r_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r_i(x) = 0,$$

pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. On peut alors vérifier que $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (7) avec $M = PS$ et $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}PR(\mathbf{x})$ où $R(\mathbf{x})$ est la matrice diagonale des $r_i(\mathbf{x})$. Dans le Chapitre 2, nous donnerons un critère de persistance/extinction pour cet exemple. Dans le Chapitre 3, nous montrerons la convergence en loi de $\mathbf{X}_n/n^{1/(1-\alpha)}$ (où α est un paramètre du modèle) vers une loi Gamma généralisée le long d'une direction déterministe dans le cas où on a persistance. Puis dans le Chapitre 4, nous donnerons un encadrement de la queue du temps d'extinction dans le cas où on a extinction presque-sûre.

Panorama des résultats de cette thèse

Résumé des résultats de la thèse

Cette thèse est constituée de quatre chapitres. Dans le Chapitre 1, nous proposons un modèle stochastique à temps discret de dynamique de populations structurées. À partir de ce modèle, nous montrons, d'une part, la convergence en probabilité vers le modèle déterministe sous-jacent lorsque la population initiale tend vers l'infini et, d'autre part, nous quantifions à l'aide d'un théorème limite central l'écart entre le modèle stochastique et le modèle déterministe. Ensuite, nous donnons des critères de persistance et extinction pour ce type de modèles. Nous illustrons ces résultats par une large gamme d'exemples issus de la génétique et de l'écologie. Nous mettons aussi en évidence un cas, que nous qualifierons de "critique", pour lequel le critère de persistance/extinction nécessite une analyse plus fine et dont tout le reste de cette thèse est consacré. Un cas très particulier de ce cas critique est le processus de Galton-Watson multitype critique avec immigration. Nous rappelons quelques résultats sur ce processus dont nous nous inspirerons, bien que nos preuves seront complètement différentes car notre modèle général ne vérifie pas la propriété de branchement.

Le Chapitre 2 est consacré au cas critique que l'on vient d'évoquer. Nous proposons d'abord un modèle, que l'on appelle modèle stochastique de croissance multitype, qui est une généralisation du modèle monotype proposé par Kersting dans [36]. En construisant des fonctions de Lyapounov pour le processus, nous obtenons un critère de persistance/extinction. Nous améliorons ainsi les résultats obtenus par Klebaner dans [42, 44, 48].

Dans le Chapitre 3, en ajoutant comme condition l'existence de moments de tout ordre sur les processus vus dans le Chapitre précédent, nous obtenons la limite en loi de notre processus renormalisé vers un vecteur aléatoire, de direction déterministe et de longueur suivant une loi Gamma généralisée. Nous conjecturons ensuite une limite fonctionnelle d'une transformée de notre processus vers la solution d'une équation différentielle stochastique, un processus de Bessel carré, dans un cadre légèrement plus général que celui du Chapitre précédent. Ce résultat est un travail en cours Götz Kersting, nous donnons quelques éléments de preuve.

Dans le quatrième et dernier Chapitre, nous nous intéressons au temps d'extinction et d'atteinte de compacts de l'espace d'états. Nous donnons un encadrement de la queue du temps d'atteinte d'un compact pour un modèle stochastique de croissance récurrent à un type. Si le processus est une chaîne de Markov irréductible et apériodique, alors nous donnons un critère de récurrence nulle ou de récurrence positive avec dans ce cas un taux de convergence sous-géométrique du noyau de transition vers la mesure de probabilité invariante. Nous étendons ensuite ce résultat pour une classe de processus multitypes qui concerne la plupart de nos applications.

Chapitre 1 : Modèles de populations structurées, approximations en grandes populations

Nous introduisons d'abord un modèle stochastique à temps discret d'espace d'états \mathbb{N}^d pour des populations structurées. On considère une population avec d types avec des interactions possibles entre les types. Pour déterminer le nombre d'individus à la génération $n + 1$, on considère d'abord l'ensemble des interactions écologiques (cela peut être des naissances, morts, de l'immigration, des mutations, de la prédation, etc) et pour chacune de ces interactions, un certain nombre d'événements aléatoires peuvent avoir lieu. Plus formellement, chaque coordonnée du vecteur \mathbf{X}_n correspond au nombre d'individus d'une sous-population et on a la relation de récurrence

$$\mathbf{X}_{n+1} = \sum_{\ell=1}^L \sum_{j=1}^{F_{\ell}(\mathbf{X}_n)} \zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{X}_n),$$

où L est le nombre d'interactions écologiques, $F_{\ell}(\mathbf{X}_n)$ est le nombre d'événements en un pas de temps pour l'interaction numéro ℓ et les variables aléatoires $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{X}_n)$ correspondent au nombre de naissances pour chacun de ces événements. Les $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k})$ sont des variables aléatoires indépendantes, à valeur dans \mathbb{N}^d , et la loi de $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k})$ ne dépend que de ℓ et \mathbf{k} , c'est-à-dire qu'il existe des variables aléatoires $\zeta_{\ell}(\mathbf{k})$ telles que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{loi}}{=} \zeta_{\ell}(\mathbf{k})$. Ce modèle, très général, permet de considérer des modèles de natures différentes. On peut prendre comme exemple des modèles de métapopulations puits-sources, des modèles hôte-parasite, des modèles de génétique des populations comme le modèle de Wright-Fisher, des modèles de reproduction sexuée, etc, que l'on exposera dans la partie 1.1.3.

Le premier résultat de ce Chapitre est un résultat de type "loi des grands nombres", où on montre que si la population initiale tend vers l'infini, alors sur tout intervalle de temps fini fixé, le processus stochastique converge en probabilité vers un certain processus déterministe. Plus formellement, on introduit un paramètre d'échelle N , la loi de $\zeta_{\ell}(\mathbf{k})$ se met à dépendre de N et on la note $\zeta_{\ell}^N(\mathbf{k})$. On fait aussi dépendre de N le nombre d'événements par interaction que l'on note désormais $F_{\ell}^N(\mathbf{X}_n^N)$. Pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$, on pose

$$m_{\ell}^N(\mathbf{k}) := \mathbb{E}(\zeta_{\ell}^N(\mathbf{k})),$$

le nombre moyen d'individus issus d'un événement de l'interaction ℓ .

On introduit aussi

$$V_\ell^N(\mathbf{k}) := \text{Cov}(\zeta_\ell^N(\mathbf{k})),$$

la matrice de covariance du vecteur aléatoire ζ_ℓ^N .

On suppose qu'il existe des fonctions continues m_ℓ telles que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = m_\ell(\mathbf{x}), \quad \text{pour tout } \ell \text{ et pour tout } \mathbf{x},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = 0, \quad \text{pour tout } \ell \text{ et pour tout } \mathbf{x}$$

ceci de façon uniforme localement en \mathbf{x} .

De plus, nous supposons qu'il existe des fonctions f_ℓ telles que pour tout ℓ et pour tout \mathbf{x} ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} F_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = f_\ell(\mathbf{x})$$

de façon uniforme localement en \mathbf{x} .

On a alors le résultat suivant :

Proposition 1 (page 35). *Le processus \mathbf{X}^N/N issu de $\lfloor N\mathbf{x} \rfloor$ individus converge en probabilité sur tout intervalle de temps fini, vers le système dynamique défini par*

$$\mathbf{x}_{n+1} = H(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}.$$

où

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^L f_\ell(\mathbf{x}) m_\ell(\mathbf{x}) \tag{8}$$

On peut alors se demander comment fluctue le processus stochastique autour du processus déterministe. Ceci est l'objet du théorème limite central suivant :

Proposition 2 (page 37). *On reprend les hypothèses précédentes. On suppose aussi que H est différentiable et que l'on a les conditions suivantes :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_\ell^N(N\mathbf{x}) = V_\ell(\mathbf{x}) \quad \text{pour tout } \ell \text{ et pour tout } \mathbf{x},$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left(\left\| \zeta_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) - \mathbb{E}(\zeta_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor)) \right\|_\infty^3 \right)}{\sqrt{N}} = 0 \quad \text{pour tout } \ell \text{ et pour tout } \mathbf{x},$$

ces deux convergences étant localement uniformes en \mathbf{x} .

On note

$$A_n = \sum_{\ell=1}^L f_\ell(\mathbf{x}_n) V_\ell(\mathbf{x}_n).$$

Alors, quand N tend vers l'infini, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{N} \left(\frac{\mathbf{X}_n^N}{N} - \mathbf{x}_n \right) \xrightarrow{\text{en loi}} \mathcal{N}(0, D_n),$$

où la suite de matrices $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence par

$$D_{n+1} = J_H(\mathbf{x}_n) D_n J_H(\mathbf{x}_n)^\top + A_n, \quad D_0 = 0,$$

où $J_H(\mathbf{x})$ est la matrice jacobienne de la fonction H , définie en (8), au point \mathbf{x} .

On illustrera ensuite ces deux résultats avec plusieurs exemples : un modèle de métapopulations, le modèle de Wright-Fisher, un modèle de reproduction sexuée, le modèle de Nicholson-Bailey qui est un modèle hôtes-parasites, le modèle dit LPA qui est un modèle avec une structure d'âge et du cannibalisme.

Enfin, nous nous intéresserons à la nature en temps long du processus. S'éteint-il presque sûrement ? La population totale peut-elle tendre vers l'infini ? Nous rappellerons d'abord un résultat de González et al [22] qui détermine si $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$ à l'aide de fonctions de Lyapounov linéaires. Ce critère s'appliquera pour la plupart des exemples que nous donnerons. Néanmoins, nous remarquerons que ce critère est incomplet pour la classe de modèles suivante. On considèrera un processus satisfaisant une équation de récurrence de type linéaire perturbée, c'est à dire

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

où \mathbf{X}_n est un vecteur ligne (tous les produits considérés seront des produits matriciels), M est une matrice irréductible $d \times d$ à coefficients positifs, $g : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$, qui correspond à notre perturbation que l'on appellera parfois "drift", une fonction telle que $\|g(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}\|)$ lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend vers l'infini, et (ξ_n) une suite de vecteurs aléatoires (à valeurs dans \mathbb{R}^d) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathbf{X}_n) = 0.$$

Nous supposons que $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ et que les vecteurs aléatoires ξ_n sont tels que pour tout n , \mathbf{X}_n est à valeur dans \mathbb{R}_+^d presque-sûrement. On note ρ la valeur propre maximale de M et on note \mathbf{u} et \mathbf{v} les vecteurs propres à droite et à gauche associés et tels que $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$. On suppose qu'il existe $\delta \geq 0$ tel que $\mathbb{E}(|\xi_n \mathbf{u}|^{1+\delta} | \mathbf{X}_n = \mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^\delta)$. On obtiendra le critère suivant.

Proposition 3 (page 53).

- i) Si $\rho > 1$, alors $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$.
- ii) Si $\rho < 1$, alors $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$.

Le cas $\rho = 1$ est étudié en profondeur dans le Chapitre 2.

Nous rappelons ensuite des résultats dûs à Kawazu [34] sur les processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration. Ces processus sont un cas

très particulier de processus vérifiant l'équation (9) avec $\rho = 1$, car ils possèdent la propriété de branchement. Dans les Chapitres suivants, nous nous inspirerons de ces résultats pour donner un critère de récurrence/transience, une limite d'échelle dans le cas transient, un encadrement asymptotique du temps d'atteinte d'ensembles compacts dans le cas récurrent, pour notre modèle plus général. Nous donnerons des preuves de ces résultats en appendice pour les processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration. Ces preuves reposent sur la propriété de branchement qui permet d'utiliser les fonctions génératrices. Les preuves de nos résultats dans les Chapitres 2, 3 et 4 seront complètement différentes car notre modèle général ne possède pas la propriété de branchement.

Chapitre 2 : Critère de persistance pour des modèles de croissance multitypes critiques

Dans ce Chapitre, nous donnons un critère de croissance infinie pour des modèles vérifiant l'équation (9). On donnera en particulier l'exemple d'une métapopulation puits-source avec deux parcelles qui s'éteint presque-sûrement sans les migrations entre parcelles, mais qui persiste pour certaines distribution de probabilités de migration.

On considère un processus satisfaisant l'équation (9) où le rayon spectral ρ de la matrice M vaut 1 et on cherche à déterminer si $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$ ou pas. En posant \mathbf{u} et \mathbf{v} les vecteurs propres à droite et à gauche associés à ρ et tels que $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top\mathbf{u} = 1$, on peut presque se ramener à un problème en dimension 1 en remarquant que

$$\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} = \mathbf{X}_n\mathbf{u} + g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u} + \xi_n\mathbf{u}.$$

Néanmoins, les termes $g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u}$ et $\sigma^2(\mathbf{X}_n) = \mathbb{E}((\xi_n\mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n)$ (où $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond à la filtration naturelle associée à $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) ne dépendent pas forcément que de $\mathbf{X}_n\mathbf{u}$. On peut aussi remarquer, sous des hypothèses raisonnables sur la fonction g , que $\mathbb{E}(\mathbf{X}_n)$ tend vers l'infini et que $\mathbb{E}(\mathbf{X}_n)/\|\mathbb{E}(\mathbf{X}_n)\|$ tend vers le vecteur $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. On peut donc séparer \mathbf{X}_n en deux termes : d'une part la contribution dans la direction \mathbf{v} et d'autre part le reste, *i.e.* $\mathbf{X}_n = (\mathbf{X}_n\mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{X}_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})$. On notera $\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})$ et pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, on notera $\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})$.

On suppose que les fonctions $g(\cdot)\mathbf{u}$ et σ^2 ont un terme dominant en $c_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha$ et $d_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^{1+\alpha}$ respectivement, où $\alpha \in (-1, 1)$. Plus formellement, on suppose que

$$g(\mathbf{x})\mathbf{u} = c_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^\alpha) + o(\|\mathbf{x}\|^\alpha),$$

et

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = d_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^{1+\alpha} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{1+\alpha}) + o(\|\mathbf{x}\|^{1+\alpha}).$$

Dans la plupart des modèles de dynamiques de populations, on est dans le cas où $\alpha = 0$ car la variance du nombre d'enfants par individu ne tend ni vers zéro, ni vers l'infini lorsque la taille de la population tend vers l'infini.

Sous quelques autres hypothèses techniques sur les fonctions g et σ^2 , on obtient le résultat suivant :

Théorème 1 (page 60).

- i)* Si $c_1 < \frac{d_1}{2}$ alors $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow +\infty) = 0$.
- ii)* Si $c_1 > \frac{d_1}{2}$ alors $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow +\infty) > 0$.

La preuve de ce théorème est basée sur une méthode de fonctions de Lyapounov. On montre en effet que les fonctions $x \mapsto \log x$ et $x \mapsto 1/\log x$ sont des fonctions de Lyapounov pour le processus $(\mathbf{X}_{nk}\mathbf{u})_{n \in \mathbb{N}}$ où k est un certain entier fixé. On retrouve, en particulier, le critère de récurrence/transience des processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration de [34]. Nous pouvons appliquer notre critère sur des processus ne vérifiant pas la propriété de branchement comme les processus de Galton-Watson multitypes états-dépendant étudiés par Klebaner dans [44]. Enfin, nous donnerons l'exemple d'une métapopulation constituée de deux parcelles de types puits mais qui néanmoins peut persister. On regardera notamment l'effet des taux de migration sur la persistance et pour certains cas, nous donnerons un seuil γ_0 pour la quantité $\gamma = p_{2,1}/(p_{1,2} + p_{2,1})$ (où $p_{i,j}$ correspond au taux de migration de la parcelle i vers la parcelle j) tel que si $\gamma > \gamma_0$ alors on a extinction presque-sûre, si $\gamma < \gamma_0$ alors on a persistance avec probabilité non nulle. On voit donc que la dispersion peut avoir un impact important sur le comportement du processus en temps long et donc sur des questions de persistance/extinction.

Chapitre 3 : Convergence en loi d'une transformée du processus dans le cas transient

Dans ce Chapitre, nous étudierons le comportement de \mathbf{X}_n lorsque $\|\mathbf{X}_n\|$ tend vers l'infini. Comme cela avait été démontré pour le cas de la dimension 1 (on peut citer par exemple [27, 37, 43]) ou pour certaines situations dans le cas de la dimension d (voir par exemple [44]), on obtient une limite en loi vers une loi Gamma généralisée. Plus précisément, on montrera que sous les hypothèses du Théorème 1 ii) et des hypothèses sur l'existence de moments de tout ordre pour ξ_n , alors $\mathbf{X}_n/n^{1/(1-\alpha)}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire de direction \mathbf{v} (donc non aléatoire) et de longueur W , où $W^{1-\alpha}$ suit une loi Gamma de paramètres que l'on précisera. C'est le théorème suivant

Théorème 2 (page 83). Soit $q = \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty)$.

Alors, $\mathbf{X}_n/n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ converge loi vers un vecteur aléatoire $\mathbf{v}W$ de direction déterministe \mathbf{v} , et de longueur aléatoire W . La loi de W a un atome de taille $1 - q$ à l'origine et $W^{1-\alpha}$ a pour densité q fois la densité d'une loi Gamma de paramètres $\frac{2c_1 - d_1\alpha}{d_1 - d_1\alpha}$ et $\frac{2}{d_1(1-\alpha)^2}$.

La preuve est basée sur la méthode des moments : on montre que les moments de $\mathbf{X}_n/n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ convergent vers ceux d'une certaine loi, voir la partie B.3 de l'Appendice.

Si ces moments permettent de définir une fonction génératrice des moments sur un ouvert contenant 0, alors par unicité, on peut donner la loi limite. La preuve est inspirée de [43], la difficulté supplémentaire étant de contrôler des termes de la forme $\mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\alpha} \|\mathbf{Y}_n\|^\alpha \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right)$.

Nous donnerons enfin dans une deuxième partie, une généralisation du Théorème 2.1 dû à Kersting [39] dans le cas où les fonctions g et σ^2 ne sont plus de forme quasi-polynomiales. Ensuite, par un changement d'échelle de temps, nous conjecturerons la limite en loi d'une fonction de notre processus vers la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{Z_s} dB_s + ct,$$

avec $x \geq 0$ et $c > 0$. Les solutions de cette équation sont appelées des processus de Bessel carré de dimension c . Ils correspondent aussi à la norme euclidienne au carré d'un mouvement brownien en dimension c , lorsque c est entier. Pour une étude plus détaillée sur ces processus, nous invitons le lecteur à consulter [59, p. 439].

La fonction de notre processus que l'on va considérer est la fonction G définie par

$$G(x) = \int_1^x \frac{ds}{g(sv)}.$$

Heuristiquement parlant, on a $\mathbb{E}(G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})) = \mathcal{O}(n)$. On va conjecturer la convergence en loi du processus défini par

$$Z_n(t) = \frac{1}{n} G(\mathbf{X}_{[nt]} \mathbf{u}).$$

On supposera aussi que $g(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x}\mathbf{u}\mathbf{v})$ d'une part et $\sigma^2(\mathbf{x})$ et $\sigma^2(\mathbf{x}\mathbf{u}\mathbf{v})$ d'autre part sont proches lorsque $\|\mathbf{x}\|$ est grand.

Conjecture 1 (page 96). *Sous des hypothèses assurant que $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$ on a que, sur l'événement $\{\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}$, $\frac{4}{\beta} Z_n(t)$ converge en loi vers un processus de Bessel carré de dimension $\frac{4}{\beta} - 2\lambda + 2$ partant de 0, où β et λ sont des paramètres que l'on peut expliciter.*

On retrouvera cette transformation $G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})$ dans le Chapitre 4, elle aura un rôle très important dans l'étude de la queue du temps d'extinction.

Chapitre 4 : Temps d'extinction et temps d'atteinte de compacts dans le cas récurrent

Dans ce Chapitre, on souhaite déterminer la queue du temps d'atteinte d'ensembles compacts de la forme $[0, A]$ pour des processus vérifiant l'équation de récurrence (9). Avant d'étudier le cas de la dimension $d > 1$, nous allons d'abord traiter le cas de la dimension $d = 1$.

On considère un processus stochastique à valeurs dans \mathbb{R}_+ vérifiant l'équation de récurrence

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n,$$

où $g(x) = o(x)$ lorsque x tend vers l'infini et $\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$ pour tout n , où $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est la filtration associée à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que g est une fonction différentiable et que

$$\exists M > 0, c_1 > 0 \text{ et } \varepsilon > 0, \text{ tels que } \forall x > M, \forall y > (1 - \varepsilon)x, xg(x) \leq c_1 y g(y).$$

On suppose aussi que (X_n) vérifie une sorte de version faible de la propriété de Markov, c'est à dire qu'il existe une fonction σ^2 telle que

$$\sigma^2(X_n) := \mathbb{E}(\xi_n^2 | \mathcal{F}_n) < \infty,$$

c'est-à-dire que l'espérance conditionnelle ne dépend que de X_n .

Enfin, on suppose aussi que

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}_+, \mathbb{E}_x(|\xi_1|^{4+\delta}) \leq C \sigma^{4+\delta}(x).$$

Kersting [36] a montré que si

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} < 1,$$

alors $\mathbb{P}(X_n \rightarrow \infty) = 0$, et que si

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} > 1,$$

alors $\mathbb{P}(X_n \rightarrow \infty) > 0$. Nous allons nous placer dans le premier cas et déterminer à quelle vitesse $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pénètre dans un compact de la forme $[0, A]$ pour la première fois. On introduit

$$G(x) = \int_1^x \frac{dy}{g(y)},$$

transformation que nous avons déjà croisée lorsque l'on a étudié la limite vers une loi Gamma et un processus de Bessel carré. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose aussi

$$\ell_\alpha(x) = (G^{-1}(x))^\alpha,$$

où G^{-1} correspond à la fonction réciproque.

Théorème 3 (page 106). *On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ et $\theta \in (0, 1)$ tels que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)x}{g(x)} = 1 - \lambda. \quad (10)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} = \theta. \quad (11)$$

Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x_0 > A$, pour tout α et β tels que $0 < \alpha < 1 - \theta < \beta$, il existe deux constantes C_α et C_β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{C_\beta}{\ell_\beta(n)} \leq \mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{\ell_\alpha(n)}, \quad (12)$$

où $\tau_A = \inf \{n \in \mathbb{N} : X_n \leq A\}$.

Dans la démonstration de ce théorème, on explicitera la dépendance en x_0 des constantes C_α et C_β .

Nous retrouvons le même type de vitesse que pour les processus de Galton-Watson critiques avec immigration. Un exemple intéressant où on peut expliciter les fonctions ℓ_α est lorsque $g(x) = cx^\gamma$ et $\sigma^2(x) = dx^{1+\gamma}$ où $\gamma \in (-1, 1)$, $c > 0$ et $d > 0$, alors

- $\theta = \frac{2c}{d}$
- $\lambda = 1 - \gamma$
- $G(x) \propto x^{1-\gamma}$
- $\ell_\alpha(x) \propto x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}$.

Ce théorème nous permet de donner un très bon encadrement de la queue du temps d'extinction d'un processus de Galton-Watson état-dépendant, ce qui n'avait jamais été étudié auparavant à notre connaissance.

Dans le cas d'une chaîne de Markov, ce théorème nous permet aussi de déterminer si la chaîne est récurrente positive ou récurrente nulle. Lorsque la chaîne est récurrente positive, on obtient une vitesse de convergence sous-géométrique du noyau de transition vers la mesure de probabilité invariante. On donne le résultat pour le cas d'une chaîne avec espace d'états dénombrable et avec un espace d'états quelconque. On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov apériodique à valeurs dans un ensemble $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+$. Si \mathcal{X} est dénombrable alors on suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible et pour tout $A > 0$, $[0, A] \cap \mathcal{X}$ est fini, tandis que si \mathcal{X} est quelconque, on suppose qu'il existe une mesure non triviale ψ telle que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ψ -irréductible et les ensembles de niveau $[0, A] \cap \mathcal{X}$ sont des "petite sets" pour tout $A > 0$.

Théorème 4 (page 107). *Sous ces hypothèses ainsi que les celles du Théorème 3 et les définitions de λ et θ , alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Harris-récurrente et*

- i) Si $\lambda > 1 - \theta$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente nulle.*
- ii) Si \mathcal{X} est dénombrable et si $\lambda < 1 - \theta$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive. Si on note π sa mesure de probabilité invariante, alors pour tout $\alpha \in (\lambda, 1 - \theta)$, pour toute mesure de probabilité ν sur \mathcal{X} telle que*

$$\mathbb{E}_\nu(\ell'_\alpha(\tau_A)) < \infty,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell'_\alpha(n) \|\nu P^n - \pi\|_{\text{TV}} = 0.$$

- iii) Si \mathcal{X} est quelconque et si $\lambda < 1 - \theta$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive. Si on note π sa mesure de probabilité invariante, alors pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\alpha < 1 - \theta$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell'_\alpha(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{TV}} = 0.$$

Ces résultats découlent en partie d'un lemme clé, qui montre que les fonctions puissances sont des fonctions de Lyapounov. Kersting [36] avait utilisé la fonction logarithme pour donner un critère de récurrence/transience, mais cela ne permet pas d'obtenir assez d'informations pour déterminer le temps d'atteinte de compacts. Ensuite, nous revenons au cas multitype, c'est à dire aux processus vérifiant l'équation de récurrence (9), avec $g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, où $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^d$, et on suppose aussi qu'il existe $d > 0$ et $K > 0$ tels que

$$d(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) - K \|\mathbf{Y}_n\| \leq \mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n) \leq d(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) + K \|\mathbf{Y}_n\|.$$

On pose $\theta = 2\mathbf{c}\mathbf{u}/d$. On sait que si $\theta < 1$, alors d'après le Théorème 1, $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$, et on va donc déterminer dans ce cas là à quelle vitesse le processus entre dans un compact de la forme $\{\mathbf{x}\mathbf{u} \leq A\}$.

Théorème 5 (page 125). *On suppose que $\theta < 1$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $\mathbf{x}_0 \mathbf{u} > A$, pour tout α et β tels que $\alpha < 1 - \theta < \beta$, alors il existe deux constantes positives C_α et C_β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{C_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{n^\alpha},$$

où $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq A\}$.

Summary of the results of this thesis

This thesis consists of four chapters. In the first Chapter, we propose a new discrete time stochastic model of structured populations dynamics. For this model, we first prove the large population limit to the underlying deterministic model and secondly, we quantify the discrepancy between this two models with a central limit theorem. Then, we give criteria of persistence/extinction for this class of models. We illustrate these results by a wide range of examples from genetics and ecology. We also bring out a critical case for which we need a more detailed analysis to give a criterion of persistence/extinction. A very special example of this critical case is the critical multitype Galton-Watson process with immigration. We recall some known results on it which inspire those of the next Chapters, even if our proofs are completely different because our model is not necessarily a branching process.

The second Chapter is devoted to a criterion of persistence/extinction for the critical case we just mentioned. We first generalize the monotype model of Kersting [36] to a multitype stochastic growth model. Secondly, we construct a Lyapunov function for this model and improve previous results of Klebaner [42, 44, 48] by giving a criterion of possible unlimited growth of the process. We apply this criterion to the example of a source-sink metapopulation with two patches of type source, *i.e.* the population of each patch goes to extinction if we do not take into account the migration. We prove that there is a possible survival of the metapopulation.

In the third Chapter, we focus on the behavior of our critical process when it tends to infinity. We prove a convergence in distribution of the scaled process to a Gamma distribution by a method of moments, and in a more general framework, by also rescaling time, we conjecture a distribution limit of a function of our process to the solution of a stochastic differential equation called a squared Bessel process.

In the fourth and last Chapter, we study hitting times of some compact sets when our process does not tend to infinity. We give nearly optimal bounds for the tail of these hitting times. If the process goes to extinction almost surely, we deduce from these bounds precise estimates of the tail of the extinction time. Moreover, if the process is a Markov chain, we give a criterion of null recurrence or positive recurrence and in the latter case, we obtain a subgeometric convergence of its transition kernel to its invariant probability measure. We also extend this result for a class of multitype models which concerns most of our applications.

Chapter 1 : Structured populations models, large populations approximations

We introduce a discrete time stochastic model for structured populations. We consider a population with d types and with possible interactions between types. In order to determine the number of individuals at generation $n + 1$, we first consider overall ecological interaction (which could be births, deaths, immigration, mutations, predation, etc) and for each interaction, there is a number of random events which may occur. More formally, for $j \in \{1, \dots, d\}$, the j -th coordinate of vector \mathbf{X}_n corresponds to the number of individuals of type j at generation n and we have the recursive relation

$$\mathbf{X}_{n+1} = \sum_{\ell=1}^L F_{\ell}(\mathbf{X}_n) \sum_{j=1}^d \zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{X}_n),$$

where L is the number of ecological interactions, $F_{\ell}(\mathbf{X}_n)$ the number of events in a time step for the interaction ℓ and the random variables $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{X}_n)$ correspond to the number of births for each of these events. For $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$, the $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k})$ are independent random variables, taking values in \mathbb{N}^d , and the law of $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k})$ depends only on ℓ and \mathbf{k} , namely there exist random variables $\zeta_{\ell}(\mathbf{k})$ such that for all $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{law}}{=} \zeta_{\ell}(\mathbf{k})$. This very general model includes a lot of different kind of models, for instance source-sink metapopulations, host-parasite models, population genetics models like Wright-Fisher model, bisexual Galton-Watson processes, etc.

The first result of this Chapter is a law of large numbers, we prove that if the population of generation zero tends to infinity, then on finite interval of time, the stochastic process converges in probability to an associated deterministic process. More formally, we introduce a scale parameter N such that the law of $\zeta_{\ell}(\mathbf{k})$ depends now on N and we denote it by $\zeta_{\ell}^N(\mathbf{k})$. The number of interactions depends also on

N and we denote it by $F_\ell^N(\mathbf{X}_n^N)$. For all $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$, let

$$m_\ell^N(\mathbf{k}) := \mathbb{E}(\zeta_\ell^N(\mathbf{k})),$$

be the expected number of children from an event of interaction ℓ .

Let also

$$V_\ell^N(\mathbf{k}) := \text{Cov}(\zeta_\ell^N(\mathbf{k})),$$

be the covariance matrix of the random vector ζ_ℓ^N .

We assume that there exist continuous functions m_ℓ such that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = m_\ell(\mathbf{x}), \quad \text{for all } \ell \text{ and for all } \mathbf{x},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = 0, \quad \text{for all } \ell \text{ and for all } \mathbf{x}$$

and these convergences are locally uniform.

Moreover, we assume that there exist some functions f_ℓ such that for all ℓ and for all \mathbf{x} ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} F_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = f_\ell(\mathbf{x})$$

and this convergence is locally uniform.

We obtain this law of large numbers :

Proposition 1 (page 35). *The process \mathbf{X}^N/N starting from $\lfloor N\mathbf{x} \rfloor$ individuals converges in probability on all finite interval of time, to the dynamical system defined by*

$$\mathbf{x}_{n+1} = H(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}.$$

where

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^L f_\ell(\mathbf{x}) m_\ell(\mathbf{x}) \tag{13}$$

Then, we may wonder how the stochastic process fluctuates around the deterministic one. We answer to this question by the following central limit theorem.

Proposition 2 (page 37). *We take the above assumptions. We also assume that H defined by (13) is differentiable and that we have the following conditions :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_\ell^N(N\mathbf{x}) = V_\ell(\mathbf{x}) \quad \text{for all } \ell \text{ and for all } \mathbf{x},$$

and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left(\left\| \zeta_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) - \mathbb{E}(\zeta_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor)) \right\|_\infty^3 \right)}{\sqrt{N}} = 0 \quad \text{for all } \ell \text{ and for all } \mathbf{x},$$

these two convergences are locally uniform on \mathbf{x} .

Let

$$A_n = \sum_{\ell=1}^L f_\ell(\mathbf{x}_n) V_\ell(\mathbf{x}_n).$$

Then, when N tends to infinity, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{N} \left(\frac{\mathbf{X}_n^N}{N} - \mathbf{x}_n \right) \xrightarrow{\text{law}} \mathcal{N}(0, D_n),$$

where the sequence of matrices $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is defined by

$$D_{n+1} = J_H(\mathbf{x}_n) D_n J_H(\mathbf{x}_n)^\top + A_n, \quad D_0 = 0,$$

where $J_H(\mathbf{x})$ is the Jacobian matrix of function H on \mathbf{x} .

We illustrate these two results by several examples : a metapopulation model, Wright-Fisher model, a bisexual population model, Nicholson-Bailey model which is an host-parasite model, the LPA model which is a model with an age structure and cannibalism.

Finally, we focus on the long time behavior of the stochastic process. Does it go to extinction almost-surely ? Can the population growth to infinity ? We first recall a result of González et al [22] which determines whether $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$ or $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$ with linear Lyapunov functions. This criterion can be applied to most of our examples. However, we remark that this criterion cannot be applied for a wide range of processes that we describe. We consider a Markov chain satisfying the equation

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

where M is an irreducible $d \times d$ positive matrix, $g : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ is a function such that $\|g(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}\|)$ when $\|\mathbf{x}\|$ tends to infinity, and (ξ_n) is a sequence of random vectors, taking values in \mathbb{R}^d , such that for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathbf{X}_n) = 0.$$

We assume that $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ and that the random vectors ξ_n are such that for all n , $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}_+^d$ almost-surely. We denote by ρ the spectral radius of M and we denote by \mathbf{u} and \mathbf{v} the right and left eigenvectors associated to ρ such that $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$. We assume that there exists $\delta \geq 0$ such that $\mathbb{E}(|\xi_n \mathbf{u}|^{1+\delta} | \mathbf{X}_n = \mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^\delta)$. We deduce this following result.

Proposition 3 (page 53).

- i) If $\rho > 1$, then $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$.
- ii) If $\rho < 1$, then $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$.

The case $\rho = 1$ is studied in more detail in Chapter 2.

We recall some results of Kawazu [34] on critical multitype Galton-Watson processes with immigration. These processes are a very particular case of processes satisfying the equation 14 with $\rho = 1$, because they are branching processes. In the next Chapter, we inspire from these results to give a criterion of recurrence/transience, a scale limit in the transient case and asymptotic bounds of the

tail of hitting times of some compact sets in the recurrent case, for our more general model. We recall the proofs of these results in appendix for critical multitype Galton-Watson processes with immigration. These proved are based on the branching property which allows us to use generating functions. The proofs of our results of Chapters 2,3 and 4 are completely different because our processes are not necessarily branching processes.

Chapter 2 : Persistence criterion for critical multitype stochastic growth models

In this Chapter, we give a criterion for possible unlimited growth for processes satisfying the equation (9). We apply this criterion to the example of a source-sink metapopulation with two patches of type source, *i.e.* the population of each patch goes to extinction if we do not take into account the migration. We prove that there is a possible survival of the metapopulation..

We consider a processus satisfying the equation (9) where the spectral radius ρ of the matrix M is equal to 1 and we want to determine whether $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$ or $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$. We introduce \mathbf{u} and \mathbf{v} the right and left eigenvectors associated to ρ such that $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top\mathbf{u} = 1$ and we can see that we can reduce to a one dimensional problem if we remark that

$$\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} = \mathbf{X}_n\mathbf{u} + g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u} + \xi_n\mathbf{u}.$$

However, $g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u}$ and $\sigma^2(\mathbf{X}_n) = \mathbb{E}((\xi_n\mathbf{u})^2|\mathcal{F}_n)$ (where $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ corresponds to the natural filtration associated to $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) may not depend on $\mathbf{X}_n\mathbf{u}$. We also can notice that if g is positive, then $\mathbb{E}(\mathbf{X}_n)$ tends to infinity and $\mathbb{E}(\mathbf{X}_n)/\|\mathbb{E}(\mathbf{X}_n)\|$ tends to the vector $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. We then split \mathbf{X}_n into two terms : the contribution along \mathbf{v} and the rest, *i.e.* $\mathbf{X}_n = (\mathbf{X}_n\mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{X}_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})$. Let $\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})$ and for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, let $\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})$.

We assume that functions $g(\cdot)\mathbf{u}$ and σ^2 have a dominant term $c_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha$ and $d_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^{1+\alpha}$ respectively, with $\alpha \in (-1, 1)$. More formally, we assume that

$$g(\mathbf{x})\mathbf{u} = c_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^\alpha) + o(\|\mathbf{x}\|^\alpha),$$

and

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = d_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^{1+\alpha} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{1+\alpha}) + o(\|\mathbf{x}\|^{1+\alpha}).$$

In most of population dynamics models, we are in the case where $\alpha = 0$ because the variance of the number of children per individual does not tend to zero or to infinity when the size of the population tends to infinity.

Under other technical assumptions on functions g and σ^2 , we obtain the following result :

Theorem 1 (page 60).

- i) If $c_1 < \frac{d_1}{2}$ then $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow +\infty) = 0$.
- ii) If $c_1 > \frac{d_1}{2}$ then $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow +\infty) > 0$.

The proof of this theorem is based on the existence of Lyapunov functions. We actually prove that functions $x \mapsto \log x$ and $x \mapsto 1/\log x$ are Lyapunov functions for the process $(\mathbf{X}_{nk}\mathbf{u})_{n \in \mathbb{N}}$ where k is some integer. We recover in particular the criterion of recurrence/transience for critical multitype Galton-Watson processes with immigration of [34]. We apply this criterion on processes which do not satisfy the branching property like state-dependent multitypes Galton-Watson processes introduced by Klebaner [44]. Finally, we give the example of a source-sink metapopulation with two patches of types sink which may nevertheless persists. We especially pay attention to the effect of migration rates on the persistence and for some cases, we give a threshold γ_0 for the quantity $\gamma = p_{2,1}/(p_{1,2} + p_{2,1})$ (where $p_{i,j}$ corresponds to the migration rate from the patch i to the patch j) such that if $\gamma > \gamma_0$ then we have almost-sure extinction and if $\gamma < \gamma_0$ then we have persistence with positive probability.

Chapter 3 : Convergence in distribution of a transform of the process in the transient case

In this Chapter, we study the behavior of \mathbf{X}_n when $\|\mathbf{X}_n\|$ tends to infinity. As it was proved for monotype models (see for instance [27, 37, 43]) or for some particular situations for multitypes models (see [44]), we obtain a convergence in distribution to a generalized Gamma distribution. More precisely, we prove that under the assumptions of Theorem 1 ii) and under assumptions on the existence of moments of any order for ξ_n , then $\mathbf{X}_n/n^{1/(1-\alpha)}$ converges in distribution to a random vector of deterministic direction \mathbf{v} and of length W , where $W^{1-\alpha}$ has a Gamma distribution of parameters that we precise. This is the following theorem.

Theorem 2 (page 83). *Let $q = \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty)$.*

Then, $\mathbf{X}_n/n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ converges in distribution to a random vector $\mathbf{v}W$ with a deterministic direction \mathbf{v} and random length W . The distribution of W has an atom of size $1 - q$ at the origin and $W^{1-\alpha}$ has a density q times the Gamma density with parameters $\frac{2c_1-d_1\alpha}{d_1-d_1\alpha}$ and $\frac{2}{d_1(1-\alpha)^2}$.

The proof of this theorem is based on the moments method : we prove that the moments of $\mathbf{X}_n/n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ converge to those of some distribution, see Section B.3 of the Appendix. The proof is inspired by [43]. There is however a supplementary difficulty because we need to control the terms $\mathbb{E}((\mathbf{X}_n u)^{-\alpha} \|\mathbf{Y}_n\|^\alpha \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}})$.

Afterwards, we conjecture a more precise result, the distribution convergence of a transform of our process to the solution of the stochastic differential equation :

$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{Z_s} dB_s + ct,$$

with $x \geq 0$ and $c > 0$. Solutions of this equation are called squared-Bessel processes of dimension c . They can also be defined as the square of the euclidean norm of a standard Brownian motion in dimension c . For a more precise study of these processes, the reader is encouraged to consult [59, p. 439].

Let G be the function defined by

$$G(x) = \int_1^x \frac{ds}{g(sv)}.$$

What is interesting about this function is that $\mathbb{E}(G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})) = \mathcal{O}(n)$. We conjecture the distribution convergence of the transformation of $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined by

$$Z_n(t) = \frac{1}{n} G(\mathbf{X}_{[nt]} \mathbf{u}).$$

We assume that $g(\mathbf{x})$ and $g(\mathbf{x}\mathbf{u}\mathbf{v})$ on the one hand, $\sigma^2(\mathbf{x})$ and $\sigma^2(\mathbf{x}\mathbf{u}\mathbf{v})$ on the other hand are close when $\|\mathbf{x}\|$ is large.

Conjecture 1 (page 96). *Under assumptions such that $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$, we have on the event $\{\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty, \text{ when } n \rightarrow \infty\}$, $\frac{4}{\beta} Z_n(t)$ converges in distribution to a squared-Bessel process of dimension $\frac{4}{\beta} - 2\lambda + 2$ starting from 0, where β and λ are explicit parameters.*

We will face again the transformation $G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})$ in the Chapter 4, it will play a very important role for the study of the tail of extinction time of the process.

Chapter 4 : Extinction times and hitting times of compact sets in the recurrent case

In this Chapter, we want to determine the tail of the hitting time of compact sets $[0, A]$, where $A > 0$, for processes satisfying the equation (9). We first focus on the case of the dimension 1.

We consider a stochastic process taking values in \mathbb{R}_+ satisfying the stochastic difference equation

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n,$$

where $g(x) = o(x)$ when x tends to infinity and $\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, where $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ is the natural filtration associated to $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. We assume that g is a differentiable function and that

$$\exists M > 0, c_1 > 0 \text{ and } \varepsilon > 0, \text{ such that } \forall x > M, \forall y > (1 - \varepsilon)x, xg(x) \leq c_1 y g(y).$$

We also assume that (X_n) satisfies a weak form of Markov property, that is to say there exists a function σ^2 such that

$$\sigma^2(X_n) := \mathbb{E}(\xi_n^2 | \mathcal{F}_n) < \infty.$$

Finally, we assume that

$$\exists \delta > 0, \text{ such that } \forall x \in \mathbb{R}_+, \mathbb{E}_x (|\xi_1|^{4+\delta}) \leq C\sigma^{4+\delta}(x).$$

Kersting [36] proved that if

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} < 1,$$

then $\mathbb{P}(X_n \rightarrow \infty) = 0$, and if

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} > 1,$$

then $\mathbb{P}(X_n \rightarrow \infty) > 0$. We consider the first case, and we want to determine how fast $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hits finite intervals $[0, A]$ for the first time. We introduce the transformation

$$G(x) = \int_1^x \frac{dy}{g(y)},$$

we have already mentioned when we studied the distribution convergence to a squared-Bessel process. For all $\alpha \in \mathbb{R}$, let

$$\ell_\alpha(x) = (G^{-1}(x))^\alpha,$$

where G^{-1} corresponds to the inverse function.

Theorem 3 (page 106). *We assume that there exist $\lambda > 0$ and $\theta \in (0, 1)$ such that*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)x}{g(x)} = 1 - \lambda. \quad (15)$$

and

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} = \theta. \quad (16)$$

Then, there exists $A > 0$ such that for all $x_0 > A$, for α and β such that $0 < \alpha < 1 - \theta < \beta$, there exist two positive constants C_α and C_β such that for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{C_\beta}{\ell_\beta(n)} \leq \mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{\ell_\alpha(n)}, \quad (17)$$

with $\tau_A = \inf \{n \in \mathbb{N} : X_n \leq A\}$.

In the proof of this theorem, we explain the dependence on x_0 of C_α and C_β . We recover the same kind of bounds that those of critical Galton-Watson processes with immigration. In particular, if $g(x) = cx^\gamma$ and $\sigma^2(x) = dx^{1+\gamma}$ with $\gamma \in (-1, 1)$, $c > 0$ and $d > 0$, then

- $\theta = \frac{2c}{d}$
- $\lambda = 1 - \gamma$

- $G(x) \propto x^{1-\gamma}$
- $\ell_\alpha(x) \propto x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}$, for all $\alpha > 0$.

We deduce from this theorem, closed to optimal bounds for the tail of the extinction time of state-dependent Galton-Watson process.

If $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a Markov chain, we can also deduce if the chain is positive recurrent or null recurrent. When the chain is positive recurrent, we obtain a sub-geometric rate of convergence of the transition kernel to the invariant probability measure. We give this result when the state space is countable or general.

We assume that $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is an aperiodic Markov chain with state space $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+$. If \mathcal{X} is countable, then we assume that $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is irreducible and for all $A > 0$, $[0, A] \cap \mathcal{X}$ is finite, while if \mathcal{X} is general, we assume that there exists a non trivial measure ψ such that $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is ψ -irreducible and that level sets $[0, A] \cap \mathcal{X}$ are petite for all $A > 0$.

Theorem 4 (page 107). *Under these assumptions, those of Theorem 3 and the above definition of λ and θ , then $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is Harris-recurrent and*

i) If $\lambda > 1 - \theta$, then $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is null recurrent.

ii) If \mathcal{X} is countable and $\lambda < 1 - \theta$, then $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is positive recurrent. If we denote by π its invariant probability measure, then for all $\alpha \in (\lambda, 1 - \theta)$, for all probability measure ν on \mathcal{X} such that

$$\mathbb{E}_\nu(\ell'_\alpha(\tau_A)) < \infty,$$

we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell'_\alpha(n) \|\nu P^n - \pi\|_{\text{TV}} = 0.$$

iii) If \mathcal{X} is general and if $\lambda < 1 - \theta$, then $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is positive recurrent. If we denote by π its invariant probability measure, then for all $x \in \mathcal{X}$, $\alpha < 1 - \theta$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell'_\alpha(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{TV}} = 0.$$

These two theorems derived from a key lemma, which shows that some power functions are Lyapunov functions. Kersting [36] proved that the logarithm is a Lyapunov function to obtain its criterion of recurrence/transience, but we cannot derive from this enough information to obtain information of the hitting time of compact sets. Finally, we extend this result to the multitype case, when the process satisfies the equation (9), with the particular case $g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, with $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^d$. We assume that there exist $d > 0$ and $K > 0$ such that

$$d(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) - K \|\mathbf{Y}_n\| \leq \mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n) \leq d(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) + K \|\mathbf{Y}_n\|.$$

As usual, let $\theta = 2\mathbf{c}\mathbf{u}/d$. We know by Theorem 1 that if $\theta < 1$ then $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$, and we want to determine bounds for the tail of the hitting time of compact sets $\{\mathbf{x}\mathbf{u} \leq A\}$, with $A > 0$.

Theorem 5 (page 125). *We assume that $\theta < 1$. There exists $A > 0$ such that for all $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ such that $\mathbf{x}_0 \mathbf{u} > A$, for all α and β such that $\alpha < 1 - \theta < \beta$, then there exists two positive constants C_α and C_β such that for all $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{C_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{n^\alpha},$$

with $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq A\}$.

Chapitre 1

Modèles de populations structurées, approximations en grandes populations

Dans ce Chapitre, nous introduisons un modèle de chaînes de Markov en dimension finie permettant d'inclure une structuration de la population (génotypique, phénotypique ou spatiale) et de décrire une large variété d'événements ou d'interactions écologiques (reproduction asexuée ou sexuée, dispersion, compétition, prédation). Ce modèle est une extension directe des processus de Galton-Watson état-dépendants (voir [44]). Il contient par exemple les processus de Galton-Watson multitypes avec immigration ou le modèle de Wright-Fisher. Nous montrons la convergence en probabilité de notre processus stochastique vers un processus déterministe associé puis nous quantifions les écarts entre ces deux processus par un théorème limite central. Nous illustrons ces résultats par une large gamme d'exemples issus de la génétique et de l'écologie. Ensuite, nous donnons des critères de persistance et d'extinction pour ce type de modèles, basés sur des fonctions de Lyapounov linéaires. Nous mettons aussi en évidence un cas, que nous qualifierons de "critique", pour lequel le critère de persistance/extinction nécessite une analyse plus fine. Un cas très particulier de ce cas critique est le processus de Galton-Watson multitype critique avec immigration. Nous rappelons quelques résultats sur ce processus dont nous nous inspirerons, bien que nos preuves seront complètement différentes car notre modèle général ne vérifie pas la propriété de branchement. Les preuves de ces résultats, qui semblent peu connus, sont rappelées en annexe. La première partie de ce Chapitre est un travail en cours avec Vincent Bansaye et Jean-René Chazottes.

1.1 Modèle stochastique de populations structurées

1.1.1 Introduction

Notre population est décrite par d types et on note $\mathbf{X}_n = (X_{n,1}, \dots, X_{n,d})$ le nombre d'individus de chaque type à la génération n .

On suppose que l'évolution est itérative en temps discret, donnée pour $n \geq 0$ par

$$\mathbf{X}_{n+1} = \sum_{\ell=1}^L F_{\ell}(\mathbf{X}_n) \sum_{j=1}^{F_{\ell}(\mathbf{X}_n)} \zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{X}_n)$$

où

- les variables aléatoires $(\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k}) : \ell = 1, \dots, L, j \geq 0, n \geq 0, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d)$ sont indépendantes, à valeur dans \mathbb{N}^d
- la loi de $\zeta_{\ell}^{(j,n)}(\mathbf{k})$ ne dépend que de ℓ et \mathbf{k} et on note $\zeta_{\ell}(\mathbf{k})$ la variable aléatoire avec cette loi commune.
- les fonctions F_{ℓ} sont définies sur \mathbb{N}^d et à valeurs dans \mathbb{N} .

L'entier L correspond au nombre d'interactions écologiques en un sens large et $F_{\ell}(\mathbf{X}_n)$ correspond au nombre d'événements en un pas de temps pour l'interaction écologique ℓ .

Les exemples que l'on a en tête sont multiples : les métapopulations (pour d parcelles, on prend $L = d$ pour tout ℓ et $F_{\ell}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\ell}$); le processus de Wright-Fisher (par exemple $d = 2, L = 1$ et $F_{\ell}(\mathbf{x}) = N$ où N est la taille fixe de la population); le processus de Galton-Watson bisexué (par exemple pour $d = 2, L = 1$ et $F_{\ell}(\mathbf{x}) = \min(x_1, x_2)$ qui représente le nombre de couples (x_1 étant par exemple le nombre de mâles et x_2 le nombre de femelles).

1.1.2 Limite quand la population initiale tend vers l'infini

On introduit un paramètre d'échelle N et on considère

$$\mathbf{X}_{n+1}^N = \sum_{\ell=1}^L F_{\ell}^N(\mathbf{X}_n^N) \sum_{j=1}^{F_{\ell}^N(\mathbf{X}_n^N)} \zeta_{\ell}^{(j,n,N)}(\mathbf{X}_n^N).$$

avec $\zeta_{\ell}^{(j,n,N)}(\mathbf{k})$ variables aléatoires distribuées comme $\zeta_{\ell}^N(\mathbf{k})$. On pose

$$m_{\ell}^N(\mathbf{k}) := \mathbb{E}(\zeta_{\ell}^N(\mathbf{k})), \quad V_{\ell}^N(\mathbf{k}) := \text{Cov}(\zeta_{\ell}^N(\mathbf{k})),$$

pour $\ell = 1, \dots, N$, où $\text{Cov}(\zeta)$ désigne la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire ζ .

On suppose qu'il existe des fonctions continues m_{ℓ} telles que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_{\ell}^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = m_{\ell}(\mathbf{x}), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V_{\ell}^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = 0, \quad (\text{A1})$$

pour tout $\ell = 1, \dots, N$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$. De plus, nous supposons qu'il existe des fonctions f_ℓ telles que pour tout ℓ et pour tout \mathbf{x} , de façon uniforme localement en \mathbf{x} ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} F_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = f_\ell(\mathbf{x}). \quad (\text{A2})$$

Loi des grands nombres et Théorème limite central

Proposition 1.1. *Le processus \mathbf{X}^N/N issu de $\lfloor N\mathbf{x} \rfloor$ individus converge en probabilité sur les intervalles de temps compacts vers le système dynamique*

$$\mathbf{x}_{n+1} = H(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}.$$

où

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^L f_\ell(\mathbf{x}) m_\ell(\mathbf{x})$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence via les fonctions caractéristiques. On suit la preuve de Klebaner [45].

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que \mathbf{X}_n^N/N converge en probabilité vers \mathbf{x}_n . On pose

$$h^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) = \mathbb{E} \left(\exp(i \langle \mathbf{s}, \mathbf{X}_{n+1}^N \rangle) \mid \mathbf{X}_n^N \right),$$

avec $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$.

Par indépendance des $\zeta_\ell^{j,N}(\mathbf{k})$, on a pour tout $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$

$$\begin{aligned} h^N(\mathbf{s}, \lfloor N\mathbf{x} \rfloor) &:= \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{i}{N} \sum_{\ell=1}^L \sum_{j=1}^{F_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor)} \langle \zeta_\ell^{j,N}(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor), \mathbf{s} \rangle \right) \right) \\ &= \prod_{\ell=1}^L \mathbb{E} \left(\left(\exp \left(\frac{i}{N} \langle \zeta_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor), \mathbf{s} \rangle \right) \right)^{F_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor)} \right). \end{aligned}$$

On fait un développement limité des termes du produit, en notant R^N le reste :

$$h^N(\mathbf{s}, \lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = \prod_{\ell=1}^L \left(1 + \frac{i}{N} \langle m_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor), \mathbf{s} \rangle + R^N(\mathbf{s}, \lfloor N\mathbf{x} \rfloor) \right)^{F_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor)},$$

où

$$R^N(\mathbf{s}, \lfloor N\mathbf{x} \rfloor) \leq \frac{\mathbb{E} \left(\langle \zeta_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor), \mathbf{s} \rangle^2 \right)}{2N^2} = \frac{\mathbf{s}^\top V_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) \mathbf{s}}{2N^2} = o\left(\frac{1}{N}\right),$$

par (A1).

Soit $\ell \in \{1, \dots, d\}$. On pose

$$\phi_N(\mathbf{x}) = \langle m_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor), \mathbf{s} \rangle - iNR^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor)$$

et

$$\psi_N(\mathbf{x}) = F_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor)/N.$$

On sait que $(\phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément localement vers $\langle m_\ell, u \rangle$ et f_ℓ par (A1) et (A2). Montrons que

$$\left(\mathbf{x} \mapsto \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N} \right)^{N\psi_N(\mathbf{x})} \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

converge uniformément localement vers $\mathbf{x} \mapsto \exp(i f_\ell(\mathbf{x}) \langle \mathbf{s}, m_\ell(\mathbf{x}) \rangle)$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ et montrons la convergence uniforme sur un voisinage de \mathbf{x} . Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \left| e^{i f_\ell(\mathbf{x}) \langle \mathbf{s}, m_\ell(\mathbf{x}) \rangle} - \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N} \right)^{N\psi_N(\mathbf{x})} \right| &\leq \left| e^{i f_\ell(\mathbf{x}) \langle \mathbf{s}, m_\ell(\mathbf{x}) \rangle} - e^{i\psi_N(\mathbf{x})\phi_N(\mathbf{x})} \right| \\ &\quad + \left| \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N} \right)^{N\psi_N(\mathbf{x})} - e^{i\psi_N(\mathbf{x})\phi_N(\mathbf{x})} \right|. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Le premier terme est plus petit que ε pour N suffisamment grand car $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont uniformément continues sur \mathbb{R} . Nous allons maintenant majorer le second terme. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}$, on rappelle l'inégalité

$$|e^{ku} - (1+u)^k| \leq \frac{|ku|^2 e^{|ku|}}{k}, \quad (1.2)$$

qui découle des deux inégalités suivantes pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$

$$|a^k - b^k| \leq |a - b| k \max(|a|, |b|)^{k-1},$$

et

$$|e^a - (1+a)| \leq |a|^2 e^{|a|}.$$

On se ramène donc à une puissance entière à l'aide de la partie entière dans l'inégalité (1.1) pour appliquer l'inégalité (1.2). On décompose (1.1) en trois termes :

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N} \right)^{N\psi_N(\mathbf{x})} - e^{i\psi_N(\mathbf{x})\phi_N(\mathbf{x})} \right| &\leq \left| \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N} \right)^{N\psi_N(\mathbf{x})} - \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N} \right)^{\lfloor N\psi_N(\mathbf{x}) \rfloor} \right| \\ &\quad + \left| \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N} \right)^{\lfloor N\psi_N(\mathbf{x}) \rfloor} - e^{i\psi_N(\mathbf{x})\lfloor N\phi_N(\mathbf{x}) \rfloor / N} \right| \\ &\quad + \left| e^{i\psi_N(\mathbf{x})\lfloor N\phi_N(\mathbf{x}) \rfloor / N} - e^{i\psi_N(\mathbf{x})\phi_N(\mathbf{x})} \right|. \end{aligned}$$

Le troisième terme est plus petit que ε pour N assez grand par convergence uniforme sur un voisinage de x de $\lfloor N\psi_N(\cdot) \rfloor / N$ vers $\psi(\cdot)$. Le second terme est plus petit que $\frac{\| \psi_N(\mathbf{x}) N \rfloor \phi_N(\mathbf{x}) \| e^{\| \psi_N(\mathbf{x}) N \rfloor \phi_N(\mathbf{x}) \| / N}}{N^2 \psi_N(\mathbf{x})}$ par l'inégalité (1.2) et donc plus petit que ε pour N assez grand par convergence uniforme au voisinage de \mathbf{x} de ϕ_N et ψ_N . Le premier terme est aussi petit lorsque N est grand en remarquant qu'en mettant $\left| \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N} \right)^{N\psi_N(\mathbf{x})} \right|$ en facteur, qui est borné, le terme restant converge vers 0. D'où la convergence uniforme locale souhaitée.

Comme \mathbf{X}_n^N/N tend vers \mathbf{x}_n en probabilité et comme on a une convergence uniforme sur un voisinage de \mathbf{x}_n de $\left(\mathbf{x} \mapsto \left(1 + \frac{i\phi_N(\mathbf{x})}{N}\right)^{N\psi_N(\mathbf{x})}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ vers $\mathbf{x} \mapsto \exp(i f_\ell(\mathbf{x}) \langle \mathbf{s}, m_\ell(\mathbf{x}) \rangle)$, on a que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) = \prod_{\ell=1}^L \exp(i f_\ell(\mathbf{x}_n) \langle \mathbf{s}, m_\ell(\mathbf{x}_n) \rangle),$$

en probabilité. Par convergence dominée, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(h^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N)) = \exp(i \langle H(\mathbf{x}_n), \mathbf{s} \rangle).$$

La convergence de la fonction caractéristique implique la convergence en loi par le théorème de Lévy et comme $H(\mathbf{x}_n)$ est déterministe, on a la convergence en probabilité. D'où le résultat par récurrence. \square

Pour obtenir les fluctuations de \mathbf{X}^N/N autour de son approximation déterministe, on suppose maintenant que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) = V_\ell(\mathbf{x}) \quad (\text{A3})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbb{E} \left(\left\| \zeta_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor) - \mathbb{E}(\zeta_\ell^N(\lfloor N\mathbf{x} \rfloor)) \right\|^3 \right) = 0. \quad (\text{A4})$$

pour tout $\ell = 1, \dots, L$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ et ceci de façon localement uniforme en \mathbf{x} . On note

$$A_n = \sum_{\ell=1}^L f_\ell(\mathbf{x}_n) V_\ell(\mathbf{x}_n).$$

Proposition 1.2. *On suppose que $\mathbf{X}_0^N = \lfloor \mathbf{x}N \rfloor$ et (A1), (A2), (A3), (A4), et que H définie par (1.1) est différentiable. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{\mathbf{X}_n^N}{N} - \mathbf{x}_n \right) = \mathcal{N}(0, D_n) \quad \text{en loi,}$$

où $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence par

$$D_{n+1} = J_H(\mathbf{x}_n) D_n J_H(\mathbf{x}_n)^\top + A_n,$$

avec $J_H(\mathbf{x})$ la matrice jacobienne de la fonction H au point \mathbf{x} .

Remarque 1.1. *Un résultat analogue avait été donné par Klebaner et Nerman [46] en dimension 1. Les auteurs ont aussi montré que si le système déterministe avait un cycle limite, alors le processus stochastique pouvait être approché par un processus autorégressif dans le voisinage des points du cycle limite.*

Il y a sûrement des choses à dire sur les fluctuations lorsque le système déterministe tend vers un équilibre stable (valeurs propres de la Jacobienne plus petites que 1 en

module).

On peut partir d'une condition initiale aléatoire telle que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{\mathbf{X}_0^N}{N} - \mathbf{x}_0 \right) = \mathcal{N}(0, D) \quad \text{en loi, } D \in \mathcal{S}_d^+, \quad (\text{A5})$$

où \mathcal{S}_d^+ désigne l'ensemble des matrices symétrique réelles positives et en remplaçant A_0 par $A_0 + D$.

Démonstration. On fait là aussi une preuve par récurrence via les fonctions caractéristiques.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{\mathbf{X}_n^N}{N} - \mathbf{x}_n \right) = \mathcal{N}(0, D_n) \quad \text{en loi.}$$

Premièrement on remarque que

$$\begin{aligned} & g^N(\mathbf{s}, \lfloor \mathbf{x}N \rfloor) \\ & := \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^L \sum_{j=1}^{F_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor)} \left\langle \zeta_\ell^{j,N}(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) - \mathbb{E} \left(\zeta_\ell^{j,N}(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) \right), \mathbf{s} \right\rangle \right) \right) \\ & = \prod_{\ell=1}^L \mathbb{E} \left(\left(\exp \left(\frac{i}{\sqrt{N}} \left\langle \zeta_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) - \mathbb{E} \left(\zeta_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) \right), \mathbf{s} \right\rangle \right) \right)^{F_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor)} \right) \\ & = \prod_{\ell=1}^L \left(1 - \mathbf{s}^\top V_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) \mathbf{s} / 2N + R_1^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) \right)^{F_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor)} \\ & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \prod_{\ell=1}^L \exp \left(-f_\ell(\mathbf{x}_n) \mathbf{s}^\top V_\ell(\mathbf{x}_n) \mathbf{s} / 2 \right) \quad \text{en probabilité,} \end{aligned}$$

où

$$|R_1^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor)| \leq \frac{\mathbb{E} \left(\left| \left\langle \zeta_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) - \mathbb{E} \left(\zeta_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) \right), \mathbf{s} \right\rangle \right|^3 \right)}{6N\sqrt{N}} = o\left(\frac{1}{N}\right),$$

et donc $\mathbf{s}^\top V_\ell^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor) \mathbf{s} / 2 + NR_1^N(\lfloor \mathbf{x}N \rfloor)$ converge uniformément localement vers $\mathbf{s}^\top V_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{s} / 2$ par (A4). On considère maintenant

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(i\sqrt{N} \left\langle \frac{\mathbf{X}_{n+1}^N}{N} - \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{s} \right\rangle \right) \right) = \mathbb{E} \left(g^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) S(N) \right).$$

avec $S(N)$ défini par

$$S(N) = \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^L \sum_{j=1}^{F_\ell^N(\mathbf{X}_n^N)} \left\langle \mathbb{E} \left(\zeta_\ell^{j,N}(\mathbf{X}_n^N) \mid \mathbf{X}_n^N \right), \mathbf{s} \right\rangle \right) \middle| \mathbf{X}_n^N \right) e^{-i\sqrt{N} \langle H(\mathbf{x}_n), \mathbf{s} \rangle}$$

et on souhaite calculer sa limite quand $N \rightarrow \infty$.

On applique l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} (H(\mathbf{X}_n^N/N) - H(\mathbf{x}_n)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} J_H(\mathbf{x}_n) (\mathbf{X}_n^N/N - \mathbf{x}_n) \\ \stackrel{\text{en loi}}{=} J_H(\mathbf{x}_n) \mathcal{N}(0, D_n),$$

et donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S(N)) = \exp\left(-\frac{\mathbf{s}^\top J_H(\mathbf{x}_n) D_n J_H(\mathbf{x}_n)^\top \mathbf{s}}{2}\right).$$

Comme

$$T := \prod_{\ell=1}^L \exp(-f_\ell(\mathbf{x}_n) \mathbf{s}^\top V_\ell(\mathbf{x}_n) \mathbf{s}/2).$$

est déterministe, on a que

$$\mathbb{E}(g^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) S(N)) = T \mathbb{E}(S(N)) + \mathbb{E}((g^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) - T) S(N)),$$

et comme

$$|\mathbb{E}((g^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) - T) S(N))| \leq \mathbb{E}(|g^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) - T| |S(N)|) \\ \leq \mathbb{E}(|g^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) - T|) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

on conclut que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g^N(\mathbf{s}, \mathbf{X}_n^N) S(N)) = \exp\left(-\frac{\mathbf{s}^\top D_{n+1} \mathbf{s}}{2}\right),$$

où la suite de matrices D_n vérifie la relation de récurrence

$$D_{n+1} = J_H(\mathbf{x}_n) D_n J_H(\mathbf{x}_n)^\top + A_n.$$

La convergence de la fonction caractéristique nous assure la convergence en loi. \square

1.1.3 Exemples

Exemple 1.1 (Modèle de métapopulation). *On considère un modèle de métapopulation avec 2 parcelles pour simplifier. On note X_n et Y_n le nombre d'individus à la génération n sur les parcelles 1 et 2.*

On considère que chaque individu se reproduit selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1(X_n)$ sur la parcelle 1 et $\lambda_2(Y_n)$ sur la parcelle 2. Ensuite, chaque enfant migre vers l'autre patch avec une probabilité p_1 pour aller de la parcelle 1 vers la parcelle 2, et p_2 de la parcelle 2 vers la parcelle 1. On obtient le modèle suivant

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} A_k(X_n) + \sum_{k=1}^{Y_n} B_k(Y_n)$$

$$Y_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} C_k(X_n) + \sum_{k=1}^{Y_n} D_k(Y_n),$$

où $A_k(X_n)$ est la somme de $P^1(X_n)$ variables de Bernoulli i.i.d. de paramètres $1 - p_1$, avec $P^1(X_n)$ une variable de Poisson de paramètre $\lambda_1(X_n)$ et $C_k(X_n) = P^1(X_n) - A_k(X_n)$. Les variables B_k et D_k sont définies de manières analogues. On écrit de manière plus condensée

$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = \sum_{k=1}^{X_n} \zeta_1^k(X_n) + \sum_{k=1}^{Y_n} \zeta_2^k(Y_n),$$

avec $\mathbb{E}(\zeta_1(x)) = ((1 - p_1)\lambda_1(x), p_1\lambda_1(x))$ et $\mathbb{E}(\zeta_2(y)) = (p_2\lambda_2(y), (1 - p_2)\lambda_2(y))$ et les matrices de covariance

$$V_1 = \begin{pmatrix} (1 - p_1)\lambda_1(x) & 0 \\ 0 & p_1\lambda_1(x) \end{pmatrix}$$

et

$$V_2 = \begin{pmatrix} p_2\lambda_2(x) & 0 \\ 0 & (1 - p_2)\lambda_2(x) \end{pmatrix}.$$

Le système dynamique déterministe associé est donc

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n(1 - p_1)\lambda_1(x_n) + y_n p_2 \lambda_2(y_n), x_n p_1 \lambda_1(x_n) + y_n(1 - p_2)\lambda_2(y_n)).$$

Pour les simulations ci-dessous, on a pris $\lambda_1(x) = 2K_1/(x + K_1)$ et $\lambda_2(y) = 2K_2/(y + K_2)$ où $K_1 = 10$ et $K_2 = 12$ correspondent à des capacité de charge et $N = 2000$.

Pour montrer la convergence en probabilité, on s'est fixé $\varepsilon = 0,2$ et on observe qu'une grande proportion des trajectoires restent autour d'un tube de diamètre 2ε de la trajectoire déterministe. Ceci est vrai à partir de $N = 1000$. Pour un choix de N plus petit, les trajectoires des simulations du processus stochastique sortent plus régulièrement du tube autour du processus déterministe. Nous illustrons ceci pour $N = 100$ dans les simulations ci-dessous.

Pour la répartition des points $\sqrt{N}(X_n^N/N - x_n)$, nous l'avons faite à l'instant $n = 30$.

Exemple 1.2 (Modèle de Wright-Fisher). On peut reprendre le modèle de Wright-Fisher avec notre formalisme. Soit N le paramètre d'échelle, on pose

$$X_{n+1}^N = \sum_{k=1}^N A_k^N(X_n^N)$$

$$Y_{n+1}^N = \sum_{k=1}^N (1 - A_k^N(X_n^N))$$

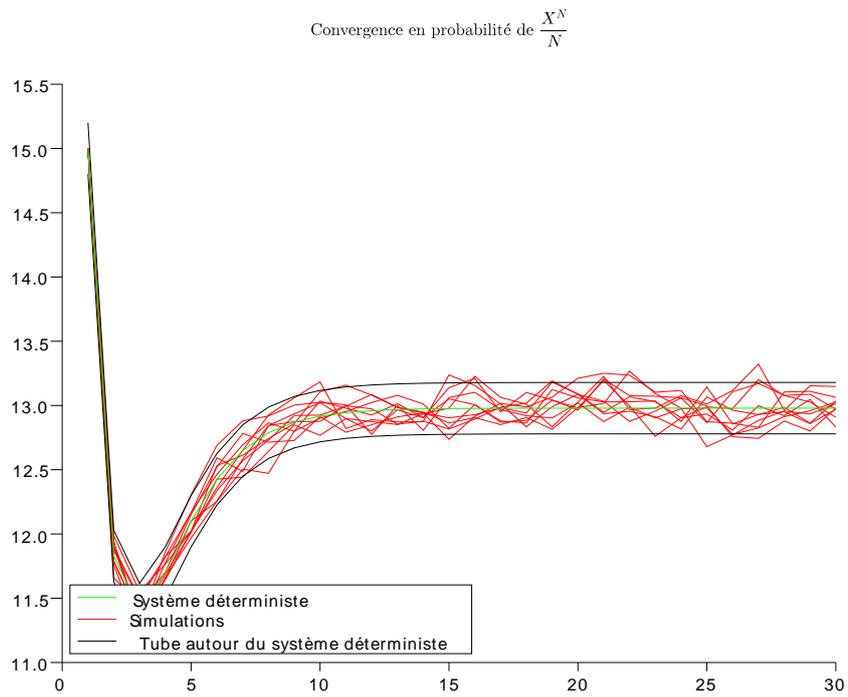


FIGURE 1.1 – Loi des grands nombres pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 2000$ pour X

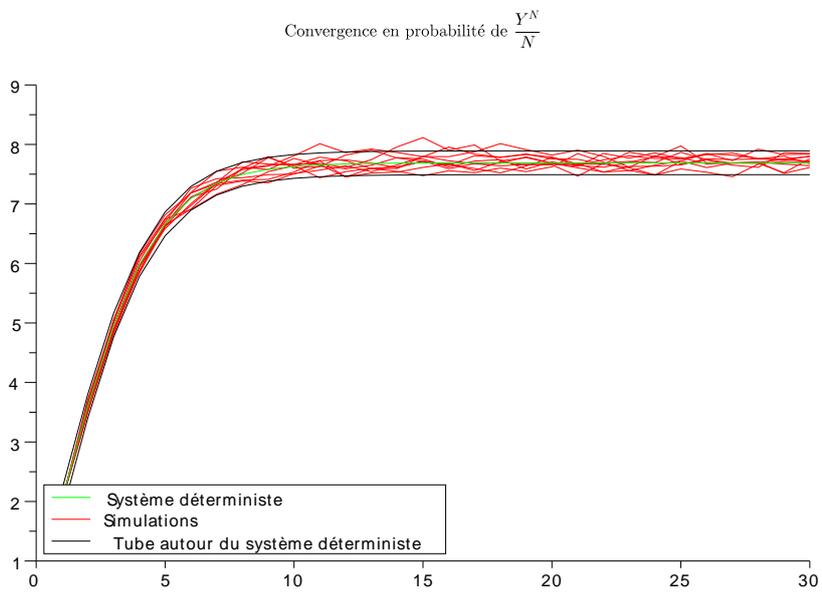


FIGURE 1.2 – Loi des grands nombres pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 2000$ pour Y

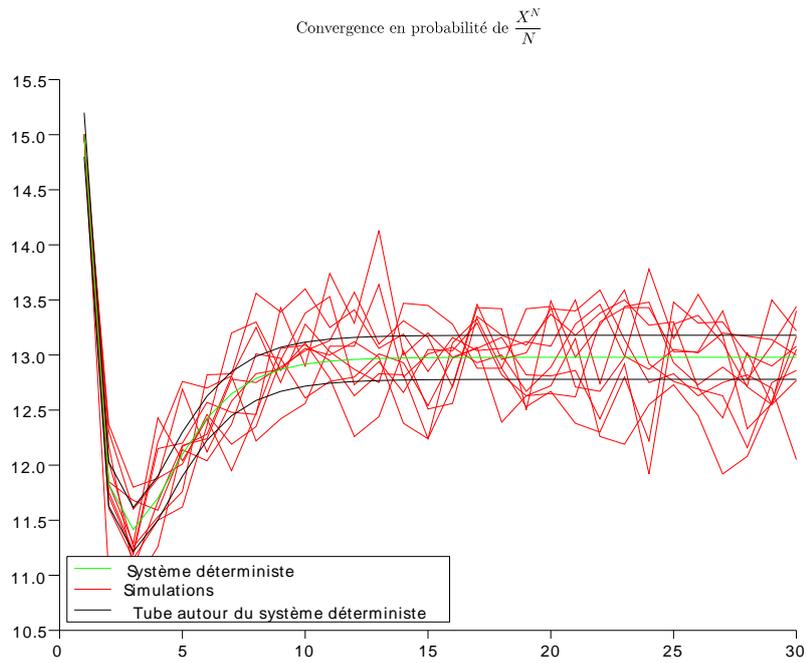


FIGURE 1.3 – Loi des grands nombres pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 100$ pour X

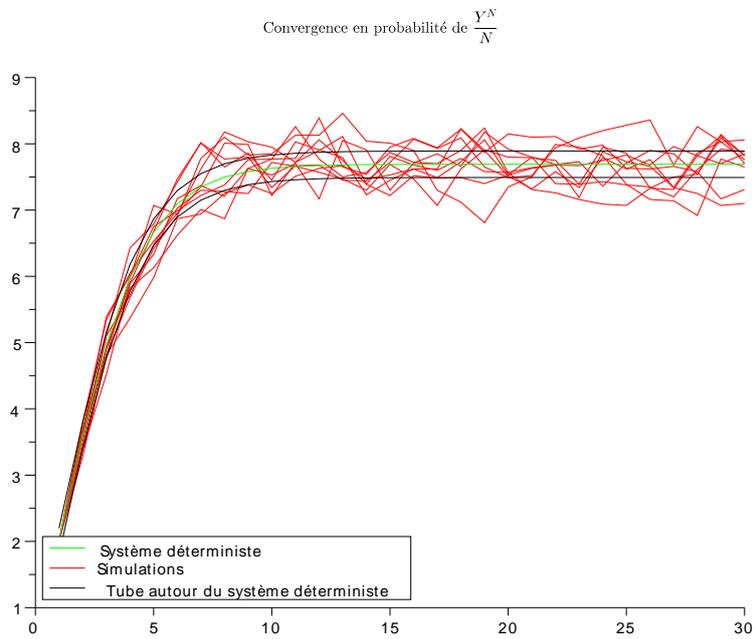


FIGURE 1.4 – Loi des grands nombres pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 100$ pour Y

Répartition de $\sqrt{N}\left(\frac{X^N(t)}{N} - x(t)\right)$ pour le modèle de métapopulation

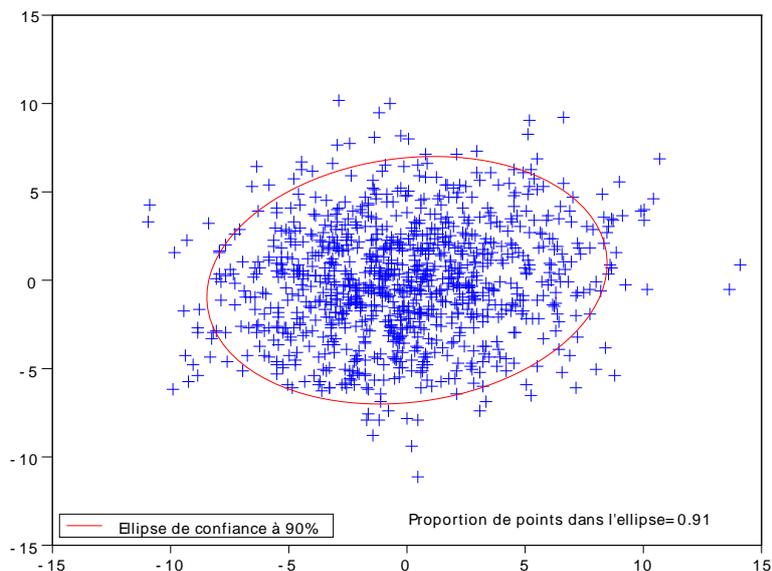


FIGURE 1.5 – Théorème limite central pour l'exemple d'une métapopulation pour $N = 2000$

où $X_0^N \in \{0, \dots, N\}$, $Y_0^N = N - X_0^N$ et les $A_k^N(x)$ sont des variables *i.i.d.* de Bernoulli de paramètre $p(x)$. On obtient

$$(X_{n+1}^N, Y_{n+1}^N) = \sum_{k=1}^N \zeta_k^N(X_n),$$

où $\mathbb{E}(\zeta_1^N(x)) = (p(x), 1 - p(x))$ et la matrice de covariance de $\zeta_1(x)$ est

$$V = \begin{pmatrix} p(x)(1 - p(x)) & -p(x)(1 - p(x)) \\ -p(x)(1 - p(x)) & p(x)(1 - p(x)) \end{pmatrix}.$$

On a la convergence en probabilité vers le système déterministe

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (p(x_n), 1 - p(x_n)).$$

Dans les simulations suivantes, on a pris $p(x) = rx(1 - x)$, avec $r = 2.75$ et $N = 40000$. Pour le théorème limite central, on a pris la répartition des points en $n = 10$.

Exemple 1.3 (Modèle sexué). On regarde le modèle suivant :

$$x_{n+1} = \min(x_n, y_n) \frac{x_n + y_n}{cx_n}$$

$$y_{n+1} = \min(x_n, y_n) \frac{x_n + y_n}{cy_n}$$

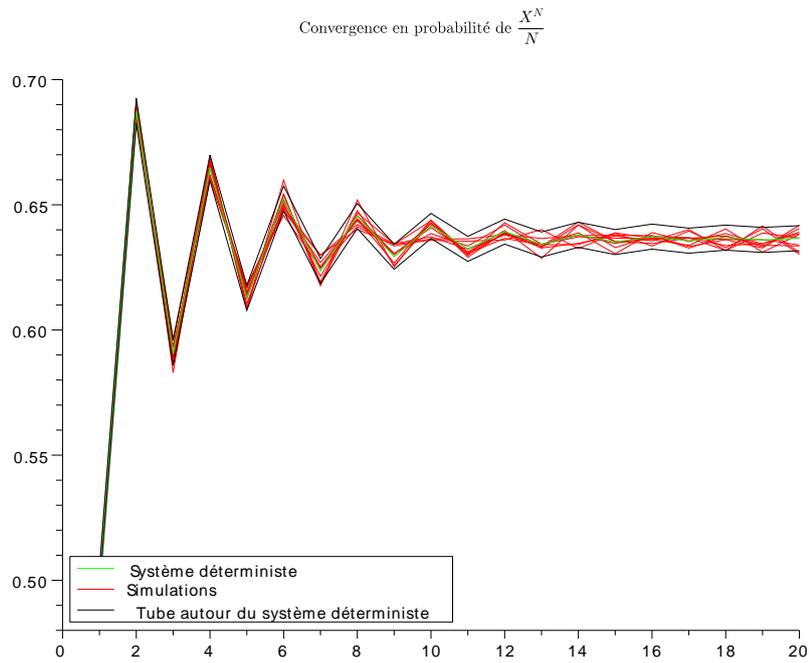


FIGURE 1.6 – Loi des grands nombres pour le modèle de Wright-Fisher pour $N = 40000$ pour X

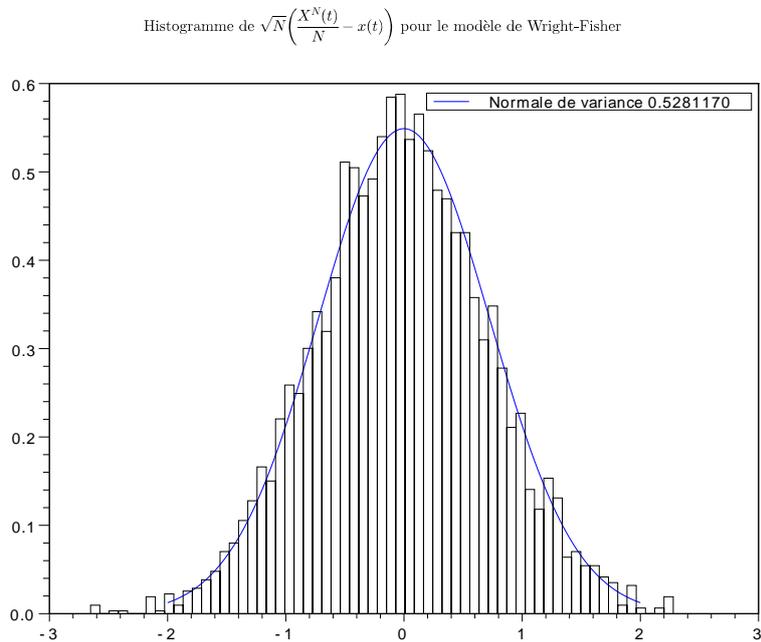


FIGURE 1.7 – Théorème limite central pour le modèle de Wright-Fisher pour $N = 40000$ en $n = 10$

avec c une constante, où x_n correspond au nombre de mâles et y_n le nombre de femelles à la génération n . Il y a $\min(x_n, y_n)$ couples qui se forment et donnent naissance à un certain nombre de mâles et femelles. En prenant $(x_n + y_n)/(cx_n)$ enfants mâles en moyenne par couple, on obtient une sorte de régulation qui permet d'avoir plus de mâles à la génération $n + 1$ s'il y en a peu à la génération n . On définit le modèle stochastique suivant, avec N un paramètre d'échelle :

$$(X_{n+1}^N, Y_{n+1}^N) = \sum_{k=1}^{\min(X_n^N, Y_n^N)} \zeta_{k,n}^N(X_n^N, Y_n^N),$$

où les $(\zeta_{k,n}^N(x, y))$ sont des variables *i.i.d.* dont la loi ne dépend pas de k et n , $\zeta^N(x, y) = (A, B)$ avec A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\frac{x+y}{cx}$ et $\frac{x+y}{cy}$.

On obtient la matrice de covariance

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{cx} & 0 \\ 0 & \frac{x+y}{cy} \end{pmatrix}.$$

Dans les simulations ci dessous, $c = 1, 1$, $N = 2000$ et on montre la répartition des points en $n = 10$.

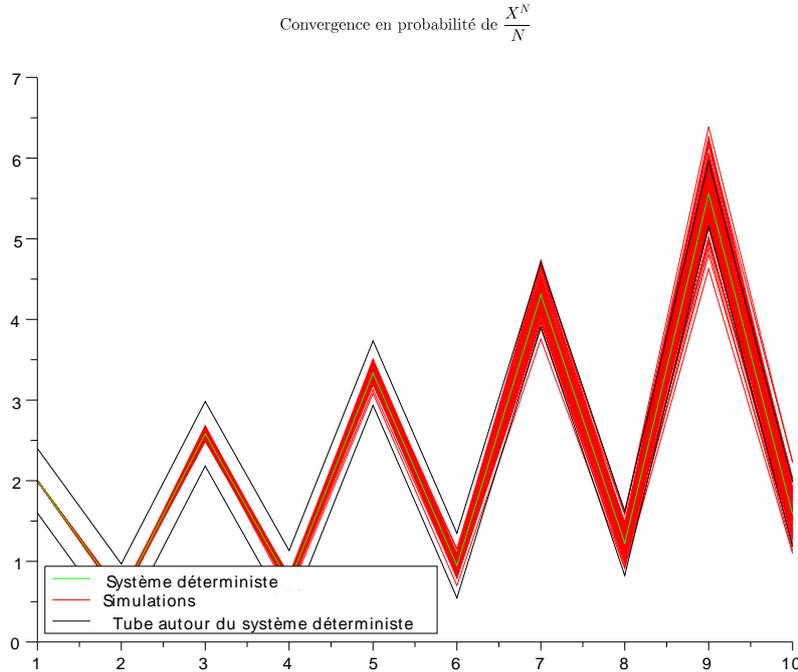


FIGURE 1.8 – Loi des grands nombres pour un modèle sexué pour $N = 2000$ pour X

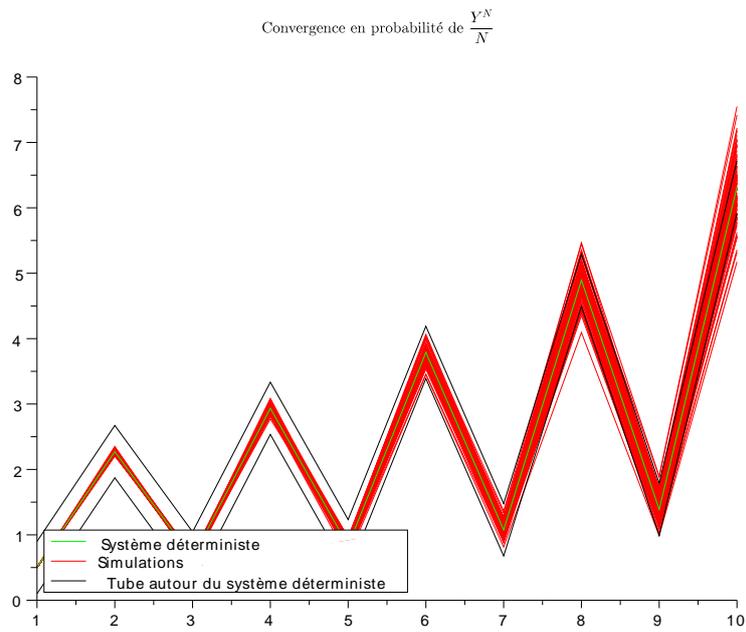


FIGURE 1.9 – Loi des grands nombres pour un modèle sexué pour $N = 2000$ pour Y

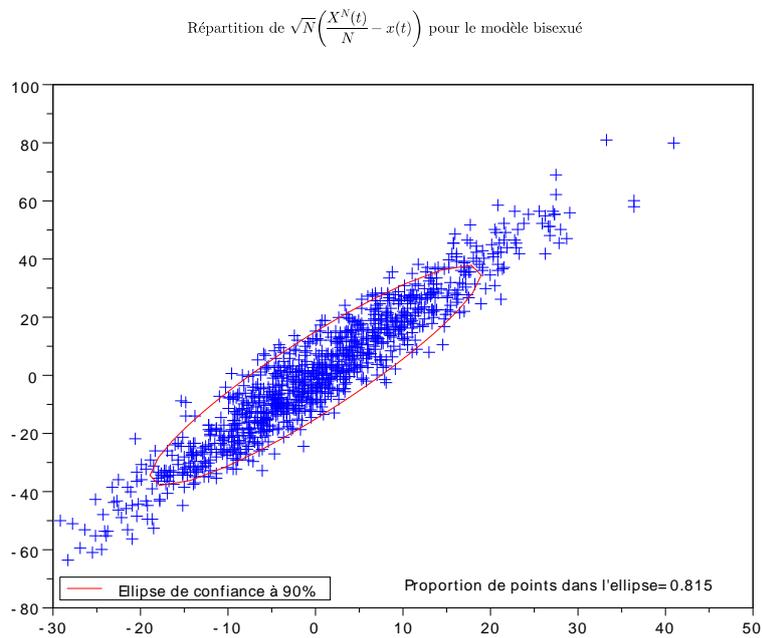


FIGURE 1.10 – Théorème limite central pour un modèle sexué pour $N = 2000$ en $n = 10$

Comme le système dynamique déterministe ne converge pas vers un équilibre stable, les matrices jacobiniennes dans le calcul de la matrice de covariance de la loi normale limite font que l'on a de très grandes fluctuations.

Exemple 1.4 (Modèle de Nicholson-Bailey). On considère le modèle hôte-parasite de Nicholson-Bailey [49, p.190]. Le modèle déterministe est de la forme

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \lambda h_n \exp(-ap_n) \\ p_{n+1} &= ch_n(1 - \exp(-ap_n)), \end{aligned}$$

où h_n et p_n sont les nombres d'hôtes et de parasites à la génération n , $\exp(-ap_n)$ correspond au nombre d'hôtes qui n'ont pas été parasités avec a un paramètre positif, $\lambda > 0$ est le taux de croissance des hôtes et $c > 0$ correspond à la taille de couvée des parasites.

On propose le modèle stochastique suivant :

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \sum_{k=1}^{H_n} A_{k,n}(P_n) B_{k,n} \\ P_{n+1} &= \sum_{k=1}^{H_n} (1 - A_{k,n}(P_n)) C_{k,n}, \end{aligned}$$

où

- les $(A_{k,n}(p))_{k,n \in \mathbb{N}}$ sont des variables i.i.d. de Bernoulli de paramètre $\exp(-ap)$,
- les $(B_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ sont des variables i.i.d. de Poisson de paramètre λ ,
- les $(C_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ sont des variables i.i.d. de Poisson de paramètre c .

On suppose aussi que les variables $(A_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$, $(B_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ et $(C_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes.

En reprenant notre formalisme, on a

$$(H_{n+1}, P_{n+1}) = \sum_{j=1}^{H_n} \zeta_j(P_n),$$

où $\mathbb{E}(\zeta(P_n) | P_n = p) = (\lambda \exp(-ap), c(1 - \exp(-ap)))$ et la matrice de covariance de $\zeta(p)$ vaut

$$\begin{pmatrix} e^{-ap}(\lambda + \lambda^2) - e^{-2ap}\lambda^2 & -\lambda c e^{-ap}(1 - e^{-ap}) \\ -\lambda c e^{-ap}(1 - e^{-ap}) & (1 - e^{-ap})(c + c^2) - (1 - e^{-ap})^2 c^2 \end{pmatrix}.$$

On introduit notre paramètre d'échelle N , on ne change que les variables $A_{k,n}(p)$, en prenant les $A_{k,n}^N(p)$ des variables i.i.d de Bernoulli de paramètre $\exp(-ap/N)$.

On obtient

$$(H_{n+1}^N, P_{n+1}^N) = \sum_{j=1}^{H_n^N} \zeta_j^N(P_n),$$

où

$$\mathbb{E}(\zeta^N(P_n^N) | P_n^N = p) = (\lambda \exp(-ap/N), c(1 - \exp(-ap/N)))$$

et la matrice de covariance de $\zeta^N(p)$ vaut

$$\begin{pmatrix} e^{-ap/N}(\lambda + \lambda^2) - e^{-2ap/N}\lambda^2 & -\lambda c e^{-ap/N}(1 - e^{-ap/N}) \\ -\lambda c e^{-ap/N}(1 - e^{-ap/N}) & (1 - e^{-ap/N})(c + c^2) - (1 - e^{-ap/N})^2 c^2 \end{pmatrix}.$$

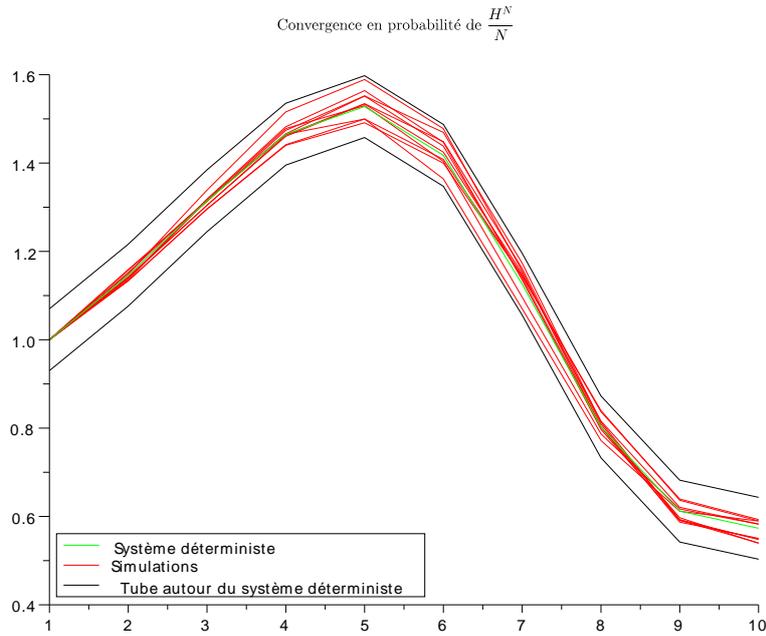


FIGURE 1.11 – Loi des grands nombres pour le modèle de Nicholson-Bailey pour $N = 20000$ pour H

Exemple 1.5 (Modèle LPA). *On considère un modèle de vers de farine de [11]. On considère trois stades de développement : l'état larvaire, l'état de pupes et l'état adulte. On notera l_n le nombre de larves à la génération n , p_n le nombre de pupes et a_n le nombre d'adultes. À la génération $n + 1$, une proportion $1 - \mu_l$ des larves deviennent des pupes, μ_l correspond au taux de mortalité des larves. Toutes les pupes deviennent des adultes (on considère que le taux de mortalité des pupes est nul). Et une proportion $1 - \mu_a$ des adultes restent en vie, μ_a correspond au taux de mortalité des adultes. En moyenne, chaque adulte produit b larves. On considère aussi qu'il y a du cannibalisme : les larves et les adultes consomment des oeufs (état précédant l'état de larve), une proportion $1 - \exp(-c_{el}l_n)$ est consommée par les larves, $1 - \exp(-c_{ea}a_n)$ est consommée par les adultes, et une proportion $1 - \exp(-c_{pa}a_n)$ de pupes est consommée par les adultes. On obtient le système dynamique déterministe*

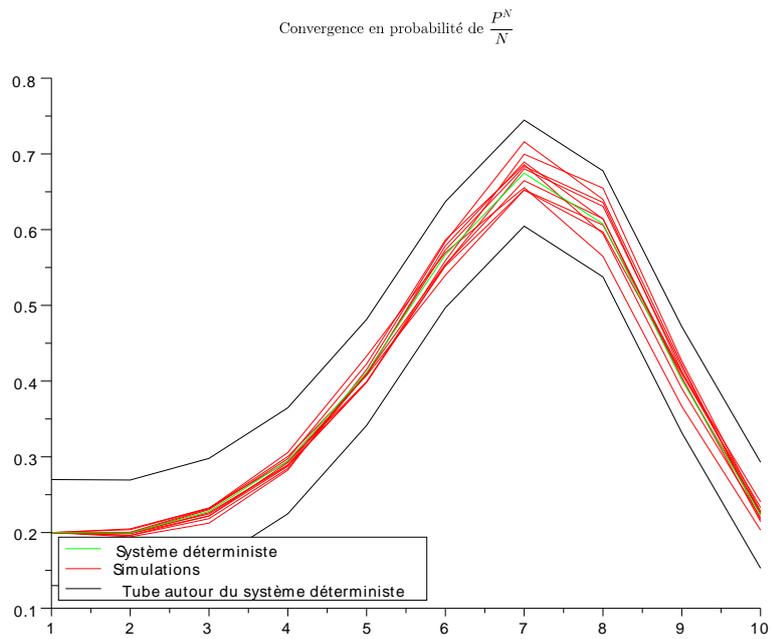


FIGURE 1.12 – Loi des grands nombres pour le modèle de Nicholson-Bailey pour $N = 20000$ pour P

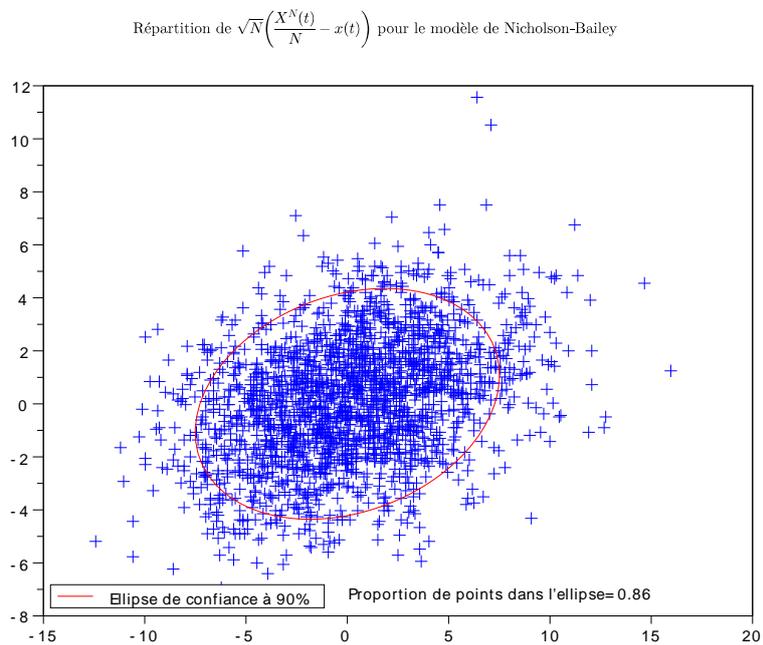


FIGURE 1.13 – Théorème limite central pour le modèle de Nicholson-Bailey pour $N = 20000$ en $n = 10$

suivant :

$$\begin{cases} l_{n+1} = ba_n \exp(-c_{el}l_n - c_{ea}a_n) \\ p_{n+1} = (1 - \mu_l)l_n \\ a_{n+1} = p_n \exp(-c_{pa}a_n) + (1 - \mu_a)a_n. \end{cases}$$

On donne ci dessous un exemple de trajectoire du système déterministe :

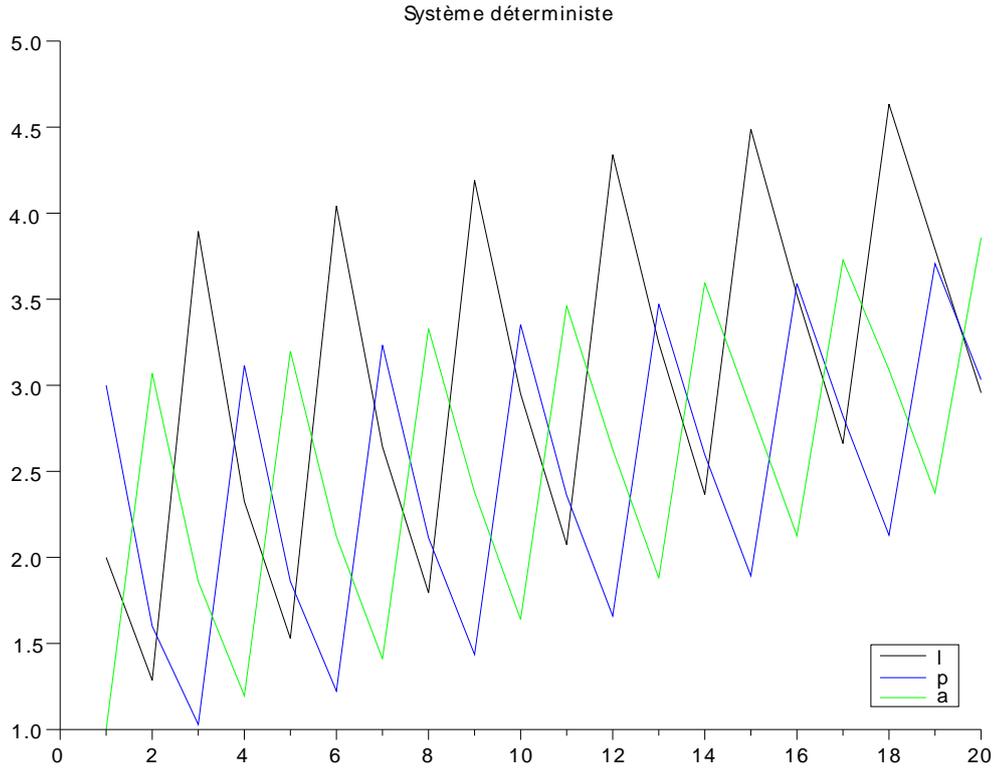


FIGURE 1.14 – Exemple d’une trajectoire du système déterministe du modèle LPA.

Soit N notre paramètre d’échelle. On propose le modèle stochastique suivant :

$$\begin{cases} L_{n+1}^N = \sum_{k=1}^{A_n^N} B_{k,n}^N \\ P_{n+1}^N = \sum_{k=1}^{L_n^N} C_{k,n}^N \\ A_{n+1}^N = \sum_{k=1}^{P_n^N} D_{k,n}^N + \sum_{k=1}^{A_n^N} E_{k,n}^N, \end{cases}$$

où les $(B_{k,n}^N)$ sont des variables *i.i.d.*, produit d’une loi de Poisson de paramètre b et de deux lois de Bernoulli de paramètres $\exp(-c_{el}L_n^N/N)$ et $\exp(-c_{ea}A_n^N/N)$. Les $(C_{k,n}^N)$ sont des variables *i.i.d* de loi de Bernoulli de paramètre $1 - \mu_l$. Les $(D_{k,n}^N)$ sont des variables *i.i.d.* de loi de Bernoulli de paramètre $\exp(-c_{pa}A_n^N/N)$ et les

$(E_{k,n}^N)$ sont des variables i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1 - \mu_a$. Les variables $(B_{k,n}^N)$, $(C_{k,n}^N)$, $(D_{k,n}^N)$ et $(E_{k,n}^N)$ sont indépendantes.

On obtient la matrice de covariance A_n qui est diagonale :

$$\begin{cases} (A_n)_{1,1} = a_n(e^{-c_{ea}a_n - c_{el}l_n}(b + b^2) - e^{-2(c_{ea}a_n + c_{el}l_n)}b^2) \\ (A_n)_{2,2} = l_n\mu_l(1 - \mu_l) \\ (A_n)_{3,3} = p_n e^{-c_{pa}a_n}(1 - e^{-c_{pa}a_n}) + a_n\mu_a(1 - \mu_a). \end{cases}$$

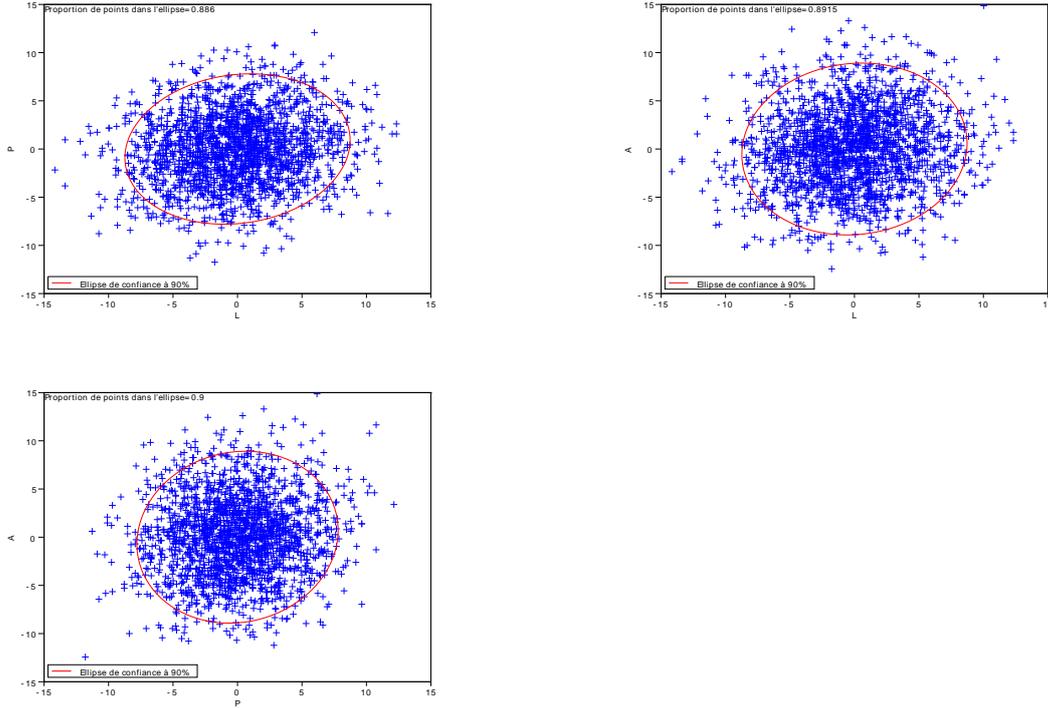


FIGURE 1.15 – Théorème limite central pour le modèle LPA pour $N = 2000$ en $n = 20$

Les simulations ci-dessus ont été réalisées avec $\mu_l = 0.2$, $c_{el} = c_{ea} = c_{pa} = 0.01$, $\mu_a = 0.9$ et $b = \mu_a/(1 - \mu_l) + 0.2$. Elles correspondent aux projections sur les plans $A = 0$, $P = 0$ et $L = 0$, des points $(L_n^N/N, P_n^N/N, A_n^N/N)$ en $n = 20$, ainsi que les projections de l'ellipsoïde de confiance à 90%.

1.1.4 Comportement en temps long

Dans cette partie, on veut déterminer si la population peut persister ou non. Comme le processus est markovien à valeurs entières, soit il tend vers l'infini, soit il a une limite inférieure finie auquel cas il atteindra 0 (extinction) si 0 est accessible.

Définition 1.1. On dira que 0 est partout accessible si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$, il existe $k > 0$, tel que $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_k = 0) > 0$

Nous distinguons trois régimes, qui dépendent de l'existence d'une fonction de Lyapounov donnée par :

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle} \sum_{\ell=1}^L F_{\ell}(\mathbf{x}) \langle \mathbb{E}(\zeta_{\ell}(\mathbf{x})), \mathbf{u} \rangle.$$

pour $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^d$. Les deux premiers régimes (non critiques) peuvent être ici directement dérivés de González, Martínez et Mota [22].

Classification comportement en temps long

Proposition 1.3 (Régime sous-critique ou récurrent). *On suppose qu'il existe une constante $a > 0$ et un vecteur $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ tels que*

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| \geq a} f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \leq 1,$$

alors pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$.

Si de plus 0 est partout accessible, alors $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\exists k > 0 : \mathbf{X}_k = 0) = 1$.

Dans le régime surcritique, nous avons besoin d'un contrôle de moment pour gérer les fluctuations.

Hypothèse 1. *On pose*

$$R_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^L \sum_{j=1}^{F_{\ell}(\mathbf{x})} \langle \zeta_{\ell}^j(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\zeta_{\ell}^j(\mathbf{x})), \mathbf{u} \rangle,$$

et on suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(|R_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})|^{1+\delta}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^{\delta}).$$

On suppose aussi que le processus peut aller vers l'infini (et ne reste donc pas infiniment longtemps dans un compact)

$$\forall C > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_k \mathbf{u} \geq C) > 0.$$

Proposition 1.4 (Régime sur-critique ou transient). *On suppose qu'il existe $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ tel que*

$$\liminf_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) > 1,$$

et que l'hypothèse 1 est satisfaite. Alors pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0.$$

Le cas

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 1,$$

mais

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| \geq a} f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) > 1,$$

correspond au cas critique et nous l'étudierons plus en détail dans le Chapitre suivant. Nous déterminerons les régimes possibles pour une certaine classe de processus, qui satisfait l'équation de récurrence

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.3)$$

où M est une matrice irréductible $d \times d$ à coefficients positifs, $g : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ une fonction telle que $\|g(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}\|)$ lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend vers l'infini, et $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires (à valeurs dans \mathbb{R}^d) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0.$$

Cette décomposition est un cas particulier de notre modèle lorsque par exemple $L = d$, pour tout $\ell = 1, \dots, d$ on a $F_\ell^N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_\ell$ ainsi que $\mathbb{E}(\zeta_\ell(\mathbf{x})) = c_\ell + r_\ell(\mathbf{x})$, où $c_\ell \in \mathbb{R}_+^d$ et r est une fonction telle que

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|r(\mathbf{x})\| = 0.$$

Dès lors, la ℓ -ième ligne de M est le vecteur c_ℓ et $g(x) = \sum_{\ell=1}^d \mathbf{x}_\ell r_\ell(\mathbf{x})$.

Soit ρ le rayon spectral de M et \mathbf{u} un vecteur propre à droite associé à ρ . On suppose qu'il existe $\delta \geq 0$ tel que $\mathbb{E}(|\xi_n \mathbf{u}|^{1+\delta} | \mathbf{X}_n = \mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^\delta)$. On obtient le résultat suivant.

Proposition 1.5.

i) Si $\rho > 1$ alors $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$.

ii) Si $\rho < 1$ alors $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$.

Si de plus 0 est partout accessible, alors $\mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N} : \mathbf{X}_k = 0) = 1$.

Le cas $\rho = 1$ est plus complexe. Il sera étudié en détail dans le prochain Chapitre. Un cas particulier de processus vérifiant l'équation (1.3) sont les processus de Galton-Watson multitypes avec immigration. Les fonctions génératrices sont un outil puissant pour étudier ces processus. Le cas critique a été étudié par Kawazu [34]. Il donne un critère de récurrence/transience et le comportement asymptotique du temps de retour en zéro dans le cas récurrent. Nous rappellerons ces résultats dans la prochaine partie et leurs preuves en appendice.

Exemples

Exemple 1.6 (Nicholson-Bailey). *On reprend le modèle de Nicholson-Bailey avec le paramètre d'échelle $N = 1$.*

Si $\lambda \leq 1$, alors on prend $\mathbf{u} = (1, \lambda/c)$. On obtient

$$f_{\mathbf{u}}(h, p) = \frac{\lambda h}{h + \lambda p/c} \leq 1,$$

et donc on peut appliquer la propriété (1.3) et

$$\mathbb{P}(\|(H_n, P_n)\| \rightarrow \infty) = 0.$$

Si $\lambda > 1$, alors $\mathbb{P}(\|(H_n, P_n)\| \rightarrow \infty) > 0$. En effet, pour toute condition initiale $(h, p) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}_{(h,p)}(P_1 = 0, H_1 > 0) > 0$ et dès lors que $P_n = 0$, (H_n) est un processus de Galton-Watson surcritique qui tend vers l'infini avec probabilité non nulle.

On peut aussi montrer que $\mathbb{P}(H_n \rightarrow \infty, P_n \rightarrow \infty) = 0$. En effet, on pose $k = \lfloor \frac{\ln \lambda}{a} \rfloor + 1$, $\beta = \frac{1 - \lambda \exp(-ak)}{c(1 - \exp(-ak))}$ et $\mathbf{u} = (1, \beta)^\top$ et on obtient pour $p \geq k$,

$$f_{\mathbf{u}}(h, p) \leq 1.$$

Exemple 1.7 (Métapopulation de deux parcelles). *On considère une métapopulation avec deux parcelles. On reprend le modèle donné en exemple plus haut. On suppose aussi que les taux de reproduction $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(y)$ s'écrivent sous la forme*

$$\lambda_1(x) = \lambda_1 + r_1(x), \quad \text{avec } r_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

et

$$\lambda_2(y) = \lambda_2 + r_2(y), \quad \text{avec } r_2(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

On obtient l'équation de récurrence pour $\mathbf{Z}_n = (X_n, Y_n)$

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n M + g(\mathbf{Z}_n) + \xi_n,$$

où $M = \begin{pmatrix} (1-p_1)\lambda_1 & p_1\lambda_1 \\ p_2\lambda_2 & (1-p_2)\lambda_2 \end{pmatrix}$ et pour $\mathbf{z} = (x, y)$,

$$g(\mathbf{z}) = ((1-p_1)r_1(x)x + p_2r_2(y)y, p_1r_1(x)x + (1-p_2)r_2(y)y).$$

Soit ρ la valeur propre maximale de M .

- Si $\lambda_1(1-p_1) > 1$ ou si $\lambda_2(1-p_2) > 1$ alors $\rho > 1$ et $\mathbb{P}(\|\mathbf{Z}_n\| \rightarrow \infty) > 0$.*
- Si $\lambda_1(1-p_1) \leq 1$ et si $\lambda_2(1-p_2) \leq 1$ et*

$$\frac{\lambda_1 p_1}{1 - \lambda_1(1-p_1)} > \frac{1 - \lambda_2(1-p_2)}{\lambda_2 p_2}$$

alors $\rho > 1$ et $\mathbb{P}(\|\mathbf{Z}_n\| \rightarrow \infty) > 0$.

— Si $\lambda_1(1 - p_1) \leq 1$ et si $\lambda_2(1 - p_2) \leq 1$ et

$$\frac{\lambda_1 p_1}{1 - \lambda_1(1 - p_1)} < \frac{1 - \lambda_2(1 - p_2)}{\lambda_2 p_2}$$

alors $\rho < 1$ et $\mathbb{P}(\|\mathbf{Z}_n\| \rightarrow \infty) = 0$.

Si $\lambda_1(1 - p_1) \leq 1$ et si $\lambda_2(1 - p_2) \leq 1$ et

$$\frac{\lambda_1 p_1}{1 - \lambda_1(1 - p_1)} = \frac{1 - \lambda_2(1 - p_2)}{\lambda_2 p_2}$$

alors $\rho = 1$ (en effet, ces conditions impliquent que $\rho \leq 1$ et $1 - \text{Tr } M + \det M = 0$, donc $\rho = 1$) et nous avons besoin d'un nouveau résultat pour déterminer le comportement en temps long du processus. Nous donnerons un critère de persistance/extinction pour ce cas particulier dans le Chapitre 2.

1.2 Processus de Galton-Watson multitype critique avec immigration

Dans cette partie, nous rappelons différents résultats sur les processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration. Ces processus sont un cas particulier de processus vérifiant l'équation (1.3). Les preuves seront données en Annexe 4, à la fin de cette thèse.

Soit (\mathbf{Z}_n) , un processus de Galton-Watson multitype critique avec immigration avec d types défini par

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{(\mathbf{Z}_n)_i} X_{i,1,k,n}, \dots, \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{(\mathbf{Z}_n)_i} X_{i,n,k,n} \right) + (J_{1,n}, \dots, J_{d,n}),$$

où les $(X_{i,j,k,n})_{i,j \in \{1, \dots, d\}, k, n \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires à valeurs entières dont la loi ne dépend que de i et j et les $(J_{i,n})_{i \in \{1, \dots, d\}, n \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires à valeurs entières dont la loi ne dépend que de i correspondant à l'immigration de nouveaux individus. Afin d'alléger les notations, on écrira $X_{i,j}$ à la place de $X_{i,j,1,1}$ et J_i à la place de $J_{i,n}$. On suppose que pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathbb{P}(X_{i,j} = 0) > 0$, $\mathbb{P}(J_i = 0) > 0$ et $\mathbb{E}(X_{i,j}^2), \mathbb{E}(J_i) < \infty$.

Soit $M = (\mathbb{E}(X_{i,j}))_{i,j}$ la matrice moyenne. On suppose que M est une matrice irréductible apériodique à coefficients positifs. Comme on s'est placé dans le cas critique, la plus grande valeur propre de M est 1. Soit \mathbf{u} (respectivement \mathbf{v}) le vecteur propre à droite (respectivement à gauche) correspondant à 1 et normalisé de façon à ce que $\mathbf{u}^\top \mathbf{u} = \mathbf{v} \mathbf{u} = 1$.

On pose $\mathbf{J} = \mathbb{E}((J_1, \dots, J_d))$. On obtient l'équation de récurrence

$$\mathbb{E}(\mathbf{Z}_{n+1}) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}_n)M + \mathbf{J}.$$

On pose

$$Q(\mathbf{s}) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d s_i s_j \mathbb{E}(X_{k,i} X_{k,j} - \delta_{ij} X_{k,i}) \right)_{k=1, \dots, d},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon).

Soit $F(\mathbf{s}) = (\mathbb{E}(\mathbf{s}^{(X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,d})})_{i \in \{1, \dots, d\}}$ et $G(\mathbf{s}) = \mathbb{E}(\mathbf{s}^{(J_1, \dots, J_d)})$, les fonctions génératrices du nombre d'enfants par individu et du nombre d'immigrants, avec $\mathbf{s} \in [0, 1]^d$ où on utilise la notation $\mathbf{x}^{\mathbf{y}} = x_1^{y_1} \dots x_d^{y_d}$ pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$.

Théorème 1.1. *On pose $\theta = \frac{\mathbf{u}\mathbf{J}}{\mathbf{v}Q(\mathbf{u})}$. Si $\theta < 1$ alors la chaîne de Markov (\mathbf{Z}_n) est récurrente. Si $\theta > 1$ alors la chaîne de Markov (\mathbf{Z}_n) est transiente.*

Remarque 1.2. *En ajoutant quelques hypothèse sur les moments des $X_{i,j}$ et des J_i , on peut aussi prouver que la chaîne est récurrente si $\theta = 1$.*

On remarque que le critère de récurrence/transience fait intervenir le nombre moyen d'immigrants ainsi que la variance du nombre d'enfants par individu. Les fluctuations stochastiques jouent donc un rôle prépondérant sur le comportement en temps long du processus, contrairement aux processus de Galton-Watson multitypes classiques. Ceci nous amène à penser qu'il en sera de même pour les processus vérifiant l'équation de récurrence (1.3) lorsque le rayon spectral ρ de la matrice M vaut 1. Nous donnerons un critère de récurrence/transience dans le Chapitre 2 pour ces processus et nous verrons qu'en effet, ce critère fait intervenir le "drift" $g(\mathbf{X}_n)$ et la variance $\mathbb{E}(\xi_n \mathbf{u} | \mathcal{F}_n)$ où \mathbf{u} est le vecteur propre à droite de M associé à ρ .

Lorsque la chaîne est récurrente, on peut obtenir un équivalent en l'infini de la queue du temps de retour en zéro. C'est le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Soit $\tau = \inf\{n | \mathbf{Z}_n = \mathbf{0}\}$ le temps de retour en zéro. Si $\theta < 1$ alors $\mathbb{P}(\tau > n | \mathbf{Z}_{-1} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{Z}_0 \neq \mathbf{0}) \sim L(n)n^{\theta-1}$ où L est une fonction à variation lente.*

On observe que la queue du temps de retour en zéro du processus est de l'ordre de grandeur d'une puissance de n . De plus, comme $\theta - 1 > -1$, la chaîne de Markov $(\mathbf{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente nulle. Dans le Chapitre 4, nous donnerons un résultat de même nature d'une part pour les processus à valeurs dans \mathbb{R}_+ satisfaisant l'équation

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n,$$

d'autre part pour les processus satisfaisant l'équation (1.3) lors $g(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^d$.

Critère de persistance pour des modèles de croissance multitypes critiques

Dans ce chapitre, nous donnons un critère de croissance vers l'infini avec probabilité non nulle pour un processus multitype satisfaisant une équation de récurrence de type linéaire perturbée. Ce critère améliore les précédents résultats obtenus par Klebaner [42, 44] qui n'établit qu'une condition suffisante. L'idée principale est de montrer que les fonctions $x \mapsto \log x$ et $x \mapsto 1/\log x$ sont des fonctions de Lyapounov pour le processus $(\mathbf{X}_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ où k est un entier fixé. À la fin de ce chapitre, nous appliquerons ce critère sur l'exemple d'une métapopulation puits-source avec deux parcelles de type puits, mais dont néanmoins la population totale tend vers l'infini avec probabilité non nulle.

Ce chapitre est constitué de l'article Adam [1], intitulé "Criterion for unlimited growth of critical multidimensional stochastic models" accepté pour publications dans *Advances in Applied Probability* en décembre 2016. Ici, nous ajoutons un exemple de la métapopulation.

2.1 Modèle de croissance multitype : critère de persistance/extinction

2.1.1 Introduction

Nous étudions ici des conditions de croissance vers l'infini avec probabilité non nulle d'une suite de vecteurs aléatoires \mathbf{X}_n , à valeurs dans \mathbb{R}_+^d , et qui satisfont la relation de récurrence suivante

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

où M est une matrice irréductible $d \times d$ à coefficients positifs, $g : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ une fonction telle que $\|g(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}\|)$ lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend vers l'infini, et (ξ_n) une suite de vecteurs aléatoires (à valeurs dans \mathbb{R}^d) telle que presque-sûrement

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$$

où $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est la filtration naturelle associée à (\mathbf{X}_n) . Nous supposons que $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ et que les vecteurs aléatoires ξ_n sont tels que pour tout n , \mathbf{X}_n est à valeur dans \mathbb{R}_+^d presque-sûrement.

Le théorème de Perron-Frobenius [61, pp. 3-4] nous assure que le rayon spectral de M est une valeur propre simple que l'on notera ρ . On dit que \mathbf{X}_n est "sous-critique" si $\rho < 1$, "sur-critique" si $\rho > 1$ et "critique" si $\rho = 1$. Dans le cas "sous-critique", il est clair que $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty) = 0$ car $\|\mathbf{X}_n\|$ est borné en espérance. Dans la plupart des applications, on a $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty) > 0$ dans le cas "sur-critique". Ceci est bien connu dans le cas d'un processus de Galton-Watson multitype avec immigration, par exemple. Cependant, ce n'est pas nécessairement le cas dans notre modèle. Par exemple, si $g(\mathbf{X}_n) = 0$ et $\xi_n = \mathbf{X}_n M_n$ avec M_n des matrices aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(M_n = M) = \mathbb{P}(M_n = -M) = 1/2$, alors $\mathbb{P}(\mathbf{X}_n \rightarrow 0) = 1$.

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur le cas "critique", donc désormais $\rho = 1$. Nous définissons les vecteurs propres à droite et à gauche normalisés associés à ρ par \mathbf{u} et \mathbf{v} de sorte que $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$.

Nous supposons que la suite (\mathbf{X}_n) vérifie une forme faible de la propriété de Markov. Plus précisément, nous supposons que $\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n)$ est une fonction de \mathbf{X}_n et on notera

$$\sigma^2(\mathbf{X}_n) = \mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n).$$

Le processus (\mathbf{X}_n) n'est pas nécessairement une chaîne de Markov car la loi de ξ_n peut dépendre de $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$. Néanmoins, tous nos exemples sont des chaînes de Markov.

Le cas de la dimension 1, $d = 1$, a déjà été étudié et bien compris. Le phénomène intéressant est que la possibilité que le processus tende vers l'infini dépend à la fois du "drift" (*i.e.* $g(\mathbf{X}_n)$) et de la "variance" $\sigma^2(\mathbf{X}_n)$. Ceci a été observé pour la première fois par Lamperti [50] dont les résultats ont ensuite été généralisés par Kersting dans [36]. Cependant, à notre connaissance, le cas multidimensionnel, $d > 1$, n'a pas été traité. Seuls quelques cas particuliers ont été étudiés. Par exemple, dans plusieurs articles Klebaner [42, 44] a donné des conditions suffisantes pour l'extinction ou l'explosion vers l'infini de processus de Galton-Watson multitypes états-dépendants. Néanmoins, ses résultats ne sont pas complets dans le sens où on peut construire des exemples qui ne satisfont pas ses conditions. Gonzalez et al. donnèrent aussi des conditions pour l'explosion du processus vers l'infini dans le cas surcritique dans [22]. Jagers et Sagitov [32] se sont intéressés à des processus dépendant de la taille totale de la population (qui sont des cas particuliers de notre

modèle). Néanmoins, dans le cas critique ils se restreignent à un nombre d'enfants fini par individu (ce qui exclut par exemple des lois de Poisson) et à un "drift" borné.

Le but de ce chapitre est d'obtenir un critère en dimension multiple qui sera analogue à celui en dimension 1. La stratégie de la preuve est similaire à celle de l'article de Kersting [36]. Nous illustrerons ensuite notre critère sur différentes classes d'exemples, notamment celui donné par Klebaner dans [44] et pour lequel nous donnons un critère complet (sauf pour un cas très particulier).

Sous des hypothèses techniques sur les fonctions g et σ^2 , nous prouvons dans ce chapitre que le processus reste borné presque sûrement si

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{2rg(r\mathbf{v})\mathbf{u}}{\sigma^2(r\mathbf{v})} < 1, \quad (2.2)$$

tandis qu'il tend vers l'infini avec probabilité positive si

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{2rg(r\mathbf{v})\mathbf{u}}{\sigma^2(r\mathbf{v})} > 1. \quad (2.3)$$

Ce critère nous rappelle le critère donné par Kersting dans [36] pour la dimension 1. En fait, la matrice M preserve la composante de \mathbf{X}_n le long de la direction \mathbf{v} tandis qu'elle contracte le long des autres directions, ainsi, en espérance, le processus tend vers l'infini le long du vecteur \mathbf{v} .

Dans la prochaine partie, nous énonçons notre résultat principal et sa preuve. Nous l'appliquerons ensuite dans la Section 3 pour retrouver un critère de récurrence-transience pour les processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration et pour améliorer un critère d'extinction presque-sûre pour les processus de Galton-Watson multitypes états-dépendants. Dans la dernière partie, nous prouvons des lemmes utilisés pour la preuve de notre théorème.

2.1.2 Critère de croissance infinie

Hypothèses

Pour un vecteur ligne \mathbf{x} , soit

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}).$$

Nous supposons qu'il existe un réel α tel que $-1 < \alpha < 1$, des réels c_i, d_i et des fonctions à valeurs réelles f_i et h_i définies sur \mathbb{R}^d , $i \in \{1, 2\}$, tels que

$$\begin{cases} g(\mathbf{x})\mathbf{u} = c_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha + h_1(\mathbf{y}) + f_1(\mathbf{x}) \\ \sigma^2(\mathbf{x}) = d_1(\mathbf{x}\mathbf{u})^{1+\alpha} + h_2(\mathbf{y}) + f_2(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{A1})$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, avec $h_1 \equiv 0$ si $\alpha \leq 0$ et

$$\begin{cases} |h_1(\mathbf{y})| \leq c_2 \|\mathbf{y}\|^\alpha \\ |h_2(\mathbf{y})| \leq d_2 \|\mathbf{y}\|^{1+\alpha} \\ f_1(\mathbf{x}) = o((\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha) \text{ lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \\ f_2(\mathbf{x}) = o((\mathbf{x}\mathbf{u})^{1+\alpha}) \text{ lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ correspond à la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d .

Nous supposons qu'il existe $\delta > 0$ et $A_1 > 0$ tels que

$$\mathbb{E} \left((\|\xi_n\|)^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_n \right) \leq A_1 \sigma^{2+\delta}(\mathbf{X}_n). \quad (\text{A2})$$

Aussi, nous avons besoin d'une hypothèse pour permettre au processus d'aller vers l'infini

$$\forall C > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathbb{P}(\mathbf{X}_n \mathbf{u} \geq C) > 0. \quad (\text{A3})$$

Enfin, nous ajoutons deux autres hypothèses sur les fonctions g et σ^2 pour avoir que \mathbf{X}_n puisse tendre vers l'infini avec probabilité non nulle. Premièrement, nous supposons que $g(\mathbf{x})\mathbf{u}$ n'atteint pas 0 :

Il existe $s_1 > 0$ tel que pour tout $a, b > 0$ tels que $s_1 < a < b < \infty$, si $\mathbf{x}\mathbf{u} \in (a, b)$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que

$$g(\mathbf{x})\mathbf{u} > \varepsilon, \quad (\text{A4})$$

et deuxièmement, que σ^2 est finie :

$$\forall a > 0, \sup_{\|\mathbf{x}\| < a} \sigma^2(\mathbf{x}) < \infty. \quad (\text{A5})$$

Le théorème

Nous donnons maintenant le critère de croissance infinie pour \mathbf{X}_n .

Théorème 2.1 (Critère de croissance infinie).

Nous supposons (A1) et (A2).

i) Si $c_1 < \frac{d_1}{2}$ alors $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow +\infty) = 0$.

ii) Si $c_1 > \frac{d_1}{2}$ et si on a aussi (A3) alors $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow +\infty) > 0$.

Comparé à (2.2) et (2.3), nous donnons un critère dans le cas particulier où g a un terme dominant en $(\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha$. Cela peut sembler restrictif, néanmoins dans la plupart de nos applications la fonction g est constante, c'est à dire $\alpha = 0$. Le cas d'égalité $c_1 = \frac{d_1}{2}$ (que l'on pourrait appeler cas critique du cas critique) n'a jamais été étudié, même en simple type, sauf pour les processus de Galton-Watson critiques avec immigration sous certaines hypothèses sur les moments de ξ_n (voir la remarque de la section 3).

Preuve du théorème

La stratégie de la preuve du théorème consiste à prouver qu'il existe un entier k et une fonction à valeurs réelles L tels que

$$\mathbb{E}(L(\mathbf{X}_{n+k}\mathbf{u})|\mathcal{F}_n) \leq L(\mathbf{X}_n\mathbf{u})$$

lorsque $\mathbf{X}_n\mathbf{u}$ est plus grand qu'une certaine constante. Ainsi, on aura construit une surmartingale et on conclura en utilisant un théorème de convergence de martingales.

Avant de prouver le théorème, nous énonçons deux lemmes clés qui nous fournissent des fonctions de Lyapounov. Leurs preuves sont un peu techniques et sont reportées à la section 2.1.4.

Lemme 2.1. *On suppose (A1) et (A2). Si $c_1 < \frac{d_1}{2}$, alors il existe $s > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que,*

$$\mathbb{E}(\log(\mathbf{X}_{n+k}\mathbf{u})|\mathcal{F}_n) \leq \log(\mathbf{X}_n\mathbf{u}), \text{ si } \mathbf{X}_n\mathbf{u} > s.$$

Lemme 2.2. *On suppose (A1) et (A2). Si $c_1 > \frac{d_1}{2}$, alors il existe $s > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que,*

$$\mathbb{E}(L(\mathbf{X}_{n+k}\mathbf{u})|\mathcal{F}_n) \leq L(\mathbf{X}_n\mathbf{u}), \text{ si } \mathbf{X}_n\mathbf{u} > s,$$

où $L(x) = (\log x)^{-1}$.

Preuve du Théorème 1.

Sans perte de généralité, nous supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X}_n\mathbf{u} \geq 3$ presque-sûrement (sinon on considère $\mathbf{X}_n + 3v$ à la place de \mathbf{X}_n).

i) On commence avec le cas où $c_1 < \frac{d_1}{2}$. Suivant la démonstration dans [36], supposons que $\mathbf{X}_n\mathbf{u} \rightarrow +\infty$ avec probabilité non nulle. Soit $U_n = \mathbf{X}_{nk}\mathbf{u}$, ainsi $U_n \rightarrow +\infty$ avec probabilité non nulle. Dès lors, il existe un entier T tel que pour $s > s_1$, s_1 défini comme dans (A4), on a

$$\mathbb{P}\left(\inf_{n \geq T} U_n > s, U_n \rightarrow +\infty\right) > 0. \quad (2.4)$$

Soit $\tau = \inf\{n \geq T : U_n \leq s\}$ avec la convention suivante : $\tau = +\infty$ si $\inf_{n \geq T} U_n > s$.

Soit

$$V_n = \begin{cases} \log(U_{n+T}) & \text{si } n + T \leq \tau, \\ \log(U_\tau) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme (V_n) est une surmartingale positive par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{T+n})_{n \in \mathbb{N}}$ par le Lemme 2.1, elle converge presque-sûrement et on obtient une contradiction avec (2.4).

ii) On considère maintenant le cas où $c_1 > \frac{d_1}{2}$.

Soit $s > s_1$ (où s_1 est défini comme dans (A4)) assez grand afin que le Lemme 2.2 soit vrai. Soit A, B, C et D , quatre événements définis comme suit :

- $A = \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq s \right\}$
- $B = \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n \mathbf{u} < \infty \text{ et } \exists i \in \{0, \dots, k-1\}, \mathbf{X}_{nk+i} \mathbf{u} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} R_i \text{ avec } s < R_i < \infty \right\}$
- $C = \left\{ \exists i \in \{0, \dots, k-1\}, \mathbf{X}_{nk+i} \mathbf{u} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_{nk+i+1} \mathbf{u} < \infty \right\}$
- $D = \left\{ \mathbf{X}_n \mathbf{u} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \right\}$.

Le but est montrer que $\mathbb{P}(D) > 0$. Nous montrons d'abord que $\mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D) = 1$ (étape 1). Ensuite, que $\mathbb{P}(A) < 1$ (étape 2). Puis nous montrons que $\mathbb{P}(B) = 0$ (étape 3) et nous concluons enfin en montrant que $\mathbb{P}(C) = 0$ (étape 4).

Étape 1 : Soit $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Ainsi $U_{i,n} = \min(L(\mathbf{X}_{nk+i} \mathbf{u}), L(s))$ est surmartingale positive bornée qui converge presque-sûrement et en espérance. Dès lors, ou bien $\mathbf{X}_{nk+i} \mathbf{u}$ converge vers un réel plus grand que s , possiblement $+\infty$, ou bien $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_{nk+i} \mathbf{u} \leq s$. Donc, $\mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D) = 1$.

Étape 2 : Supposons que $\mathbb{P}(A) = 1$. Alors, pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $U_{i,n}$ converge vers $L(s)$. Comme $\mathbb{E}(\min(L(\mathbf{X}_{n+kl} \mathbf{u}), L(s))) \leq \mathbb{E}(\min(L(\mathbf{X}_n \mathbf{u}), L(s)))$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on obtient que

$$\mathbb{E}(\min(L(\mathbf{X}_n \mathbf{u}), L(s))) \geq L(s).$$

Mais par définition, $\min(L(\mathbf{X}_n \mathbf{u}), L(s)) \leq L(s)$, dès lors $\min(L(\mathbf{X}_n \mathbf{u}), L(s)) = L(s)$ presque-sûrement ou $\mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq s$ pour tout n , ce qui contredit (A3).

Ainsi, $\mathbb{P}(B \cup C \cup D) > 0$.

Étape 3 : Sans perte de généralité, supposons que l'on ait B avec $i = 0$ et posons $R = 2 \sup \mathbf{X}_n \mathbf{u}$. Par (A4), il existe $s_1 < R_0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout \mathbf{x} tel que $\mathbf{x} \mathbf{u} \in (s_1, R)$, $g(\mathbf{x}) \mathbf{u} > \varepsilon$.

Comme $\mathbf{X}_{nk} \mathbf{u}$ converge vers R_0 , il existe N_0 tel que $\forall n \geq N_0$, $\mathbf{X}_{nk} \mathbf{u} \in (s_1, R)$.

Ainsi, on peut choisir N tel que $\forall n \geq N$, $\mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq R$ et $g(\mathbf{X}_N) \mathbf{u} > \varepsilon$.

Considérons maintenant,

$$A_n = \sum_{l=0}^n g(\mathbf{X}_{N+l}) \mathbf{u},$$

$$M_n = \sum_{l=0}^n A_l^{-1} \xi_{N+l} \mathbf{u}.$$

On peut vérifier aisément que M_n est une martingale.

De plus, par (A4) et (A5), et comme $g(\mathbf{x})\mathbf{u} > \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_{N+n+1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-2} \sigma^2(\mathbf{X}_{N+n}) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-2} \\ &\leq C' \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-2} (A_n - A_{n-1}) \\ &\leq C' \int_{A_0}^{\infty} t^{-2} dt < \infty. \end{aligned}$$

Par un théorème de convergence de martingales (voir [23, [p.35]]), M_n converge presque-sûrement. Comme $\mathbf{X}_{nk}u$ converge vers R , $A_n \rightarrow +\infty$, et par le lemme de Kronecker

$$\sum_{l=1}^n \xi_l u = o(A_n).$$

Pour $n \geq N$, on obtient une contradiction car

$$\mathbf{X}_{n+1}u = \mathbf{X}_{Nu} + \sum_{l=N}^n g(\mathbf{X}_l)u + \sum_{l=N}^n \xi_l u = A_n + o(A_n) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi $\mathbb{P}(B) = 0$, donc avec probabilité non nulle, il existe $i \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que $\mathbf{X}_{nk+i}u$ tende vers l'infini. Prouvons maintenant que cela implique que $\mathbf{X}_n u$ tende vers l'infini.

Étape 4 : Sans perte de généralité, supposons que $\mathbf{X}_{nk}u$ tende vers l'infini.

Posons $\gamma = \frac{2}{1-\alpha}$, $r > s$ et n tel que $n^\gamma > 2r$.

Soit $\Gamma_n = [n^\gamma, (n+1)^\gamma)$ une suite d'intervalles et $(N(\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de temps d'arrêt définie par

$$N(\ell) = \inf\{n \geq N(\ell-1) \text{ tel que } \mathbf{X}_{nk}u \in [\ell^\gamma, \infty)\}.$$

Comme la fonction g est positive et par l'inégalité de Markov, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{N(n)k+1}u \leq 2r | \mathbf{X}_{N(n)k}u \geq n^\gamma) &\leq \sup_{\ell \geq n} \mathbb{P}(\xi_{N(n)k}u \leq (2r - \ell^\gamma) | \mathbf{X}_{N(n)k}u \in \Gamma_\ell) \\ &\leq \sup_{\ell \geq n} \mathbb{P}\left(\left(\xi_{N(n)k}u\right)^2 \geq (\ell^\gamma - 2r)^2 | \mathbf{X}_{N(n)k}u \in \Gamma_\ell\right) \\ &\leq \sup_{\ell \geq n} \frac{K \ell^{\gamma(\alpha+1)}}{\ell^{2\gamma}} \\ &\leq K' \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Dès lors, par le lemme de Borel-Cantelli, pour tout $r > 0$ suffisamment grand,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_{nk+1}u \leq r | \mathbf{X}_{nk}u \rightarrow \infty\right) = 0.$$

Ainsi, $\mathbf{X}_{nk+1}\mathbf{u}$ converge vers l'infini et donc $\mathbb{P}(C) = 0$.

Comme $\mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D) = 1$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 0$, on a donc que $\mathbb{P}(A \cup D) = 1$. Mais comme $\mathbb{P}(A) < 1$, on a le résultat souhaité

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_n\mathbf{u} \rightarrow \infty) > 0.$$

□

2.1.3 Applications

Dans toutes nos applications, on a $\alpha = 0$. C'est parce qu'on considère des modèles de population avec une variance finie pour le nombre d'enfants par individu. Ainsi, σ doit être de l'ordre de \mathbf{xu} et g de l'ordre d'une constante. Notons aussi que tous nos modèles sont des chaînes de Markov, bien que nos résultats soient aussi applicables à des processus qui ne satisfont pas la propriété de Markov. Dans le cas particulier des chaînes de Markov irréductibles, le processus a une croissance infinie avec probabilité non nulle si et seulement si la chaîne est transiente. Réciproquement, le processus ne tend pas vers l'infini presque-sûrement si et seulement si la chaîne est récurrente.

Processus de Galton-Watson multitype avec immigration

La première classe de processus, historiquement parlant, vérifiant la relation de récurrence (2.1) regroupe les processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration. Kawazu [34] donna un critère de récurrence et transience qu'il prouva à l'aide de fonctions génératrices, utilisant ainsi la propriété de branchement. Nous retrouvons ici le même résultat sans utiliser la propriété de branchement.

Soit (Z_n) un processus de Galton-Watson multitype critique avec immigration avec d types. A la génération n , le k -ième individu de type i , $i \in \{1, \dots, d\}$ et $k \in \{1, \dots, (Z_n)_i\}$, donne naissance à $X_{i,j,k,n}$ individus de type j , $j \in \{1, \dots, d\}$. Les vecteurs aléatoires $(X_{i,j,k,n})_{j \in \{1, \dots, d\}}$ avec $i \in \{1, \dots, d\}$, $k \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ sont indépendants et leur loi ne dépend que de i . Afin d'alléger les notations, nous écrirons désormais $X_{i,j}$ à la place de $X_{i,j,1,1}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on suppose aussi qu'il n'existe aucune relation affine presque sûrement entre les $X_{i,j}$, $j \in \{1, \dots, d\}$.

Nous supposons que pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathbb{P}(X_{i,j} = 0) > 0$. Soit $M = (\mathbb{E}(X_{i,j}))_{i,j}$ la matrice moyenne. On suppose que M est une matrice irréductible à coefficients positifs. Comme on considère que le processus est critique, la plus grande valeur propre en module de M est 1. Soit \mathbf{u} (respectivement \mathbf{v}) le vecteur propre à droite (respectivement à gauche) normalisé associé à 1. A chaque génération n , $A_n \in \mathbb{N}^d$ individus immigreront. Les variables aléatoires A_n sont indépendantes et identiquement distribuées, avec $\mathbb{P}(A_1 = (0, \dots, 0)) > 0$, $\mathbb{E}(A_1) = a$ et $\text{Var}(A_1\mathbf{u}) = \tau^2$. Les variables aléatoires A_n sont aussi indépendantes de toutes les variables $X_{i,j,k,n}$. Ainsi, on a la relation $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(Z_n)M + a$.

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$,

$$\mathbb{E}(X_{i,j}^{2+\delta}) < +\infty \text{ et } \mathbb{E}\left((A_1 \mathbf{u})^{2+\delta}\right) < +\infty. \quad (2.5)$$

Soit $\Gamma_i = (\text{Cov}(X_{i,j}, X_{i,j'}))_{j,j' \in \{1, \dots, d\}}$ la matrice de covariance du nombre d'enfants par individu. Comme on a supposé qu'il n'y avait pas de relation affine presque sûre entre les $X_{i,j}$ à i fixé, les matrices Γ_i sont définies positives. On pose

$$V(z) = \sum_{i=1}^d z_i \Gamma_i,$$

pour $z \in \mathbb{R}^d$. On obtient la relation de récurrence

$$Z_{n+1} = Z_n M + a + \xi_n$$

avec

$$\xi_n = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{(Z_n)_i} \{X_{i,j,k,n} - \mathbb{E}(X_{i,j,k,n})\} + A_n e_j - \mathbb{E}(A_n e_j) \right)_{1 \leq j \leq d}$$

où les $(e_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$ sont les vecteurs de la base canonique et

$$\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n) = \mathbf{u}^\top V(Z_n) \mathbf{u} + \tau^2.$$

Proposition 2.1. *Le processus (Z_n) est*

- récurrent si $2a\mathbf{u} < \mathbf{u}^\top V(\mathbf{v})\mathbf{u}$
- transient si $2a\mathbf{u} > \mathbf{u}^\top V(\mathbf{v})\mathbf{u}$.

Remarque 2.1. *Kawazu [34] obtint le même critère sous des hypothèses plus faibles : il n'avait pas besoin de $\text{Var}(A_1 \mathbf{u}) < +\infty$ et de (2.5). Il a aussi montré que le processus était récurrent lorsque $2a\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top V(\mathbf{v})\mathbf{u}$ si $\mathbb{E}(X_{i,j}^2 \log(X_{i,j})) < +\infty$ et $\mathbb{E}(A_1 \log(A_1)) < +\infty$.*

Démonstration. Premièrement, on remarque que

$$\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n) = \mathbf{u}^\top V(Z_n) \mathbf{u} + \tau^2 = (Z_n \mathbf{u}) \mathbf{u}^\top V(\mathbf{v}) \mathbf{u} + \mathbf{u}^\top V(Z_n(I - \mathbf{u}\mathbf{v})) \mathbf{u} + \tau^2,$$

ainsi la récurrence et la transience ne dépendent que du signe de $2a\mathbf{u} - \mathbf{u}^\top V(\mathbf{v})\mathbf{u}$. Comme (A1) est vérifiée avec $\alpha = 0$, $c_1 = a\mathbf{u}$, $h_1 = 0$, $d_1 = \mathbf{u}^\top V(\mathbf{v})\mathbf{u}$, $h_2(\mathbf{y}) = \mathbf{u}^\top V(\mathbf{y})\mathbf{u}$, $f_1 = 0$ et $f_2 = \tau^2$, et que (A3), (A4) et (A5) sont aussi vérifiées, on doit juste montrer que l'on a (A2) afin d'appliquer le Théorème 1.

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $(U_k)_{k \in \{1, \dots, \ell\}}$ des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et tels que $\mathbb{E}(|U_k|^{2+\delta}) < +\infty$ pour tout $k \in \{1, \dots, \ell\}$. On peut appliquer les inégalités de Marcinkiewicz-Zygmund [54, p. 108] et de Hölder, *i.e.*, il existe $R > 0$ indépendant de ℓ tel que

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{k=1}^{\ell} U_k \right|^{2+\delta} \right) \leq R \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=1}^{\ell} U_k^2 \right)^{1+\frac{\delta}{2}} \right) \leq R \ell^{\frac{\delta}{2}} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{\ell} |U_k|^{2+\delta} \right).$$

Comme on a trois sommes dans $\|\xi_n\|$, on applique trois fois cette dernière inégalité pour vérifier que (A2) soit vraie :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\|\xi_n\|^{2+\delta} | \mathcal{F}_n) \\
& \leq 2^{2+\delta} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{(Z_n)_i} \{X_{i,j,k,n} - \mathbb{E}(X_{i,j,k,n})\} \right)^2 \right)^{1+\frac{\delta}{2}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\
& \quad + 2^{2+\delta} \mathbb{E} (\|A_n - a\|^{2+\delta} | \mathcal{F}_n) \\
& \leq 2^{2+\delta} d^{\frac{\delta}{2}} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=1}^d \left| \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{(Z_n)_i} \{X_{i,j,k,n} - \mathbb{E}(X_{i,j,k,n})\} \right|^{2+\delta} \right) \middle| \mathcal{F}_n \right) \\
& \quad + 2^{2+\delta} \mathbb{E} (\|A_n - a\|^{2+\delta} | \mathcal{F}_n) \\
& \leq 2^{2+\delta} R d^\delta \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \left| \sum_{k=1}^{(Z_n)_i} \{X_{i,j,k,n} - \mathbb{E}(X_{i,j,k,n})\} \right|^{2+\delta} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\
& \quad + 2^{2+\delta} \mathbb{E} (\|A_n - a\|^{2+\delta} | \mathcal{F}_n) \\
& \leq 2^{2+\delta} R^2 d^\delta \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d (Z_n)_i^{\frac{\delta}{2}} \sum_{k=1}^{(Z_n)_i} |X_{i,j,k,n} - \mathbb{E}(X_{i,j,k,n})|^{2+\delta} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\
& \quad + 2^{2+\delta} \mathbb{E} (\|A_n - a\|^{2+\delta} | \mathcal{F}_n) .
\end{aligned}$$

On applique maintenant (2.5) pour avoir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|\xi_n\|^{2+\delta} | \mathcal{F}_n) & \leq C \left(\sum_{i=1}^d (Z_n)_i^{\frac{2+\delta}{2}} \right) + D \\
& \leq C' \left| u^\top \sum_i^d (Z_n)_i \Gamma_i u + \tau^2 \right|^{2+\delta} \\
& = C' \sigma^{2+\delta}(Z_n),
\end{aligned}$$

lorsque $\|Z_n\|$ est suffisamment grand. □

Processus de Galton-Watson multitype états-dépendant

Les processus de Galton-Watson états-dépendant ont été introduits pour la première fois par Klebaner dans [41] et Höpfner dans [27]. Höpfner a comparé la fonction génératrice de ces processus avec celle d'un processus de Galton-Watson critique avec immigration afin d'obtenir un critère d'extinction. Cependant, cette idée ne fonctionne plus dans le cas multitype. D'un point de vue technique, c'est parce qu'on doit changer les transitions du processus de Galton-Watson multitype avec immigration d'un nombre infini d'états et on peut changer la nature de la chaîne de Markov (la récurrence ou la transience), tandis qu'en simple type, on ne doit

changer d'un nombre fini de transitions, ce qui n'altère pas la nature de la chaîne. Klebaner, dans [42, 44], a défini les processus de Galton-Watson multitypes états-dépendants mais n'a donné qu'une condition suffisante d'extinction. En particulier, il ne peut pas déterminer s'il y a extinction presque-sûre ou non pour certaines valeurs des paramètres. Dans cette sous-section, nous donnons un critère qui nous permet de préciser s'il y a extinction presque-sûre ou non (sauf pour un cas très particulier).

Comme dans [44], nous définissons un processus de Galton-Watson multitype états-dépendant \mathbf{Z}_n à d types par

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{(\mathbf{Z}_n)_i} X_{i,j,k,n}(\mathbf{Z}_n) \right)_{j \in \{1, \dots, d\}}$$

où $X_{i,j,k,n}(\mathbf{z})$ est le nombre d'enfants de type j du k -ème individu de type i lorsque le processus est à l'état \mathbf{z} à la génération n . Etant donné $\mathbf{Z}_n = \mathbf{z}$, le k -ème individu de type i a un vecteur aléatoire d'enfants

$$(X_{i,1,k,n}(\mathbf{z}), \dots, X_{i,d,k,n}(\mathbf{z})), \quad k = 1, \dots, z_i.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs d'enfants de parents distincts sont indépendants. De plus, lorsque le type i du parent est fixé, les vecteurs des enfants sont identiquement distribués pour tout n et k , avec une distribution qui ne peut dépendre que de l'état \mathbf{z} . Afin d'alléger les notations, on notera $X_{i,j}$ à la place de $X_{i,j,1,1}$. Soit

$$M(\mathbf{z}) = (\mathbb{E}(X_{i,j}(\mathbf{z})))_{i,j \in \{1, \dots, d\}}$$

la matrice moyenne.

On suppose que

$$M(\mathbf{z}) = M + C(\mathbf{z})$$

où M est une matrice irréductible à coefficients positifs, de plus grande valeur propre en module égale à 1 et de vecteurs propres à droite et à gauche normalisés correspondants \mathbf{u} et \mathbf{v} , avec $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$, $C(\mathbf{z})$ une matrice à coefficients positifs et on pose

$$g(\mathbf{z}) = \mathbf{z}C(\mathbf{z}).$$

On suppose que

$$\lim_{\|\mathbf{z}\| \rightarrow +\infty} g(\mathbf{z}) = D \in \mathbb{R}_+^d.$$

Soit $\Gamma_i(\mathbf{z}) = (\text{Cov}(X_{i,j}(\mathbf{z}), X_{i,k}(\mathbf{z})))_{j,k \in \{1, \dots, d\}}$ la matrice de covariance du nombre d'enfants lorsque la population est à l'état \mathbf{z} . On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\Gamma_i(\mathbf{z})$ converge vers Γ_i lorsque $\|\mathbf{z}\|$ converge l'infini.

Soit

$$\tilde{V}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^d z_i \Gamma_i(\mathbf{z}),$$

la matrice conditionnelle de dispersion lorsque la population est à l'état \mathbf{z} . On introduit aussi la quantité

$$V(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^d \mathbf{z}_i \Gamma_i.$$

Dès lors, (\mathbf{Z}_n) vérifie la relation de récurrence

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n M + g(\mathbf{Z}_n) + \xi_n,$$

avec

$$\xi_n = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{(\mathbf{Z}_n)_i} \{X_{i,j,k,n}(\mathbf{Z}_n) - \mathbb{E}(X_{i,j,k,n}(\mathbf{Z}_n))\} \right)_{j \in \{1, \dots, d\}}.$$

On peut aisément vérifier que $\mathbb{E}(\xi_n \mathbf{u} | \mathcal{F}_n) = 0$ et

$$\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n) = \mathbf{u}^\top \tilde{V}(\mathbf{Z}_n) \mathbf{u} = (\mathbf{Z}_n \mathbf{u}) \mathbf{u}^\top V(\mathbf{v}) \mathbf{u} + \mathbf{u}^\top V(\mathbf{Z}_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})) \mathbf{u} + f(\mathbf{Z}_n),$$

où la fonction f est telle que $f(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$ lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend vers l'infini.

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et $K > 0$ tels que pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$ et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbb{E}(X_{i,j}(\mathbf{z})^{2+\delta}) < K.$$

Comme dans l'exemple précédent, l'hypothèse (A2) est une conséquence des inégalités de Marcinkiewicz-Zygmund et de Hölder.

Nous faisons les hypothèses usuelles lorsque l'on considère des processus de populations : 0 est un état absorbant et tous les états dans $\mathbb{N}^d \setminus \{0\}$ sont connectés.

Théorème 2.2.

Si

$$\frac{2D\mathbf{u}}{\mathbf{u}^\top V(\mathbf{v})\mathbf{u}} < 1$$

alors le processus s'éteint presque-sûrement.

Si

$$\frac{2D\mathbf{u}}{\mathbf{u}^\top V(\mathbf{v})\mathbf{u}} > 1$$

alors le processus survit avec probabilité non nulle.

On ne peut rien dire dans le cas où $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{2rD\mathbf{u}}{\mathbf{u}^\top V(r\mathbf{v})\mathbf{u}} = 1$.

Nous allons maintenant illustrer ce résultat par l'exemple suivant.

Exemple. On reprend l'exemple d'un processus de division cellulaire à deux types de [44]. On rappelle que $X_{i,j,k,n}(z)$ est le nombre d'enfants de type j du k -ème individu de type i à la génération n lors que la population est à l'état z . Comme précédemment, on écrira $X_{i,j}(z)$ à la place de $X_{i,j,1,1}(z)$.

On suppose que $X_{i,j}(z)$ prend comme valeurs 1 avec probabilité $p_{i,j}(z)$ ou 0 avec probabilité $1 - p_{i,j}(z)$ et que l'extinction est possible, c'est à dire que $\mathbb{P}(X_{i,1}(z) =$

$0, X_{i,2}(z) = 0) > 0, i \in \{1, 2\}$. Soit $b_i(z) = \mathbb{P}(X_{i,1}(z) = 1, X_{i,2}(z) = 1), i \in \{1, 2\}$ et $a_{i,j}(x), i, j \in \{1, 2\}$, deux fonctions positives quelconques, ne s'annulant pas pour $x > 0$, telles que

$$M(z) = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p' & 1-p' \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_1 a_{1,1}(z_1)}{z_1 a_{1,1}(z_1) + z_2 a_{2,1}(z_2)} & \frac{c_2 a_{1,2}(z_1)}{z_1 a_{1,2}(z_1) + z_2 a_{2,2}(z_2)} \\ \frac{c_1 a_{2,1}(z_2)}{z_1 a_{1,1}(z_1) + z_2 a_{2,1}(z_2)} & \frac{c_2 a_{2,2}(z_2)}{z_1 a_{1,2}(z_1) + z_2 a_{2,2}(z_2)} \end{bmatrix}$$

où $p, p' \in (0, 1)$. On suppose que $b_i(z) \sim b_i$ lorsque $\|z\|$ tend vers l'infini.

Avec les notations introduites précédemment, on a

$$\begin{aligned} - \mathbf{u} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{p'}{1-p+p'} & \frac{1-p}{1-p+p'} \end{pmatrix} \\ - D\mathbf{u} &= \frac{c_1+c_2}{\sqrt{2}} \\ - V(z) &= z_1 \begin{pmatrix} p(1-p) & b_1 - p(1-p) \\ b_1 - p(1-p) & p(1-p) \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} p'(1-p') & b_2 - p'(1-p') \\ b_2 - p'(1-p') & p'(1-p') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Corollaire 2.1. *Si*

$$c_1 + c_2 < \frac{p'}{1-p+p'} b_1 + \frac{1-p}{1-p+p'} b_2$$

alors le processus s'éteint presque-sûrement.

Si

$$c_1 + c_2 > \frac{p'}{1-p+p'} b_1 + \frac{1-p}{1-p+p'} b_2$$

alors le processus survit avec probabilité non nulle.

Klebaner, dans [44], prouva l'extinction presque-sûre si $c_1 + c_2 < \min(b_1, b_2)$ et la survie avec probabilité non nulle si $c_1 + c_2 > \max(b_1, b_2)$. Nous avons donc amélioré son critère car nous avons prouvé que la valeur critique pour $c_1 + c_2$, celle où on a une transition de phase, est $\frac{p'}{1-p+p'} b_1 + \frac{1-p}{1-p+p'} b_2$. Sauf pour le cas d'égalité, nous avons donné un critère qui permet de complètement déterminer la nature du processus.

2.1.4 Appendice : construction des fonctions de Lyapounov

Dans cette partie, nous prouvons les Lemmes 2.1 et 2.2. La preuve repose sur le résultat suivant. Soit

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n - (\mathbf{X}_n \mathbf{u}) \mathbf{v}$$

le vecteur \mathbf{X}_n auquel on a retranché la contribution le long du vecteur \mathbf{v} . Par commodité, nous utiliserons la notation $\Delta_{n,k} = \mathbf{X}_{n+k} \mathbf{u} - \mathbf{X}_n \mathbf{u}$.

Lemme 2.3. *On suppose (A1) et (A2). Il existe $c'_2 \geq 0$ et $d'_2 > 0$ tels que pour tous les entiers $n, k \geq 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$|\mathbb{E}(\Delta_{n,k} | \mathcal{F}_n) - c_1 k (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha| \leq c'_2 \|\mathbf{Y}_n\|^\alpha + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha), \quad (2.6)$$

$$|\mathbb{E}(\Delta_{n,k}^2 | \mathcal{F}_n) - k d_1 (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha}| \leq d'_2 \|\mathbf{Y}_n\|^{1+\alpha} + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha}), \quad (2.7)$$

$$\mathbb{E}\left(|\Delta_{n,k}|^2 \mathbf{1}_{\{\Delta_{n,k} \geq \varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u}\}} | \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{O}\left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha+\frac{\alpha-1}{2}\delta}\right), \quad (2.8)$$

avec $c'_2 = 0$ si $\alpha \leq 0$.

La preuve de ce lemme s'appuie sur deux autres lemmes que l'on va d'abord énoncer puis prouver.

Lemme 2.4. *On suppose (A1) et (A2). Alors, pour tout $\alpha \in]-1, 1[$ et pour tous $n, i \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}\left((\mathbf{X}_{n+i} \mathbf{u})^\alpha | \mathcal{F}_n\right) = (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha),$$

et

$$\mathbb{E}\left((\mathbf{X}_{n+i} \mathbf{u})^{1+\alpha} | \mathcal{F}_n\right) = (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha} + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha}).$$

Démonstration. On va d'abord montrer que

$$\mathbb{E}\left((\mathbf{X}_{n+i} \mathbf{u})^\gamma | \mathcal{F}_n\right) = (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\gamma + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\gamma),$$

pour tout $\gamma \in [0, 2[$ quelque soit la valeur de α .

Le résultat est évident si $\gamma = 0$. On va commencer par le cas où $0 < \gamma \leq 1$. Comme pour tout réel positif r , $(1+r)^\gamma \leq 1 + \gamma r$, on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^\gamma | \mathcal{F}_n\right) &\leq \mathbb{E}\left(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u} | \mathcal{F}_n\right)^\gamma \leq (\mathbf{X}_n \mathbf{u} + g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u})^\gamma \\ &\leq (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\gamma + \gamma g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $(1+r)^\gamma \geq 1 - |r|^\gamma$, qui est vraie pour tout $r \geq -1$, et l'inégalité suivante, pour tout $s > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_i > 0$ pour tout $i \in 1, \dots, k$,

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^s \leq k^s \left(\sum_{i=1}^k a_i^s\right), \quad (2.9)$$

on obtient la minoration suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^\gamma | \mathcal{F}_n\right) &\geq \mathbb{E}\left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\gamma - |g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u} + \xi_n \mathbf{u}|^\gamma | \mathcal{F}_n\right) \\ &\geq (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\gamma - 2^\gamma (g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u})^\gamma - 2^\gamma \mathbb{E}\left(|\xi_n \mathbf{u}|^\gamma | \mathcal{F}_n\right). \end{aligned}$$

Comme $g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u} = \mathcal{O}((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha)$ car $\|\mathbf{y}\| = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|)$ car \mathbf{u} et \mathbf{v} sont à coordonnées strictement positives, et en utilisant

$$\mathbb{E}\left(|\xi_n \mathbf{u}|^\gamma | \mathcal{F}_n\right) \leq \mathbb{E}\left(|\xi_n \mathbf{u}|^2 | \mathcal{F}_n\right)^{\frac{\gamma}{2}} = \mathcal{O}\left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\frac{(1+\alpha)\gamma}{2}}\right)$$

on obtient

$$\mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma | \mathcal{F}_n) = (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma + o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma).$$

On va maintenant traiter le cas où $\gamma \in]1, 2]$. Comme pour tout réel $r \geq -1$, on a

$$(1+r)^\gamma \leq 1 + 2^{\gamma-1}|r|^\gamma + 2^\gamma|r|,$$

on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma | \mathcal{F}_n) &\leq (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma + 2^{\gamma-1}\mathbb{E}(|g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u} + \xi_n\mathbf{u}|^\gamma | \mathcal{F}_n) \\ &\quad + 2^\gamma(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\gamma-1}\mathbb{E}(|g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u} + \xi_n\mathbf{u}| | \mathcal{F}_n) \\ &\leq (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma + \mathcal{O}\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\frac{(1+\alpha)\gamma}{2}}\right) + \mathcal{O}\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\gamma+\frac{\alpha-1}{2}}\right). \end{aligned}$$

La minoration est une conséquence triviale de l'inégalité de Jensen et de la positivité de g :

$$\mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma | \mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} | \mathcal{F}_n)^\gamma \geq (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma.$$

On a donc montré que

$$\mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma | \mathcal{F}_n) = (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma + o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma), \quad (2.10)$$

pour $\gamma \in [0, 2[$. On doit maintenant prouver que

$$\mathbb{E}(f(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u}) | \mathcal{F}_n) = o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma), \quad (2.11)$$

pour $\gamma > 0$ si f est une fonction à valeurs réelles telle que $f(r) = o(r^\gamma)$ lorsque r tend vers l'infini. On rappelle que $f(r) = o(r^\gamma)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $|f(r)| \leq \varepsilon r^\gamma + C_\varepsilon$ car $\gamma > 0$.

Soit f une fonction à valeurs réelles telle que $f(r) = o(r^\gamma)$, $\varepsilon > 0$ et $C_\varepsilon > 0$ tels que $|f(r)| \leq \varepsilon r^\gamma + C_\varepsilon$. Par (2.10),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|f(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})| | \mathcal{F}_n) &\leq \mathbb{E}(\varepsilon(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma + C_\varepsilon | \mathcal{F}_n) \\ &\leq \varepsilon(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma + C_\varepsilon + \varepsilon o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma) \\ &\leq 2\varepsilon(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma + C_\varepsilon + C_1. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien (2.11). Comme on a les égalités (2.10) et (2.11), on a bien le résultat du lemme par récurrence.

On termine la preuve par le cas où $-1 < \alpha < 0$. La minoration est là aussi une conséquence immédiate de l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\alpha | \mathcal{F}_n) &\geq (\mathbf{X}_n\mathbf{u} + g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u})^\alpha \\ &\geq (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\alpha + \alpha g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u} (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Pour la majoration, on commence par majorer la probabilité que $\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u}$ est plus petit que $\frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{2}$ par l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} \leq \frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{P}\left(\xi_n\mathbf{u} \leq -\frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{2} - g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\xi_n\mathbf{u} \leq -\frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) \leq \mathbb{P}\left((\xi_n\mathbf{u})^2 \geq \frac{(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^2}{4} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq \frac{4\mathbb{E}((\xi_n\mathbf{u})^2 \mid \mathcal{F}_n)}{(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^2} \leq K(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Dès lors, comme pour tout $r > -\frac{1}{2}$, $(1+r)^\alpha \leq 1 + 4^{-\alpha}|r|$ et comme $\mathbf{X}_n\mathbf{u} \geq 3$, on a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\alpha \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} \leq \frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{2}\}} + \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} > \frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{2}\}}\right) (\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\alpha \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} \leq \frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\quad + \mathbb{E}\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\alpha \left(1 + 4^{-\alpha} \frac{|g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u} + \xi_n\mathbf{u}|}{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\alpha + \mathcal{O}((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-1}) + \mathcal{O}((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\frac{3\alpha-1}{2}}).\end{aligned}$$

On conclut de la même manière que précédemment, en utilisant que $f(r) = o(r^\alpha)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $|f(r)| \leq \varepsilon r^\alpha + C_\varepsilon r^{\frac{-1+\alpha}{2}}$. \square

Lemme 2.5. *On suppose (A1) et (A2). Pour tout $\gamma \in [0, 2]$ il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}(\|\mathbf{Y}_{n+i}\|^\gamma \mid \mathcal{F}_n) \leq C\|\mathbf{Y}_n\|^\gamma + o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma),$$

où le terme $o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma)$ dépend de k .

Démonstration. On commence par écrire la relation de récurrence satisfaite par \mathbf{Y}_n en utilisant (2.1) :

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{n+1} &= \mathbf{Y}_n M + g(\mathbf{X}_n)(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}) + \xi_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{Y}_n(M - \mathbf{u}\mathbf{v}) + g(\mathbf{X}_n)(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}) + \xi_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})\end{aligned}$$

car $\mathbf{Y}_n\mathbf{u} = 0$. Ainsi

$$\mathbf{Y}_{n+i} = \mathbf{Y}_n(M - \mathbf{u}\mathbf{v})^i + \sum_{j=0}^{i-1} (g(\mathbf{X}_{n+j}) + \xi_{n+j})(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v})(M - \mathbf{u}\mathbf{v})^{i-1-j}.$$

Le théorème de Perron-Frobenius nous assure que le rayon spectral λ de $M - \mathbf{u}\mathbf{v}$ est strictement plus petit que 1. Soit $\lambda_1 \in (\lambda, 1)$. On rappelle que par la formule de Gelfand (voir [28, p. 349]), on a que

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(M - \mathbf{u}\mathbf{v})^m\|^{1/m},$$

pour toute norme de matrice. Ainsi, il existe une constante C qui ne dépend pas de i telle que

$$\|\mathbf{Y}_{n+i}\| \leq C \left(\lambda_1^i \|\mathbf{Y}_n\| + \sum_{j=0}^{i-1} (\|g(\mathbf{X}_{n+j})\| + \|\xi_{n+j}\|) \right).$$

Ainsi, par (2.9), on obtient que

$$\|\mathbf{Y}_{n+i}\|^\gamma \leq C2^\gamma \lambda_1^{\gamma i} \|\mathbf{Y}_n\|^\gamma + C4^\gamma \sum_{j=0}^{i-1} i^\gamma (\|g(\mathbf{X}_{n+j})\|^\gamma + \|\xi_{n+j}\|^\gamma).$$

Comme

$$\mathbb{E}(\|g(\mathbf{X}_{n+j})\|^\gamma | \mathcal{F}_n) = \mathcal{O}((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\alpha\gamma}) \text{ et } \mathbb{E}(\|\xi_{n+j}\|^\gamma | \mathcal{F}_n) = \mathcal{O}\left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\frac{(1+\alpha)\gamma}{2}}\right),$$

par (A2), on a en sommant que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}(\|\mathbf{Y}_{n+i}\|^\gamma | \mathcal{F}_n) \leq C2^\gamma \frac{1}{1-\lambda_1^\gamma} \|\mathbf{Y}_n\|^\gamma + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\gamma).$$

□

Preuve du Lemme 2.3. On commence par l'inégalité (2.6).

La preuve est une conséquence directe des lemmes 2.4 et 2.5 et de l'inégalité (A1) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{n,k} | \mathcal{F}_n) &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{X}_{n+i}) \mathbf{u} | \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} c_1 (\mathbf{X}_{n+i} \mathbf{u})^\alpha + c_2 \|\mathbf{Y}_{n+i}\|^\alpha + f_1(\mathbf{X}_{n+i}) | \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq kc_1 (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha + C' \|\mathbf{Y}_n\|^\alpha + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha), \end{aligned}$$

pour $\alpha \leq 0$, on a $c_2 = 0$ et donc $C' = 0$. Pour la minoration, on fait la même démonstration que ci dessus avec $-c_2$ à la place de c_2 .

Prouvons maintenant l'inégalité (2.7). Comme pour (2.6), le point important est de montrer que d'_2 ne dépend pas de k . En utilisant les lemmes 2.4 et 2.5 et l'inégalité (A1), on a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\Delta_{n,k}|^2 | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} \{g(\mathbf{X}_{n+i}) \mathbf{u} + \xi_{n+i} \mathbf{u}\}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} (\xi_{n+i} \mathbf{u})^2 + \left(\sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{X}_{n+i}) \mathbf{u}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &\quad + 2\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} \xi_{n+i} \mathbf{u}\right) \left(\sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{X}_{n+i}) \mathbf{u}\right) \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq kd_1 (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha} + d_2 \|\mathbf{Y}_n\|^{1+\alpha} + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha}) \\ &\quad + \mathcal{O}((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{2\alpha}) + \mathcal{O}\left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\frac{1+\alpha}{2} + \alpha}\right), \end{aligned}$$

les trois premiers termes viennent des $\mathbb{E}((\xi_{n+i}\mathbf{u})^2|\mathcal{F}_n)$, le second terme des $\mathbb{E}((g(\mathbf{X}_{n+i})\mathbf{u})^2|\mathcal{F}_n)$ et le dernier terme de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les doubles produits. La preuve de la minoration est identique. Terminons la preuve du lemme par l'inégalité (2.8).

Par l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(|\Delta_{n,k}|^2 \mathbb{1}_{\{\Delta_{n,k} \geq \varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u}\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left(|\Delta_{n,k}|^2 \mathbb{1}_{\{(\Delta_{n,k})^\delta \geq (\varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u})^\delta\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left(\frac{|\Delta_{n,k}|^{2+\delta}}{(\varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u})^\delta} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\ & \leq \frac{(2k)^{2+\delta}}{(\varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u})^\delta} \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{k-1} |g(\mathbf{X}_{n+i})\mathbf{u}|^{2+\delta} + |\xi_{n+i}\mathbf{u}|^{2+\delta} \middle| \mathcal{F}_n \right). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(|g(\mathbf{X}_{n+i})\mathbf{u}|^{2+\delta}|\mathcal{F}_n) = \mathcal{O}((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{2\alpha+\alpha\delta})$ par le Lemme 2.4 et $\mathbb{E}(|\xi_{n+i}\mathbf{u}|^{2+\delta}|\mathcal{F}_n) = \mathcal{O}((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha+\frac{1+\alpha}{2}\delta})$ par (A2), on a que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(|\Delta_{n,k}|^2 \mathbb{1}_{\{\Delta_{n,k} \geq \varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u}\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\ & \leq \frac{(2k)^{2+\delta}}{(\varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u})^\delta} \left(e_1(k) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{2\alpha+\alpha\delta} + e_2(k) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha+\frac{1+\alpha}{2}\delta} \right) \\ & \leq e'_1(k, \varepsilon) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha+\frac{\alpha-1}{2}\delta}, \end{aligned}$$

qui est bien l'inégalité voulue. □

Nous allons maintenant prouver les Lemmes 2.1 et 2.2.

Preuve du Lemme 2.1. On rappelle d'abord une inégalité prouvée dans [36] :

Si $\varepsilon > 0$, $x > 0$ et $h > -x$, alors

$$\log(x+h) \leq \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2 \mathbb{1}_{\{h \leq \varepsilon x\}}}{2(1+\varepsilon)x^2}. \quad (2.12)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, que l'on fixera plus tard. On applique l'inégalité (2.12) avec $x = \mathbf{X}_n \mathbf{u}$ et $h = \Delta_{n,k}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\log(\mathbf{X}_{n+k}\mathbf{u})|\mathcal{F}_n) \leq \\ & \log(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) + \frac{\mathbb{E}(\Delta_{n,k}|\mathcal{F}_n)}{\mathbf{X}_n \mathbf{u}} - \frac{\mathbb{E}(|\Delta_{n,k}|^2|\mathcal{F}_n)}{2(1+\varepsilon)(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2} + \frac{\mathbb{E}(|\Delta_{n,k}|^2 \mathbb{1}_{\{\Delta_{n,k} > \varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u}\}}|\mathcal{F}_n)}{2(1+\varepsilon)(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2}. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (2.6), (2.7) et (2.8) du Lemme 2.3, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\log (\mathbf{X}_{n+k} \mathbf{u}) \mid \mathcal{F}_n \right) \leq \\ & \log (\mathbf{X}_n \mathbf{u}) + \frac{c_1 k (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha + c_2' \|\mathbf{Y}_n\|^\alpha + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha)}{\mathbf{X}_n \mathbf{u}} \\ & - \frac{kd_1 (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha} - d_2' \|\mathbf{Y}_n\|^{1+\alpha} + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha})}{2(1+\varepsilon) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2} + \frac{\mathcal{O} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha+\frac{\alpha-1}{2}\delta} \right)}{2(1+\varepsilon) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Perron-Frobenius (voir [61]), toutes les coordonnées de \mathbf{u} sont strictement positives. Dès lors, par définition de \mathbf{Y}_n , il existe $b > 0$ tel que pour tout n ,

$$\|\mathbf{Y}_n\| \leq b \mathbf{X}_n \mathbf{u}. \quad (2.13)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\log (\mathbf{X}_{n+k} \mathbf{u}) \mid \mathcal{F}_n \right) \leq \\ & \log (\mathbf{X}_n \mathbf{u}) + \frac{c_1 k (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha + c_2' b^\alpha (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha)}{\mathbf{X}_n \mathbf{u}} \\ & - \frac{kd_1 (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha} - d_2' b^{1+\alpha} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha} + o((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha})}{2(1+\varepsilon) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2} + \frac{\mathcal{O} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha+\frac{\alpha-1}{2}\delta} \right)}{2(1+\varepsilon) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2}. \end{aligned}$$

On choisit d'abord $\varepsilon > 0$ tel que $c_1 < \frac{d_1}{2(1+\varepsilon)}$. Ensuite, on choisit k tel que

$$k \left(c_1 - \frac{d_1}{2(1+\varepsilon)} \right) + c_2' b^\alpha + \frac{d_2' b^{1+\alpha}}{2(1+\varepsilon)} < 0.$$

Ainsi, il existe $s > 0$ tel que,

$$\mathbb{E} \left(\log (\mathbf{X}_{n+k} \mathbf{u}) \mid \mathcal{F}_n \right) \leq \log (\mathbf{X}_n \mathbf{u}), \text{ si } \mathbf{X}_n \mathbf{u} > s.$$

□

Preuve du Lemme 2.2. Nous rappelons une autre inégalité donnée dans [36]. Pour $x \geq 3$, soit

$$L(x) = (\log x)^{-1}.$$

Il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout $x \geq 3$, $h > 3 - x$ et $0 < \delta \leq 1$ alors

$$L(x+h) \leq L(x) + L'(x)h + \frac{L''(x)h^2}{2} + C_2 \frac{|h|^{2+\delta}}{(\log x)^2 x^{2+\delta}} + \mathbf{1}_{\{h \leq -\frac{x}{2}\}}. \quad (2.14)$$

Comme dans le premier cas, nous prouvons que $\mathbb{E} \left(L(\mathbf{X}_{n+k} \mathbf{u}) \mid \mathcal{F}_n \right) \leq L(\mathbf{X}_n \mathbf{u})$ un certain entier k fixé et $\mathbf{X}_n \mathbf{u}$ assez grand.

On applique l'inégalité (2.14) avec $x = \mathbf{X}_n \mathbf{u}$, $h = \Delta_{n,k}$ et k un entier que l'on fixera plus tard afin d'obtenir

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} (L(\mathbf{X}_{n+k} \mathbf{u}) \mid \mathcal{F}_n) \leq \\ & L(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) - \frac{\mathbb{E}(\Delta_{n,k} \mid \mathcal{F}_n)}{(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) (\log(\mathbf{X}_n \mathbf{u}))^2} + \frac{\mathbb{E}(|\Delta_{n,k}|^2 \mid \mathcal{F}_n)}{2(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2 (\log(\mathbf{X}_n \mathbf{u}))^2} \\ & + \frac{2\mathbb{E}(|\Delta_{n,k}|^2 \mid \mathcal{F}_n)}{2(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2 (\log(\mathbf{X}_n \mathbf{u}))^3} + C_2 \frac{\mathbb{E}(|\Delta_{n,k}|^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_n)}{(\log(\mathbf{X}_n \mathbf{u}))^2 (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{2+\delta}} + \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\Delta_{n,k} \leq -\frac{\mathbf{X}_n \mathbf{u}}{2}\}} \mid \mathcal{F}_n \right). \end{aligned}$$

Nous commençons par cette inégalité

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\Delta_{n,k} \leq -\frac{\mathbf{X}_n \mathbf{u}}{2}\}} \mid \mathcal{F}_n \right) & \leq \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\left\{ 2^{2+\delta} \frac{|\Delta_{n,k}|^{2+\delta}}{(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{2+\delta}} \geq 1 \right\}} \mid \mathcal{F}_n \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left(2^{2+\delta} \frac{|\Delta_{n,k}|^{2+\delta}}{(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{2+\delta}} \mid \mathcal{F}_n \right), \end{aligned}$$

qui est une conséquence immédiate de l'inégalité de Markov. On utilise maintenant l'inégalité (2.9) et le fait que, d'après (A1) et (A2) il existe des réels positifs A et B tels que

$$\mathbb{E} \left(|g(\mathbf{X}_{n+i} \mathbf{u})|^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_n \right) \leq A (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\alpha(2+\delta)},$$

et

$$\mathbb{E} \left(|\xi_{n+i} \mathbf{u}|^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_n \right) \leq B (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)(2+\delta)},$$

afin d'obtenir la borne supérieure suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(|\Delta_{n,k}|^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_n \right) & \leq (2k)^{2+\delta} \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{k-1} |g(\mathbf{X}_{n+i} \mathbf{u})|^{2+\delta} + |\xi_{n+i} \mathbf{u}|^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_n \right) \\ & \leq C_3(k) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)(2+\delta)}. \end{aligned}$$

Dès lors, il existe une constante $C_4(k)$ telle que

$$\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\Delta_{n,k} \leq -\frac{\mathbf{X}_n \mathbf{u}}{2}\}} \mid \mathcal{F}_n \right) \leq C_4(k) (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)(2+\delta)}.$$

Nous utilisons maintenant les inégalités (2.6), (2.7) et (2.8) du Lemme 2.3 et

l'inégalité (2.13) :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(L(\mathbf{X}_{n+k}\mathbf{u}) \mid \mathcal{F}_n \right) \\
& \leq L(\mathbf{X}_n\mathbf{u}) - \frac{(c_1 k (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\alpha - c_2' \|\mathbf{Y}_n\|^\alpha + o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\alpha))}{(\mathbf{X}_n\mathbf{u}) (\log(\mathbf{X}_n\mathbf{u}))^2} \\
& \quad + \frac{(k d_1 (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{1+\alpha} + d_2' \|\mathbf{Y}_n\|^{1+\alpha} + o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{1+\alpha}))}{2 (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^2 (\log(\mathbf{X}_n\mathbf{u}))^2} \\
& \quad + \frac{2 (k d_1 (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{1+\alpha} + d_2' \|\mathbf{Y}_n\|^{1+\alpha} + o((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{1+\alpha}))}{2 (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^2 (\log(\mathbf{X}_n\mathbf{u}))^3} \\
& \quad + C_2 \frac{\mathcal{O}((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{1+\alpha+\frac{\alpha-1}{2}\delta})}{(\log(\mathbf{X}_n\mathbf{u}))^2 (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{2+\delta}} + C_4(k) (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\frac{(\alpha-1)(2+\delta)}{2}} \\
& \leq L(\mathbf{X}_n\mathbf{u}) + \frac{k \left(\frac{d_1}{2} - c_1 \right) + b_2'}{(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{1-\alpha} (\log(\mathbf{X}_n\mathbf{u}))^2} + o\left(\frac{1}{(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{1-\alpha} (\log(\mathbf{X}_n\mathbf{u}))^2} \right),
\end{aligned}$$

avec $b_2' = b^{1+\alpha} d_2' / 2 + b^\alpha c_2'$.

Comme $d_1/2 < c_1$, on choisit k de sorte que

$$k \left(\frac{d_1}{2} - c_1 \right) + b_2' < 0.$$

Ainsi, il existe un réel $s > 0$ tel que,

$$\mathbb{E} \left(L(\mathbf{X}_{n+k}\mathbf{u}) \mid \mathcal{F}_n \right) \leq L(\mathbf{X}_n\mathbf{u}), \text{ si } \mathbf{X}_n\mathbf{u} > s.$$

□

2.1.5 Exemple d'une métapopulation avec deux parcelles

On prend ici l'exemple d'une métapopulation avec deux parcelles. On notera $(\mathbf{X}_n)_1$ la taille de population vivant sur la première parcelle à la génération n et $(\mathbf{X}_n)_2$ celle vivant sur la deuxième parcelle. On suppose que tous les individus vivant sur la même parcelle se reproduisent de manière indépendante et même loi, on notera $A_{i,k,n}(x_i)$ le nombre d'enfants du k -ième individu à la génération n vivant sur la parcelle i sachant qu'il y a x_i individus sur la parcelle i . On pose $m_i(x) = \mathbb{E}(A_{i,k,n}(x))$ et $b_i(x) = \text{Var}(A_{i,k,n}(x))$ et on suppose qu'il existe deux constantes positives c_i et b_i telles que

$$m_i(x) = 1 + \frac{c_i}{x},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b_i(x) = b_i.$$

Chaque enfant peut migrer vers l'autre parcelle ou rester sur sa parcelle d'origine. On pose $p_{i,j}$ la probabilité pour un enfant né sur la parcelle i de migrer vers la parcelle j . On obtient alors l'équation de récurrence suivante

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n P + (c_1 \quad c_2) P + \xi_n,$$

où $P = (p_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$, ξ_n est tel que $\mathbb{E}(\xi_n | \mathbf{X}_n) = 0$. On pose

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{v} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{p_{2,1}}{p_{1,2}+p_{2,1}} & \frac{p_{1,2}}{p_{1,2}+p_{2,1}} \end{pmatrix}$$

les vecteurs propres à droite et à gauche, normalisés, associés à la valeur propre 1 de la matrice P . On remarque que l'on a

$$\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathbf{X}_n) = ((\mathbf{X}_n)_1 b_1 ((\mathbf{X}_n)_1) + (\mathbf{X}_n)_2 b_2 ((\mathbf{X}_n)_2)) / 2.$$

On peut donc appliquer le Théorème 2.2 et obtenir le critère suivant.

Proposition 2.2. *On pose $\gamma = \frac{p_{2,1}}{p_{1,2}+p_{2,1}}$.*

Si

$$2(c_1 + c_2) < \gamma b_1 + (1 - \gamma) b_2$$

alors la population s'éteint presque-sûrement.

Si

$$2(c_1 + c_2) > \gamma b_1 + (1 - \gamma) b_2$$

alors population peut persister (et dans ce cas sa taille va tendre vers l'infini) avec probabilité non nulle.

Si $\gamma = 1/2$ alors cela veut dire que $p_{1,2} = p_{2,1}$ donc que les taux de migration sont les mêmes. Si $\gamma > 1/2$, alors $p_{1,2} < p_{2,1}$, le taux de migration de la parcelle 1 vers la parcelle 2 est plus faible que le taux de migration de 2 vers 1. Si $\gamma < 1/2$, c'est le contraire.

S'il n'y a pas de migration, alors la population de la parcelle i s'éteint presque-sûrement si $2c_i/b_i < 1$. Dans ce cas, la parcelle i est de type puits. Dès lors, on peut trouver des paramètres b_i , c_i et $p_{i,j}$ tels que la population de chaque parcelle, sans la possibilité de migrer, s'éteint presque-sûrement, c'est à dire $2c_i/b_i < 1$, mais pourtant la métapopulation peut persister, c'est à dire $2(c_1 + c_2) > \gamma b_1 + (1 - \gamma) b_2$. Plaçons nous dans ce cadre afin de regarder le rôle de la migration dans la persistance. On pose $\theta_i = 2c_i/b_i$, la condition de persistance devient

$$\theta_1 b_1 + \theta_2 b_2 > \gamma b_1 + (1 - \gamma) b_2.$$

On fixe les θ_i et b_i et on va faire varier γ .

Proposition 2.3. *Si*

$$\theta_1 b_1 + \theta_2 b_2 > \max(b_1, b_2),$$

alors quelque soit γ , on a persistance avec probabilité non nulle.

Si

$$\theta_1 b_1 + \theta_2 b_2 < \min(b_1, b_2),$$

alors quelque soit γ , on a extinction presque-sûre.

Sinon, en supposant par exemple que $b_2 < b_1$ et en posant

$$\gamma_0 = \frac{\theta_1 b_1 - (1 - \theta_2 b_2)}{b_1 - b_2},$$

si $\gamma < \gamma_0$ alors on a persistance avec probabilité non nulle, et si $\gamma > \gamma_0$ alors on a extinction presque-sûre.

On observe donc que les taux de migration peuvent influencer le comportement qualitatif du processus et en particulier permettre la persistance d'une métapopulation composée de deux parcelles de types puits.

Chapitre 3

Convergence en loi d'une transformée du processus dans le cas transient

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au modèle du chapitre précédent dans le cas où le processus tend vers l'infini. Le but est de normaliser le processus afin d'obtenir une convergence en loi vers un objet limite. Dans une première partie, nous montrons la convergence en loi de notre processus vers un vecteur aléatoire de direction déterministe et de longueur suivant une loi Gamma généralisée, c'est-à-dire la loi d'une variable qui suit une loi Gamma à une certaine puissance. Dans une deuxième partie, nous donnons d'abord une généralisation du résultat du Chapitre précédent due à Kersting [39] puis nous conjecturons la convergence d'une fonction de notre processus, renormalisé en temps, vers la solution d'une équation différentielle stochastique, un processus de Bessel carré. Ce dernier résultat est un travail en cours avec Götz Kersting.

3.1 Limite vers une loi Gamma généralisée

3.1.1 Introduction

Dans cette partie, nous nous inspirons de [43] et [44] pour prouver la convergence en loi du processus défini précédemment vers une loi Gamma généralisée. Cette convergence a lieu lorsque $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$.

On rappelle que l'on considère une suite de vecteurs aléatoires \mathbf{X}_n , à valeurs dans \mathbb{R}_+^d , qui satisfont la relation de récurrence suivante

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où M est une matrice irréductible $d \times d$ à coefficients positifs de rayon spectral $\rho = 1$, $g : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ une fonction telle que $\|g(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}\|)$ lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend

vers l'infini, et (ξ_n) une suite de vecteurs aléatoires (à valeurs dans \mathbb{R}^d) telle que presque-sûrement

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$$

où $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est la filtration naturelle associée à (\mathbf{X}_n) . Nous supposons que $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ et que les vecteurs aléatoires ξ_n sont tels que pour tout n , \mathbf{X}_n est à valeur dans \mathbb{R}_+^d presque-sûrement. Nous définissons les vecteurs propres à droite et à gauche normalisés associés à ρ par \mathbf{u} et \mathbf{v} de sorte que $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$. Nous supposons que la suite (\mathbf{X}_n) vérifie une forme faible de la propriété de Markov. Plus précisément, nous supposons que $\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n)$ est une fonction de \mathbf{X}_n et on notera

$$\sigma^2(\mathbf{X}_n) = \mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n).$$

On rappelle que pour un vecteur colonne \mathbf{x} , on note

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}).$$

On reprend les hypothèses du Chapitre précédent.

Nous supposons qu'il existe un réel α tel que $-1 < \alpha < 1$, des réels c_i, d_i et des fonctions à valeurs réelles f_i et h_i définies sur \mathbb{R}^d , $i \in \{1, 2\}$, tels que

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) \mathbf{u} = c_1 (\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha + h_1(\mathbf{y}) + f_1(\mathbf{x}) \\ \sigma^2(\mathbf{x}) = d_1 (\mathbf{x}\mathbf{u})^{1+\alpha} + h_2(\mathbf{y}) + f_2(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{A1})$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, avec $h_1 \equiv 0$ si $\alpha \leq 0$ et

$$\begin{cases} |h_1(\mathbf{y})| \leq c_2 \|\mathbf{y}\|^\alpha \\ |h_2(\mathbf{y})| \leq d_2 \|\mathbf{y}\|^{1+\alpha} \\ f_1(\mathbf{x}) = o((\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha) \text{ lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \\ f_2(\mathbf{x}) = o((\mathbf{x}\mathbf{u})^{1+\alpha}) \text{ lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ correspond à la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d .

Pour être dans le cas où $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$, on suppose que $c_1 > d_1/2$.

Nous supposons qu'il existe $\delta > 0$ et $A_1 > 0$ tels que

$$\mathbb{E}((\|\xi_n\|)^{2+\delta} | \mathcal{F}_n) \leq A_1 \sigma^{2+\delta}(\mathbf{X}_n). \quad (\text{A2})$$

Aussi, nous avons besoin d'une hypothèse pour permettre au processus d'aller vers l'infini

$$\forall C > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathbb{P}(\mathbf{X}_n \mathbf{u} \geq C) > 0. \quad (\text{A3})$$

Enfin, nous ajoutons deux autres hypothèses sur les fonctions g et σ^2 pour avoir que \mathbf{X}_n puisse tendre vers l'infini avec probabilité non nulle. Premièrement, nous supposons que $g(\mathbf{x})\mathbf{u}$ n'atteint pas 0 :

Il existe $s_1 > 0$ tel que pour tout $a, b > 0$ tels que $s_1 < a < b < \infty$, si $\mathbf{x}\mathbf{u} \in (a, b)$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que

$$g(\mathbf{x})\mathbf{u} > \varepsilon, \quad (\text{A4})$$

et deuxièmement, que σ^2 est finie :

$$\forall a > 0, \sup_{\|\mathbf{x}\| < a} \sigma^2(\mathbf{x}) < \infty. \quad (\text{A5})$$

En plus de ces hypothèses, suffisantes pour que $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$, nous ferons quelques hypothèses supplémentaires. On supposera que 0 est le seul état absorbant et que \mathbf{X}_n vérifie la propriété de dichotomie suivante :

$$\mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \rightarrow \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \rightarrow \infty\}} \text{ p.s.}$$

On supposera de plus que $(\xi_n \mathbf{u})$ possède des moments de tout ordre et qu'il existe des fonctions $r_k(\mathbf{x})$ telles que pour $k \geq 3$

$$\mathbb{E}(|\xi_n \mathbf{u}|^k | \mathcal{F}_n) \leq r_k(\mathbf{X}_n) \text{ p.s.} \quad (3.1)$$

et les $r_k(\mathbf{x})$ satisfont

$$r_k(\mathbf{x}) = o\left((\mathbf{x}\mathbf{u})^{k+\alpha-1}\right). \quad (3.2)$$

Dans le cas de la dimension 1, Kersting [37] a montré la convergence en loi vers une loi Gamma du processus dans le cas où la fonction g n'est pas polynomiale et sans supposer l'existence de moments de tout ordre pour ξ_n en utilisant une méthode de troncature. Il est sans doute possible de faire de même pour le cas multitype. Néanmoins, cela amène de lourdes difficultés techniques supplémentaires.

On obtient le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Soit $q = \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty)$.*

Alors, $\mathbf{X}_n/n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ converge loi vers un vecteur aléatoire $\mathbf{v}W$ de direction non aléatoire \mathbf{v} , et de longueur aléatoire W . W a un atome de taille $1 - q$ à l'origine et $W^{1-\alpha}$ a pour densité q fois la densité d'une loi Gamma de paramètres $\frac{2c_1-d_1\alpha}{d_1-d_1\alpha}$ et $\frac{2}{d_1(1-\alpha)^2}$.

Remarque 3.1. *On a donc l'approximation $\mathbf{X}_n \simeq n^{\frac{1}{1-\alpha}}W\mathbf{v}$ lorsque n est grand. Comme $n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ correspond à l'ordre de grandeur du processus déterministe associé à \mathbf{X}_n , on remarque que l'on a une perturbation multiplicative.*

On va reprendre la preuve par la méthode des moments de [43], mais on doit montrer que les termes supplémentaires en $\|\mathbf{Y}_n\|$ sont négligeables. On va commencer par énoncer et prouver quelques résultats intermédiaires.

3.1.2 Preuve du théorème 3.1

On rappelle que

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n (M - \mathbf{u}\mathbf{v}) + g(\mathbf{X}_n) (I - \mathbf{u}\mathbf{v}) + \xi_n (I - \mathbf{u}\mathbf{v}),$$

et le rayon spectral λ de $M - \mathbf{u}\mathbf{v}$ est plus petit que 1. Soit $\lambda_1 \in (\lambda, 1)$, il existe une norme $\|\cdot\|$ telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\mathbf{x} (M - \mathbf{u}\mathbf{v})\| \leq \lambda_1 \|\mathbf{x}\|.$$

Lemme 3.1. *Pour tout $k > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^k \right) &= \left(c_1 k + d_1 \binom{k}{2} \right) \sum_{j=0}^n \mathbb{E} \left[(\mathbf{X}_j \mathbf{u})^{k+\alpha-1} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n k \mathbb{E} \left[(\mathbf{X}_j \mathbf{u})^{k-1} h_1(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \binom{k}{2} \mathbb{E} \left[(\mathbf{X}_j \mathbf{u})^{k-2} h_2(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \mathbb{E} (R_{k,j} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}) + \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_0 \mathbf{u})^k \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $R_{k,j} = o((\mathbf{X}_j \mathbf{u})^{k\alpha-1})$.

Démonstration. On rappelle un premier résultat de [43]. Pour tout $k \geq 0$, $x \geq -1$, tout entier m ,

$$(1+x)^k = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{k}{j} x^j + r_m(x), \quad (3.4)$$

où $r_m(x)$ est le reste. Si $k < m$, alors pour tout $x \leq -1$,

$$|r_m(x)| < C|x|^m \quad (3.5)$$

et si $k \geq m$, alors pour tout $x \geq -1$,

$$|r_m(x)| < C(|x|^m + |x|^k). \quad (3.6)$$

On pose $\delta \mathbf{X}_n \mathbf{u} = \frac{\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u} - \mathbf{X}_n \mathbf{u}}{\mathbf{X}_n \mathbf{u}}$. On a immédiatement que $\delta \mathbf{X}_n \mathbf{u} \geq -1$ et par (3.4) avec $m = 3$

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^k &= (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^k (1 + \delta \mathbf{X}_n \mathbf{u})^k \\ &= (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^k + k (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{k-1} g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u} + d_1 \binom{k}{2} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{k-2} (\xi_n \mathbf{u})^2 \\ &\quad + \left(k (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{k-1} + 2 \binom{k}{2} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{k-2} g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u} \right) \xi_n \mathbf{u} \\ &\quad + \binom{k}{2} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{k-2} (g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u})^2 + (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^k r(\delta \mathbf{X}_n \mathbf{u}). \end{aligned}$$

En prenant l'espérance et par (A1), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^k \mid \mathcal{F}_n\right) &= (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^k + c_1 k (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1} + k (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k-1} h_1(\mathbf{Y}_n) \\ &\quad + d_1 \binom{k}{2} (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1} + \binom{k}{2} (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k-2} h_2(\mathbf{Y}_n) \\ &\quad + (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^k \mathbb{E}(r(\delta\mathbf{X}_n\mathbf{u}) \mid \mathcal{F}_n) + o\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1}\right),\end{aligned}$$

si $\mathbf{X}_n\mathbf{u} > 0$. Si $\mathbf{X}_n\mathbf{u} = 0$ alors $\mathbb{E}(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} \mid \mathcal{F}_n) = 0$. On calculera l'espérance du terme de reste après.

Pour $0 < k < 3$ on utilise la borne (3.5) avec $m = 3$ ainsi que l'inégalité $|a + b|^m < C(|a|^m + |b|^m)$ et on a

$$(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^k |r(\delta\mathbf{X}_n\mathbf{u})| < C (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^k |\delta\mathbf{X}_n\mathbf{u}|^3 < C (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k-3} ((g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u})^3 + |\xi_n\mathbf{u}|^3).$$

Ainsi, comme $r_3(\mathbf{x}) = o((\mathbf{x}\mathbf{u})^{2+\alpha})$, on a que

$$(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^k |\mathbb{E}(r(\delta\mathbf{X}_n\mathbf{u}))| \leq o\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k-3(1-\alpha)}\right) + o\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1}\right) = o\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1}\right).$$

Pour $k \geq 3$, on a par (3.6)

$$(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^k |r(\delta\mathbf{X}_n\mathbf{u})| < C (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k-3} ((g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u})^3 + |\xi_n\mathbf{u}|^3) + C \left((g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u})^k + |\xi_n\mathbf{u}|^k\right).$$

Dès lors, on obtient aussi que

$$(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^k |\mathbb{E}(r(\delta\mathbf{X}_n\mathbf{u}))| \leq o\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1}\right) + o\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k\alpha}\right) = o\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1}\right).$$

Donc pour tout $k > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^k \mid \mathcal{F}_n\right) &= ((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^k + c_1 k (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1} + k (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k-1} h_1(\mathbf{Y}_n) \\ &\quad + d_1 \binom{k}{2} (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k+\alpha-1} \\ &\quad + \binom{k}{2} (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k-2} h_2(\mathbf{Y}_n) + R_{k,n}) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n\mathbf{u} > 0\}},\end{aligned}$$

avec $R_{k,n} = o\left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{k\alpha-1}\right)$. En passant à l'espérance et en itérant, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^k\right) &= \left(c_1 k + d_1 \binom{k}{2}\right) \sum_{j=0}^n \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{k+\alpha-1} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}\right] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n k \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{k-1} h_1(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}\right] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \binom{k}{2} \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{k-2} h_2(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}\right] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \mathbb{E}(R_{k,j} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}) + \mathbb{E}\left((\mathbf{X}_0\mathbf{u})^k\right).\end{aligned}$$

□

Pour démontrer le théorème, nous utiliserons cette égalité en montrant que les trois derniers termes du membre de droite sont négligeables par rapport au premier. On pose

$$\gamma = \frac{\min(\alpha, 1 - \alpha)}{3}.$$

Lemme 3.2. *Soit $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\frac{\lambda_1}{1 - \varepsilon} < 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K > 0$ tel que

$$\mathbb{E} \left(\left(\frac{\mathbf{X}_n \mathbf{u}}{\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}} \right)^\gamma \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \leq K (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\alpha + \gamma - 1} + (1 - \varepsilon)^{-\gamma}, \text{ p.s.}$$

Démonstration. Soit $s > 0$, tel que si $\mathbf{X}_n \mathbf{u} > 0$ alors $\mathbf{X}_n \mathbf{u} > s$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u} + g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u} + \xi_n \mathbf{u})^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \mathbb{1}_{\{\xi_n < -\varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u}\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\ & \quad + \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u} + g(\mathbf{X}_n) \mathbf{u} + \xi_n \mathbf{u})^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \mathbb{1}_{\{\xi_n \geq -\varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u}\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(s^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \mathbb{1}_{\{\xi_n < -\varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u}\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) + (1 - \varepsilon)^{-\gamma} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \\ &\leq (s^{-\gamma} \mathbb{P}((\xi_n \mathbf{u})^2 > (\varepsilon \mathbf{X}_n \mathbf{u})^2) \middle| \mathcal{F}_n) + (1 - \varepsilon)^{-\gamma} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \\ &\leq \left(\frac{K (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1+\alpha}}{(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2} + (1 - \varepsilon)^{-\gamma} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\gamma} \right) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \\ &\leq (K (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\alpha-1} + (1 - \varepsilon)^{-\gamma} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\gamma}) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E} \left(\left(\frac{\mathbf{X}_n \mathbf{u}}{\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}} \right)^\gamma \middle| \mathcal{F}_n \right) \leq K (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\alpha + \gamma - 1} + (1 - \varepsilon)^{-\gamma}.$$

□

Lemme 3.3. *Supposons \mathbf{X}_0 déterministe, alors on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{\|\xi_n\|^\gamma}{(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right) = 0.$$

Démonstration. On découpe d'abord l'espérance sur deux ensembles disjoints : $\{-\frac{1}{2} \mathbf{X}_n \mathbf{u} < \xi_n \mathbf{u}\}$ et $\{-\frac{1}{2} \mathbf{X}_n \mathbf{u} \geq \xi_n \mathbf{u}\}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\|\xi_n\|^\gamma (\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \mathbb{1}_{\{-\frac{1}{2} \mathbf{X}_n \mathbf{u} < \xi_n \mathbf{u}\}} \right) &\leq \mathbb{E} \left(2^\gamma \|\xi_n\|^\gamma (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) \\ &\leq C \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\gamma \left(\frac{1+\alpha}{2} - 1 \right)} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) \\ &\leq o(1), \end{aligned}$$

parce que $\frac{1+\alpha}{2} - 1 < 0$ et par convergence dominée car $\mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_i \neq 0\}} \rightarrow \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_i \rightarrow \infty\}}$. Pour le second terme, on choisit d'abord p tel que $p > \gamma \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ et $p + \gamma < 2$ ce qui est possible car $\gamma < \frac{1-\alpha}{3}$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\|\xi_n\|^\gamma (\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^{-\gamma} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \mathbb{1}_{\{-\frac{1}{2} \mathbf{X}_n \mathbf{u} \geq \xi_n \mathbf{u}\}} \right) &\leq C \mathbb{E} \left(\|\xi_n\|^{\gamma+p} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-p} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) \\ &\leq C \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\gamma+p(\frac{1+\alpha}{2})-p} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) \\ &\leq o(1), \end{aligned}$$

par les mêmes arguments. D'où le résultat souhaité. \square

Le lemme suivant nous permet de montrer que les termes en $\mathbb{E} \left[(\mathbf{X}_j \mathbf{u})^{k-1} h_1(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}} \right]$ et $\mathbb{E} \left[(\mathbf{X}_j \mathbf{u})^{k-2} h_2(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}} \right]$ du Lemme 3.1 sont négligeables par rapport à $\mathbb{E} \left[(\mathbf{X}_j \mathbf{u})^k \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}} \right]$, pour $k = 1 - \alpha$. Ceci nous permettra de montrer l'initialisation de la récurrence dans la preuve du Théorème 3.1.

Lemme 3.4. *Pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $\mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0) = 1$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\alpha} \|\mathbf{Y}_n\|_2^\alpha \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) = 0.$$

Démonstration. Comme \mathbb{R}^d est dimension finie, les normes sont équivalentes, et donc il existe $a > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq a \|\mathbf{x}\|.$$

Ainsi, il est suffisant de prouver que

$$\mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\alpha} \|\mathbf{Y}_n\|^\alpha \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) = o(1).$$

Comme il existe $a_1 > 0$ tel que

$$\|\mathbf{y}\| \leq a_1 \|\mathbf{x}\|, \tag{3.7}$$

il est suffisant de prouver que

$$\mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\gamma} \|\mathbf{Y}_n\|^\gamma \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) = o(1).$$

Soit u_n la suite déterministe définie par

$$u_n = \mathbb{E} \left(\left(\frac{\|\mathbf{Y}_n\|}{\mathbf{X}_n \mathbf{u}} \right)^\gamma \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right).$$

On va prouver qu'il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_{n+1} \leq r u_n + v_n,$$

avec $r \in (0, 1)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0,$$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. On utilise d'abord le Lemme 3.2.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \mathbb{E} \left(\frac{\lambda_1^\gamma \|\mathbf{Y}_n\|^\gamma + \|g(\mathbf{X}_n)\|^\gamma + \|\xi_n\|^\gamma}{(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\frac{\lambda_1^\gamma \|\mathbf{Y}_n\|^\gamma}{(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\gamma} \left(\frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u}} \right)^\gamma \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right) + \mathbb{E} \left(\frac{\|g(\mathbf{X}_n)\|^\gamma + \|\xi_n\|^\gamma}{(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right) \\ &\leq \left(\frac{\lambda_1}{1-\varepsilon} \right)^\gamma u_n + K' \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha+\gamma-1} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) + \mathbb{E} \left(\frac{\|g(\mathbf{X}_n)\|^\gamma + \|\xi_n\|^\gamma}{(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right). \end{aligned}$$

Pour finir la preuve, on a besoin que

$$K' \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha+\gamma-1} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) + \mathbb{E} \left(\frac{\|g(\mathbf{X}_n)\|^\gamma + \|\xi_n\|^\gamma}{(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour le premier terme, comme $\alpha + \gamma - 1 < 0$ et $\mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_i \neq 0\}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\}}$, par convergence dominée $\mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha+\gamma-1} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Pour le second terme, la partie avec $\|\xi_n\|^\gamma$ tend vers zéro d'après le Lemme 3.3 et on utilise une fois de plus le Lemme 3.2 pour la partie avec $\|g(\mathbf{X}_n)\|^\gamma$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{\|g(\mathbf{X}_n)\|^\gamma}{(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right) &\leq \mathbb{E} \left(K' \frac{(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha\gamma}}{(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\gamma} \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(K' (\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\gamma(\alpha-1)} \left(\frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u}}{\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u}} \right)^\gamma \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_{n+1} \neq 0\}} \right) \\ &\leq o(1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

□

Preuve du Théorème 3.1. On va montrer par récurrence sur ℓ que pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)} n^{-\ell} \right) < \infty,$$

qu'on a la relation de récurrence

$$\mu_{\ell+1} = (c_1(1-\alpha) + d_1(1-\alpha)((\ell+1)(1-\alpha) - 1)/2) \mu_\ell$$

avec $\mu_0 = q$ et que

$$\mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)-1} \|\mathbf{Y}\|^\alpha \mathbf{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) = o(n^{\ell-1}).$$

Montrons d'abord la propriété pour $\ell = 1$. On reprend le résultat du Lemme 3.1

avec $k = \ell(1 - \alpha)$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, et on écrira $\Delta_{\ell,n}$ pour $R_{\ell(1-\alpha),n}$. Ainsi pour $\ell = 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^{1-\alpha}) &= c_0 \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(\mathbf{X}_j\mathbf{u} > 0) + \sum_{j=0}^n (1 - \alpha) \mathbb{E}[(\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{-\alpha} h_1(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \binom{1-\alpha}{2} \mathbb{E}[(\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{-1-\alpha} h_2(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \mathbb{E}(\Delta_{1,j} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}) + \mathbb{E}((\mathbf{X}_0\mathbf{u})^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

avec $c_0 = c_1(1 - \alpha) + d_2 \binom{1-\alpha}{2}$.

D'après le Lemme 3.4, on a bien que $\mathbb{E}((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{-\alpha} \|\mathbf{Y}_n\|_2^\alpha \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}}) = o(1)$. Comme pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ il existe une constante $C' > 0$ telle que $(\mathbf{x}\mathbf{u})^{-1-\alpha} h_2(\mathbf{y}) \leq C'(\mathbf{x}\mathbf{u})^{-\alpha} \|\mathbf{y}\|^\alpha$, à cause de (3.7), on a que

$$\frac{\mathbb{E}((X_n\mathbf{u})^{1-\alpha})}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c_0 q.$$

On vient de montrer l'initialisation.

Soit maintenant $\ell \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mu_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)} n^{-\ell}) < \infty$

et que $\mathbb{E}((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)-1} \|\mathbf{Y}\|^\alpha \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}}) = o(n^{\ell-1})$. On sait d'après le Lemme 3.1 en prenant $k = (\ell + 1)(1 - \alpha)$ que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^{(\ell+1)(1-\alpha)}) \\ &= \left(c_1(\ell + 1)(1 - \alpha) + d_1 \binom{(\ell + 1)(1 - \alpha)}{2} \right) \sum_{j=0}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n (\ell + 1)(1 - \alpha) \mathbb{E}[(\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{(\ell+1)(1-\alpha)-1} h_1(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \binom{(\ell + 1)(1 - \alpha)}{2} \mathbb{E}[(\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{(\ell+1)(1-\alpha)-2} h_2(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \mathbb{E}(R_{(\ell+1)(1-\alpha),j} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}) + \mathbb{E}((\mathbf{X}_0\mathbf{u})^{(\ell+1)(1-\alpha)}). \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} H_{n,\ell+1} &= \sum_{j=0}^n (\ell + 1)(1 - \alpha) \mathbb{E}((\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{(\ell+1)(1-\alpha)-1} h_1(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \binom{(\ell + 1)(1 - \alpha)}{2} \mathbb{E}((\mathbf{X}_j\mathbf{u})^{(\ell+1)(1-\alpha)-2} h_2(\mathbf{Y}_j) \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_j \neq 0\}}). \end{aligned}$$

Si on montre que

$$\mathbb{E}((\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{(\ell+1)(1-\alpha)-1} \|\mathbf{Y}\|^\alpha \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}}) = o(n^\ell),$$

alors on a montré la récurrence car on aurait aussi que

$$H_{n,\ell+1} = o(n^{\ell+1}).$$

Soit $\eta = \frac{\alpha}{2}$. Il est suffisant de montrer que

$$\mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)-\eta} \|\mathbf{Y}_n\|^\eta \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) = o(n^\ell).$$

Soit $p_1 = \frac{\alpha}{\eta} = 2$ et $p_2 = \frac{\alpha}{\alpha-\eta} = 2$. Par l'inégalité de Hölder et en utilisant notre hypothèse de récurrence, on a que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)-\gamma} \|\mathbf{Y}_n\|^\gamma \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\frac{\ell}{p_1}(1-\alpha)-\frac{1}{p_1}} \|\mathbf{Y}_n\|^{\frac{\alpha}{p_1}} (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{1-\alpha}{p_1}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)-1} \|\mathbf{Y}_n\|^\alpha \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)+p_2\frac{1-\alpha}{p_1}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &\leq o\left(n^{\frac{\ell-1}{2}}\right) \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{(1-\alpha)(\ell+1)} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n \neq 0\}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq o\left(n^{\frac{\ell-1}{2}}\right) \mathcal{O}\left(n^{\frac{\ell+1}{2}}\right) \\ &\leq o(n^\ell). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$H_{n,\ell+1} = o(n^{\ell+1}),$$

et on a montré que pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$

$$\mu_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\ell(1-\alpha)} n^{-\ell} \right) < \infty,$$

avec $\mu_0 = q$.

Or les moments d'une loi Gamma de paramètres $\frac{2c_1-d_1\alpha}{d_1-d_1\alpha}$ et $\frac{2}{d_1(1-\alpha)^2}$ vérifient cette même relation donc

$$\frac{(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1-\alpha}}{n}$$

converge vers une loi Gamma de paramètres $\frac{2c_1-d_1\alpha}{d_1-d_1\alpha}$ et $\frac{2}{d_1(1-\alpha)^2}$.

On va maintenant montrer que

$$\mathbf{Y}_n / n^{\frac{1}{1-\alpha}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0.$$

Soit $y_n = \mathbb{E}(\|\mathbf{Y}_n\|)$, on sait que

$$y_{n+1} \leq \lambda_1 y_n + \mathbb{E}(\|g(\mathbf{X}_n)\| + \|\xi_n\|).$$

Comme il existe c_3 et $c_4 > 0$ tels que $\mathbb{E}(\|g(\mathbf{X}_n)\|) \leq c_3 \mathbb{E}((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\alpha) = \mathcal{O}\left(n^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$ et

$\mathbb{E}(\|\xi_n\|) \leq c_4 \mathbb{E}\left((\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\frac{1+\alpha}{2}}\right) = \mathcal{O}\left(n^{\frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}}\right)$, on a que

$$y_{n+1} \leq \lambda_1 y_n + \mathcal{O}\left(n^{\frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{1-\alpha}}} &\leq \frac{y_{n+1}}{n^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq \lambda_1 \frac{y_n}{n^{\frac{1}{1-\alpha}}} + \mathcal{O}\left(n^{\left(\frac{1+\alpha}{2}-1\right)\frac{1}{1-\alpha}}\right) \\ &\leq \lambda_1 \frac{y_n}{n^{\frac{1}{1-\alpha}}} + o(1). \end{aligned}$$

Dès lors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{n^{\frac{1}{1-\alpha}}} = 0$, ce qui est le résultat souhaité. \square

3.1.3 Exemple

On reprend ici l'exemple d'une métapopulation avec deux parcelles vu dans le Chapitre précédent. On notera $(\mathbf{X}_n)_1$ la taille de population vivant sur la première parcelle à la génération n et $(\mathbf{X}_n)_2$ celle vivant sur la deuxième parcelle. On suppose que tous les individus vivant sur la même parcelle se reproduisent de manière indépendante et même loi, on notera $A_{i,k,n}(x_i)$ le nombre d'enfants du k -ième individu à la génération n vivant sur la parcelle i sachant qu'il y a x_i individus sur la parcelle i . On pose $m_i(x) = \mathbb{E}(A_{i,k,n}(x))$ et $b_i(x) = \text{Var}(A_{i,k,n}(x))$ et on suppose qu'il existe deux constantes positives c_i et b_i telles que

$$m_i(x) = 1 + \frac{c_i}{x},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b_i(x) = b_i.$$

Chaque enfant peut migrer vers l'autre parcelle ou rester sur sa parcelle d'origine. On pose $p_{i,j}$ la probabilité pour un enfant né sur la parcelle i de migrer vers la parcelle j . On obtient alors l'équation de récurrence suivante

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n P + (c_1 \quad c_2) P + \xi_n,$$

où $P = (p_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$, ξ_n est tel que $\mathbb{E}(\xi_n | \mathbf{X}_n) = 0$. On pose

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{v} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{p_{2,1}}{p_{1,2}+p_{2,1}} & \frac{p_{1,2}}{p_{1,2}+p_{2,1}} \end{pmatrix}$$

les vecteurs propres à droite et à gauche, normalisés, associés à la valeur propre 1 de la matrice P . On remarque que l'on a

$$\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathbf{X}_n) = ((\mathbf{X}_n)_1 b_1((\mathbf{X}_n)_1) + (\mathbf{X}_n)_2 b_2((\mathbf{X}_n)_2))/2.$$

On pose

$$\gamma = \frac{p_{2,1}}{p_{1,2} + p_{2,1}},$$

et on rappelle que si

$$2(c_1 + c_2) > \gamma b_1 + (1 - \gamma)b_2$$

alors la population peut persister (et dans ce cas sa taille va tendre vers l'infini) avec probabilité non nulle.

Si on suppose de plus que $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété de dichotomie et que les conditions (3.1) et (3.2) sont vérifiées alors on a la convergence de \mathbf{X}_n/n vers une loi Gamma. Nous illustrons ceci par les simulations ci-dessous où on s'est arrêté à l'instant $n = 1000$.

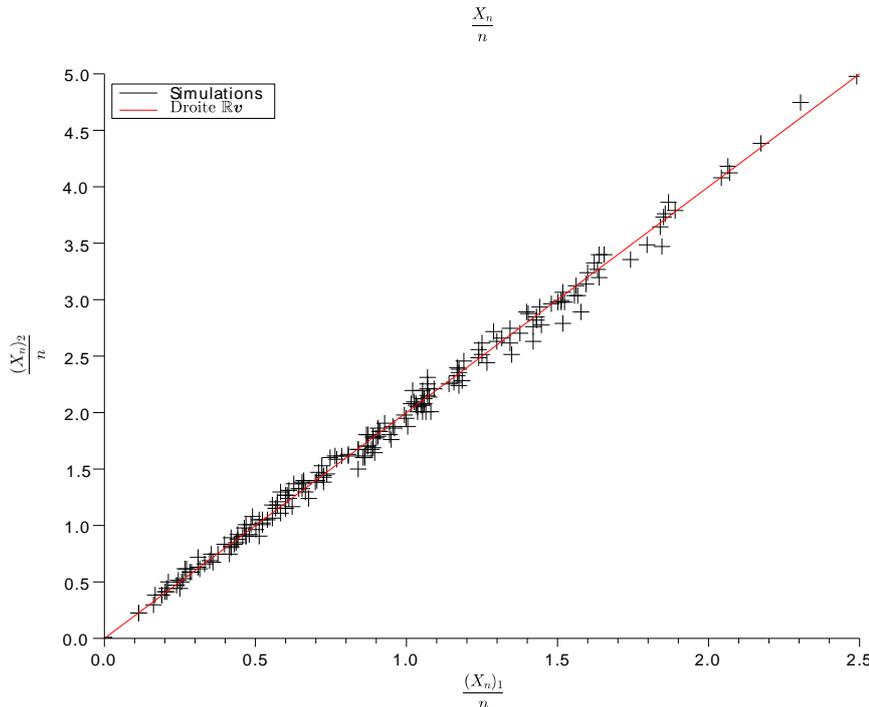


FIGURE 3.1 – Convergence en loi vers un vecteur de direction déterministe

3.2 Cas non quasi-polynomial

3.2.1 Critère de croissance infinie

Dans cette partie, on va étendre les résultats des parties précédentes dans un cadre plus général. En effet, nous ne supposons plus désormais que $g(\mathbf{x})\mathbf{u}$ et $\sigma^2(\mathbf{x})$ sont de formes quasi-polynomiales. Dans [39], Kersting a donné un critère de croissance infinie en ayant des hypothèses moins fortes sur les fonctions $g(\mathbf{x})\mathbf{u}$ et $\sigma^2(\mathbf{x})$. L'idée de la preuve est de construire une fonction de Lyapounov pour $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et non plus $(\mathbf{X}_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$. On va rappeler son résultat ainsi que les fonctions

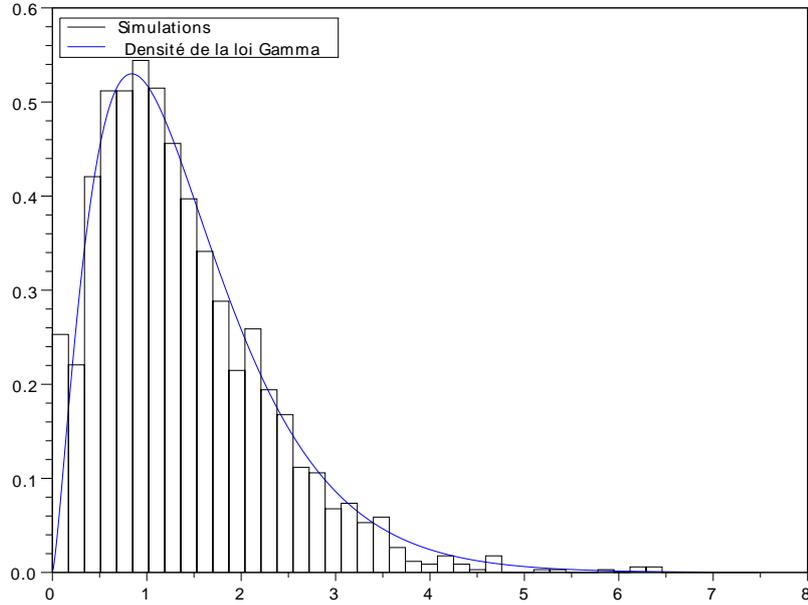


FIGURE 3.2 – Convergence en loi vers un vecteur de longueur suivant une loi Gamma

de Lyapounov utilisées pour montrer si la croissance vers l'infini du processus est possible.

On considère donc à nouveau un processus vérifiant l'équation de récurrence

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n,$$

où M est une matrice irréductible $d \times d$ à coefficients positifs, $g : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ une fonction telle que $\|g(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}\|)$ lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend vers l'infini, et $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires (à valeurs dans \mathbb{R}^d) telle que presque-sûrement

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$$

où $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est la filtration naturelle associée à (\mathbf{X}_n) . On suppose que $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ et que les vecteurs aléatoires ξ_n sont tels que pour tout n , \mathbf{X}_n est à valeur dans \mathbb{R}_+^d presque-sûrement.

Le théorème de Perron-Frobenius [61, pp. 3-4] nous assure que le rayon spectral de M est une valeur propre simple que l'on notera ρ . On suppose ici aussi que $\rho = 1$. Nous définissons les vecteurs propres à droite et à gauche normalisés associés à ρ par \mathbf{u} et \mathbf{v} de sorte que $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$.

Nous supposons que la suite (\mathbf{X}_n) vérifie une forme faible de la propriété de Markov. Plus précisément, nous supposons que $\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n)$ est une fonction de \mathbf{X}_n et on notera

$$\sigma^2(\mathbf{X}_n) = \mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n).$$

On reprend aussi l'hypothèse (A2) : il existe $\delta > 0$ et $A_1 > 0$ tels que

$$\mathbb{E} \left((\|\xi_n\|)^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_n \right) \leq A_1 \sigma^{2+\delta}(\mathbf{X}_n).$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, on rappelle que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}).$$

Voici la généralisation de Kersting.

Théorème 3.2. *On suppose (A2) et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que*

$$\text{si } \|\mathbf{x}\| \geq b, \|\mathbf{y}\|^2 \leq a\|g(\mathbf{x})\|\|\mathbf{x}\|, \text{ alors } 2\mathbf{x}\mathbf{u}g(\mathbf{x})\mathbf{u} < (1 - \varepsilon)\sigma^2(\mathbf{x}).$$

On a alors que $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$.

La preuve consiste à considérer la fonction

$$L(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{(\mathbf{x}\mathbf{u})^2} + \alpha \log(\mathbf{x}\mathbf{u}),$$

avec un certain $\alpha > 0$, qui est une fonction de Lyapounov, c'est à dire que $L(\mathbf{X}_n)$ est une surmartingale. On a un résultat analogue pour la croissance infinie possible.

Théorème 3.3. *On suppose (A2) et que*

$$\|g(\mathbf{x})\| = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\| \log^{-\mu}(\|\mathbf{x}\|)), \text{ pour un certain } \mu > \frac{2}{\delta - 2}.$$

Supposons de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que

$$\text{si } \|\mathbf{x}\| \geq b, \|\mathbf{y}\|^2 \leq a\sigma^2(\mathbf{x}), \text{ alors } \sigma^2(\mathbf{x}) < 2(1 - \varepsilon)\mathbf{x}\mathbf{u}g(\mathbf{x})\mathbf{u}. \quad (3.8)$$

On a alors que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}_n\| \leq r \text{ ou } \|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 1,$$

pour un certain $r > 0$. De plus, si on suppose (A3), alors

$$\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0 \text{ et } \mathbb{P}(\|\mathbf{Y}_n\| = o(\|\mathbf{X}_n\|) \mid \|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 1.$$

La preuve est plus technique que celle du théorème précédent. Il faut considérer les fonctions

$$L_j(\mathbf{x}) = \frac{(1 + \gamma \mathbf{x}_j / (\mathbf{x}\mathbf{u}))\|\mathbf{y}\|^2}{(\mathbf{x}\mathbf{u})^2 (\log(\mathbf{x}\mathbf{u}))^{\beta+1}} + \alpha \log(\mathbf{x}\mathbf{u})^{-\beta}$$

avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $j \in \{1, \dots, d\}$ avec \mathbf{x}_j la j -ème coordonnée de \mathbf{x} , qui sont des fonctions de Lyapounov, c'est à dire que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $L_j(\mathbf{X}_n)$ est une surmartingale.

3.2.2 Limite vers un processus de Bessel carré

Nous allons nous placer dans le cas du Théorème 3.3 et conjecturer que, par un changement d'échelle, la convergence d'une transformée notre processus vers la solution d'une certaine équation différentielle stochastique. Un résultat similaire avait été proposé par Kersting [37] en dimension 1, et par Ispány et Pap [30] pour un processus de Galton-Watson multitype critique. Cette partie est un travail en cours avec Götz Kersting. On va d'abord introduire quelques notations.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, soit $\tilde{g}(x) = g(x\mathbf{v})\mathbf{u}$ and $\tilde{\sigma}^2(x) = \sigma^2(x\mathbf{v})$.

Dans cette partie, on suppose que :

$$\forall \eta > 0, \exists \gamma > 0, b > 0 \text{ tel que } \|\mathbf{x}\| \geq b, \|\mathbf{y}\| \leq \gamma \|\mathbf{x}\| \Rightarrow \left| \frac{g(\mathbf{x})\mathbf{u}}{\tilde{g}(\mathbf{x}\mathbf{u})} - 1 \right| \leq \eta. \quad (\text{A}'1)$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \kappa > 0, c > 0 \text{ tel que } \|\mathbf{x}\| \geq c, \|\mathbf{y}\| \leq \kappa \|\mathbf{x}\| \Rightarrow \left| \frac{\sigma^2(\mathbf{x})}{\tilde{\sigma}^2(\mathbf{x}\mathbf{u})} - 1 \right| \leq \varepsilon. \quad (\text{A}'2)$$

On pose aussi pour $x \in [1, \infty)$

$$G(x) = \int_1^x \frac{ds}{\tilde{g}(s)},$$

cette transformation est l'analogie multitype de la transformation utilisée par Keller, Kersting et Rössler [35] et Kersting [37] en dimension 1. L'idée de cette transformation est de se ramener à un processus avec une croissance affine. Nous avons utilisé un cas particulier de cette transformation dans la première partie de ce chapitre lorsque nous avons considéré $(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{1/(1-\alpha)}$.

Comme dans [37], on suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $G(x)^\mu$ est ultimement convexe pour $\mu \notin [0, \lambda]$ et ultimement concave pour $\mu \in (0, \lambda)$.

On suppose aussi qu'il existe $\beta > 0$, tel que $\beta\lambda < 2$ et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\sigma}^2(x)}{\tilde{g}^2(x)G(x)} = \beta.$$

Cette condition implique en fait la condition (3.8).

On rappelle qu'un processus de Bessel carré de dimension c partant de x , avec $c > 0$ et $x \geq 0$, est l'unique solution forte de l'équation stochastique différentielle

$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{Z_s} dB_s + ct,$$

où (B_t) est un mouvement brownien standard. Pour plus de détails sur les processus de Bessel carré, le lecteur pourra consulter le livre de Revuz et Yor [59, p. 439].

On pose enfin

$$Z_n(t) = \frac{1}{n} G(\mathbf{X}_{[nt]} \mathbf{u}).$$

Conjecture 3.1. *On suppose (A2), (A3), (A'1) et (A'2). Sur l'événement $\{\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}$, $\frac{4}{\beta}Z_n(t)$ converge en loi vers un processus de Bessel carré de dimension $\frac{4}{\beta} - 2\lambda + 2$ partant de 0.*

Remarque 3.2. *On obtient une approximation de la forme*

$$\mathbf{X}_{\lfloor nt \rfloor} \simeq G^{-1} \left(\frac{\beta}{4} n Z_t \right) \mathbf{v},$$

pour n grand, où $Z(t)$ est un processus de Bessel carré de dimension $\frac{4}{\beta} - 2\lambda + 2$ partant de 0.

En particulier, si $G(x) = x^\gamma$, avec $\gamma \in (0, 1)$, alors on a l'approximation

$$\left(\frac{4}{\beta} \right)^{1/\gamma} \mathbf{X}_{\lfloor nt \rfloor} \simeq n^{1/\gamma} Z(t)^{1/\gamma} \mathbf{v}.$$

Remarque 3.3. *On peut vérifier que $\frac{4}{\beta} - 2\lambda + 2 > 2$ et on sait que pour un processus de Bessel carré de dimension plus grande que 2, l'ensemble $\{0\}$ est polaire, c'est à dire $\mathbb{P}_z(T_0 < \infty) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$, où $T_0 = \inf\{t > 0, Z_t = 0\}$ (voir [59]).*

Notre idée de preuve consiste à appliquer le Théorème 4.1 de [16, p.354] :

Théorème 3.4. *Soit a et b deux fonctions continues définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Soit*

$$A = \left\{ \left(f, a(x) \frac{d^2 f}{dx^2} + b(x) \frac{df}{dx} \right), f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+) \right\},$$

et on suppose que le $\mathcal{C}_\mathbb{R}([0, \infty))$ problème de martingale pour A est bien posé.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n, B_n et A_n des processus dont les trajectoires sont dans $\mathcal{D}_\mathbb{R}([0, \infty))$ et $A_n(t) - A_n(s) \geq 0$ pour $t > s \geq 0$. On pose la filtration $\mathcal{F}_t^n = \sigma(X_n(s), B_n(s), A_n(s) : s \leq t)$.

Soit le temps d'arrêt $\tau_n^r = \inf\{t : |X_n(t)| \geq r \text{ ou } |X_n(t^-)| \geq r\}$ et on suppose que

$$M_n(t) = X_n(t) - B_n(t) \tag{3.9}$$

et

$$M_n^2(t) - A_n(t) \tag{3.10}$$

sont des \mathcal{F}_t^n martingales locales et pour tout $r > 0, T > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} |X_n(t) - X_n(t^-)|^2 \right) = 0, \tag{3.11}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} |B_n(t) - B_n(t^-)|^2 \right) = 0, \tag{3.12}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} |A_n(t) - A_n(t^-)| \right) = 0, \tag{3.13}$$

$$\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} \left| B_n(t) - \int_0^t b(X_n(s)) ds \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (3.14)$$

et

$$\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} \left| A_n(t) - \int_0^t a(X_n(s)) ds \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (3.15)$$

On suppose aussi que $\mathbb{P}(X_n(0) \in \Gamma) \Rightarrow \nu(\Gamma)$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, (X_n) converge en loi vers la solution du problème de martingale (A, ν) .

Posons

$$b_n(Z_n(t)) = n\mathbb{E} \left(Z_n \left(t + \frac{1}{n} \right) - Z_n(t) \middle| \mathcal{F}_{\lfloor nt \rfloor} \right),$$

$$a_n(Z_n(t)) = n\mathbb{E} \left(\left(Z_n \left(t + \frac{1}{n} \right) - Z_n(t) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\lfloor nt \rfloor} \right),$$

$$B_n(t) = \int_0^{\lfloor nt \rfloor / n} b_n(Z_n(s)) ds,$$

et

$$A_n(t) = \int_0^{\lfloor nt \rfloor / n} a_n(Z_n(s)) - \frac{1}{n} b_n(Z_n(s))^2 ds.$$

Soit $b = 1 - \frac{\lambda\beta}{2} + \frac{\beta}{2}$.

Ce résultat est un travail en cours, il nous reste en particulier à montrer que les limites (3.11), (3.12) et (3.13) sont satisfaites. Les énoncés et les preuves des lemmes intermédiaires sont en appendice dans la partie suivante.

Éléments de preuve de la Conjecture 3.1.

Le problème de martingale $\left(\left\{ \left(f, \beta x \frac{d^2 f}{dx^2} + b \frac{df}{dx} \right), f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+) \right\}, \nu \right)$, pour toute mesure de probabilité ν sur \mathbb{R}_+ , est bien posé : la fonction $x \mapsto \beta x$ est localement bornée et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe une unique solution forte de

$$Z_t = x + \int_0^t \sqrt{2\beta Z_s} dB_s + bt,$$

voir [59, p. 439].

On commence par vérifier que les conditions (3.14) et (3.15) sont vraies.

On applique le théorème de Taylor-Lagrange à G en $\mathbf{X}_k \mathbf{u}$ et $\mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}$:

$$G(\mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k \mathbf{u}) = \frac{g(\mathbf{X}_k) \mathbf{u} + \xi_k \mathbf{u}}{\tilde{g}(\mathbf{X}_k \mathbf{u})} - \frac{(g(\mathbf{X}_k) \mathbf{u} + \xi_k \mathbf{u})^2}{2} \frac{\tilde{g}'(V_k)}{\tilde{g}^2(V_k)} \quad (3.16)$$

avec $V_k \in (\min(\mathbf{X}_k \mathbf{u}, \mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}), \max(\mathbf{X}_k \mathbf{u}, \mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}))$.

Premièrement, on utilise le fait que $\tilde{g}'(V_k)G(V_k) = \lambda - 1 + o(1)$.

Deuxièmement : on utilise le Lemme 3.8 : il existe $\kappa < 1$ tel que $\xi_n \mathbf{u} = o(\tilde{g}(\mathbf{X}_n \mathbf{u})G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\kappa)$ presque sûrement et ainsi

$$|V_k - \mathbf{X}_k \mathbf{u}| \leq \tilde{g}(\mathbf{X}_k \mathbf{u})G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})^\kappa = \varepsilon \tilde{g}(\mathbf{X}_k \mathbf{u})G(\mathbf{X}_k \mathbf{u}),$$

avec $\varepsilon = G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})^{\kappa-1}$.

Ainsi, d'après le Lemme 3.6

$$\frac{G(V_k)}{G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})} \leq 1 + C_1 \varepsilon,$$

et

$$\frac{\tilde{g}(V_k)^2}{\tilde{g}(\mathbf{X}_k \mathbf{u})^2} \leq 1 + C_2 \varepsilon.$$

Ainsi, l'égalité (3.16) devient

$$\begin{aligned} G(\mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k \mathbf{u}) &= \frac{g(\mathbf{X}_k \mathbf{u}) \mathbf{u} + \xi_k \mathbf{u}}{\tilde{g}(\mathbf{X}_k \mathbf{u})} \\ &- \frac{(g(\mathbf{X}_k \mathbf{u}) \mathbf{u} + \xi_k \mathbf{u})^2}{2} \left(\frac{\lambda - 1}{\tilde{g}^2(\mathbf{X}_k \mathbf{u})G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})} + \frac{C}{G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})^{1-\kappa}} + o\left(\frac{1}{\tilde{g}^2(\mathbf{X}_k \mathbf{u})G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})}\right) \right). \end{aligned}$$

Dès lors, en passant à l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}(G(\mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k \mathbf{u}) | \mathcal{F}_k) = \frac{g(\mathbf{X}_k \mathbf{u}) \mathbf{u}}{\tilde{g}(\mathbf{X}_k \mathbf{u})} - \frac{(\lambda - 1)\sigma^2(\mathbf{X}_k)}{2\tilde{g}^2(\mathbf{X}_k \mathbf{u})G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})} + o(1).$$

Par (A'1) et (A'2), cette égalité devient

$$\mathbb{E}(G(\mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k \mathbf{u}) | \mathcal{F}_k) = 1 - \frac{(\lambda - 1)\tilde{\sigma}^2(\mathbf{X}_k \mathbf{u})}{2\tilde{g}^2(\mathbf{X}_k \mathbf{u})G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})} + o(1).$$

Et donc,

$$\mathbb{E}(G(\mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k \mathbf{u}) | \mathcal{F}_k) = 1 - \frac{(\lambda - 1)\beta}{2} + o(1). \quad (3.17)$$

Calculons maintenant $B_n(t)$:

$$\begin{aligned} B_n(t) &= \int_0^{\lfloor nt \rfloor} n \mathbb{E}(Z_n(s + 1/n) - Z_n(s) | \mathcal{F}_{\lfloor nt \rfloor}) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}\left(Z_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - Z_n\left(\frac{k}{n}\right) | \mathcal{F}_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}\left(\frac{G(\mathbf{X}_{k+1} \mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})}{n} | \mathcal{F}_k\right). \end{aligned}$$

On injecte (3.17) dans cette égalité et on obtient

$$\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} |B_n(t) - bt| = \sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} \left| \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{o(1)}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous allons maintenant faire le même genre de calcul sur A_n pour prouver que l'on a (3.15).

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E} \left(\frac{(G(\mathbf{X}_{k+1}\mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k\mathbf{u}))^2}{n^2} \middle| \mathcal{F}_k \right) - \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E} \left(\frac{G(\mathbf{X}_{k+1}\mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k\mathbf{u})}{n} \middle| \mathcal{F}_k \right)^2.$$

On peut montrer que le premier terme est le terme dominant. On va donc une fois de plus appliquer le théorème de Taylor-Lagrange pour obtenir

$$\mathbb{E} \left((G(\mathbf{X}_{k+1}\mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k\mathbf{u}))^2 \middle| \mathcal{F}_k \right) = \frac{\sigma^2(\mathbf{X}_k)}{\tilde{g}^2(\mathbf{X}_k\mathbf{u})} (1 + o(1)).$$

Ainsi, comme $\sigma^2 \sim \tilde{\sigma}$ d'après (A'2) :

$$\mathbb{E} \left((G(\mathbf{X}_{k+1}\mathbf{u}) - G(\mathbf{X}_k\mathbf{u}))^2 \middle| \mathcal{F}_k \right) = \beta G(\mathbf{X}_k\mathbf{u}) (1 + o(1)). \quad (3.18)$$

On injecte cette égalité dans le calcul de $A_n(t)$:

$$\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} \left| A_n(t) - \beta \int_0^t Z_n(s) ds \right| = \sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} \left| \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{G(\mathbf{X}_k\mathbf{u}) o(1)}{n^2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Les limites (3.11), (3.12) et (3.13) seront montrées ultérieurement. □

3.2.3 Appendice : preuve des lemmes intermédiaires

Dans cette partie, nous énonçons et démontrons les lemmes utilisés pour les éléments de preuve de la Conjecture 3.1.

Lemme 3.5. *Si b est suffisamment grand, alors*

$$\|\mathbf{Y}_n\| \mathbf{1}_{\|\mathbf{X}_n\| \geq b} = o(\|\mathbf{X}_n\|) \text{ p.s.}$$

Remarque 3.4. *Ce résultat est un résultat intermédiaire de la preuve de $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) > 0$ faite par Kersting dans [39].*

Grâce aux propriétés des fonctions G , \tilde{g} et \tilde{g}' on retrouve des résultats similaires à ceux de [37] tels que

$$\tilde{g}'(x)G(x) \rightarrow \lambda - 1$$

ainsi que le Lemme 3 de [37] :

Lemme 3.6. *Il existe $C > 0$ tel que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, si $x > 2$ et $|a| \leq \varepsilon \tilde{g}(x)G(x)$ alors*

$$\left| \frac{\tilde{g}(x+a)}{\tilde{g}(x)} - 1 \right| + \left| \frac{G(x+a)}{G(x)} - 1 \right| \leq C\varepsilon.$$

On pose $\Delta_n(\mathbf{X}_n) = g(\mathbf{X}_n)\mathbf{u} - \tilde{g}(\mathbf{X}_n\mathbf{u})$.
Soit $W_n = \mathbf{X}_n\mathbf{u} + \tilde{g}(\mathbf{X}_n\mathbf{u})$ et

$$\theta_n = \left(-\frac{\xi_n\mathbf{u} + \Delta_n(\mathbf{X}_n)}{G(W_n)^{1+\varepsilon}\tilde{g}(W_n)} + \frac{\lambda + 3\varepsilon (\xi_n\mathbf{u} + \Delta_n(\mathbf{X}_n))^2}{2 G(W_n)^{2+\varepsilon}\tilde{g}(W_n)^2} \right) \mathbb{1}_{\{|\xi_n\mathbf{u}| \leq \varepsilon\tilde{g}(W_n)G(W_n), \mathbf{X}_n\mathbf{u} > 1\}} \\ + \mathbb{1}_{\{|\xi_n\mathbf{u}| > \varepsilon\tilde{g}(W_n)G(W_n), \mathbf{X}_n\mathbf{u} > 1\}}.$$

Lemme 3.7. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $R > 1$ suffisamment grand, alors pour $\mathbf{X}_n\mathbf{u}, \mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u} > R$, on a

$$\varepsilon^{-1}G(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^{-\varepsilon} \leq \varepsilon^{-1}G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{-\varepsilon} + \theta_n - \mathbb{E}(\theta_n | \mathcal{F}_n) - \varepsilon G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{-1-\varepsilon}.$$

Démonstration. Soit U_n tel que $\mathbf{X}_n\mathbf{u} \leq U_n \leq W_n = \mathbf{X}_n\mathbf{u} + \tilde{g}(\mathbf{X}_n\mathbf{u})$.
Soit $\varepsilon = \frac{1}{G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})}$, d'après le Lemme 3.6 on obtient que

$$\left| \frac{\tilde{g}(U_n)}{\tilde{g}(\mathbf{X}_n\mathbf{u})} - 1 \right| + \left| \frac{G(U_n)}{G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})} - 1 \right| \leq \frac{C}{G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})}.$$

Pour D suffisamment grand, on a

$$\theta_n \leq -\frac{\mathbf{X}_n\mathbf{u} + \Delta_n(\mathbf{X}_n)}{G(W_n)^{1+\varepsilon}\tilde{g}(W_n)} + \frac{\lambda + 3\varepsilon (\mathbf{X}_n\mathbf{u} + \Delta_n(\mathbf{X}_n))^2}{2 G(W_n)^{2+\varepsilon}\tilde{g}(W_n)^2} \\ + \frac{D(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^2}{G(W_n)^2\tilde{g}(W_n)^2} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_n\mathbf{u} > \varepsilon\tilde{g}(W_n)G(W_n)\}}.$$

On prend l'espérance de cette inégalité :

$$\mathbb{E}(\theta_n | \mathcal{F}_n) \leq -\frac{\Delta_n(\mathbf{X}_n)}{G(W_n)^{1+\varepsilon}\tilde{g}(W_n)} + \frac{\lambda + 3\varepsilon \sigma^2(\mathbf{X}_n) + \Delta_n(\mathbf{X}_n)^2}{2 G(W_n)^{2+\varepsilon}\tilde{g}(W_n)^2} \\ + c \frac{\sigma^{2+\delta}(\mathbf{X}_n)}{G(W_n)^{2+\delta}\tilde{g}(W_n)^{2+\delta}} \\ \leq \frac{\eta(1 + c_1\varepsilon)}{G(W_n)^{1+\varepsilon}} + \left(\frac{\lambda}{2} + 2\varepsilon \right) \frac{\sigma^2(\mathbf{X}_n)}{G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{2+\varepsilon}\tilde{g}(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^2} \\ + c \frac{\sigma^{2+\delta}(\mathbf{X}_n)}{G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{2+\delta}\tilde{g}(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{2+\delta}}.$$

On utilise maintenant que $\sigma^2(\mathbf{X}_n) \sim \tilde{\sigma}^2(\mathbf{X}_n\mathbf{u})$ d'après (A'2) et on obtient

$$\mathbb{E}(\theta_n | \mathcal{F}_n) \leq \left(\frac{\lambda}{2} + 2\varepsilon \right) \beta G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{-1-\varepsilon} + cG(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{-1-\delta/2} \\ \leq (\lambda\beta/2 + (2\beta + 2)\varepsilon) G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{-1-\varepsilon}.$$

Comme $\lambda\beta < 2$, si on prend ε suffisamment petit, on a

$$\mathbb{E}(\theta_n | \mathcal{F}_n) \leq (1 - 2\varepsilon)G(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{-1-\varepsilon}.$$

Posons maintenant $f(x) = \varepsilon^{-1}G(x)^{-\varepsilon}$.

On va prouver que pour $\mathbf{X}_n \mathbf{u}$ et $\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}$ suffisamment grand, on a

$$f(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}) \leq f(W_n) + \theta_n.$$

Si $|\xi_n \mathbf{u}| > \varepsilon \tilde{g}(W_n)G(W_n)$ et $\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}$ sont suffisamment grands, alors

$$f(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}) \leq 1 = \theta_n \leq f(W_n) + \theta_n.$$

Si $|\xi_n \mathbf{u}| \leq \varepsilon \tilde{g}(W_n)G(W_n)$, comme $\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u} = W_n + \Delta_n(\mathbf{X}_n) + \xi_n \mathbf{u}$, alors

$$f(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}) = f(W_n) - \frac{\Delta_n(\mathbf{X}_n) + \xi_n \mathbf{u}}{G(W_n)^{1+\varepsilon} \tilde{g}(W_n)} + \frac{1}{2} f''(V_n) (\Delta_n(\mathbf{X}_n) + \xi_n \mathbf{u})^2.$$

Comme

$$|V_n - W_n| \leq |\Delta_n(\mathbf{X}_n) + \xi_n \mathbf{u}| \leq 2\varepsilon \tilde{g}(\mathbf{X}_n \mathbf{u})G(\mathbf{X}_n \mathbf{u}),$$

ainsi

$$\begin{aligned} f''(V_n) &= G(V_n)^{-2-\varepsilon} \tilde{g}(V_n)^{-2} (1 + \varepsilon + \tilde{g}'(V_n)G(V_n)) \\ &\leq G(V_n)^{-2-\varepsilon} \tilde{g}(V_n)^{-2} (2\varepsilon + \lambda) \\ &\leq G(W_n)^{-2-\varepsilon} \tilde{g}(W_n)^{-2} (\lambda + 3\varepsilon). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$f(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}) \leq f(W_n) + \theta_n.$$

On sait que

$$\begin{aligned} f(W_n) &= f(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) - G(U_n)^{-1-\varepsilon} \frac{\tilde{g}(\mathbf{X}_n \mathbf{u})}{\tilde{g}(U_n)} \\ &\leq f(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) - (1 - \varepsilon)G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq U_n \leq W_n$.

Comme $f(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) = \varepsilon^{-1}G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\varepsilon}$, on obtient que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u}) &\leq f(W_n) + \theta_n \\ &\leq f(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) - (1 - \varepsilon)G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-1-\varepsilon} + \theta_n \\ &\leq f(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) + \theta_n - \mathbb{E}(\theta_n | \mathcal{F}_n) - \varepsilon G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.8. $\exists \kappa < 1$ tel que $\xi_n \mathbf{u} = o(G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\kappa \tilde{g}(\mathbf{X}_n \mathbf{u}))$ p.s. sur E_∞ .

Démonstration. Soit

$$M_n = \sum_{k=0}^n \theta_k - \mathbb{E}(\theta_k | \mathcal{F}_k).$$

Par construction, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\theta_n| \leq C$. Par un théorème de martingale, on sait que presque-sûrement soit $\liminf M_n = -\infty$ soit M_n converge

vers une limite finie. Soit N un entier aléatoire tel que sur E_∞ , $\mathbf{X}_n \mathbf{u} \geq R > 1$ pour tout $n \geq N$. D'après le Lemme 3.7, si $n \geq N$ alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varepsilon^{-1} G(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^{-\varepsilon} \leq \varepsilon^{-1} G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-\varepsilon} + M_n - M_{N-1} - \varepsilon \sum_{k=N}^n G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})^{-1-\varepsilon} \\ &\leq \varepsilon^{-1} G(\mathbf{X}_N \mathbf{u}) + M_n - M_{N-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on ne peut pas avoir $\liminf M_n = -\infty$, et donc M_n converge presque sûrement sur E_∞ . En conséquence

$$\sum_{k=N}^{\infty} G(\mathbf{X}_k \mathbf{u})^{-1-\varepsilon} < \infty, \quad \text{p.s. sur } E_\infty.$$

Soit $\kappa \in (0, 1)$, par l'inégalité de Markov, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\xi_n \mathbf{u}| \geq \tilde{g}(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\kappa | \mathcal{F}_n) &\leq C \frac{\sigma^{2+\delta}(\mathbf{X}_n)}{\tilde{g}(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{2+\delta} G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\kappa(2+\delta)}} \\ &\leq C G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{(2+\delta)(1/2-\kappa)}. \end{aligned}$$

Si on choisit κ suffisamment proche de 1, alors $(2 + \delta)(1/2 - \kappa) < -1$ et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|\xi_n| \geq \tilde{g}(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) G(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^\kappa | \mathcal{F}_n) < \infty.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Chapitre 4

Temps d’extinction et temps d’atteinte de compacts dans le cas récurrent

Le but de ce chapitre est de donner un encadrement de la queue du temps d’atteinte d’ensembles compacts des processus stochastiques de croissance, étudiés dans les chapitres précédents, lorsque $\mathbb{P}(\|X_n\| \rightarrow \infty) = 0$. Nous nous intéressons d’abord au cas de la dimension 1 qui n’avait pas été étudié auparavant, puis au cas de la dimension d lorsque la fonction $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x})$ est constante. Les deux idées principales de ce chapitre sont le fait que certaines fonctions puissances sont des fonctions de Lyapounov de notre processus et qu’en considérant une transformée de notre processus, on peut appliquer différents travaux d’Aspandiarov et al [5, 6, 7]. On obtient ainsi un encadrement de la queue du temps d’atteinte de certains intervalles compacts et si le processus est une chaîne de Markov, un critère de récurrence nulle/récurrence positive avec, dans le cas de la récurrence positive, une convergence sous-géométrique vers la mesure de probabilité invariante. Dans le cas où on a la propriété de dichotomie, on obtient un encadrement de la queue du temps d’extinction. Nous illustrerons ceci sur des processus de Galton-Watson état-dépendants.

Ce chapitre est constitué de la prépublication [2], intitulée “Slow recurrent regimes for a class of one-dimensional stochastic growth models” à laquelle on a ajouté l’extension dans le cas multitype.

4.1 Deux régimes lents pour les modèles de croissance

4.1.1 Introduction et résultats principaux

Introduction

On considère un modèle stochastique de croissance $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans \mathcal{X} , un sous-ensemble non borné de \mathbb{R}_+ , satisfaisant une équation de récurrence de la forme :

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n, \quad (4.1)$$

où g est une fonction de \mathcal{X} dans \mathbb{R}_+ et où on a presque-sûrement,

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$$

$$\mathbb{E}(\xi_n^2 | \mathcal{F}_n) = \sigma^2(X_n) < \infty,$$

où σ^2 est une fonction positive et $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est la filtration à laquelle $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est adaptée.

Si la limite suivante existe

$$\theta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)},$$

et appartient à $(-\infty, 1)$, alors Kersting a prouvé dans [36] que $\mathbb{P}(\{X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty\}) = 0$. On dit alors que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente, en adoptant la terminologie des chaînes de Markov, tandis que si $\theta \in (1, \infty)$ alors $\mathbb{P}(\{X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty\}) > 0$.

Le but de cette partie est de déterminer à quelle vitesse le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entre dans l'intervalle $[0, A]$, lorsque $X_0 = x > A > 0$ presque-sûrement. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique, on en déduit alors un critère de récurrence nulle ou de récurrence positive et dans ce cas on donne la vitesse de convergence de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers sa mesure de probabilité invariante. De plus, si on a en tête des modèles de population, où on a comme hypothèse naturelle une propriété de dichotomie, *i.e.*,

$$\mathbb{P}\left(\left\{X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty\right\}\right) + \mathbb{P}(\{\exists n \text{ tel que } X_n = 0\}) = 1,$$

on obtient une estimation précise, quasiment optimale, de la queue du temps d'extinction.

La première idée clé de cette partie est de considérer les fonctions puissances comme fonctions de Lyapounov. Kersting [36] a prouvé la récurrence et la transience en utilisant le logarithme comme fonction de Lyapounov. Néanmoins, on ne peut pas obtenir plus d'informations sur le comportement de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec la fonction logarithme. En considérant les fonctions puissances, on obtient une inégalité de la forme

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^\alpha | \mathcal{F}_n) - X_n^\alpha \leq -CX_n^{\alpha-1}g(X_n) + b\mathbb{1}_{\{X_n \leq A\}},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\alpha \in (0, 1)$, A, C et b sont des constantes positives. De cette équation, on en déduit que

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})|\mathcal{F}_n) - f(Y_n) \leq -C'f'(Y_n) + b'\mathbf{1}_{\{Y_n \leq A'\}}, \quad (4.2)$$

où Y_n est une transformée de X_n , f est une fonction croissante, A', C' et b' des constantes positives. Cette inégalité (4.2) nous permet de donner tous les comportements possibles d'une classe de modèles de croissance récurrents. Dans une série d'articles [5, 6, 7], Aspandiiarov et al. ont établi une borne supérieure et inférieure à la queue du temps d'atteinte d'un certain compact, pour une certaine classe de processus, améliorant les résultats antérieurs de Lamperti [51]. Le deuxième point clé de cette partie est d'appliquer ces résultats sur la transformée $Y_n = G(X_n)$ de notre processus afin d'obtenir ce type de bornes. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique, on donne un critère de récurrence nulle ou de récurrence positive. De plus, si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive, on obtient de [6] dans le cas d'un espace d'états dénombrable, de [13] dans le cas d'un espace d'états général, un taux de convergence sous-géométrique vers sa mesure de probabilité invariante. Ainsi, on donne une complète classification des comportements possibles des modèles de croissance récurrents. En particulier, on obtient en appliquant nos résultats un très bon encadrement de la queue du temps d'extinction d'un processus de Galton-Watson état-dépendant, ce qui, à notre connaissance, ne semble n'avoir jamais été étudié auparavant. On retrouve aussi une version faible des résultats de Zubkov [65] sur le temps de retour en zéro d'un processus de Galton-Watson critique avec immigration, ceci sans utiliser la propriété de branchement et donc les fonctions génératrices.

Cette partie est organisée comme suit : dans la prochaine sous-partie, nous énoncerons nos résultats principaux à savoir le Théorème 4.1 et le Théorème 4.2. Ensuite, dans la section 2, on énoncera et prouvera deux lemmes relativement simples mais primordiaux pour la preuve des théorèmes. La section 3 est consacrée à la preuve du Théorème 4.1. Dans la section 4, on considère dorénavant que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique et on prouve le Théorème 4.2. Dans la section 5, on donne de nombreux exemples, en particulier sur le temps d'extinction d'un processus de Galton-Watson état-dépendant. Dans les deux dernières sections, nous prouvons un lemme clé pour la borne inférieure du Théorème 4.1 et nous rappelons quelques résultats de [6] que nous utilisons tout au long de ce chapitre.

Résultats principaux

Voici la liste des hypothèses dont nous avons besoin.

Hypothèse 2.

(A1) La fonction g est positive, différentiable et $g(x) = o(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

(A2) Il existe $M > 0$, $c_1 > 0$ et $\varepsilon > 0$, tels que pour tout $x > M$, pour tout $y > (1 - \varepsilon)x$,

$$xg(x) \leq c_1 y g(y). \quad (4.3)$$

(A3) Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(|\xi_n|^{4+\delta} | \mathcal{F}_n) \leq C\sigma^{4+\delta}(X_n)$.

Commentons maintenant ces hypothèses.

L'hypothèse (A1) empêche X_n de croître géométriquement, on se focalise sur une sorte de cas critique où X_n est perturbé par un drift $g(X_n)$. Si la fonction g est définie sur un ensemble discret de \mathbb{R}_+ alors on peut considérer un prolongement différentiable g sur \mathbb{R}_+ . L'hypothèse (A2) est assez technique, elle traduit le fait que la fonction $xg(x)$ n'est pas décroissante. Nous l'utilisons en particulier dans la partie 4.1.6 pour prouver le Lemme 4.4. Si on considère $g(x) = x^\alpha$, alors cela signifie simplement que $\alpha \in [-1, 1)$. Dans [36], Kersting avait besoin de l'existence de moments d'ordre $2 + \delta$ pour montrer la récurrence de X_n . Pour des raisons techniques, que nous détaillerons dans la Remarque 4.4 de la section 4.1.6, on a ici besoin de l'existence de moments d'ordre $(4 + \delta)$ pour obtenir les bornes du Théorème 4.1.

Avant d'énoncer le théorème, on introduit deux transformations. On pose pour tout $x \geq 1$

$$G(x) = \int_1^x \frac{dy}{g(y)},$$

et pour $\alpha > 0$, on pose

$$\ell_\alpha(x) = (G^{-1}(x))^\alpha.$$

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses (A1), (A2), (A3), on suppose qu'il existe $\lambda > 0$ et $\theta \in (0, 1)$ tels que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)x}{g(x)} = 1 - \lambda \quad (4.4)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} = \theta. \quad (4.5)$$

Alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{X} \cap (A, \infty)$, pour tout α et β tels que $0 < \alpha < 1 - \theta < \beta$, il existe deux constantes C_α et C_β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{C_\beta}{\ell_\beta(n)} \leq \mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{\ell_\alpha(n)}, \quad (4.6)$$

où $\tau_A = \inf \{n \in \mathbb{N} : X_n \leq A\}$.

Remarque 4.1. *On établira la borne supérieure dans (4.6) en démontrant que $\mathbb{E}_{x_0}(\ell_\alpha(\tau_A)) < \infty$ pour tout $0 < \alpha < 1 - \theta$. Une conséquence directe de la borne inférieure de (4.6) est que $\mathbb{E}_{x_0}(\ell_\beta(\tau_A)) = \infty$ pour $\beta > 1 - \theta$ et $x_0 \in \mathcal{X} \cap (A, \infty)$. On ne sait pas si $\mathbb{E}_{x_0}(\ell_{1-\theta}(\tau_A))$ est fini ou pas.*

Remarque 4.2. Dans la preuve du théorème, on obtient des constantes explicites C_α et C_β et en particulier, la dépendance de ces constantes en x_0 .

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique, on peut alors donner un critère de récurrence nulle ou de récurrence positive et dans ce cas le taux de convergence vers la mesure invariante. On note $P(\cdot, \cdot)$ le noyau de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On traite le cas d'un espace d'états dénombrable et d'un espace d'états quelconque.

Hypothèse 3.

(A4) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ chaîne de Markov irréductible et apériodique à valeurs dans un ensemble dénombrable $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $A > 0$, $[0, A] \cap \mathcal{X}$ est fini.

(A4') $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ψ -irréductible et apériodique à valeurs dans un espace d'états général $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+$ et dont les ensembles de niveaux $[0, A] \cap \mathcal{X}$ sont des petite sets pour tout $A > 0$.

Rappelons la définition de ψ -irréductibilité (voir [56, p.84]) :

On dit que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ψ -irréductible s'il existe une mesure non triviale ψ tel que pour tout ensemble $K \subset \mathcal{X}$ et pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\psi(K) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\exists n \text{ tel que } X_n \in K) > 0, \quad (4.7)$$

et pour toute mesures φ satisfaisant (4.7), φ est absolument continue par rapport à ψ .

Théorème 4.2. On suppose (A1) à (A3) et soit (A4), soit (A4'), et que λ et θ sont définis comme dans le Théorème 4.1.

Alors, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Harris-récurrente et

i) Si $\lambda > 1 - \theta$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente nulle.

ii) Si $\lambda < 1 - \theta$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive et si on note π sa mesure de probabilité invariante, alors pour tout $\alpha \in (\lambda, 1 - \theta)$ et, si (A4) alors pour toute mesure de probabilité ν sur \mathcal{X} telle que

$$\mathbb{E}_\nu(\ell'_\alpha(\tau_A)) < \infty,$$

on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell'_\alpha(n) \|\nu P^n - \pi\|_{\text{TV}} = 0, \quad (4.8)$$

et si (A4') alors pour tout $x \in \mathcal{X}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell'_\alpha(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{TV}} = 0. \quad (4.9)$$

Remarque 4.3. Le cas $\lambda = 1 - \theta$ reste ouvert.

Exemple 4.1. On considère un modèle de croissance stochastique défini par l'équation de récurrence (4.1) avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = cx^\gamma$ et $\sigma^2(x) = dx^{1+\gamma}$ où $\gamma \in (-1, 1)$, $c > 0$ et $d > 0$. On suppose que $2c/d < 1$. Alors

- $\theta = \frac{2c}{d}$
- $\lambda = 1 - \gamma$
- $G(x) \propto x^{1-\gamma}$
- $\ell_\alpha(x) \propto x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

où $G(x) \propto x^{1-\gamma}$ signifie que $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)/x^{1-\gamma} \in \mathbb{R}_+^*$.

Par le Théorème 4.1, pour tout $\beta < 1 - \theta < \alpha$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x_0 > A$, il existe $C_\beta > 0$ et $C_\alpha > 0$ tels que

$$\frac{C_\alpha}{n^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}} \leq \mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\beta}{n^{\frac{\beta}{1-\gamma}}}.$$

Si $\gamma > \theta$ et (X_n) est une chaîne de Markov avec les hypothèses du Théorème 4.2, alors (X_n) est récurrente positive et pour tout $\alpha < 1 - \theta$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\alpha}{1-\gamma}-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{TV}} = 0,$$

où π est la mesure de probabilité invariante de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si c et d sont tous les deux fixés, alors en faisant croître γ , on peut rendre $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrente positive. En fait, le paramètre γ concerne à la fois le drift $g(x)$ et la variance $\sigma^2(x)$, en augmentant γ on les augmente tous les deux mais on en déduit que l'effet sur la variance prime.

4.1.2 Résultats préliminaires

On va énoncer et prouver quelques résultats importants qui nous seront utiles pour la preuve des Théorèmes 4.1 and 4.2. Dans le premier lemme, on prouve que $(X_{n \wedge \tau_A}^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale si $\alpha \in (0, 1 - \theta)$, et une sous-martingale si $\alpha \in (1 - \theta, 1)$.

Lemme 4.1. *On suppose (A1) et (A3) et on suppose λ et θ définis comme dans le Théorème 4.1.*

i) Si $\alpha \in (0, 1 - \theta)$, alors il existe $A > 0$, $D > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^\alpha | \mathcal{F}_n) \leq X_n^\alpha - Dg(X_n)X_n^{\alpha-1} + b\mathbb{1}_{\{X_n \leq A\}}, \text{ p.s.} \quad (4.10)$$

ii) Si $\alpha \in (1 - \theta, 1)$, alors il existe $B > 0$ et $b_1 > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^\alpha | \mathcal{F}_n) \geq X_n^\alpha - b_1\mathbb{1}_{\{X_n \leq B\}}, \text{ p.s.} \quad (4.11)$$

Démonstration. Pour $D > 0$ assez grand, on a l'inégalité

$$(1 + u)^\alpha \leq 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} u^2 + D|u|^3, \quad (4.12)$$

pour tout $u \in (-1, +\infty)$. On obtient ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $X_n > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}^\alpha | \mathcal{F}_n) &\leq \mathbb{E}\left(X_n^\alpha \left(1 + \frac{g(X_n) + \xi_n}{X_n}\right)^\alpha \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(X_n^\alpha \left(1 + \alpha \left(\frac{g(X_n) + \xi_n}{X_n}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(\frac{g(X_n) + \xi_n}{X_n}\right)^2\right) \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &\quad + \mathbb{E}\left(X_n^\alpha \left(D \left|\frac{g(X_n) + \xi_n}{X_n}\right|^3\right) \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq X_n^\alpha + \alpha \left(g(X_n) X_n^{\alpha-1} - \frac{1-\alpha}{2} \sigma^2(X_n) X_n^{\alpha-2}\right) + R_n, \text{ p.s.} \end{aligned}$$

avec

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} g(X_n)^2 X_n^{\alpha-2} + D \mathbb{E}(|g(X_n) + \xi_n|^3 X_n^{\alpha-3} | \mathcal{F}_n).$$

Par l'inégalité de Hölder et (A3),

$$R_n \leq \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} g(X_n)^2 X_n^{\alpha-2} + D' |g(X_n)|^3 X_n^{\alpha-3} + D'' \sigma^3(X_n) X_n^{\alpha-3}, \text{ p.s.}$$

Mais $\sigma^3(x)x^{\alpha-3} = o(g(x)x^{\alpha-1})$ lorsque x tend vers l'infini, donc il existe $C, B, b > 0$ tels que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^\alpha | \mathcal{F}_n) \leq X_n^\alpha - C g(X_n) X_n^{\alpha-1} + b \mathbf{1}_{\{X_n \leq B\}}, \text{ p.s.}$$

Comme il existe une constante positive D telle que

$$(1+u)^\alpha \geq 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 - D|u|^3,$$

pour tout $u \in (-1, +\infty)$, la preuve de (4.11) est similaire. \square

Les deux premiers points du prochain lemme, à l'aide du lemme précédent, nous permettent de mieux comprendre le critère du Théorème 4.2, *i.e.*, la comparaison entre λ et $1 - \theta$. Certains points de ce lemme sont énoncés et prouvés dans [37].

Lemme 4.2.

On suppose (A1) et que λ est défini comme dans (4.4).

1. Pour $\alpha \in (0, \lambda)$, la fonction ℓ_α est ultimement concave.
2. Pour $\alpha \in (\lambda, +\infty)$, la fonction ℓ_α es ultimement convexe.
3. On a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{G(x)g(x)} = \lambda. \tag{4.13}$$

4. Pour tout $\mu < \lambda$,

$$g(x) = o(x^{1-\mu}), \tag{4.14}$$

lorsque x tend vers l'infini.

5. Soit $\alpha > 0$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une constante positive A_r telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$A_r \ell_\alpha(x) \geq \ell_\alpha(rx). \quad (4.15)$$

Démonstration. On prouve d'abord les points 1 et 2. Nous rappelons qu'une fonction f est ultimement concave ou ultimement convexe si il exists $x_0 > 0$ tel que la restriction de f sur $[x_0, \infty)$ est concave ou convexe respectivement. La dérivée seconde de ℓ_α est

$$\alpha g(G^{-1}(x))G^{-1}(x)^{\alpha-2} (g'(G^{-1}(x))G^{-1}(x) + (\alpha - 1)g(G^{-1}(x))).$$

Par le changement de variables $u = G^{-1}(x)$, on obtient que pour x assez grand, $\ell_\alpha'''(x) < 0$ si $\alpha \in (0, \lambda)$ et $\ell_\alpha'''(x) > 0$ si $\alpha \in (\lambda, +\infty)$.

On renvoie à [37] pour la preuve du point 3.

Prouvons maintenant le point 4. Comme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)x}{g(x)} = 1 - \lambda,$$

on a que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante M telle que pour tout $x > M$,

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \leq \frac{1 - \lambda + \varepsilon}{x}.$$

En intégrant cette inégalité entre M et $v > M$, on obtient que

$$g(v) \leq \left(\frac{v}{M}\right)^{1-\lambda+\varepsilon} g(M), \quad (4.16)$$

donc $g(x) = o(x^{1-\mu})$ pour tout $\mu < \lambda$.

On termine la preuve du lemme par la preuve du point 5. Si $r \leq 1$, alors, comme ℓ_α est une fonction croissante, on prend $A_r = 1$.

On suppose maintenant que $r > 1$. Soit $A_r > 1$ que l'on fixera plus tard. Par (4.16), on a que pour x assez grand

$$g(A_r x) \leq A_r^{1-\lambda/2} g(x). \quad (4.17)$$

Par (4.13), on sait que pour x assez grand

$$\lambda/2 \leq \frac{x}{G(x)g(x)} \leq 2\lambda.$$

En appliquant cet inégalité deux fois, pour x et $A_r x$, et par (4.17), on obtient

$$\begin{aligned} 2\lambda G(A_r x) &\geq \frac{A_r x}{g(A_r x)} \geq \frac{x A_r^{\lambda/2}}{g(x)} \\ &\geq G(x) A_r^{\lambda/2} \lambda/2. \end{aligned}$$

On pose $A_r = (4r)^{2/\lambda}$ et ainsi, pour tout x suffisamment grand,

$$rG(x) \leq G(A_r x).$$

En posant $y = G(x)$ et en composant cette inégalité par ℓ_α , qui est croissante, on obtient (4.15) \square

4.1.3 Encadrement polynomial de la queue du temps d'attente d'un compact

Le but de cette partie est de prouver le Théorème 4.1.

On montre d'abord la borne supérieure de l'inégalité (4.6) à l'aide des Théorème 2 et Théorème 3 de [6], que nous rappelons dans la partie 4.1.7.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des fonctions à valeurs réelles positives f telles qu'il existe une constante positive A_f telle que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} \leq A_f.$$

Pour toute fonction à valeurs réelles $h \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ telle que h est croissante dans un voisinage de l'infini, h' est décroissante dans un voisinage de l'infini et $h'(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$, on pose \mathcal{B}_h l'ensemble des fonctions à valeurs réelles positives $f \in \mathcal{C}^2(0, \infty)$ concaves au voisinage de l'infini, telles que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, et telles que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{f'(x) dx}{h \circ r(x)} \quad \text{converge,} \quad (4.18)$$

où $r(x) = \sup\{y \geq A, f'(x) = h'(y)\}$ pour A fixé tel que sur $[A, \infty)$, f est concave, h est croissante et h' décroissante.

Proposition 4.1. *On suppose (A1) et (A3) et que λ et θ sont définis comme dans le Théorème 4.1. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x_0 > A$, γ et η tels que $\gamma < \eta < 1 - \theta$, il existe une constante $K(\gamma, \eta)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \leq \frac{K(\gamma, \eta)x_0^\eta}{\ell_\gamma(n)}.$$

Démonstration. Si $\gamma > \lambda$, alors ℓ_γ est ultimement convexe. On sait par (4.15) que $\ell_\gamma \in \mathcal{A}$ et on applique alors le Théorème 4.4 et on obtient la borne supérieure par l'inégalité de Tchebychev.

Si $\eta < \lambda$, alors ℓ_η est ultimement concave. Pour pouvoir appliquer le Théorème 4.5 avec $f = \ell_\gamma$ et $h = \ell_\eta$, on a besoin de vérifier que l'intégrale (4.18) converge. Soit $r(x) = \sup\{y \geq A, \ell'_\gamma(x) = \ell'_\eta(y)\}$. On montre d'abord que pour x assez grand, on a que $x \leq r(x)$.

On rappelle que $\ell'_\gamma(x) = \gamma g(G^{-1}(x))(G^{-1}(x))^{\gamma-1}$. Ainsi,

$$\frac{\ell'_\gamma(x)}{\ell'_\eta(x)} = \frac{\gamma}{\eta} (G^{-1}(x))^{\gamma-\eta} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Comme $G^{-1}(x)$ tend vers l'infini en croissant, il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $x > A_1$, $\ell'_\gamma(x) \leq \ell'_\eta(x)$ et ainsi, pour tout $x > A_1$, $r(x) \geq x$.

Comme ℓ_η est une fonction croissante, on obtient par changement de variables

$$\begin{aligned} \int^\infty \frac{\ell'_\gamma(x) dx}{\ell_\eta \circ r(x)} &\leq \int^\infty \frac{\ell'_\gamma(x) dx}{\ell_\eta(x)} \\ &\leq \int^\infty \frac{\ell'_\gamma(x) dx}{(\ell_\gamma(x))^{\eta/\gamma}} \\ &\leq C \int^\infty \frac{du}{u^{\eta/\gamma}} < \infty. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la borne supérieur par l'inégalité de Tchebychev. \square

Avant de prouver la borne inférieure du Théorème 4.1, on rappelle un lemme important de [7] :

Lemme 4.3. *Soit Y_n un processus stochastique \mathcal{F}_n -adapté à valeurs dans une sous-ensemble non borné de \mathbb{R}_+ . On suppose qu'il existe des constantes positives A, C et D telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, sur l'événement $\{\tau_A > n\}$, où $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, Y_n \in [0, A]\}$,*

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n) \geq -C$$

et, pour un certain $r > 1$,

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}^r - Y_n^r | \mathcal{F}_n) \leq D Y_n^{r-1}.$$

Ainsi, pour tout $\nu \in (0, 1)$, il existe des constantes positives ε et d qui ne dépendent pas de A , telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, sur l'événement $\{Y_{n \wedge \tau_A} > A(1 + d)\}$,

$$\mathbb{P}(\tau_A > n + \varepsilon Y_{n \wedge \tau_A}) \geq 1 - \nu.$$

Le prochain lemme est crucial. On reporte sa preuve dans la partie 4.1.6 :

Lemme 4.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $Y_n = G(X_n)$. On suppose que l'on a (A1), (A2), (A3) et que λ et θ sont définis comme dans le Théorème 4.1. Ainsi, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le Lemme 4.3.*

Proposition 4.2. *On suppose que l'on a (A1), (A2) et (A3). Soit $\beta > 1 - \theta$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x_0 > A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \geq C \frac{x_0^\beta - A^\beta}{\ell_\beta(n/\varepsilon_0)}.$$

Démonstration. La preuve de la borne inférieure se déroule ainsi : on sait par le Lemme 4.4 que Y_n vérifie le Lemme 4.3 et ainsi, on reprend la preuve du Théorème 1 de [5]. On relâche l'hypothèse de sauts bornés de ce théorème en utilisant l'inégalité de Hölder.

Soit $\beta > 1 - \theta$.

Par le Lemme 4.4, on sait que l'on peut appliquer le Lemme 4.3 à $Y_n = G(X_n)$. Par les lemmes 4.3 et 4.4, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $d > 0$ tels que pour tout n :

$$\mathbb{P}(\tau_A > n + \varepsilon_0 Y_{n \wedge \tau_A} | \mathcal{F}_n) \geq 1 - v \quad \text{sur } \{Y_{n \wedge \tau_A} > G(A)(1 + d)\}.$$

Ceci implique que pour tout temps d'arrêt μ on a que

$$\mathbb{P}(\tau_A > \mu + \varepsilon_0 Y_{\mu \wedge \tau_A} | \mathcal{F}_\mu) \geq 1 - v \quad \text{sur } \{Y_{\mu \wedge \tau_A} > G(A)(1 + d)\} \cap \{\mu < \infty\}.$$

Pour tout $S > 0$, on pose

$$\tilde{\tau}_S = \inf \{n \geq 0, Y_n \geq S\}.$$

Fixons B tel que $B > G(A)(1 + d)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_A \geq \varepsilon_0 B) &\geq \mathbb{P}(\tau_A > \tilde{\tau}_B + \varepsilon_0 Y_{\tilde{\tau}_B \wedge \tau_A}, \tilde{\tau}_B < \tau_A) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_B < \tau_A\}} \mathbb{P}(\tau_A > \tilde{\tau}_B + \varepsilon_0 Y_{\tilde{\tau}_B \wedge \tau_A} | \mathcal{F}_{\tilde{\tau}_B})) \\ &\geq (1 - v) \mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Comme $(\tau_A \wedge \tilde{\tau}_B) < \infty$ et $\ell_\beta(Y_{n \wedge \tau_A \wedge \tilde{\tau}_B})$ est une sous-martingale par le Lemme 4.1, on a que

$$x_0^\beta = \ell_\beta(Y_0) \leq \mathbb{E}(\ell_\beta(Y_{\tau_A \wedge \tilde{\tau}_B})).$$

Comme $g(x) = o(x)$, il existe $K > 0$ tel que $\mathbb{E}(\ell_1(Y_{\tilde{\tau}_B-1}) + g(X_{\tilde{\tau}_B-1})) \leq K^{1/\beta} \mathbb{E}(X_{\tilde{\tau}_B-1})$ et ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ell_\beta(Y_{\tilde{\tau}_B}) \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_B < \tau_A\}}) &\leq \mathbb{E}(\ell_1(Y_{\tilde{\tau}_B}))^\beta \mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(\ell_1(Y_{\tilde{\tau}_B}) | \mathcal{F}_{\tilde{\tau}_B-1}))^\beta \mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A) \\ &\leq \mathbb{E}(\ell_1(Y_{\tilde{\tau}_B-1}) + g(X_{\tilde{\tau}_B-1}))^\beta \mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A) \\ &\leq K \ell_\beta(B) \mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} x_0^\beta &\leq \mathbb{E}(\ell_\beta(Y_{\tau_A}) \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_B > \tau_A\}}) + \mathbb{E}(\ell_\beta(Y_{\tilde{\tau}_B}) \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_B < \tau_A\}}) \\ &\leq \ell_\beta(G(A)) + K \ell_\beta(B) \mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A), \end{aligned}$$

par (4.20) et

$$\mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A) \geq \frac{x_0^\beta - \ell_\beta(G(A))}{K \ell_\beta(B)}.$$

Ainsi, par (4.19), pour $n > \varepsilon_0 G(A)(1 + \delta)$,

$$\mathbb{P}(\tau_A > n) \geq (1 - v) \frac{x_0^\beta - A^\beta}{K \ell_\beta(n/\varepsilon_0)}. \tag{4.21}$$

□

Preuve du Théorème 4.1. La borne supérieure est une conséquence directe de la Proposition 4.1. La borne inférieure vient de la Proposition 4.2 et de (4.15). □

4.1.4 Le cas markovien : taux de convergence sous-géométrique

Dans cette partie, on prouve le Théorème 4.2 premièrement dans le cas d'un espace d'états dénombrable et deuxièmement dans le cas d'un espace d'états général. Nous allons utiliser quelques résultats de [6] que nous rappelons en appendice.

Soit \mathcal{G} l'ensemble des fonctions à valeurs réelles positives f telles qu'il existe une fonction positive h telle que $h(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$ et une constante $c > 0$ telle que pour tout entier $m \geq 1$, $x_1 \geq 1, \dots, x_m \geq 1$,

$$f\left(\sum_{k=1}^m x_k\right) \leq c \exp(mh(m)) \sum_{k=1}^m f(x_k).$$

Soit \mathcal{G}' l'ensemble des fonctions croissantes au voisinage de l'infini f telles que $\ln(f(x))/x$ est décroissante au voisinage de l'infini et tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

Preuve du Théorème 4.2 pour un espace d'états dénombrable. Soit A défini comme dans le Théorème 4.1. On sait par (A4) que $F = [0, A] \cap \mathcal{X}$ est fini. Premièrement, on peut remarquer que pour tout $z \in F$, on a par la propriété de Markov que

$$\mathbb{E}_z(\tau_F) = \mathbb{P}_z(X_1 \in F) + \sum_{s \in \mathcal{X} \setminus F} \mathbb{P}_z(X_1 = s) \mathbb{E}_s(\tau_F). \quad (4.22)$$

i) Supposons que $\lambda > 1 - \theta$. On va prouver que pour tout $s \in \mathcal{X} \setminus F$, $\mathbb{E}_s(\tau_F) = \infty$. Soit $\beta \in (1 - \theta, \lambda)$. Par le Théorème 4.1 on sait que si $\sum 1/\ell_\beta(n)$ diverge, alors $\mathbb{E}_s(\tau_F) = \infty$, pour tout $s \in \mathcal{X} \setminus F$. La somme $\sum 1/\ell_\beta(n)$, est de même nature que l'intégrale $\int dx/\ell_\beta(x)$. En faisant le changement de variable $u = G^{-1}(x)$, on obtient

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{dx}{\ell_\beta(x)} = \int_{\cdot}^{\infty} \frac{du}{u^\beta g(u)}.$$

Mais pour u assez grand,

$$\frac{1}{u^\beta g(u)} \geq \frac{K}{u^{\beta+1-\lambda+(\lambda-\beta)/2}}$$

et comme $\beta < \lambda$, on a que

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{dx}{\ell_\beta(x)} = \infty.$$

Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible, il existe $z_0 \in F$ tel qu'il existe $s_0 \in \mathcal{X} \setminus F$ tel que $\mathbb{P}_{z_0}(X_1 = s_0) > 0$. Dès lors, $\mathbb{E}_{z_0}(\tau_F) = \infty$ et par la Proposition 4.7 $\mathbb{E}_{z_0}(\tau) = \infty$, et donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente nulle.

ii) On suppose maintenant que $\lambda < 1 - \theta$. Soit $\eta \in (\lambda, 1 - \theta)$. On va d'abord montrer qu'il existe une constante positive K telle que pour tout $s \in \mathcal{X} \setminus F$, $\mathbb{E}_s(\tau_F) \leq Ks^\eta$. Soit $\gamma \in (\lambda, \eta)$. Par la Proposition 4.1, on sait que

$$\mathbb{P}_s(\tau_F > n) \leq \frac{K(\gamma, \eta)s^\eta}{\ell_\gamma(n)}.$$

On va vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\ell_{\gamma}(n) < \infty$. Comme ℓ_{η} est convexe, il existe une constante C telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell_{\gamma}(n)} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell'_{\eta}(n)}{\ell_{\gamma}(n)}.$$

Cette série est de même nature que l'intégrale

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{\ell'_{\eta}(x) dx}{\ell_{\gamma}(x)} = \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\ell'_{\eta}(x) dx}{\ell_{\eta}(x)^{\gamma/\eta}}.$$

En faisant le changement de variable $u = \ell_{\eta}(x)$, cette dernière intégrale est en fait égale à

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{du}{u^{\gamma/\eta}} < \infty,$$

et donc

$$\mathbb{E}_s(\tau_F) \leq K s^{\eta}. \quad (4.23)$$

Par (4.23) et (4.22), on obtient donc que

$$\mathbb{E}_z(\tau_F) \leq 1 + K \mathbb{E}_z(X_1^{\eta}) < \infty,$$

et ainsi, par la Proposition 4.7, pour tout $z \in F$, $\mathbb{E}_z(\tau) < \infty$ et on conclut que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive.

Soit $\alpha \in (\lambda, 1 - \theta)$ et $\beta \in (\alpha, 1 - \theta)$. Pour appliquer le Théorème 4.6 avec $f = \ell_{\alpha}$ et $\phi = \ell_{\beta}$, on a besoin de vérifier que $\ell_{\alpha} \in \mathcal{G}$ et $\ell'_{\alpha} \in \mathcal{G}'$. Comme ℓ_{α} est convexe, on a que pour tout $m \geq 1$, $x_1 \geq 1, \dots, x_m \geq 1$

$$\ell_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^m x_k \right) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ell_{\alpha}(m x_k),$$

et par 5 du Lemme 4.2,

$$\ell_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^m x_k \right) \leq \frac{(4m)^{2\alpha/\lambda}}{m} \sum_{k=1}^m \ell_{\alpha}(x_k) \leq 4^{2\alpha/\lambda} \exp^{(2\alpha/\lambda-1)\ln(m)} \sum_{k=1}^m \ell_{\alpha}(x_k),$$

ainsi $\ell_{\alpha} \in \mathcal{G}$.

On rappelle que $\ell'_{\alpha}(x) = \alpha g(G^{-1}(x))(G^{-1}(x))^{\alpha-1}$. Comme $G^{-1}(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ et $\alpha - 1 < 0$, on a juste besoin de montrer que

$$\frac{\ln(g(G^{-1}(x)))}{x} \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow \infty.$$

Par le changement de variable $u = G^{-1}(x)$ et comme $g(x) = \mathcal{O}(x^{1-\mu})$ pour tout $\mu < \lambda$ d'après 4 du Lemme 4.2, on obtient que $x^{\mu} = \mathcal{O}(G(x))$ et ainsi $\ell'_{\alpha}(x)/\ln(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$, dès lors $\ell'_{\alpha} \in \mathcal{G}'$. Ce qui finit la preuve. \square

Dans le cas d'un espace d'états général, on va utiliser une condition de drift donnée dans [13] :

Définition 4.1. On dit que la condition $\mathbf{D}(\phi, V, \Gamma)$ est vérifiée s'il existe une fonction V , une fonction concave croissante différentiable $\phi : [1, \infty) \mapsto (0, \infty]$, un ensemble mesurable Γ et une constante b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}_x(V(X_1)) + \phi \circ V(x) \leq V(x) + b\mathbf{1}_{\{x \in \Gamma\}}.$$

Proposition 4.3 (Proposition 2.5 [13]). Soit P un noyau de transition ψ -irréductible et apériodique. On suppose que $\mathbf{D}(\phi, V, \Gamma)$ est vraie pour une certaine fonction ϕ telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi'(t) = 0$, un petite set Γ et une fonction V telle que $\{V < \infty\} \neq \emptyset$. Ainsi, il existe une mesure de probabilité invariante π , et pour tout x dans l'ensemble plein et absorbant $\{V < \infty\}$, i.e. $\pi(\{V < \infty\}) = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_\phi(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{TV}} = 0,$$

$$\text{où } r_\phi(x) = \phi \circ \Phi^{-1}(x) \text{ et } \Phi(x) = \int_1^x \frac{du}{\phi(u)}.$$

La preuve du Théorème 4.2 consiste essentiellement à vérifier que la condition $\mathbf{D}(\phi, V, \Gamma)$ est vraie.

On rappelle aussi que l'on dit qu'un ensemble C est régulier si pour tout ensemble B tel que $\psi(B) > 0$, alors

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x(\tau_B) < \infty,$$

où τ_B est le temps d'atteinte de l'ensemble B . Une chaîne de Markov est dite régulière s'il existe un recouvrement dénombrable de \mathcal{X} par des ensembles réguliers.

Preuve du Théorème 4.2. Comme $[0, A] \cap \mathcal{X}$ est petite et comme pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\mathbb{P}_x(\tau_A < \infty) = 1$, on sait d'après [56, Proposition 9.1.7 p.205] que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Harris-récurrente.

i) On suppose que $\lambda > 1 - \theta$. D'après le Théorème 4.1, $\forall x \in (A, \infty) \cap \mathcal{X}$, $\mathbb{E}_x(\tau_A) = \infty$. Supposons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive afin d'obtenir une contradiction. D'après [56, Theorem 11.1.4 p.260], on sait qu'il existe une décomposition $\mathcal{X} = \mathcal{S} \cup \mathcal{N}$ avec \mathcal{S} plein et absorbant et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ restreinte à \mathcal{S} est régulière. Comme \mathcal{S} est absorbant, on sait que $[0, A] \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ et $(A, \infty) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. Soit $C \subset \mathcal{S}$ un ensemble régulier du recouvrement dénombrable de \mathcal{S} tel que $C \cap (A, \infty) \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $x \in C \cap (A, \infty)$, et on sait que $\mathbb{E}_x(\tau_A) = \infty$ ce qui contredit le fait que C est régulier. Ainsi $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas récurrente positive mais donc récurrente nulle.

ii) On suppose que $\lambda < 1 - \theta$. Soit $\alpha \in (\lambda, 1 - \theta)$ et $\phi(x) = g(x^{\frac{1}{\alpha}}) x^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$. D'après le Lemme 4.1,

$$\mathbb{E}_x(X_1^\alpha) \leq x^\alpha - C\phi(x^\alpha) + b\mathbf{1}_{\{x \leq A\}}.$$

On va maintenant montrer que ϕ est une fonction concave croissante.

On calcule d'abord la dérivée de ϕ :

$$\phi'(x) = \frac{g'(x^{1/\alpha})}{\alpha} - \frac{1 - \alpha}{\alpha x^{1/\alpha}}.$$

Pour x assez grande, en utilisant (4.4), on obtient que

$$\phi'(x) = \left(\frac{1-\lambda}{\alpha} g(x^{1/\alpha}) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) x^{-1/\alpha} + o\left(\frac{g(x^{1/\alpha})}{x^{1/\alpha}} \right).$$

D'après (4.4) et comme $1-\lambda > 0$, on sait que g' est ultimement strictement positive et que g tend vers l'infini. Ainsi, ϕ' est ultimement positive, décroissante et tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini (car $g(x) = o(x)$). Dès lors, la condition $\mathbf{D}(\phi, V, \Gamma)$ est vérifiée. Un rapide calcul nous montre que $r_\phi(x) = \ell'_\alpha(x)$. Comme $[0, A] \cap \mathcal{X}$ est *petite* par hypothèse, on applique la Proposition 4.3 et il existe une mesure de probabilité invariante π telle que pour tout x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell'_\alpha(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{TV}} = 0.$$

□

4.1.5 Exemples

On va maintenant illustrer nos résultats en appliquant les Théorème 4.1 et Théorème 4.8 à plusieurs modèles.

Marches de Bessel

Une marche de Bessel est une marche aléatoire sur \mathbb{N} , réfléchissant en 0, avec des pas de ± 1 et des probabilités de transition de la forme

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x+1 | X_n = x) = p_x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

et

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x-1 | X_n = x) = 1 - p_x$$

où $x \geq 1$, $\delta \in \mathbb{R}$ et la notation $o(1/x)$ est pour lorsque x tend vers l'infini. Une marche de Bessel est récurrente si $\delta > -1$, récurrente positive si $\delta > 1$ et transiente si $\delta < -1$.

On suppose ici que $\delta \in (-1, 0)$ et que $x \mapsto g(x) := \frac{-\delta}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est à valeurs dans R_+ . Il existe $A > 0$ tel que l'on obtienne un bon encadrement de la queue du temps d'atteinte du compact $[0, A]$.

Proposition 4.4. *Pour tout α, β tels que $\alpha < 1 + \delta < \beta$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x_0 > A$, il existe deux constantes positives C_α et C_β telles que*

$$\frac{C_\beta}{n^{\beta/2}} \leq \mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{n^{\alpha/2}}.$$

Pour des résultats plus précis sur les marches de Bessel et en particulier les comportements asymptotiques de $\mathbb{P}_x(\tau_0 > n)$ et $\mathbb{P}_x(\tau_0 = n)$, on renvoie le lecteur vers [3].

Processus de Galton-Watson critique avec immigration

On considère un processus de Galton-Watson critique avec immigration $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \xi_{k,n} + I_n,$$

où $(\xi_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières telles que $\mathbb{P}(\xi_{1,1} = 0) > 0$, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}) = 1$, $\text{Var}(\xi_{1,1}) = d > 0$ et $\mathbb{E}(\xi_{1,1}^{4+\delta}) < \infty$ pour un certain $\delta > 0$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières telles que $\mathbb{P}(I_1 = 0) > 0$, $\mathbb{E}(I_1) = c > 0$, $\mathbb{E}(I_1^{4+\delta}) < \infty$ et on suppose que les variables $(\xi_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes. On suppose aussi que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible et apériodique (c'est par exemple le cas lorsqu'on a en plus des hypothèse précédentes $\mathbb{P}(\xi_{1,1} = 1) > 0$ et $\mathbb{P}(I_1 = 1) > 0$)

Zubkov a prouvé dans [65] que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si $\theta = \frac{2c}{d} < 1$ et donna le comportement asymptotique de la queue du temps de retour en zéro $T_0 = \inf\{n \geq 1 \text{ tel que } X_n = 0\}$:

$$\mathbb{P}_0(T_0 > n) \sim L(n)n^{\theta-1},$$

où L est une fonction à variation lente. Il avait aussi besoin de conditions moins fortes sur les moments de $\xi_{1,1}$ et I_1 .

On retrouve ici une version faible de son résultat mais sans utiliser la propriété de branchement et donc l'outil puissant que sont les fonctions génératrices.

Proposition 4.5. *Il existe $A > 0$, tel que pour tout $x_0 > A$, α, β tels que $\alpha < 1 - \theta < \beta$, il existe deux constantes positives C_α et C_β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{C_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{n^\alpha}.$$

Temps d'extinction d'un processus de Galton-Watson état-dépendant

Les processus de Galton-Watson état-dépendant ont été introduits par Klebaner dans [41] et Höpfner dans [27]. Ils ont tous les deux donné ds conditions d'extinction presque-sûre et de convergence vers des lois Gamma généralisées pour ce type de processus. Néanmoins, à notre connaissance, il n'y a pas eu d'étude poussée sur le temps d'extinction de ces processus.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus de Galton-Watson état-dépendant défini ainsi :

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} A_{k,n}(X_n),$$

où $\mathbb{E}(A_{k,n}(X_n) | X_n = x) = 1 + \frac{c}{x}$ et $\text{Var}(A_{k,n}(X_n) | X_n = x) = \sigma^2 + o(1)$ où $c > 0$ et $\sigma^2 > 0$. On suppose que 0 est un état absorbant et que pour tout $A > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $k_A \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\mathbb{P}(X_{n+k_A} = 0 | X_n \leq A) \geq \varepsilon. \quad (4.24)$$

Cette hypothèse implique la propriété de dichotomie (voir Théorème 3.1 dans [31]), c'est à dire,

$$\mathbb{P}(\{\exists n \text{ tel que } X_n = 0\}) + \mathbb{P}\left(\left\{X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty\right\}\right) = 1.$$

On note $\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n = 0\}$ le temps d'extinction.

Théorème 4.3. *Soit $\theta = \frac{2c}{\sigma^2}$ et supposons que $\theta \in (0, 1)$. Alors, pour tout $\alpha < 1 - \theta < \beta$, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, il existe deux constantes D_α et D_β telles que*

$$\frac{D_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_x(\tau_0 > n) \leq \frac{D_\alpha}{n^\alpha}.$$

Démonstration. Soit α et β tels que $\alpha < 1 - \theta < \beta$. On applique le Théorème 4.1 et il existe donc $A > 0$, tel que pour tout $x > A$, il existe $C_\alpha > 0$ et $C_\beta > 0$ tels que

$$\frac{C_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_x(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{n^\alpha}.$$

Comme $\{0\} \subset [0, A]$, on a que $\mathbb{P}_x(\tau_A > n) \leq \mathbb{P}_x(\tau_0 > n)$ et on obtient immédiatement que

$$\frac{C_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_x(\tau_A > n) \leq \mathbb{P}_x(\tau_0 > n).$$

Soit $(T_\ell)_{\ell \geq 0}$ une suite de temps d'arrêt définis ainsi

$$T_\ell = \inf\{n \geq k_A + T_{\ell-1} \text{ tel que } X_n \in [0, A]\},$$

avec $T_0 = 1$ et k_A est l'entier associé à A dans (4.24). D'après (4.24), on obtient que

$$\mathbb{P}_x(\tau_0 > T_\ell) \leq (1 - \varepsilon)^\ell.$$

Pour $\alpha \in (0, 1 - \theta)$, on a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(\tau_0^\alpha) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{T_\ell < \tau_0 \leq T_{\ell+1}\}} \tau_0^\alpha) \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{T_\ell < \tau_0\}} T_{\ell+1}^\alpha) \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{T_\ell < \tau_0\}} (T_\ell + k_A + (T_{\ell+1} - k_A - T_\ell))^\alpha) \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{T_\ell < \tau_0\}} (T_\ell^\alpha + k_A^\alpha + (T_{\ell+1} - k_A - T_\ell)^\alpha)). \end{aligned}$$

Soit $\tau_{A,k} = \inf\{n \geq k \text{ tel que } X_n \in [0, A]\}$.

Comme $(T_{\ell+1} - k_A - T_\ell)^\alpha \leq \mathbb{E}_{X_{T_\ell+k_A}}((\tau_A)^\alpha)$, alors par récurrence, on a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(\tau_0^\alpha) &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}_x \left(\mathbb{1}_{\{T_\ell < \tau_0\}} \left(T_0^\alpha + \ell k_A^\alpha + \sum_{i=0}^{\ell} \mathbb{E}_{X_{T_i+k_A}}((\tau_A)^\alpha) \right) \right) \\ &\leq \mathbb{E}_x(T_0^\alpha) + \sum_{\ell=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^\ell \ell k_A^\alpha + \mathbb{E}_x \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_\ell < \tau_0\}} \sum_{i=0}^{\ell} \mathbb{E}_{X_{T_i+k_A}}((\tau_A)^\alpha) \right) \\ &\leq \mathbb{E}_x(T_0^\alpha) + \sum_{\ell=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^\ell \ell k_A^\alpha + \sum_{\ell=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^\ell \sup_{y \in [0, A]} \mathbb{E}_y(\tau_{A,k_A}^\alpha) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

On obtient ensuite la borne supérieure voulue pour $\mathbb{P}_x(\tau_0 > n)$ par l'inégalité de Tchebychev. \square

Un exemple non markovien

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus défini par

$$X_{n+1} = X_n + 1 + K\varepsilon_n \sqrt{R_n}$$

où $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \frac{1}{2}$, $K > 2$ et R_n est défini ainsi :

- Soit $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(N_n = i) = \frac{1}{n+1}$.
- Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telle que $\mathbb{P}(U_1 = 0) = \mathbb{P}(U_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

On suppose aussi que les suites $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes.

On pose

$$R_n = U_n \frac{X_n^2}{X_n + X_{N_n}} + (1 - U_n) \frac{X_n X_{N_n}}{X_n + X_{N_n}}.$$

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n \leq 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{n+k} = 0$.

Par construction, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov pour aucun ordre. Vérifions que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence $X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n$ avec $g \equiv 1$, $\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_n^2 | \mathcal{F}_n) = \sigma^2(X_n)$. Soit $\xi_n = \varepsilon_n K \sqrt{R_n}$. Par indépendance, on a immédiatement que $\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$. Un rapide calcul nous donne que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_n^2 | \mathcal{F}_n) &= \frac{K^2}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{X_n^2 + X_n X_k}{X_n + X_k} \\ &= \frac{K^2}{2} X_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve pour θ défini en (4.5), $\theta = \frac{4}{K^2}$. Si $K > 2$, alors on sait que $\mathbb{P}(\{X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty\}) = 0$ et on peut appliquer le Théorème 4.1 et obtenir un encadrement de la queue de distribution du temps d'atteinte de X_n du compact $[0, A]$.

Proposition 4.6. *On suppose que $K > 2$. Pour tout α et β tels que $\alpha < 1 - 4/K^2 < \beta$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$ il existe $C_\alpha > 0$ et $C_\beta > 0$ tels que*

$$\frac{C_\alpha}{n^\alpha} \leq \mathbb{P}(\tau_A > n | X_0 = x) \leq \frac{C_\beta}{n^\beta}.$$

4.1.6 Preuve du Lemme 4.4

Dans cette partie, nous montrons notre résultat clé, le Lemme 4.4.

Preuve du Lemme 4.4. On va d'abord vérifier que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la première inégalité du Lemme 4.3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((Y_{n+1} - Y_n) (\mathbf{1}_{\{\xi_n \leq -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} + \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}}) | \mathcal{F}_n) \\ &\geq -Y_n \mathbb{P}(\xi_n \leq -g(X_n) - \varepsilon X_n) \\ &\quad + \mathbb{E}((Y_{n+1} - Y_n) \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

On sait, par l'inégalité de Tchebychev que $\mathbb{P}(\xi_n \leq -g(X_n) - \varepsilon X_n) \leq \frac{C\sigma^2(X_n)}{X_n^2}$. On applique le théorème de Taylor-Lagrange

$$G(X_{n+1}) = G(X_n) + (X_{n+1} - X_n) G'(X_n) + \frac{(X_{n+1} - X_n)^2}{2} G''(V_n),$$

où V_n est entre X_n et X_{n+1} :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n) &\geq -\frac{C_1 G(X_n) \sigma^2(X_n)}{X_n^2} \\ &\quad + \mathbb{E}\left(\left(\frac{g(X_n) + \xi_n}{g(X_n)}\right) \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &\quad - \mathbb{E}\left(\frac{(g(X_n) + \xi_n)^2 g'(V_n)}{2g^2(V_n)} \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} \middle| \mathcal{F}_n\right). \end{aligned}$$

On applique le point 3 du Lemme 4.2 sur le premier terme et comme $\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$, alors on peut aisément vérifier que $\mathbb{E}(\xi_n \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n) > 0$ et par (4.4) et (4.3), il existe $K > 0$ tel que $\frac{g'(V_n)}{g^2(V_n)} \leq \frac{K}{X_n g(X_n)}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n) &\geq -C_2 - K \mathbb{E}\left(\frac{(g(X_n) + \xi_n)^2}{2g(X_n) X_n} \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &\geq -C_2 - K \frac{\sigma^2(X_n)}{2g(X_n) X_n} \\ &\geq -C_3. \end{aligned}$$

Ainsi, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la première inégalité du Lemme 4.3.

On va maintenant vérifier qu'il existe $D > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} (Y_{n+1}^2 - Y_n^2 | \mathcal{F}_n) \leq D Y_n.$$

Premièrement, on remarque que

$$\mathbb{E} (Y_{n+1}^2 - Y_n^2 | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E} ((Y_{n+1}^2 - Y_n^2) \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n).$$

Une fois de plus, on utilise le théorème de Taylor-Lagrange avec V_n entre X_n et X_{n+1} :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (Y_{n+1}^2 - Y_n^2 | \mathcal{F}_n) &\leq 2G(X_n) + \mathbb{E} \left(\frac{2\xi_n}{g(X_n)} G(X_n) \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\frac{(\xi_n + g(X_n))^2}{2} \left(\frac{2 - 2G(V_n)g'(V_n)}{g^2(V_n)} \right) \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n \right). \end{aligned}$$

Comme $G(x)g'(x) \rightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda}$, il existe $K_1 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (Y_{n+1}^2 - Y_n^2 | \mathcal{F}_n) &\leq 2Y_n - 2 \frac{Y_n}{g(X_n)} \mathbb{E} \left(\xi_n \mathbf{1}_{\{\xi_n < -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n \right) \\ &\quad + K_1 \mathbb{E} \left(\frac{(\xi_n + g(X_n))^2}{g^2(V_n)} \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n \right). \end{aligned}$$

On a une borne supérieure de $\mathbb{E} \left(\frac{(\xi_n + g(X_n))^2}{g^2(V_n)} \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n \right)$ par (4.3) et l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\frac{(\xi_n + g(X_n))^2}{g^2(V_n)} \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}} | \mathcal{F}_n \right) \\ &\leq (\mathbb{E} (|\xi_n + g(X_n)|^{4+\delta} | \mathcal{F}_n))^{2/4+\delta} \left(\mathbb{E} \left(\frac{\mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}}}{g^{2+\frac{4}{2+\delta}}(V_n)} | \mathcal{F}_n \right) \right)^{\frac{2+\delta}{4+\delta}} \\ &\leq K_2 \sigma^2(X_n) \left(\mathbb{E} \left(\frac{V_n^{2+\frac{4}{2+\delta}} \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}}}{X_n^{2+\frac{4}{2+\delta}} g^{2+\frac{4}{2+\delta}}(X_n)} | \mathcal{F}_n \right) \right)^{\frac{2+\delta}{4+\delta}} \\ &\leq K_2 \frac{\sigma^2(X_n)}{g^2(X_n)} \left(\mathbb{E} \left(\frac{X_{n+1}^{2+\frac{4}{2+\delta}} \mathbf{1}_{\{\xi_n > -g(X_n) - \varepsilon X_n\}}}{X_n^{2+\frac{4}{2+\delta}}} | \mathcal{F}_n \right) \right)^{\frac{2+\delta}{4+\delta}} \\ &\leq K_3 \frac{\sigma^2(X_n)}{g^2(X_n)}, \end{aligned}$$

car $2 + \frac{4}{2+\delta} \leq 4 + \delta$ et $\mathbb{E} \left(X_{n+1}^{2+\frac{4}{2+\delta}} | \mathcal{F}_n \right) \leq K_4 X_n^{2+\frac{4}{2+\delta}}$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (Y_{n+1}^2 - Y_n^2 | \mathcal{F}_n) &\leq 2Y_n + 2 \frac{Y_n}{g(X_n)} K X_n \mathbb{P} (\xi_n < -g(X_n) - \varepsilon X_n | \mathcal{F}_n) \\ &\quad + K_5 \frac{\sigma^2(X_n)}{g^2(X_n)}. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(\xi_n < -g(X_n) - \varepsilon X_n | \mathcal{F}_n) \leq \frac{\sigma^2(X_n)}{\varepsilon^2 X_n^2}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1}^2 - Y_n^2 | \mathcal{F}_n) &\leq 2Y_n + 2 \frac{Y_n}{g(X_n)} K X_n \frac{\sigma^2(X_n)}{\varepsilon^2 X_n^2} + K_5 \frac{\sigma^2(X_n)}{g^2(X_n)} \\ &\leq K_6 Y_n + K_7 \frac{X_n}{g(X_n)} \\ &\leq D Y_n, \end{aligned}$$

par le point 3 du Lemme 4.2, ainsi $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse du Lemme 4.3. \square

Remarque 4.4. *On peut maintenant expliquer l'hypothèse (A3) : comme on peut prendre $g(x) = 1/x$, on peut avoir $G(x) = x^2$ et ainsi $Y_n^2 = X_n^4$, donc on a bien besoin de l'existence d'un moment d'ordre 4 pour ξ_n .*

4.1.7 Résultats auxiliaires

Dans cet appendice, nous rappelons quelques résultats de [6] que nous avons appliqués dans les pages précédentes.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des fonctions à valeurs réelles positives f telles qu'il existe une constante positive A_f telle que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} \leq A_f.$$

Théorème 4.4 (Théorème 2 [6]). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique \mathcal{F}_n -adapté à valeurs dans un sous-ensemble non borné de \mathbb{R}^+ . Soit $f \in \mathcal{A}$ une fonction ultimement convexe. On suppose qu'il existe des constantes positives A_0 et ε telles que $(f(X_{n \wedge \tau_{A_0}}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale et pour tout $n \in \mathbb{N}$, sur l'événement $\{\tau_{A_0} > n\}$,*

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) - f(X_n) | \mathcal{F}_n) \leq -\varepsilon f'(X_n).$$

Ainsi, il existe une constante positive c telle que pour tout $x \geq A_0$,

$$\mathbb{E}_x(f(\tau_{A_0})) \leq c f(x).$$

Pour toute fonction à valeurs réelles $h \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ telle que h est croissante dans un voisinage de l'infini, h' est décroissante dans un voisinage de l'infini et $h'(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$, on pose \mathcal{B}_h l'ensemble des fonctions à valeurs réelles positives $f \in \mathcal{C}^2(0, \infty)$ concaves au voisinage de l'infini, telles que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, et telles que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{f'(x) dx}{h \circ r(x)} \quad \text{converge,} \quad (4.25)$$

où $r(x) = \sup\{y \geq A, f'(x) = h'(y)\}$ pour A fixé tel que sur $[A, \infty)$, f est concave, h est croissante et h' décroissante.

Théorème 4.5 (Théorème 3 [6]). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique \mathcal{F}_n -adapté à valeurs dans un sous-ensemble non borné de \mathbb{R}^+ . Soit $h \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ une fonction à valeurs réelles telle que h' est décroissante dans un voisinage de l'infini et $h'(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. On suppose qu'il existe des constantes positives A_0 et ε telles que h est croissante sur $[A_0, \infty)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, sur l'événement $\{\tau_{A_0} > n\}$*

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}) - h(X_n) | \mathcal{F}_n) \leq -\varepsilon h'(X_n).$$

Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{B}_h$, il existe des constantes positives $c, A \geq A_0$ telles que pour tout $x > A$,

$$\mathbb{E}_x(f(\tau_A)) \leq ch(x).$$

On rappelle maintenant une proposition de [6] qui nous donne un lien entre l'intégrabilité du temps de passage d'un ensemble fini et du temps de retour à l'état initial.

Proposition 4.7 (Proposition 1 [6]). *Soit F un sous-ensemble fini de \mathcal{X} , $\tau_F = \inf\{n > 0, X_n \in F\}$ le temps de passage dans F et $\tau = \inf\{n > 0, X_n = X_0\}$ le temps de retour.*

i) Si pour tout $z \in F$,

$$\mathbb{E}_z(\tau_F) < \infty,$$

alors pour tout $z \in F$, $\mathbb{E}_z(\tau) < \infty$.

ii) Si pour un certain $z_0 \in F$, on a $\mathbb{E}_{z_0}(\tau_F) = \infty$, alors $\mathbb{E}_{z_0}(\tau) = \infty$.

Le théorème suivant donne la vitesse de convergence vers la mesure de probabilité invariante de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le cas récurrent positif. On introduit d'abord deux ensembles de fonctions positives.

Soit \mathcal{G} l'ensemble des fonctions à valeurs réelles positives f telles qu'il existe une fonction positive h telle que $h(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$ et une constante $c > 0$ telle que pour tout entier $m \geq 1$, $x_1 \geq 1, \dots, x_m \geq 1$,

$$f\left(\sum_{k=1}^m x_k\right) \leq c \exp(mh(m)) \sum_{k=1}^m f(x_k).$$

Soit \mathcal{G}' l'ensemble des fonctions croissantes au voisinage de l'infini f telles que $\ln(f(x))/x$ est décroissante au voisinage de l'infini et tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

Théorème 4.6 (Théorème 3 [6]). *Soit $f \in \mathcal{G}$ telle que $f' \in \mathcal{G}'$. On suppose qu'il existe une fonction positive ϕ définie sur \mathcal{X} telle que pour tout $s \in \mathcal{X} \setminus F$,*

$$\mathbb{E}_s(f(\tau_F)) \leq \phi(s),$$

et aussi que pour tout $z \in F$, $\mathbb{E}_z(\phi(X_1)) < \infty$. Ainsi, pour toute distribution initiale ν sur \mathcal{X} telle que

$$\mathbb{E}_\nu(f'(\tau_F)) < \infty,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(n) \sum_{i \in \mathcal{X}} \sum_{j \in \mathcal{X}} \nu(i) |P^n(i, j) - \pi(j)| = 0.$$

4.2 Retour sur le modèle de croissance multitype

On considère un cas particulier du modèle étudié dans le Chapitre 2 où la fonction g est ici égale à un vecteur constant \mathbf{c} . On obtient donc la relation de récurrence suivante

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + \mathbf{c} + \xi_n,$$

où M est une matrice irréductible $d \times d$ à coefficients positifs, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^d$ et les vecteurs aléatoires ξ_n sont tels que presque-sûrement

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0,$$

où $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est la filtration naturelle associée à $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le théorème de Perron-Frobenius nous assure que le rayon spectral ρ de M est une valeur propre de multiplicité 1. On suppose ici que $\rho = 1$ et on définit les vecteurs propres à droite et à gauche normalisés associés à ρ par \mathbf{u} et \mathbf{v} de sorte que $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$.

Pour un vecteur ligne \mathbf{x} , on définit le vecteur ligne \mathbf{y} par

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}).$$

On définit aussi la suite aléatoire $(\mathbf{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}).$$

On suppose que la suite $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit une version faible de la propriété de Markov. Plus précisément, on suppose que $\mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n)$ est une fonction de \mathbf{X}_n que l'on notera σ^2 et qu'il existe $d > 0$ et $K > 0$ tels que

$$d(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) - K\|\mathbf{Y}_n\| \leq \mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n) \leq d(\mathbf{X}_n \mathbf{u}) + K\|\mathbf{Y}_n\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et $A_1 > 0$ tels que

$$\mathbb{E}(\|\xi_n\|^{4+\delta} | \mathcal{F}_n) \leq A_1 \sigma^{4+\delta}(\mathbf{X}_n).$$

Soit $\theta = \frac{2c\mathbf{u}}{d}$. Dans le Chapitre 2, on a montré que le processus $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers l'infini si $\theta < 1$. Nous allons donner dans cette partie une borne supérieure et inférieure de la queue du temps d'atteinte d'un certain ensemble compact.

Théorème 4.7. *On suppose que $\theta < 1$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $\mathbf{x}_0 \mathbf{u} > A$, pour tout α et β tels que $\alpha < 1 - \theta < \beta$, alors il existe deux constantes positives C_α et C_β telles que*

$$\frac{C_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{n^\alpha}, \quad (4.26)$$

où $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq A\}$.

On ne peut pas appliquer le Théorème 4.1 car $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha$, avec $\alpha < 1 - \theta$ n'est pas une fonction de Lyapounov pour $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La preuve sera donc un peu différente de celle du Théorème 4.1, on adaptera ici la preuve de [7].

Démonstration. La preuve du théorème se structure ainsi : première étape, on construit une fonction de Lyapounov de type puissance pour $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deuxième étape, on adapte la preuve du théorème 1 de [7] pour la borne supérieure et du théorème de [5] pour la borne inférieure.

1ère étape : Construction de la fonction de Lyapounov.

La suite \mathbf{Y}_n suit la relation de récurrence

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n(M - \mathbf{u}\mathbf{v}) + g(\mathbf{X}_n)(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}) + \xi_n(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}).$$

On sait que le rayon spectral λ de $M - \mathbf{u}\mathbf{v}$ est strictement inférieur à 1. Soit $\lambda_1 \in (\lambda, 1)$. Le théorème d'Householder (voir [62, thm 7.1, p.108]) nous assure qu'il existe une norme $\|\cdot\|_c$ telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\mathbf{x}(M - \mathbf{u}\mathbf{v})\|_c \leq \lambda_1 \|\mathbf{x}\|_c.$$

Ainsi,

$$\|\mathbf{Y}_{n+1}\|_c \leq \lambda_1 \|\mathbf{Y}_n\|_c + c_1 + \|\xi_n\|_c.$$

Pour $\alpha \in (0, 1)$, on pose

$$F_\alpha(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y}\|_c (\mathbf{x}\mathbf{u})^{\alpha-2} + r (\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha,$$

et

$$\tilde{F}_\alpha(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{y}\|_c (\mathbf{x}\mathbf{u})^{\alpha-2} + r_1 (\mathbf{x}\mathbf{u})^\alpha,$$

avec $r > 0$ et $r_1 > 0$ que l'on fixera plus tard.

On va d'abord montrer que pour $\alpha \in (0, 1 - \theta)$,

$$\mathbb{E}(F_\alpha(\mathbf{X}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \leq F_\alpha(\mathbf{X}_n) - D(\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{\alpha-1} + b \mathbf{1}_{\mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq A},$$

et pour $\alpha \in (1 - \theta, 1)$,

$$\mathbb{E}(\tilde{F}_\alpha(\mathbf{X}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \geq \tilde{F}_\alpha(\mathbf{X}_n) - b_1 \mathbf{1}_{\mathbf{X}_n \mathbf{u} \leq A}.$$

Par l'inégalité de Markov, on obtient que

$$\mathbb{P}(\xi_n \mathbf{u} \leq \eta \mathbf{X}_n \mathbf{u} | \mathcal{F}_n) \leq \frac{\sigma^2(\mathbf{X}_n)}{\eta^2 (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2} \leq K_1 (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^{-1}.$$

Comme les normes sur \mathbb{R}^d sont équivalentes, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|\xi_n\|_c | \mathcal{F}_n) &\leq C_1 \mathbb{E}(\|\xi_n\|^{2+\delta} | \mathcal{F}_n)^{1/(2+\delta)} \\ &\leq C_1 A_1 (\sigma^{2+\delta}(\mathbf{X}_n))^{1/(2+\delta)} \\ &\leq K_2 \mathbf{X}_n \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Soit $\eta \in (0, 1)$ que l'on fixera plus tard, on remarque que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F_\alpha(\mathbf{X}_{n+1})|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\|\mathbf{Y}_{n+1}\|_c(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^{\alpha-2} + r(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{u})^\alpha|\mathcal{F}_n) \\
&\leq (\lambda_1\|\mathbf{Y}_n\|_c + c_1 + \mathbb{E}(\|\xi_n\|_c|\mathcal{F}_n))(1-\eta)(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-2} \\
&\quad + K\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi_n\mathbf{u} \leq -\eta\mathbf{X}_n\mathbf{u}}|\mathcal{F}_n)(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-1} \\
&\quad + r(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^\alpha + r(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-1} \left(\alpha c\mathbf{u} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}d \right) \\
&\quad + r\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K\|\mathbf{Y}_n\|_c(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-2} \\
&\leq F_\alpha(\mathbf{X}_n) + \left(\lambda_1(1-\eta)^{\alpha-2} + r\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K - 1 \right) \|\mathbf{Y}_n\|_c(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-2} \\
&\quad - D(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-1} + K_1(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-2}.
\end{aligned}$$

On choisit maintenant η tel que $\lambda_1(1-\eta)^{\alpha-2} = \frac{1+\lambda_1}{2}$ et r tel que $r\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K = 1 - \lambda_1(1-\eta)^{\alpha-2}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(F_\alpha(\mathbf{X}_{n+1})|\mathcal{F}_n) \leq F_\alpha(\mathbf{X}_n) - D(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-1} + b\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n\mathbf{u} \leq A}.$$

Comme pour $\alpha \in (1-\theta, 1)$, on a que $\alpha c\mathbf{u} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}d > 0$, avec le même type de choix pour r_1 que précédemment, on obtient que

$$\mathbb{E}\left(\tilde{F}_\alpha(\mathbf{X}_{n+1})|\mathcal{F}_n\right) \geq \tilde{F}_\alpha(\mathbf{X}_n) - b_1\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n\mathbf{u} \leq A}.$$

Deuxième étape : la borne supérieure.

On rappelle que $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{X}_n\mathbf{u} \leq A\}$.

Soit $0 < \beta < \alpha < 1 - \theta$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = F_\alpha(\mathbf{X}_n) + \frac{D}{\beta}(n \wedge \tau_A)^\beta$, avec F_α définie comme ci-dessus.

En suivant la preuve du théorème 1 de [7], on remarque d'abord que

$$\mathbb{E}(F_\alpha(\mathbf{X}_{n+1 \wedge \tau_A}) - F_\alpha(\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A})|\mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}((F_\alpha(\mathbf{X}_{n+1}) - F_\alpha(\mathbf{X}_n))\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n\mathbf{u} \in (A,n)}|\mathcal{F}_n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_{n+1} - U_n) &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}((F_\alpha(\mathbf{X}_{n+1}) - F_\alpha(\mathbf{X}_n))|\mathcal{F}_n) + Dn^{\beta-1})\mathbb{1}_{\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A}\mathbf{u} \in (A,n)} \\
&\quad + Dn^{\beta-1}\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A}\mathbf{u} \geq n) \\
&\leq \mathbb{E}((-D(\mathbf{X}_n\mathbf{u})^{\alpha-1} + Dn^{\beta-1})\mathbb{1}_{\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A}\mathbf{u} \in (A,n)}) \\
&\quad + Dn^{\beta-1}\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A}\mathbf{u} \geq n) = I + II.
\end{aligned}$$

Comme, $\alpha - 1 > \beta - 1$, on obtient que

$$I \leq \mathbb{E}((-Dn^{\alpha-1} + Dn^{\beta-1})\mathbb{1}_{\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A}\mathbf{u} \in (A,n)}) \leq 0.$$

D'après l'inégalité de Tchebychev et comme $F_\alpha(\mathbf{X}_n)$ est une surmartingale, on a une borne supérieure pour II

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A}\mathbf{u} \geq n) &\leq \frac{\mathbb{E}((\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A}\mathbf{u})^\alpha)}{n^\alpha} \leq \frac{(\mathbf{X}_0\mathbf{u})^\alpha + \|\mathbf{Y}_0\|_c(\mathbf{X}_0\mathbf{u})^{\alpha-2}/r}{n^\alpha} \\
&\leq \frac{K_3(\mathbf{X}_0\mathbf{u})^\alpha}{n^\alpha}.
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\mathbb{E}(U_{n+1} - U_n) \leq \frac{C(\mathbf{X}_0 \mathbf{u})^\alpha}{n^{1+\alpha-\beta}}.$$

Comme $\alpha > \beta$,

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{E}(U_{k+1} - U_k) < \infty,$$

et donc, il existe une constante positive R telle que

$$\mathbb{E}(U_n) \leq R(\mathbf{X}_0 \mathbf{u})^\alpha.$$

Ainsi,

$$\frac{D}{\beta} \mathbb{E}((n \wedge \tau_A)^\beta) \leq \mathbb{E}(U_n) \leq R(\mathbf{X}_0 \mathbf{u})^\alpha,$$

et en appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient que

$$\mathbb{E}(\tau_A^\beta) \leq \frac{\beta R(\mathbf{X}_0 \mathbf{u})^\alpha}{D}.$$

La borne supérieure est une conséquence immédiate de l'inégalité de Tchebychev.

Troisième étape : La borne inférieure.

Comme

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u} - \mathbf{X}_n \mathbf{u} | \mathcal{F}_n) = c\mathbf{u} \geq 0$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\mathbf{X}_{n+1} \mathbf{u})^2 - (\mathbf{X}_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n) &\leq (c\mathbf{u})^2 + 2(c\mathbf{u})\mathbf{X}_n \mathbf{u} + \mathbb{E}((\xi_n \mathbf{u})^2 | \mathcal{F}_n) \\ &\leq D\mathbf{X}_n \mathbf{u}, \end{aligned}$$

alors $\mathbf{X}_n \mathbf{u}$ vérifie le Lemme 4.3 et donc il existe $\varepsilon > 0$ et ν tels que

$$\mathbb{P}(\tau_A > n + \varepsilon_0 \mathbf{X}_{n \wedge \tau_A} \mathbf{u} | \mathcal{F}_n) \geq 1 - \nu \quad \text{on } \{\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A} \mathbf{u} > A(1 + \gamma)\}$$

On fixe d'abord B tel que $B > A(1 + \gamma)$ et on définit

$$\tilde{\tau}_B = \inf\{n \geq 0, \mathbf{X}_n \mathbf{u} \geq B\}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_A \geq \varepsilon_0 B) &\geq \mathbb{P}(\tau_A > \tilde{\tau}_B + \varepsilon_0 \mathbf{X}_{\tilde{\tau}_B \wedge \tau_A} \mathbf{u}, \tilde{\tau}_B < \tau_A) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_B < \tau_A\}} \mathbb{P}(\tau_A > \tilde{\tau}_B + \varepsilon_0 \mathbf{X}_{\tilde{\tau}_B \wedge \tau_A} \mathbf{u} | \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\tau}_B})) \\ &\geq (1 - \nu) \mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A). \end{aligned}$$

Comme $(\tau_A \wedge \tilde{\tau}_B) < \infty$ et $\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_{n \wedge \tau_A \wedge \tilde{\tau}_B})$ est une sous-martingale, on a que

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_0) < \mathbb{E}(\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_{\tau_A \wedge \tilde{\tau}_B})).$$

D'après l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\mathbb{E}(\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_{\tilde{\tau}_B})\mathbb{1}_{\tilde{\tau}_B < \tau_A}) \leq \mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A)\mathbb{E}(\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_{\tilde{\tau}_B})^2)^{1/2}.$$

En développant, et le fait que comme les normes sur \mathbb{R}^d sont équivalentes, il existe une constante C telle que $\|\mathbf{Y}_n\|_c \leq C\mathbf{X}_n\mathbf{u}$, on obtient que

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_{\tilde{\tau}_B})^2 \leq K_3(\mathbf{X}_{\tilde{\tau}_B}\mathbf{u})^{2\beta}.$$

Ainsi, de la même manière que pour la preuve du Théorème 4.1, il existe une constante K_4 telle que

$$\mathbb{E}(\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_{\tilde{\tau}_B})\mathbb{1}_{\tilde{\tau}_B < \tau_A}) \leq K_4\mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A)B^\beta.$$

Et ainsi,

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_0) \leq K_5A^\beta + K_4B^\beta\mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A),$$

puis

$$\mathbb{P}(\tilde{\tau}_B < \tau_A) \geq \frac{\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_0) - K_5A^\beta}{K_4B^\beta}.$$

En prenant $n > \varepsilon_0A(1 + \delta)$, on obtient la borne inférieure

$$\mathbb{P}(\tau_A > n) \geq (1 - v) \frac{\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}_0) - K_5A^\beta}{K_4(n/\varepsilon_0)^\beta}.$$

□

Exemple 4.2. On reprend l'exemple de la partie 2.1.5. On pose $\gamma = \frac{p_{2,1}}{p_{1,2} + p_{2,1}}$ et $\theta = \frac{2(c_1 + c_2)}{\gamma b_1 + (1 - \gamma)b_2}$. Si $\theta < 1$ alors on a vu que $\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n\| \rightarrow \infty) = 0$. En appliquant le Théorème 4.7, alors on obtient qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $\mathbf{x}_0\mathbf{u} > A$, pour tout α et β tels que $\alpha < 1 - \theta < \beta$, alors il existe deux constantes positives C_α et C_β telles que

$$\frac{C_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{n^\alpha},$$

où $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{X}_n\mathbf{u} < A\}$. En particulier, si on suppose que $\mathbf{0}$ est un état absorbant et que pour tout $A > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+k} = \mathbf{0} \mid \mathbf{X}_n\mathbf{u} \leq A) \geq \varepsilon,$$

alors on a la propriété de dichotomie et on peut donner un encadrement asymptotique de la queue du temps d'extinction, comme dans le Théorème 4.3 de la forme

$$\frac{D_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_x(\tau_0 > n) \leq \frac{D_\alpha}{n^\alpha},$$

pour tout $\alpha < 1 - \theta < \beta$.

Perspectives

Dans le Chapitre 1, nous avons donné un critère d'extinction presque-sûre qui s'applique sur la plupart de modèles avec compétition. En effet, si on considère un modèle stochastique monotype avec une capacité biotique K , alors le nombre moyen d'enfants par individu est strictement plus petit que 1 si la taille de la population est plus grande que K , on peut donc appliquer la Proposition 1.3 du Chapitre 1. On peut alors se demander quel est l'ordre de grandeur du temps d'extinction et notamment son comportement asymptotique lorsque K tend vers l'infini. Cette question a été traitée dans le cas monotype par Klebaner et Zeitouni [47], où les auteurs montrent que le temps d'extinction est de l'ordre e^{cK} , où la constante c est déterminée par les paramètres du modèle. Néanmoins, les auteurs font l'hypothèse que le processus stochastique est à valeurs dans un compact, ce qui est assez contraignant. Dans [17], les auteurs s'intéressent, dans le cas multitype, aux distributions quasi-stationnaires du processus et montrent en particulier que les distributions quasi-stationnaires chargent les points qui sont des attracteurs du système dynamique déterministe non perturbé. Ils montrent aussi que, en partant de la distribution quasi-stationnaire, l'espérance du temps d'extinction grandit exponentiellement d'exposant K , lorsque K tend vers l'infini.

Lorsque K est grand, K joue le rôle de notre paramètre d'échelle N du Chapitre 1 et donc X^K/K est proche d'un système dynamique déterministe. Supposons pour simplifier que ce système dynamique possède un point fixe attracteur. On sait donc que X^K/K va rester proche de ce point fixe pendant un certain temps, mais on sait aussi que X^K atteint zéro presque-sûrement. Ainsi, le temps d'extinction est un temps de sortie du bassin d'attraction du point fixe attracteur. L'étude de ces temps de sorties fait appel à la théorie des grandes déviations, notamment les travaux de Freidlin et Wentzell [21] pour le temps continu et ceux de Kifer [40] pour le temps discret.

Dans le Chapitre 2, nous avons donné un critère pour déterminer si les processus satisfaisant l'équation

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n,$$

atteignaient l'état zéro presque sûrement ou pas. Nous avons ensuite vu, dans le Chapitre 4, que le temps d'extinction n'était pas nécessairement d'espérance finie.

On peut alors se demander quel est le comportement du processus conditionné à ne pas s'éteindre. Il faudrait alors déterminer si on a existence et unicité d'une distribution quasi-stationnaire qui serait une limite de Yaglom.

Une autre extension naturelle des travaux de cette thèse serait de s'intéresser au cas où on a une infinité de types. Ceci permettrait de considérer par exemple des métapopulations avec une infinité de parcelles si le nombre de types est dénombrable ou bien de considérer des traits phénotypiques (comme par exemple la taille du bec des oiseaux) si le nombre de types n'est pas dénombrable.

Bien entendu, nous souhaitons terminer la démonstration de la Conjecture 3.1. Il reste notamment des propriétés de tension à vérifier.

Nous souhaitons aussi compléter le Théorème 4.7 pour une classe plus générale de fonctions g . La difficulté principale à ne pas se restreindre aux fonctions g constantes est le calcul du développement de Taylor de la fonction G . Néanmoins, on devrait pouvoir s'inspirer des techniques utilisées dans le Chapitre 3.

Preuves des résultats sur les processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration

On donne ici les preuves des différents résultats énoncés dans le chapitre 1 sur les processus de Galton-Watson multitypes critiques avec immigration. Avant de prouver le Théorème 1.1, on rappelle deux résultats importants sur les processus de Galton-Watson multitypes critiques. On rappelle que

$$Q(\mathbf{s}) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d s_i s_j \mathbb{E}(X_{k,i} X_{k,j} - \delta_{ij} X_{k,i}) \right)_{k=1, \dots, d},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon) et les $(X_{k,i})_{k,i \in \{1, \dots, d\}}$ correspondent au nombre d'enfants de type i pour un individu de type k . On rappelle aussi que $F(\mathbf{s}) = (\mathbb{E}(\mathbf{s}^{(X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,d})})_{i \in \{1, \dots, d\}}$ est la fonction génératrice du nombre d'enfants par individu pour le processus sans immigration, \mathbf{u} et \mathbf{v} sont les vecteurs propres à droite et à gauche normalisés associés à la valeur propre 1, de la matrice $M = \mathbb{E}(X_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, d\}}$.

Lemme B.5. [33]. Pour tout $\mathbf{s} \in [0, 1]^d$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{1} - F_n(\mathbf{s})}{\mathbf{v}(\mathbf{1} - F_n(\mathbf{s}))} = \mathbf{u}.$$

Lemme B.6. [8, p.189, Multitype basic lemma.] $\forall \mathbf{s} \in [0, 1]^d$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{1} - F_n(\mathbf{s}))} - \frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{1} - \mathbf{s})} \right) = \mathbf{v}Q(\mathbf{u}).$$

Preuve du Théorème 1.1. Soit $\gamma_k = \mathbb{P}(\mathbf{Z}_k = \mathbf{0} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0})$. On peut aisément vérifier que $\gamma_n = \prod_{k=0}^n G(F_k(\mathbf{0}))$. On applique les lemmes (B.5) et (B.6) :

$$\mathbf{1} - F_n(\mathbf{0}) = \frac{\mathbf{u}}{n\mathbf{v}Q(\mathbf{u})} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi $G(F_n(0)) = 1 - \frac{\mathbf{u}\mathbf{J}}{n\mathbf{v}Q(\mathbf{u})} + o(\frac{1}{n})$. Or $G(F_n(0)) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}$, donc en appliquant la règle de Raabe-Duhamel, on a que :

Si $\theta < 1$, alors $\sum \gamma_k = +\infty$ c'est à dire l'état 0 est récurrent et donc la chaîne l'est aussi.

Si $\theta > 1$, alors $\sum \gamma_k < +\infty$ c'est à dire l'état 0 est transient et donc la chaîne l'est aussi. \square

Avant de donner la preuve du Théorème 1.2, on rappelle deux théorèmes importants :

Théorème B.8 (Théorème taubérien ([19], ch XIII, 5, Thm 5)). *Soit $q_n \geq 0$ et on suppose que*

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k$$

converge pour $0 \leq s < 1$. Si L est une fonction à variation lente et $0 \leq \theta < \infty$ alors on a équivalence entre

$$Q(s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(1-s)^\theta} L\left(\frac{1}{1-s}\right)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\theta+1)} n^\theta L(n)$$

si de plus (q_n) est monotone, alors on a aussi équivalence avec

$$q_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\theta)} n^{\theta-1} L(n).$$

Théorème B.9. ([18], ch XIII, 3, Thm 3)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$, une suite positive telle que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1$ et 1 est le pgdc des n tels que $f_n = 0$.

On pose $u_0 = 1$ et

$$u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \dots + f_n u_0$$

Alors

$$u_n \rightarrow \mu^{-1}$$

où $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k$.

Preuve du Théorème 1.2. On pose $u_k = \mathbb{P}(\tau > k)$ et $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k$. On va maintenant prouver que

$$U(t) = \frac{A_1(t)}{1 - A(t)},$$

où $A(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k - \gamma_{k+1}) t^{k+1}$ et $A_1(t) = \frac{A(t)}{(1-q_0)t}$, $q_0 = \mathbb{P}(J_1 = \mathbf{0})$.

On suppose que $\mathbf{Z}_{-1} = \mathbf{0}$. Soit \mathbf{Y}_n le processus coïncidant avec \mathbf{Z}_n jusqu'à ce que $\mathbf{Z}_n = \mathbf{0}$ et constant égal à $\mathbf{0}$ après :

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}_0$$

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{Y}_n = \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{n+1} & \text{si } \mathbf{Y}_n \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

On peut remarquer que $u_k = \mathbb{P}(\mathbf{Y}_k \neq \mathbf{0})$ et

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d} \mathbb{P}(\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{x} | \mathbf{Y}_i = \mathbf{y}) \mathbf{s}^{\mathbf{x}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ G(\mathbf{s}) F^{\mathbf{y}}(\mathbf{s}) & \text{si } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Soit $N(i, \mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d} \mathbb{P}(\mathbf{Y}_i = \mathbf{x}) \mathbf{s}^{\mathbf{x}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} N(0, \mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathbb{P}(\mathbf{Z}_0 = \mathbf{x} | \mathbf{Z}_{-1} = \mathbf{0}, \mathbf{Z}_0 \neq \mathbf{0}) \mathbf{s}^{\mathbf{x}} \\ &= \frac{G(\mathbf{s}) - q_0}{1 - q_0} \end{aligned}$$

et par récurrence :

$$\begin{aligned} N(i+1, \mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d} \mathbb{P}(\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{x} | \mathbf{Y}_i = \mathbf{y}) \mathbb{P}(\mathbf{Y}_i = \mathbf{y}) \mathbf{s}^{\mathbf{x}} \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{Y}_i = \mathbf{0}) + \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathbb{P}(\mathbf{Y}_i = \mathbf{y}) G(\mathbf{s}) F^{\mathbf{y}}(\mathbf{s}) \\ &= (1 - G(\mathbf{s})) N(i, \mathbf{0}) + G(\mathbf{s}) N(i, F(\mathbf{s})) \\ &= \sum_j^i N(i-j, \mathbf{0}) (1 - G(F_j(\mathbf{s}))) \prod_{m=0}^{j-1} G(F_m(\mathbf{s})) \\ &\quad + N(0, F_{i-1}(\mathbf{s})) \prod_{n=0}^i G(F_n(\mathbf{s})). \end{aligned}$$

Néanmoins, on peut remarquer que $N(i, \mathbf{0}) = \mathbb{P}(\mathbf{Y}_i = \mathbf{0}) = 1 - u_i$. Ainsi on obtient :

$$1 - u_{i+1} = \sum_{k=0}^i (1 - u_{i-k}) (\gamma_k - \gamma_{k+1}) + \gamma_{i+1} \frac{G(F_{i+1}(\mathbf{0})) - q_0}{1 - q_0},$$

$$u_{i+1} = \sum_{k=0}^i u_{i-k} (\gamma_k - \gamma_{k+1}) + \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_{i+2}}{1 - q_0}.$$

On multiplie chaque terme par t^{i+1} et on somme pour i allant de 0 à l'infini :

$$U(t) - 1 = A(t)U(t) + \frac{A(t)}{(1 - q_0)t} - 1.$$

Ainsi

$$U(s) = \frac{A_1(s)}{1 - A(s)},$$

ce qui est le résultat souhaité.

On remarque que $U(1) = \mathbb{E}(\tau)$. On admet que $(k+1)(\gamma_k - \gamma_{k+1}) = (k+1)\gamma_k(1 - G(F_k(\mathbf{0}))) \sim L_1(k)k^{-\theta}$, où L_1 est une fonction à variation lente. D'après des résultats sur les fonctions à variation lente (voir par exemple [19, Chapter VII, 8,9]), on en déduit que

$$\sum_{k=0}^n (k+1)(\gamma_k - \gamma_{k+1}) \sim L_2 n^{1-\theta},$$

avec

$$L_1(n) \sim (1 - \theta)L_2(n) \text{ si } \theta < 1.$$

Le Théorème B.8 nous assure que, lorsque $t \rightarrow 1$:

$$A'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\gamma_k - \gamma_{k+1})t^k \sim C_3(1-t)^{\theta-1}L_2\left(\frac{1}{1-t}\right).$$

Comme $\lim \gamma_k = 0$, $A(1) = 1$ et donc

$$U(s) = \frac{A_1(s)}{\int_s^1 A'(x)dx} \sim C_4(1-t)^{-\theta} \left(L_2\left(\frac{1}{1-t}\right) \right)^{-1}.$$

Mais $\int_t^1 A'(x)dx \sim C_3 \int_s^1 (1-x)^{\theta-1}dx = (C_3/\theta)(1-s)^\theta$.

On applique encore le théorème taubérien (on sait que les u_k sont décroissants), on obtient :

$$u_k \sim L(k)k^{\theta-1}.$$

□

Outils mathématiques

Dans cette partie, nous allons détailler quelques méthodes et résultats mathématiques utilisés tout au long de cette thèse.

B.1 Propriété de dichotomie

Nous avons plusieurs fois évoqué la propriété de dichotomie pour un processus stochastique $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (1) :

$$\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty) + \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}, X_k = 0) = 1.$$

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur \mathbb{N} et que l'état $\{0\}$ est absorbant, c'est-à-dire $\mathbb{P}_0(X_1 = 0) = 1$, et partout accessible, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_x(\exists k \in \mathbb{N}, X_k = 0) > 0$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété de dichotomie.

On a toutefois considéré dans cette thèse des modèles qui ne sont pas nécessairement markoviens. Nous avons donc utilisé une condition suffisante plus générale pour que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfasse la propriété de dichotomie.

Théorème 6 (Propriété de dichotomie, Théorème 3.1 [31]). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}_+ . On suppose que l'état $\{0\}$ est absorbant et que $\forall x > 0, \exists \delta > 0$ tel que*

$$\mathbb{P}(\exists n X_n = 0 | X_1, \dots, X_k) \geq \delta,$$

si $X_k \leq x$.

Alors,

$$\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty) + \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}, X_k = 0) = 1.$$

La preuve de ce résultat découle du “Lévy’s Upward Theorem” [64, p 134].

Démonstration. Soit

$$D = \{\exists n \text{ tel que } X_n = 0\},$$

et

$$X = \mathbf{1}_D.$$

On va montrer que si X_n ne tend pas vers l'infini, alors $X = 1$ presque-sûrement. Soit $\{\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), n \in \mathbb{N}\}$ la filtration naturelle associée à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On remarque que la martingale $M_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ est bornée donc converge presque-sûrement vers $M_\infty = \limsup M_n$.

D'après le "Lévy's Upward Theorem", $M_\infty = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty) = X$, car X est \mathcal{F}_∞ mesurable. Si X_n ne tend pas vers l'infini, alors il existe $x > 0$ tel qu'il y a une infinité d'indices n tels que $X_n \leq x$. Donc pour une infinité d'indices,

$$M_n \geq \delta.$$

Ainsi, sur l'événement $\{X_n \not\rightarrow \infty\}$, $M_\infty \geq \delta > 0$ mais comme $M_\infty = X$ et $X \in \{0, 1\}$, alors $X = 1$. □

B.2 Fonctions de Lyapounov et surmartingales

Pour un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace d'états \mathcal{X} , on appelle fonction de Lyapounov une fonction $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(L(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \leq L(X_n)$$

où $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une filtration pour laquelle $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est adapté. Cela signifie que $(L(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale positive et donc converge presque-sûrement vers une variable aléatoire intégrable si $L(X_0)$ est intégrable. Dans le cas où $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, l'existence de fonctions de Lyapounov permet de déterminer la nature de la chaîne.

Théorème 7 (Théorème de Foster [20]). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états dénombrable \mathcal{X} .*

1. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transiente si et seulement si il existe une fonction $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et un ensemble non vide $A \subset \mathcal{X}$ tels que pour tout $x \notin A$, $\mathbb{E}_x(L(X_1)) \leq L(x)$, et il existe $x \notin A$ tel que $L(x) < \inf_{y \in A} L(y)$.
2. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si et seulement si il existe une fonction $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\{x, L(x) < N\}$ est fini pour tout $N > 0$ et pour tout $x \in \mathcal{X}$ sauf un nombre fini, $\mathbb{E}_x(L(X_1)) \leq L(x)$.
3. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive si et seulement si il existe une fonction $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$, un ensemble fini $C \subset \mathcal{X}$ non vide tels que pour tout $x \in \mathcal{X} \setminus C$, on a $\mathbb{E}_x(L(X_1)) \leq L(x) - 1$.

Lorsque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive, on a un lien entre le temps d'atteinte d'un ensemble $B \subset \mathcal{X}$ et la fonction de Lyapounov L et l'ensemble C du théorème précédent.

Lemme 1 (Lemme 11.3.9 p.269 [56]). *Si L vérifie le point 3 du théorème précédent que l'on écrira sous la forme*

$$\mathbb{E}_x(L(X_1)) \leq L(x) - 1 + b\mathbb{1}_C(x),$$

alors pour tout $B \subset \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_x(\tau_B) \leq L(x) + b \mathbb{E}_x \left(\sum_{k=0}^{\tau_B-1} \mathbb{1}_C(X_k) \right),$$

avec $\tau_B = \inf\{n \geq 1, X_n \in B\}$.

Dans cette thèse, nous avons vu d'autres liens entre fonction de Lyapounov et temps d'atteinte lorsque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement récurrente positive ni même une chaîne de Markov. Une bonne classe de fonctions de Lyapounov pour une étude plus fine du temps d'atteinte de certains ensembles sont les fonctions L convexes, ou concaves tendant vers 0 en l'infini, telles que

$$\mathbb{E}_x(L(X_1)) \leq L(x) - \varepsilon L'(x),$$

avec $\varepsilon > 0$. Ceci a été remarqué par Aspandiarov et al [6] et nous avons utilisé ces résultats dans le chapitre 4.

Lorsqu'une chaîne de Markov est irréductible, apériodique et récurrente positive, on a existence et unicité de la mesure de probabilité invariante. On a alors un lien entre la convergence géométrique vers cette mesure invariante et l'existence d'une certaine classe de fonctions de Lyapounov.

Théorème 8 (Convergence géométrique, Théorème 15.0.1 p. 362 [56]). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur un espace d'états dénombrable \mathcal{X} .*

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Il existe une fonction $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$, un réel $\beta < 1$ et un ensemble fini $C \subset \mathcal{X}$ non vide tels que pour tout $x \in \mathcal{X} \setminus C$, on a*

$$\mathbb{E}_x(L(X_1)) \leq \beta L(x) \tag{B.27}$$

2. *Il existe $r \in (0, 1)$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \|P^n(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} = 0,$$

où P désigne le noyau de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et π sa mesure de probabilité invariante.

Néanmoins, d'autres régimes sont possibles, la convergence du noyau de transition vers la mesure de probabilité invariante n'est pas nécessairement géométrique et donc dans ce cas, on ne peut pas trouver une fonction de Lyapounov vérifiant l'équation (B.27). D'autres classes de fonctions de Lyapounov permettent d'obtenir une convergence dite sous-géométrique vers la mesure invariante.

Théorème 9 (Proposition 2.5 [13]). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur un espace d'états dénombrable \mathcal{X} .*

Si il existe une fonction $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction concave croissante différentiable $\phi : [1, \infty] \mapsto (0, \infty]$ telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi'(t) = 0$, un ensemble fini C tels que pour tout $x \in \mathcal{X} \setminus C$

$$\mathbb{E}_x(L(X_1)) + \phi \circ L(x) \leq L(x), \quad (\text{B.28})$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_\phi(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{TV}} = 0, \quad (\text{B.29})$$

où $r_\phi(x) = \phi \circ \Phi^{-1}(x)$, $\Phi(x) = \int_1^x \frac{du}{\phi(u)}$, P désigne le noyau de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et π sa mesure de probabilité invariante.

Contrairement au Théorème 8, on ne sait pas s'il y a équivalence entre l'inégalité (B.28) et la limite (B.29). Lorsque $\phi : x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in (0, 1)$, on a $r_\phi(n) \propto n^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, c'est-à-dire $r_\phi(n)$ est proportionnel à $n^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. La vitesse de convergence est donc d'ordre polynomiale. Dans le Chapitre 4, nous avons utilisé ce résultat pour des processus satisfaisant l'équation

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n.$$

B.3 Méthode des moments

Dans le chapitre 3, nous avons montré une convergence en loi en utilisant la méthode des moments en s'inspirant de [43]. Nous donnons ici un peu plus de détails sur cette méthode. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} et $M_n = \mathbb{E}(X^n)$ son n -ième moment. On suppose que $M_n < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le problème des moments consiste à trouver sous quelles conditions la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ détermine de manière unique une loi de probabilité sur \mathbb{R} . Si par exemple

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|M_n|^{1/n}}{n} = \lambda < \infty,$$

alors la fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(itX))$ est analytique sur un voisinage de zéro et comme $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n M_n$ et φ_X caractéristique la loi de X , alors la loi de X est déterminée de manière unique par ses moments [19, p. 514]. Pour une condition suffisante plus précise, on peut citer celle de Carleman [19, p.228] : si

$$\sum M_{2n}^{-1/2n} = \infty$$

alors la loi de X est déterminée de manière unique par ses moments.

Présentons maintenant la méthode des moments. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire définie de manière unique par ses moments. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(X^k),$$

alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X .

B.4 Convergence fonctionnelle

Dans le chapitre 3, nous avons conjecturé la convergence d'une transformation de notre processus discret vers la solution d'une équation différentielle stochastique. Soit $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n M + g(\mathbf{X}_n) + \xi_n.$$

On suppose en particulier que le rayon spectral de la matrice M vaut 1 et on pose \mathbf{u} et \mathbf{v} les vecteurs propres à droite et à gauche associés à 1 de sorte que $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$. On pose pour $x \in [1, \infty)$

$$\tilde{g}(x) = g(x\mathbf{v})\mathbf{u}$$

et

$$G(x) = \int_1^x \frac{ds}{\tilde{g}(s)}.$$

Alors, nous pensons que la transformation de notre processus

$$Z_n(t) = \frac{1}{n} G(\mathbf{X}_{[nt]}\mathbf{u})$$

converge en loi vers la solution de l'équation différentielle stochastique

$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{Z_s} dB_s + ct,$$

où (B_t) est un mouvement brownien standard. Les solutions de cette équation sont appelés les processus de Bessel carrés.

D'un point de vue historique, Donsker [12] a été le premier à montrer la convergence d'une marche aléatoire vers un mouvement brownien standard. Pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans \mathbb{R} et telle que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\text{Var}(X_1) = 1$, alors en posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ on démontre que

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1],$$

converge en loi vers un mouvement brownien standard sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ lorsque n tend vers l'infini. Dans notre cas, la diffusion limite ne sera pas à accroissements gaussiens. On a utilisé pour cela le Théorème 4.1 de [16, p.354]. Avant de rappeler son énoncé, introduisons quelques notations. Étant donné un générateur infinitésimal $A : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, où $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} et $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} et dont les dérivées partielles d'ordre deux sont continues, et une mesure de probabilité ν sur \mathbb{R} , le problème des martingales associé à (A, ν) consiste à trouver une mesure de probabilité \mathbb{P} sur l'espace des fonctions continues $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

$$\mathbb{P} \circ X(0)^{-1} = \nu$$

et pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ on a que

$$f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t Af(X(s)) ds$$

est une martingale locale sous \mathbb{P} . On rappelle qu'une martingale locale est un processus adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ telle qu'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ telle que

- $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est presque-sûrement croissante : $\mathbb{P}(\tau_k < \tau_{k+1}) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$.
- $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini : $\mathbb{P}(\tau_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty) = 1$.
- le processus arrêté $X_{t \wedge \tau_k}$ est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si on a l'existence et l'unicité pour le problème des martingales (A, ν) alors on dit qu'il est bien posé.

Voici donc l'énoncé du Théorème 4.1 de [16, p.354] que l'on utilisera dans le chapitre 3.

Théorème 10. *Soit a et b deux fonctions continues définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Soit*

$$A = \left\{ \left(f, a(x) \frac{d^2 f}{dx^2} + b(x) \frac{df}{dx} \right), f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+) \right\},$$

et on suppose que le problème des martingales pour A est bien posé.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n, B_n et A_n des processus dont les trajectoires sont dans $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}([0, \infty))$, l'ensemble des fonctions continues à droite avec une limite à gauche, et $A_n(t) - A_n(s) \geq 0$ pour $t > s \geq 0$. On pose la filtration $\mathcal{F}_t^n = \sigma(X_n(s), B_n(s), A_n(s) : s \leq t)$.

Soit le temps d'arrêt $\tau_n^r = \inf\{t : |X_n(t)| \geq r \text{ ou } |X_n(t^-)| \geq r\}$ et on suppose que

$$M_n(t) = X_n(t) - B_n(t)$$

et

$$M_n^2(t) - A_n(t)$$

sont des \mathcal{F}_t^n martingales locales et pour tout $r > 0, T > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} |X_n(t) - X_n(t^-)|^2 \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} |B_n(t) - B_n(t^-)|^2 \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} |A_n(t) - A_n(t^-)| \right) = 0,$$

$$\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} \left| B_n(t) - \int_0^t b(X_n(s)) ds \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

et

$$\sup_{t \leq T \wedge \tau_n^r} \left| A_n(t) - \int_0^t a(X_n(s)) \, ds \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

On suppose aussi que $\mathbb{P} \circ X_n(0)^{-1} \xrightarrow{\text{en loi}} \nu$. Alors, (X_n) converge en loi vers la solution du problème des martingales associé à (A, ν) .

Bibliographie

- [1] E. Adam. Criterion of unlimited growth of critical multidimensional stochastic models. Adv. in Appl. Probab., 48(4), 2016.
- [2] E. Adam. Slow recurrent regimes for a class of one-dimensional stochastic growth models. arXiv preprint arXiv :1603.09702, 2016.
- [3] K. S. Alexander. Excursions and local limit theorems for Bessel-like random walks. Electron. J. Probab., 16(1) :1–44, 2011.
- [4] F. Arrigoni. Deterministic approximation of a stochastic metapopulation model. Advances in Applied Probability, pages 691–720, 2003.
- [5] S. Aspandiiarov and R. Iasnogorodski. Tails of passage-times and an application to stochastic processes with boundary reflection in wedges. Stochastic Process. Appl., 66(1) :115–145, 1997.
- [6] S. Aspandiiarov and R. Iasnogorodski. General criteria of integrability of functions of passage-times for non-negative stochastic processes and their applications. Teor. Veroyatnost. i Primenen., 43(3) :509–539, 1998.
- [7] S. Aspandiiarov, R. Iasnogorodski, and M. Menshikov. Passage-time moments for nonnegative stochastic processes and an application to reflected random walks in a quadrant. Ann. Probab., 24(2) :932–960, 1996.
- [8] K. B Athreya and P. E Ney. Branching processes, volume 28. Springer-Verlag Berlin, 1972.
- [9] V. Bansaye and A. Lambert. New approaches of source-sink metapopulations decoupling the roles of demography and dispersal. Theoretical Population Biology, 88 :31–46, 2013.
- [10] R. J.H. Beverton and S. J Holt. On the dynamics of exploited fish populations, volume 11. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] J. M. Cushing, R. .F Costantino, B. Dennis, R. Desharnais, and S. M. Henson. Chaos in ecology : experimental nonlinear dynamics, volume 1. Elsevier, 2002.

- [12] M. D. Donsker. An invariance principle for certain probability limit theorems. 1951.
- [13] R. Douc, G. Fort, E. Moulines, and P. Soulier. Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence. Ann. Appl. Probab., 14(3) :1353–1377, 2004.
- [14] M. Duflo. Random iterative models, volume 34. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] S. Elaydi. An introduction to difference equations. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2005.
- [16] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. Markov processes : Characterization and convergence. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [17] M. Faure and S. J. Schreiber. Quasi-stationary distributions for randomly perturbed dynamical systems. The Annals of Applied Probability, 24(2) :553–598, 2014.
- [18] W. Feller. An introduction to probability theory and its applications. Vol. I. Third edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [19] W. Feller. An introduction to probability theory and its applications. Vol. II. Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [20] F. G. Foster. On the stochastic matrices associated with certain queuing processes. Ann. Math. Statistics, 24 :355–360, 1953.
- [21] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell. Random perturbations of dynamical systems, volume 260 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer, Heidelberg, third edition, 2012. Translated from the 1979 Russian original by Joseph Szücs.
- [22] M. González, R. Martínez, and M. Mota. On the unlimited growth of a class of homogeneous multitype Markov chains. Bernoulli, 11(3) :559–570, 2005.
- [23] P. Hall and C. C. Heyde. Martingale limit theory and its application. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980. Probability and Mathematical Statistics.
- [24] S. Harrison and A. D. Taylor. Empirical evidence for metapopulation dynamics. Metapopulation biology : ecology, genetics, and evolution. Academic Press, San Diego, California, USA, pages 27–42, 1997.

- [25] M.P. Hassell. Density-dependence in single-species populations. The Journal of animal ecology, pages 283–295, 1975.
- [26] R.D. Holt. Population dynamics in two-patch environments : Some anomalous consequences of an optimal habitat distribution. Theoretical Population Biology, 28(2) :181 – 208, 1985.
- [27] R. Höpfner. On some classes of population-size-dependent Galton-Watson processes. J. Appl. Probab., 22(1) :25–36, 1985.
- [28] R. A. Horn and C. R. Johnson. Matrix analysis. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [29] M. Iannelli and A. Pugliese. An introduction to mathematical population dynamics, volume 79 of Unitext. Springer, Cham, 2014. Along the trail of Volterra and Lotka, La Matematica per il 3+2.
- [30] M. Ispány and G. Pap. Asymptotic behavior of critical primitive multi-type branching processes with immigration. Stochastic Analysis and Applications, 32(5) :727–741, 2014.
- [31] P. Jagers. Extinction, persistence, and evolution. In The mathematics of Darwin’s legacy, Math. Biosci. Interact., pages 91–104. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [32] P. Jagers and S. Sagitov. The growth of general population-size-dependent branching processes year by year. J. Appl. Probab., 37(1) :1–14, 2000.
- [33] A Joffe and F Spitzer. On multitype branching processes with $\rho \leq 1$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19(3) :409–430, 1967.
- [34] K. Kawazu. On multitype branching processes with immigration. In Proceedings of the Third Japan-USSR Symposium on Probability Theory (Tashkent, 1975), pages 270–275. Lecture Notes in Math., Vol. 550. Springer, Berlin, 1976.
- [35] G. Keller, G. Kersting, and U. Rösler. On the asymptotic behaviour of discrete time stochastic growth processes. Ann. Probab., 15(1) :305–343, 1987.
- [36] G. Kersting. On recurrence and transience of growth models. J. Appl. Probab., 23(3) :614–625, 1986.
- [37] G. Kersting. Asymptotic Γ -distribution for stochastic difference equations. Stochastic Process. Appl., 40(1) :15–28, 1992.
- [38] G. Kersting. A law of large numbers for stochastic difference equations. Stochastic Process. Appl., 40(1) :1–13, 1992.

- [39] G. Kersting. On recurrence and transience of multivariate near-critical stochastic processes. arXiv preprint arXiv :1605.04064, 2016.
- [40] Y. Kifer. A discrete-time version of the Wentzell-Freidlin theory. Ann. Probab., 18(4) :1676–1692, 1990.
- [41] F. C. Klebaner. On population-size-dependent branching processes. Adv. in Appl. Probab., 16(1) :30–55, 1984.
- [42] F. C. Klebaner. Linear growth in near-critical population-size-dependent multitype Galton-Watson processes. J. Appl. Probab., 26(3) :431–445, 1989.
- [43] F. C. Klebaner. Stochastic difference equations and generalized gamma distributions. Ann. Probab., 17(1) :178–188, 1989.
- [44] F. C. Klebaner. Asymptotic behavior of near-critical multitype branching processes. J. Appl. Probab., 28(3) :512–519, 1991.
- [45] F. C. Klebaner. Population-dependent branching processes with a threshold. Stochastic Process. Appl., 46(1) :115–127, 1993.
- [46] F. C. Klebaner and O. Nerman. Autoregressive approximation in branching processes with a threshold. Stochastic Process. Appl., 51(1) :1–7, 1994.
- [47] F. C. Klebaner and O. Zeitouni. The exit problem for a class of density-dependent branching systems. Ann. Appl. Probab., 4(4) :1188–1205, 1994.
- [48] F.C. Klebaner. Conditions for the unlimited growth in multitype population size dependent galton-watson processes. Bulletin of Mathematical Biology, 52(4) :527–534, 1990.
- [49] M. Kot. Elements of mathematical ecology. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [50] J. Lamperti. Criteria for the recurrence or transience of stochastic process. I. J. Math. Anal. Appl., 1 :314–330, 1960.
- [51] J. Lamperti. Criteria for stochastic processes. II. Passage-time moments. J. Math. Anal. Appl., 7 :127–145, 1963.
- [52] A. Lasota and M. C. Mackey. Stochastic perturbation of dynamical systems : the weak convergence of measures. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 138(1) :232–248, 1989.
- [53] R. Levins. Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control. Bulletin of the Entomological society of America, 15(3) :237–240, 1969.

- [54] Z. Lin and Z. Bai. Probability inequalities. Science Press Beijing, Beijing; Springer, Heidelberg, 2010.
- [55] R. M May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, 261(5560) :459–467, 1976.
- [56] S. Meyn and R. L. Tweedie. Markov chains and stochastic stability. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2009. With a prologue by Peter W. Glynn.
- [57] C. J. Mode. Multitype branching processes. Theory and applications. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, No. 34. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1971.
- [58] H. R. Pulliam. Sources, sinks, and population regulation. American naturalist, pages 652–661, 1988.
- [59] D. Revuz and M. Yor. Continuous martingales and Brownian motion, volume 293 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [60] W. E Ricker. Stock and recruitment. Journal of the Fisheries Board of Canada, 11(5) :559–623, 1954.
- [61] E. Seneta. Non-negative matrices and Markov chains. Springer, 2006.
- [62] D. Serre. Matrices, volume 216 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2010. Theory and applications.
- [63] J. C. Watkins. Consistency and fluctuation theorems for discrete time structured population models having demographic stochasticity. Journal of mathematical biology, 41(3) :253–271, 2000.
- [64] D. Williams. Probability with martingales. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [65] A. M. Zubkov. Life-periods of a branching process with immigration. Theory of Probability & Its Applications, 17(1) :174–183, 1972.

Index

fonctions de Lyapounov, 10, 13, 16, 18,
22, 25, 27, 30, 52, 57, 61, 69, 92–
94, 103, 104, 126, 138, 139

modèle

de Beverton-Holt, 2
de Hassell, 2
de Nicholson-Bailey, 47
de Ricker, 2
de Wright-Fisher, 40
logistique, 2
LPA, 48

processus de Bessel carré, 13, 19, 20, 28,
29, 81, 95, 96

propriété de dichotomie, 3, 4, 6, 10, 83,
92, 103, 104, 119, 129, 137

surmartingale, 61, 62, 94, 108, 123, 127,
138

Titre : Persistance et vitesse d'extinction pour des modèles de populations stochastiques multitypes en temps discret

Mots clés : Chaînes de Markov, Martingales, Systèmes dynamiques

Résumé : Cette thèse porte sur l'étude mathématique de modèles stochastiques de dynamique de populations structurées. Dans le premier chapitre, nous introduisons un modèle stochastique à temps discret prenant en compte les diverses interactions possibles entre les individus, que ce soit de la compétition, de la migration, des mutations, ou bien de la prédation. Nous montrons d'abord un résultat de type "loi des grands nombres", où on montre que si la population initiale tend vers l'infini, alors sur un intervalle de temps fini, le processus stochastique converge en probabilité vers un processus déterministe sous-jacent. Nous quantifions aussi les écarts entre ces deux processus par un résultat de type "théorème central limite". Enfin, nous donnons un critère de persistance/extinction afin de déterminer le comportement en temps long de notre processus stochastique. Ce critère met en exergue un cas critique qui sera étudié plus en détail dans les chapitres suivants. Dans le deuxième chapitre, nous donnons un critère de croissance illimitée pour des processus vérifiant le cas critique évoqué plus haut. Nous illustrons en particulier ce critère avec l'exemple d'une métapopulation constituée de parcelles de type puits (c'est à dire dont la population s'éteint sans tenir compte de la migration), où l'on montre que la survie de la population est possible. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons au comportement du processus critique lorsqu'il croît vers l'infini. Nous montrons en particulier une convergence en loi vers une loi gamma de notre processus renormalisé et dans un cadre plus général, en renormalisant aussi en temps, nous conjecturons une convergence en loi d'une fonction de notre processus vers la solution d'une équation différentielle stochastique appelée un processus de Bessel carré. Dans le quatrième et dernier chapitre, nous nous plaçons dans le cas où le processus critique ne tend pas vers l'infini et étudions le temps d'atteinte de certains ensembles compacts. Nous donnons un encadrement asymptotique de la queue de ce temps d'atteinte. Lorsque le processus s'éteint, ces résultats nous permettent en particulier d'encadrer la queue du temps d'extinction. Dans le cas où notre processus est une chaîne de Markov, nous en déduisons un critère de récurrence nulle ou récurrence positive et dans ce cas, nous obtenons un taux de convergence sous-géométrique du noyau de transition de notre chaîne vers sa mesure de probabilité invariante.

Title : Persistence and speed of extinction for stochastic multitype discrete time population models

Keywords : Markov chains, Martingales, Dynamical systems

Abstract : This thesis is devoted to the mathematical study of stochastic models of structured populations dynamics. In the first chapter, we introduce a discrete time stochastic process taking into account various ecological interactions between individuals, such as competition, migration, mutation, or predation. We first prove a "law of large numbers": where we show that if the initial population tends to infinity, then, on any finite interval of time, the stochastic process converges in probability to an underlying deterministic process. We also quantify the discrepancy between these two processes by a kind of "central limit theorem". Finally, we give a criterion of persistence/extinction in order to determine the long time behavior of the process. This criterion highlights a critical case which will be studied in more detail in the following chapters. In the second chapter, we give a criterion for the possible unlimited growth in the critical case mentioned above. We apply this criterion to the example of a source-sink metapopulation with two patches of type source, *i.e.* the population of each patch goes to extinction if we do not take into account the migration. We prove that there is a possible survival of the metapopulation. In the third chapter, we focus on the behavior of our critical process when it tends to infinity. We prove a convergence in distribution of the scaled process to a gamma distribution, and in a more general framework, by also rescaling time, we conjecture a distribution limit of a function of our process to the solution of a stochastic differential equation called a squared Bessel process. In the fourth and last chapter, we study hitting times of some compact sets when our process does not tend to infinity. We give nearly optimal bounds for the tail of these hitting times. If the process goes to extinction almost surely, we deduce from these bounds precise estimates of the tail of the extinction time. Moreover, if the process is a Markov chain, we give a criterion of null recurrence or positive recurrence and in the latter case, we obtain a subgeometric convergence of its transition kernel to its invariant probability measure.