



HAL
open science

Etude analytique et expérimentale de l'usinage d'un tube mince

Artem Gerasimenko

► **To cite this version:**

Artem Gerasimenko. Etude analytique et expérimentale de l'usinage d'un tube mince. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM; Université Technique d'État de Moscou, 2016. Français. NNT: 2016ENAM0076 . tel-01478352

HAL Id: tel-01478352

<https://pastel.hal.science/tel-01478352>

Submitted on 28 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Science des Métiers de l'ingénieur

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Mécanique "

présentée et soutenue publiquement par

Artem GERASIMENKO

le 14 décembre 2016

Etude analytique et expérimentale de l'usinage d'un tube mince

Directeur de thèse : **Philippe LORONG**

Directeur de thèse : **Alexandre GOUSKOV**

Co-encadrement de la thèse : **Mikhail GUSKOV**

Jury

M. Benoit FURET,
M. Yann LANDON,
M. Grigory PANOVKO,
M. Philippe LORONG,
M. Alexandre GOUSKOV,
M. Mikhail GUSKOV,

Professeur des Universités, IRCCyN, Université de Nantes, France
Maitre de Conférence HDR, ICA, Université Toulouse, France
Professeur des Universités, IMASH RAN, Russie
Professeur des Universités, PIMM, Arts et Métiers ParisTech, France
Professeur des Universités, Université de Bauman, Russie
Maitre de Conférence, PIMM, Arts et Métiers ParisTech, France

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinateur
Examinateur

Remerciements

Ce manuscrit est le résultat d'un travail en collaboration entre l'équipe DYSCO (Dynamique Structures Système et Contrôle) dans le laboratoire PIMM (Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux), Arts et Métier Paristech et le département Mécanique appliquée, à l'Université Bauman, à Moscou.

Je souhaite tout d'abord adresser ma reconnaissance la plus profonde à mes deux directeurs de thèse, pour toute l'aide qu'ils ont pu m'apporter, tout le temps qu'ils ont pu me consacrer et tout le savoir qu'ils ont pu me transmettre : Alexander GOUSKOV, grâce à qui j'ai découvert le domaine de l'usinage et qui m'a donné la possibilité de réaliser ces travaux de recherche en collaboration entre la France et la Russie, et Philippe LORONG, pour toutes les connaissances en mécanique qu'il m'a transmises ainsi que pour les longues soirées passées ensemble lors de la rédaction du manuscrit.

Je souhaite également remercier Mikhail GUSKOV pour son co-encadrement. Il était toujours disponible pour m'encourager à travailler plus.

Je remercie les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer mes travaux de thèse.

Je voudrais dire aussi un grand merci à mes amis Dmitry BONDARENKO, Fedor ANDREEV, Vera ROUBAKHINA, pour leur soutien et leurs conseils, qui m'ont aidé lorsque j'ai rencontré des difficultés au cours de ma thèse.

Je tiens également à remercier Jérôme Duchemin, ainsi que le personnel technique du PIMM, grâce à qui j'ai pu réaliser la partie expérimentale de mes travaux, et le personnel administratif du PIMM et de l'université Bauman, et plus particulièrement Farida ZIDEKHILE et Ludmilla REZCHIKOVA, pour leur contribution dans l'organisation de ma thèse en collaboration entre la France et la Russie,

Je remercie aussi vivement tous ceux qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure : mes collègues thésards et tout le personnel du PIMM et de l'Université Bauman...Merci à eux pour leur accueil chaleureux, leur sympathie et leur soutien et pour tous les bons moments qu'on a passé ensemble.

Et enfin, j'aimerais remercier ici ma famille. C'est grâce à votre soutien et à vos encouragements que je suis aujourd'hui docteur...

Sommaire

Notations.....	7
Introduction générale.....	9
Chapitre 1. Dynamique de la coupe en tournage – Approches existantes.....	15
1.1 Vibrations auto-entretenues en usinage.....	15
1.2 Etude de la stabilité des opérations d’usinage en tournage.....	18
1.3 Modélisation de la dynamique du processus de coupe au cours du temps	23
1.4 Modèles pour la détermination de la force de coupe.....	26
1.5 Conclusion intermédiaire.....	28
Chapitre 2. Etudes expérimentales : opération de tournage et modèle d'effort de coupe.....	33
2.1 Dispositif expérimental et première analyse des mesures	33
2.1.1 Description du dispositif expérimental	33
2.1.2 Description du déroulement de l’essai	38
2.1.3 Analyse des mesures pour deux passes avant broutement.....	41
2.1.4 Analyse générale pour l’ensemble des passes	47
2.1.5 Analyse des mesures en déplacement lors de la passe avec broutement ..	50
2.1.6 Mesures des caractéristiques dynamiques de la pièce	58
2.2 Détermination du modèle d’efforts de coupe	60
2.2.1 Description de l'expérience et du montage expérimental	60
2.2.2 Résultats principaux.....	62
2.3 Conclusion intermédiaire.....	65
Chapitre 3. Modèle dynamique analytique de l’usinage par tournage du tube.....	69
3.1 Description du tube modèle.....	70
3.2 Équations du mouvement dans le référentiel tournant	71
3.3 Équations du mouvement dans le référentiel fixe	76
3.4 Équations du mouvement dans le référentiel fixe sous forme adimensionnelle	78
3.5 Effort de coupe et effet retard.....	80
3.6 Discrétisation des équations de mouvement.....	81

3.6.1	Expansion de la solution dans la direction circonférentielle	81
3.6.2	Expansion de la solution dans la direction axiale	86
3.6.3	Application de la méthode de Galerkin.....	89
3.7	Le système d'équations sous forme matricielle	94
3.8	Le problème aux valeurs propres.....	96
3.9	Ajout d'un amortissement	98
3.10	Conclusion intermédiaire	99
Chapitre 4. Etude de la stabilité du processus de coupe pour le tournage.....		103
4.1	Stabilité en usinage - Équation avec un retard	103
4.2	Stabilité avec un modèle analytique de coque à un degré de liberté	108
4.2.1	Mise en équation	108
4.2.2	Analyse des résultats pour le cas à 1 degré de liberté.....	112
4.3	Stabilité avec un modèle analytique de coque à plusieurs degrés de liberté....	117
4.3.1	Mise en équation	117
4.3.2	Analyse des résultats pour le cas à plusieurs degrés de liberté.....	120
4.3.3	Influence de l'amortissement sur les limites de stabilité	125
4.3.4	Comparaison du modèle à un degré de liberté avec le modèle à plusieurs degrés de liberté.....	126
4.3.5	Instabilité en fin de passe	127
4.4	Optimisation des opérations de tournage	131
4.4.1	Cas de la 16 ^{ème} passe	131
4.4.2	Optimisation pour un ensemble de passes	131
4.5	Conclusion intermédiaire.....	135
Conclusion générale		139
Références bibliographiques		141
Annexe		147
Annexe A.....		147
Annexe B.....		148
Annexe C.....		149

Notations

A_p	Profondeur de coupe
f	Avance par tour
V_c	Vitesses de coupe
u, v, w	Composantes du déplacement de la surface moyenne selon les directions axiale, circonférentielle et radiale
μ, E, ρ	Coefficient de Poisson, module d'élasticité, masse volumique
Ω	Vitesse angulaire de la coque
L, R, h	Longueur, rayon et épaisseur de la coque
XYZ	Système de coordonnées tournant, lié à la pièce
$\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$	Système de coordonnées fixe, lié au bâti de la machine-outil
K, Π	Energie cinétique, énergie potentielle
q_i, P_i	Déplacement généralisée, force généralisée
ρ_h	Masse surfacique de la coque
P_u, P_v, P_w	Composantes des forces de surface agissant sur la coque dans les directions axiale, circonférentielle et radiale
e_u, e_v, e_w	Cosinus directeurs
$P_u^{sum}, P_v^{sum}, P_w^{sum}$	Composantes de la force de coupe (cumul de l'effort statique et de l'effort dynamique)
P_{0u}, P_{0v}, P_{0w}	Composantes de la force nominale de coupe
P_u, P_v, P_w	Composantes de la force de coupe ponctuelle associée à la perturbation
δ_D	Fonction de Dirac
x_p, ψ_p	Coordonnées de la position de l'outil dans les directions longitudinale et circonférentielle
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$	Composantes du déplacement de la surface moyenne selon les directions axiale, circonférentielle et radiale, dans le référentiel fixe
T	Période de rotation
T_*	Echelle de temps inhérente à la dynamique de la pièce
\tilde{T}	Période adimensionnée de rotation

τ	Paramètre temporel adimensionnel
χ	Raideur apparente de coupe
$\tilde{\chi}$	Coefficient adimensionnel de raideur de coupe
$\partial_{\alpha}^* = \partial^*/\partial\alpha$	Dérivée partielle vis-à-vis d'une variable α
$m \in \{1, 2, 3 \dots M\}$	Indice d'harmonique axiale
k	Indice d'harmonique circonférentielle
$\underline{\mathbf{p}}_k$	Vecteur de chargement associé à l'harmonique k
ω_i	i-ème pulsation propre
α, β	Constantes de Rayleigh (amortissement)
K_f	Pression spécifique de coupe
f_n	Fréquence naturelle du système
ζ	Taux d'amortissement
f_c	Fréquence d'oscillation à la limite de la zone de stabilité
A_p^{lim}	Profondeur limite de coupe
ζ_{km}	Coefficient d'amortissement pour la forme propre choisie
\tilde{f}_{km}	Fréquence propre adimensionnée pour la forme propre choisie
κ	Ratio de raideur de coupe
$\chi_{\text{exp}} = \frac{\partial P_w}{\partial A_p} \Big _{A_{p0}}$	Raideur de coupe nominale, obtenue expérimentalement
f_{rot}	Fréquence de rotation de la pièce
x_p	Position de l'outil

Introduction générale

La nécessité de créer des pièces ayant des formes géométriques complexes et des surfaces de haute qualité incite au développement de nouvelles techniques d'usinage. Ce procédé de fabrication tient une place importante dans l'industrie manufacturière car sur le nombre total de pièces produites dans le monde, 15% font appel à de l'usinage [LEO98]. La recherche constante de l'augmentation des performances des systèmes induit un accroissement constant de la précision des surfaces fonctionnelles qui sont généralement obtenues par usinage. Cet accroissement de performance passe également par l'utilisation de nouveaux matériaux qui exigent parfois de nouvelles techniques d'usinage.

Un cas particulier est l'usinage de pièces cylindriques à paroi mince. L'étude de l'usinage de ce type de pièce est pertinente car ces pièces font l'objet d'une large diffusion dans divers domaines industriels exigeants : la construction aéronautique (notamment moteurs), la construction navale, la production de fusées, ...

La faible rigidité de ces pièces peut conduire à la survenue de vibrations durant leur usinage. Ces vibrations, qui trouvent leur source dans différents mécanismes, ont généralement des effets négatifs sur la surface usinée et/ou sur la tenue des outils et des machines. Elles peuvent exceptionnellement être recherchées comme c'est le cas pour le forage profond [LAN15]. L'impact négatif des vibrations sur le processus de coupe a, par exemple, été observé lors de l'usinage par tournage du tambour de turboréacteur (CFM-56, SAFRAN/Snecma) présenté figure 1.1. Pour cette pièce, très mince, un dispositif amortissant a été développé pour limiter les vibrations durant l'usinage de manière à obtenir un état de surface ayant les qualités géométriques requises.



Figure 1.1 – Exemple de pièce

Il a été établi expérimentalement [LOR11, ARN61] que, pour certains régimes d'usinage de pièces cylindriques à paroi mince, un processus de vibrations auto-entretenues se met en place. Les

vibrations observées, qui s'organisent selon des formes modales (figure 1.2) pour des fréquences proches des fréquences naturelles de la pièce, se traduisent par une détérioration brutale de la surface usinée (figure 1.3) ainsi que par une réduction de la durée de vie de l'outil.

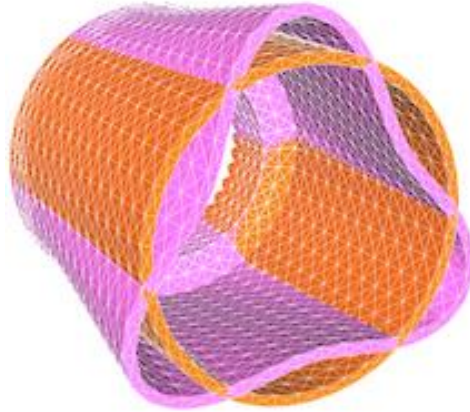


Figure 1.2 – Forme modale intervenant lors du processus auto-oscillant observé lors de l'usinage d'un tube cylindrique à paroi mince

Dans la littérature, ces vibrations sont identifiées comme étant généralement des vibrations de régénération. En effet la section du copeau à un instant donné dépend de la matière laissée par l'outil lors du tour précédent. Un mécanisme de retard est ainsi présent qui peut, si les conditions sont « favorables », conduire à une auto-excitation des vibrations de la pièce. Il s'agit du phénomène de broutement régénératif appelé '*chatter*' en Anglais. Ces oscillations affectent le microrelief de la pièce et provoquent des défauts géométriques de type ondulation (figure 1.3).

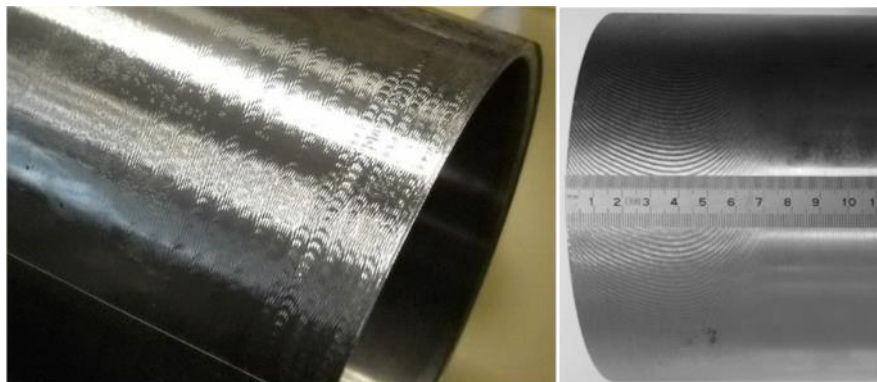


Figure 1.3 – Surface de la pièce après tournage avec des vibrations de broutement régénératif

Il est donc important d'éviter l'apparition de ce phénomène qui dépend, pour un couple outil-matière donné, principalement des conditions de coupe choisies : vitesse de coupe, profondeur de passe, avance par tour et de la flexibilité dynamique du système. Pour trouver les conditions de coupe optimales, assurant une haute performance et la qualité requise de la surface de la pièce, la réduction

de l'usure de l'outil et l'élimination des vibrations dangereuses, il est nécessaire d'analyser la stabilité du processus de coupe et de construire ce qu'on appelle des diagrammes de stabilité. Ces diagrammes définissent, pour ce qui est du broutement régénératif, des zones (paramètres d'usinage) pour lesquelles l'usinage est a priori stable et des zones où l'usinage est a priori instable. Une particularité des pièces à paroi mince est que l'enlèvement de matière affecte de manière significative le comportement dynamique de celle-ci (perte de masse et de rigidité) durant la passe. Il est donc nécessaire de prendre cela en compte pour éviter la survenue du broutement tout au long de l'opération d'usinage considérée.

Ce travail de thèse se concentre sur l'étude du comportement dynamique des tubes minces et sur la survenue du broutement régénératif en cours d'usinage. L'approche proposée vise à permettre un choix rapide et efficace des conditions de coupe, et notamment des profondeurs de passe, pour cette opération d'usinage. Pour cela nous proposons de mettre en place un modèle mécanique analytique du tube (modèle de coque mince utilisant un nombre réduit de degrés de liberté) de manière à réduire les coûts numériques et à faciliter l'analyse du phénomène. L'impact de la richesse du modèle sur les résultats sera étudié (nombre de degrés de liberté) ainsi que de la prise en compte de l'enlèvement de matière (évolution du comportement dynamique). Afin de valider l'approche une expérience a été mise en place et sera également présentée dans ce mémoire.

Le chapitre 1 est dédié à une synthèse bibliographique sur l'étude de la dynamique de la coupe et se concentre plus particulièrement sur le tournage. Dans ce premier chapitre nous abordons également la formulation des lois de coupe, ingrédient nécessaire pour prédire les efforts de coupe en fonction de l'engagement de l'outil dans la matière, et donc nécessaire pour prédire la stabilité des opérations d'usinage. Nous présentons ensuite, dans le chapitre 2, l'expérience mise en place. Une première analyse des phénomènes observés y est donnée qui permet de mieux appréhender le phénomène de broutement pour le cas étudié. L'identification de la loi de coupe utilisée par la suite est également abordée dans ce chapitre. Nous détaillons ensuite, dans le chapitre 3, l'élaboration du modèle analytique choisi pour le tube, basé sur un modèle de coque mince. Ce dernier est utilisé, dans le chapitre 4, pour l'analyse de la stabilité de l'opération de tournage considérée. Cette analyse se base sur une étude en perturbation autour des points de fonctionnement étudiés. L'algorithme mis en place, son exploitation et la confrontation avec les résultats expérimentaux est également abordée dans ce chapitre. Une conclusion générale à ce travail est enfin donnée.

Chapitre 1

Dynamique de la coupe en tournage – Approches existantes

Sommaire

1.1	Vibrations auto-entretenues en usinage.....	15
1.2	Etude de la stabilité des opérations d'usinage en tournage.....	18
1.3	Modélisation de la dynamique du processus de coupe au cours du temps	23
1.4	Modèles pour la détermination de la force de coupe.....	26
1.5	Conclusion intermédiaire.....	28

Chapitre 1. Dynamique de la coupe en tournage – Approches existantes

Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse des travaux existants et portant sur l'étude des phénomènes dynamiques en usinage. Dans la section 1.1, nous introduisons les travaux portant sur l'évolution historique de l'analyse des vibrations auto-entretenues, en situant le phénomène de broutement régénératif. Dans la section 1.2, nous nous concentrons sur les études relatives à la stabilité des opérations d'usinage en tournage (nous ferons cependant ponctuellement référence à des travaux en fraisage), l'étude du tournage de pièces minces flexibles étant au centre de ce mémoire. Nous présentons ensuite succinctement (section 1.3) les travaux portant sur la mise en œuvre d'approches temporelles en tournage, approches complémentaires de celles dédiées à la stabilité. Enfin, section 1.4, nous faisons, sans rechercher à être exhaustif, une présentation de modèles servant à la prédiction des efforts de coupe, modèles essentiels à la prédiction du broutement régénératif.

1.1 Vibrations auto-entretenues en usinage

Le manque de rigidité de l'outil, ou la grande souplesse de la pièce à usiner, lors du processus de coupe des métaux, peut conduire à l'apparition de vibrations auto-entretenues. Les premiers travaux relatant ce phénomène sont ceux de Taylor [TAY22]. Cet auteur décrit notamment les facteurs qui influent sur les oscillations de l'outil pendant le tournage. Jusque dans les années 30, la théorie dominante lie l'origine des vibrations au décollement des copeaux à une fréquence proche de la fréquence propre du système et, par conséquent, conclut que les vibrations sont de nature forcée. Il ne s'agit cependant que d'une piste d'explication qui n'a pas été prouvée expérimentalement. Drozdov [DRO37] est le premier à proposer un mécanisme pouvant expliquer des vibrations auto-entretenues. Pour cela, il suggère que ces dernières proviennent de l'action combinée des forces de coupe et du frottement entre la pièce et l'outil (phénomène s'apparentant à du stick-slip). Une autre cause de vibrations auto-entretenues, proposée par Tlusty et Spacek [TLU54], trouve son origine dans le couplage de modes [Fig. 1.4]. L'outil peut alors décrire un cycle de forme elliptique vis-à-vis de la pièce (2 directions de vibration avec une différence de phase), au cours duquel l'énergie perdue durant la phase A vers B (déplacement dans le sens de la coupe) peut être plus petite que celle gagnée durant la phase B vers A. Si la différence d'énergie compense ou dépasse la dissipation présente dans le système dynamique, le cycle a tendance à être auto-entretenu, voire à croître.

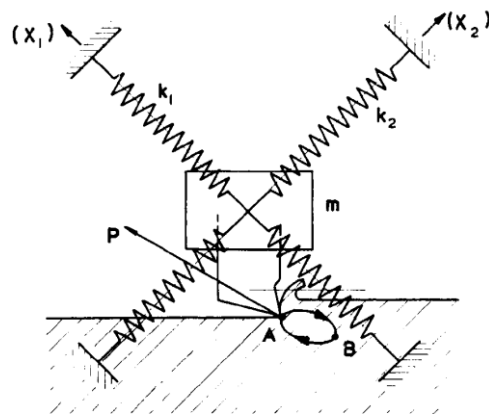


Figure 1.4 : Couplage de modes pour un système à 2 degrés de libertés [TLU54]

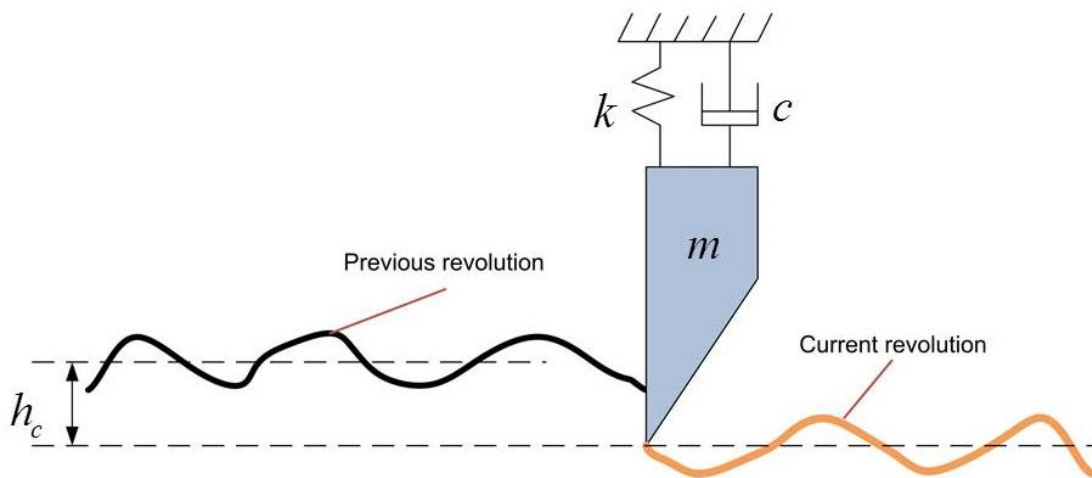


Figure 1.5 – Effet régénératif : dépendance de la section coupée au passage de l’outil lors du tour précédent

L'un des tournants concernant les vibrations auto-entretenues en usinage eut lieu à la fin des années 50 avec la mise en évidence du broutement régénératif (en Anglais « *regenerative chatter* »). Les premiers travaux sur ce sujet sont ceux d’Amosov [AMO51], de Merrit [MER65], de Tlusty et Polacek [TLU63], et de Tobias et Fishwick [TOB58]. Ces auteurs ont montré qu’en tournage, ce phénomène peut en effet prendre place dès que la section coupée par l’outil dépend simultanément *i*) de la position de ce dernier par rapport à la pièce (compte tenue de leurs vibrations relatives) et *ii*) de la trace laissée par l’outil lors de son passage précédent (tour précédent de la pièce, Figure 1.5). En fraisage il s’agit de l’interaction entre le passage de deux dents successives. L’outil (la dent) qui passe régénère ainsi la surface laissée lors de son dernier passage (passage de la dent précédente en fraisage). Ces auteurs ont montré qu’à partir d’une profondeur de passe critique (ou d’une largeur de coupe critique) un phénomène de vibrations auto-entretenues s’instaure. Ces vibrations ont tendance à s’amplifier, ce qui conduit à une détérioration de la géométrie de la surface usinée ainsi qu’à une

augmentation de l'usure de l'outil. La modélisation de cet effet régénératif conduit à une équation différentielle avec un terme de retard (géométrie de la surface laissée lors du tour précédent) qui, dans le domaine de Laplace, est associé à une fonction de transfert dont la stabilité dépend de la vitesse de rotation de la broche (terme de retard), des caractéristiques dynamique du système pièce/outil et de la relation liant les efforts de coupe à l'engagement de l'outil dans la matière. Cette approche est basée sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, dont celle de l'état quasi-stationnaire des conditions de coupe, et sur une linéarisation du comportement du système. Un résultat classique de l'étude du broutement régénératif est le tracé de diagrammes de stabilité, à partir desquels il est possible de visualiser (et donc de déterminer) les paramètres d'usinage pour lesquels l'opération d'usinage est stable et ceux pour lesquels l'opération est instable. Nous reviendrons plus en détail dans le chapitre 4 sur l'écriture de cette fonction de transfert et sur son étude et nous proposons, dans la section 1.2 qui suit, une synthèse des travaux portant sur l'étude de la stabilité des opérations d'usinage.

L'étude des vibrations auto-entretenues peut également se faire au travers d'analyses temporelles qui sont au plus proche du déroulement réel d'une opération d'usinage. L'intérêt de ces analyses réside dans le fait qu'elles permettent de prendre en compte le caractère non linéaire du processus de coupe (ou d'autres parties du système usinant), ainsi que les phénomènes transitoires provenant de l'évolution des conditions de coupe le long de la trajectoire de l'outil. Les inconvénients sont les coûts numériques (surtout si on veut tester plusieurs paramètres d'usinage) et qu'il n'existe pas de critères simples permettant de conclure de façon définitive sur la stabilité d'une opération d'usinage (pour un jeu donné de paramètres). Nous revenons sur les approches temporelles dans la section 1.3 de ce chapitre.

Enfin, la dernière démarche est l'approche expérimentale (la plus répandue dans le milieu industriel), qui peut à la fois être utilisée pour tester différentes conditions de coupe avec observation des effets des vibrations et surtout de la surface usinée [SEL75], [WAN02a] ou pour surveiller en temps réel l'usinage de manière à pouvoir réajuster les paramètres de coupe dès que la survenue de vibrations auto-entretenues est suspectée [FUR05],[SEG10],[MAT14]. Si la seconde démarche est très prometteuse pour contrer, voire éviter l'apparition du broutement régénératif, la première est, quant à elle, très coûteuse et une approche utilisant la modélisation numérique peut sensiblement en réduire les coûts financiers et rendre le choix de conditions de coupe plus pertinent.

1.2 Etude de la stabilité des opérations d'usinage en tournage

La modélisation dans le domaine fréquentiel est la plus répandue pour l'étude de la stabilité des opérations d'usinage. Elle présente l'avantage de conduire à une construction, désormais relativement classique, de ce que l'on appelle diagrammes de stabilité. La figure 1.6 donne un exemple d'un tel diagramme. En règle générale, ces diagrammes représentent l'évolution de la valeur critique d'une grandeur, valeur pour laquelle on est à la frontière de la stabilité, en fonction de la vitesse de rotation de l'outil ou de la pièce. Cette grandeur peut être la largeur de coupe, la profondeur de coupe, la raideur de coupe. Le graphique précise ainsi la frontière de la zone de stabilité du processus de coupe. Les points du diagramme (qui correspondent à des paramètres du régime de coupe) qui se trouvent dans la zone de stabilité (indiqués par une étoile sur la figure) conduisent à un processus de la coupe stable. Les points qui se trouvent dans zone d'instabilité (indiqués par un carré) conduisent à un processus d'oscillations auto-entretenues, le broutement.

Grâce à ces diagrammes, il est possible de déterminer des conditions de coupe optimales avec un taux d'enlèvement de matière maximal sans atteindre une instabilité, et donc permettant de préserver la qualité géométrique de la surface de la pièce.

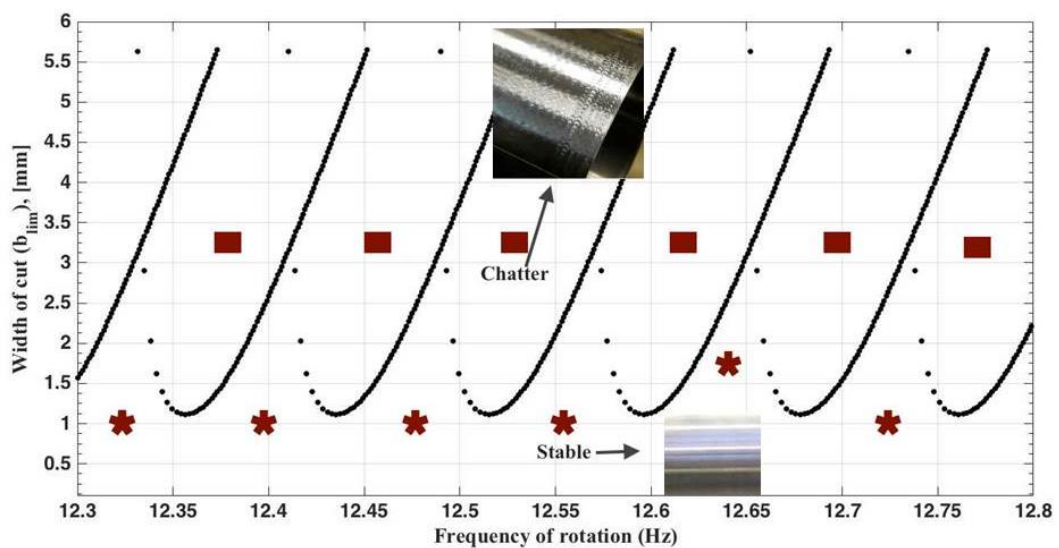


Figure 1.6 – Exemple de diagramme de stabilité

Pour construire les diagrammes de stabilité, une modélisation du processus de tournage/fraisage est nécessaire. Cette modélisation intègre un modèle dynamique (pièce et/ou outil) comprenant un ou plusieurs degrés de liberté, les paramètres technologiques du procédé (avance, vitesse de coupe, profondeur de coupe, etc.) et un modèle de prédiction des efforts de coupe en fonction de l'engagement instantané de l'outil (loi de coupe).

Afin de proposer une analyse synthétique des travaux existants dans le domaine de l'étude du broutement en tournage et d'identifier l'intérêt de chacun vis-à-vis de ce travail de thèse, nous avons choisi d'extraire les caractéristiques suivantes pour chacun d'entre eux :

- ✓ Le nombre de degrés de liberté du système dynamique,
- ✓ La prise en compte de la dynamique de la pièce en précisant si :
 - suite au déplacement de l'outil, une évolution de la raideur locale de la pièce est introduite,
 - suite à l'enlèvement de matière, une évolution du comportement dynamique est introduite (perte de masse et de raideur),
 - la modélisation se base sur un modèle dynamique analytique.
- ✓ La prise en compte de la dynamique de l'outil,
- ✓ La prise en compte de la géométrie de l'outil dans l'interaction outil-matière,
- ✓ La prise en compte de non-linéarités,
- ✓ La comparaison avec des résultats expérimentaux.

La Table 1.1 établit un bilan du classement obtenu. Concernant la liste des papiers cités, nous nous sommes en partie appuyés sur l'état de l'art réalisé en 2012 par Siddhpura et Paurobally [SID12].

Pour ce qui est de la dynamique, la modélisation est caractérisée par le nombre de degrés de liberté du système (outil+pièce). Ces degrés de liberté définissent le mouvement de la pièce et/ou de l'outil, généralement selon une droite ou dans un plan tous deux perpendiculaires à l'axe de rotation de la pièce. Dans les références citées, les systèmes ont soit un degré de liberté (SDOF: comme "*single degree of freedom*" en Anglais) pour l'outil *ou* la pièce [TUR11, HAN74, DOM11], soit plusieurs degrés de liberté (MDOF: respectivement "*multiple degree of freedom*") pour l'outil *ou/et* la pièce [URB14, BUD07, OZL07, CHA06, WAN02b, MAH05, MEH02]. Selon les articles, soit seule la dynamique de l'outil est prise en compte et la pièce est considérée comme rigide (fig.1.7a) [TUR11, SOR12, URB14, HAN74, CHA06, DOM11], soit seule la dynamique de la pièce est considérée et l'outil est supposé rigide [MER65, SEG14, SUZ10, URB12, MEH02a, MEH02b] (fig.1.7b).



a) la pièce est considérée rigide [DOM11]

b) l'outil est considéré rigide [MER65]

Figure 1.7 – Exemples de modèles pour l'analyse de stabilité

		[MER65] [SUZ10]	[BUD07] [OZL07] [SOR12], [BEN06]	[DAS08]	[CHE06a], [CHE06b]	[VEL08], [SEK09]	[HAN74], [CHA06] [DOM11], [TUR11] [URB14]	[SEG14], [URB12], [WAN02b]	[CHA14*], [MAH05] [MEH02a,MEH02b*]
Nombre degrés de liberté	Sdof	x	-	x	x	x	x sauf [URB14] [CHA06]	-	-
	Mdof	x	x	x	x	x	dans [URB14] [CHA06]	x	x
Pièce	Pièce avec dynamique	x	x	x	x	x	-	x	x
	Evolution raideur locale	-	-	x	x	x sauf [VEL08]	-	x	x
	Evolution comp. dynamique	-	-	x	-	-	-	-	-
	Modèle analytique	-	-	x	x	x sauf [VEL08]	-	x sauf [URB12]	-
Outil	Outil avec dynamique	-	x	-	x	x	x	-	x sauf [MEH02a, MEH02b]
Interaction outil-matière	Géométrie d'outil dans la force de coupe	-	x	-	-	-	-	x sauf [SEG14] [WAN02]	-
	Influence géométrie d'outil sur la stabilité	-	x	-	-	-	-	-	-
Nature analyse	Linéaire (L) ou non linéaire (NL)	L	L	NL	L	L	NL sauf [TUR11]	L sauf [SEG14]	L
	Résultats expérimentaux	x	x	x	x	x sauf [VEL08]	-	x sauf [WAN02]	x
	Années de publication	1965, 2011	2002, 2007, 2012	2008	2006	2008 2009	1974, 2006, 2011, 2014	2012 2002 2014	2004 2002 2014

Table 1 - Synthèse des travaux sur l'étude de stabilité en tournage

Nous détaillons ci-après 3 aspects qui nous semblent importants : les particularités liées à la prise en compte de la flexibilité de la pièce, l'influence de la modélisation de l'interaction outil-matière, et enfin, la prise en compte de non-linéarités dans l'analyse de la stabilité.

• Pièce flexible

Pour une pièce flexible, l'évolution de la raideur de la pièce sous l'outil, lorsque ce dernier se déplace, peut être significative. Cette évolution induit une modification du diagramme de stabilité et doit donc être prise en compte. C'est ce qui est montré dans les travaux de Chen et Tsao [CHE06a, CHE06b] où un modèle dynamique avec deux degrés de liberté est utilisé. La pièce (un cylindre plein)

y est modélisée à l'aide d'un modèle de poutre déformable (modèle analytique). Les auteurs ont montré comment la profondeur critique de coupe (et donc les lobes de stabilité), dans le cas où l'on prend en compte la déformation de la pièce, évolue pour différentes positions axiales de l'outil (figure 1.8).

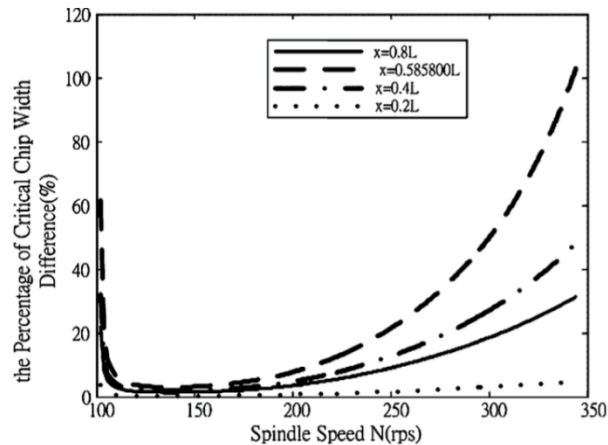


Fig. 1.8 – Evolution, pour différentes positions axiales de l'outil, de la limite de stabilité (en pourcentage de largeur de coupe vis-à-vis d'une valeur nominale) en fonction de la vitesse de rotation de la broche [CHE06a]

Un autre facteur est la prise en compte de l'impact de l'enlèvement de matière sur le comportement dynamique de la pièce. Ceci est d'autant plus sensible que la profondeur de passe est grande vis-à-vis de l'épaisseur de la pièce, ce qui est notamment le cas lors de l'usinage de tubes minces. En tournage, cet aspect est cependant très peu traité. Seuls Dassanayake et Suh [DAS08] proposent une telle prise en compte, et de manière très simplifiée, en séparant la pièce usinée en trois tronçons (tronçon non encore usiné – tronçon en cours d'usinage – tronçon déjà usiné) et en représentant chaque tronçon par un cylindre rigide. La prise en compte de ce facteur se rencontre plus fréquemment dans les articles traitant du fraisage de voiles minces. On cite à titre d'exemple les travaux de Bravo et al. [BRA05] et de Bolsunovskiy et al. [BOL13]. Dans ces travaux, il est précisé que tenir compte de l'enlèvement de la matière peut avoir une influence significative sur l'étude de la stabilité de la coupe.

Enfin, un dernier point discriminant est la démarche suivie pour élaborer le modèle dynamique de la pièce. On rencontre principalement trois approches : utilisation de modèles analytiques [DAS08, CHE06a, CHE06b, VEL08, SEK09, WAN02b], modélisation par éléments finis [CHA14, URB12, MAH05, MEH02a, MEH02b], ou enfin utilisation de résultats expérimentaux (mesure de fonctions de transfert) [MER65, TUR11, BUD07, OZL07, SUZ10].

Les approches analytiques se basent généralement sur des modèles de poutre [CHE06a, CHE06b, SEK09, WAN02b] et permettent une étude rapide et efficace de la stabilité en permettant de prendre en compte l'évolution de la raideur de la pièce sous l'outil. L'approche originale de Dassanayake et Suh [DAS08] précédemment citée utilise quant à elle des raideurs issues de modèles poutre pour relier les 3 tronçons. Ce modèle, très simple, reste néanmoins assez éloigné de la réalité d'une pièce qui se déforme sur toute sa longueur. Les approches utilisant des poutres peuvent être particulièrement performantes et fidèles si les pièces sont des arbres élancés. Pour les pièces de forme plus complexe, une modélisation par éléments finis est plus adaptée. Cette facilité se fait cependant au détriment de l'efficacité numérique, qui peut rapidement être problématique lors du tracé des lobes de stabilité.

Il est important de souligner que les travaux de Mehdi et al. [MEH02a, MEH02b] sont l'un des seuls à traiter de la stabilité en chariotage de pièces cylindriques à paroi mince. La figure 1.9 représente le schéma du dispositif expérimental utilisé par ces auteurs. Dans leurs travaux, qui comprennent une confrontation expérimentale [MEH02b], une modélisation par éléments finis est employée. Les effets de divers facteurs et conditions de coupe sur la stabilité de l'opération de coupe sont présentés. Cependant, les auteurs n'ont pas tracé les diagrammes des lobes de stabilité correspondants. En revanche, Chanda et al. [CHA14], pour des pièces cylindriques à paroi mince, également modélisées par EF, ont bien montré que les lobes de stabilité dépendent de la position axiale de l'outil.

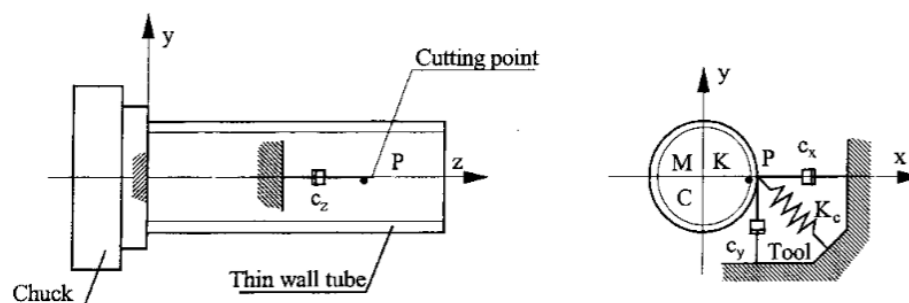


Figure 1.9 – Schéma d'un dispositif expérimental d'usinage de tubes minces [MEH02a, MEH02b].

• *Efforts de coupe*

La modélisation des efforts de coupe joue un rôle central pour l'étude de la stabilité. Plusieurs auteurs présentent ainsi des études sur l'impact de différentes caractéristiques de l'outil (rayon de bec, acuité d'arête de coupe) ainsi que de son orientation vis-à-vis de la matière coupée et de la vitesse de coupe sur les efforts de coupe et donc sur la stabilité [BUD07, OZL07, URB12]. On peut ainsi, à titre d'exemple, citer l'analyse présentée par Ozlu et Budak [OZL07], qui montre l'impact combiné de la

prise en compte du rayon de bec de l'outil et de son orientation sur la stabilité d'une opération de tournage. Dans cette étude, le caractère tridimensionnel de la coupe est abordé et il est notamment montré que dans le cas étudié la modélisation pour l'évaluation de stabilité peut néanmoins se réduire à une étude uni-directionnelle de manière à prendre en compte correctement la dépendance aux paramètres de l'outil.

- ***Approches non-linéaires***

Le dernier facteur dans notre classification concerne des modèles, que l'on peut qualifier d'avancés, qui tiennent compte des non-linéarités [URB14, DAS08, HAN74, CHA06, DOM11]. En plus de définir les zones d'instabilités, ces modèles permettent alors d'explorer le comportement supercritique des systèmes dynamiques. Ces approches proposent de ne pas faire l'hypothèse que de petites perturbations autour du point de fonctionnement (petits déplacements de l'outil vis-à-vis de la pièce) conduisent à une variation linéaire des efforts de coupe. Ceci est notamment nécessaire pour les très faibles profondeurs de passe (passes de finition) où de très faibles vibrations induisent une forte variation des efforts de coupe, voire même une perte de contact avec la pièce. A titre d'exemple, les travaux de Chandiramani et Pothala [CHA06] présentent une analyse très détaillée (basée sur une méthode de tir), qui prend en compte de nombreux phénomènes non linéaires : la discontinuité possible de la coupe (amplitudes de vibration importantes vis-à-vis de la profondeur de passe de l'outil qui peut sortir de la matière), un amortissement non linéaire (suite à la forte variation de l'interaction entre l'outil et la matière au niveau de la face en dépouille), le changement des angles de cisaillement et le frottement lors de la coupe. Cette étude utilise un modèle simplifié de tournage dans lequel seul l'outil est flexible et possède deux degrés de liberté. La modélisation proposée conduit à des équations différentielles non linéaires avec un terme de retard. Ces auteurs ont ainsi montré que l'augmentation de la profondeur de passe peut être la cause de l'augmentation de l'amplitude de la force de talonnage (contact entre la matière et la face en dépouille de l'outil) et de la sortie de l'outil de la matière qui, à son tour, provoque une augmentation de l'amplitude du broutement.

1.3 Modélisation de la dynamique du processus de coupe au cours du temps

Comme précisé précédemment, l'intérêt de mettre en place une approche temporelle pour étudier la coupe est de permettre l'étude des phénomènes transitoires et de rendre plus facile la prise en compte de phénomènes non-linéaires. Cette approche permet également de prendre en compte le caractère tridimensionnel de la coupe. Le fait d'avoir l'historique du mouvement de l'outil par rapport

à la matière permet en particulier de prédire la géométrie de la surface usinée et les défauts géométriques générés. Cela se fait cependant au détriment des temps de calcul qui peuvent être sensiblement plus importants que ceux nécessaires aux études de stabilité (pour les approches linéaires).

Afin d'être pertinents, les modèles utilisés pour les approches temporelles doivent intégrer :

- Un calcul à chaque instant de la section coupée par l'outil. Ce calcul dépend de la position relative de l'outil vis-à-vis de la pièce (vibrations relatives) et de la géométrie actuelle de la surface usinée là où intervient l'interaction (ce qui implique un modèle géométrique détaillé et évolutif de la surface usinée),
- Un modèle dynamique de l'outil prenant éventuellement en compte des changements de caractéristiques dynamiques lors de son déplacement (évolution de la configuration de la machine),
- Un modèle dynamique de la pièce dont la réponse dépend du déplacement de l'outil (ou plus précisément du lieu où sont appliqués les efforts de coupe) en prenant en compte les éventuels changements de ses caractéristiques dynamiques consécutifs à l'enlèvement de matière.

Pour ce qui est du tournage, nous avons trouvé 3 travaux différents utilisant des approches temporelles [GOU97, LAZ02, LOR11]. Dans ces travaux, une description tridimensionnelle est mise en place (dynamique du système et géométrie de la surface usinée). La figure 1.10 présente un exemple de modèle géométrique de la surface à usiner [LAZ02].

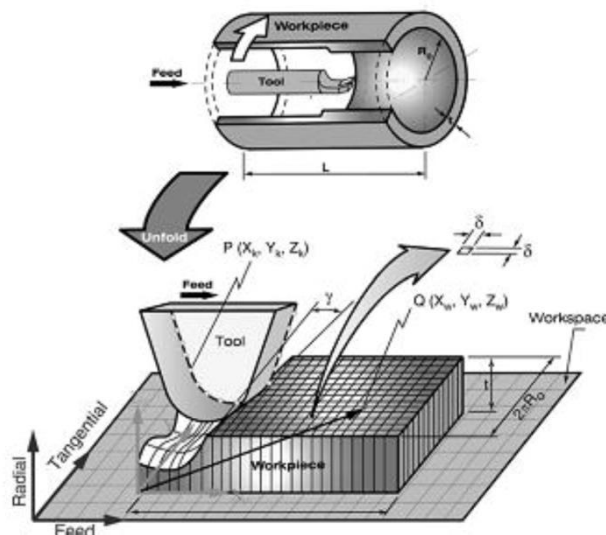


Figure 1.10 – Schéma d'un modèle géométrique de surface usinée adapté au processus de tournage d'un cylindre [LAZ02]

Ce modèle représente la surface de la pièce à l'aide de points équidistants le long des directions axiale et circonférentielle et utilise la position radiale pour donner la forme à surface. Ainsi la position radiale des points (qui évolue avec l'enlèvement de matière) permet de calculer la profondeur de coupe (le long de l'arête de coupe de l'outil) et également de représenter l'enlèvement de matière. Par souci de simplicité de représentation, la surface cylindrique de la pièce à usiner est remplacée par son image développée (déroulement de la surface cylindrique). D'autres modèles géométriques peuvent être utilisés pour décrire la surface usinée. Par exemple, Lorong et al. [LOR11] utilisent une représentation par dexels [VAN2006].

Dans la référence [GOU97], Goukov modélise la dynamique de la pièce grâce à un modèle de poutre qui ne prend pas en compte l'influence de l'enlèvement de matière sur les caractéristiques dynamiques. Dans la référence [LAZ02], la pièce est considérée comme rigide et la dynamique de l'outil est présentée à l'aide d'un modèle à deux degrés de liberté. Enfin, dans la référence [LOR11], Lorong et al. utilisent un modèle volumique EF (maillage composé de tétraèdres à 10 nœuds) pour la pièce. Dans cette référence, le comportement dynamique de la pièce évolue avec la position de l'outil mais n'intègre pas l'impact de l'enlèvement de matière (la figure 1.11).

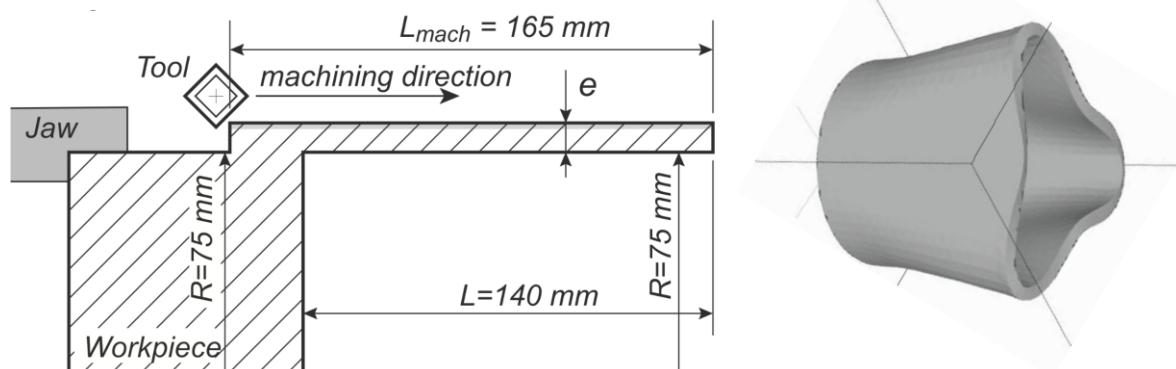


Figure 1.11 – Opération de chariotage étudiée dans [LOR11] – Forme modale impliquée dans le broutement observé lors de cet usinage

Ces différentes approches temporelles ont en commun de ne pas prédire directement la stabilité du processus de coupe pour différents paramètres de coupe (profondeur de passe, avance par tour, vitesse de rotation de la broche). Par conséquent, pour la détection du broutement pour différents paramètres, il est nécessaire d'avoir recours à plusieurs simulations, ce qui induit des durées de simulation très importantes (de quelques minutes à plusieurs heures pour chaque configuration étudiée).

1.4 Modèles pour la détermination de la force de coupe

Lors de l'analyse des effets dynamiques en usinage, l'interaction outil/matière joue un rôle central. Cette interaction se concrétise par la détermination (la prédiction) des efforts de coupe en fonction de l'engagement de l'outil dans la matière. Cet engagement est caractérisé par des épaisseurs de coupe (dimension selon une direction perpendiculaire à l'arête de coupe) et des largeurs de coupes (dimensions parallèles à l'arête de coupe). La force de coupe est généralement dissociée en deux contributions : la force de coupe de cisaillement, nécessaire à la formation par cisaillement du copeau (découpe du matériau), qui est principalement associée à l'effort appliqué sur la face de coupe, et la force de frottement et de retour élastique du matériau sur la face arrière de l'outil (face en dépouille), qui glisse sur la surface usinée et qui est donc associée à la face en dépouille. Ces deux contributions à la force de coupe sont de natures physiques différentes et sont donc comptabilisées dans les modèles mathématiques de façons différentes. Toutes deux sont des grandeurs vectorielles et la manière de calculer leurs composantes différencie les approches que l'on peut trouver dans la littérature. On peut classer les modèles en fonction de leur complexité de la manière suivante :

1) Modèles ne différenciant pas les deux contributions, et proposant une dépendance linéaire de chacune des composantes de la force de coupe à la section coupée [SMI93]. Ainsi pour chaque composante (en tournage, composante radiale F_r , axiale F_a et circonférentielle F_t), un unique paramètre permet de calculer son amplitude à partir de la section coupée (équation 1.1). Ce paramètre est une pression spécifique de coupe qui est déterminée à partir d'essais de coupe instrumentés (mesure des efforts).

$$F_q = K_q b_j h_j, \quad q = r, t, a \quad (1.1)$$

La longueur b_j est la largeur de coupe (dimension de la section coupée parallèlement à l'arête de coupe), h_j est l'épaisseur de coupe (dimension de la section coupée perpendiculairement à l'arête de coupe), et K_r, K_t, K_a sont les pressions spécifiques de coupe.

Les différents paramètres K_{ij} du modèle dépendent des caractéristiques mécaniques du matériau de la pièce à usiner, de la géométrie de l'outil et notamment de celle du bord tranchant, du revêtement de l'outil, de son usure, et éventuellement de la vitesse de coupe.

2) Modèles linéaires différenciant les deux contributions et comprenant deux paramètres expérimentaux pour chaque composante de l'effort de coupe [ALT00, LEE96]. L'un des paramètres, qui caractérise la force de coupe de cisaillement, est en facteur de la section coupée (et correspond

encore à une pression spécifique de coupe) et l'autre, qui caractérise la force de frottement et de retour élastique, est en facteur de la longueur de contact sur la face en dépouille parallèlement à la vitesse de coupe :

$$F_q = K_{qc} b_j h_j + K_{qp} dS_j, \quad q = r, t, a, \quad (1.2)$$

où K_{tc}, K_{rc}, K_{ac} sont les pressions spécifiques de coupe pour les efforts associés à la face de coupe, et K_{qp}, K_{rp}, K_{ap} sont les paramètres associés à la force de coupe sur la face en dépouille, et enfin dS_j est la longueur de contact sur la face en dépouille parallèlement à la vitesse de coupe. Ce modèle est largement utilisé dans la littérature et permet, dans de nombreux cas, une bonne prédiction des efforts de coupe [SMI93].

3) Modèle non linéaire de force de coupe. Ce modèle de la force de coupe est basé sur le modèle précédent. Il introduit simplement une dépendance des paramètres K_{qc} à l'épaisseur de coupe : $K_{qc} = K_{qc}(h_j)$. Le principal avantage de ce modèle est d'améliorer la qualité de la prédiction des efforts de coupe lorsque ces derniers dépendent de manière non-linéaire de l'épaisseur de coupe. Cet enrichissement permet également dans certains cas de mieux tenir compte des changements dans la géométrie de l'arête de coupe. A titre d'exemple, on peut citer Lazoglu [LAZ03] qui introduit cette dépendance des paramètres K_{qc} à l'épaisseur de coupe. Une dépendance vis-à-vis de la vitesse de coupe et de l'angle normal au niveau du bec de l'outil est également introduite. D'autres travaux [LAM05] introduisent des coefficients K_{qp} qui dépendent de l'angle d'hélice de l'outil. Si ce dernier est variable, il est proposé d'utiliser une interpolation polynomiale de ces coefficients le long de l'arête de coupe.

Pour mettre en pratique les modèles des forces de coupe présentés ci-dessus, il est nécessaire de déterminer les coefficients en se basant sur des données expérimentales. D'une manière générale, plus les modèles sont complexes, plus ils peuvent être prédictifs mais plus leur identification est délicate, et ce d'autant plus s'ils sont non-linéaires. Dans le cas d'études en perturbations, comme cela est le cas pour ce travail, il est important d'avoir une connaissance précise de l'évolution des efforts de coupe au voisinage des points de fonctionnement étudiés. Une identification de loi de coupe, sur le couple outil-matière nous concernant, a été menée durant ce travail et est présentée dans la section 2.2 du prochain chapitre.

1.5 Conclusion intermédiaire

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synthèse des travaux portant sur l'étude des effets dynamiques en usinage, et plus particulièrement en tournage. Cette synthèse nous a montré que la recherche dans ce domaine est encore à ce jour très active. Nous avons considéré les principaux mécanismes connus d'excitation des vibrations auto-entretenues lors de la coupe, et en particulier celles provenant d'un effet régénératif. Il existe par ailleurs deux approches pour l'étude de la dynamique du processus de coupe : celle liée à l'étude de la stabilité du processus pour des conditions quasi-stationnaires de coupe et conduisant à la construction de diagrammes de stabilité et celle basée sur des simulations dans le domaine temporel. Chacune des deux techniques a ses avantages et ses inconvénients, mais les deux sont pertinentes et largement rencontrées dans la littérature. Ces deux approches comprennent un modèle de force de coupe, également appelé loi de coupe, qui est généralement empirique et dont les paramètres sont déterminés expérimentalement.

Concernant l'étude des effets dynamiques en tournage et la définition des limites de stabilité du processus de la coupe, nous pouvons conclure que :

- 1) les modèles à un degré de liberté ne sont pas toujours suffisants pour représenter la dynamique de l'usinage.
- 2) la prise en compte de l'évolution de la flexibilité de pièce en cours de passe, consécutive au déplacement de l'outil et à l'enlèvement de matière, peut s'avérer nécessaire. C'est notamment le cas pour les coques cylindriques à paroi mince, pour lesquelles on observe des variations qui peuvent avoir une influence significative sur la limite de stabilité.
- 3) la modélisation grâce à un modèle analytique du comportement dynamique de la pièce concerne, à ce jour, exclusivement des pièces pleines pouvant être représentées à l'aide de modèles poutre. Il n'existe pas à ce jour d'approches utilisant un modèle analytique pour les pièces ayant une forme de coque cylindrique à paroi mince.
- 4) l'introduction de modèles non-linéaires se justifie lorsque l'on s'intéresse à des opérations de finition ou que l'on cherche à étudier le comportement supercritique du système usinant.

En nous basant sur cet examen de la littérature, nous pouvons conclure que la modélisation analytique de la dynamique du procédé de tournage, par l'utilisation d'un système d'équations du mouvement d'une coque tournante avec effet retard (effet régénérateur), est un sujet complexe qui justifie qu'un travail y soit dédié.

La modélisation analytique proposée devra notamment prendre en compte les conditions aux limites requises ainsi que les facteurs inhérents à la modélisation du processus de coupe. Ce modèle analytique, qui va comprendre un nombre fini de degrés de liberté, doit permettre la prise en compte de la variabilité de la compliance dynamique (position outil et enlèvement de matière) afin d'obtenir une estimation des limites de stabilité de la coupe continue fidèle à la réalité.

Chapitre 2

Etudes expérimentales : opération de tournage et modèle d'effort de coupe

Sommaire

2.1 Dispositif expérimental et première analyse des mesures	33
2.1.1 Description du dispositif expérimental	33
2.1.2 Description du déroulement de l'essai	38
2.1.3 Analyse des mesures pour deux passes avant broutement.....	41
2.1.4 Analyse générale pour l'ensemble des passes	47
2.1.5 Analyse des mesures en déplacement lors de la passe avec broutement ..	50
2.1.6 Mesures des caractéristiques dynamiques de la pièce	58
2.2 Détermination du modèle d'efforts de coupe	60
2.2.1 Description de l'expérience et du montage expérimental	60
2.2.2 Résultats principaux	62
2.3 Conclusion intermédiaire.....	65

Chapitre 2. Etudes expérimentales : opération de tournage et modèle d'effort de coupe

Dans le cadre de ce travail, une expérience a été menée pour étudier la dynamique du tournage d'une pièce cylindrique à paroi mince. Ce chapitre se compose de deux parties. La première, la plus importante, décrit le dispositif expérimental que nous avons mis en place pour faire apparaître une ou plusieurs instabilités de broutement et permettre une étude des effets dynamiques typiquement présents lors du tournage de pièces cylindriques à paroi mince. Cette expérimentation a pour principal objectif de constituer une base de comparaison et de validation de l'approche analytique de prédiction de l'apparition de broutement mise en œuvre et étudiée dans les chapitres qui suivent. Ce dispositif a été conçu pour qu'en cours d'usinage la raideur radiale de la pièce sous l'outil diminue au fur et à mesure de l'avancement de l'outil et au fur et à mesure des passes, favorisant ainsi progressivement la survenue du broutement. Dans cette première partie, en plus de la description du dispositif expérimental et de son instrumentation, nous décrivons la démarche expérimentale et réalisons une première analyse des mesures.

La seconde partie de ce chapitre porte sur l'identification de la loi de coupe, qui constitue une donnée nécessaire pour la prédiction des seuils de broutement. La description du dispositif expérimental, des mesures effectuées et de la démarche d'identification est également donnée. Cette partie, relativement succincte, est indépendante de la précédente mais a été placée dans ce chapitre étant donné qu'elle en partage le caractère expérimental.

2.1 Dispositif expérimental et première analyse des mesures

2.1.1 Description du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d'une pièce (tenue par un mandrin à trois mors), de la machine, de l'outil et d'un ensemble de capteurs. Sur la figure 2.1 sont représentés les paramètres géométriques de la pièce utilisée dans l'expérience. Sur cette figure est également représentée la position de l'outil avant de débiter une passe. Il s'agit d'une passe de chariotage qui permet de réduire l'épaisseur du tube. La passe est répétée plusieurs fois jusqu'à apparition de vibrations de fortes amplitudes générant des défauts significatifs sur la surface usinée.

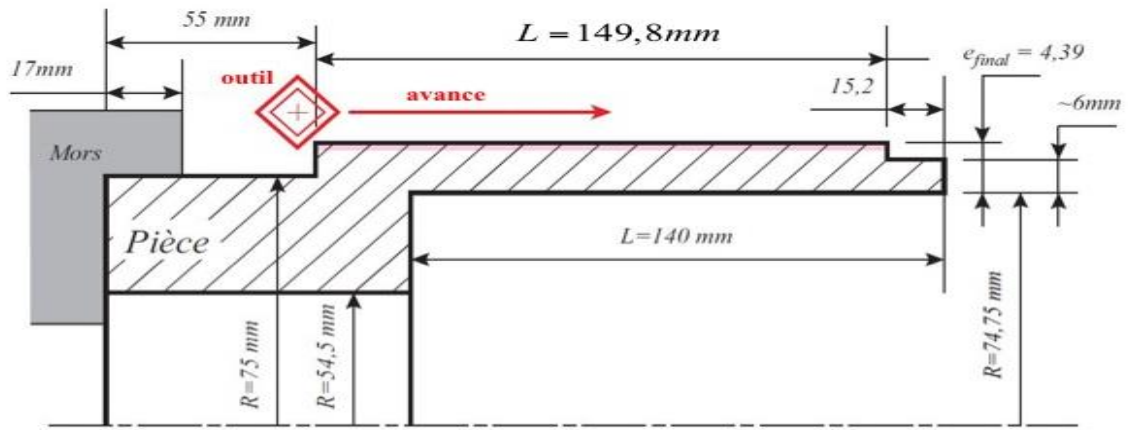


Figure 2.1 – Schéma la pièce étudiée montée dans les mors

Les paramètres de l'expérience sont les suivants:

Machine-outil :	MAZAK INTEGREGX 200
Adaptateur Capto :	Sandvik C6-ASHL – 381330-25
Porte-plaquette :	Sandvik MS SNR 2525 M12
Plaquette :	Sandvik SCMT 432-PR
Matériau de la pièce :	Acier C38
Vitesse de coupe :	360 m/min
Avance par tour:	0,25 mm/tour
Profondeurs de passe:	0,2; 0,8 et 1,0 mm

Nous avons alterné les passes importantes (profondeurs de passe de 0,8 ou 1 mm) avec des passes de faible profondeur (0,2 mm). Ces passes de 0,2 mm sont là pour régénérer la surface usinée, de manière à ce que les passes importantes soient toutes réalisées avec une épaisseur de coupe réelle au plus proche de l'épaisseur visée.

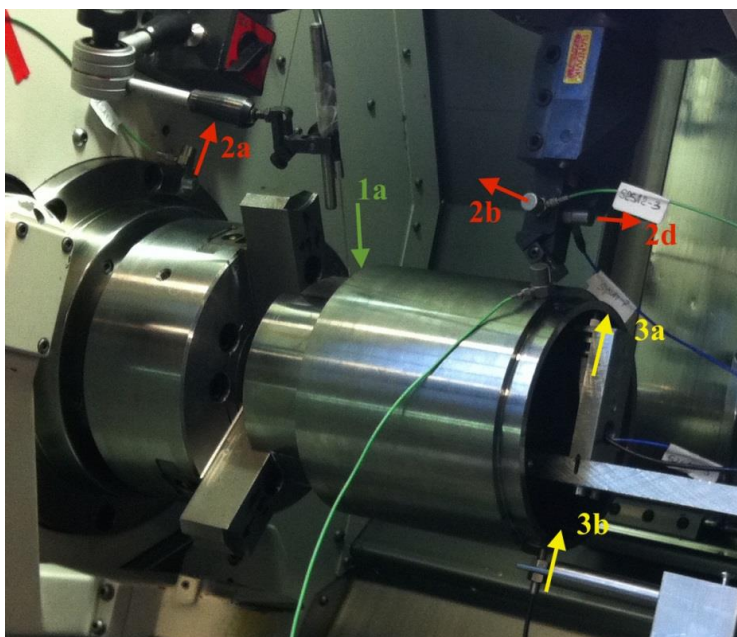
Durant l'expérience, trois types de capteurs ont été utilisés afin d'avoir des mesures en continu de l'état du système (tableau 2.1, figures 2.2, 2.4) : un capteur optique «Fotonic» mesurant des déplacements (1a), des accéléromètres (2a, 2b, 2d, 2c) et enfin des capteurs de déplacement à courants de Foucault (3a, 3b).

N° Capteur(*)	Légende sur le schéma	Mesure	Marque du capteur	Coefficient de sensibilité	Unité de la mesure
1		Force	Hammer (PCB)		mV/N
2	2a	Accélération	Kistler K-SHEAR	50	mV/g
3	2b	Accélération	Kistler K-SHEAR	50	mV/g
4	2c	Accélération	Kistler K-SHEAR	50	mV/g
5	2d	Accélération	Kistler K-SHEAR	50	mV/g
6	3a	Déplacement	KAMAN 01-01	10	V/mm
7	3b	Déplacement	KAMAN 01-02	8	V/mm
8	1a	Déplacement	Fotonic-KD300		
9	Sur la pièce	Accélération	Kistler K-SHEAR	50	mV/g

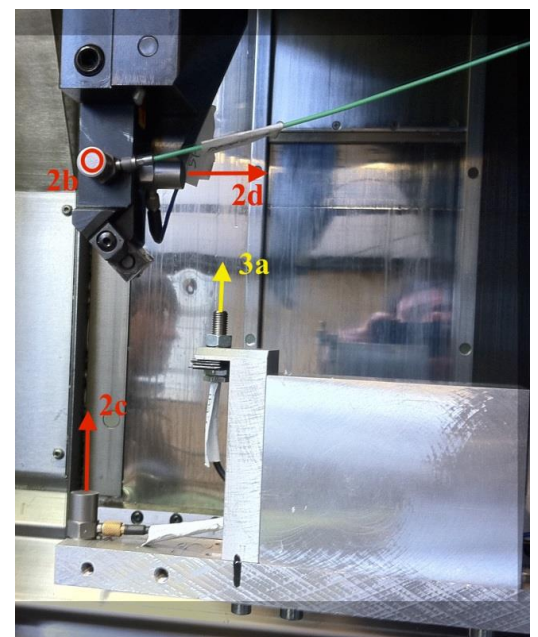
Tableau 2.1 – Récapitulatif des capteurs

Les principales mesures proviennent des capteurs de déplacement (3a, 3b), à l'aide desquels les vibrations de la surface de la pièce ont été enregistrées. À leur tour, ces données ont été complétées par des données provenant des accéléromètres (2a, 2b, 2c, 2d) et du capteur optique (1a).

Le capteur optique «Fotonic» (1a), dont le principe de mesure a été détourné, a été utilisé pour mesurer la vitesse de rotation de la broche pendant l'expérience. Pour cela, des bandes de ruban adhésif noir ont été collées à la surface de la pièce (figure 2.3). Ainsi, au cours de la rotation de la pièce (figure 2.2), ce capteur, en utilisant la sortie de signal électrique en volts, enregistre le changement de couleur de la surface (pour $U < 0.5V$, le capteur est en face de la bande noire et pour $U > 4V$, il est en face de la surface métallique), ce qui permet de déduire la fréquence de rotation de la broche.



a) Dispositif expérimental
(vue d'ensemble)



b) Instrumentation de l'outil (2b, 2d) et instrumentation mobile avec l'outil (2c, 3a)

Figure 2.2 – Photographies du dispositif expérimental avec capteurs

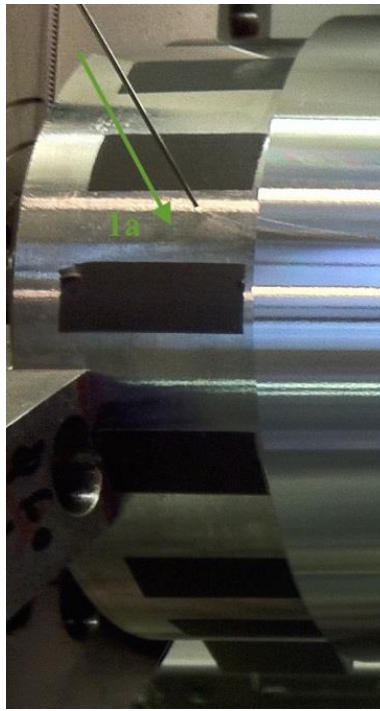


Figure 2.3 – Capteur optique : mesure de la vitesse de rotation lors des passes

Les accéléromètres (2a, 2b, 2d, 2c, figure 2.2) ne sont pas là pour mesurer les vibrations de la pièce mais pour contrôler, durant l'expérience, l'amplitude des vibrations : du support de la broche (accélération radiale, capteur (2a)), de l'outil (accélérations axiale et tangentielle, capteurs (2b) et (2d) respectivement), du support du capteur de déplacement (3a) (accélération radiale, capteur (2c)).

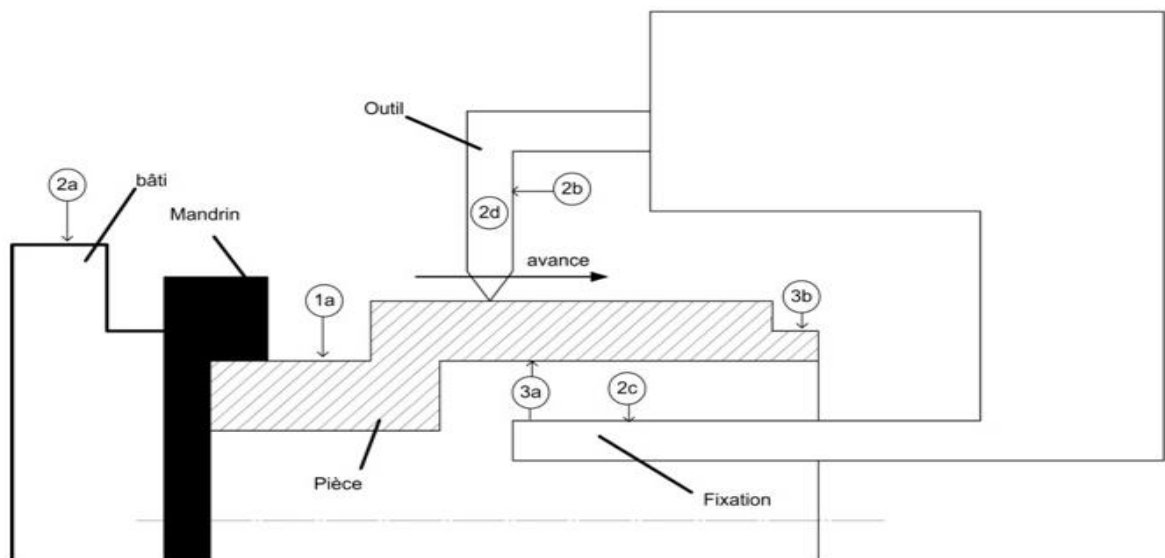


Figure 2.4 – Schéma de disposition des capteurs de l'expérience

Enfin, les capteurs (3a, 3b) sont des capteurs inductifs à courants de Foucault. Ils sont conçus pour mesurer sans contact la position d'objets conducteurs d'électricité. Le signal de sortie est un

signal électrique proportionnel à la distance du capteur jusqu'à la surface de l'objet contrôlé. Cette dépendance est étalonnée à l'avance pour chaque capteur en fonction des caractéristiques de la mesure à venir. Le capteur (3a), visible figure 2.2, est installé sur une partie mobile du dispositif qui accompagne le déplacement de l'outil (mouvement de translation vis-à-vis du bâti du tour). Ce capteur mesure la vibration de la surface interne du tube près de la zone d'interaction entre l'outil et la pièce. Le capteur (3a) est cependant décalé dans la direction axiale par rapport à l'outil, en raison de la forme de la pièce, pour éviter une collision avec la paroi interne du tube (figure 2.4, 2.5). Il s'ensuit que le capteur (3a) sort du tube avant la fin du processus de coupe et cesse alors d'enregistrer le déplacement à l'intérieur du tube (figure 2.5). Comme précisé précédemment, et étant donné le porte-à-faux du dispositif supportant ce capteur (visible notamment sur la figure 2.2 b), nous avons disposé l'accéléromètre (2c) de manière à contrôler le niveau des vibrations du support du capteur (3a). Cela nous a permis d'estimer l'amplitude des vibrations du support et donc leur impact sur les mesures effectuées avec (3a).

Le capteur (3b, figure 2.2), installé sur un support fixe vis-à-vis du bâti de la machine, mesure pendant l'expérience la vibration radiale de la surface externe du tube à l'extrémité libre de ce dernier.



Figure 2.5 – Fin de la deuxième passe. Sortie du capteur 3a de la pièce

Après chaque passe, la position radiale du capteur de déplacement (3a) est corrigée à l'aide de cales calibrées pour tenir compte de la nouvelle position radiale de l'outil (due à la nouvelle passe) et du support de ce capteur qui est solidaire de l'outil. La distance entre la surface de la pièce et le détecteur a été choisie en tenant compte de sa capacité maximale autorisée (tableau 2.1).

2.1.2 Description du déroulement de l'essai

Dans l'expérience, 16 passes ont été réalisées. Le tableau 2.2 donne les paramètres principaux pour chaque passe de l'expérience. Il est à noter que durant toute la campagne expérimentale la pièce est restée montée dans le mandrin. De plus, avant chaque passe profonde, nous avons changé la plaquette de l'outil. Le fait d'avoir une plaquette neuve pour chaque passe nous permet d'éviter une évolution des efforts de coupe, consécutive à l'usure des plaquettes au fur et à mesure des passes. Cela nous permet ainsi de rester au plus proche de la loi de coupe identifiée (section 2.2).

	Type de passe	D [mm]	A_p [mm]	h [mm]	$t_{\text{deb.coup}}$ [s]	$t_{\text{fin.coupe}}$ [s]	t_{coupe} [s]	$L_{\text{surf.usine}}$ [mm]	f_{rot} [tr/min]
1	Nettoyage	174,1	0,25	12,3	37,03	89,41	52,38	149,8	
2	Profonde	172,5	0,8	11,5	22,14	74,38	52,24	149,8	
3	Nettoyage	172,1	0,2	11,3	30,4	82,18	51,78	149,8	
4	Profonde	170,5	0,8	10,5	25,2	76,8	51,6	149,8	703,2
5	Nettoyage	170,1	0,2	10,3				149,8	
6	À vide	170,1	0	10,3				149,8	
7	Profonde	168,5	0,8	9,5	24,4	75,38	50,98	149,8	711,7
8	Nettoyage	168,1	0,2	9,3	20,08	70,61	50,53	149,8	
9	Profonde	166,5	0,8	8,5	24,54	74,81	50,27	149,8	720,3
10	Nettoyage	166,1	0,2	8,3	27,222	77,15	49,94	149,8	
11	Profonde	164,5	0,8	7,5	29,99	79,72	49,72	149,8	728,7
12	Nettoyage	164,1	0,2	7,3	38,1	87,53	49,42	149,8	
13	Profonde	162,5	0,8	6,5	20,02	69,13	49,11	149,8	738,5
14	Profonde	160,7	0,9	5,6	21	72,25	51,25	157	745,9
15	Nettoyage	160,3	0,2	5,4	18,51	71,61	53,1	165	
16	Profonde	158,3	1	4,4	16,7	69,47	52,77	165	758,2

Tableau 2.2 – Tableau des données principales de l'expérience

La figure 2.6 montre la variation de la profondeur de coupe pour chaque passe. Dans l'expérience menée, les 16 passes peuvent être divisées en deux groupes: les passes dites « profondes » et les passes « de nettoyage » (Tableau 2.2).

Les passes profondes, avec une épaisseur enlevée relativement importante (0,8 à 1 mm), donnent lieu à des efforts de coupe élevés et c'est lors de ces passes que l'on s'attend à observer le broutement. Les passes dites de nettoyage, ayant une profondeur de passe de 0,2 mm, ont été réalisées afin de régénérer la surface avec la passe profonde à suivre. Cela a permis de réduire les défauts de forme ou de surface

de la pièce, qui pourraient apparaître à l'issue de la passe profonde précédente. La 6^{ème} passe se fait à vide, en simulant le processus de coupe: l'outil se déplace le long de la pièce comme pour les deux types de passes mais ne la coupe pas. Cette passe a été réalisée afin d'enregistrer les signaux provenant des capteurs pendant le déplacement de l'outil le long de la pièce en excluant l'impact du processus de coupe sur les signaux observés. Cela a notamment permis d'évaluer l'importance du bruit affectant les mesures durant les passes. Ce bruit ne dépasse pas 5% du signal mesuré. Pendant la 16^{ème} passe, durant laquelle survient le processus de vibration, l'épaisseur de coupe vaut 1 mm (figure 2.6).

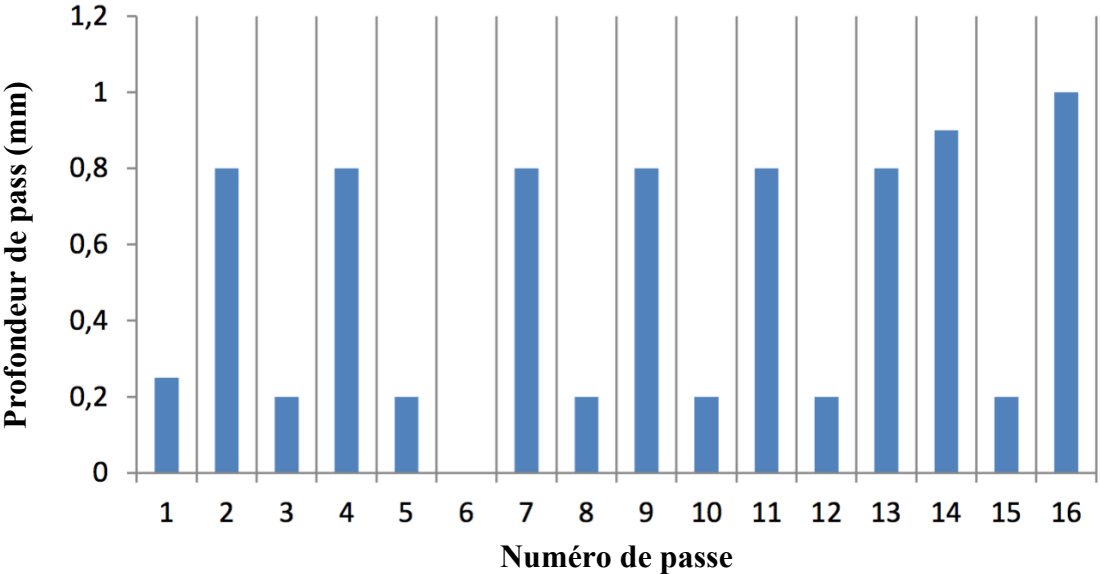


Figure 2.6 – Evolution de la profondeur de coupe au cours de l'expérience

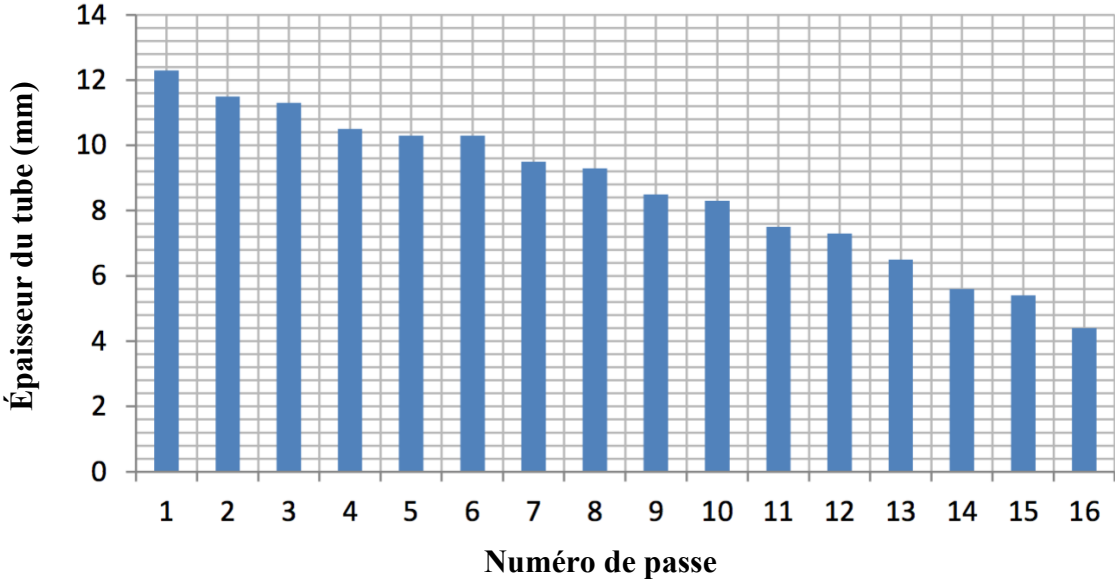


Figure 2.7 – Evolution de l'épaisseur du tube durant l'expérience

La figure 2.7 présente l'évolution de l'épaisseur du tube en fonction des passes durant l'expérience.

Pour déterminer les caractéristiques modales du tube monté sur le mandrin, un test marteau a été réalisé après chaque passe profonde. La figure 2.8 représente le schéma du dispositif lors de cette mesure. Le dispositif se compose de la pièce qui reste montée, du marteau et de deux accéléromètres (2e, 2a). L'accéléromètre supplémentaire (2e) est collé sur la pièce avant chaque test.

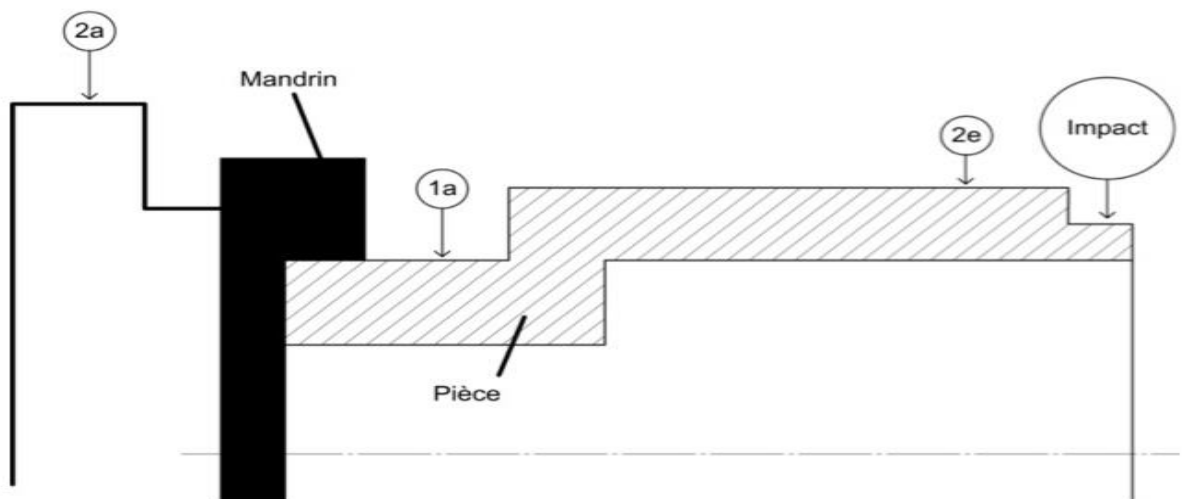
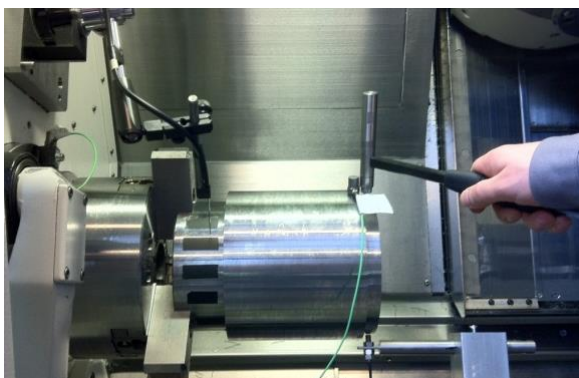


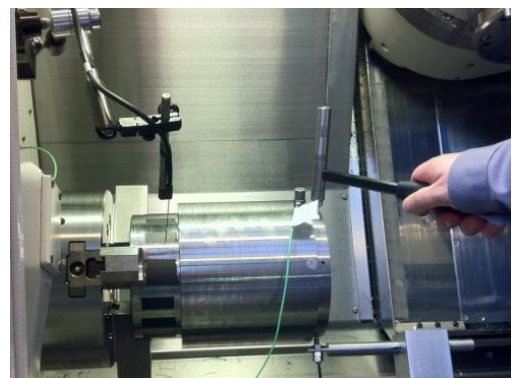
Figure 2.8 – Instrumentation pour la mesure des caractéristiques modales du tube après chaque passe profonde

Afin de montrer l'effet du point d'impact sur la réponse en fréquence du système, deux séries d'impacts ont été réalisées sur la pièce. La première série d'impacts a été effectuée dans le prolongement des mors (figure 2.9 a), tandis que la deuxième série a été effectuée entre les deux mors (figure 2.9 b). Il sera montré plus loin qu'il n'y a pas de forte influence du point d'impact sur la réponse en fréquence.



(a)

Impact dans le prolongement d'un mors



(b)

Impact entre les deux mors

Figure 2.9 – Mesure des caractéristiques modales du système

2.1.3 Analyse des mesures pour deux passes avant broutement

Pour décrire les résultats types obtenus, nous proposons d'analyser deux passes lors desquelles il n'y pas de broutement : la 7^{ème} passe (profonde) et la 8^{ème} passe (nettoyage) respectivement (figure 2.10).

L'analyse des données issues des accéléromètres (2b, 2d) montés sur l'outil, permet de vérifier que la vibration de l'outil lors de la 7^{ème} passe (profonde) est supérieure à celle de la 8^{ème} passe (nettoyage). Le signal du capteur de déplacement (3a) lors de la 8^{ème} passe présente deux sauts, à 25 et 55 secondes respectivement, qui apparaissent selon toute vraisemblance en raison du passage de copeaux entre le capteur et la surface de la pièce (figure 2.10). Les données des autres capteurs sont approximativement du même ordre de grandeur pour chacune des deux passes.

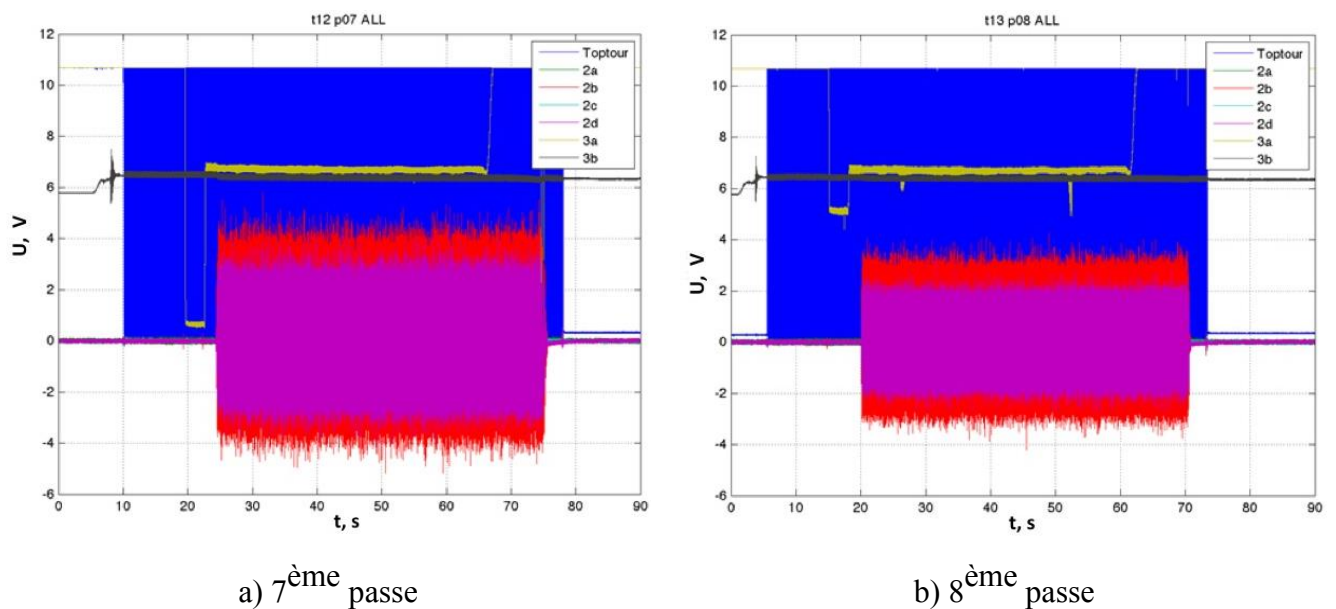
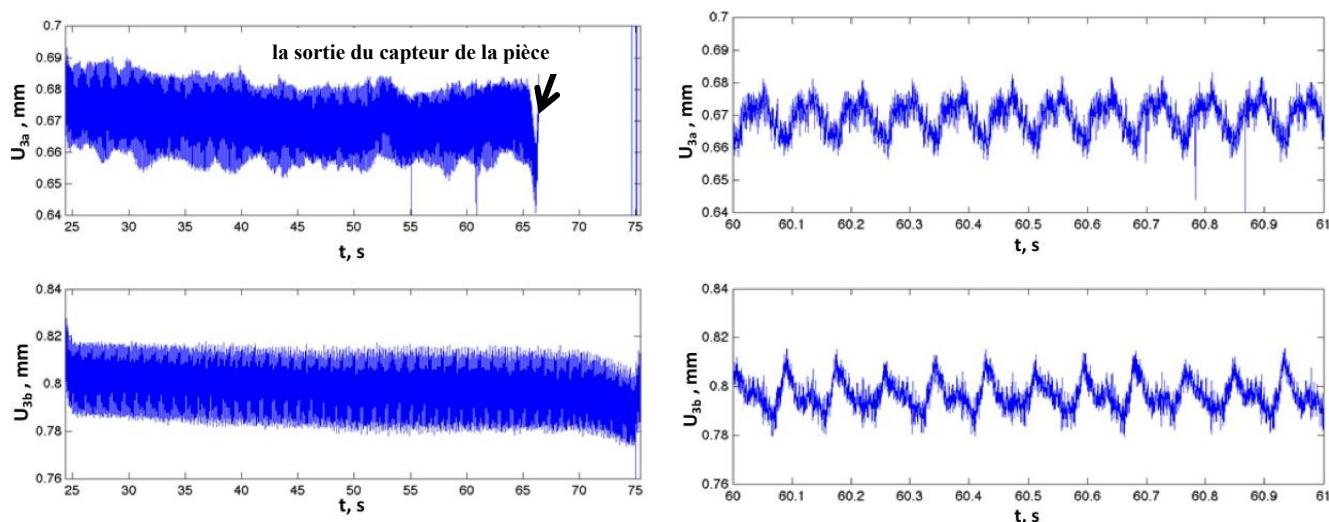


Figure 2.10 – Mesures de l'ensemble des capteurs lors des 7^{ème} et 8^{ème} passes

• Analyse des mesures en déplacement

La figure 2.11 présente les signaux des capteurs de déplacement 3a et 3b. Nous observons que l'amplitude du signal des vibrations reste à peu près la même (figure 2.11(a)) pendant toute la durée de la passe pour chacun des capteurs et vaut 0,02 mm (pour le capteur interne (3a) 0,015 mm et 0,025 mm pour le capteur (3b) respectivement).



a) Signaux complets

b) Intervalle de temps d'une seconde

Figure 2.11 – Mesures des déplacements (3a ligne supérieure, 3b ligne inférieur) lors de la 7^{ème} passe

En considérant les signaux sur un intervalle de temps d'une seconde (Figure 2.11(b)), nous voyons que ceux-ci présentent de l'ordre de douze vibrations par seconde, ce qui est en accord avec la fréquence de rotation de la pièce ($712 \text{ tr/min} = 11.9 \text{ Hz}$). Les oscillations observées correspondent donc à des défauts de faux-rond et de cylindricité pour chacune des deux surfaces (surfaces intérieure et extérieure du tube). Des vibrations hautes fréquences ($> 500\text{Hz}$) se superposent à ces oscillations et présentent une amplitude relativement faible d'environ 5 microns. Par conséquent, le signal des vibrations à basse fréquence domine le signal des capteurs de déplacement pour ces deux passes.

Nous avons également analysé ces mesures de déplacement à l'aide de spectrogrammes. Dans notre cas, les spectrogrammes donnent l'amplitude en décibels de la transformée de Fourier du déplacement mesuré sur une durée glissante fixée (fenêtre temporelle) en fonction du temps (en abscisse) et de la fréquence (en ordonnée). La durée de la fenêtre temporelle utilisée pour l'ensemble des spectrogrammes de ce mémoire correspond à 8 tours de pièce soit 0,67s. La cadence d'échantillonnage étant de 25 kHz, la transformée de Fourier discrète est réalisée sur 16800 échantillons. Sur les graphiques, que nous exploitons de manière qualitative, la valeur de l'amplitude est représentée par de la couleur (le niveau le plus bas est en bleu, et la couleur passe ensuite progressivement par le vert et le jaune pour atteindre, pour les plus fortes amplitudes, le rouge).

Sur les figures 2.12 et 2.13, nous observons que les basses fréquences dominant en dessous de 3000 Hz, et en particulier en dessous de 800 Hz. Il s'agit dans une large mesure de l'impact du faux rond et de ses harmoniques (bandes horizontales bien identifiables sur les mesures obtenues avec le capteur 3b qui est à l'extérieur du tube). On note que le signal extrait du capteur 3a est sensiblement

plus bruité que celui obtenu avec le capteur 3b. Cela provient de la souplesse, et donc des vibrations, du support du capteur 3a qui affectent ses mesures.

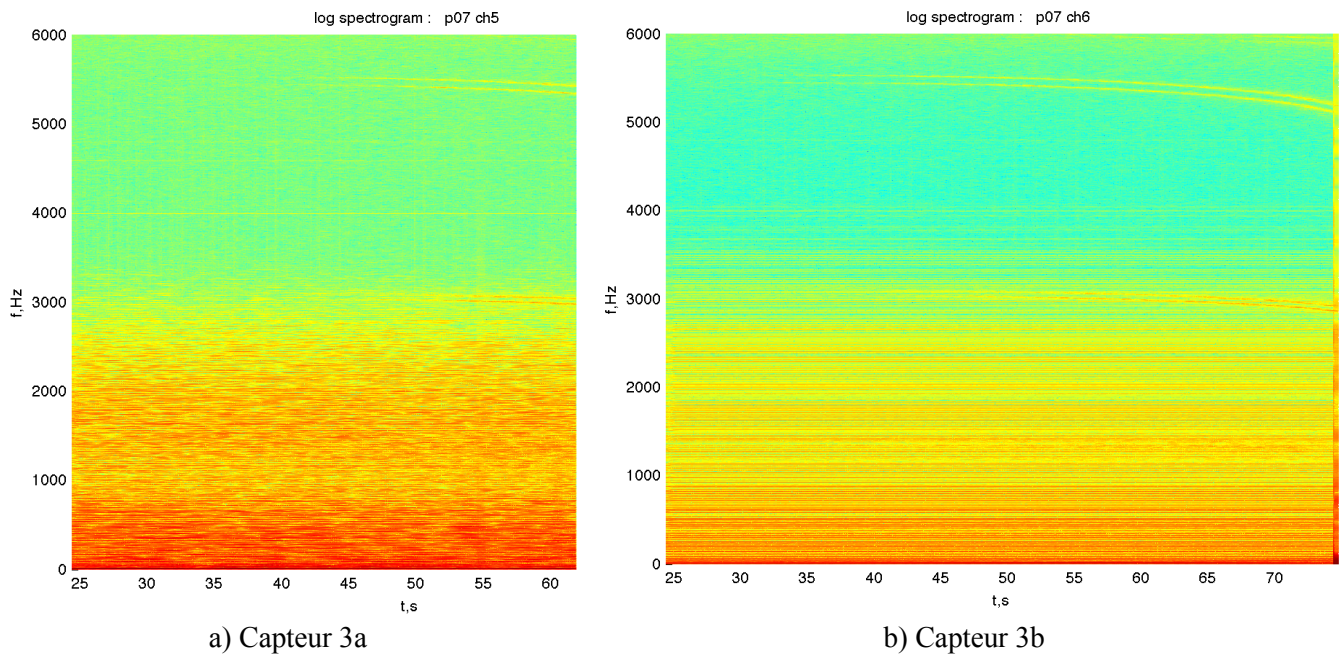


Figure 2.12 – Spectrogramme du signal des capteurs de déplacement (7^{ème} passe)

Lorsque l'outil se déplace pendant la passe, des paires de bandes parallèles de hautes fréquences deviennent de plus en plus marquées au fur et à mesure que l'outil s'approche de la fin de la passe : bandes évoluant de 5500 Hz à 5100 Hz en partie haute des graphiques, et bandes évoluant de 3000 Hz à 2800 Hz au milieu des graphiques.

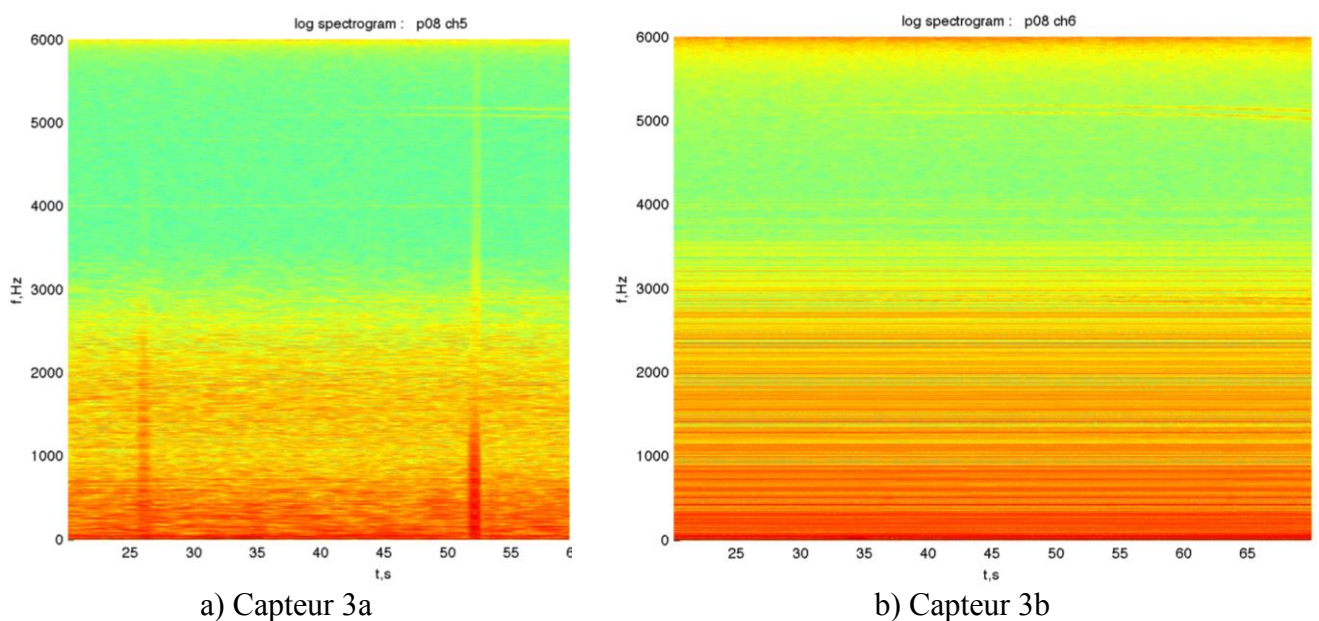


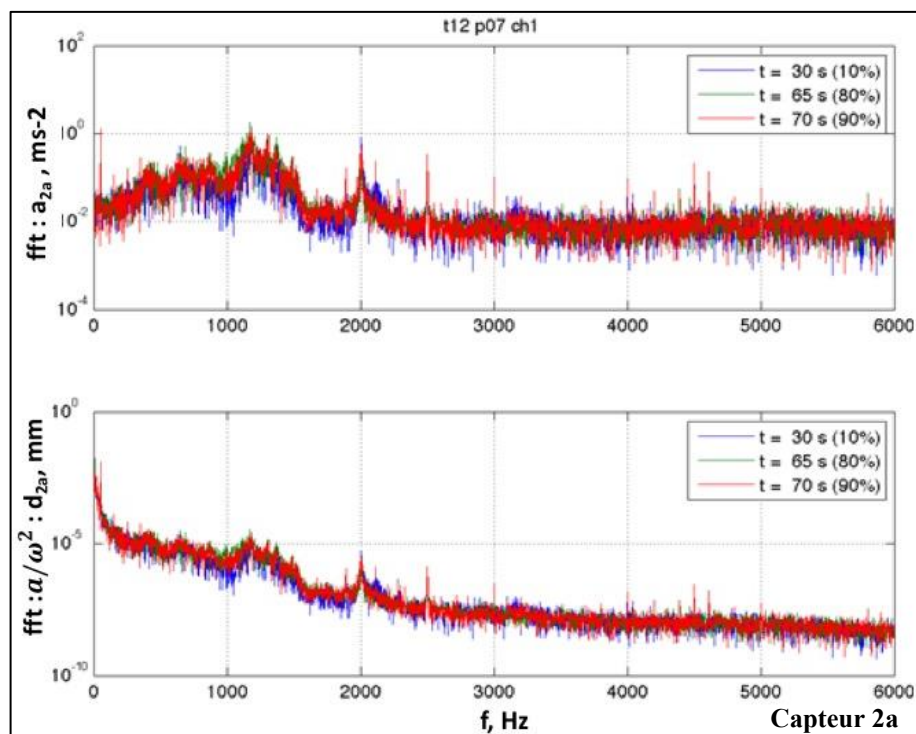
Figure 2.13 – Spectrogramme du signal des capteurs de déplacement (8^{ème} passe)

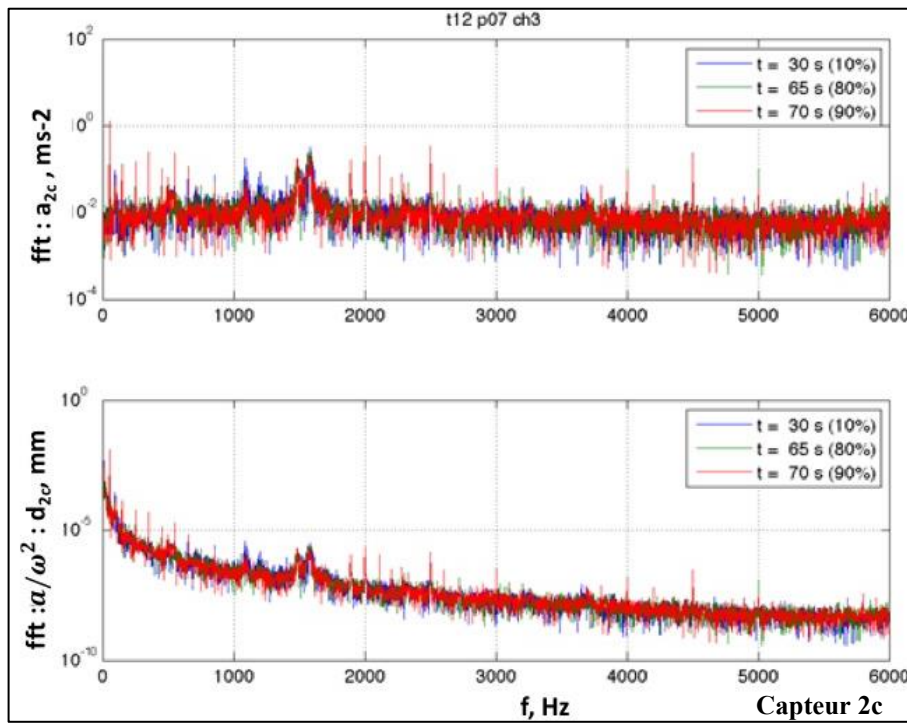
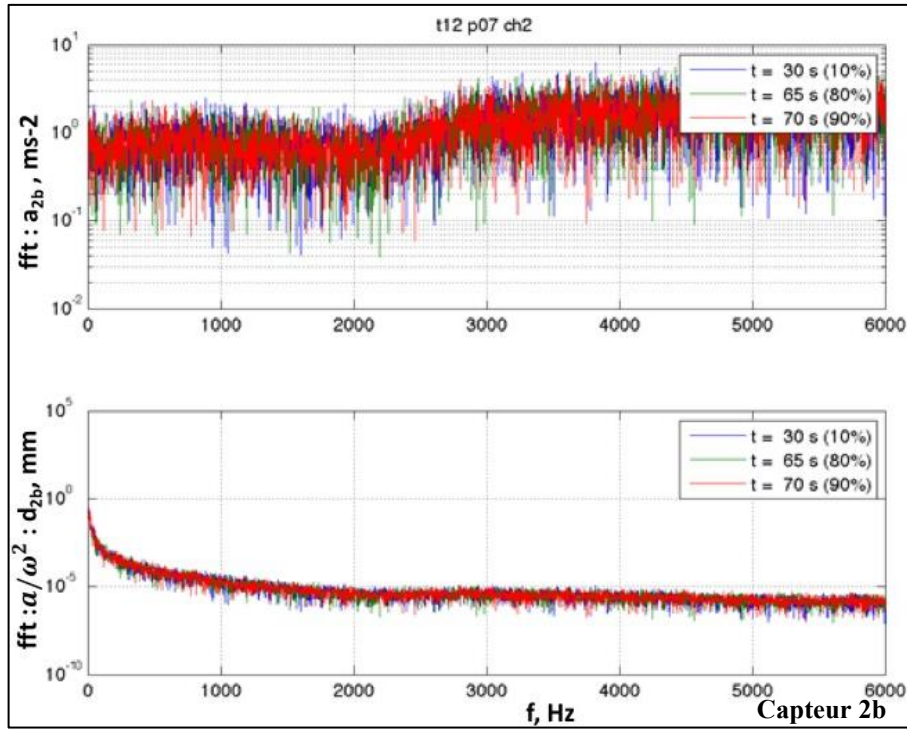
Ces bandes, comme cela sera montré plus loin, représentent la réponse du système aux fréquences proches des fréquences propres du tube. Ces dernières varient lors de la passe de l'outil en raison de l'enlèvement de matière. Sur la figure 2.13 (a) on retrouve, à 25 et 55 secondes, lors de la 8^{ème} passe, la présence de lignes verticales qui correspondent très probablement au passage de copeaux entre le capteur et la pièce. Il s'agit des bandes déjà observées sur la figure 2.10 (b).

• **Amplitude des vibrations sur les parties non tournantes**

La figure 2.14 présente des spectres issus des données provenant de chacun des accéléromètres à différents instants de la 7^{ème} passe. On a tracé les spectres en accélération ainsi qu'en déplacement à partir de ceux en accélération.

Les mesures d'accélération lors des passes suggèrent que les vibrations enregistrées par les accéléromètres, obtenues à l'aide des capteurs fixes, sont très petites (de l'ordre de ou inférieures au micron) par rapport aux vibrations de la pièce qui sont de l'ordre de 0,01 mm (voire de l'ordre de 0,1 mm pour la dernière passe). Nous pouvons voir que l'amplitude des oscillations à basse fréquence, aux alentours de $f = 100$ Hz, sont en-dessous du micron. À des fréquences de l'ordre de 1000 Hz l'amplitude des vibrations est inférieure à 0,01 micron. Certains des pics dans les graphes correspondent à la réponse du système à des fréquences proches des fréquences naturelles, comme décrit précédemment. Cette analyse en termes d'amplitude de déplacement se généralise à l'ensemble des passes.





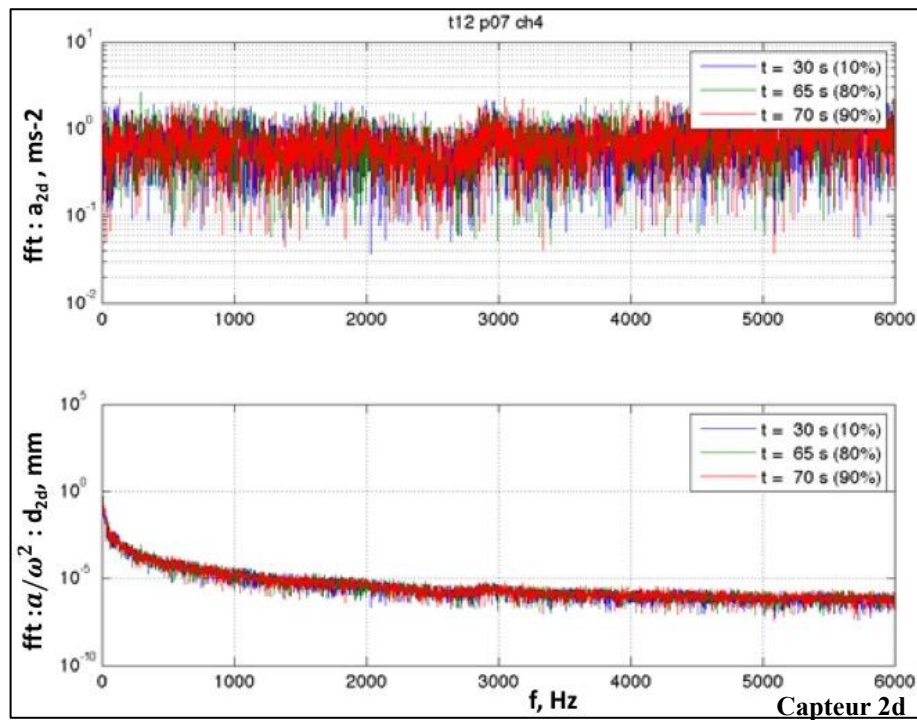
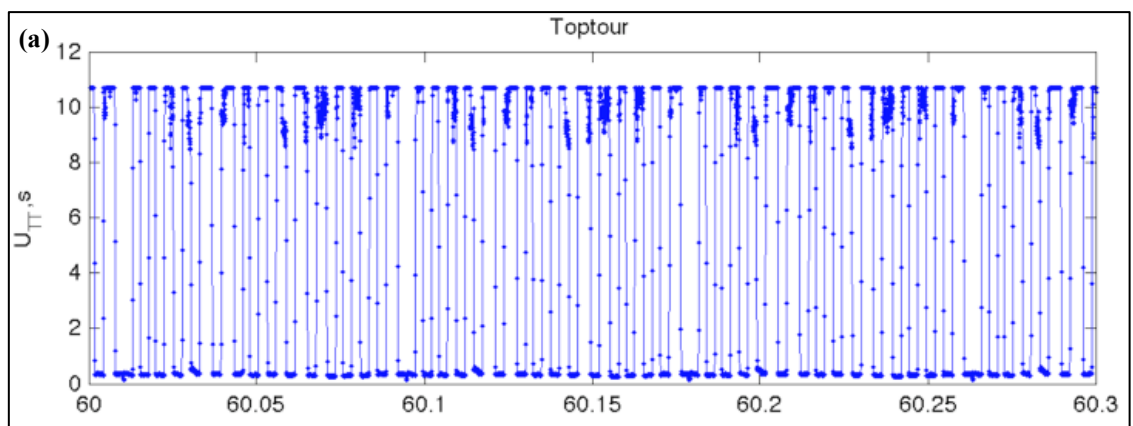


Figure 2.14 – Spectres en accélération et déplacements, obtenus à partir du signal des accéléromètres 2a, 2b, 2c et 2d lors de la 7^{ème} passe

• **Stabilité de la vitesse de rotation**

Le signal du capteur optique (1a) Fotonic-KD300, pour la 7^{ème} passe, est donné figure 2.15. Grâce à la présence de la double marque sur la pièce (deux bandes adhésives noires collées l'une à côté de l'autre), il est possible de voir clairement trois tours complets dans l'intervalle de temps 60 – 60,3s. Le calcul de la durée de rotation de chaque marque permet de vérifier la fréquence de rotation de la pièce.



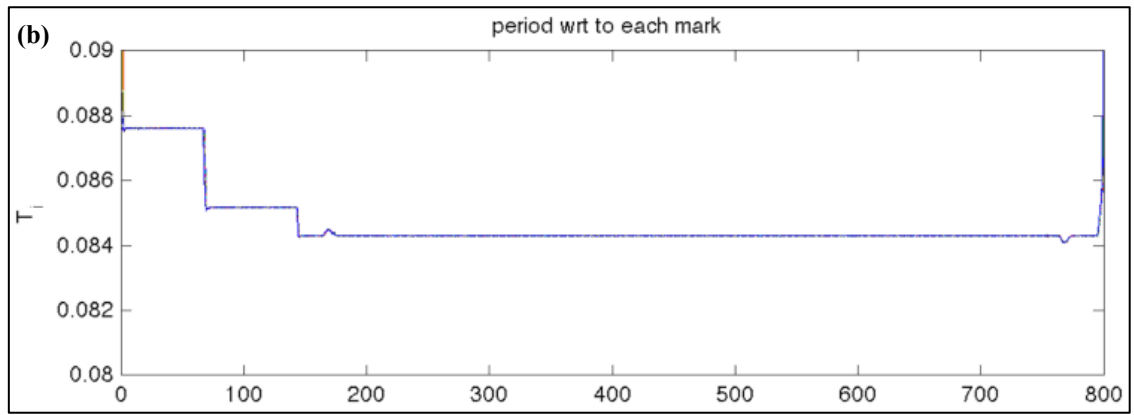
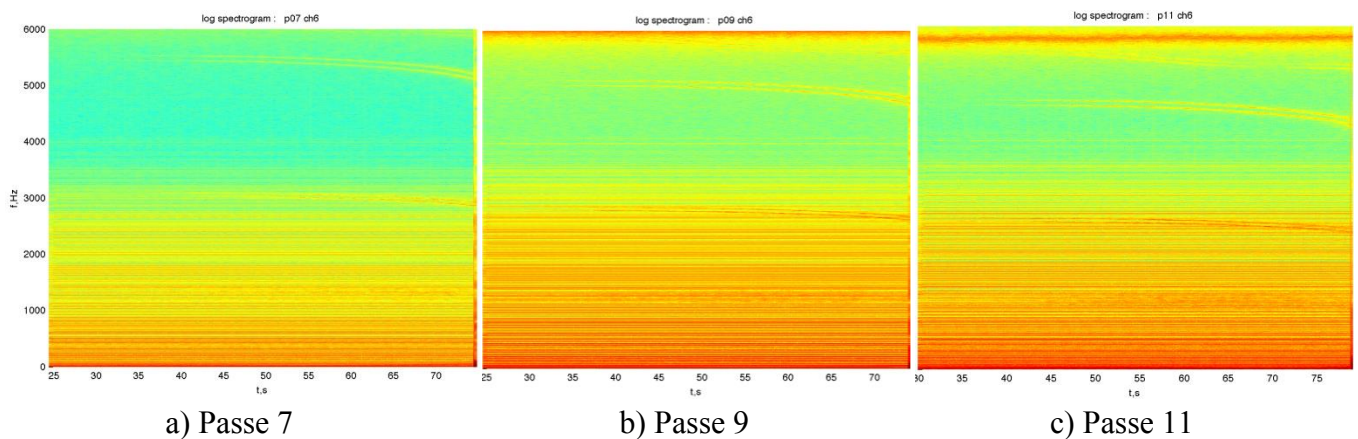


Figure 2.15 – Données du capteur 1a pour la 7^{ème} passe (a) et période de rotation lors de la passe (b)

Ainsi, il a été trouvé que la période de rotation est maintenue constante à 0,024 % près tout au long de la passe de l'outil et vaut : $T_{rot} = 84,30 \pm 0,02$ ms. Cette régularité est également observée lors des autres passes.

2.1.4 Analyse générale pour l'ensemble des passes

Il a été observé (Figure 2.16) que la variation des fréquences de vibration du système en raison de l'enlèvement de matière se produit pour chaque passe, en particulier lors des passes profondes. La figure 2.16 présente les spectrogrammes des six dernières passes profondes de l'outil.



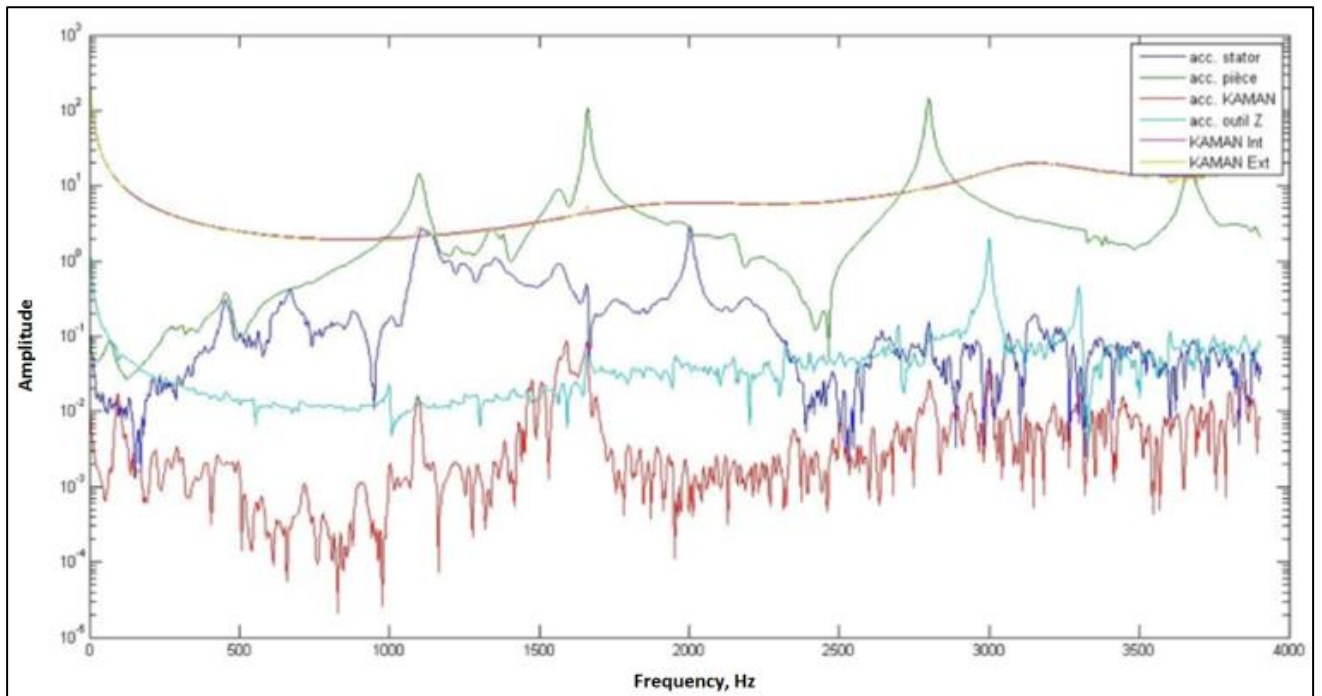


Figure 2.17 - Réponse des capteurs au coup de marteau après la dernière passe

La figure 2.18 présente le résultat des tests marteau pour les 5^{ème} et 7^{ème} passes. La dépendance du résultat de l'essai à la position du point d'impact du marteau est mise en évidence. Même si une sensibilité du résultat à la position du point d'impact est observée, les principaux pics se retrouvent en position et amplitude pour les deux points d'impact.

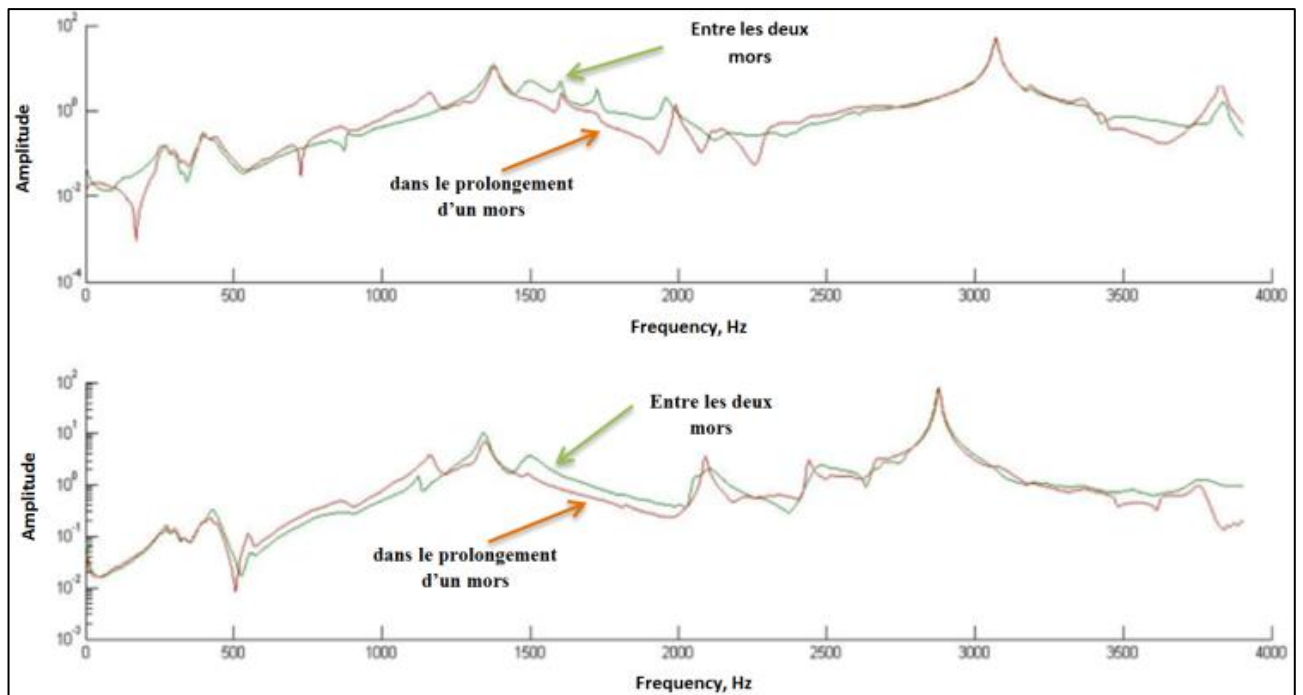


Figure 2.18 – FRF pour deux points d'impact différents (après les 5^{ème} et 7^{ème} passes)

La figure 2.19 montre le résultat du test marteau après chaque passe profonde uniquement pour le capteur 2e collé à l'extrémité libre du tube. Il est possible de voir sur ce graphe l'évolution des pics de fréquence en fonction des passes ($p01-p03-...-p15$). On retrouve ainsi l'analyse faite sur les spectrogrammes des capteurs de déplacement (figure 2.16). Il convient de noter que les pics aux basses fréquences (également observés avec le capteur 2a) changent très peu en fonction de la passe de l'outil, et sont donc peu affectés par la perte de masse et de raideur de la pièce. Il s'agit a priori de modes de broche. Nous observons par ailleurs une diminution des fréquences propres avec le retrait de matière lors de la passe. Une analyse plus détaillée de l'évolution de la fréquence du système au cours de la dernière passe est réalisée dans le chapitre 3, section 3.8, lors de la validation du modèle analytique de coque.

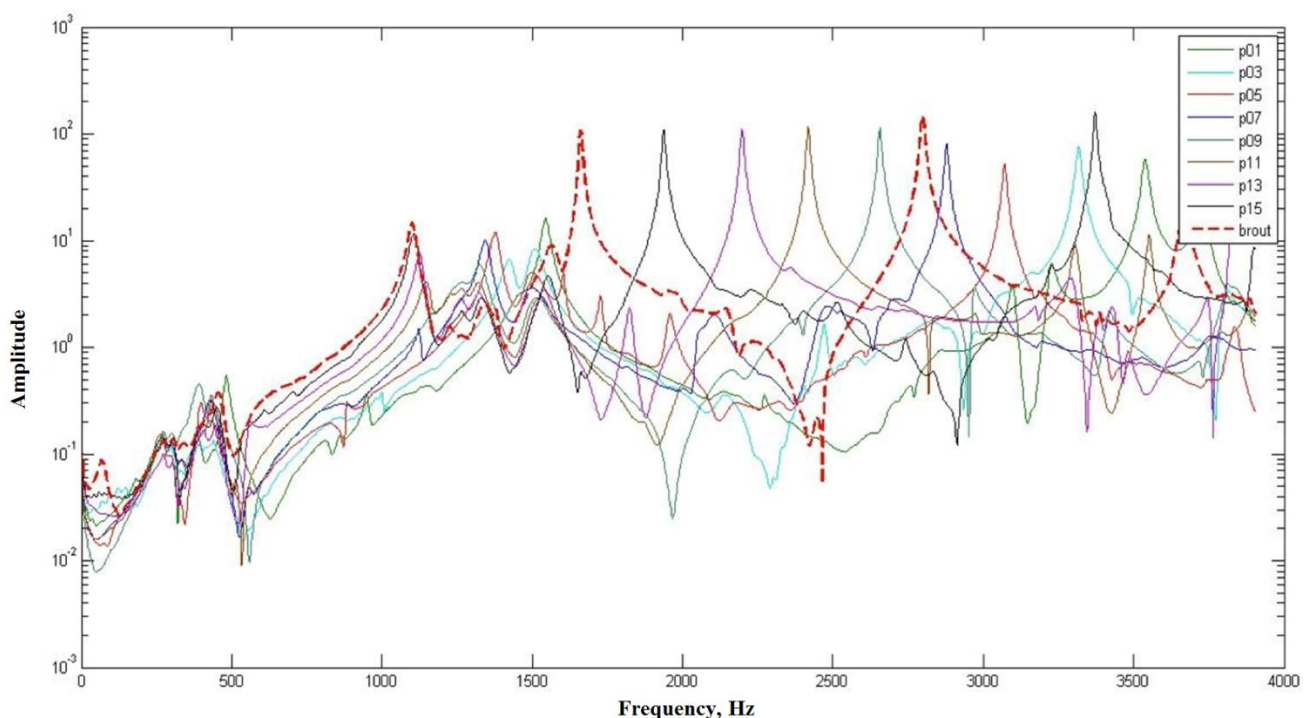


Figure 2.19 – Réponse en fréquence du système au fur et à mesure des passes (capteur 2e)

2.1.5 Analyse des mesures en déplacement lors de la passe avec broutement

Pendant l'expérience, il a été constaté que les vibrations qui conduisent à une altération de la surface finale ont lieu au cours des 14^{ème} et 16^{ème} passes. La figure 2.20 représente la surface après la 14^{ème} passe. Comme on le voit, sur la surface de la pièce, il y a des irrégularités associées à l'apparition de vibrations lors de cette passe. L'amplitude des vibrations de la pièce est petite, surtout vis-à-vis de celle qui sera observée pour la passe 16. Devant la faiblesse des défauts géométriques observées sur la

pièce, nous avons décidé d'effectuer une passe de nettoyage (passe 15) avant de réaliser la 16^{ème} passe. Cette dernière passe est celle au cours de laquelle la vibration maximale a été observée. Nous consacrons une étude plus approfondie à cette passe.

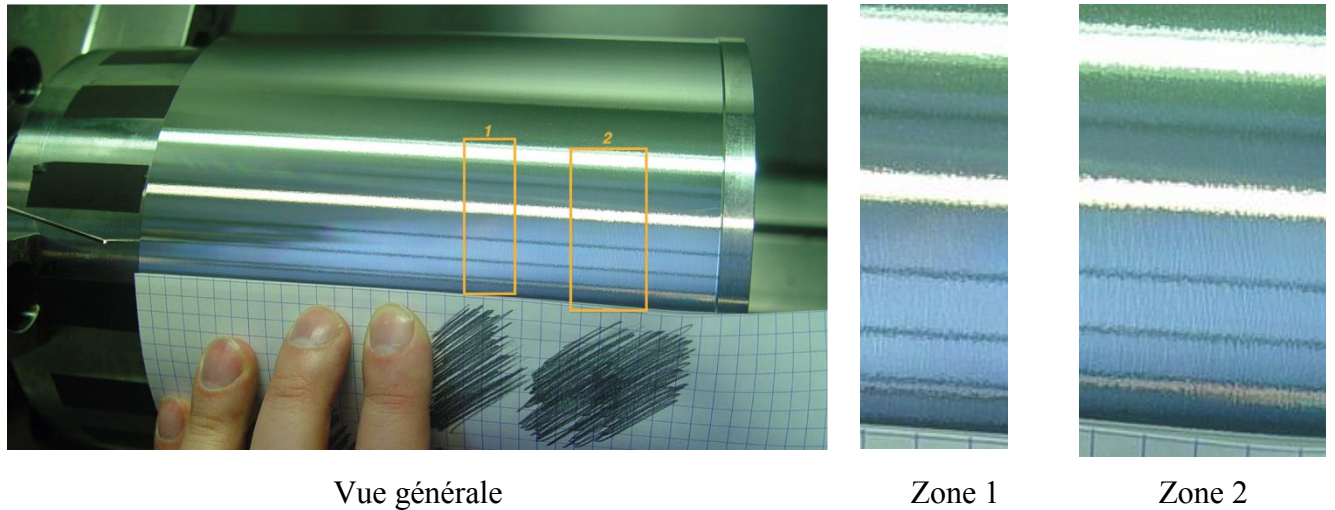


Figure 2.20 – Surface de la pièce après la 14^{ème} passe

Les paramètres de la 16^{ème} passe sont : une vitesse de rotation de 758 tr/min, une profondeur de passe de 1,0 mm et une durée d'usinage de 52,77 s. Les données dimensionnelles sont précisées dans le tableau 2.3.

	Avant usinage (mm)	Après usinage (mm)
Diamètre	160,4	158,4
Epaisseur	5,39	4,39
Longueur usinée	165 mm	

Tableau 2.3 Paramètres géométriques de la pièce pour la 16^{ème} passe

La figure 2.21 donne une vision d'ensemble de la pièce après la 16^{ème} passe. La dégradation de la surface usinée est clairement visible (Figure 2.22) et provient, comme nous le montrons dans le chapitre 4, d'un phénomène de vibrations auto-entretenues (broutement).

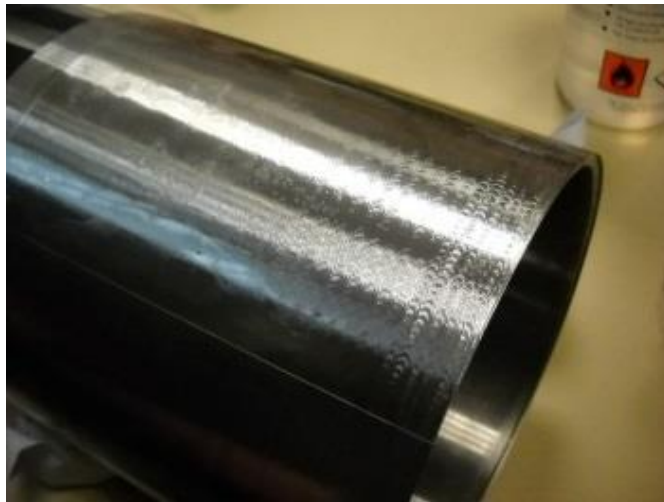
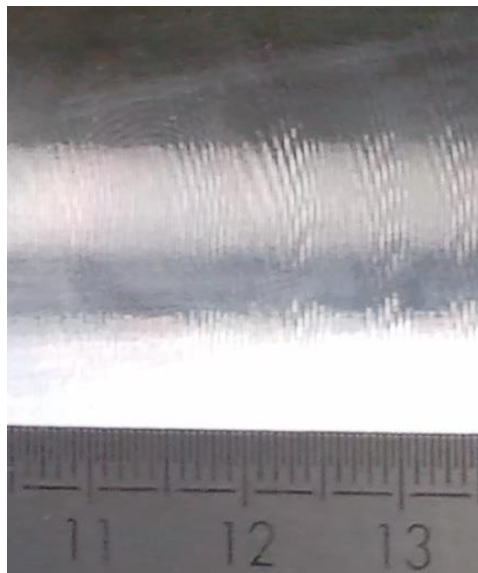
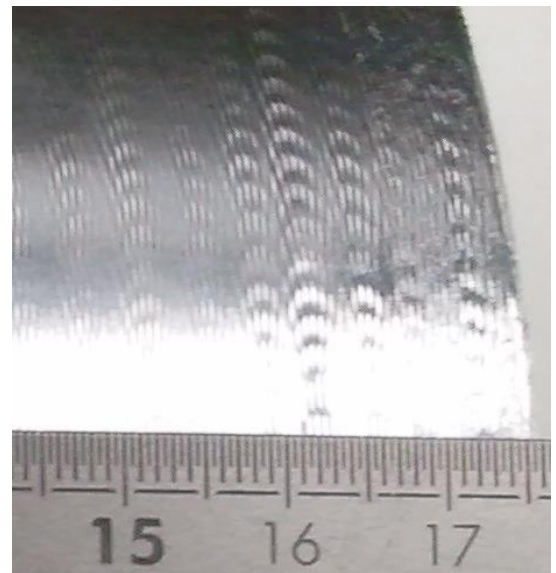


Figure 2.21 – Photographies de la pièce après la dernière passe



a) Agrandissement 1



b) Agrandissement 2

Figure 2.22 – Photographies de la pièce après la dernière passe (détails)

Les signaux en fonction du temps de tous les capteurs pendant la passe 16 sont présentés sur la figure 2.23. Comme nous pouvons le voir, le signal obtenu avec le capteur de déplacement 3a (capteur placé à l'intérieur du tube et se déplaçant avec l'outil) est dégradé en plusieurs endroits (au début 16 - 20 s et à la fin 45 - 55 s). Comme précédemment, cette altération du signal provient très probablement du passage de copeaux entre le capteur et la surface intérieure du tube.

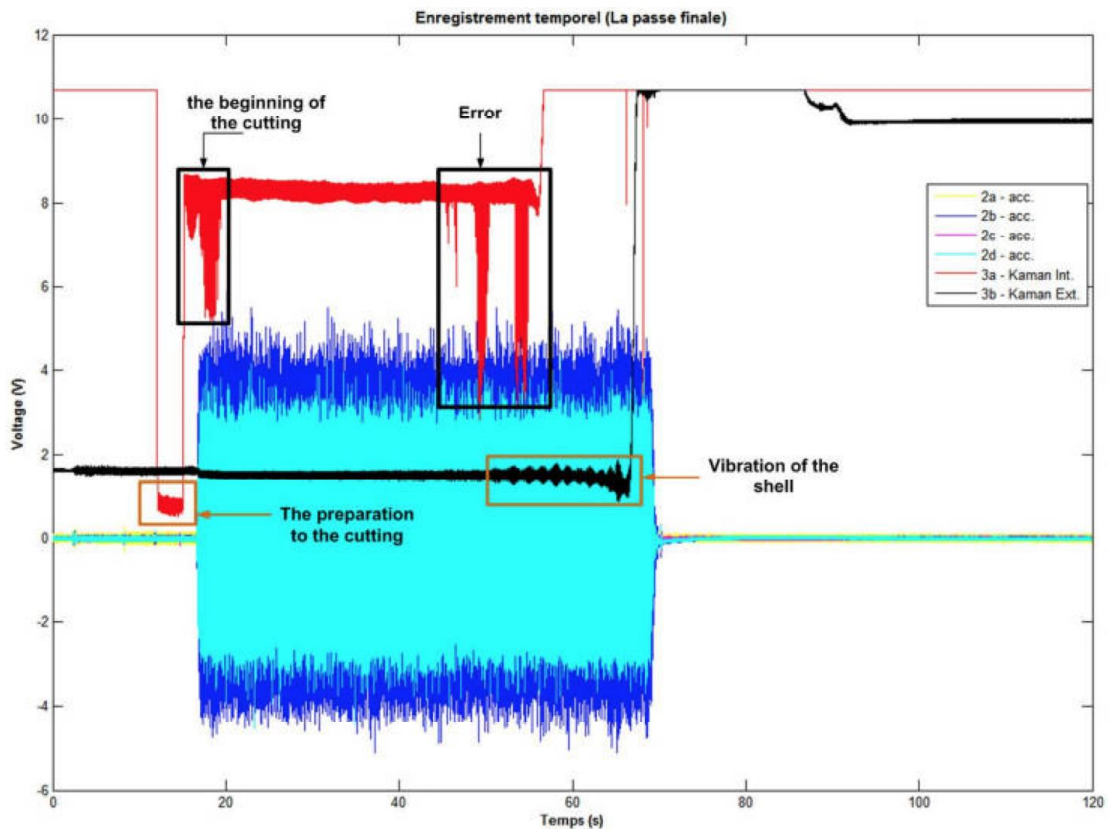


Figure 2.23 – Signaux en fonction du temps lors de la passe 16

Les figures 2.24 et 2.25 présentent une extraction des signaux provenant uniquement des capteurs de déplacement (3a, 3b). Comme signalé sur la figure 2.23, à l'instant $t \approx 54$ s, l'amplitude des vibrations de la pièce (capteur 3b) commence à augmenter significativement. Cette augmentation présente des oscillations ayant une période d'une durée de 1,5 s environ (figure 2.24). Les maxima d'amplitude des oscillations observés sur ce signal correspondent aux maxima de défauts sur la surface de la pièce (figure 2.22 (a,b)).

La figure 2.25 permet de voir plus précisément l'évolution du signal entre 54 et 55 s. La figure 2.26 isole le signal issu du capteur de déplacement 3b à la fin de la passe 16. L'analyse de ce signal permet de détecter la présence d'une oscillation dont la fréquence est égale à 3 fois la fréquence de rotation de la pièce. Ceci correspond à la fréquence de passage des mors pour un tour. Il est à noter que cette modulation due au passage de mors est présente sur l'ensemble des passes. L'amplitude de cette modulation pendant le broutement ne dépasse pas 0,02 mm, ce qui correspond à l'amplitude totale des vibrations dans les passes sans broutement. Il convient également de noter que le signal présente une composante de modulation ayant la même période que celle de rotation que la pièce et correspond a priori à du faux-ronde cumulé à des défauts de circularité.

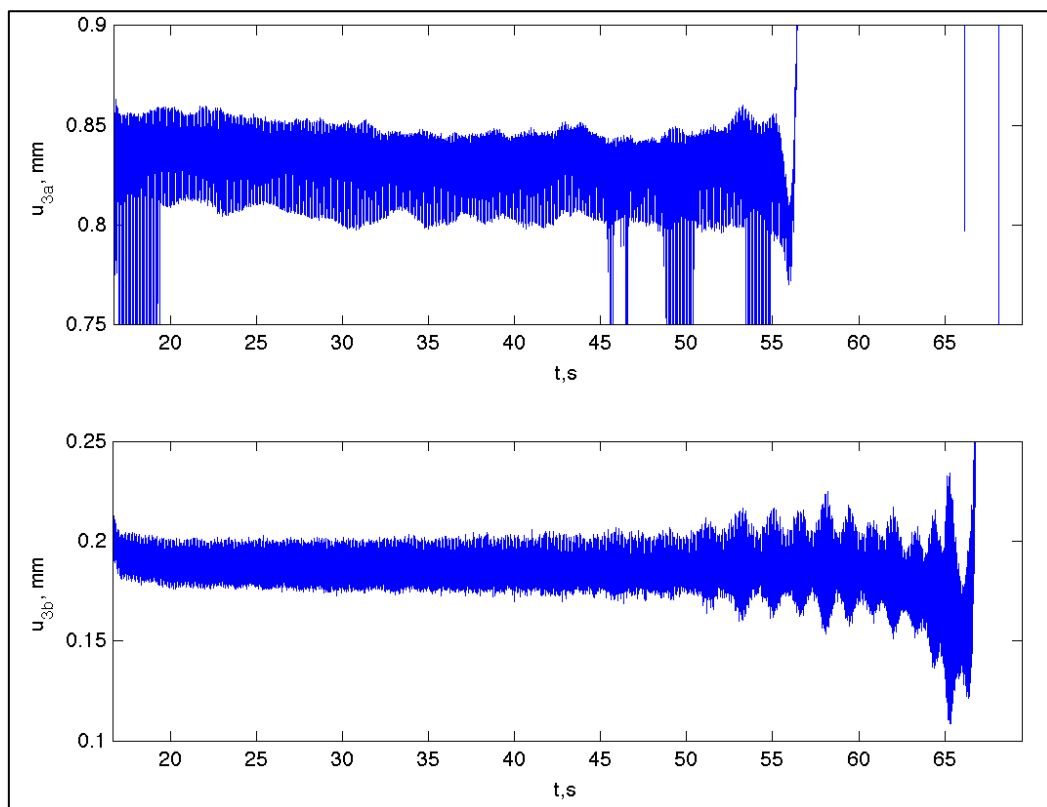


Figure 2.24 - Signaux issus des capteurs 3a et 3b lors de la 16^{ème} passe

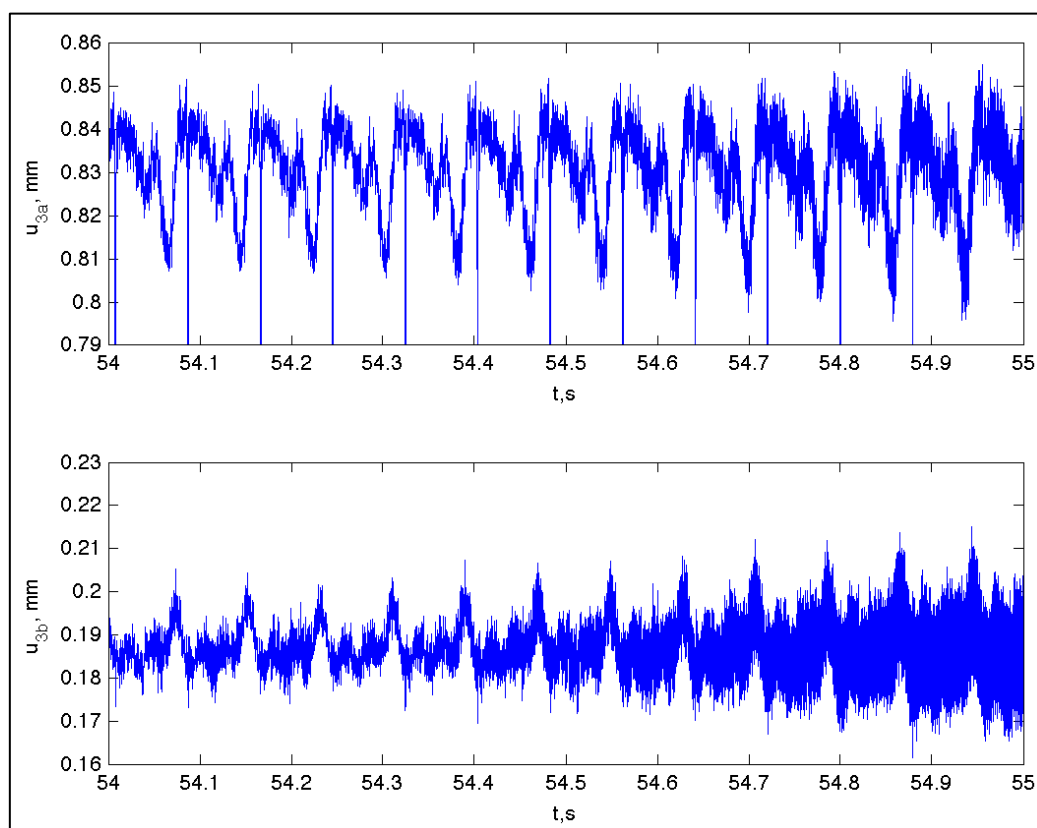


Figure 2.25 - Signaux 3a et 3b entre 54 et 55 s lors de la 16^{ème} passe

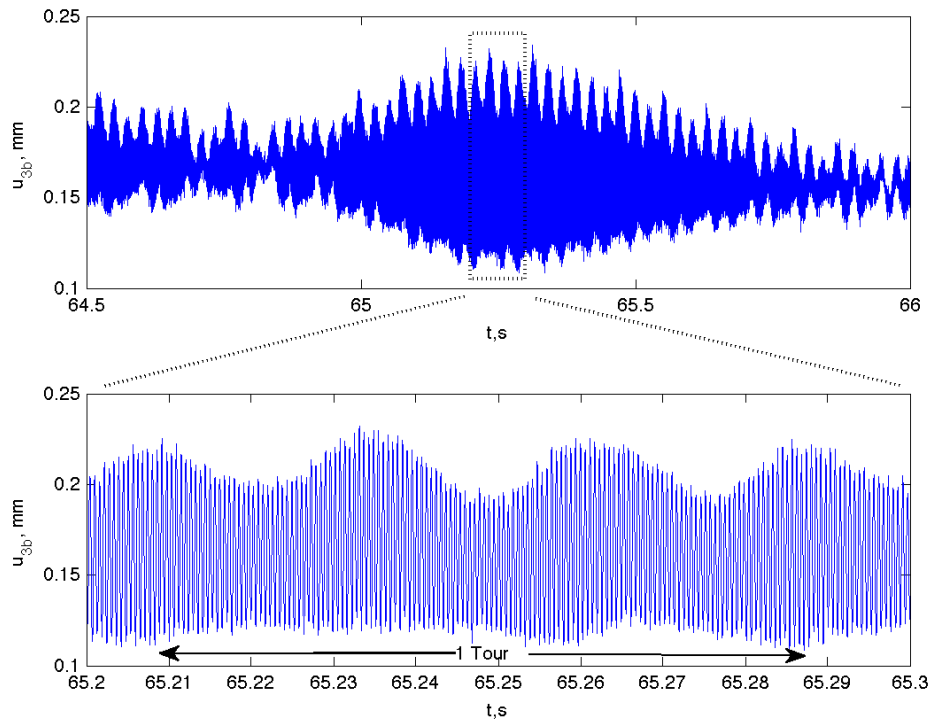


Figure 2.26 – Signal du capteur de déplacement 3b

Les figures 2.27 et 2.28 représentent le spectrogramme de la passe 16 pour le capteur 3b. L'évolution du signal temporel (partie basse de la figure 2.28) permet de détecter une première augmentation significative des vibrations 50 secondes après le début de l'enregistrement et correspond à l'apparition du broutement. La fréquence dominante de ces vibrations évolue le long de la passe de 1950 Hz à 1650 Hz. Toujours après ces 50 s, on observe que cette fréquence évolue par paliers quasi horizontaux sur le spectrogramme. Chaque palier correspondant à une salve courte de l'amplitude du signal du capteur 3b. Chaque salve, qui dure environ 1,5 s, est directement en relation avec les bandes de défauts générés sur la surface de la pièce (figure 2.22 a et b).

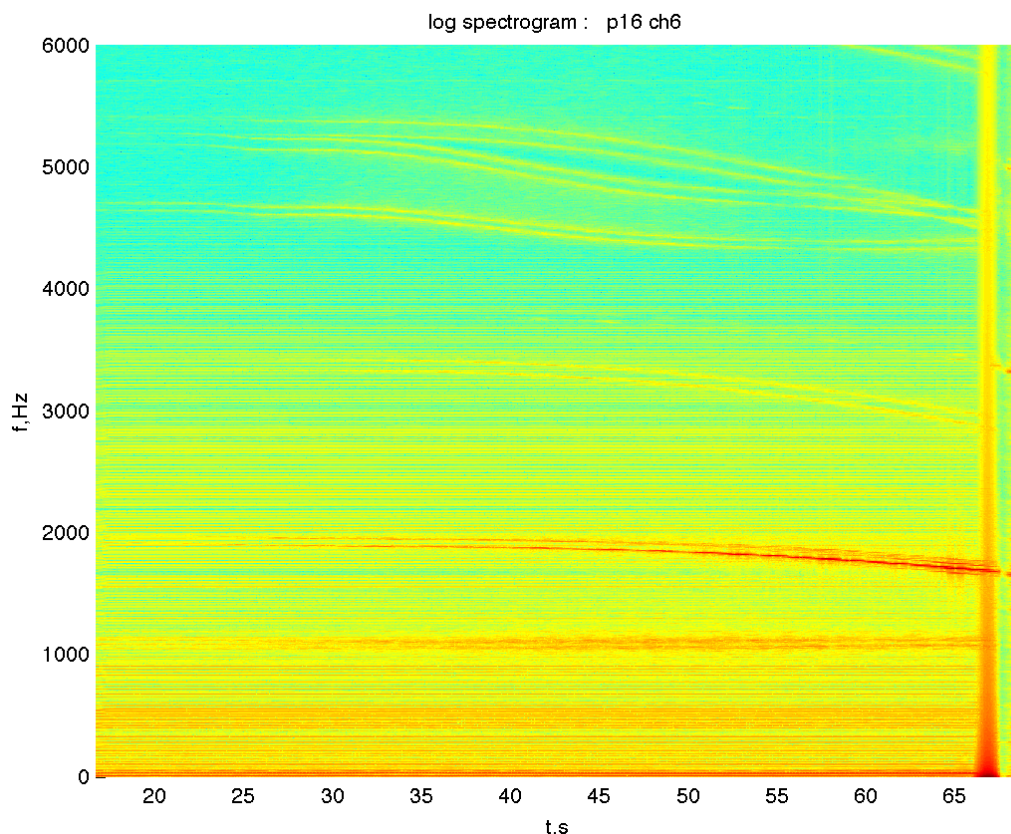


Figure 2.27 – Spectrogrammes du signal 3b pour la 16^{ème} passe

Toutes les fréquences observées sur les spectrogrammes sont dédoublées (pour chaque fréquence 2 lignes parallèles sont clairement visibles sur les figures 2.27 et 2.28). Nous avons identifié 3 causes possibles pour expliquer ce dédoublement :

- L'effet gyroscopique qui est d'autant plus important que la fréquence de rotation est importante. Pour le présent cas, nous avons évalué cet effet à 0,01 Hz ce qui n'est pas suffisant pour expliquer les sauts observés.
- La présence de l'outil qui tend à séparer les modes doubles du tube en ajoutant une raideur là où la coupe s'effectue (l'analyse de cette raideur est présentée dans la section 2.2 de ce même chapitre). Cette raideur augmente la fréquence d'un des deux modes. Cette augmentation est estimée inférieure à 11 Hz et ne permet pas elle non plus à expliquer à elle seule le saut observé.
- L'entraînement des modes avec la rotation de la pièce alors que le capteur 3b est fixe par rapport au bâti de la machine. En effet, comme le capteur est fixe, et si les modes tournent avec la pièce, on observe un dédoublement apparent des fréquences proportionnellement à la fréquence de rotation de la pièce et au nombre de lobes présents dans la déformée modale du mode considéré. Pour le mode prépondérant (celui évoluant de 1950 Hz à 1650 Hz), il s'agit

d'un mode à 3 lobes (comme nous le verrons plus loin), ce qui génère un saut de fréquence de l'ordre de 75,6 Hz, très proche du saut observé.

Cette dernière cause est donc selon nous la principale source du dédoublement observé des fréquences.

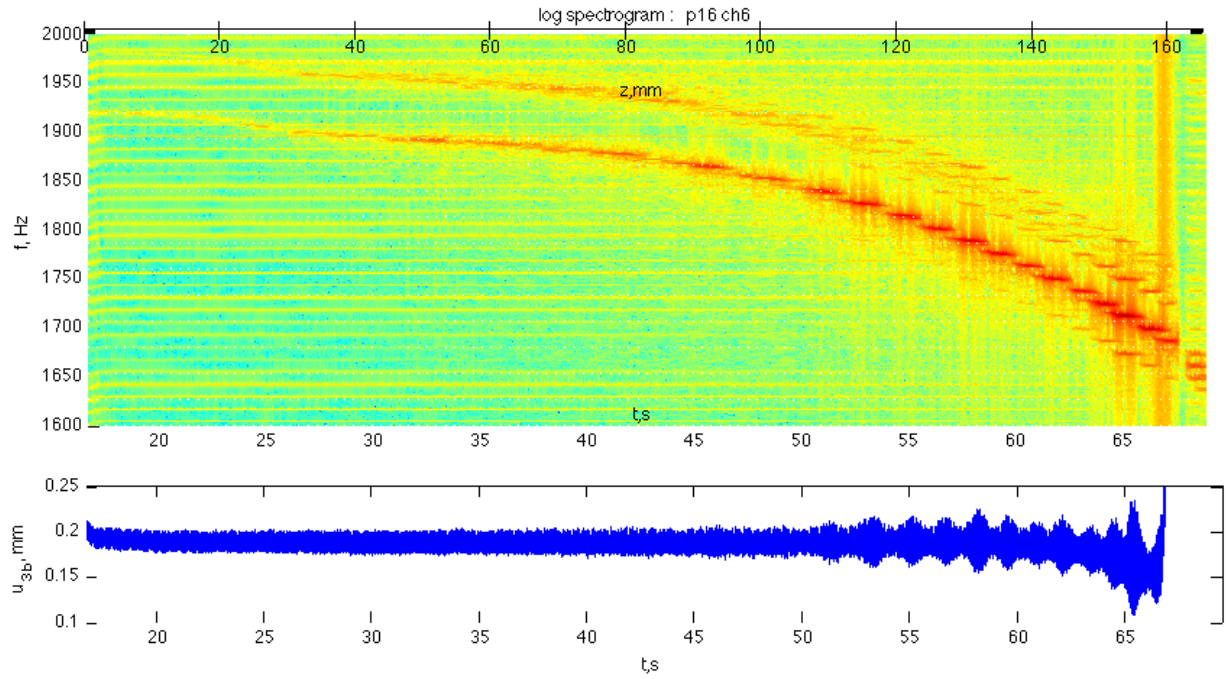


Figure 2.28 – Signal et son spectrogramme (capteur 3b, passe 16)

2.1.6 Mesures des caractéristiques dynamiques de la pièce

Les figures 2.29 et 2.30 montrent le spectrogramme pour les passes 15 et 16, ainsi que le résultat du test marteau après ces deux passes. L'observation du spectrogramme et des FRF indique que les fréquences de broutement sont proches de fréquences naturelles du tube.

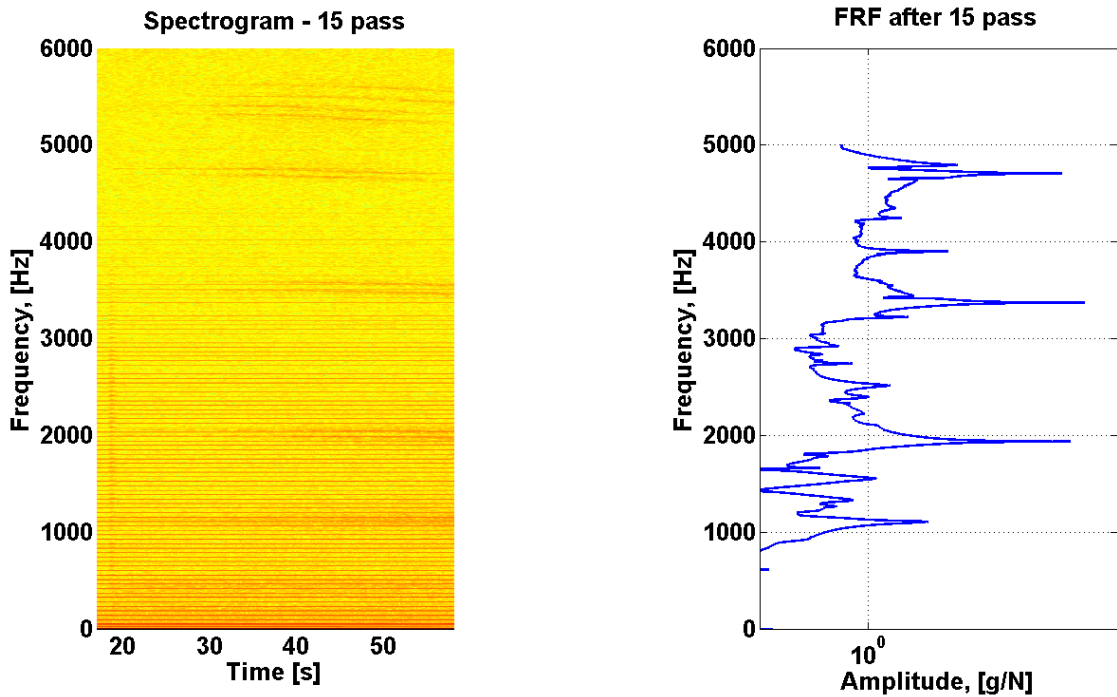


Figure 2.29 – Spectrogramme et FRF pour la 15^{ème} passe

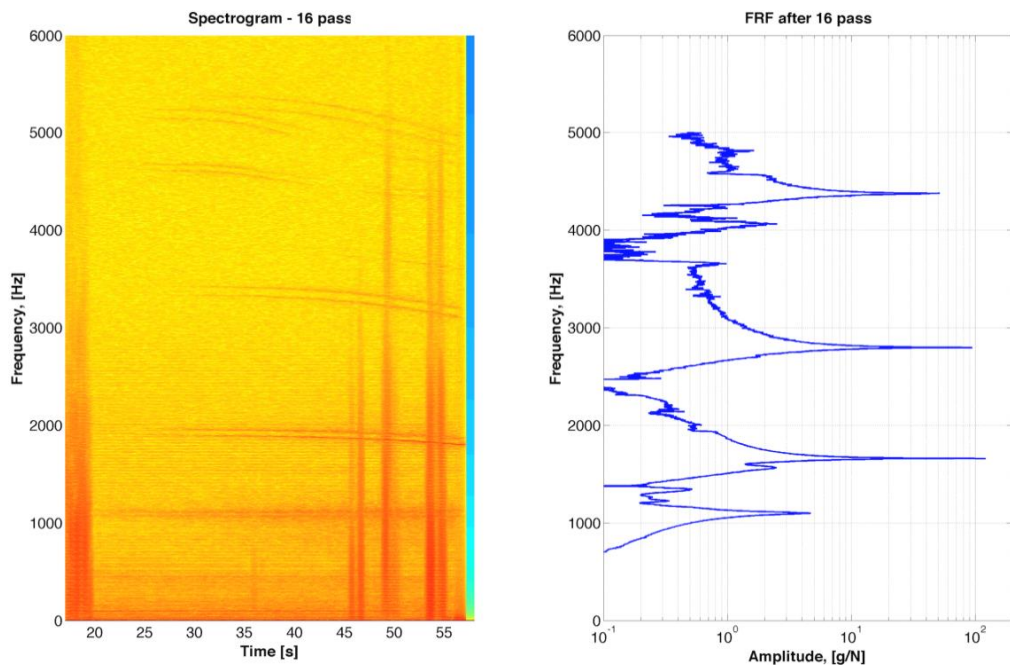


Figure 2.30 – Spectrogramme et FRF pour la 16^{ème} passe

L'analyse de Fourier du signal temporel montre un spectre contenant une série de pics (Figure 2.19, Figure 2.29, Figure 2.30). Pour déterminer le taux d'amortissement associé à chaque pic, on

utilise les résultats du test marteau. Nous n'aurons donc des mesures d'amortissement qu'en début et en fin de passe (avant ou après usinage). Nous avons utilisé la méthode de détermination du facteur d'amortissement par mesure de la largeur du pic de résonance à -3 dB [EWI84], [HEY98] ce qui revient à assimiler le spectre à la réponse d'un système du 2nd ordre à un degré de liberté au voisinage du pic. Cette méthode peut être appliquée ici car les taux d'amortissement sont toujours faibles (de l'ordre du pourcent ou inférieurs au pourcent).

	1^{ère} fréquence	2^{ème} fréquence	3^{ème} fréquence	4^{ème} fréquence
15^{ème} passe h=5,4 (mm)	$f_1 = 1108 \text{ Hz}$ $\zeta_1 = 0,0105$	$f_2 = 1937 \text{ Hz}$ $\zeta_2 = 0,000755$	$f_3 = 3372 \text{ Hz}$ $\zeta_3 = 0,000511$	$f_4 = 4708 \text{ Hz}$ $\zeta_4 = 0,000536$
16^{ème} passe h=4,4 (mm)	$f_1 = 1100 \text{ Hz}$ $\zeta_1 = 0,0077$	$f_2 = 1661 \text{ Hz}$ $\zeta_2 = 0,0007$	$f_3 = 2798 \text{ Hz}$ $\zeta_3 = 0,0007$	$f_4 = 4377 \text{ Hz}$ $\zeta_4 = 0,0008$

Tableau 2.4 – Fréquences naturelles et taux d'amortissement pour le tube après la 15^{ème} et la 16^{ème} passe

2.2 Détermination du modèle d'efforts de coupe

2.2.1 Description de l'expérience et du montage expérimental

L'étude des efforts de coupe au cours d'une opération de tournage a été effectuée sur un cylindre plein, réalisé dans le même acier que celui du tube utilisé dans l'expérience décrite précédemment. Nous avons utilisé le même outil avec des plaquettes neuves.

La Figure 2.31 montre une photographie du dispositif expérimental. Le but de l'expérience est de déterminer la loi de coupe au voisinage des paramètres nominaux de la coupe lors de la dernière (16^{ème}) passe.

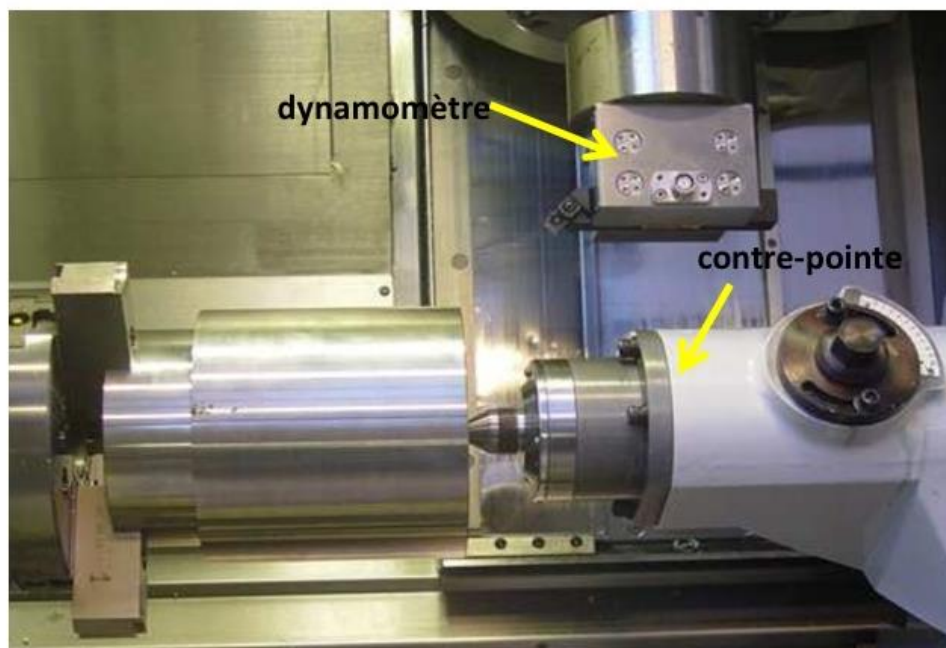


Figure 2.31 – Dispositif expérimental pour l'étude des efforts de coupe

L'expérience a été réalisée avec les paramètres suivants :

Profondeurs de passe : $A_p \in \{0,2; 0,4; 0,8; 1,0; 1,2; 1,5\}$ (en millimètres). La profondeur nominale de coupe vaut 1 mm lors de la passe 16 (passe présentant du broutement).

Avances par tour : $f \in \{0,05; 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,6\}$ (en millimètres par tour) alors que l'avance nominale vaut 0,25 mm/tr.

Vitesses de coupe : $V_c \in \{180; 360; 450\}$ (en mètres par minute). La vitesse de coupe nominale vaut 360 m/min.

La figure 2.32 montre la distribution des expériences pour la vitesse de coupe de $V_c = 360 \text{ m/min}$.

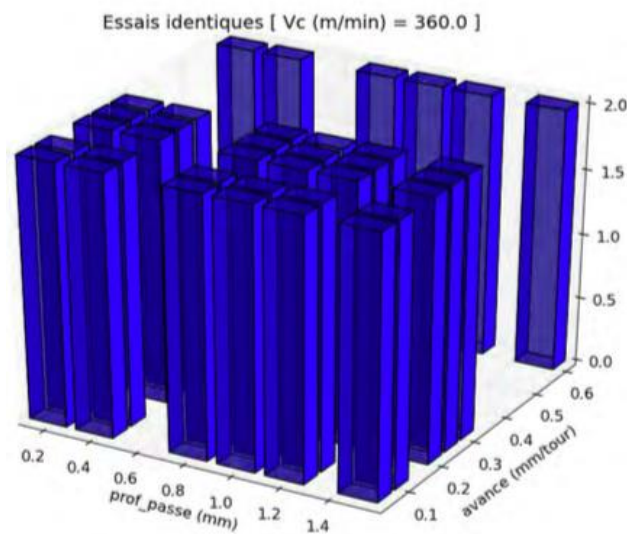


Figure 2.32 – Illustration du nombre d'essais pour chaque jeu de paramètres (f, A_p) pour

$$V_c = 360 \text{ m/min}$$

Pour chaque triplet de valeurs (V_c, A_p, f) , deux essais ont été réalisés. Pour chacun de ces essais, les conditions de coupe ont été maintenues constantes pendant une centaine de tours afin de garantir une bonne stabilisation des efforts mesurés. Au final, nous avons déduit 3 composantes d'effort, qui correspondent à un effort moyen, pour chaque triplet de valeurs de (V_c, A_p, f) . Ces efforts moyens sont donnés en Annexe 1 dans la table A.1 pour la vitesse de coupe $V_c = 360 \text{ m/min}$.

Le repère du dynamomètre, repère dans lequel sont mesurées les 3 composantes de l'effort de coupe, est représenté sur figure 2.33. Ces trois composantes de la force de coupe sont : P_u - composante axiale (direction X), P_w - composante radiale (direction Y), P_v - composante circonférentielle (direction Z). Les dénominations effort axial P_u , radial P_w et circonférentiel P_v de coupe seront utilisées dans la suite du document et notamment dès le chapitre 3.

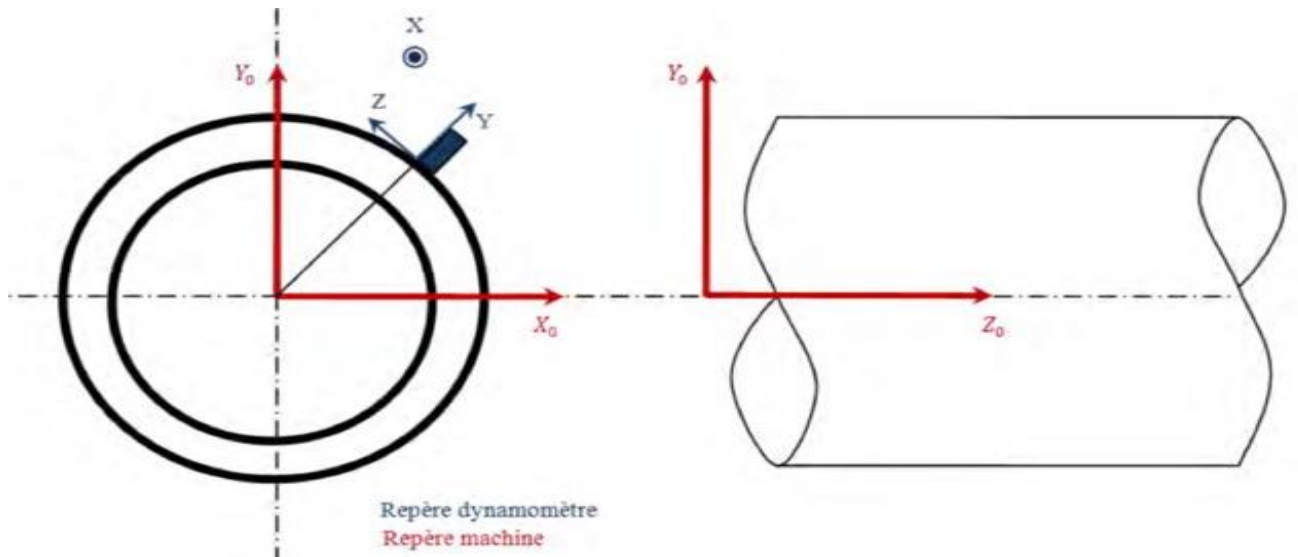


Figure 2.33 – Repère de mesure

2.2.2 Résultats principaux

Pour l'étude de la stabilité de l'opération de chariotage considérée, il est nécessaire d'évaluer l'évolution des efforts de coupe au voisinage du point de fonctionnement nominal de l'usinage. Nous présentons ici la démarche mise en œuvre pour définir une loi de coupe linéarisée autour de ce point de fonctionnement. La variabilité des conditions de coupe provient des vibrations du tube. Selon sa direction axiale, le tube est très rigide et nous proposons de négliger ces vibrations devant les vibrations radiales, direction selon laquelle le tube est par contre très flexible. Ainsi seul l'effet du déplacement radial $w(t)$ est pris en compte.

Cette loi de coupe linéarisée peut alors s'écrire comme suit :

$$P_g^{sum}(t) = P_{0g} + P'_g w(t), \quad (2.1)$$

où $w(t)$ est la valeur du déplacement suivant la direction radiale provenant des vibrations du tube,

avec $g \in \{u, v, w\}$, $P_{0g} = P_g^{\text{exp}}(A_{p0}, f_0)$ et $P'_g = \frac{\partial P_g}{\partial w(t)}$: sont les valeurs scalaires des composantes de la

force de coupe et raideur obtenues expérimentalement.

En introduisant l'influence de la profondeur de passe et celle de l'avance par tour, la raideur de la force de coupe P'_g peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P'_g = \frac{\partial P_g}{\partial w(t)} = \frac{\partial P_g}{\partial A_p|_{A_{p0}}} \frac{\partial A_p(w(t))}{\partial w(t)} + \frac{\partial P_g}{\partial f|_{f_0}} \frac{\partial f(w(t))}{\partial w(t)}. \quad (2.2)$$

Les composantes $\frac{\partial P_g}{\partial A_p|_{A_{p0}}}$ et $\frac{\partial P_g}{\partial f|_{f_0}}$, $g \in \{u, v, w\}$ sont définies comme la pente de la courbe de force de coupe (Annexe 2). Cette courbe est tracée en utilisant les données issues de l'expérience. Les dérivées $\frac{\partial A_p(w(t))}{\partial w(t)}$ et $\frac{\partial f(w(t))}{\partial w(t)}$ sont obtenues analytiquement à partir des paramètres géométriques de la section du copeau représentée sur la figure 2.34.

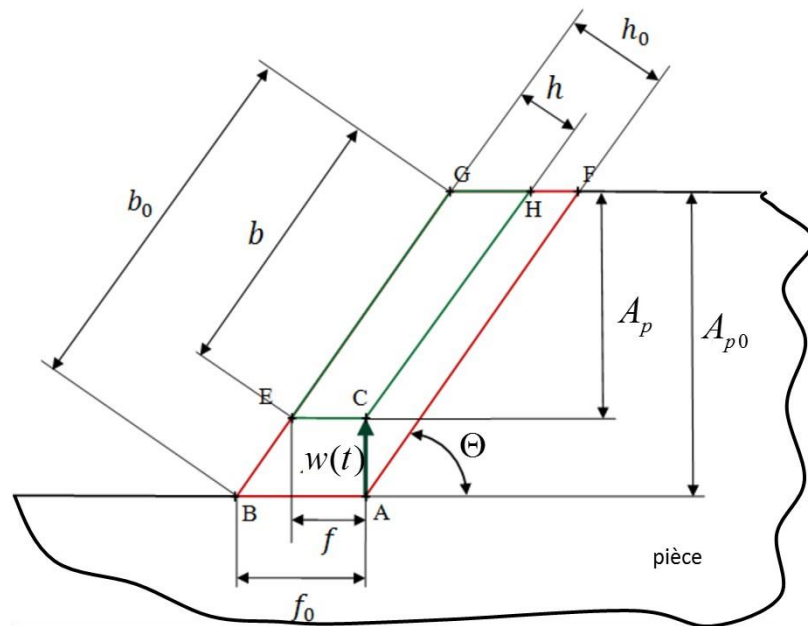


Figure 2.34 – Géométrie de la section du copeau

La Figure 2.34 montre la section du copeau nominal (en rouge) et le copeau réel (en vert) prenant en compte le déplacement $w(t)$ de la pièce. Sur la figure nous avons représenté un déplacement $w(t)$ qui correspond à un éloignement de la pièce par rapport à l'outil. Ceci conduit à un copeau de section plus faible. Le tableau 2.5 présente la désignation des différentes zones de la section du copeau (Figure 2.34).

Régime nominal de coupe		Régime réel de coupe		Description
tour précédent	tour actuel	tour précédent	tour actuel	
B	A	B	C	Position de la pointe de l'outil
BG	AF	BG	CH	Arête de coupe dans la matière
ABGF		CEGH		section coupée

Tableau 2.5 – Caractéristiques géométriques de la zone de coupe

On peut à partir de la figure 2.34 déterminer plusieurs relations. En écrivant la profondeur de passe et l'avance par tour dans la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_p(w(t)) &= A_{p0} + C_1 w(t), \\ f(w(t)) &= f_0 + C_2 w(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

On peut trouver les équations suivantes par une chaîne géométrique fermée :

$$\begin{aligned} A_p(w(t)) &= A_{p0} - w(t) \quad \Rightarrow C_1 = -1; \\ f(w(t)) &= f_0 - \frac{1}{\text{tg}(\Theta)} w(t) \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{\text{tg}(\Theta)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où Θ est l'angle de direction de l'arête de coupe par rapport à l'axe horizontal (figure 2.32).

Par conséquent,

$$\frac{\partial A_p(w(t))}{\partial w(t)} = C_1 = -1, \quad \frac{\partial f(w(t))}{\partial w(t)} = C_2 = -\frac{1}{\text{tg}(\Theta)}. \quad (2.5)$$

Ainsi, grâce aux mesures effectuées, on peut calculer l'évolution des efforts moyens, autour des paramètres nominaux de coupe, en fonction de A_{p0} et f_0 .

Nous écrivons les valeurs des composantes des forces de coupe $P_{0u}(A_{p0}, f_0)$, $P_{0w}(A_{p0}, f_0)$, $P_{0v}(A_{p0}, f_0)$, obtenues à partir de l'expérience (se référer à l'annexe 2), pour les paramètres nominaux de l'usinage ($A_{p0} = 1\text{mm}$; $f_0 = 0,25\text{mm/tr}$; $V_c = 360\text{m/min}$) :

$$\begin{aligned} P_{0u}(A_{p0}, f_0) &= -145,5 \text{ N} \\ P_{0w}(A_{p0}, f_0) &= 305,7 \text{ N} \\ P_{0v}(A_{p0}, f_0) &= -656,2 \text{ N} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les valeurs de $\frac{\partial P_g}{\partial A_p}|_{A_{p0}}$ et $\frac{\partial P_g}{\partial f}|_{f_0}$ (déduites des résultats expérimentaux, annexe 2) sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_u}{\partial A_p}|_{A_{p0}} &= -147,4 \text{ N/m} & \frac{\partial P_u}{\partial f}|_{f_0} &= -87,5 \text{ N/m} \\ \frac{\partial P_w}{\partial A_p}|_{A_{p0}} &= 227,4 \text{ N/m} & \frac{\partial P_w}{\partial f}|_{f_0} &= 278 \text{ N/m} \\ \frac{\partial P_v}{\partial A_p}|_{A_{p0}} &= -772 \text{ N/m} & \frac{\partial P_v}{\partial f}|_{f_0} &= -1349,2 \text{ N/m} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Finalement la loi de coupe linéarisée peut s'écrire :

$$P_g^{sum}(t) = P_{0g} + \left[\frac{\partial P_g}{\partial A_p} \Big|_{A_{p0}} \frac{\partial A_p(w(t))}{\partial w(t)} + \frac{\partial P_g}{\partial f} \Big|_{f_0} \frac{\partial f(w(t))}{\partial w(t)} \right] w(t). \quad (2.8)$$

Pour $\Theta = 45^\circ$, on obtient les expressions finales pour les forces de coupe linéarisées au voisinage du point nominal :

$$\begin{aligned} P_u^{sum}(t) &= -145,5 + 234,9 \cdot w(t), & [\text{N}] \\ P_w^{sum}(t) &= 305,7 - 505,4 \cdot w(t), & [\text{N}] \\ P_v^{sum}(t) &= -656,2 + 2121,3 \cdot w(t). & [\text{N}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ces expressions sont celles utilisées dans le chapitre 4. Elles serviront à alimenter le modèle analytique pour permettre la comparaison entre résultats analytiques et résultats expérimentaux.

2.3 Conclusion intermédiaire

Le dispositif expérimental mis en place a permis de générer un phénomène ayant les caractéristiques d'un broutement régénératif pour une pièce cylindrique à paroi mince. La mesure de déplacement en extrémité de tube est exploitable et son spectrogramme montre clairement l'apparition de vibrations en accord avec les défauts observés sur la pièce. Les fréquences observées évoluent avec l'avancement de l'outil. En fin de dernière passe, cette évolution se fait par paliers. Ces paliers correspondent aux bandes de défauts observés sur la surface de la pièce usinée. Nous avons constaté que les fréquences composant le spectre de vibrations observées de la pièce sont similaires aux pulsations naturelles de la pièce. La fréquence principale à laquelle apparaissent les vibrations auto-entretenues est la fréquence comprise dans la plage de 2100 à 1670 Hz. Cette fréquence correspond à l'une des fréquences naturelles de la coque. Cette fréquence évolue suite à l'enlèvement de la matière au cours de la passe (perte de masse et de raideur). L'enlèvement de matière a donc, pour cet exemple, un effet significatif. Par ailleurs, une expérience a été menée pour élaborer un modèle pour la détermination des forces de coupe au voisinage des conditions nominales. Nous avons ainsi déterminé les coefficients de la loi de coupe linéarisée en fonction de la profondeur et de l'avancement de la coupe correspondant à la 16^{ème} passe (dernière passe), durant laquelle ont été observées les vibrations. Ce modèle est utilisé par la suite pour l'étude de la stabilité de l'opération d'usinage.

Les travaux du présent chapitre ont alimenté les communications [GER'16] et en partie [GER15].

Chapitre 3

Modèle dynamique analytique de l'usinage par tournage du tube

Sommaire

3.1	Description du tube modèle.....	70
3.2	Équations du mouvement dans le référentiel tournant	71
3.3	Équations du mouvement dans le référentiel fixe	76
3.4	Équations du mouvement dans le référentiel fixe sous forme adimensionnelle	78
3.5	Effort de coupe et effet retard.....	80
3.6	Discrétisation des équations de mouvement.....	81
3.6.1	Expansion de la solution dans la direction circonférentielle	81
3.6.2	Expansion de la solution dans la direction axiale	86
3.6.3	Application de la méthode de Galerkin.....	89
3.7	Le système d'équations sous forme matricielle	94
3.8	Le problème aux valeurs propres.....	96
3.9	Ajout d'un amortissement	98
3.10	Conclusion intermédiaire	99

Chapitre 3. Modèle dynamique analytique de l'usinage par tournage du tube

Il a été constaté qu'il n'existait, jusqu'à présent, aucune étude qui décrivait analytiquement la dynamique du processus de tournage d'une coque cylindrique à paroi mince, dans laquelle la pièce serait décrite par un modèle mettant en œuvre des équations analytiques. Par conséquent, nous présentons les principaux travaux et méthodes récents pour la recherche et la modélisation analytique des coques tournantes. La théorie des coques s'est développée activement durant tout le 20^{ème} siècle. Aujourd'hui, il existe de nombreuses théories concernant les coques de tournantes (Kirchhoff-Love, Goldenveiser, Novozhilova, Fluge, Sanders, Donnell, Mushtari, etc), ainsi que des méthodes de résolution des systèmes d'équations qui décrivent ces théories. Le travail [LEI73] donne un aperçu des principales théories des coques de révolution. Une des théories les plus utilisées dans les sources [BID77],[PAN68],[ZHA01] est la théorie de Kirchhoff - Love.

Dans les travaux précédents, le problème de l'influence des conditions aux limites sur les fréquences propres des coques est étudié. En ce qui concerne la dérivation des équations de la solution, les hypothèses de Kirchhoff-Love sont faites. L'hypothèse de l'inextensibilité de la surface moyenne est aussi faite [MAT97], avec généralement l'utilisation, pour la discrétisation du système, de fonctions poutre comme fonctions de base [YIM98],[BLE79],[HUA05],[LAM95],[JAM11]. On obtient le résultat du calcul des fréquences propres de la coque pour différentes conditions aux limites. Les résultats, fréquences propres issues du modèle analytique, sont en bon accord avec les résultats obtenus par éléments finis et ce pour les différentes conditions aux limites classiques (encastrement, appui simple, bord libre, ...).

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle analytique pour représenter le comportement dynamique du tube soumis à un effort de coupe mobile vis-à-vis de la pièce. Pour le tube, dont les principales caractéristiques sont données section 3.1, un modèle de coque mince cylindrique est utilisé. La méthode d'Ostrogradski-Hamilton permet d'obtenir un premier système d'équations différentielles définissant les équations de mouvement et conditions aux limites de la coque. La première mise en équation se fait dans le référentiel tournant solidaire de la coque (section 3.2). Ces équations de mouvement sont exprimées en termes de composantes $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$, $w(x, \varphi, t)$, relatives aux déplacements axial, circonférentiel et radial. Nous passons ensuite, section 3.3, dans un référentiel fixe vis-à-vis de la machine, référentiel dans lequel l'effort de coupe n'est plus tournant (simple translation de l'outil dans ce référentiel). Avant de poursuivre nous proposons une écriture adimensionnelle des équations de mouvement (section 3.4). La prise en compte de l'effet retard (déformation de la pièce au tour précédent) est présentée section 3.5 ce qui conclut la mise en équation du modèle de coque avec

effort de coupe.

La recherche de la solution du système d'équations obtenues est ensuite réalisée section 3.6 en commençant par expansion de Fourier vis-à-vis la coordonnée angulaire φ . Une seconde expansion, dans la direction axiale, basée sur des fonctions classiquement utilisées pour les poutres [LAM95], [ZHA01],[BLE79] et s'appuyant sur le procédé de Galerkin [HUA05],[LOP16],[JAM11] est ensuite introduite. Cette seconde expansion utilise notamment une hypothèse d'inextensibilité de la surface moyenne [MAT97] pour définir les fonctions axiales. Après cette dernière expansion on sépare finalement les termes en inertie, qui donnent naissance à une matrice de masse, des termes en déformations, qui donnent naissance à une matrice de raideur (section 3.7).

La validité de l'approche est estimée à partir d'un calcul de fréquences propres que l'on compare aux résultats obtenus avec un modèle éléments finis coques (section 3.8). Enfin, avant de conclure (section 3.10), on présente l'amortissement de Rayleigh que l'on introduit pour tenir compte des dissipations observées dans l'expérience au voisinage des fréquences propres du tube réel (section 3.9).

3.1 Description du tube modèle

La figure 3.1 représente le schéma du tube que nous allons modéliser.

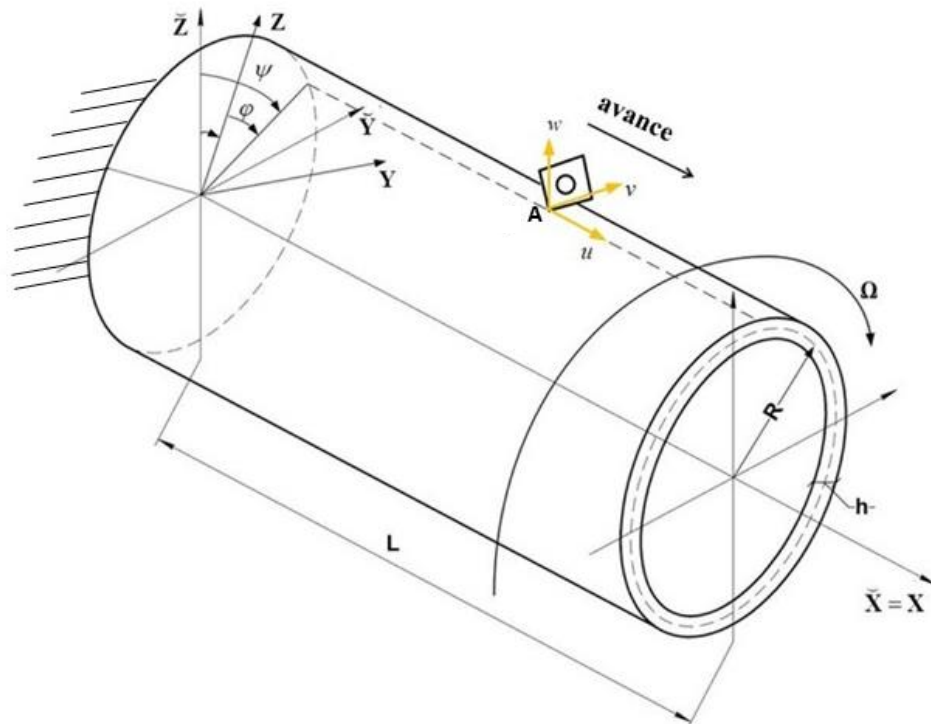


Figure 3.1 – Schéma du modèle considéré

Nous considérons une coque cylindrique à paroi mince (modèle de Kirchhoff-Love) en rotation autour de son axe à une vitesse angulaire constante. La coque est chargée par une force ponctuelle mobile au point A suite à l'action de l'outil (effort de coupe). Elle est également soumise à l'effet non galiléen provenant de la rotation du tube, effet lié à la vitesse angulaire Ω . Le bord en $x=0$ de la coque est considéré encasté et le bord en $x=L$ est libre.

Les paramètres géométriques de la coque cylindrique sont sa longueur L (dimension parallèle à X), son rayon R et son épaisseur h (qui sera considérée comme variable lorsque l'enlèvement de matière sera pris en compte).

On fait les hypothèses suivantes :

- Le matériau de la coque est homogène, isotrope et élastique, de masse volumique ρ , de module d'élasticité E et de coefficient de Poisson μ .
- Les segments traversant de la coque, perpendiculaires à sa surface moyenne, restent droits et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (modèle de coque mince).
- L'interaction entre la coque et l'outil est modélisée par un effort ponctuel appliqué sur la surface moyenne. On considère ainsi que l'éventuel moment appliqué par l'outil est négligeable.

Nous utilisons les systèmes de coordonnées suivants (figure 3.1) :

XYZ - système de coordonnées tournant, lié à la pièce, **X** étant parallèle à l'axe du cylindre; ce référentiel n'est pas galiléen (rotation de la pièce).

$\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ - système de coordonnées fixe, lié au bâti de la machine-outil, **X** et **\tilde{X}** étant confondus; dans ce référentiel l'outil possède un mouvement de translation et la pièce un mouvement de rotation.

3.2 Équations du mouvement dans le référentiel tournant

Nous proposons de commencer par écrire les équations de mouvement régissant les vibrations de la pièce dans le système de coordonnées tournant **XYZ**. La pièce est modélisée par une coque mince cylindrique (figure 3.1). Pour ce faire nous utilisons le principe d'Ostrogradski-Hamilton qui peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(K - \Pi) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma P_i \cdot \delta q_i dt, \quad (3.1)$$

où δ est le symbole de variation, K est l'énergie cinétique de la coque, Π l'énergie potentielle de déformation, P_i les composantes des efforts généralisés appliqués et q_i les déplacements généralisés associés.

L'énergie cinétique de la coque est donnée par [BID77] :

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho_h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega(R+w) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega v \right)^2 \right] dx d\varphi, \quad (3.2)$$

où

- $\rho_h = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz$ est la masse surfacique de la coque;
- $u(x, \varphi, t), v(x, \varphi, t), w(x, \varphi, t)$ sont les composantes du déplacement de la surface moyenne selon les directions axiale, circonférentielle et radiale, respectivement paramétrée par la position du point courant sur la surface moyenne. Cette position est définie par la coordonnée axiale x et angulaire φ . La variable t représente le temps.
- Ω est la vitesse angulaire de rotation.

L'énergie potentielle de déformation de coque est donnée par [BID77] :

$$\Pi = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L (N_x \varepsilon_x + N_\varphi \varepsilon_\varphi + N_{x\varphi} \gamma_{x\varphi} + M_x \kappa_x + M_\varphi \kappa_\varphi + 2H \kappa_{x\varphi}) dx d\varphi. \quad (3.3)$$

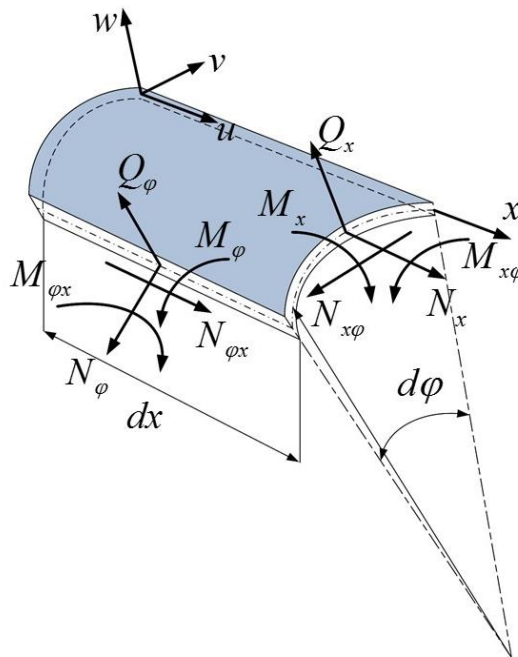


Figure 3.2 – Schéma des facteurs intérieurs

Cette écriture fait intervenir les efforts intérieurs $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}, M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}$ et $M_{\varphi x}$ (contraintes généralisées de type coque, figure 3.2), ainsi que les déformations généralisées de type copque $\varepsilon_x, \varepsilon_\varphi, \gamma_{x\varphi}, \kappa_x, \kappa_\varphi$ et $\kappa_{x\varphi}$. En utilisant la relation de comportement élastique, il est possible de définir les contraintes généralisées à partir des déformations généralisées comme suit [LEI73],[BID77] :

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\varphi); & M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\kappa_x + \mu\kappa_\varphi); \\
N_\varphi &= \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_x); & M_\varphi &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\kappa_\varphi + \mu\kappa_x) \\
N_{x\varphi} &= S + \frac{H}{R}; & N_{\varphi x} &= S; \\
S &= \frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma_{x\varphi}; & H &= \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\kappa_{x\varphi}; & M_{x\varphi} &= M_{\varphi x} = H.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Par ailleurs, les composantes de déformation et de courbure sont définies comme suit à partir des déplacements [LEI73],[BID77] :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\right); & \kappa_\varphi &= -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right); \\
\gamma_{x\varphi} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right); & \kappa_{x\varphi} &= -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour obtenir les équations de mouvement on insère alors l'expression des contraintes généralisées (3.4) et celle des déformations généralisée (3.5) dans l'expression de l'énergie potentielle (3.3) puis dans le principe Ostrogradski-Hamilton (3.1). En supposant que les variations $\delta u, \delta v, \delta w$ des paramètres de mouvement $u(x, \varphi, t), v(x, \varphi, t), w(x, \varphi, t)$ sont indépendantes (Annexe 3) on aboutit aux trois équations de mouvement suivantes [BID77].

$$\begin{cases} L_{11} \cdot u + L_{12} \cdot v + L_{13} \cdot w = B^{-1} \rho_h \partial_t^2 u - p_u \\ L_{21} \cdot u + L_{22} \cdot v + L_{23} \cdot w = B^{-1} \rho_h \partial_t^2 v - p_v + \Delta p_{v\Omega} \\ L_{31} \cdot u + L_{32} \cdot v + L_{33} \cdot w = -B^{-1} \rho_h \partial_t^2 w + p_w + \Delta p_{w\Omega} \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans cette expression les opérateurs symétriques différentiels L_{ij} sont définis par :

$$\begin{aligned} L_{11} &= \partial_x^2 + \frac{1-\mu}{2R^2} \partial_\varphi^2; \\ L_{22} &= \frac{1-\mu}{2} \partial_x^2 + \frac{1}{R^2} \partial_\varphi^2 + \frac{h^2}{12R^2} \left(\frac{1}{R^2} \partial_\varphi^2 + 2(1-\mu) \partial_x^2 \right); \\ L_{33} &= \frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12R^2} \left[R^2 \partial_x^4 + 2 \partial_x^2 \partial_\varphi^2 + \frac{1}{R^2} \partial_\varphi^4 \right]; \\ L_{12} &= \frac{1+\mu}{2R} \partial_x \partial_\varphi; & L_{13} &= \frac{\mu}{R} \partial_x; \\ L_{23} &= \frac{1}{R^2} \partial_\varphi - \frac{h^2}{12R^2} \left[(2-\mu) \partial_\varphi \partial_x^2 + \frac{1}{R^2} \partial_\varphi^3 \right]; \\ L_{21} &= L_{12}; L_{31} = L_{13}; L_{32} = L_{23}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $\partial_t^* = \partial^*/\partial t$ désigne la dérivée partielle vis-à-vis du temps t , et de même $\partial_x^* = \partial^*/\partial x$ et $\partial_\varphi^* = \partial^*/\partial \varphi$.

Les termes d'inertie provenant de la rotation (énergie cinétique) sont composés comme suit [MUM09] :

$$\begin{aligned} \Delta p_{v\Omega} &= B^{-1} \rho_h (2\Omega \partial_t w - \Omega^2 v); \\ \Delta p_{w\Omega} &= B^{-1} \rho_h (2\Omega \partial_t v + \Omega^2 w + R\Omega^2); & B &= \frac{Eh}{1-\mu^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ces deux composantes associées à la l'inertie (3.8) ont très peu d'impact dans le domaine d'application étudié [GER12]. Cet effet sera négligé par la suite.

Enfin p_u, p_v, p_w sont les composantes des forces surfaciques agissant sur la coque dans les directions axiale, circonférentielle et radiale, respectivement. Ces forces surfaciques, qui proviennent de l'interaction entre l'outil et la coque, sont déduites des efforts ponctuels de coupe à l'aide des fonctions de Dirac δ_D à l'aide de la relation :

$$p_g = P_g(t, \varphi, x) \frac{1}{R} \delta_D(x - x_P) \delta_D(\varphi - \varphi_P); \quad g \in \{u, v, w\}, \quad (3.9)$$

où x_p, φ_p sont les coordonnées de la position de l'outil dans les directions longitudinale et circonférentielle respectivement. $P_g(t, \varphi, x)$ désigne les différentes composantes de la force de coupe ponctuelle. La fonction $\delta_D(x - x_p)$ est homogène à l'inverse d'une longueur, et la fonction $\delta_D(\varphi - \varphi_p)$ est sans dimension. Il est à noter que φ_p n'est pas constant car on est ici dans un référentiel tournant avec la pièce.

Reste, pour finaliser de poser le problème, à adjoindre aux équations de mouvement (3.6) les conditions aux limites : l'extrémité de la coque en $x = 0$ est encastrée, l'extrémité en $x = L$ est libre.

L'encastrement se traduit par l'absence de mouvements dans les directions axiale, radiale et circonférentielle ainsi que par une rotation nulle des segments traversant autour de la direction circonférentielle (3.10), [BID77] :

$$\left(\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array} \right)_{x=0} \quad (3.10)$$

La condition aux limites pour le bord libre impose également 4 conditions sur les contraintes généralisées qui s'expriment comme suit [BID77] :

$$\left(\begin{array}{l} N_x = 0 \\ M_x = 0 \\ Q_x^* = Q_x + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \\ S_x^* = N_{x\varphi} + \frac{1}{R} M_{x\varphi} = 0 \end{array} \right)_{x=L} \quad (3.11)$$

De manière à se ramener à un problème où ne subsistent que les inconnues en déplacement, on utilise les expressions (3.4) et (3.5) (comportement élastique et définition des déformations généralisées).

Les 4 relations précédentes deviennent alors :

$$\left(\begin{array}{l} N_x = 0 \\ M_x = 0 \\ Q_x^* = 0 \\ S_x^* = 0 \end{array} \right)_{x=L} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{R} w = 0 \\ \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \left(\frac{\mu}{R^2} + \frac{2(1-\mu)}{R^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^2 \partial x} \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{h^2}{3R^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{3R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} = 0 \end{array} \right)_{x=L} \quad (3.12)$$

Le problème final à résoudre consiste donc à trouver les champs $u(x, \varphi, t), v(x, \varphi, t), w(x, \varphi, t)$ vérifiant les équations de mouvement (3.6), les conditions aux limites (3.10) et (3.12) pour tout instant t de la durée de l'étude. Pour ce qui est des conditions initiales, on prend des déplacements et des vitesses nulles à l'instant initial $t = 0$.

3.3 Équations du mouvement dans le référentiel fixe

Il est intéressant de faire passer les équations de mouvement (3.6), écrites dans le référentiel tournant, dans le système de coordonnées fixe pour faciliter l'écriture du mouvement de la coque sous l'outil qui, lui, ne tourne pas. Le passage entre système de coordonnées tournant et système de coordonnées fixe est précisé sur la figure 3.3.

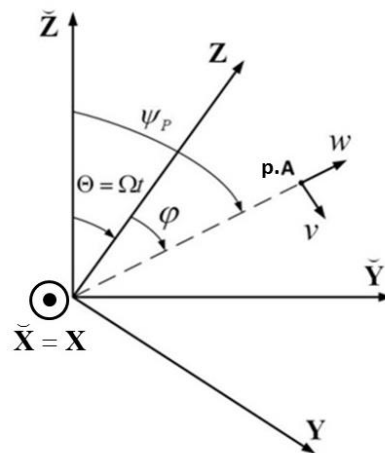


Figure 3.3 – Relation entre système de coordonnées fixe et système de coordonnées tournant

Dans l'équation (3.9), la coordonnée angulaire φ_p de l'outil est variable (rotation de l'outil vis-à-vis de la pièce). Dans le système de coordonnées fixe, cette coordonnée angulaire devient constante.

Les relations permettant de passer du référentiel mobile \mathbf{XYZ} au référentiel fixe $\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Z}}$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \psi}; & \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \Omega \tilde{v}; \\
x &= \tilde{x}; & \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \Omega \tilde{w}; \\
u(x, \varphi, t) &= \tilde{u}(\tilde{x}, \psi, t); & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} - \Omega^2 \tilde{w} + 2\Omega \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}; \\
v(x, \varphi, t) &= \tilde{v}(\tilde{x}, \psi, t); & & \\
w(x, \varphi, t) &= \tilde{w}(\tilde{x}, \psi, t); & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} - \Omega^2 \tilde{v} - 2\Omega \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}, \\
\psi_p &= \varphi + \Theta; & &
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ sont les composantes du déplacement de la coque dans le référentiel fixe.

En tenant compte des relations (3.13), le système d'équations (3.6) devient :

$$\begin{cases}
N_{11} \cdot \tilde{u} + N_{12} \cdot \tilde{v} + N_{13} \cdot \tilde{w} = B^{-1} \rho_h \partial_t^2 \tilde{u} - \tilde{p}_u \\
N_{21} \cdot \tilde{u} + N_{22} \cdot \tilde{v} + N_{23} \cdot \tilde{w} = B^{-1} \rho_h \partial_t^2 \tilde{v} - \tilde{p}_v + \Delta p_{v\Omega} \\
N_{31} \cdot \tilde{u} + N_{32} \cdot \tilde{v} + N_{33} \cdot \tilde{w} = -B^{-1} \rho_h \partial_t^2 \tilde{w} + \tilde{p}_w + \Delta p_{w\Omega}
\end{cases} \tag{3.14}$$

Les opérateurs différentiels N_{ij} utilisés dans (3.14) sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \partial_{\tilde{x}}^2 + \frac{1-\mu}{2R^2} \partial_{\psi}^2; \\
N_{22} &= \frac{1-\mu}{2} \partial_{\tilde{x}}^2 + \frac{1}{R^2} \partial_{\psi}^2 + \frac{h^2}{12R^4} \partial_{\psi}^2; \\
N_{33} &= \frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12R^4} \partial_{\psi}^4; \\
N_{12} &= \frac{1+\mu}{2R} \partial_{\tilde{x}} \partial_{\psi}; & N_{13} &= \frac{\mu}{R} \partial_{\tilde{x}}; & N_{23} &= \frac{1}{R^2} \partial_{\psi} - \frac{h^2}{12R^4} \partial_{\psi}^3; \\
N_{21} &= N_{12}; & N_{31} &= N_{13}; & N_{32} &= N_{23}.
\end{aligned}$$

Comme évoqué précédemment, les composantes associées à l'inertie en rotation seront négligées :

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{p}_{v\Omega} &= 0; \\
\Delta \tilde{p}_{w\Omega} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.4 Équations du mouvement dans le référentiel fixe sous forme adimensionnelle

Nous proposons d'écrire système d'équations (3.14) sous forme adimensionnelle. Pour cela il est nécessaire d'introduire des variables et constantes adimensionnées.

Nous avons fait les choix suivants :

$$\begin{aligned}
 t &= T_* \tau; & \Omega &= \frac{1}{T_*} \tilde{\Omega}_*; & \{u, v, w\} &= h_* \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}; \\
 T_* &= L \sqrt{\rho_h \frac{(1-\mu^2)}{Eh}}; & x &= L \tilde{x}; & \rho_h &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz; \\
 \tilde{p}_u &= B \frac{1}{L} \tilde{p}_u; & \tilde{p}_v &= B \frac{1}{L} \tilde{p}_v; & \tilde{p}_w &= B \frac{1}{L} \tilde{p}_w,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

où

- T_* est l'échelle de temps inhérente à la dynamique de la pièce;
- h_* représente l'épaisseur de matière enlevée lors du passage de l'outil (profondeur de passe);
- $\tau, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ sont le paramètre temporel adimensionnel et les composantes adimensionnelles du déplacement;
- $\tilde{p}_u, \tilde{p}_v, \tilde{p}_w$ désignent les composantes adimensionnelles des forces surfaciques dans les directions axiale, radiale et circonférentielle, respectivement.

Les composantes des forces surfaciques provenant de la coupe se présentent sous la forme suivante (3.17) :

$$\tilde{p}_{\tilde{g}} = \tilde{P}_{\tilde{g}}(\tau, \psi, \tilde{x}) \frac{1}{\tilde{R}} \delta_D(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \delta_D(\psi - \psi_p); \quad \tilde{g} \in \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}, \tag{3.17}$$

où

- \tilde{x}_p, ψ_p sont les coordonnées de la position de l'outil (avec ψ_p constant),
- $\tilde{P}_{\tilde{g}}(\tau, \psi, \tilde{x})$ sont les composantes adimensionnelles de la force ponctuelle exercée par l'outil,
- $\delta_D(\tilde{x} - \tilde{x}_p), \delta_D(\psi - \psi_p)$ sont les fonctions de Dirac.

Après remplacement des paramètres sans dimension donnés par la relation (3.16) dans le système d'équations (3.14), nous obtenons le système d'équations sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{N}_{11} \cdot \tilde{u} + \tilde{N}_{12} \cdot \tilde{v} + \tilde{N}_{13} \cdot \tilde{w} = -\tilde{p}_u \\ \tilde{N}_{21} \cdot \tilde{u} + \tilde{N}_{22} \cdot \tilde{v} + \tilde{N}_{23} \cdot \tilde{w} = -\tilde{p}_v, \\ \tilde{N}_{31} \cdot \tilde{u} + \tilde{N}_{32} \cdot \tilde{v} + \tilde{N}_{33} \cdot \tilde{w} = \tilde{p}_w \end{cases} \quad (3.18)$$

où les notations suivantes sont utilisées pour les opérateurs différentiels symétriques sans dimension \tilde{N}_{ij} :

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{11} &= \varepsilon_1 \partial_{\tilde{x}}^2 + \Delta_1 \varepsilon_2 \partial_{\psi}^2 - \varepsilon_1 \partial_{\tau}^2; \\ \tilde{N}_{22} &= \varepsilon_2 \partial_{\psi}^2 + \Delta_1 \varepsilon_1 \partial_{\tilde{x}}^2 - \varepsilon_1 \partial_{\tau}^2 + \varepsilon_4 \varepsilon_2 \partial_{\psi}^2; \\ \tilde{N}_{33} &= \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \varepsilon_2 \partial_{\psi}^4 + \varepsilon_1 \partial_{\tau}^2; \\ \tilde{N}_{12} &= \Delta_2 \varepsilon_3 \partial_{\tilde{x}} \partial_{\psi}; & \tilde{N}_{13} &= \mu \varepsilon_3 \partial_{\tilde{x}}; & \tilde{N}_{23} &= \varepsilon_2 \partial_{\psi} - \varepsilon_4 \varepsilon_2 \partial_{\psi}^3; \\ \tilde{N}_{21} &= \tilde{N}_{12}; & \tilde{N}_{31} &= \tilde{N}_{13}; & \tilde{N}_{32} &= \tilde{N}_{23}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où $\partial_{\tau}^* = \partial^*/\partial\tau$ désigne la dérivée partielle vis-à-vis du temps τ , et de même $\partial_{\tilde{x}}^* = \partial^*/\partial\tilde{x}$, $\partial_{\psi}^* = \partial^*/\partial\psi$.

Pour exprimer l'opérateur différentiel \tilde{N}_{ij} , on utilise l'ensemble de paramètres adimensionnels suivants (3.20) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{h_*}{L}; & \Delta_1 &= \frac{1-\mu}{2}; & \varepsilon_3 &= \frac{h_*}{R}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{h_* L}{R^2}; & \Delta_2 &= \frac{1+\mu}{2}; & \varepsilon_4 &= \frac{h^2}{12R^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ainsi, on s'intéresse au mouvement de la coque, représenté par $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ dans le repère fixe, à partir des équations (3.18), avec les conditions aux limites (3.10) et (3.12).

3.5 Effort de coupe et effet retard

Pour l'étude de la stabilité de l'opération de coupe, il est nécessaire de relier l'effort de coupe à l'épaisseur instantanée coupée en présence de vibrations. La variation de cette dernière, vis-à-vis de l'épaisseur nominale de coupe, est directement liée à l'écart de déplacement de la pièce sous l'outil entre l'instant actuel et lors de l'instant correspondant au tour précédent. Cette variation d'épaisseur de coupe, ou encore perturbation dynamique de la profondeur de coupe, est, sous forme adimensionnelle, ainsi donnée par la relation : $\tilde{h}_w = \left(\tilde{w}(\tau - \tilde{T}, \psi, \tilde{x}) - \tilde{w}(\tau, \psi, \tilde{x}) \right)$, où \tilde{T} désigne la période adimensionnée de rotation ($\tilde{T} = T / T_*$).

Une loi de coupe linéarisée autour des paramètres de coupe nominaux (pour plus de détails se référer à la section 2.2) peut alors, pour chaque direction $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$, s'écrire :

$$P_{\tilde{g}}^{sum}(\tau) = \tilde{p}_0 + \tilde{\chi} e_{\tilde{g}} \tilde{h}_{\tilde{w}}; \quad \tilde{g} \in \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}, \quad (3.21)$$

où $\tilde{\chi}$ est le coefficient adimensionnel de raideur de coupe qui, multiplié par les cosinus directeurs $e_{\tilde{u}}, e_{\tilde{v}}, e_{\tilde{w}}$, correspond aux raideurs de coupe adimensionnées $\frac{\partial P_{\tilde{g}}}{\partial A_p} \Big|_{A_{p0}} \frac{1}{B} \frac{L}{R}$ (raideurs définies dans la section 2.2.2). Le paramètre \tilde{p}_0 est la force nominale de coupe.

Pour étudier la stabilité du processus de coupe, on considère le système dans un état perturbé et donc seule la partie des forces de coupe associée à la perturbation est nécessaire. Elle s'écrit comme suit :

$$\tilde{P}_{\tilde{g}}(\tau, \psi, \tilde{x}) = \tilde{\chi} e_{\tilde{g}} \tilde{h}_{\tilde{w}}; \quad \tilde{g} \in \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}. \quad (3.22)$$

3.6 Discrétisation des équations de mouvement

Dans cette section nous introduisons successivement une expansion de la solution dans la direction circonférentielle (section 3.6.1) et dans la direction axiale (section 3.6.2). Pour la seconde expansion, une approche de Galerkin permet d'obtenir une nouvelle forme matricielle des équations de mouvement. Les termes de dérivation vis-à-vis des variables d'espace auront alors été traités. Les termes de dérivation vis-à-vis du temps sont traités dans la sections 3.7 et conduiront à l'écriture matricielle finale des équations de mouvement.

3.6.1 Expansion de la solution dans la direction circonférentielle

Pour les coques fermées, la solution, dans la direction circonférentielle, peut s'exprimer sous la forme de séries de Fourier [BID77] de manière naturelle :

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(\tau, \psi, \tilde{x}) &\approx \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^c(\tau, \tilde{x}) \cos(k\psi) + \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^s(\tau, \tilde{x}) \sin(k\psi), \\
 \tilde{v}(\tau, \psi, \tilde{x}) &\approx \sum_{k=1}^N \tilde{v}_k^c(\tau, \tilde{x}) \sin(k\psi) - \sum_{k=0}^N \tilde{v}_k^s(\tau, \tilde{x}) \cos(k\psi), \\
 \tilde{w}(\tau, \psi, \tilde{x}) &\approx \sum_{k=0}^N \tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x}) \cos(k\psi) + \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x}) \sin(k\psi).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dans ces équations, les termes avec l'exposant « c » décrivent la partie symétrique du déplacement (en cosinus), tandis que les termes avec l'exposant « s » correspondent à la partie antisymétrique du déplacement (en sinus), par rapport au méridien initial. Cependant, pour rendre plus faciles les calculs à venir, les termes $\tilde{v}_k^c(\tau, \tilde{x})$ et $\tilde{v}_k^s(\tau, \tilde{x})$, dans la direction tangentielle au mouvement, sont associés à $\sin(k\psi)$ et $\cos(k\psi)$ respectivement. Cela permet de séparer les parties symétriques et antisymétriques dans le système (3.29) à venir.

La force de surface agit de façon similaire sur les différentes composantes du déplacement (3.23) et est également exprimée au moyen d'une série de Fourier (3.24) :

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_u(\tau, \psi, \tilde{x}) &\approx \sum_{k=0}^N \tilde{p}_{ku}^c(\tau, \tilde{x}) \cos(k\psi) + \sum_{k=1}^N \tilde{p}_{ku}^s(\tau, \tilde{x}) \sin(k\psi), \\
 \tilde{p}_v(\tau, \psi, \tilde{x}) &\approx \sum_{k=1}^N \tilde{p}_{kv}^c(\tau, \tilde{x}) \sin(k\psi) - \sum_{k=0}^N \tilde{p}_{kv}^s(\tau, \tilde{x}) \cos(k\psi), \\
 \tilde{p}_w(\tau, \psi, \tilde{x}) &\approx \sum_{k=0}^N \tilde{p}_{kw}^c(\tau, \tilde{x}) \cos(k\psi) + \sum_{k=1}^N \tilde{p}_{kw}^s(\tau, \tilde{x}) \sin(k\psi).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Pour un harmonique k , l'amplitude des composantes de la force (3.24) se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{k\tilde{g}_1}^c(\tau, \tilde{x}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{\tilde{g}_1} \cos(k\psi) d\psi; & \tilde{g}_1 \in \{u, w\}; \\ \tilde{p}_{k\tilde{g}_2}^s(\tau, \tilde{x}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{\tilde{g}_2} \cos(k\psi) d\psi; & \tilde{g}_2 \in \{v\}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{k\tilde{g}_1}^s(\tau, \tilde{x}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{\tilde{g}_1} \sin(k\psi) d\psi; & \tilde{g}_1 \in \{u, w\}; \\ \tilde{p}_{k\tilde{g}_2}^c(\tau, \tilde{x}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{\tilde{g}_2} \sin(k\psi) d\psi; & \tilde{g}_2 \in \{v\}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

La prise en compte des relations (3.17) et (3.22), l'introduction du temps retardé $\tau_1 = \tau - \tilde{T}$ dans (3.25) conduisent à :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{k\tilde{g}_1}^c(\tau, \tilde{x}) &= \frac{1}{\pi \tilde{R}} \tilde{P}_{\tilde{g}_1}(\tau, \psi, \tilde{x}) \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \cos(k\psi_p) \\ &= \frac{1}{\pi \tilde{R}} \tilde{\chi} e_{\tilde{g}_1} (\tilde{w}(\tau_1, \psi_p, \tilde{x}) - \tilde{w}(\tau, \psi_p, \tilde{x})) \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \cos(k\psi_p) \\ &= \frac{1}{\pi \tilde{R}} \tilde{\chi} e_{\tilde{g}_1} (\tilde{w}_k^c(\tau_1, \tilde{x}) \cos(k\psi_p) + \tilde{w}_k^s(\tau_1, \tilde{x}) \sin(k\psi_p) - \dots \\ &\quad - \tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x}) \cos(k\psi_p) - \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x}) \sin(k\psi_p)) \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \cos(k\psi_p) \\ &= \frac{\tilde{\chi} e_{\tilde{g}_1}}{\pi \tilde{R}} \left((\tilde{w}_k^c(\tau_1, \tilde{x}) - \tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x})) \cos(k\psi_p) + (\tilde{w}_k^s(\tau_1, \tilde{x}) - \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x})) \sin(k\psi_p) \right) \cdot \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \cos(k\psi_p); \\ \tilde{p}_{k\tilde{g}_2}^s(\tau, \tilde{x}) &= \frac{1}{\pi \tilde{R}} \tilde{P}_{\tilde{g}_2}(\tau, \psi, \tilde{x}) \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \cos(k\psi_p) \\ &= \frac{1}{\pi \tilde{R}} \tilde{\chi} e_{\tilde{g}_2} (\tilde{w}(\tau_1, \psi_p, \tilde{x}) - \tilde{w}(\tau, \psi_p, \tilde{x})) \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \cos(k\psi_p) \\ &= \frac{1}{\pi \tilde{R}} \tilde{\chi} e_{\tilde{g}_2} (\tilde{w}_k^c(\tau_1, \tilde{x}) \cos(k\psi_p) + \tilde{w}_k^s(\tau_1, \tilde{x}) \sin(k\psi_p) - \dots \\ &\quad - \tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x}) \cos(k\psi_p) - \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x}) \sin(k\psi_p)) \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \cos(k\psi_p) \\ &= \frac{\tilde{\chi} e_{\tilde{g}_2}}{\pi \tilde{R}} \left((\tilde{w}_k^c(\tau_1, \tilde{x}) - \tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x})) \cos(k\psi_p) + (\tilde{w}_k^s(\tau_1, \tilde{x}) - \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x})) \sin(k\psi_p) \right) \cdot \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \cos(k\psi_p),\end{aligned}\quad (3.27)$$

avec

$$\tilde{g}_1 \in \{u, w\}; \quad \tilde{g}_2 \in \{v\}.$$

En traitant les composantes $\tilde{p}_{k\tilde{g}_1}^s(\tau, \tilde{x})$ et $\tilde{p}_{k\tilde{g}_2}^c(\tau, \tilde{x})$ dans la relation (3.26) de la même manière on aboutit à la forme condensée suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k\tilde{g}_1}^c(\tau, \tilde{x}) &= A_1 e_{\tilde{g}_1}^-; & \tilde{p}_{k\tilde{g}_1}^s(\tau, \tilde{x}) &= A_2 e_{\tilde{g}_1}^-; \\ \tilde{p}_{k\tilde{g}_2}^s(\tau, \tilde{x}) &= A_1 e_{\tilde{g}_2}^-; & \tilde{p}_{k\tilde{g}_2}^c(\tau, \tilde{x}) &= A_2 e_{\tilde{g}_2}^-, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\tilde{\chi}}{\pi \tilde{R}} \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \left(\left(\tilde{w}_k^c(\tau_1, \tilde{x}) \cos^2(k\psi_p) + \tilde{w}_k^s(\tau_1, \tilde{x}) \frac{\sin(2k\psi_p)}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x}) \cos^2(k\psi_p) + \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x}) \frac{\sin(2k\psi_p)}{2} \right) \right); \\ A_2 &= \frac{\tilde{\chi}}{\pi \tilde{R}} \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) \left(\left(\tilde{w}_k^c(\tau_1, \tilde{x}) \frac{\sin(2k\psi_p)}{2} + \tilde{w}_k^s(\tau_1, \tilde{x}) \sin^2(k\psi_p) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\tilde{w}_k^c(\tau_1, \tilde{x}) \frac{\sin(2k\psi_p)}{2} + \tilde{w}_k^s(\tau_1, \tilde{x}) \sin^2(k\psi_p) \right) \right). \end{aligned}$$

Après ce travail préalable sur les efforts de coupe, nous revenons aux 3 équations de mouvements (3.18), dans lesquelles nous insérons les décompositions en série de Fourier (expressions (3.23) et (3.24) à (3.28)). Un regroupement par fonctions sinus et cosinus transforme ces équations de mouvement en 6 équations pour $k > 0$ et 3 équations pour $k = 0$. Afin de simplifier l'exposé, le cas $k = 0$ ne sera pas systématiquement détaillé. Pour chaque k -ième harmonique, ces équations s'écrivent ainsi :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{N}'_{11} \cdot \tilde{u}_k^c(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{12} \cdot \tilde{v}_k^c(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{13} \cdot \tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x}) &= -\tilde{p}_{ku}^c(\tau, \tilde{x}) \\ \tilde{N}'_{11} \cdot \tilde{u}_k^s(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{12} \cdot \tilde{v}_k^s(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{13} \cdot \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x}) &= -\tilde{p}_{ku}^s(\tau, \tilde{x}) \\ \tilde{N}'_{21} \cdot \tilde{u}_k^c(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{22} \cdot \tilde{v}_k^c(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{23} \cdot \tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x}) &= \tilde{p}_{kv}^c(\tau, \tilde{x}) \\ \tilde{N}'_{21} \cdot \tilde{u}_k^s(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{22} \cdot \tilde{v}_k^s(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{23} \cdot \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x}) &= \tilde{p}_{kv}^s(\tau, \tilde{x}) \\ \tilde{N}'_{31} \cdot \tilde{u}_k^c(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{32} \cdot \tilde{v}_k^c(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{33} \cdot \tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{x}) &= \tilde{p}_{kw}^c(\tau, \tilde{x}) \\ \tilde{N}'_{31} \cdot \tilde{u}_k^s(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{32} \cdot \tilde{v}_k^s(\tau, \tilde{x}) + \tilde{N}'_{33} \cdot \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{x}) &= \tilde{p}_{kw}^s(\tau, \tilde{x}) \end{aligned} \right. \quad (3.29)$$

Les opérateurs symétriques différentiels adimensionnels \tilde{N}'_{ij} , présents dans les équations ci-dessus, ont pour expression :

$$\begin{aligned}
\tilde{N}'_{11} &= \varepsilon_1 \partial_{\tilde{x}}^2 - \Delta_1 \varepsilon_2 k^2 - \varepsilon_1 \partial_{\tilde{\tau}}^2; \\
\tilde{N}'_{22} &= \varepsilon_2 k^2 - \Delta_1 \varepsilon_1 \partial_{\tilde{x}}^2 + \varepsilon_1 \partial_{\tilde{\tau}}^2 + \varepsilon_5 \varepsilon_2 k^2; \\
\tilde{N}'_{33} &= \varepsilon_2 + \varepsilon_5 \varepsilon_2 k^4 + \varepsilon_1 \partial_{\tilde{\tau}}^2; \\
\tilde{N}'_{12} &= \Delta_2 \varepsilon_3 k \partial_x; \quad \tilde{N}'_{13} = \mu \varepsilon_3 \partial_x; \\
\tilde{N}'_{23} &= \varepsilon_2 k + \varepsilon_5 \varepsilon_2 k^3; \\
\tilde{N}'_{21} &= \tilde{N}'_{12}; \quad \tilde{N}'_{31} = \tilde{N}'_{13}; \quad \tilde{N}'_{32} = \tilde{N}'_{23}.
\end{aligned}$$

Le système (3.29), qui traduit les équations de mouvement pour chaque harmonique k , peut s'écrire de manière très condensée sous forme matricielle :

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}_k \cdot \underline{\mathbf{x}}_k = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{p}}_k(\tau, \tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{a} \delta(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_p) \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}_k (\underline{\mathbf{x}}_k(\tau_1, \tilde{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{x}}_k(\tau, \tilde{\mathbf{x}}))}. \quad (3.30)$$

Nous avons pour cela introduit les notations et matrices décrites dans les équations (3.31) à (3.35) qui suivent. Les solutions vectorielles $\underline{\mathbf{x}}_k$ (de dimension 6×1 pour $k > 1$, dans le cas particulier $k = 0$ la dimension est 3×1) du système (3.30) se composent d'un ensemble de vecteurs $\underline{\mathbf{x}}_{uk}, \underline{\mathbf{x}}_{vk}, \underline{\mathbf{x}}_{wk}$, constitués des composantes $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k, \tilde{w}_k$ du déplacement dans chaque direction pour la composante antisymétrique et la composante symétrique respectivement :

$$\underline{\mathbf{x}}_k(\tau, \tilde{\mathbf{x}}) = \{\underline{\mathbf{x}}_{u,k}, \underline{\mathbf{x}}_{v,k}, \underline{\mathbf{x}}_{w,k}\}^T, \quad (3.31)$$

Avec

$$\underline{\mathbf{x}}_{u,k} = \{\tilde{u}_k^c(\tau, \tilde{\mathbf{x}}), \tilde{u}_k^s(\tau, \tilde{\mathbf{x}})\}; \quad \underline{\mathbf{x}}_{v,k} = \{\tilde{v}_k^c(\tau, \tilde{\mathbf{x}}), \tilde{v}_k^s(\tau, \tilde{\mathbf{x}})\}; \quad \underline{\mathbf{x}}_{w,k} = \{\tilde{w}_k^c(\tau, \tilde{\mathbf{x}}), \tilde{w}_k^s(\tau, \tilde{\mathbf{x}})\}.$$

Le vecteur de charge $\underline{\mathbf{p}}_k(\tau, \tilde{\mathbf{x}})$ (de dimension 6×1) s'écrit ainsi :

$$\underline{\mathbf{p}}_k(\tau, \tilde{\mathbf{x}}) = \{\underline{\mathbf{p}}_{u,k}, \underline{\mathbf{p}}_{v,k}, \underline{\mathbf{p}}_{w,k}\}^T, \quad (3.32)$$

avec

$$\underline{\mathbf{p}}_{u,k} = \{\tilde{p}_{ku}^c(\tau, \tilde{\mathbf{x}}), \tilde{p}_{ku}^s(\tau, \tilde{\mathbf{x}})\}; \quad \underline{\mathbf{p}}_{v,k} = \{\tilde{p}_{kv}^c(\tau, \tilde{\mathbf{x}}), \tilde{p}_{kv}^s(\tau, \tilde{\mathbf{x}})\}; \quad \underline{\mathbf{p}}_{w,k} = \{\tilde{p}_{kw}^c(\tau, \tilde{\mathbf{x}}), \tilde{p}_{kw}^s(\tau, \tilde{\mathbf{x}})\}.$$

La matrice $\underline{\mathbf{E}}$ (de dimension 6×6) s'écrit, quant à elle, sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{E}}_k = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{E}}'_{11,k} & \underline{\mathbf{E}}'_{12,k} & \underline{\mathbf{E}}'_{13,k} \\ \underline{\mathbf{E}}'_{21,k} & \underline{\mathbf{E}}'_{22,k} & \underline{\mathbf{E}}'_{23,k} \\ \underline{\mathbf{E}}'_{31,k} & \underline{\mathbf{E}}'_{32,k} & \underline{\mathbf{E}}'_{33,k} \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

avec

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{11,k} &= \begin{pmatrix} \tilde{N}'_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{N}'_{11} \end{pmatrix}; & \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{22,k} &= \begin{pmatrix} \tilde{N}'_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{N}'_{22} \end{pmatrix}; & \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{33,k} &= \begin{pmatrix} \tilde{N}'_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{N}'_{33} \end{pmatrix}; \\ \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{12,k} &= \begin{pmatrix} \tilde{N}'_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{N}'_{12} \end{pmatrix}; & \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{13,k} &= \begin{pmatrix} \tilde{N}'_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{N}'_{13} \end{pmatrix}; & \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{23,k} &= \begin{pmatrix} \tilde{N}'_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{N}'_{23} \end{pmatrix}; \\ \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{21,k} &= \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{12,k}; & \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{31,k} &= \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{13,k}; & \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{32,k} &= \underline{\underline{\mathbf{E}'}}_{23,k}.\end{aligned}$$

La matrice $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ (de dimension 6×6) s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{12} & \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{13} \\ \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{21} & \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{22} & \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{23} \\ \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{31} & \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{32} & \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

où

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{12} = \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{13} = \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{21} = \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{23} = \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{31} = \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{32} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ -\underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{11} = \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{22} = \underline{\underline{\mathbf{S}'}}_{33} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Le vecteur d'efforts peut être représenté comme suit (en tenant compte de (3.28) et en rappelant que $\tau_1 = \tau - \tilde{T}$ est le temps avec retard) :

$$\underline{\underline{\mathbf{p}}}_k(\tau, \tilde{x}) = \tilde{a} \underline{\underline{\mathbf{A}}}'_k \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) (\underline{\underline{\mathbf{x}}}_k(\tau_1, \tilde{x}) - \underline{\underline{\mathbf{x}}}_k(\tau, \tilde{x})), \quad \tilde{a} = \frac{\tilde{\chi}}{\pi \tilde{R}}, \quad (3.35)$$

où la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_k$ est de dimension 6×6 :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_k = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{11,k} & \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{12,k} & \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{13,k} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{21,k} & \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{22,k} & \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{23,k} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{31,k} & \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{32,k} & \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{33,k} \end{pmatrix}.$$

En tenant compte des sous-matrices données en (3.28), $\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_k$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{11,k} = \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{12,k} = \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{21,k} = \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{22,k} = \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{31,k} = \underline{\underline{\mathbf{A}'}}'_{32,k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_{13,k} = \begin{pmatrix} e_u \cos^2(k\psi_p) & e_u \frac{1}{2} \sin(2k\psi_p) \\ e_u \frac{1}{2} \sin(2k\psi_p) & e_u \sin^2(k\psi_p) \end{pmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{A}}}'_{23,k} = \begin{pmatrix} e_v \frac{1}{2} \sin(2k\psi_p) & e_v \sin^2(k\psi_p) \\ e_v \cos^2(k\psi_p) & e_v \frac{1}{2} \sin(2k\psi_p) \end{pmatrix};$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_{33,k} = \begin{pmatrix} e_w \cos^2(k\psi_p) & e_w \frac{1}{2} \sin(2k\psi_p) \\ e_w \frac{1}{2} \sin(2k\psi_p) & e_w \sin^2(k\psi_p) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'équation de mouvement après décomposition circonférentielle prend la forme (3.30), avec le champ de déplacement représenté par (3.31) pour chaque harmonique k . L'équation (3.30) prend de plus en compte la sollicitation liée à la force de coupe $\underline{\mathbf{p}}_k(\tau, \tilde{x})$, exprimé par (3.35), avec le terme de retard.

3.6.2 Expansion de la solution dans la direction axiale

On propose de réaliser une expansion du vecteur $\underline{\mathbf{x}}_k(\tau, \tilde{x})$ en coordonnées axiales \tilde{x} . Pour cela nous utilisons des fonctions d'interpolation employées classiquement pour les poutres (décrites un peu plus loin dans cette section, équation (3.41)) qui permettent de vérifier de façon approchée les conditions aux limites en $x=0$ et $x=L$ et qui sont rangées dans la matrice $\underline{\underline{\Phi}}_{Mk}$ ci-dessous :

$$\underline{\underline{\Phi}}_{Mk}(\tilde{x}) \cdot \underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau) \approx \underline{\mathbf{x}}_k(\tau, \tilde{x}). \quad (3.36)$$

La colonne $\underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau)$ contient les degrés de libertés, fonctions du temps, qui sont organisés sous forme d'un ensemble de vecteurs $\underline{\mathbf{d}}_{1k}^T(\tau), \dots, \underline{\mathbf{d}}_{Mk}^T(\tau)$, associé à l'ensemble des harmoniques axiales $m \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ et à chaque harmonique circonférentielle k , qui à leur tour sont constitués d'un ensemble de composantes antisymétriques $\alpha_{mk}^s(\tau)$ et symétriques $\alpha_{mk}^c(\tau)$:

$$\underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau) = \left\{ \underline{\mathbf{d}}_{1k}^T(\tau), \dots, \underline{\mathbf{d}}_{Mk}^T(\tau) \right\}^T;$$

$$\underline{\mathbf{d}}_{mk}(\tau) = \left\{ \alpha_{mk}^c(\tau), \alpha_{mk}^s(\tau) \right\}^T, \quad m \in \{1, \dots, M\}. \quad (3.37)$$

Les fonctions scalaires $\alpha_{mk}^c(\tau), \alpha_{mk}^s(\tau)$ sont donc les inconnues du problème et sont dépendantes du temps.

La matrice $\underline{\underline{\Phi}}_{Mk}$ est de dimension $6 \times 2M$, le vecteur $\underline{\mathbf{q}}_{Mk}$ est de dimension $2M \times 1$, et le vecteur $\underline{\mathbf{x}}_k$ de dimension 6×1 .

La matrice $\underline{\underline{\Phi}}_{Mk}$ s'organise comme suit :

$$\underline{\underline{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{1k}^u(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \tilde{\psi}_{2k}^u(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \dots & \tilde{\psi}_{Mk}^u(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & \tilde{\psi}_{1k}^u(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \tilde{\psi}_{2k}^u(\tilde{\mathbf{x}}) & \dots & 0 & \tilde{\psi}_{Mk}^u(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \tilde{\psi}_{1k}^v(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \tilde{\psi}_{2k}^v(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \dots & \tilde{\psi}_{Mk}^v(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & \tilde{\psi}_{1k}^v(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \tilde{\psi}_{2k}^v(\tilde{\mathbf{x}}) & \dots & 0 & \tilde{\psi}_{Mk}^v(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \tilde{\psi}_{1k}^w(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \tilde{\psi}_{2k}^w(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \dots & \tilde{\psi}_{Mk}^w(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & \tilde{\psi}_{1k}^w(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & \tilde{\psi}_{2k}^w(\tilde{\mathbf{x}}) & \dots & 0 & \tilde{\psi}_{Mk}^w(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

où $\tilde{\psi}_{mk}^u(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\psi}_{mk}^v(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\psi}_{mk}^w(\tilde{\mathbf{x}})$ sont les fonctions de base qui satisfont les conditions aux limites de la coque. La matrice $\underline{\underline{\Phi}}_{Mk}$ peut également être représentée comme une matrice constituée de sous-matrices pour chaque composante $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k, \tilde{w}_k$, du déplacement avec l'ensemble des harmoniques axiales $m \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ et chaque harmonique circonférentielle k :

$$\underline{\underline{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}'_{u,1k}, \dots, \underline{\underline{\Phi}}'_{u,Mk} \\ \underline{\underline{\Phi}}'_{v,1k}, \dots, \underline{\underline{\Phi}}'_{v,Mk} \\ \underline{\underline{\Phi}}'_{w,1k}, \dots, \underline{\underline{\Phi}}'_{w,Mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}'_{u,mk} \\ \underline{\underline{\Phi}}'_{v,mk} \\ \underline{\underline{\Phi}}'_{w,mk} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

où

$$\underline{\underline{\Phi}}'_{u,mk} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{mk}^u(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & \tilde{\psi}_{mk}^u(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}; \underline{\underline{\Phi}}'_{v,mk} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{mk}^v(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & \tilde{\psi}_{mk}^v(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}; \underline{\underline{\Phi}}'_{w,mk} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{mk}^w(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & \tilde{\psi}_{mk}^w(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}.$$

Les composantes $\tilde{u}(\tilde{\mathbf{x}}, \varphi, \tau)$, $\tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}, \varphi, \tau)$, $\tilde{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \varphi, \tau)$ du champ de déplacement de la coque cylindrique peuvent également s'écrire sous la forme (en utilisant les relations (3.23) et (3.36)) :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tau, \varphi, \tilde{\mathbf{x}}) &\approx \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{km}^c(\tau) \psi_{mk}^u(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{km}^s(\tau) \psi_{mk}^u(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \sin(k\varphi) \\ \tilde{v}(\tau, \varphi, \tilde{\mathbf{x}}) &\approx \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{km}^c(\tau) \psi_{mk}^v(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \sin(k\varphi) - \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{km}^s(\tau) \psi_{mk}^v(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \cos(k\varphi) \\ \tilde{w}(\tau, \varphi, \tilde{\mathbf{x}}) &\approx \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{km}^c(\tau) \psi_{mk}^w(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{km}^s(\tau) \psi_{mk}^w(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \sin(k\varphi) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pour $\psi_{mk}^u(\tilde{x}), \psi_{mk}^v(\tilde{x}), \psi_{mk}^w(\tilde{x})$ nous avons choisi d'utiliser les fonctions ayant la forme suivante [BLE79], [HUA05], [KOL72] :

$$\psi^w(\tilde{x}) = C_1 \cosh(\lambda_m \tilde{x}) + C_2 \cos(\lambda_m \tilde{x}) - \sigma_m (C_3 \sinh(\lambda_m \tilde{x}) + C_4 \sin(\lambda_m \tilde{x})) \quad (3.41)$$

Les fonctions ψ_m^u et ψ_m^v sont déduite de ψ_m^w en imposant un état de membrane non-extensible, à savoir $\varepsilon_\varphi = 0, \gamma_{x\varphi} = 0$, équation (3.5), [MAT97].

Pour ψ_m^w les paramètres $\lambda_m, C_1, C_2, C_3, C_4$ sont définis en accord avec les conditions aux limites proposées dans [BLE79], [HUA05], [KOL72] qui s'écrivent :

- au niveau de l'encastrement :

$$\psi_m^w(x) = \frac{\partial \psi_m^w(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 0; \quad (3.42)$$

- au niveau du bord libre :

$$\frac{\partial^3 \psi_m^w(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial^2 \psi_m^w(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} = 0; \quad (3.43)$$

La forme choisie pour ψ^w (3.41) et celle prise pour l'interpolation (3.40), ainsi que l'imposition des conditions aux limites (3.42) et (3.43) et des conditions de non-extensibilité, permettent de satisfaire les conditions aux limites (3.11) et (3.12).

Le respect des relations (3.42) et (3.43) conduit à :

$$\begin{aligned} \cos \lambda_m \cosh \lambda_m = -1; \quad \sigma_m = \frac{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m}{\cosh \lambda_m + \cos \lambda_m}; \\ C_1 = C_3 = 1; \quad C_2 = C_4 = -1. \end{aligned} \quad (3.44)$$

La fonction recherchée ψ_m^w s'exprime ainsi comme suit :

$$\psi_m^w(\tilde{x}) = \cosh(\lambda_m \tilde{x}) - \cos(\lambda_m \tilde{x}) - \sigma_m (\sinh(\lambda_m \tilde{x}) - \sin(\lambda_m \tilde{x})), \quad m \in \{1, \dots, M\}, \quad (3.45)$$

avec pour $m=1, 2$ ou 3 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1,87510407; \quad \lambda_2 = 4,69409113 \quad \lambda_3 = 7,85475744 \\ \sigma_1 = 0,73409551; \quad \sigma_2 = 1,01846732 \quad \sigma_3 = 0,999224497. \end{aligned}$$

Le lecteur pourra trouver les valeurs suivantes pour les λ_m et σ_m ($m > 3$) dans [BLE79]. Il est à noter que les valeurs prises par λ_m et σ_m ne sont pas dépendantes de l'harmonique k .

3.6.3 Application de la méthode de Galerkin

Après substitution dans les équations de mouvement de la coque (3.30) de la forme d'approximation des déplacements proposée (3.36), on obtient le terme d'erreur résiduelle suivant :

$$\underline{\mathbf{v}}_k = \underline{\mathbf{E}}_k(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau) - \tilde{a} \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}_k \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}) \delta(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_p) (\underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau - \tilde{T}) - \underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau)). \quad (3.46)$$

En accord avec la méthode de Galerkin, on impose une condition d'orthogonalité au terme d'erreur résiduelle précédent :

$$\int_0^1 \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}^T \underline{\mathbf{v}}_k d\tilde{\mathbf{x}} = 0. \quad (3.47)$$

L'équation (3.46), en tenant compte de la relation (3.47), conduit à l'équation de mouvement dans laquelle la colonne $\underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau)$ des inconnues ne dépend que du temps :

$$\underline{\mathbf{G}}_{Mk} \cdot \underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau) = \underline{\mathbf{P}}_{Mk}^f (\underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau - \tilde{T}) - \underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau)), \quad (3.48)$$

où

$$\underline{\mathbf{G}}_{Mk} = \int_0^1 \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}^T(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{E}}_k(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{\mathbf{x}}; \quad (3.49)$$

$$\underline{\mathbf{P}}_{Mk}^f = \tilde{a} \int_0^1 \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}^T(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}_k \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}) \delta(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_p) d\tilde{\mathbf{x}}; \quad \tilde{a} = \frac{\tilde{\chi}}{\pi \tilde{R}}. \quad (3.50)$$

Pour calculer l'intégrale (3.49), on écrit le produit des matrices contenues dans celle-ci. Pour cela nous introduisons la nouvelle notation :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{G}}_{Mk}^\delta(\tilde{\mathbf{x}}) &= \underline{\mathbf{E}}_k(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}); \\ \underline{\mathbf{G}}_{Mk}^p(\tilde{\mathbf{x}}) &= \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}^T(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{E}}_k(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

En tenant compte de (3.33) et de (3.39), on obtient :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{G}}}_{Mk}^{\delta}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \underline{\underline{\mathbf{E}}}_k(\tilde{\mathbf{x}}) \underline{\underline{\Phi}}_{Mk}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{11,k} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{12,k} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{13,k} \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{21,k} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{22,k} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{23,k} \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{31,k} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{32,k} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{33,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}'_{u,1k}, \dots, \underline{\underline{\Phi}}'_{u,Mk} \\ \underline{\underline{\Phi}}'_{v,1k}, \dots, \underline{\underline{\Phi}}'_{v,Mk} \\ \underline{\underline{\Phi}}'_{w,1k}, \dots, \underline{\underline{\Phi}}'_{w,Mk} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{11,1k}, \dots, \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{11,Mk} \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{21,1k}, \dots, \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{21,Mk} \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{31,1k}, \dots, \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{31,Mk} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Les composantes de la matrice $\underline{\underline{\mathbf{G}}}_{Mk}^{\delta}$ s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{11,mk} &= \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{11,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{u,mk} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{12,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{v,mk} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{13,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{w,mk} \\
\underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{21,mk} &= \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{21,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{u,mk} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{22,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{v,mk} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{23,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{w,mk}, \quad m \in \{1, \dots, M\}, \\
\underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{31,mk} &= \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{31,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{u,mk} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{32,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{v,mk} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_{33,k} \underline{\underline{\Phi}}'_{w,mk}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

On exprime alors l'intégrale (3.49), en prenant en compte (3.52), et ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{G}}}_{Mk}^p &= \underline{\underline{\Phi}}_{Mk}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}_k \cdot \underline{\underline{\Phi}}_{Mk} = \underline{\underline{\Phi}}_{Mk}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}}_{Mk}^{\delta}; \\
\underline{\underline{\mathbf{G}}}_{Mk}^p &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}'_{u,1k} & \underline{\underline{\Phi}}'_{v,1k} & \underline{\underline{\Phi}}'_{w,1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{\Phi}}'_{u,Mk} & \underline{\underline{\Phi}}'_{v,Mk} & \underline{\underline{\Phi}}'_{w,Mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{11,1k}, \dots, \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{11,Mk} \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{21,1k}, \dots, \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{21,Mk} \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{31,1k}, \dots, \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{31,Mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{1k} & \dots & \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{Mk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{Mk} & \dots & \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{Mk} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

où

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{mk} = \underline{\underline{\Phi}}'_{u,mk} \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{11,mk} + \underline{\underline{\Phi}}'_{v,mk} \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{21,mk} + \underline{\underline{\Phi}}'_{w,mk} \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{31,mk}.$$

En conséquence, la matrice $\underline{\underline{\mathbf{G}}}_{Mk}$ dans (3.49) s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}_{Mk} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{k,11} & \dots & \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{k,1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{k,M1} & \dots & \underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{k,MM} \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

La sous-matrice $\underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{k,ij}$ ($i \in \{1, 2, \dots, M\}; j \in \{1, 2, \dots, M\}$) dans l'expression (3.55) s'écrit ainsi :

$$\underline{\mathbf{G}}'_{k,ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{11}^{ij} & \mathbf{g}_{12}^{ij} \\ \mathbf{g}_{21}^{ij} & \mathbf{g}_{22}^{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{11}^{ij} = & -\varepsilon_1 d_{k,ij}^{u-u} \partial_\tau^2 + \varepsilon_1 d_{k,ij}^{v-v} \partial_\tau^2 + \varepsilon_1 d_{k,ij}^{w-w} \partial_\tau^2 + \varepsilon_1 b_{k,ij}^{u-u} - (\Delta_1 \varepsilon_2 k^2) d_{k,ij}^{u-u} + (c_{k,ij}^{v-u} + c_{k,ij}^{u-v}) \Delta_2 \varepsilon_3 k - \\ & - \Delta_1 \varepsilon_1 b_{k,ij}^{v-v} + \mu \varepsilon_3 (c_{k,ij}^{w-u} + c_{k,ij}^{u-w}) + (1 + \varepsilon_5) \varepsilon_2 k^2 d_{k,ij}^{v-v} + (\varepsilon_2 k + \varepsilon_4 \varepsilon_2 k^3) (d_{k,ij}^{w-v} + d_{k,ij}^{v-w}) + \\ & + (\varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_4 k^4) d_{k,ij}^{w-w}; \\ \mathbf{g}_{12}^{ij} = & 0; \quad \mathbf{g}_{21}^{ij} = 0; \quad \mathbf{g}_{11}^{ij} = \mathbf{g}_{22}^{ij}; \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dans cette expression on peut remarquer que les trois premiers termes, incluant la dérivation temporelle, proviennent de la contribution de l'énergie cinétique tandis que les termes restants proviennent l'énergie de déformation de la coque. En raison de l'orthogonalité des parties symétriques et antisymétriques de la solution, les termes non diagonaux des sous-matrices $\underline{\mathbf{G}}'_{k,ij}$ sont égaux à zéro.

Enfin, dans (3.57) on a utilisé les définitions :

$$\begin{aligned} d_{ij,k}^{u-u} &= \int_0^1 \tilde{\psi}_{ik}^u \cdot \tilde{\psi}_{jk}^u d\tilde{x}; & d_{ij,k}^{v-v} &= \int_0^1 \tilde{\psi}_{ik}^v \cdot \tilde{\psi}_{jk}^v d\tilde{x}; & d_{ij,k}^{w-w} &= \int_0^1 \tilde{\psi}_{ik}^w \cdot \tilde{\psi}_{jk}^w d\tilde{x}; \\ d_{ij,k}^{w-v} &= \int_0^1 \tilde{\psi}_{ik}^w \cdot \tilde{\psi}_{jk}^v d\tilde{x}; & d_{mj,k}^{v-w} &= \int_0^1 \tilde{\psi}_{mk}^v \cdot \tilde{\psi}_{jk}^w d\tilde{x}; & c_{ij,k}^{v-u} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\psi}_{ik}^v) \tilde{\psi}_{jk}^u d\tilde{x}; \\ c_{mj,k}^{w-u} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\psi}_{mk}^w) \tilde{\psi}_{jk}^u d\tilde{x}; & c_{mj,k}^{u-v} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\psi}_{mk}^u) \tilde{\psi}_{jk}^v d\tilde{x}; & c_{mj,k}^{u-w} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\psi}_{mk}^u) \tilde{\psi}_{jk}^w d\tilde{x}; \\ b_{ij,k}^{u-u} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}}^2 (\tilde{\psi}_{ik}^u) \tilde{\psi}_{jk}^u d\tilde{x}; & b_{ij,k}^{v-v} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}}^2 (\tilde{\psi}_{ik}^v) \tilde{\psi}_{jk}^v d\tilde{x}; & b_{ij,k}^{w-w} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}}^2 (\tilde{\psi}_{ik}^w) \tilde{\psi}_{jk}^w d\tilde{x}; \\ b_{mj,k}^{w-v} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}}^2 (\tilde{\psi}_{mk}^w) \tilde{\psi}_{jk}^v d\tilde{x}; & b_{mj,k}^{v-w} &= \int_0^1 \partial_{\tilde{x}}^2 (\tilde{\psi}_{mk}^v) \tilde{\psi}_{jk}^w d\tilde{x}; \end{aligned} \quad (3.58)$$

où

- $c_{ij,k}$ est le produit scalaire de chaque fonction de base avec sa dérivée première,
- $b_{ij,k}$ est le produit scalaire de chaque fonction de base avec sa dérivée seconde,
- $d_{ij,k}$ est le produit scalaire de chaque fonction de base avec elle même.

Pour obtenir la matrice des charges $\underline{\mathbf{P}}_{\underline{Mk}}^f$, on calcule l'intégrale (3.50). On écrit, comme précédemment, le produit des matrices à l'intérieur de cette intégrale. Pour cela nous introduisons de la même manière les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}_{\underline{Mk}}^{\delta} &= \tilde{a} \underline{\mathbf{S}}_{\underline{=k}} \underline{\mathbf{A}}_{\underline{=k}} \underline{\mathbf{\Phi}}_{\underline{=k}}(\tilde{x}); \\ \underline{\mathbf{P}}_{\underline{Mk}}^p &= \tilde{a} \underline{\mathbf{\Phi}}_{\underline{=k}}^T(\tilde{x}) \underline{\mathbf{S}}_{\underline{=k}} \underline{\mathbf{A}}_{\underline{=k}} \underline{\mathbf{\Phi}}_{\underline{=k}}(\tilde{x}).\end{aligned}\quad (3.59)$$

En prenant en compte les relations (3.35) et (3.39), nous écrivons :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}_{\underline{Mk}}^{\delta} &= \tilde{a} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}'_{11} & \underline{\mathbf{S}}'_{12} & \underline{\mathbf{S}}'_{13} \\ \underline{\mathbf{S}}'_{21} & \underline{\mathbf{S}}'_{22} & \underline{\mathbf{S}}'_{23} \\ \underline{\mathbf{S}}'_{31} & \underline{\mathbf{S}}'_{32} & \underline{\mathbf{S}}'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}'_{11} & \underline{\mathbf{A}}'_{12} & \underline{\mathbf{A}}'_{13} \\ \underline{\mathbf{A}}'_{21} & \underline{\mathbf{A}}'_{22} & \underline{\mathbf{A}}'_{23} \\ \underline{\mathbf{A}}'_{31} & \underline{\mathbf{A}}'_{32} & \underline{\mathbf{A}}'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{\Phi}}'_{u,mk} \\ \underline{\mathbf{\Phi}}'_{v,mk} \\ \underline{\mathbf{\Phi}}'_{w,mk} \end{pmatrix} = \dots \\ &\dots = \tilde{a} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{11,1k}, \dots, \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{11,Mk} \\ \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{21,1k}, \dots, \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{21,Mk} \\ \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{31,1k}, \dots, \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{31,Mk} \end{pmatrix} = \tilde{a} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{11,mk} \\ \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{21,mk} \\ \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{31,mk} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.60)$$

L'expression des sous-intégrales $\underline{\mathbf{P}}_{\underline{Mk}}^p$ (3.59), et en tenant compte de la relation (3.60), devient :

$$\underline{\mathbf{P}}_{\underline{Mk}}^p = \tilde{a} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{\Phi}}'_{u,1k} & \underline{\mathbf{\Phi}}'_{v,1k} & \underline{\mathbf{\Phi}}'_{w,1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\mathbf{\Phi}}'_{u,Mk} & \underline{\mathbf{\Phi}}'_{v,Mk} & \underline{\mathbf{\Phi}}'_{w,Mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{11,1k}, \dots, \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{11,Mk} \\ \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{21,1k}, \dots, \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{21,Mk} \\ \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{31,1k}, \dots, \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{31,Mk} \end{pmatrix} = \tilde{a} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}}^{p'}_{1k} & \dots & \underline{\mathbf{P}}^{p'}_{Mk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{P}}^{p'}_{Mk} & \dots & \underline{\mathbf{P}}^{p'}_{Mk} \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

où

$$\underline{\mathbf{P}}^{p'}_{mk} = \underline{\mathbf{\Phi}}'_{u,mk} \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{11,mk} + \underline{\mathbf{\Phi}}'_{v,mk} \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{21,mk} + \underline{\mathbf{\Phi}}'_{w,mk} \underline{\mathbf{P}}^{\delta'}_{31,mk}.$$

En conséquence, la matrice $\underline{\mathbf{P}}_{\underline{Mk}}^f$ s'écrit :

$$\underline{\mathbf{P}}_{\underline{Mk}}^f = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}'_{11} & \dots & \underline{\mathbf{P}}'_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{\mathbf{P}}'_{M1} & \dots & \underline{\mathbf{P}}'_{MM} \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Avec la structure de la sous-matrice $\underline{\mathbf{P}}'_{ij}$ suivante :

$$\underline{\mathbf{P}}'_{ij} = \tilde{\mathbf{a}} \begin{bmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{a}} = \frac{\tilde{\chi}}{\pi \tilde{R}}, \quad (3.63)$$

où

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (-e_u f_{ij}^{w-u} + e_w f_{ij}^{w-w}) 2 \cos^2(k\psi_p) + e_v f_{ij}^{w-v} \sin(2k\psi_p); \\ b_{ij} &= (-e_u f_{ij}^{w-u} + e_w f_{ij}^{w-w}) \sin(2k\psi_p) + e_v f_{ij}^{w-v} 2 \sin^2(k\psi_p); \\ c_{ij} &= (-e_u f_{ij}^{w-u} + e_w f_{ij}^{w-w}) \sin(2k\psi_p) + e_v f_{ij}^{w-v} 2 \cos^2(k\psi_p); \\ d_{ij} &= (-e_u f_{ij}^{w-u} + e_w f_{ij}^{w-w}) 2 \sin^2(k\psi_p) + e_v f_{ij}^{w-v} \sin(2k\psi_p); \\ & i \in \{1, 2, \dots, M\}; j \in \{1, 2, \dots, M\}. \end{aligned}$$

Ici, $f_{ij}^{w-\tilde{g}}$ désigne le produit de fonctions de base avec une fonction de Dirac $\delta_D(\tilde{x} - \tilde{x}_p)$:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{w-\tilde{g}} &= \int_0^1 \psi_i^w(\tilde{x}) \psi_j^{\tilde{g}}(\tilde{x}) \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_p) d\tilde{x} = \psi_i^w(\tilde{x}_p) \psi_j^{\tilde{g}}(\tilde{x}_p); \\ & \tilde{g} = \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}; \\ & i \in \{1, 2, \dots, M\}; j \in \{1, 2, \dots, M\}. \end{aligned}$$

En conséquence, les équations (3.48) forment le système des équations de mouvement de la coque cylindrique chargée par une force ponctuelle mobile. Cette équation matricielle prend en compte l'argument retardé et s'écrit pour chaque harmonique $k \in \{1, \dots\}$ dans la direction circonférentielle et pour l'ensemble des harmoniques axiales $m \in \{1, \dots, M\}$. La matrice $\underline{\mathbf{G}}_{Mk}$ comporte cependant des opérateurs de dérivation vis à vis du temps (en dérivée seconde). Il reste donc à extraire ces termes de manière à identifier une matrice de masse. Les termes restant conduisent à une matrice de raideur.

3.7 Le système d'équations sous forme matricielle

On réécrit le système d'équations du déplacement d'une coque cylindrique tournante à paroi mince, pour les harmoniques circonférentielles non nulles, c'est-à-dire pour $k \in \mathbb{N}$, sous forme matricielle (en tenant compte de (3.48), (3.55), (3.62)) :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k \cdot \underline{\ddot{\mathbf{q}}}_{Mk} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k \cdot \underline{\mathbf{q}}_{Mk} = \underline{\mathbf{p}}_k \quad (3.64)$$

Le vecteur de la solution (de dimension $2M \times 1$), exprimé en coordonnées généralisées (degrés de libertés associés aux fonctions de formes), s'écrit selon (3.37).

Le vecteur de charge $\underline{\mathbf{p}}_k$ (de dimension $2M \times 1$) s'écrit :

$$\underline{\mathbf{p}}_k = \tilde{\chi} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{Mk}^f \left(\underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau - \tilde{T}) - \underline{\mathbf{q}}_{Mk}(\tau) \right) \quad (3.65)$$

La matrice $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{Mk}^f$ (de dimension $2M \times 2M$, définie équation (3.50)) peut se détailler en sous-matrices de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{Mk}^f = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}}'_{11} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{P}}}'_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{P}}}'_{M1} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{P}}}'_{MM} \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

Avec

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}'_{ij} = \frac{1}{\pi R} \begin{bmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{bmatrix};$$

$$a_{ij} = (e_u f_{ij}^{w-u} + e_w f_{ij}^{w-w}) 2 \cos^2(k\psi_p) + e_v f_{ij}^{w-v} \sin(2k\psi_p);$$

$$b_{ij} = (e_u f_{ij}^{w-u} + e_w f_{ij}^{w-w}) \sin(2k\psi_p) + e_v f_{ij}^{w-v} 2 \sin^2(k\psi_p);$$

$$c_{ij} = (e_u f_{ij}^{w-u} + e_w f_{ij}^{w-w}) \sin(2k\psi_p) + e_v f_{ij}^{w-v} 2 \cos^2(k\psi_p);$$

$$d_{ij} = (e_u f_{ij}^{w-u} + e_w f_{ij}^{w-w}) 2 \sin^2(k\psi_p) + e_v f_{ij}^{w-v} \sin(2k\psi_p);$$

$$i \in \{1, 2, \dots, M\}; j \in \{1, 2, \dots, M\};$$

Pour les calculs suivants, nous allons ne considérer que la composante radiale de la force car l'effet régénératif dépend principalement du déplacement radial de la coque. Ceci conduit à négliger les éléments e_u, e_v .

Les matrices $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k, \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k$ (de dimensions $2M \times 2M$) ont une structure matricielle par blocs :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}'_{k,11} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{M}}}'_{k,1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}'_{k,M1} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{M}}}'_{k,MM} \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}'_{k,11} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{K}}}'_{k,1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}'_{k,M1} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{K}}}'_{k,MM} \end{pmatrix}; \quad (3.67)$$

Les sous-matrices $\underline{\underline{\mathbf{M}}}'_{k,ij}, \underline{\underline{\mathbf{K}}}'_{k,ij}$ ($i \in \{1,2,\dots,M\}; j \in \{1,2,\dots,M\}$) dans (3.67), sur la base de $\underline{\underline{\mathbf{G}}}'_{k,ij}$ s'écrivent comme suit :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}'_{k,ij} = \begin{pmatrix} m_{11}^{ij} & 0 \\ 0 & m_{22}^{ij} \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}'_{k,ij} = \begin{pmatrix} k_{11}^{ij} & 0 \\ 0 & k_{22}^{ij} \end{pmatrix}; \quad (3.68)$$

En raison de l'orthogonalité des parties symétriques et antisymétriques de la solution, les sous-matrices $\underline{\underline{\mathbf{M}}}'_{k,ij}, \underline{\underline{\mathbf{K}}}'_{k,ij}$ ont une structure diagonale.

Les composantes de la sous-matrice $\underline{\underline{\mathbf{M}}}'_{k,ij}$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} m_{11}^{ij} &= -\varepsilon_1 d_{k,ij}^{u-u} + \varepsilon_1 d_{k,ij}^{v-v} + \varepsilon_1 d_{k,ij}^{w-w}; \\ m_{22}^{ij} &= m_{11}^{ij}; \end{aligned} \quad (3.69)$$

Les composantes de la sous-matrice $\underline{\underline{\mathbf{K}}}'_{k,ij}$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} k_{11}^{ij} &= \varepsilon_1 b_{k,ij}^{u-u} - (\Delta_1 \varepsilon_2 k^2) d_{k,ij}^{u-u} + (c_{k,ij}^{v-u} + c_{k,ij}^{u-v}) \Delta_2 \varepsilon_3 k - \Delta_1 \varepsilon_1 b_{k,ij}^{v-v} + \\ &+ \mu \varepsilon_3 (c_{k,ij}^{w-u} + c_{k,ij}^{u-w}) + (1 + \varepsilon_5) \varepsilon_2 k^2 d_{k,ij}^{v-v} + (\varepsilon_2 k + \varepsilon_5 \varepsilon_2 k^3) (d_{k,ij}^{w-v} + d_{k,ij}^{v-w}) + \\ &+ (\varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_5 k^4) d_{k,ij}^{w-w}; \\ k_{22}^{ij} &= k_{11}^{ij}; \end{aligned} \quad (3.70)$$

Le système d'équation (3.64) correspond à la forme finale de l'équation de mouvement pour notre modèle analytique. La résolution de ce système d'équations, qui possède un argument retardé, décrit le processus de tournage d'une coque cylindrique à paroi mince dont l'interaction avec l'outil est modélisée par l'application d'un point de force mobile sur celle-ci. Il maque cependant la prise en compte de l'amortissement. Cela est fait dans la section 3.9 à venir.

3.8 Le problème aux valeurs propres

Pour estimer la précision des résultats obtenus avec notre approche analytique, nous proposons de comparer les valeurs des fréquences propres obtenues avec cette approche avec celles obtenues grâce à un modèle éléments finis. L'équation aux valeurs propres à résoudre provient de (3.64) sans le terme en effort :

$$\left[-\omega_i^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}}_k + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k \right] \underline{\mathbf{f}}_i = 0 \quad (3.71)$$

Où ω_i est une pulsation propre et $\underline{\mathbf{f}}_i$ un vecteur propre.

Le tableau 3.1 présente les valeurs des fréquences propres obtenues pour une épaisseur de tube correspondant à l'état du système avant et après la 16ème passe (section 2.1). Ces valeurs sont comparées à celles obtenues avec Ansys (éléments finis quadrangulaires de coque, avec 150 éléments dans la direction axiale et 300 dans la direction circonférentielle). Les valeurs des fréquences (après la 16ème passe) pour les modes réels dont les formes s'apparentent aux harmoniques $k=3, m=1$; $k=4, m=1$; $k=5, m=1$ coïncident avec le résultat de la méthode par éléments finis avec une erreur ne dépassant pas 3,2%, et pour les fréquences $k=3, m=2$; $k=4, m=2$; $k=5, m=2$ avec une erreur de 16%. Cet écart montre que pour $M=2$, qui est le nombre d'harmoniques axiales que nous utilisons pour calculer les fréquences propres du tableau 3.1, l'approximation introduite dans la méthode de Galerkin est bien meilleure pour les modes dont la forme axiale est proche de la première harmonique ($m=1$) que pour les modes dont la forme axiale est proche de la seconde harmonique ($m=2$). Il est possible d'améliorer ce résultat si on prend $M > 2$.

La fréquence de chatter, comme cela a été observée lors de l'expérience, correspond aux harmoniques ($k=3, m=1$). Pour ces harmoniques, le modèle analytique est donc tout à fait acceptable. La figure 3.4 présente un graphique de l'évolution des fréquences propres, obtenues avec notre modèle analytique, pendant le 16ème et dernier passage de l'outil. Pour obtenir ce graphe, nous avons tenu compte du changement d'épaisseur de la coque lors de nos intégrations axiales (3.58): séparation de la coque en deux parties, une partie non encore usinée avec une épaisseur de 5,4 mm et une partie usinée avec une épaisseur de 4,4 mm. Sur cette figure, on note une grande similitude entre les fréquences du modèle analytique et les fréquences qui se dégagent du spectrogramme construit à partir du signal en déplacement mesuré en bout de tube. Cette similitude démontre la pertinence du modèle analytique pour étudier la stabilité de l'opération d'usinage d'un point de vue qualitatif mais également quantitatif.

Fréquences	$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$	
Après le 15ème passage ($h = 5,4mm; L = 140mm; R = 77mm$)	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$
Ansys, (Hz)	2113	5067	3403	5440	5284	6899
Modèle analytique (Hz)	2022	4309	3283	4433	5164	5708
Erreur entre Mod. Analyt. et Ansys, (%)	4,3	14,9	3,5	18,5	2,3	17,3
Après le 16ème passage ($h = 4,4mm; L = 140mm; R = 77mm$)	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$
Ansys, (Hz)	1831	4743	2814	4756	4344	5804
Modèle analytique (Hz)	1781	4202	2723	4036	4228	4877
Erreur entre Mod. Analyt. et Ansys, (%)	2,7	11,4	3,2	15,1	2,7	16,0

Tableau 3.1 – Comparaison des fréquences propres de la coque - Calcul (3.71) (avec $M = 2$) et Ansys

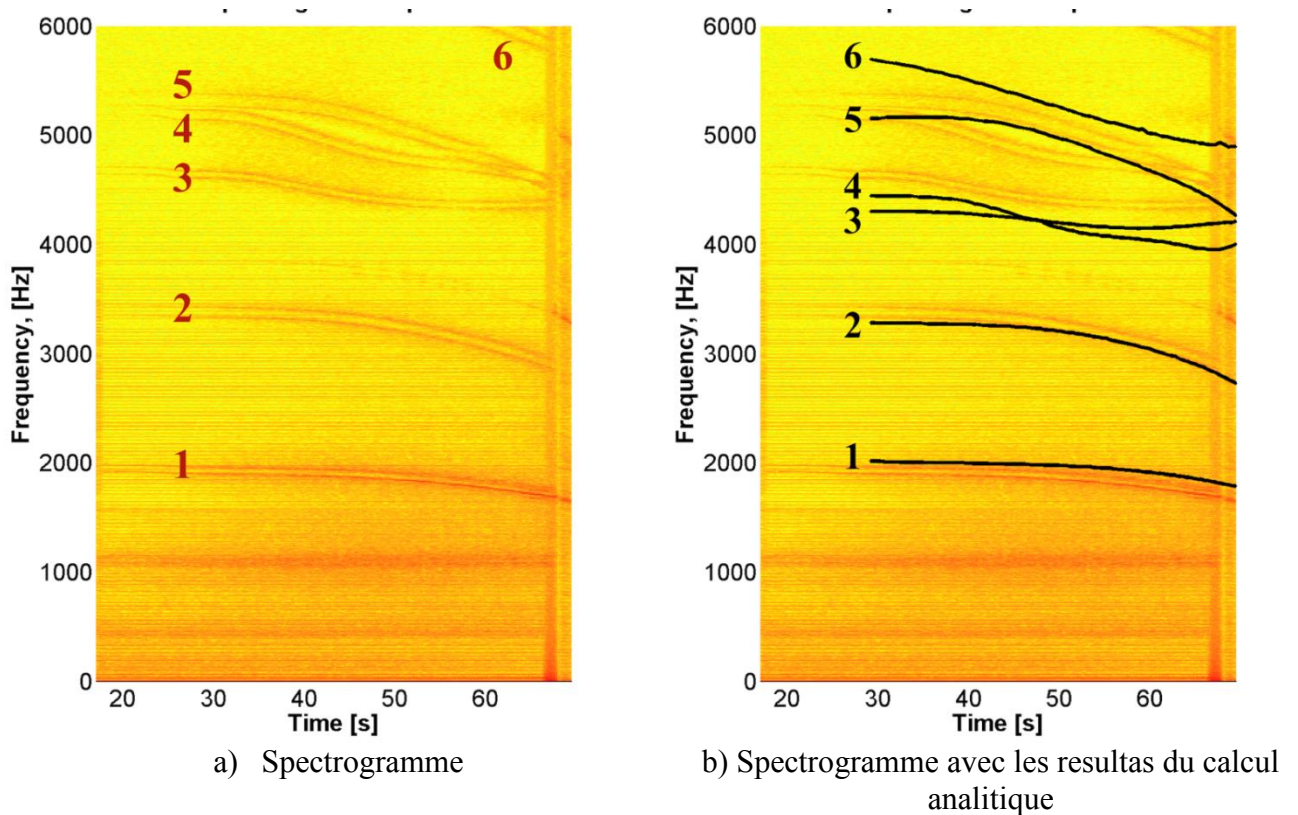


Figure 3.4 – Comparaison des fréquences de broutement de l'expérience et des fréquences calculées à l'aide du modèle analytique au cours de la 16^{ème} passe

3.9 Ajout d'un amortissement

Le système réel étant dissipatif il est nécessaire, en vue d'utiliser le modèle analytique pour l'étude de la stabilité de l'opération d'usinage, d'ajouter dans l'équation de mouvement (3.64) une matrice d'amortissement $\underline{\underline{C}}_k$.

Ceci nous conduit à une équation ayant la forme classique ci-dessous :

$$\underline{\underline{M}}_k \cdot \ddot{\underline{\underline{q}}}_{Mk} + \underline{\underline{C}}_k \cdot \dot{\underline{\underline{q}}}_{Mk} + \underline{\underline{K}}_k \cdot \underline{\underline{q}}_{Mk} = \underline{\underline{p}}_k. \quad (3.72)$$

On propose d'utiliser un amortissement de type Rayleigh qui prend la forme :

$$\underline{\underline{C}}_k = \alpha \underline{\underline{M}}_k + \beta \underline{\underline{K}}_k, \quad (3.73)$$

Où α, β sont les constantes de Rayleigh.

Les paramètres α, β sont déterminés à partir de deux amortissements modaux extraits de la fonction de réponse en fréquence obtenue grâce au marteau de choc après la 16^{ème} passe (voir tableau 2.4).

Plus précisément il s'agit des amortissements pour les fréquences $f_1 = 1661,1$ Hz et $f_2 = 4377$ Hz qui valent respectivement $\zeta_1 = 0,0007, \zeta_2 = 0,0008$.

Le calcul des paramètres α, β se fait en utilisant les pulsations (ω_1, ω_2) , associées respectivement aux fréquences f_1 et f_2 grâce aux relations classiques :

$$\beta = \frac{2(\zeta_2 \omega_2 - \zeta_1 \omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad (3.74)$$

$$\alpha = 2\omega_2 \zeta_2 - 2\omega_2^2 \beta,$$

où les ω_i sont les solutions du problème aux valeurs propres (3.71).

Les valeurs trouvées pour α, β sont finalement : $\alpha = 0.00012, \beta = 0.0014$.

3.10 Conclusion intermédiaire

Dans ce chapitre, nous avons proposé et développé une méthode analytique pour modéliser la dynamique de l'usinage par tournage des structures cylindriques tournantes à paroi mince. Pour ce faire nous avons utilisé la méthode d'Ostrogradski-Hamilton qui a permis de poser le problème de coque mince à résoudre.

Nous avons ensuite introduit deux expansions : une en série de Fourier sur la circonférence et une à partir de fonctions de type poutre en flexion dans la direction axiale. Nous avons alors abouti à des équations de mouvement écrites une sous forme matricielle. Dans ce contexte une prise en compte de l'effort de coupe avec effet retard a été effectuée.

Enfin un amortissement de type Rayleigh, utilisant des mesures expérimentales, a été introduit pour tenir compte des dissipations lors des vibrations.

Une analyse modale, réalisée à partir de l'équation dynamique matricielle obtenue, a permis de montrer la validité de l'approche ainsi que d'estimer sa précision. Pour cela une confrontation avec des résultats obtenus à l'aide d'un modèle éléments finis a été menée.

La confrontation avec les résultats expérimentaux mesurés lors de la dernière passe (spectrogramme) est encourageante et montre que l'évolution du modèle analytique est très similaire à l'évolution du système réel lors de l'avancement de l'outil. Ceci est notamment le cas pour les basses fréquences et en particulier pour celle intervenant dans le broutement.

Chapitre 4

Etude de la stabilité du processus de coupe pour le tournage

Sommaire

4.1	Stabilité en usinage - Équation avec un retard	103
4.2	Stabilité avec un modèle analytique de coque à un degré de liberté	108
4.2.1	Mise en équation	108
4.2.2	Analyse des résultats pour le cas à 1 degré de liberté	112
4.3	Stabilité avec un modèle analytique de coque à plusieurs degrés de liberté	117
4.3.1	Mise en équation	117
4.3.2	Analyse des résultats pour le cas à plusieurs degrés de liberté	120
4.3.3	Influence de l'amortissement sur les limites de stabilité	125
4.3.4	Comparaison du modèle à un degré de liberté avec le modèle à plusieurs degrés de liberté	126
4.3.5	Instabilité en fin de passe	127
4.4	Optimisation des opérations de tournage	131
4.4.1	Cas de la 16 ^{ème} passe	131
4.4.2	Optimisation pour un ensemble de passes	131
4.5	Conclusion intermédiaire	135

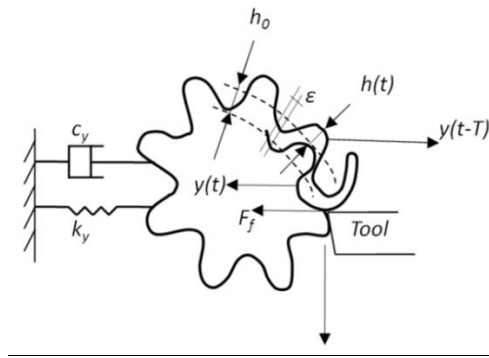
Chapitre 4. Etude de la stabilité du processus de coupe pour le tournage

Dans ce chapitre, nous exploitons le modèle analytique développé dans le chapitre précédent pour étudier la stabilité de l'opération de tournage présentée dans le chapitre 2. Ce présent chapitre se concentre principalement sur la 16^{ème} et dernière passe, durant laquelle une présence significative de broutement a été observée.

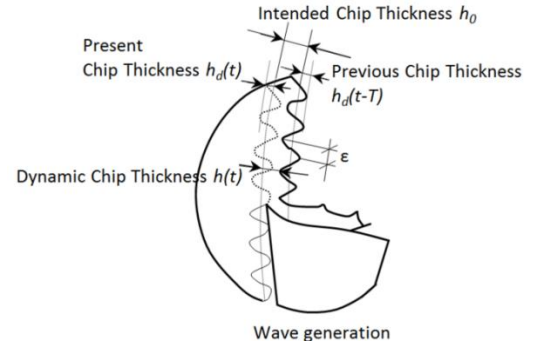
Nous commençons, section 4.1, par présenter l'approche classique, donnée par exemple par Altintas [ALT00], permettant de mettre en évidence le phénomène de broutement régénératif pour une opération de tournage en coupe orthogonale pour un système à 1 degré de liberté où seule la pièce vibre. Dans la section 4.2, nous commençons par une première étude en réduisant notre modèle coque à un modèle à un unique degré de liberté. Pour cela, nous introduisons une écriture des équations de mouvement dans une base modale en sélectionnant le mode impliqué dans le broutement. Des premiers diagrammes de stabilité sont tracés et analysés dans ce contexte. Nous quittons ensuite, section 4.3, cette écriture en base modale pour revenir à la formulation initiale des équations de mouvement à plusieurs degrés de liberté (section 4.3.1). Le tracé du diagramme de stabilité pour notre opération d'usinage est réalisé pour ce modèle à plusieurs degrés de liberté (section 4.3.2). Une étude centrée sur la vitesse de rotation utilisée lors de l'expérience est proposée. Nous revenons, section 4.3.3, sur l'importance de l'amortissement dans le cas à plusieurs degrés de liberté. Section 4.3.4, nous comparons les résultats obtenus avec le modèle à plusieurs degrés de liberté à ceux obtenus avec le modèle à 1 degré de liberté. La section 4.3.5 se focalise quant à elle sur l'analyse de l'instabilité observée en fin de 16^{ème} passe. Avant de conclure (section 4.5), nous proposons (section 4.4) une démarche pour déterminer des successions de passes permettant d'éviter le broutement.

4.1 Stabilité en usinage - Équation avec un retard

Le mécanisme de régénération est l'une des principales causes de broutement (Chatter) en usinage. On présente figure 4.1 (a) le schéma d'une opération de tournage orthogonal. La principale raison de l'émergence des oscillations auto-entretenues provient du fait que la section coupée à un instant t dépend de l'usinage lors du tour précédent.



a) Schéma de tournage orthogonal [ALT00]



b) Mécanisme de formation de nouvelles surfaces lors du tournage [ALT00]

Figure 4.1 – Mécanisme de formation de nouvelles surfaces lors du tournage

A l'amorçage de l'usinage, la surface de la pièce n'a pas de défauts liés aux vibrations de la pièce. Après le premier tour, en raison de la flexibilité de la pièce dans la direction radiale y , ainsi que de l'action des forces de coupe radiales F_f , l'outil commence à laisser après son passage des irrégularités sur la surface usinée. Lors du tour suivant (Figure 4.1 (b)), la surface est régénérée par un nouveau passage de l'outil. La surface produite est alors la conséquence de la dynamique du système, liée au déplacement $y(t)$, mais aussi de l'effort de coupe actuel qui dépend de l'épaisseur coupée et donc de l'information laissée par l'outil lors de son passage précédent $y(t-T)$. Il peut alors se mettre en place, au fil des tours, un mécanisme de vibrations auto-entretenues par l'interaction entre les passes successives. L'épaisseur instantanée de coupe, pour cet exemple, est déterminée par :

$$h(t) = h_0 - (y(t) - y(t-T)), \quad (4.1)$$

où

- h_0 est l'épaisseur statique de coupe, qui correspond à l'épaisseur coupée en l'absence de vibrations,
- $[y(t) - y(t-T)]$ est l'épaisseur dynamique engendrée par les vibrations au passage présent $y(t)$ et précédent $y(t-T)$,
- T est la période de rotation de la pièce.

En considérant un système avec un degré de liberté, l'équation de mouvement peut être exprimée sous la forme :

$$m_y \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = F_f(t), \quad (4.2)$$

où m_y est la masse de la pièce, c_y l'amortissement du système, et k_y est la rigidité du système. En première approximation, l'effort de coupe $F(t)$ dans l'équation (4.2), qui dépend de l'épaisseur de coupe, peut se mettre sous la forme suivante [ALT00] :

$$F_f(t) = \chi \cdot h(t) = K_f \cdot A_p \cdot h(t), \quad (4.3)$$

où χ est la raideur de coupe, A_p est la profondeur de coupe, et K_f est la pression spécifique de coupe.

En prenant en compte l'épaisseur instantanée de coupe (4.1), l'équation (4.2) prend la forme :

$$m_y \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = K_f A_p (h_0 + y(t-T) - y(t)). \quad (4.4)$$

L'équation (4.4) est l'équation du mouvement avec un paramètre du retard.

Le principe du mécanisme régénératif est illustré, dans l'espace de Laplace, sur la figure 4.2. Cette représentation est proposée par Altintas [ALT00]. En entrée, nous avons l'épaisseur de coupe demandée $h_0(s)$ (correspondant pour cet exemple à l'avance par tour). La position $y(s)$ de l'outil de coupe, qui génère la surface usinée, est la sortie.

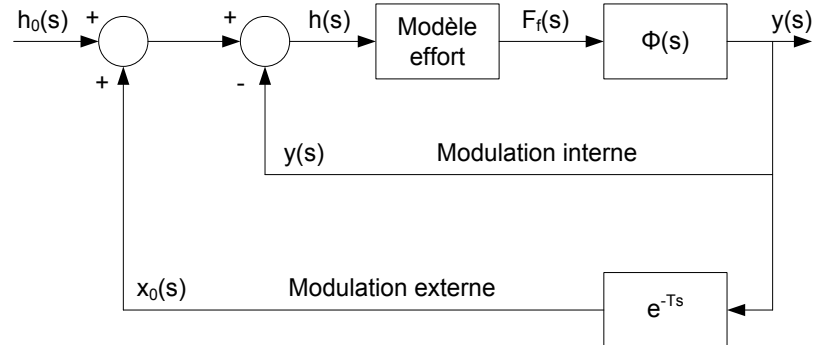


Figure 4.2 – Le principe du mécanisme régénératif dans l'espace de Laplace

L'épaisseur instantanée de coupe (4.1) dans l'espace de Laplace est donc (figure 4.2) :

$$h(s) = h_0 - y(s) + \exp(-s \cdot T) \cdot y(s) = h_0 + [\exp(-s \cdot T) - 1] \cdot y(s). \quad (4.5)$$

Cette épaisseur de coupe génère un effort de coupe $F_f(s)$. L'effort $F_f(s)$ excite alors le système :

$$y(s) = F_f(s) \cdot \Phi(s), \quad (4.6)$$

où $\Phi(s)$ est la fonction de transfert du système provenant de (4.2).

Pour le système usinant à 1 DDL, $\Phi(s)$ prend ainsi la forme suivante :

$$\Phi(s) = \frac{y(s)}{F_f(s)} = \frac{f_n^2}{k_y \cdot (s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot f_n \cdot s + f_n^2)}, \quad (4.7)$$

où $f_n = \sqrt{\frac{k_y}{m_y}}$ est la fréquence naturelle du système et $\zeta = \frac{c}{2m_y f_n}$ le taux d'amortissement.

L'équation de l'épaisseur instantanée de coupe $h(s)$ peut finalement prendre la forme de la fonction du transfert suivante :

$$\frac{h(s)}{h_0(s)} = \frac{1}{1 + [1 - \exp(-s \cdot T)] \cdot K_f \cdot A_p \cdot \Phi(s)}. \quad (4.8)$$

L'étude de stabilité du système usinant se ramène à l'étude de stabilité de cette fonction de transfert et donc à l'étude des pôles du dénominateur (équation caractéristique) :

$$1 + [1 - \exp(-s \cdot T)] \cdot K_f \cdot A_p \cdot \Phi(s) = 0. \quad (4.9)$$

Les solutions de l'équation (4.9) sont représentées sous la forme générale :

$$s = \sigma + j \cdot f_c. \quad (4.10)$$

Si la partie réelle de la solution (4.10) est positive ($\sigma > 0$), le mouvement du système usinant dans l'espace temporel est défini avec une fonction exponentielle ayant une puissance positive. Cela conduit à des vibrations ayant une amplitude croissante. Le système est donc instable. Si la partie réelle est négative ($\sigma < 0$), l'amplitude des vibrations diminue avec le temps et le système est stable. Si la partie réelle est nulle ($\sigma = 0$), on est dans le cas limite où l'amplitude des vibrations reste à un niveau constant avec une fréquence de broutement f_c .

Le comportement du système pour ce cas est décrit avec l'équation suivante :

$$1 + [1 - \exp(-j \cdot f_c \cdot T)] \cdot K_f \cdot A_p^{\text{lim}} \cdot \Phi(j \cdot f_c) = 0, \quad (4.11)$$

où le paramètre A_p^{lim} est la profondeur limite de coupe.

L'équation (4.11) définit les frontières entre le domaine stable et le domaine instable du système analysé. Le mouvement instable correspond au processus de coupe avec vibrations auto-entretenues.

Pour aller plus avant dans l'analyse de l'équation caractéristique précédente, une séparation de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\Phi(j \cdot f_c)$ est introduite :

$$\Phi(j \cdot f_c) = G + j \cdot H. \quad (4.12)$$

L'équation caractéristique devient :

$$\begin{aligned} & \left(1 + K_f \cdot A_p^{\text{lim}} \left[G(1 - \cos(f_c \cdot T)) - H \sin(f_c \cdot T) \right] \right) + \\ & + j \left(K_f \cdot A_p^{\text{lim}} \left[G \sin(f_c \cdot T) + H(1 - \cos(f_c \cdot T)) \right] \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La partie réelle et la partie imaginaire doivent être nulles. Cela conduit aux équations suivantes :

$$\tan \Psi = \frac{H(f_c)}{G(f_c)} = \frac{\sin(f_c \cdot T)}{\cos(f_c \cdot T) - 1}, \quad (4.14)$$

où Ψ est l'angle de phase de la fonction de transfert de la structure. La condition de stabilité s'exprime alors en terme de profondeur de coupe limite :

$$A_p^{\text{lim}} = \frac{-1}{2K_f G(f_c)}. \quad (4.15)$$

L'approche décrite dans cette section sert de base pour la méthodologie que nous utilisons pour l'étude de stabilité de l'opération d'usinage considérée dans ce mémoire ainsi que pour la détermination des paramètres garantissant cette stabilité.

4.2 Stabilité avec un modèle analytique de coque à un degré de liberté

4.2.1 Mise en équation

Il est possible d'utiliser une base modale pour réduire, par projection dans cette base modale, le système d'équations régissant le mouvement du système étudié. Cette stratégie peut aussi bien être utilisée pour une modélisation analytique que pour une modélisation par éléments finis. Ainsi, dans cette section, nous réalisons une première étude de la stabilité de l'opération de coupe en tournage du tube cylindrique utilisant un mode double qui nous permettra de nous ramener à un modèle réduit à un unique degré de liberté. Le mode double choisi est le mode $(k=3, m=1)$, mode à trois lobes, identifié comme étant celui observé à l'apparition du broutement lors de l'expérience.

Comme déterminé dans le chapitre précédent (3.72), les équations du mouvement de la coque s'écrivent :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k \cdot \underline{\underline{\ddot{\mathbf{q}}}}_{Mk} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_k \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{q}}}}_{Mk} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk} = \underline{\underline{\mathbf{p}}}_k, \quad (4.16)$$

où le vecteur solution (de dimension $2M \times 1$) $\underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk} = (\underline{\underline{\mathbf{d}}}_{1k}^T, \dots, \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{Mk}^T)^T$ se compose des $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_{mk} = (\alpha_{mk}^c(\tau), \alpha_{mk}^s(\tau))^T$ avec $m \in \{1, 2, 3 \dots M\}$ numéros des harmoniques axiales et k le numéro de l'harmonique circonférentielle considérée. Le second membre (de dimension $2M \times 1$) provient des efforts de coupe et intègre l'effet retard :

$$\underline{\underline{\mathbf{p}}}_k = \tilde{\chi} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_f (\underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk}(\tau - \tilde{T}) - \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk}(\tau)). \quad (4.17)$$

Soit $\underline{\underline{\mathbf{\Theta}}} = (\phi_{-1} \dots \phi_{2M})$ une matrice de vecteurs propres (de dimension $2M \times 2M$ si tous les modes sont utilisés), obtenue à partir de la solution du problème aux valeurs propres du système conservatif $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k \cdot \underline{\underline{\ddot{\mathbf{q}}}}_{Mk} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk} = 0$. Le vecteur $\underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk}$ peut être projeté dans la base modale et s'écrire :

$$\underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk} = \underline{\underline{\mathbf{\Theta}}} \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk}^0, \quad (4.18)$$

où

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk}^0 &= (\underline{\underline{\mathbf{d}}}_{1k}^{0T}, \dots, \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{Mk}^{0T})^T, \\ \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{mk}^0 &= (\alpha_{mk}^{0c}(\tau), \alpha_{mk}^{0s}(\tau))^T. \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'équation (4.16) s'écrit dans la base modale comme suit :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k^0 \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{q}}}}_{Mk}^0 + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_k^0 \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{q}}}}_{Mk}^0 + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk}^0 = \tilde{\chi} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_f^0 \left(\underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk}^0 (\tau - \tilde{T}) - \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk}^0 (\tau) \right), \quad (4.20)$$

où

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k^0 = \underline{\underline{\Theta}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_k \underline{\underline{\Theta}}; \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_k^0 = \underline{\underline{\Theta}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}}_k \underline{\underline{\Theta}}; \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k^0 = \underline{\underline{\Theta}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k \underline{\underline{\Theta}}; \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}}_f^0 = \underline{\underline{\Theta}}^T \underline{\underline{\mathbf{P}}}_f \underline{\underline{\Theta}}.$$

Si on se limite au seul mode double ($k=3, m=1$), l'équation (4.20) s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^0 \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{q}}}}^0 + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^0 \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{q}}}}^0 + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^0 = \tilde{\chi} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_f^0 \left(\underline{\underline{\mathbf{q}}}^0 (\tau - \tilde{T}) - \underline{\underline{\mathbf{q}}}^0 (\tau) \right), \quad (4.21)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{q}}}^0 = (\alpha^{0c}(\tau), \alpha^{0s}(\tau))^T$. La structure des matrices $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^0, \underline{\underline{\mathbf{C}}}^0, \underline{\underline{\mathbf{K}}}^0, \underline{\underline{\mathbf{P}}}_f^0$ (pour $\psi_p = 0$) est quant à elle donnée par :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^0 = \begin{pmatrix} m_{11}^0 & 0 \\ 0 & m_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}^0 = \begin{pmatrix} c_{11}^0 & 0 \\ 0 & c_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}^0 = \begin{pmatrix} k_{11}^0 & 0 \\ 0 & k_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}}_f^0 = \begin{pmatrix} p_{11}^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$m_{11}^0 = m_{22}^0; \quad c_{11}^0 = c_{22}^0; \quad k_{11}^0 = k_{22}^0;$$

Ayant choisi $\psi_p = 0$ (choix arbitraire pour la position angulaire de l'outil dans le référentiel fixe), la matrice relative aux efforts de coupe comporte une seconde ligne nulle et conduit à une solution triviale nulle pour $\alpha^{0s}(\tau)$. Cela permet de simplifier le système en se ramenant un unique degré de liberté $\alpha^{0c}(\tau)$. Après normalisation des équations du système (4.21) par la matrice masse, nous obtenons l'équation scalaire suivante :

$$\ddot{\alpha}^0 + 2\zeta_{km} \tilde{f}_{km} \dot{\alpha}^0 + \tilde{f}_{km}^2 \alpha^0 = \tilde{\chi} p_f^0 \left(\alpha^0 (\tau - \tilde{T}) - \alpha^0 (\tau) \right), \quad (4.22)$$

où

- $\zeta_{km} = \frac{c_{11}^0}{2\sqrt{k_{11}^0 m_{11}^0}}$ est le coefficient d'amortissement pour la forme propre choisie;
- $\tilde{\chi}$ est la raideur de coupe adimensionnée;
- $\tilde{f}_{km} = \sqrt{\frac{k_{11}^0}{m_{11}^0}}$ est la fréquence propre adimensionnée pour la forme propre choisie;
- $p_f^0 = p_{11}^0$ est le coefficient lié à l'effort de coupe;
- \tilde{T} est la période de rotation adimensionnée.

Les solutions de l'équation (4.22) sont de la forme :

$$\alpha^0 = e^{\lambda t} C. \quad (4.23)$$

Après substitution dans (4.22), nous obtenons l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + 2\zeta_{km}\tilde{f}_{km}\lambda + \tilde{f}_{km}^2 = \tilde{\chi}p_f^0(1 - e^{-\tilde{T}\lambda}). \quad (4.24)$$

Aux frontières des zones de stabilité, les solutions de l'équation (4.24) sont imaginaires pures. Par conséquent, les paramètres critiques de la coupe sont déterminés en écrivant $\lambda = i \cdot 2\pi f_c$, qui permet de séparer l'équation caractéristique en parties réelle et imaginaire. Le paramètre f_c sera appelé fréquence de broutement. Nous obtenons ainsi :

$$-f_c^2 + 4\pi\zeta_{km}\tilde{f}_{km}if_c + \tilde{f}_{km}^2 = \tilde{\chi}p_f^0(1 - \cos(\tilde{T}2\pi f_c) + i \sin(\tilde{T}2\pi f_c)). \quad (4.25)$$

Nous scindons l'équation (4.25) en partie réelle et en partie imaginaire :

$$\begin{cases} -f_c^2 + \tilde{f}_{km}^2 = \tilde{\chi}p_f^0(1 - \cos(\tilde{T}2\pi f_c)) \\ 4\pi\zeta_{km}\tilde{f}_{km}s = \tilde{\chi}p_f^0 \sin(\tilde{T}2\pi f_c) \end{cases}. \quad (4.26)$$

Nous introduisons la notation :

$$\begin{cases} a_{km} = -f_c^2 + \tilde{f}_{km}^2 \\ b_{km} = 4\pi\zeta_{km}\tilde{f}_{km}f_c \end{cases}. \quad (4.27)$$

A partir du système d'équations (4.26), nous exprimons la raideur de coupe [CHE08] :

$$\tilde{\chi}_{km} = -\frac{1}{2a_{km}} \left[1 + \left(\frac{b_{km}}{a_{km}} \right)^2 \right]. \quad (4.28)$$

Et aussi [CHE08] :

$$\begin{aligned} \tan \psi_{km} &= \frac{b_{km}}{a_{km}} = \frac{\sin(\tilde{T}_{km} 2\pi f_c)}{1 - \cos(\tilde{T}_{km} 2\pi f_c)}, \\ \Rightarrow \psi_{km} &= \operatorname{arctg} \frac{b_{km}}{a_{km}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Écrivons la relation entre la fréquence de chatter et la vitesse de rotation [CHE08] :

$$\begin{aligned} 2\pi f_c \tilde{T}_{km}^z &= \varepsilon_{km} + 2\pi z, \quad z \in \mathbb{N} \\ \varepsilon_{km} &= \pi - 2\psi_{km}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

où ε_k^j - différence de phase entre les modulations internes et externes, z - numéro de la zone d'instabilité.

L'algorithme permettant de trouver la solution du système d'équations (4.26) est présenté figure 4.2. Le processus est initié avec une fréquence de brottement proche de la fréquence propre : $f_{c0} = \tilde{f}_{km} + \Delta$ (Δ est une petite constante arbitraire). Ensuite, par application des formules (4.28), (4.29) et (4.30), nous calculons les paramètres : $\tilde{\chi}_{km}$, ε_{km} et ψ_{km} . Enfin, nous calculons la fréquence de rotation \tilde{T}_{km}^z . Ensuite, le cycle est répété pour une autre fréquence $f_c = f_{c0} + \Delta f_{c0}$.

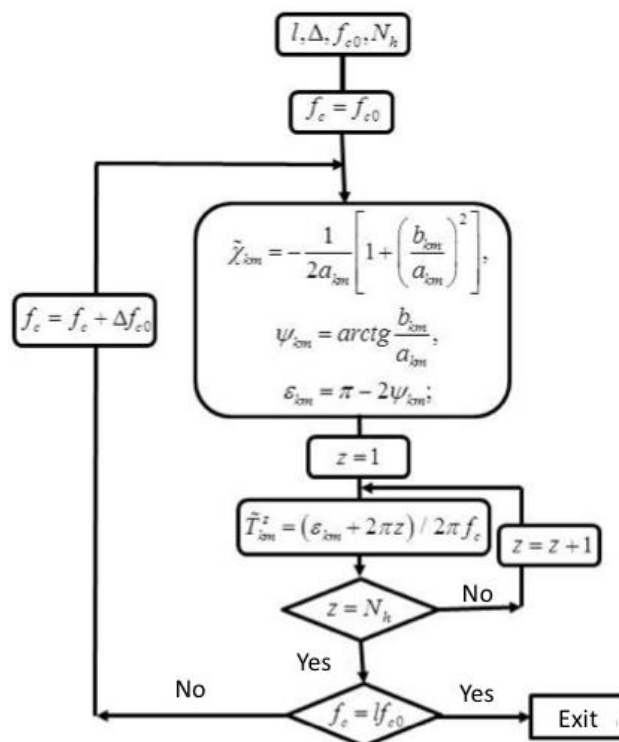


Figure 4.2 – Principe du programme d'étude de la stabilité du processus de coupe

Le résultat est une paire de paramètres $(\tilde{T}, \tilde{\chi})$, pour chaque valeur de fréquence donnée f_c . Lorsqu'on reporte ces paires sur un graphique, on obtient un ensemble de points dans un plan des paramètres $(\tilde{T}, \tilde{\chi})$. Ce calcul peut être fait pour différentes positions de l'outil x_p , pour obtenir ainsi un ensemble de points dans un plan $(x_p, \tilde{\chi}, \tilde{T})$. Cet ensemble de points forme la frontière des zones de stabilité du processus de coupe en continue. Cet ensemble de points constitue le diagramme de stabilité pour l'ensemble de l'opération considérée.

4.2.2 Analyse des résultats pour le cas à 1 degré de liberté

Dans cette sous-section, nous traçons des diagrammes de stabilités pour la 16^{ème} passe et montrons, en fin de sous-section, dans quelle mesure la valeur de l'amortissement modifie ces diagrammes.

Les paramètres géométriques de la pièce sont donnés dans le tableau ci-après:

	Avant l'usinage	Après l'usinage
Rayon	$R = 80,2 \text{ mm}$	$R = 79,2 \text{ mm}$
Epaisseur	$h = 5,39 \text{ mm}$	$h = 4,39 \text{ mm}$
Longueur de la surface à usiner	$L = 140 \text{ mm}$	

Tableau 4.1 – Paramètres géométriques de la coque

Les autres paramètres de l'opération sont : vitesse de coupe - 360 m/min; avance - 0,25 mm/tr; vitesse de rotation 758 - tr/min soit une fréquence de rotation de 12,63 Hz.

Pour la présentation des résultats, nous définissons le coefficient de raideur de coupe et le paramètre de fréquence de rotation comme suit :

$$\kappa = \frac{\chi}{\chi_{\text{exp}}}; \quad f_{\text{rot}} = \frac{1}{T}, \quad (4.31)$$

où

- χ est la raideur de coupe du système, [N/m] ;
- χ_{exp} est la raideur de coupe nominale, obtenue expérimentalement $\left(\frac{\partial P_w}{\partial A_p} \Big|_{A_{p0}} \right)$ raideurs définies dans la section 2.2.2), pour l'ensemble outil-pièce étudié, [N/m] ;
- κ est le coefficient de raideur de coupe;
- T est la période de rotation, [s];
- f_{rot} est la fréquence de rotation, [Hz].

Le diagramme de stabilité de l'opération de coupe considérée consiste à tracer un ensemble de points à la limite de stabilité dans l'espace défini par les 3 paramètres : le coefficient de raideur de coupe κ , la fréquence de rotation de la pièce f_{rot} , la position de l'outil x_p . Cet ensemble de points définit, sous forme de lobes, les frontières des zones de stabilité du processus de coupe. Pour obtenir

un processus de coupe stable, les paramètres de l'opération d'usinage doivent être en deçà de ces zones-lobes.

La figure 4.3 donne le diagramme tridimensionnel de stabilité pour la 16^{ème} passe. Si on se place dans une tranche (κ, f_{rot}) , et donc pour une position x_p fixée de l'outil, on distingue un tracé de lobes de stabilité classique pour lequel le comportement dynamique du système usinant n'évolue pas.

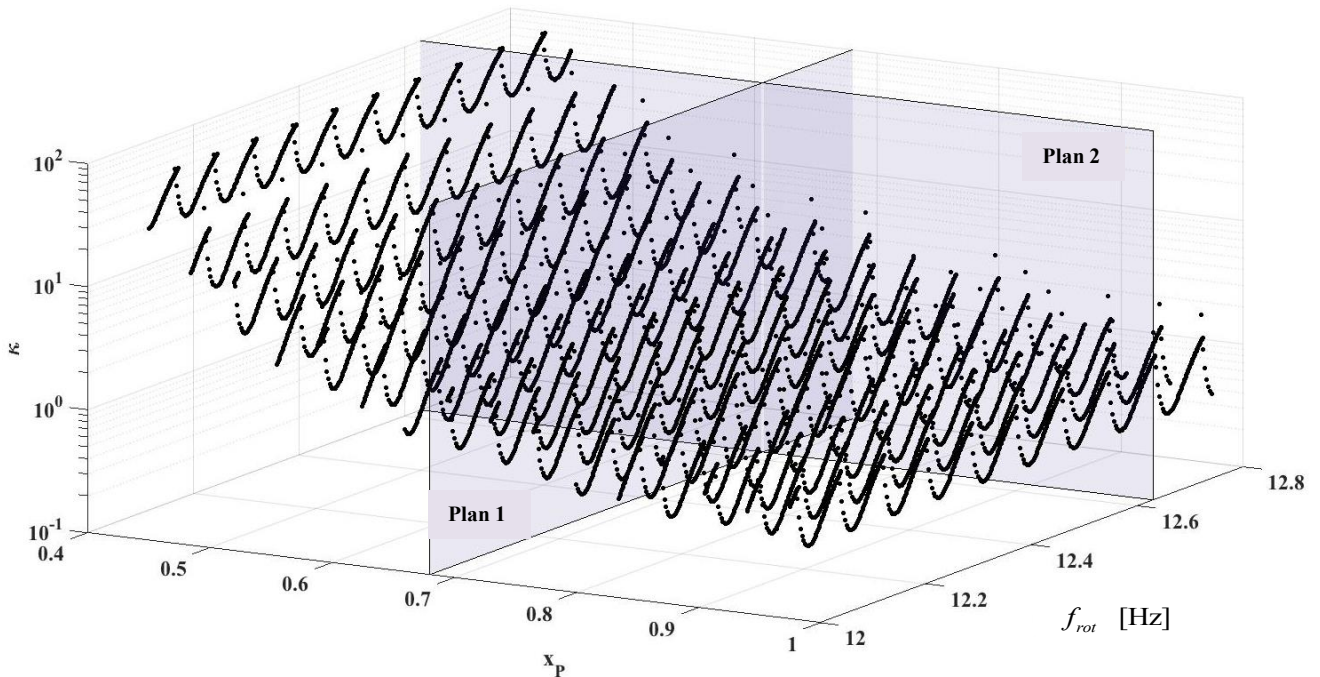


Figure 4.3 – Diagramme de stabilité en fonction des paramètres (x_p, κ, f_{rot})

Sur les figures 4.4 et 4.6 sont présentées des coupes du diagramme de stabilité 4.3 tridimensionnel selon deux plans différents (grisés sur la figure 4.3) : plan 1, figure 4.4, pour une position $x_p = 0,68L$ (peu avant l'apparition de broutement); plan 2, figure 4.6, en $f_{rot} = 12,63$ Hz qui correspond à la fréquence de rotation de la pièce durant l'expérience.

Sur la figure 4.4, la coupe du diagramme de stabilité se fait donc dans un plan (κ, f_{rot}) . Sur cette figure, la ligne verticale rouge indique la fréquence de rotation de la pièce ($f_{rot} = 12,63$ Hz). La première intersection (en partant du bas du diagramme) de cette ligne avec un lobe a lieu au point A. La ligne horizontale en bleu correspond à un coefficient de raideur de coupe $\kappa = \frac{\chi}{\chi_{exp}} = 1$. Si le point A est au-dessus de la ligne bleue, alors le processus de coupe en continu de ce système est stable, s'il est en-dessous, il est instable. La distance OA permet d'estimer la marge de stabilité pour un système donné.

Le changement du point d'application des efforts de coupe (avancement de l'outil), ainsi que l'enlèvement de matière, conduisent à une modification de la réponse dynamique du système. Dans notre cas, ceci induit une descente progressive des lobes, dans le diagramme de stabilité, avec l'avancement de l'outil.

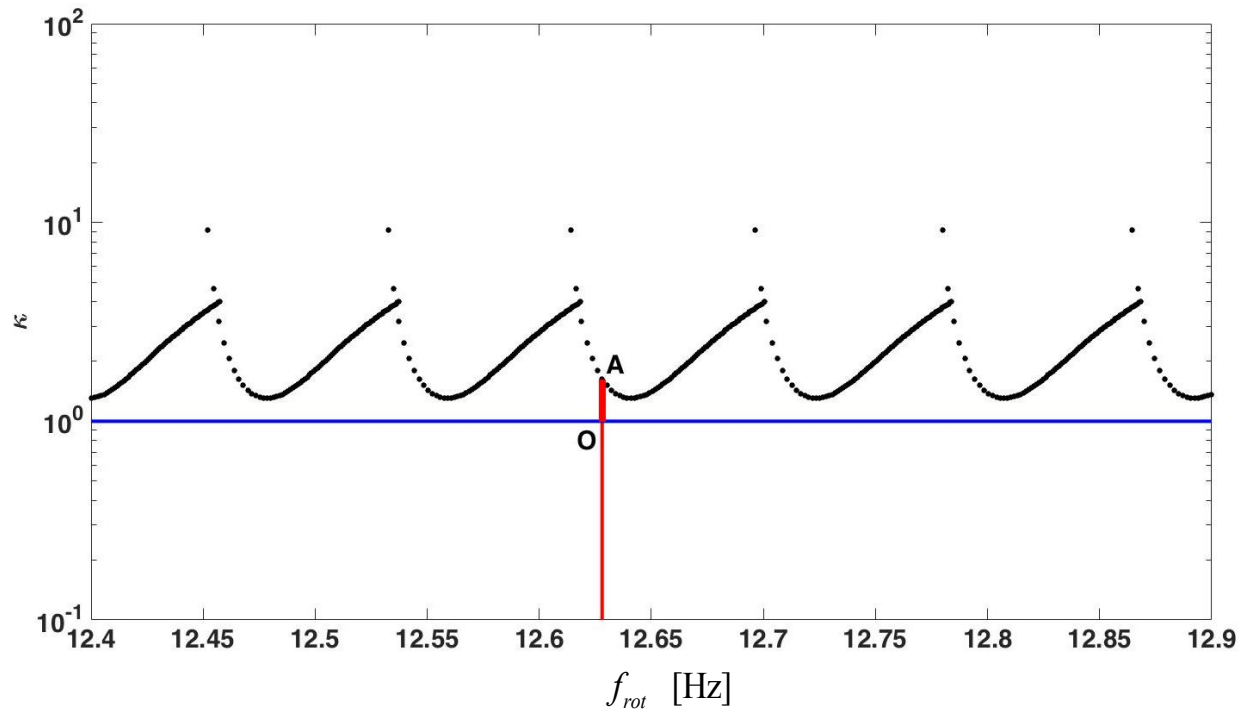


Figure 4.4 – Coupe du diagramme de stabilité dans le plan des paramètres (κ, f_{rot}) pour $x_p = 0,68L$

Lorsque le point A atteint la ligne bleue (ligne de la valeur limite du coefficient de raideur de coupe), cela signifie que le système est à la limite de la stabilité de la coupe.

La Figure 4.5 montre les limites des zones de la stabilité pour trois positions différentes d'outil $x_p = \{0,71L, x_p = 0,772L, x_p = 0,83L\}$. La position de l'outil $x_p = 0,71L$ correspond à un processus stable de coupe. A la position de l'outil $x_p = 0,772L$, le système se trouve sur la frontière de la zone de stabilité, et à la position de l'outil $x_p = 0,83L$, il est en dehors de la zone de stabilité.

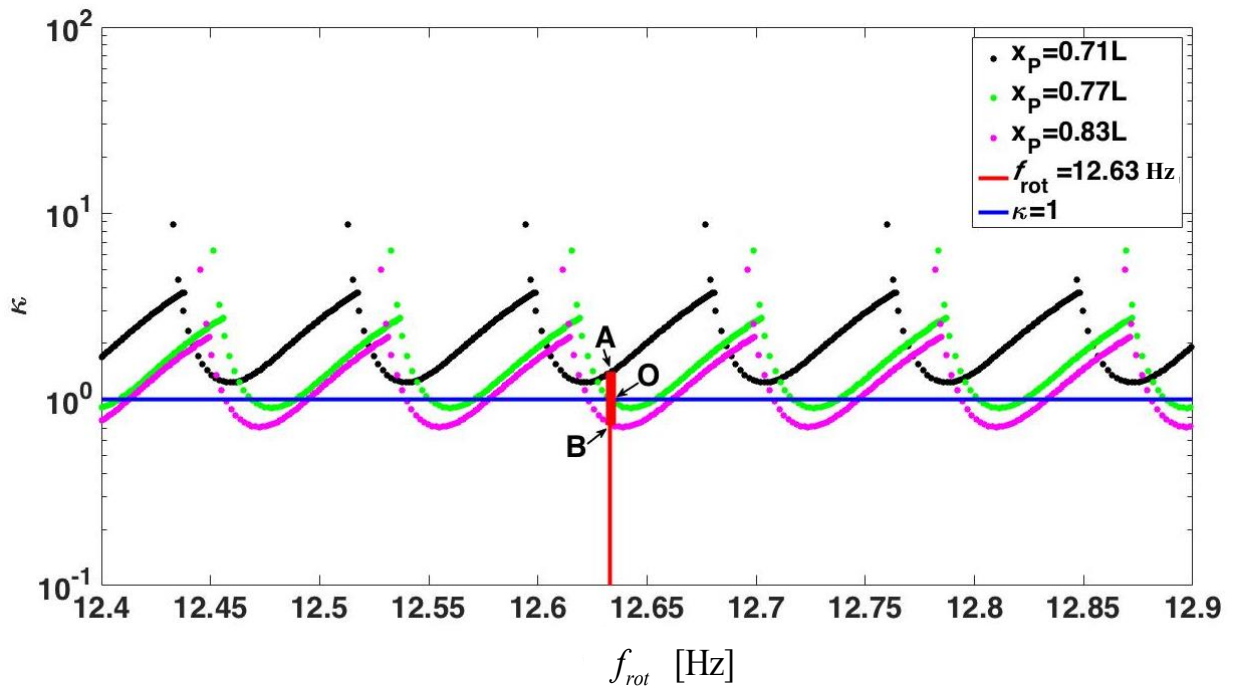


Figure 4.5 – Coupe du diagramme de stabilité dans le plan des paramètres (κ, f_{rot}) pour les positions $x_p = \{0,71L; 0,77L; 0,83L\}$

La figure 4.6 montre la coupe du diagramme de stabilité (coupe 2, figure 4.3) dans le plan (κ, x_p) . Ce diagramme permet de voir comment varie le coefficient de raideur de coupe limite du système lors de l'avancement de l'outil. Ce diagramme permet notamment de détecter le moment à partir duquel le processus de coupe devient instable. L'analyse de la figure 4.6 montre que la frontière de la zone de stabilité croise la valeur limite de rigidité du système κ au moment où $x_p = 0,773L$. Cette position dépend de la dynamique du système usinant en ce point, de la vitesse de coupe, de l'amortissement du système, de la profondeur de passe et de l'avance. Il est intéressant de noter qu'après cette première position le système retrouve successivement 3 zones où l'usinage est stable. Ceci est en concordance avec l'apparition de zones successivement broutées et non broutées visibles sur la pièce.

La figure 4.7 présente le diagramme de stabilité pour différents coefficients d'amortissement du système. On peut voir qu'une augmentation ou une diminution de l'amortissement du système de 30% peut affecter de manière significative les frontières des zones de stabilité de la coupe. La variation de 30% sur l'amortissement induit une variation d'environ 35% sur κ lorsque $f_{rot} = 12,63$ Hz. On note cependant que pour des fréquences de rotation telles que l'on se place entre 2 lobes (par exemple $f_{rot} = 12,68$ Hz), l'erreur induite sur κ est sensiblement plus faible.

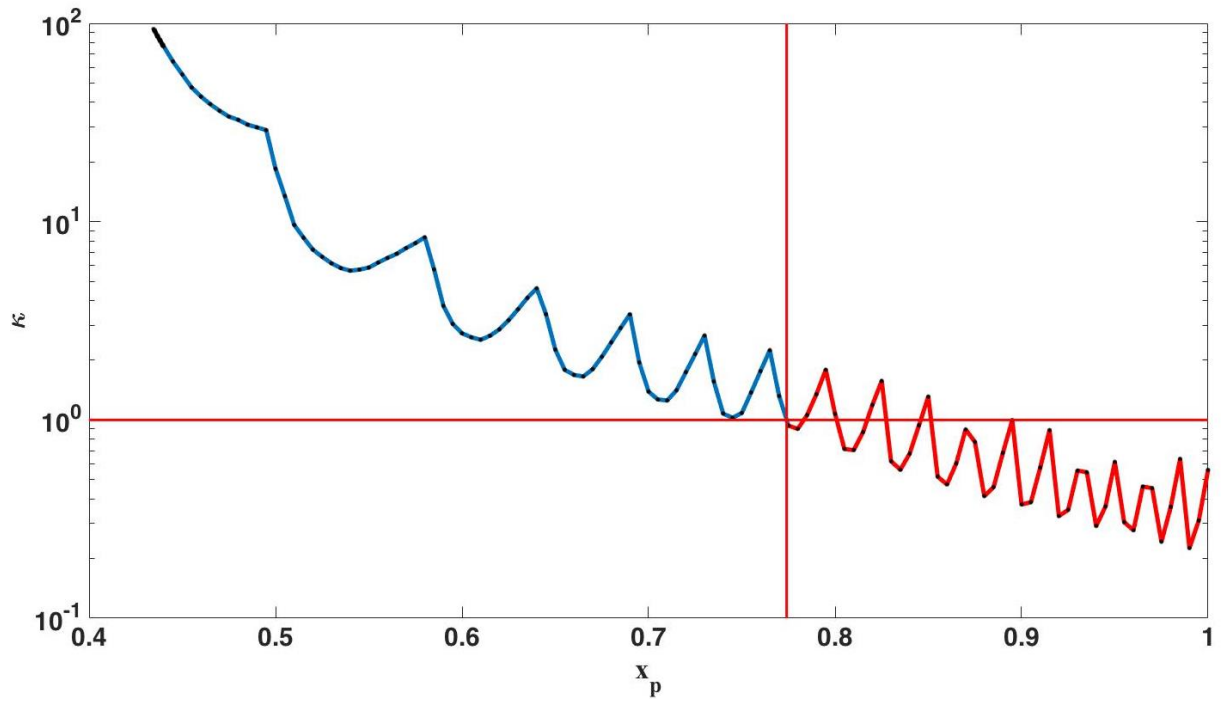


Figure 4.6 – Coupe du diagramme de stabilité dans le plan des paramètres (κ, x_p)

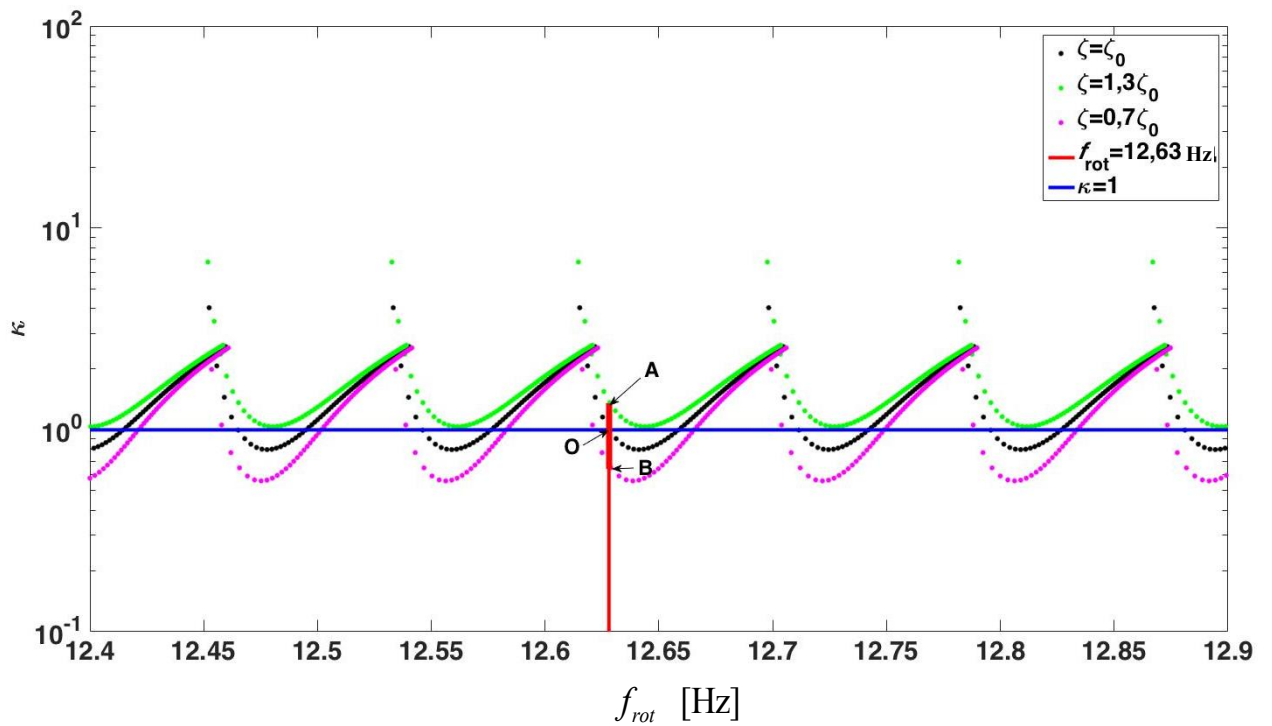


Figure 4.7 – Diagrammes de stabilité pour différents coefficients d'amortissement du système

4.3 Stabilité avec un modèle analytique de coque à plusieurs degrés de liberté

4.3.1 Mise en équation

Pour cette étude de stabilité d'un modèle à plusieurs degrés de liberté, nous partons, comme dans la section 4.2.1, de l'équation de mouvement sous la forme (4.16) avec des efforts de coupe prenant en compte l'effet régénératif sous la forme (4.17). La démarche suit et généralise celle introduite pour un degré de liberté.

Ainsi la solution est recherchée sous la forme :

$$\underline{\mathbf{q}}_{Mk} = e^{\lambda \tau} \underline{\mathbf{u}} \quad (4.32)$$

Après substitution de (4.32) dans (4.16) et (4.17) nous obtenons l'équation :

$$\underline{\mathbf{L}}_k \underline{\mathbf{u}} = \Lambda \underline{\mathbf{P}}_f \underline{\mathbf{u}}, \quad (4.33)$$

où

$$\underline{\mathbf{L}}_k = -\underline{\mathbf{M}}_k \cdot \lambda^2 + \underline{\mathbf{C}}_k \cdot \lambda + \underline{\mathbf{K}}_k; \quad \Lambda = \tilde{\chi} \left(1 - e^{-\lambda \tilde{T}}\right); \quad (4.34)$$

Tel que mentionné dans le paragraphe précédent, aux frontières des zones de stabilité, les solutions de l'équation (4.33) sont imaginaires pures. Les paramètres critiques sont issus du problème aux valeurs propres (4.33) et sont donc solution de l'équation :

$$\det(\underline{\mathbf{L}}_k - \Lambda_k \underline{\mathbf{P}}_f) = 0 \quad (4.35)$$

La substitution $\lambda = i \cdot 2\pi f_c$ permet de séparer l'équation caractéristique en parties réelle et imaginaire. Le paramètre f_c représente la fréquence d'oscillation à la limite de la zone de stabilité, quand le facteur caractéristique λ devient purement imaginaire. La fréquence d'oscillation f_c est la fréquence de broutement.

Il est possible des réunir les valeurs propres de (4.35) dans un vecteur $\underline{\Lambda}_k = (\Lambda_k^1 \dots \Lambda_k^{2M})$. Chaque composante de ce vecteur conduit, d'après (4.34), à la résolution de :

$$\Lambda_k^j = \tilde{\chi}_k^j \left(1 - e^{-\lambda \tilde{T}_k^j}\right) = a_k^j + i b_k^j, \quad (4.36)$$

où $j=1,\dots,2M$. Les coefficients a_k^j et b_k^j représentent les parties réelle et imaginaire des composantes du vecteur $\underline{\Lambda}_k$. Ceci amène à :

$$\Lambda_k^j = a_k^j + ib_k^j = \tilde{\chi}_k^j \left(1 - \cos(\tilde{T}_k^j 2\pi f_c) + i \sin(\tilde{T}_k^j 2\pi f_c) \right), \quad (4.37)$$

et en dissociant partie réelle et en partie imaginaire à :

$$\begin{cases} a_k^j = \tilde{\chi}_k^j \left(1 - \cos(\tilde{T}_k^j 2\pi f_c) \right) \\ b_k^j = \tilde{\chi}_k^j \sin(\tilde{T}_k^j 2\pi f_c) \end{cases}. \quad (4.38)$$

A partir du système d'équations précédent, la raideur de coupe peut alors s'exprimer [CHE08] :

$$\tilde{\chi}_k^j = -\frac{1}{2a_k^j} \left[1 + \left(\frac{b_k^j}{a_k^j} \right)^2 \right]. \quad (4.39)$$

soit encore [CHE08] :

$$\begin{aligned} \tan \psi_k^j &= \frac{b_k^j}{a_k^j} = \frac{\sin(\tilde{T}_k^j 2\pi f_c)}{1 - \cos(\tilde{T}_k^j 2\pi f_c)}, \\ &\Rightarrow \psi_k^j = \arctg \frac{b_k^j}{a_k^j}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Le nombre d'ondulations laissées par les vibrations de broutement sur un tour est donné par [CHE08] :

$$f_c \tilde{T}_{kz}^j = z + \frac{\varepsilon_k^j}{2\pi}, \quad z \in \mathbb{N}. \quad (4.41)$$

En tenant compte de (4.40) et (4.40), on obtient :

$$\begin{aligned} 2\pi f_c \tilde{T}_{kz}^j &= \varepsilon_k^j + 2\pi z, \quad z \in \mathbb{N} \\ \varepsilon_k^j &= \pi - 2\psi_k^j; \end{aligned} \quad (4.42)$$

où ε_k^j est la différence de phase entre les ondulations internes et externes de la surface.

L'algorithme permettant de trouver les solutions du système d'équations (4.38) est présenté en figure 4.8. La première étape de l'algorithme permet de fixer le paramètre de fréquence $f_c = f_{c0}$ (la plus petite valeur propre du problème aux valeurs propres du système conservatif $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k \cdot \underline{\underline{\ddot{\mathbf{q}}}}_{Mk} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_k \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{Mk} = 0$). Dans une deuxième étape, nous résolvons le problème aux valeurs propres, à

savoir : $[\underline{\mathbf{L}}_k - \Lambda_k^j \underline{\mathbf{P}}_f] \underline{\mathbf{v}}_j = 0, j = 1, \dots, 2M$, à partir duquel nous déterminons le vecteur de valeurs propres $\underline{\Lambda}_k = (\Lambda_k^1 \dots \Lambda_k^{2M})$. Ensuite, pour chaque valeur propre Λ_k^j , au moyen des formules (4.39), (4.40) et (4.42), nous déterminons $\tilde{\chi}_k^j, \psi_k^j$ et ε_k^j . L'étape finale permet de calculer les périodes de rotation \tilde{T}_{kz}^j correspondantes. Cette procédure est ensuite répétée pour la valeur suivante du paramètre de fréquence $f_c = f_{c0} + \Delta f_{c0}$ (où Δf_{c0} est une constante arbitraire).

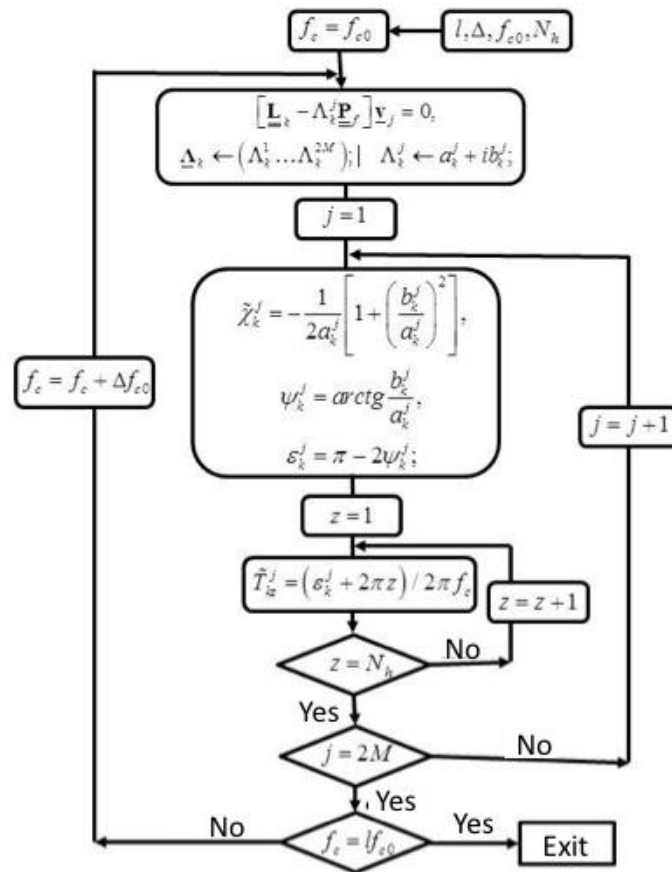


Figure 4.8 – Schéma de principe du programme pour un système à plusieurs degrés de liberté

f_c	Fréquence d'oscillation à la limite de la zone de stabilité
Δ, l	Increment de fréquence, une gamme de fréquence
a_k^j, b_k^j	Parties réelle et imaginaire des valeurs propres Λ_k^j
$\tilde{\chi}_k^j$	Raideur de coupe
$\psi_k^j, \varepsilon_k^j$	Déphasage et différence de phase entre les ondulations internes et externes de la surface
N_h	Nombre de zones d'instabilité
\tilde{T}_{kz}^j	Période de rotation

Tableau 4.3 – Constantes et variables utilisées dans le schéma de principe du programme

4.3.2 Analyse des résultats pour le cas à plusieurs degrés de liberté

Le résultat de la résolution du système d'équations (4.38) est une paire de paramètres $(\tilde{T}, \tilde{\chi})$ pour chaque valeur propre Λ_k^j , pour chaque valeur de fréquence considérée f_c et pour une position de l'outil x_p . Comme dans la section 4.2.2, nous construisons les diagrammes de stabilité pour différentes positions de l'outil pendant la passe. Les paramètres d'usinage correspondent, comme précédemment, à la 16^{ème} passe.

Dans la figure 4.9, le diagramme tridimensionnel de stabilité du processus de coupe est, comme précédemment, tracé dans l'espace des 3 paramètres (x_p, κ, f_{rot}) : κ coefficient de raideur de coupe, f_{rot} fréquence de rotation de la pièce et x_p position. Sur ce tracé, une couleur correspond à une famille de lobes et est associée une valeur propre Λ_k^j (ces dernières évoluant de manière continue avec l'avancement de l'outil). Il y a autant de valeurs propres que de degrés de liberté. Les figures 4.10(a), 4.11(a), 4.12(a) et 4.18 sont des coupes de ce diagramme de stabilité tridimensionnel.

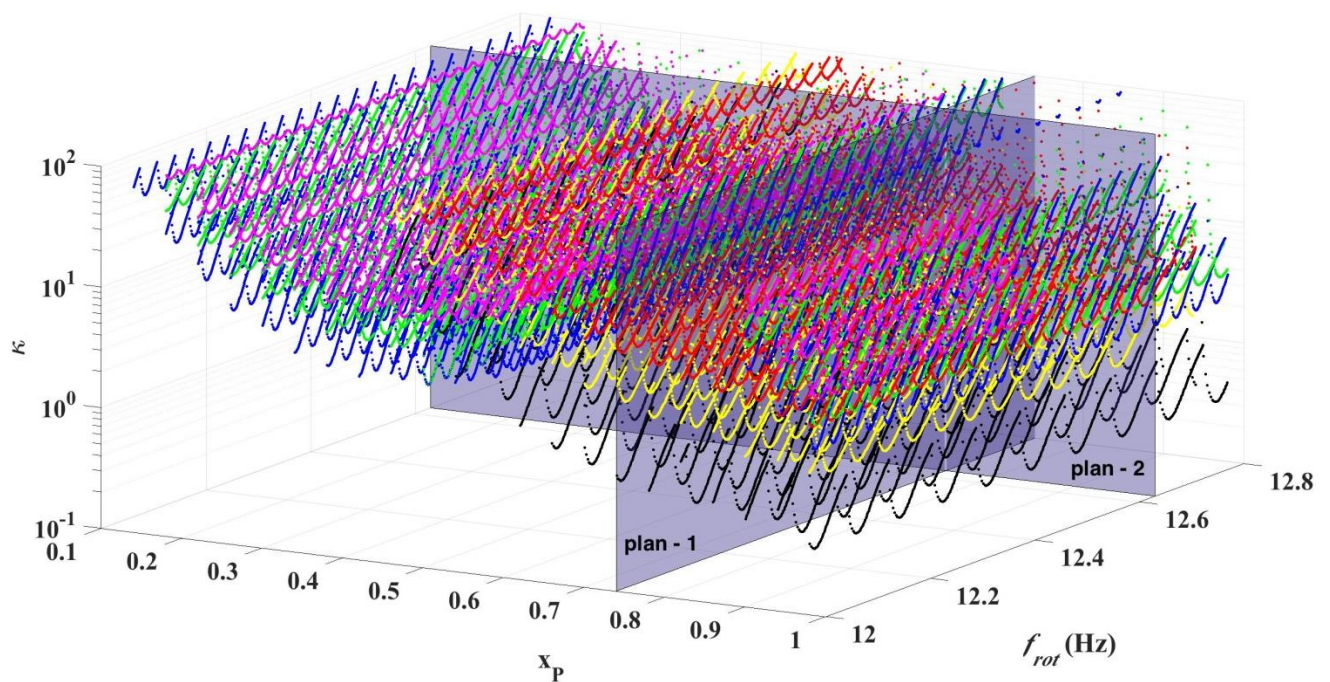


Figure 4.9 – Diagramme de stabilité dans l'espace des paramètres (x_p, κ, f_{rot})

La figure 4.10 (a) représente une coupe du diagramme de stabilité dans le plan des paramètres (κ, f_{rot}) pour la position de l'outil $x_p = 0,739L$. Cette position de l'outil correspond à l'instant très particulier où la perte de stabilité du processus de coupe est prédite. Trois ensembles de lobes sont visibles (les autres sont en dehors du graphique). En pratique, nous nous intéressons uniquement à la

frontière de la zone de stabilité inférieure, car à partir du moment où les paramètres du système atteignent la frontière de stabilité inférieure, le processus de coupe devient instable. La ligne verticale rouge représente la fréquence de rotation de la pièce, correspondant à la fréquence de rotation de l'expérience $f_{rot} = 12,63$ Hz (cf chapitre 2).

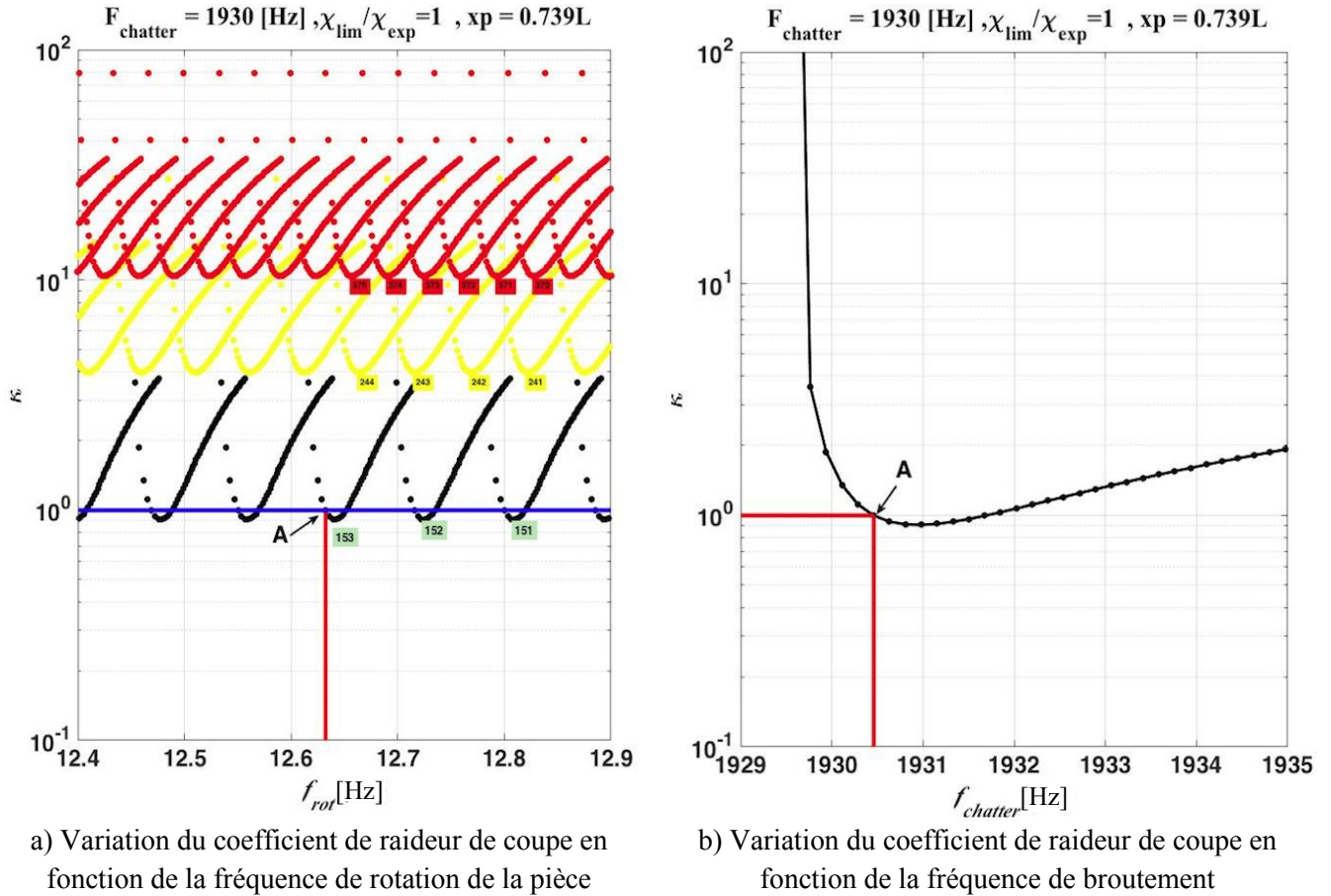


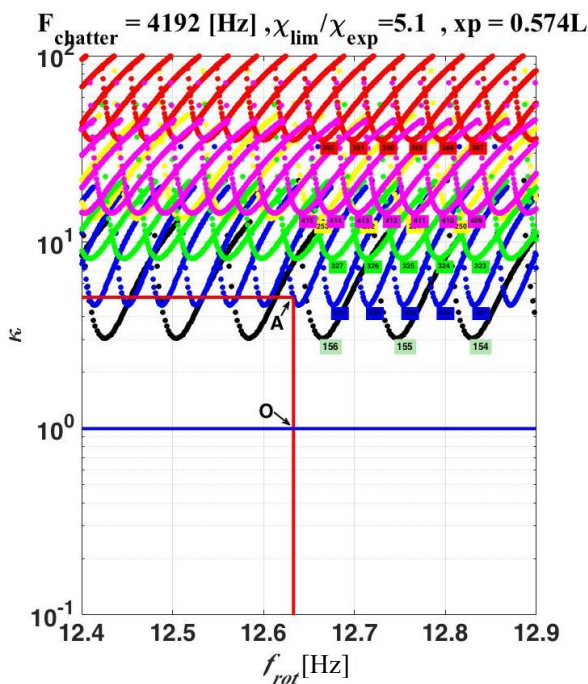
Figure 4.10 – Coupe du diagramme de stabilité dans le plan (κ, f_{rot}) pour la position de l'outil $x_p = 0,739L$

Cette ligne verticale croise le premier ensemble de lobes au point A. Pour évaluer la stabilité du processus de coupe, il faut, comme dans la section 4.2.2, estimer la position relative du point A vis-à-vis de la valeur limite du coefficient de raideur de coupe $\kappa = \chi/\chi_{exp} = 1$ (ligne horizontale bleue). Si le point A est au-dessus de la ligne bleue, alors le processus de coupe en continu est stable, s'il est en dessous, il est instable. Sur la figure 4.10 (a) le processus de coupe en continu se trouve juste à la frontière de la zone de stabilité car on a $\kappa_A = 1$. La fréquence d'oscillation (fréquence de broutement) est une des caractéristiques de la limite de la zone de stabilité de la coupe. C'est à cette fréquence que commencent les oscillations auto-excitées du système. La fréquence de broutement dépend de la zone de stabilité rencontrée (famille de lobes) ainsi que du point d'intersection entre cette zone de stabilité et la ligne verticale correspondant à la fréquence de rotation de la pièce. Sur la figure 4.10 (b) est

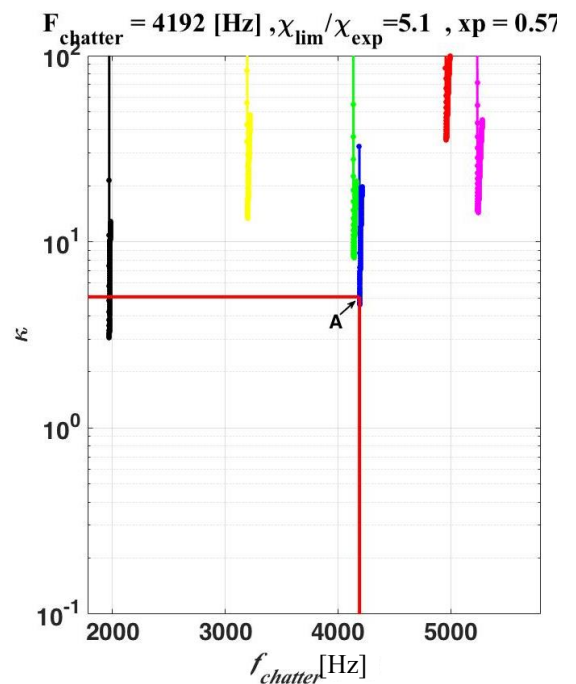
montrée la variation de la valeur limite du coefficient de raideur de coupe κ en fonction de la fréquence de broutement $f_{chatter}$. Ainsi, en reportant cette valeur $\kappa_A = 1$ sur la figure 4.10 (b), nous obtenons la valeur de la fréquence de broutement $f_{chatter} = 1930$ Hz. Il est important de noter qu'à chaque famille de lobes correspond une fréquence de broutement différente. Cela peut se voir sur les figures 4.11 (a) et 4.11 (b).

Sur la figure 4.11 (a) sont représentées les familles de lobes de la zone de stabilité pour la position de l'outil $x_p = 0,574L$ dans le plan des paramètres (κ, f_{rot}) . Ces familles sont au nombre de 6 (chacune affectée d'une couleur différente). Sur la figure 4.11 (b), pour cette position de l'outil, est tracée l'évolution du coefficient de raideur de coupe κ en fonction de la fréquence de broutement pour chaque famille. Les évolutions des fréquences de broutement sont donc très clairement dissociées entre familles de lobes.

Lors de l'avancement de l'outil, les familles de lobes peuvent se déplacer verticalement vers le haut ou vers le bas (augmentation ou diminution de κ respectivement), ou encore se déplacer dans la direction horizontale les uns par rapport aux autres.



a) Variation du coefficient de raideur de coupe en fonction de la fréquence de rotation de la pièce



b) Variation du coefficient de raideur de coupe en fonction de la fréquence de broutement

Figure 4.11 – Coupe du diagramme de stabilité dans le plan (κ, f_{rot}) pour la position de l'outil $x_p = 0,574L$

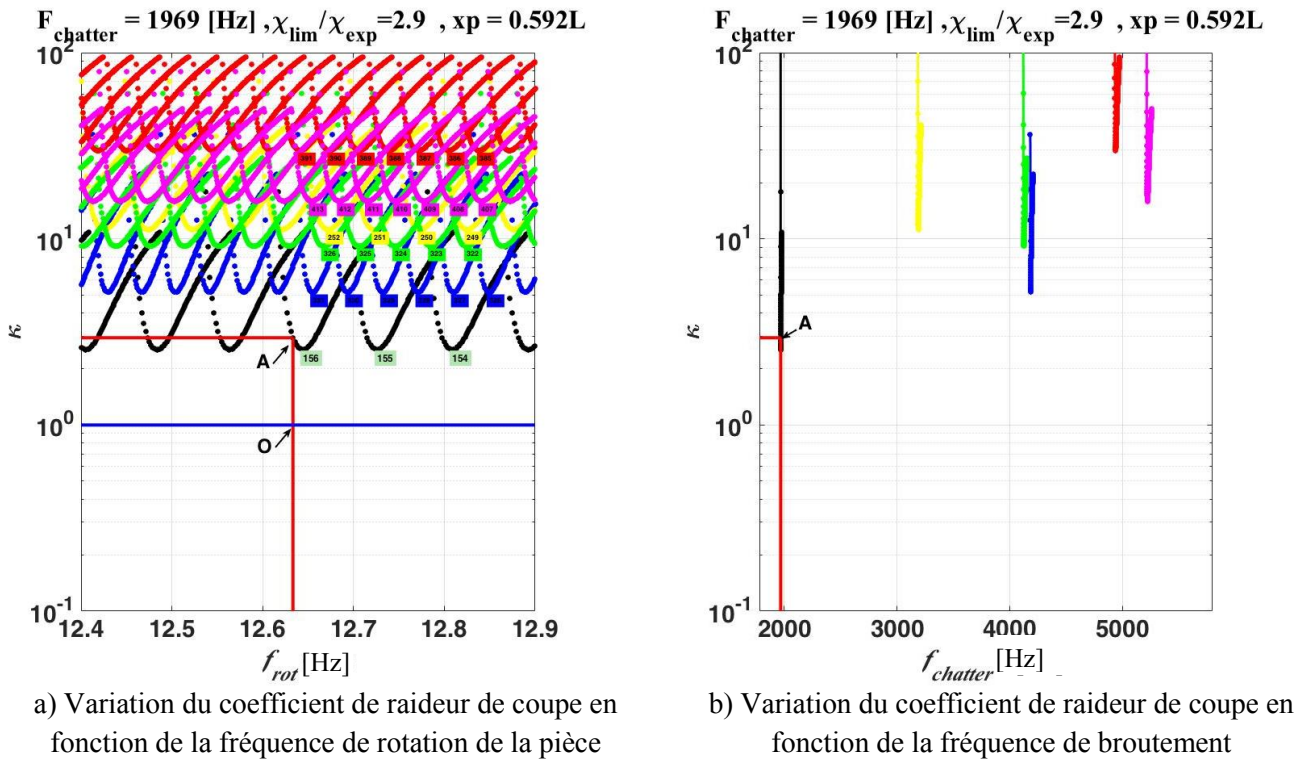


Figure 4.12 – Coupe du diagramme de stabilité dans le plan (κ, f_{rot}) pour la position de l'outil $x_p = 0,592L$

Ceci est visible si on compare les deux diagrammes de stabilité des figures 4.11(a) et 4.12(a) qui sont obtenus pour $x_p = 0,574L$ et $x_p = 0,592L$ respectivement. La dépendance du coefficient de raideur de coupe κ à la fréquence de broutement pour les deux états du système est également visible sur les figures 4.11 (b) et 4.12 (b).

Pour $x_p = 0,574L$ la première famille lobes rencontrée pour $f_{\text{rot}} = 12,63 \text{ Hz}$ est celle de couleur bleue (figure 4.11 (a)) alors que pour $x_p = 0,592L$ la première famille rencontrée est de couleur noire. Les fréquences de broutement correspondantes sont 4192 Hz (figure 4.11 (b)) et 1969 Hz (figure 4.12 (b)).

La figure 4.13 représente l'évolution des fréquences de broutement sur la frontière de la zone de stabilité en fonction de la position de l'outil pour les différentes familles de lobes. Ces fréquences de broutement sont très proches des fréquences naturelles de la coque et évoluent comme elles avec l'avancement de l'outil à cause de l'enlèvement de matière (perte de masse et de raideur).

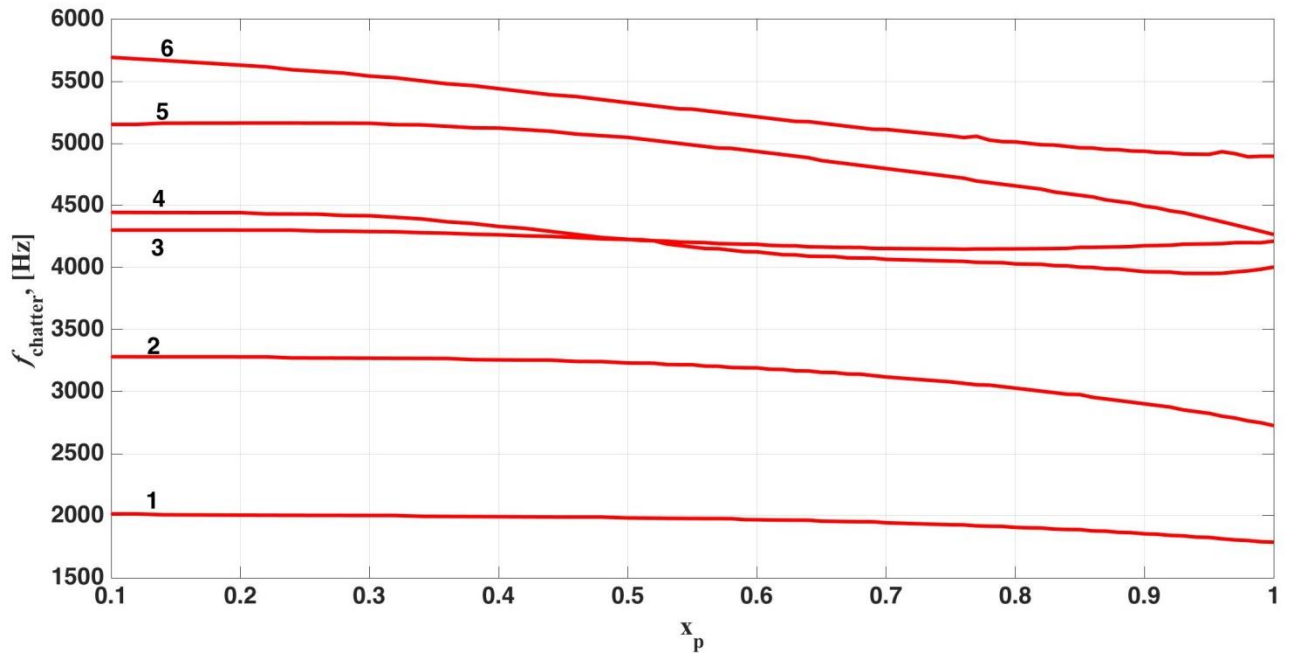
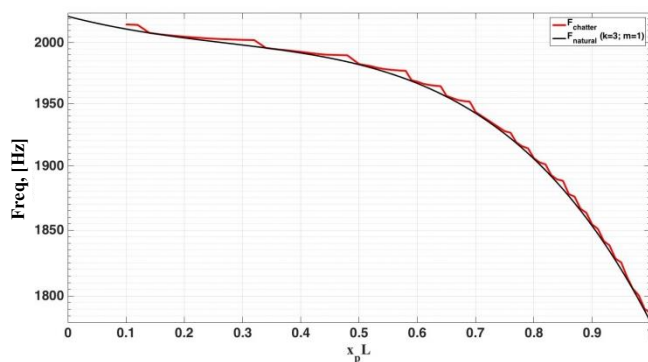
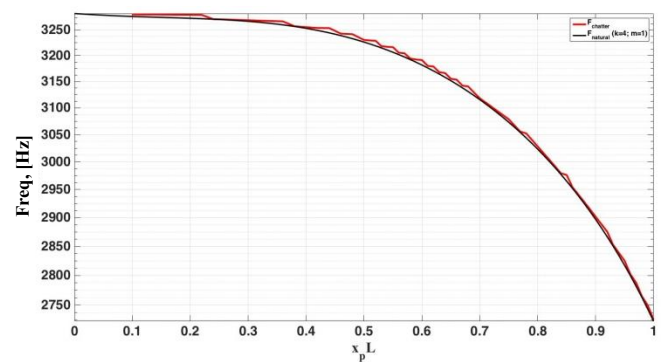


Figure 4.13 – Variation des fréquences d’oscillations sur les frontières des zones de stabilité en fonction de la position de l’outil.

Sur les figures 4.15 et 4.16, nous avons juxtaposé l’évolution des fréquences de broutement et l’évolution des fréquences naturelles. La proximité des courbes est bien visible. Les oscillations des courbes rouges (fréquences de broutement) proviennent des changements de lobe. Par conséquent, quand une zone d’instabilité est atteinte, le système commence à s’auto-exciter à des fréquences toujours proches des fréquences naturelles de la coque.

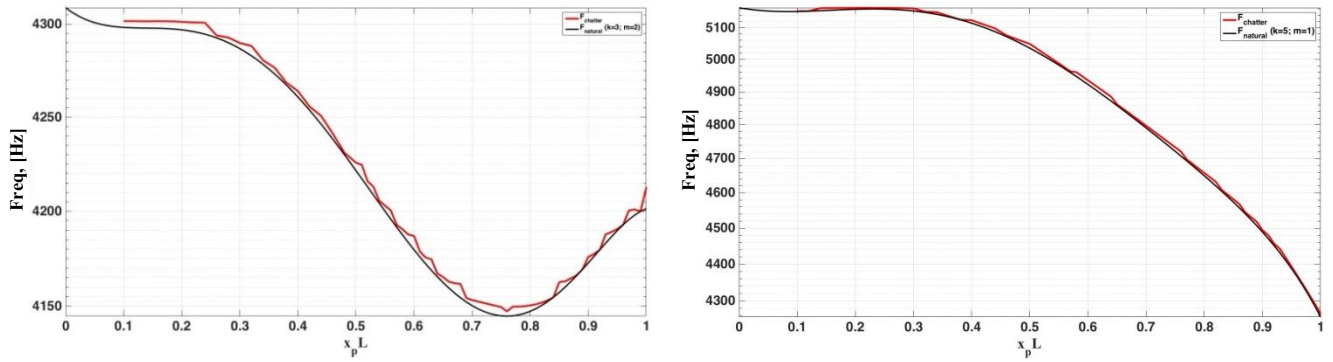


a) Fréquence correspondant à $k = 3, m = 1$



b) Fréquence correspondant à $k = 4, m = 1$

Figure 4.14 – Comparaison entre fréquences naturelles de la coque et fréquences de broutement



a) Fréquence correspondant à $k = 3, m = 2$

b) Fréquence correspondant à $k = 5, m = 1$

Figure 4.15 – Comparaison entre fréquences naturelles de la coque et fréquences de broutement

4.3.3 Influence de l'amortissement sur les limites de stabilité

L'étude de l'influence de l'amortissement du système sur le changement des limites des zones de stabilité a également été étudiée pour le modèle à plusieurs degrés de liberté. Augmenter ou diminuer l'amortissement du système conduit aux déplacements des limites des zones de stabilité (figure 4.17). La figure 4.17 montre les limites des régions de stabilité pour la position de l'outil $x_p = 0,739L$.

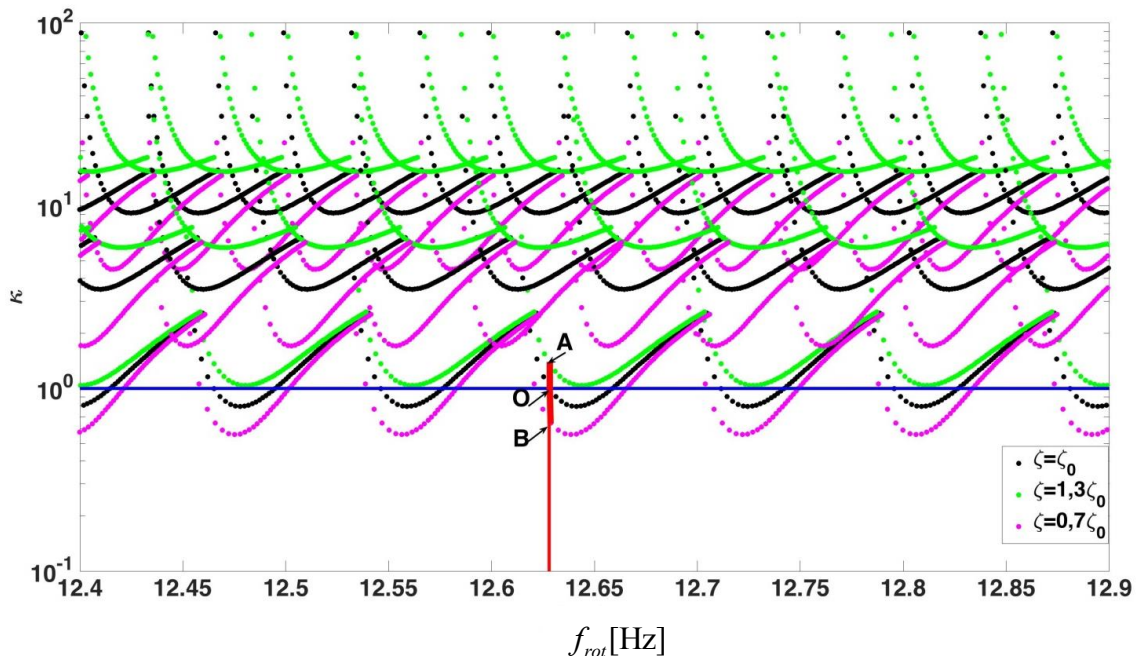


Figure 4.16 – Influence de l'amortissement sur les frontières des zones de stabilité

Les frontières noires des zone de stabilité correspondent à l'amortissement initial du système ζ_0 . Dans ce cas, la ligne verticale rouge (la fréquence de rotation de la pièce) croise la droite

représentant le coefficient de raideur de coupe $\kappa = 1$ au point O, à la limite de la zone de stabilité. En augmentant l'amortissement du système de 30%, nous obtenons le graphe vert, avec OA, la marge de stabilité. Et pour une diminution de l'amortissement du système, nous obtenons le graphe violet, où le processus de coupe se trouve dans une zone d'instabilité, où OB représente la profondeur de la zone d'instabilité. On retrouve ainsi, comme on pouvait s'y attendre, un résultat très similaire à celui obtenu pour le modèle à un degré de liberté.

4.3.4 Comparaison du modèle à un degré de liberté avec le modèle à plusieurs degrés de liberté

La figure 4.18 montre une comparaison des résultats entre les limites des zones de stabilité du processus de coupe des modèles à un et plusieurs degrés de liberté, dans la région des paramètres (κ, x_p) . Les deux lignes verticales rouges indiquent les instants où survient la perte de la stabilité de processus de la coupe pour chacun des deux modèles. Pour le modèle à un degré de liberté, la perte de la stabilité du processus de coupe a été déterminée à la position $x_p = 0,773L$, pour le modèle à plusieurs degrés de libertés on trouve $x_p = 0,739L$. L'utilisation d'un système à plusieurs degrés de liberté permet de préciser les limites des zones d'instabilité à 4% pour x_p et de 6% pour κ vis-à-vis du modèle à 1 degré de liberté.

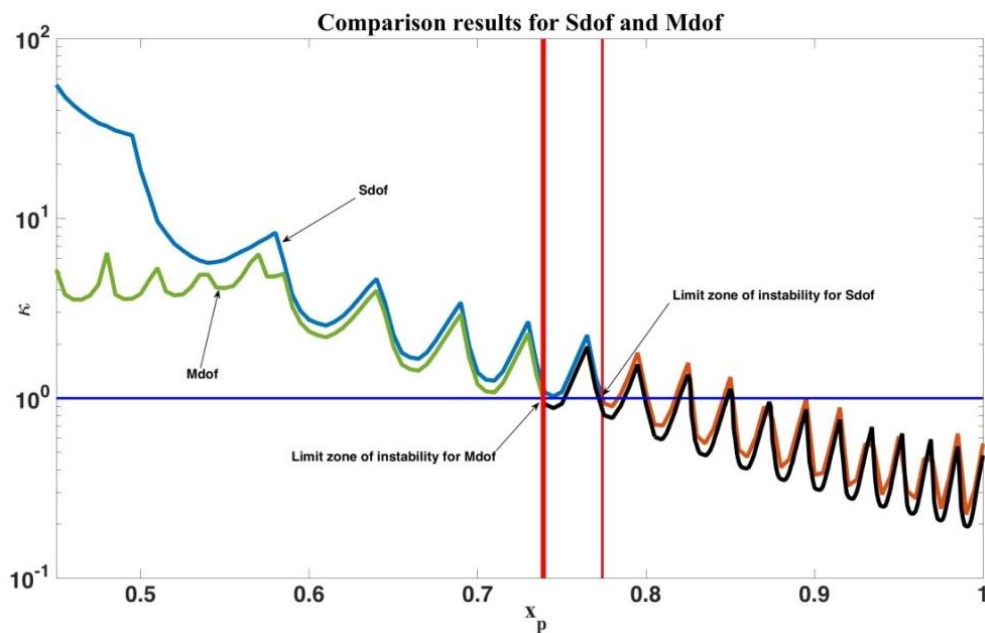


Figure 4.17 – Comparaison des frontières des zones de stabilité pour les modèles à un et plusieurs degrés de libertés

4.3.5 Instabilité en fin de passe

La Figure 4.18 est une section du diagramme de stabilité en trois dimensions (fig. 4.9) dans la zone de paramètres (κ, x_p) pour la fréquence de rotation utilisée lors de l'expérience ($f_{rot} = 12,63$ Hz). Seule la partie la plus basse des lobes, celle pour laquelle la première instabilité apparaît, est représentée. Cela permet d'identifier clairement le moment où l'opération d'usinage devient instable, c'est à dire lorsque le coefficient de raideur de coupe κ atteint la valeur limite 1,0.

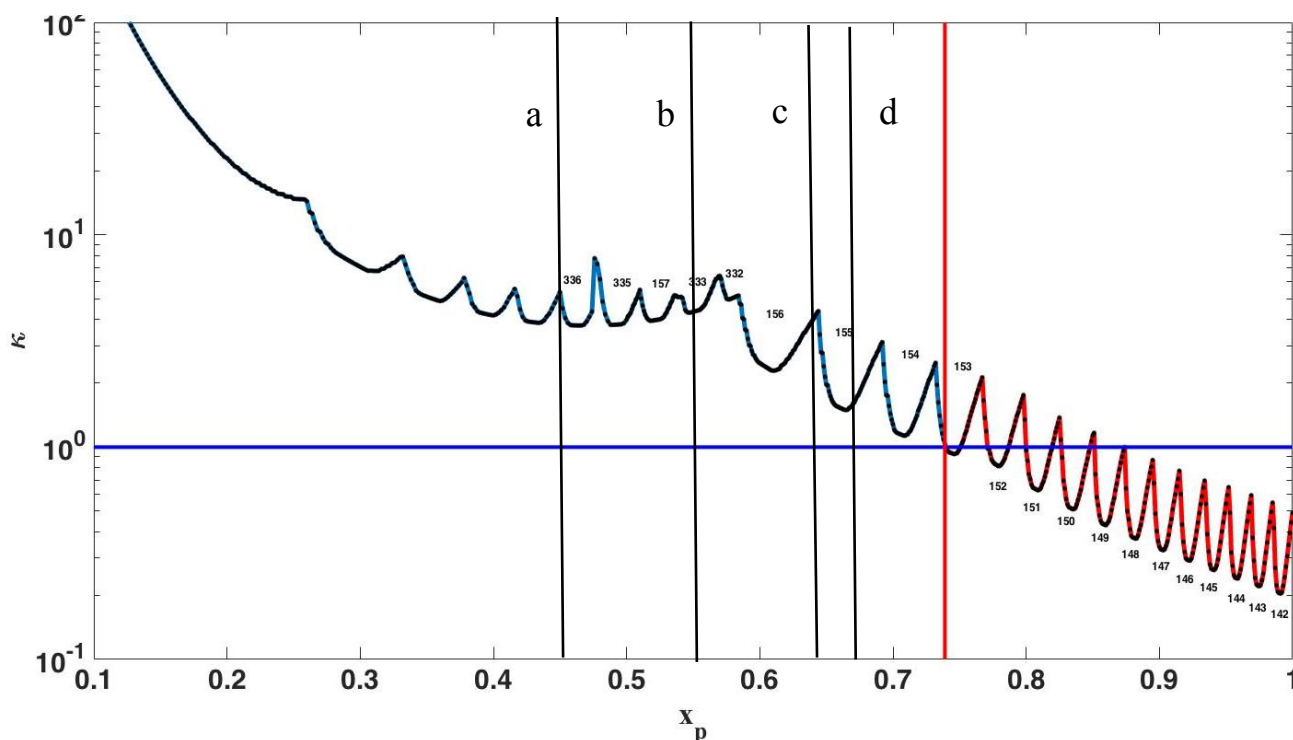


Figure 4.18 – Variations du coefficient de raideur de coupe limite pendant la 16^{ème} passe

La figure 4.18 indique que la première perte de stabilité du processus de coupe a lieu pour la position de l'outil $x_p = 0,739L$. Ceci correspond au diagramme de stabilité représenté sur la figure 4.10.

Afin d'expliquer l'évolution du coefficient de raideur de coupe limite observée sur la figure 4.18 nous proposons de faire 4 coupes dans le plan (κ, f_{rot}) pour différents avancements de l'outil (coupes a, b, c, d). Lorsque l'outil se déplace de $x_p = 0,65L$ à $x_p = 0,685L$ (figures 4.19 c et d), la valeur limite du coefficient de raideur de coupe suit la frontière du lobe qui se déplace vers la gauche en descendant progressivement ce qui correspond à la forme en lobe descendant observé figures 4.18.

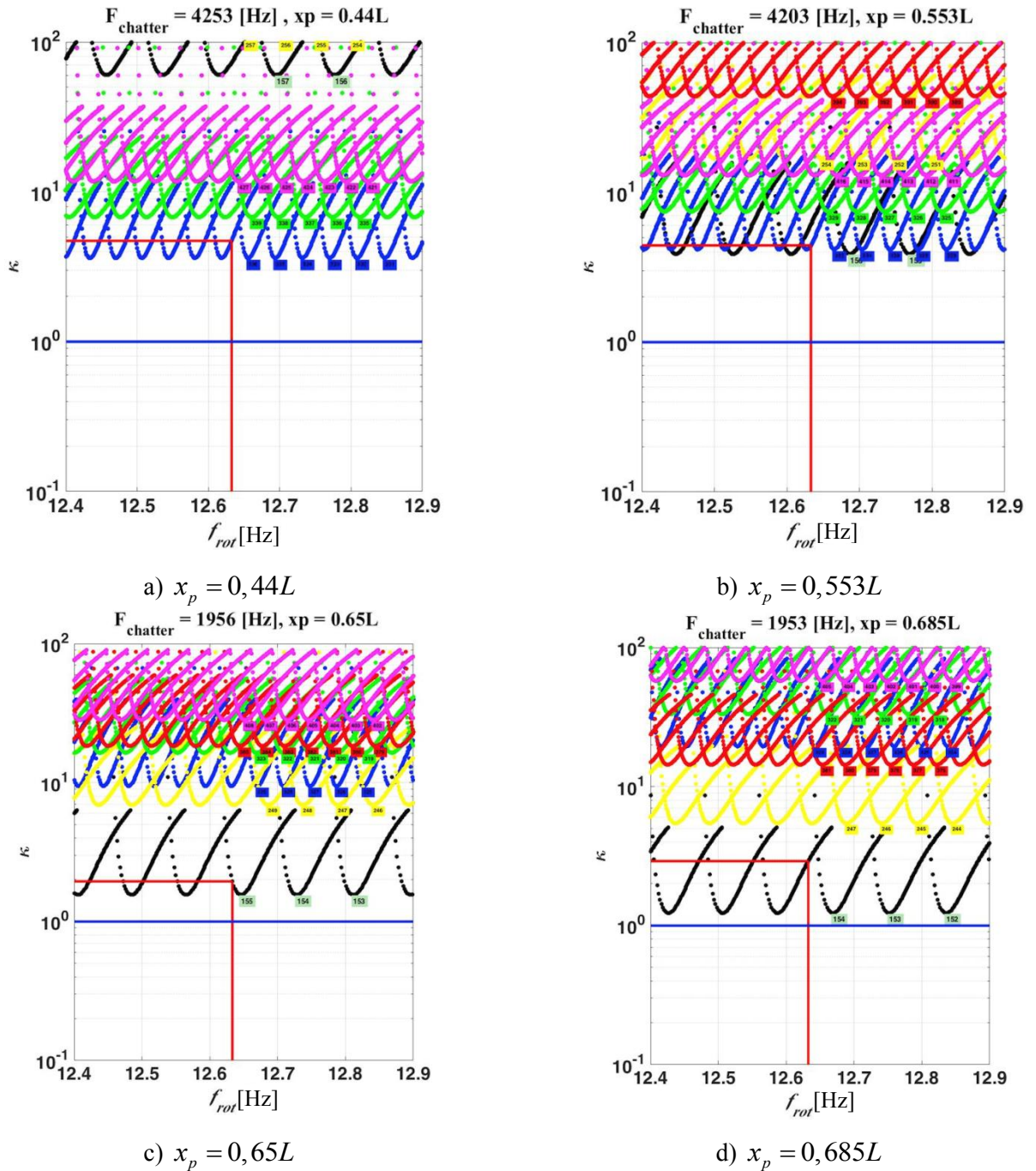


Figure 4.19 – Diagrammes de stabilité dans le plan (κ, f_{rot}) pour les différentes positions de l'outil

Sur la figure 4.18, nous voyons également que le coefficient de raideur de coupe limite a tendance globalement à décroître jusqu'à la position de l'outil $x_p = 0,44L$ (Figure 4.19 (a)). Ensuite on note que κ limite a tendance à légèrement augmenter jusqu'à la position $x_p = 0,553L$ (Figure 4.19 (b)). Cela provient du fait qu'entre ces deux positions la limite inférieure de la zone de stabilité passe de la famille de lobes noire à la famille de lobe bleue qui remonte légèrement dans cette zone. Cette dernière correspond à la forme propre de la coque ($k = 3, m = 2$).

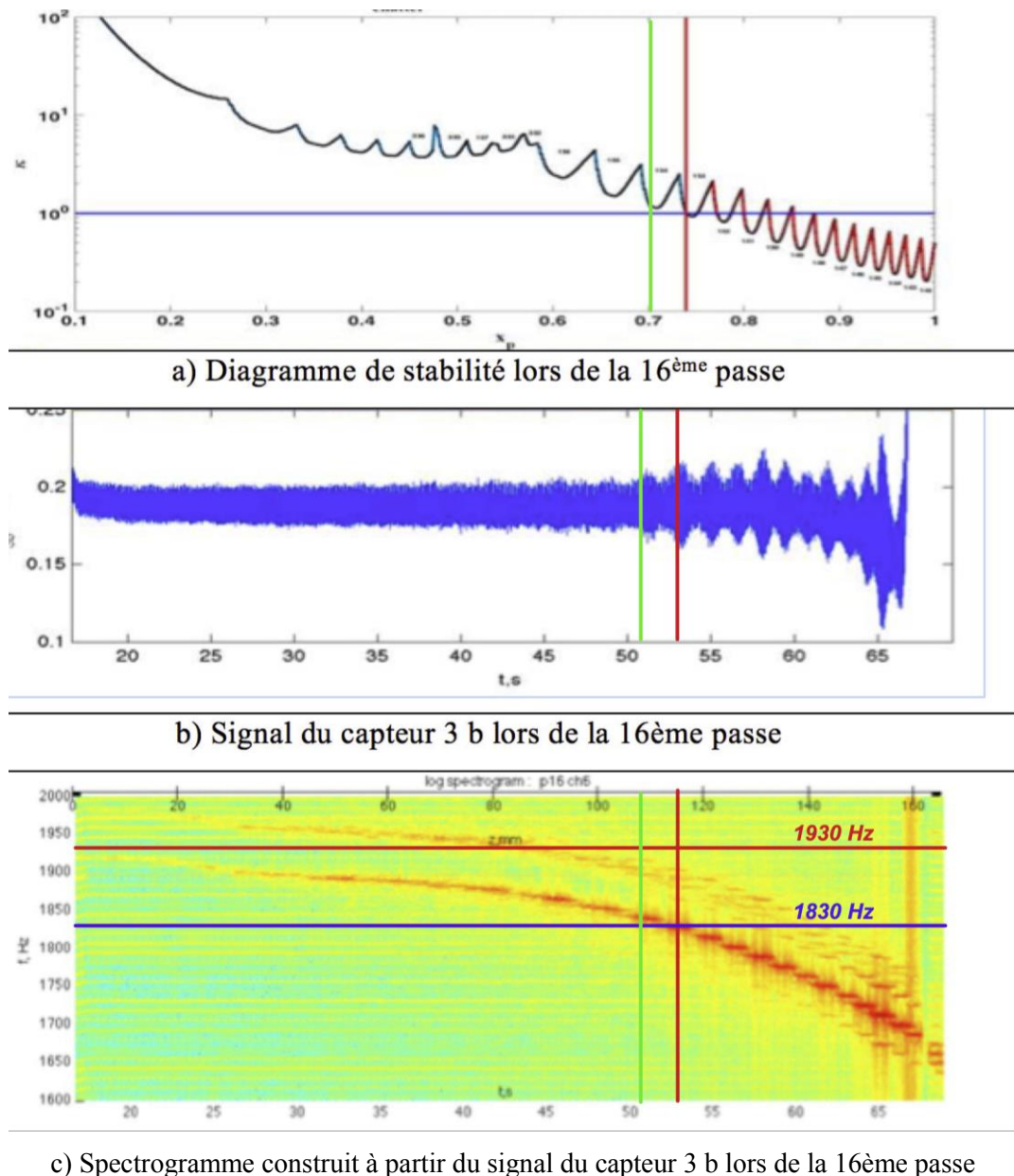


Figure 4.20 – Comparaison visuelle des résultats du calcul analytique avec les données expérimentales

La figure 4.20 réunit : (a) le diagramme de stabilité du processus de coupe dans le plan des paramètres (κ, x_p) pour $f_{rot} = 12,63 \text{ Hz}$. (obtenu par calcul analytique pour le modèle à plusieurs degrés de liberté), (b) le signal enregistré par le capteur (3b) lors de l'expérience (cf chapitre 2, figure 2.26), (c) le spectrogramme construit à partir de ce signal.

Le diagramme (a) indique que la perte de stabilité de l'opération de coupe est prédite en fin de la passe en $x_p = 0,739L$ ce qui correspond à 53s sur l'échelle en temps. La fréquence de broutement correspondante est 1930 Hz, Ceci est en cohérence avec le spectrogramme (figure 4.20 (c)) où la fréquence qui domine est proche 1830 Hz. L'excès de la prédiction est ainsi de l'ordre de 5,4% et provient du fait que le modèle analytique produit une fréquence supérieure pour la fréquence naturelle

correspondante. Par ailleurs, les figures 4.20 (b) et 4.20 (c) indiquent une apparition plus précoce du broutement (pour un instant égal à 51s soit un avancement de l'outil de $0,7L$ environ). Il est en effet difficile d'être très précis dans cette prédiction car une légère translation verticale vers le bas du diagramme 4.20 (a) fait que le lobe précédent intersecte la droite limite $\kappa=1,0$. Le fait que le diagramme de stabilité soit « trop haut » peut typiquement provenir d'un excès de raideur pour la forme propre ($k=3, m=2$) du modèle dynamique analytique du tube ce qui est également en cohérence avec les 5,4% d'excès en fréquence évoqué précédemment.

4.4 Optimisation des opérations de tournage

4.4.1 Cas de la 16^{ème} passe

Pour de la définition des paramètres de l'opération d'usinage, il est intéressant de pouvoir répondre à la question : Quels paramètres d'usinage doivent être choisis pour éviter le broutement lors de la 16^{ème} passe ?

Pour pouvoir répondre plus facilement à cette question, il est intéressant de construire le diagramme de stabilité dans le plan des paramètres (A_p^{lim}, x_p) (figure 4.21). Si on se fixe une profondeur de passe constante sur toute la passe, il est ainsi nécessaire d'avoir $A_p^{lim} < 0,3mm$ (figure 4.21) pour éviter la perte de stabilité du processus de coupe sur toute la passe et notamment en fin de passe.

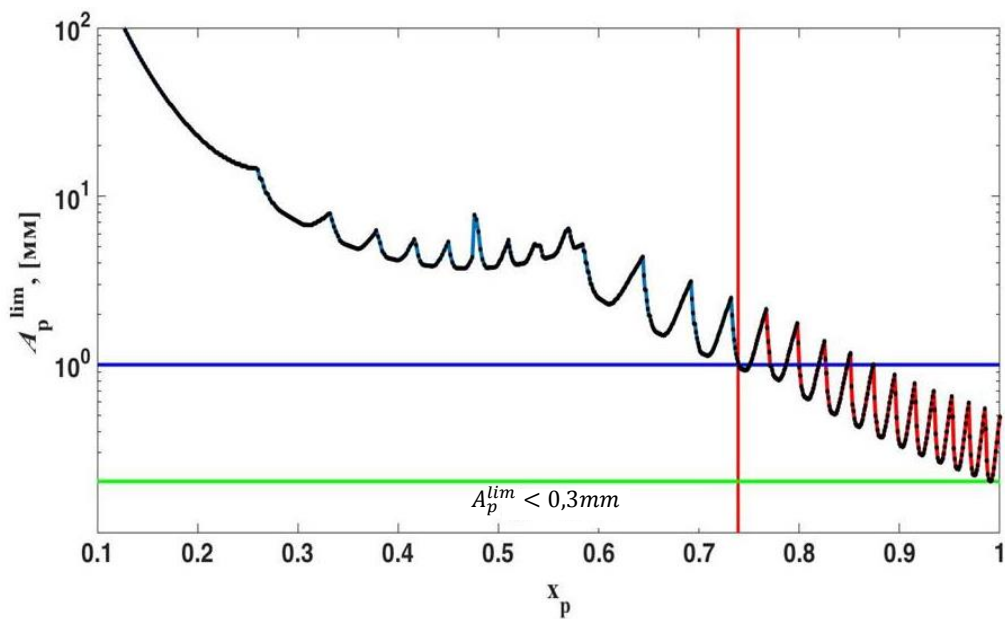


Figure 4.21 – Changement de la profondeur limite de coupe lors de la 16^{ème} passe de l'outil

4.4.2 Optimisation pour un ensemble de passes

Comme mentionné dans le deuxième chapitre, durant l'expérience, 16 passes ont été réalisées. Les données relatives à ces 16 passes sont rappelées dans le tableau 4.4. Nous avons ajouté dans ce tableau la profondeur de coupe limite A_p^{lim} , obtenue par le calcul (modèle analytique à plusieurs degrés

de liberté), pour chaque passe «profonde». Au-delà de cette profondeur de coupe limite, le processus d'auto-oscillation est excité, conduisant à des vibrations de la pièce.

Le tableau montre que pour les passes 14 et 16, les profondeurs de coupe A_p , qui ont été respectivement de 0,9 et 1 mm, ont dépassé les profondeurs de coupe limites qui valent respectivement A_p^{lim} 0,52 et 0,3 mm. Ceci est en cohérence avec les observations expérimentales car du broutement a été observé pour ces deux passes. Par contre, pour la 13^{ème} passe, le résultat du calcul propose une valeur $A_p^{\text{lim}} = 0,73\text{mm}$ plus petite que la passe de 0,8 mm effectuée pourtant sans broutement. Pour cette passe, on reste en effet très proche de la limite de stabilité et les imprécisions du modèle analytique (principalement raideur excessive) peuvent expliquer l'écart avec l'expérience (comme vu précédemment dans la section 4.3.5 sur la figure 4.20).

Numéro de la passe	Type de passe	Epaisseur de la coque avant la passe $h_{\text{avant}}, (mm)$	Epaisseur de la coque après la passe $h_{\text{apres}}, (mm)$	Profondeur de coupe $A_p, (mm)$	Profondeur limite de coupe $A_p^{\text{lim}}, (mm)$
1	Nettoyage	12,55	12,3	0,25	
2	Profonde	12,3	11,5	0,8	2,63
3	Nettoyage	11,5	11,3	0,2	
4	Profonde	11,3	10,5	0,8	2,07
5	Nettoyage	10,5	10,3	0,2	
6	Vide	10,3	10,3	0	
7	Profonde	10,3	9,5	0,8	1,62
8	Nettoyage	9,5	9,3	0,2	
9	Profonde	9,3	8,5	0,8	1,26
10	Nettoyage	8,5	8,3	0,2	
11	Profonde	8,3	7,5	0,8	0,96
12	Nettoyage	7,5	7,3	0,2	
13	Profonde	7,3	6,5	0,8	0,73
14	Profonde	6,5	5,6	0,9	0,52
15	Nettoyage	5,6	5,4	0,2	
16	Profonde	5,4	4,4	1	0,3

Tableau 4.4 Profondeur de coupe limite pendant l'expérience

Comme l'indique le tableau 4.4, et comme vu précédemment dans la section 4.4.1, pour obtenir une coque avec une épaisseur de paroi de $h=4,4\text{mm}$, la dernière passe ne doit pas avoir une

profondeur de coupe dépassant $A_p^{lim} = 0,3$ mm. Les passes précédentes, ou plus précisément leur profondeur de coupe, doivent être déterminées sur la base de cette constatation.

Dans le tableau 4.5 est proposée une succession des passes permettant d'atteindre l'épaisseur finale $h_{final} = 4,4$ mm en restant à la limite de stabilité pour chaque passe. Il s'agit donc d'une succession optimale de passes, du point de vue de la stabilité, en se fixant la contrainte, pour chaque passe, d'avoir une profondeur de coupe constante (simplicité de mise en œuvre pour l'opérateur). La Figure 4.22 illustre cette succession de passes.

Numéro de la passe	Epaisseur avant la passe h_{avant} , (mm)	Epaisseur après la passe h_{apres} , (mm)	Profondeur limite de coupe A_p^{lim} , (mm)
N-5	7,7	6,9	0,81
N-4	6,9	6,2	0,68
N-3	6,2	5,6	0,57
N-2	5,6	5,1	0,47
N-1	5,1	4,7	0,38
N	4,7	4,4	0,3

Tableau 4.5 Profondeurs de coupe pour une succession optimale de passes sans broutement

Les profondeurs de coupe du tableau 4.5 ont été déterminées en partant de la passe finale, c'est-à-dire à partir de la dernière passe jusqu'à la première.

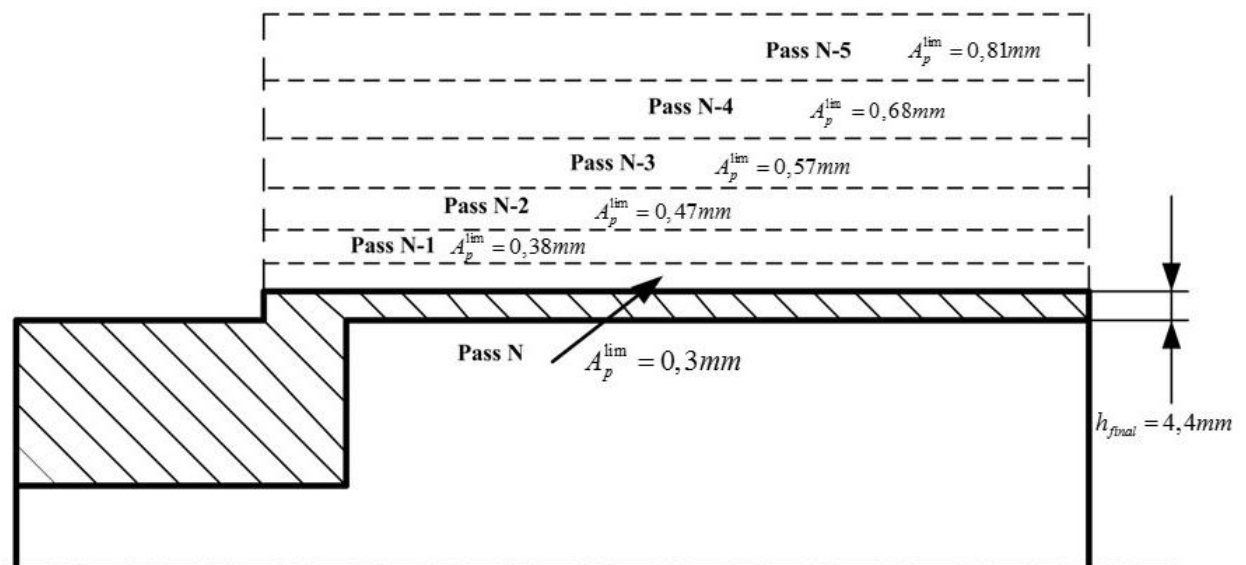


Figure 4.22 – Illustration des profondeurs de coupe successives permettant d'éviter l'apparition de broutement

De manière plus détaillée, le procédé pour la détermination des profondeurs de coupe suit un processus récursif. Pour la passe finale N , avec une épaisseur désirée donnée de la paroi de la coque égale à $h_{\text{apres}} = 4,4$ mm, la profondeur limite de coupe est $A_p^{\text{lim}} = 0,28$ mm (profondeur permettant de rester à la limite de l'apparition du broutement). Ceci définit l'épaisseur de la coque après la passe $N-1$ qui sera égale à $h_{\text{apres}} = 4,4 + A_p^{\text{lim}} = 4,7$ mm. Une nouvelle profondeur limite de coupe est alors calculée pour la passe $N-1$ qui sera égale à $A_p^{\text{lim}} = 0,38$ mm. Cette profondeur de coupe conduit à une épaisseur de paroi de $h_{\text{apres}} = 5,1$ mm après la passe $N-1$ et ainsi de suite.

La figure 4.23 illustre ce processus récursif. Sur cette figure on identifie, trait noir épais, la courbe donnant, pour une épaisseur cible de la paroi de la coque après la passe (en abscisse), l'épaisseur de la coque avant la passe (en ordonnée) permettant un usinage à la limite du broutement. Ce diagramme est donc tracé suivant les axes h_i et h_{i+1} , qui représentent les épaisseurs de paroi actuelle et à venir, respectivement. Pour le tube considéré, ce schéma peut être utilisé pour d'autres diamètres finaux et initiaux du tube. Nous avons ainsi représenté en vert, figure 4.23, un cas où l'épaisseur finale cible est $h_{\text{final}} = 5,4$ mm pour une épaisseur initiale $h_i = 7,3$ mm. Les points G, F, E, D, C, B et A sont construits successivement.

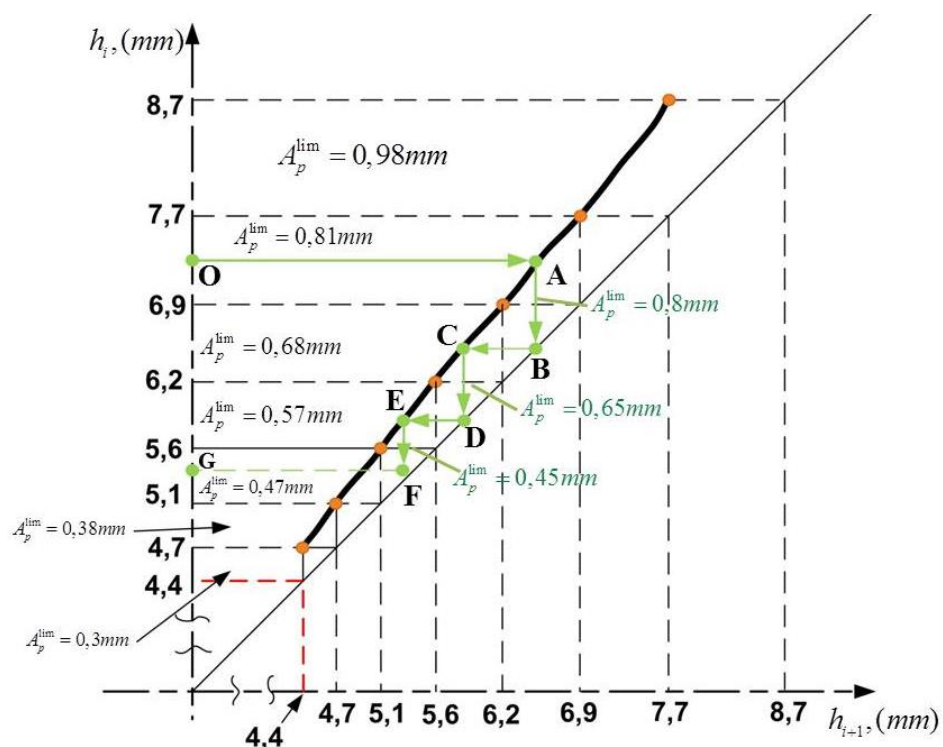


Figure 4.23 – Processus récursif de détermination de profondeurs de coupe à la limite du broutement

Le principe de ce schéma revêt un caractère universel quant à la détermination de successions de profondeurs de coupe lors d'opération de tournage.

4.5 Conclusion intermédiaire

Dans ce chapitre, nous avons examiné la question de la stabilité du processus de coupe lors du tournage du tube à paroi mince sur lequel nous avons mené nos expériences (chapitre 2). Pour cela, nous avons utilisé la modélisation réalisée dans le chapitre 3 qui prend en compte l'effet régénératif et permet ainsi de reproduire l'apparition de vibrations auto-entretenues.

Nous avons défini une méthodologie pour étudier la stabilité de la coupe continue et introduit deux modèles de dynamiques. Le premier, à *un degré de liberté*, utilise une réduction par base modale sur un unique mode, celui excité lors du broutement. Le second est le modèle à *plusieurs degrés de liberté* correspondant à la forme matricielle définie dans le chapitre 3. Pour ces deux modèles, nous avons analysé la stabilité et nous avons défini les limites de la zone d'instabilité pour des conditions d'usinage correspondant à l'expérience présentée dans le chapitre 2. Nous avons étudié l'effet d'une variation de l'amortissement du système sur les limites de la zone stabilité. Nous avons obtenu la fréquence de broutement (chatter en anglais) à partir de laquelle le processus de vibrations auto-entretenues est amorcé pour chaque position de l'outil. Nous avons vérifié que les limites des zones de stabilité se produisent à des fréquences de broutement proches des fréquences naturelles de la pièce. Les fréquences de broutement obtenues par le calcul analytique et celles observées pendant l'expérience sont très proches (5% d'écart), ce qui confirme la pertinence du modèle analytique.

L'importance de l'utilisation du modèle avec plusieurs degrés de liberté est mise en valeur par le fait que le mode de vibration impliqué dans l'apparition de l'instabilité de broutement change lors de l'avancement de l'outil. Il est également montré que, si le mode choisi, pour le modèle à un degré de liberté, est le bon, la prédiction du broutement est correcte.

Nous avons enfin développé une démarche permettant de choisir les paramètres de l'opération de tournage, pour l'expérience menée, afin d'éviter l'apparition des vibrations observées lors de l'expérience d'usinage. Cette démarche utilise pleinement l'efficacité de notre modèle analytique pour tracer la courbe permettant de prédire l'épaisseur de coupe limite pour toute épaisseur cible de la paroi du tube.

Conclusion générale

Conclusion générale

Durant cette thèse, nous avons mené une expérience pour étudier la dynamique en tournage d'une pièce cylindrique à paroi mince. Lors de cette expérience, une apparition de vibrations auto-entretenues liées à la survenue de broutement régénératif a été identifiée. L'analyse de la littérature a montré qu'à ce jour, il n'y a pas de travail ayant utilisé un modèle analytique pour l'étude de la dynamique du tournage d'une pièce cylindrique à paroi mince. Seules des approches utilisant des modèles éléments finis sont présentes. Nous avons ainsi proposé et mis au point un modèle analytique du tournage, avec un nombre fini de degrés de liberté, pour une estimation des limites de stabilité de la coupe continue. Une forme adimensionnelle des équations de mouvement a été introduite. Sur la base de ce modèle, nous avons mis au point un algorithme pour définir les limites des régions de stabilité du processus de tournage d'une pièce cylindrique à paroi mince. Ceci nous a permis d'étudier l'effet des conditions de coupe sur la stabilité de l'opération de tournage considérée. Cette analyse de stabilité a été menée sur un modèle à un degré de liberté et sur un modèle à plusieurs degrés de liberté. Ceci a permis de montrer l'intérêt d'utiliser le second modèle. La validité des résultats obtenus a été montrée en les confrontant à des résultats expérimentaux (expérience menée dans le cadre de cette étude) et à des résultats obtenus à partir d'une modélisation par éléments finis de la pièce.

Un intérêt majeur du modèle analytique proposé est qu'il permet de faire varier de manière continue n'importe quel paramètre du système. Ceci nous a notamment permis d'étudier l'évolution du système, et la stabilité de l'opération d'usinage, en prenant en compte de manière continue l'avancement de l'outil. Contrairement aux approches par éléments finis, aucun remaillage n'est nécessaire. Par ailleurs, l'application à des tubes de formes différentes (longueurs, rayons), matériaux différents, lois de coupe différentes, conditions d'usinage différentes est immédiate.

Le modèle se limite cependant à des tubes minces pour lesquels la prise de pièce (bridage) n'induit aucune modification du comportement dynamique de la pièce ni de déformation de cette dernière. Si tel devait être le cas, un modèle prédictif du bridage (comprenant notamment les effets dissipatifs présents dans ce dernier) est à élaborer et à ajouter au modèle analytique, ce qui le compliquerait sensiblement. Par ailleurs, il est à noter que l'amortissement introduit provient de données expérimentales et reste la seule restriction à la prédictivité de notre modèle. Il s'agit d'un verrou partagé par toutes les approches cherchant à prédire les limites de stabilités en usinage. Une perspective qui nous semble intéressante, en tournage, est d'introduire une caractérisation séparée du comportement dynamique de la broche et d'étudier dans quelle mesure le couplage du modèle de broche avec différents modèles de pièce peut conduire à des modèles effectivement prédictifs de l'assemblage pièce/broche.

Une autre perspective à ce travail est une amélioration du modèle d'interaction outil/pièce avec notamment une prise en compte de l'usure (ce qui se traduirait par une évolution du modèle de prédiction des efforts de coupe) et par la prise en compte du phénomène du talonnage (distribution d'efforts sur la face en dépouille de l'outil).

Enfin, une des limites de l'approche est que nous nous sommes restreints à la détection de l'instabilité de broutement en étudiant la stabilité du système pour une perturbation autour du point de fonctionnement. Une des perspectives à ce travail est de développer une étude non linéaire de la stabilité du système usinant (par exemple avec les diagrammes de Poincaré). Les études non linéaires de la stabilité reflètent la nature non linéaire du broutement et permettent de prédire plus finement le comportement réel de la pièce notamment juste après l'apparition du broutement. Cela ouvrirait également une perspective de prédiction de la géométrie de la surface usinée de la pièce pour les zones avec vibrations.

Références bibliographiques

- [ALT00] Altintas Y. Manufacturing automation. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 286 p.
- [AMO51] Amosov I.S. Oscillographic study of vibrations in metal cutting. Precision of machining and ways of its improvement. M.: Mashgiz, 1951. S. 414-477. (in Russian)
- [ARN61] Arnold R.N. Chatter Patterns Formed on the Surface of Thin Cylindrical Tubes during Machining. Journal of Mechanical Engineering Science; 1961.
- [BEN06] P.G. Benardos, S. Mosialos, G.C. Vosniakos, Prediction of workpiece elastic deflections under cutting forces in turning, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing 22 (2006) 505–514.
- [BID77] Biderman V.L. Mechanics of thin-walled structures. – M.: Mashinostroyeniye, 1977. – 487 s. (in Russian)
- [BLE79] Blevins R.D. Formulas for natural frequency and mode shape. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1979. – 492 c.
- [BOL13] Bolsunovskiy S, Vermel V, Gubanov G, Kacharava I, Kudryashov A (2013) Thin-Walled Part Machining Process Parameters Optimization Based on Finite-Element Modeling of Workpiece Vibrations. Procedia CIRP 8:276–280.
- [BRA05] U. Bravo, O. Altuzarra, L.N. Lopez de Lacalle, J.A. Sanchez, F.J. Campa, Stability limits of milling considering the flexibility of the workpiece and the machine, International Journal of Machine Tools and Manufacture 45 (2005) 1669–1680.
- [BUD07] E. Budak, E. Ozlu, Analytical modeling of chatter stability in turning and boring operations: a multi-dimensional approach, CIRP Annals—Manufacturing Technology 56 (2007) 401–404.
- [CHA06] N.K. Chandiramani, T. Pothala, Dynamics of 2-dof regenerative chatter during turning, Journal of Sound and Vibration 290 (2006) 448–464.
- [CHA14] Chanda, Arnab, Achim Fischer, Peter Eberhard, and Santosha Kumar Dwivedy. “Stability Analysis of a Thin-Walled Cylinder in Turning Operation Using the Semi-Discretization Method.” *Acta Mechanica Sinica* 30, no. 2 (April 2014): 214–22. doi:10.1007/s10409-013-0097-z.

- [CHE06a] C.K. Chen, Y.M. Tsao, A stability analysis of turning a tailstock supported flexible work-piece, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 46 (2006) 18–25.
- [CHE06b] C.K. Chen, Y.M. Tsao, A stability analysis of regenerative chatter in turning process without using tailstock, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 29 (2006) 648–654.
- [CHE08] Cheng K. *Machining Dynamics: Fundamentals, Applications and Practices*. Springer; 2008.
- [DAS08] A.V. Dassanayake, C.S. Suh, On nonlinear cutting response and tool chatter in turning operation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13 (2008) 979–1001.141
- [DOM11] Z. Dombovari, D.A.W. Barton, R. Eddie Wilson, G. Stepan, On the global dynamics of chatter in the orthogonal cutting model, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46 (2011) 330–338.
- [DRO37] Drozdov N.A. To the question of the machine vibration during turning. *Machines and tools*. 1937. No 22. p. 10-17. (in Russian)
- [EWI84] D.J. Ewins. *Modal testing: theory and practice*. Research Studies Press, 1984
- [FUR05] B. Furet. *Optimisation, préparation, mise en œuvre et surveillance automatique de l’Usinage à Grandes Vitesses des métaux et des matériaux composites*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Nantes, 2005.
- [GER12] Gerasimenko A.A, Gousskov A.M. Determination of the natural frequencies of the rotating cylindrical shell. ISSN 0236-3941. *Vestnik MGTU named N.E. Bauman*. “Mashinostroyeniye”. 2012 (in Russian).
- [GER15] Gerasimenko, A., Gousskov, M., Duchemin, J., Lorong, P., Gousskov, A., 2015. Variable Compliance-related Aspects of Chatter in Turning Thin-walled Tubular Parts. *Procedia CIRP*, 31:58–63.
- [GER16] A. Gerasimenko, M. Gousskov, P. Lorong, J. Duchemin, A. Gousskov, 2016 Experimental investigation of chatter dynamics in thin-walled tubular parts turning. *Procedia CIRP*,
- [GOU97] A.M. Gousskov. Development of methods of the construction and analysis of dynamic models of technological processes for machining. Thesis for a degree of Doctor of Technical Sciences. Moscow, 1997. – 335 s. (in Russian)
- [HAN74] N. Hanna, S. Tobias, A theory of nonlinear regenerative chatter, *ASME Journal of Engineering for Industry* 96 (1974) 247–255.

- [HEY98] Ward Heylen, Stefan Lammens, Paul Sas. Modal Analysis Theory and Testing. Katholieke Universiteit Leuven, Faculty of Engineering, Department of Mechanical Engineering, Division of Production Engineering, Machine Design and Automation, 1998
- [HUA05] Hua Li, Shin-Yong Lam «Rotating Shell Dynamics» Studies in Applied Mechanics, 50, 2005 y.
- [JAM11] Jam, J., M. Zadeh, H. Taghavian, and B. Eftari. “Vibration Analysis of Grid-Stiffened Circular Cylindrical Shells with Full Free Edges.” *Polish Maritime Research* 18, no. 4 (January 1, 2011). doi:10.2478/v10012-011-0022-y.
- [KOL72] Kolkunov N. V. Basis of calculation of the elastic shells. Edition 2-d. M., «High school», 1972. 296 s. (in Russian).
- [LAM05] Lamikiz A. Calculation of the specific cutting coefficients and geometrical aspects in sculptured surface machining. *Machining Science and Technology*. 2005. V. 9, No 3. P. 411–436.
- [LAM95] Lam K.Y, Loy C.T, Effects of boundary conditions on frequencies of a multilayered cylindrical shell, 1995 y. *Journal of Sound and vibration* 188, 363 c.
- [LAN15] Yann Landon, Ladonne, Mathieu, Mehdi Cherif, Jean-Yves K’Nevez, Olivier Cahuc, and Côme de Castelbajac. “Modelling the Vibration-Assisted Drilling Process: Identification of Influential Phenomena.” *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 81, no. 9–12 (December 2015): 1657–66. doi:10.1007/s00170-015-7315-8.
- [LAZ02] I. Lazoglu, F. Atabey, Y. Altintas. Dynamics of boring processes: Part III – time domain modeling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. – 2002. – Vol. 42. – P. 1567-1576.
- [LAZ03] Lazoglu I. Sculpture Surface Machining: A Generalized Model of Ball-End Milling Force System. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 2003. V. 43. P. 453–462.
- [LEE96] Lee P., Altintas Y. Prediction of Ball-End Milling Forces from Orthogonal Cutting Data. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 1996. V. 36, No 9. P. 1059–1072.
- [LEI73] Leissa A. Vibration of shell. – Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1973. – 438 c.

- [LEO98] Leopold J. Proceedings of the 1st CIRP International Workshop on Modeling of Machining Operations, Atlanta, GA, USA, May 19,1998.
- [LOP16] Lopatin, A.V., E.V. Morozov, and A.V. Shatov. “An Analytical Expression for Fundamental Frequency of the Composite Lattice Cylindrical Shell with Clamped Edges.” *Composite Structures* 141 (May 2016): 232–39. doi:10.1016/j.compstruct.2016.01.053.
- [LOR11] Lorong P, Larue A, Duarte A.P. Dynamic Materials Research, Advanced Materials Research, 2011 y., 223, 591-599.
- [MAH05] R. Mahdavinejad, Finite element analysis of machine and workpiece instability in turning, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 45 (2005) 753– 760.
- [MAT14] Matsubara A., Maeda M., Yamaji I., Vibration suppression of boring bar by piezoelectric actuators and LR circuit, *CIRP Annals – Manufacturing Technology*, 2014, 63, 373-376
- [MAT97] Matveyev V. A., Lipatnikov V. I., Alekhin A. V. «The designing of wave horoscope». — M.: Published by MGTU named N. E. Baumana, 1997 y. (in Russian)
- [MEH02a] Mehdi K, Rigal J.F, Play D. Dynamic behavior of a thin-walled cylindrical workpiece during the turning process, Part 1: Cutting process simulation. *Journal of manufacturing science and engineering*; 2002;
- [MEH02b] Mehdi K, Rigal J.F, Play D. Dynamic behavior of a thin-walled cylindrical workpiece during the turning process, Part 2: Experimental approach and validation. *Journal of manufacturing science and engineering*; 2002;
- [MER65] Merrit H.E. Theory of Self-Excited Machine Tool Chatter. *Trans. ASME. Journal of Engineering for Industry*. 1965. V. 87. P. 447-454.
- [MUM09] Mumtaz A, Vibration Characteristics of Rotating FGM Circular Cylindrical Shells Using Wave Propagation Method. *European Journal of Scientific Research* ISSN 1450-216X Vol.36 No.2 (2009), pp.184-235
- [OZL07] E. Ozlu, E. Budak, Comparison of one-dimensional and multi-dimensional models in stability analysis of turning operations, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 47 (2007) 1875–1883.

- [PAN68] Panovko YA.G., Birger I.A. Strength, Stability, vibrations. Handbook in 3 parts. – M.: Mashinostroyeniye, 1968. – p. 1. – 831 s.; p. 2. – 463 s.; p. 3. – 567 s. (in Russian)
- [SEG10] Seguy S., Insperger T., Arnaud L., Dessein G., Peigne G., On the stability of high-speed milling with spindle speed variation, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2010, 48, 883–895
- [SEG14] Seguy Sébastien, Lionel Arnaud, and Tamás Insperger. “Chatter in Interrupted Turning with Geometrical Defects: An Industrial Case Study.” *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 75, no. 1–4 (October 2014): 45–56. doi:10.1007/s00170-014-6120-0.
- [SEK09] M. Sekar, J. Srinivas, K. Kotaiah, S. Yang, Stability analysis of turning process with tailstock-supported workpiece, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 43 (2009) 862–871.
- [SEL75] M. S. Selvam, “Tool vibrations and its influence on surface roughness in turning”, *Wear*, 35, pp. 149–157, 1975.
- [SID12] Siddhpura M, Paurobally R. A review of chatter vibration research in turning. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*; **2012**;61:27?47.
- [SMI93] Smith S., Tlustý J. Efficient Simulation Programs for Chatter in Milling. *Annals of CIRP*. 1993. V. 42, No 1. P. 463-466.
- [SOR12] Sortino, M., G. Totis, and F. Prosperi. “Development of a Practical Model for Selection of Stable Tooling System Configurations in Internal Turning.” *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 61 (October **2012**): 58–70. doi:10.1016/j.ijmachtools.2012.05.010.
- [SUZ10] N. Suzuki, K.N.E. Shamoto, K. Yoshino, Effect of cross transfer function on chatter stability in plunge cutting, *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing* 4 (2010) 883–891.
- [TAY22] Taylor F. *On the Art of Cutting Metals*, Published by “Bureau of Foreign Science and Technology”. 1922 (in Russian)
- [TLU54] Tlustý, J. and Spacek, L., *Self-excited Vibrations in Machine Tools*. Czech. Nakladatelství CSAV, Prague, 1954.
- [TLU63] Tlustý J., Poláček M. The stability of the machine tools against self-excited vibration in machining // *Proceedings of the International Research in Production Engineering ASME Conference*. Pittsburgh, 1963. P.465-474.

- [TOB58] Tobias S., Fishwick W. Theory of regenerative machine tool chatter. London (UK): The Engineer, 1958. 258 p.
- [TUR11] Turkes E, Orak S, Neseli S, Yaldiz S (2011) Linear analysis of chatter vibration and stability for orthogonal cutting in turning. *Int J Refract Met Hard Mat* 29(2):163–169.
- [URB12] G. Urbikain, L.N. Lopez de Lacalle, F.J. Campa, A. Fernandez, A. Elias, Stability prediction in straight turning of a flexible workpiece by collocation method, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 54–55 (2012) 73–81.
- [URB14] Urbikain, G., L.N. López de Lacalle, and A. Fernández. “Regenerative Vibration Avoidance due to Tool Tangential Dynamics in Interrupted Turning Operations.” *Journal of Sound and Vibration* 333, no. 17 (August 2014): 3996–4006. doi:10.1016/j.jsv.2014.03.028.
- [URB15] Urbikain, G., D. Olvera, L. N. López de Lacalle, and A. Elías-Zúñiga. “Stability and Vibrational Behaviour in Turning Processes with Low Rotational Speeds.” *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 80, no. 5–8 (September 2015): 871–85. doi:10.1007/s00170-015-7041-2.
- [VAN06] Van Hook, T, Real-time shaded nc milling display, in: SIGGRAPH’86, pp. 15–20, 2006.
- [VEL08] L. Vela-Martinez, J.C. Jauregui-Correa, E. Rubio-Cerda, G. Herrera-Ruiz, A. Lozano-Guzman, Analysis of compliance between the cutting tool and the workpiece on the stability of a turning process, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 48 (2008) 1054–1062.
- [WAN02a] Wang, X., and C. X. Feng. «Development of Empirical Models for Surface Roughness Prediction in Finish Turning». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 20, 5 (2002): 348–56. doi:10.1007/s001700200162.
- [WAN02b] Z.C. Wang, W.L. Cleghorn, Stability analysis of spinning stepped-shaft workpieces in a turning process, *Journal of Sound and Vibration* 250 (2002) 356– 367.
- [YIM98] Yim, J. S., D. S. Sohn, and Y. S. Lee. “Free Vibration of Clamped–free Circular Cylindrical Shell with a Plate Attached at an Arbitrary Axial Position.” *Journal of Sound and Vibration* 213, no. 1 (1998): 75–88.
- [ZHA01] Zhang X.M, Liu G.R, Vibration Analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach. *Journal of Sound and Vibration*, 2001 y, 239(3), 397-403.

Annexe

Annexe A

	A_p (mm)	f (mm / tr)	P_x (N)	P_y (N)	P_z (N)		A_p (mm)	f (mm / tr)	P_x (N)	P_y (N)	P_z (N)
1	0,2	0,05	12,90	70,60	101,40	18	0,8	0,3	121,33	273,65	572,50
2	0,2	0,1	14,57	83,30	121,90	19	0,8	0,6	130,08	387,58	939,30
3	0,2	0,2	14,52	100,10	157,30	20	1	0,05	102,4	178,15	321,40
4	0,2	0,25	13,67	108,30	174,10	21	1	0,1	120,20	217,18	410,98
5	0,2	0,3	12,83	117,50	190,80	22	1	0,2	138,98	284,18	582,43
6	0,2	0,6	0,16	162,60	282,10	23	1	0,25	145,45	305,68	656,20
7	0,4	0,05	35,92	96,58	159,23	24	1	0,3	147,73	311,98	717,35
8	0,4	0,1	39,98	117,70	193,95	25	1,2	0,05	118,40	199,15	390,95
9	0,4	0,2	45,20	141,30	262,05	26	1,2	0,1	137,38	239,95	495,15
10	0,4	0,25	47,10	157,85	297,58	27	1,2	0,2	166,85	319,33	732,48
11	0,4	0,3	48,23	173,00	331,48	28	1,2	0,25	175,03	345,70	821,20
12	0,8	0,05	82,30	153,45	247,15	29	1,5	0,05	148,15	240,10	458,33
13	0,8	0,1	97,13	184,48	318,70	30	1,5	0,1	174,73	293,35	590,85
14	0,8	0,2	111,43	232,75	450,15	31	1,5	0,2	203,58	372,83	829,45
15	0,8	0,25	116,08	254,75	512,40	32	1,5	0,25	215,35	412,63	942,48

Tableau A.1 – Les valeurs moyennes de la force pour la vitesse de la coupe $V_c = 360m / \text{min}$

Annexe B

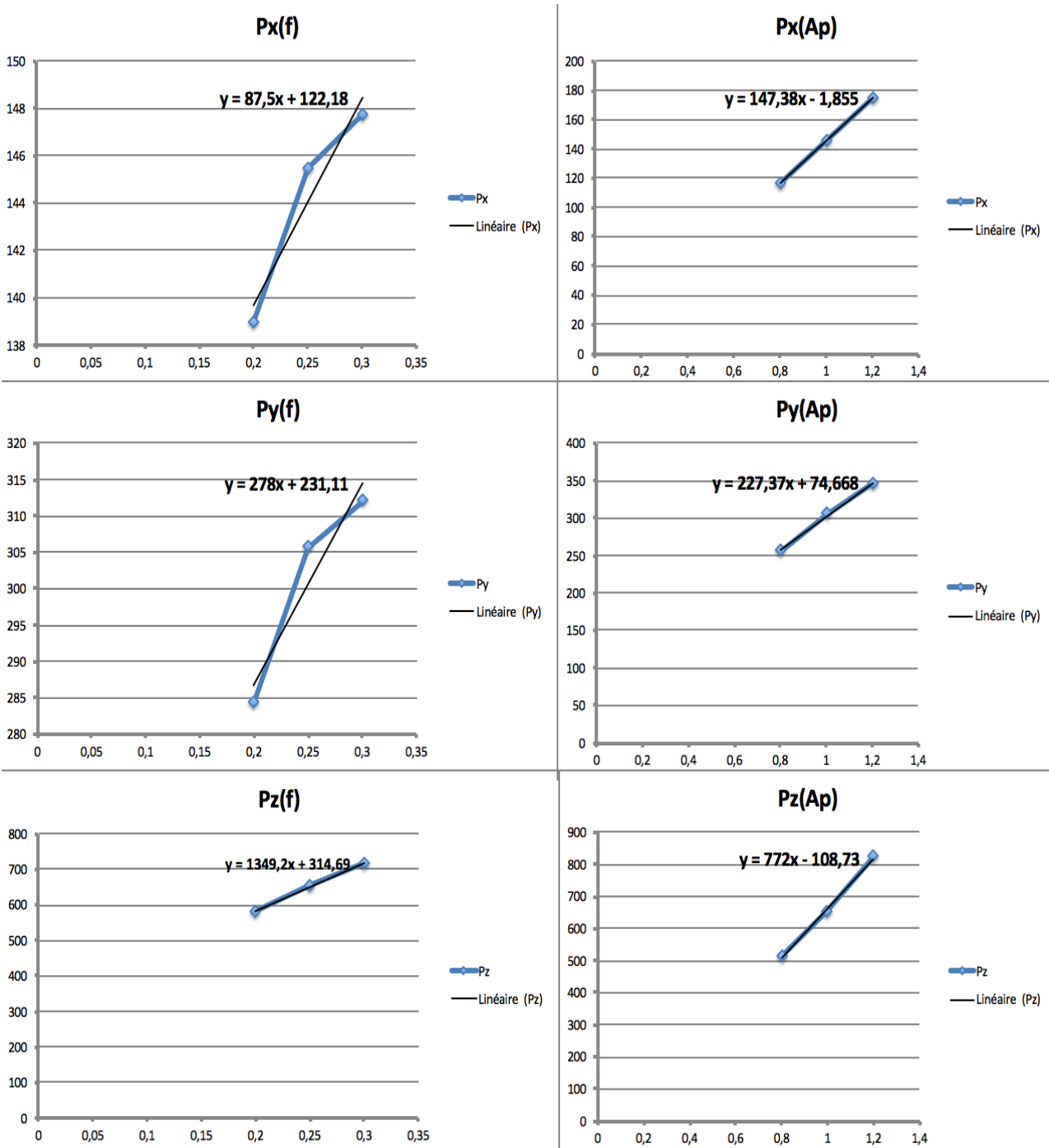


Figure B.1 – Courbes de force de coupe

Annexe C

Nous introduisons les constantes suivantes :

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Après variation de l'équation (3.1), en supposant que les variations $\delta u, \delta v, \delta w$ sont indépendantes, et regroupant les termes identiques en facteur de $\delta u, \delta v, \delta w$, nous obtenons les facteurs suivants:

1) Facteur δu :

$$B \left(-2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \mu \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{B}{R} \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] - B \frac{1-\mu}{2} \left[2 \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \varphi} + 2 \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} \right] = -2\gamma_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2p_1.$$

On regroupe les termes identique et en remplaçant les valeurs B et D :

$$B \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + \mu \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{B}{R} \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] + B \frac{1-\mu}{2} \left[2 \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \varphi} + 2 \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} \right] = 2\gamma_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2p_1,$$

$$2B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2 \frac{B}{R} \mu + \frac{B}{R} - \frac{B}{R} \mu \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + \frac{2B}{R} \mu \frac{\partial w}{\partial x} + B(1-\mu) \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} = 2\gamma_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2p_1,$$

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{B(1+\mu)}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + \frac{B}{R} \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{B(1-\mu)}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \gamma_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p_1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{(1+\mu)}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\gamma_t}{B} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{B} p_1.$$

Enfin, on obtient la première équation du mouvement de la coque :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{(1+\mu)}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_t \frac{1-\mu^2}{Eh} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\mu^2}{Eh} p_1.$$

2) Facteur δv :

$$\begin{aligned} & -B\mu \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{B}{R} \left[-\frac{2\partial^2 v}{R \partial \varphi^2} - \frac{2\partial w}{R \partial \varphi} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} \right] - B \frac{1-\mu}{2} \left[2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{R \partial \varphi \partial x} \right] + D \frac{\mu}{R^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right) - \\ & - \frac{D}{R^2} \left\{ -\frac{2\partial^3 w}{R^2 \partial \varphi^3} + \frac{2\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} - \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right\} + \frac{4D}{R^2} (1-\mu) \left[\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi \partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = -2\gamma_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 v \right) + 2p_2. \end{aligned}$$

Après regrouper les termes identique et remplacer les valeurs B et D par leur valeur :

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{(1-\mu)R}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{h^2}{12} \frac{1}{R} \left((2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \varphi^3} \right) = \\ & = \frac{R\gamma_t}{Eh} (1-\mu^2) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 v \right) - \frac{R}{Eh} (1-\mu^2) p_2. \end{aligned}$$

Enfin, on obtient la deuxième équation du mouvement de la coque :

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\mu)}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{h^2}{12} \frac{1}{R^2} \left((2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \varphi^3} \right) = \\ & = \frac{\gamma_t}{Eh} (1-\mu^2) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 v \right) - \frac{(1-\mu^2)}{Eh} p_2. \end{aligned}$$

3). Facteur δw :

$$\begin{aligned} & B\mu \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2B}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + 2 \frac{B}{R^2} w + \mu \frac{B}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + D \left\{ 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\mu}{R^2} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial x^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial x^2} \right] \right\} - \\ & - \frac{D}{R^2} \left(-\frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} - \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \mu \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} \right) + 4 \frac{D}{R^2} (1-\mu) \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial x^2} - 4 \frac{D}{R^2} (1-\mu) \frac{\partial^3 v}{\partial^2 x \partial \varphi} = \\ & = -2\gamma_t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 w - 2R\Omega^2 \right) + 2p_3. \end{aligned}$$

Après regrouper les termes identique et remplacer B et D par leur valeur :

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} w + \frac{h^2}{12} \left(R \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{R} 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial x^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) - \frac{h^2}{12} \left(\frac{(2-\mu)}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \right) = \\ & = -R\gamma_t \frac{1-\mu^2}{Eh} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 w - 2R\Omega^2 \right) + \frac{1-\mu^2}{Eh} R p_3. \end{aligned}$$

Enfin, on obtient la troisième équation du mouvement de la coque :

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2} w + \frac{h^2}{12R^2} \left(R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) - \frac{h^2}{12R^2} \left((2-\mu) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \right) = \\ & = -\gamma_t \frac{1-\mu^2}{Eh} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 w - 2R\Omega^2 \right) + \frac{1-\mu^2}{Eh} p_3. \end{aligned}$$

Etude analytique et expérimentale de l'usinage d'un tube mince

RESUME :

Ce travail de thèse se concentre sur l'étude du comportement dynamique des tubes minces durant leur usinage par tournage et notamment sur la survenue du broutement régénératif. L'étude de l'usinage de ce type de pièce est pertinente car ces pièces font l'objet d'une large diffusion dans divers domaines industriels tels que la construction aéronautique (notamment moteurs), la construction navale, la production de fusées. Ces pièces ayant une faible rigidité, il est fréquent que des vibrations indésirables se produisent en cours d'usinage. Il est donc intéressant d'être à même de les prédire pour les éviter.

L'approche proposée vise à permettre un choix rapide et efficace des conditions de coupe, et notamment des profondeurs de passe, pour cette opération d'usinage. Pour cela nous proposons de mettre en place un modèle mécanique analytique du tube (modèle de coque mince utilisant un nombre réduit de degrés de liberté) de manière à réduire les coûts numériques et à faciliter l'analyse du phénomène. L'impact de la taille du modèle sur les résultats est étudié (nombre de formes propres) ainsi que de la prise en compte de l'enlèvement de matière (évolution du comportement dynamique) et du déplacement de l'outil. Afin de valider l'approche une expérience a été mise en place et est également présentée dans ce mémoire.

Mots clés : Usinage, tournage, pièces cylindriques à paroi mince, auto-excitation, broutement régénératif, stabilité, auto-oscillations, modèle analytique

Analytical and experimental study of the machining of a thin tube

ABSTRACT :

This work focuses on the study of the dynamic behavior of thin tubes during their machining by turning and gives particular emphasis on the occurrence of regenerative chatter. The study of machining of this type of workpiece is relevant because they are widely used in various industrial fields such as aircraft construction (including engines), shipbuilding, rocket production. As these parts have low rigidity, it is common that undesirable vibrations occur during machining. It is therefore of interest to be able to predict them in order to avoid them.

The proposed approach is designed to enable a fast and efficient selection of cutting conditions, including cutting depths for this machining operation. We thus propose to elaborate an analytical model for the dynamics of the tube (thin shell based model using a reduced number of degrees of freedom) to reduce the numerical costs and to facilitate the analysis of the phenomenon. The impact of the size of the model on the results is studied (number of shape functions), as well as the impact of material removal (evolution of the dynamic behavior) and of the motion of the tool. An experiment, presented in this thesis, was also set up in order to validate the approach.

Keywords : Machining, turning, cylindrical thin-walled parts, self-excitation, regenerative chatter, stability, self-oscillations, analytical model